МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Б. І. Приймак

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Островерхов М. Я.*, док. техн. наук, проф., завідувач кафедри теоретичної електротехніки факультету електроенерготехніки та автоматики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Толочко О. І.*, док. техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 10 від 20.06.2022 р.)

В посібнику розглянуто основи теорії лінійних неперервних систем автоматичного керування. Висвітлено питання математичного опису ланок і систем в часовій та частотній областях, методи дослідження стійкості, способи оцінювання та поліпшення якості керування. Викладено метод простору стану, поняття керованості та спостережуваності, канонічні форми моделей динамічних систем та правила структурних перетворень. Розглянуто метод синтезу автоматичних систем керування з модальним регулятором стану. Наведено приклади розв'язання задач із використанням програмного пакету MATLAB.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». Книга може бути корисною також для студентів, аспірантів та фахівців інших спеціальностей.

Реєстр. № НП 21/22-712. Обсяг 12,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ. 7
ВСТУП. 8
ГЛАВА 1. СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. ЇХ БУДОВА, ПРИНЦИП РОБОТИ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ... 10
1.1. Загальні поняття і терміни 10
1.2. Короткі історичні відомості. Наука кібернетика…. 13
1.2.1 Коротка історія розвитку автоматики 13
1.2.2 Загальні відомості про кібернетику. 16
1.3. Системи автоматичного керування. Їх види 17
1.3.1 Система автоматичного керування та її елементи. 17
1.3.2 САК зі зворотним зв'язком. Функціональна схема. 19
1.3.3 Принципи автоматичного керування. Комбіноване керування. 21
1.3.4. Основні види САК. 23
1.4. Математичні моделі динамічних систем 26
1.4.1. Моделі на основі диференційних рівнянь 26
1.4.2. Опис систем за допомогою передатних функцій 28
1.4.3. Операторна форма запису диференційних рівнянь 31
1.4.4. Приклади отримання моделей динамічних систем 33
1.5. Структурні схеми САК та їх перетворення 36
1.5.1. Правила перетворення структурних схем 37
1.5.2. Приклади спрощення структурних схем 41
1.5.3. Передатні функції САК за зовнішніми діями 44
1.6. Форми запису передатних функцій 46
1.6.1. Поліномна форма запису 47
1.6.2. Форма запису у вигляді добутку простих множників 47
1.6.3. Форма запису у вигляді суми простих дробів 49
1.7. Основні особливості та задачі ТАК... 52
1.7.1. Статика і динаміка САК.. 52
1.7.2. Форми запису рівнянь динаміки.. 54
1.8. Лінеаризація математичних моделей в ТАК. Приклади 56
1.8.1. Графоаналітична лінеаризація.. 56
1.8.2. Аналітичний метод лінеаризації.. 57
Контрольні запитання та завдання… 61
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ 65
2.1. Типові ланки САК, їх опис та часові характеристики. 65
2.1.1. Особливості рівнянь динаміки ланок САК.. 65

2.1.2. Типові ланки, їх опис і динамічні властивості.............. 67
2.2. Частотні характеристики САК.. 86
2.2.1. Амплітудно-фазові частотні характеристики................. 86
2.2.2. Експериментальний метод побудови АФХ.. 89
2.2.3. Логарифмічні частотні характеристики.. 90
2.3. Частотні та логарифмічні частотні характеристики типових ланок САК.. 94
2.4. Частотні характеристики груп ланок. Особливості немінімально-фазових ланок 106
2.4.1. Частотні характеристики різних з'єднань ланок........... 106
2.4.2. Побудова логарифмічних характеристик групи ланок..109
2.4.3. Мінімально-фазові та немінімально-фазові ланки........ 112
2.5. Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ стабілізаційних, програмних і стежних систем 116
2.5.1. Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ програмних і стежних систем 116
2.5.2. Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ систем стабілізації 120
Контрольні запитання та завдання…........................... 121
ГЛАВА 3. СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.. 126
3.1. Поняття стійкості САК.. 126
3.1.1. Загальне поняття стійкості системи.............................. 126
3.1.2. Теореми Ляпунова 128
3.2. Дослідження та аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння.. 130
3.2.1. Аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння.. 131
3.2.2. Межа та запас стійкості.. 133
3.3. Алгебричні критерії стійкості.. 136
3.3.1. Критерій стійкості Рауса-Гурвіца. 137
3.3.2. Критерій стійкості Льєнара-Шіпара 140
3.3.3. Загальна методика дослідження впливу параметрів на стійкість системи за алгебричними критеріями..................... 140
3.3.4. Приклади дослідження стійкості САК за допомогою алгебричних критеріїв 142
3.4. Частотний критерій стійкості Найквіста.. 145
3.4.1. Особливості критерію Найквіста. 145
3.4.2. Доведення критерію Найквіста 145

3.4.3. Визначення запасу стійкості за критерієм Найквіста ... 154
3.4.4. Критерій Найквіста у логарифмічній формі................. 155
3.5. Структурно-нестійкі системи.. 161
3.5.1. Особливості структурно-нестійких САК. 161
3.5.2. Способи усунення структурної нестійкості 162
Контрольні запитання та завдання..................................... 165
ГЛАВА 4. ЯКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. ОЦІНЮВАННЯ ТА ПОЛІПШЕННЯ ЯКОСТІ........................ 169
4.1. Показники якості функціонування САК.. 169
4.2. Аналізу якості шляхом розв'язання рівняння динаміки замкнутої системи.. 174
4.3. Наближені методи аналізу якості САК. Кореневі методи... 180
4.3.1. Дослідження якості за розташуванням коренів. 180
4.3.2. Аналіз якості САК за діаграмами зон параметрів......... 183
4.4. Метод кореневого годографа. Інтегральні та частотні методи дослідження якості.. 186
4.4.1. Метод кореневого годографа. 186
4.4.2. Інтегральні методи оцінювання якості. 189
4.4.3. Аналіз якості САК у частотній області. 190
4.5. Типові режими роботи та помилки систем автоматичного керування.. 195
4.5.1. Типові режими роботи автоматичних систем. 195
4.5.2. Статичні та динамічні помилки САК. 196
4.5.3. Знаходження статичних помилок систем. 199
4.5.4. Точність САК у статичних режимах роботи. 202
4.5.5. Аналіз якості САК методом коефіцієнтів помилок 205
4.6. Поліпшення показників якості САК.................................. 208
4.6.1. Основні шляхи підвищення точності САК.................... 208
4.6.2. Покращення якості шляхом замикання САК. 209
4.6.3. Базові закони керування і регулятори. 212
4.7. Удосконалені закони керування та регулятори... 222
4.8. Точність САК в усталених динамічних режимах роботи.... 223
4.8.1. Режим зміни зовнішньої дії з постійною швидкістю.... 223
4.8.2. Режим зміни зовнішньої дії з постійним прискоренням... 227
4.8.3. Визначення порядку астатизму замкненої САК за передатними функціями.. 231
4.9. Синтез САК методом логарифмічних амплітудно-частотних характеристик.. 235
4.9.1. Принципи побудови бажаної ЛАХ … 236

4.9.2. Спрощена побудова бажаної ЛАХ 237
4.9.3 Синтез послідовної коригувальної ланки. Приклад ….. 239
4.9.4. Синтез паралельної коригувальної ланки …................. 243
Контрольні запитання та завдання…................................. 245
ГЛАВА 5. МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ В ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.................. 249
5.1. Метод змінних стану. Опис САК у просторі стану.. 249
5.1.1. Загальне поняття про метод змінних стану…................ 249
5.1.2. Рівняння стану динамічних систем.................................. 251
5.2. Перехід від передатних функцій до рівнянь стану та навпаки….. 254
5.2.1. Отримання рівнянь стану за передатними функціями та структурними схемами. 254
5.2.2. Отримання передатних функції за рівняннями стану... 260
5.3. Керованість та спостережуваність САК. Канонічні форми рівнянь стану.. 265
5.3.1. Керованість та спостережуваність лінійних систем.. ... 265
5.3.2. Перетворення подібності і канонічні форми рівнянь стану. 267
5.4. Розв'язання рівнянь стану. Структурні перетворення моделей САК.. 273
5.4.1. Методи розв'язання рівнянь стану 273
5.4.2. Структурні перетворення моделей САК у просторі стану… 278
5.5. Синтез модальних САК... 280
5.5.1. Принцип модального керування…. 280
5.5.2. Формула Акермана… 283
5.5.3. Стандартні характеристичні поліноми замкнутих систем 285
5.6. Приклад синтезу модальної системи керування..…........... 288
Контрольні запитання та завдання…................................. 296
ДОДАТОК А Таблиця перетворень Лапласа............................ 299
ДОДАТОК Б Логарифмічні амплітудні та фазові частотні характеристики елементарних співмножників передатних функцій............ 300
ДОДАТОК В Стандартні характеристичні поліноми 302
ДОДАТОК Г Функції Control System Toolbox в MATLAB 304
ДОДАТОК Д Словник основних українських і англійських термінів...... 305
Список використаної та рекомендованої літератури 306
Предметний покажчик 308

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АСУ – автоматизована система управління;

АФХ – амплітудно-фазова частотна характеристика;

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика;

ДЧХ – дійсна частотна характеристика;

ЛАХ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика;

ЛФХ – логарифмічна фазочастотна характеристика;

МЕМ – модальна еталонна модель;

ПФ – передатна функція;

РС – регулятор стану;

САК – система автоматичного керування;

САР – система автоматичного регулювання;

СНС – самоналаштовна система;

ОК – об’єкт керування;

ТАК – теорія автоматичного керування;

УЧХ – уявна частотна характеристика;

ФЧХ – фазочастотна характеристика.

ВСТУП

Теорія автоматичного керування (ТАК), як частина загальної науки про керування – кібернетики, є наукою про принципи і методи побудови, розрахунку та дослідження систем автоматичного керування (САК). Навчальна дисципліна «Теорія автоматичного керування» належить до основних дисциплін в процесі підготовки бакалаврів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність».

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні мати необхідні теоретичні знання і практичний досвід для проектування САК, уміти складати функціональні та структурні схеми, отримувати рівняння динаміки, передатні функції, рівняння стану, виконувати аналіз та синтез автоматичних систем.

На кафедрі автоматизації електромеханічних систем та електроприводу (АЕМС-ЕП) КПІ ім. Ігоря Сікорського у 1997 р. був виданий, а в 2007 р. – перевиданий підручник з грифом Міністерства освіти та науки [1]. Він успішно використовується студентами для вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування», проте з плином часу виникла потреба його оновлення. Тому на кафедрі АЕМС-ЕП був підготовлений цей навчальний посібник, який охоплює базовий клас систем – лінійні неперервні стаціонарні САК. В ньому істотно модернізовано частину, що відноситься до традиційної або класичної ТАК, а також систематично викладено метод простору стану, на якому ґрунтується сучасна ТАК. Як відомо, опис у просторі стану потрібен для вивчення нелінійних, адаптивних, оптимальних, інтелектуальних та інших класів САК. Для низки прикладів у посібнику складені програми в середовищі програмного пакету MATLAB, який в наш час широко використовується у навчальних дисциплінах провідних університетів світу. Ці програми будуть корисні студентам у процесі виконання практичних завдань і написання курсової роботи.

При підготовці книги малося на увазі, що її читачі знайомі з основами теорії диференційних рівнянь та лінійної алгебри в обсягах типових навчальних програм технічних університетів.

Навчальний посібник складається із п'яти глав. У *першій главі* розглянуті склад та види САК, зворотні зв'язки та принципи керування. Наведено математичні моделі об'єктів, що описуються диференційними рівняннями та передатними функціями. Викладено правила перетворення структурних схем САК та методи лінеаризації моделей. *Друга глава* присвячена математичному опису лінійних неперервних систем. Тут розглянуто типові ланки САК, їх опис і характеристики в часовій та частотній областях. У *третій главі* вивчається тема стійкості лінійних неперервних САК. Наведено аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння, алгебричний критерій Гурвіца, частотний критерій Найквіста у звичайній та логарифмічній формах. *Четверта глава* присвячена оцінюванню та поліпшенню якості САК. Розглянуто показники якості керування, точні та наближені методи їх оцінювання. Наведені основні шляхи поліпшення якості САК, типові закони керування та регулятори, синтез лінійних систем методом логарифмічних амплітудних характеристик. У *п'ятій главі* викладено основи методу змінних стану в лінійних неперервних САК, способи отримання рівнянь стану за передатними функціями та структурними схемами. Розглянуто перетворення подібності та канонічні форми рівнянь стану. Викладено метод синтезу модальних САК. У кінці кожної глави наведено запитання та завдання для самоконтролю студентів.

Для зручності розв'язування практичних задач у Додатку А наведена таблиця перетворень Лапласа, у Додатку Б – логарифмічні частотні характеристики співмножників передатних функцій, у Додатку В – стандартні характеристичні поліноми, у Додатку Г – функції *Control System Toolbox* в MATLAB, а в Додатку Д – словник українських і англійських термінів.

На думку автора, книга може бути не позбавлена певних недоліків. Тому усі поради та критичні зауваження до неї будуть прийняті з вдячністю.

ГЛАВА 1 СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. ЇХ БУДОВА, ПРИНЦИП РОБОТИ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

1.1 Загальні поняття і терміни

Одним з основних в теорії автоматичного керування є поняття автоматизації, під якою розуміють здійснення процесів або окремих операцій без прямої участі (або з обмеженою участю) людини. У першому випадку процес називають ***автоматичним***, а в другому – ***автоматизованим***. Наведені терміни мають спільний корінь "авто", який походить від давньогрецького слова "аутос" і означає "сам" чи "самостійний". Переклад з грецької мови слова αὐτόματος означає "самодійний".

В даний час під ***автоматикою*** розуміють галузь науки і техніки, яка займається розробкою теоретичних методів і технічних засобів (елементів та систем), що забезпечують вирішення завдань дослідження, виготовлення та експлуатації машин, установок і технологічних комплексів, працюючих без або з обмеженою участю людини.

Автоматизований (автоматичний) процес може бути порівняно простим, наприклад, підтримка постійного рівня рідини в деякій ємності, або порівняно складним – забезпечення необхідного курсу і режиму польоту літака за допомогою автопілоту чи плавного приземлення у заданому місці розгінного ступеня космічної ракети тощо. При автоматизованому (напівавтоматичному) режимі роботи деякої установки (механізму, машини), яку в загальному випадку називають ***об'єктом автоматизації***, роль людини зазвичай зводиться до вмикання та (або) вимикання об'єкта, а інколи до ручного виконання окремих операцій.

За допомогою автоматизації можна досягти такі важливі позитивні результати:

- ✓ підвищення продуктивності та полегшення умов праці людини;

- ✓ забезпечення можливості виконання робіт у важкодоступних або взагалі недоступних для людини середовищах (радіоактивні зони, космос, деякі види гірничих та металургійних робіт тощо);
- ✓ поліпшення точності та якості технологічних процесів і операцій;
- ✓ зростання надійності і техніко-економічних показників виробництва;
- ✓ підвищення загальної культури виробництва та кваліфікації обслуговуючого персоналу.

Загалом на сучасному етапі розвитку цивілізації автоматизація успішно застосовується для підвищення показників ресурсо- та енергозбереження, поліпшення екології навколишнього середовища, зростання якості та надійності продукції виробництва.

Автоматизація виробництва здійснюється за допомогою автоматичних пристроїв, які можна класифікувати за різними ознаками. Під "пристроєм" розуміють закінчену конструкцію, яка виконує деяке самостійне завдання. Однією з найбільш поширених є система класифікації за функціональним призначенням, згідно з якою розрізняють наступні види автоматичних пристроїв: автоматичного контролю і сигналізації, автоматичного захисту, лічильно-розв’язувальні, блокувальні та автоматичного керування.

Пристрої ***автоматичного контролю і сигналізації***. Такі пристрої забезпечують контроль перебігу технологічних процесів, стану обладнання та приміщень, а також автоматичну подачу оптичних і акустичних сигналів про стан контрольованого об'єкта. Оптична сигналізація застосовується як за нормальних, так і за аварійних режимів. Акустична сигналізація зазвичай вступає в дію при відхиленнях режиму роботи від нормального стану (контроль рівня води у водозбірниках, тиск газів в накопичувальних ємностях, температури в складських приміщеннях і таке інше).

Пристрої ***автоматичного захисту***. Ці пристрої мають призначення забезпечити захист об'єктів при виникненні загрози для обладнання, продукції або задіяних у виробництві людей. Наприклад, електричні захисти за струмом, за напругою, захист від перевищення швидкості на підіймальних установках, електричний захист від замикань на ґрунт, захист газопроводів від надмірного тиску тощо.

Струмовий захист буває ***максимальний*** (захист від коротких замикань або різких перевантажень) і ***тепловий*** (захист від поступового зростання температури електричного приладу до допустимої межі). Захист за ***напругою*** буває ***максимальний*** – при підвищенні напруги до 1,25 від номінального рівня, ***мінімальний*** – при зниженні напруги до 0,65 від номінального рівня і ***нульовий*** – при повному зникненні напруги. Результатом спрацювання захистів за струмом чи напругою є вимикання мережі живлення.

Лічильно-розв'язувальні пристрої виконують самостійно без участі людини складні математичні операції – розрахунки орбіт супутників, траєкторій ракет, розрахунок і вибір найбільш вигідних технологічних режимів роботи, забезпечення експрес-аналізу в металургійному виробництві, розрахунок режимів автоматичних світлофорів на транспорті та ін.

Блокувальні пристрої мають призначення запобігати можливості виконання хибних операцій чи команд обслуговуючого персоналу. Наприклад, пристрої блокування, що усувають можливість зустрічного руху поїздів на одноколійних ділянках дороги, або дуже швидкого реверсування електродвигунів в ланцюгах трифазного струму (де застосовують реле дугового блокування, які створюють витримку часу, достатню для гасіння дуги на силових контактах контакторів).

Пристрої ***автоматичного керування***. Ці пристрої у загальному випадку мають призначення забезпечувати бажані зміни в ході керованих виробничих та технологічних процесів. Вони являють собою найскладніший і найпоширеніший вид пристроїв автоматики.

Теорія побудови та функціонування систем керування на основі останніх із наведених вище видів автоматичних пристроїв викладається у дисципліні ***"Теорія автоматичного керування"*** **(ТАК)**.

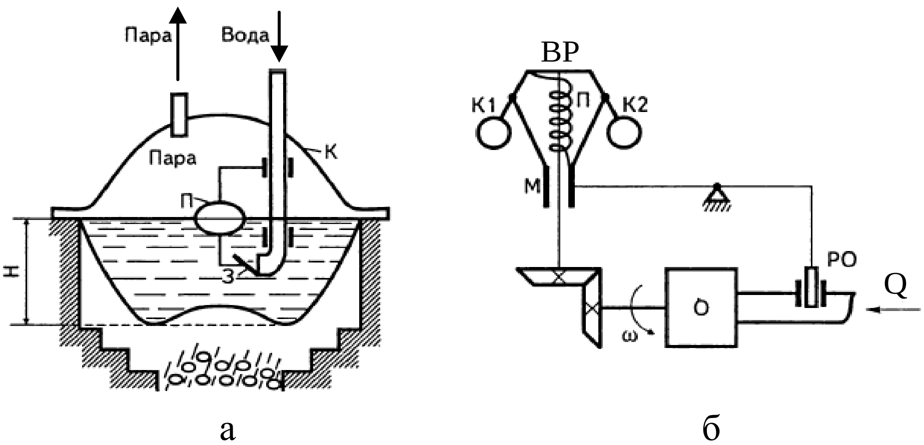
1.2 Короткі історичні відомості. Наука кібернетика

1.2.1 Коротка історія розвитку автоматики

Перші автоматичні пристрої відомі людству ще з часів античних Греції та Єгипту, де різні самостійно діючі пристрої (автомати) застосовувалися жрецями при спорудженні храмів та пірамід. Спільною особливістю відомих механічних автоматів стародавності і середніх віків було те, що вони не чинили будь-якого істотного впливу на розвиток продуктивних сил суспільства. Першим автоматом, що приніс людству велику користь, вважають годинник. Для підвищення точності годинників були запропоновані відповідні ***регулятори*** – поплавковий для водяного годинника і маятниковий (1675 р., нідерландський фізик і математик Х. Гюйгенс) – для механічних годинників.

Інтенсивний розвиток автоматики почався у 18-19 століттях завдяки використанню енергії пари в Європі. Першим промисловим регулятором став поплавковий регулятор, запропонований росіянином І. Ползуновим у 1765 р. для парового котла. На цьому ж принципі відхилення регульованої величини від заданого значення в 1784 р. англійським механіком Дж. Ваттом був побудований відцентровий регулятор швидкості парової машини.

Спрощену схему парового котла з поплавковим регулятором рівня води наведено на рис. 1.1,а. За підвищення витрат пари рівень води H знижувався,



а б

Рис. 1.1. Схема парового котла з регулятором рівня води Ползунова (а) та парової машини з регулятором швидкості Ватта (б) поплавок *П* опускався і діяв на замикач *З*, збільшуючи надходження води у котел *К*. При зниженні витрат пари надходження води в котел відповідно зменшувалося.

На рис. 1.1,б схематично зображена парова машина з відцентровим регулятором швидкості Ватта. Відцентровий регулятор *ВР* складається з муфти *М*, пружини *П* та двох масивних кульок *К1, К2*. Задачею *ВР* є підтримування на заданому рівні швидкості обертання ω об'єкта *О* (парова машина), діючи на робочий орган *РО*, який змінює кількість поступаючого на об'єкт енергоносія *Q*. Якщо ω зростає, то кульки *К1, К2* під дією відцентрової сили рухаються угору, що призводить до переміщення *М* та *РО*. Як наслідок, надходження енергоносія *Q* зменшується і швидкість об'єкта ω падає. Коли ω зменшується, то *ВР* протидіє цьому, відповідно збільшуючи надходження енергоносія на об'єкт.

До засновників теорії автоматичного регулювання належить професор Петербурзького Практичного технологічного інституту І.А. Вишнеградського, що опублікував у 1876 р. і в 1878 р. дві класичні роботи "Про загальну теорію регуляторів" і "Про регулятори прямої дії", де вперше регулятор і робоча машина розглядалися як єдина динамічна система. Його роботи отримали подальший розвиток у працях словацького вченого А. Стодоли, австрійського математика А. Гурвіца. Приблизно в той же час в Англії питання теорії автоматичного регулювання розроблялися в роботі Дж. Максвела та математика Е. Рауса. Російський вчений А.М. Ляпунов в 1892 р. в роботі "Загальна задача про стійкість руху" заклав основи теорії стійкості нелінійних динамічних систем.

У 20-му сторіччі енергія пари дедалі більше замінюється електричною енергією і питанням автоматизації різного роду електроустановок приділяється все більше уваги. В цей період створюються автоматичні електростанції, автоматизуються окремі виробничі ділянки, цехи і цілі підприємства (наприклад, цементні заводи та ін.). Ставляться і вирішуються завдання комплексної автоматизації деяких виробничих процесів і виробництв.

Відповідно до потреб промисловості подальше піднесення отримує і теорія автоматичного керування. У її розвиток свій внесок внесли багато вчених різних країн світу.

Так, у 30-ті роки з'являються нові, більш досконалі частотні методи дослідження, основним засновником яких вважають американського вченого Г. Найквіста. У 1946 р. Г. Боде ввів у практику логарифмічні частотні характеристики. Істотний внесок в теорію стійкості нелінійних систем зробив румунський вчений В.-М. Пóпов (1959 р.).

Американець Е. Джурі та росіянин Я.З. Ципкін розробили основи теорії імпульсних систем. Російські учені Л.С. Понтрягін, А.М. Льотов, Н.Н. Красовський та американський вчений Р. Беллман були провідними у розробці теорії оптимального керування.

Надзвичайно важливою подією було оприлюднення у 1948 і 1952 рр. американським вченим Норбертом Вінером двох робіт, які стали основою нового наукового напрямку – кібернетики – науки про керування та зв'язок в технічних, біологічних системах та їх об'єднаннях.

Вагомий внесок у розвиток теорії автоматичного керування та кібернетики внесли українські вчені В.М. Глушков, О.Г. Івахненко, О.І. Кухтенко та інші. Були розроблені новітні автоматизовані людино-машинні системи, що одержали назву "Автоматизовані системи керування (управління)" – АСУ. На сьогодні існують три великі класи АСУ: "Автоматизовані системи управління підприємством" – АСУП; "Автоматизовані системи управління технологічними процесами" – АСУ ТП; "Системи автоматизованого проектування" – САПР.

Теорія автоматичного керування продовжує інтенсивно розвиватися, відповідаючи на все нові вимоги технічного прогресу. Серед сучасних напрямів – теорія робототехнічних систем, гнучких виробництв, багатовимірних екстремальних систем, інтелектуальних систем та ін.

1.2.2 Загальні відомості про кібернетику

Термін "***кібернетика***" походить від давньогрецького слова κυβερνήτης, що перекладається як "керманич" або "стерновий". Слово "кібернетика" вперше вжив як термін для управління в загальному розумінні давньогрецький філософ Платон. У 1843 р. французький фізик А.-М. Ампер, проводячи класифікацію існуючих на той час і можливих у майбутньому нових наукових напрямів, запропонував називати кібернетикою науку про загальні закони керування.

Загалом під ***керуванням*** розуміють дії, що вносять бажані зміни в деякий процес (цілеспрямовані дії) і ґрунтуються на використанні початкової та робочої інформації. Під ***інформацією*** мають на увазі будь-які відомості, отримані на підставі досвіду в найширшому сенсі (історичного, технічного, експериментального та ін.)

Розрізняють ***початкову (апріорну) інформацію***, яка є до початку роботи пристрою (об'єкта) і ***робочу (апостеріорну) інформацію***, що отримується в процесі функціонування об'єкта. У першій роботі Вінера (1948 р.) – "Кібернетика або управління і зв'язок у тварині і машині", кібернетика розглядалася як наука про керування і зв'язок в технічних і біологічних системах. Надалі Вінер запропонував поширити її на будь-які системи, включаючи соціальні.

В даний час ***кібернетику*** ***визначають як науку про керування і зв'язок в організованих системах, під якими мають на увазі машини, живі організми та їх об'єднання (людино-машинні системи)***. При цьому керування розглядається як процес перетворення інформації. Інформація про об'єкт керування сприймається керувальним пристроєм, переробляється відповідно з поставленою метою керування та у вигляді визначених сигналів (команд) надходить до об'єкта. Отже, основними особливостями кібернетики є:

- керування здійснюється за неповної початкової інформації. Тобто початкова інформація недостатня для того, щоб вирішити поставлене завдання в повному обсязі на весь термін експлуатації системи. Для її вирішення необхідний аналіз поточної робочої інформації та формування відповідних команд керування;

- для отримання необхідної команди керування зазвичай доводиться вирішувати логічне завдання з вибору або формування найбільш вигідного в даних умовах оптимального рішення;
- керування може відбуватися в системах з багатьма об'єктами (великі системи), що мають часто суперечливі інтереси, в умовах випадкового характеру зміни властивостей і характеристик системи. Відповідно до цього іноді кібернетику визначають як науку про оптимальне керування складними динамічними системами.

Принципи кібернетики, як загальної науки про керування в найрізноманітніших умовах, лежать в основі сучасних понять теорії автоматичного керування.

1.3 Системи автоматичного керування. Їх види

1.3.1 Система автоматичного керування та її елементи

Предметом дослідження дисципліни ТАК є ***системи автоматичного керування* (САК)**. САК має таке означення: ***система автоматичного керування – це сукупність об'єкта керування (виробничий механізм, робочий орган тощо) та з'єднаних певним чином інших елементів, які, взаємодіючи один з одним, виконують спільне завдання керування об'єктом.***

До основних елементів САК належать об'єкт керування, вимірювальний елемент, керуючий елемент, виконуючий елемент або орган.

Вимірювальний елемент вимірює вихідну (керовану) величину об'єкта і, в більшості випадків, здійснює її перетворення на величину іншого роду. У деяких видах САК за допомогою вимірювальних елементів також здійснюється вимірювання зовнішніх дій на об'єкт, які називаються ***збуреннями***.

Як вимірювальні елементи САК часто використовуються давачі (датчики) – пристрої, що перетворюють неелектричні величини (температура, тиск, швидкість, положення, зусилля тощо) в електричні (опір активний, індуктивний або ємнісний, напруга, струм, частота, фаза та ін.). Наприклад, тахогенератор – давач, що перетворює швидкість обертання в електричну напругу. В техніці широко застосовуються давачі напруги, струму, тиску, температури, положення, швидкості, крутного моменту тощо.

Керуючий елемент отримує завдання для системи та інформацію від вимірювального елементу і формує відповідний сигнал для виконуючого елементу. В разі потреби він виконує і функції підсилювача. Основними видами підсилювачів є електронні операційні підсилювачі та електронні силові підсилювачі на основі напівпровідникових приладів. Серед неелектричних найбільше застосування знаходять пневматичні та гідравлічні підсилювачі.

Виконуючий елемент, впливаючи відповідним чином на об'єкт керування, забезпечує необхідні зміни режиму його роботи. У залежності від технологічних особливостей об'єкта керування, виконуючими елементами САК можуть бути різного роду допоміжні двигуни, що діють на технологічні органи керування самого об'єкта – засувки трубопроводів, які регулюють подачу стисненого повітря, пари, води, рукоятки перемикання швидкостей та ін.

Крім названих вище основних елементів в системах керування можуть застосовуватися також додаткові елементи, які виконують функції проміжних перетворювачів чи підсилювачів.

Позначивши прямокутниками всі елементи САК і розмістивши їх в послідовності дії один на одного та показавши стрілками напрямок цієї дії, матимемо ***функціональну схему*** САК. Якщо на функціональній схемі відобразити характеристики (рівняння, графіки залежностей вихідних параметрів від часу), що показують динамічні властивості елементів системи, то отримаємо ***структурну схему*** САК. Складові елементи вказаних схем САК називають ***ланками***. Слід зазначити, що для зручності математичного описання динамічних властивостей дозволяється об’єднувати декілька фізичних елементів або їх частин в одну ланку структурної схеми.

Нижче покажемо побудову функціональної схеми на прикладі конкретної автоматичної системи.

1.3.2 САК зі зворотним зв'язком. Функціональна схема

Розглянемо задачу побудови САК, для якої об'єктом керування є локомотив вантажного потяга. Призначення системи полягає у підтримуванні швидкості локомотива V постійною на рівні заданої швидкості V^*, тобто

$$V = V^* = \text{const}.$$

Якщо поставлене завдання вирішувати при ручному керуванні, то машиніст локомотива повинен виконати наступні елементарні операції:

– визначити за вимірювальним приладом дійсне значення швидкості об'єкта V;

– встановити значення і знак її відхилення від завдання, тобто встановити значення помилки

$$\Delta V = V^* - V;$$

– залежно від значення і знаку ΔV вплинути на органи керування швидкістю локомотива в напрямі зменшення $|\Delta V|$;

– визначити нове значення V'.

Якщо $V' = V^*$ то на цьому процес керування закінчується, а коли $V' \neq V^*$, то цикл керування повторюється.

При вирішенні завдання керування за допомогою автоматичної системи окремі операції мають виконувати її окремі складники: вимірювальний елемент – ВЕ, керуючий елемент – КЕ, виконуючий елемент – Вик. Е. Позначимо локомотив (об'єкт керування) буквою О, а прикладені до нього зовнішні дії (збурення) – $f_1(t), ..., f_3(t)$, і побудуємо функціональну схему САК швидкістю локомотива (рис. 1.2,а). На цій схемі керуючий елемент має два складники – вузол порівняння ВП та підсилювач П. Вузол порівняння зазвичай

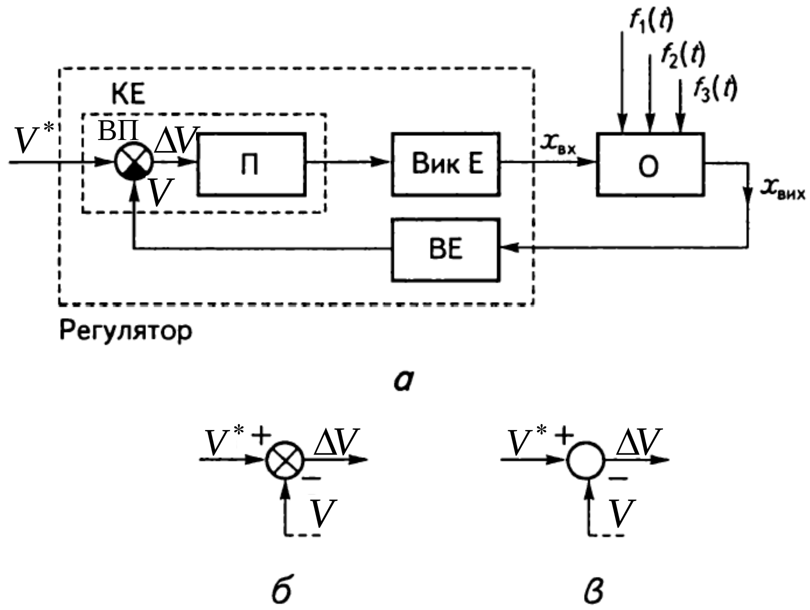


Рис. 1.2. Функціональна схема САК швидкістю локомотива (а) та варіанти графічних зображень суматорів (б, в)

називають ***суматором***, оскільки його вихід являє собою алгебричну суму вхідних величин. На рис. 1.2,б,в наведені ще два варіанти графічного зображення суматора, які застосовуються на практиці. Треба зазначити, що на схемах суматорів знаки «+» можна не вказувати.

Особливістю побудованої САК є наявність ***замкнутого контуру*** по якому вихід об'єкта $x_{вих}$ має можливість впливати на його вхід $x_{вх}$. Замикання системи здійснюється за допомогою так званого ***зворотного зв'язку***. На функціональній схемі зворотному зв'язку відповідає нижня гілка, що з'єднує вихід об'єкта із суматором на вході системи.

<u>Зворотним зв'язком</u> в САК називається такий зв'язок, за допомогою якого на вхід ланки (системи) подається величина, що є функцією вихідної величини цієї ж ланки (системи).

Замкнуті зворотним зв'язком системи виділяють в окремий підклас САК і називають ***системами автоматичного регулювання*** **(САР)**.

У зображеній на рис. 1.2,а, схемі КЕ виконує функцію регулятора. Проте, якщо функціональну схему САК максимально спростити, то її можна подати у вигляді лише двох складників – об'єкта та регулятора (рис. 1.3).

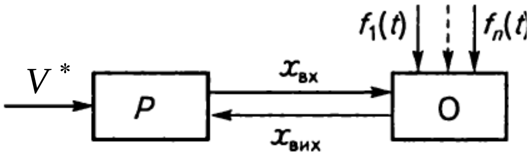


Рис. 1.3. Спрощена функціональна схема САК

Слід пам'ятати наступну важливу особливість введення зворотного зв'язку. Замикання САК треба виконувати таким чином, щоб вихідна величина об'єкта $x_{вих}$, яка змінюється під дією збурень $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$, поступивши на вхід регулятора, призводила до утворення ним такої вхідної величини об'єкта $x_{вх}$, яка протидіє впливу збурень на $x_{вих}$. Такий зворотний зв'язок називають ***від'ємним зворотним зв'язком***.

Застосований вище зворотний зв'язок називають ***головним***, оскільки він охоплює всю систему від виходу до входу. На практиці також широко використовуються ***місцеві зворотні зв'язки***, які охоплюють одну або декілька ланок системи. Місцеві зворотні зв'язки у САК можуть бути від'ємні і додатні, але головний зворотний зв'язок має бути від'ємним щоб забезпечити стійкість системи (тема стійкості САК розглядається у 3-й главі).

1.3.3 Принципи автоматичного керування. Комбіноване керування

На сьогодні відомо два фундаментальних принципи автоматичного керування – принцип керування за збуренням та принцип керування за відхиленням.

Принцип керування за збуренням або ***компенсаційний принцип*** був запропонований французьким інженером Ж. Понселе у другій половині XIX ст. Суть цього принципу полягає у тому, що, залежно від значення збурення $f(t)$, вимірюваного елементом ВЕ, вхідна величина $x_{вх}$ має діяти на об'єкт так, щоб компенсувати вплив збурення на вихідну величину $x_{вих}$. Функціональна схема САК із керуванням за збуренням наведена на рис. 1.4. Особливістю принципу керування за збуренням є використання розімкнутої відносно вихідної величини об'єкта схеми керування.

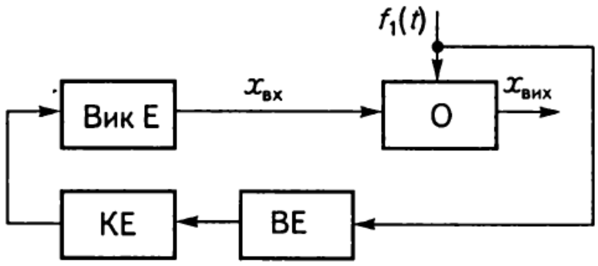


Рис. 1.4. Функціональна схема системи керування за збуренням

У цій схемі немає автоматичного контролю виходу об’єкта $x_{вих}$, а керуюча дія формується лише залежно від зміни збурення.

Перевагами керування за збуренням є відносна простота та надійність САК за наявності одного (основного) збурення, якщо іншими збуреннями можна знехтувати.

Недоліками цього принципу керування є труднощі вимірювання збурень у деяких технологічних об’єктах і досягнення необхідної точності.

Принцип керування за відхиленням (мається на увазі за відхиленням дійсного значення виходу об’єкта від заданого) було запропоновано та реалізовано винахідниками перших регуляторів І. Ползуновим та Дж. Ваттом. Реалізація принципу керування за відхиленням можлива лише в замкнутій САК. Функціональна схема такої системи зображена на рис. 1.5.

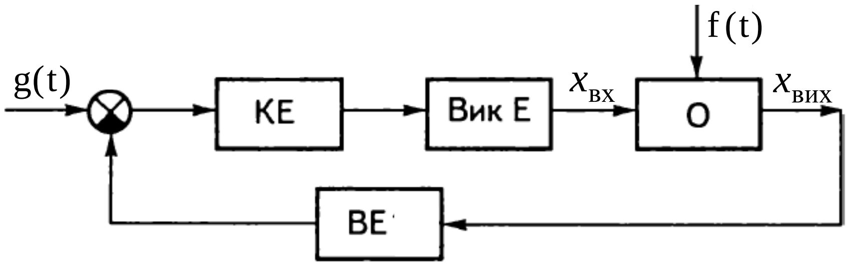


Рис. 1.5. Функціональна схема системи керування за відхиленням

Перевагою принципу керування за відхиленням є те, що САК реагує на відхилення дійсного значення керованої величини від заданого. Це дозволяє враховувати кінцевий результат усіх причин появи відхилення і тому система може мати вищу точність керування.

Недоліком замкнутих систем певною мірою можна вважати те, що методи їх розрахунку, аналізу та налаштування складніші.

Загалом принцип керування за відхиленням застосовується за потреби отримати високі показники точності в статичних і динамічних режимах роботи системи.

Крім розглянутих двох основних принципів керування на практиці використовується також їх поєднання – ***принцип комбінованого керування*** Функціональна схема комбінованої САК наведена на рис. 1.6.

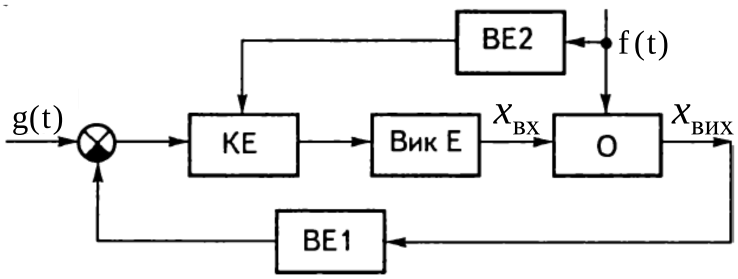


Рис. 1.6. Функціональна схема комбінованої САК

Система має два канали керування. У першому каналі реалізується керування за збуренням $f(t)$ (розімкнутий контур: ВЕ2 – КЕ – Вик. Е – О), а в другому – керування за відхиленням виходу об'єкта $x_{вих}(t)$ від завдання $g(t)$ (замкнутий контур: ВЕ1 – КЕ – Вик. Е – О).

Перевага систем комбінованого керування у тому, що вони дозволяють отримати вищу точність та кращі динамічні характеристики у порівнянні з відповідними САК, побудованих лише на основі принципу керування за відхиленням або за збуренням.

1.3.4 Основні види САК

Системи автоматичного керування можна класифікувати за різними ознаками: за принципами керування; за кількістю контурів та керованих величин; за виглядом статичних та динамічних характеристик та ін. Одним з найбільш поширених принципів класифікації САК є інформативний принцип. Він ґрунтується на особливостях надходження та використання інформації в САК. На рис. 1.7 показана відповідна схема класифікації САК. Коротко зупинимося на особливостях окремих САК.

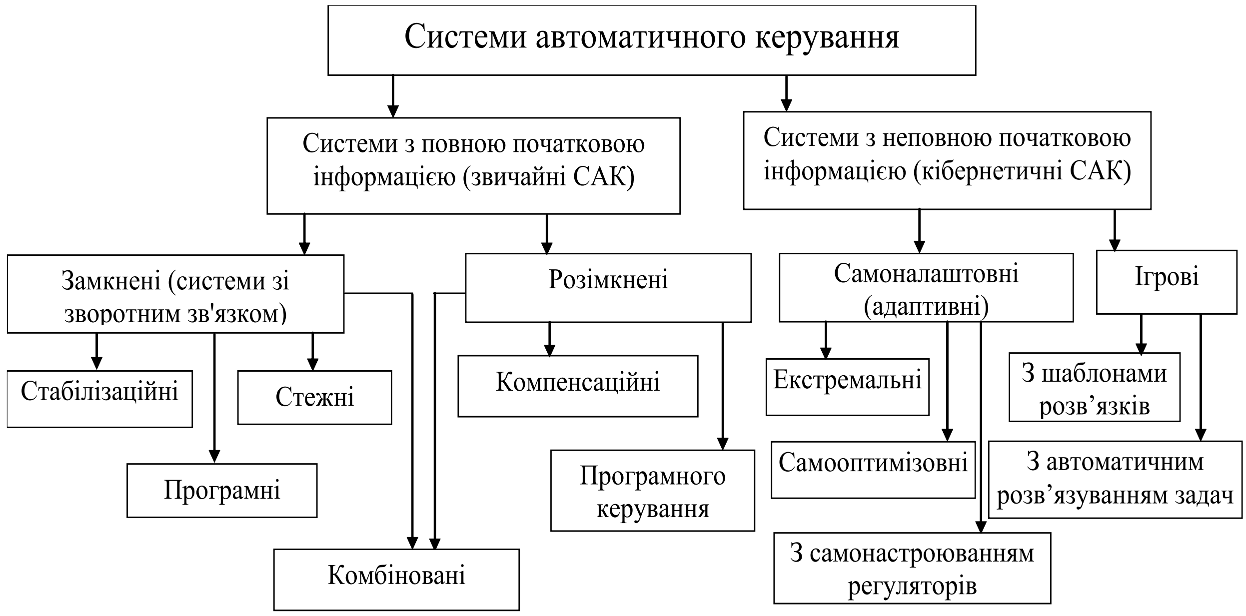


Рис. 1.7. Класифікація САК за інформативним принципом

Системи з повною початковою інформацією. Дані системи іноді називають звичайними САК. Вони володіють достатньою початковою інформацією для вирішення поставленого завдання керування на весь період роботи. Звичайні САК бувають двох видів: розімкнені і замкнені. Замкнені САК або САР – це системи зі зворотним зв'язком, які діють на основі розглянутого вище принципу керування за відхиленням. У залежності від необхідного характеру зміни керованої величини $y(t)$ вони поділяються на три групи.

***Стабілізаційні* САК** мають призначення забезпечити рівність вихідної величини об'єкта постійному завданню $g(t) = \text{const}$

$$y(t) = g(t) = \text{const}. \tag{1.1}$$

Прикладами можуть бути САР потужності, напруги, частоти струму мережі, швидкості руху, тиску, температури та ін.

***Програмні* САК** повинні забезпечити зміну керованої величини за деякою, заздалегідь відомою залежністю (програмою) $g(t) = \text{var}$

$$y(t) = g(t) = \text{var}. \tag{1.2}$$

***Стежні (слідкуючі або слідкувальні)* САК** забезпечують зміну керованої величини за деякою заздалегідь невідомою залежністю $g(t) = \text{var}$

$$y(t) = g(t) = \text{var}.$$

Принципова відмінність між стежними та програмними САК полягає у тому, що в стежних системах необхідний закон зміни керованої величини формується в процесі їх роботи, а в програмних системах цей закон відомий наперед.

Програмні САК використовуються у верстатах з програмним керуванням, у системах програмного гальмування підйомних установок (наприклад, у шахтах) та ін. Характерними прикладами стежних САК можуть бути системи наведення на ціль зенітної артилерії та ракет земля-повітря на об'єкт, що рухається довільним чином.

Розімкнені **САК** діють на основі принципу керування за збуренням і бувають двох видів: компенсаційні та програмного керування.

Компенсаційні **САК** забезпечують формування таких сигналів керування на вході об'єкта, які призначені компенсувати дію на нього відповідного збурення $f(t)$.

Системи програмного керування мають розімкнуту схему і забезпечують зміну режиму роботи об'єкта згідно з наперед заданою програмою. При цьому безпосередній контроль вихідної величини об'єкта відсутній. Робоча інформація може зберігатися в системі у вигляді набору програмних кулачків, дисків, програм на запам'ятовувальних пристроях. Прикладом можуть служити системи програмного керування за допомогою шляхових контактів (поверхових перемикачів) ліфтовими підйомними установками.

Системи комбінованого керування були розглянуті раніше. Вони мають у своєму складі канал зворотного зв'язку за керованою величиною та канал прямого зв'язку за зовнішньою дією – збуренням або завданням.

Системи з неповною початковою інформацією – кібернетичні САК. Системи з неповною початковою інформацією, або кібернетичні системи, для вирішення поставлених завдань потребують додаткову інформацію в процесі роботи, аналіз якої дозволяє сформувати необхідні керуючі дії.

Розрізняють кібернетичні системи самоналаштовні та ігрові.

Самоналаштовні системи **(СНС)**. До класу самоналаштовних або адаптивних САК відносяться екстремальні, самонастроювальні та самооптимізовні системи.

Керуюча дія для об'єкта в СНС формується як результат взаємозалежностей між характеристиками об'єкта, ланок системи та збурення. Якщо у процесі роботи системи деякі із характеристик об'єкта змінюються, це може призвести до небажаної зміни режиму роботи системи та погіршення якості процесів керування. Проте СНС можуть пристосовуватися (адаптуватися) до змін параметрів об'єкта та зовнішніх умов, як детермінованих, так і випадкових, забезпечуючи бажані показники якості керування.

Ігрові системи автоматичного керування. Ці системи бувають двох видів – з шаблонами розв'язків та з автоматичним розв'язуванням задач.

Аналогом принципів побудови та функціонування ігрової системи можна вважати карткові ігри, які об'єднують кількох гравців з різними інтересами. Надходження карт до гравців має випадковий характер, гра відбувається за неповної інформації, а виграти хоче кожен гравець.

1.4. Математичні моделі динамічних систем

1.4.1 Моделі на основі диференційних рівнянь

Поняттю ***математичної моделі*** можна дати таке означення: ***математична модель*** ***деякої фізичної системи – це будь-які математичні співвідношення, що пов'язують вхід (входи) системи з її виходом (виходами)***.

Якщо розглянути елементарну систему у вигляді електричного кола з активним опором R (R-коло), електрична схема якого показана на рис. 1.8,а, то струм $i(t)$ у ньому буде пов'язаний з прикладеною напругою $U(t)$. Математичною моделлю такого кола являється широко відомий закон Ома

$$i(t) = U(t)R^{-1}.$$

Таку модель можна зобразити схемою, що наведена на рис. 1.8,б.

а б

Рис. 1.8. Електрична схема та схема моделі R-кола

Розглянута елементарна модель використовує просте алгебричне співвідношення. Проте опис динамічних систем ґрунтується на диференційних рівняннях. Для прикладу візьмемо систему у вигляді електричного кола з активним опором R та індуктивністю L (RL-коло).

Приклад 1.1. Отримати математичну модель RL-кола, схема якого показана на рис. 1.9.

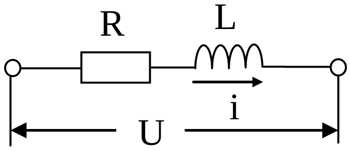


Рис. 1.9. Схема електричного RL-кола

Розв'язання. На основі 2-го закону Кірхгофа рівняння рівноваги напруг в електричному колі запишеться як

$$L\frac{di}{dt} = U - Ri\,.$$

Отже математичною моделлю RL-кола буде диференційне рівняння

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U\,.$$

У цьому посібнику розглядаються ***лінійні неперервні стаціонарні системи*** (*Linear Time-Invariant System*), які описуються лінійними диференційними рівняннями з постійними коефіцієнтами. Означення лінійної системи можна сформулювати так: ***система називається лінійною, якщо у ній виконуються принципи суперпозиції та пропорційності***.

Припустимо, що реакцією системи на вхідну дію $u_1(t)$ є $y_1(t)$, а реакцією на $u_2(t)$ є $y_2(t)$. Якщо в системі виконується принцип суперпозиції, то її реакція на $u_1(t)+u_2(t)$ буде дорівнювати $y_1(t)+y_2(t)$. За виконання принципу пропорційності реакції системи на $au_1(t)$ і $bu_2(t)$ відповідно будуть дорівнювати $ay_1(t)$ і $by_2(t)$, де a, b – довільні константи. Отже в разі виконання обох принципів реакція системи на $au_1(t)+bu_2(t)$ має дорівнювати $ay_1(t)+by_2(t)$.

1.4.2 Опис систем за допомогою передатних функцій

В теорії лінійних диференційних рівнянь широко застосовується метод розв'язання на основі перетворень Лапласа [6]. Для деякої функції часу $x(t)$ можна віднайти зображення $x(s)$ за допомогою прямого перетворення Лапласа

$$L\left[x(t)\right] = x(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt,$$

де $s = \sigma + j\omega$ – комплексна змінна. Використовуючи зворотне перетворення Лапласа, що позначається $L^{-1}\left[\bullet\right]$, за зображенням $x(s)$ відшукується функція-оригінал

$$x(t) = L^{-1}\left[x(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} x(s)e^{st}ds.$$

Для цих дій використовуються таблиці перетворень Лапласа (Додаток А).

Нехай система описується диференційним рівнянням

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0\frac{d^m u}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u, \qquad (m \le n), \quad (1.3)$$

де $a_0,\ldots,a_n;\ b_0,\ldots,b_m$ – постійні коефіцієнти, $u(t)$ – вхідна величина (вхід), а $y(t)$ – вихідна величина (вихід) системи. За цим рівнянням можна отримати необхідну інформацію про властивості САК. Проте для математичного опису систем в ТАК також широко застосовують ***передатні*** або ***передавальні*** чи ***передаточні функції*** (*Transfer Function*). Якщо для системи, що описується рівнянням (1.3), за нульових початкових умов відшукати зображення за Лапласом її вхідної величини $u(s) = L[u(t)]$ та вихідної величини $y(s) = L[y(t)]$, то результат ділення другого зображення на перше буде передатною функцією цієї САК.

Отже сформулюємо означення: ***<u>передатна функція</u> системи – це відношення перетворення Лапласа вихідної величини САК до перетворення Лапласа її вхідної величини за нульових початкових умов***

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n}, \qquad (m \le n). \qquad (1.4)$$

Обмеження степеня чисельника передатної функції $m \le n$ є необхідною ***умовою фізичної реалізовності***. В разі невиконання цієї умови порушуватиметься ***принцип причинності*** і фізична реалізація системи з такою передатною функцією буде неможливою. Зауважимо, що згідно з принципом причинності, реакція системи на довільну дію не може виникати раніше ніж ця дія.

Розглянемо одну із стандартних вхідних дій для дослідження САК, якою є одиничний імпульс або функція Дірака. ***<u>Одиничним імпульсом</u> $\boldsymbol{\delta(t)}$ називається імпульс, тривалість якого прямує до нуля, амплітуда прямує до нескінченності, а площа дорівнює 1***. На рис. 1.10 наведено схематичне

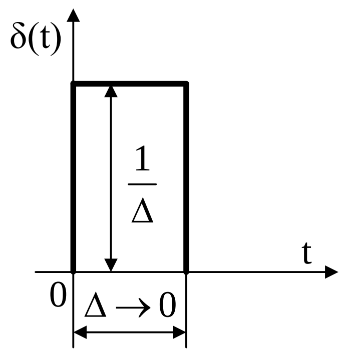


Рис. 1.10. Одиничний імпульс $\delta(t)$

зображення одиничного імпульсу. Згідно з рисунком, площа одиничного імпульсу дорівнює

$$S_\delta = \Delta \frac{1}{\Delta} = 1.$$

Перетворення Лапласа для $\delta(t)$ дорівнює одиниці

$$\delta(s)=L\left[\delta(t)\right]=1.$$

Відповідно до (1.4), зображення виходу системи можна отримати як

$$y(s)=u(s)W(s). \qquad (1.5)$$

Тому, якщо входом САК є одиничний імпульс $u(s)=\delta(s)=1$, то

$$y(s)=1\cdot W(s). \qquad (1.6)$$

Оскільки зображення вихідної величини співпадає з передатною функцією, то реакція системи на одиничний імпульс $w(t)=L^{-1}\left[y(s)\right]$ буде функцією-оригіналом її передатної функції

$$w(t)=L^{-1}\left[W(s)\right]. \qquad (1.7)$$

Реакція на одиничний імпульс $w(t)$ ***називається <u>ваговою функцією (характеристикою)</u> системи і являється оригіналом її передатної функції.***

Той факт, що $w(t)$ є оригіналом $W(s)$, уможливлює визначення передатних функцій динамічних об'єктів числовим способом на основі експериментально отриманих вагових характеристик. Визначення математичного опису об'єктів за експериментальними даними є задачею ***ідентифікації*** [1].

Розглянемо випадок, коли входом системи є довільна функція часу $u(t)$. Таку вхідну величину можна відобразити неперервною послідовністю одиничних імпульсів із відповідно промасштабованою амплітудою. Математично це виражається інтегралом згортки (інтегралом Дюамеля) у вигляді

$$u(t)=\int_0^t u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

У цьому разі вихідна величина $y(t)$ являтиме собою суперпозицію реакцій системи на одиничні імпульси, тобто суперпозицію її вагових характеристик і визначатиметься інтегралом згортки

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Відшукавши зображення для правої та лівої частини даного співвідношення з врахуванням тієї властивості перетворення Лапласа, що зображенням згортки двох функцій часу є добутком зображень цих функцій [6], матимемо

$$y(s) = u(s)W(s),$$

де $W(s) = L\left[w(t)\right]$. Із отриманого виразу дістанемо

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)},$$

що збігається із формулою передатної функції (1.4).

1.4.3 Операторна форма запису диференційних рівнянь

При описі ланок і систем поряд зі звичайною часто застосовується ***операторна форма запису диференційних рівнянь, у якій похідні та інтеграли позначаються за допомогою оператора диференціювання (оператора Гевісайда)*** $\boldsymbol{p = \frac{d}{dt}}$; $\boldsymbol{\frac{1}{p} = \int dt}$.

Похідні деякої змінної $x(t)$ в операторній формі запису матимуть вигляд $\frac{dx}{dt} = px$; $\frac{d^2x}{dt^2} = p^2x$; ... $\frac{d^nx}{dt^n} = p^nx$.

Інтеграли $x(t)$ запишуться як

$$\int \mathrm{x}\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{p}}\mathrm{x}; \quad \int \mathrm{dt} \int \mathrm{x}\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{p}^2}\mathrm{x}; \quad \int \mathrm{dt} \int \mathrm{dt} \int \mathrm{x}\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{p}^3}\mathrm{x};...$$

В операторній формі запису диференційних рівнянь оператор $\boldsymbol{p = \frac{d}{dt}}$ ***розглядається як деяка величина, на яку поширюються існуючі правила алгебричних дій: множення, ділення, винесення за дужки та ін***.

Наприклад похідна суми величин *x*, *y*, *z*, що дорівнює $\frac{d}{dt}(x + y + z) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$, може бути записана у вигляді

$px + py + pz = p(x + y + z)$, а $\int \frac{dx}{dt} dt = x$ в операторній формі запису матиме вигляд $\frac{1}{p} px = x$.

Запишемо диференційне рівняння (1.3) в операторній формі

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = b_0 p^m u + b_1 p^{m-1} u + \ldots + b_m u\,. \qquad (1.8)$$

Вираз (1.8) можна подати у компактному вигляді

$$P(p)y = Q(p)u\,, \qquad (1.9)$$

де $P(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$ – операторні поліноми.

Порівнюючи коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника в (1.4) з коефіцієнтами поліномів $Q(p)$ та $P(p)$ в (1.9), бачимо їх повну тотожність. На цій тотожності ґрунтується шлях отримання передатної функції системи, який полягає у безпосередньому використанні диференційного рівняння системи в операторній формі. Таким чином за рівнянням (1.9) передатну функцію системи можна отримати у двох формах:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{Q(p)}{P(p)}, \qquad (1.10)$$

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{Q(p)}{P(p)}, \qquad (1.11)$$

де p в (1.10) є комплексною змінною, а в (1.11) – оператором диференціювання. Очевидно, що формула (1.10) при $p = s$ ідентична формулі (1.4). В літературі з ТАК для (1.4) та (1.10) вживається назва ***комплексна передатна функція***, а для (1.11) – ***операторна передатна функція***.

Треба зазначити, що в ТАК передатні функції широко застосовуються з наступною метою.

- ✓ Отримання математичного опису ланок та систем.

✓ Визначення частотних характеристик, на яких ґрунтуються різні методи дослідження САК.

✓ Побудови та перетворення структурних схем автоматичних систем.

1.4.4 Приклади отримання моделей динамічних систем

Приклад 1.2. Записати рівняння динаміки та передатну функцію одномасової механічної системи, що зображена на рис. 1.11, де J – момент інерції, $M_д, M_о$ – обертальні моменти двигуна та сили опору відповідно, ω – кутова швидкість обертання механічної системи.

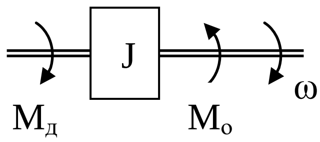


Рис. 1.11. Одномасова механічна система

Розв'язання. Виходячи із рівноваги прикладених до механічної системи моментів, за 2-м законом Ньютона дістанемо рівняння динаміки

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_д - M_о.$$

Для момента опору, що утворюється силою в'язкого тертя, матимемо

$$M_о = k_\omega \omega,$$

де k_ω – коефіцієнт в'язкого тертя. З врахуванням останнього виразу рівняння динаміки механічної системи запишеться як

$$J\frac{d\omega}{dt} + k_\omega \omega = M_д.$$

В операторній формі запису рівняння динаміки набуде вигляду

$$Jp\omega + k_\omega \omega = M_д.$$

Поділимо праву і ліву частини рівняння на k_ω та введемо позначення $J/k_\omega = T$, $1/k_\omega = K$. Тепер рівняння динаміки можна записати як

$$(Tp+1)\omega = KM_{\text{д}}.$$

Використовуючи (1.11), дістанемо передатну функцію механічної одномасової системи

$$W(p) = \frac{\omega(t)}{M_{\text{д}}(t)} = \frac{Q(p)}{P(p)},$$

де $P(p) = Tp + 1$, $Q(p) = K$.

Приклад 1.3. Для реального диференціатора, схема якого зображена на рис. 1.12, визначити передатну функцію, що пов'язує напруги u_1 та u_2.

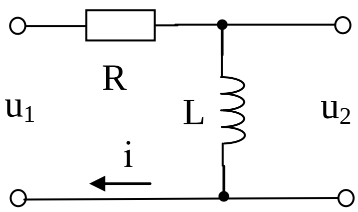


Рис. 1.12. – Схема реального диференціатора

Розв'язання. Рівняння рівноваги напруг в електричному колі для u_1 та u_2 запишуться як

$$Ri + L\frac{di}{dt} = u_1, \qquad L\frac{di}{dt} = u_2.$$

Після ділення обох рівнянь на R та введення позначень $L/R = T$, $1/R = K$ перейдемо до операторної форми запису і дістанемо

$$(Tp+1)i = Ku_1, \qquad Tpi = Ku_2.$$

Згідно з (1.11) отримаємо передатну функцію реального диференціатора як відношення вихідної величини до вхідної

$$W(p) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{Tp}{Tp+1}.$$

Приклад 1.4. На рис. 1.13 зображений механічний об'єкт у вигляді перевернутого (оберненого) маятника на візку, де M – маса візка, x – положення візка, F – сила, що прикладена до візка, m – маса маятника, l – відстань від осі обертання маятника до його центру, φ – кут повороту маятника. Для цього об'єкта необхідно отримати рівняння динаміки та передатну функцію, що пов'язує кутове положення маятника $\varphi(t)$ із силою $F(t)$.

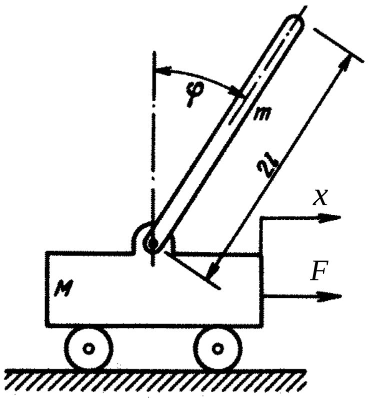


Рис. 1.13. Перевернутий маятник на візку

Р о з в ' я з а н н я. Якщо знехтувати силами тертя, що виникають при русі візка та коливанні маятника, то розглядуваний об'єкт можна описати рівнянням рівноваги сил

$$ml\varphi''(t) + (m+M)x''(t) = F(t)$$

та рівнянням рівноваги моментів сил

$$(J + ml^2)\varphi''(t) + mlx''(t)\cos\varphi(t) - gml\sin\varphi(t) = 0,$$

де J – момент інерції маятника відносно центру мас, g – прискорення вільного падіння. Якщо кут $\varphi(t)$ невеликий, то в другому рівнянні можна прийняти $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$; $\cos\varphi(t) \approx 1$.

Для маятника довжиною $2l$ момент інерції дорівнює $J = ml^2/3$ і рівняння рівноваги моментів сил за малих значень $\varphi(t)$ набуває вигляду

$$(4ml^2/3)\varphi''(t) + mlx''(t) - gml\varphi(t) = 0.$$

Із цього рівняння отримаємо

$$x''(t) = -(4l/3)\varphi''(t) - g\varphi(t).$$

Підставляючи цей вираз в рівняння рівноваги сил, дістанемо рівняння динаміки об'єкта

$$T^2\varphi''(t)-\varphi(t)=KF(t),$$

де введено позначення $T^2=\dfrac{ml-4(m+M)l/3}{(m+M)g}$; $K=\dfrac{1}{(m+M)g}$.

В операторній формі рівняння динаміки запишеться як

$$(T^2p^2-1)\varphi(t)=KF(t).$$

Звідси одержимо передатну функцію оберненого маятника на візку

$$W(p)=\frac{\varphi(t)}{F(t)}=\frac{K}{T^2p^2-1}.$$

1.5 Структурні схеми САК та їх перетворення

Поряд з функціональними в ТАК широко використовуються структурні схеми, які мають наступне означення: ***структурна схема*** ***– це графічне зображення математичної моделі системи у вигляді з'єднання ланок, що відповідає функціональній схемі даної системи.*** При цьому в ланках структурної схеми, які зображуються прямокутниками, наводяться властивості у вигляді передатних функцій, рівнянь динаміки або часових характеристик, аналітичних чи графічних функціональних залежностей. Часом ланки можуть бути пронумеровані, а їх характеристики зображені окремо.

На структурних схемах вхідні і вихідні величини ланок можуть записуватися у вигляді зображень або оригіналів відповідно до того, якими є передатні функції – комплексними (отримані як відношення зображень за Лапласом вихідної та вхідної величин) або операторними (отримані як відношення операторних поліномів з диференційного рівняння).

Ланки, які порівнюють або підсумовують вхідні величини – суматори, зображають у вигляді кола, яке інколи розділяють на чотири сектори. Якщо вхідна величина від’ємна, то це відмічається або знаком "–" або затушовуванням сектора. Додатні вхідні величини знаком "+" можна не відмічати.

Структурні схеми широко використовуються в ТАК при дослідженні і проектуванні систем автоматики. З їх допомогою легко встановити зв'язки між окремими ланками, їх взаємовплив, проходження сигналів в системі.

Ланки структурної схеми можуть відображати не тільки окремі елементи, але і їх з'єднання, а також частини системи. За допомогою математичного апарату передатних функцій можливе також перетворення складних структурних схем в більш прості, одноконтурні, що необхідно для складання відповідних рівнянь динаміки системи на основі відомих формул.

1.5.1 Правила перетворень структурних схем

Спочатку розглянемо найпростіші перетворення структурних схем. На рис. 1.14 наведена схема послідовного з’єднання n ланок. При послідовному

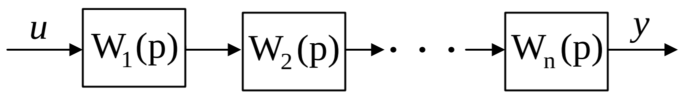


Рис. 1.14. Схема послідовного з’єднання ланок

з'єднанні ланок результуюча передатна функція в загальному випадку може бути визначена як добуток передатних функцій всіх ланок

$$W_{uy}(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p). \tag{1.12}$$

Схема паралельного з’єднання n ланок наведена на рис. 1.15. Еквівалентна передатна функція даного з’єднання ланок в загальному випадку

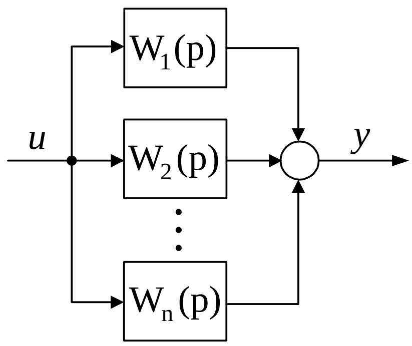


Рис. 1.15. Схема паралельного з’єднання ланок

визначається як сума передатних функцій всіх ланок

$$W_{uy}(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p). \qquad (1.13)$$

На рис. 1.16 показана схема ланки, охопленої зворотним зв’язком.

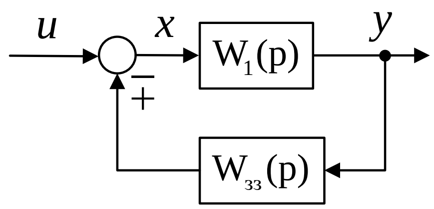


Рис. 1.16. Схема ланки зі зворотним зв’язком

Виведемо формулу для передатної функції цієї схеми. На основі рис. 1.16 запишемо наступні вирази

$$y = xW_1(p), \qquad x = u \mp yW_{зз}(p).$$

Визначивши із першого виразу x та підставивши його у другий, матимемо

$$yW_1^{-1}(p) = u \mp yW_{зз}(p).$$

Перенісши останній член у ліву частину та винісши за дужки y, отримаємо

$$y\left[1 \pm W_1(p)W_{зз}(p)\right]W_1^{-1}(p) = u.$$

З цього виразу дістанемо еквівалентну ***передатну функцію ланки зі зворотним зв'язком***, яка пов’язує вихідну величину y з вхідною u, у вигляді

$$W_{uy}(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{зз}(p)}, \qquad (1.14)$$

де $W_1(p)$ – передатна функція самої ланки без урахування зворотного зв'язку; $W_{зз}(p)$ – передатна функція ланки зворотного зв'язку (знак "плюс" у формулі відповідає від'ємному зворотному зв'язку, а знак "мінус" – додатному).

У зображеній на рис. 1.16 схемі передатна функція розімкнутої системи визначається як $W(p) = W_1(p)W_{зз}(p)$. Отже передатна функція ланки (системи) зі зворотним зв'язком може бути записана у вигляді

$$W_{цу}(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W(p)}. \qquad (1.15)$$

Якщо передатна функція зворотного зв'язку $W_{зз}(p)=1$, то такий зворотний зв'язок називають ***одиничним***. В цьому випадку передатна функція прямого каналу і розімкненої системи будуть однаковими: $W(p)=W_1(p)$. Тоді передатна функція ланки (системи) зі зворотним зв'язком матиме вигляд

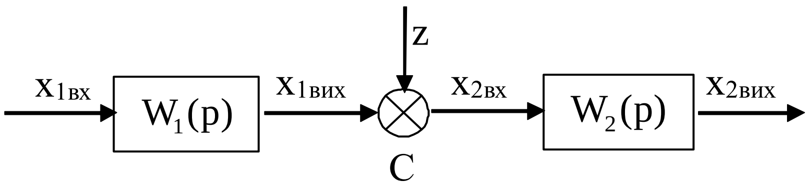
$$W_{цу}(p)=\frac{W(p)}{1\pm W(p)}. \qquad (1.16)$$

Знаючи розглянуті вище закономірності, можна здійснювати перетворення одноконтурних і деяких багатоконтурних систем.

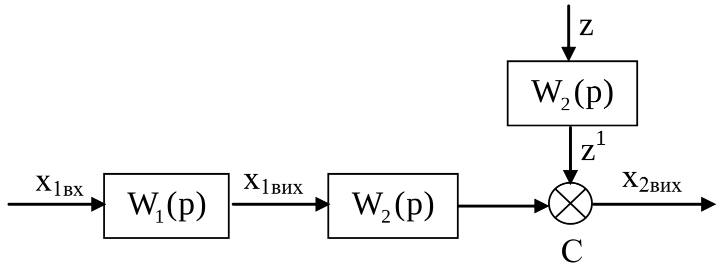
Замкнуту систему, ланки якої з'єднані лише послідовно, називають одноконтурною.

Замкнуту систему, ланки якої з'єднані як послідовно, так і паралельно або охоплені зворотними зв'язками, називають багатоконтурною.

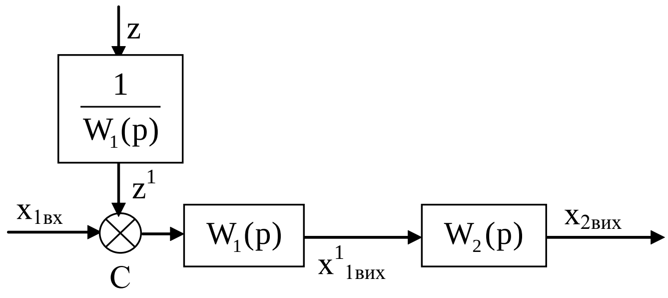
Правила перенесення суматорів і вузлів. Загальний принцип перенесення суматора або вузла в схемі полягає у тому, що при їх перенесенні з метою усунення перехрещування зворотних зв'язків вихідні величини ланок повинні залишатися не зміненими. Цей принцип добре ілюструє перенесення суматора С на рис. 1.17 і вузла В на рис. 1.18.



а



б



в

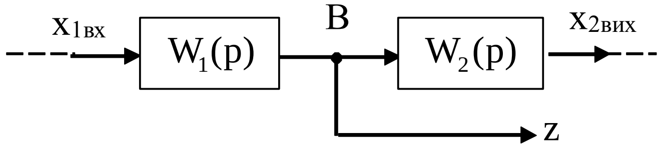
Рис. 1.17. Перенесення суматорів у структурній схемі

На рис. 1.17,а показана вихідна схема, де на суматор С поступають деяка вхідна величина х і вихідна величина ланки $W_1(p)$.

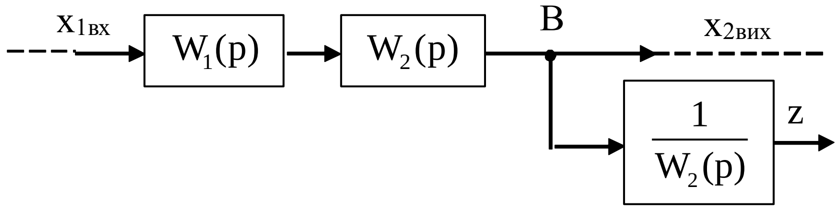
На рис. 1.17,б показано перенесення суматора вправо у напрямку поширення сигналу. При цьому величина z не проходитиме через ланку $W_2(p)$, як це відбувається у початковій (вихідній) схемі (рис. 1.16,а). Для того, щоб регульована величина $x_{2вих}$ в перетвореній схемі не змінилася, необхідно ввести додаткову ланку $W_2(p)$ між точкою введення сигналу z і суматором, як показано на цьому рисунку.

На рис. 1.17,в показано перенесення суматора С вліво (через ланку $W_1(p)$). Для компенсування впливу ланки $W_1(p)$ на хід процесу керування вводиться компенсувальна додаткова ланка з передатною функцією $1/W_1(p)$.

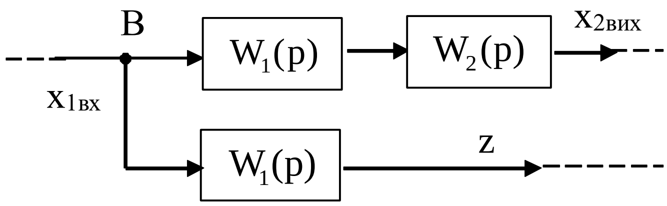
На рис. 1.18,а показана схема з вихідним положенням вузла В між ланками $W_1(p)$ та $W_2(p)$. При перенесенні вузла В вправо відносно ланки $W_2(p)$ для компенсування її впливу вводиться нова ланка з оберненою передатною функцією $1/W_2(p)$ (рис. 1.18,б), а при перенесенні вліво (через ланку $W_1(p)$) вводиться компенсувальна додаткова ланка $W_1(p)$ (рис. 1.18,в).



а



б



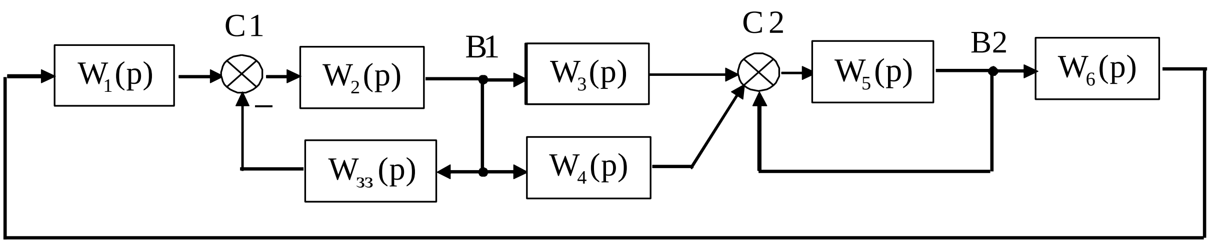
в

Рис. 1.18. Перенесення вузлів у структурній схемі

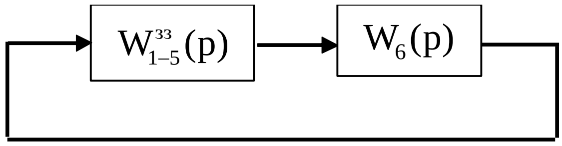
<u>1.5.2 Приклади спрощення структурних схем</u>

Приклад 1.5. Спростити до одноконтурної структурну схему, наведену на рис. 1.19,а.

<u>Розв'язання</u>. Ця схема є багатоконтурною, яка має ланки з місцевими зворотними зв'язками. Тут $W_2(p)$ – ланка з місцевим від'ємним зворотним зв'язком $W_{зз}(p)$; $W_5(p)$ – ланка з місцевим одиничним додатним зворотним зв'язком.



а



б

Рис. 1.19. Спрощення структурної схеми САК (до прикладу 1.5)

Ланки $W_3(p)$ і $W_4(p)$ з'єднані паралельно. Об'єктом керування є ланка $W_6(p)$. Спочатку перетворимо ланки зі зворотними зв'язками

$$W_{2,зз}(p) = \frac{W_2(p)}{1+W_2(p)W'_{зз}(p)};\quad W_{5,зз}(p) = \frac{W_5(p)}{1-W_5(p)}.$$

Враховуючи паралельне з'єднання ланок $W_3(p)$ і $W_4(p)$, одержимо

$$W_{3\text{-}4}(p) = W_3(p) + W_4(p).$$

Розглядаючи далі всі ланки як послідовно з'єднані, отримаємо їх спільну передатну функцію у вигляді

$$W_{1-5}^{зз} = W_1(p)W_{2зз}(p)W_{3-4}(p)W_{5зз}(p).$$

Відповідна спрощена структурна схема показана на рис. 1.19,б.

Приклад 1.6. Перетворити наведену на рис. 1.20 структурну схему до одноконтурного вигляду.

Розв'язання. Ця структурна схема має додатні зворотні зв'язки, які охоплюють по дві ланки, одна з яких – $W_3(p)$ входить до складу обох контурів зворотного зв'язку. Такі структурні схеми називають схемами із перехресними зворотними зв'язками. Вони не можуть бути перетворені за допомогою розглянутих раніше методик і формул. Тому ці схеми потрібно перетворювати так, щоб усунути перехрещення зворотного зв'язку. Це досягається при застосуванні правил перенесення суматорів, які на схемі позначені С1, С2, або вузлів, позначених В1, В2.

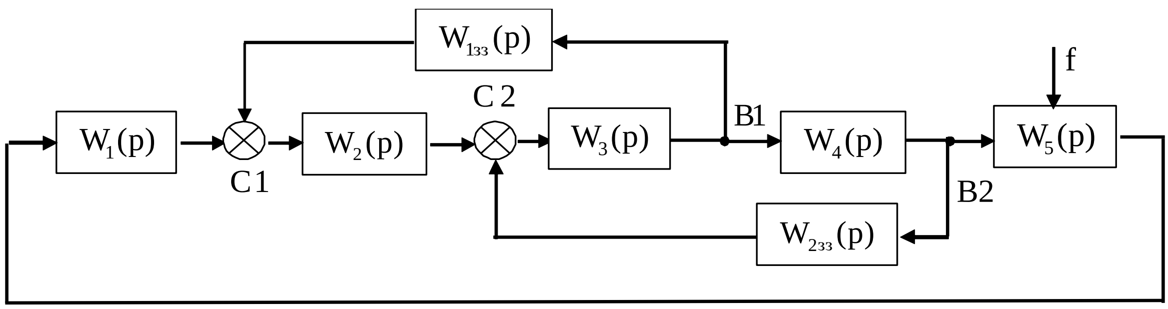
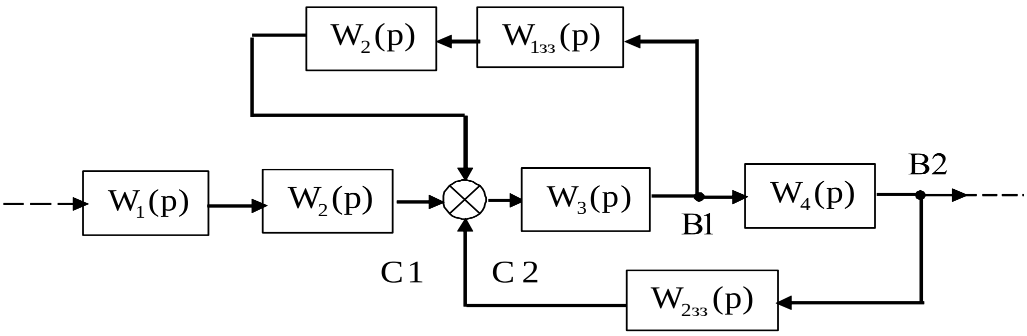


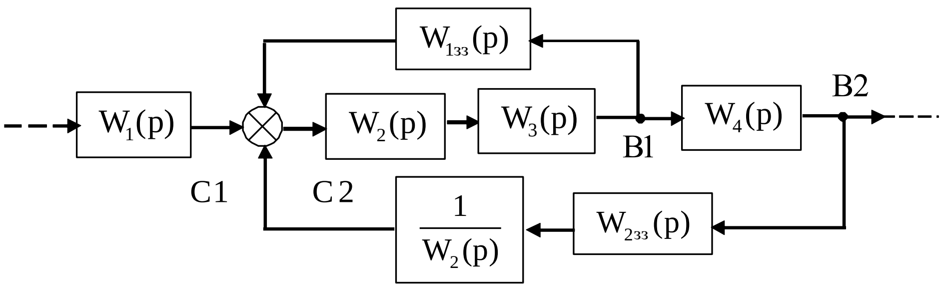
Рис. 1.20. Вихідна структурна схема САК (до прикладу 1.6)

Повертаючись до схеми на рис. 1.20, очевидно, що для ліквідації перехрещення зворотних зв'язків можна перемістити суматор C_1 вправо, об'єднавши його з суматором C_2 або перенести суматор C_2 вліво та об'єднати його з C_1. Можливе також перенесення вузла B_2 вліво та об'єднання його з вузлом B_1, або вузла B_1 вправо і об'єднання його з вузлом B_2.

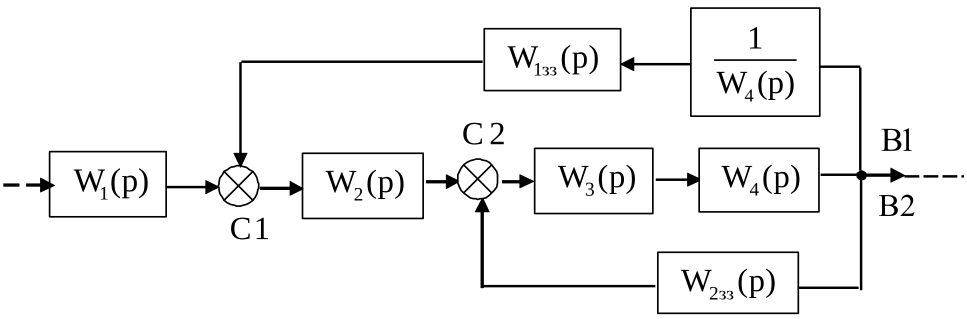
Перетворена схема з перенесенням вузла B_1 вправо показана на рис. 1.21,в. На рис. 1.21,а показана перетворена схема з перенесенням



а



б



в

Рис. 1.21. Спрощення структурної схеми САК (до прикладу 1.6)

суматора C_1 вправо і об'єднання його з суматором C_2 при введенні компенсувальної ланки $W_2(p)$, а на рис. 1.21,б – при перенесенні суматора C_2 вліво і об'єднанні його з суматором C_1 та введені компенсувальної ланки $1/W_4(p)$. Перехрещення зворотних зв'язків можна усунути також переміщенням вузла B_2 вліво і об'єднанням його з B_1. В цьому випадку у колі зворотного зв'язку $W_{2зз}(p)$ слід розмістити додаткову ланку з передатною функцією $W_4(p)$.

Усунувши перехрещення зворотних зв'язків, можна провести спрощення отриманих структурних схем за раніше наведеними правилами.

1.5.3 Передатні функцій САК за зовнішніми діями

При дослідженні лінійних систем здійснюють перетворення їх структурних схем до найбільш зручного для аналізу вигляду, зазвичай до одноконтурного. Загальне правило отримання передатних функцій замкнутих САК, що дозволяють визначати реакції системи на зовнішні дії, є наступним:

У замкнутій одноконтурній системі передатна функція, яка пов'язує вихідну величину довільної ланки $x(t)$ із деякою зовнішньою дією $z(t)$ записується як

$$W_{zx}(p) = \frac{x}{z} = \frac{W_*(p)}{1+W(p)}, \tag{1.17}$$

де $W_*(p)$ – добуток передатних функцій ланок на ділянці від місця прикладання $z(t)$ до $x(t)$; $W(p)$ – передатна функція розімкнутої системи.

Типовий варіант структурної схеми одноконтурної САК зображено на рис. 1.22. На цій схемі $W_1(p), W_2(p), W_3(p)$ – відповідно передатні функції регулятора, об'єкта керування та зворотного зв'язку, $g(t)$, $f(t)$ – відповідно задавальна та збурювальна зовнішні дії, $y(t)$ – вихід об'єкта (системи) або керована величина, $\varepsilon(t)$ – помилка системи. Як буде показано нижче, в задачах дослідження властивостей САК широко використовуються ПФ системи, записані стосовно наявних у ній зовнішніх дій. Отже визначимо передатні функції замкнутої САК, схема якої зображена на рис. 1.22.

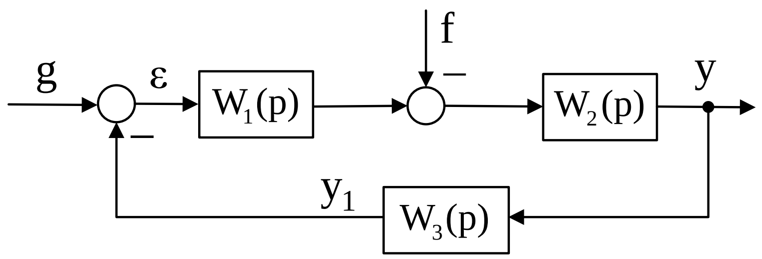


Рис. 1.22. Структурна схема одноконтурної САК

Використовуючи наведене вище загальне правило, ***передатну функцію замкнутої системи за завданням*** отримаємо у вигляді

$$W_g(p) = \frac{y}{g} = \frac{W_1(p)\,W_2(p)}{1 + W(p)}, \tag{1.18}$$

а ***передатну функцію замкнутої системи за збуренням*** дістанемо як

$$W_f(p) = \frac{y}{f} = \frac{-W_2(p)}{1 + W(p)}, \tag{1.19}$$

де $W(p) = W_1(p)\,W_2(p)\,W_3(p)$ – передатна функція розімкнутої САК.

Якщо передатні функції ланок у схемі на рис. 1.22 записані як відношення поліномів $W_1(p) = \dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)}$; $W_2(p) = \dfrac{Q_2(p)}{P_2(p)}$; $W_3(p) = \dfrac{Q_3(p)}{P_3(p)}$, то, після відповідних перетворень, дістанемо передатну функцію (1.18) у вигляді

$$W_g(p) = \frac{Q_1(p)Q_2(p)P_3(p)}{P_1(p)P_2(p)P_3(p) + Q_1(p)Q_2(p)Q_3(p)},$$

а передатна функція (1.19) запишеться як

$$W_f(p) = \frac{-Q_2(p)P_1(p)P_3(p)}{P_1(p)P_2(p)P_3(p) + Q_1(p)Q_2(p)Q_3(p)}.$$

У дослідженнях стежних та програмних систем часто також використовується передатна функція замкнутої САК за помилкою, яка пов'язує завдання з помилкою системи. Щоб отримати цю передатну функцію запишемо рівняння суматора

$$\varepsilon = g - y_1$$

і виразимо величину y_1 через ε як $y_1 = \varepsilon W(p)$. Підставимо цей вираз в рівняння суматора

$$\varepsilon = g - \varepsilon W(p).$$

Записавши останнє рівняння у вигляді $g = \varepsilon\left[1 + W(p)\right]$, дістанемо ***передатну функцію замкнутої системи за помилкою***

$$W_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon}{g} = \frac{1}{1 + W(p)} = 1 - W_g(p). \tag{1.20}$$

Розв'язання деяких задач аналізу стежних та програмних систем є простішим, якщо зворотний зв'язок одиничний. Тому за допомогою структурного перетворення модифікуємо схему на рис. 1.22 таким чином, щоб зворотний зв'язок став одиничним. Для цього перенесемо ланку з передатною функцією $W_3(p)$ із каналу зворотного зв'язку через суматор в прямий канал системи, а на вході розмістимо ланку з ПФ $W_3^{-1}(p)$. В результаті отримаємо структурну схему (рис. 1.23) з одиничним зворотним зв'язком, що еквівалентна схемі на рис. 1.22. У цих схемах ПФ за завданням та збуренням є однаковими, а значення помилки пов'язані співвідношенням $\varepsilon = \varepsilon_1 W_3(p)$.

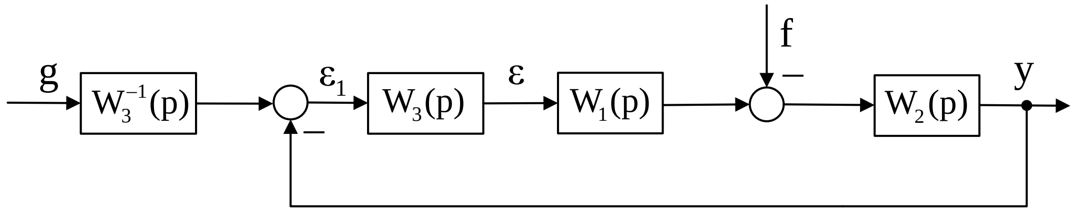


Рис. 1.23. Структурна схема САК з одиничним зворотним зв'язком, що еквівалентна схемі на рис. 1.22

1.6 Форми запису передатних функцій

Передатні функції можуть бути записані у поліномній формі, у формі добутку простих множників та у формі суми простих дробів. Для цих форм запису передатних функцій також застосовуються назви відповідно безпосередня, послідовна та паралельна.

1.6.1 Поліномна форма запису

Поліномна форма запису передатних функцій систем являє собою відношення полінома чисельника $B(p)=b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$ до полінома знаменника $A(p)=a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ у вигляді

$$W(p)=\frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}, \qquad (m \le n). \qquad (1.21)$$

В передатній функції (1.21) чисельник $B(p)$ називають ***поліномом дії***, знаменник $A(p)$ називають ***характеристичним поліномом***, а рівняння

$$A(p)=0$$

має назву ***характеристичного рівняння*** системи. Корені полінома $B(p)$ називають ***нулями*** передатної функції z_i, $i=1,\ldots,m$, а корені полінома $A(p)$ називають ***полюсами*** передатної функції p_i, $i=1,\ldots,n$. Очевидно, що корені характеристичного рівняння системи тотожні полюсам її передатної функції.

Також використовується варіант поліномної форми запису передатних функцій із нормуванням за вільними членами поліномів. Поділивши в (1.21) чисельник на $b_m \neq 0$, а знаменник на $a_n \neq 0$, отримаємо нормовану передатну функцію у поліномній формі запису

$$W(p)=K\frac{b'_0 p^m + b'_1 p^{m-1} + \ldots + 1}{a'_0 p^n + a'_1 p^{n-1} + \ldots + 1}, \qquad (1.22)$$

де $K=b_m/a_n$ – коефіцієнт передачі системи, $b'_i=b_i/b_m$, $i=1,\ldots,m$, $a'_i=a_i/a_n$, $i=1,\ldots,n$.

1.6.2 Форма запису у вигляді добутку простих множників

Згідно з основною теоремою алгебри, довільний поліном n-го степеня $H(p)$ має рівно n коренів, які можуть бути дійсними чи комплексними числами. Отже $H(p)$ можна розкласти на прості множники у вигляді поліномів 1-го та 2-го степенів, де кожному дійсному кореню λ_i відповідатиме поліном 1-го степеня $(p-\lambda_i)$, а кожній парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_{k,k+1}=\alpha_k \pm j\beta_k$ відповідатиме поліном 2-го степеня

$$(p-\lambda_k)(p-\lambda_{k+1})=(p-\alpha_k - j\beta_k)(p-\alpha_k + j\beta_k)=(p^2-2\alpha_k p+\omega_k^2),$$

де $\omega_k^2=\alpha_k^2+\beta_k^2$.

Розглянемо перехід від поліномної форми до форми у вигляді добутку простих множників на прикладі передатної функції системи

$$W(p)=\frac{b_0 p^2+b_1 p+b_2}{a_0 p^4+a_1 p^3+\ldots+a_4}. \tag{1.23}$$

Нехай передатна функція (1.23) має два дійсних нулі $z_1<0, z_2<0$, одну пару комплексно-спряжених полюсів $p_{1,2}=-\alpha_1 \pm j\beta_1$ та два дійсних полюси $p_3<0, p_4<0$. Тоді цю передатну функцію у формі добутку простих множників можна записати як

$$W(p)=K_0\frac{(p+z_1)(p+z_2)}{(p+p_3)(p+p_4)(p^2+2\alpha_1 p+\omega_1^2)}, \tag{1.24}$$

де $K_0=b_0/a_0$, $\omega_1^2=\alpha_1^2+\beta_1^2$.

Часто застосовується варіант цієї форми із нормуванням простих множників за вільними членами. Поділивши в чисельнику та знаменнику кожен множник на його вільний член, отримаємо нормовану передатну функцію у формі добутку простих множників

$$W(p)=K\frac{(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)}{(T_3 p+1)(T_4 p+1)(T_1^2 p^2+T_2 p+1)}, \tag{1.25}$$

де $K=\dfrac{b_0 z_1 z_2}{a_0 p_3 p_4 \omega_1^2}$ – коефіцієнт передачі системи, $\tau_1=\dfrac{1}{z_1}$, $\tau_2=\dfrac{1}{z_2}$, $T_1^2=\dfrac{1}{\omega_1^2}$, $T_2=\dfrac{2\alpha_1}{\omega_1^2}$, $T_3=\dfrac{1}{p_3}$, $T_4=\dfrac{1}{p_4}$.

Форми запису передатних функцій у вигляді добутку простих множників виду (1.24) та (1.25) зручні для побудови асимптотичних логарифмічних частотних характеристик ланок та систем (п. 2.2.3), які застосовуються у викладених нижче частотних методах аналізу та синтезу САК.

1.6.3 Форма запису у вигляді суми простих дробів

Отримання форми запису передатних функцій у вигляді суми простих дробів в загальному випадку, коли серед її полюсів є кратні полюси, наведено у літературі, зокрема в [4, 5]. Тут розглянемо варіант, коли кратні полюси відсутні. В цьому разі передатну функцію (1.21) з полюсами p_i, $i=1,...,n$ можна записати у вигляді суми простих дробів

$$W(p)=\frac{1}{a_0}\left[\frac{c_1}{(p-p_1)}+\frac{c_2}{(p-p_2)}+...+\frac{c_n}{(p-p_n)}\right], \tag{1.26}$$

де чисельники дробів $c_1,...,c_n$ відшукуються методом невизначених коефіцієнтів. Якщо поряд з дійсними є комплексно-спряжені полюси, то передатну функцію доцільно записати у вигляді суми дробів, знаменники яких є поліномами 1-го та 2-го степеня. Нехай передатна функція має r дійсних полюсів та q пар комплексно-спряжених полюсів, де $r+2q=n$. Кожна k-та пара комплексно-спряжених полюсів $p_{i,i+1}=\alpha_k \pm j\beta_k$ є коренями полінома $p^2-2\alpha_k p+\omega_k^2$, де $\omega_k^2=\alpha_k^2+\beta_k^2$. В цьому разі передатну функцію (1.21) можна записати у вигляді суми простих дробів як

$$W(p)=\frac{1}{a_0}\left[\frac{c_1}{(p-p_1)}+...+\frac{c_r}{(p-p_r)}+\frac{d_1 p+h_1}{(p^2-2\alpha_1 p+\omega_1^2)}+...+\frac{d_q p+h_q}{(p^2-2\alpha_q p+\omega_q^2)}\right], \tag{1.27}$$

де $c_1,...,c_r$, $d_1,...,d_q$ $h_1,...,h_q$ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Форма запису передатних функцій у вигляді суми простих дробів використовується для отримання аналітичних виразів реакцій ланок та систем на вхідні дії.

Приклад 1.7. Передатна функція системи має вигляд

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=\frac{b_0p^2+b_1p+b_2}{a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3}, \tag{1.28}$$

де $b_0=2, b_1=5, b_2=3$, $a_0=2, a_1=9, a_2=30, a_3=13$. На систему подається одиничний імпульс $u(t)=\delta(t)$. Треба отримати аналітичний вираз вихідної величини $y(t)$, що буде ваговою характеристикою системи $y(t)=w(t)$.

Розв'язання. Як було показано вище (п. 1.4.2), вагова характеристика – це оригінал передатної функції системи. Тому розв'язання задачі полягатиме в отриманні зворотного перетворення Лапласа для передатної функції (1.28). Щоб застосувати таблиці перетворень Лапласа, цю передатну функцію треба записати у формі суми простих дробів.

Визначимо полюси передатної функції, прирівнявши знаменник до нуля і розв'язавши це рівняння. Корені рівняння, а, відповідно, і полюси дорівнюють $p_1=-0.5$, $p_{2,3}=-2\pm j3$. Оскільки наявні один дійсний полюс та одна пара комплексно-спряжених полюсів, то запис передатної функції, як суми простих дробів, виконаємо у вигляді (1.27). Тоді матимемо вираз

$$\frac{b_0p^2+b_1p+b_2}{a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3}=\frac{1}{a_0}\left[\frac{c_1}{(p-p_1)}+\frac{d_1p+h_1}{(p^2-2\alpha_1p+\omega_1^2)}\right], \tag{1.29}$$

де $\alpha_1=-2, \beta_1=3$, $\omega_1^2=\alpha_1^2+\beta_1^2=13$, а c_1, d_1, h_1 – невідомі коефіцієнти. Зведемо прості дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники лівої та правої частин. Отримаємо тотожність

$$b_0p^2+b_1p+b_2=c_1(p^2-2\alpha_1p+\omega_1^2)+(d_1p+h_1)(p-p_1).$$

Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях оператора p, матимемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} b_0=c_1+d_1; \\ b_1=-c_1 2\alpha_1-d_1p_1+h_1; \\ b_2=c_1\omega_1^2-h_1p_1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, визначимо невідомі коефіцієнти $c_1 = \dfrac{b_0 p_1^2 + b_1 p_1 + b_2}{p_1^2 - 2\alpha_1 p_1 + \omega_1^2}$, $d_1 = b_0 - c_1$, $h_1 = \dfrac{\omega_1^2 (b_0 p_1 + b_1) - b_2 (p_1 - 2\alpha_1)}{p_1^2 - 2\alpha_1 p_1 + \omega_1^2}$. Підставивши числові значення, дістанемо $c_1 = 0.0889$, $d_1 = 1.9111$, $h_1 = 3.6889$.

Щоб відшукати оригінали простих дробів в (1.29), використаємо таблицю перетворень Лапласа в Додатку А. В результаті отримаємо

$$w_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{a_0}\frac{c_1}{p - p_1}\right] = a_0^{-1} c_1 e^{p_1 t};$$

$$w_2(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{a_0}\frac{d_1 p + h_1}{p^2 - 2\alpha p + \omega_1^2}\right] = a_0^{-1}\beta_1^{-1} e^{\alpha_1 t}\left[(d_1\alpha_1 + h_1)\sin(\beta_1 t) + d_1\beta_1\cos(\beta_1 t)\right].$$

Звідси маємо аналітичні вирази вагової характеристики системи в загальному вигляді

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) = a_0^{-1} c_1 e^{p_1 t} + a_0^{-1}\beta_1^{-1} e^{\alpha_1 t}\left[(d_1\alpha_1 + h_1)\sin(\beta_1 t) + d_1\beta_1\cos(\beta_1 t)\right]$$

та у частковому вигляді з врахуванням числових значень параметрів

$$w(t) = 0.0444 e^{-0.5t} + 0.1667 e^{-2t}\left[-0.1333\sin(3t) + 5.7333\cos(3t)\right].$$

Приклад 1.8. В середовищі програмного пакету MATLAB сформувати передатну функцію у поліномній формі, перетворити її у форму добутку простих множників та розкласти на прості дроби.

Розв'язання. Для цієї задачі складемо в MATLAB програму:

```
% Program 1.1
clc, echo off
% Введення поліномів чисельника і знаменника
num=[2 5 3]; den=[2 9 30 13];
% Формування передатної функції у поліномній формі
% Transfer Function Polynomial
W_pol=tf(num,[2 9 30 13]),
% Передатна функція у формі добутку простих множників
% Transfer Function “Zero-Pole-Gain”
W_zpk=zpk(W_pol),
% Розкладання передатної функції на прості дроби:
```

```
% С-коефіцієнти чисельників дробів, Р-полюси передатної функції
% Partial-Fraction Decomposition
[C, P]=residue(num,den),
```

Результатом роботи програми є:

```
W_tf =
     2 s^2 + 5 s + 3
  -------------------------
  2 s^3 + 9 s^2 + 30 s + 13
Continuous-time transfer function.
W_zpk =
     (s+1.5) (s+1)
  -----------------------
  (s+0.5) (s^2 + 4s + 13)
Continuous-time zero/pole/gain model.
C =
   0.4778 + 0.0111i
   0.4778 - 0.0111i
   0.0444 + 0.0000i
P =
  -2.0000 + 3.0000i
  -2.0000 - 3.0000i
  -0.5000 + 0.0000i
```

1.7 Основні особливості та задачі ТАК

1.7.1 Статика і динаміка САК

Загалом САК може функціонувати в ***усталених*** та ***перехідних режимах***. Перехідні режими виникають при переході системи від одного усталеного режиму до іншого, а також під час пуску системи у дію. В усталених режимах роботи координати (змінні стану) САК перебувають в ***усталених процесах***, а в перехідних режимах – відповідно в ***перехідних процесах***.

Існують два види усталених режимів роботи – статичні та динамічні. В статичному режимі система перебуває у стані рівноваги, коли водночас виконуються наступні умови: зовнішні дії, керована величина та координати системи є постійними, а їх похідні дорівнюють нулю. Властивості САК у статичних режимах є предметом вивчення ***розділу статики***, де основне питання – це дослідження точності системи керування.

Усталені динамічні режими виникають після закінчення перехідних процесів, спричинених змінами деякої зовнішньої дії за одним із типових законів – лінійним, квадратичним, кубічним або гармонічним. В ***розділі динаміки*** вивчаються властивості САК у перехідних режимах та в усталених динамічних режимах роботи, де основними питаннями є дослідження стійкості, якості перехідних процесів та точності системи при зміні зовнішніх дій за типовими законами.

Динамічні і статичні властивості лінійної САК у загальному випадку можуть бути детально вивчені на основі диференційного рівняння, яке називають ***рівнянням динаміки*** САК. Це рівняння повністю описує перехідні процеси в системі, а також і усталені процеси, якщо в ньому прийняти $t \to \infty$. Рівняння динаміки САК дістають із рівнянь ланок, що входять до її складу.

При складанні рівнянь ланок виходять із справедливості ***принципу детектування***. Згідно з ним у САК існує спрямованість дії ланок – від попередньої до наступної, а реакцією наступної ланки на попередню можна нехтувати. Це дозволяє застосовувати рівняння окремої ланки для її опису у складі САК. На практиці спрямованість дії ланок у САК забезпечується детектувальними властивостями елементів, які можуть передавати енергію лише в одному напрямку. Прикладами є підсилювачі, виконавчі органи, давачі тощо.

Складання рівняння динаміки САК. При складанні рівняння динаміки САК дотримуються наступної методики.

- ✓ З'ясовують суть фізичних явищ в САК і вибирають (чи розробляють) методи їх математичного описання. При цьому встановлюють узагальнені координати системи, під якими розуміють незалежні одна від одної змінні, необхідні і достатні для повного опису системи. Кількість незалежних змінних визначає число ступенів свободи цієї системи.
- ✓ Виокремлюють ланки САК і складають функціональну схему системи.

✓ Встановлюють початок відліку відхилень узагальнених координат і напрямок їх зміни (зазвичай за початок відліку приймають номінальний режим роботи системи).

✓ При складанні рівнянь динаміки ланок і системи у цілому прагнуть, за можливості, точніше врахувати вплив усіх діючих чинників.

✓ Якщо рівняння системи виявляється надто складним, то його спрощують.

Основними шляхами спрощення рівняння САК є такі.

➢ Нехтування впливом деяких чинників, що мають незначний вплив на поведінку і властивості САК. Наприклад, змінні параметри ланок у динаміці можуть вважатися постійними, якщо час їх істотної зміни в десять і більше разів перевищує час перехідного процесу в системі.

➢ Якщо коефіцієнт при похідній найвищого порядку набагато менший від коефіцієнтів при похідних нижчих порядків, то можливе зниження степеня рівняння САК.

➢ Заміна нелінійних залежностей лінійними, тобто лінеаризація моделі.

Після спрощення рівнянь та їх лінеаризації отримують рівняння, яке має назву ***рівняння першого наближення***. Це рівняння дає змогу провести попереднє дослідження системи.

1.7.2 Форми запису рівнянь динаміки

Як було сказано вище, диференційні рівняння динаміки лінійних систем можуть бути представлені у звичайному або операторному вигляді. При цьому обидва варіанти рівнянь можуть бути записані в трьох формах – в абсолютних одиницях, у відносних одиницях і у відхиленнях. Для розгляду цих форм запису використаємо ланку у вигляді RL-кола (приклад 1.1).

Ця ланка описується рівнянням

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U\ .$$

Розділивши ліву і праву частину рівняння на R та позначивши $L/R=T$ (стала часу); $1/R=K$ (коефіцієнт передачі ланки), одержимо рівняння ланки в ***абсолютних величинах***:

$$T\frac{di}{dt}+i+KU\ . \qquad (1.30)$$

В операторному варіанті рівняння запишеться як

$$\left(Tp+1\right)i=KU\ . \qquad (1.31)$$

Для складання ***рівняння у відхиленнях*** введемо початкові значення U_0, I_0. У цьому випадку, приймаючи відхилення напруги й струму ΔU й Δi від початкового значення з додатними знаками, одержимо

$$U=U_0+\Delta U;\quad i=I_0+\Delta i.$$

Підставляючи U та i у рівняння (1.31), дістанемо

$$T\frac{d(I_0+\Delta i)}{dt}+I_0+\Delta i=K(U_0+\Delta U)$$

Виключаючи рівняння початкової рівноваги (рівняння статики) $I_0=KU_0$, одержимо рівняння у відхиленнях:

$$T\frac{d\Delta i}{dt}+\Delta i=K\Delta U\ . \qquad (1.32)$$

В операторній формі це ж рівняння матиме вигляд

$$(Tp+1)\Delta i=K\Delta U\ . \qquad (1.33)$$

Для складання рівняння динаміки у ***відносних величинах*** приймемо за базові номінальні значення струму I_n і напруги U_n. Позначимо

$$\underline{i}=\frac{\Delta i}{I_n};\qquad \underline{u}=\frac{\Delta U}{U_n}.$$

Підставляючи в рівняння динаміки у відхиленнях відповідні значення

$\Delta U = \underline{u}U_n$, $\Delta i = \underline{i}I_n$, та враховуючи, що $U_n = I_n R$, одержимо рівняння динаміки у відносних величинах:

$$T\frac{d\underline{i}}{dt} + \underline{i} = \underline{u}. \tag{1.34}$$

Це ж рівняння в операторній формі запису матиме вигляд

$$(Tp+1)\underline{i} = \underline{u}.$$

1.8 Лінеаризація математичних моделей в ТАК. Приклади

Основними в ТАК являються такі методи лінеаризації як графоаналітичний та аналітичний.

1.8.1 Графоаналітична лінеаризація

В основі ***графоаналітичного методу лінеаризації*** лежать прийоми, що дозволяють замінити на окремих ділянках криволінійну характеристику відрізками прямої і сформувати відповідні аналітичні залежності. В цьому разі графоаналітична лінеаризація по суті є кусково-лінійною апроксимацією.

Приклад 1.9. За допомогою графоаналітичного методу лінеаризувати характеристику генератора постійного струму.

Р о з в ' я з а н н я. Характеристика генератора постійного струму що відображає залежність напруги на якорі генератора $U_г$ від струму в обмотці збудження $I_з$, зображена на рис. 1.24. Замінимо криву АВ двома лінійними ділянками АБ та БВ. Для ділянки АБ аналітичний вираз матиме вигляд

$$U_г = K_1 I_з,$$

де $K_1 = \frac{U_г}{I_з} = \frac{180}{2} = 90$. Отже

$$U_г = 90 I_з.$$

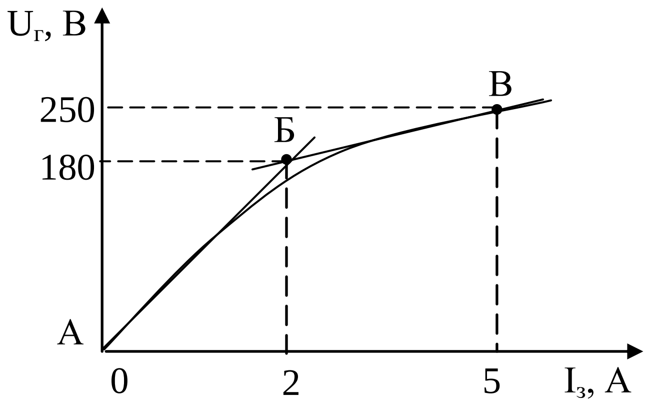


Рис. 1.24. Характеристика генератора постійного струму

Для ділянки БВ аналітична залежність запишеться як

$$U_г = U_0 + K_2(I_з - I_0),$$

де $U_0 = 180$; $I_0 = 2$; $K_2 = \dfrac{\Delta U_г}{\Delta I_з} = \dfrac{250-180}{5-2} = 23{,}3$. Звідси

$$U_г = 180 + 23{,}3(I_з - 2).$$

1.8.2 Аналітичний метод лінеаризації

Основною ідеєю ***аналітичного методу лінеаризації*** є розкладання нелінійної функції в ряд в околі деякої точки характеристики. З цією метою можуть застосовуватися ряди Паде, Фур'є та ін.

Найбільше поширення отримало розкладання нелінійних залежностей в ряд Тейлора. Нелінійну функцію $f(z)$, згідно з формулою розкладання в ряд Тейлора, можна записати як нескінченний ряд

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \qquad (1.35)$$

де $(z-a)$ – відхилення змінної від свого початкового значення в точці a; $f(a)$ – початкове значення функції; $f'(a),\ldots,f^n(a)$ похідні відповідного порядку у точці $z = a$.

На практиці в процесі регулювання відхилення регульованої величини відносно початкового значення невеликі. Тому відхиленнями змінної $(z-a)$ в другому і вищих степенях можна знехтувати. Обмежуючись двома першими складниками ряду Тейлора в (1.35), отримаємо формулу лінеаризації

$$f(z) \approx f(a) + f'(a)(z-a). \tag{1.36}$$

Записаний вираз призначений для лінеаризації функцій одної змінної. Якщо нелінійна залежність є функцією двох або більше змінних, то слід використовувати ряд Тейлора для векторних функцій. Обмежуючись, як і у випадку скалярної функції, двома членами ряду Тейлора, для нелінійної функції двох змінних $f(z_1, z_2)$ отримаємо формулу лінеаризації у вигляді

$$f(z_1, z_2) \approx f(a,b) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial z_1} \right|_{z_1 = a,\, z_2 = b} \right] (z_1 - a) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial z_2} \right|_{z_1 = a,\, z_2 = b} \right] (z_2 - b), \tag{1.37}$$

де $(z_1 - a), (z_2 - b)$ – відхилення змінних z_1, z_2 від своїх початкових значень в точках a, b відповідно; $f(a,b)$ – початкове значення функції; $\partial f / \partial z_1$, $\partial f / \partial z_2$ – часткові похідні функції по її змінних.

Приклад 1.10. За допомогою аналітичного методу лінеаризувати тягову характеристику соленоїдного електромагніту.

Р о з в ’ я з а н н я. Сила тяги F_e електромагніту приблизно пропорційна квадрату напруги u живлячої електромережі. Тому можна записати:

$$F_e = c_e u^2, \tag{1.38}$$

де c_e – конструктивна стала тягового електромагніту.

Позначивши u_0, F_{e0} – початкові значення напруги і сили тяги, а $\Delta u, \Delta F_e$ – їх відхилення (прирости), вираз (1.38) можна записати як

$$F_{e0} + \Delta F_e = c_e (u_0 + \Delta u)^2. \tag{1.39}$$

Застосовуючи розкладання в ряд Тейлора нелінійної функції $f(z) = f(u) = (u_0 + \Delta u)^2$ згідно з (1.27), а також маючи на увазі, що $a = u_0$ і початкове значення функції в даному випадку $f(a) = u_0{}^2$, отримаємо

$$f(u) \approx u_0^2 + 2u_0 \Delta u .$$

Підставляючи цей вираз в праву частину рівняння (1.39), матимемо

$$F_{e0} + \Delta F_e = c_e u_0^2 + c_e 2u_0 \Delta u .$$

Виключаючи рівняння початкової рівноваги $F_{e0} = c_e u_0^2$, отримаємо лінеаризоване рівняння тягової характеристики електромагніту у відхиленнях

$$\Delta F_e = c_e 2u_0 \Delta u = K_e \Delta u , \tag{1.40}$$

де $K_e = 2c_e u_0$ – коефіцієнт передачі електромагніту.

Аналогічним чином можна лінеаризувати рівняння асинхронного двигуна, для якого крутний момент приблизно пропорційний квадрату напруги, що живить статор. Лінеаризоване за допомогою розкладання в ряд Тейлора рівняння моменту асинхронного двигуна у відхиленнях матиме вигляд

$$\Delta M_\partial = K_\partial \Delta u . \tag{1.41}$$

де K_∂ – коефіцієнт передачі асинхронного двигуна за моментом.

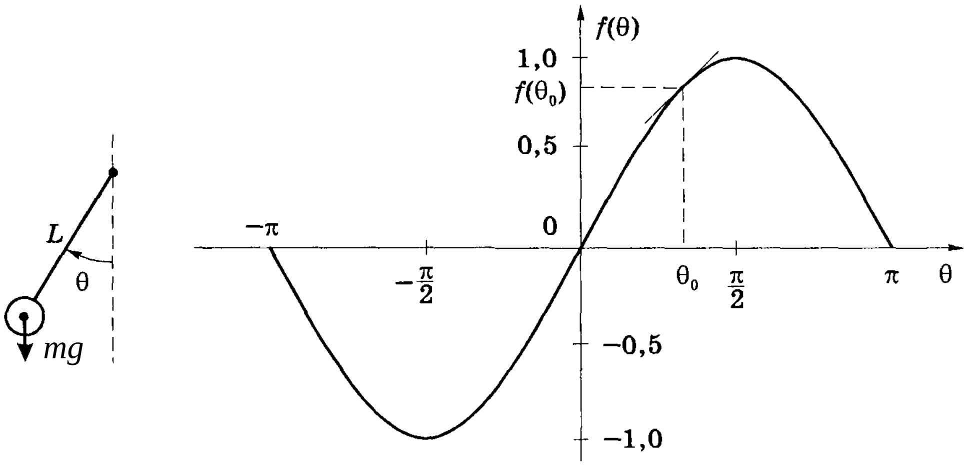
Приклад 1.11. Отримати лінеаризований математичний опис маятника за допомогою аналітичного методу лінеаризації.

Розв'язання. Схематичне зображення маятника наведено на рис. 1.25,а, де Θ – кут повороту маятника; m – маса кульки, закріпленої на кінці стрижня; L – відстань від осі обертання маятника до центру кульки.

Вважатимемо, що стрижень невагомий. На кульку діє сила, що дорівнює mg, де g – прискорення вільного падіння. Якщо знехтувати тертям у точці підвісу, то рух маятника описуватиметься відомим з курсу фізики диференційним рівнянням

$$\frac{L}{g}\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \sin\Theta = 0 . \tag{1.42}$$

Рівняння (1.42) нелінійне, оскільки воно містить нелінійний член $\sin\Theta$. Функція $f(\Theta)=\sin\Theta$ зображена на рис. 1.25,б.



а б

Рис. 1.25. Схема маятника (а) та нелінійна залежність $f(\Theta)=\sin\Theta$ (б)

Лінеаризуємо нелінійну залежність $f(\Theta)$ шляхом розкладання в ряд Тейлора. Спочатку виберемо точкою лінеаризації деяку точку $\Theta=\Theta_0$ (див. рис. 1.25,б). Для формули лінеаризації (1.36) матимемо наступну відповідність величин: $z=\Theta$; $a=\Theta_0$; $f(z)=\sin\Theta$; $f'(a)=\cos\Theta_0$. Застосувавши (1.36), отримаємо

$$\sin\Theta\approx\sin\Theta_0+(\Theta-\Theta_0)\cos\Theta_0. \qquad (1.43)$$

Тепер виберемо точку лінеаризації $\Theta=0$, навколо якої маятник здійснює вільні коливання. Підставивши в (1.43) $\Theta_0=0$, матимемо

$$\sin\Theta\approx 0+(\Theta-0)\cdot 1=\Theta. \qquad (1.44)$$

Ми отримали добре відомий з математики результат: $\sin x\approx x$ для малих значень x. Підставивши (1.44) в (1.42), дістанемо лінеаризоване рівняння руху маятника

$$\frac{L}{g}\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\Theta=0. \qquad (1.45)$$

Як буде показано нижче, це рівняння відповідає консервативній ланці 2-го порядку. Його розв'язок $\Theta(t)$ являє собою гармонічні незатухаючі коливання з періодом $2\pi\sqrt{L/g}$.

Приклад 1.12. Застосувавши ряд Тейлора, лінеаризувати векторну нелінійну функцію, що являє собою результат множення двох змінних $m = f(x,y) = xy$. Оцінити точність лінеаризації у випадку перевищення змінними своїх початкових значень $x_0 = 5,\ y_0 = 10$ на 20%.

Розв'язання. Для формули лінеаризації (1.37) матимемо наступну відповідність величин: $z_1 = x$; $z_2 = y$; $a = x_0$; $b = y_0$; $f(z_1, z_2) = m$. Застосувавши (1.37), отримаємо

$$m \approx f(x_0, y_0) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} \right] (x - x_0) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \right] (y - y_0). \quad (1.46)$$

Визначивши часткові похідні $\partial f/\partial x = y,\ \partial f/\partial y = x$ та підставивши числові значення, дістанемо лінеаризований вираз для добутку двох змінних

$$m \approx 50 + 10(x-5) + 5(y-10) = 10x + 5y - 50. \quad (1.47)$$

Оцінимо точність формули (1.47) при зростанні змінних величин відносно початкових значень на 20%. У цьому разі $x = 6,\ y = 12$ і, згідно з (1.47), маємо $m \approx 70$. Точне значення нелінійної функції $m = xy = 6 \cdot 12 = 72$. Обчислимо відносну похибку лінеаризації $\frac{70-72}{72} \times 100\% = -2{,}78\%$. Таке значення похибки дозволяє оцінити точність як досить непогану.

Контрольні запитання та завдання

1.Поясніть значення понять автоматизація та автоматика.

2.Які позитивні результати досягаються за допомогою автоматизації?

3.У чому відмінність між автоматизованим та автоматичним процесами?

4.Як класифікують пристрої автоматики за функціональним призначенням?

5.Що є предметом дисципліни ТАК?

6.Назвіть винахідників перших регуляторів, що знайшли практичне застосування у промисловості.

7.Назвіть головні завдання і особливості кібернетики.

8.Що означає слово кібернетика?

9.Хто є основоположником кібернетики?

10. Дайте означення терміну «інформація».

11. Що таке керування?

12. Що таке вихідна (апріорна) та робоча (апостеріорна) інформація в системах автоматичного керування?

13. Чим відмінні терміни "система автоматичного керування" (САК) та "система автоматичного регулювання" (САР)?

14. Нарисуйте функціональну схему САК і поясніть призначення її елементів.

15. Якими є особливості замкнених і розімкнених САК?

16. Поясніть особливості двох головних принципів автоматичного керування.

17. Які особливості функціональної схеми комбінованої САК?

18. Поясніть особливості звичайних САК з повною початковою інформацією.

19. Що таке математична модель деякої фізичної системи (об'єкта)?

20. Сформулюйте означення лінійної системи.

21. Як перевірити виконання принципів суперпозиції та пропорційності у деякій системі?

22. Наведіть схематичне зображення одиничного імпульсу (функції Дірака).

23. Що таке вагова функція (характеристика) системи?

24. Як пов’язані між собою передатна функція та вагова характеристика системи?

25. Що таке передатна функція ланки чи системи?

26. Сформулюйте вимогу до передатної функції стосовно фізичної реалізовності системи.

27. Для чого застосовуються передатні функції в ТАК?

28. Як отримати передатну функцію ланки (системи) на основі її диференційного рівняння в операторній формі запису?

29. Що таке структурна схема САК?

30. В чому полягає мета і загальна методика перетворення структурних схем САК?

31. Які системи мають назву одноконтурних, а які – багатоконтурних?

32. Запишіть формули для визначення еквівалентної передатної функції ланок, що з’єднані: 1) паралельно; 2) послідовно; 3) ланки зі зворотним зв’язком.

33. Як у структурній схемі САК виконується перенесення суматора за напрямом передавання сигналу?

34. Як здійснюється у структурних схемах перенесення суматора проти напряму передавання сигналу?

35. Як виконується у структурній схемі САК перенесення вузла у напрямі передавання сигналу?

36. Як у структурних схемах здійснюється перенесення вузла проти напряму передавання сигналу?

37. Назвіть існуючі форми запису передатних функцій.

38. Що таке нулі та полюси передатної функції?

39. Для яких задач використовується форма запису передатних функцій у вигляді добутку простих множників?

40. Чим корисна форма запису передатних функцій у вигляді суми простих доданків?

41. Назвіть та охарактеризуйте можливі режими роботи САК.

42. Назвіть умови функціонування САК у статичному режимі.

43. На основі чого можна детально вивчати динамічні та статичні властивості лінійних САК?

44. У чому полягає методика складання диференційного рівняння динаміки системи?

45. Сформулюйте принцип детектування при складанні рівняння замкненої системи.

46. Коли змінні коефіцієнти диференційних рівнянь САК можна розглядати в динамічних режимах як постійні величини?

47. Що є передумовою зниження порядку диференційного рівняння САК?

48. Які особливості різних форм запису рівнянь динаміки замкненої системи?

49. Які існують основні методи лінеаризації нелінійних моделей в ТАК?

50. У чому суть графоаналітичної апроксимації нелінійних залежностей?

51. Розкладанням функцій в які ряди можна здійснити їх лінеаризацію?

52. Наведіть формулу лінеаризації нелінійних функцій одної змінної при застосуванні ряду Тейлора.

53. Запишіть формулу лінеаризації нелінійних векторних функцій двох змінних при застосуванні ряду Тейлора.

54. Лінеаризуйте аналітичним методом нелінійну залежність $f(\Theta) = tg\Theta$ в точці $\Theta = 0$.

55. Лінеаризуйте нелінійну векторну функцію частки $d = f(x, y) = x/y$ від ділення змінних x та y за їх початкових значень $x_0 = 50, y_0 = 10$.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1 Типові ланки САК, їх опис та часові характеристики

2.2.1 Особливості рівнянь динаміки ланок САК

Та обставина, що різні за фізичною природою об'єкти можуть бути описані подібними диференційними рівняннями, дозволяє класифікувати ланки САК за видом рівнянь динаміки. Наприклад, до того самого типу ланок при класифікації за видом рівнянь можна віднести такі об'єкти як електричний активно-індуктивний контур та одномасова механічна система.

Рівняння динаміки електричного RL-кола з активним опором R та індуктивністю L було отримане в прикладі 1.1 у вигляді

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U\,. \tag{2.1}$$

В прикладі 1.2 рівняння динаміки одномасової механічної системи з моментом інерції J було записане як

$$J\frac{d\omega}{dt}+k_{\omega}\omega=M_{\text{д}}\,. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.1) і (2.2) подібні. Тому між змінами струму $i(t)$ та швидкості $\omega(t)$ у перехідних процесах існує аналогія і, за прийнятою у ТАК класифікацією, ці об'єкти відносять до одного й того ж типу.

Ліва частина рівняння ланки в якій наявні вихідна величина і її похідні показує як швидко і точно реагує ланка на вхідну величину, записану в правій частині рівняння. Присутність похідних у лівій частині рівняння засвідчує, що ланка поступово реагує на вхідну величину, перехідний процес триває деякий час у плині якого існує відхилення вихідної величини від заданого значення. Якщо похідні в лівій частині рівняння відсутні, то це означає миттєву реакцію ланки на вхідну величину.

У загальному випадку права частина рівняння ланки показує з яким коефіцієнтом передачі (підсилення) вхідна величина передається на вихід. Залежно від вигляду правої частини ланка може реагувати на саму вхідну величину, на похідну вхідної величини, на вхідну величину і її похідну, на вхідну величину і її інтеграл, на вхідну величину, похідну та інтеграл і т. д.

Для дослідження динамічних властивостей ланок та систем використовуються наступні характеристики:

- ***часова характеристика*** – ***це реакція ланки*** $y(t)$ ***на довільну вхідну дію*** $u(t)$;
- ***перехідна функція (характеристика)*** $h(t) = y(t)$ – ***це реакція ланки на одиничну східчасту дію (одиничний стрибок)*** $u(t) = 1(t)$;
- ***вагова функція (характеристика)*** $w(t) = y(t)$ – ***це реакція ланки на одиничну імпульсну дію (одиничний імпульс)*** $u(t) = \delta(t)$.

Функція ***одиничного стрибка (функція Гевісайда)*** записується як

$$1(t) = \begin{cases} 1 & при \quad t \geq 0, \\ 0 & при \quad t < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Графік функції $1(t)$ показано на рис. 2.1,а. Одинична імпульсна функція наведена на рис. 2.1,б. Важливо зазначити, що між цими функціями існує тісний зв'язок – одиничний імпульс є похідною за часом від одиничного стрибка $\delta(t) = \left[1(t)\right]'$. А оскільки досліджувані нами системи та ланки лінійні, то

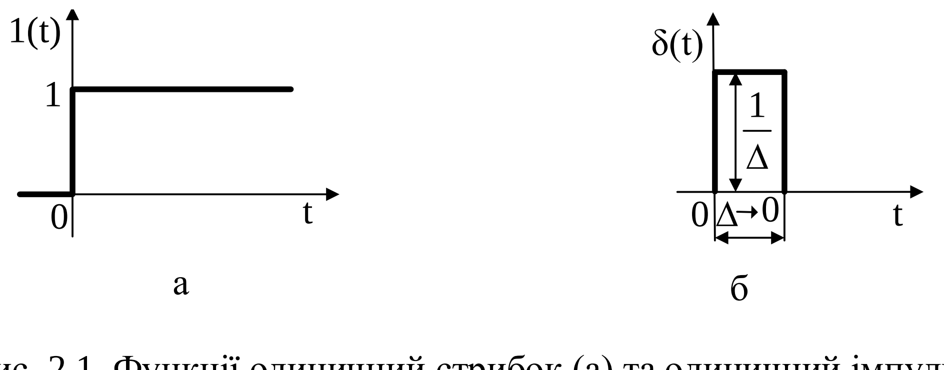


Рис. 2.1. Функції одиничний стрибок (а) та одиничний імпульс (б)

аналогічний зв'язок існує і між їхніми реакціями на ці вхідні дії. Тобто вагова характеристика лінійної системи є похідною від перехідної характеристики цієї системи $w(t) = \left[h(t)\right]'$.

2.1.2 Типові ланки, їх опис і динамічні властивості

Виходячи з рівнянь динаміки, виділяють типові ланки САК. До них можна віднести такі ланки, як пропорційна, аперіодична 1-го порядку, інтегральна, диференційна, інерційно-диференційна, форсувальна, інерційно-форсувальна, аперіодична 2-го порядку, коливальна, консервативна та ланка запізнення.

Пропорційна ланка (безінерційна або підсилювальна ланка). Рівняння пропорційної ланки

$$y = Ku, \tag{2.4}$$

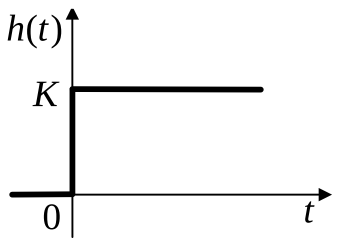
де K – коефіцієнт передачі (підсилення). Згідно з рівнянням, вхідна величина без змін миттєво надходить на вихід ланки. Передатна функція цієї ланки

$$W(p) = K. \tag{2.5}$$

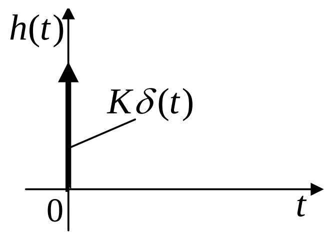
Перехідна та вагова характеристики пропорційної ланки визначаються як

$$h(t) = K \cdot 1(t); \quad w(t) = K \cdot \delta(t), \qquad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Ці характеристики показані на рис. 2.2. Імпульсна функція на рис. 2.2,б має вигляд вертикальної лінії зі стрілкою. Таке умовне зображення функції Дірака застосовується у літературі з ТАК.



а



б

Рис. 2.2. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики пропорційної ланки

Прикладами пропорційних ланок є резисторні дільники напруги, механічні важільні і редукторні передачі (без люфтів), електронні лампи тощо.

Аперіодична ланка 1-го порядку (інерційна ланка). Рівняння ланки

$$T\frac{dy}{dt}+y=Ku, \qquad (2.7)$$

або в операторній формі

$$(Tp+1)y=Ku. \qquad (2.8)$$

Перейшовши в (2.8) до зображень за Лапласом вхідної та вихідної величин, передатну функцію ланки запишемо у вигляді

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=\frac{K}{Tp+1}. \qquad (2.9)$$

Ця передатна функція має полюс $p_1=-1/T$, що є коренем рівняння $Tp+1=0$.

Визначимо реакцію ланки на одиничну східчасту дію $u(t)=1(t)$ за допомогою перетворень Лапласа. Із таблиці в Додатку А дістанемо зображення одиничного стрибка $L[1(t)]=1/p$. Оскільки $u(p)=1/p$, то з (2.9) отримаємо

$$y(p)=u(p)W(p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{K}{Tp+1}.$$

Розкладемо цей вираз на суму простих дробів методом невизначених коефіцієнтів. Для цього запишемо рівність

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{K}{Tp+1}=\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{Tp+1},$$

де c_1, c_2 – невідомі коефіцієнти. Зведемо прості дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники лівої та правої частин. Отримаємо тотожність

$$K=c_1(Tp+1)+c_2p.$$

Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях оператора p, матимемо систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases}0=c_1T+c_2;\\ K=c_1.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, визначимо коефіцієнти $c_1=K$, $c_2=-KT$. Отже зображення вихідної величини ланки є сумою простих дробів

$$y(p)=\frac{K}{p}+\frac{-KT}{Tp+1}.$$

Відшукавши за допомогою таблиці в Додатку А зворотне перетворення Лапласа для кожного з доданків

$$L^{-1}\left[\frac{K}{p}\right]=K, \qquad L^{-1}\left[\frac{-KT}{Tp+1}\right]=-Ke^{-t/T},$$

дістанемо вираз для перехідної характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку $h(t)=y(t)=L^{-1}\left[y(p)\right]$ у вигляді

$$h(t)=K-Ke^{-t/T}=K(1-e^{-t/T}), \qquad t\geq 0. \tag{2.10}$$

Вагову характеристику цієї ланки відшукаємо як

$$w(t)=\left[h(t)\right]'=\frac{K}{T}e^{-t/T}, \qquad t\geq 0. \tag{2.11}$$

За отриманими виразами на рис. 2.3 побудовані часові характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку. Обидві криві мають експоненціальний характер.

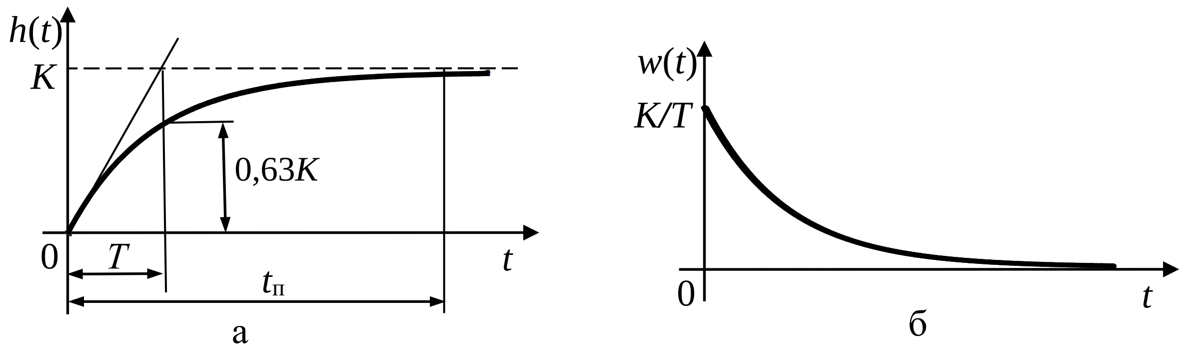


Рис. 2.3. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку

У наведених вище рівняннях T ***є <u>сталою часу</u>, яка характеризує інерційні властивості ланки***. Вона може бути визначена за перехідною характеристикою графічно шляхом проведення дотичної до $h(t)$, як показано на рис. 2.3,а, або графоаналітично. Графоаналітичний спосіб полягає у визначенні ординати $h(t)$ для моменту часу $t=T$. Використовуючи (2.10), отримаємо $h(T)=K(1-e^{-1})=0,63K$. Далі для точки на графіку з ординатою $h=0,63K$ визначимо абсцису, яка і є шуканою величиною $t=T$.

За рівнянням (2.10) відшукаємо значення перехідної характеристики при $t = 3T$ як $h(3T) = K(1 - e^{-3}) = 0.95K$. Для $t = 4T$ матимемо $h(4T) = 0.98K$. Отже, виходячи із умови досягнення $h(t)$ усталеного значення $h(\infty)$ з точністю 5–2%, тривалість перехідного процесу дорівнюватиме $t_п \cong (3-4)T$.

Якщо вхідна величина стрибкоподібно спадає до нуля (це відповідає, наприклад, відключенню напруги від котушки, що має активно-індуктивний опір), то перехідний процес може бути описаний однорідним диференційним рівнянням (рівняння вільного руху)

$$(Tp + 1)y = 0.$$

Розв’язок цього рівняння

$$y = y(0) \cdot e^{-t/T},$$

де $y(0)$ – значення виходу ланки при $t = 0$ (початкова умова). Відповідна часова характеристика при $y(0) = K$ показана на рис. 2.4,а.

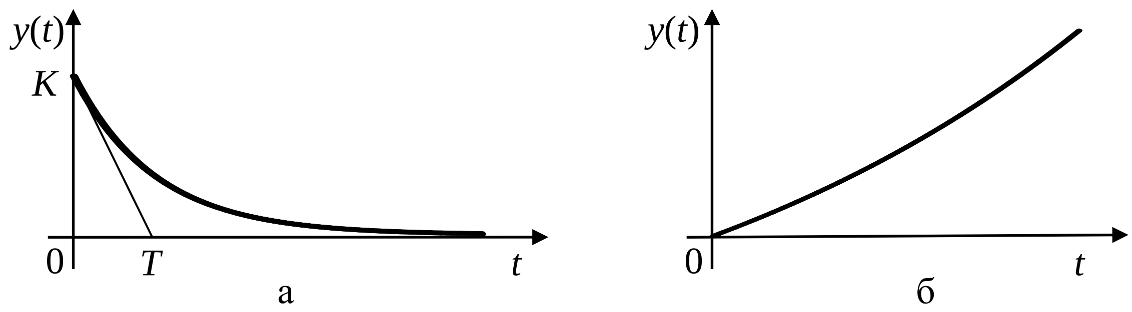


Рис. 2.4. Реакція аперіодичної ланки на стрибкоподібний спад вхідної дії до нуля (а), реакція нестійкої аперіодичної ланки на одиничний стрибок (б)

Якщо рівняння динаміки ланки має вигляд

$$T\frac{dy}{dt} - y = Ku,$$

то її називають ***нестійкою аперіодичною ланкою***. Передатна функція ланки

$$W(p) = \frac{K}{Tp - 1}.$$

Реакція даної ланки на одиничну східчасту дію $u(t) = 1(t)$ запишеться як

$$y(t) = K(e^{t/T} - 1), \qquad t \geq 0.$$

Графік наведено на рис. 2.4,б. Як видно, при $t \to \infty$ вихідна величина $y \to \infty$.

Аперіодичними ланками 1-го порядку є різноманітні електротехнічні пристрої з активно-індуктивними та активно-ємнісними опорами, механічні інерційні пристрої, генератори постійного струму тощо.

Приклад 2.1 [1]**.** Скласти рівняння динаміки генератора постійного струму, принципова схема якого показана на рис. 2.5,а, де $W_З$ – обмотка збудження генератора з індуктивністю L і активним опором R.

Розв'язання. З огляду на те, що швидкість обертання якоря генератора *Я* постійна і напруга генератора $U_г$ може змінюватися тільки залежно від напруги $U_З$ на обмотці збудження, рівняння динаміки генератора *Г* (рис. 2.5,б) має відобразити зв'язок між $U_З$ та $U_г$.

Для обмотки збудження можна записати рівняння рівноваги напруг

$$U_З = L\frac{di_З}{dt} + i_З R.$$

Припустивши, що характеристика генератора лінійна, одержимо $U_г = ci_З$, де c – постійний коефіцієнт. Звідси $i_З = U_г/c$, і, після нескладних перетворень, матимемо $\frac{L}{c}\frac{dU_г}{dt} + \frac{R}{c}U_г = U_З$.

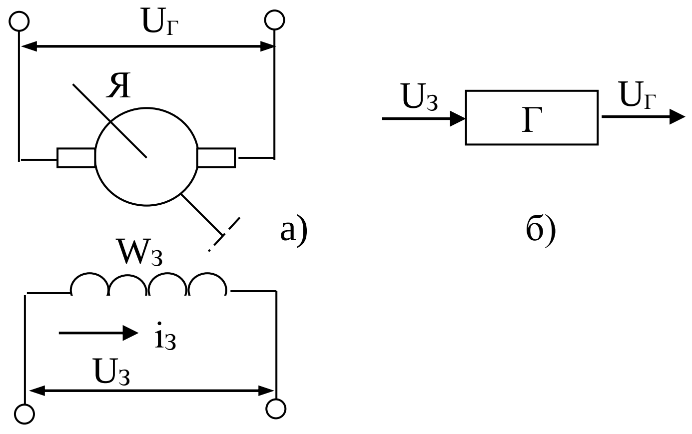


Рис. 2.5. Схема генератора постійного струму

Вводячи позначення $L/R = T_г$; $c/R = K_г$, одержимо рівняння генератора

$$T_{\text{г}} \frac{dU_{\text{г}}}{dt} + U_{\text{г}} = K_{\text{г}} U_3 .$$

В операторній формі запису це рівняння матиме вигляд

$$(T_{\text{г}} p + 1) U_{\text{г}} = K_{\text{г}} U_3 .$$

Отримане рівняння динаміки генератора відповідає аперіодичній ланці 1-го порядку. Аналогічні рівняння описують об'єкти в прикладах 1.1 та 1.2.

Інтегральна ланка. Цій ланці відповідає рівняння динаміки

$$y = K \int u dt . \tag{2.12}$$

В операторному вигляді

$$y = K \frac{1}{p} u .$$

За цим рівнянням передатна функція ланки запишеться як

$$W(p) = \frac{K}{p}. \tag{2.13}$$

Перехідною характеристикою ланки буде розв'язок рівняння (2.12) при $u(t) = 1(t)$, а ваговою – похідна від цього розв'язку:

$$h(t) = Kt; \quad w(t) = K, \qquad t \geq 0 . \tag{2.14}$$

Перехідна і вагова характеристики інтегральної ланки наведені на рис. 2.6,а.

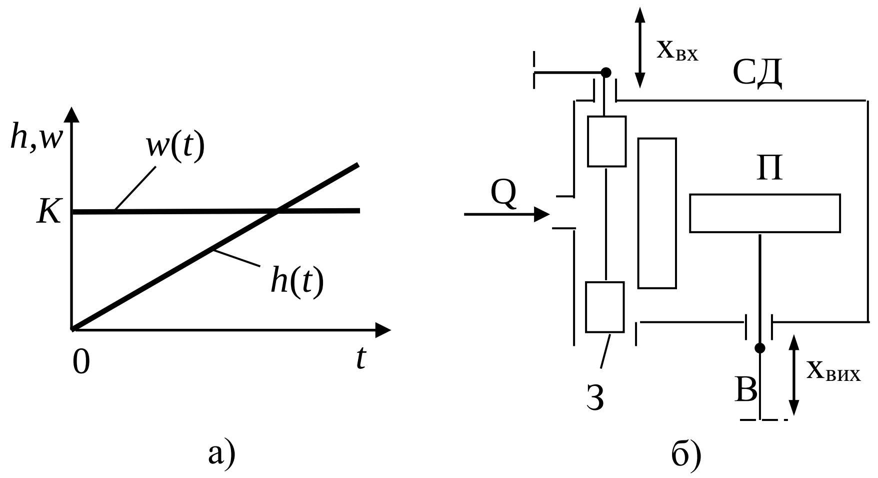


Рис. 2.6. Перехідна і вагова характеристики інтегральної ланки (а) та схема гідравлічного серводвигуна (б)

Згідно з перехідною характеристикою, при $t \to \infty$ матимемо $h \to \infty$.

Прикладом інтегральної (астатичної) ланки може бути гідравлічний серводвигун (рис. 2.6,б). Вхідною величиною ланки є переміщення золотника *З*, а вихідною – переміщення поршня *П*, що здійснюється за допомогою мастила Q, яке надходить, залежно від положення золотника, у верхню або нижню порожнину циліндра серводвигуна СД. Швидкість переміщення точки *B* у даному випадку пропорційна кількості мастила Q, що надходить у відповідну порожнину циліндра і залежить від положення золотника

$$V_{в} = \frac{dx_{вих}}{dt} = c_1 Q .$$

У свою чергу $Q = c_2 x_{вх}$, звідки $\frac{dx_{вих}}{dt} = c_1 c_2 x_{вх}$, де c_1, c_2 – постійні коефіцієнти. Інтегруючи праву й ліву частину рівняння, одержимо

$$x_{вих} = c_1 c_2 \int x_{вх} dt = K \int x_{вх} dt ,$$

або в операторній формі запису

$$x_{вих} = K \frac{1}{p} x_{вх} .$$

Диференційна ланка (ідеальний диференціатор). У цій ланці вихідна величина залежить пропорційно від швидкості зміни вхідної величини. При постійному значенні вхідної величини, величина на виході відсутня.

Рівняння динаміки ланки

$$y = K \frac{du}{dt} , \tag{2.15}$$

або в операторній формі

$$y = Kpu . \tag{2.16}$$

Передатну функцію ланки отримаємо за (2.16) у вигляді

$$W(p) = Kp. \tag{2.17}$$

Зауважимо, що в (2.17) вимога до передатних функцій щодо недопустимості перевищення степенем чисельника степеня знаменника не виконується. Тому ця ланка є ідеальною, а її фізична реалізація неможлива.

Помноживши (2.17) на p^{-1} і визначивши оригінал цього добутку, дістанемо перехідну та вагову характеристики диференційної ланки

$$h(t) = K\delta(t); \quad w(t) = \left[K\delta(t)\right]', \qquad t \ge 0, \tag{2.18}$$

де $\delta(t)$ – одиничний імпульс. Графічна інтерпретація цих характеристик наведена на рис. 2.7.

а б

Рис. 2.7. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики диференційної ланки

Інерційно-диференційна ланка (реальний диференціатор). Рівняння динаміки цієї ланки

$$T\frac{dy}{dt} + y = K\frac{du}{dt}, \tag{2.19}$$

або в операторній формі

$$(Tp+1)y = Kpu.$$

З цього рівняння отримаємо передатну функцію

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp+1}, \tag{2.20}$$

де T – стала часу ланки, K – коефіцієнт передачі. Перехідну характеристику ланки дістанемо як розв'язок (2.19) при $u(t) = 1(t)$ у вигляді

$$h(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}, \qquad t \ge 0. \tag{2.21}$$

Взявши похідну від цього виразу, отримаємо вагову характеристику

$$w(t) = -\frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}, \qquad t \geq 0. \tag{2.22}$$

Графіки перехідної і вагової характеристик інерційно-диференційної ланки показані на рис. 2.8.

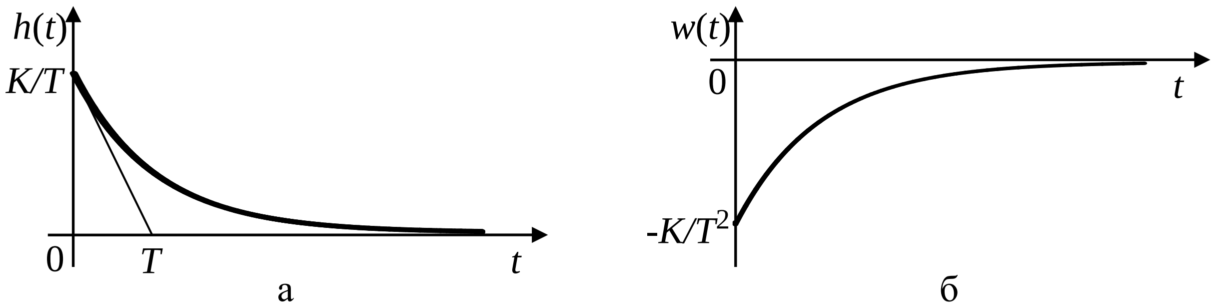


Рис. 2.8. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики інерційно-диференційної ланки

Диференційні елементи використовуються в САК для стабілізації перехідних процесів та поліпшення якісних показників систем. Ланками цього виду можуть бути електричні кола, зокрема *RL*-коло і *RC*-коло. Схема реального диференціатора розглянута в прикладі 1.3.

Форсувальна ланка (ідеальна форсувальна або пропорційно-диференційна ланка). Ця ланка є ідеальною. По суті вона являє собою паралельне з’єднання двох простіших типових ланок – пропорційної та ідеальної диференційної. Рівняння динаміки ланки

$$y = KT\frac{du}{dt} + Ku, \tag{2.23}$$

або в операторній формі

$$y = K(Tp+1)u. \tag{2.24}$$

Передатну функцію ланки отримаємо з (2.24) у вигляді

$$W(p) = K(Tp+1), \tag{2.25}$$

де T – стала часу ланки, K – коефіцієнт передачі.

Згідно з принципом суперпозиції перехідна та вагова характеристики форсувальної ланки будуть сумою відповідно перехідних та вагових характеристик пропорційної та диференційної ланок. Вирази для цих характеристик запишуться як

$$h(t) = KT\delta(t) + K; \quad w(t) = \left[KT\delta(t)\right]', \qquad t \ge 0. \tag{2.26}$$

На рис. 2.9 наведені графіки часових характеристик форсувальної ланки.

а б

Рис. 2.9. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики форсувальної ланки

Інерційно-форсувальна ланка (реальна форсувальна ланка). Рівняння динаміки цієї ланки

$$T_2 \frac{dy}{dt} + y = KT_1 \frac{du}{dt} + Ku. \tag{2.27}$$

Рівняння в операторній формі

$$(T_2 p + 1) y = Ku(T_1 p + 1).$$

З цього рівняння отримаємо передатну функцію

$$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}, \tag{2.28}$$

де T_1, T_2 – сталі часу ланки, K – коефіцієнт передачі. ПФ має нуль $z_1 = -1/T_1$ і полюс $p_1 = -1/T_2$, що є коренями поліномів чисельника і знаменника відповідно.

Особливістю цієї ланки є те, що для різних співвідношень сталих часу вона матиме кардинально інші властивості. Це явище буде показано нижче на часових характеристиках.

Розв'язавши (2.27) при $u(t) = 1(t)$ дістанемо вираз для перехідної характеристики ланки

$$h(t) = K\left[1 + \left(T_1/T_2 - 1\right)e^{-t/T_2}\right], \qquad t \ge 0. \tag{2.29}$$

Взявши похідну від цього виразу, матимемо рівняння вагової характеристики

$$w(t) = KT_2^{-1}\left(1 - T_1/T_2\right)e^{-t/T_2}, \qquad t \ge 0. \tag{2.30}$$

Перехідні характеристики інерційно-форсувальної ланки для різних співвідношень сталих часу показані на рис. 2.10, а вагові характеристики – на рис. 2.11.

Виходячи з наведених на рис. 2.10 та рис. 2.11 графіків можна зазначити, що в інерційно-форсувальній ланці при співвідношеннях сталих часу $T_1 > T_2$ домінують форсувальні (диференційні) властивості, а при $T_2 > T_1$ – інерційні (інтегральні) властивості.

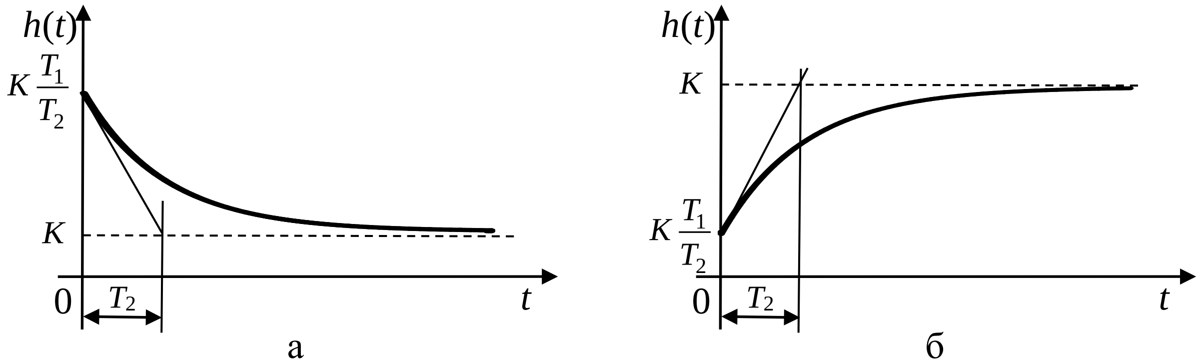


Рис. 2.10. Перехідні характеристики інерційно-форсувальної ланки:

а – $T_1 > T_2$; б – $T_2 > T_1$

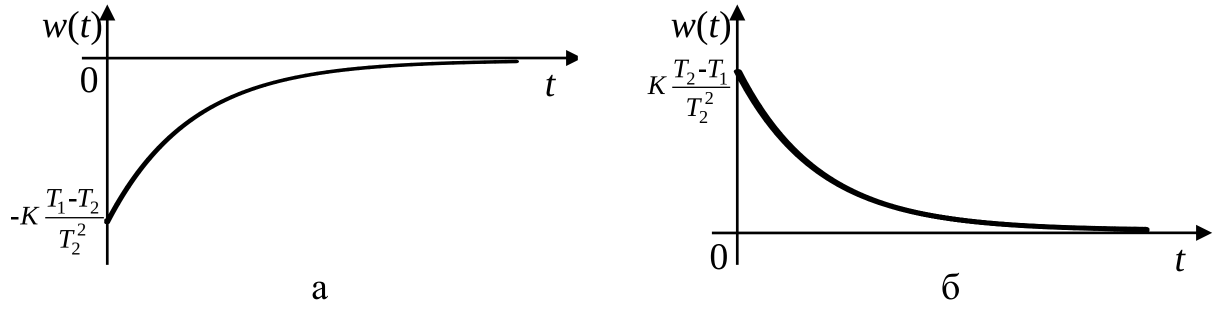


Рис. 2.11. Вагові характеристики інерційно-форсувальної ланки:

а – $T_1 > T_2$; б – $T_2 > T_1$

Ланки другого порядку. Ці ланки мають рівняння динаміки виду

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+y=Ku. \qquad (2.31)$$

Позначивши $\sqrt{a}=T; \quad b=2\zeta T$, запишемо рівняння в операторній формі

$$(T^2p^2+2\zeta Tp+1)y=Ku, \qquad (2.32)$$

де T – стала часу ланки, K – коефіцієнт передачі, ζ – ***коефіцієнт затухання*** або ***демпфування***.

Передатну функцію ланки 2-го порядку дістанемо з (2.32) у вигляді

$$W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2\zeta Tp+1}. \qquad (2.33)$$

В літературі з ТАК знаходить застосування також друга форма запису передатної функції ланки 2-го порядку

$$W(p)=\frac{K}{T_1^2p^2+T_2p+1}, \qquad (2.34)$$

де T_1, T_2 – сталі часу, що визначаються як $T_1=T;\ T_2=2\zeta T$.

Як відомо з курсу математики, розв’язок рівняння (2.31) має вигляд

$$y=Ku(C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+1), \qquad (2.35)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, p_1, p_2 – корені характеристичного рівняння

$$T^2p^2+2\zeta Tp+1=0. \qquad (2.36)$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння можливі два види ланок 2-го порядку – аперіодичні й коливальні, які мають однакові ПФ, але істотно відмінні часові характеристики. Різним варіантам коренів відповідає різне значення коефіцієнту затухання ζ – при $0\le\zeta<1$ ланка матиме коливальні властивості, при $\zeta\ge1$ ланка не матиме коливальних властивостей.

Аперіодична ланка 2-го порядку. Ланки цього виду мають від'ємні дійсні корені $p_1<0,\ p_2<0$ характеристичного рівняння (2.36), що можливо за умови $\zeta \ge 1$. В цьому разі знаменник передатної функції (2.33) можна розкласти на два поліноми 1-го порядку. Отже передатна функція аперіодичної ланки 2-го порядку може бути записана як

$$W(p) = \frac{K}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \tag{2.37}$$

де сталі часу дорівнюють: $T_3 = T\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right); T_4 = T\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right); T = \sqrt{T_3 T_4}$.

Якщо корені рівняння (2.36) некратні $p_1 \ne p_2$, то $\zeta > 1, T_3 > T_4$ і за (2.35) при $u(t) = 1(t)$ матимемо перехідну характеристику ланки

$$h(t) = K\left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4}\right), \qquad t \ge 0. \tag{2.38}$$

Взявши похідну від $h(t)$, отримаємо рівняння вагової характеристики

$$w(t) = \frac{K}{T_3 - T_4}\left(e^{-t/T_3} - e^{-t/T_4}\right), \qquad t \ge 0. \tag{2.39}$$

Перехідна та вагова характеристики аперіодичної ланки 2-го порядку показані на рис. 2.12.

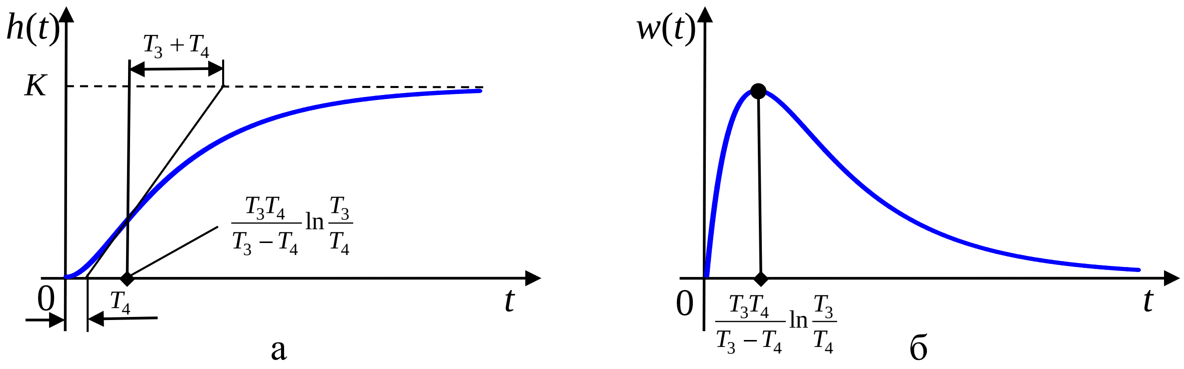


Рис. 2.12. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики аперіодичної ланки 2-го порядку ($T_3 > T_4$)

Перехідна характеристика $h(t)$ є монотонною кривою без періодичної компоненти, що й визначає назву даної ланки.

Коливальна ланка 2-го порядку. Коливальною ланка буде за наявності у характеристичному рівнянні (2.36) комплексних коренів з від'ємною дійсною частиною $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, для чого необхідною умовою є $0 < \zeta < 1$. Перехідну характеристику ланки отримаємо із (2.35) при $u(t) = 1(t)$ у вигляді

$$h(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_0 t}\left(\cos(\omega_k t) + \zeta\omega_0\omega_k^{-1}\sin(\omega_k t)\right)\right], \qquad t \geq 0, \qquad (2.40)$$

де $\omega_0 = 1/T$ – ***резонансна частота*** ланки; $\omega_k = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ – ***частота власних коливань***; $T_k = 2\pi/\omega_k$ – період коливань; $\alpha = \zeta\omega_0$; $\beta = \omega_k$.

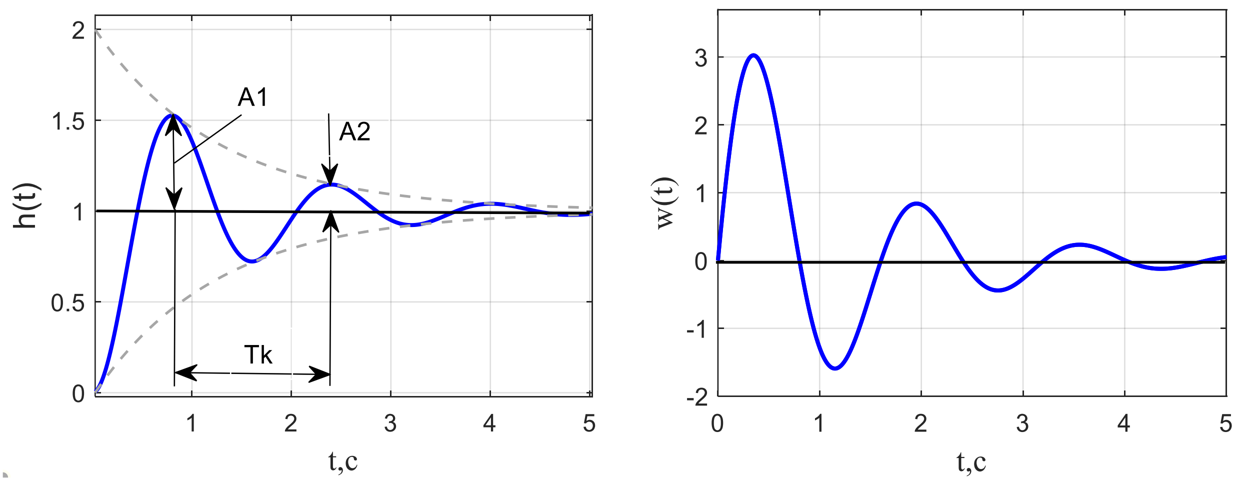
Перехідна характеристика коливальної ланки з параметрами $K = 1, T = 0.25\,c, \zeta = 0.2$ наведена на рис. 2.13,а. Огинаючі $h(t)$ експоненти визначаються як

$$exp_{1,2}(t) = K\left[1 \pm (1-\zeta^2)^{-1/2} e^{-\zeta t/T}\right],$$

де знак «+» на рисунку відповідає верхній криві, а знак «–» – нижній криві. Взявши похідну від $h(t)$ матимемо вираз для вагової характеристики ланки

$$w(t) = K\omega_0(1-\zeta^2)^{-1/2} e^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_k t), \qquad t \geq 0. \qquad (2.41)$$

Вагова характеристика коливальної ланки зображена на рис. 2.13,б.



а б

Рис. 2.13. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики коливальної ланки 2-го порядку

Важливою характеристикою коливань є ***логарифмічний декремент затухання*** або просто ***декремент затухання, що дорівнює натуральному***

логарифму відношення двох сусідніх амплітуд. Враховуючи часову залежність амплітуди коливань $A(t) = Ke^{-\zeta t/T}$, запишемо вираз для обчислення декременту затухання

$$d = \ln\frac{A(t)}{A(t+T_k)} = \ln\frac{Ke^{-\zeta t/T}}{Ke^{-\zeta(t+T_k)/T}} = \frac{\zeta T_k}{T}. \qquad (2.42)$$

Час перехідного процесу коливальної ланки можна приблизно оцінити за сталою часу експоненти, що огинає перехідну характеристику, як

$$t_{\text{п}} \cong (3-4)\frac{T}{\zeta} = (3-4)\frac{1}{\alpha}.$$

На практиці буває необхідно за експериментально отриманою перехідною характеристикою реальної ланки визначити параметри відповідної коливальної ланки. В цьому разі на кривій $h(t)$ слід заміряти величини $K = h(\infty), T_k, A_1, A_2$ (рис. 2.13,а). Параметри передатної функції в стандартному вигляді (2.33) або у нормованому за коефіцієнтом при найвищому степені оператора p вигляді

$$W(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

можна визначити за формулами

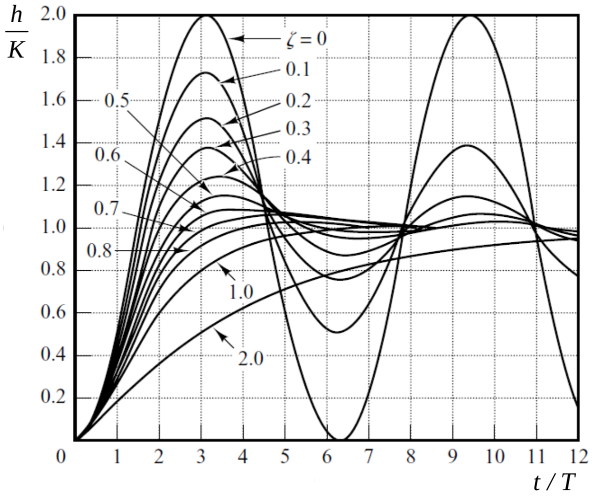
$$d = \ln\frac{A_1}{A_2};\ \zeta = \frac{d}{\sqrt{4\pi^2 + d^2}};\ \ \omega_k = \frac{2\pi}{T_k};\ \omega_0 = \frac{\omega_k}{\sqrt{1-\zeta^2}};\ T = \frac{1}{\omega_0}. \qquad (2.47)$$

Аналіз виразу (2.40) дозволяє отримати формули для аналітичного визначення максимального відхилення $h(t)$ від усталеного значення $h(\infty)$ у відсотках, яке називається перерегулюванням, та амплітуди коливань

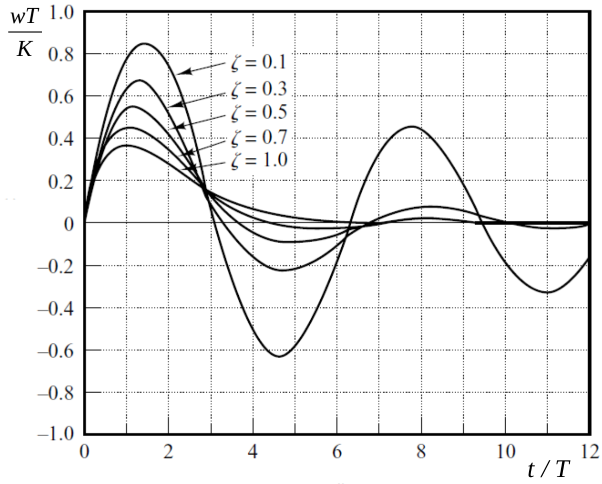
$$\sigma = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%; \qquad A_1 = Ke^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}; \qquad A_2 = Ke^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})3\pi}.$$

Також можна обчислити час наростання $t_н$ за якого $h(t)$ вперше сягає усталеного значення $t_н = (\pi - \varphi)/\omega_k$, де $\varphi = arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$ – фаза коливань.

На рис. 2.14 побудовані сімейства нормованих перехідних та вагових характеристик ланки 2-го порядку при різних значеннях коефіцієнту затухання ζ.



а



б

Рис.2.14. Нормовані перехідні (а) та вагові (б) характеристики ланки 2-го порядку ($\zeta = \mathrm{var}$)

Консервативна ланка 2-го порядку. Ланка буде консервативною, якщо характеристичне рівняння (2.36) матиме чисто уявні корені $p_{1,2} = \pm j\beta$, умовою чого є $\zeta = 0$. Підставивши $\zeta = 0$ в (2.40) та в (2.41), дістанемо рівняння перехідної характеристики консервативної ланки

$$h(t) = K\left[1 - \cos(\omega_k t)\right], \qquad t \ge 0 \tag{2.48}$$

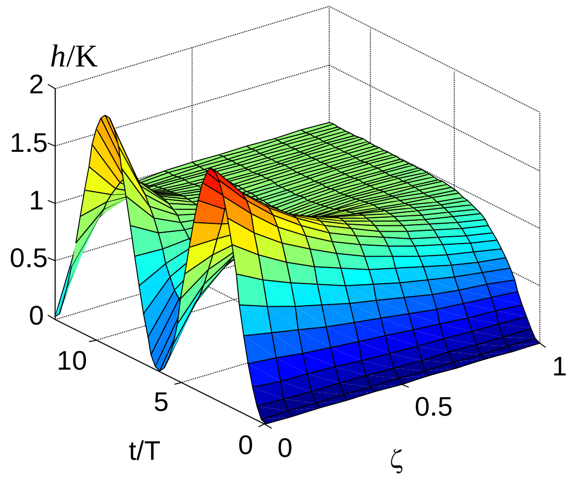
та вагової характеристики

$$w(t) = K\omega_0 \sin(\omega_k t), \qquad t \ge 0. \tag{2.49}$$

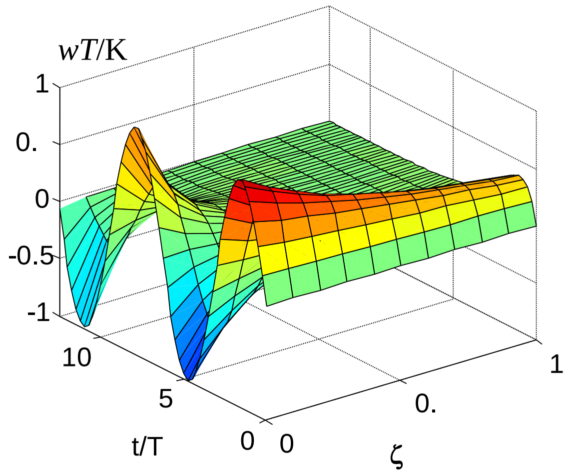
Перехідна характеристик консервативної ланки зображена на рис. 2.14,а при $\zeta = 0$. Вона являє собою незатухаючі коливання, у яких середнє значення та амплітуда дорівнюють K, а фазового зсуву немає.

Прикладами ланок 2-го порядку є каскадні магнітні підсилювачі, електромашинні підсилювачі поперечного поля, двигуни постійного струму та ін.

Для більшої наочності на рис. 2.15 побудовані нормовані характеристики ланки 2-го порядку у тривимірному вигляді як функціональні залежності від часу t і коефіцієнту затухання ζ. Перехідна характеристика $h(t,\zeta)$ зображена на рис. 2.15,а, а вагова характеристика $w(t,\zeta)$ – на рис. 2.15,б.



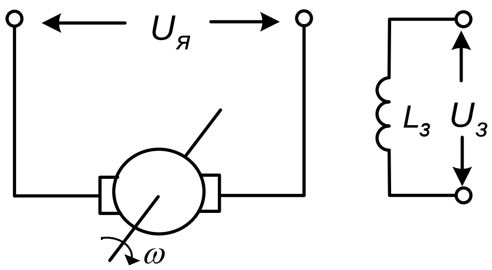
а



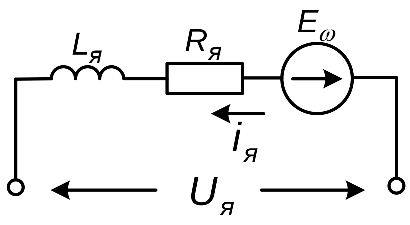
б

Рис. 2.15. Тривимірні нормовані характеристики ланки 2-го порядку: а – перехідна $h(t,\zeta)$; б – вагова $w(t,\zeta)$

Приклад 2.2. На рис. 2.16 зображені принципова схема та схема заміщення об'єкта – двигуна постійного струму з незалежним збудженням, де $U_я, i_я$ – напруга та струм якоря; $U_з, L_з$ – напруга збудження та індуктивність обмотки збудження; $L_я, R_я$ – індуктивність та опір кола якоря; E_ω – ЕРС (електрорушійна сила) обертання двигуна; ω – кутова швидкість якоря. Треба отримати передатну функцію двигуна, що пов'язує швидкість обертання якоря (вихід об'єкта) з напругою живлення якоря (вхід об'єкта).



а



б

Рис. 2.16. Принципова схема (а) та схема заміщення (б) двигуна постійного струму з незалежним збудженням

Р о з в ' я з а н н я. На основі схеми заміщення дістанемо рівняння електричної рівноваги кола якоря двигуна

$$U_я = L_я \frac{di_я}{dt} + R_я i_я + E_\omega,$$

де $L_я, R_я$ – індуктивність та активний опір кола якоря; $E_\omega = c_e \omega$ – ЕРС (електрорушійна сила) обертання двигуна; $i_я$ – струм якоря; c_e – постійний коефіцієнт.

Рівняння рівноваги моментів на валу двигуна має вигляд

$$M_{дин} = M_д - M_о,$$

де $M_{дин}, M_д, M_о$ – динамічний момент, момент двигуна та момент сил опору відповідно. Приймемо, що двигун працює без навантаження і моментом опору можна знехтувати $M_о \cong 0$. Момент двигуна $M_д$ пропорційний струму якоря. Тому, враховуючи 2-й закон Ньютона для обертального руху, рівняння рівноваги моментів на валу двигуна можна записати як

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_i i_я,$$

де J – момент інерції валу двигуна, c_i – постійний коефіцієнт. Звідси дістанемо вираз для струму якоря

$$i_я = \frac{J}{c_i} \frac{d\omega}{dt}.$$

Підставивши $i_я$ у рівняння електричної рівноваги кола якоря, одержимо

$$\frac{L_я}{c_i} J \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_я J}{c_i} \frac{d\omega}{dt} + c_e \omega = U_я.$$

Введемо позначення $\frac{L_я J}{c_i c_e} = T_1^2$; $\frac{R_я J}{c_i c_e} = T_2$; $\frac{1}{c_e} = K_д$. Після відповідних перетворень матимемо рівняння динаміки двигуна постійного струму в операторній формі запису

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)\omega = K_\partial U_я .$$

Із рівняння динаміки дістанемо передатну функцію двигуна

$$W(p) = \frac{\omega}{U_я} = \frac{K_\partial}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Якщо $T_2 = \dfrac{R_я J}{c_i c_e} > 2T_1 = 2\sqrt{\dfrac{L_я J}{c_i c_e}}$, або $R_я \sqrt{\dfrac{J}{c_i c_e}} > 2\sqrt{L_я}$, то двигун при зазначеному співвідношенні параметрів буде аперіодичною ланкою 2-го порядку. В іншому випадку двигун буде коливальною ланкою.

Ланка запізнення. Характерними рисами ланки запізнення є те, що вхідна величина відтворюється на виході ланки без жодних змін але із деяким часовим запізненням τ. Прикладами цієї ланки можуть бути трубопроводи, транспортери, конвеєри (транспортне запізнення), цифрові контролери (інформаційне запізнення), транзисторні інвертори в електроприводах (модуляційне запізнення) та ін.

Рівняння ланки запізнення

$$y(t) = u(t - \tau), \qquad (2.50)$$

де τ – ***час запізнення***. Згідно з теоремою запізнення [6], перетворення Лапласа для вхідної величини визначиться як $L\left[u(t-\tau)\right] = L\left[u(t)\right]e^{-\tau p} = u(p)e^{-\tau p}$. Отже рівняння (2.50) у зображеннях за Лапласом матиме вигляд

$$y(p) = u(p)e^{-\tau p}. \qquad (2.51)$$

Передатна функція ланки запізнення за (2.51) запишеться як

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = e^{-\tau p}. \qquad (2.52)$$

Із рівняння (2.50) отримаємо вирази для часових характеристик ланки

$$h(t) = 1(t - \tau); \quad w(t) = \delta(t - \tau), \qquad t \geq 0. \qquad (2.53)$$

Перехідна та вагова характеристики ланки запізнення показані на рис. 2.17.

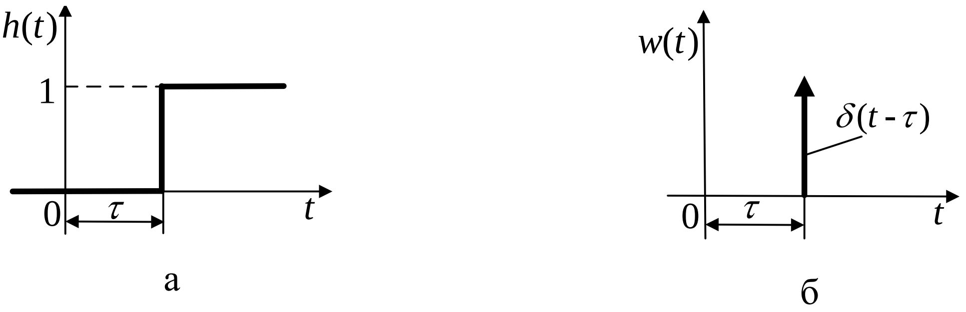


Рис. 2.17. Перехідна (а) та вагова (б) характеристики ланки запізнення

Крім розглянутих вище типових ланок, які відрізняються виглядом диференційних рівнянь та коренями характеристичного рівняння, існує класифікація ланок за розташуванням нулів і полюсів на комплексній площині, що буде показано далі.

2.2 Частотні характеристики САК

2.2.1 Амплітудно-фазові частотні характеристики

Основною частотною характеристикою ланок і систем є ***амплітудно-фазова частотна характеристика*** **(АФХ)**. Її можна одержати двома шляхами: графоаналітичним та експериментальним.

При побудові АФХ ланки (системи) графоаналітичним методом у її передатній функції роблять підстановку $p = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$, ω – частота, що може змінюватися від 0 до +∞ або, в деяких випадках, від -∞ до +∞.

У загальному випадку АФХ має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}. \qquad (2.54)$$

Зазначимо, що в літературні з ТАК $W(j\omega)$ також називають ***комплексним коефіцієнтом передачі*** або ***частотною передатною функцією***. Оскільки $W(j\omega)$ є комплексною величиною, то її можна розподілити на дійсну $U(\omega)$ і уявну $V(\omega)$ компоненти та записати в алгебричній формі

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \qquad (2.55)$$

де $U(\omega)$ називають ***дійсною частотною характеристикою*** **(ДЧХ)**, а $V(\omega)$ – ***уявною частотною характеристикою*** **(УЧХ)**.

Знаючи $U(\omega)$ і $V(\omega)$, можна отримати ***амплітудно-частотну характеристику*** **(АЧХ)**

$$A(\omega) = \sqrt{\left[U(\omega)\right]^2 + \left[V(\omega)\right]^2}\,, \tag{2.56}$$

а також ***фазочастотну характеристику*** **(ФЧХ)** у вигляді

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \quad . \tag{2.57}$$

АЧХ та ФЧХ є відповідно модулем і аргументом комплексної величини $W(j\omega)$:

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right|, \tag{2.58}$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left[W(j\omega)\right]. \tag{2.59}$$

Тому у показниковій формі АФХ запишеться як

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{2.60}$$

Частотні характеристики будуються також в логарифмічному масштабі, вони вивчатимуться нижче. Розглянемо побудову частотних характеристик на прикладі.

Приклад 2.3. За допомогою графоаналітичного методу побудувати частотні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку.

Р о з в ' я з а н н я. Передатна функція аперіодичної ланки 1-го порядку

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Після заміни $p = j\omega$ отримаємо амплітудно-фазову частотну характеристику

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1}.$$

Щоб позбутися уявної величини у знаменнику, помножимо чисельник і знаменник на комплексно-спряжену величину. Після цього одержимо

$$W(j\omega)=\frac{K(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}=\frac{K}{1+T^2\omega^2}-j\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\,.$$

Отже дійсна й уявна складові АФХ мають вигляд

$$U(\omega)=\frac{K}{1+T^2\omega^2};\quad V(\omega)=\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}\,.$$

Амплітудно-частотну характеристику отримаємо як

$$A(\omega)=\sqrt{U^2+V^2}=\sqrt{\frac{K^2}{(1+T^2\omega^2)^2}+\frac{(KT\omega)^2}{(1+T^2\omega^2)^2}}=\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\,,$$

а фазочастотну характеристику дістанемо у вигляді

$$\varphi(\omega)=arctg(V/U)=-arctg(T\omega)\,.$$

Задавши певні ω, обчислимо відповідні цим частотам значення $U(\omega)$ і $V(\omega)$ та занесемо дані в табл.2.1

Таблиця 2.1. Значення ДЧХ та УЧХ для заданих частот

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	K	0
$1/T$	$K/2$	$-K/2$
∞	0	0

Амплітудно-фазова частотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку побудована за табличними даними на рис. 2.18. Видно, що вона є півколом, розташованим у четвертому квадранті комплексної площини. Для деякої частоти ω_k на рисунку продемонстровані відповідні значення амплітудно-фазової частотної характеристики $W(j\omega_k)$ та чотирьох інших частотних характеристик.

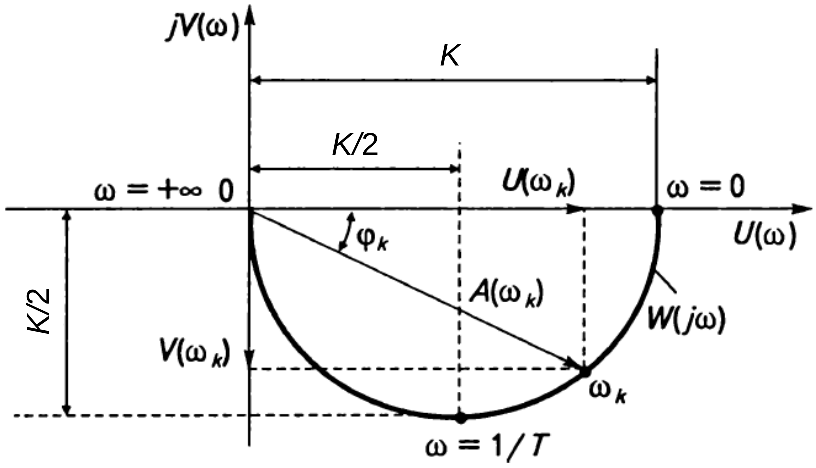


Рис. 2.18. АФХ аперіодичної ланки 1-го порядку

Частотні характеристики $U(\omega)$, $V(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ побудовані на рис. 2.19 (на рисунках а, б, в, г відповідно).

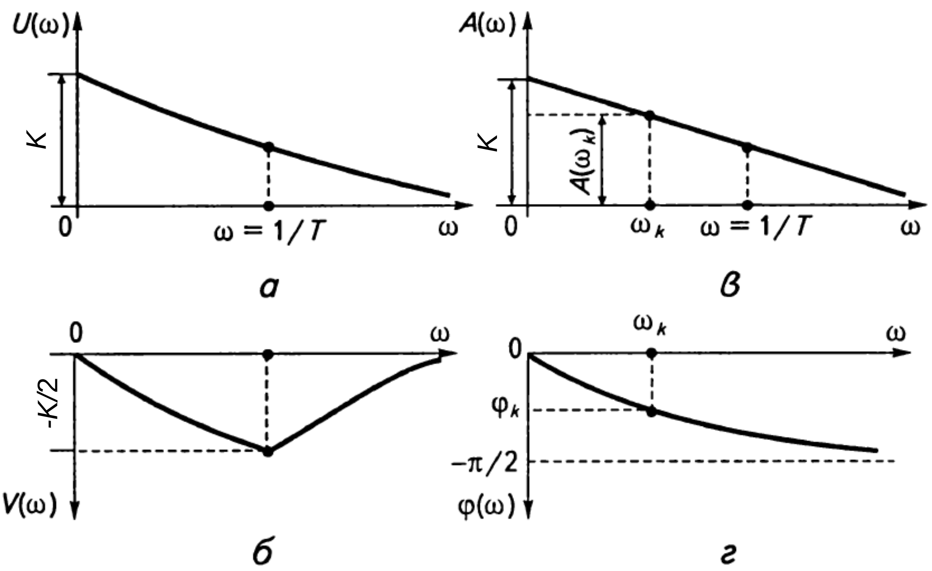


Рис. 2.19. Частотні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку:

а – дійсна; б – уявна; в – амплітудна; г – фазова

2.2.2 Експериментальний метод побудови АФХ

Для побудови амплітудно-фазової частотної характеристики потрібно мати ланку (систему) у натуральному вигляді або ж відповідну модель, а також генератор змінної частоти й прилади для вимірювання амплітуди та фази вихідної величини.

На вхід ланки подають синусоїдальні коливання $u = a\sin\omega t$. При цьому на виході ланки одержують коливання $y = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$. Вибравши $a = 1$, матимемо вираз для АФХ у вигляді

$$W(j\omega) = \frac{y}{u} = \frac{A(\omega)e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}}{e^{j\omega t}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Цей вираз показує, що у процесі експерименту для кожного значення частоти ω_k необхідно вимірювати амплітуду $A_k = A(\omega_k)$ та фазу $\varphi_k = \varphi(\omega_k)$ сигналу на виході досліджуваної ланки. Результати вимірювань за різних частот $\omega_1,...,\omega_n$ зводять у табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Дані експерименту для побудови АФХ

ω_1	A_1	φ_1
ω_2	A_2	φ_2
⋮	⋮	⋮
ω_n	A_n	φ_n

За табличними даними на комплексній площині будується амплітудно-фазова частотна характеристика $W(j\omega)$, а також, за потреби, всі інші частотні характеристики – $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)]$, $V(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)]$.

2.2.3 Логарифмічні частотні характеристики

Розглянуті вище амплітудна та фазові частотні характеристики окремих ланок і груп ланок можуть бути побудовані в логарифмічному масштабі. У цьому випадку їх називають логарифмічними частотними характеристиками: ***логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою*** **(ЛАХ)** та ***логарифмічною фазочастотною характеристикою*** **(ЛФХ)**.

При побудові логарифмічних амплітудних характеристик по вертикальній осі відкладають логарифм відповідної величини в ***децибелах*** (дБ). Для отримання відповідної величини в децибелах необхідно її десятковий логарифм помножити на 20. Наприклад, амплітудно-частотна характеристика в децибелах матиме вигляд

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega).$$

На горизонтальній осі відкладають частоту в логарифмічному масштабі – в октавах або декадах. Проте часто записують і значення самої частоти ω, хоча масштаб для неї буде нерівномірним. На початку координат можна відкласти довільне значення $\lg\omega$ при $\omega > 0$, тому що $\lg 0 = -\infty$.

Одна ***октава*** являє собою величину, яка відповідає різниці логарифмів деякої частоти ω та її подвоєного значення

$$1\,\text{октава} = \lg 2\omega - \lg\omega = \lg 2 + \lg\omega - \lg\omega = \lg 2 \approx 0{,}3.$$

Одна ***декада*** дорівнює різниці логарифмів деякої частоти ω та її вдесятеро більшого значення

$$1\,\text{декада} = \lg 10\omega - \lg\omega = \lg 10 = 1.$$

Очевидно, що інтервал, який дорівнює одній октаві або декаді, не залежить від значення частоти ω.

<u>Перевагами</u> логарифмічних характеристик є більш вдалий масштаб, що дозволяє легко лінеаризувати відповідні характеристики і спростити побудову логарифмічних характеристик груп ланок, а також можливість спрощення розрахунків і графічних побудов за рахунок заміни складніших дій (множення, ділення) простішими діями (додаванням, відніманням).

Так, наприклад, отримання АЧХ групи послідовно з'єднаних ланок

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |W_1(j\omega)||W_2(j\omega)|...|W_n(j\omega)| = \frac{|Q_1(j\omega)||Q_2(j\omega)|...|Q_n(j\omega)|}{|P_1(j\omega)||P_2(j\omega)|...|P_n(j\omega)|}$$

при застосуванні натурального масштабу вимагає множення операторів чисельника і знаменника із наступним діленням їх один на одного. Якщо для побудови використати логарифмічні характеристики, то можна записати

$$20\lg|W(j\omega)| = 20\lg|Q_1(j\omega)| + ... + 20\lg|Q_n(j\omega)| - 20\lg|P_1(j\omega)| - ... - 20\lg|P_n(j\omega)|.$$

В цьому випадку обчислення істотно спрощуються. Результуюча ЛАХ групи послідовно з’єднаних ланок отримується як геометрична сума відповідних характеристик кожної ланки.

Фазочастотні логарифмічні характеристики будуються як залежність $\varphi(\omega) = arctg\left[V(\omega)/U(\omega)\right]$. При цьому по вертикальній осі відкладають фазу в радіанах чи градусах в натуральному масштабі, а по горизонтальній осі – частоту в логарифмічному масштабі. Результуюча ЛФХ групи послідовно з’єднаних ланок визначається як сума фазових характеристик кожної ланки.

Практичну побудову логарифмічних частотних характеристик розглянемо на прикладі аперіодичної ланки 1-го порядку.

Логарифмічні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку. Передатна функція ланки

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика цієї ланки

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1+jT\omega)}\frac{(1-jT\omega)}{(1-jT\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}.$$

З виразу для АФХ дістанемо фазочастотну характеристику

$$\varphi(\omega) = arctg\left[V(\omega)/U(\omega)\right] = -arctg(T\omega), \qquad (2.61)$$

та амплітудно-частотну характеристику

$$A(\omega) = \sqrt{\left[U(\omega)\right]^2 + \left[V(\omega)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}.$$

За АЧХ формула для ЛАХ у логарифмічних одиницях (дБ) запишеться як

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}. \qquad (2.62)$$

Оскільки у цій формулі $20\lg K = const$, проаналізуємо її другий складник $N(\omega) = 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$ при різних значеннях ω. На малих частотах $T\omega \ll 1$,

$N \approx 20\lg 1 = 0$, а на великих частотах $T\omega \gg 1$ і $N \approx 20\lg\sqrt{T^2\omega^2} = 20\lg T\omega$ являє собою пряму, що нахилена під деяким кутом відносно осі абсцис. Межа між малими і великими частотами відповідає рівності $T\omega = 1$, звідси частота $\omega = 1/T$ є ***частотою спряження*** (з'єднання) двох прямих.

На рис. 2.20,а побудована лінеаризована характеристика $N(\omega) = 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$ у вигляді двох асимптот – 0B та BC.

Приріст прямої BC на одну октаву є різницею ординат при $2\omega T$ та ωT:

$$20\lg 2\omega T - 20\lg \omega T = 20\lg 2 = 20\cdot 0{,}3 \approx 6\,\text{дБ}.$$

Штриховою лінією на рис. 2.20,а показана точна крива $N(\omega) = 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$. Тут за $T\omega = 1$ маємо $N = 20\lg\sqrt{1+\omega^2 T^2} = 20\lg\sqrt{2} \approx 3\,\text{дБ}$, що є найбільшим значенням помилки лінеаризації $N(\omega)$.

Зазначимо, що лінеаризовану таким чином логарифмічну амплітудно-частотну характеристику називають ***асимптотичною ЛАХ***.

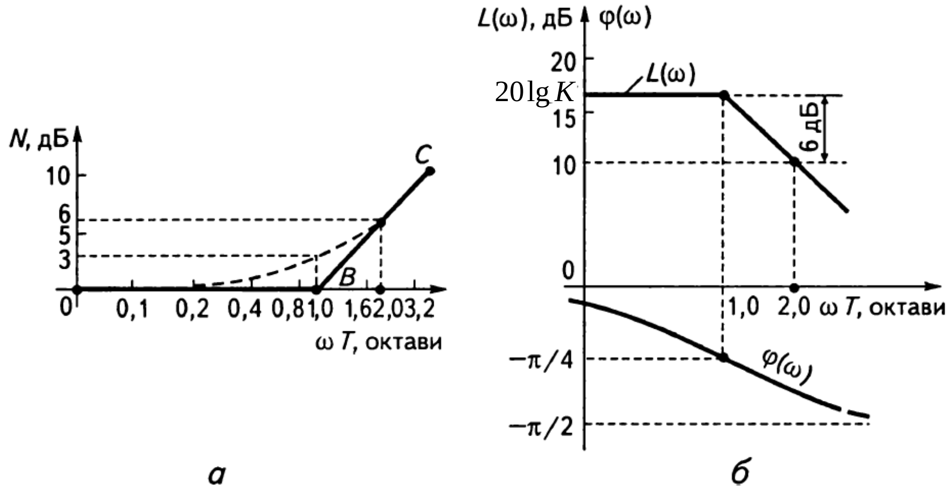


Рис. 2.20. Побудова ЛАХ та ЛФХ аперіодичної ланки 1-го порядку

За аналогією з рис. 2.20,а на рис. 2.20,б побудована асимптотична ЛАХ аперіодичної ланки 1-го порядку $L(\omega)$, що відповідає виразу (2.43). Її складниками є горизонтальна лінія та лінія з нахилом -6 дБ/окт, або, що те саме, -20 дБ/дек. Частота спряження цих ліній $\omega = 1/T$.

Для побудови логарифмічної фазочастотної характеристики на вертикальній осі відкладається фаза в натуральному масштабі у радіанах або градусах, а горизонтальна вісь в логарифмічному масштабі є тою ж самою, що і для ЛАХ. На рис. 2.20,б зображена ЛФХ аперіодичної ланки 1-го порядку. Вона, згідно з (2.42), являє собою залежність $\varphi(\omega) = -arctg\ \omega T$.

2.3 Частотні та логарифмічні частотні характеристики типових ланок САК

У цьому розділі вивчаються частотні характеристики типових ланок САК як у натуральному так і в логарифмічному масштабах. Тут розглядаються такі ланки, як пропорційна, аперіодична 1-го порядку, інтегральна, диференційна, інерційно-диференційна, форсувальна, інерційно-форсувальна, ланки 2-го порядку та ланка запізнення.

Пропорційна ланка. Передатна функція ланки $W(p) = K$, а її амплітудно-фазова частотна характеристика $W(j\omega) = K$. На комплексній площині АФХ являє собою точку, що розміщується на дійсній додатній півосі.

ЛАХ пропорційної ланки $L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg K$, а ЛФХ – $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 0$. Отже графічним зображенням ЛАХ буде горизонтальна лінія на рівні $20\lg K$, а ЛФХ співпадатиме з віссю абсцис.

Аперіодична ланка 1-го порядку. Частотні та логарифмічні частотні характеристики цієї ланки були розглянуті вище у п. 2.2.3.

Інтегральна ланка. Передатна функція ланки має вигляд

$$W(p) = K/p.$$

АФХ інтегральної ланки запишеться як

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j\frac{K}{\omega}. \qquad (2.63)$$

На комплексній площині АФХ є прямою, що співпадає з від'ємною уявною піввіссю, як показано на рис. 2.21,а. При $\omega \to 0$ АФХ $W(j\omega) \to -\infty$.

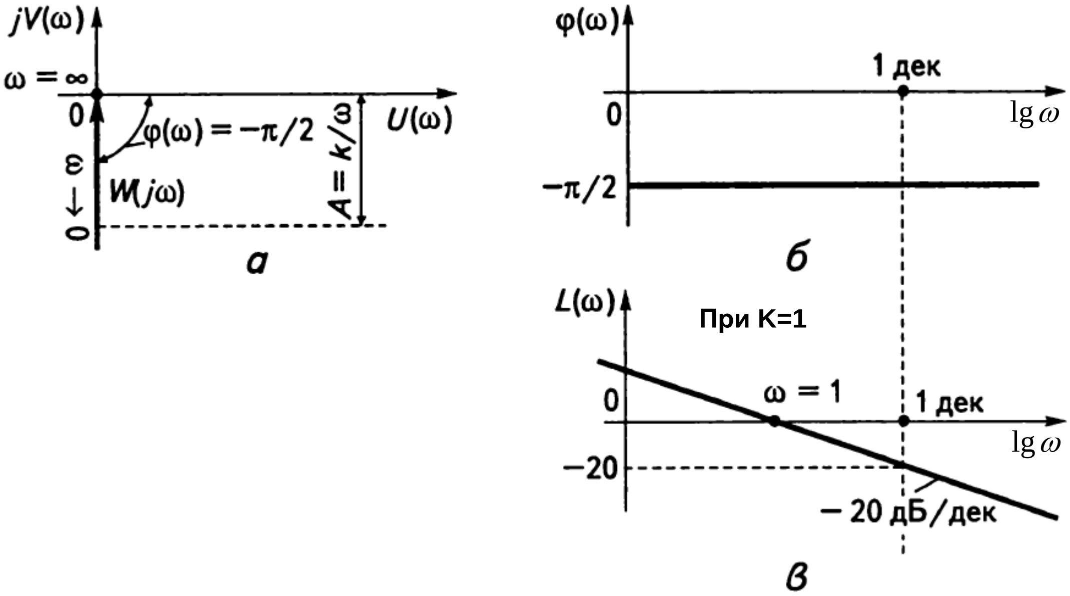


Рис. 2.21. АФХ (а), ЛАХ (в) та ЛФХ (б) інтегральної ланки

Амплітудно-частотна характеристика ланки

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = K/\omega .$$

Фазочастотна характеристика в загальному випадку записується як $\varphi(\omega) = arctg\left[V(\omega)/U(\omega)\right]$. Згідно з (2.44) $U(\omega) = 0,\ V(\omega) = -K/\omega$. Тому ФЧХ інтегральної ланки буде постійною величиною

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 .$$

Вона зображена на рис. 2.21,б. ЛАХ інтегральної ланки запишеться як

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega . \qquad (2.64)$$

Згідно з цією формулою, ЛАХ являє собою пряму лінію, ордината якої на частоті $\omega = 1c^{-1}$ ($\lg\omega = 0$ дек) дорівнює $20\lg K$. На одну декаду зміна ординати складе $-20\lg 10\omega - (-20\lg\omega) = -20\lg 10 = -20$ дБ. Отже ЛАХ інтегральної ланки, яка наведена на рис. 2.21,в, буде прямою лінією з нахилом -20 дБ/дек.

Диференційна ланка. Передатна функція ланки

$$W(p) = Kp ,$$

а її амплітудно-фазова частотна характеристика

$$W(j\omega) = Kj\omega . \qquad (2.65)$$

На комплексній площині АФХ є прямою, що співпадає з додатною уявною піввіссю, як показано на рис. 2.22,а. При $\omega \to \infty$ АФХ $W(j\omega) \to \infty$.

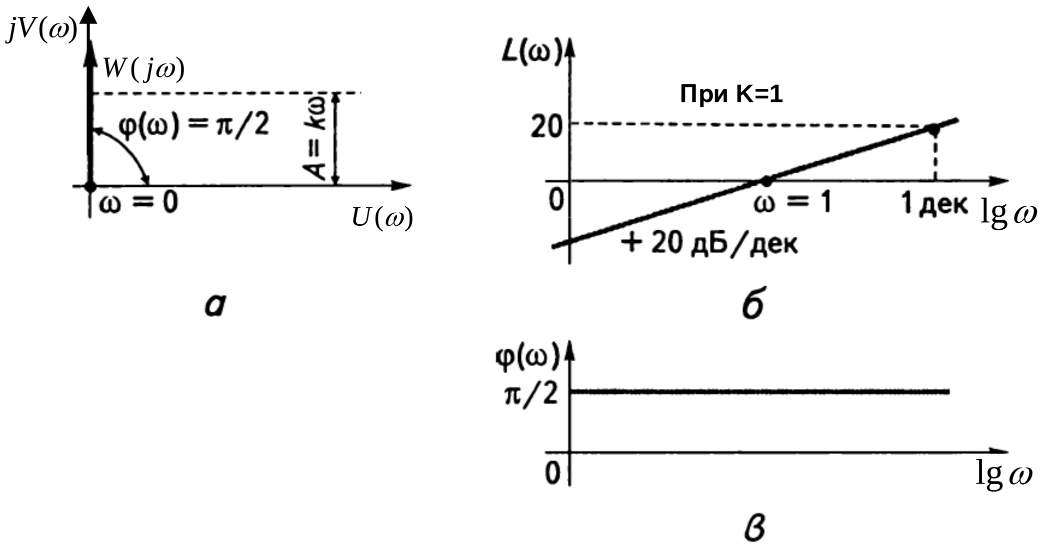


Рис. 2.22. АФХ (а), ЛАХ (б) та ЛФХ (в) диференційної ланки

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = K\omega.$$

ЛАХ диференційної ланки запишеться у вигляді

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega.$$

Згідно з цією формулою ЛАХ являє собою пряму лінію, ордината якої на частоті $\omega = 1c^{-1}$ ($\lg 1 = 0$дек) дорівнює $20\lg K$. На одну декаду зміна ординати складе $20\lg 10\omega - 20\lg\omega = 20\lg 10 = 20$дБ. Отже ЛАХ диференційної ланки матиме нахил +20 дБ/дек, вона наведена на рис. 2.22,б.

Виходячи з (2.65), $U(\omega) = 0,\ V(\omega) = K\omega$. Тому ФЧХ ланки $\varphi(\omega) = arctg\left[V(\omega)/U(\omega)\right]$ буде постійною величиною

$$\varphi(\omega) = \pi/2.$$

Ця характеристика зображена на рис. 2.22,в.

Інерційно-диференційна ланка. Ланка має передатну функцію

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp+1},$$

а її АФХ запишеться як

$$W(j\omega)=\frac{Kj\omega}{Tj\omega+1}=U(\omega)+jV(\omega)=\frac{KT\omega^2+jK\omega}{T^2\omega^2+1}. \qquad (2.66)$$

Із (2.66) дістанемо ДЧХ та УЧХ:

$$U(\omega)=\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}; \qquad V(\omega)=\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}.$$

Змінюючи частоту в діапазоні $0\le\omega\le\infty$ за ДЧХ та УЧХ можна побудувати $W(j\omega)$, яка знаходиться у 1-му квадранті і має форму півкола (рис. 2.23,а).

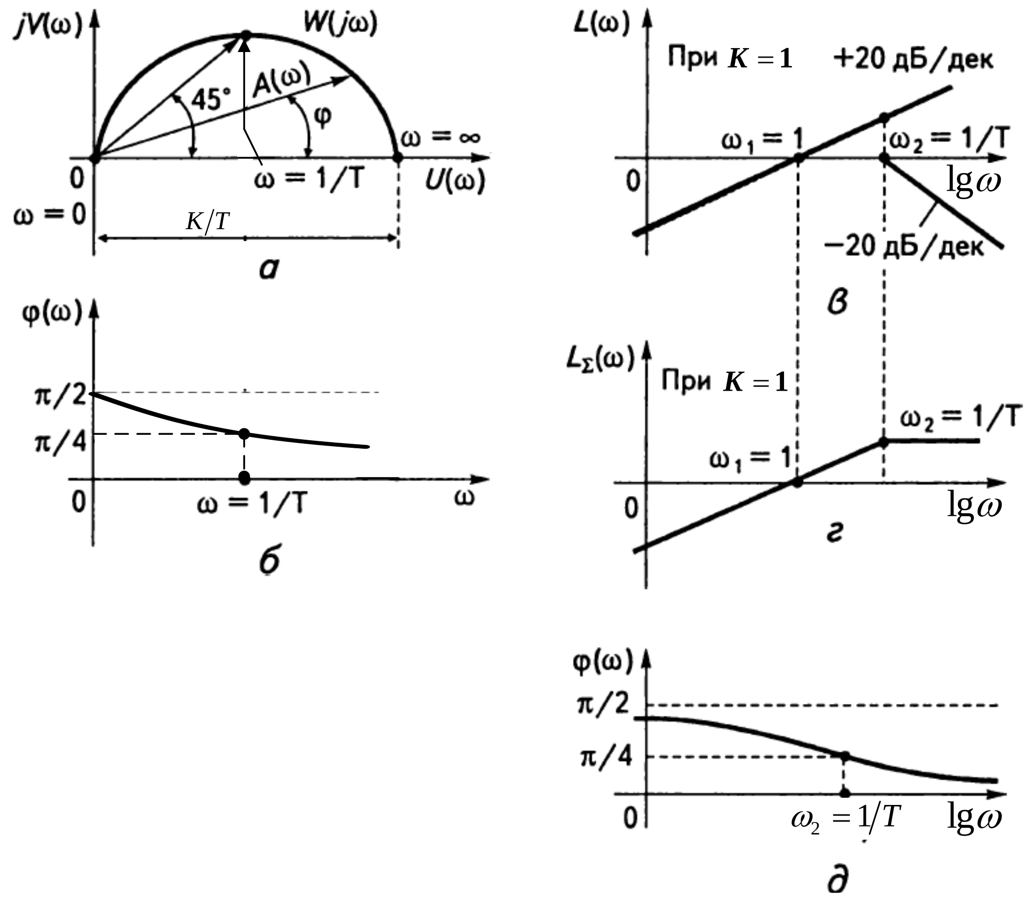


Рис. 2.23. АФХ (а), ФЧХ (б), ЛАХ (в-г) та ЛФХ (д) інерційно-диференційної ланки

Вирази для АЧХ та ФЧХ ланки мають вигляд

$$A(\omega)=\sqrt{[U(\omega)]^2+[V(\omega)]^2}=\frac{K\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega)=arctg[V(\omega)/U(\omega)]=\pi/2-arctgT\omega.$$

Фазочастотна характеристика зображена на рис. 2.23,б.

ЛАХ інерційно-диференційної ланки запишеться як

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}\,. \qquad (2.67)$$

Сумарна асимптотична характеристика складається з трьох компонент, кожна з яких була розглянута вище. Якщо $K = 1$, то

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}\,.$$

Асимптоти складників правої частини цього виразу показані на рис. 2.23,в, а їх геометрична сума – на рис. 2.23,г. ЛФХ ланки зображена рис. 2.23,д.

Форсувальна ланка. Передатна функція ланки

$$W(p) = K(Tp+1),$$

а її АФХ, АЧХ і ФЧХ запишуться як

$$W(j\omega) = K(Tj\omega+1),$$

$$A(\omega) = K\sqrt{1+T^2\omega^2}\,,$$

$$\varphi(\omega) = arctgT\omega.$$

На рис. 2.24,а зображена АФХ, а на рис. 2.24,б – ФЧХ форсувальної ланки.

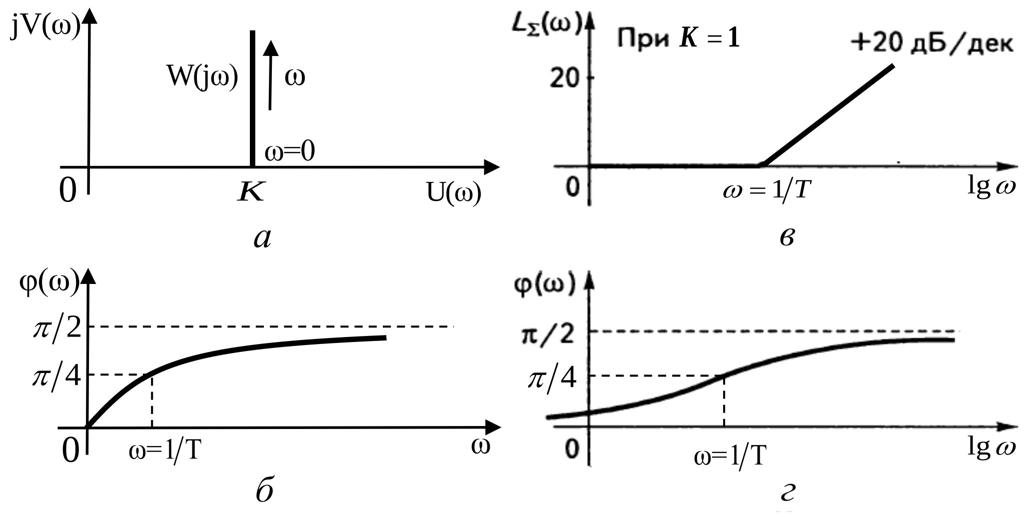


Рис. 2.24. АФХ (а), ФЧХ (б), ЛАХ (в) та ЛФХ (г) форсувальної ланки

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика запишеться у вигляді

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}\,. \qquad (2.68)$$

На рис. 2.24,в побудована асимптотична ЛАХ (при $K=1$), а на рис. 2.24,г – ЛФХ форсувальної ланки.

За низьких частот ($\omega<1/T$) ця ланка близька до пропорційної, а за високих частот ($\omega>1/T$) – до ідеальної диференційної. ***Форсувальній ланці властиве випередження за фазою, яке зростає зі збільшенням частоти***.

Інерційно-форсувальна ланка. Передатна функція ланки

$$W(p)=K\frac{T_1p+1}{T_2p+1},$$

а її АФХ

$$W(j\omega)=K\frac{T_1j\omega+1}{T_2j\omega+1}. \qquad (2.69)$$

За (2.49) отримаємо АЧХ та ФЧХ ланки

$$A(\omega)=|W(j\omega)|=K\sqrt{\frac{1+T_1^2\omega^2}{1+T_2^2\omega^2}}, \qquad (2.70)$$

$$\varphi(\omega)=\arg[W(j\omega)]=arctgT_1\omega-arctgT_2\omega. \qquad (2.71)$$

Використовуючи (2.70), дістанемо ЛАХ ланки

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K+20\lg\sqrt{1+T_1^2\omega^2}-20\lg\sqrt{1+T_2^2\omega^2}. \qquad (2.72)$$

На рис. 2.25 зображені АФХ інерційно-форсувальної ланки для різних співвідношень сталих часу.

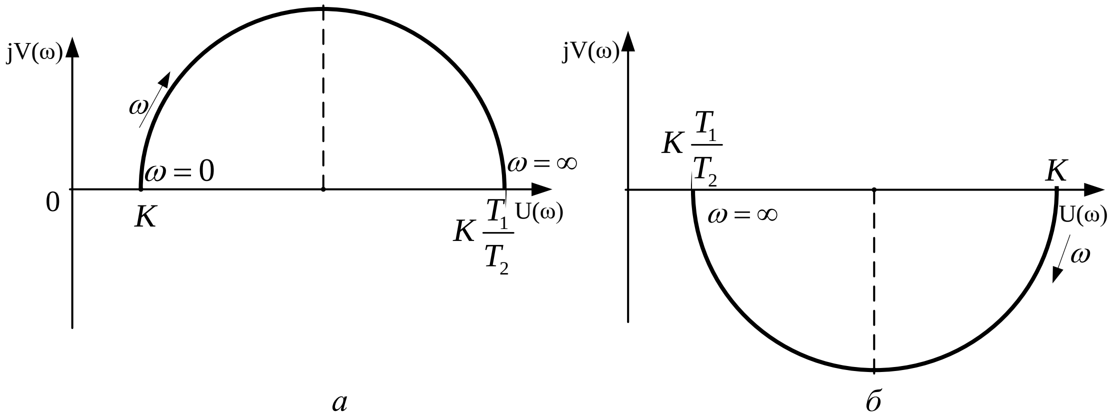


Рис. 2.25. АФХ інерційно-форсувальної ланки: а – $T_1>T_2$; б – $T_2>T_1$

Графіки асимптотичних ЛАХ та ЛФХ наведено на рис. 2.26. Очевидно, що у цій ланці на середніх частотах при $T_1 > T_2$ переважають форсувальні

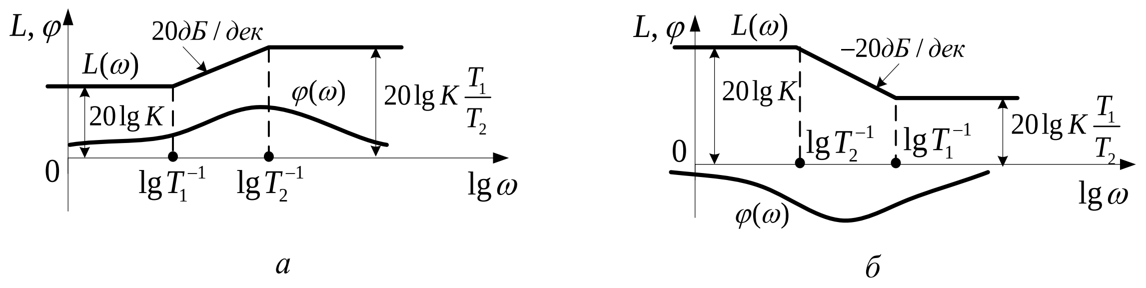


Рис. 2.26. ЛАХ та ЛФХ інерційно-форсувальної ланки: а – $T_1 > T_2$; б – $T_2 > T_1$

властивості (ЛАХ має нахил $+20$ дБ/дек), а при $T_2 > T_1$ – інерційні властивості (ЛАХ має нахил -20 дБ/дек).

Ланки другого порядку. Передатна функція ланки 2-го порядку

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика запишеться як

$$W(j\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2 - j2\zeta T\omega)}{(-T^2\omega^2 + j2\zeta T\omega + 1)(1 - T^2\omega^2 - j2\zeta T\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.73)$$

де дійсна частотна характеристика

$$U(\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} \quad (2.74)$$

та уявна частотна характеристика

$$V(\omega) = \frac{-2K\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}. \quad (2.75)$$

Значення $U(\omega)$ і $V(\omega)$ при відповідних частотах наведені в табл. 2.3, на основі якої на рис. 2.27 побудована АФХ ланки другого порядку, яка розміщується у 3-му і 4-му квадрантах комплексної площини.

Таблиця 2.3. Дані для побудови АФХ ланки 2-го порядку

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	K	0
$1/T$	0	$-K/2\zeta$
∞	0	0

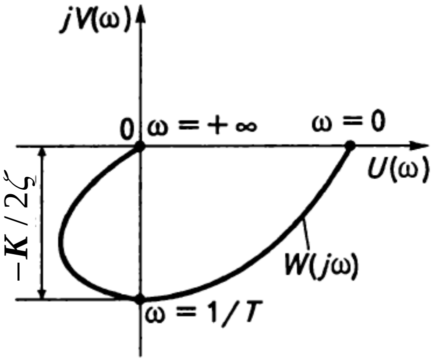


Рис. 2.27. АФХ ланки другого порядку

Як було сказано раніше, залежно від полюсів передатної функції ланка другого порядку може бути аперіодичною або коливальною. При цьому форма зображеної на рис. 2.27 АФХ відповідає обом ланкам. Проте їх логарифмічні частотні характеристики істотно відрізняються і потребують розгляду.

Аперіодична ланка 2-го порядку. Ця ланка має передатну функцію

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1},$$

де $\zeta \geq 1$. Оскільки полюси передатної функції цієї ланки дійсні та від'ємні, то її можна записати як

$$W(p) = \frac{K}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \qquad (2.76)$$

де $T_3 = T\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right); T_4 = T\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right); T = \sqrt{T_3 T_4}$.

Здійснивши в (2.76) заміну $p = j\omega$, отримаємо АФХ ланки

$$W(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_3 + 1)(j\omega T_4 + 1)} = K\frac{(1 - j\omega T_3)(1 - j\omega T_4)}{\left(\omega^2 T_3^2 + 1\right)\left(\omega^2 T_4^2 + 1\right)}. \qquad (2.77)$$

Після відповідних алгебричних перетворень з (2.77) дістанемо вирази для АЧХ та ФЧХ аперіодичної ланки 2-го порядку:

$$A(\omega)=|W(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{\left(T_3^2\omega^2+1\right)}\sqrt{\left(T_4^2\omega^2+1\right)}}, \qquad (2.78)$$

$$\varphi(\omega)=\arg\left[W(j\omega)\right]=-arctgT_3\omega-arctgT_4\omega. \qquad (2.79)$$

Виходячи із (2.78), ЛАХ аперіодичної ланки 2-го порядку запишеться як

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{\left(T_3^2\omega^2+1\right)}-20\lg\sqrt{\left(T_4^2\omega^2+1\right)}. \qquad (2.80)$$

Якщо $K=1$, то цю ЛАХ можна розглядати як суму двох ЛАХ аперіодичних ланок 1-го порядку з частотами спряження $\omega_1=1/T_3$ та $\omega_2=1/T_4$ у вигляді

$$L_\Sigma(\omega)=L(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega)=-20\lg\sqrt{\left(T_3^2\omega^2+1\right)}-20\lg\sqrt{\left(T_4^2\omega^2+1\right)}.$$

Асимптотичні $L_1(\omega), L_2(\omega)$ і $L_\Sigma(\omega)$ зображені на рис. 2.28,а,б,в відповідно.

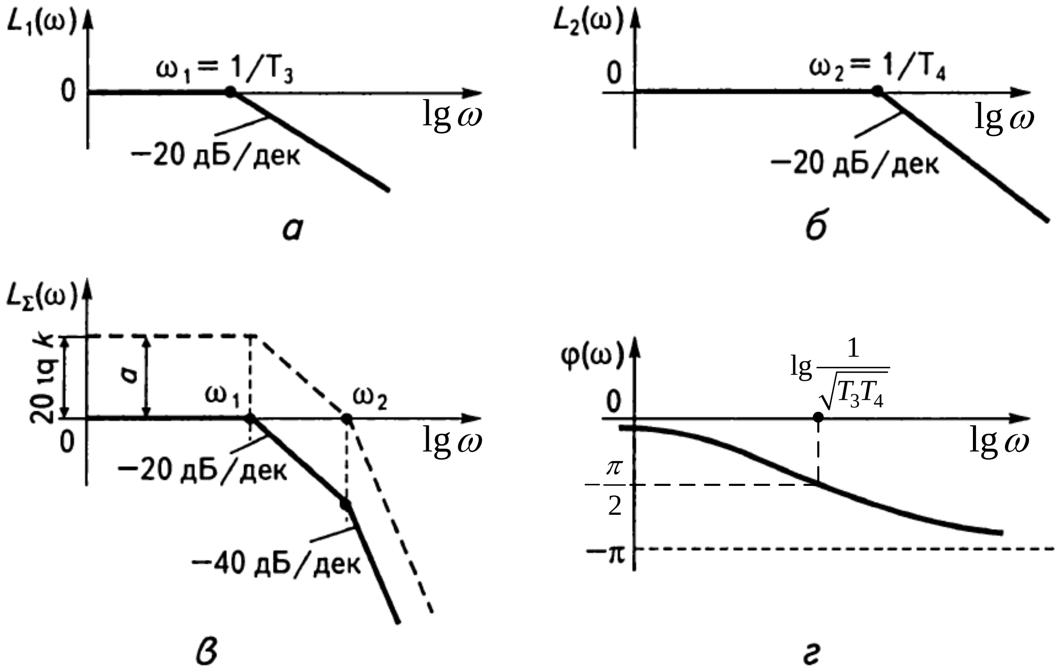


Рис. 2.28. Асимптотичні ЛАХ та ЛФХ аперіодичної ланки 2-го порядку

При $K\neq1$ асимптотична ЛАХ матиме вигляд, показаний на рис. 2.28,в пунктиром. ЛФХ аперіодичної ланки 2-го порядку наведена на рис. 2.28,г. При зміні ω в діапазоні $0\div\infty$ ЛФХ знаходиться в межах $0\geq\varphi(\omega)\geq-\pi$.

Коливальна ланка 2-го порядку. Ланка має передатну функцію

$$W(p)=\frac{K}{T^2p^2+2\zeta Tp+1},$$

де $0<\zeta<1$. Вище були записані АФХ, ДЧХ та УЧХ цієї ланки у вигляді виразів (2.73)-(2.75). Використовуючи їх, отримаємо АЧХ коливальної ланки

$$A(\omega)=\sqrt{[U(\omega)]^2+[V(\omega)]^2}=\frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}}, \tag{2.81}$$

та її ФЧХ

$$\varphi(\omega)=arctg\left[V(\omega)/U(\omega)\right]=-arctg\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}. \tag{2.82}$$

Дослідження (2.81) на екстремум показує, що крива $A(\omega)$ має максимум

$$A(\omega_м)=\frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

на частоті

$$\omega_м=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2},$$

де $\omega_0=1/T$. ***Умовою наявності в АЧХ максимуму (резонансного піку) є значення коефіцієнта затухання*** $0<\zeta<\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$. При цьому чим меншим буде ζ, тим більшим буде $A(\omega_м)$ і тим ближчою буде ***частота резонансного максимуму*** $\omega_м$ до резонансної частоти ланки ω_0. Якщо $\zeta\to 0$ то $A(\omega_м)\to\infty;\ \omega_м\to\omega_0$.

ЛАХ коливальної ланки запишеться як

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}. \tag{2.83}$$

Визначимо асимптоти цієї характеристики в зоні низьких частот при $\omega T\ll 1(\omega\to 0)$ та у зоні високих частот при $\omega T\gg 1(\omega\to\infty)$.

1) При $\omega\to 0$: $20\lg A(\omega)=20\lg K-20\lg 1=20\lg K$.

2) При $\omega\to\infty$: $20\lg A(\omega)\cong 20\lg K-20\lg(T\omega)^2=20\lg K-40\lg T\omega\to-\infty$.

Отже асимптотична ЛАХ ланки складається з двох прямих ліній. Низькочастотна асимптота горизонтальна, а високочастотна асимптота має нахил -40 дБ/дек. Вони з'єднуються між собою на частоті спряження $\omega = 1/T$.

Сімейство ЛАХ та ЛФХ коливальної ланки 2-го порядку при $K = 1$ за різних значень коефіцієнту затухання побудовані на рис. 2.29. Згідно з рисунком криві $L(\omega)$ при $\zeta < 0.707$ змінюють свій характер з монотонного на екстремальний і в них з'являється резонансний пік.

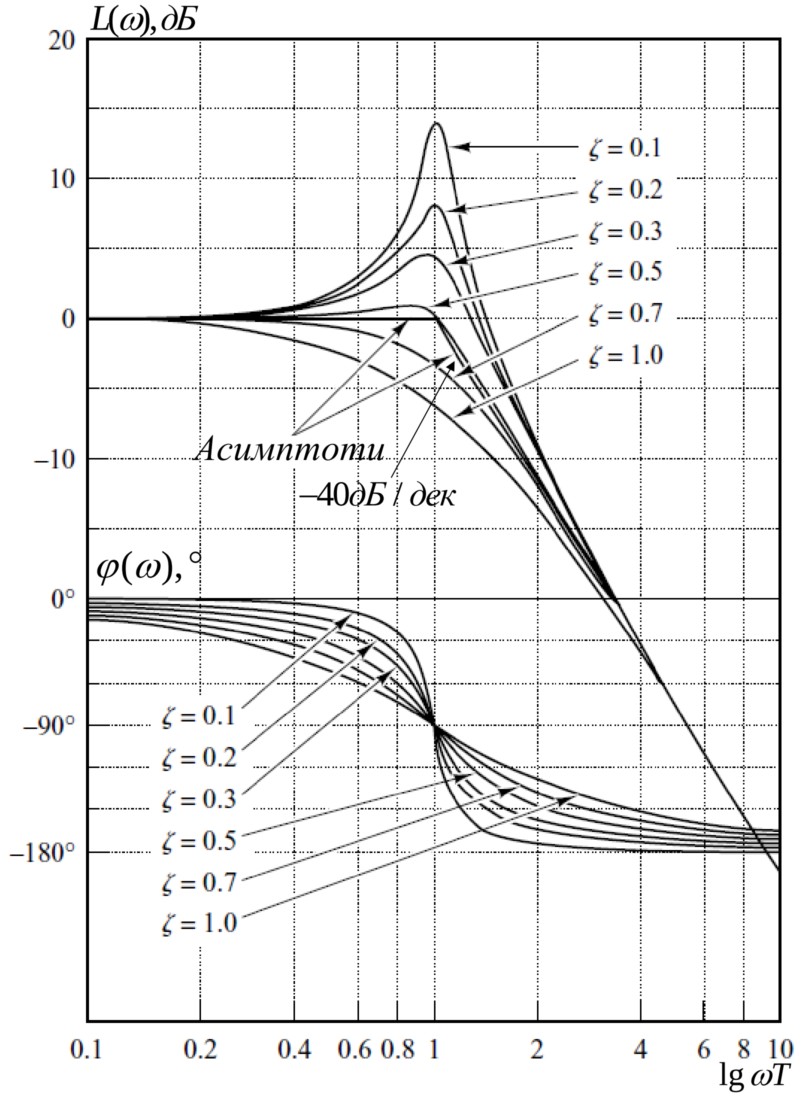


Рис. 2.29. ЛАХ та ЛФХ коливальної ланки 2-го порядку при $\zeta = \mathrm{var}$

При $0.5 \le \zeta < 1$ розходження між точною та асимптотичною ЛАХ досить невеликі, але за подальшого зменшення ζ резонансний пік збільшується і це розходження стає істотними. Тому ***при побудові асимптотичної ЛАХ коливальної ланки з коефіцієнтом затухання*** $0 < \zeta < 0.5$ ***слід брати до уваги***

резонансний пік точної ЛАХ. Значення цього піку обчислюється за формулою $L(\omega_м) = 20\lg A(\omega_м) = 20\lg K - 20\lg 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$.

Ланка запізнення. Передатна функція ланки

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

Після заміни $p = j\omega$ дістанемо АФХ

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \qquad (2.84)$$

Згідно з формулою Ейлера $W(j\omega) = \cos\tau\omega - j\sin\tau\omega$. Отже $U(\omega) = \cos\tau\omega$, $V(\omega) = -\sin\tau\omega$. АЧХ та ФЧХ ланки мають вигляд

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = 1, \qquad (2.85)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\tau\omega. \qquad (2.86)$$

Відповідно до записаних виразів, АФХ ланки запізнення являє собою коло, яке періодично повторюється. Це коло є годографом одиничного радіус-вектора, що обертається за годинниковою стрілкою. Амплітудно-частотною характеристикою є горизонтальна лінія на рівні одиниці, а фазочастотна характеристика ланки – це лінійна функція частоти.

ЛФХ ланки запізнення має вигляд (2.86), а її ЛАХ запишеться як

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 = 0, \qquad (2.87)$$

На рис. 2.30 зображені частотні характеристики ланки запізнення.

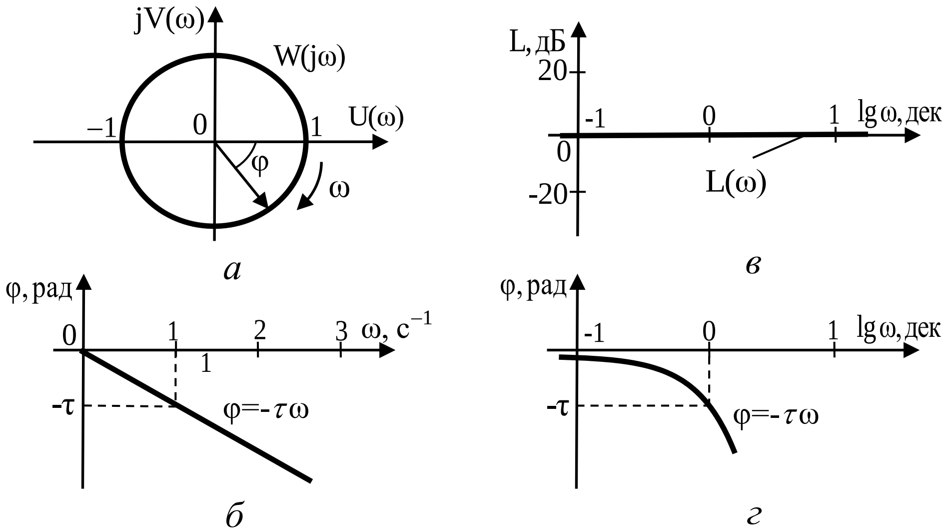


Рис. 2.30. АФХ (а), ФЧХ (б), ЛАХ (в) та ЛФХ (г) ланки запізнення

2.4 Частотні характеристики груп ланок. Особливості немінімально-фазових ланок

2.4.1 Частотні характеристики з’єднань ланок

Послідовне з’єднання ланок. При послідовному з'єднанні ланок вихідна величина попередньої ланки подається на вхід наступної і тому рівняння динаміки групи n послідовно з'єднаних ланок повинне дати залежність в динаміці вихідної величини останньої n-ї ланки від вхідної величини першої ланки. Позначивши поліноми лівих частин рівнянь через $P(p)$, а правих як $Q(p)$ з відповідним індексом одержимо рівняння динаміки окремих ланок

першої ланки: $P_1(p)x_{1вих} = Q_1(p)x_{1вх}$

враховуючи, що $x_{1вих} = \dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)} x_{1вх} = x_{2вих}$

рівняння 2-ї ланки $P_2(p)x_{2вих} = Q_2(p)\dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)} x_{1вх}$

n-ї ланки $P_n(p)x_{nвих} = Q_n(p)\dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)}\dfrac{Q_2(p)}{P_2(p)}\dfrac{Q_{n-1}(p)}{P_{n-1}(p)} x_{1вх}$.

Позначивши $P_1(p)P_2(p)...P_n(p) = P(p)$ – добуток поліномів лівих частин рівнянь всіх ланок; $Q_1(p)Q_2(p)...Q_n(p) = Q(p)$ – добуток поліномів правих частин рівнянь всіх ланок, можна отримати рівняння для n послідовно з'єднаних ланок у вигляді

$$P(p)x_{nвих} = Q(p)x_{1вх}.$$

Передатну функцію n послідовно з'єднаних ланок можна записати як

$$W(p)_{1-n} = \frac{x_{nвих}}{x_{1вх}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(p)...Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p)...P_n(p)},$$

або

$$W_{1-n}(p) = W_1(p)W_2(p)...W_n(p).$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика при послідовному з'єднанні ланок

$$W_{1-n}(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)...W_n(j\omega) \qquad (2.88)$$

Якщо відомі АФХ окремих ланок, то можна побудувати сумарну характеристику аналітично або графічно. Наприклад, нехай дві ланки мають амплітудно-фазові частотні характеристики

$$W_1(j\omega) = A_1 e^{j\varphi_1} \text{ і } W_2(j\omega) = A_2 e^{j\varphi_2}.$$

Сумарна характеристика цих послідовно з'єднаних ланок запишеться як

$$W_{1-2}(j\omega) = A_{1-2} e^{j(\varphi_{1-2})},$$

де $A_{1-2} = A_1 A_2$, $\varphi_{1-2} = \varphi_1 + \varphi_2$.

Графічну побудову сумарної АФХ та АФХ кожної з двох ланок наведено на рис. 2.31.

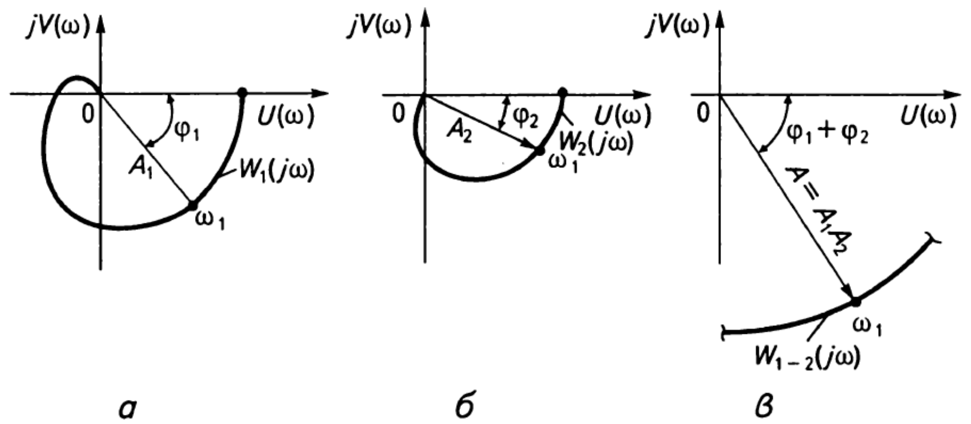


Рис. 2.31. АФХ першої (а) і другої (б) послідовно з’єднаних ланок та сумарна АФХ

Паралельне з’єднання ланок. При паралельному з'єднанні ланок їх вхідні величини однакові $x_{вх} = x_{1вх} = x_{2вх} = ... = x_{nвх}$, а вихідна величина дорівнюють сумі вихідних величин усіх ланок

$$x_{вих} = x_{1вих} + x_{2вих} + ... + x_{nвих}.$$

Розглянемо рівняння і передатні функції при паралельному з'єднанні ланок на прикладі двох ланок з рівняннями динаміки

$$P_1(p)x_{1вих} = Q_1(p)x_{1вх}, \quad P_2(p)x_{2вих} = Q_2(p)x_{2вх}.$$

У цьому випадку

$$x_{вих} = x_{1вих} + x_{2вих} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1вх} + \frac{Q_2(p)}{P_2(p)}x_{2вх}$$

при $x_{1вх} = x_{2вх} = x_{вх}$. Звідси еквівалентна передатна функція двох ланок

$$W_{1-2}(p) = \frac{x_{вих}}{x_{вх}} = W_1(p) + W_2(p).$$

Отже АФХ двох паралельно з'єднаних ланок

$$W_{1-2}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega).$$

Графічну побудову сумарної АФХ двох ланок наведено на рис. 2.32. Ця побудова виконується згідно з правилами додавання векторних величин.

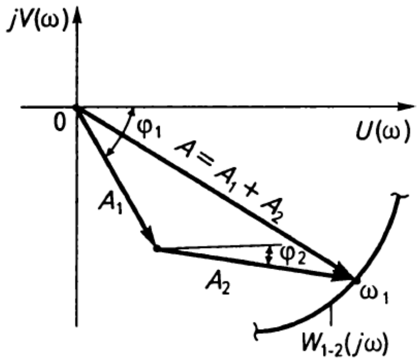


Рис. 2.32. Побудова сумарної АФХ двох паралельно з'єднаних ланок

У загальному випадку при паралельному з'єднанні *n* ланок АФХ визначаються як сума відповідних характеристик всіх ланок.

$$W_{1-n}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) + \ldots + W_n(j\omega). \tag{2.89}$$

Ланки зі зворотним зв'язком. На рис. 2.33 показано ланку, охоплену зворотним зв'язком, і відповідні вхідні та вихідні величини.

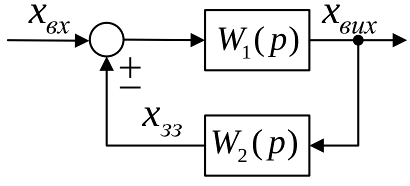


Рис. 2.33. Схема ланки, охопленої зворотним зв'язком

Рівняння ланки без зворотного зв'язку

$$P_1(p)x_{вих}=Q_1(p)x_{вх}.$$

Рівняння ланки у колі зворотного зв'язку в загальному вигляді

$$P_2(p)x_{зз}=Q_2(p)x_{вих},$$

звідки $x_{зз}=\dfrac{Q_2(p)}{P_2(p)}x_{вих}$. Рівняння ланки з врахуванням зворотного зв'язку

$$P_1(p)x_{вих}=Q_1(p)(x_{вх}\pm x_{зз})=Q_1(p)(x_{вх}\pm\frac{Q_2(p)}{P_2(p)}x_{вих}).$$

Після нескладних перетворень дістанемо

$$[P_1(p)P_2(p)\pm Q_1(p)Q_2(p)]x_{вих}=Q_1(p)P_2(p)x_{вх},$$

звідки можна знайти відношення вихідної величини ланки до вхідної

$$\frac{x_{вих}}{x_{вх}}=\frac{Q_1(p)P_2(p)}{P_1(p)P_2(p)\pm Q_1(p)Q_2(p)}.$$

Розділивши чисельник і знаменник на $P_1(p)P_2(p)$, матимемо передатну функцію ланки зі зворотним зв'язком в аналогічному до (1.14) вигляді

$$W_{1-2}(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W_1(p)W_2(p)},$$

де знак "мінус" відповідає додатному, а "плюс" – від'ємному зворотному зв'язку. Звідси АФХ ланки зі зворотним зв'язком

$$W_{1-2}(j\omega)=\frac{W_1(j\omega)}{1\pm W_1(j\omega)W_2(j\omega)}. \tag{2.90}$$

2.4.2 Побудова логарифмічних характеристик групи ланок

При розв’язанні задач аналізу і синтезу САК частотними методами нерідко виникає потреба у побудові логарифмічних частотних характеристик розімкнутої системи. Передатна функція розімкнутої системи з n послідовно з’єднаних ланок дорівнює добутку передатних функції усіх ланок

$$W(p)=W_1(p)W_2(p)...W_n(p)=\prod_{i=1}^{n}W_i(p).$$

АФХ розімкнутої системи відповідно матиме вигляд

$$W(j\omega)=W_1(j\omega)W_2(j\omega)...W_n(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}W_i(j\omega).$$

Вище було показано, що при побудові частотних характеристик групи послідовно з’єднаних ланок сумарну АЧХ можна отримати як добуток АЧХ усіх ланок, а сумарну ФЧХ – як суму ФЧХ всіх ланок. Це відповідає виразам

$$A_\Sigma(\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega), \qquad \varphi_\Sigma(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega).$$

Формула для визначення сумарної ЛАХ запишеться як

$$L_\Sigma(\omega)=20\lg A_\Sigma(\omega)=20\lg A_1(\omega)+20\lg A_2(\omega)+...+20\lg A_n(\omega).$$

Таким чином, ***загальна методика побудови сумарних ЛАХ та ЛФХ групи ланок полягає у знаходженні логарифмічних характеристик окремо кожної ланки з наступним додаванням їх ординат на однакових частотах***. Розглянемо застосування цієї методики на прикладі.

Приклад 2.4 [1]**.** Побудувати асимптотичну ЛАХ та ЛФХ розімкнутої САК, структурна схема якої зображена на рис. 2.34.

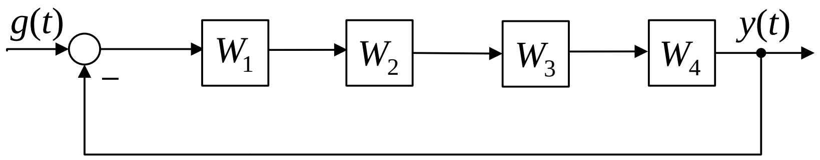


Рис. 2.34. Структурна схема САК (до прикладу 2.4)

Система складається з пропорційної, двох аперіодичних 1-го порядку та інтегральної ланок з передатними функціями

$$W_1(p)=k_1, \quad W_2(p)=\frac{k_2}{T_2p+1}, \quad W_3(p)=\frac{k_3}{T_3p+1}, \quad W_4(p)=\frac{k_4}{p}.$$

Розв’язання. Передатна функція розімкнутої САК запишеться у вигляді $W(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)$. На рис. 2.35 показана побудова

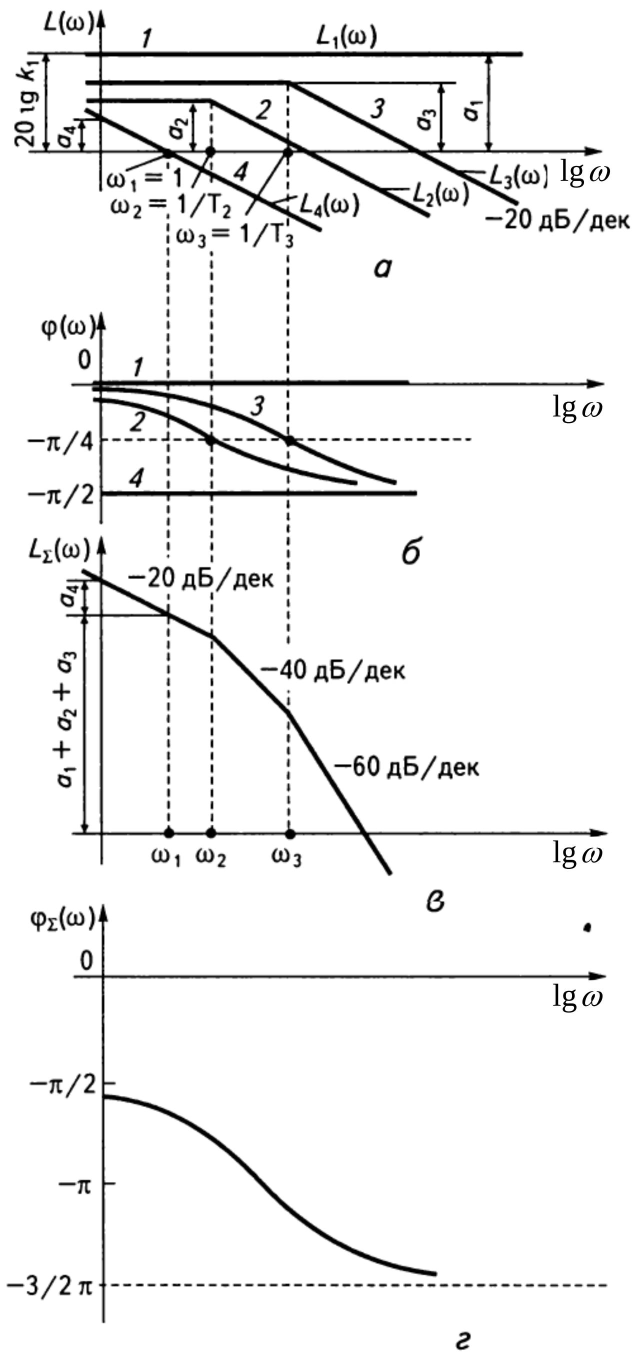


Рис. 2.35. Побудова ЛАХ та ЛФХ розімкнутої системи (до прикладу 2.4)

логарифмічних частотних характеристик розімкнутої САК. На рис. 2.35,а зображено асимптотичні логарифмічні амплітудно-частотні характеристики наявних у розімкненому контурі системи чотирьох ланок $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$, $L_4(\omega)$ (криві 1, 2, 3, 4 відповідно). Логарифмічні фазочастотні характеристики цих ланок $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$, $\varphi_4(\omega)$ наведено на рис. 2.35,б (відповідно криві 1, 2, 3, 4).

Сумарна асимптотична ЛАХ розімкнутої системи визначена шляхом геометричного додавання побудованих на рис. 2.35,а асимптотичних ЛАХ чотирьох ланок за формулою

$$L_\Sigma(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega).$$

Вона зображена на рис. 2.35,в.

Логарифмічна фазочастотна характеристика розімкнутої системи отримана за допомогою геометричного додавання побудованих на рис. 2.35,б ЛФХ чотирьох ланок згідно з виразом $\varphi_\Sigma(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega)$. Ця характеристика показана на рис. 2.35,г.

При побудові асимптотичних ЛАХ та ЛФХ за передатними функціями САК корисно знати якими мають бути нахили ЛАХ та значення фази на початковій та кінцевій ділянках характеристик. Відповідь на це питання наведемо на прикладі передатної функції в узагальненому вигляді

$$W(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{p^{\nu_B}B_1(p)}{p^{\nu_A}A_1(p)}, \tag{2.91}$$

де $A(p)$ – поліном степеня n, $B(p)$ – поліном степеня m, ν_A, ν_B – кількість нульових коренів поліномів $A(p)$ і $B(p)$ відповідно. Якщо система з передатною функцією (2.91) є мінімально-фазовою (див. п. 2.4.3), то її асимптотична ЛАХ і ЛФХ на початковій та кінцевій ділянках матимуть такі нахил $\angle L(\omega)$ і фазу $\varphi(\omega)$ відповідно:

1) на початковій ділянці $(\omega \to 0)$: $\angle L(\omega)=(\nu_B-\nu_A)20\frac{\partial Б}{дек}$, $\varphi(\omega)=(\nu_B-\nu_A)\frac{\pi}{2}$;

2) на кінцевій ділянці $(\omega \to \infty)$: $\angle L(\omega)=(m-n)20\frac{\partial Б}{дек}$, $\varphi(\omega)\to(m-n)\frac{\pi}{2}$.

Зауважимо, що однозначна відповідність між АЧХ та ФЧХ мінімально-фазових систем ґрунтується на відомому з теорії аналітичних функцій комплексної змінної перетворенні Гільберта [6].

2.4.3 Мінімально-фазові та немінімально-фазові ланки

Крім наведеної вище систематизації в ТАК ланки класифікуються також в залежності від особливостей передатних функцій, що ґрунтуються на поняттях полюсів та нулів. Нагадаємо, що у передатній функції

$$W(p)=\frac{Q(p)}{P(p)},$$

нулі – це корені рівняння $Q(p)=0$, а полюси – корені рівняння $P(p)=0$. Тобто нулями є числові значення оператора p, за яких передатна функція дорівнює нулю, а полюсами – за яких вона прямує до нескінченності.

За цією класифікацією ланки розподіляються на мінімально- і немінімально-фазові, стійкі, нейтральні та нестійкі. Сформулюємо означення.

- ***Ланка називається <u>мінімально-фазовою</u>, якщо всі нулі та полюси її ПФ дійсні від'ємні або комплексні з від'ємними дійсними частинами.***
- ***Ланка називається <u>немінімально-фазовою</u>, якщо серед нулів та полюсів її передатної функції є хоча б один дійсний додатний чи комплексний з додатною дійсною частиною.***
- ***Ланка називається <u>стійкою</u>, якщо всі полюси її передатної функції дійсні від'ємні або комплексні з від'ємними дійсними частинами.***
- ***Ланка називається <u>нейтральною</u>, якщо серед полюсів її ПФ є хоча б один нульовий, але немає жодного дійсного додатного чи комплексного з додатною дійсною частиною.***
- ***Ланка називається <u>нестійкою</u>, якщо серед полюсів її ПФ є хоча б один дійсний додатний чи комплексний з додатною дійсною частиною.***

З наведених означень випливає той висновок, що ***серед стійких та нейтральних ланок можуть бути як мінімально-фазові, так і немінімально-фазові. Проте всі нестійкі ланки є немінімально-фазовими.***

Часова характеристика нестійкої аперіодичної ланки 1-го порядку з передатною функцією $W(p) = K/Tp - 1$ була отримана в п. 2.1.2 . Модель нестійкого об'єкта – перевернутого маятника на візку наведена в прикладі 1.4. Загалом тема стійкості САК буде розглядатися нижче в 3-й главі.

Характерною рисою немінімально-фазових ланок є те, що значення фази у них більше, ніж у відповідних мінімально-фазових ланок. Якщо для звичайної аперіодичної ланки ФЧХ визначається як $\varphi(\omega) = -arctg\ \omega T$ і фаза за абсолютною величиною не перевищує $\pi/2$, то для нестійкої аперіодичної ланки, яка є немінімально-фазовою, ФЧХ визначається як $\varphi(\omega) = -\pi + arctg\ \omega T$ і фаза за абсолютною величиною сягає π .

Слід зазначити, що амплітудно-частотні характеристики мінімально-фазової та немінімально-фазової ланок однакові. Відповідно однакові їх точні та асимптотичні ЛАХ. Проте через відмінні фазові характеристики їх АФХ також різні. Наприклад, АФХ стійкої аперіодичної ланки – це півколо у 4-му квадранті, а нестійкої – півколо у 3-му квадранті комплексної площини.

Серед розглянутих вище типових ланок немінімально-фазовою є ланка запізнення. Щоб переконатись у цьому, визначимо нулі і полюси передатної функції $W(p) = e^{-\tau p}$. Нулі z_i мають задовольняти рівняння $W(z_i) = e^{-\tau z_i} = 0$. Отже z_i може бути будь-яким комплексним числом з додатною дійсною частиною та нескінченно великим модулем: $|z_i| \to \infty$; $\mathrm{Re}\, z_i > 0$; $i = 1, 2, 3, \ldots$. Полюси передатної функції p_i мають задовольняти рівняння $W(p_i) = e^{\tau p_i} = 0$. Тому p_i може бути будь-яким комплексним числом з від'ємною дійсною частиною та нескінченно великим модулем: $|p_i| \to \infty$; $\mathrm{Re}\, p_i < 0$; $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Отже передатна функція ланки запізнення має нескінченну кількість нулів з додатною дійсною частиною та нескінченну кількість полюсів з від'ємною дійсною частиною. Тому ця ланка стійка і немінімально-фазова.

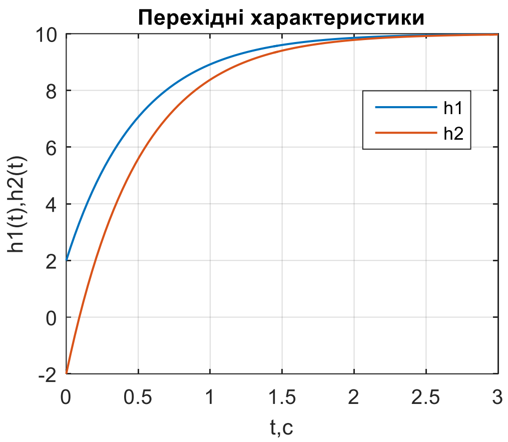
Приклад 2.5. Побудувати та порівняти часові і частотні характеристики мінімально-фазової та немінімально-фазової ланок.

Розв'язання. У цій задачі використаємо інерційно-форсувальну ланку, яка належить до типових. Передатні функції мінімально-та немінімально-фазової ланок запишемо як $W_1(p) = 10\dfrac{0.1p+1}{0.5p+1}$, $W_2(p) = 10\dfrac{1-0.1p}{0.5p+1}$. Полюси в передатних функціях обох ланок від'ємні $p_1 = p_2 = -2$, нуль у першій ланці від'ємний $z_1 = -10$, а у другій – додатний $z_2 = 10$. Для дослідження цих ланок складемо в MATLAB наступну програму:

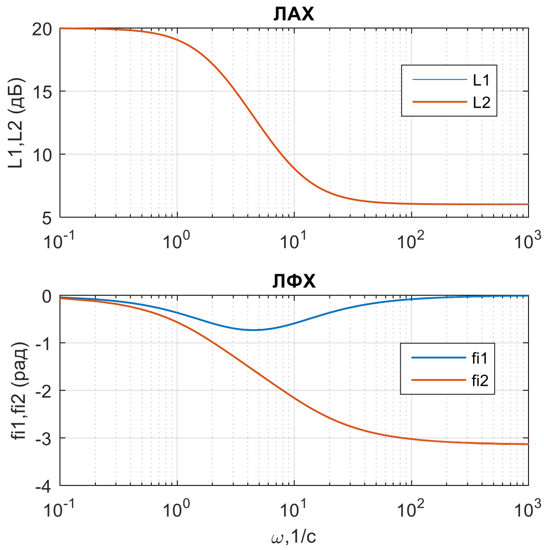
```
% Program 2.1
W1=tf([0.1 1]*10,[0.5 1]);  W2=tf([-0.1 1]*10,[0.5 1]); %Передатні функції ланок
[h1,t]=step(W1,3); [h2,t]=step(W2,3);      % Побудова перехідних характеристик
plot(t,h1,t,h2); grid on, xlabel('t,c'), ylabel('h1(t), h2(t)')
title('Перехідні характеристики'),
w=0:0.1:1000;                                    % Формування масиву значень частоти
L1=20*log10(abs(10*(0.1*j.*w+1)./(0.5*j.*w+1)));  % Розрахунок ЛАХ 1-ї ланки
L2=20*log10(abs(10*(-0.1*j.*w+1)./(0.5*j.*w+1))); % Розрахунок ЛАХ 2-ї ланки
fi1=atan(0.1.*w)-atan(0.5.*w);                   % Розрахунок ЛФХ 1-ї ланки
fi2=-atan(0.1.*w)-atan(0.5.*w);                  % Розрахунок ЛФХ 1-ї ланки
figure, subplot(2,1,1);
semilogx(w,L1,w,L2), grid on,                    % Побудова ЛАХ
```

```
ylabel('L1,L2 (дБ)'),title('ЛАХ')
subplot(2,1,2); semilogx(w,fi1,w,fi2), grid on,       % Побудова ЛФХ
xlabel('\omega,1/c'), ylabel('fi1,fi2 (рад)'),title('ЛФХ')
```

Результати роботи програми наведені на рис. 2.36. Перехідні характеристики $h_1(t), h_2(t)$ відповідно мінімально- та немінімально-фазової ланок



а



б

Рис. 2.36. Часові (а) та логарифмічні частотні (б) характеристики мінімально- та немінімально-фазової ланок (до прикладу 2.5)

зображені на рис. 2.36,а. Порівняння цих характеристик дозволяє зазначити, що на кінцевій ділянці перехідного процесу вони співпадають, проте на початковій ділянці – значно відрізняються. Перехідна характеристика $h_2(t)$ спочатку набуває від'ємного значення хоча вхідна дія додатна, що є характерною ознакою часових характеристик немінімально-фазових ланок.

На рис. 2.36,б показані ЛАХ $L_1(\omega), L_2(\omega)$ та ЛФХ $\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega)$ відповідно мінімально- та немінімально-фазової ланок. Порівняння частотних характеристик показує, що амплітудні характеристики обох ланок співпадають, а фазові характеристики є близькими лише на низьких частотах. При збільшенні частоти відмінність між ними істотно зростає. Граничне значення фази при $\omega \to \infty$ у першій ланці дорівнює $\varphi_1(\infty) = 0$, а у другій ланці –

$\varphi_2(\infty) = -\pi$ рад. Таке значення фази узгоджується з інверсією початкової ділянки перехідної характеристики немінімально-фазової ланки.

2.5 Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ стабілізаційних, програмних і стежних систем

Як було показано раніше, існують три основних різновиди замкнутих САК – стабілізаційні, програмні і стежні (слідкуючі). Розглянемо математичний опис цих систем в узагальненому вигляді.

2.5.1 Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ програмних і стежних систем

Рівняння динаміки. З погляду методики отримання рівнянь та передатних функцій стежна і програмна системи мають повну відповідність, оскільки у них різним є лише спосіб формування завдання $g(t) = \text{var}$. Як відомо, в програмній системі завдання розраховується заздалегідь, а в стежній – є деякою наперед невідомою величиною. Тому нижче все сказане про системи стеження повною мірою відноситься і до систем програмного керування.

На рис. 2.37 показана функціональна схема стежної системи, де ланка n – це об`єкт керування, вихід якого (керована величина) $y(t)$ має змінюватися

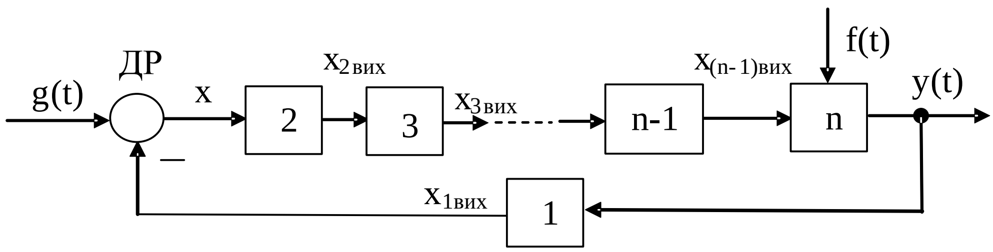


Рис. 2.37. Функціональна схема системи стеження

згідно зі зміною завдання $g(t)$; ланка 1 – пристрій зворотного зв’язку; ДР – давач розузгодження (суматор), що порівнює керовану величину або пропорційну їй із завданням; x – розузгодження між дійсним і заданим значенням керованої величини (помилка системи).

Запишемо рівняння об'єкта та інших ланок у замкненій САК:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{ланка 1:} & P_1(p)x_{1вих} = Q_1(p)y; & (1) \\
\text{ДР (суматор):} & x = g - x_{1вих}; & (1a) \\
\text{ланка 2:} & P_2(p)x_{2вих} = Q_2(p)x; & (2) \\
\text{ланка 3:} & P_3(p)x_{3вих} = Q_3(p)x_{2вих}; & (3) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
\text{ланка n (об'єкт):} & P_n(p)y = Q_n(p)x_{(n\text{-}1)вих} + S(p)f, & (\text{n})
\end{array}\right\} \quad (\text{I})$$

де $S(p)$ – передатний поліном (коефіцієнт) об'єкта за збуренням; $P_1(p),...,P_n(p)$, $Q_1(p),...,Q_n(p)$ – поліноми відповідно лівих і правих частин рівнянь ланок.

Розв'язуючи спільно рівняння (1) та (1а) системи (I) отримаємо із (1) $x_{1вих} = \dfrac{Q_1}{P_1}y$; із (1а) $x = g - \dfrac{Q_1}{P_1}y$ або

$$P_1(p)x = P_1(p)g - Q_1(p)y. \tag{2a}$$

Розглядаючи послідовне з'єднання ланок з 2-ї по $n-1$, визначимо залежність $x_{(n\text{-}1)вих}$ від x як

$$P_2(p)P_3(p)...P_{n\text{-}1}(p)x_{(n\text{-}1)вих} = Q_2(p)Q_3(p)...Q_{n\text{-}1}(p)x.$$

Позначивши $P_2(p)...P_{n\text{-}1}(p) = P_I(p)$, $Q_2(p)...Q_{n-1}(p) = Q_I(p)$, одержимо рівняння ланок з 2-ї по $n-1$ у вигляді

$$P_I(p)x_{(n\text{-}1)вих} = Q_I(p)x. \tag{3a}$$

Розв'яжемо спільно рівняння об'єкта (n), рівняння (2а) та (3а) щодо y. Для цього спочатку з рівняння (3а) отримаємо

$$x = \frac{P_I(p)}{Q_I(p)}x_{(n\text{-}1)вих}.$$

Підставляючи значення x в рівняння (2а), після деяких перетворень матимемо

$$P_1(p)\frac{P_I(p)}{Q_I(p)}x_{(n\text{-}1)вих} = P_1(p)g - Q_1(p)y.$$

Позначивши $P_1(p)P_I(p)=P_{II}(p)$, $Q_1(p)Q_I(p)=Q_{II}(p)$, де $P_{II}(p)$ і $Q_{II}(p)$ – добуток поліномів відповідно лівих і правих частин всіх рівнянь ланок, окрім об'єкта, отримаємо

$$x_{(n\text{-}1)вих}=\frac{Q_I(p)}{P_I(p)}g-\frac{Q_{II}(p)}{P_{II}(p)}y\,.$$

Підставляючи значення $x_{(n\text{-}1)вих}$ в рівняння об'єкта, матимемо:

$$P_n(p)y=Q_n(p)\left[\frac{Q_I(p)}{P_I(p)}g-\frac{Q_{II}(p)}{P_{II}(p)}y\right]+S(p)f\,.$$

Після деяких перетворень отримаємо рівняння динаміки замкнутої стежної системи у вигляді:

$$\left[P(p)+Q(p)\right]y=Q_{III}(p)P_1(p)g+P_{II}(p)S(p)f\,, \qquad (2.92)$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ – добутки відповідних поліномів рівнянь всіх ланок системи; $Q_{III}(p)=Q_n(p)Q_I(p)$ – добуток поліномів правих частин рівнянь ланок, окрім полінома ланки зворотного зв'язку $Q_1(p)$; $P_{II}(p)=P_1(p)\cdot P_I(p)$ – добуток поліномів лівих частин рівнянь ланок окрім полінома об'єкта $P_n(p)$; $P_1(p)$ – поліном лівої частини рівняння ланки зворотного зв'язку.

Прирівнявши ліву частину рівняння (2.92) до нуля, отримаємо рівняння вільного руху або вільних коливань замкненої САК

$$\left[P(p)+Q(p)\right]y=0\,. \qquad (2.93)$$

Характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд

$$P(p)+Q(p)=0\,. \qquad (2.94)$$

Якщо перемножити співмножники, що входять у $P(p)$ і $Q(p)$ та звести подібні члени, то рівняння (2.94) можна записати у стандартному вигляді

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0\,,$$

де n – степінь характеристичного рівняння; $a_0,\ldots,a_n$ – коефіцієнти рівняння, які визначаються параметрами ланок системи.

Передатні функції та АФХ. Розділивши в (2.92) праву і ліву частини на $P(p)+Q(p)$, отримаємо

$$y=\frac{Q_{III}(p)\cdot P_1(p)}{P(p)+Q(p)}g+\frac{P_{II}(p)\cdot S(p)}{P(p)+Q(p)}f.$$

Поділивши чисельники і знаменники дробів на $P(p)$, матимемо

$$y=\frac{Q_{III}(p)\cdot\dfrac{1}{P_{III}(p)}}{1+\dfrac{Q(p)}{P(p)}}g+\frac{S(p)\dfrac{1}{P_n(p)}}{1+\dfrac{Q(p)}{P(p)}}f,$$

де $P_{III}(p)=P_n(p)P_I(p)$ – добуток поліномів лівих частин рівнянь ланок, окрім $P_1(p)$. Із цього виразу можна отримати рівняння стежної системи, записане через ПФ

$$y=W_g(p)g+W_f(p)f, \tag{2.95}$$

де $W_g(p)$ – ПФ замкнутої системи за завданням, що визначається як

$$W_g(p)=\frac{W_{III}(p)}{1+W(p)}, \tag{2.96}$$

де, у свою чергу, $W_{III}(p)=\dfrac{Q_{III}(p)}{P_{III}(p)}$ – ПФ всіх ланок системи але без врахування ланки зворотного зв'язку; $W(p)=\dfrac{Q(p)}{P(p)}$ – ПФ розімкнутої системи; $W_f(p)$ – ПФ замкнутої системи стеження за збуренням, що записується як

$$W_f(p)=\frac{W_n^f(p)}{1+W(p)}, \tag{2.97}$$

де, відповідно, $W_n^f(p)=\dfrac{S(p)}{P_n(p)}$ – ПФ об'єкта за збуренням.

Якщо зворотний зв'язок одиничний $Q_1(p)=P_1(p)=1$, то $W_{III}(p)=W(p)$ і ПФ системи за завданням матиме вигляд

$$W_g(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}. \tag{2.98}$$

При цьому ПФ системи за збуренням (2.97) не зміниться.

Запишемо вирази для амплітудно-фазових частотних характеристик замкнутої системи стеження. Здійснивши заміну $p = j\omega,$ за (2.96) отримаємо формулу для АФХ системи стеження за завданням

$$W_g(j\omega) = \frac{W_{III}(j\omega)}{1+W(j\omega)}, \tag{2.99}$$

а за (2.97) дістанемо вираз для АФХ системи стеження за збуренням

$$W_f(j\omega) = \frac{W_n^f(j\omega)}{1+W(j\omega)}. \tag{2.100}$$

Отримані вирази (2.99), (2.100) потрібні для дослідження частотних показників якості стежної системи, про що буде сказано нижче.

2.5.2 Рівняння динаміки, передатні функції та АФХ систем стабілізації

Рівняння динаміки. Функціональна схема замкнутої системи стабілізації з *n* ланок показана на рис. 2.38.

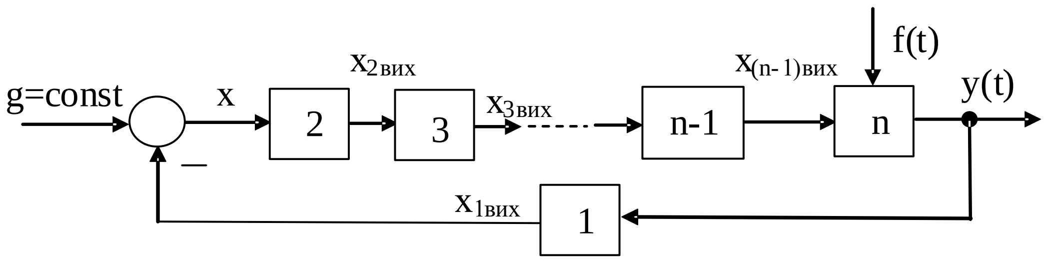


Рис. 2.38. Функціональна схема системи стабілізації

Об’єктом керування є ланка *n*, на яку діє зовнішнє збурення $f(t)$. На вхід системи поступає постійне завдання $g = const$.

Порівнюючи рис. 2.37 та рис. 2.38 бачимо, що єдиною відмінністю системи стабілізації від системи стеження є постійність завдання. Звідси можна зробити висновок, що всі записані раніше для системи стеження співвідношення будуть справедливими для системи стабілізації, якщо в них покласти $g(t) = g_0 = const$.

Отже із (2.92) отримаємо рівняння замкнутої системи стабілізації

$$\left[P(p)+Q(p)\right]y=K_{QP}g_0+P_{II}(p)S(p)f\,, \qquad (2.101)$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ – добутки відповідних поліномів всіх ланок системи; $P_{II}(p)=P_1(p)\cdot P_I(p)$ – добуток поліномів лівих частин рівняння ланок окрім полінома об'єкта $P_n(p)$; $P_1(p)$ – поліном лівої частини рівняння ланки зворотного зв'язку; $S(p)$ – передатний поліном об'єкта за збуренням; $K_{QP}=Q_{III}(0)P_1(0)$.

Передатні функції та АФХ. Із (2.95) при $g(t)=g_0=const$ матимемо рівняння замкнутої системи стабілізації, записане через передатну функцію

$$y=K_g g_0+W_f(p)f\,, \qquad (2.102)$$

де $K_g=W_g(0)$ – коефіцієнт передачі САК за завданням; $W_f(p)$ – ПФ замкнутої системи стабілізації за збуренням. Ця передатна функція має вигляд

$$W_f(p)=\frac{W_n^f(p)}{1+W(p)},$$

де $W(p)$ – ПФ розімкнутої системи; $W_n^f(p)$ – ПФ об'єкта за збуренням.

Здійснивши в $W_f(p)$ заміну $p=j\omega$, запишемо формулу для АФХ замкнутої системи стабілізації за збуренням

$$W_f(j\omega)=\frac{W_n^f(j\omega)}{1+W(j\omega)}.$$

Два останні вирази співпадають із отриманими вище виразами (2.97) і (2.100) для системи стеження, що відображає подібність обох видів САК щодо компенсування збурення.

Контрольні запитання та завдання

1. Про що свідчить наявність або відсутність похідних у лівій частині рівняння динаміки ланки?

2. Що показує в загальному випадку права частина рівняння динаміки ланки?

3. Назвіть основні динамічні характеристики ланок та систем.

4. Запишіть аналітично функцію одиничний стрибок (функція Гевісайда).

5. Що таке перехідна характеристика (функція) ланки?

6. Зобразіть графічно функції одиничний стрибок та одиничний імпульс.

7. Як пов'язані між собою перехідна та вагова характеристика ланки?

8. Назвіть типові ланки САК.

9. Запишіть рівняння динаміки, передатну функцію, нулі та полюси аперіодичної ланки 1-го порядку.

10. Виходячи із передатної функції аперіодичної ланки 1-го порядку, отримайте аналітичні вирази перехідної та вагової характеристик і зобразіть їх графічно.

11. Викладіть графічний та графоаналітичний способи визначення сталої часу аперіодичної ланки 1-го порядку.

12. Що характеризує стала часу аперіодичної ланки 1-го порядку та як вона пов'язана з тривалістю перехідного процесу?

13. Наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики пропорційної ланки.

14. Для інтегральної ланки наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики. Визначте нулі та полюси ПФ.

15. Наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики диференційної ідеальної ланки. Визначте нулі та полюси передатної функції.

16. Для інерційно-диференційної ланки наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики. Визначте нулі та полюси ПФ.

17. Наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики форсувальної ланки. Визначте нулі та полюси ПФ.

18. Для інерційно-форсувальної ланки наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики. Визначте нулі та полюси передатної функції.

19. Наведіть рівняння динаміки та два варіанти передатної функції ланки 2-го порядку.

20. Обґрунтуйте умови появи аперіодичних та коливальних процесів в ланках 2-го порядку.

21. Що таке коефіцієнт затухання і який його вплив на динамічні процеси?

22. Як визначається декремент затухання коливальної ланки?

23. Для аперіодичної ланки 2-го порядку наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики. Визначте нулі та полюси передатної функції.

24. Поясніть, як визначити параметри передатної функції аперіодичної ланки 2-го порядку за її перехідною характеристикою?

25. Наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики коливальної ланки 2-го порядку. Визначте нулі та полюси передатної функції.

26. Поясніть, як визначити параметри передатної функції коливальної ланки 2-го порядку за її перехідною характеристикою?

27. Для консервативної ланки 2-го порядку наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики. Визначте нулі та полюси передатної функції.

28. Яким типовим ланкам може відповідати двигун постійного струму із незалежним збудженням?

29. Наведіть рівняння динаміки, передатну функцію, перехідну та вагову характеристики ланки запізнення.

30. Дайте означення всіх частотних характеристик, які вам відомі.

31. Як можна одержати амплітудно-фазові частотні характеристики ланки чи системи?

32. У чому полягає експериментальний спосіб побудови амплітудно-фазових частотних характеристик?

33. Вкажіть переваги логарифмічних частотних характеристик.

34. Які одиниці відкладаються по горизонтальній та вертикальній координатних осях при побудові логарифмічних частотних характеристик?

35. Скільки октав вміщує одна декада?

36. Для аперіодичної ланки 1-го порядку запишіть вирази та нарисуйте АФХ, ЛАХ та ЛФХ.

37. Запишіть аналітично та зобразіть графічно АФХ, ЛАХ та ЛФХ інтегральної ланки.

38. Для диференційної ланки запишіть формули та нарисуйте АФХ, ЛАХ та ЛФХ.

39. Запишіть аналітично та зобразіть графічно АФХ, ЛАХ та ЛФХ диференційної ланки.

40. Для інерційно-диференційної ланки запишіть вирази та нарисуйте АФХ, ЛАХ та ЛФХ.

41. Запишіть аналітично та зобразіть графічно АФХ, ЛАХ та ЛФХ форсувальної ланки.

42. Для інерційно-форсувальної ланки запишіть формули та нарисуйте АФХ, ЛАХ та ЛФХ.

43. Запишіть аналітично та зобразіть графічно АФХ, ЛАХ та ЛФХ аперіодичної ланки 2-го порядку.

44. Для коливальної ланки 2-го порядку запишіть вирази та нарисуйте АФХ, ЛАХ та ЛФХ.

45. Як залежить розмір та частота резонансного піку в АЧХ коливальної ланки 2-го порядку від коефіцієнту затухання?

46. За яких значень коефіцієнту затухання треба враховувати різницю між асимптотичною та точною ЛАХ коливальної ланки 2-го порядку?

47. Запишіть аналітично та зобразіть графічно АФХ, ФЧХ, ЛАХ та ЛФХ ланки запізнення.

48. Які правила побудови АФХ при послідовному з'єднанні ланок?

49. Які правила побудови АФХ при паралельному з'єднанні ланок?

50. Як побудувати АФХ ланки зі зворотним зв'язком?

51. Дайте означення мінімально-фазових та немінімально-фазових, стійких, нейтральних та нестійких ланок.

52. Яких значень сягає фаза немінімально-фазових ланок 1-го порядку?

53. Чим відрізняються АЧХ мінімально-фазових та немінімально-фазових ланок?

54. Викладіть методику побудови логарифмічних частотних характеристик групи ланок.

55. Якими є значення нахилу та фази асимптотичних ЛАХ та ЛФХ мінімально-фазових систем на початкових (низькі частоти) та кінцевих (високі частоти) ділянках характеристик?

56. Наведіть передатну функцію стежної чи програмної САК за завданням.

57. Запишіть передатну функцію стежної або програмної системи керування за збуренням.

58. Наведіть вираз для АФХ стежної (програмної) САК за завданням.

59. Запишіть вираз для АФХ стежної (програмної) САК за збуренням.

60. Запишіть передатну функцію та АФХ замкнутої системи стабілізації за збуренням.

ГЛАВА 3 СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

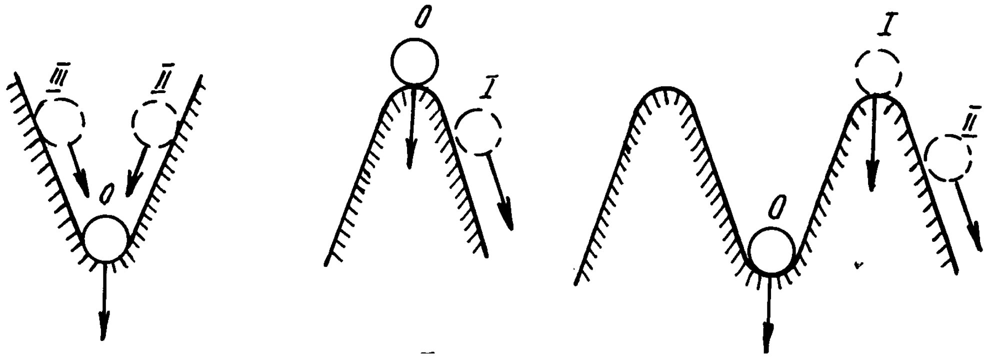
3.1 Поняття стійкості САК

3.1.1 Загальне поняття стійкості системи

У найзагальнішому випадку ***під стійкістю системи** **мають на увазі її властивість повертатися у вихідний або близький до нього стан рівноваги після припинення впливу зовнішніх дій (збурень), що спричинили відхилення стану системи від вихідного рівноважного стану***.

Стійкість є необхідною умовою здатності САК виконувати поставлені перед нею задачі керування.

Найбільш простим прикладом, що характеризує різні сторони поняття стійкості динамічної системи, може слугувати рух металевої кульки під дією сили тяжіння, як це зображено на рис. 3.1.



а б в

Рис. 3.1. Ілюстрація видів стійкості динамічних систем

Розглянемо рух кульки в межах деякого криволінійного шляху (рис. 3.1,а). Якщо кулька буде переміщена зовнішніми силами з положення початкової рівноваги 0 в положення II або III, то після зникнення цих сил вона повернеться у початкове положення або близьке до нього, залежно від дії сил тертя. При цьому можливі коливання кульки навколо початкового положення рівноваги.

У випадку, що відповідає рис. 3.1,б, кулька займає нестійке положення рівноваги. Досить невеликого відхилення від цього положення і самостійне її повернення у початкове положення буде неможливим.

Рис. 3.1,в поєднує в собі обидва розглянутих раніше варіанти можливої поведінки кульки залежно від її початкового положення рівноваги й характеру дії зовнішніх сил. При відхиленнях положення кульки в межах ділянки 0-I вона буде повертатися в початкове положення. При виході за межі цієї ділянки, повернення кульки у початкове положення стає неможливим.

Для характеристики поведінки кульки в найбільш загальному випадку нелінійних систем вводять поняття ***стійкості "у малому", стійкості "у великому", стійкості "в цілому"*** (при певному виді нелінійностей її називають ***абсолютною стійкістю***).

Систему називають стійкою "у великому", коли є визначеними межі області можливих відхилень, в яких система повертається у початкове положення, та відомо, що початкові відхилення системи не виходять за межі цієї області. Система стійка "у малому", якщо межі області стійкості не визначені, а вказується лише факт її існування. Система стійка "в цілому" якщо вона повертається у початкове положення рівноваги за будь-яких початкових відхилень (рис. 3.1,а).

Рис. 3.1,в відповідає стійкій системі "у великому" та "у малому", якщо можливі початкові відхилення задані в межах 0-I. Якщо можливі початкові відхилення знаходяться в межах ділянки 0-II, то система буде стійка "у малому" (на ділянці 0-I) і нестійка "у великому" (на ділянці 0-II).

Система стійка "у цілому" завжди є стійкою "у великому" та "у малому". Система стійка "у великому" зазвичай є стійкою і "у малому" за винятком існування в ній стійких періодичних рухів. Такі періодичні рухи, які називаються ***автоколиваннями***, можуть виникати в системах, що містять так звані суттєві нелінійності. Методи виявлення та дослідження автоколивань вивчаються в теорії нелінійних САК.

В ТАК розрізняють поняття незбуреної рівноваги (положення 0 на рис. 3.1,а) і збуреного стану, у яке переходить система в разі дії збурення і наступного його зникнення (положення II на рис. 3.1,а).

Крім порівняно простого випадку початкового положення рівноваги при якому об'єкт (кулька) нерухомий, можливі й складніші випадки, коли незбурений стан системи являє собою рух по деякій траєкторії (наприклад, у програмних САК). Такий стан системи називають ***незбуреним рухом***. В разі впливу на систему зовнішніх чинників виникають відхилення від початкового стану і такий стан системи називають ***збуреним рухом***.

Незбурений рух системи називають стійким, якщо після зняття зовнішніх дій збурений рух з плином часу ввійде в задану область.

У ТАК існує поняття ***асимптотичної стійкості***, під якою розуміють таку стійкість незбуреного руху коли збурений рух за досить малих початкових збурень прагне до незбуреного руху без жодних відхилень.

Теоретично умову асимптотичної стійкості можна записати як

$$\lim_{t \to \infty} [\Delta x_i(t)] = 0,$$

де $\Delta x_i(t)$ – відхилення i-ї координати системи в неусталеному русі від цієї ж координати в усталеному русі.

Умова стійкості технічних систем записується у вигляді:

$$\lim_{t \to \infty} [\Delta x_i(t)] \le \varepsilon,$$

де ε – деяка досить мала величина.

3.1.2 Теореми Ляпунова

Основні особливості трактування поняття стійкості в перших дослідженнях полягали у тім, що стійкість розглядалася на нескінченно великому інтервалі часу, збурення передбачалися малими, при цьому вони впливали тільки на початкові умови.

У найбільш загальному випадку відповідь на всі питання динаміки САК у тому числі стійкості, може бути отримана у результаті аналізу кривої перехідного процесу, отриманої після розв'язання диференційного рівняння замкнутої системи.

При складанні рівняння замкнутої САК зазвичай застосовується спрощення нелінійних залежностей на основі лінеаризації нелінійних функцій шляхом розкладання їх у ряд Тейлора. Отримані у такий спосіб рівняння називають рівняннями ***першого наближення***. При цьому виникає принципове питання – якою мірою висновки, що можуть бути отримані на основі аналізу рівнянь першого наближення, відповідають вихідним реальним нелінеаризованим системам?

Висновки з досліджень цього питання відомі як теореми, сформульовані російським ученим А.М. Ляпуновим у 1892 р. Запишемо ці теореми без доведень.

Теорема 1. Якщо всі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи є від'ємними або комплексними з від'ємною дійсною частиною, то збурений рух вихідної (не лінеаризованої), системи буде стійким незалежно від значення членів ряду Тейлора, що відкидають при лінеаризації.

Теорема 2. Якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є додатні корені, або комплексні з додатною дійсною частиною, то збурений рух вихідної системи буде нестійким, незалежно від значення членів ряду, що відкидають при лінеаризації.

Теорема 3. За наявності нульових і чисто уявних коренів у характеристичному рівнянні лінеаризованої системи для оцінки стійкості вихідної системи необхідно враховувати відкинуті при лінеаризації члени ряду.

Зазначені теореми є основою методу, який полягає у визначенні стійкості реальних (вихідних) систем за їх лінеаризованими диференційними рівняннями (за рівняннями першого наближення). Він називається кореневим методом дослідження стійкості і розглядається нижче.

3.2 Дослідження та аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння

Поведінку лінійної системи у різних умовах розглянемо на прикладі системи стабілізації, рівняння динаміки якої (2.101) при $g=0$ матиме вигляд

$$\left[P(p)+Q(p)\right]y(t)=P_{II}(p)S(p)f(t), \qquad (3.1)$$

де $y(t)$ – вихід системи; $f(t)$ – збурення; $P(p)$ і $Q(p)$ – добутки відповідно лівих і правих частин операторних рівнянь всіх ланок системи; $P_{II}(p)$ – добуток лівих частин рівнянь ланок системи без рівняння об'єкта; $S(p)$ – передатний поліном об'єкта за збуренням. Після нескладних перетворень це рівняння можна записати у вигляді

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_n y=b_0\frac{d^m f}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}+...b_m f\ , \qquad (3.2)$$

де $a_0,\ldots,a_n;\ b_0,\ldots,b_m$ – коефіцієнти рівняння, пов'язані із параметрами ланок системи (сталими часу, коефіцієнтами передачі та ін.). Дане рівняння замкнутої системи являє собою неоднорідне лінійне диференційне рівняння n-го порядку ($n \ge m$). Його розв'язок, відповідно до відомого принципу суперпозиції, можна отримати як

$$y=y_{пер}+y_{уст}, \qquad (3.3)$$

де $y_{пер}$ – загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння вигляду

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n y=0, \qquad (3.4)$$

яке описує вільний (незбурений) рух системи після зникнення збурення і має назву рівняння вільного руху або вільних коливань; $y_{уст}$ – частковий розв'язок неоднорідного диференційного рівняння, що характеризує усталений процес у системі (при $t\to\infty$) і залежить від параметрів системи й збурення f, але на стійкість системи не впливає.

Таким чином стійкість лінійної системи залежить від розв'язку рівняння вільного руху (3.4). Цей розв'язок у загальному випадку має вигляд

$$y_{пер} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \ldots + C_n e^{p_n t}, \qquad (3.5)$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – сталі інтегрування, зумовлені початковими умовами; $p_1, \ldots, p_n$ – корені характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0. \qquad (3.6)$$

Отже можна зробити такі важливі висновки:

- ***стійкість лінійних систем визначається коренями характеристичного рівняння, які залежать від параметрів системи;***
- ***стійкість лінійних САК не залежить від значення, характеру змін та місця прикладання зовнішніх збурень.***

Виходячи із сказаного, найзагальнішим методом аналізу стійкості лінійних САК є кореневий метод, який ґрунтується на аналізі коренів характеристичного рівняння системи.

3.2.1 Аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння

Розглянемо різні варіанти розв'язку рівняння вільного руху залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

1. Нехай всі корені дійсні й від'ємні: $p_1 < 0, p_2 < 0, \ldots, p_n < 0.$ У цьому випадку розв'язок рівняння вільного руху запишеться як

$$y_{пер} = C_1 \frac{1}{e^{p_1 t}} + C_2 \frac{1}{e^{p_2 t}} + \ldots + C_n \frac{1}{e^{p_к T}} = N_1 + N_2 + \ldots + N_k = \sum_{к=1}^{n} C_к \frac{1}{e^{p_к t}}. \qquad (3.7)$$

У виразі (3.7) кожен зі складників $N_1, N_2, \ldots, N_к$ являє собою експоненту, що прямує до нуля при $t \to \infty$. На рис. 3.2,а наведені графіки цих складників при $|p_1| > |p_2| > \ldots |p_n|$. Отже у цьому випадку перехідний процес буде затухаючим і, відповідно, система буде стійкою.

2. Нехай всі корені дійсні та від'ємні, крім кореня $p_k > 0$. У цьому разі всі складники розв'язку $y_{пер}$ будуть затухаючими, крім складника $N_к = C_к e^{p_к t} \to \infty$, який при $t \to \infty$ спричинить розбіжність вільного рух і, як наслідок, нестійкість системи (рис. 3.2,б).

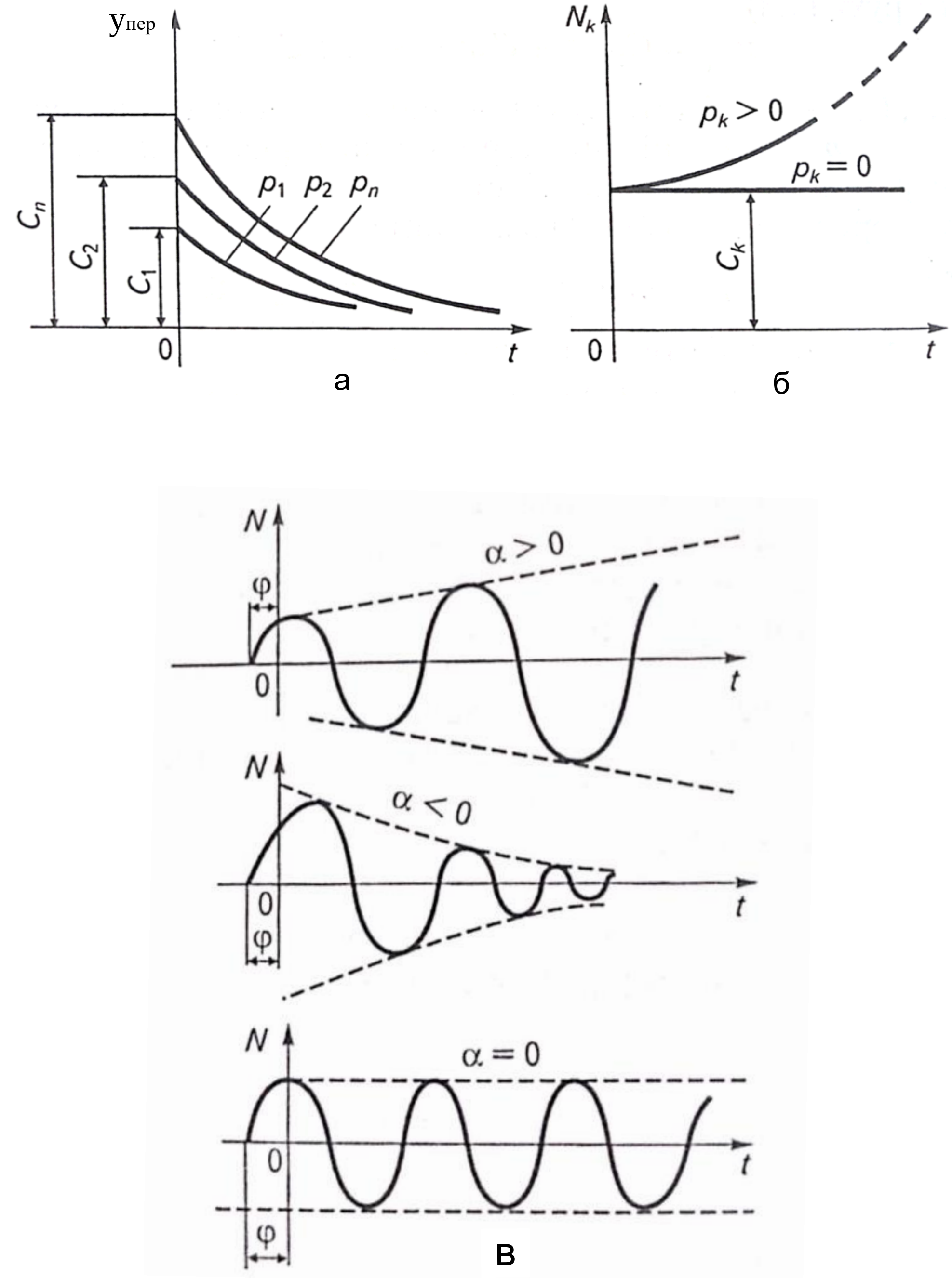


Рис. 3.2. Складники розв'язків рівняння вільного руху САК

3. Нехай всі корені характеристичного рівняння дійсні та від'ємні, крім пари комплексних коренів

$$p_к = \alpha + j\beta; \quad p_{к+1} = \alpha - j\beta.$$

Відповідна сума складників $N_к$ та $N_{к+1}$ розв'язку $y_{пер}$ матиме вигляд

$$N = N_к + N_{к+1} = C_к e^{(\alpha + j\beta)t} + C_{к+1} e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}(C_к e^{j\beta t} + C_{к+1} e^{-j\beta t}).$$

Переходячи до тригонометричних функцій, згідно з формулою Ейлера можна записати

$$e^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t; \quad e^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t.$$

Підставляючи отримані формули у вираз для N, одержимо

$$\begin{aligned} N &= e^{\alpha t}\left[C_к(cos\beta t + j\sin\beta t) + C_{к+1}(cos\beta t - j\sin\beta t\right] = \\ &= e^{\alpha t}\left[(C_к + C_{к+1})\cos\beta t + j(C_к - C_{к-1})\sin\beta t\right] = e^{\alpha t} D\sin(\beta t + \varphi), \end{aligned} \tag{3.8}$$

де $A = C_к + C_{к+1}, \quad B = C_к - C_{к+1}, \qquad D = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = arctg\left(A/B\right)$.

Вираз $D\sin(\beta t + \varphi)$ відповідає синусоїді з амплітудою D, що зміщена відносно початку координат на кут φ. У цьому випадку характер складника N перехідного процесу $y_{пер}$ буде залежати від знаку величини α.

На рис. 3.2,в наведено три графіки $N(t)$ для різних значень α. Верхній графік отриманий при $\alpha>0$. Тут N є розбіжним коливальним процесом, що відповідає нестійкій САК. Середній графік отриманий при $\alpha<0$. В цьому разі при $t \to \infty$ матимемо $e^{-\alpha t} = 1/e^{\alpha t} \to 0$. Отже, згідно з (3.8), N являє собою загасаючі коливання, а система є стійкою. Нижній графік відповідає $\alpha=0$. Тут N – це незатухаючі коливання, частота та амплітуда яких постійні.

Якщо всі корені характеристичного рівняння системи дійсні та від'ємні, а один з коренів нульовий $p_k = 0$, то складник $N_k = C_k$ являтиметься постійною величиною, як це зображено на рис. 3.2,б.

3.2.2 Межа та запас стійкості

Для оцінки поведінки системи залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння зазвичай використовується комплексна площина коренів.

Ця площина зображена на рис. 3.3.

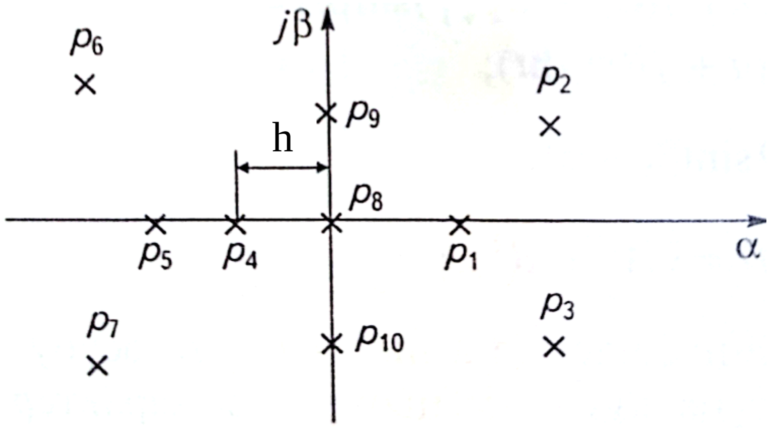


Рис. 3.3. Площина коренів характеристичного рівняння САК

Очевидно, що корені p_1 (дійсний додатний), $p_{2,3}$ (комплексні з додатною дійсною частиною), що лежать праворуч від уявної осі призводять до нестійкості САК. Для таких коренів в ТАК вживають назву "***праві корені***".

Дійсні від’ємні корені p_4, p_5, а також комплексні корені $p_{6,7}$, що мають від’ємну дійсну частину і лежать ліворуч від уявної осі, які мають назву "***ліві корені***", відповідають стійкій системі.

Таким чином, перехід кореня із лівої півплощини у праву в результаті зміни деяких параметрів системи, що впливають на зміну знаку кореня, стійку систему може перетворити в нестійку. Тому вертикальну (уявну) вісь координат на комплексній площині коренів називають ***межею стійкості системи***.

Відстань h між уявною віссю та найближчим до неї "лівим коренем" (чи парою комплексно-спряжених "лівих коренів") як це показано рис. 3.3, у стійкій системі характеризує ***запас стійкості***.

Очевидно, що нульовий корінь p_8 та чисто уявні корені $p_{9,10}$ визначають особливий випадок поведінки системи – ***знаходження її на межі стійкості***. Відповідні значення параметрів, які зумовлюють появу коренів на межі стійкості, називають ***критичними***. Якщо система знаходиться на межі стійкості через існування нульових коренів, то межа стійкості називається ***аперіодичною***, а якщо через існування чисто уявних коренів – ***коливальною***.

Приклад 3.1. Передатна функція замкнутої САК має вигляд

$$W(p) = \frac{80}{p^5 + 11{,}5p^4 + 54{,}5p^3 + 136p^2 + 172p + 80}.$$

Треба дослідити систему на стійкість за допомогою кореневого методу.

Р о з в ’ я з а н н я. Оскільки порядок САК перевищує 4-й, то визначення коренів її характеристичного рівняння (полюсів передатної функції), можливе лише числовим шляхом. Тому складемо в MATLAB наступну програму.

```
% Program 3.1
W=tf([80],[1 11.5 54.5 136 172 80]); % Передатна функція системи
Roots=pole(W), figure,                % Визначення полюсів ПФ
pzmap(W), title('Roots Plane'),       % Побудова мапи полюсів та нулів ПФ
```

Внаслідок виконання програми отримано значення коренів

```
Roots =
  -4.0000 + 0.0000i
  -2.0000 + 2.0000i
  -2.0000 - 2.0000i
  -2.5000 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i.
```

Розташування коренів на комплексній площині наведено на рис. 3.4.

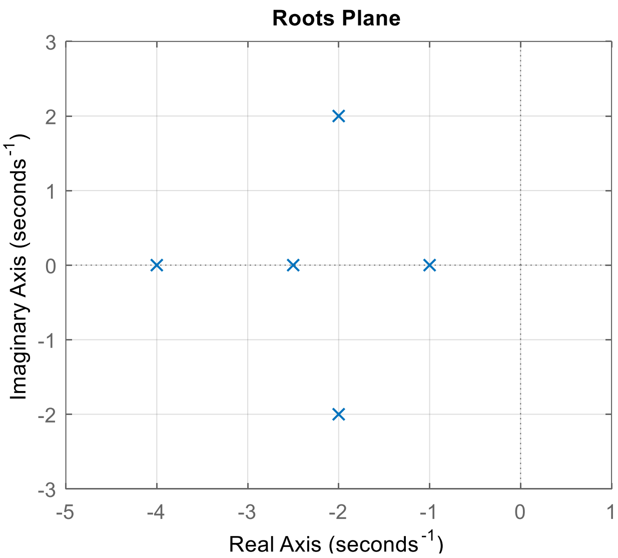


Рис. 3.4. Комплексна площина коренів (до прикладу 3.1)

Аналізуючи отримані результати бачимо, що характеристичне рівняння системи має три дійсні від’ємні корені та два комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною. Отже, згідно з кореневим методом, досліджувана САК стійка.

Недоліком аналізу стійкості за виглядом коренів характеристичного рівняння історично були певні складнощі розв'язання алгебричних рівнянь високого порядку, які при n>4 не мають аналітичного розв'язку, а також необхідність багаторазового розв'язання характеристичного рівняння при аналізі впливу змін параметрів на стійкість системи (варто пам'ятати, що кожному новому значенню параметру відповідає n нових коренів характеристичного рівняння). Тому в ТАК розроблені методи, що дозволяють досліджувати стійкість САК без знаходження коренів характеристичного рівняння, які отримали назву ***критеріїв стійкості***. Існують два основних види критеріїв стійкості – алгебричні та частотні.

3.3 Алгебричні критерії стійкості

До алгебричних критеріїв відносять критерії Рауса, Гурвіца, Льєнара-Шіпара. Алгебричні критерії дозволяють оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння замкнутої системи. Як показано вище, характеристичне рівняння одноконтурної замкнутої САК можна записати у вигляді

$$P(p)+Q(p)=0,$$

де $P(p)=P_1(p)\ldots P_n(p)$, $Q(p)=Q_1(p)\ldots Q_n(p)$ – добутки поліномів відповідно лівих та правих частин операторних рівнянь всіх ланок системи.

Після перемноження співмножників і зведення подібних членів характеристичне рівняння набуде стандартної форми

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Аналіз типових ланок показав, що для систем 1-го і 2-го порядку необхідною і достатньою умовою затухання перехідних процесів є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для систем більшого порядку (n > 2), крім додатних коефіцієнтів характеристичного рівняння системи, необхідне виконання й інших умов, які визначаються відповідними критеріями.

3.3.1 Критерій стійкості Рауса-Гурвіца

Незалежно один від одного англійський математик Е. Раус (1877 р.) і австрієць А. Гурвіц (1895 р.) запропонували свої критерії, на підставі яких стало можливим сформулювати умови стійкості лінійних САК, виходячи зі значень коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Раус запропонував критерій у вигляді певного правила (алгоритму), яке дозволяє скласти деяку таблицю й оцінювати стійкість за її виглядом.

Гурвіц запропонував свій критерій у вигляді визначників, що формуються за певним правилом і сформулював відповідні умови стійкості. Підсумкові результати визначення умов стійкості в обох випадках були однакові, що пояснює появу загального найменування критерію Рауса-Гурвіца. Зупинимося на більш зручніших для практичного застосування умовах стійкості, запропонованих Гурвіцом.

У критерії Гурвіца умови стійкості САК формулюються таким чином: ***усі корені характеристичного рівняння системи*** $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$ ***будуть дійсними від'ємними або комплексними з від'ємними дійсними частинами, якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння є додатними*** $a_i > 0,\ i = 0, 1, \ldots, n$***, а також є додатними головний визначник Гурвіца*** $\Delta_n > 0$ ***і всі його діагональні мінори*** $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-2} > 0, \ldots, \Delta_2 > 0$**.**

Правило складання головного визначника Гурвіца.

1. По головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння з a_1 до a_n.
2. Місця зверху від головної діагоналі заповнюють коефіцієнтами з більшим індексом, а знизу від діагоналі – з меншим індексом.
3. За відсутності відповідного коефіцієнта ставлять нуль.

Діагональні мінори одержують викреслюванням у головному визначнику Гурвіца відповідних рядків і стовпчиків. Продемонструємо алгоритм визначення стійкості за Гурвіцом на конкретному прикладі.

Приклад 3.2. Скласти головний визначник Гурвіца і його діагональні мінори для замкнутої системи порядку n=5 з характеристичним рівнянням

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Головний визначник Гурвіца, згідно з правилом його формування, запишеться як

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Діагональні мінори визначника Δ_5 матимуть вигляд

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

За критерієм Гурвіца умовами стійкості для даної системи є: $a_i > 0,\ i = 0,1,...,5$ та $\Delta_k > 0,\ k = 2,3,...,5$.

Система з n=3 має характеристичне рівняння

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Головний визначник Гурвіца матиме вигляд $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$. Розкриваючи його за елементами останнього стовпця, отримаємо

$$\Delta_3 = a_3(-1)^6 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 .$$

Звідси випливає, що Δ_3 буде додатним, коли $\Delta_2>0$, бо $a_3 > 0$. Таким чином, при n=3 необхідною і достатньою умовою стійкості є $\Delta_2>0$. Звісно, за додатності коефіцієнтів $a_i > 0,\ i = 0,1,...,3$.

При n=4 характеристичне рівняння системи

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

а головний визначник Гурвіца та його діагональні мінори мають вигляд

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 = a_3\Delta_2 - a_1^2a_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 .$$

Із наведених виразів видно, що виконання умови $\Delta_3 > 0$ при $a_3 > 0$ можливе тільки тоді, коли $\Delta_2 > 0$. Крім того, якщо $\Delta_3 > 0$, то при $a_4 > 0$ обов'язково буде додатним Δ_4. Таким чином бачимо, що для системи 4-го порядку цілком достатньо визначити лише знак Δ_3.

Отже при n=4 необхідними і достатніми умовами стійкості системи є $a_i > 0,\ i = 0,1,...,4$ та $\Delta_3 > 0$. В цьому разі гарантовано виконуватимуться ще дві необхідні за критерієм Гурвіца умови: $\Delta_4 > 0$ та $\Delta_2 > 0$.

Зазвичай критерій Гурвіца рекомендується застосовувати при $n \le 4$, тому що при $n > 4$ обчислення стають доволі громіздкими.

3.3.2 Критерій стійкості Льєнара-Шіпара

Цей критерій, запропонований 1914 році, власне кажучи є варіацією критерію Гурвіца. Він призначений для систем з високим степенем характеристичного рівняння ($n \geq 5$).

Авторами критерію було доведено, що ***у випадку додатних коефіцієнтів характеристичного рівняння*** $a_i > 0,\ i = 0,1,...,n$ ***та додатних всіх діагональних мінорів головного визначника Гурвіца (визначників Гурвіца) з парними індексами*** $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0\ldots$ ***будуть додатними також всі визначники Гурвіца з непарними індексами, тобто*** $\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0\ldots$**.** Тому немає необхідності знаходити знаки всіх визначників Гурвіца, а досить відшукати знаки лише парних або непарних з них. Таким чином, при n=5 необхідними й достатніми умовами стійкості будуть $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$, а при n=6 – $\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0$.

Зазначимо, що умовою знаходження системи на межі стійкості один або декілька визначників Гурвіца мають дорівнювати нулю.

3.3.3 Загальна методика дослідження впливу параметрів на стійкість системи за алгебричними критеріями

Загальна методика дослідження впливу деякого параметра T_x на стійкість полягає в тому, що:

1) залежно від степеня характеристичного рівняння замкнутої системи встановлюється достатня умова стійкості і складаються відповідні визначники Гурвіца. При

$$\begin{aligned} n = 3 &\quad \rightarrow \quad \Delta_2 > 0, \\ n = 4 &\quad \rightarrow \quad \Delta_3 > 0, \\ n = 5 &\quad \rightarrow \quad \Delta_4 > 0, \Delta_2 > 0, \\ n = 6 &\quad \rightarrow \quad \Delta_5 > 0,\ \Delta_3 > 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

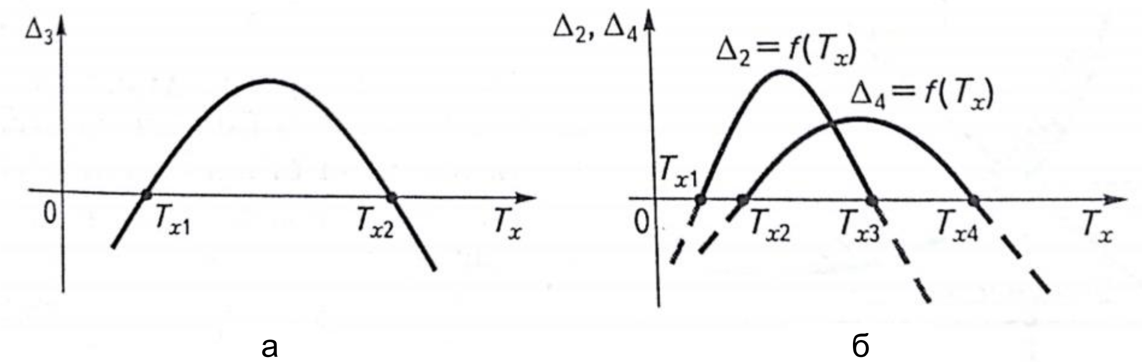
2) Встановлюється відповідна функціональна залежність визначника (або визначників) Гурвіца, що зумовлюють стійкість.

$$\Delta_{n-1} = f(T_x), \quad (при \quad n=3,\ n=4);$$
$$\Delta_{n-3} = f(T_x)\ \&\ \Delta_{n-1} = f(T_x), \quad (при \quad n=5,\ n=6).$$

3) З умови $\Delta_k = f(T_x) = 0$ визначаються критичні значення T_x, тобто значення, за яких система перебуває на межі стійкості. Також виділяються зони, у яких T_x відповідає стійкому стану системи.
4) У зоні стійких значень T_x встановлюють деякий запас стійкості системи за даним параметром та визначають зону рекомендованих значень параметра T_x.

Вибране за умовами стійкості значення T_x надалі необхідно узгодити з вимогами якості перехідного процесу. Якщо досліджуваний параметр входить до складу коефіцієнта a_n характеристичного рівняння і визначає статичну помилку системи, то вимоги стійкості системи повинні бути також узгоджені з вимогами статичної точності.

Застосування викладеної методики ілюструється на рис. 3.5. На рис. 3.5,а показана гіпотетична залежність $\Delta_3 = f(T_x)$, що відповідає системі 4-го



а б

Рис. 3.5. Дослідження за допомогою алгебричних критеріїв впливу параметра T_x на стійкість системи 4-го порядку (а) та 5-го порядку (б)

порядку, умовою стійкості якої є $\Delta_3 > 0$. Критичні значення параметрів T_{x1} та T_{x2} відповідають умові $\Delta_3 = 0$, а зона допустимих значень параметра T_x знаходиться в межах $T_{x1} < T_x < T_{x2}$. На рис. 3.5,б зображені дві гіпотетичні характеристики $\Delta_2 = f(T_x)$ та $\Delta_4 = f(T_x)$, що відповідають системі 5-го порядку (n=5). Оскільки умовою стійкості є $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$, то зона допустимих значень параметра T_x перебуває в межах $T_{x2} < T_x < T_{x3}$, а T_{x2} і T_{x3} є критичними значеннями параметра T_x. При цьому всередині зони допустимих значень параметра буде розташована зона його рекомендованих значень, яка визначається шляхом врахування можливих відхилень $\pm\Delta T_x$ параметра T_x від свого розрахункового значення у процесі роботи системи. Це пов'язано з потребою забезпечення певного запасу стійкості САК. Отже, на основі рис. 3.5 можна зробити висновок, що для системи 4-го порядку рекомендовані значення параметра T_x перебуватимуть у зоні $T_{x1} + \Delta T_x \le T_x \le T_{x2} - \Delta T_x$, а для системи 5-го порядку – у зоні $T_{x2} + \Delta T_x \le T_x \le T_{x3} - \Delta T_x$.

3.3.4 Приклади дослідження стійкості САК за допомогою алгебричних критеріїв

Приклад 3.3. Характеристичне рівняння замкнутої системи стабілізації напруги генератора постійного струму має вигляд [1]

$$T_г T_д p^3 + (T_г + T_д)p^2 + p + K_p = 0, \qquad (3.10)$$

де $T_г$ – стала часу генератора; $T_д$ – стала часу гідравлічного демпфера; K_p – коефіцієнт передачі розімкнутої системи. Параметри мають значення $T_г = 0{,}02 c$, $T_д = 0{,}01 c$, $K_p = 200\ c^{-1}$. Необхідно дослідити стійкість системи за допомогою критерію Гурвіца.

Р о з в ' я з а н н я. За рівнянням (3.10) складемо головний визначник Гурвіца у загальному вигляді

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_г + T_д & K_p & 0 \\ T_г T_д & 1 & 0 \\ 0 & T_г + T_д & K_p \end{vmatrix}.$$

Для систем 3-го порядку, крім додатного значення коефіцієнтів характеристичного рівняння, необхідною умовою стійкості є $\Delta_2 > 0$. Звідси

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_г + T_д & K_p \\ T_г T_д & 1 \end{vmatrix} = T_г + T_д - T_г T_д K_p. \qquad (3.11)$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, дістанемо

$$\Delta_2 = 0{,}02+0{,}01–0{,}02\ 0{,}01\ 200 = –0{,}01 < 0.$$

Отже, при даному значенні параметрів система є нестійкою. Оскільки при зменшенні значень сталих часу їхня сума буде зменшуватися в менших межах, чим їхній добуток, то теоретично домогтися стійкості в цьому випадку можливо наступними способами:

- зменшенням сталих часу $T_г$ і $T_д$ або однієї з них;
- зменшенням коефіцієнта передачі розімкнутої системи K_p;
- зміною в потрібному напрямку сталих часу та коефіцієнта передачі.

При виборі того або іншого шляху налаштування системи, насамперед, необхідно виходити з ефективності його дії на систему й технічні зручності налаштування системи. Зменшимо коефіцієнт передачі розімкнутої системи, прийнявши $K_p = 100\ c^{-1}$. Тепер маємо

$$\Delta_2 = 0{,}02+0{,}01–0{,}02\ 0{,}01\ 100 = 0{,}01 > 0.$$

Очевидно, що в цьому разі система стійка.

Приклад 3.4. Для розглянутої у попередньому прикладі системи стабілізації напруги генератора постійного струму знайти критичне значення коефіцієнта передачі розімкнутої системи K_p.

<u>Розв’язання</u>. Критичне значення параметра можна визначити, виходячи з умови знаходження системи на межі стійкості. Цю умову на основі (3.11) запишемо як

$$\Delta_2 = T_г + T_д - T_г T_д K_p = 0. \qquad (3.12)$$

Розв’язуючи рівняння (3.12) відносно K_p отримаємо вираз для критичного значення цього параметру

$$K_{р,кр} = \frac{T_г + T_д}{T_г T_д} = \frac{0,02+0,01}{0,02\cdot 0,01} = 150\ c^{-1}.$$

При $K_р > 150\ c^{-1}$ система стає нестійкою. Очевидно, що чим більше наближатиметься коефіцієнт передачі до свого критичного значення, тим менший запас стійкості за даним параметром матиме система. Так, при номінальному значенні коефіцієнту передачі $K_р = 100\ c^{-1}$ запас стійкості у відсотках складатиме $h = \frac{150-100}{100}\times 100\% = 50\%$.

Приклад 3.5. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Льєнара-Шіпара систему керування, характеристичне рівняння якої має вигляд $a_0p^6 + a_1p^5 + a_2p^4 + a_3p^3 + a_4p^2 + a_5p + a_6 = 0$, де $a_0 = 1;\ a_1 = 7;\ a_2 = 19,25;$ $a_3 = 26,5;\ a_4 = 19,25;\ a_5 = 7;\ a_6 = 1.$

Розв'язання. Порядок характеристичного рівняння $n = 6$. Згідно з критерієм Льєнара-Шіпара для стійкості системи 6-го порядку необхідно і достатньо, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння, а також діагональні мінори 5-го та 3-го порядку головного визначника Гурвіца були додатними.

Аналізуючи характеристичне рівняння системи, бачимо, що всі його коефіцієнти додатні $a_i > 0,\ i = \overline{0,6}$. Складемо головний визначник Гурвіца

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 7 & 26,5 & 7,00 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 19,25 & 19,25 & 1,000 & 0,000 & 0 \\ 0 & 7 & 26,50 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 19.25 & 19,25 & 1,000 & 0 \\ 0 & 0,00 & 7 & 26,5 & 7 & 0 \\ 0 & 0,00 & 1,000 & 19,25 & 19,25 & 1 \end{vmatrix}.$$

За головним визначником Гурвіца запишемо та обчислимо його діагональні мінори 3-го та 5-го порядку

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 26,5 & 7,00 \\ 1 & 19,25 & 19,25 \\ 0 & 7 & 26,50 \end{vmatrix} = 1974,4 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 7 & 26,5 & 7,00 & 0 & 0 \\ 1 & 19,25 & 19,25 & 1,0 & 0 \\ 0 & 7 & 26,5 & 7 & 0 \\ 0 & 1,00 & 19,25 & 19,25 & 1 \\ 0 & 0,00 & 7 & 26,5 & 7 \end{vmatrix} = 128144,5 > 0 \cdot$$

Отже, на підставі додатності коефіцієнтів характеристичного рівняння та діагональних мінорів Δ_3 і Δ_5, за критерієм Льєнара-Шіпара система стійка.

3.4 Частотний критерій стійкості Найквіста

3.4.1 Особливості критерію Найквіста

Критерій запропонував американський учений шведського походження Гаррі Найквіст (*Harry Nyquist*) в 1932 р. для аналізу стійкості електронних підсилювачів зі зворотним зв'язком. Надалі він був узагальнений для довільних автоматичних систем. Основні особливості критерію Найквіста наступні.

1. Критерій дозволяє здійснювати оцінку стійкості замкнутої системи за частотними характеристиками розімкнутої системи.

2. Критерій дозволяє аналізувати стійкість системи за відсутності рівнянь динаміки окремих елементів. У цьому разі досить мати експериментальні частотні характеристики відповідної ланки чи ланок. Ці характеристики можуть бути отримані на основі реальних ланок системи або їхніх моделей.

Така універсальність критерію є основною його перевагою, а в деяких випадках (відсутність математичного опису окремих ланок) робить його незамінним для розв’язання задачі стійкості САК. У той же час критерій Найквіста трохи складніший від розглянутих раніше критеріїв.

3.4.2 Доведення критерію Найквіста

Нехай є деяка розімкнута система, що складається з послідовно з’єднаних *n* ланок. Її передатна функція може бути представлена у вигляді

$$W(p)=\frac{x_{n\,вих}}{x_{1\,вх}}=\frac{Q(p)}{P(p)}=\frac{Q_1(p)Q_2(p)...Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p)...P_n(p)}=\frac{b_0p^к+b_1p^{к-1}+...+b_к}{d_0p^n+d_1p^{n-1}+...+d_n}, \quad (3.13)$$

де $P_1(p),\dots,P_n(p)$ і $Q_1(p),\dots,Q_n(p)$ – відповідно, операторні поліноми лівих і правих частин рівнянь динаміки ланок; $x_{n\,вих}$ – вихідна величина останньої ланки n; $b_0,...,b_к$, $d_0,...,d_n$ – коефіцієнти рівнянь ланок системи, зумовлені їхніми параметрами; $x_{1вх}$ – вхідна величина першої ланки розімкнутої системи. Оскільки замикання системи автоматичного керування здійснюють за допомогою від'ємного зворотного зв'язку, сигнал з виходу ланки n надійде в цьому разі на вхід першої ланки з від'ємним знаком. Тому $x_{n\,вих}=-x_{1вх}$ і

$$W(p)=\frac{x_{n\,вих}}{x_{1\,вх}}=-1.$$

Звідси

$$W(p)+1=0. \quad (3.14)$$

Даний вираз являє собою характеристичне рівняння замкнутої системи, записане через ПФ розімкнутої системи $W(p)$. Це неважко показати, тому що

$$W(p)+1=\frac{Q(p)}{P(p)}+1=\frac{Q(p)+P(p)}{P(p)}=0 \text{ або } W(p)+1=Q(p)+P(p)=0.$$

Відповідно до виразів (3.13) та (3.14) можна записати

$$\frac{b_0p^к+b_1p^{к-1}+...+b_к}{d_0p^n+d_1p^{n-1}+...+d_n}+1=\frac{Q(p)}{P(p)}+1=0.$$

Звідси $$\frac{b_0p^к+...+b_к+d_0p^n+...+d_n}{d_0p^n+d_1p^{n-1}+...+d_n}=\frac{Q(p)+P(p)}{P(p)}=0.$$

Записуючи чисельник у загальноприйнятій формі лівої частини характеристичного рівняння замкнутої системи, вищенаведену залежність можна отримати у вигляді

$$\frac{a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n}{d_0p^n+d_1p^{n-1}+...+d_n}=\frac{Q(p)+P(p)}{P(p)}=W(p)+1=0. \quad (3.15)$$

Зауважимо, що в (3.15) чисельник $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = P(p) + Q(p)$ є характеристичним поліномом замкнутої системи, а знаменник $d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + ... + d_n = P(p)$ є характеристичним поліномом розімкнутої САК.

Розглянемо два випадки стійкості замкнутої системи – за стійкої та нестійкої розімкнутої системи і сформулюємо умову стійкості замкнутої САК.

Випадок стійкої розімкнутої системи. Переходячи в частотну область, вираз (3.15) при $p = j\omega$ можна записати як

$$1 + W(j\omega) = \frac{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + ... + a_n}{d_0 (j\omega)^n + d_1 (j\omega)^{n-1} + ... + d_n} = \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)} = N(j\omega), \qquad (3.16)$$

де $W(j\omega)$ – амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи, $F(j\omega)$, $R(j\omega)$, $N(j\omega)$ – деякі частотні характеристики. Поліноми чисельника й знаменника можна записати як добутки n векторів-множників виду $(j\omega - p_k)$ або $(j\omega - p'_k)$, де p_k, p'_k – корені характеристичних рівнянь замкнутої та розімкнутої систем відповідно.

Таким чином, вираз (3.16) можна подати у вигляді

$$1 + W(j\omega) = \frac{a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2)...(j\omega - p_n)}{d_0 (j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2)...(j\omega - p'_n)} = \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)} = N(j\omega). \qquad (3.17)$$

У стійкій розімкнутій системі всі корені $p'_1, p'_2, ..., p'_n$ будуть дійсними від'ємними або комплексними з від'ємною дійсною частиною. Тобто вони будуть розташовуватися у лівій половині комплексної площини коренів (рис. 3.6). Вектори-множники виду $(j\omega - p'_k)$ на площині коренів визначаються за правилом векторного віднімання. Кожен такий множник, що відповідає дійсному кореню, при зміні ω від 0 до $+\infty$ повернеться на кут $\pi/2$, а кожний добуток двох таких множників, що відповідають комплексному кореню, повернеться на кут π.

Дійсно, як видно з рис. 3.6, кут повороту вектора $(j\omega - p'_2)$ дорівнює $\theta_2 = \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}(j\omega - p'_2) = \pi/2 - \gamma$, а кут повороту вектора $(j\omega - p'_3)$ складе

$\theta_3 = \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}(j\omega - p_3') = \pi/2 + \gamma$. Звідси добуток $(j\omega - p_2')(j\omega - p_3')$ повернеться на кут $\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 = \pi/2 - \gamma + \pi/2 + \gamma = \pi$. Отже загальний кут повороту вектора $R(j\omega)$ дорівнюватиме $\theta_R = n\pi/2$.

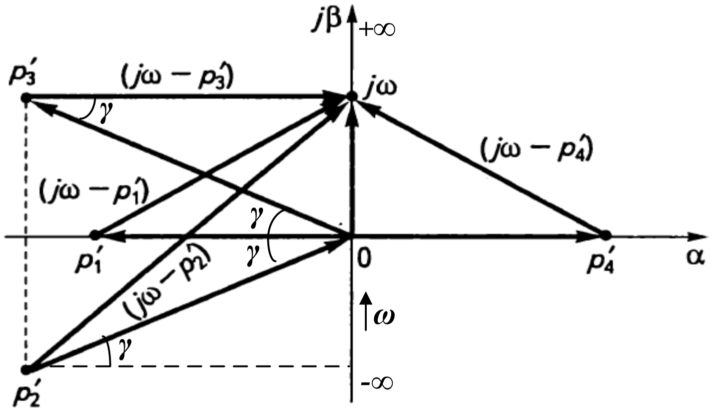


Рис. 3.6. Розташування векторів-множників $R(j\omega)$ на площині коренів

Для стійкості замкнутої системи всі корені $p_1, ..., p_n$ характеристичного рівняння замкнутої системи повинні розміщуватися в лівій півплощині. Тому вектор $F(j\omega)$, вектори-множники якого мають вигляд $(j\omega - p_i)$, при зміні ω від 0 до $+\infty$ також зробить поворот на кут $\theta_F = n\pi/2$.

Отже результуючий кут повороту вектора $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ буде

$$\theta_\Sigma = \theta_F - \theta_R = 0.$$

Для графічної інтерпретації цього висновку розглянемо рис. 3.7, де $W(j\omega)$, як зазначено вище, це АФХ розімкнутої системи.

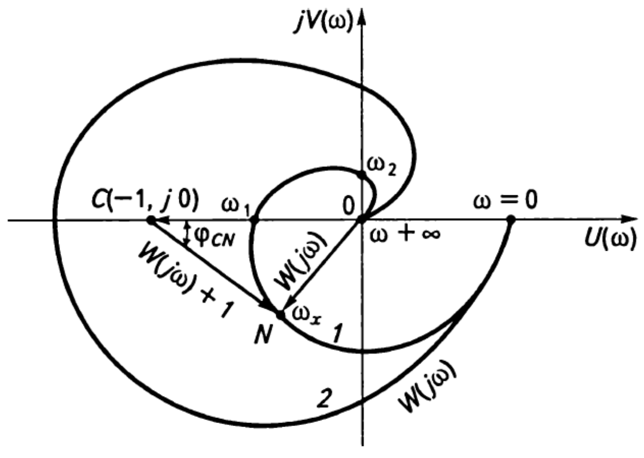


Рис. 3.7. Геометрична інтерпретація критерію Найквіста для стійкої розімкнутої САК

Для того, щоб побудувати вектор $1+W(j\omega)=N(j\omega)$ на дійсній осі виділяється точка C з координатами $(-1, j0)$ і будується вектор CN. Початок цього вектора розташовується в точці $C(-1, j0)$, а кінець у точці N на АФХ розімкнутої САК. При зміні ω від 0 до $+\infty$ цей вектор обходить всі точки $W(j\omega)$, роблячи поворот на деякий результуючий кут φ_{CN}. Вважаючи кут повороту вектора CN за годинниковою стрілкою від'ємним, а кут повороту проти годинникової стрілки – додатним, неважко помітити, що при зміні частоти від 0 до ω_x матимемо $\varphi_{CN}=-\varphi_1$, а при зміні частоти від ω_x до ω_1 дістанемо $\varphi_{CN}=+\varphi_1$. Отже при зміні ω від 0 до ω_1 результуючий кут повороту

$$\varphi_{CN}=-\varphi_1+\varphi_1=0.$$

Подібним чином рухається вектор в діапазоні частот від ω_1 до ω_2 та від ω_2 до $+\infty$. Отже результуючий кут повороту вектора CN при обході всіх точок АФХ розімкнутої системи, позначеної на рис. 3.7 цифрою 1, дорівнюватиме нулю. Це підтверджує визначену вище умову стійкості замкнутої системи. Коли АФХ розімкнутої системи подібна на характеристику 2, то умова стійкості виконуватися не буде, бо $\varphi_{CN}\neq 0$.

На основі вищевикладеного критерій стійкості Найквіста для випадку стійкої розімкнутої системи формулюється наступним чином:

якщо розімкнута система стійка чи нейтральна, то для стійкості замкнутої САК необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи не охоплювала точку С з координатами $(-1, j0)$ ***при зміні ω від 0 до*** $+\infty$.

Випадок нестійкої розімкнутої системи. У цьому разі серед коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи повинні бути корені (наприклад p_4') що лежать у правій півплощині комплексної площини коренів (див. рис. 3.6). Припустимо, що загальна кількість таких коренів r. При цьому кожен вектор-множник вигляду $\left(j\omega-p_k'\right)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ зробить поворот за годинниковою стрілкою на кут $\pi/2$, а загальний кут повороту усіх r векторів-множників буде дорівнювати $r\pi/2$. При цьому із загальної кількості n векторів-множників, що відповідають розімкнутій системі і визначають кут повороту вектора $R(j\omega)$, $n-r$ множників від вертикальної осі знаходитимуться ліворуч, а r множників – праворуч. Отже, результуючий кут повороту вектора $R(j\omega)$ буде

$$\theta_R = \frac{\pi}{2}(n-r) - \frac{\pi}{2}r = \frac{\pi}{2}n - \pi r. \tag{3.18}$$

У стійкій замкнутій системі $\theta_F = n\pi/2$ і результуючий кут повороту вектора $N(j\omega) = CN = W(j\omega) + 1$ дорівнює

$$\theta_\Sigma = \theta_F - \theta_R = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}n + \pi r = \pi r. \tag{3.19}$$

Звідси критерій Найквіста для випадку нестійкої розімкнутої системи можна сформулювати у наступному вигляді:

якщо розімкнута система нестійка, то для стійкості замкнутої системи необхідно й достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при зміні ω від 0 до $+\infty$ ***охоплювала точку С з координатами*** $(-1, j0)$ ***проти годинникової стрілки на кут*** πr ***(де*** r ***– кількість правих коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи).***

Враховуючи випадки стійких і нестійких розімкнутих систем, узагальнений критерій стійкості Найквіста можна сформулювати наступним чином:

для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб рух точки N уздовж АФХ розімкнутої системи при зміні ω від 0 до $+\infty$ ***викликав обертання вектора CN, початок якого розміщено у точці С з координатами*** $(-1, j0)$***, на кут***

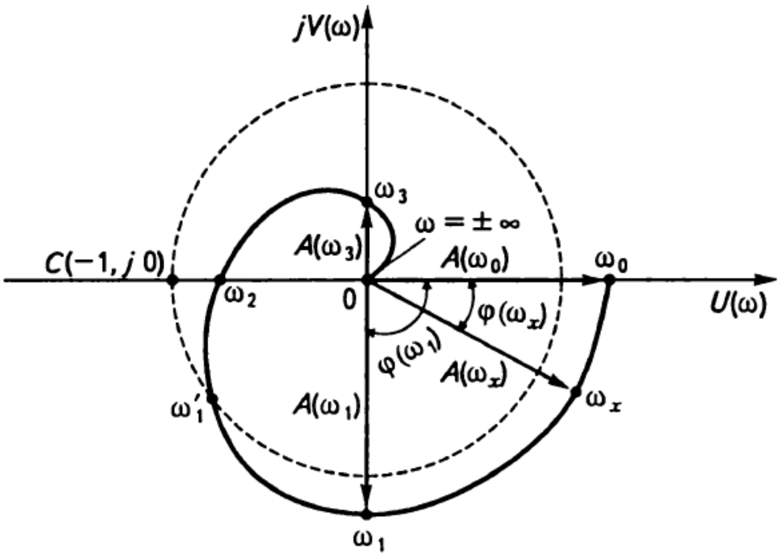
$$\varphi_{CN} = r\pi, \tag{3.20}$$

де r ***– кількість правих коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи***.

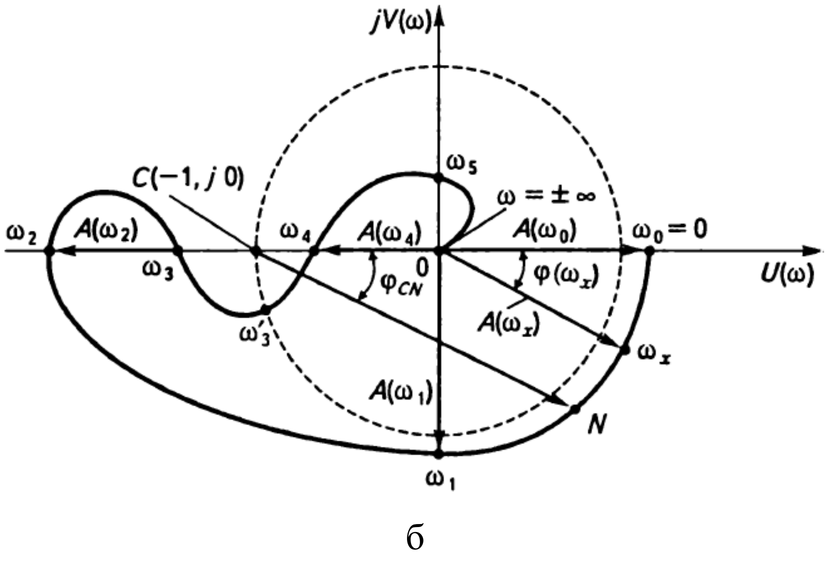
Якщо $r = 0$, то умова стійкості замкнутої САК має вигляд

$$\varphi_{CN} = 0\,. \tag{3.21}$$

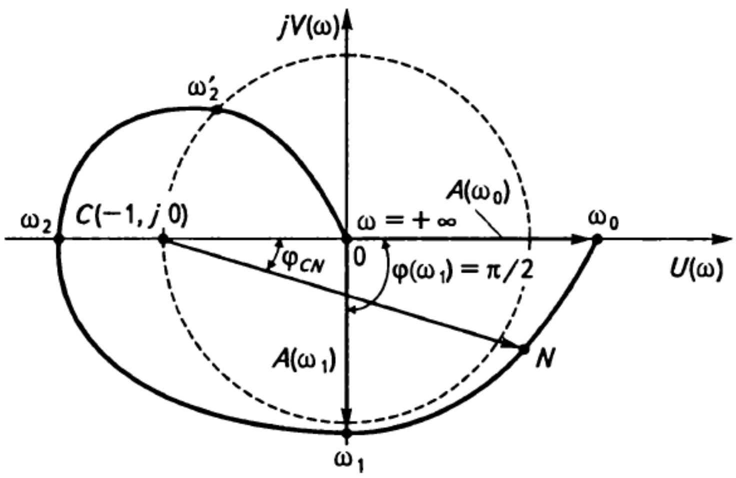
На рис. 3.8 показані АФХ стійких розімкнутих систем. Визначаючи дійсний кут φ_{CN}. що виникне внаслідок руху точки N уздовж характеристики при зміні ω від 0 до $+\infty$, і зіставляючи його значення з умовою стійкості замкнутої системи (3.21), нескладно побачити, що зображені на рис. 3.8,а,б характеристики відповідають стійким замкнутим системам, а зображені на рис. 3.8,в – нестійкій замкнутій системі.



а



б



в

Рис. 3.8. Приклади застосування критерію Найквіста для стійких розімкнутих систем

Якщо амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи проходить безпосередньо через точку C з координатами $(-1, j0)$, то в цьому випадку замкнута система перебуватиме на межі стійкості.

Випадок астатичних розімкнутих САК. Сформулюємо наступне означення.

Ланки і розімкнені системи називаються <u>астатичними</u>, якщо їх передатні функції мають один або більше нульовий полюс.

Усі розімкнені астатичні системи у замкненому стані також є астатичними. Проте замкнуті астатичні САК у розімкненому стані можуть як бути, так і не бути астатичними, що буде показано нижче. Фізично астатизм замкнених систем досягається шляхом введення ланок інтегрувальної дії в структуру САК чи певним налаштуванням параметрів зворотного зв'язку системи. В комбінованих САК астатизм також можна отримати завдяки прямому зв'язку за зовнішньою дією [1].

Наведені на рис. 3.8 АФХ належать розімкненим системам, у передатних функціях яких нульові полюси відсутні. Ці криві мають вигляд замкнутого контуру, який починається на дійсній додатній півосі при $\omega = 0$, а закінчується у центрі координат при $\omega = \infty$. У цьому разі перевірка умови стійкості (3.20) не викликає ніяких труднощів.

В астатичних розімкнутих системах передатна функція має один або більше нульовий полюс і може бути записана у вигляді

$$W(p)=\frac{Q(p)}{P(p)}=\frac{Q(p)}{p^{\nu}P_1(p)}, \tag{3.22}$$

де $\nu \geq 1$ – кількість нульових полюсів. Здійснивши в (3.22) заміну $p = j\omega$, дістанемо вираз для АФХ астатичних розімкнутих систем

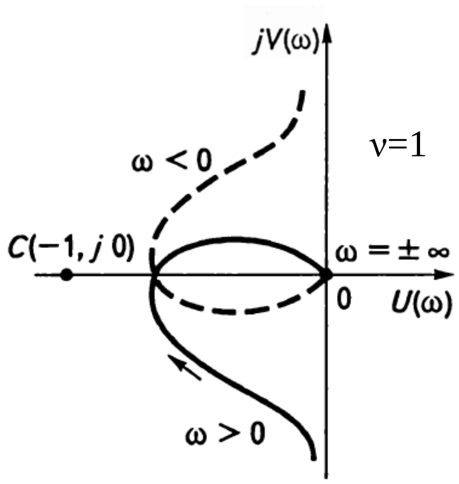
$$W(j\omega)=\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{Q(j\omega)}{(j\omega)^{\nu}P_1(j\omega)}.$$

При $\omega = 0$ та $\nu \geq 1$ ця характеристика матиме розрив. На рис. 3.9 зображені АФХ розімкнутих астатичних систем з порядком астатизму $\nu = 1$ (рис. 3.9,а) та $\nu = 2$ (рис. 3.9,б). Наявність розриву в АФХ робить неможливим коректне визначення умови стійкості (3.20), тому частотну характеристику системи модифікують за рахунок т. з. «доповнення у нескінченності». Отже використання критерію Найквіста для астатичних розімкнутих систем полягає у виконанні наступних кроків:

1) будують АФХ розімкнутої системи при зміні частоти $0 < \omega \leq \infty$***;***

2) побудовану характеристику доповнюють дугою нескінченно великого радіус-вектора R***, який повертається на кут*** $\nu\pi/2$***.***

3) застосовують критерій Найквіста у відповідному формулюванні.



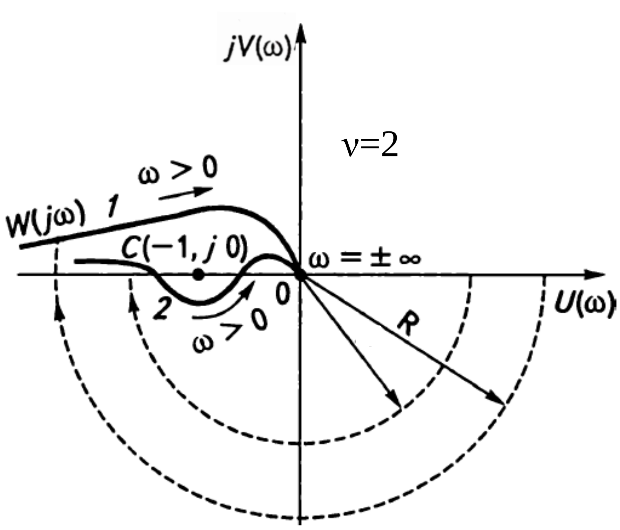


Рис. 3.9. Застосування критерію Найквіста для астатичних розімкнутих САК

На рис. 3.9,б наведено дві АФХ розімкнутих астатичних систем без правих коренів (криві 1 і 2). Визначаючи кут повороту вектора CN з врахуванням «доповнення у нескінченності» для кривої 1 отримаємо $\varphi_{CN} = -2\pi$, а для кривої 2 – $\varphi_{CN} = 0$. Оскільки в обох системах $r = 0$, то, згідно з (3.20), замкнута система, яка має характеристику 1 у розімкнутому стані, буде нестійкою, а яка має характеристику 2 – буде стійкою.

3.4.3 Визначення запасу стійкості за критерієм Найквіста

Вище було зазначено, що проходження АФХ розімкнутої системи через точку C з координатами $(-1, j0)$ засвідчує перебування замкнутої системи на межі стійкості. Отже запас стійкості замкнутої системи при використанні критерію Найквіста визначається деякою зоною в околі точки $C(-1, j0)$, через яку не повинна проходити АФХ розімкнутої системи $W(j\omega)$.

Розрізняють ***запас стійкості за модулем*** (***за амплітудою***) і ***за фазою***. Дійсний запас стійкості системи за модулем визначається деяким значенням h, на яке модуль АФХ розімкнутої системи $A(\omega) = |W(j\omega)|$ менший від одиниці. Як показано на рис. 3.10, його можна визначити за відстанню між точкою $C(-1, j0)$ та точкою перетину осі абсцис характеристикою $W(j\omega)$.

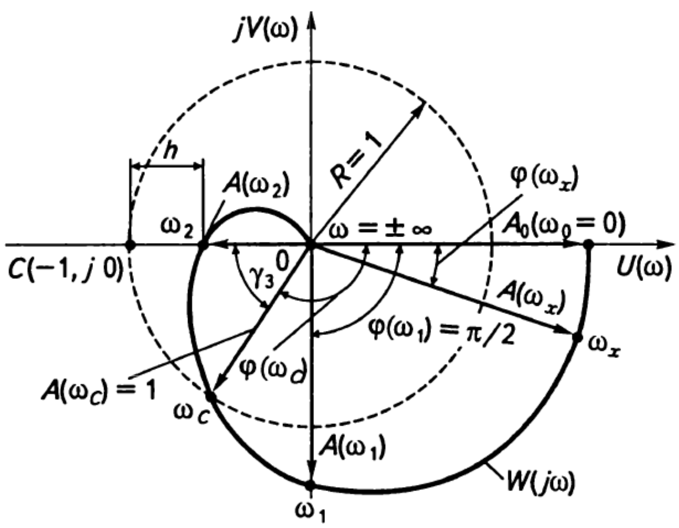


Рис. 3.10. Визначення запасів стійкості за критерієм Найквіста

Запас стійкості за фазою γ_3 являє собою різницю між кутом π та кутом $\varphi(\omega_c)$

$$\gamma_3 = \pi - \varphi(\omega_c),$$

де ω_c – частота, на якій $W(j\omega)$ перетинає коло одиничного радіусу, як це зображено на рис. 3.10.

Запас стійкості може задаватися також у вигляді деякої зони в околі точки $C(-1, j0)$, куди не повинна попадати АФХ розімкнутої системи. На рис. 3.11 показано бажаний запас стійкості як виділену сірим кольором зону.

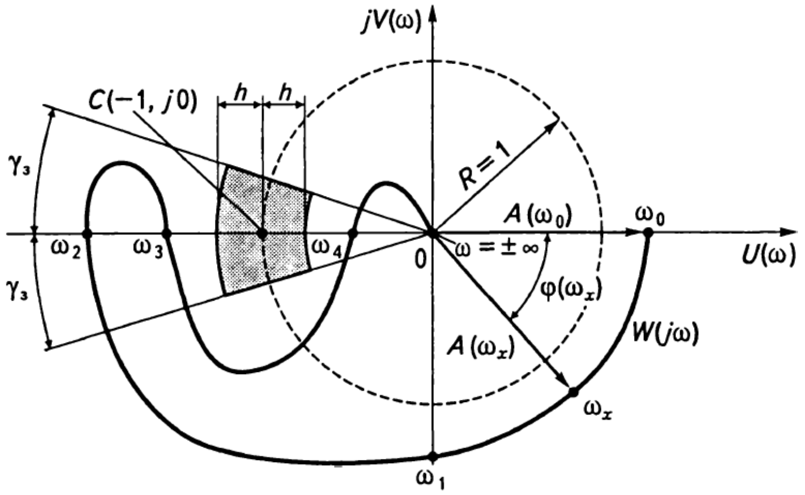


Рис. 3.11. Запас стійкості у вигляді забороненої для АФХ зони

3.4.4 Критерій Найквіста у логарифмічній формі

За критерієм Найквіста для висновку про стійкість замкнутої САК можна аналізувати взаємне розташування амплітудної та фазової частотних характеристик. Зазвичай для цього використовують логарифмічні частотні характеристики – амплітудну $L(\omega)$ (ЛАХ) та фазову $\varphi(\omega)$ (ЛФХ), оскільки їх побудова є простою. Критерій Найквіста в логарифмічній формі для випадків стійкої та нестійкої розімкнутих систем формулюється наступним чином:

1) якщо розімкнута система стійка або нейтральна, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб ЛАХ розімкнутої САК $L(\omega)$ ***перетинала вісь абсцис раніше, ніж її ЛФХ*** $\varphi(\omega)$ ***востаннє пе-***

ретинає лінію $-\pi$***, тобто на частоті зрізу*** $\omega_з$***, де ЛАХ перетинає вісь абсцис*** $L(\omega_з)=0$***, фаза має бути більшою ніж*** $-\pi$***.***

2) якщо розімкнута система нестійка і її характеристичне рівняння має r ***правих коренів, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при додатній ЛАХ розімкнутої системи*** $L(\omega)>0$ ***сума додатних та від'ємних перетинів її ЛФХ*** $\varphi(\omega)$ ***лінії*** $-\pi$ ***дорівнювала*** $r/2$***, де додатними вважаються перетини знизу вгору, а від'ємними – зверху вниз. При цьому асимптотичне наближення фази знизу до рівня*** $-\pi$ ***вважається за –1/2, а зверху – за +1/2 перетину.***

На рис. 3.12 за допомогою деяких гіпотетичних ЛАХ та ЛФХ демонструється застосування критерію Найквіста для стійкої розімкнутої системи.

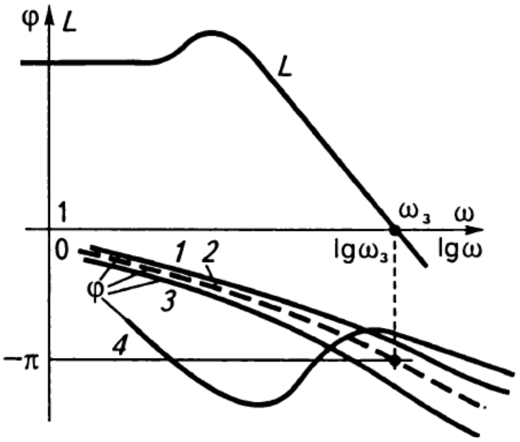
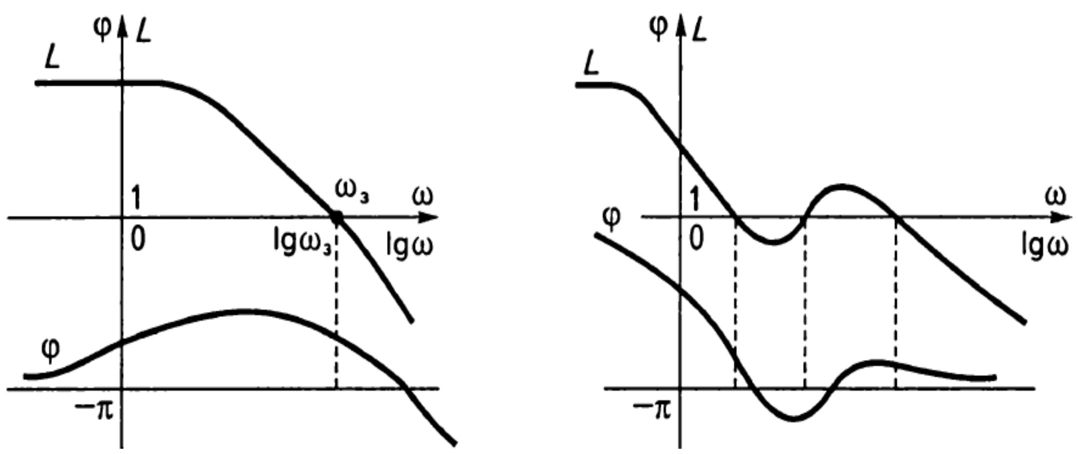


Рис. 3.12. Приклади застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі у випадку стійкої розімкнутої САК

За допомогою сформульованого вище 1-го варіанту критерію Найквіста можна зробити висновок, що на рис. 3.12 із 4-х фазових характеристик криві 1 та 4 відповідають стійким замкнутим системам, крива 3 відповідає нестійкій замкнутій САК, а крива 2 відповідає замкнутій системі на межі стійкості.

Рис. 3.13,а демонструє застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі для нестійкої розімкнутої системи з кількістю правих коренів $r=1$, а рис. 3.13,б – з $r=2$. Згідно із наведеним вище 2-м варіантом критерію Найквіста можна зробити висновок, що в обох випадках замкнута САК стійка.



а *б*

Рис. 3.13. Приклади застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі у випадку нестійкої розімкнутої системи з $r=1$ (*а*) та $r=2$ (*б*)

Випадок астатичних розімкнутих САК. В астатичних розімкнутих системах передатна функція може бути записана у вигляді (3.22), де $\nu \ge 1$ – кількість нульових полюсів, які відповідають ланкам інтегрувальної дії в одноконтурній структурі системи. В цьому разі перед застосуванням другого варіанту критерію Найквіста у логарифмічній формі фазову характеристику розімкнутої системи слід модифікувати за рахунок «доповнення у нескінченності», що полягає в асимптотичному збільшенні фази на $\nu\pi/2$ при $\omega \to 0$. По суті таке доповнення фази відповідає заміні кожного інтегратора аперіодичною ланкою 1-го порядку з нескінченно великою сталою часу. Коректність цієї заміни обґрунтовується граничним переходом у наступному вигляді:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T}{Tp+1}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{p+1/T}=\frac{1}{p}.$$

Запаси стійкості. При використанні критерію Найквіста у логарифмічній формі запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ у радіанах чи градусах визначається за кривою $\varphi(\omega)$ на частоті зрізу $\omega_з$, якій відповідає $L(\omega_з)=0$, а запас стійкості за модулем ΔL у децибелах визначається за характеристикою $L(\omega)$ при $\varphi(\omega)=-180°$ (рис. 3.14).

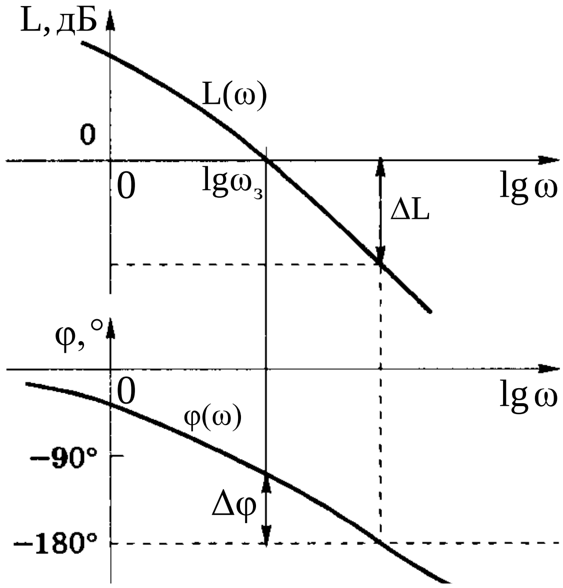


Рис. 3.14. Визначення запасів стійкості за критерієм Найквіста у логарифмічній формі

При проектуванні САК запас стійкості за фазою рекомендується вибирати не меншим ніж 30-45°. Запас стійкості за модулем повинен бути не меншим ніж 6 дБ, чому відповідає можливе збільшення у процесі роботи коефіцієнта передачі розімкнутої системи відносно номінального значення приблизно у 2 рази.

Приклад 3.6. Передатна функція розімкнутої системи має вигляд

$$W(p)=\frac{40(0,02p+1)(0,1p+1)(0,5p+1)}{(0,04p^2+0,2p+1)(2,5p+1)(0,05p+1)}. \tag{3.23}$$

Треба дослідити стійкість замкнутої системи за допомогою критерію Найквіста в логарифмічній формі.

Р о з в ' я з а н н я. Визначимо, чи поліном 2-го порядку у знаменнику передатної функції є елементарним – який не розкладається на добуток простіших поліномів з дійсними коефіцієнтами. Корені полінома $0,04p^2+0,2p+1$ дорівнюють $p_{1,2}=-2,5\pm j4,33$. Оскільки корені комплексні, то співмножник $1/(0,04p^2+0,2p+1)$ є елементарним і вираз передатної функції розімкнутої системи залишається без змін. Асимптотичну ЛАХ розімкнутої системи будуємо у такій послідовності.

1. Через точку з координатами $L(\omega) = 20\lg 40 = 32$ дБ, $\lg\omega = 0$ дек $(\omega = 1\,c^{-1})$ проводимо горизонтальну лінію (нахил 0), тому що розімкнута система не містить інтегральних і диференційних ланок (передатна функція розімкнутої системи не містить співмножників p та $1/p$).

2. Розраховуємо логарифми частот спряження:

$$\lg\omega_1 = \lg\frac{1}{0,02} = 1,7; \qquad \lg\omega_2 = \lg\frac{1}{0,1} = 1; \quad \lg\omega_3 = \lg\frac{1}{0,5} = 0,3;$$

$$\lg\omega_4 = \lg\frac{1}{\sqrt{0,04}} = 0,7; \quad \lg\omega_5 = \lg\frac{1}{2,5} = -0,4; \qquad \lg\omega_6 = \lg\frac{1}{0,05} = 1,3.$$

і відкладаємо їх на осі абсцис.

3. Продовжуємо побудовану в п.1 пряму до найнижчої частоти спряження $\omega_5 = 1/2,5\,c^{-1}$. Стала часу $T = 2,5\,c$ належить елементарному співмножнику $1/(2,5p+1)$, тому в точці зламу нахил ЛАХ змінюється на -20 дБ/дек, і становить $0+(-20) = -20$ дБ/дек. Лінія з нахилом -20 дБ/дек проводиться паралельно до прямої, яка з’єднує точку $L(\omega) = 20$ дБ на осі ординат із закінченням першої декади. На частоті $\omega_3 = 1/0,5\,c^{-1}$ відбувається другий злам характеристики. Її нахил становитиме –20+20=0 дБ/дек через те, що стала часу, яка дорівнює 0,5 с, належить співмножнику $(0,5\,p+1)$. Наступний злам відбувається на частоті $\omega_4 = 1/0,2\,c^{-1}$, яка визначається співмножником $1/(0,04p^2 + 0,2p + 1) = 1/(0,2^2\,p^2 + 0,2p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на -40 дБ/дек і становить $0+(-40) = -40$ дБ/дек.

Черговий злам відбувається на частоті $\omega_2 = 1/0,1\,c^{-1}$, яка визначається співмножником $(0,1p+1)$, тому нахил характеристики змінюється на +20 дБ/дек і становить -20 дБ/дек. На частоті $\omega_6 = 1/0,05\,c^{-1}$ також відбувається злам і нахил характеристики становитиме -40 дБ/дек. На частоті

$\omega_1 = 1/0,02\ c^{-1}$ відбувається останній злам і нахил характеристики становитиме $-40+20=-20$ дБ/дек.

4. Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 =$$
$$= \mathrm{arctg} 0,02\omega + \mathrm{arctg} 0,1\omega + \mathrm{arctg}\, 0,5\omega - \mathrm{arctg}\frac{0,2\omega}{1-0,04\omega^2} - \mathrm{arctg} 2,5\omega - \mathrm{arctg} 0,05\omega.$$

Отримані логарифмічні асимптотична амплітудна $L(\omega)$ та фазова $\varphi(\omega)$ частотні характеристики представлені на рис. 3.15.

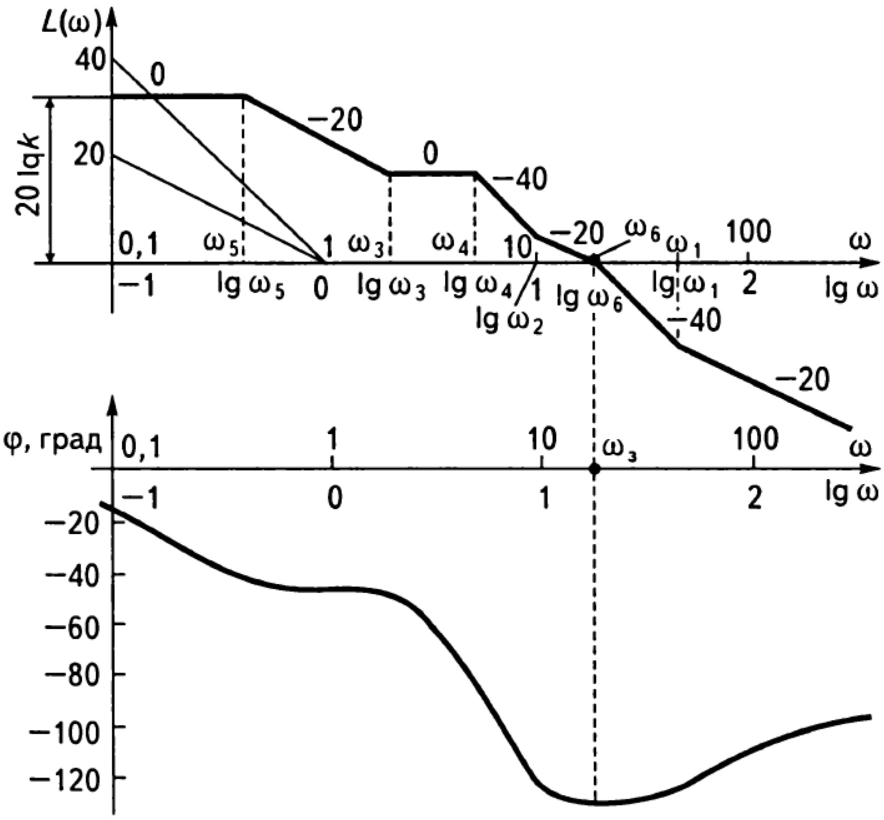


Рис. 3.15. Дослідження стійкості САК за допомогою критерію Найквіста у логарифмічній формі (приклад 3.6)

З побудованих характеристик визначаємо фазу на частоті зрізу: $\varphi(\omega_з) = -128°$. Розімкнута система стійка, оскільки всі полюси передатної функції (3.23) є лівими. Отже, виходячи із формулювання критерію Найквіста для стійких розімкнутих систем, робимо висновок, що замкнута система є стійкою.

3.5 Структурно-нестійкі системи

3.5.1 Особливості структурно-нестійких САК

Всі розглянуті дотепер системи були структурно-стійкими. У цих системах стійкість досягалася зміною параметрів ланок – сталих часу, передатних коефіцієнтів, від яких залежать коефіцієнти характеристичного рівняння замкнутої системи $a_0,...,a_n$, і, відповідно, значення коренів цього рівняння.

***Структурно-нестійкою* називають САК у якій неможливо досягти стійкості шляхом зміни параметрів її ланок.**

Щоб забезпечити стійкість у структурно-нестійкій системі, необхідно вводити додаткові коригувальні ланки, тобто змінювати структуру системи. Для ілюстрації сказаного розглянемо наступний приклад.

Приклад 3.7. Отримати характеристичне рівняння замкнутої одиничним від'ємним зворотним зв'язком системи, що складається з послідовно з'єднаних 2-х інтегральних та однієї аперіодичної ланки 1-го порядку.

Розв'язання. Передатні функції ланок відповідно дорівнюють:

$$W_1(p)=K_1\frac{1}{p};\ W_2(p)=K_2\frac{1}{p};\ W_3(p)=\frac{K_3}{T_3p+1}.$$

Характеристичне рівняння замкнутої системи $W(p)+1=0$, де $W(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ – передатна функція розімкнутої системи. Підставивши відповідні вирази, характеристичне рівняння набуде вигляду

$$K_1\frac{1}{p}\cdot K_2\frac{1}{p}\cdot\frac{K_3}{T_3p+1}+1=0 \quad \text{або} \quad (T_3p+1)p^2+K_1K_2K_3=0.$$

Його можна записати як

$$T_3p^3+p^2+K_\Sigma=0,$$

де $K_\Sigma=K_1K_2K_3$ – коефіцієнт передачі розімкнутої системи. Порівнюючи отримане нами характеристичне рівняння із загальним характеристичним рівнянням 3-го порядку

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

визначимо значення коефіцієнтів $a_0 = T_3; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = K_\Sigma$.

Оскільки в отриманому рівнянні коефіцієнт $a_2 = 0$, то для відповідної САК не виконується 1-ша умова критерію стійкості Гурвіца, відповідно до якої всі коефіцієнти характеристичного рівняння повинні бути додатними. Зміною наявних параметрів T_3 і K_Σ домогтися виконання умови $a_2 > 0$ в цьому випадку неможливо, тому дана система є структурно-нестійкою.

На основі розглянутого прикладу можна зробити наступні висновки.

- ***Характерною ознакою структурно-нестійких систем є відсутність у характеристичному рівнянні одного чи більше коефіцієнтів.***
- ***Системи, які в одноконтурному вигляді містять дві чи більше інтегральні ланки за інших безінерційних, аперіодичних або коливальних ланок є структурно-нестійкими.***
- ***Щоб структурно-нестійку систему зробити стійкою треба змінювати її структуру.***

Зміна структури систем зазвичай здійснюється шляхом застосування коригувальних ланок. Ці ланки є двох видів – паралельні та послідовні.

3.5.2 Способи усунення структурної нестійкості

Використання паралельних коригувальних ланок. ***Паралельними коригувальними ланками*** ***називають ланки, що підключені паралельно узгоджено чи зустрічно до одної або декількох ланок системи***. Паралельне зустрічне вмикання реалізується як місцевий зворотний зв'язок. Охопимо першу з інтегральних ланок розглянутої вище САК пропорційним від'ємним зворотним зв'язком, як це показано на рис. 3.16, і складемо рівняння динаміки та передатну функцію даної ланки з врахуванням зворотного зв'язку.

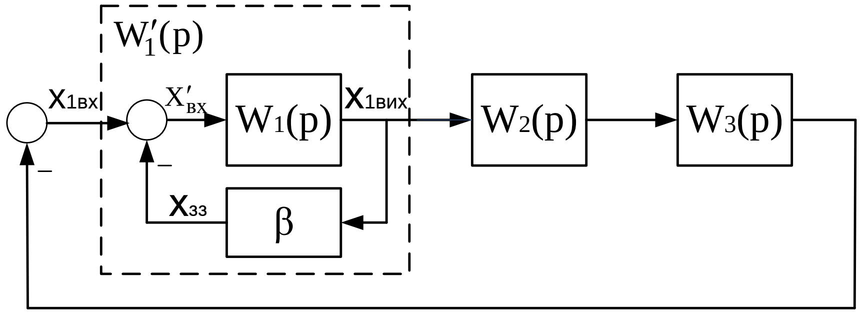


Рис. 3.16. Схема структурно-нестійкої САК з паралельним коригуванням

Рівняння ланки до охоплення зворотним зв'язком $x_{1вих} = K_1 p^{-1} x_{1вх}$. Фактичне значення вхідної величини при введенні зворотного зв'язку з коефіцієнтом $\beta = x_{зз} / x_{1вих}$ дорівнює

$$x'_{вх} = x_{1вх} - x_{зз} = x_{1вх} - \beta x_{1вих}.$$

Рівняння ланки з урахуванням зворотного зв'язку в цьому випадку буде

$$x_{1вих} = K_1 \frac{1}{p} x'_{вх} = K_1 \frac{1}{p} (x_{1вх} - \beta x_{1вих})$$

або

$$x_{1вих}(p + \beta K_1) = K_1 x_{1вх}.$$

Позначивши $1/K_1\beta = T_1$; $1/\beta = K'_1$, після ділення всіх членів на βK_1, одержимо рівняння інтегрувальної ланки, охопленої від’ємним зворотним зв'язком, у вигляді

$$(T_1 p + 1) x_{1вих} = K'_1 x_{1вх}.$$

З отриманого виразу видно, що інтегральна ланка, охоплена від’ємним зворотним зв'язком, еквівалентна стійкій аперіодичній ланці 1-го порядку. Передатна функція даної інтегральної ланки після охоплення її від’ємним зворотним зв'язком дорівнює

$$W'_1(p) = \frac{K'_1}{T_1 p + 1}.$$

Характеристичне рівняння замкнутої системи з урахуванням охоплення інтегральної ланки від’ємним зворотним зв'язком матиме вигляд

$$W_1'(p)W_2(p)W_3(p)+1=0$$

або

$$\frac{K_1'}{T_1p+1}\frac{K_2}{p}\frac{K_3}{T_3p+1}+1=0.$$

Після нескладних перетворень рівняння запишеться як

$$T_1T_3p^3+(T_1+T_3)p^2+p+K_\Sigma=0.$$

Оскільки всі коефіцієнти рівняння $a_0=T_1T_3;\quad a_1=T_1+T_3;\quad a_2=1;\quad a_3=K_\Sigma$ додатні, то 1-ша умова критерію стійкості Гурвіца виконується і дана скоригована система стає структурно-стійкою.

Зазначимо, що структурно-стійка система може бути як стійкою, так і нестійкою залежно від значень параметрів ланок. Зокрема, для стійкості розглядуваної системи, очевидно, має виконуватися друга умова критерію стійкості Гурвіца – $\Delta_2>0$.

Використання послідовних коригувальних ланок. ***<u>Послідовною коригувальною ланкою</u> називають ланку, яка підключається послідовно з ланками системи, зведеної до одноконтурної структури***. Структурна схема розглянутої раніше системи із введенням послідовної коригувальної ланки зображена на рис. 3.17.

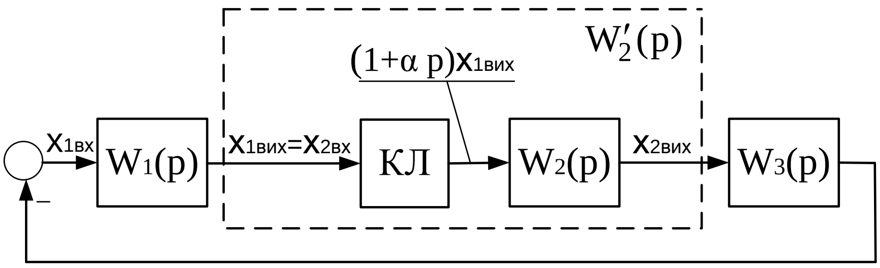


Рис. 3.17. Схема структурно-нестійкої САК з послідовним коригуванням

Розглянемо, яким чином зміниться передатна функція другої інтегральної ланки $W_2(p)=K_2/p$ з урахуванням підключення на її вході послідовної коригувальної ланки (КЛ), що являє собою ідеальну форсувальну ланку. Рівняння другої інтегральної ланки з урахуванням КЛ матиме вигляд

$$x_{2вих} = K_2 \frac{1}{p}(1+\alpha p)x_{1вих}.$$

Враховуючи, що $x_{1вих} = x_{2вх}$, передатну функцію другої інтегральної ланки разом з КЛ можна записати у вигляді

$$W_2'(p) = \frac{x_{2вих}}{x_{2вх}} = K_2 \frac{1}{p}(1+\alpha p) = W_2(p)(1+\alpha p).$$

Характеристичне рівняння замкнутої САК з урахуванням введення послідовної коригувальної ланки матиме вигляд

$$W_1(p)W_2'(p)W_3(p) + 1 = 0.$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$K_1 \frac{1}{p} K_2 \frac{1}{p}(1+\alpha p) K_3 \frac{1}{T_3 p + 1} + 1 = 0$$

або

$$K_1 K_2 K_3 (1+\alpha p) + (T_3 p + 1)p^2 = T_3 p^3 + p^2 + K_\Sigma \alpha p + K_\Sigma = 0,$$

де $K_\Sigma = K_1 K_2 K_3$. Видно, що структурно-нестійка система завдяки введенню послідовної коригувальної ланки стала структурно-стійкою.

Важливо зазначити, що за допомогою коригувальних ланок можна не тільки перетворити структурно-нестійку систему в структурно-стійку, а й забезпечити її стійкість. З їхньою допомогою можна впливати на значення запасів стійкості за модулем і фазою, а також на динамічні характеристики САК, що буде продемонстровано далі.

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте загальне поняття стійкості САК.
2. Дайте означення стійкості системи "у малому", "у великому" та "у цілому".

3. Чи завжди система стійка "у цілому" є стійкою "у великому" та "у малому"?

4. Чи завжди система стійка "у великому" є стійкою "у малому"?

5. Викладіть теореми Ляпунова щодо стійкості лінеаризованих САК.

6. Дайте означення асимптотичної стійкості системи.

7. Якою є умова стійкості технічних систем?

8. Запишіть розв’язок рівняння вільного руху САК у загальному вигляді та означте всі параметри цього розв’язку.

9. Яким чином залежить стійкість лінійних САК від значення та форми зовнішніх дій, що поступають на систему?

10. Яким є найзагальніший метод дослідження стійкості лінійних САК?

11. За допомогою формул обґрунтуйте вплив вигляду коренів характеристичного рівняння на стійкість САК.

12. Дайте означення межі та запасу стійкості на площині коренів характеристичного рівняння.

13. Характеристичне рівняння САК має вигляд $10p^3+8p^2+4p+2=0$. Дослідити цю систему на стійкість кореневим способом.

14. Що таке критерії стійкості САК?

15. Назвіть види критеріїв стійкості САК.

16. Назвіть алгебричні критерії стійкості САК.

17. Сформулюйте критерій стійкості Рауса-Гурвіца.

18. Як записати головний визначник Гурвіца?

19. Сформулюйте ознаку стійкості систем 1-го та 2-го порядку на основі їх характеристичного рівняння.

20. Якими є умови стійкості САК 3-го та 4-го порядку на основі критерію Гурвіца?

21. Сформулюйте умову знаходження замкнутої системи на межі стійкості при використанні критерію Гурвіца?

22. САК має характеристичне рівняння $2p^4+6p^3+4p^2+4p+6=0$. Дослідити цю систему на стійкість за допомогою критерію Гурвіца.

23. Сформулюйте критерій стійкості Льєнара-Шіпара.

24. Яка методика визначення критичних значень параметрів САК при застосуванні алгебричних критеріїв стійкості?

25. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Льєнара-Шіпара систему з характеристичним рівнянням $p^5 + 6,5p^4 + 16p^3 + 18,5p^2 + 10p + 2 = 0$.

26. У чому полягають головні особливості критерію Найквіста?

27. Якими є умови стійкості за Найквістом замкненої системи при нестійкій розімкнутій системі?

28. Сформулюйте умови стійкості за Найквістом замкнутої системи при стійкій розімкнутій системі.

29. Викладіть загальні умови стійкості за Найквістом замкнутої системи.

30. Поясніть особливість застосування критерію стійкості Найквіста для астатичних розімкнутих систем.

31. Якою є ознака знаходження замкнутої системи на межі стійкості при використанні критерію Найквіста?

32. Як визначити запаси стійкості системи за модулем та за фазою при застосуванні критерію Найквіста?

33. За критерієм Найквіста дослідити стійкість замкнутої САК, яка у розімкнутому стані має передатну функцію $W(p) = 100/\big(p(0,2p+1)(0,1p+1)\big)$.

34. Дослідити за критерієм Найквіста стійкість замкнутої САК, яка у розімкнутому стані має передатну функцію $W(p) = 50/\big(p(0,5p+1)(0,3p-1)\big)$.

35. Висвітліть умови стійкості за Найквістом замкнутої системи на основі ЛАХ та ЛФХ стійкої розімкнутої системи.

36. Сформулюйте умови стійкості за Найквістом замкнутої системи на основі ЛАХ та ЛФХ нестійкої розімкнутої системи.

37. Викладіть особливість застосування критерію стійкості Найквіста в логарифмічній формі для астатичних розімкнутих систем.

38. Як визначити запаси стійкості системи за модулем та за фазою при застосуванні критерію Найквіста в логарифмічній формі?

39. Коли за критерієм Найквіста в логарифмічній формі замкнута система знаходиться на межі стійкості?

40. Вкажіть рекомендовані значення запасів стійкості за модулем та за фазою при проектуванні САК.

41. За критерієм Найквіста в логарифмічній формі дослідити стійкість замкнутої САК, яка у розімкнутому стані має передатну функцію $W(p) = 75(0{,}1p+1)\big/\big(p(0{,}3p+1)(0{,}05p+1)\big)$.

42. Дослідити за критерієм Найквіста в логарифмічній формі стійкість замкнутої САК, яка у розімкнутому стані має передатну функцію $W(p) = 25(0{,}2p+1)\big/\big(p(0{,}4p+1)(0{,}1p-1)\big)$.

43. Які системи називаються структурно-стійкими а які структурно-нестійкими?

44. За якими ознаками можна виявити структурно-нестійку систему?

45. Яке призначення коригувальних ланок та якими є їх основні види?

46. Нарисуйте схему введення паралельної коригувальної ланки у САК.

47. Наведіть схему введення послідовної коригувальної ланки у САК.

48. В чому полягає ефект дії паралельної коригувальної ланки для отримання структурно-стійкої системи?

49. Яким чином діє послідовна коригувальна ланки для отримання структурно-стійкої системи?

50. Нарисуйте перехідну характеристику інтегральної ланки, охопленої від’ємним пропорційним зворотним зв’язком.

ГЛАВА 4 ЯКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. ОЦІНЮВАННЯ ТА ПОЛІПШЕННЯ ЯКОСТІ

4.1 Показники якості функціонування САК

Для успішного виконання поставлених завдань керування об'єктом, система автоматичного керування, окрім властивості стійкості, повинна відповідати низці інших вимог. Ці вимоги загалом визначаються технологічними особливостями об’єктів керування, але зазвичай їх об’єднують поняттям "якість системи керування". Якість САК характеризує її властивості у перехідних та усталених процесах.

Розглянемо систему із зображеною на рис. 4.1 структурою, де $g(t)$ – задавальна дія (завдання), $x(t)$ – помилка САК, $u(t)$ – вихід регулятора (керуюча дія), $f(t)$ – збурювальна дія (збурення), $y(t)$ – вихід системи (керована величина), $W_1(p), W_2(p)$ – передатні функції регулятора і об’єкта відповідно. Ця система слугуватиме для вивчення показників якості керування.

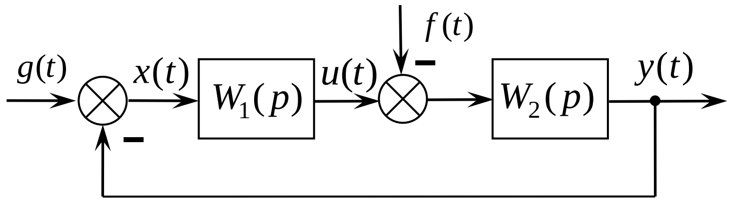


Рис. 4.1. Схема САК для вивчення показників якості керування

Зазвичай якість САК характеризує наступна сукупність показників:

- умови стійкості;
- показники якості перехідних процесів;
- показники точності керування в усталених режимах роботи.

Умови стійкості САК – це запаси стійкості системи за модулем і за фазою, які розглядалися вище**.**

Показники якості перехідних процесів визначаються із реакцій системи на стрибкоподібну зміну зовнішніх дій, тобто із перехідних характеристик системи за завданням і за збуренням.

Перехідна характеристика за завданням отримується при $g(t)=1(t)$, $f(t)=0$ і дозволяє визначити наступні показники якості перехідних процесів (рис. 4.2).

1. ***Характер перехідного процесу***. За характером перехідний процес може бути монотонним, аперіодичним, аперіодичним з перерегулюванням чи коливальним.

Монотонними є перехідні процеси, в яких відхилення керованої величини $y(t)$ від усталеного значення $y_{уст}$ плавно зменшується без зміни знаку похідної dy/dt (крива 1). Якщо у кривій монотонного перехідного процесу відсутні гармонічні складники, то такий частковий випадок монотонного процесу називають ***аперіодичним***.

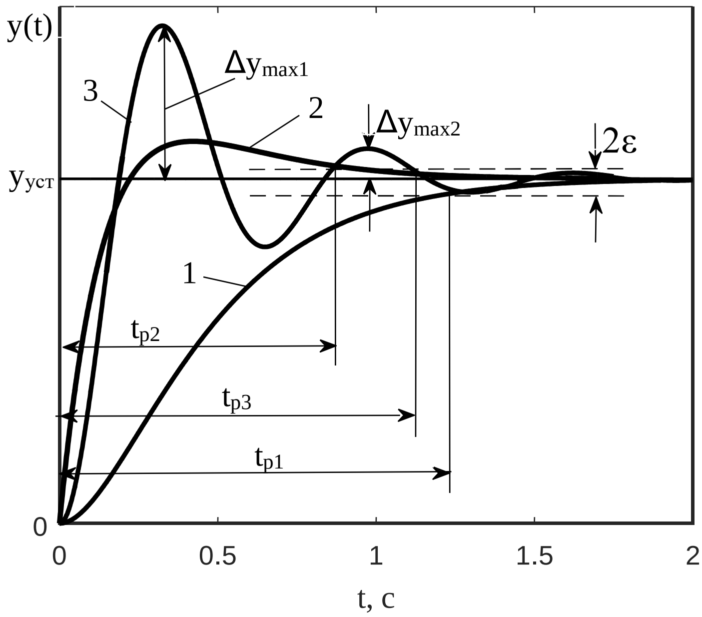


Рис. 4.2. Показники якості перехідних процесів за завданням

Аперіодичними процесами з перерегулюванням називають перехідні процеси, у яких керована величина має перерегулювання і набуває усталеного значення після одного, двох або більше негармонічних коливань, тобто коливань з різними періодами (крива 2).

Коливальними називають перехідні процеси, у яких існують гармонічні коливання зі сталим періодом і спадаючою амплітудою (крива 3).

2. ***Час перехідного процесу***. Час перехідного процесу $t_п$ (або час регулювання t_p) характеризує швидкодію САК при відпрацюванні задавальної дії. Він дорівнює інтервалу часу від стрибкоподібної зміни завдання $g(t) = 1(t)$ до моменту, коли відхилення керованої величини $y(t)$ від усталеного значення $y_{уст} = y(\infty)$ остаточно стане меншим за деяку достатньо малу величину ε, тобто $\left| y(t) - y_{уст} \right| \le \varepsilon$ (нагадаємо, що теоретично тривалість перехідного процесу нескінченна: $t_p \to \infty$ якщо $\varepsilon \to 0$).

Значення ε детермінується точністю конкретної системи. Стандартним вважається $\varepsilon = 5\%$, тобто $\varepsilon = 0{,}05 y_{уст}$. Але для систем з підвищеними показниками точності приймають $\varepsilon = 2\%$, тобто $\varepsilon = 0{,}02 y_{уст}$.

3. ***Перерегулювання***. Перерегулювання σ визначається для перехідних характеристик за завданням (рис. 4.2). Воно характеризує максимальне відхилення керованої величини відносно нового усталеного значення $y_{уст}$, вимірюється у відсотках і обчислюється як

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\% = \frac{\Delta y_{\max 1}}{y_{уст}} \cdot 100\%. \tag{4.1}$$

4. ***Ступінь затухання***. Для перехідних характеристик за завданням з немонотонним характером визначається ступінь затухання перехідного процесу ψ, який вимірюється у відсотках і обчислюється за формулою

$$\psi = \left(1 - \frac{\Delta y_{\max 2}}{\Delta y_{\max 1}} \right) \cdot 100\%, \tag{4.2}$$

де $\Delta y_{\max 1}$ і $\Delta y_{\max 2}$ – величини, вказані на рис. 4.2. Ступінь затухання характеризує здатність системи до демпфування (гасіння) коливань. При зростанні ψ коливання демпфуються сильніше і, відповідно, перехідний процес згасає (затухає) швидше. Іноді коливальні властивості оцінюють кількістю коливань $y(t)$ за час регулювання.

Перехідна характеристика за збуренням отримується при $f(t) = 1(t)$, $g(t) = 0$ і дозволяє визначити наступні показники якості перехідних процесів (рис. 4.3).

1. ***Максимальне відхилення виходу***. Максимальне відхилення виходу системи (об'єкта) $\Delta y_{\max}$ дорівнює найбільшому значенню модуля керованої величини у перехідному процесі $\Delta y_{\max} = \max|y(t)|$.

2. ***Час компенсування збурення***. Час компенсування збурення $t_к$ (або час регулювання t_p) характеризує швидкодію САК при компенсуванні збурювальної дії. Він дорівнює інтервалу часу від стрибкоподібної зміни збурення $f(t) = 1(t)$ до моменту, коли відхилення $y(t)$ від нового усталеного значення $y_{уст}$ остаточно стане меншим за деяку достатньо малу величину ε, тобто $|y(t) - y_{уст}| \le \varepsilon$. При цьому приймають $\varepsilon = 0{,}05\Delta y_{\max}$.

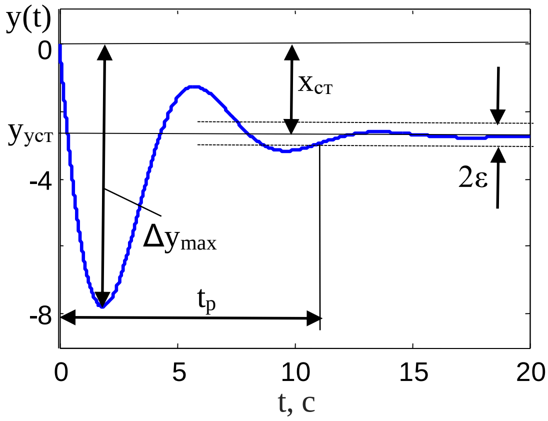


Рис. 4.3. Показники якості перехідних процесів за збуренням

На рис. 4.3 показана статична помилка $x_{ст}$ у системі після закінчення перехідного процесу, спричиненого східчастою зміною збурення.

Крім розглянутих вище основних показників якості перехідних процесів за завданням, на практиці використовуються також додаткові показники (рис. 4.4). До таких показників належать наступні [2, 3].

1. ***Час запізнення*** $t_з$, що дорівнює інтервалу часу від зміни завдання $g(t) = 1(t)$ до моменту, коли $y(t)$ вперше сягне $0.5 y_{уст}$.

2. ***Час наростання*** $t_н$, що дорівнює інтервалу часу від зміни завдання $g(t)=1(t)$ до моменту, коли $y(t)$ вперше сягне $y_{уст}$.

3. ***Час першого максимуму*** $t_м$, що дорівнює інтервалу часу від зміни завдання $g(t)=1(t)$ до моменту, коли $y(t)$ сягне свого максимуму.

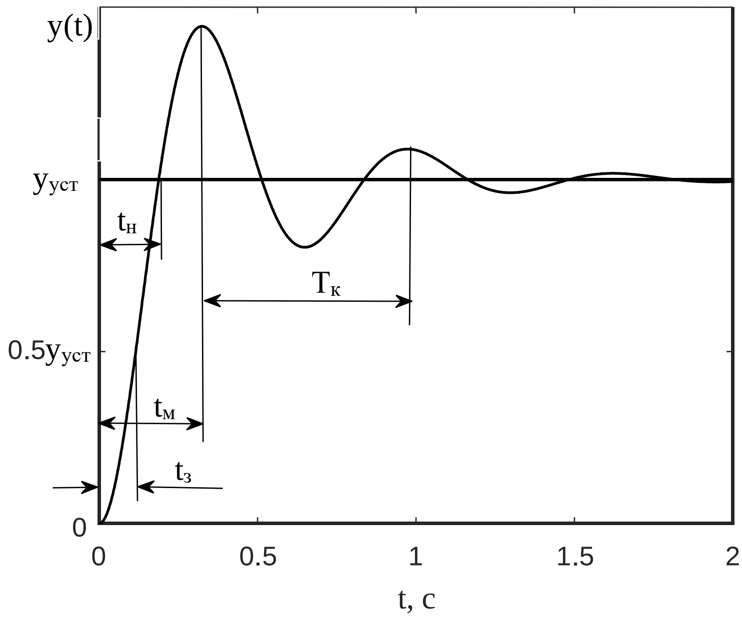


Рис. 4.4. Додаткові показники якості перехідних процесів за завданням

4. ***Частота коливань*** $\omega_к = 2\pi/T_к$, де період коливань $T_к$ дорівнює інтервалу часу між сусідніми максимумами або мінімумами кривої $y(t)$.

Показники точності керування кількісно характеризують помилки системи в усталених режимах після закінчення перехідних процесів. Усталені режими можуть бути статичними, якщо у системі всі зовнішні дії та змінні стану постійні, або динамічними, якщо деяка зовнішня дія змінюється за типовим законом – лінійним, квадратичним, кубічним чи гармонічним або їх поєднанням. До основних показників точності (або точнісних показників) САК належать: статизм, добротність за швидкістю, добротність за прискоренням, добротність за ривком та коефіцієнти помилок. Ці показники розглядатимуться нижче.

Якість САК у першу чергу визначається технологічними особливостями об'єкта. Зокрема, у різних підйомних машинах, прокатних станах та в інших установках значної потужності, які мають великі моменти інерції, необхідною вимогою є забезпечення близького до аперіодичного перехідного процесу, з перерегулюванням не більшим ніж 2...3 %. У системах керування положенням ланок маніпуляторів та роботів, а також електроприводів подачі металорізальних верстатів часто вимагається забезпечення монотонного характеру перехідних процесів. Виконання цих вимог, очевидно, призводить до збільшення тривалості перехідних процесів.

Поряд з цим, у малоінерційних високодинамічних системах стеження та стабілізації, де пріоритетною є вимога швидкодії системи (при заданій точності), бажано мати швидкозатухаючі коливальні перехідні процеси.

4.2 Аналіз якості шляхом розв’язання рівняння динаміки замкнутої системи

Аналіз якості САК може виконуватись на основі розв’язання диференційного рівняння замкнутої системи. Цей метод є прямим, загальним і точним. Крім цього існує низка непрямих методів оцінювання якості, які дають наближений результат але потребують набагато менших обчислювальних затрат.

Суть методу дослідження якості САК шляхом розв’язання диференційного рівняння замкнутої системи розглянемо на прикладі системи стабілізації. Раніше було записане рівняння замкнутої САК стабілізації (3.2), яке пов’язує вихід системи $y(t)$ зі збуренням $f(t)$ у вигляді

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_n y = b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + ...b_m f \ ,$$

де $a_0,...,a_n, b_0,...,b_m \left(m \le n\right)$ – коефіцієнти, відповідно, лівих і правих частин рівнянь ланок системи, які визначаються їх параметрами. Наведене рівняння є неоднорідним диференційним лінійним рівнянням n-го порядку. Для спрощення аналізу нижче вважатимемо, що $b_i = 0, \quad i=\overline{0,m-1}$. Це відповідатиме відсутності нулів у передатній функції системи за збуренням.

Згідно з принципом суперпозиції, розв'язок неоднорідного диференційного рівняння можна подати як алгебричну суму двох складників – загального $y_{\text{пер}}$ і часткового $y_{\text{уст}}$ розв'язків

$$y = y_{\text{пер}} + y_{\text{уст}}.$$

Загальний розв'язок дістаємо з рівняння вільного руху

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n\text{-}1} y}{dt^{n\text{-}1}} + ... + a_{n\text{-}1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0.$$

Звідси

$$y_{\text{пер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + ... + C_n e^{p_n t},$$

де $C_1, ..., C_n$ – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов, $p_1, ..., p_n$ – корені характеристичного рівняння замкнутої системи

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Аналіз виразу для $y_{\text{пер}}$ залежно від коренів $p_1, ..., p_n$ був зроблений раніше при вивченні впливу вигляду коренів на стійкість системи. Частковий розв'язок $y_{\text{уст}}$ знайдемо для $f(t) = f_0 1(t)$, $f_0 = const$ за умови $t \to \infty$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду

$$a_n y = b_m f_0,$$

звідки $y = b_m a_n^{-1} f_0 = y_{\text{уст}}$ – є постійною величиною, яка дорівнює виходу системи після закінчення перехідного процесу.

Побудована, як приклад, характеристика $y(t)$ (рис. 4.5) являє собою криву процесу регулювання в замкнутій системі, отриману при $f(t) = f_0 1(t)$ за рівнянням

$$y(t) = y_{\text{пер}}(t) + y_{\text{уст}} = C_1 t^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + ... + C_n e^{p_n t} + \frac{b_m}{a_n} f(t).$$

З вищевикладеного можна зробити наступні висновки. Тривалість і всі інші показники перехідного процесу в САК визначаються загальним розв'язком рівняння замкненої САК $y_{\text{пер}}$ і залежать тільки від коренів

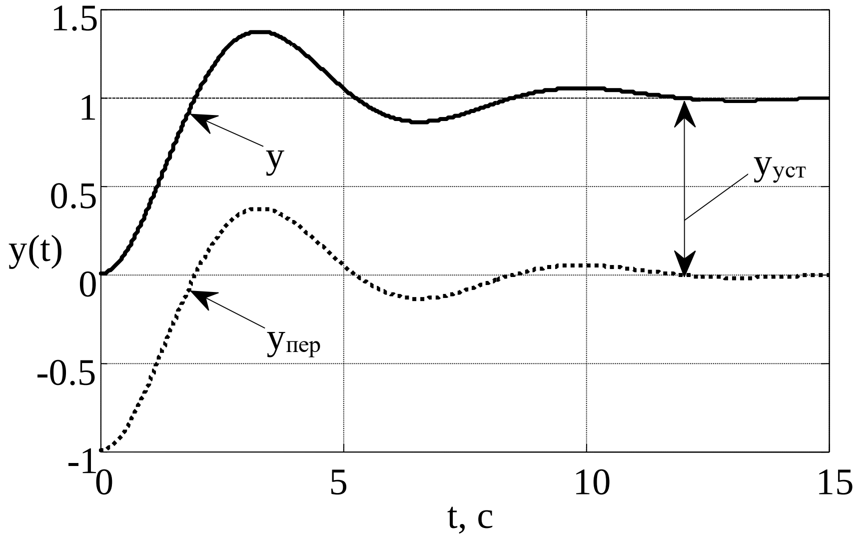


Рис. 4.5. Перехідний процес в замкнутій системі за зміни збурення

характеристичного рівняння. Частковий розв'язок $y_{\text{уст}}$ є постійним складником виходу $y(t)$ і визначає усталену помилку системи. Тому при дослідженні динамічних характеристик САК часом обмежуються тільки аналізом величини $y_{\text{пер}}$, досліджуючи поведінку системи залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Аналіз якості САК за рівнянням вільного руху. Як приклад, розглянемо систему 2-го порядку, рівняння вільного руху якої має вигляд

$$a_0 \frac{d^2 y_{\text{пер}}}{dt^2} + a_1 \frac{dy_{\text{пер}}}{dt} + a_2 y_{\text{пер}} = 0 \tag{4.3}$$

або в операторній формі

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y_{\text{пер}} = 0 .$$

Розв'язок цього рівняння

$$y_{\text{пер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} , \tag{4.4}$$

де $p_1 < 0; p_2 < 0$ корені характеристичного рівняння

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 ,$$

C_1, C_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов. Нехай задані початкові умови (при t = 0):

$$y_{\text{пер}}(0) = y_{0\text{пер}};\ y'_{\text{пер}}(0) = y'_{0\text{пер}} .$$

Визначимо їх з рівняння (4.4)

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{пер}}(0) &= C_1 + C_2; \\ y'_{\text{пер}}(0) &= p_1 C_1 + p_2 C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Із системи рівнянь (4.5) знаходимо значення сталих інтегрування C_1, C_2

$$C_1 = y_{\text{пер}}\left(0\right) - C_2 .$$

Підставляючи значення C_1 у вираз $y'_{0пер}$, отримаємо

$$y'_{\text{пер}}(0) = (y_{\text{пер}}\left(0\right) - C_2) p_1 + C_2 p_2 ,$$

звідки

$$y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}\left(0\right) p_1 = C_2 (p_2 - p_1)$$

або

$$C_2 = \frac{y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{y_{\text{пер}}(0) p_1 - y'_{\text{пер}}\left(0\right)}{p_1 - p_2};$$

$$C_1 = \frac{y_{\text{пер}}(0)(p_2 - p_1) - y'_{\text{пер}}(0) + y_{\text{пер}}\left(0\right) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0) p_2}{p_1 - p_2}.$$

У рівняння вільного руху системи (4.3) підставимо отримані значення C_1, C_2. Звідси матимемо

$$y_{\text{пер}} = \frac{y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0) p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{y_{\text{пер}}(0) p_1 - y'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \qquad (4.6)$$

Аналізуючи отриманий вираз (4.6), бачимо, що ***якість лінійних САК залежить не тільки від вигляду коренів*** p_1, p_2 ***характеристичного рівняння замкнутої системи, але й від початкових умов***. Нагадаємо, що стійкість лінійних САК залежить тільки від коренів характеристичного рівняння, які, у свою чергу, залежать від значень параметрів ланок системи.

Позначимо перший складник $y_{\text{пер}}$ у рівнянні (4.6) як $A(t)$, а другий – $B(t)$. Проаналізуємо ці складники за різних коренів p_1 і p_2 та початкових умов, побудувавши відповідні графіки $A(t)$ і $B(t)$. При цьому матимемо на увазі, що для наведеного вище квадратичного характеристичного рівняння значення коренів

$$p_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_o a_2}}{2a_o}; \qquad p_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_o a_2}}{2a_o}.$$

За умови $a_1^2 > 4a_0 a_2$ корені будуть дійсними. При $a_1^2 < 4a_0 a_2$ корені будуть комплексно-спряженими. Враховуючи викладене, проаналізуємо характер впливу початкових умов і коренів на якість САК.

Нехай корені дійсні та від'ємні ($p_1 < 0$; $p_2 < 0$), а початкові умови додатні ($y_{\text{пер}}(0) > 0$; $y'_{\text{пер}}(0) > 0$). Оскільки $|p_2| > |p_1|$, то чисельник і знаменник складника $A(t)$ – додатні, а в складнику $B(t)$ чисельник менший від нуля, а знаменник більший від нуля. При цьому початкові значення $|A(0)| > |B(0)|$.

Відповідні графіки $A(t)$ і $B(t)$ показані на рис. 4.6,а. Результат їхнього додавання $y_{\text{пер}}(t) = A(t) + B(t)$ показаний на рис. 4.6,б. З останнього графіка видно, що $y_{\text{пер,max}} = a - b > y_{\text{пер}}(0)$, а це означає наявність перерегулювання в перехідному процесі.

Визначимо екстремум функції $y_{\text{пер}}(t)$ з умови $\dfrac{dy_{\text{пер}}}{dt} = 0$.

$$\frac{dy_{\text{пер}}}{dt} = \frac{y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0)p_2}{p_1 - p_2} p_1 e^{p_1 t} + \frac{y_{\text{пер}}(0)p_1 - y'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2} p_2 e^{p_2 t} = 0.$$

Звідси

$$\left[y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0)p_2\right] p_1 e^{p_1 t} + \left[y_{\text{пер}}(0)p_1 - y'_{\text{пер}}(0)p_2\right] p_2 e^{p_2 t} = 0.$$

Розділивши обидві частини рівняння на $\left[y_{\text{пер}}(0)p_1 - y'_{\text{пер}}(0)p_2\right] e^{p_2 t}$, дістанемо

$$\frac{\left[y'_{\text{пер}}(0) - y_{\text{пер}}(0)p_2\right] p_1}{\left[y_{\text{пер}}(0)p_1 - y'_{\text{пер}}(0)\right] p_2} e^{(p_1 - p_2)t} + 1 = 0,$$

або

$$e^{(p_1 - p_2)t} = \frac{\left[y_{\text{пер}}(0)p_1 - y'_{\text{пер}}(0)\right] p_2}{\left[y_{\text{пер}}(0)p_2 - y'_{\text{пер}}(0)\right] p_1}.$$

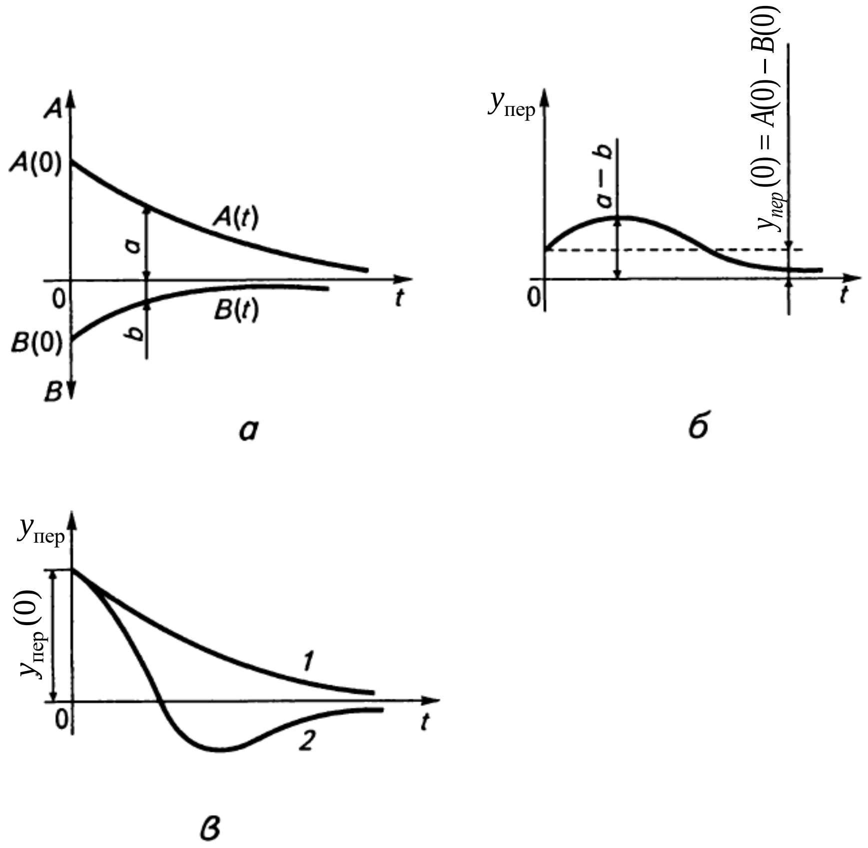


Рис. 4.6. Вплив початкових умов на криву перехідного процесу

Логарифмуючи останній вираз, одержимо значення часу t_m, що відповідає екстремуму функції $y_{\text{пер}}(t)$

$$t_m = \ln \frac{p_2 \left[y_{\text{пер}}(0) p_1 - y'_{\text{пер}}(0) \right]}{p_1 \left[y_{\text{пер}}(0) p_2 - y'_{\text{пер}}(0) \right]} \frac{1}{p_1 - p_2}. \tag{4.7}$$

Підставивши відповідне числове значення t_m у вихідний вираз $y_{\text{пер}}(t)$, можна визначити його екстремальне значення $y_{\text{пер,max}}(t)$.

Нехай $y_{\text{пер}}(0) > 0$; $y'_{\text{пер}}(0) = 0$. Аналіз величин $A(t)$ і $B(t)$ показує, що у цьому випадку $A(t)$=0, а $B(t)$<0. Позаяк $|p_2| > |p_1|$, то зникнення компоненти $y'_{\text{пер}}(0)$ більше вплине на $B(t)$ ніж на $A(t)$. Отже перехідний процес може не мати перерегулювання (крива 1 на рис. 4.6,*в*).

Нехай $y_{\text{пер}}(0) > 0$; $y'_{\text{пер}}(0) < 0$. Похідна від початкових умов із від’ємним знаком у різній мірі впливає на вирази $A(t)$ і $B(t)$. В такому разі можливе перерегулювання та зсув перехідного процесу в область від'ємних значень $y_{\text{пер}}(t)$ (крива 2 на рис. 4.6,*в*).

Проведений аналіз й отримані вирази для $y_{\text{пер}}(t)$ показують, що, знаючи початкові умови та вигляд і значення коренів характеристичного рівняння, можливо відповісти на головні питання якості САК. В той же час із зростанням степеня характеристичного рівняння різко зростають труднощі такого аналізу. Особливо складність зростає за необхідності врахування можливої зміни параметрів ланок системи. Як відомо, зміна лише одного параметру може призводити до зміни всіх коренів характеристичного рівняння. Тому у ТАК набули розповсюдження наближені методи, які дозволяють здійснювати аналіз системи без розв'язання її рівняння динаміки.

4.3 Наближені методи аналізу якості САК. Кореневі методи

Основними наближеними методами оцінювання якості керування є:

- кореневі;
- інтегральні;
- частотні.

Окрім розглянутого раніше прямого методу оцінювання якості на основі рівняння динаміки замкненої САК до кореневих належать непрямі методи:

- оцінювання якості за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині;
- аналіз на основі діаграм зон параметрів;
- метод кореневого годографа.

Зазначені методи розглядаються нижче.

4.3.1 Дослідження якості за розташуванням коренів

У зв'язку з тим, що межею стійкості САК на комплексній площині коренів характеристичного рівняння є уявна вісь, то оцінювання якості в багатьох випадках виконується за коренем, який розташований найближче до цієї осі (найменший за модулем корінь). При цьому використовуються такі ***кореневі показники якості керування як <u>ступінь стійкості</u>*** h ***та <u>ступінь коливальності</u>*** μ ***системи***.

Коли найближчим до уявної осі є дійсний корінь $p_1=-\alpha_1\ (\alpha_1>0)$, то ступінь стійкості називають ***аперіодичним***. Він дорівнює $h=h_1$ (рис. 4.7). Якщо найближче до уявної осі знаходиться пара комплексних коренів $p_{2,3}=-\alpha\pm j\beta\ (\alpha>0)$, то ступінь стійкості називають ***коливальним*** і позначають $h=\alpha$.

Ступінь коливальності системи визначається як $\mu=\mathrm{tg}\varphi=\beta/\alpha$. За наявності комплексних коренів у розв'язку рівняння вільного руху з'являється складник

$$C_2 e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\gamma),$$

що являє собою затухаючі синусоїдні коливання з періодом $T_к=2\pi/\beta$. Амплітуда $C_2 e^{-\alpha t}$ має зсув за фазою відносно початку координат на кут γ. Через

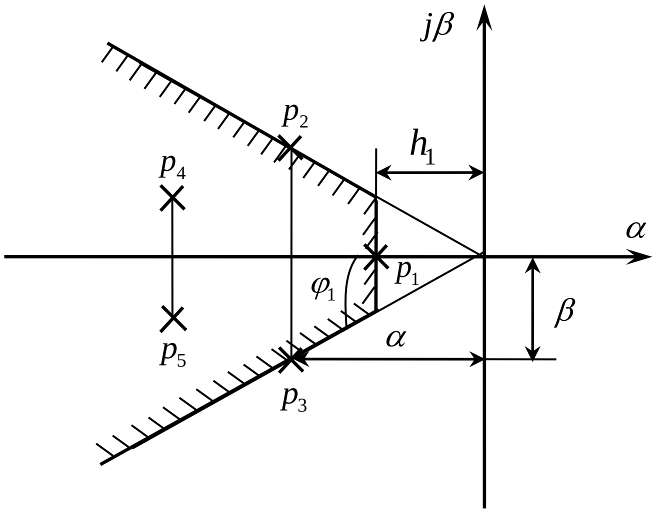


Рис. 4.7. Аналіз якості САК за розміщенням коренів на комплексній площині

один період коливань $T_к$, відповідне значення амплітуди обчислюється як $C_2 e^{-\alpha(t+\frac{2\pi}{\beta})}=C_2 e^{-\alpha t}e^{-2\pi/\mu}$. Декремент затухання, що характеризує коливальний процес, на основі (2.42) можна обчислити як

$$d = \ln \frac{C_2 e^{-\alpha t}}{C_2 e^{-\alpha t} e^{-2\pi/\mu}} = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Із цього виразу видно, що ***чим більший ступінь коливальності*** μ***, тим меншим буде декремент затухання*** d ***і, відповідно, тим довше згасатиме коливальний перехідний процес***.

При аперіодичному перехідному процесі його складник, який відповідає мінімальному дійсному кореню p_1, буде рівним $y_1(t) = C_1 e^{-ht}$. Перехідний процес практично затухне, коли крива $y_1(t)$ сягне 5% від початкового значення $y_1(0) = C_1$. Отже час перехідного процесу можна визначити як

$$0,05 y_1(0) = y_1(0) e^{-h t_\text{п}},$$

звідки $\ln 0,05 = -t_\text{п} h$, або

$$t_\text{п} = -\frac{\ln 0,05}{h} \cong \frac{3}{h}. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) показує, що ***тривалість перехідного процесу*** $t_\text{п}$ ***обернено пропорційна ступеню стійкості***.

Якщо при синтезі САК висунута вимога отримати перехідний процес тривалістю $t_\text{п} \le t_{\text{п}1}$ та коливальністю $\mu \le \mu_1$, то цю вимогу можна забезпечити шляхом розташування усіх коренів у деякій зоні, що віддалена від уявної осі на відстань $h_1 = 3/t_{\text{п}1}$ та обмежена проведеними під кутом $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\mu_1$ до дійсної осі прямими лініями. На рис. 4.7 ця зона знаходиться всередині усіченого сектору зі штрихуванням. При цьому усі складники кривої перехідного процесу, які зумовлені іншими розташованими у цій зоні коренями, затухатимуть швидше.

На рис. 4.8 показані криві перехідних процесів, які відповідають від’ємним дійсним кореням $|p_1| < |p_2| < |p_3| < |p_4|$.

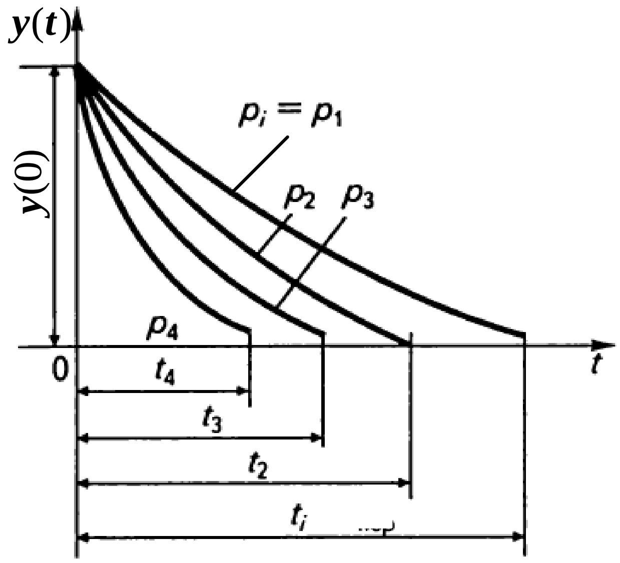


Рис. 4.8. Криві перехідних процесів для різних коренів

4.3.2 Аналіз якості САК за діаграмами зон параметрів

Цей метод дозволяє встановити зони значень параметрів, в яких можуть існувати відповідні показники якості САК. Розглянемо суть методу на прикладі діаграми Вишнєградського [1], побудованої для систем 3-го порядку на площині $X - Y$.

Параметри X, Y визначаються після перетворення характеристичного рівняння $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ шляхом ділення на a_0 всіх його коефіцієнтів $c_1 = \frac{a_1}{a_0}, c_2 = \frac{a_2}{a_0}, c_3 = \frac{a_3}{a_0}$ і зведення до вигляду $p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = 0$ за формулами

$$X = \frac{c_1}{\sqrt[3]{c_3}}; \qquad Y = \frac{c_2}{\sqrt[3]{c_3^2}}.$$

Умовою стійкості для систем 3-го порядку є виконання нерівності $XY > 1$. Діаграма Вишнєградського показана на рис. 4.9.

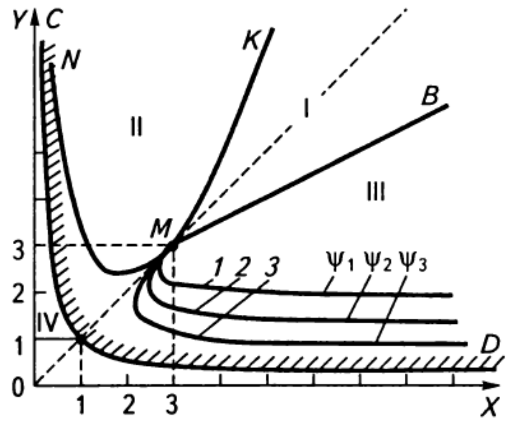


Рис. 4.9. Діаграма Вишнєградського із зонами перехідних процесів різного характеру

У ній виділено чотири зони (I–IV). Зона IV, де $XY < 1$, відповідає нестійкій системі, межею якої є гіпербола CD з рівнянням $XY = 1$, а зони I, II, III є зонами стійкості. Особливості розміщення коренів p_1, p_2, p_3 характеристичного рівняння і відповідні графіки перехідних процесів $y(t)$ для кожної зони показані на рис. 4.10.

Зона I обмежена кривою KMB, якій відповідають дійсні, від'ємні корені p_1, p_2, p_3, вона є зоною аперіодичних процесів (рис. 4.10, а, $а_1$). Даній зоні відповідає нерівність

$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2Y^2 + 27 < 0.$$

Зона II обмежена кривою KMN, вона є зоною монотонних процесів (рис. 4.10, *б*, $б_1$) у зв'язку з тим, що дійсний від'ємний корінь p_1 знаходиться ближче до вертикальної осі, ніж комплексні корені p_2, p_3. Цій зоні відповідає нерівність

$$2X^3 - 9XY + 27 < 0.$$

Зона III обмежена кривою NMB. Їй відповідає дійсний корінь p_1, який розміщується далі від вертикальної осі, ніж комплексні корені p_2, p_3. Умова знаходження коренів у цій зоні

$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2Y^2 + 27 > 0.$$

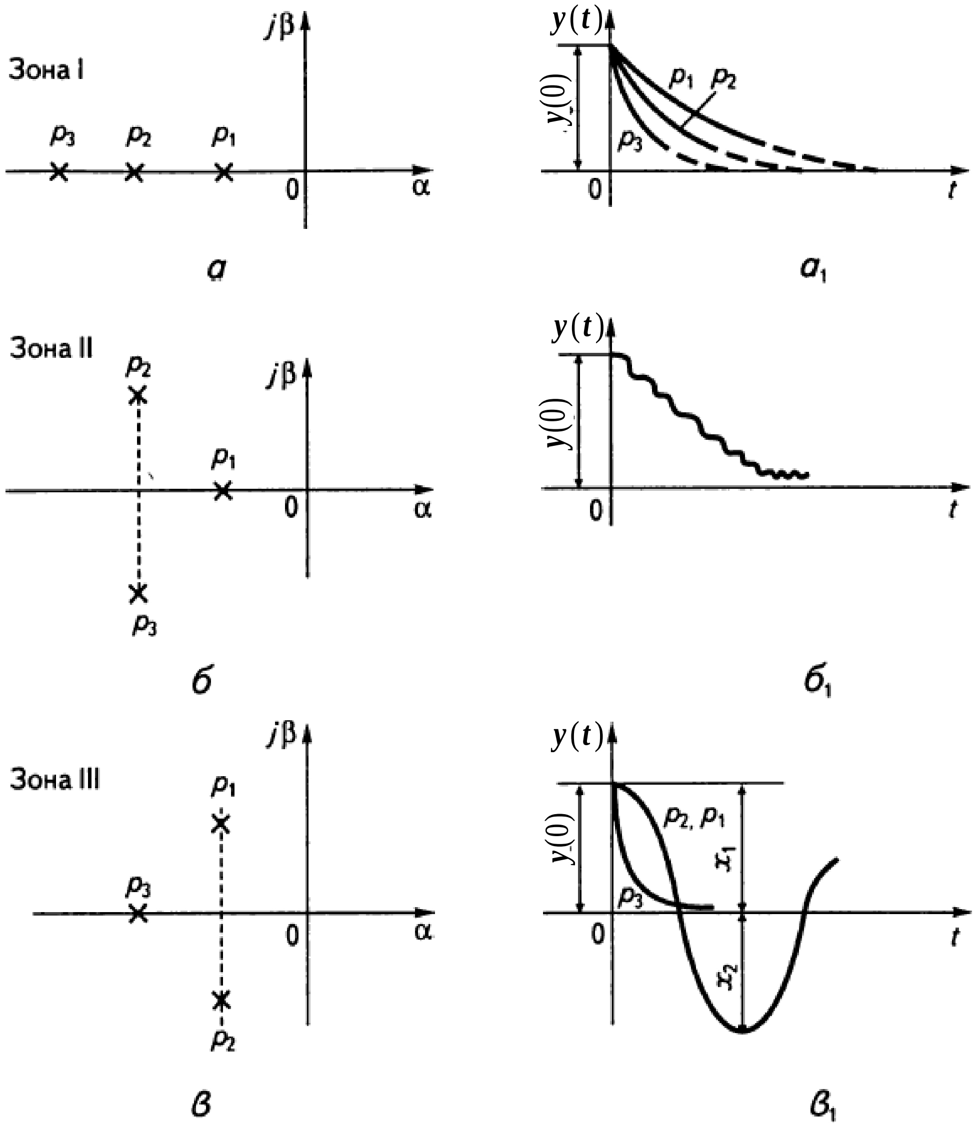


Рис. 4.10. Перехідні процеси у 3-х зонах діаграми Вишнєградського

При такому розміщенні коренів у системі 3-го порядку перехідні процеси будуть визначатись в основному комплексними коренями, а значить будуть коливальними (рис. 4.10, *в*, *в*1). Як відомо, демпфувальні властивості системи характеризуються ступенем затухання $\psi = (1 - x_2/x_1) \cdot 100\%$, де x_1 – амплітуда першого півперіоду, а x_2 – амплітуда другого півперіоду 1-го коливання. Діаграма Вишнєградського в зоні III може бути доповнена кривими однакових ступенів затухання $\psi_1 > \psi_2 > ... \psi_3 > \psi_4$. Для прийнятної якості коливального процесу бажано мати $\psi \geq 80\%$, що відповідає відношенню $x_2/x_1 \leq 0,2$.

Перехід від параметрів X, Y до параметрів ланок конкретної САК вимагає відповідних розрахунків. Для полегшення цих операції у технічній літературі були побудовані спеціальні номограми. Також діаграма Вишнєградського була доповнена нормованими діаграмами однакових ступенів стійкості h та однакових ступенів коливальності μ. Варто зазначити, що $\mu = 0$ відповідає межі зони аперіодичних процесів, а $\mu = \infty$ – межі зони стійкості (крива CD на рис. 4.9). У літературі з ТАК є нормовані діаграми і для систем вищого порядку $(n>3)$. Якщо система з $n>3$ в межах допустимої точності зводиться до системи 3-го порядку, то для неї можна отримати наближені результати дослідження на основі діаграми Вишнєградського.

4.4 Метод кореневого годографа. Інтегральні та частотні методи дослідження якості

4.4.1 Метод кореневого годографа

За допомогою аналізу САК може бути встановлений взаємозв'язок між параметрами характеристичного рівняння замкнутої системи та коренями цього рівняння. Характеристики, що відображають такі взаємозв'язки називають ***кореневими годографами***.

Кореневі годографи – це криві на комплексній площині коренів характеристичного рівняння замкнутої системи, які дістають при плавній зміні деяких параметрів від 0 до +∞. За наявним кореневим годографом можна встановити яким чином впливає параметр на значення й вигляд коренів, і, відповідно, на показники якості системи.

Приклад 4.1. Передатна функція розімкнутої САК має вигляд

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

де $K = 10, T_1 = 0.1\,c, T_2 = 0.2\,c, T_3 = 0.5\,c$. Треба визначити межове значення коефіцієнта передачі розімкнутої системи $K_{меж}$, що розділяє аперіодичні та коливальні перехідні процеси у замкнутій одиничним зворотним зв’язком

САК. Також треба отримати критичне значення коефіцієнта передачі розімкнутої системи $K_{кр}$, за якого замкнута САК перебуватиме на межі стійкості.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу за допомогою методу кореневого годографа. Для цього складемо в MATLAB наступну програму.

```
% Program 4.1
K=10; T1=0.1; T2=0.2; T3=0.5;          % Значення параметрів САК
W1=tf([K],[T1 1]); W2=tf([1],[T2 1]);  % Передатні функції ланок
W3=tf([1],[T3 1]);
W=W1*W2*W3;          % Передатна функція розімкнутої системи
rlocus(W),           % Побудова кореневого годографу
```

В результаті роботи програми побудовано кореневий годограф, який зображено на рис. 4.11. Він включає траєкторії трьох полюсів замкнутої САК при зміні K від 0 до ∞, які позначені синім, зеленим та червоним кольорами.

Для визначення межі між аперіодичними та коливальними перехідними процесами, треба клацнути лівою клавішею миші на зеленій або червоній гілці годографа, щоб на ній з'явився квадратний маркер. Далі його слід перемістити на вісь абсцис у точку розходження червоної та зеленої гілок і, відповідно, появи комплексно спряжених полюсів у замкнутій САК. Тоді числове значення *Gain* в інформаційному вікні дорівнюватиме $K_{меж} / K$. Звідси

$$K_{меж} = 0{,}0148 \cdot K = 0{,}148.$$

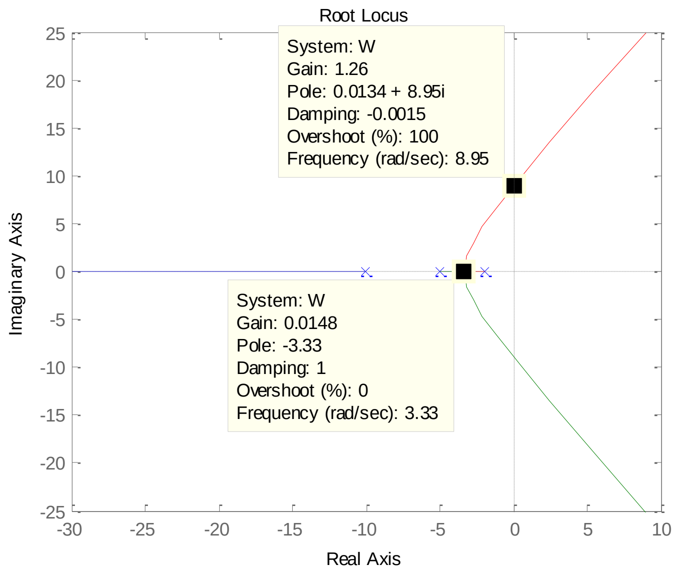


Рис. 4.11. Кореневий годограф САК (до прикладу 4.1)

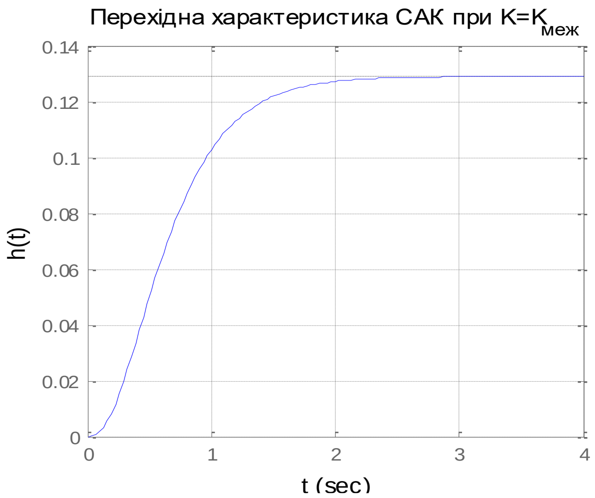
Для визначення критичного значення коефіцієнта передачі розімкнутої системи слід клацнути лівою клавішею миші на зеленій або червоній гілці щоб на ній з'явився маркер. Далі, маркер слід перемістити на вісь ординат (уявна вісь), що відповідатиме появі пари чисто уявних полюсів у замкненій САК. У цьому разі числове значення *Gain* в інформаційному вікні буде дорівнювати значенню $K_{кр} / K$. Звідси дістанемо

$$K_{кр} = 1,26 \cdot K = 12,6\,.$$

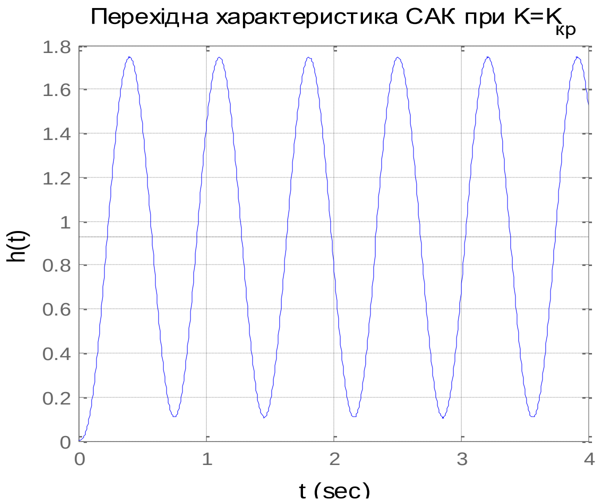
Перевіримо отримані значення $K_{меж}$ та $K_{кр}$ за допомогою перехідної характеристики САК. Для цього запишемо програму у MATLAB.

```
% Program 4.1 % (продовження)
W1=W*0.148/10;   W2=W*12.6/10;  % ПФ розімкнутої САК при К=Кмеж та при К=Ккр
W1z=feedback(W1,1); figure, step(W1z), grid on,      % ПФ замкнутої САК при К=Кмеж
 title('Перехідна характеристика САК при K=K_м_е_ж','FontSize',10),
xlabel('t','FontSize',10), ylabel('h(t)','FontSize',10),
W2z=feedback(W2,1); figure, step(W2z), grid on,      % ПФ замкнутої САК при К=Ккр
 title('Перехідна характеристика САК при K=K_к_р','FontSize',10),
xlabel('t','FontSize',10), ylabel('h(t)','FontSize',10),
```

Побудовані перехідні характеристики замкнутої САК наведені на рис. 4.12. Вони засвідчують правильність визначення межового та критичного значень коефіцієнта передачі розімкнутої системи.



а



б

Рис. 4.12. Перехідні характеристики САК при $K = K_{меж}$ (а) і $K = K_{кр}$ (б)

<u>4.4.2 Інтегральні методи оцінювання якості</u>

Інтегральні методи оцінювання якості керування мають досить широке застосування в ТАК.

<u>Інтегральними</u> називають методи у яких показники якості оцінюються за інтегралом, що є функцією перехідного процесу відхилення керованої величини $y(t)$ від завдання $g(t)$, тобто перехідного процесу помилки керування

$$x_{пер}(t) = g(t) - y(t).$$

За допомогою інтегральних критеріїв оцінюють точність та швидкодію системи керування. Для оцінювання перехідних процесів в системах без перерегулювання використовують інтегральний критерій у вигляді

$$J = S = \int_0^\infty x_{пер}(t)dt, \tag{4.9}$$

який являє собою площу S, обмежену кривою $x_{пер}(t)$ за час перехідного процесу (рис. 4.13).

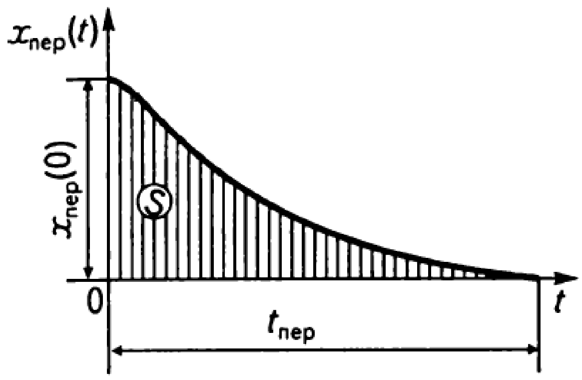


Рис. 4.13. Застосування критерію (4.8) для монотонних процесів

Чим менша площа S, тим більшу швидкодію має дана система. Параметри системи , виходячи із інтегрального критерію якості, слід обирати із умови

$$S \Rightarrow \min.$$

Для перехідних процесів з перерегулюванням описаний вище критерій не можна використовувати, бо мінімум інтегралу (4.9) відповідатиме гармонічним незатухаючим коливанням (рис. 4.14).

Тому для оцінювання якості коливальних процесів та аперіодичних процесів з перерегулюванням використовують квадратичні інтеграли, які враховують лише абсолютне значення $x_{пер}(t)$. Квадратичний інтегральний критерій записується як

$$J_2 = S_2 = \int_o^{\infty} \left[x_{пер}(t) \right]^2 dt\,. \qquad (4.10)$$

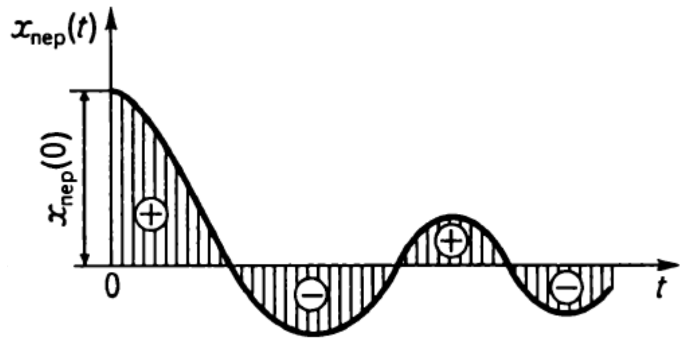


Рис. 4.14. Застосування критерію (4.7) для процесів з перерегулюванням

Зазначимо, що в ТАК відомі й інші інтегральні критерії якості.

4.4.3 Аналіз якості САК у частотній області

Для оцінювання якості керування використовують частотні характеристики за завданням та за збуренням як замкнутої, так і розімкненої системи. При розгляді АЧХ за завданням замкнутої САК зазвичай використовується крива, нормована щодо значення амплітуди за нульової частоти $A(0)$. Приклад нормованої АЧХ замкнутої САК наведено на рис. 4.15.

Коливальні властивості системи можна оцінити за допомогою ***показника коливальності*** $\mu_к$***, що являє собою максимальне значення ординати нормованої АЧХ за завданням замкнутої системи***. Як видно з рис. 4.15

$$\mu_к = A(\omega_м)/A(0) \qquad (4.11),$$

де $\omega_м$ – частота резонансного максимуму АЧХ.

Показник коливальності зростає при зменшенні запасу стійкості системи, що супроводжується збільшенням перерегулювання та тривалості коливань. У добре демпфованих системах має бути $\mu_к = 1{,}1 \div 1{,}5$, хоча інколи допускається $\mu_к = 2 \div 2{,}5$.

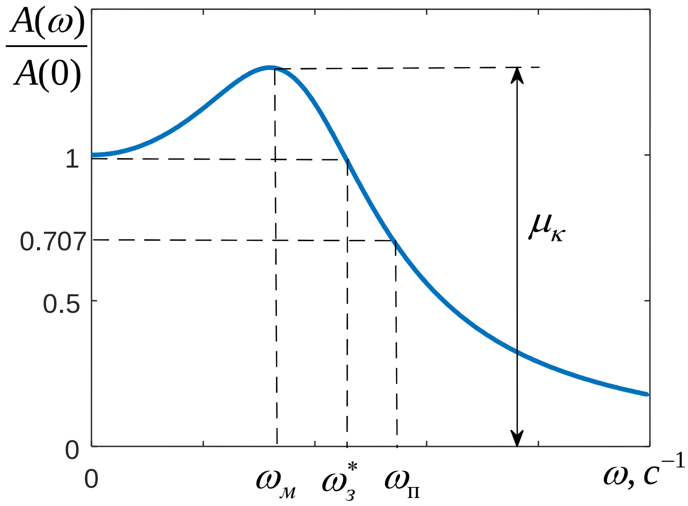


Рис. 4.15. Нормована АЧХ за завданням замкнутої САК

Якщо перехідний процес закінчується за 1–2 коливання, то час перехідного процесу можна оцінити за приблизною залежністю

$$t_p \approx (1 \div 2)\frac{2\pi}{\omega_м} \approx (1 \div 2)\frac{2\pi}{\omega_з}, \tag{4.12}$$

де $\omega_з$ – ***частота зрізу*** розімкнутої САК, яка є частотою перетину ЛАХ системи осі абсцис. Перерегулювання та запас стійкості за фазою визначаються за формулами

$$\sigma \approx 1{,}3\frac{\mu_к - 1}{\mu_к}, \tag{4.13}$$

$$\Delta\varphi \approx \arcsin\frac{1}{\mu_к}, \tag{4.14}$$

Для аналізу замкнутої системи важливо знати за яких частот вона здатна відпрацьовувати усталене гармонічне завдання без суттєвого зменшення амплітуди (інакше кажучи – пропускати гармонічну дію з входу до виходу системи). Ці частоти утворюють ***смугу пропускання***, що визначається так:

<u>смуга пропускання</u> замкнутої системи з коефіцієнтом передачі K=A(0) – це інтервал частот $\omega \in [0, \omega_{\text{п}}]$***, за яких усталена амплітуда синусоїдної вихідної величини САК не менша ніж 0,707 від помноженої на К амплітуди синусоїдної вхідної величини системи***.

Верхня межа смуги пропускання $\omega_{\text{п}}$ називається ***частотою пропускання***, вона є важливим частотним показником якості керування.

При збільшенні частоти пропускання зростає швидкодія системи щодо відпрацювання завдання. Поряд з цим САК стає більш чутливою до високочастотних завад, які можуть виникати в каналах формування сигналу завдання та зворотного зв'язку. Тому на практиці значення $\omega_{\text{п}}$ має бути таким, щоб система, поряд з необхідними динамічними властивостями, також мала достатню завадостійкість.

В загальному випадку добре спроектована замкнена САК щодо задавальної дії повинна мати властивості фільтра низьких частот, а щодо збурювальної дії – фільтра високих частот. Нагадаємо, що АЧХ ідеальних фільтрів низької та високої частоти мають прямокутну форму відповідно до виразів

$$A_{\text{ф.н.ч.}}(\omega) = \begin{cases} 1 & при \quad 0 \le \omega \le \omega_{\text{п.ф}}, \\ 0 & при \quad \omega_{\text{п.ф}} < \omega < \infty. \end{cases}; \qquad A_{\text{ф.в.ч.}}(\omega) = \begin{cases} 0 & при \quad 0 \le \omega < \omega_{\text{п.ф}}, \\ 1 & при \quad \omega_{\text{п.ф}} \le \omega < \infty. \end{cases},$$

де $\omega_{\text{п.ф}}$ – частота пропускання фільтра.

Частота пропускання замкнутої САК отримується за нормованою АЧХ із тотожності $A(\omega_{\text{п}}) = \sqrt{2}/2 = 0,707$ (рис. 4.15). Якщо використовується ЛАХ замкнутої системи, то $\omega_{\text{п}}$ визначається із умови $L(\omega_{\text{п}})=L(0)-3$ дБ.

У наближених розрахунках можна вважати, що частота пропускання $\omega_{\text{п}}$ замкнутої системи приблизно дорівнює частоті зрізу разімкнутої системи $\omega_з$, яка визначається з умови перетину ЛАХ осі абсцис $L(\omega_з) = 0$ дБ, або частоті зрізу замкнутої системи $\omega_з^*$, яка отримується із рівняння $A(\omega_з^*) = 1$ чи з умови перетину ЛАХ осі абсцис $L(\omega_з^*) = 0$ дБ.

За частотними характеристиками розімкнутих САК, зазвичай логарифмічними, визначаються такі показники якості як запас стійкості за модулем ΔL та запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$. Для САК з досить добрим демпфуванням ΔL складає приблизно $6 \div 20$ дБ, що у лінійному масштабі відповідає зміні коефіцієнта передачі системи в $2 \div 10$ разів, а $\Delta\varphi$ знаходиться в межах $30 \div 60°$.

Приклад 4.2. Розімкнута система має передатну функцію

$$W(p) = \frac{1.2}{(1.2p+1)p}.$$

Для замкнутої САК треба побудувати перехідну і частотні характеристики за завданням та порівняти точні показники якості з наближеними, що отримані за наведеними вище співвідношеннями (4.12) – (4.14).

Р о з в ’ я з а н н я. Після введення від’ємного одиничного зворотного зв’язку передатна функція замкнутої САК за завданням матиме вигляд

$$W_g(p) = \frac{1}{p^2 + 0.833p + 1}.$$

Для побудови характеристик складемо в MATLAB наступну програму.

```
% Program 4.2
W=tf([1.2],[1.2 1 0]);              % Передатна функція розімкненої САК
Wg=tf([1],[1 0.833 1]);             % Передатна функція замкнутої САК
step(Wg),                           % Побудова перехідної характеристики
w=(0:0.01:2.5);                     % Формування масиву значень частоти
A=abs(1./(j.*w).^2+0.833 *j.*w+1));          % Формування масиву значень A(ω)
M=max(A);                                    % Показник коливальності
sigma=1.3*(M-1)/M;                           % Перерегулювання
delta_fi=asin(1/M);                          % Запас стійкості за фазою
figure, plot(w,A), grid on                   % Побудова АЧХ
figure, bode(W,Wg), grid on                  % Побудова ЛАХ та ЛФХ
```

За результатами виконання програми побудовано перехідну, амплітудно-частотну і логарифмічні частотні характеристики системи, які зображені на рис. 4.16,а, 4.16,б, та 4.17 відповідно. Як видно із АЧХ, в замкненій САК показник коливальності $\mu_к = 1{,}32$, частота максимуму $\omega_м = 0{,}81\,c^{-1}$, частота зрізу $\omega_з^* = 1{,}14\, c^{-1}$, а частота пропускання $\omega_п = 1{,}36\, c^{-1}$. Аналіз ЛАХ показує, що частота зрізу розімкненої системи $\omega_з = 0{,}843\, c^{-1}$. Із наведених графіків

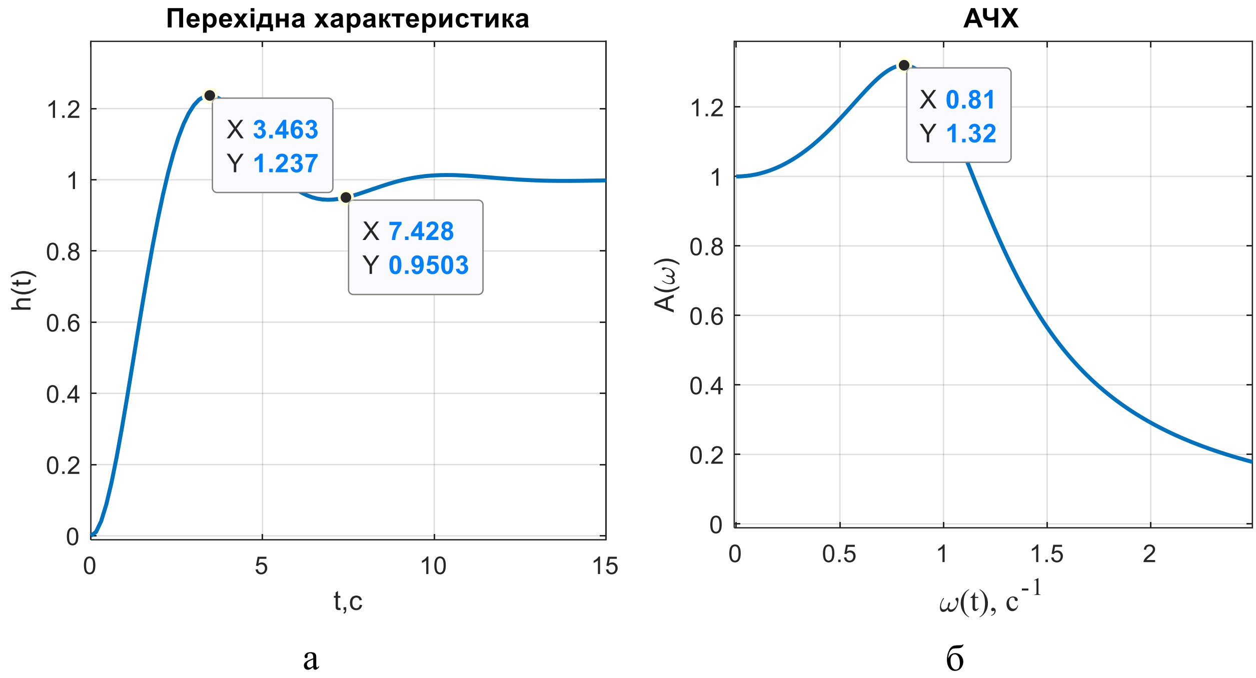


Рис. 4.16. Перехідна (а) та амплітудно-частотна (б) характеристики замкненої системи (до прикладу 4.2)

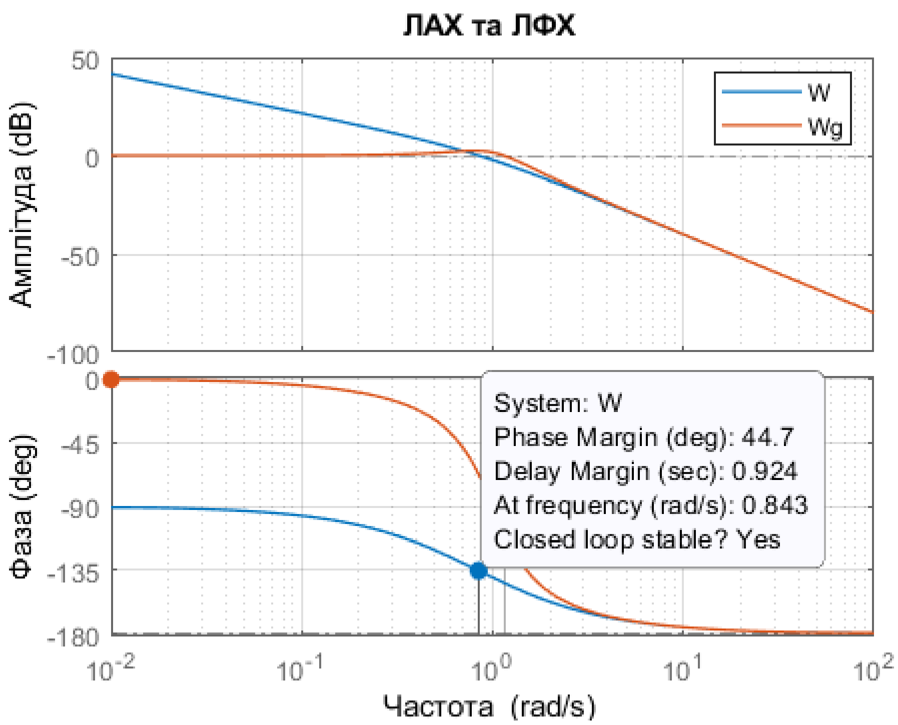


Рис. 4.17. Логарифмічні амплітудна і фазова частотні характеристики розімкненої та замкненої систем (до прикладу 4.2)

отримуємо точні значення показників якості: $t_p = 7,428\,c$, $\sigma = 23,7\%$, $\Delta\varphi = 0,78\,рад$. Застосовуючи співвідношення (4.12) – (4.14), дістанемо наближені значення (позначені символом "~") цих показників: $\tilde{t}_p = 7,45 \div 14,9\,c$, $\tilde{\sigma} = 31,5\%$, $\Delta\varphi = 0,86\,рад$, де час регулювання обчислено за частотою зрізу розімкнутої САК. Як видно, отримані наближені значення часу регулювання та перерегулювання є дещо «песимістичними», а запасу стійкості за фазою – дещо «оптимістичною» оцінками показників якості.

4.5 Типові режими роботи та помилки систем автоматичного керування

4.5.1 Типові режими роботи автоматичних систем

За характером зовнішніх дій, що поступають на систему, розрізняють наступні типові усталені режими роботи САК.

Статичний режим ***– це режим роботи системи у якому зовнішні дії (завдання g, збурення f), вихід регулятора u та вихід системи y не змінюються:***

$$g(t) = const; \quad f(t) = const; \quad u(t) = const; \quad y(t) = const.$$

Усталений динамічний режим ***– це режим роботи системи у якому зовнішні дії змінюються за певним законом***. Дані режими характерні для стежних і програмних САК. Розрізняють ***типові закони зміни зовнішніх дій***:

а) ***лінійний (зміна з постійною швидкістю)***, тобто

$$\frac{dg}{dt} = pg = \mathrm{v} = const \quad \text{або} \quad \frac{df}{dt} = pf = \mathrm{v} = const, \tag{4.15}$$

у цьому випадку $g = \dfrac{\mathrm{v}}{p}$; $f = \dfrac{\mathrm{v}}{p}$; v – швидкість у лінійно змінюваній дії;

б) ***квадратичний (зміна з постійним прискоренням)***

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = p^2 g = a = const \text{ або } \frac{d^2 f}{dt^2} = p^2 f = a = const, \tag{4.16}$$

при цьому $g = \frac{a}{p^2}$; $f = \frac{a}{p^2}$; a – прискорення у квадратично змінюваній дії;

в) ***кубічний (зміна з постійним ривком)***

$$\frac{d^3 g}{dt^3} = p^3 g = r = const \text{ або } \frac{d^3 f}{dt^3} = p^3 f = r = const, \tag{4.17}$$

при цьому $g = \frac{r}{p^3}$; $f = \frac{r}{p^3}$; r – ривок у кубічно змінюваній дії;

г) ***гармонічний (зміна за синусоїдною залежністю)***

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t \text{ або } f(t) = f_{\max} \sin \omega_k t, \tag{4.18}$$

де $g_{\max}$, $f_{\max}$ – амплітуди завдання та збурення відповідно, ω_k – частота гармонічної дії.

При зміні завдання чи збурення відповідно до (4.38) в усталеному динамічному режимі помилка системи $x(t)$ змінюватиметься за гармонічною залежністю з тією ж частотою, але з деяким фазовим зсувом φ у вигляді

$$x(t) = x_{\max} \sin(\omega_k t + \varphi),$$

де $x_{\max}$ – амплітуда помилки.

4.5.2 Статичні та динамічні помилки САК

Точність САК належить до найважливіших її характеристик, що має особливе значення для електромеханічних систем. В залежності від технологічних особливостей об'єкта (процесу), точність системи у багатьох випадках визначає якість вироблюваної продукції, надійність і термін служби устаткування, безпеку, техніко-економічні показники виробничих установок чи процесів. Відповідно до типу і призначення, а також особливостей роботи САК, розрізняють два основних види помилок – статичні та динамічні. На рис. 4.18

наведена типова структура САК, яку використаємо нижче для аналізу помилок керування.

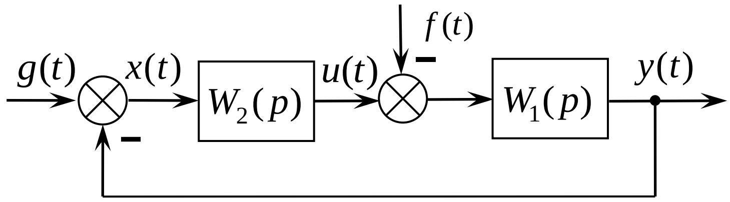


Рис. 4.18. Структурна схема САК для аналізу помилок

<u>Статична помилка</u> системи $x_{\text{ст}}$ ***являє собою відхилення дійсного значення керованої величини*** $y(t) = y_{\text{уст}} = const$ ***від заданого значення*** $g(t) = g_0 = const$ ***у статичному режимі роботи***

$$x_{\text{ст}} = g_0 - y_{\text{уст}} . \tag{4.19}$$

В системі з одиничним зворотним зв'язком при $g_0 = 0$ статична помилка дорівнює виходу системи з протилежним знаком $x_{\text{ст}} = -y_{\text{уст}}$.

При зміні зовнішньої дії (завдання або збурення) за певним законом ***динамічна помилка*** системи $x(t)$ визначається як

$$x(t) = g(t) - y(t) = x_{\text{пер}}(t) + x_{\text{уст}}(t) , \tag{4.20}$$

де $x_{\text{пер}}$, $x_{\text{уст}}$ – складники динамічної помилки системи, що мають назву ***перехідна динамічна помилка*** та ***усталена динамічна помилка*** відповідно.

<u>Перехідна динамічна помилка</u> визначається розв'язком рівняння вільного руху замкненої САК. Вона існує під час перехідного процесу і у стійкій системі прямує до нуля: $x_{\text{пер}} \to 0$ при $t \to \infty$.

<u>Усталена динамічна помилка</u> є відхиленням дійсного значення керованої величини від заданого значення після завершення перехідного процесу. Як буде показано нижче (п. 4.8), усталена динамічна помилка, залежно від закону зміни зовнішньої дії та властивостей САК, може дорівнювати нулю, бути деякою постійною величиною або змінюватися за певним законом.

Відповідні помилки для системи стабілізації при $g(t) = g_0 = const$ показані на рис. 4.19,а, а для стежної (програмної) САК при $g(t) = \text{var}$ – на рис. 4.19,б.

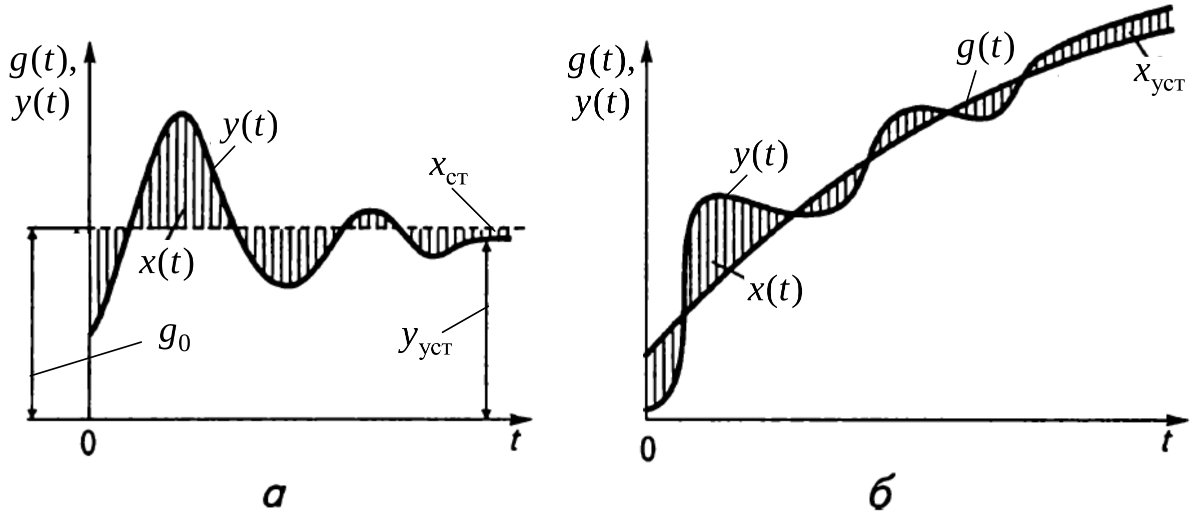


Рис. 4.19. Статичні та динамічні помилки САК

Загальне завдання стабілізаційної САК, а також програмної (стежної) системи полягає в тому щоб забезпечити таку зміну керованої величини $y(t)$, при якому її відхилення від заданого значення не перевищувало б допустимого рівня за технологічними умовами. Для вирішення даного завдання не обхідно узгоджувати параметри і тип регулятора з параметрами і динамічними характеристиками об'єкта.

Основними причинами виникнення помилок в САК є:

- ✓ увімкнення САК в роботу (поява початкового розузгодження);
- ✓ зміни завдання;
- ✓ вплив збурень, що діють на об’єкт;
- ✓ варіації параметрів об’єкта;
- ✓ переналаштування САК в процесі роботи.

Поява відхилень в системі при запуску її в роботу або при переналаштуванні відбувається внаслідок інерційності об'єкта (системи). Наявність початкових відхилень часто призводить до появи перерегулювання.

Повну статичну помилку в лінійній САК, якщо на об'єкт діють збурення f_1, $f_2 ... f_n$, можна визначити на основі принципу суперпозиції як суму помилок

$$x_{\text{ст}} = x_{\text{ст}}^{g} + x_{\text{ст}}^{f_1} + \ldots + x_{\text{ст}}^{f_n} + x_{\text{вп}} + x_{\text{зп}}, \qquad (4.21)$$

де $x_{\text{ст}}^{g}$ – статична помилка від задавальної дії, $x_{\text{ст}}^{f_1},\ldots,x_{\text{ст}}^{f_n}$ – статичні помилки від збурювальних дій $f_1,\ldots,f_n$ відповідно, $x_{\text{вп}}, x_{\text{зп}}$ – похибки вимірювального і задавального пристроїв.

Слід зазначити, що за ознакою наявності чи відсутності статичної помилки усі замкнені САК розподіляються на два класи – статичні та астатичні.

Замкнена система називається <u>статичною</u> або <u>астатичною</u> щодо деякої зовнішньої дії, якщо в ній, відповідно, існує або не існує статична помилка, зумовлена цією зовнішньою дією.

Нижче буде показано, що астатичні системи класифікуються за таким показником, як ***порядок астатизму*** $\nu = 1, 2, \ldots$ При застосуванні цієї класифікації статичні системи можуть розглядатися як частковий випадок астатичних систем з нульовим порядком астатизму $\nu = 0$.

<u>4.5.3 Знаходження статичних помилок систем</u>

В загальному випадку динамічна та статична помилка САК можуть бути обчислені за диференційним рівнянням замкнутої системи або за відповідними передатними функціями. Для спрощення нижче будемо вважати, що на об'єкт керування діє одне збурення, а похибками задавального та вимірювального пристроїв можна знехтувати. Структурна схема досліджуваної САК зображена на рис. 4.18. Приймемо, що передатні функції ланок цієї системи не мають нульових полюсів.

Залежність помилки x від завдання g у системі описується передатною функцією за помилкою $W_x(p) = x/g$. Передатна функція системи за збуренням $W_f(p) = -y/f$ визначає залежність керованої величини y від збурення f. При $g = 0$ помилка системи буде зумовлена лише збуренням, і, за одиничного зворотного зв'язку, згідно з рівнянням суматора $x = g - y$ дорівнюватиме виходу системи з протилежним знаком $x = 0 - y = -y$. Сукупна помилка САК за принципом суперпозиції є сумою помилок від задавальної та збурювальної дій, тому вона дорівнює

$$x(t) = W_x(p)g(t) + W_f(p)f(t), \tag{4.22}$$

або, враховуючи формули (1.19) та (1.20),

$$x(t) = \frac{1}{1+W(p)}g(t) + \frac{W_o^f(p)}{1+W(p)}f(t), \tag{4.23}$$

де $W(p)$ – передатна функція розімкнутої системи; $W_o^f(p)$ – передатна функція об'єкта за збуренням.

За умови $f = 0$ та $g(t) = g_0 = const \neq 0$ із (4.23) при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ дістанемо статичну помилку за завданням

$$x_{\text{ст}}^g = \lim_{t\to\infty} x(t) = \left[\frac{1}{1+W(p)}g_0\right]_{p=0} = \frac{g_0}{1+K_\Sigma}, \tag{4.24}$$

де $K_\Sigma = W(0)$ – коефіцієнт передачі розімкнутої САК.

Прийнявши в (4.23) $g = 0$ та $f(t) = f_0 = const \neq 0$, при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ отримаємо статичну помилку за збуренням

$$x_{\text{ст}}^f = \lim_{t\to\infty} x(t) = \left[\frac{W_o^f(p)}{1+W(p)}f_0\right]_{p=0} = \frac{K_o f_0}{1+K_\Sigma}, \tag{4.25}$$

де $K_o = W_o^f(0)$ – коефіцієнт передачі об'єкта за збуренням.

На рис. 4.20 показані процеси керування та статичні помилки в системі, яка є статичною за завданням і за збуренням. Структура САК відповідає рис. 4.18, а передатні функції ланок $W_1(p) = \dfrac{2}{0.1p+1}$, $W_2(p) = \dfrac{2(0.05p+1)}{0.2p+1}$. До системи прикладаються стрибкоподібні зовнішні дії: при $t = 0.1c$ – завдання

$g(t) = g_0 1(t)$, де $g_0 = 1$, а при $t = 1c$ – збурення $f(t) = f_0 1(t)$, де $f_0 = 0.5$. Як видно з рисунка, після закінчення перехідного процесу від зміни завдання в САК виникає статична помилка за завданням $x_{\text{ст}}^g$, а після закінчення перехідного процесу від зміни збурення також виникає статична помилка за збуренням $x_{\text{ст}}^f$, які разом утворюють сукупну статичну помилку $x_{\text{ст}} = x_{\text{ст}}^g + x_{\text{ст}}^f$.

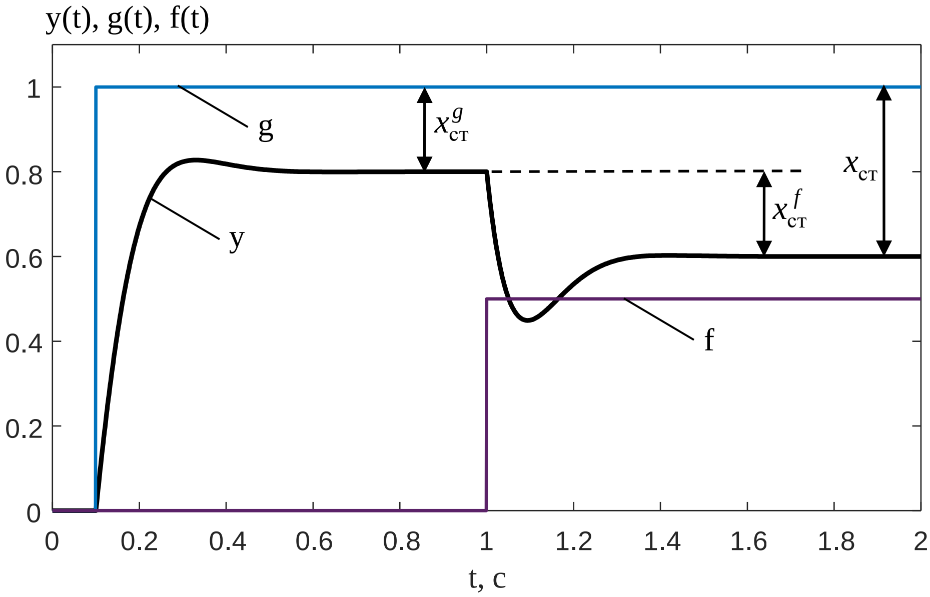


Рис. 4.20. Статичні помилки в статичній САК

Якщо передатна функція об'єкта за збуренням має нульовий полюс, то в її знаменнику оператор p можна винести за дужки і записати передатні функції як $W_o^f(p) = W_{o,\text{ст}}^f(p)\dfrac{1}{p}$, $W(p) = W_{\text{ст}}(p)\dfrac{1}{p}$, де $W_{o,\text{ст}}^f(p)$ та $W_{\text{ст}}(p)$ є передатними функціями без нульових полюсів. Тоді статична помилка, викликана збуренням, обчислюється як

$$x_{\text{ст}}^f = \left[\frac{W_{f,\text{ст}}^o(p)\dfrac{1}{p}}{1 + W_{\text{ст}}(p)\dfrac{1}{p}} f_0 \right]_{p=0} = \frac{K_o f_0}{K_\Sigma}, \tag{4.26}$$

Передатна функція замкнутої системи за збуренням в загальному вигляді запишеться як

$$W_f(p) = \frac{y(t)}{f(t)} = -\frac{d_0 p^m + ... + d_{m-1} p + d_m}{a_0 p^n + ... + a_{n-1} p + a_n}, \qquad (m \le n).$$

За цією ПФ можна визначити статичну помилку від впливу збурення

$$x_{\text{ст}}^f = -W_f(0) f_0 = \frac{d_m}{a_n} f_0. \tag{4.27}$$

Якщо система статична щодо збурення, то $d_m \neq 0$ і при $f_0 \neq 0$ матимемо $x_{\text{ст}}^f \neq 0$. Для астатичної системи $d_m = 0$ і, відповідно, $x_{\text{ст}}^f = 0$.

Аналогічним чином за коефіцієнтами передатної функції $W_x(p)$ можна визначати статичну помилку $x_{\text{ст}}^g \neq 0$ у статичній щодо завдання системі.

Зазначимо, що отримані вище формули справедливі для одноконтурної системи з одиничним зворотним зв'язком. Якщо в САК зворотний зв'язок пропорційний але не одиничний $K_{зз} \neq 1$, то за допомогою нескладного структурного перетворення можна дістати еквівалентну схему з одиничним зворотним зв'язком. Дане перетворення показано на рис. 1.23. Для еквівалентної схеми у формулах (4.22)-(4.24) замість $g(t)$ слід використовувати $g(t)K_{зз}^{-1}$. Таким чином сигнал завдання буде зведено до входу суматора і помилка дорівнюватиме різниці між заданим та реальним значеннями виходу системи, аналогічно як у схемі на рис. 4.18. Це важливо тому, що технологічними умовами накладаються обмеження саме на відхилення керованої величини $y(t)$ від її заданого значення.

4.5.4 Точність САК у статичних режимах роботи

Як було показано вище, властиві статичним системам у статичних режимах роботи помилки за завданням та за збуренням змінюються пропорційно до зовнішніх дій, що зумовили ці помилки – завдання та збурення відповідно. Оскільки помилки є змінними величинами, то достатньо повного уявлення про точність систем вони не дають. Тому для оцінювання точності статичних САК використовується поняття ***статизму***, що є відношенням статичної помилки до зовнішньої дії, яка спричинила цю помилку. Загалом точність статичних САК характеризують такі показники, як статизм за завданням і статизм за збуренням.

<u>Статизм за завданням</u> $\delta_{\text{ст}}^{g}$ ***являє собою відношення статичної помилки за завданням*** $x_{\text{ст}}^{g}$ ***до завдання*** $g_0 = const \neq 0$***, яке й зумовило цю помилку***

$$\delta_{\text{ст}}^{g} = \frac{x_{\text{ст}}^{g}}{g_0}. \tag{4.28}$$

Цей показник характеризує точність відпрацювання системою завдання у статичних режимах. На основі (4.24) статизм за завданням у відсотках дорівнюватиме

$$\delta_{\text{ст}}^{g} = \frac{1}{1+K_{\Sigma}} \times 100\%. \tag{4.29}$$

<u>Статизм за збуренням</u> $\delta_{\text{ст}}^{f}$ ***являє собою модуль відношення статичної помилки за збуренням*** $x_{\text{ст}}^{f}$ ***до збурення*** $f_0 = const \neq 0$***, яке й спричинило цю помилку***

$$\delta_{\text{ст}}^{f} = \left| \frac{x_{\text{ст}}^{f}}{f_0} \right|. \tag{4.30}$$

Цей показник відображає здатність САК до компенсування збурення у статичних режимах. Виходячи із (4.25), статизм за збуренням в одноконтурній системи без астатичних ланок обчислюватиметься як

$$\delta_{\text{ст}}^{f} = \frac{K_o}{1+K_{\Sigma}}. \tag{4.31}$$

Якщо у схемі на рис. 4.18 передатна функція $W_1(p)$ матиме нульовий полюс, то, як буде показано нижче (п. 4.6.3), система стане астатичною щодо завдання, але залишиться статичною щодо збурення. В цьому разі статизм за завданням буде рівним нулю $\delta_{\text{ст}}^{g} = 0$, а статизм за збуренням, згідно з (4.26), визначатиметься як

$$\delta_{\text{ст}}^{f} = \frac{K_o}{K_\Sigma}. \tag{4.32}$$

Варто відмітити, що статичну помилку за завданням можна усунути досить легко. Для цього треба розмістити на вході системи пропорційну ланку з коефіцієнтом передачі K_{inv}, оберненим до коефіцієнта передачі замкнутої САК. Зокрема, досліджувана вище статична система (рис. 4.18) має коефіцієнт передачі $K = \frac{W(0)}{1+W(0)} = \frac{K_\Sigma}{1+K_\Sigma}$. Отже $K_{inv} = \frac{1+K_\Sigma}{K_\Sigma}$. Метод усунення $x_{\text{ст}}^{g}$ шляхом коригування завдання називається ***масштабуванням*** [1].

Ще один досить простий спосіб отримання нульової статичної помилки за завданням полягає у використанні такого пропорційного зворотного зв'язку, що забезпечує одиничний коефіцієнт передачі замкнутої САК. Наприклад, якщо в схемі на рис. 4.18 в коло зворотного зв'язку ввести ланку з коефіцієнтом передачі $K_{зз}$, то замкнута система матиме коефіцієнт передачі

$$K = \frac{K_\Sigma}{1+K_\Sigma K_{зз}},$$

де K_Σ – коефіцієнт передачі розімкнутої САК з одиничним зворотним зв'язком. З цього виразу при $K = 1$ дістанемо шукане значення $K_{зз}$:

$$K_{зз} = 1 - \frac{1}{K_\Sigma}.$$

Такий спосіб усунення статичної помилки за завданням називається ***використанням неодиничного зворотного зв'язку*** [1].

Простота ліквідації статичної помилки від задавальної дії показує обмежене практичне значення статизму за завданням. Тому в літературі з ТАК точність систем у статиці часто характеризують лише одним показником, який відображає залежність помилки від збурення [1].

4.5.5 Аналіз якості САК методом коефіцієнтів помилок

Даний метод набув широкого поширення, особливо для дослідження стежних і програмних САК, які функціонують при змінному завданні. Він ґрунтується на тому положенні, що функції зовнішніх дій диференційовні, а їх похідні з часом зменшуються, тобто процеси в САК є затухаючими.

Відхилення керованої величини від заданого значення в системі (рис. 4.18) при $g = 0$ по суті є помилкою за збуренням, що визначається як

$$x(t) = W_f(p) f(t) = \frac{W_o^f(p)}{1 + W(p)} f(t), \tag{4.33}$$

де $W_o^f(p)$ – передатна функція об'єкта за збуренням, $W(p)$ – передатна функція розімкнутої системи.

Розкладемо передатну функцію замкнутої системи за збуренням в степеневий ряд Маклорена за оператором p:

$$W_f(p) = C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \ldots + \frac{C_n}{n!} p^n .$$

Ряд буде збіжним при $p \to 0$. В цьому разі $t \to \infty$, що відповідає усталеним процесам керування при зміні збурювальної дії за певним законом. Отже усталена динамічна помилка за збуренням визначиться як

$$x_{\text{уст}}(t) = \left(C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \ldots + \frac{C_n}{n!} p^n \right) f(t),$$

або, розкривши дужки та перейшовши від оператора p до похідних,

$$x_{\text{уст}}(t) = C_0 f(t) + C_1 \frac{df(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \ldots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \tag{4.34}$$

З виразу (4.34) видно, що усталена динамічна помилка системи має низку складників, які, окрім першого складника $C_0 f(t)$, виявляють себе лише при зміні збурення. Коефіцієнти $C_0, \ldots, C_n$ у (4.34) називають ***коефіцієнтами***

помилок: C_0 – ***коефіцієнт статичної помилки***; C_1 – ***коефіцієнт швидкісної помилки***; C_2 – ***коефіцієнт помилки за прискоренням***; C_3 – ***коефіцієнт помилки за ривком*** і т. д.

Аналогічним чином у стежній (програмній) системі рівняння усталеної динамічної помилки за заданням, що змінюється у відповідності з певним законом, виглядатиме як

$$x_{\text{уст}}(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \ldots + \frac{C_n}{n!}\frac{d^n g(t)}{dt^n}. \qquad (4.35)$$

Отже можемо зазначити, що ***у загальному випадку <u>коефіцієнти помилок</u>, зумовлених деякою зовнішньою дією, можна визначити із передатної функції системи за помилкою щодо даної дії шляхом ділення полінома чисельника на поліном знаменника***.

Варто зазначити, що коефіцієнти статичної помилки C_0, зумовленої задавальною чи збурювальною дією, дорівнюють розглянутим вище показникам точності системи в статиці – статизму за завданням або за збуренням.

Інший шлях визначення коефіцієнтів помилок ґрунтується на загальному правилі розкладання функцій в ряди Тейлора та Маклорена [5]. За цим правилом формули для коефіцієнтів помилок за збуренням в (4.34) будуть наступними:

$$C_0 = \left[W_f(p)\right]_{p=0}, \quad C_1 = \left[\frac{dW_f(p)}{dp}\right]_{p=0}, \ldots, \quad C_n = \left[\frac{d^n W_f(p)}{dp^n}\right]_{p=0}.$$

Очевидно, що при застосуванні в цих формулах передатної функції САК за помилкою можна отримати коефіцієнти помилок за заданням в (4.35). Розглянемо методику визначення коефіцієнтів помилок на прикладі.

Приклад 4.3. На схемі САК, що зображена на рис. 4.21, об'єкт $W_1(p)$ і регулятор $W_2(p)$ є аперіодичними ланками 1-го порядку з передатними функціями $W_1(p) = \dfrac{K_1}{T_1 p + 1}$; $W_2(p) = \dfrac{K_2}{T_2 p + 1}$.

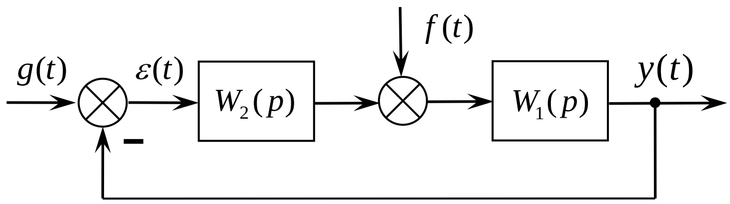


Рис. 4.21. Структурна схема САК (до прикладу 4.3)

Треба визначити перших три коефіцієнти помилок системи.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо передатну функцію системи за помилкою

$$W_\varepsilon(p)=\frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{K_\Sigma}{(T_1p+1)(T_2p+1)}}=\frac{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1+K_\Sigma},$$

де $K_\Sigma=K_1K_2$ – коефіцієнт передачі розімкнутої системи.

Розділимо поліном чисельника на поліном знаменника після упорядкування їх за зростанням степеня p:

$$\begin{array}{l|l}
\;\;\; 1+(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\mathrm{p}+\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\mathrm{p}^2 & (1+\mathrm{K}_\Sigma)+(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\mathrm{p}+\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\mathrm{p}^2 \\
-\;1+\dfrac{(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\mathrm{p}}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\mathrm{p}+\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\mathrm{p}^2 & \hline \\
\hline
(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}+\left(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^2 & \dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}+\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}+ \\
-\;(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}+\left(\dfrac{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^3 & \quad +\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)\left(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2-\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^2 \\
\hline
\quad \left(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2-\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^2+\left(\dfrac{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^3 & \\
-\;\left(\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2-\dfrac{1}{1+\mathrm{K}_\Sigma}\right)\mathrm{p}^2+\ldots & \\
\hline
\end{array}$$

Відповідно до вищевикладеного, за допомогою ділення поліномів визначені наступні коефіцієнти помилок у даній системі: коефіцієнт статичної помилки: $C_o=\dfrac{1}{1+K_\Sigma}\neq 0$ – система статична; коефіцієнт швидкісної помилки: $C_1 = \frac{T_1 + T_2}{1 + K_\Sigma}\left(1 - \frac{1}{K_\Sigma}\right)$; коефіцієнт помилки за прискоренням: $\frac{C_2}{2} = \frac{1}{1 + K_\Sigma}\left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + K_\Sigma}\right)$. З отриманих результатів бачимо, що C_o рівний статизму системи за завданням (4.29). Також зазначимо, що усі коефіцієнти помилок зменшуються при збільшені K_Σ, отже поліпшується точність САК.

Підставляючи відшукані значення коефіцієнтів помилок у рівняння помилки стеження (4.35) і диференціюючи завдання $g(t)$, можна отримати відповідні складники помилки, сума яких буде результуючою помилкою $x_{\text{уст}}(t)$.

Приклад 4.4. Визначити усталену динамічну помилку системи з прикладу 4.3, якщо завдання $g(t) = a_0 + a_1 t$, де $a_0 = const$, $a_1 = const$.

Розв'язання. Знайдемо першу похідну від завдання $\frac{dg}{dt} = a_1$. Похідні другого та вищих порядків дорівнюють нулю. Тому помилка системи визначатиметься першими двома членами ряду (4.35). Підставляючи завдання та його похідну у (4.35), дістанемо рівняння помилки системи

$$x_{\text{уст}}(t) = C_0(a_0 + a_1 t) + C_1 a_1 = C_0 a_0 + C_1 a_1 + C_0 a_1 t.$$

З врахуванням визначених у прикладі 4.3 коефіцієнтів помилок, остаточно усталена динамічна помилка САК запишеться як

$$x_{\text{уст}}(t) = \frac{a_0}{1 + K_\Sigma} + \left[\frac{T_1 + T_2}{1 + K_\Sigma}\left(1 - \frac{1}{K_\Sigma}\right)\right] a_1 + \frac{a_1 t}{1 + K_\Sigma}.$$

4.6 Поліпшення показників якості САК

4.6.1 Основні шляхи підвищення точності САК

Основними шляхами вирішення проблеми підвищення точності систем автоматичного керування є наступні.

1. Застосування замкнутих САК і підвищення коефіцієнта підсилення регулятора (системи).

2. Формування необхідних законів регулювання (введення астатизму, регулювання за похідними та ін.).

3. Застосування спеціальних структур САК, які дозволяють забезпечити підвищення точності (комбіновані системи, системи зі змінною структурою, тощо).

4. Реалізація принципів інваріантності.

5. Впровадження різного виду коригувальних пристроїв.

4.6.2 Покращення якості шляхом замикання САК

Як приклад розглянемо спрощену функціональну схему стабілізаційної САК (рис. 4.22), що складається із об’єкта О та регулятора Р.

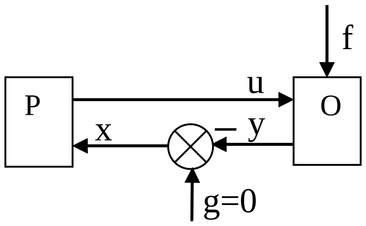


Рис. 4.22. Спрощена функціональна схема САК

Загальне рівняння (2.101) системи стабілізації при $g = 0$ має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]y = S(p)P_{II}(p)f\ .$$

Вважатимемо, що об'єктом є аперіодична ланка 1-го порядку, а регулятором є пропорційна ланка. Тоді рівняння об'єкта $(T_1 p + 1)y = K_1 u$. Рівняння регулятора $u = K_2 x$. При цьому $P(p) = (T_1 p + 1)$; $Q(p) = K_1 K_2$; $P_{II}(p) = 1$; $S(p) = K_o$, де K_o – передатний коефіцієнт об’єкта за збуренням. Оскільки завдання в системі нульове, то її помилка дорівнює регульованій величині з протилежним знаком $x = -y$.

Визначимо статичну помилку системи $x_{\text{ст}}$, що виникне під дією постійного збурення $f(t) = f_0 = const$ у розімкнутому і замкнутому стані САК, коли регульована величина набуде деякого усталеного значення $y_{\text{уст}}$.

У розімкнутому стані системи її рівняння

$$P(p)y = S(p)f,$$

або

$$(T_1 p + 1)y = K_o f, \qquad y = \frac{K_o f}{T_1 p + 1}.$$

За збурення $f(t) = f_0 1(t)$ розв’язок рівняння $y = K_o f_0 (1 - e^{-t/T_1})$. Статична помилка системи при $t \to \infty$ буде $x_{\text{ст}1} = -y_{\text{уст}1} = -K_o f_0$.

В разі замикання системи, її рівняння запишеться як

$$(T_1 p + 1 + K_\Sigma)y = K_o f,$$

де $K_\Sigma = K_1 K_2$ – коефіцієнт передачі розімкнутої системи. Розв’язок цього рівняння для збурення $f(t) = f_0 1(t)$ матиме вигляд

$$y = \frac{K_o f_0}{1 + K_1 K_2}\left(1 - e^{-t/T_2}\right),$$

де $T_2 = \dfrac{T_1}{1 + K_\Sigma}$. При $t \to \infty$ статична помилка $x_{\text{ст}2} = -y_{\text{уст}2} = \dfrac{-K_o f_0}{1 + K_\Sigma}$.

Порівнюючи отримані вирази для статичних помилок і розв’язків для розімкнутого і замкнутого станів системи, можна зробити такі висновки.

1. Замикання системи від’ємним зворотним зв’язком дозволяє зменшити абсолютне значення статичної помилки і сталу часу в $1 + K_\Sigma$ разів.

2. Графіки перехідних характеристик, зображених на рис. 4.23 (I – розімкнута, II – замкнута система), показують, що замикання системи дозволяє також зменшити тривалість перехідного процесу (час регулювання) $t_{\text{р}2}$ в $1 + K_\Sigma$ разів у порівнянні з $t_{\text{р}1}$.

3. Збільшення коефіцієнта передачі регулятора K_2 веде до збільшення K_Σ, і, відповідно, до зменшення статичної помилки замкнутої системи.

Замикання системи дозволяє також кардинальним чином змінити динамічні властивості деяких об'єктів і систем в цілому. Так, нестійкі об'єкти, що мають розбіжну часову характеристику, без регулятора непрацездатні.

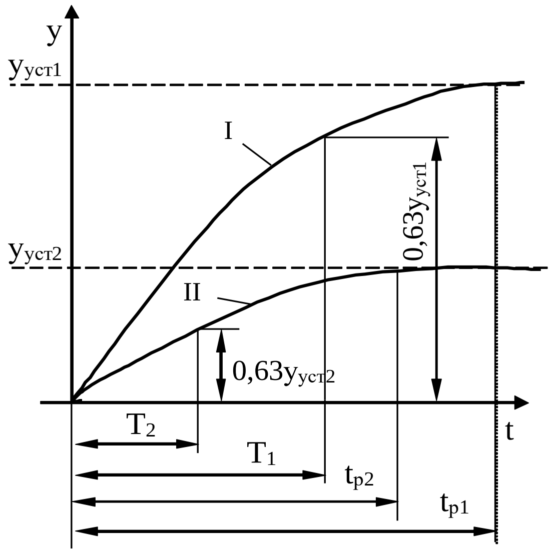


Рис. 4.23. Перехідні процеси у розімкнутій та замкнутій САК

Як приклад, розглянемо об’єкт у вигляді нестійкої аперіодичної ланки 1-го порядку. Рівняння динаміки такого об'єкта можна записати як

$$(T_1 p - 1) y = K_o f \ .$$

Реакція об’єкта на постійне збурення $f(t) = f_0 1(t)$ визначатиметься розв’язком рівняння у вигляді $y = K_o f_0 (e^{t/T_1} - 1)$. При $t \to \infty$ матимемо $y \to \infty$, що засвідчує нестійкість об’єкта без регулятора (в розімкнутому стані системи). Розглянемо роботу цього нестійкого об'єкта у складі замкнутої САК. Нехай рівняння регулятора має вигляд

$$(T_2 p + 1) u = K_2 x \,.$$

Рівняння замкнутої системи в цьому випадку

$$[(T_1 p - 1)(T_2 p + 1) + K_1 K_2] y = K_o (T_2 p + 1) f \ .$$

Позначивши $K_1 K_2 = K_\Sigma$, отримаємо характеристичне рівняння замкнутої системи

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 - T_2) p + K_\Sigma - 1 = 0 \,.$$

Згідно з критерієм Гурвіца, САК 2-го порядку стійка, коли усі коефіцієнти її характеристичного рівняння додатні. Отже, якщо інерційність об'єкта буде більшою ніж інерційність регулятора $T_1 > T_2$ і коефіцієнт передачі розімкнутої системи $K_\Sigma > 1$, то замкнута САК з нестійким об'єктом буде стійкою.

4.6.3 Базові закони керування і регулятори

Розглянуті вище приклади показують, що завдяки застосуванню регуляторів різні об'єкти в замкнутих САК набувають нових динамічних і статичних властивостей. Характеристики замкнутої системи залежать не лише від характеристик об'єкта керування і збурень, що діють на нього, але і від особливостей і характеристик регуляторів.

Регулятори класифікують за наступними ознаками:

- за видом використовуваної енергії – пневматичні, механічні, гідравлічні, електричні;
- за принципом керування – керування за відхиленням (помилкою), за збуренням, комбіновані;
- за характером оброблюваної інформації – безперервні і дискретні;
- за характером зв'язків між елементами – зі сталою та змінною структурами;
- за іншими ознаками.

Одною із основних особливостей регулятора є можливість впливу на статичні і динамічні помилки САК, що визначається законом керування.

***Законом або алгоритмом керування (регулювання)* називають функціональну залежність**

$$u = u(x),$$

що пов'язує вхідну величину регулятора x із його вихідною величиною u.

В узагальненій схемі на рис. 4.22 вхід регулятора x – це помилка САК. У загальному випадку вхідна та вихідна величини регулятора можуть бути скалярними або векторними. Залежно від вигляду $u(x)$ розрізняють три базові закони керування та три типи регуляторів, що реалізують ці закони:

✓ ***пропорційний***, що реалізується за допомогою ***пропорційного регулятора (П-регулятора)***;

✓ ***інтегральний***, що реалізується за допомогою ***інтегрального регулятора (І-регулятора)***;

✓ ***диференційний*** що реалізується за допомогою ***диференційного регулятора (Д-регулятора)***.

Розглянемо основні властивості базових регуляторів і відповідних їм законів керування.

Пропорційний закон керування (П-регулятори). Пропорційний закон керування є найпростішим. Йому відповідає залежність

$$u = K_{\text{п}} x, \tag{4.36}$$

де $K_{\text{п}}$ – коефіцієнт передачі (підсилення). Властивості П-регулятора і його дія були розглянуті вище при вивченні впливу замикання САК на статичну помилку та часові характеристики.

До п е р е в а г П-регуляторів відносяться простота і надійність, безінерційність, можливість зменшення статичної помилки та часу регулювання.

Основними н е д о л і к а м и цих регуляторів є принципова неможливість впливу на динамічні помилки і неможливість повного усунення статичної помилки. Останнє пояснюється тим, що можливості збільшення коефіцієнта передачі регулятора зазвичай обмежуються умовами стійкості системи.

Інтегральний закон керування (І-регулятори). І-регулятор здійснює керування за інтегральною залежністю

$$u = K_{\text{і}} \int_{0}^{\infty} x dt, \tag{4.37}$$

де $K_{\text{і}}$ – коефіцієнт передачі. В операторній формі

$$u = K_{\text{і}} \frac{1}{p} x. \tag{4.38}$$

І-регулятор дозволяє подати на вхід об'єкта величину, швидкість зміни якої пропорційна сигналу помилки. Це можна показати, продиференціюваши обидві частини інтегрального закону керування

$$\frac{du}{dt} = K_{\text{i}} x .$$

Формування інтегрального закону регулювання в системі забезпечується введенням в структурну схему системи інтегральної ланки з передатною функцією

$$W_i(p) = K_{\text{i}} \frac{1}{p} .$$

Нехай у статичній замкнутій системі передатна функція за збуренням до введення інтегральної ланки має вигляд

$$W_f(p) = \frac{y(t)}{f(t)} = \frac{W_o^f(p)}{1 + W(p)} ,$$

де $W_o^f(p) = W_1(p)$ – передатна функція об'єкта за збуренням, $W(p) = W_1(p) W_2(p)$ – передатна функція розімкнутої системи, $W_1(p), W_2(p)$ – передатні функції об'єкта та регулятора, у яких полюси рівні нулю відсутні.

В разі нульового завдання та $f(t) = f_0 = const \neq 0$ при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ дістанемо статичну помилку за збуренням

$$x_{\text{ст}} = -y_{\text{уст}} = \lim_{t \to \infty} \left[-y(t) \right] = \left[-\frac{W_1(p)}{1 + W(p)} f_0 \right]_{p=0} \neq 0,$$

де $y_{\text{уст}}$ – усталене значення виходу системи. Після введення інтегральної ланки передатна функція розімкнутої системи дорівнюватиме $W_i(p) W(p)$, де $W_i(p) = K_{\text{i}} \frac{1}{p}$. В цьому разі

$$x_{\text{ст}} = -y_{\text{уст}} = \left[-\frac{W_1(p)}{1 + W(p) K_{\text{i}} \dfrac{1}{p}} f_0 \right]_{p=0} = \left[-\frac{W_1(p) p}{p + W(p) K_{\text{i}}} f_0 \right]_{p=0} = 0 .$$

Тобто введення інтегральної ланки дозволило повністю усунути статичну помилку та перетворити статичну систему в астатичну.

Тут слід мати на увазі, що інтегральну ланку $W_i(p)$ потрібно вводити в САК так, як показано на рис. 4.24, де О – об’єкт, Р – регулятор. Тобто до місця прикладання в системі збурення f.

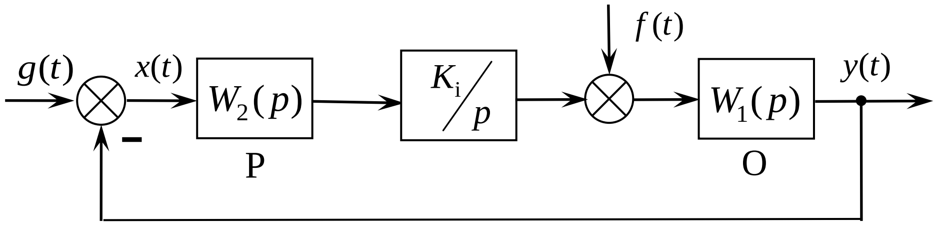


Рис. 4.24. Структура САК, що астатична за завданням та за збуренням

Якщо інтегральну ланку ввести в систему після місця прикладання збурення, то, з врахуванням введення інтегральної ланки $W_i(p) = K_\text{i}\dfrac{1}{p}$, передатна функція системи за збуренням

$$W_f(p) = \frac{W_i(p)W_1(p)}{1+W(p)\,W_i(p)} = \frac{K_\text{i}\dfrac{1}{p}W_1(p)}{1+W_1(p)\,W_2(p)\dfrac{K_\text{i}}{p}} = \frac{K_\text{i}W_1(p)}{p+W_1(p)\,W_2(p)\,K_\text{i}}.$$

Статична помилка системи від впливу збурення

$$x_\text{ст} = -y_\text{уст} = \left[-\frac{K_\text{i}W_1(p)}{p+W_1(p)\,W_2(p)\,K_\text{i}}\,f_0\right]_{p=0} = -\frac{W_1(0)}{W_1(0)\,W_2(0)}\,f_0 \neq 0,$$

що засвідчує неможливість усунення помилки при розташуванні інтегральної ланки між місцем прикладання збурення та виходом об'єкта (рис. 4.25).

Варто зазначити, що впровадження інтегральних ланок з метою зведення до нуля статичної та усталених динамічних помилок називають ***введенням астатизму*** в систему. Завдяки одній інтегральній ланці досягається

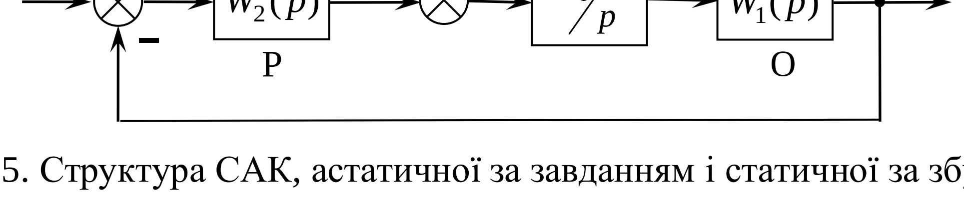


Рис. 4.25. Структура САК, астатичної за завданням і статичної за збуренням

астатизм 1-го порядку, завдяки двом таким ланкам – астатизм 2-го порядку і т. д. Введення астатизму 2-го та вищих порядків дозволяє ліквідувати усталені динамічні помилки, що виникають в системі при зміні зовнішніх дій за типовими законами.

Тут слід пам'ятати, що при введенні в одноконтурну систему з аперіодичними і підсилювальними ланками двох і більше інтегральних ланок система перетворюється на структурно-нестійку (п. 3.5). Для усунення структурної нестійкості інтегральну ланку доповнюють пропорційним паралельним прямим зв’язком $W_{п}(p)=1$ (рис. 4.26). Таку ланку називають ***ізодромною інтегральною*** або просто ***ізодромною***.

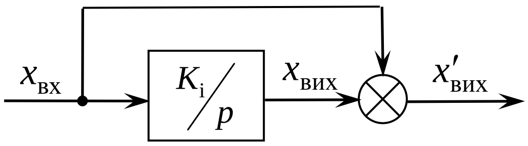


Рис. 4.26. Структурна схема ізодромної ланки

Вихідна величина $x'_{вих}$ ізодромної ланки $W'_{i}(p)$ дорівнює

$$x'_{вих}=x_{вх}+x_{вих}.$$

Оскільки рівняння інтегральної ланки $x_{вих}=K_{і}\dfrac{1}{p}x_{вх}$, то попередній вираз запишеться як

$$x'_{вих}=x_{вх}+K_{і}\frac{1}{p}x_{вх}=x_{вх}\left(1+\frac{K_{і}}{p}\right)=\frac{p+K_{і}}{p}x_{вх}.$$

Звідси передатна функція ізодромної ланки

$$W'_{i}(p)=\frac{p+K_{і}}{p}. \qquad (4.39)$$

Наведемо приклади введення астатизму 1-го та 2-го порядків у САК, використовуючи для аналізу метод коефіцієнтів помилок.

Приклад 4.5. Розглянемо стежну систему з інерційним об'єктом та безінерційним регулятором (рис. 4.21), передатні функції яких відповідно дорівнюють $W_1(p)=\dfrac{K_1}{T_1p+1}$; $W_2(p)=K_2$.

Передатна функція замкнутої системи за помилкою

$$W_\varepsilon(p)=\frac{\varepsilon(t)}{g(t)}=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{K_1K_2}{T_1p+1}}=\frac{T_1p+1}{T_1p+1+K_\Sigma},$$

де $K_\Sigma=K_1K_2$. Для визначення коефіцієнтів помилок розділимо чисельник $W_\varepsilon(p)$ на знаменник. Дістанемо

$$W_\varepsilon(p)=\frac{1}{1+K_\Sigma}+\frac{\left(1-\dfrac{1}{1+K_\Sigma}\right)T_1}{(1+K_\Sigma)}p\,.$$

Тут коефіцієнт статичної помилки $C_0=\dfrac{1}{1+K_\Sigma}$. Оскільки $C_0\neq 0$, то система є статичною.

При встановленні в САК астатизму 1-го порядку шляхом введення інтегральної ланки $W_i(p)=\dfrac{1}{p}$, передатна функція системи за помилкою

$$W_\varepsilon(p)=\frac{1}{1+W(p)\dfrac{1}{p}}=\frac{1}{1+\dfrac{K_\Sigma}{T_1p+1}\dfrac{1}{p}}=\frac{T_1p^2+p}{T_1p^2+p+K_\Sigma}\,.$$

Розклавши цю функцію в ряд, отримаємо

$$W_\varepsilon(p)=C_0+C_1p+\frac{C_2}{2}p^2+\ldots,$$

де C_0=0; $C_1=K_\Sigma^{-1}$; $C_2/2=(T_1-K_\Sigma^{-1})K_\Sigma^{-1}$. Як бачимо, введення інтегральної ланки дозволило перетворити статичну систему в астатичну з 1-м порядком астатизму (C_0=0). При цьому в САК залишилися помилки за швидкістю ($C_1\neq 0$) і за прискоренням ($C_2\neq 0$).

Для усунення швидкісної помилки необхідне встановлення в системі астатизму 2-го порядку. Оскільки в цій системі введення в контур двох інтеграторів призведе до структурної нестійкості, то замість одного інтегратора слід застосувати ізодромну ланку.

Приклад 4.6. Введемо у систему інтегральну та ізодромну ланки з передатними функціями відповідно $W_i(p)=\frac{K_3}{p}, W_{iz}(p)=\frac{p+K_4}{p}$. Тепер передатна функція замкнутої системи за помилкою буде

$$W_\varepsilon(p)=\frac{1}{1+W(p)\frac{K_3}{p}\frac{p+K_4}{p}}=\frac{T_1p^3+p^2}{T_1p^3+p^2+K_1K_2K_3p+K_\Sigma},$$

де $K_\Sigma=K_1K_2K_3K_4$. Розклавши цю функцію в ряд, матимемо

$$C_0=0,\ C_1=0,\ \frac{C_2}{2}=\frac{1}{K_\Sigma},\ \frac{C_3}{6}=\frac{1}{K_\Sigma}(T_1-\frac{1}{K_4}).$$

Таким чином введення в САК одної інтегральної ланки дозволяє отримати астатизм 1-го порядку, а значить перетворює статичну систему в астатичну і зводить до нуля статичну помилку. Введення інтегральної та ізодромної ланок (або двох ізодромних) дозволяє отримати в САК астатизм 2-го порядку та усуває статичну і швидкісну помилки. Усунення помилки за прискоренням $(C_2 \neq 0)$ можливе при встановленні в системі астатизму 3-го порядку за допомогою додаткової ізодромної ланки. Аналогічно в САК можна ліквідувати і помилки вищих порядків.

Наведені результати досліджень свідчать про переваги інтегральних регуляторів, що полягають у можливості усунення статичної та усталених динамічних помилок САК і, як наслідок, поліпшенні статичної та динамічної точності системи.

Щоправда, інтегральним регуляторам властиві певні недоліки. Зокрема, порівнюючи П- та І-регулятори, бачимо, що дія І-регулятора проявляється лише через деякий час. Отже помилка, що виникла, зводиться до нуля не водночас з її появою. Це може призвести до небажаних коливань у системі і навіть до втрати її стійкості. Крім цього, усунення декількох складників помилки САК вимагає застосування відповідної кількості ізодромних ланок, що збільшує складність системи.

Диференційний закон керування (Д-регулятори). Завдяки Д-регулятору на вхід об'єкта подається величина, пропорційна швидкості зміни виходу об'єкта (за умови, що зворотний зв’язок пропорційний)

$$u = K_{\text{д}} \frac{dx}{dt}, \tag{4.40}$$

де $K_{\text{д}}$ – коефіцієнт передачі. Або в операторній формі запису

$$u = K_{\text{д}} px. \tag{4.41}$$

Реалізація диференційного закону регулювання здійснюється за допомогою диференційних ланок. При певному характері збурення можуть виникати також помилки за швидкістю, прискоренням і ривком. В цьому випадку для їх компенсування на вхід об'єкта від регулятора потрібно подати сигнали, пропорційні похідній відповідного порядку від вихідної величини об'єкта. Таке регулювання називають ***регулювання за похідними***.

Практично регулювання за похідною від помилки полягає у тому, що в систему, окрім самої помилки, вводиться сигнал, пропорційний швидкості її зміни. В цьому випадку система реагує не лише на значення помилки, але також враховує тенденцію її зміни, реагуючи на швидкість та знак змінювання помилки.

Оцінимо вплив введення похідної. Розглянемо систему, схема якої зображена на рис. 4.24. Передатні функції ланок системи дорівнюють:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}; \qquad W_2(p) = \frac{K_2}{T_2 p + 1}; \qquad W_3(p) = \frac{K_\text{і}}{p}.$$

Передатна функція розімкнутої системи в цьому випадку

$$W(p) = \frac{K_\Sigma}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p},$$

де $K_\Sigma = K_1 K_2 K_\text{і}$. При цьому передатна функція замкнутої системи за помилкою (до введення похідної) має вигляд

$$W_x(p)=\frac{x}{g}=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{p(T_1p+1)(T_2p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)+K_\Sigma}=$$

$$=\frac{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p}{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+K_\Sigma}.$$

Визначивши коефіцієнти помилок в результаті ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника, отримаємо наступні результати: коефіцієнт статичної помилки $C_0=0$; коефіцієнт помилки за швидкістю $C_1=\frac{1}{K_\Sigma}$, коефіцієнт помилки за прискоренням $\frac{C_2}{2}=\frac{T_1+T_2}{K_\Sigma}-\frac{1}{K_\Sigma^2}$; коефіцієнт помилки за ривком $\frac{C_3}{6}=\frac{T_1T_2}{K_\Sigma}-2\frac{T_1+T_2}{K^2_\Sigma}-\frac{1}{K_\Sigma^3}$.

Тепер в систему введемо форсувальну ланку, що являє собою паралельне з’єднання пропорційної та диференційної ланок і має передатну функцію

$$W_{\text{пд}}(p)=1+T_{\text{д}}p.$$

Передатна функція розімкнутої системи в цьому випадку

$$W'(p)=W(p)W_{\text{пд}}(p)=\frac{K_\Sigma(1+T_{\text{д}}p)}{(T_1p+1)(T_2p+1)p}.$$

Передатна функція замкнутої системи за помилкою з врахуванням форсувальної ланки

$$W'_x(p)=\frac{1}{1+W'(p)}=$$

$$=\frac{(T_1p+1)(T_2p+1)p}{(T_1p+1)(T_2p+1)p+K_\Sigma(T_{\text{д}}p+1)}=\frac{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p}{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+(1+K_\Sigma T_{\text{д}})p+K_\Sigma}.$$

Після ділення полінома чисельника на поліном знаменника, дістанемо значення коефіцієнтів помилок

$$C_0=0;\quad C_1=\frac{1}{K_\Sigma};\quad \frac{C_2}{2}=\frac{T_1+T_2}{K_\Sigma}-\frac{1}{K_\Sigma^2}-\frac{T_{\text{д}}}{K_\Sigma};$$

$$\frac{C_3}{6}=\frac{T_1T_2}{K_\Sigma}-2\frac{T_1+T_2-T_д}{K_\Sigma^2}+\frac{1}{K_\Sigma^3}-\frac{T_д(T_1+T_2-T_д)}{K_\Sigma}.$$

Порівнюючи отримані значення коефіцієнтів помилок з відповідними значеннями коефіцієнтів до введення в закон керування похідної, можна відмітити наступне:

1. Значення коефіцієнтів C_0 і C_1 не змінилися.
2. Зменшились коефіцієнти C_2 і C_3.
3. З'явилась можливість при певному значенні $T_д$ отримати C_2=0.

Якщо ввести в систему ще одну форсувальну ланку, то, підбираючи певним чином значення сталих часу диференціювання $T_{д1}$ і $T_{д2}$, можна отримати коефіцієнти помилок C_1=C_2=0.

Слід підкреслити, що у всіх наведених вище прикладах розглядалися ідеальні диференційні елементи. На практиці застосовуються реальна диференційна (інерційно-диференційна) ланка, яка має передатну функцію вигляду $W_д(p)=\dfrac{T_д p}{T'_д p+1}$, а також реальна форсувальна (інерційно-форсувальна) ланка з передатною функцією $W_{пд}(p)=\dfrac{T_д p+1}{T'_д p+1}$. Властивості зазначених реальних ланок будуть тим ближчими до ідеальних, чим менша стала часу $T'_д$ у порівнянні зі сталою диференціювання $T_д$. У практичних застосуваннях можна використовувати співвідношення $T'_д=(0,05...0,01)T_д$.

Розглянуті вище приклади показують, що, на відміну від введення в систему ланок інтегрального типу, які зводять до нуля перші коефіцієнти помилок, використання ланок диференційного типу впливає не на перші, а на наступні коефіцієнти. Звідси можна зробити висновок, що для найбільш ефективного зменшення сумарної помилки в САК слід суміщати використання ізодромних та форсувальних ланок.

Переваги регулювання за похідними: 1) висока швидкодія; 2) можливість зменшення динамічних складових помилки систем.

Недоліки диференційних законів керування такі: 1) не можна усунути статичну помилку; 2) не забезпечується повне компенсування складників помилки, оскільки ідеальне диференціювання практично неможливе.

4.7 Удосконалені закони керування та регулятори

Зважаючи на те, що розглянуті базові закони регулювання у багатьох випадках не можуть забезпечити необхідну статичну і динамічну точність, на практиці набули поширення удосконалені закони керування і відповідні цим законам регулятори. Удосконалені регулятори отримуються шляхом комбінування елементарних базових регуляторів. Розглянемо їх математичний опис та основні властивості.

Пропорційно-інтегральний закон керування (ПІ-регулятори). Пропорційно-інтегральний закон керування описується залежністю

$$u = K_{\text{і}} \int_0^t x dt + K_{\text{п}} x. \tag{4.42}$$

В операторній формі

$$u = K_{\text{і}} \frac{1}{p} x + K_{\text{п}} x. \tag{4.43}$$

В системах з ПІ-регулятором завдяки інтегральній компоненті забезпечується астатизм (усувається статична помилка), а завдяки пропорційній компоненті поліпшується швидкодія системи. Якщо продиференціювати обидві частини рівняння (4.43), то з виразу

$$pu = K_{\text{і}} x + K_{\text{п}} px$$

видно, що ПІ-регулятор забезпечує швидкість зміни вхідної величини об'єкта, пропорційну швидкості зміни величини на виході об'єкта. Це сприяє поліпшенню динамічних властивостей САК.

Вище були зазначені переваги ПІ-регулятора, а недоліком є неможливість оперативного компенсування швидкісних помилок.

Пропорційно-диференційний закон керування (ПД-регулятори). Пропорційно-диференційний закон керування записується як

$$u = K_{\text{п}} x + K_{\text{д}} p x\,. \tag{4.44}$$

Як видно з (4.44), ПД-регулятор оперативно реагує не лише на помилку, але і на швидкість її зміни. Якщо $px > 0$ то дія регулятора зростає, а при $px < 0$ – спадає. Це сприяє демпфуванню коливань, що виникають у системі через інерційність об'єкта. Особливістю ПД-регулятора є можливість мати значний сигнал керування u навіть при незначній помилці x, оскільки при малих x величина px може бути вельми значною.

Зазначені властивості складають <u>переваги</u> ПД-регулятора. А його <u>недоліком</u> є неможливість повного усунення статичної помилки.

Пропорційно-інтегрально-диференційний закон керування (ПІД-регулятори). Даний закон керування має пропорційний, інтегральний і диференційний складники. В операторній формі він запишеться у вигляді

$$u = K_{\text{п}} x + K_{\text{і}} \frac{1}{p} x + K_{\text{д}} p x\,. \tag{4.45}$$

ПІД-регулятори є найскладнішими серед розглянутих регуляторів. Проте вони об'єднують в собі їх <u>переваги</u>, забезпечуючи астатизм системи, оперативне реагування на помилку та її похідну.

Крім розглянутих вище законів керування застосовуються і складніші закони, у тому числі, нелінійні, адаптивні, оптимальні, нечіткі тощо.

4.8 Точність САК в усталених динамічних режимах роботи

<u>4.8.1 Режим зміни зовнішньої дії з постійною швидкістю</u>

Для досліджень використаємо САК, схема якої зображена на рис. 4.27. У системі ланки 1 та 2 відповідають регулятору, а ланка 3 – об’єкту керування. Нехай ланки 1 та 3 матимуть передатні функції без нульових полюсів.

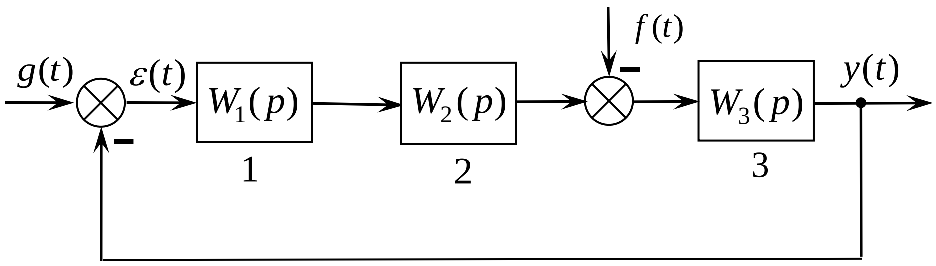


Рис. 4.27. Структурна схема САК для аналізу усталених динамічних режимів

Наприклад, будуть аперіодичними ланками 1-го порядку. Передатна функція ланки 2 буде змінюватися у процесі дослідження.

Розглянемо роботу САК при зміні зовнішньої дії (задавальної g або збурювальної f) за лінійним законом (4.15). При лінійному завданні $g = \mathrm{v}t$ з швидкістю $\mathrm{v} = const$ похідна від завдання $dg/dt = \mathrm{v}$ або, в операторній формі, $pg = \mathrm{v}$. Звідси $g = \mathrm{v}/p$.

Помилка системи керування $\varepsilon = g - y$ пов'язана із завданням передатною функцією за помилкою

$$W_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(t)}{g(t)} = \frac{1}{1+W(p)},$$

де $W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ – передатна функція розімкнутої системи. Нижче при дослідженні усталених динамічних процесів в САК будемо визначати усталену помилку системи $\varepsilon_{\text{уст}} = \varepsilon(t)\big|_{t\to\infty}$, виходячи із умови $t \to \infty$ $(p \to 0)$.

Ланку 2 спочатку вважатимемо пропорційною $W_2(p) = 1$. Приймемо, що збурення відсутнє $f(t) = 0$. В разі лінійного завдання $g = \mathrm{v}/p$ значення усталеної помилки можна отримати за виразом

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \left[\frac{1}{1+W(p)} g(p)\right]_{p=0} = \left[\frac{1}{1+K_\Sigma} \frac{\mathrm{v}}{p}\right]_{p=0} = \infty,$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_2(0)W_3(0)$ – коефіцієнт передачі розімкнутої САК. Отже в статичній системі при зміні завдання з постійною швидкістю помилка безперервно зростає. Щоб помилка не зростала, необхідно в дану систему ввести астатизм 1-го порядку за завданням.

Зараз нехай ланка 2 буде не пропорційною, а інтегральною – $W_2(p)=K_\text{i}/p$. В цьому разі помилка при $t\to\infty$ $(p\to 0)$ матиме значення

$$\varepsilon_\text{уст}=\left[\frac{1}{1+W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_\text{i}}{p}}\frac{\text{v}}{p}\right]_{p=0}=\left[\frac{1}{p+K_\Sigma}\text{v}\right]_{p=0}=\frac{\text{v}}{K_\Sigma}=const\,, \quad (4.46)$$

де $K_\Sigma=W_1(0)W_3(0)K_\text{i}$. Отже усталена помилка набула скінченного значення.

Відношення швидкості до усталеної помилки системи при зміні завдання з постійною швидкістю називається <u>добротністю за швидкістю щодо завдання</u> $K_\text{v}^g=\text{v}/\varepsilon_\text{уст}$**.**

Фізичний сенс поняття "добротність за швидкістю" стосовно деякої зовнішньої дії полягає в тому, що вона (добротність) дорівнює швидкості лінійно змінюваної зовнішньої дії за якої усталена помилка системи рівна одиниці. Тобто $K_\text{v}^g=\text{v}$ при $\varepsilon_\text{уст}=1$.

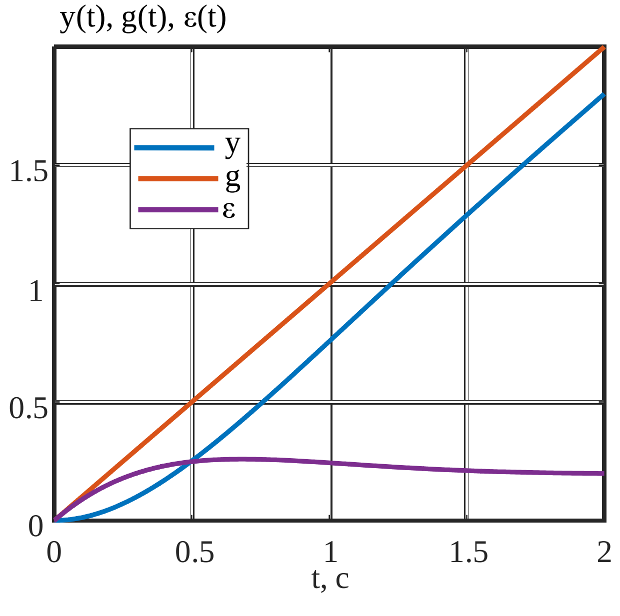
Із (4.46) можна побачити, що добротність за швидкістю щодо завдання в системі з астатизмом 1-го порядку за завданням дорівнює коефіцієнту передачі цієї системи в розімкненому стані $K_\text{v}^g=K_\Sigma$.

На рис. 4.28,а показано процес відпрацювання лінійного завдання в системі з астатизмом 1-го порядку за завданням. Як видно з цього рисунка, після закінчення перехідного процесу помилка системи набуває постійного значення $\varepsilon_\text{уст}=const\neq 0$.

Дослідимо роботу САК у випадку лінійного збурення $f=\text{v}t$. У цьому разі похідна від збурення $df/dt=\text{v=const}$ або, в операторній формі, $pf=\text{v}$. Отже $f=\text{v}/p$. Приймемо, що завдання є нульовим $g(t)=0$. Ланка 2 спочатку нехай буде пропорційною $W_2(p)=1$.

Помилка системи за збуренням визначиться як

$$\varepsilon(t)=-y(t)=W_f(p)f(t)\,, \quad (4.47)$$



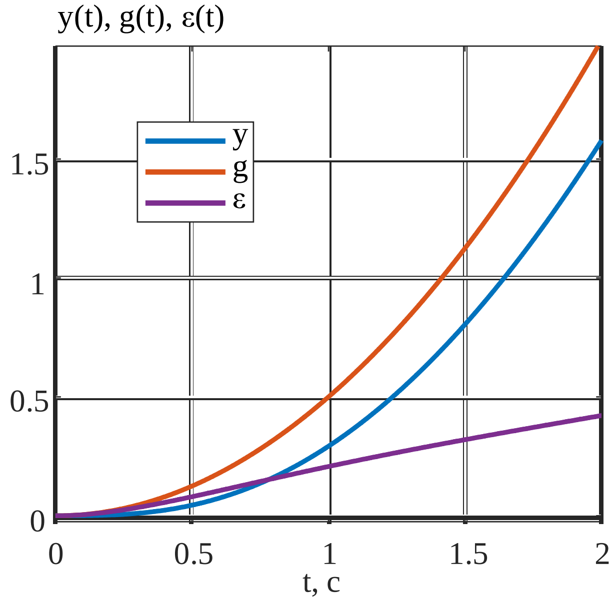


Рис. 4.28. Реакція системи з астатизмом 1-го порядку на завдання: а – лінійне, б – квадратичне

де $W_f(p) = \dfrac{-W_3(p)}{1+W(p)}$ – передатна функція САК за збуренням. Виходячи з (4.47), в разі лінійного збурення $f = \mathrm{v}/p$ при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ помилка матиме значення

$$\varepsilon_{\text{уст}} = -\left[W_f(p)f(p)\right]_{p=0} = \left[\frac{K_o}{1+K_\Sigma}\frac{\mathrm{v}}{p}\right]_{p=0} = \infty .$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_2(0)W_3(0)$, $K_o = W_3(0)$ – коефіцієнт передачі об'єкта за збуренням. Отже в статичній системі при зміні збурення з постійною швидкістю значення помилки невпинно збільшується. Щоб помилка не зростала необхідно ввести в систему астатизм за збуренням.

Тепер нехай ланка 2 буде інтегральною з передатною функцією $W_2(p) = K_{\text{i}}/p$. В цьому разі усталена помилка

$$\varepsilon_{\text{уст}} = -\left[\frac{-W_3(p)}{1+W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_{\text{i}}}{p}}\frac{\mathrm{v}}{p}\right]_{p=0} = \left[\frac{K_o\mathrm{v}}{p+K_\Sigma}\right]_{p=0} = \frac{K_o\mathrm{v}}{K_\Sigma} = const , \quad (4.48)$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_3(0)K_\text{i}$. Отже значення усталеної помилки стало скінченним.

Відношення швидкості до усталеної помилки системи при зміні збурення з постійною швидкістю називається <u>добротністю за швидкістю щодо збурення</u> $K_\text{v}^f = \text{v}/\varepsilon_\text{уст}$.

На основі (4.48), можна зауважити, що добротність за швидкістю щодо збурення в системі з астатизмом 1-го порядку за збуренням дорівнює відношенню коефіцієнта передачі розімкненої системи до коефіцієнта передачі об'єкта за збуренням $K_\text{v}^f = K_\Sigma / K_o$, або, що те саме, добутку коефіцієнтів передачі ланок, розташованих у системі до місця прикладання збурення $K_\text{v}^f = W_1(0)K_\text{i}$.

<u>4.8.2 Режим зміни зовнішньої дії з постійним прискоренням</u>

Розглянемо роботу САК (рис. 4.27) при зміні зовнішньої дії за квадратичним законом (4.16). При квадратичному завданні $g(t) = at^2/2$ з прискоренням $a = const$ друга похідна від завдання $d^2g/dt^2 = a$. В операторній формі $p^2 g = a$, звідси $g = a/p^2$.

Приймемо, що збурення відсутнє $f(t) = 0$. Якщо система статична, то є очевидним, що за квадратичного завдання усталена помилка нескінченно зростатиме, як у розглянутому вище випадку лінійного завдання. Ланка 2 спочатку нехай буде інтегральною $W_2(p) = K_\text{i}/p$.

В разі квадратичного завдання $g = a/p^2$ помилку при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ можна обчислити як

$$\varepsilon_\text{уст} = \left[\frac{1}{1 + W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_\text{i}}{p}} \frac{a}{p^2} \right]_{p=0} = \left[\frac{1}{p + K_\Sigma} \frac{a}{p} \right]_{p=0} = \infty,$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_3(0)K_\text{і}$. Отже в системі з астатизмом 1-го порядку при квадратичному завданні помилка САК безперервно зростає, як це показано на рис. 4.28,б. Щоб цього зростання не було слід підвищити порядок астатизму до $\nu = 2$.

Тепер ланку 2 вважатимемо еквівалентною послідовному з'єднанню інтегральної та ізодромної ланок $W_2(p) = \dfrac{K_\text{і}}{p}\dfrac{p + K'_\text{і}}{p}$. В разі лінійного завдання $g = \text{v}/p$ усталена помилка САК матиме значення

$$\varepsilon_\text{уст} = \left[\frac{1}{1 + W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_\text{і}(p + K'_\text{і})}{p^2}}\frac{\text{v}}{p}\right]_{p=0} = \left[\frac{\text{v}p}{p^2 + K_\Sigma}\right]_{p=0} = 0, \qquad (4.49)$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_3(0)K_\text{і}K'_\text{і}$, а у випадку квадратичного завдання $g = a/p^2$ помилка стане постійною величиною відмінною від нуля

$$\varepsilon_\text{уст} = \left[\frac{1}{1 + W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_\text{і}(p + K'_\text{і})}{p^2}}\frac{a}{p^2}\right]_{p=0} = \left[\frac{a}{p^2 + K_\Sigma}\right]_{p=0} = \frac{a}{K_\Sigma} = const\,.(4.50)$$

Відношення прискорення до усталеної помилки системи при зміні завдання з постійним прискоренням називається <u>добротністю за прискоренням щодо завдання</u> $K_a^g = a/\varepsilon_\text{уст}$.

Фізичний сенс поняття "добротність за прискоренням" стосовно деякої зовнішньої дії полягає в тому, що вона (добротність) дорівнює прискоренню зміни зовнішньої дії за якого усталена помилка системи рівна одиниці, тобто $K_a^g = a$ при $\varepsilon_\text{уст} = 1$.

Виходячи із (4.50) можна зазначити, що добротність за прискоренням щодо завдання в системі з астатизмом 1-го порядку за завданням дорівнює коефіцієнту передачі цієї системи в розімкненому стані $K_a^g = K_\Sigma$.

На рис. 4.29,а зображено процес відпрацювання лінійного завдання в системі з астатизмом 2-го порядку за завданням. Як бачимо, після закінчення перехідного процесу помилка системи стає рівною нулю $\varepsilon_{\text{уст}} = 0$. А при квадратичному завданні, згідно з рис. 4.29,б, усталена помилка набуває скінченного значення $\varepsilon_{\text{уст}} = const \neq 0$.

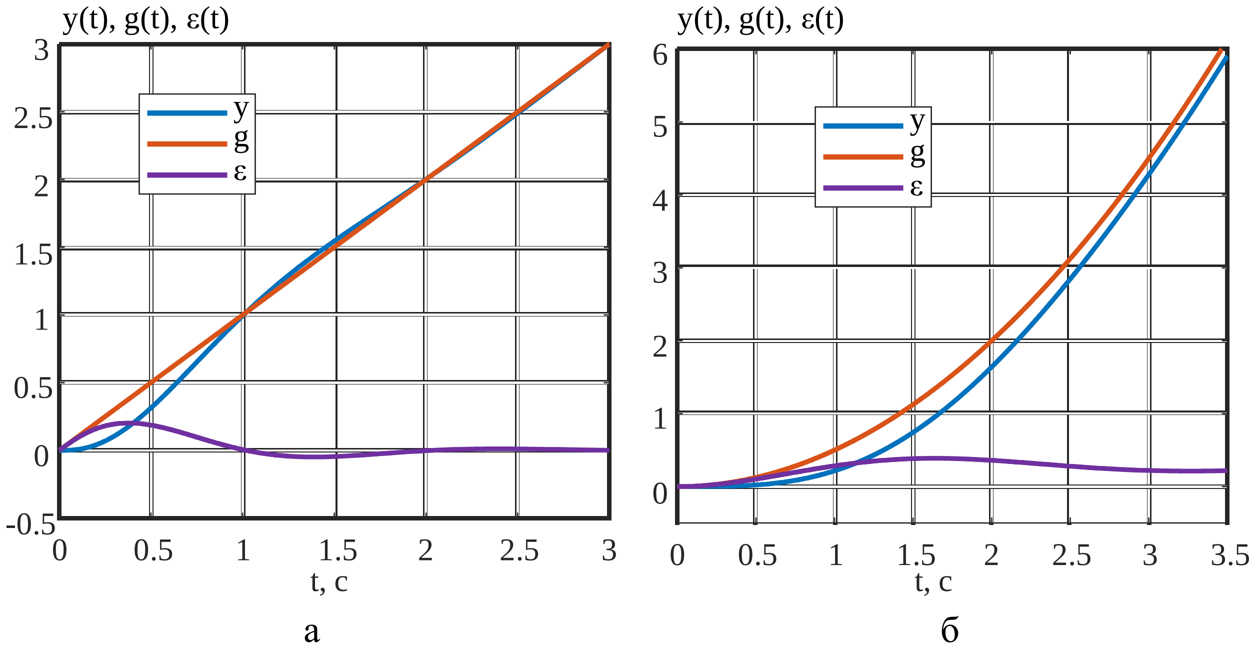


Рис. 4.29. Реакція системи з астатизмом 2-го порядку на завдання: а – лінійне, б – квадратичне

Дослідимо роботу САК у випадку квадратичного збурення $f = at^2/2$. Похідна від збурення $d^2 f/dt^2 = a$ або, в операторній формі, $p^2 f = a$. Звідси $f = a/p^2$. Приймемо, що завдання нульове $g(t) = 0$. Ланка 2 спочатку нехай буде інтегральною $W_2(p) = K_\text{i}/p$.

Враховуючи (4.47), в разі зміни збурення за квадратичним законом $f = a/p^2$ помилку САК при $t \to \infty$ $(p \to 0)$ можна обчислити як

$$\varepsilon_{\text{уст}} = -\left[\frac{-W_3(p)}{1 + W_1(p) W_3(p) \dfrac{K_\text{i}}{p}} \frac{a}{p^2} \right]_{p=0} = \left[\frac{K_o}{p + K_\Sigma} \frac{a}{p} \right]_{p=0} = \infty ,$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_3(0)K_\text{і}$. Отже в системі з астатизмом за збуренням порядку $\nu = 1$ при зміні збурення з постійним прискоренням помилка системи безупинно зростає. Щоб зростання помилки не було треба підвищити в системі порядок астатизму за збуренням до $\nu = 2$.

Тепер ланку 2 вважатимемо тотожною послідовному з'єднанню інтегральної та ізодромної ланок $W_2(p) = \dfrac{K_\text{і}}{p}\dfrac{p+K'_\text{і}}{p}$. У цьому разі усталена помилка системи

$$\varepsilon_\text{уст} = -\left[\frac{-W_3(p)}{1+W_1(p)W_3(p)\dfrac{K_\text{і}(p+K'_\text{і})}{p^2}}\frac{a}{p^2}\right]_{p=0} = \left[\frac{K_o a}{p^2 + K_\Sigma}\right]_{p=0} = \frac{K_o}{K_\Sigma}a = const, \quad (4.51)$$

де $K_\Sigma = W_1(0)W_3(0)K_\text{і}K'_\text{і}$. Отже значення усталеної помилки стало скінченним.

Відношення прискорення до усталеної помилки системи при зміні збурення з постійним прискоренням називається <u>добротністю за прискоренням щодо збурення</u> $K_a^f = a/\varepsilon_\text{уст}$.

Згідно з (4.51) добротність за прискоренням щодо збурення в системі з астатизмом 2-го порядку за збуренням дорівнює відношенню коефіцієнта передачі розімкненої системи до коефіцієнта передачі об'єкта за збуренням $K_a^f = K_\Sigma / K_o$, або, що те саме, добутку коефіцієнтів передачі ланок, розташованих у схемі до місця прикладання збурення $K_a^f = W_1(0)K_\text{і}K'_\text{і}$.

Зазначимо, що коли у системі добротність за прискоренням щодо деякої зовнішньої дії має скінченне значення, то добротність за швидкістю щодо цієї дії буде нескінченно великою і, відповідно, усталена помилка системи при лінійно змінюваній зовнішній дії дорівнюватиме нулю.

За аналогією із викладеним вище можна дослідити роботу САК при кубічному законі зміни зовнішніх дій (4.17). В цьому разі для отримання постійної усталеної помилки система повинна мати астатизм 3-го порядку, а повне усунення помилки буде при збільшенні порядку астатизму САК до $\nu = 4$.

Очевидно, що ***добротність за ривком щодо завдання*** в системі з астатизмом 3-го порядку за завданням дорівнюватиме коефіцієнту передачі розімкненої системи, а ***добротність за ривком щодо збурення*** в системі з астатизмом 3-го порядку за збуренням дорівнюватиме добутку коефіцієнтів передачі ланок, розташованих у схемі до місця прикладання збурення.

Варто зауважити, що розглянуті точнісні показники САК – добротності за швидкістю, за прискоренням і за ривком щодо збурення чи завдання пов’язані обернено пропорційною залежністю з коефіцієнтами помилок у (4.34) чи (4.35). Зокрема, зазначені добротності відповідно дорівнюють $1/C_1$, $2/C_2$, $6/C_3$.

4.8.3 Визначення порядку астатизму замкненої САК за передатними функціями

Розглянемо питання визначення порядку астатизму замкненої системи за її передатними функціями. Вважатимемо, що САК має структуру, зображену на рис. 4.27. Нехай ланка 1 відповідає регулятору, а ланки 2 та 3 – об’єкту керування. Якщо збурення прикладається на вході об’єкта, то $W_2(p)=1$. Дослідимо варіанти, коли задані ПФ розімкненої і замкненої САК.

Варіант 1 – задані передатна функція розімкненої системи $W(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ та передатна функція об’єкта за збуренням $W_o^f(p)=-W_3(p)$.

Передатна функція розімкненої системи в загальному вигляді запишеться як

$$W(p)=\frac{l_0 p^m + l_1 p^{m-1} + \ldots + l_{m-1} p + l_m}{q_0 p^n + q_1 p^{n-1} + \ldots + q_{n-1} p + q_n}, \qquad (m \le n).$$

Ця передатна функція матиме нульові полюси кількістю $n_g = 0,\ldots,k$ за наступних умов:

$n_g = 0\colon \quad q_n \ne 0;$

$n_g = 1: \quad q_n = 0, q_{n-1} \neq 0;$

$n_g = 2: \quad q_n = 0, q_{n-1} = 0, q_{n-2} \neq 0;$

....

$n_g = k: \quad q_n = 0, q_{n-1} = 0, ..., q_{n-k+1} = 0; q_{n-k} \neq 0, \qquad (k \leq n).$

У передатній функції об’єкта за збуренням

$$W_o^f(p) = \frac{c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + ... + c_{m-1} p + c_m}{h_0 p^n + h_1 p^{n-1} + ... + h_{n-1} p + h_n}, \qquad (m \leq n)$$

існуватимуть нульові полюси кількістю $n_f = 0, ..., k$ за таких умов:

$n_f = 0: \quad h_n \neq 0;$

$n_f = 1: \quad h_n = 0, h_{n-1} \neq 0;$

$n_f = 2: \quad h_n = 0, h_{n-1} = 0, h_{n-2} \neq 0;$

....

$n_f = k: \quad h_n = 0, h_{n-1} = 0, ..., h_{n-k+1} = 0; h_{n-k} \neq 0, \qquad (k \leq n).$

У замкненій САК, яка в розімкненому стані має записані вище $W(p)$ ***та*** $W_o^f(p)$***, існуватиме астатизм за завданням порядку*** $\nu = n_g$ ***та астатизм за збуренням порядку*** $\nu = n_g - n_f$***, де*** n_g ***– кількість нульових полюсів*** $W(p)$***,*** n_f ***– кількість нульових полюсів*** $W_o^f(p)$***,*** $n_g \geq n_f$***.*** Тобто порядок астатизму замкнутої системи за завданням буде рівним кількості нульових полюсів передатної функції розімкнутої САК, а за збуренням – кількості нульових полюсів тих ланок, що розташовані у контурі перед місцем прикладання збурення.

Треба зазначити, що наведене правило визначення порядку астатизму замкненої САК за ПФ розімкненої системи вірне лише для одиничного зворотного зв’язку. Це пояснюється тим, що за відсутності нульових полюсів в $W(p)$ астатизм замкненої САК можна отримати завдяки неодиничному зворотному зв’язку з відповідними параметрами (див. п. 4.5.4 і приклад 4.7). Тому, якщо зворотний зв'язок неодиничний, то порядок астатизму системи слід визначати за її ПФ у замкненому стані на основі вказаних нижче умов.

Варіант 2 – задані передатні функції замкненої САК за завданням та за збуренням. Нехай передатна функція замкненої системи за завданням

$$W_g(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+...+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n}, \qquad (m\le n). \qquad (4.52)$$

Передатну функцію замкненої САК за помилкою запишемо у вигляді

$$W_\varepsilon(p)=1-W_g(p)=\frac{(a_{n-m}-b_0)p^m+(a_{n-m+1}-b_1)p^{m-1}+...+(a_{n-1}-b_{m-1})p+(a_n-b_m)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n}.$$

Значення помилки при $t\to\infty$ $(p\to 0)$ можна обчислити як

$$\varepsilon_{\text{уст}}=\left[W_\varepsilon(p)g(p)\right]_{p=0} \qquad .(4.53)$$

Із цього виразу при постійному завданні $g=g_0=1$ матимемо

$$\varepsilon_{\text{уст}}=(a_n-b_m)/a_n.$$

Отже при $b_m\ne a_n$ усталена помилка не дорівнюватиме нулю, що властиво статичним системам, а для появи астатизму потрібна рівність коефіцієнтів $b_m=a_n$. Зауважимо, що отримане значення помилки дорівнює статизму САК за завданням $(a_n-b_m)/a_n=\delta_{\text{ст}}^g$.

В разі лінійно змінюваного завдання з одиничною швидкістю $g=t$, або, в операторному вигляді, $g=1/p$ із (4.53) за умови $b_m=a_n$ дістанемо

$$\varepsilon_{\text{уст}}=\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{a_n}.$$

Звідси бачимо, що при $b_{m-1}\ne a_{n-1}$ усталена помилка системи матиме скінченне значення. А це засвідчує наявність в системі астатизму 1-го порядку за завданням. Замітимо, що одержане значення помилки є оберненою до добротності САК за швидкістю величиною, тобто $(a_{n-1}-b_{m-1})/a_n=1/K_{\text{v}}^g$.

Аналогічні викладки нескладно зробити для квадратичного та кубічного законів зміни завдання. Узагальнення отриманих результатів показує, що

умови наявності астатизму за завданням порядку від $\nu = 0$ ***(статична система) до*** $\nu = k$ ***у системі з передатною функцією (4.52) наступні***:

$\nu = 0: \quad b_m \neq a_n;$

$\nu = 1: \quad b_m = a_n, b_{m-1} \neq a_{n-1};$

$\nu = 2: \quad b_m = a_n, b_{m-1} = a_{n-1}, b_{m-2} \neq a_{n-2};$

………………………………………………

$\nu = k: \quad b_m = a_n, b_{m-1} = a_{n-1}, ..., b_{m-k+1} = a_{n-k+1}; b_{m-k} \neq a_{n-k}, \qquad (k \leq m).$

Якщо відома передатна функція замкненої системи за збуренням

$$W_f(p) = \frac{d_0 p^m + d_1 p^{m-1} + ... + d_{m-1} p + d_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n}, \qquad (m \leq n).$$

то ***умови існування у САК астатизму за збуренням порядку від*** $\nu = 0$ ***до*** $\nu = k$ ***такі***:

$\nu = 0: \quad d_m \neq 0;$

$\nu = 1: \quad d_m = 0, d_{m-1} \neq 0;$

$\nu = 2: \quad d_m = 0, d_{m-1} = 0, d_{m-2} \neq 0;$

………………………………………………

$\nu = k: \quad d_m = 0, d_{m-1} = 0, ..., d_{m-k+1} = 0, d_{m-k} \neq 0, \qquad (k \leq m).$

Приклад 4.7. У статичній системі, структура якої наведена на рис. 4.21, отримати астатизм 2-го порядку за завданням за допомогою зворотного зв'язку. Передатні функції ланок $W_1(p) = \dfrac{K_1}{T_1 p + 1}$; $W_2(p) = K_2$.

Розв'язання. В колі зворотного зв'язку помістимо аперіодичну ланку 1-го порядку з передатною функцією $W_{зз}(p) = \dfrac{K_{зз}}{T_{зз} p + 1}$. У цьому разі передатна функція замкнутої системи матиме вигляд

$$W_g(p) = \frac{W_2(p) W_1(p)}{1 + W_2(p) W_1(p) W_{зз}(p)} = \frac{K_2 K_1 T_{зз} p + K_2 K_1}{T_1 T_{зз} p^2 + (T_1 + T_{зз}) p + 1 + K_2 K_1 K_{зз}}.$$

Умовами астатизму 2-го порядку є рівність у поліномах чисельника та знаменника ПФ замкнутої системи коефіцієнтів при нульовому та першому степенях оператора p. Звідси запишемо рівняння

$$K_2 K_1 = 1 + K_2 K_1 K_{зз};$$

$$K_2 K_1 T_{зз} = T_1 + T_{зз}.$$

Із першого рівняння одержимо коефіцієнт передачі $K_{зз} = \dfrac{K_2 K_1 - 1}{K_2 K_1}$, а з другого – сталу часу $T_{зз} = \dfrac{T_1}{K_2 K_1 - 1}$ ланки зворотного зв’язку.

Таким чином, внаслідок застосування у зворотному зв’язку статичної САК аперіодичної ланки 1-го порядку з відповідними значеннями параметрів, система стала астатичною за завданням з порядком астатизму $\nu = 2$.

4.9 Синтез САК методом логарифмічних амплітудно-частотних характеристик

Одним з найефективніших інженерних методів синтезу автоматичних систем керування є класичний метод, в основу якого покладено використання ЛАХ розімкнутої системи. Ідея методу ґрунтується на тому, що для стійких мінімально-фазових систем існує однозначний зв'язок між перехідною характеристикою замкнутої системи і виглядом ЛАХ відповідної розімкнутої системи. Виходячи із бажаного вигляду перехідного процесу, будують ЛАХ, яка відповідає такому процесу (бажану ЛАХ). Далі, маючи бажану ЛАХ та ЛАХ вихідної розімкнутої системи, отримують ЛАХ коригувального пристрою, а за нею і його передатну функцію.

Будь-яка САК з електроприводом складається з незмінної частини, до якої належить виробничий або виконавчий механізм, електродвигун, силовий керований перетворювач напруги, а також елементи головного зворотного зв'язку та порівняння сигналів. Виробничий механізм вважається відомим при проектуванні САК, двигун і перетворювач вибирають, виходячи з технологічних характеристик виробничого механізму. Природно, що ці елементи не підлягають зміні при коригуванні динамічних властивостей САК. Незмінними зазвичай також вважаються елементи, що забезпечують потрібну точність роботи системи в усталеному режимі – підсилювач, а в астатичній системі – інтегрувальний елемент. Елементи САК, що не змінюються, визначають ЛАХ вихідної (не скоригованої) системи.

4.9.1 Принципи побудови бажаної ЛАХ

Бажану ЛАХ, яка визначає потрібну якість САК, умовно поділяють на три частини: низькочастотну $L_{\text{н.ч}}(\omega)$, середньочастотну $L_{\text{с.ч}}(\omega)$ і високочастотну $L_{\text{в.ч}}(\omega)$. Можлива бажана ЛАХ показана на рис. 4.30.

До низькочастотної частини ЛАХ належить ділянка характеристики, нахил якої не змінюється при $\omega \to 0$. Вона проходить через точку з

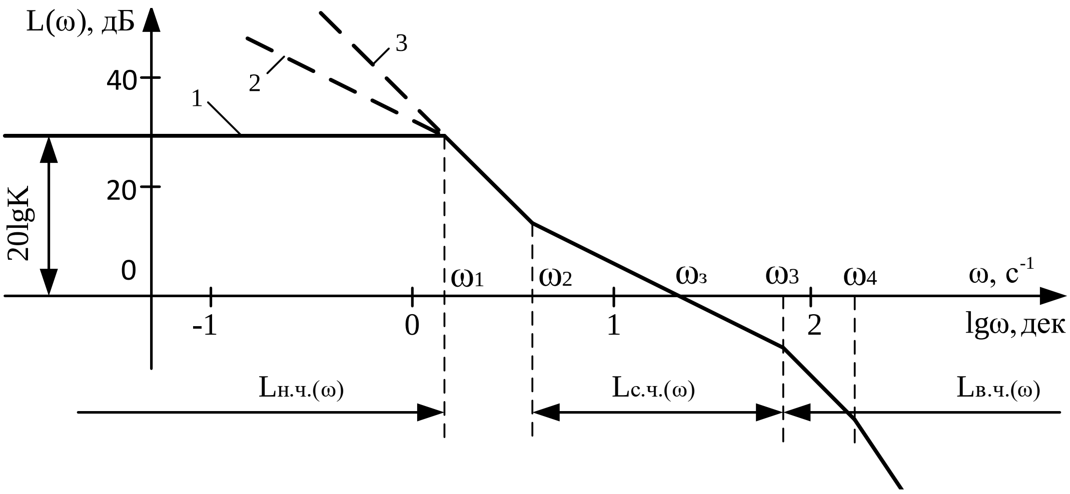


Рис. 4.30. Бажана ЛАХ та її частини

координатами $L(\omega) = 20\,lg\,K$, $lg\,\omega = 0$, де K – коефіцієнт передачі розімкнутої системи, і має нахил 0 дБ/дек для статичних систем, –20 дБ/дек – для астатичних систем з 1-м порядком астатизму, –40 дБ/дек – для астатичних систем з 2-м порядком астатизму і т. д. На рис. 4.30 цим варіантам ЛАХ відповідають низькочастотні ділянки 1, 2 та 3 відповідно.

Низькочастотна частина ЛАХ $L_{\text{н.ч}}(\omega)$ визначається коефіцієнтом передачі розімкнутої системи K і порядком астатизму, отже, вона характеризує точність роботи системи в усталених режимах. Якщо до незмінюваної частини системи належать елементи, що забезпечують потрібну точність роботи САК в усталеному режимі, то низькочастотні ділянки бажаної ЛАХ і ЛАХ вихідної системи збігаються.

До ***середньочастотної частини ЛАХ*** $L_{\text{с.ч}}(\omega)$ належить ділянка з однаковим нахилом, що проходить через частоту зрізу $\omega_з$. Ця частина ЛАХ є дуже важливою, бо переважно вона визначає якість перехідних процесів. Основними параметрами, які характеризують середньочастотну частину, є її нахил і значення частоти зрізу. Для задовільної якості перехідних процесів замкнутої системи необхідно, щоб нахил ЛАХ на частоті зрізу дорівнював $-20\,\text{дБ/дек}$. Якщо нахил ЛАХ на частоті зрізу становить $-40\,\text{дБ/дек}$, то перехідний процес має велике перерегулювання, а при нахилі $-60\,\text{дБ/дек}$ система, як правило, нестійка. Частота зрізу $\omega_з$ визначає швидкодію САК. Час регулювання зменшується, а швидкодія системи зростає при збільшенні $\omega_з$.

Високочастотна частина ЛАХ $L_{\text{в.ч}}(\omega)$ знаходиться у зоні від'ємних децибелів, тому майже не позначається на якості перехідного процесу і впливає лише на його початок. Власне кажучи, краще якомога збільшувати нахил асимптот високочастотної частини, бо це зменшує вплив високочастотних завад. Часто високочастотну частину бажаної ЛАХ проводять паралельно до ЛАХ вихідної системи, що дозволяє спростити коригувальний пристрій.

Для побудови бажаної ЛАХ, виходячи із заданих вимог до якості керування, використовуються різні методи [1]. На практиці часто використовується спрощений метод побудови бажаної ЛАХ, який розглянемо нижче.

4.9.2 Спрощена побудова бажаної ЛАХ

Для побудови $L_{\text{б}}(\omega)$ вихідними показниками є час регулювання t_p та перерегулювання σ перехідного процесу керованої величини замкненої

САК. Частота зрізу бажаної ЛАХ обчислюється за формулою

$$\omega_з \approx \pi k_\sigma / t_p \,, \tag{4.54}$$

де k_σ – коефіцієнт, що визначається за графіком на рис. 4.31,а залежно від перерегулювання.

Через точку $\omega_з$ на осі частот проводиться середньочастотна ділянка бажаної ЛАХ з нахилом -20 дБ/дек. Частоти ω_2 і ω_3, що обмежують середньочастотну ділянку ліворуч і праворуч від $\omega_з$ вибирають, виходячи із таких наближених співвідношень:

$$\omega_2 \approx \omega_з/(2...4); \quad \omega_3 \approx (2...4)\omega_з. \tag{4.55}$$

Для наближеної оцінки показників якості перехідного процесу за бажаною ЛАХ можна використати графіки на рис. 4.31. Перерегулювання σ визначається за графіками на рис. 4.31,б залежно від коефіцієнтів $a_2 = \omega_2/\omega_з$ і $a_3 = \omega_3/\omega_з$, що характеризують середньочастотну частину ЛАХ. Запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ пов'язаний з σ згідно з графіком на рис. 4.31,в.

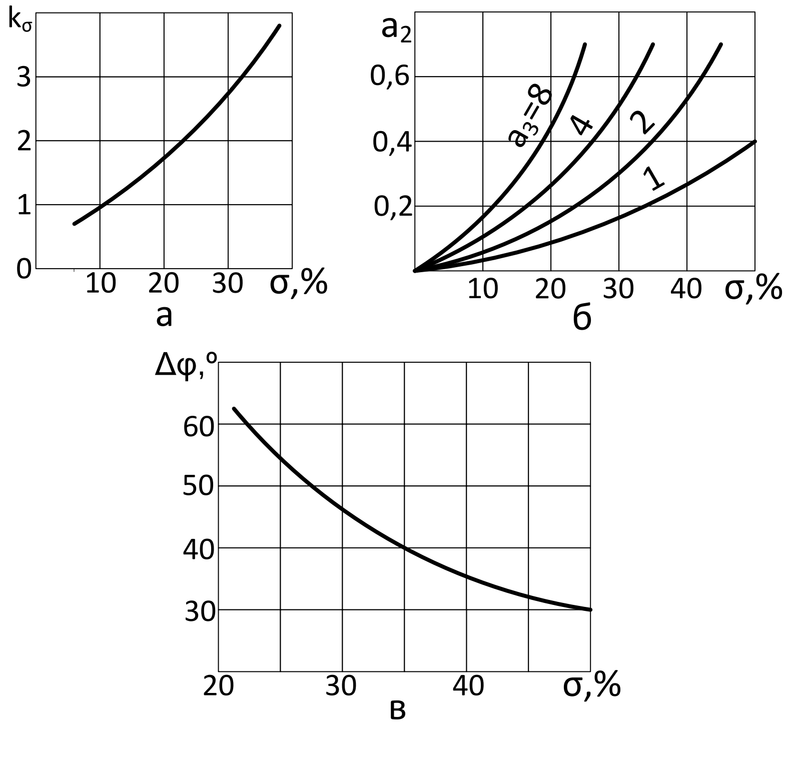


Рис. 4.31. Графіки для побудови бажаної ЛАХ

4.9.3 Синтез послідовної коригувальної ланки. Приклад

Послідовна коригувальна ланка (регулятор) з передатною функцією $W_к(p)$ вводиться в основний контур замкненої системи, структура якої зображена на рис. 4.32. Ця ланка зазвичай реалізується електронним пристроєм на базі одного чи більше операційних підсилювачів, а в деяких простих випадках може бути реалізована і пасивним чотириполюсником. Іншим варіантом реалізації коригувального пристрою є цифровий контролер. За можливості коригувальну ланку слід вводити ближче до входу системи, де сигнали мають найменшу потужність.

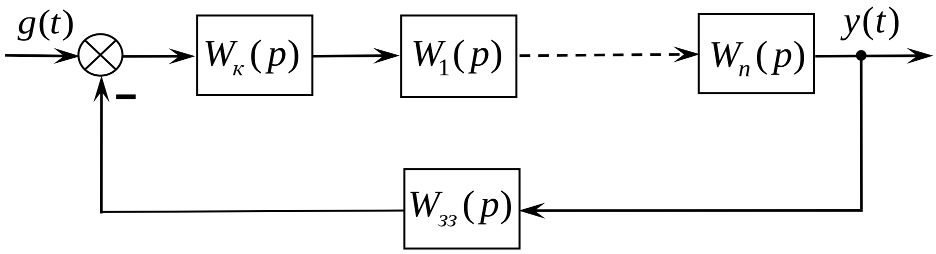


Рис. 4.32. Структурна схема САК з послідовною коригувальною ланкою

Передатна функція вихідної розімкнутої системи

$$W_в(p) = W_1(p)W_2(p)...W_n(p)W_{зз}(p)$$

після введення коригувальної ланки являтиметься бажаною передатною функцією і матиме вигляд

$$W_б(p) = W_к(p)W_1(p)W_2(p)...W_n(p)W_{зз}(p) = W_к(p)W_в(p).$$

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_б(\omega) = L_к(\omega) + L_в(\omega),$$

звідси

$$L_к(\omega) = L_б(\omega) - L_в(\omega). \qquad (4.56)$$

Цей вираз визначає такий порядок синтезу послідовної коригувальної ланки:

1) виходячи із заданої структури системи і параметрів її ланок, будують

ЛАХ вихідної розімкнутої системи $L_в(\omega)$;

2) за заданими показниками якості будують бажану ЛАХ $L_б(\omega)$;

3) згідно з (4.56) визначають ЛАХ коригувальної ланки $L_к(\omega)$, віднімаючи графічно $L_б(\omega) - L_в(\omega)$;

4) за ЛАХ коригувальної ланки $L_к(\omega)$ записують її передатну функцію, далі рисують електричну принципову схему і визначають параметри електронних компонентів коригувального пристрою (або пишуть програмний код для цифрової реалізації коригувальної ланки на мікропроцесорі).

Приклад 4.8. Структурна схема САК, що синтезується, наведена на рис. 4.33. Об'єкт керування, що включає силовий перетворювач напруги,

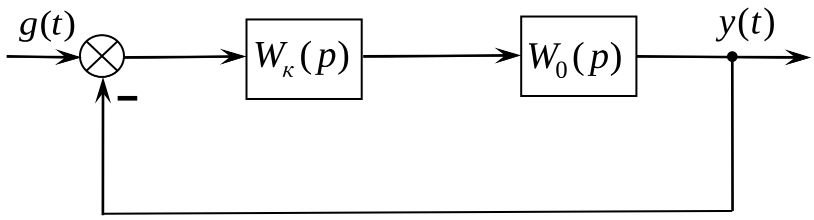


Рис. 4.33. Структурна схема САК (до прикладу 4.7)

електродвигун та виробничий механізм, описується передатною функцією

$$W_0(p) = \frac{K_0}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

де значення параметрів дорівнюють:

$$K_0 = 50\ \text{с}^{-1};\quad T_1 = 0{,}2\,c;\quad T_2 = 0{,}008\,c.$$

Треба визначити передатну функцію $W_к(p)$ послідовного коригувального пристрою з яким замкнена САК забезпечуватиме:

1) потрібну точність роботи в усталених процесах за рахунок наявності 1-го порядку астатизму за завданням і добротності за швидкістю $K_v^g \ge 40\ \text{с}^{-1}$;

2) бажані показники якості перехідних процесів – час регулювання $t_p \le 0{,}3\,c$, перерегулювання $\sigma \le 25\%$.

Розв'язання. Спочатку побудуємо асимптотичну ЛАХ вихідної розімкнутої системи $L_в(\omega) = 20lg|W_0(j\omega)|$. Низькочастотна частина ЛАХ проходить через точку з координатами $lg\,\omega = 0$ дек, $L_в(\omega) = 20lg\,50 = 34$ дБ і має нахил -20 дБ/дек. Частоти спряження асимптот та їх логарифми дорівнюють

$$\omega_1 = \frac{1}{0{,}2} = 5\,c^{-1}; \quad lg\,\omega_1 = 0{,}7\,дек; \quad \omega_4 = \frac{1}{0{,}008} = 125\,c^{-1}; \quad lg\,\omega_4 = 2{,}1\,дек.$$

На частотах $\omega_1 \le \omega < \omega_4$ ЛАХ має нахил -40 дБ/дек, а при $\omega \ge \omega_4$ – -60 дБ/дек. Побудована $L_в(\omega)$ зображена на рис. 4.34.

При побудові бажаної ЛАХ її низькочастотна частина, яка визначає точність САК в усталених режимах, може співпадати з низькочастотною частиною ЛАХ вихідної розімкнутої системи. Це зумовлено наявністю

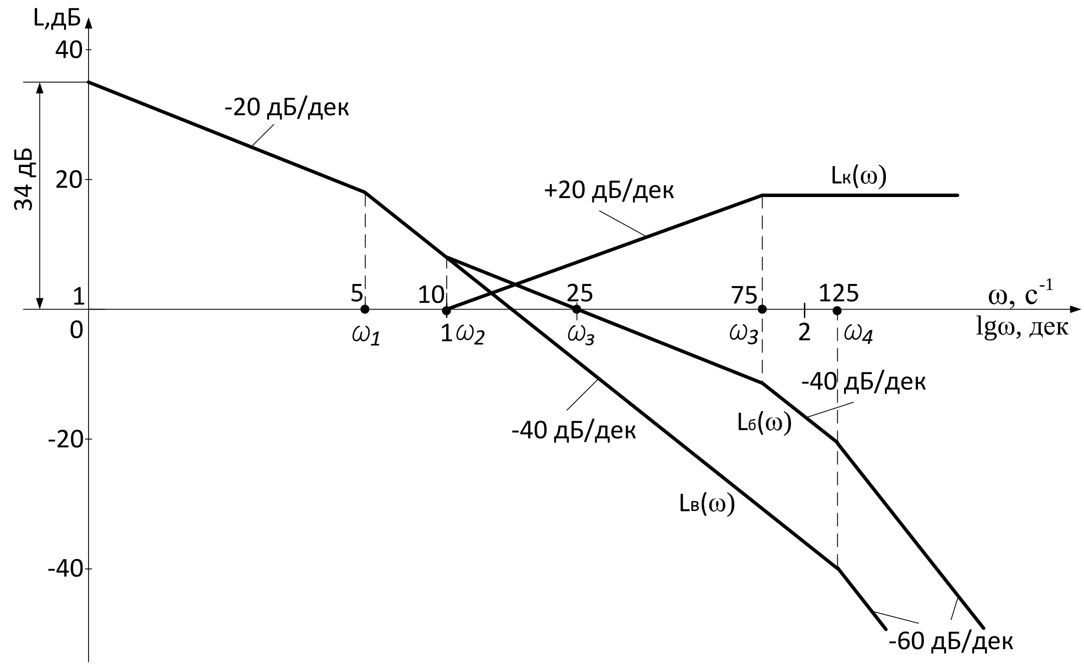


Рис. 4.34. Синтез коригувальної ланки методом ЛАХ

інтегральної ланки в об’єкті керування (нульовий полюс в $W_0(p)$), що надає системі властивість астатизму 1-го порядку за завданням. Крім цього, значення добротності за швидкістю у вихідній системі, яке дорівнює коефіцієнту передачі астатичного об’єкта $K_v^g = K_0 > 40\ c^{-1}$, є достатнім.

Для побудови середньочастотної ділянки бажаної ЛАХ визначимо частоту зрізу за (4.54) як

$$\omega_з \approx \pi k_\sigma / t_p \approx 3.14 \cdot 2.2/0.3 \approx 23\, c^{-1},$$

де коефіцієнт $k_\sigma = 2{,}2$ отриманий за рис. 4.31,а для заданого перерегулювання. Остаточно приймемо значення частоти зрізу $\omega_з = 25\, c^{-1}$. Згідно із викладеними вище принципами побудови бажаної ЛАХ через точку на осі абсцис $lg\,25 = 1{,}4$ дек проведемо середньочастотну ділянку $L_б(\omega)$ з нахилом -20 дБ/дек вліво до перетину з $L_в(\omega)$. Точка перетину знаходиться на частоті $\omega_2 = 10\, c^{-1}$. Оскільки $\omega_2 = \omega_з/2.5$, то перше співвідношення в (4.55) виконується. Вправо від частоти зрізу середньочастотну ділянку $L_б(\omega)$ продовжимо до частоти $\omega_3 = 75\, c^{-1}$. Позаяк $\omega_3 = 3\omega_з$, то друге співвідношення в (4.55) здійснюється. Справа від $lg\,\omega_3 = 1{,}88$ дек побудуємо високочастотну ділянку бажаної ЛАХ таким чином, щоб вона була паралельною до $L_в(\omega)$.

ЛАХ коригувальної ланки $L_к(\omega)$ на рис. 4.34 отримаємо, віднімаючи графічно $L_б(\omega) - L_в(\omega)$. За виглядом $L_к(\omega)$ записуємо передатну функцію

$$W_к(p) = \frac{K_к(\tau_1 p + 1)}{(\tau_2 p + 1)}, \tag{4.57}$$

де значення параметрів дорівнюють

$$K_к = 1; \quad \tau_1 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{10} = 0{,}1\, c; \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{75} = 0{,}0133\, c.$$

Для визначення показників якості синтезованої замкненої САК необхідно побудувати її перехідну характеристику. Це зручно зробити у MATLAB, склавши наступну програму:

```
% Program 4.3
W01=tf([50],[0.008 1]);  W02=tf([1],[0.2 1 0]);
Wk=tf([0.1 1],[0.0133 1]);  W0=W01*W02;
Wz=feedback(W0*Wk,1); [y,t]=step(Wz,0.35);
plot(t,y); grid on, xlabel('t,c'), ylabel('y(t)')
```

Отримана перехідна характеристика замкненої САК зображена на рис. 4.35. Згідно з графіком керованої величини $y(t)$, значення показників

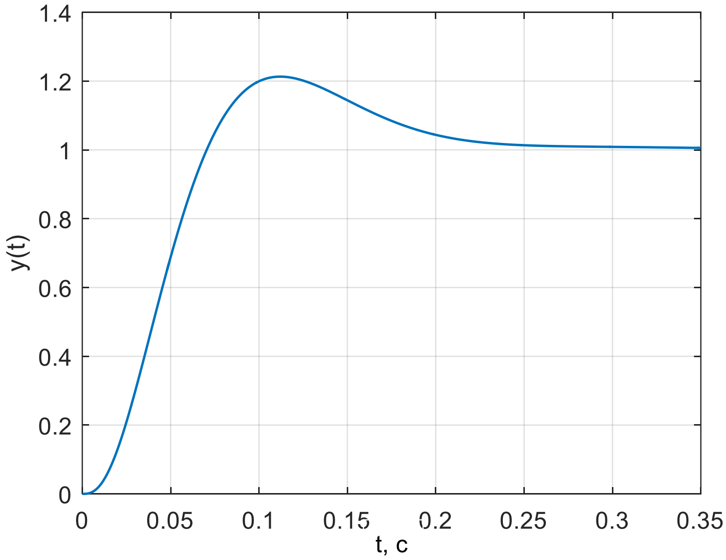


Рис. 4.35. Перехідна характеристика синтезованої системи

якості перехідного процесу є наступними: час регулювання $t_p = 0{,}2\,c$; перерегулювання $\sigma = 21\%$. Оскільки такі показники якості відповідають заданим, то задача синтезу послідовної коригувальної ланки є розв’язаною.

4.9.4 Синтез паралельної коригувальної ланки

Паралельні коригувальні ланки вводяться у вигляді зворотних зв'язків, які охоплюють одну або кілька ланок вихідної системи (рис. 4.36). Термін «паралельна коригувальна ланка» тут не зовсім точний тому, що коригувальна ланка вмикається не паралельно до ланок системи, а утворює зворотний зв'язок. Проте цей термін використовується в книгах з ТАК, тому його вживатимемо і тут.

Передатна функція вихідної розімкнутої системи має вигляд

$$W_в(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_{зз}(p) = W'(p)W''(p),$$

де $W'(p)$ – передатна функція частини системи, що охоплюється паралельною коригувальною ланкою; $W''(p)$ – передатна функція решти розімкнутої системи.

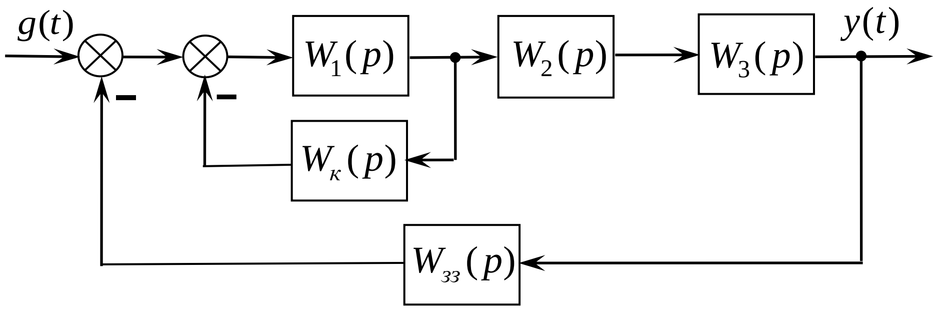


Рис. 4.36. Структурна схема САК з паралельною коригувальною ланкою

Для структурної схеми, зображеною на рис. 4.36, маємо

$$W'(p)=W_1(p); \qquad W''(p)=W_2(p)W_3(p)W_{зз}(p).$$

Після введення коригувальної ланки бажана передатна функція розімкнутої системи має вигляд

$$W_б(p)=\frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_{зз}(p)}{1+W_к(p)W_1(p)}=\frac{W_в(p)}{1+W_к(p)W'(p)}. \tag{4.58}$$

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_б(\omega)=L_в(\omega)-20lg\left|1+W_к(j\omega)W'(j\omega)\right|.$$

Основна складність синтезу паралельної коригувальної ланки зумовлена наявністю одиниці у знаменнику передатної функції (4.58). Для подолання цієї перепони іноді розглядається тільки інтервал частот, у якому

$$\left|W_к(j\omega)W'(j\omega)\right|\gg 1, \tag{4.59}$$

тобто одиницю в знаменнику передатної функції (4.58) взагалі не враховують. Тоді матимемо ЛАХ паралельної коригувальної ланки

$$L_к(\omega)=L_в(\omega)-L'(\omega)-L_б(\omega)=L''(\omega)-L_б(\omega).$$

Проте нерівність (4.59) зазвичай виконується тільки на високих частотах, що призводить до помилок синтезу на низьких частотах.

Слід зазначити, що на сьогодні відомий досить точний метод синтезу, який дозволяє враховувати одиницю в знаменнику передатної функції (4.58). Суть цього методу викладено в [1].

Контрольні запитання та завдання

1. Розкрийте поняття якості САК. Сукупністю яких показників зазвичай характеризується якість САК?

2. У чому полягають умови стійкості лінійних систем?

3. Назвіть основні показники якості перехідних процесів за завданням.

4. Якими бувають перехідні процеси за характером перебігу?

5. Чим відрізняються аперіодичні процеси від монотонних?

6. Які перехідні процеси називаються коливальними?

7. Як визначається час перехідного процесу (час регулювання)?

8. Наведіть графік коливального перехідного процесу і запишіть формули для визначення перерегулювання та ступеня затухання цього процесу.

9. Назвіть основні показники якості перехідних процесів за збуренням.

10. Як визначається час компенсування збурення?

11. Які є додаткові показники якості перехідних процесів за завданням?

12. Назвіть основні показники точності САК в усталених режимах.

13. Який метод аналізу якості САК є прямим, загальним та точним?

14. Які показники якості визначаються загальним розв’язком рівняння динаміки замкнутої САК?

15. Чому в багатьох випадках для оцінювання якості САК достатньо дослідити рівняння вільного руху системи?

16. Чи можуть початкові умови змінити характер перехідного процесу в САК з дійсними коренями характеристичного рівняння?

17. Чи залежить стійкість лінійних САК від початкових умов?

18. Назвіть кореневі показники якості САК. Що вони характеризують та як розраховуються?

19. У чому полягає аналіз якості САК за діаграмами зон параметрів?

20. Яким чином впливає розташування коренів відносно уявної осі комплексної площини на характер перехідних процесів в САК?

21. Яке значення ступеня затухання рекомендується для прийнятної яко-

сті коливального процесу?

22.Що таке кореневий годограф і для чого він застосовується?

23.Які методи оцінювання якості САК називаються інтегральними?

24.Запишіть формулу інтегрального критерію якості, що використовується для монотонних перехідних процесів.

25.Наведіть формулу інтегрального критерію якості, що використовується для коливальних перехідних процесів.

26. Як будується нормована АЧХ за завданням замкненої системи та як за нею визначається показник коливальності?

27. Що характеризує показник коливальності системи та якими є його рекомендовані значення?

28. Що таке смуга пропускання замкненої САК?

29. Який властивості системи характеризує її частота пропускання?

30. Властивості якого фільтра повинна мати САК щодо завдання, а якого – щодо збурення? Наведіть АЧХ ідеальних версій цих фільтрів.

31. Як визначити частоти зрізу розімкненої та замкненої системи?

32. Які запаси стійкості за модулем та фазою рекомендуються для САК?

33.Дайте визначення статичного та усталеного динамічного режимів роботи системи.

34.Наведіть типові закони зміни зовнішніх дій у САК.

35.Які основні типи помилок існують в САК?

36.Що таке статична помилка системи та якими є її складники?

37.Дайте визначення перехідної та усталеної динамічних помилок САК.

38.Сформулюйте визначення астатичної та статичної замкненої САК.

39.Як визначаються статизм за завданням та статизм за збуренням? Що характеризують ці показники?

40. Якими способами в статичній САК можна усунути статичну помилку за завданням?

41.На виході якого елементу стежної системи можна виміряти помилку стеження?

42.Який принцип беруть до уваги при визначенні сукупної помилки в лінійних САК?

43.Поясніть призначення та суть методу коефіцієнтів помилок.

44.Які назви мають перші чотири коефіцієнти помилок САК?

45. Визначте усталену динамічну помилку наведеної у прикладі 4.3 системи, якщо її завданням є $g(t) = 6 + 5t + 4t^2$.

46.Назвіть основні шляхи підвищення точності САК.

47.Яким чином впливає замикання системи на її статичну помилку?

48.Як впливає на швидкодію САК замикання кола її зворотного зв'язку?

49.Що таке алгоритм або закон керування чи регулювання?

50.Назвіть базові закони керування та відповідні їм типи регуляторів.

51.Які переваги та недоліки властиві трьом базовим законам керування?

52. Де у контурі замкненої системи слід вводити інтегральну ланку, щоб ліквідувати статичну помилку від збурювальної дії?

53.Наведіть передатну функцію ізодромної інтегральної ланки.

54.Запишіть рівняння ПІ-регулятора і назвіть його переваги та недоліки.

55.Наведіть математичний опис ПД-регулятора і зазначте переваги та недоліки цього регулятора.

56.Запишіть в операторній формі рівняння ПІД-регулятора та вкажіть на властиві йому переваги і недоліки.

57.Яким показником характеризується точність роботи САК при зміні зовнішньої дії з постійною швидкістю? За якою формулою він визначається?

58.Який показник характеризує точність роботи САК при зміні зовнішньої дії з постійним прискоренням? За якою формулою він обчислюється?

59.Якщо САК має астатизм 3-го порядку щодо деякої зовнішньої дії то чому дорівнюють добротності системи за швидкістю та за прискоренням щодо цієї дії?

60.Обчисліть добротність за швидкістю системи стеження, яка має добротність за прискоренням $\mathrm{K_a} = 10\ \mathrm{c}^{-2}$.

61. Розімкнута система стеження з одиничним зворотним зв'язком має

передатну функцію $W(p) = \dfrac{100(0,3p+1)}{p^2(0,1p+1)}$. Треба визначити, якими є добротності за швидкістю та за прискоренням замкнутої системи.

62.Як визначити порядок астатизму замкненої САК за завданням на основі її передатної функції у розімкненому стані? Для якого зворотного зв'язку це можливо?

63.Як визначити порядок астатизму системи щодо завдання на основі її передатної функції за завданням у замкненому стані?

64.Як визначити порядок астатизму системи щодо збурення на основі її передатної функції за збуренням у замкненому стані?

65.На чому ґрунтується ідея методу синтезу коригувальних пристроїв за допомогою ЛАХ?

66.Які елементи САК зазвичай визначають ЛАХ вихідної системи?

67.Якими є основні принципи побудови бажаної ЛАХ?

68.Що визначає низькочастотна частина ЛАХ розімкненої САК?

69.Що визначає частота зрізу та нахил середньочастотної частини ЛАХ розімкненої САК?

70.На що впливає високочастотна частин ЛАХ розімкненої САК?

71.Наведіть спрощену методику побудови бажаної ЛАХ.

72.Які показники якості керування враховуються у спрощеній методиці побудови бажаної ЛАХ?

73.Як виконується синтез послідовної коригувальної ланки?

74.У якому місці замкнутого контуру доцільно вводити послідовну коригувальну ланку?

75. У чому складність синтезу паралельної коригувальної ланки методом ЛАХ?

ГЛАВА 5. МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ В ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

5.1 Метод змінних стану. Опис САК у просторі стану

5.1.1 Загальне поняття про метод змінних стану

Вище ми використовували математичний опис динамічних систем, що ґрунтується на диференційних рівняннях та передатних функціях. Цей опис також називають описом типу ***вхід-вихід*** (*Input-Output*). Проте в ТАК широко застосовується альтернативний опис систем, який в 1974 р. запропонував Г. Розенброк та був пізніше розвинутий іншими вченими. Він має назву ***метод змінних стану*** і описує систему у ***просторі стану*** (*State Space*).

Важливою властивістю методу змінних стану є універсальність у застосуванні для одновимірних та багатовимірних систем. Нагадаємо, що багатовимірною називається система, яка має більше ніж один вхід та/чи вихід. Класичним прикладом багатовимірного об'єкта є паровий котел, де керовані величини це температура і тиск пари. В англомовній літературі для одновимірних систем вживають акронім ***SISO*** (*Single Input, Single Output*), а для багатовимірних – ***MIMO*** (*Multiple Inputs, Multiple Outputs*).

Схематичне зображення довільної САК наведено на рис. 5.1, де

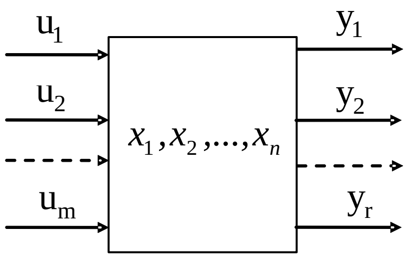


Рис. 5.1. Схематичне зображення САК

$u_1(t), \ldots, u_m(t)$ – це зовнішні дії, а $y_1(t), \ldots, y_r(t)$ – керовані величини. Для відображення внутрішнього стану системи вводять деякі абстрактні характеристики $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ з початковими умовами $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$, за допомогою яких з врахуванням вхідних дій $u_1, ..., u_m$ можна однозначно визначити динамічні процеси в системі.

Змінні $x_1(t), ..., x_n(t)$ ***називаються <u>змінними стану</u> системи***. Отже стан системи у довільний момент часу t цілком визначається за допомогою ***вектору стану*** $\mathbf{x}(t)$, елементами якого є змінні стану

$$\mathbf{x}(t) = \left[x_1(t) \;\; x_2(t) \dots x_n(t) \right]^T. \tag{5.1}$$

Множину усіх значень вектора стану $\mathbf{x}(t)$ ***на деякому інтервалі часу*** $\Delta t = t_к - t_0$ ***називають <u>простором стану</u> або <u>фазовим простором</u>***. Його можна розглядати як деякий n-вимірний абстрактний простір, що відповідає порядку диференційного рівняння системи. ***Кінець вектора стану при русі в просторі стану має множину положень, яка називається <u>траєкторією вектору стану</u>. Кожна фіксована точка на траєкторії називається <u>зображувальною точкою</u>***. Одно-, дво- та тривимірному простору стану відповідають рис. 5.2,а,б,в, де показано вектори стану та їх траєкторії. Ці простори стану відображують динамічні процеси у системах 1-го, 2-го і 3-го порядку.

Фізична суть змінних стану, які, як було вказано раніше, в загальному випадку можуть бути абстрактними величинами, залежить від вибору базису, який визначається вектором стану. Часто за змінні стану приймають деякі фізичні величини, що характеризують поведінку системи. У цьому разі рівняння стану будуть записані у так званому ***фізичному базисі***.

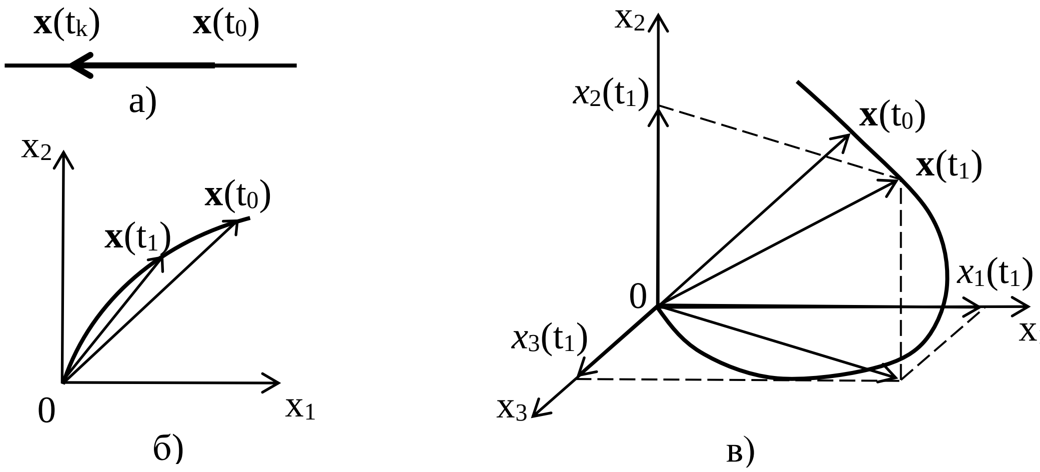


Рис. 5.2. Одно- (а), дво- (б) та тривимірний (в) простори стану

5.1.2 Рівняння стану динамічних систем

Якщо вважати, що похідна $x_i'(t)$ залежить тільки від поточного стану системи, то будь яку лінійну чи лінеаризовану САК можна описати системою диференційних рівнянь у нормальній формі Коші, де похідні змінних стану залежать від значень змінних стану, часу і вхідних дій $u_i(t)$. Такий опис матиме вигляд

$$\begin{aligned} &x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m; \\ &x_2'(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2m}u_m; \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n'(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nm}u_m, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &y_1(t) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \ldots + d_{1m}u_m; \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_r(t) = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + d_{r2}u_2 + \ldots + d_{rm}u_m, \end{aligned} \tag{5.3}$$

де $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$ – постійні коефіцієнти. Опис (5.2), (5.3) повністю визначає поведінку системи у довільний момент часу і його називають ***описом у просторі стану***. На практиці для цього опису часто використовується більш компактна векторно-матрична форма у вигляді ***рівнянь стану***

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{5.4}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{5.5}$$

де, згідно з (5.2)-(5.3), матриці коефіцієнтів дорівнюють

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rn} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{r1} & d_{r2} & \ldots & d_{rm} \end{bmatrix},$$

а вектори

$$\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t)\ \ x_2(t)\dots x_n(t)\right]^T;\ \ \mathbf{u}(t)=\left[u_1(t)\ \ u_2(t)\dots u_m(t)\right]^T;$$

$$\mathbf{y}(t)=\left[y_1(t)\ \ y_2(t)\dots y_r(t)\right]^T,$$

де $\mathbf{A}$ – $n\times n$ матриця стану або динаміки; $\mathbf{B}$ – $n\times m$ матриця входу; $\mathbf{C}$ – $r\times n$ матриця виходу; $\mathbf{D}$ – $r\times m$ матриця прямих зв'язків; $\mathbf{x}(t)$ – n-вимірний вектор стану; $\mathbf{u}(t)$ – m-вимірний вектор входу або керування (зовнішніх дій); $\mathbf{y}(t)$ – r-вимірний вектор виходу системи. Рівняння (5.4) є власне ***рівнянням стану*** або ***динаміки***, а рівняння (5.5) ***– рівнянням виходу***.

Структурна схема багатовимірної САК у просторі стану, що відповідає рівнянням (5.4) та (5.5), зображена на рис. 5.3.

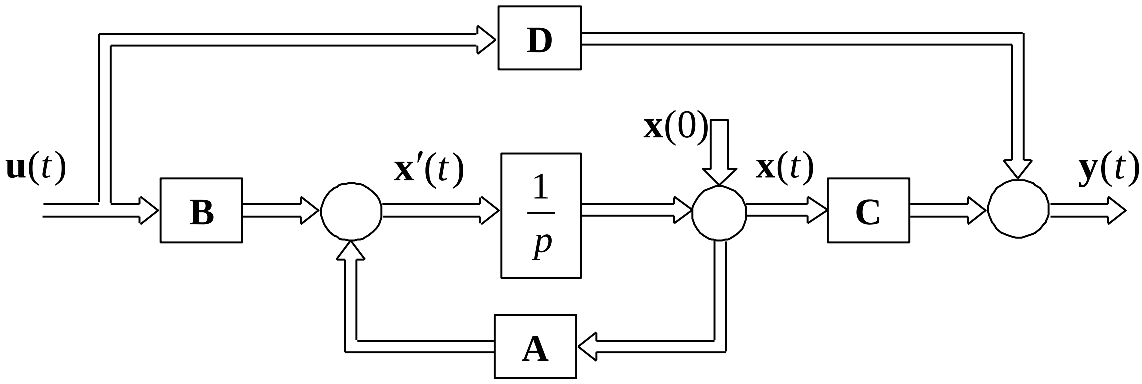


Рис. 5.3. Структурна схема багатовимірної САК у просторі стану

Подвійні лінії на схемі відображають векторний характер сигналів системи. Для одновимірної САК загальному випадку $\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)$ та $\mathbf{D}$ будуть скалярами, $\mathbf{B}$ – вектором-стовпцем, а $\mathbf{C}$ – вектором-рядком.

Приклад 5.1. Отримати опис у просторі стану гідравлічного демпфера з пружиною, що зображений на рис. 5.4, де вхідною величиною є сила u, а вихідною – положення y точки A поршня. При цьому слід вважати, що сумарна маса усіх рухомих частин зведена у точку A і дорівнює m.

Розв'язання. На основі 2-го закону Ньютона запишемо диференційне рівняння для даної механічної системи у вигляді

$$my''+by'+cy=u, \tag{5.6}$$

де b – коефіцієнт демпфування демпфера; с – коефіцієнт пружності пружини. Записавши (5.6) в операторній формі, отримаємо рівняння динаміки системи

$$(mp^2 + bp + c)y = u. \tag{5.7}$$

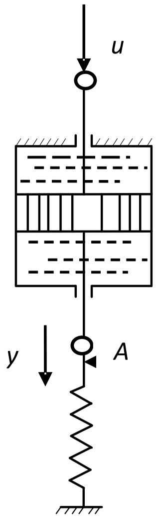


Рис. 5.4. Схема гідравлічного демпфера з пружиною

З рівняння (5.7) дістанемо передатну функцію системи у вигляді

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{1}{mp^2 + bp + c}. \tag{5.8}$$

Тепер отримаємо рівняння стану механічної системи. Оскільки рівняння (5.6) має 2-й порядок, то вектор стану матиме розмір 2×1. Виберемо змінні стану

$$x_1(t) = y(t); \quad x_2(t) = y'(t). \tag{5.9}$$

Тепер з (5.6) та (5.9) отримаємо рівняння для похідних змінних стану

$$x_1' = x_2; \tag{5.10}$$

$$x_2' = -\frac{c}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u. \tag{5.11}$$

У векторно-матричній формі рівняння (5.10), (5.11) запишуться як

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u. \tag{5.12}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (5.13)$$

Запишемо (5.12) та (5.13) у стандартній формі рівнянь стану

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u;$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du,$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0,$$

а вектор стану $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$.

5.2 Перехід від передатних функцій до рівнянь стану та навпаки

5.2.1 Отримання рівнянь стану за передатними функціями та структурними схемами

Об’єкти керування та САК традиційно описуються за допомогою передатних функцій або в графічному вигляді за допомогою структурних схем. На практиці досить часто виникає задача переходу від традиційних форм описання системи до рівнянь простору стану. Такий перехід є багатоваріантним в залежності від вибраного базису для рівнянь стану. Розглянемо методи розв’язання вказаної задачі.

Визначення рівнянь стану за передатною функцією. Рівняння стану можна дістати за передатною функцією шляхом перенесення похідних до виходу системи. Розглянемо цей метод на прикладі конкретної САК 3-го порядку, передатна функція якої має вигляд

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}. \qquad (5.14)$$

Подамо передатну функцію (5.14) у вигляді послідовно з'єднаних ланок, передатні функції яких відповідають знаменнику та чисельнику, як це показано на рис. 5.4.

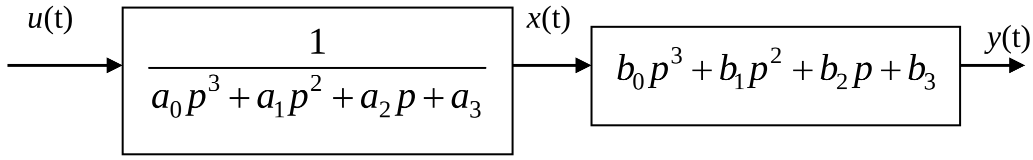


Рис. 5.5. Перенесення похідних вхідної дії до виходу системи

На основі рис. 5.5 запишемо диференційні рівняння для $x(t)$ і $y(t)$

$$x''' + \tilde{a}_1 x'' + \tilde{a}_2 x' + \tilde{a}_3 x = a_0^{-1} u\,; \tag{5.15}$$

$$y = b_0 x''' + b_1 x'' + b_2 x' + b_3 x, \tag{5.16}$$

де $\tilde{a}_i = a_i / a_0,\, i = 1,2,3$. Введемо позначення $x = x_1;\, x_1' = x_2;\, x_1'' = x_2' = x_3$. Тепер можемо записати (5.15) і (5.16) як систему диференційних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2; \\ &x_2' = x_{3;} \\ &x_3' = -\tilde{a}_1 x_3 - \tilde{a}_2 x_2 - \tilde{a}_3 x_1 + a_0^{-1} u; \\ &y = b_0 x_3' + b_1 x_3 + b_2 x_2 + b_3 x_1. \end{aligned} \tag{5.17}$$

В останнє рівняння системи (5.17) підставимо передостаннє та зведемо подібні члени. В результаті отримаємо

$$y = c_1 x_3 + c_2 x_2 + c_3 x_1 + b_0 a_0^{-1} u\,,$$

де $c_1 = b_1 - b_0 \tilde{a}_1;\, c_2 = b_2 - b_0 \tilde{a}_2;\, c_3 = b_3 - b_0 \tilde{a}_3$. Отже можемо записати векторно-матричні рівняння стану системи у вигляді

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u; \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du,$$

де $\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, x_3\right]^T$ – вектор стану; y – вихідна величина; u – вхідна дія;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_3 & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0^{-1} \end{bmatrix};\ \mathbf{C} = \left[c_3\ c_2\ c_1\right];\ \mathrm{D} = b_0 a_0^{-1}.$$

Зазначимо, що цей вид рівнянь стану часто називають ***формою Фробеніуса***.

Приклад 5.2. За допомогою MATLAB отримати рівняння стану системи, що має передатну функцію

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2p^3 + 3p^2 + 5p + 7}{10p^3 + 9p^2 + 8p + 11}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Для розв'язання задачі запишемо у MATLAB наступну програму.

```
% Program 5.1
num=[2 3 5 7];          % Чисельник ПФ
den=[10 9 8 11];        % Знаменник ПФ
W=tf(num,den);          % Модель системи W, що описана ПФ
sys=ss(W);              % Модель системи sys з описом у просторі стану
[A,B,C,D]=ssdata(sys), % Отримання матриць рівнянь стану
```

Результат роботи програми буде таким:

```
A =
  -0.9000  -0.8000  -1.1000
   1.0000        0        0
        0   1.0000        0
B =
   1
   0
   0
C =
   0.1200   0.3400   0.4800
D =
   0.2000
```

Отже рівняння стану САК мають вигляд

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.8 & -1.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.34 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0.2u.$$

Отримання рівнянь стану за структурною схемою системи. Суть цього методу полягає у тому, що здійснюється декомпозиція структурної схеми САК до рівня інтеграторів. В отриманій деталізованій структурній схемі вихідні величини інтеграторів приймаються за змінні стану і за цією схемою безпосередньо записуються рівняння стану системи чи об’єкта. ***Позитивною рисою тут є відповідність змінних стану фізичним змінним об’єкта, тобто отримання рівнянь стану у фізичному базисі.*** Це спрощує аналіз системи, а також синтез і практичну реалізацію алгоритму керування.

Для застосування цього методу отримання рівнянь стану корисно мати деталізовані структурні схеми узагальнених ланок 1-го та 2-го порядку. ***Узагальненими*** ***назвемо ланки, у передатних функціях яких поліноми чисельника та знаменника мають рівні степені $m = n$ і ненульові коефіцієнти $a_i \neq 0, i = 0,...,n$; $b_i \neq 0, i = 0,...,m$.***

Передатна функція ***узагальненої ланки 1-го порядку*** матиме вигляд

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p + a_1}.$$

Деталізована до рівня інтеграторів структурна схема ланки 1-го порядку наведена на рис. 5.6.

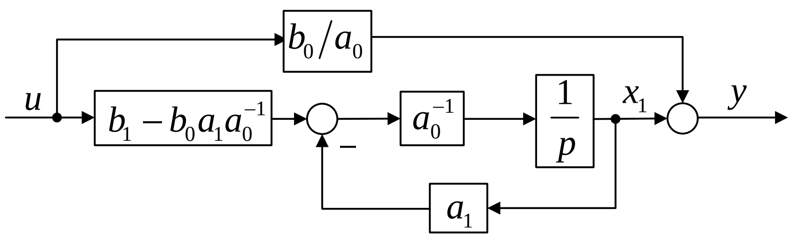


Рис. 5.6. Деталізована структура узагальненої ланки 1-го порядку

Передатна функція ***узагальненої ланки 2-го порядку*** запишеться як

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

На рис. 5.7 зображена деталізована до рівня інтеграторів структурна схема ланки 2-го порядку.

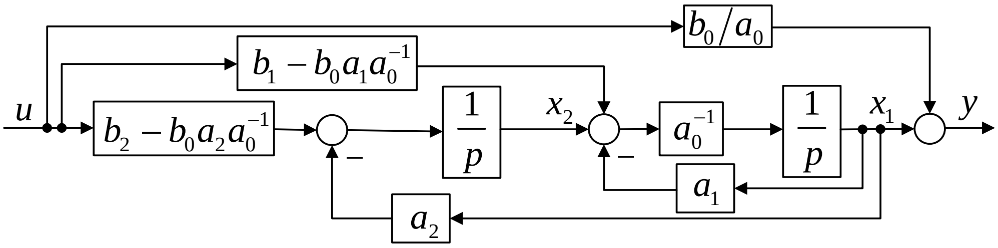


Рис. 5.7. Деталізована структура узагальненої ланки 2-го порядку

Розглянемо застосування методу на прикладі об'єкта, яким є двигун постійного струму з незалежним збудженням. Структурна схема даного двигуна зображена на рис. 5.8, де φ, ω – положення та швидкість валу двигуна

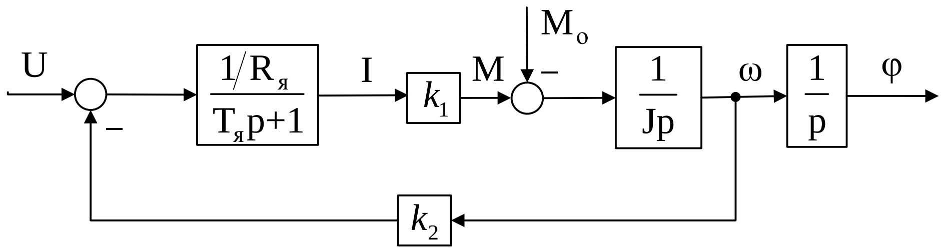


Рис. 5.8. Схема двигуна постійного струму з незалежним збудженням

відповідно; U, I – напруга та струм якоря відповідно; M – момент двигуна; $M_о$ – момент опору на валу; J – момент інерції двигуна; $R_я$ – опір якірного кола; $T_я$ – стала часу якірного кола; k_1, k_2 – постійні коефіцієнти.

Скориставшись структурою узагальненої ланки 1-го порядку (рис. 5.6), проведемо декомпозицію схеми на рис. 5.8 до рівня інтеграторів. Отримана деталізована структурна схема об'єкта зображена на рис. 5.9. Вихідні

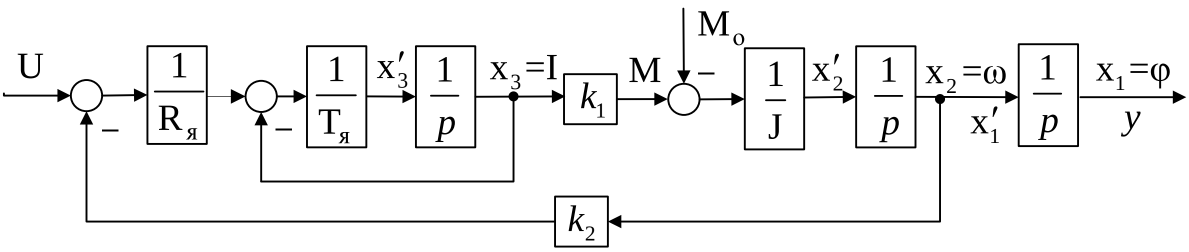


Рис. 5.9. Деталізована структурна схема двигуна

величини інтеграторів у цій схемі приймемо за змінні стану, вони дорівнюватимуть фізичним величинам, що характеризують поведінку двигуна, а саме: положенню, швидкості та струму якоря. Важливо зауважити, що похідні змінних стану є входами відповідних інтеграторів.

На основі наведеної на рис. 5.9 схеми запишемо рівняння для похідних змінних стану:

$$x_1' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + U \cdot 0 + M_o \cdot 0;$$
$$x_2' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot \mathrm{k}_1/\mathrm{J} + U \cdot 0 + M_o \cdot (-1/\mathrm{J});$$
$$x_3' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot (-\mathrm{k}_2 \mathrm{R}_я^{-1} \mathrm{T}_я^{-1}) + x_3 \cdot (-\mathrm{T}_я^{-1}) + U \cdot (\mathrm{R}_я^{-1} \mathrm{T}_я^{-1}) + M_o \cdot 0,$$

та для виходу об’єкта:

$$y = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 .$$

За цими рівняннями нескладно отримати векторно-матричні рівняння стану двигуна у вигляді

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_u u(t) + \mathbf{B}_f f(t);$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

де $\mathbf{x}(t) = \left[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t)\right]^T = \left[\varphi(t)\ \ \omega(t)\ \ I(t)\right]^T$ – вектор стану; $u(t) = U(t)$ – керуюча дія; $f(t) = M_o(t)$ – збурювальна дія; $y(t) = \varphi(t)$ – вихід об’єкта, а матриця стану $\mathbf{A}$, вектори керування $\mathbf{B}_u$ і збурення $\mathbf{B}_f$, та матриця виходу $\mathbf{C}$ дорівнюють

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{k}_1/\mathrm{J} \\ 0 & -\mathrm{k}_2 \mathrm{R}_я^{-1} \mathrm{T}_я^{-1} & -\mathrm{T}_я^{-1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{R}_я^{-1} \mathrm{T}_я^{-1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\mathrm{J} \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = \left[1\ 0\ 0\right].$$

Приклад 5.3. Дістати рівняння стану у фізичному базисі об’єкта керування, структурна схема якого зображена на рис. 5.10, де u – вхід; y – вихід; x_1, x_2, x_3 – деякі фізичні величини (наприклад кутове положення, кутова швидкість та струм).

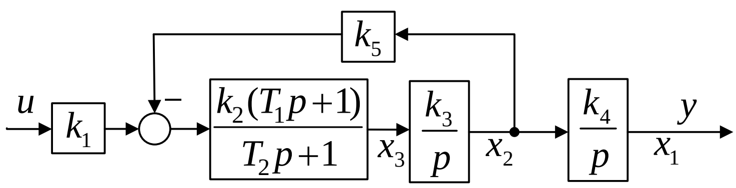


Рис. 5.10. Структурна схема об’єкта керування

Розв’язання. Для отримання опису об’єкта у просторі стану використаємо спосіб декомпозиції структурної схеми до рівня інтеграторів. Скориставшись структурою узагальненої ланки 1-го порядку (рис. 5.6), здійснимо перетворення схеми на рис. 5.10. У підсумку дістанемо деталізовану структурну схему, що зображена на рис. 5.11.

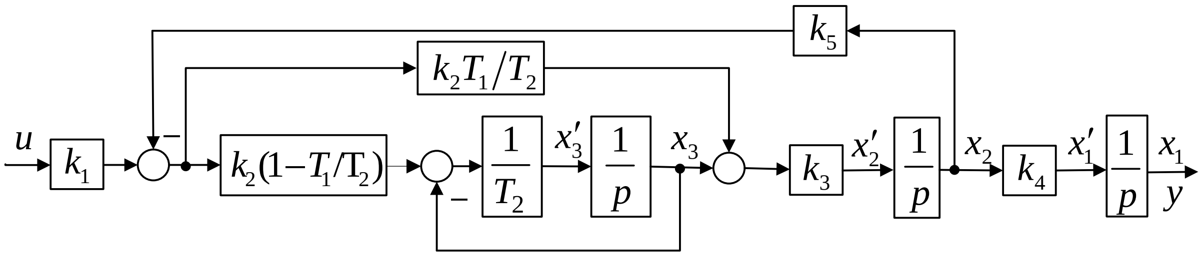


Рис. 5.11. Деталізована структурна схема об’єкта керування

Використовуючи наведену на рис. 5.11 схему, запишемо рівняння для похідних змінних стану

$$x_1' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot k_4 + x_3 \cdot 0 + u \cdot 0;$$

$$x_2' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot k_3 + u \cdot \left(\frac{k_1 k_2 k_3 T_1}{T_2} \right);$$

$$x_3' = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot \left(-\frac{k_2 k_5 (1 - T_1 / T_2)}{T_2} \right) + x_3 \cdot \left(-\frac{1}{T_2} \right) + u \cdot \left(\frac{k_1 k_2 (1 - T_1 / T_2)}{T_2} \right),$$

та для виходу об’єкта

$$y = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 .$$

За цими рівняннями нескладно отримати векторно-матричні рівняння стану об’єкта керування у фізичному базисі

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -\dfrac{k_2 k_5 (1\text{-}T_1 / T_2)}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1 k_2 k_3 T_1}{T_2} \\ \dfrac{k_1 k_2 (1\text{-}T_1 / T_2)}{T_2} \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

<u>5.2.2 Отримання передатних функцій за рівняннями стану</u>

Одержимо формулу для визначення передатних функцій за рівняннями стану. Спочатку розглянемо одновимірну систему, рівняння стану якої мають вигляд

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t);$$
$$y(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+Du(t).$$

Дістанемо пряме перетворення Лапласа для цих рівнянь

$$\begin{aligned} &p\mathbf{x}(p)-\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\mathbf{x}(p)+\mathbf{B}u(p);\\ &y(p)=\mathbf{C}\mathbf{x}(p)+Du(p). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Як відомо, передатна функція системи являє собою відношення зображень за Лапласом її виходу до входу за нульових початкових умов. Тому у першому рівнянні (5.18) приймемо $\mathbf{x}(0)=0$ і запишемо його як

$$(p\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}(p)=\mathbf{B}u(p),$$

де $\mathbf{I}$ – одинична матриця розміру $n\times n$. Помноживши обидві частини отриманого рівняння на $(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$, матимемо

$$\mathbf{x}(p)=(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(p).$$

Підставимо цей вираз у друге рівняння (5.18) і отримаємо

$$y(p)=\mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(p)+Du(p),$$

або

$$y(p)=\left[\mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D\right]u(p).$$

З останнього виразу дістанемо передатну функцію системи

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=\mathbf{C}\left(p\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+D. \tag{5.19}$$

Багатовимірні системи, на відміну від одновимірних, описуються низкою передатних функцій, що пов’язують кожен вхід з кожним виходом САК. Якщо система має m входів та r виходів, то її повний опис складатиметься з $m\times r$ передатних функцій, які можна подати у вигляді ***матричної передатної функції***

$$\mathbf{W}(p)=\begin{bmatrix} W_{11}(p) & \dots & W_{1r}(p)\\ \dots & \dots & \dots\\ W_{m1}(p) & \dots & W_{mr}(p) \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

У багатовимірній САК з рівняннями стану (5.4), (5.5) передатну функцію, що пов'язує i-й вхід та k-й вихід системи, можна визначити за виразом (5.19) як

$$W_{ik}(p) = \frac{y_k(p)}{u_i(p)} = \mathbf{C}_k \left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{B}_i + D\,, \qquad (5.21)$$

де $\mathbf{B}_i$ – i-й стовпець матриці $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_k$ – k-й рядок матриці $\mathbf{C}$, $D = d_{ki}$ – відповідний елемент матриці $\mathbf{D}$. Нагадаємо, що передатна функція для кожної вхідної дії визначається за нульових інших вхідних дій та початкових умов.

Приклад 5.4. Отримати в аналітичному вигляді передатну функцію механічної системи другого порядку у вигляді демпфера з пружиною, що розглядалася у прикладі 5.1

Р о з в ' я з а н н я. Для механічної системи 2-го порядку у прикладі 5.1 були отримані рівняння стану

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u;$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du,$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0\,,$$

де u – прикладена до демпферу сила, y – положення точки A з'єднання демпфера з пружиню.

Згідно з формулою (5.19), передатна функція системи дорівнює

$$W(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -1 \\ \dfrac{c}{m} & p + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Відшукаємо обернену матрицю як $\mathbf{H}^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{H})}$, де $\mathrm{adj}(\mathbf{H})$ – приєднана або союзна матриця:

$$\begin{bmatrix} p & -1 \\ \frac{c}{m} & p+\frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2+\frac{b}{m}p+\frac{c}{m}} \begin{bmatrix} p+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{c}{m} & p \end{bmatrix}.$$

Тепер матимемо

$$W(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{p^2+\frac{b}{m}p+\frac{c}{m}} \begin{bmatrix} p+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{c}{m} & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{mp^2+bp+c}.$$

Ця передатна функція ідентична (5.8) у прикладі 5.1.

Приклад 5.5. Отримати передатну функцію системи 3-го порядку, що описується рівняннями стану

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі використаємо MATLAB. Запишемо наступну програму.

```
% Program 5.2
A=[0, 1, 0; 0, 0, 1; -11, -10, -9;];   % Формування матриць рівнянь стану САК
B=[0; 0; 1;]; C=[2, 5, 7]; D=[0];
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D); % Визначення чисельника і знаменника ПФ з рівнянь стану
W=tf(num,den),                 % Передатна функція САК
```

Результат роботи програми:

```
W =
     7 s^2 + 5 s + 2
  ----------------------
  s^3 + 9 s^2 + 10 s + 11
```

Отже передатна функція САК має вигляд $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{7p^2+5p+2}{p^3+9p^2+10p+11}$.

Приклад 5.6. Для двовимірної системи, що описується рівняннями стану

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

визначити всі елементи матричної передатної функції.

Розв'язання. Досліджувана система має два входи та два виходи, тому матрична передатна функція (5.20) матиме $2 \times 2 = 4$ елементи і запишеться як

$$\mathbf{W}(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Кожен елемент цієї матриці, згідно з (5.21), являє собою передатну функцію $W_{ik}(p) = y_k(p)/u_i(p)$, що пов'язує *i*-й вхід та k-й вихід системи. Визначимо ці передатні функції за допомогою MATLAB. Запишемо наступну програму.

```
% Program 5.3
A=[0, 1;-7, -4;];
B1=[1; 1;]; B2=[2; 3;];
C1=[1, 0]; C2=[0, 2]; D=0;
[num_11,den]=ss2tf(A,B1,C1,D);
[num_12,den1]=ss2tf(A,B1,C2,D);
[num_21,den1]=ss2tf(A,B2,C1,D);
[num_22,den]=ss2tf(A,B2,C2,D);
num_11, num_12, num_21, num_22, den,
```

Результатом роботи програми є вектори коефіцієнтів чисельників *num_ik* та знаменника *den* передатних функцій:

```
num_11 =
     0    1.0000    5.0000
num_12 =
     0    2.0000  -14.0000
num_21 =
     0    2.0000   11.0000
num_22 =
     0    6.0000  -28.0000
den =
   1    4    7
```

Отже шукані передатні функції дорівнюють:

$$W_{11}(p) = \frac{y_1(p)}{u_1(p)} = \frac{p+5}{p^2+4p+7}; \quad W_{12}(p) = \frac{y_2(p)}{u_1(p)} = \frac{2p-14}{p^2+4p+7};$$

$$W_{21}(p) = \frac{y_1(p)}{u_2(p)} = \frac{2p+11}{p^2+4p+7}; \quad W_{22}(p) = \frac{y_2(p)}{u_2(p)} = \frac{6p-28}{p^2+4p+7}.$$

Зауважимо, що поліноми знаменників, а, відповідно, і полюси усіх елементів матричної передатної функції є однаковими. Саме ці полюси визначають стійкість багатовимірної САК.

5.3 Керованість та спостережуваність САК. Канонічні форми рівнянь стану

5.3.1 Керованість та спостережуваність лінійних систем

Керованість та спостережуваність динамічних систем належать до основних понять ТАК. Дані поняття сформулював американський фахівець угорського походження Рудольф Калман. Для дослідження цієї теми використовується опис системи у просторі стану (5.4), (5.5).

Керованість системи. Система називається ***повністю керованою***, якщо для будь-яких моментів часу t_0 і t_1, де $t_1 > t_0$, та будь-яких заданих станів $\mathbf{x}_0$ і $\mathbf{x}_1$ існує керуюча дія $\mathbf{u}(t)\,(t_0 \le t \le t_1)$, що переводить початковий стан $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ у кінцевий $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Повна керованість визначається за теоремою Калмана: ***лінійна*** n***-вимірна система, що описується рівнянням* (5.4), *<u>повністю керована</u> тоді і тільки тоді, коли блочна матриця**

$$\mathbf{Q}_c = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A^2B} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A^{n-1}B}\right] \tag{5.22}$$

розміру $n \times nm$ ***має ранг, що дорівнює*** n***, тобто***

$$\operatorname{rank} \mathbf{Q}_c = \mathrm{n}\,. \tag{5.23}$$

Матриця $\mathbf{Q}_c$ називається ***матрицею керованості***. Нагадаємо, що ранг матриці дорівнює найвищому порядку її мінорів, що не дорівнюють нулю.

Спостережуваність системи. Система називається ***повністю спостережуваною,*** якщо існує таке значення часу $t_1\,(t < t_1 < \infty)$, що за відомою інформацією про вихід $\mathbf{y}(\tau)$ і вхід $\mathbf{u}(\tau)$ системи для інтервалу $(t \le \tau \le t_1)$ можна визначити вектор змінних стану системи $\mathbf{x}(t)$.

Проблема спостережуваності виникає тому, що в реальних об'єктах часто піддається вимірюванню, тобто спостереженню, лише його вихід $\mathbf{y}(t)$ і вхід $\mathbf{u}(t)$. Проте у процесі керування необхідне використання зворотних зв'язків за змінними стану. Якщо змінні стану фізично не вимірюються, то їх оцінюють за допомогою пристрою, що називається ***спостерігачем***. Отримані оцінки використовують у зворотних зв'язках регулятора системи.

Умова повної спостережуваності лінійної стаціонарної системи, що описується рівняннями (5.4), (5.5), визначається за теоремою Калмана: ***система <u>повністю спостережувана</u> тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності*** $\mathbf{Q}_\text{o}$ ***розміру*** $n \times nr$

$$\mathbf{Q}_\text{o} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

дорівнює n.

Якщо ранг матриці $\mathbf{Q}_\text{o}$ менший ніж n, то система не повністю спостережувана, якщо ранг дорівнює нулю – повністю не спостережувана.

Приклад 5.7. Динамічна система 2-го порядку описується рівняннями $\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}+\mathbf{B}u$; $y=\mathbf{Cx}$, де $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 10 & 5 \end{bmatrix}$. Треба дослідити керованість та спостережуваність системи.

<u>Розв'язання</u>. За (5.22) визначимо матрицю керованості $\mathbf{Q}_\text{c} = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -70 \end{bmatrix}$ та обчислимо її ранг $rank\,\mathbf{Q}_\text{c} = 2$. Оскільки ранг $\mathbf{Q}_\text{c}$ дорівнює порядку n=2, то система повністю керована.

За (5.24) визначимо матрицю спостережуваності $\mathbf{Q}_{\text{о}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -50 & -25 \end{bmatrix}$ та обчислимо її ранг: $rank\,\mathbf{Q}_{\text{о}} = 1$. Позаяк ранг матриці $\mathbf{Q}_{\text{о}}$ менший ніж порядок n=2, то система спостережувана частково.

Щоб виявити причину неповної спостережуваності системи, відшукаємо за (5.19) її передатну функцію

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \mathbf{C}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + D = \frac{50p + 100}{p^2 + 7p + 10}.$$

Розклавши знаменник на множники, дістанемо

$$W(p) = \frac{50(p+2)}{(p+2)(p+5)} = \frac{50}{(p+5)}.$$

З цього виразу бачимо, що корінь полінома чисельника та один з коренів полінома знаменника передатної функції є рівними. Тобто нуль передатної функції дорівнює одному з її полюсів. Поліноми з однаковими нулем і полюсом скорочуються, що призводить до зниження порядку передатної функції з 2-го до 1-го. Наслідком зниження порядку системи є те, що за її входом $u(t)$ і виходом $y(t)$ можна визначити лише одну з двох змінних стану. Отже система не повністю спостережувана.

5.3.2 Перетворення подібності і канонічні форми рівнянь стану

За використання моделей систем у вигляді рівнянь стану досить часто виникає потреба переходу від одного до іншого базису простору стану. Розглянемо процедуру та особливості такого переходу.

Нехай деяка одновимірна динамічна система n-го порядку має передатну функцію

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}, \tag{5.25}$$

де $B(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_{n-1} p + b_n$; $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$. У просторі стану ця система описується рівняннями

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u;$$
$$y=\mathbf{C}\mathbf{x}+Du. \tag{5.26}$$

За допомогою $n \times n$ матриці $\mathbf{P}$, яка є невиродженою ($\det \mathbf{P} \neq 0$) і називається ***матрицею перетворення базису*** або просто ***матрицею перетворення***, можна отримати новий вектор стану

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{P}\mathbf{x}. \tag{5.27}$$

У цьому разі $\mathbf{x}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_*$. Диференціюючи за часом (5.27) та підставляючи вирази для векторів стану в (5.26), дістанемо відповідно

$$\mathbf{x}'_* = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_* + \mathbf{P}\mathbf{B}u;$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_* + D_* u.$$

Отримані рівняння запишемо у вигляді

$$\mathbf{x}'_* = \mathbf{A}_*\mathbf{x}_* + \mathbf{B}_* u;$$
$$y = \mathbf{C}_*\mathbf{x}_* + D_* u, \tag{5.28}$$

де

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}; \quad \mathbf{B}_* = \mathbf{P}\mathbf{B}; \quad \mathbf{C}_* = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}; \quad D_* = D. \tag{5.29}$$

Матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}_*$ називають ***еквівалентними*** або ***подібними***. Вони мають наступні важливі властивості.

1) ***Характеристичні поліноми обох матриць однакові:*** $\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}_*) = A(p)$.

2) ***Власні значення*** $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ ***цих матриць співпадають:*** $\mathrm{eig}(\mathbf{A}) = \mathrm{eig}(\mathbf{A}_*)$.

Моделі у просторі стану (5.26) та (5.28) називаються ***подібними***. Вони особливі тим, що їм відповідає одна і та ж сама модель вхід-вихід у вигляді передатної функції $W(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D = \mathbf{C}_*(p\mathbf{I}-\mathbf{A}_*)^{-1}\mathbf{B}_* + D_*$. Отже, для подібних моделей, попри відмінність їх базисів простору стану, зв'язок вхід-вихід є ідентичним.

При синтезі та дослідженні САК часто буває доцільним використання так званих ***канонічних форм*** рівнянь стану, що відповідають варіантам найпростішого запису рівнянь стану. Застосування канонічних форм дозволяє полегшити аналіз властивостей системи та зменшити кількість параметрів математичного опису. Крім цього, рівняння стану системи у канонічних формах можна отримати безпосередньо за її передатною функцією і навпаки.

Канонічна форма керованості. Для повністю керованої динамічної системи (об’єкта), описаної рівняннями стану (5.26), можна отримати ***канонічну форму керованості*** у вигляді рівнянь (5.28), де

$$\mathbf{A}_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{5.30}$$

$$\mathbf{C}_* = \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n & b_{n-1} - b_0 a_{n-1} & \cdots & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}; \quad D_* = b_0.$$

Матриця перетворення до керованої канонічної форми визначається як

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{c*}\mathbf{Q}_c^{-1},$$

де $\mathbf{Q}_c$ та $\mathbf{Q}_{c*}$ – матриці керованості для моделей (5.26) та (5.28) відповідно.

Канонічна форма керованості має важливе значення для синтезу регуляторів, що забезпечують бажане розташування полюсів замкнутої системи (модальні регулятори). На рис. 5.12 наведена схема моделі системи у канонічній формі керованості.

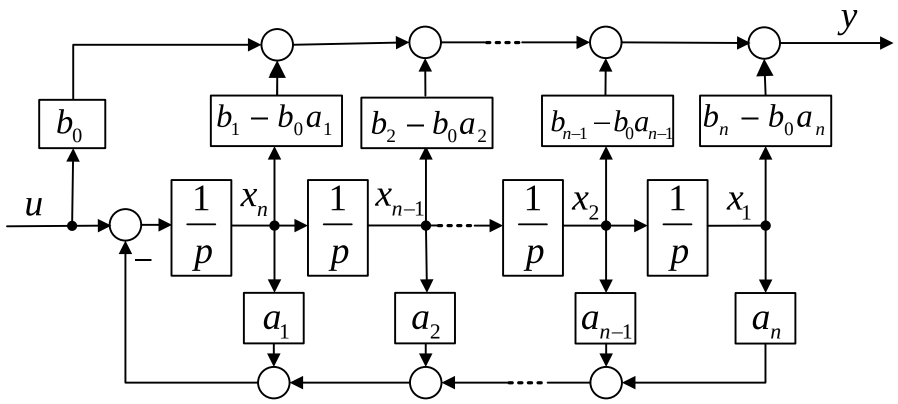


Рис. 5.12. Схема моделі у канонічній формі керованості

Канонічна форма спостережуваності. Для повністю спостережуваної системи (5.26), можна отримати ***канонічну форму спостережуваності*** у вигляді рівнянь (5.28), де

$$\mathbf{A}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_* = \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}; \tag{5.31}$$

$$\mathbf{C}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_* = b_0.$$

Матриця перетворення до канонічної форми отримується як

$$\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{o*})^{-1}\mathbf{Q}_o,$$

де $\mathbf{Q}_o$ та $\mathbf{Q}_{o*}$ – матриці спостережуваності для (5.26) та (5.28) відповідно.

Канонічна форма спостережуваності застосовується при побудові САК зі спостерігачами змінних стану об’єкта, які не вимірюються. На рис. 5.13 наведена схема моделі у канонічній формі спостережуваності.

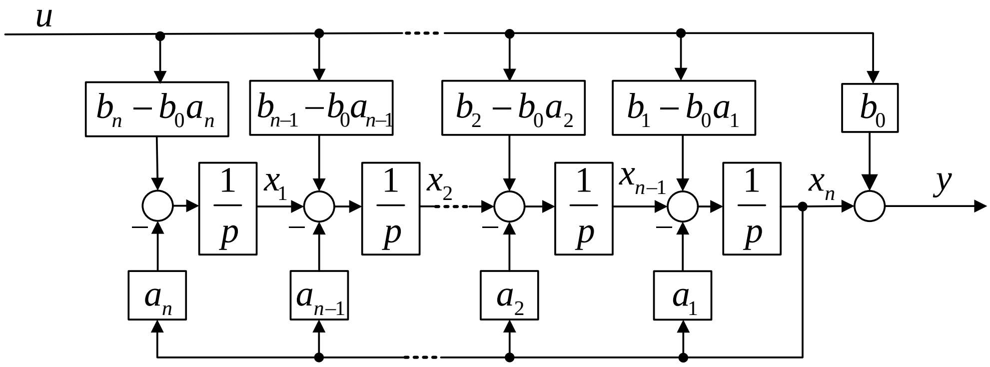


Рис. 5.13. Схема моделі у канонічній формі спостережуваності

Діагональна канонічна форма. Розглянемо систему з передатною функцією (5.25), вважаючи, що усі її полюси $p_i, i = 1,...,n$ є дійсними та некратними. Застосувавши розкладання на суму простих дробів, матимемо

$$W(p) = \frac{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + ... + b_{n-1} p + b_n}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{(p - p_1)} + \frac{c_2}{(p - p_2)} + ... + \frac{c_n}{(p - p_n)}. \tag{5.32}$$

Даному запису передатної функції у просторі стану відповідатиме ***діагональна канонічна форма*** у вигляді рівнянь (5.28), де

$$\mathbf{A}_* = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \; \mathbf{C}_* = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}; \; D_* = b_0. \quad (5.33)$$

Перехід від опису системи у канонічній формі керованості з матрицями рівнянь стану $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ до опису системи у діагональній канонічній формі з матрицями рівнянь стану $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$ можна виконати за формулами

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}\mathbf{A}_0\mathbf{P}^{-1}; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{P}\mathbf{B}_0; \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0\mathbf{P}^{-1},$$

де матриця перетворення визначається як

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & p_n \\ p_1^2 & p_2^2 & \cdots & \cdots & p_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \cdots & \cdots & p_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Діагональна канонічна форма відіграє важливу роль у задачах числового розв’язування векторно-матричних рівнянь стану. На рис. 5.14 наведена схема моделі у діагональній канонічній формі.

Зазначимо, що розглянута вище діагональна канонічна форма існує лише для систем, в яких полюси передатних функцій, або, що те саме, власні значення матриць стану є дійсними та різними. Якщо серед власних значень матриці стану наявні дійсні кратні або комплексні значення, то використовується інший варіант діагональної форми, який має назву ***канонічна форма Жордана***. Детальний опис канонічної форми Жордана можна знайти у літературі з ТАК, зокрема в [4].

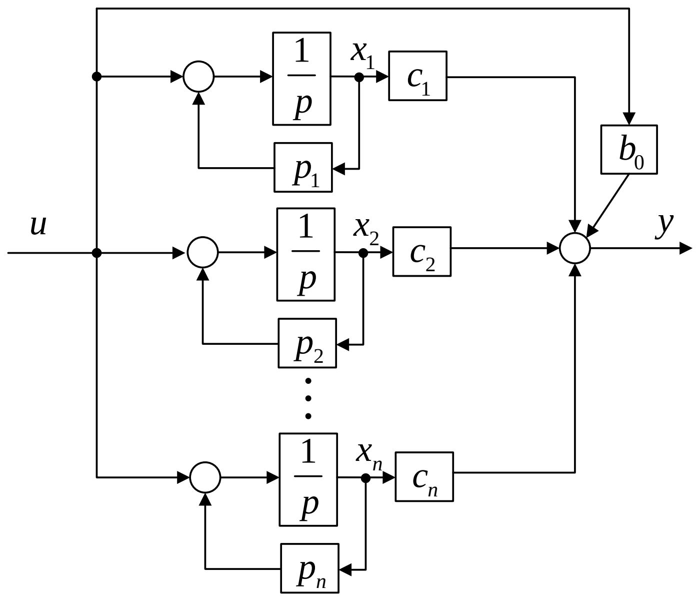


Рис. 5.14. Схема моделі у діагональній канонічній формі

Приклад 5.8. Об’єкт керування описується передатною функцією $W\left(p\right)=\dfrac{y(p)}{u(p)}=\dfrac{3p+5}{p^2+7p+12}$. Треба записати рівняння стану цього об’єкта у канонічних формах керованості, спостережуваності та у діагональній канонічній формі.

Розв’язання. Коефіцієнти поліномів чисельника та знаменника передатної функції об’єкта дорівнюють: $a_0=1, a_1=7, a_2=12, b_0=0, b_1=3, b_2=5$, порядок n=2. Дістанемо рівняння стану цього об’єкта у вигляді $\mathbf{x}'$=$\mathbf{A}\mathbf{x}$+$\mathbf{B}u$; y=$\mathbf{C}\mathbf{x}$, що відповідатимуть різним канонічним формам.

Здійснивши підстановку коефіцієнтів передатної функції у (5.30), отримаємо рівняння стану об’єкта у канонічній формі керованості

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u; \quad y=\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Виконавши підстановку коефіцієнтів передатної функції у (5.31), матимемо рівняння стану об’єкта у канонічній формі спостережуваності

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}u; \quad y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

За аналогією з (5.32) розкладемо передатну функцію об'єкта на суму простих дробів

$$W(p)=\frac{3p+5}{p^2+7p+12}=\frac{3p+5}{(p+3)(p+4)}=\frac{-4}{(p+3)}+\frac{7}{(p+4)}.$$

Підставивши у (5.33) числові значення $p_1=-3, p_2=-4, c_1=-4, c_2=7$, дістанемо рівняння стану об'єкта у діагональній канонічній формі

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u; \quad y=\begin{bmatrix} -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

5.4 Розв'язання рівнянь стану. Структурні перетворення моделей САК

5.4.1 Методи розв'язання рівнянь стану

Вище були висвітлені варіанти отримання векторно-матричних рівнянь стану динамічних систем на основі диференційних рівнянь, передатних функцій та структурних схем. Тепер розглянемо два методи розв'язання рівнянь стану.

Метод розв'язання на основі перетворення Лапласа. Векторно-матричне рівняння стану динамічної системи записується у вигляді

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \tag{5.34}$$

Для його розв'язання використаємо перетворення Лапласа. Перейшовши в (5.34) до зображень за Лапласом, отримаємо

$$p\mathbf{x}(p)-\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\mathbf{x}(p)+\mathbf{B}\mathbf{u}(p), \tag{5.35}$$

де $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & \dots & x_n(0) \end{bmatrix}^T$ – вектор початкових умов змінних стану. Нам треба розв'язати це рівняння відносно $\mathbf{x}(p)$, тому перенесемо усі члени, що містять $\mathbf{x}(p)$, у ліву частину рівняння

$$p\mathbf{x}(p)-\mathbf{A}\mathbf{x}(p)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(p). \tag{5.36}$$

Щоб винести $\mathbf{x}(p)$ за дужки, запишемо (5.36) у вигляді

$$p\mathbf{I}\mathbf{x}(p)-\mathbf{A}\mathbf{x}(p)=(p\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}(p)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(p). \quad (5.37)$$

де $\mathbf{I}$ – одинична матриця розміру $n\times n$. Із співвідношення (5.37) дістанемо

$$\mathbf{x}(p)=(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)+(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(p). \quad (5.38)$$

Щоб отримати загальний вираз для розв'язання рівняння введемо поняття ***перехідної матриці стану (матриця переходу)*** $\mathbf{\Phi}(t)$, яка дорівнює

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\left[\mathbf{\Phi}(p)\right]=L^{-1}\left[(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]. \quad (5.39)$$

Цю матрицю називають також ***фундаментальною матрицею***.

Зазначимо, що для системи n-го порядку матриця переходу має розмір $n\times n$. Зворотне перетворення Лапласа для $\mathbf{\Phi}(p)$ визначається шляхом застосування зворотного перетворення Лапласа до кожного елементу цієї матриці.

Отже, щоб знайти загальний розв'язок рівняння стану, треба визначити зворотне перетворення Лапласа для операторного рівняння стану (5.38). Зважаючи на те, що другий доданок цього рівняння є добутком двох зображень, його оригінал можна визначити за інтегралом згортки. У підсумку розв'язок рівняння стану (5.34) можна записати як

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)+\int_0^t \mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau)d\tau. \quad (5.40)$$

Отриманий розв'язок складається з двох доданків. Перший з них являє собою вільний рух системи, що виникає за рахунок початкових умов при відсутності вхідних дій $\mathbf{u}(t)=0$. Другий доданок відповідає вимушеному руху системи, зумовленого вхідними діями за нульових початкових умов $\mathbf{x}(0)=0$.

Як випливає з (5.40), головну роль у розв'язанні рівнянь стану відіграє матриця переходу $\mathbf{\Phi}(t)$. Розглянутий метод дозволяє розв'язати рівняння стану або з допомогою перетворення Лапласа, або за допомогою комбінації цього перетворення і інтегралу згортки. У будь-якому випадку процедура пов'язана з труднощами обчислювального характеру і може призводити до появи помилок. Як буде показано нижче, розв'язання рівнянь стану навіть для системи 2-го порядку є досить трудомісткою задачею. Тому на практиці слід віддати перевагу аналізу динаміки системи за допомогою моделювання.

Приклад 5.9. Треба визначити матрицю переходу $\mathbf{\Phi}(t)$ для системи, що описується рівняннями стану

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),\quad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Розв’язання. Для визначення матриці переходу спочатку знайдемо матрицю $p\mathbf{I}-\mathbf{A}$ як

$$p\mathbf{I}-\mathbf{A}=p\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+3 & -1\\ 2 & p\end{bmatrix}.$$

Щоб знайти обернену матрицю, сформуємо приєднану матрицю

$$\operatorname{adj}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}p & 1\\ -2 & p+3\end{bmatrix}$$

і обчислимо визначник

$$\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A})=p^2+3p+2=(p+1)(p+2).$$

Тоді обернена матриця буде отримана шляхом ділення приєднаної матриці на визначник $\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A})$:

$$(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{p}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{(p+1)(p+2)}\\ \dfrac{-2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{p+1}+\dfrac{2}{p+2} & \dfrac{1}{p+1}+\dfrac{-1}{p+2}\\ \dfrac{-2}{p+1}+\dfrac{2}{p+2} & \dfrac{2}{p+1}+\dfrac{-1}{p+2}\end{bmatrix}.$$

Матрицю переходу отримаємо за допомогою зворотного перетворення Лапласа згідно з (5.39) як

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\left[(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=\begin{bmatrix}-e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

Приклад 5.10. Для системи, розглянутої у прикладі 5.9, відшукати розв’язок рівняння стану в разі одиничної стрибкоподібної вхідної дії.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки на вхід системи подано одиничну східчасту дію $u(t)=1(t)$, то $u(p)=L\left[1(t)\right]=1/p$. Тоді другий член в (5.38) матиме вигляд

$$(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(p)=\begin{bmatrix}\dfrac{p}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{(p+1)(p+2)}\\ \dfrac{-2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{p}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}\\ \dfrac{p+3}{p(p+1)(p+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1/2}{p}+\dfrac{-1}{p+1}+\dfrac{1/2}{p+2}\\ \dfrac{3/2}{p}+\dfrac{-2}{p+1}+\dfrac{1/2}{p+2}\end{bmatrix}.$$

Застосовуючи зворотне перетворення Лапласа, отримаємо

$$L^{-1}\left[(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(p)\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ \dfrac{3}{2}-2e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

Матриця переходу для даної системи була знайдена в прикладі 5.6, тому повний розв'язок рівнянь стану, згідно з (5.38), має вигляд

$$\mathbf{x}(t)=L^{-1}\left[(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)+(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(p)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}-e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ \dfrac{3}{2}-2e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix},$$

а змінні стану дорівнюють

$$x_1(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)+0.5-e^{-t}+0.5e^{-2t};$$

$$x_2(t)=(-2e^{-t}+2e^{-2t})x_1(0)+(2e^{-t}-e^{-2t})x_2(0)+1.5-2e^{-t}+0.5e^{-2t}.$$

Метод розв'язання шляхом розкладання у степеневий ряд. Один із методів розв'язання диференційних рівнянь полягає в наступному. Вважають, що розв'язок має вигляд степеневого нескінченного ряду з невідомими коефіцієнтами. Цей ряд підставляють в диференційне рівняння і таким чином визначають невідомі коефіцієнти. Скористаємося цим методом для знаходження матриці переходу. Припустимо, що всі вхідні дії у системі дорівнюють нулю $\mathbf{u}(t)=0$. Тоді рівняння (5.34) стане однорідним у вигляді

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)\,, \tag{5.41}$$

а його розв'язок, на підставі (5.40), запишеться як

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(\mathrm{t})\mathbf{x}(0)\,. \tag{5.42}$$

Оскільки відшукується вектор $\mathbf{x}(t)$, запишемо його у вигляді ряду

$$\mathbf{x}(t)=(\mathbf{N}_0+\mathbf{N}_1t+\mathbf{N}_2t^2+\mathbf{N}_3t^3+\ldots)\mathbf{x}(0)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{N}_it^i\mathbf{x}(0)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0), \tag{5.43}$$

де всі матриці $\mathbf{N}_i$ розміру $n\times n$ є невідомими. Диференціюючи цей вираз, отримаємо

$$\mathbf{x}'(t)=(\mathbf{N}_1+2\mathbf{N}_2t+3\mathbf{N}_3t^2+\ldots)\mathbf{x}(0).. \tag{5.44}$$

Підставивши (5.43) і (5.44) в (5.41), дістанемо

$$(\mathbf{N}_1+2\mathbf{N}_2t+3\mathbf{N}_3t^2+\ldots)\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}(\mathbf{N}_0+\mathbf{N}_1t+\mathbf{N}_2t^2+\ldots)\mathbf{x}(0). \tag{5.45}$$

Далі зробимо такі кроки. Спочатку обчислимо (5.45) при $t=0$. Потім продиференціюємо (5.45) і знайдемо результат при $t=0$. Ще раз продиференціюємо цей вираз за $t=0$. Повторюючи ці дії, кожен раз будемо отримувати рівняння щодо невідомої матриці $\mathbf{N}_i$. В результаті матимемо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1&=\mathbf{A}\mathbf{N}_0;\\2\mathbf{N}_2&=\mathbf{A}\mathbf{N}_1;\\3\mathbf{N}_3&=\mathbf{A}\mathbf{N}_2;\\&\vdots\end{aligned} \tag{5.46}$$

Обчислення (5.43) при $t=0$ дає результат $\mathbf{N}_0=\mathbf{I}$. Тоді інші матриці визначаються з рівнянь (5.46) як

$$\mathbf{N}_1=\mathbf{A};\quad \mathbf{N}_2=\frac{\mathbf{A}^2}{2!};\quad \mathbf{N}_3=\frac{\mathbf{A}^3}{3!};\ldots. \tag{5.47}$$

Отже, матриця переходу, подана в (5.43) у вигляді нескінченного ряду, може бути записана як

$$\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!}+\mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!}+\ldots. \tag{5.48}$$

Порівнюючи (5.48) з розкладанням в степеневий ряд скалярної експоненти

$$e^{qt} = 1 + qt + q^2\frac{t^2}{2!} + q^3\frac{t^3}{3!} + \ldots, \tag{5.49}$$

приходимо до висновку, що матрицю переходу можна подати як експонентну функцію матриці стану $\mathbf{A}$ у вигляді

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}. \tag{5.50}$$

Подання $\mathbf{\Phi}(t)$ у вигляді степеневого нескінченного ряду має переваги, коли рівняння стану розв'язуються у числовому вигляді шляхом цифрового моделювання.

Приклад 5.11. Визначити матрицю переходу за допомогою розкладання у степеневий ряд для системи з рівнянням стану

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t).$$

Розв'язання. Обчислимо для виразу (5.48) матрицю стану у декількох степенях

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2 = 0\ldots.$$

Отже, матриця переходу на основі (5.48) дорівнює

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У даному прикладі матриця переходу була отримана досить просто, оскільки її розкладання в ряд має скінченне число членів. Але це є винятком.

5.4.2 Структурні перетворення моделей САК у просторі стану

При дослідженні САК доволі часто виникає потреба отримати опис еквівалентної системи, яка відповідає паралельному чи послідовному з'єднанню систем, а також системі зі зворотним зв'язком. Для спрощення нижче розглядатимемо одновимірні САК.

Нехай є дві системи, що описуються рівняннями стану

$$\mathbf{x}_1'=\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{B}_1u_1; \qquad y_1=\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1+D_1u_1, \tag{5.51}$$

$$\mathbf{x}_2'=\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2+\mathbf{B}_2u_2; \qquad y_2=\mathbf{C}_2\mathbf{x}_2+D_2u_2. \tag{5.52}$$

Паралельне з'єднання систем. Схема паралельного з'єднання систем зображена на рис. 5.15. Опис еквівалентної системи, що відповідає двом

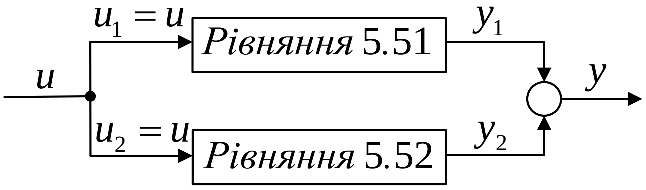


Рис. 5.15. Схема паралельного з'єднання систем

паралельно з'єднаним САК, матиме вигляд

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u; \qquad y=\mathbf{C}\mathbf{x}+Du,$$

де

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & 0\\ 0 & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}; \quad D=D_1+D_2.$$

Послідовне з'єднання систем. Схема послідовного з'єднання систем зображена на рис. 5.16. Еквівалентна система, що відповідає двом послідовно

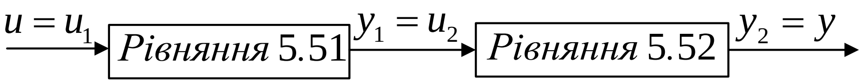


Рис. 5.16. Схема послідовного з'єднання систем

з'єднаним САК, описуватиметься рівняннями стану

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u; \qquad y=\mathbf{C}\mathbf{x}+Du,$$

де

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & 0\\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2D_1\end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}D_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}; \quad D=D_1D_2.$$

Система зі зворотним зв'язком. Схема системи зі зворотним зв'язком зображена на рис. 5.17. Опис еквівалентної САК, що відповідає

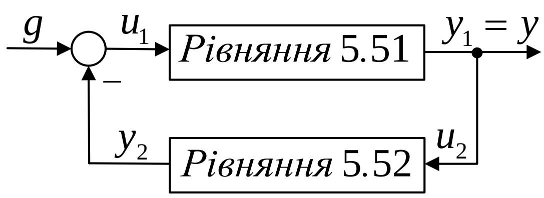


Рис. 5.17. Схема системи зі зворотним зв'язком

охопленій зворотним зв'язком системі, матиме вигляд

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}g; \qquad y=\mathbf{C}\mathbf{x}+Dg, \tag{5.53}$$

де

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1-\mathbf{B}_1KD_2\mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1K\mathbf{C}_2\\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1(1-D) & \mathbf{A}_2-\mathbf{B}_2D_1K\mathbf{C}_2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1K\\ \mathbf{B}_2D_1K\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}D_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}(1-D); \quad D=D_1D_2K, \quad K=(1+D_1D_2)^{-1}.$$

5.2 Синтез модальних САК

5.2.1 Принцип модального керування

Принцип модального керування полягає у забезпеченні бажаного розташування полюсів замкнутої системи шляхом застосування регулятора у вигляді набору пропорційних зворотних зв'язків за кожною змінною стану об'єкта керування. Термін «***модальне керування***» пояснюється тим, що полюси передатної функції системи є власними значеннями (***модами***) її матриці стану, які визначають складники вільного руху системи.

Викладемо загальну процедуру синтезу системи модального керування. Розглянемо лінійний одновимірний об'єкт керування n-го порядку, який описується рівняннями стану

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t);\\ &y(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned} \tag{5.54}$$

де вхід $u(t)$ та вихід $y(t)$ є скалярними величинами. Будемо вважати, що усі змінні стану об’єкта вимірюються, а на вхід системи поступає завдання $\mathrm{g}(t) = 0.$ Задача синтезу полягає у визначенні бажаного положення коренів характеристичного рівняння замкнутої системи на комплексній площині та знаходження коефіцієнтів регулятора, які забезпечують задане розташування коренів. При цьому бажане розташування коренів вибирається з огляду на забезпечення потрібних показників якості керування.

Закон керування для ***модального регулятора стану*** матиме вигляд

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \tag{5.55}$$

де $\mathbf{K} = [K_1\ K_2\ ...K_n]$ – матриця постійних коефіцієнтів регулятора стану (РС) розміру $1 \times n$. Далі ми покажемо, що цей закон керування дозволяє розташовувати всі полюси замкнутої системи в будь-яких заданих точках комплексної площини. Вираз (5.55) можна записати у вигляді

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - ... - K_n x_n(t).$$

Звідси бачимо, що сигнал керування, який подається на вхід об’єкта, є лінійною комбінацією всіх змінних стану. На основі рівнянь (5.54) та (5.55) побудована структурна схема замкнутої системи, яка зображена на рис. 5.18.

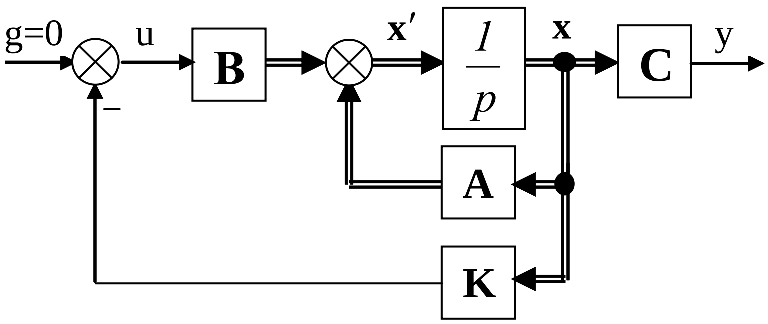


Рис. 5.18. Схема модальної системи стабілізації

Оскільки вхід системи дорівнює нулю, то її призначення зводиться до того, щоб після пуску відпрацювати ненульові початкові умови і далі підтримувати вектор стану і керовану величину рівними нулю. В реальних умовах на об’єкт можуть діяти збурення (на рис. 5.18 не показані), які відхилятимуть його вихід від нуля. У цьому разі зворотні зв’язки діятимуть таким чином, щоб повернути значення керованої величини і змінних стану до нуля із визначеними наперед динамічними показниками. Системи такого типу при вхідному сигналі, рівному нулю або іншій постійній величині, зазвичай називаються ***системами стабілізації*** або ***системами регулювання стану***.

Підставляючи (5.55) в перше рівняння (5.54), отримаємо рівняння стану замкнутої системи

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)-\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}_{\text{c}}\mathbf{x}(t), \qquad (5.56)$$

де $\mathbf{A}_{\text{c}}$ – ***матриця стану замкнутої САК***, що дорівнює

$$\mathbf{A}_{\text{c}}=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}) \qquad (5.57)$$

За (5.57) можна записати характеристичне рівняння замкнутої системи

$$\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}_{\text{c}})=\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})=0. \qquad (5.58)$$

Припустимо, що за умовами синтезу корені характеристичного рівняння повинні мати значення $-p_1,-p_2,...,-p_n$. Бажане характеристичне рівняння системи тоді можна записати у вигляді:

$$H(p)=p^n+h_1p^{n-1}+...+h_{n-1}p+h_n=(p+p_1)(p+p_2)+...+(p+p_n)=0. \qquad (5.59)$$

Згідно з процедурою синтезу шляхом розташування полюсів необхідно знайти таку матрицю $\mathbf{K}$, щоб вирази (5.58) і (5.59) дорівнювали

$$\det(p\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})=p^n+h_1p^{n-1}+...+h_{n-1}p+h_n. \qquad (5.60)$$

Рівняння (5.60) містить n невідомих $K_1,K_2,...,K_n$. Прирівнюючи в цьому рівнянні коефіцієнти при однакових степенях p, отримаємо n лінійних рівнянь. Отже, розв’язавши систему з n рівнянь, можна буде визначити елементи матриці коефіцієнтів модального регулятора $\mathbf{K}$, що забезпечать розташування всіх полюсів замкнутої системи в заданих точках.

Розглянуту процедуру синтезу доцільно використовувати для об’єктів невисокого порядку. Нижче ми розглянемо більш ефективний метод визначення елементів матриці $\mathbf{K}$ числовим способом.

5.5.2 Формула Акермана

Зручна у практичному застосуванні формула для обчислення матриці $\mathbf{K}$, що задовольняє рівняння (5.60), була запропонована Акерманом (*J. Ackermann*). Розглянемо суть цієї формули.

Нехай об'єкт n-го порядку має передатну функцію

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=\frac{b_1p^{n-1}+...+b_{n-1}p+b_n}{p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n}.$$

Отримаємо рівняння стану цього об'єкта у канонічній формі керованості. Вони матимуть вигляд

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}u(t); \qquad (5.61)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t);$$

Відмітимо особливість матриці стану $\mathbf{A}$ в (5.61). В останньому рядку знаходяться коефіцієнти характеристичного рівняння системи зі знаком мінус. Отже ми одразу можемо записати характеристичне рівняння. Закон модального керування відповідає (5.55). Тому добуток $\mathbf{BK}$ для канонічної форми керованості дорівнює

$$\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}[K_1\ K_2\ ...K_n]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ K_1 & K_2 & \cdots & \cdots & K_n\end{bmatrix}.$$

Матриця стану замкнутої системи, що визначається за (5.38), матиме вигляд

$$\mathbf{A}_c=\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_n-K_1 & -a_{n-1}-K_2 & \cdots & \cdots & -a_1-K_n\end{bmatrix}.$$

На основі цієї матриці отримаємо характеристичне рівняння замкнутої САК

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{c}}) = p^n + (a_n + K_1)p^{n-1} + (a_{n-1} + K_2)p^{n-2} + \ldots + (a_1 + K_n) = 0 .$$

Бажане характеристичне рівняння замкнутої системи запишемо за (5.59) як

$$H(p) = p^n + h_1 p^{n-1} + \ldots + h_{n-1}p + h_n = 0 .$$

Прирівнявши в обох останніх рівняннях коефіцієнти при однакових степенях p, отримаємо формулу для визначення шуканих величин

$$K_{n+1-i} = a_i - h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{5.62}$$

Останній вираз являє собою загальний розв'язок задачі синтезу шляхом розміщення полюсів для системи з одним виходом і одним входом. Але для цього необхідно, щоб модель системи відповідала канонічній формі керованості. Цю вимогу виконати не просто, оскільки змінні стану в такій моделі зазвичай не відповідають реальним фізичним змінним і тому не відображають фізичну сторону процесів керування. Окрім цього, в загальному випадку змінні стану системи у канонічній формі керованості, можуть бути недоступні для вимірювання.

Формула Акермана ґрунтується на перетворенні подібності, яке переводить задану модель довільної структури в канонічну форму керованості, після чого за допомогою (5.62) визначаються шукані коефіцієнти K_i. Далі здійснюється зворотний розрахунок до початкової структури системи. Всі ці дії виконуються за допомогою формули Акермана у вигляді

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{c}}^{-1} H(\mathbf{A}), \tag{5.63}$$

де $\mathbf{Q}_{\text{c}}$ – матриця керованості системи, яка визначається за (5.22); $H(\mathbf{A})$ – матричний поліном, утворений шляхом використання бажаного характеристичного полінома $H(p)$ як

$$H(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + h_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + h_{n-1}\mathbf{A} + h_n\mathbf{I} .$$

Зазначимо, що в MATLAB наявна функція *acker*, яка у числовий спосіб реалізує формулу (5.63). Якщо є відомими матриця коефіцієнтів регулятора $\mathbf{K}_*$ для системи у канонічній формі керованості та матриця $\mathbf{P}$ перетворення до цієї форми, то здійснити зворотний перехід до опису системи у вихідному базисі можна за виразом $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{*}\mathbf{P}$.

5.5.3 Стандартні характеристичні поліноми замкнутих систем

При модальному керуванні зв'язок полюсів замкнутої системи з потрібними показниками якості забезпечується шляхом використання ***стандартних поліномів***, які визначають коефіцієнти характеристичного рівняння проектованої системи. Стандартним поліномам можна поставити у відповідність ***модальну еталонну модель*** **(МЕМ)**, яка має бажані показники якості керування. Тому в загальному випадку ***синтез модального регулятора полягає у формуванні модальної еталонної моделі з бажаними показниками якості та визначенні коефіцієнтів зворотних зв'язків за змінними стану об'єкта, що забезпечать у замкнутій проектованій САК такі ж самі полюси, як і в МЕМ.***

Нехай стандартний поліном має вигляд

$$H(p) = p^n + h_1 p^{n-1} + \ldots + h_{n-1} p + h_n . \qquad (5.64)$$

Розглянемо розімкнену систему, яка описується передатною функцією

$$W(p) = \frac{y(p)}{e(p)} = \frac{h_n}{p(p^{n-1} + h_1 p^{n-2} + \ldots + h_{n-1})}, \qquad (5.65)$$

де e – вхід системи, y – її вихід. Після замикання одиничного від'ємного зворотного зв'язку за виходом, замкнута система матиме передатну функцію

$$W_g(p) = \frac{y(p)}{g(p)} = \frac{h_n}{p^n + h_1 p^{n-1} + \ldots + h_{n-1} p + h_n}. \qquad (5.66)$$

де g – сигнал завдання, e – вихід суматора, що являє собою помилку системи $e = g - y$.

Розглянуту динамічну систему приймемо за МЕМ. Для цієї моделі можуть визначатися показники якості перехідного процесу у вигляді часу регулювання t_p та перерегулювання σ. Також можна отримати показник якості у частотній області – частоту пропускання $\omega_{\text{п}}$. Цей показник визначається за АЧХ $A_g(\omega) = |W_g(j\omega)|$ з умови $A_g(\omega_{\text{п}}) = 0.707$. Крім цього, можна визначити показник точності роботи в усталених режимах при лінійному завданні $g = \text{v}t, \text{v} = const$ – добротність за швидкістю K_{v}^g. Як було сказано вище (п. 4.8.1), даний показник є відношенням швидкості v до усталеної помилки $e_{\text{уст}} = e(\infty)$, тобто $K_{\text{v}}^g = \text{v}/e_{\text{уст}}$. Зважаючи на те, що МЕМ має 1-й порядок астатизму, її добротність за швидкістю щодо завдання можна обчислити за передатною функцією (5.65) як $K_{\text{v}}^g = pW(p)_{|p=0} = h_n/h_{n-1}$.

Стандартні поліноми часто записують у параметризованому вигляді

$$H(p) = p^n + \alpha_1\omega_0 p^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_0^{n-1} p + \alpha_n \omega_0^n, \tag{5.67}$$

де ***характеристична частота*** ω_0 є параметром. Коефіцієнти поліномів (5.64) та (5.67) пов’язані між собою як $h_i = \alpha_i \omega_0^i,\ i = \overline{1,n}$.

Параметр ω_0 в (5.67) визначає реальний час перебігу перехідних процесів у системі і його вибір в загальному випадку не є однозначним. При збільшенні ω_0 позитивним ефектом є зростання швидкодії системи і частоти пропускання, а також поліпшення точності керування. Проте існує і негативний ефект, який полягає у підвищенні енергетичних витрат на керування та розширенні зони потенційного впливу на САК високочастотних завад. Тому значення ω_0 слід вибирати з огляду на отримання заданих показників якості керування, але без необґрунтованого завищення.

На сьогодні відома низка стандартних поліномів, зокрема біноміальний, Батерворта, Бесселя тощо. Розглянемо три зазначені поліноми, які часто застосовуються на практиці.

Біноміальний поліном – це біном Ньютона, який має вигляд

$$H(p) = (p + \omega_0)^n. \tag{5.68}$$

Всі корені цього полінома є від'ємними, дійсними та однаковими, вони дорівнюють $p_i = -\omega_0, i = 1,...,n$. Якщо МЕМ матиме біноміальний характеристичний поліном, то її перехідна характеристика буде аперіодичною без перерегулювання.

У поліномах Батерворта корені розташовуються на півколі з радіусом ω_0 у лівій півплощині комплексної площини. Кут між уявною віссю та лінією, проведеною через найближчий до неї корінь і точку перетину уявної та дійсної осей, дорівнює половині кута між сусідніми коренями. За використання в МЕМ характеристичного полінома Батерворта, її перехідна характеристика буде коливальною з порівняно невеликим перерегулюванням – до 15% для $n = 1,...,6$. Особливістю АЧХ модальної еталонної моделі буде те, що в значній частині смуги пропускання вона матиме плоску форму.

У поліномах Бесселя домінуюча пара комплексно-спряжених коренів розташована далі від уявної осі комплексної площини, ніж у поліномах Батерворта. Тому в МЕМ з характеристичним поліномом Бесселя коливальність перехідної характеристики буде меншою, а перерегулювання не перевищуватиме 1%. В цьому разі ФЧХ еталонної моделі буде особлива тим, що у смузі пропускання фаза залежатиме від частоти лінійно (як у ланці запізнення).

В Додатку В у табл. В1-В3 для біноміальних поліномів, поліномів Батерворта та поліномів Бесселя порядків $n = 1,...,6$ наведені аналітичні вирази, а також показники якості МЕМ з цими характеристичними поліномами. Усі дані подані в параметризованій частотою ω_0 формі. Перехідні характеристики модальної еталонної моделі з використанням біноміальних поліномів зображені на рис. В1,а, поліномів Батерворта – на рис. В1,б, а поліномів Бесселя – на рис. В1,в. Ці графіки отримано для порядків $n = 1,...,6$ та характеристичної частоти $\omega_0 = 1\,c^{-1}$.

Порівняння поданих у табл. В1-В3 показників якості МЕМ з трьома стандартними характеристичними поліномами дозволяє зробити наступні висновки:

- ***відсутність перерегулювання перехідної характеристики забезпечується лише при використанні біноміальних поліномів;***
- ***найменший час регулювання при заданій ω_0 отримується в разі використання поліномів Бесселя;***
- ***найбільші частота пропускання і добротність за швидкістю при заданій ω_0 досягаються за використання поліномів Батерворта.***

З деякими додатковими відомостями щодо розглянутих стандартних поліномів можна ознайомитися в [9].

5.6 Приклад синтезу модальної системи керування

Постановка задачі синтезу. Необхідно у відповідності з вихідними вимогами здійснити синтез системи модального керування об'єктом, яким є двигун постійного струму з незалежним збудженням. Система призначена для відпрацювання завдання $g(t) = \mathrm{var}$ (задача стеження). Вимоги до системи формулюються у вигляді заданих показників якості керування: 1) час регулювання $t_p \le 0.1c$; 2) перерегулювання $\sigma \le 10\%$; 3) добротність за швидкістю щодо завдання $K_v^g \ge 35c^{-1}$; 4) частота пропускання $\omega_п \ge 75c^{-1}$.

Структурна схема ОК зображена на рис. 5.19, де u – вхід; y – вихід; x_1, x_2, x_3 – кутове положення, кутова швидкість і струм якоря двигуна. Приймемо, що давачі для вимірювання цих величин – пропорційні ланки з одиничним коефіцієнтом передачі. Значення параметрів об'єкта (у відповідних одиницях системи СІ): $k_1 = 22$; $k_2 = 10$; $k_3 = 5$; $k_4 = 1$; $k_5 = 2$; $T_2 = 0.8$.

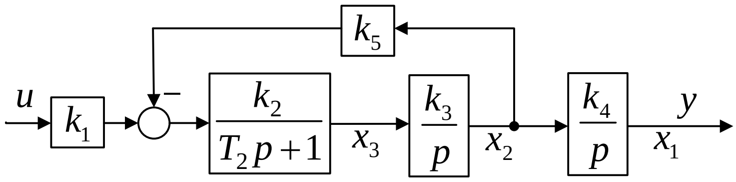


Рис. 5.19. Схема об'єкта керування

Розв'язання задачі синтезу. Синтез системи модального керування полягатиме у виконанні наступних п'яти кроків.

1) <u>*Отримання опису об’єкта керування у просторі стану*</u>. Як видно із схеми на рис. 5.19, порядок об’єкта $n=3$. Оскільки три його фізичних змінних x_1, x_2, x_3 вимірюються, то доцільно саме їх використати для замикання зворотних зв’язків при модальному керуванні. У цьому разі рівняння стану ОК слід отримати у фізичному базисі щоб можна було їх застосувати для визначення матриці коефіцієнтів зворотних зв’язків модального регулятора у цьому ж базисі. Для отримання опису об’єкта у просторі стану скористаємося способом декомпозиції структурної схеми до рівня інтеграторів. Здійснивши перетворення схеми на рис. 5.19, отримаємо деталізовану структуру ОК, що зображена на рис. 5.20.

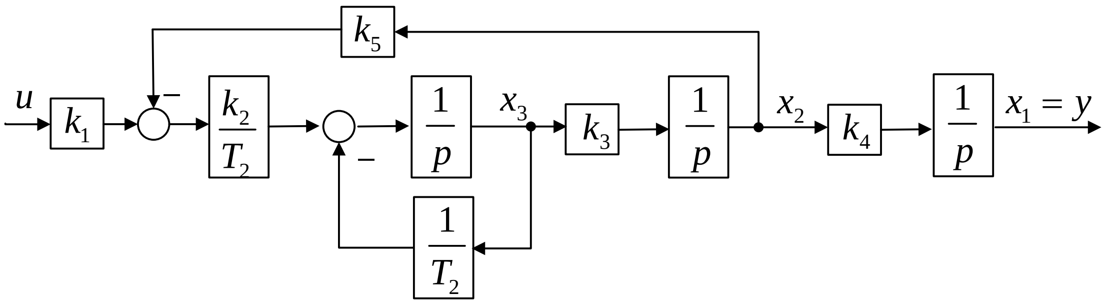


Рис. 5.20. Деталізована структурна схема об’єкта керування

Тепер безпосередньо за наведеною на рис. 5.20 деталізованою схемою запишемо рівняння стану ОК у фізичному базисі

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ 0 & -\dfrac{k_2 k_5}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_1 k_2}{T_2} \end{bmatrix} u; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Також нам буде корисною модель «вхід-вихід» у вигляді передатної функції. За схемою на рис. 5.19 отримаємо передатну функцію об’єкта

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{T_2 p^3 + p^2 + k_2 k_3 k_5 p}.$$

Доцільно переконатися у коректності отриманих рівнянь стану. Це можна зробити шляхом порівняння перехідних або вагових характеристики двох моделей ОК, одна з яких описується передатною функцією, а інша – рівняннями стану. Для цього запишемо у MATLAB наступну програму.

```
% Program 5.4
k1=22; k2=10; k3=5; k4=1; k5=2; T2=0.8;   % Значення параметрів ОК
A=[0, k4, 0; 0, 0, k3; 0, -k2*k5/T2, -1/T2];   % Формування матриць рівнянь стану
B=[0; 0; k1*k2/T2]; C=[1, 0, 0]; D=[0];
model_ss=ss(A,B,C,D);            % Створення моделі з описом у просторі стану
model_tf=tf([k1*k2*k3*k4],[T2, 1, k2*k3*k5, 0]);   % Створення моделі з описом ПФ
impulse(model_tf,'b-', model_ss,'b*');    %Побудова вагових хар-тик обох моделей
```

Результати роботи програми зображені на рис. 5.21. Як бачимо, обидві вагові характеристики співпадають. Отже отримані рівняння стану ОК відповідають його передатній функції і є правильними.

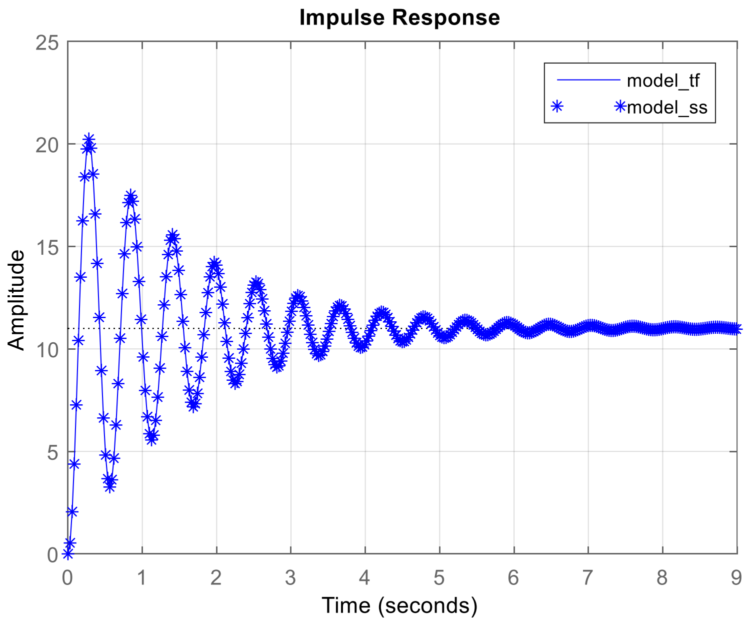


Рис. 5.21. Вагові характеристики системи, отримані за передатною функцією та рівняннями стану

2) *Перевірка керованості об'єкта*. Для перевірки керованості ОК треба визначити матрицю керованості за (5.22) та обчислити її ранг. Складемо для цього програму в MATLAB, що буде продовженням попередньої програми.

```
% Program 5.5 (Продовження програми 5.4)
Qc=[B, A*B,  A*A*B];   % Формування матриці керованості об'єкта
rank_Qc=rank(Qc);      % Визначення рангу матриці керованості
rank_Qc,
```

Результат розрахунку має вигляд:

rank_Qc =
3

Оскільки ранг матриці керованості об’єкта дорівнює його порядку, то об’єкт є повністю керованим. Це засвідчує можливість керування об’єктом за допомогою модального регулятора.

3) *Вибір бажаного характеристичного полінома замкнутої системи*. У вимогах до системи не зазначена необхідність аперіодичної перехідної характеристики з нульовим перерегулюванням, тому для нашої задачі можуть бути застосовані стандартні поліноми як біноміальний, так і Батерворта або Бесселя (в іншому разі треба було б застосовувати тільки біноміальний поліном). Віддаємо перевагу другому варіанту полінома, оскільки за тієї ж самої характеристичної частоти ω_0 він, серед трьох стандартних поліномів, забезпечує найбільші значення добротності за швидкістю та частоти пропускання. Згідно з даними табл. В2, поліном Батерворта порядку $n = 3$ у параметризованому вигляді записується як $H(p) = p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$. Як бачимо з табличних даних, МЕМ з цим характеристичним поліномом матиме перерегулювання $\sigma = 9\%$, що задовольняє завдання на синтез.

Для визначення ω_0 запишемо такі нерівності:

$$\omega_0 \geq 6.25/t_p\,; \qquad \omega_0 \geq K_{\mathrm{v}}^{g}/0.5; \qquad \omega_0 \geq \omega_{\text{п}}\,.$$

Підставивши у ці нерівності показники якості, що задані у вимогах до системи, отримаємо значення характеристичної частоти $\omega_0 = 80\,c^{-1}$. За цієї частоти бажане характеристичне рівняння замкнутої системи запишеться як

$$H(p) = p^3 + 160p^2 + 12800p + 512000 = 0\,.$$

4) *Отримання матриці коефіцієнтів модального регулятора*. Маючи бажаний характеристичний поліном $H(p)$ замкнутої системи, за допомогою формули Акермана визначимо матрицю **K** коефіцієнтів модального РС для ОК. Після цього порівняємо полюси $H(p)$ та власні значення матриці стану

замкнутої системи $\mathbf{A}_c$. Для реалізації цих дій запишемо відповідну програму у MATLAB, яка буде продовженням попередніх двох програм.

```
% Program 5.6 (Продовження програм 5.4 та 5.5)
polynomial_H=[1  160  12800  512000];  % Формування характеристичного полінома
poles_H=roots(polynomial_H);              % Визначення полюсів ПФ замкнутої САК
K=acker(A,B, poles_H),   % Розрахунок матриці регулятора К за формулою Акермана
Ac=A-B*K;                       % Отримання матриці стану Ac замкнутої САК
eigenvalues_Ac=eig(Ac); % Розрахунок власних значень матриці Ac
poles_H,
eigenvalues_Ac,
```

Результатом роботи програми є:

```
poles_H =
 -8.0000e+01 + 0.0000e+00i
 -4.0000e+01 + 6.9282e+01i
 -4.0000e+01 - 6.9282e+01i
eigenvalues_Ac =
 -8.0000e+01 + 0.0000e+00i
 -4.0000e+01 + 6.9282e+01i
 -4.0000e+01 - 6.9282e+01i
```

Бачимо, що корені бажаного характеристичного полінома *polynomial_H* та власні значення матриці стану замкнутої системи *Ac* співпадають, що засвідчує коректність обчислень на основі формули Акермана.

Отже ми визначили вектор коефіцієнтів модального регулятора $\mathbf{K}=[K_1\ K_2\ K_3]$, де K_1 – коефіцієнт зворотного зв’язку за змінною стану x_1, яка дорівнює виходу об’єкта $y = x_1$. Проте у системі стеження, якою є синтезована САК, бажано мати за керованою величиною одиничний зворотний зв’язок. Щоб досягти цього, введемо у коло завдання пропорційну ланку з коефіцієнтом K_1. Тоді закон керування матиме вигляд

$$u(t) = K_1 g(t) - K_1\,\mathrm{y}(t) - K_2 x_2(t) - K_3 x_3(t)\,.$$

Згрупувавши члени з K_1, остаточно отримаємо

$$u(t) = K_1 e(t) - K_2 x_2(t) - K_3 x_3(t)\,.$$

де $e(t) = g(t) - y(t)$ – помилка системи. На основі цього виразу та отриманого вище опису ОК у просторі стану побудуємо структурну схему синтезованої стежної системи з модальним керуванням, яка зображена на рис. 5.22.

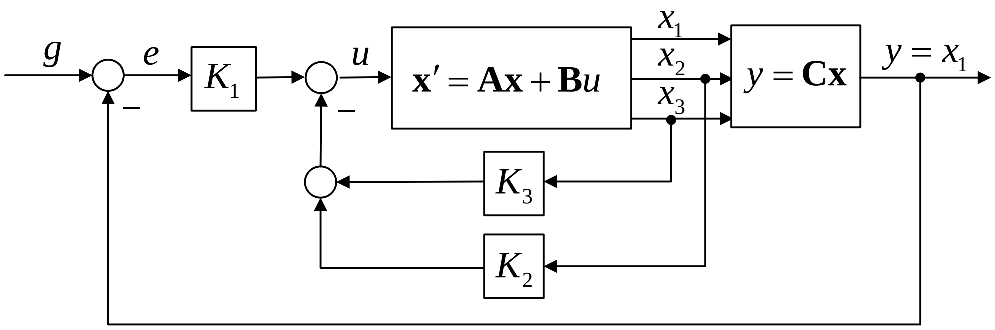


Рис. 5.22. Схема синтезованої модальної системи стеження

5) *Дослідження показників якості синтезованої системи*. Для проведення дослідження показників якості керування синтезованої системи зручно скористатися програмою SIMULINK. Спочатку введемо у робочий простір MATLAB обчислені значення коефіцієнтів зворотних зв'язків за змінними стану наступним рядком програми.

K1=K(1); K2=K(2); K3=K(3);

Далі побудуємо у SIMULINK модель синтезованої системи модального керування. Схема моделі зображена на рис. 5.23.

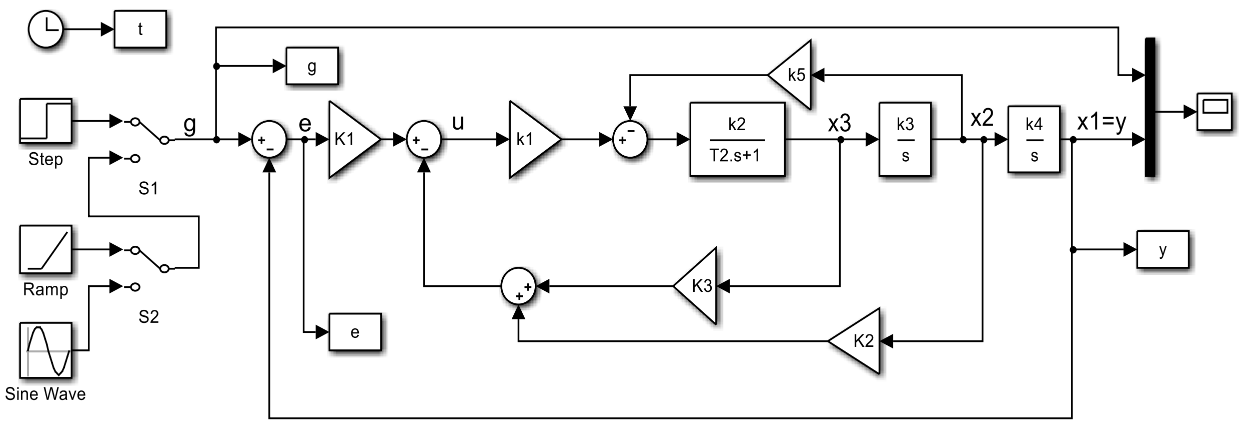
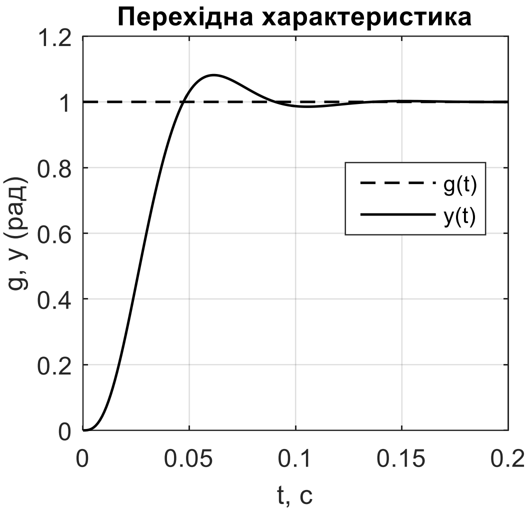


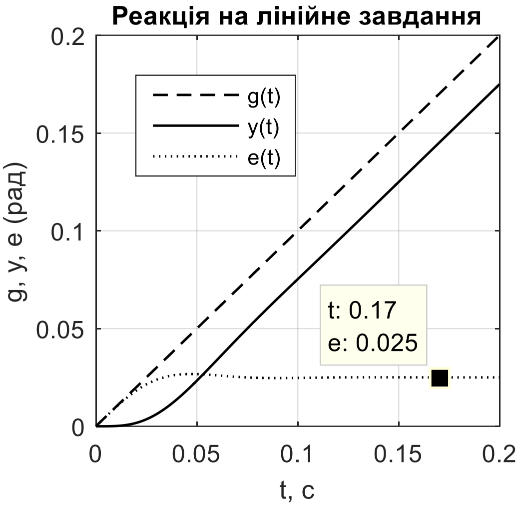
Рис. 5.23. Схема моделі синтезованої САК у SIMULINK

У моделі за допомогою перемикачів S1, S2 вибирається завдання $g(t)$ у вигляді одного з трьох типових сигналів: стрибкоподібного (блок *Step*), лінійно-змінюваного (блок *Ramp*) та гармонічного (блок *Sine Wave*). Низка змінних величин, зокрема t, g, e, y, фіксуються у робочому просторі MATLAB за допомогою блоків *To Workspace* з метою побудови графіків функцією *plot.*

Результати досліджень, отримані за допомогою моделі синтезованої системи, показані на рис. 5.24. Реакція на східчасте завдання $g(t) = 1(t)$, що



а)



б)

Рис. 5.24. Реакція на східчасте (а) та лінійне (б) завдання синтезованої САК

являє собою перехідну характеристику системи, представлена на рис. 5.24,а. За кривою $y(t)$ бачимо, що перерегулювання $\sigma = 9\%$, а час регулювання $t_p = 0.075\,c$. На рис. 5.24,б зображено процес відпрацювання системою лінійного завдання $g(t) = \text{v}t$, де $\text{v} = 1\,рад/c$. З цього рисунка видно, що усталене значення помилки $e_{уст} = 0.025\,рад$. Отже добротність системи за швидкістю

$$K_{\text{v}}^{g} = \frac{1\,рад/c}{0.025\,рад} = 40\,c^{-1}.$$

Реакція системи на гармонічне завдання $g(t) = a_g \sin(\omega t)$ за $a_g = 1\,рад, \omega = 75\,c^{-1}$ показана на рис. 5.25. Аналіз зображених на рисунку кривих показує, що за одиничної амплітуди сигналу завдання амплітуда виходу системи в усталеному режимі сягає $a_y = 0.7715\,рад$. Оскільки $a_y / a_g > 0.707$, то в системі частота пропускання $\omega_п > 75\,c^{-1}$.

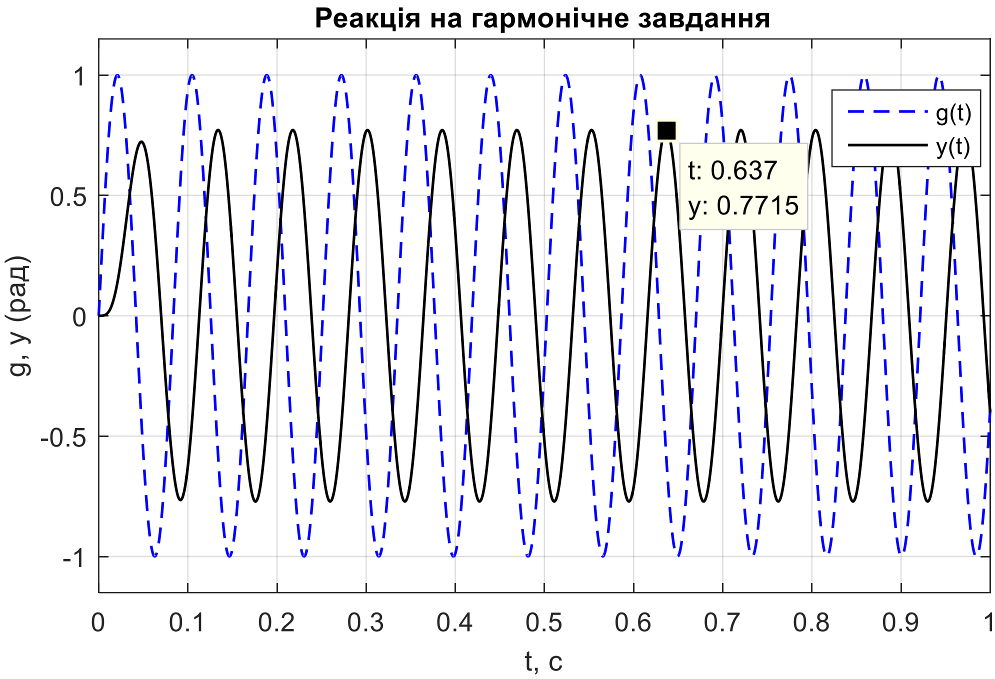


Рис. 5.25. Реакція синтезованої системи на гармонічне завдання

Для зручності порівняння тих показників якості керування, які були задані у вихідних вимогах при постановці задачі синтезу, з тими, які були отримані шляхом дослідження синтезованої САК, зведемо їх у табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Порівняння заданих та отриманих показників якості керування синтезованої системи

Показники якості САК	Задані значення	Отримані значення
Час регулювання t_p, c	≤ 0.1	0.075
Перерегулювання $\sigma, \%$	≤ 10	9
Добротність за швидкістю K_v^g, c^{-1}	≥ 35	40
Частота пропускання $\omega_п, c^{-1}$	≥ 75	> 75

Таким чином, аналізуючи дані порівняльної табл. 5.1, можна зробити висновок, що синтезована система модального керування за своїми показниками якості повністю задовольняє вихідні вимоги до неї.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке змінні стану, вектор стану та простір стану деякої динамічної системи?

2. Зобразіть простір стану для систем 1-го та 2-го порядку.

3. Зобразіть простір стану для систем 3-го порядку.

4. Що таке траєкторія вектору стану?

5. Що таке зображувальна точка у просторі стану?

6. Поясніть суть методу змінних стану для описання систем.

7. Запишіть у загальному вигляді векторно-матричні рівняння стану системи.

8. Чим особливий опис динамічного об'єкта в просторі стану у фізичному базисі?

9. Зобразіть структурну схему багатовимірної САК у просторі стану.

10. Викладіть метод отримання рівнянь стану за передатною функцією шляхом перенесення похідних до виходу системи.

11. Поясніть, як дістати рівняння стану за структурною схемою САК?

12. Які величини приймаються за змінні стану у деталізованій до рівня інтеграторів структурній схемі?

13. Отримайте опис у просторі стану системи з передатною функцією $W(p) = \dfrac{K}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$.

14. Чим відрізняються рівняння стану одновимірних та багатовимірних систем?

15. Як отримати передатну функцію об'єкта за його рівняннями стану?

16. Хто ввів поняття та знайшов спосіб визначення керованості та спостережуваності САК?

17. Що таке ранг матриці?

18. Наведіть визначення керованості та спостережуваності системи.

19. Як виявити керованість та спостережуваність динамічної системи з описом у просторі стану?

20. Об'єкт описується рівняннями стану **x**′=**Ax**+**B**u; y=**Cx**, де $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$. Дослідіть керованість та спостережуваність об'єкта.

21. У чому особливість передатної функції не повністю спостережуваної системи?

22. Запишіть передатну функцію узагальненої ланки 1-го порядку та нарисуйте деталізовану до рівня інтеграторів структурну схему цієї ланки.

23. Для узагальненої ланки 2-го порядку запишіть передатну функцію та нарисуйте деталізовану до рівня інтеграторів структурну схему.

24. Які матриці стану називаються еквівалентними або подібними?

25. Чим відрізняються передатні функції, що відповідають подібним моделям у просторі стану?

26. Чи можуть подібні моделі мати різні базиси простору стану?

27. Які корисні властивості мають канонічні форми рівнянь стану?

28. Отримайте опис у просторі стану в канонічній формі керованості об'єкта з передатною функцією $W(p) = \frac{10}{5p^2+3p+1}$.

29. Для об'єкта з передатною функцією $W(p) = \frac{17}{3p^2+7p+2}$ запишіть рівняння стану в канонічній формі спостережуваності.

30. Отримайте опис у просторі стану в канонічній діагональній формі об'єкта з передатною функцією $W(p) = \frac{5}{p^2+9p+20}$.

31. Що являє собою канонічна форма Жордана?

32. Викладіть метод розв'язання рівнянь стану на основі перетворення Лапласа.

33. Яку матрицю називають перехідною матрицею стану або фундаментальною?

34. Запишіть вираз для розв’язку рівнянь стану на основі перетворень Лапласа.

35. Викладіть метод розв’язання рівнянь стану шляхом розкладання в степеневий ряд.

36. Покажіть, як отримують паралельне з’єднання двох САК з описом у просторі стану.

37. Поясніть, як отримують послідовне з’єднання двох САК з описом у просторі стану.

38. У чому полягає принцип модального керування?

39. Що означає термін «модальне керування»?

40. Викладіть процедуру синтезу системи модального керування.

41. Запишіть закон керування для модального регулятора стану.

42. Нарисуйте структурну схему модальної системи стабілізації.

43. Запишіть формулу для матриці стану замкнутої САК із регулятором стану.

44. Для чого застосовується формула Акермана?

45. Запишіть формулу для визначення характеристичного полінома системи за її матрицею стану.

46. Яку роль відіграють стандартні характеристичні поліноми у синтезі модальних САК? Назвіть найбільш поширені з них.

47. Який із стандартних характеристичних поліномів забезпечує нульове перерегулювання реакції системи на стрибкоподібне завдання?

48. Який із стандартних характеристичних поліномів при заданій ω_0 дозволяє отримати в САК максимальну швидкодію, а який – максимальні добротність за швидкістю та частоту пропускання?

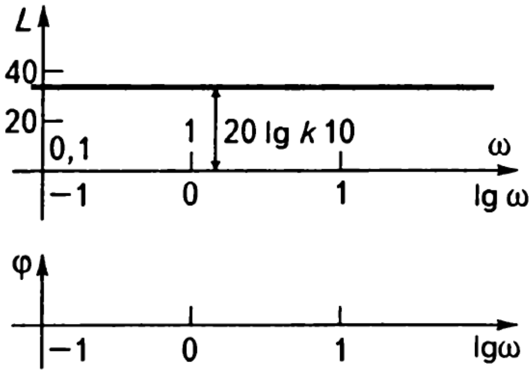
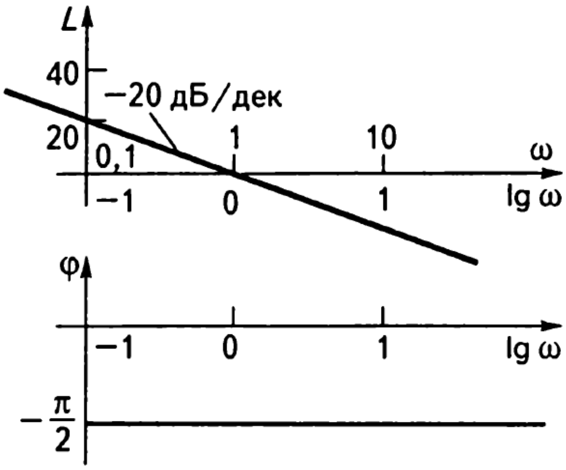
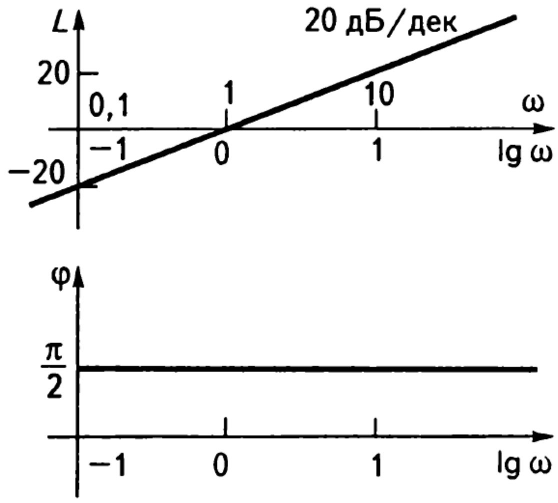
49. Зобразіть структурну схему модальної САК із прикладу синтезу.

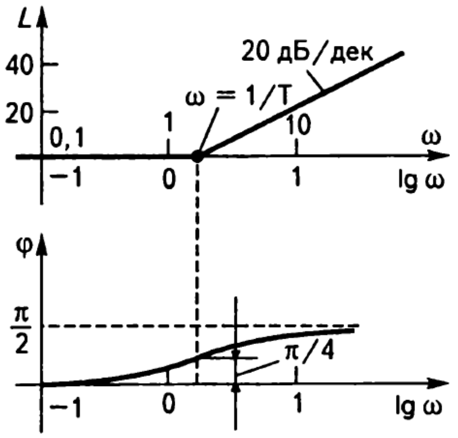
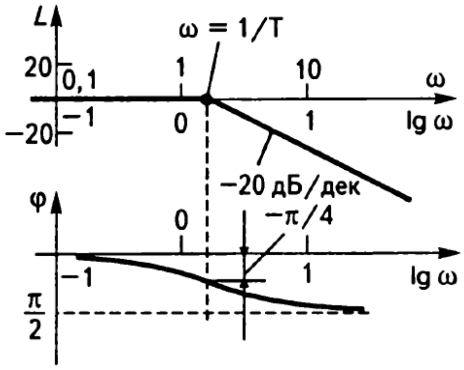
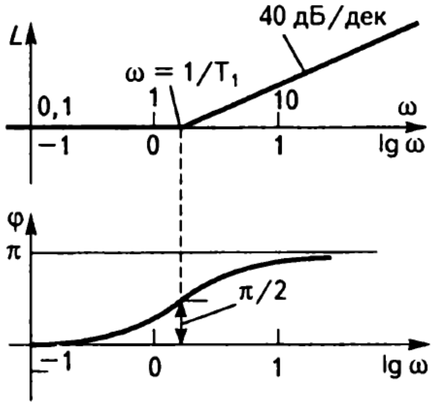
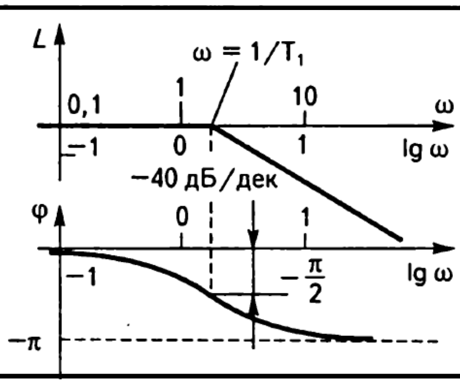
50. Які показники якості були вихідними у прикладі синтезу модальної системи стеження?

Додаток А Таблиця перетворень Лапласа

Функція часу $f(t)$ (функція – оригінал)	Перетворення Лапласа $f(s)$ (зображення за Лапласом)
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$1-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$t\sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t\cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

Додаток Б Логарифмічні частотні характеристики елементарних співмножників передатних функцій

Співмнож-ник	ЛАХ і ЛФХ	Рівняння фазової характеристики
k		$\varphi(\omega) = 0$
$\frac{1}{p}$		$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
p		$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

Співмножник	ЛАХ і ЛФХ	Рівняння фазової характеристики
$Tp+1$		$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\ T\omega$
$\dfrac{1}{Tp+1}$		$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\ T\omega$
$T_1^2p^2 + T_2p + 1$ при $\dfrac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\ \dfrac{T_2\omega}{1 - T_1^2\omega^2}$
$\dfrac{1}{T_1^2p^2 + T_2p + 1}$ при $\dfrac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\ \dfrac{T_2\omega}{1 - T_1^2\omega^2}$

Додаток В Стандартні характеристичні поліноми

Таблиця В1. Показники МЕМ з біноміальними характеристичними поліномами

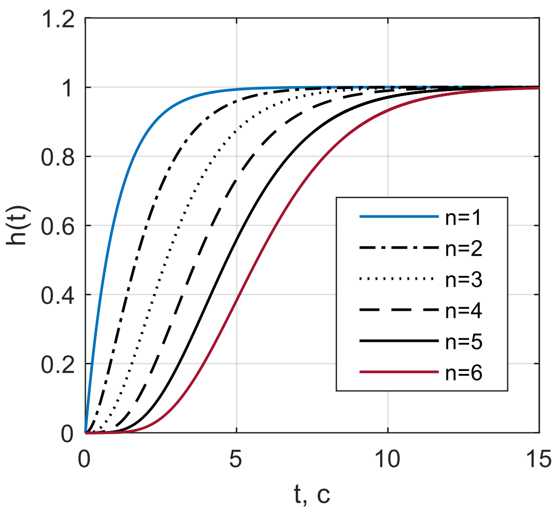
Порядок n	Аналітичні вирази біноміальних поліномів	Показники якості			
		σ, %	$t_p\omega_0$	$\frac{K_v}{\omega_0}$	$\frac{\omega_п}{\omega_0}$
1	$p+\omega_0$	0	3	1	1
2	$p^2+2\omega_0 p+\omega_0^2$	0	4.8	0.5	0.65
3	$p^3+3\omega_0 p^2+3\omega_0^2 p+\omega_0^3$	0	6	0.333	0.5
4	$p^4+4\omega_0 p^3+6\omega_0^2 p^2+4\omega_0^3 p+\omega_0^4$	0	7.8	0.25	0.44
5	$p^5+5\omega_0 p^4+10\omega_0^2 p^3+10\omega_0^3 p^2+5\omega_0^4 p+\omega_0^5$	0	9	0.2	0.4
6	$p^6+6\omega_0 p^5+15\omega_0^2 p^4+20\omega_0^3 p^3+15\omega_0^4 p^2+6\omega_0^5 p+\omega_0^6$	0	10.5	0.167	0.35

Таблиця В2. Показники МЕМ з характеристичними поліномами Батерворта

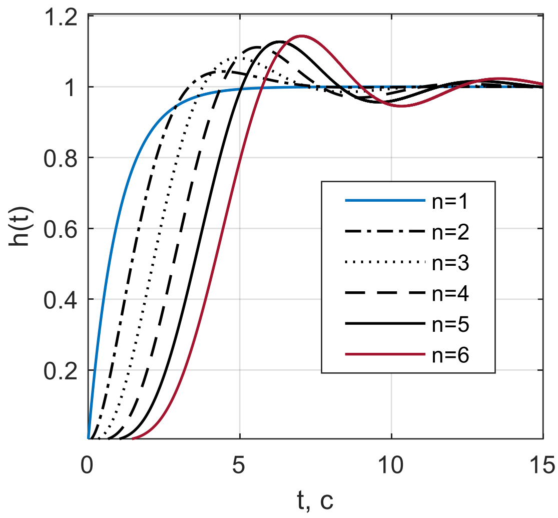
Порядок n	Аналітичні вирази поліномів Батерворта	Показники якості			
		σ, %	$t_p\omega_0$	$\frac{K_v}{\omega_0}$	$\frac{\omega_п}{\omega_0}$
1	$p+\omega_0$	0	3	1	1
2	$p^2+1.414\omega_0 p+\omega_0^2$	5	4.5	0.7	1
3	$p^3+2\omega_0 p^2+2\omega_0^2 p+\omega_0^3$	9	6.25	0.5	1
4	$p^4+2.6\omega_0 p^3+3.4\omega_0^2 p^2+2.6\omega_0^3 p+\omega_0^4$	11	7	0.385	1
5	$p^5+3.24\omega_0 p^4+5.24\omega_0^2 p^3+5.24\omega_0^3 p^2+3.24\omega_0^4 p+\omega_0^5$	13	8	0.31	1
6	$p^6+3.86\omega_0 p^5+7.46\omega_0^2 p^4+9.14\omega_0^3 p^3+7.46\omega_0^4 p^2+3.86\omega_0^5 p+\omega_0^6$	14.3	10.7	0.259	1

Таблиця В3. Показники МЕМ з характеристичними поліномами Бесселя

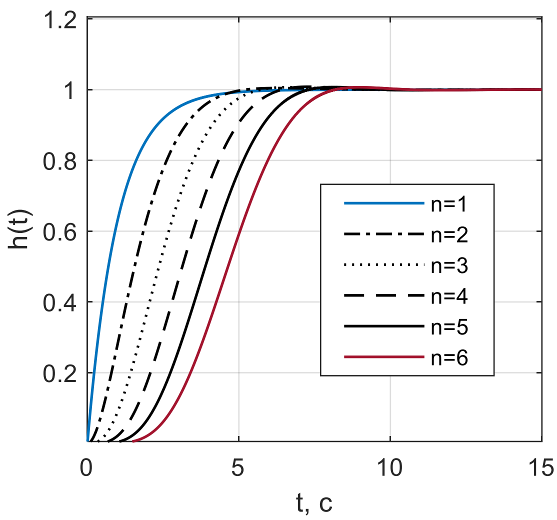
Порядок n	Аналітичні вирази поліномів Бесселя	Показники якості			
		σ, %	$t_p\omega_0$	$\frac{K_v}{\omega_0}$	$\frac{\omega_п}{\omega_0}$
1	$p+\omega_0$	0	3	1	1
2	$p^2+1.73\omega_0 p+\omega_0^2$	0.5	3.78	0.578	0.787
3	$p^3+2.43\omega_0 p^2+2.47\omega_0^2 p+\omega_0^3$	0.7	4.61	0.405	0.71
4	$p^4+3.12\omega_0 p^3+4.39\omega_0^2 p^2+3.2\omega_0^3 p+\omega_0^4$	0.8	5.42	0.313	0.66
5	$p^5+3.81\omega_0 p^4+6.78\omega_0^2 p^3+6.89\omega_0^3 p^2+3.94\omega_0^4 p+\omega_0^5$	0.7	6.27	0.254	0.615
6	$p^6+4.5\omega_0 p^5+9.62\omega_0^2 p^4+12.36\omega_0^3 p^3+9.92\omega_0^4 p^2+4.67\omega_0^5 p+\omega_0^6$	0.7	7.11	0.214	0.578



а



б



в

Рис. В1. Перехідні характеристики МЕМ порядків $n=\overline{1,6}$ з характеристичними поліномами: а – біноміальним; б – Батерворта; в – Бесселя

Додаток Г Функції Control System Toolbox в MATLAB

№	Назва	Призначення
Створення динамічних моделей		
1	tf	Створення tf-моделі у вигляді передатної функції
2	zpk	Створення zpk-моделі (нулі, полюси та коеф. передачі)
3	ss	Створення ss-моделі у просторі стану
4	frd	Створення frd-моделі як частотної передатної функції
Отримання інформації про моделі систем		
5	tfdata	Отримання коефіцієнтів чисельника та знаменника ПФ
6	zpkdata	Отримання нулів та полюсів ПФ
7	ssdata	Отримання матриць рівнянь стану A, B, C, D
Перетворення структурних схем		
8	series	Послідовне з’єднання моделей (операція множення)
9	parallel	Паралельне з’єднання моделей (операція додавання)
10	feedback	З’єднання зі зворотним зв’язком
11	append	Об’єднання моделей з додаванням входів та виходів
12	connect	Об’єднання моделей на основі матриці з’єднань
13	ss2ss	Зміна координатного базису простору стану ss-моделі
14	canon	Створення ss-моделі у канонічній формі
Побудова часових характеристик систем		
15	step	Перехідна функція (характеристика)
16	impulse	Вагова функція (характеристика)
17	initial	Реакція на задані початкові умови
18	lsim	Реакція на довільний вхідний сигнал
19	gensig	Генерування вхідного сигналу
Побудова частотних характеристик систем		
20	bode	ЛАХ та ЛФХ системи – діаграми Боде
21	margin	Запаси стійкості за модулем та фазою
22	nyquist	АФХ системи – діаграма Найквіста
23	freqresp	Значення АФХ при заданих частотах
Аналіз стійкості систем керування		
24	pole	Обчислення полюсів передатної функції
25	eig	Обчислення власних значень матриці
26	pzmap	Побудова мапи розташування полюсів і нулів
27	poly	Визначення характеристичного полінома
28	rlocus	Побудова кореневого годографа системи
29	ctrb	Визначення матриці керованості
30	obsv	Визначення матриці спостережуваності
Синтез систем керування у просторі стану		
31	place	Синтез модального регулятора числовим способом
32	acker	Синтез модального регулятора за формулою Акермана
33	lqr	Синтез лінійного квадратичного оптимального регулятора
34	reg	Формування системи з регулятором стану та спостерігачем

Додаток Д Словник основних українських і англійських термінів

Український термін	Англійський термін
алгоритм керування	control algorithm
амплітуда	magnitude
вагова функція (характеристика)	impulse response
власні значення	eigenvalues
замкнений контур	closed loop
зворотний зв’язок	feedback
знаменник	denominator
керування	control
коефіцієнт демпфування	damping ratio (factor, coefficient)
нулі	zeros
об’єкт керування (регулювання)	plant, control object
передатна (передавальна) функція	transfer function
перерегулювання	overshoot
перехідна функція (характеристика)	step response
перехідні процеси	transients
полюси	poles
простір стану	state space
прямий зв’язок	feedforward
регулятор	controller, regulator
розімкнений контур	open loop
система автоматичного керування	automatic control system
смуга пропускання	bandwidth
характеристичне рівняння	characteristic equation, eigenvalue equation
характеристичний поліном	characteristic polynomial
час досягнення максимуму	peak time
час досягнення усталеного значення	rise time
час перехідного процесу	steady state time
частота зрізу	cut-off frequency
частота пропускання	bandwidth frequency
чисельник	numerator

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2007. – 656 с.

2. Ogata K. Modern control engineering, Prentice-Hall, 2010. – 905 p.

3. Phillips C., Harbor R. Feedback control systems, Prentice-Hall, 2000. – 658 p.

4. Strejc V. State Space Theory of Discrete Linear Control, John Wiley & Sons, USA, 1981, 500 p.

5. Ляшко І.І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: Частина I – К.: Вища школа, 1992. – 495 с.

6. Ляшко І.І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: Частина II – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.

7. Теорія автоматичного керування: Частина I [Електронний ресурс] : Курс лекцій для студ. спеціальності "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" / Уклад. М.Г. Попович, Б.І. Приймак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2010. – 182 с. – Режим доступу: http://ela.kpi.ua/jspui/handle/123456789/770

8. Теорія автоматичного керування: Частина II [Електронний ресурс] : Курс лекцій для студ. спеціальності "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" / Уклад. М.Г. Попович, Б.І. Приймак. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2012. – 165 с. – Режим доступу: http://ela.kpi.ua/jspui/handle/123456789/2209

9. Теорія автоматичного керування. Курсова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. І. Толочко, С. М. Пересада, Б. І. Приймак – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 163 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48912

10. Електромеханічні системи автоматизації та електропривод (Теорія і практика) / М.Г. Попович, В.І. Кострицький та ін. Навч. посіб. з грифом МОН України. – К.: КНУТД , 2008. – 408 с.

11. Методи сучасної теорії управління : Підручник / А. П. Ладанюк, Н. М. Луцька, В. Д. Кишенько, Л. О. Власенко, В. В. Іващук. – Київ : Видавництво Ліра-К, 2018. – 368 с.

12. Гоголюк П.Ф., Гречин Т.М. Теорія автоматичного керування. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – 280 с.

13. Невлюдов І. Ш., Токарєва О.В. Автоматичне управління технологічними об’єктами. – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 190 с.

14. Навчальний посібник з дисципліни "Теорія автоматичного керування" : Ч. 1 [Електронний ресурс] / А. П. Гуров, С. І. Ольшевський, О. О. Черно, Л. І. Бугрім. – Миколаїв : НУК, 2018. – 111 с. Режим доступу: https://cutt.ly/x4zRJsd

15. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. –124 с.

16. Åstrom K. J. Control System Design. Lecture notes for ME 155A. Department of Automatic Control Lund Institute of Technology, Sweden, 2002. – 168 p.

17. Åstrom K. J., Hagglund T. Advanced PID Control, Instrumentation, Systems, and Automation Society, USA, 2006. – 250 p.

18. Dorf R., Bishop R. Modern control systems, Addison-Wesley, 2016, 1032 p.

19. Nise N. S. Control Systems Engineering, Wiley, 2018. – 800 p.

20. Control System Toolbox. User’s Guide, The MathWorks, Release 2018b, 2018.

Предметний покажчик

А

Автомат, 11
Автоматизація, 10
Автоматика, 13
Акермана формула, 284
Алгоритм керування, 209
Амплітудно-частотна характеристика, 87
Амплітудно-фазова частотна характеристика, 87
Аперіодична ланка 1-го порядку, 68, 92
Аперіодична ланка 2-го порядку, 78, 101
Апроксимація, 56
Асимптотична ЛАХ, 93
Астатизм, 153
Астатична ланка, 152

Б

Бажана ЛАХ, 236
Батерворта поліном, 286
Безінерційна ланка, 67
Бесселя поліном, 286
Біноміальний поліном, 286
Боде діаграма, 304

В

Вагова характеристика, 66
Вагова функція, 66
Вектор стану, 251
Величина (змінна),
— вхідна, 44
— вихідна, 44
— керована (регульована), 44
Власні значення матриці, 268

Г

Гевісайда функція, 66
Генератор постійного струму, 71
Гурвіца визначник, 137

Д

Давач, 17
Декремент затухання, 80
Демпфування, 78
Деталізована структурна схема, 256
Декада, 91
Децибел, 90
Динаміка, 53
Дійсна частотна характеристика, 87
Дірака функція, 29
Дія,
— задавальна, 44
— збурювальна, 44
— зовнішня, 44
— керуюча, 169
Диференційна ланка, 73, 95
Добротність за прискоренням, 228
Добротність за швидкістю, 225
Дюамеля інтеграл, 30

Е

Ейлера формула, 105
Елементи системи керування, 18
Елементарний поліном, 158

Ж

Жордана канонічна форма, 271

З

Завади, 192
Завадостійкість, 192
Закон керування (регулювання), 209
Запас стійкості,
— за амплітудою, 154, 158
— за фазою, 154, 158
Запізнення часове, 85
Збурення, 19, 21
Зворотний зв'язок, 20
— від’ємний, 21
— додатний, 21
— головний, 21
— місцевий, 21
— пропорційний, 202
— одиничний, 39
Змінна стану, 249
Зображення за Лапласом, 28

І

Ідеальний диференціатор, 73, 95
Ідентифікація, 30
Ізодромна ланка, 216
Інерційно-диференційна ланка, 74, 96
Інерційно-форсувальна ланка, 76, 99
Інтегральні показники якості, 189
Інтегральна ланка, 72, 94

К

Канонічні форми,
— керованості, 269
— спостережуваності, 270
— діагональна, 271
Керування, 16
Керованість системи, 265

Кібернетика, 16
Коливальна ланка, 79, 103
Коефіцієнт затухання, 78
Коефіцієнти помилок, 206
Консервативна ланка, 82
Кореневий годограф, 186
Корені характеристичного рівняння, 47
Кореневий спосіб аналізу стійкості, 130
Коригування,
— паралельне, 162
— послідовне, 164
Критерії стійкості,
— алгебричні, 136
— частотні, 145

Л

Ланка 1-го порядку, 68
Ланка 2-го порядку, 78, 100
Ланка запізнення, 85, 105
Лапласа перетворення, 28, 273
Лінеаризація, 56
Лінійна система, 27
Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика, 89
Логарифмічна фазочастотна характеристика, 89
Льєнара-Шіпара критерій, 140
Ляпунова теореми, 128

М

Маклорена ряд, 206
Масштабування, 204
Математична модель, 26
Матриця,
— входу, 252
— виходу, 252
— замкнутої системи, 282
— зворотного зв’язку, 281
— переходу, 274
— перетворення, 268
— стану, 252
Матрична передатна функція, 261
Межа стійкості,
— аперіодична, 134
— коливальна, 134
Метод коефіцієнтів помилок, 205
Метод кореневого годографа, 186
Метод модального керування, 280
Метод змінних стану, 249
Мінімально-фазова ланка, 112
Модальна еталонна модель, 285
Модальне керування, 280

Н

Найквіста діаграма, 304
Найквіста критерій, 145
Немінімально-фазова ланка, 112
Нулі передатної функції, 47

О

Об’єкт керування (регулювання), 17, 19
Оператор диференціювання, 31
Одиничний стрибок, 66
Одиничний імпульс, 29, 66
Октава, 91

П

Паде ряд, 57
Передатна функція,
— за завданням, 45
— за збуренням, 45
— за помилкою, 46
— комплексна, 32
— операторна, 32
— у поліномній формі запису, 47
— у формі добутку множників, 47
— у формі суми дробів, 49
Перехідний процес, 52
Перехідна характеристика, 66
Перехідна функція, 66
Показник коливальності, 190
Показники якості,
— керування, 169
— перехідного процесу, 169
Показники точності керування, 173
Поліном дії, 47
Полюси передатної функції, 47
Помилка системи,
— статична, 197
— динамічна, 197
— динамічна перехідна, 197
— динамічна усталена, 197
Порядок астатизму, 199
Принцип пропорційності, 27
Принцип суперпозиції, 27
Принципи керування,
— за збуренням, 21
— за відхиленням, 22
Пропорційна ланка, 67

Р

Рауса-Гурвіца критерій, 137
Реальний диференціатор, 74, 96
Регулятор,
— диференційний, 219
— інтегральний, 213
— пропорційний, 213
— пропорційно-диференційний, 223
— пропорційно-інтегральний, 222
— пропорційно-інтегрально-

диференційний, 223
— стану, 281
Рівняння,
— власного руху, 130
— однорідне, 130
— операторне, 31
— неоднорідне, 130
— стану, 252
Рівняння динаміки,
— в абсолютних одиницях, 55
— у відносних одиницях, 55
— у відхиленнях, 55

С

Синтез,
— методом ЛАХ, 235
— методом модального керування, 280
Система,
— автоматичного керування, 17
— автоматичного регулювання, 20
— адаптивна, 24
— астатична, 199
— екстремальна, 24
— ігрова, 26
— комбінована, 23
— компенсаційна, 25
— модальна, 280
— нейтральна, 113
— самоналаштовна, 25
— слідкуюча, 24
— стабілізаційна, 24
— статична, 199
— стежна, 24
Смуга пропускання, 192
Спостережуваність системи, 265
Стала часу, 69
Статика, 52
Статизм, 203
Стійкість,
— абсолютна, 127
— асимптотична, 128
— у малому, 127
— у великому, 127
— у цілому, 127
— незбуреного руху, 128
Структурна схема, 18, 36
Структурно нестійка система, 161
Ступінь затухання, 171
Ступінь коливальності, 181
Ступінь стійкості, 181
Суматор, 20

Т

Тейлора ряд, 58, 206
Типові ланки, 67
Точність САК, 202, 223
Точнісні показники, 173

У

Узагальнена ланка, 257
Усталене значення, 171
Усталений процес, 52
Усталений режим, 52
Уявна частотна характеристика, 87

Ф

Фазочастотна характеристика, 87
Фізичний базис, 250
Форми запису передатної функції, 46
Формула згортки, 30
Форсувальна ланка, 75, 98
Фробеніуса форма, 255
Фундаментальна матриця, 274
Фур'є ряд, 57
Функціональна схема, 18

Х

Характер перехідного процесу, 170
Характеристика,
— вагова, 66
— логарифмічна, 90
— перехідна, 66
— часова, 66
— частотна, 86
Характеристичний поліном, 47
Характеристичне рівняння, 47

Ц

Цифровий контролер, 85, 239
Цифрове моделювання, 278

Ч

Час регулювання, 171
Час запізнення, 85
Частота,
— власних коливань, 80
— зрізу, 191, 237
— пропускання, 192
— резонансна, 80
— резонансного максимуму, 103, 190
— спряження, 93
— характеристична, 286
Частотні показники якості, 190

Ш

Швидкодія, 171, 237

Я

Якір двигуна, 83
Якість керування, 169