МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ю. В. КРАК
А. В. ШАТИРКО

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ІНФОРМАТИКІВ

Підручник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ
2015

УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32.965я73
К77

Р е ц е н з е н т и:
д-р техн. наук, проф. Л. Ф. Гуляницький,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В. Т. Матвієнко

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики
(протокол № 2 від 13 жовтня 2014 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
23 грудня 2014 року*

Крак Ю. В.

К77 Теорія керування для інформатиків : підручник / Ю. В. Крак, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 175 с.

Розглянуто основні поняття, постановки задач теорії керування та підходи до їх розв'язання, сформульовано базові теореми. Особливу увагу приділено методам варіаційного числення, принципу максимуму Понтрягіна та динамічного програмування. Досліджено задачі як із неперервним, так і з дискретним часом. Розглянуто алгоритм фільтрації Калмана – Б'юсі, указано на зв'язок між задачами оцінювання та оптимального керування. Кожна тема проілюстрована прикладами задач із розв'язанням. Наведено робочу програму навчальної дисципліни "Теорія керування".

Для студентів спеціальності "Інформатика", аспірантів, наукових працівників та інженерів, які спеціалізуються в галузі досліджень із теорії керування, оцінювання, моделювання та оптимізації складних систем.

УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32.965я73

ПЕРЕДМОВА

Підручник підготовлено на основі семестрового курсу лекцій для студентів спеціальності "Інформатика" факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Викладено основоположні поняття, розглянуто постановки задач теорії керування та основні підходи до їх розв'язання, сформульовано базові теореми. Особливу увагу приділено методам варіаційного числення, динамічного програмування, принципу максимуму Понтрягіна. У першому розділі підручника наведено змістовні приклади систем керування, структурні схеми для опису останніх, математичні постановки задач оптимального керування. У другому – розглянуто проблеми керованості, спостережуваності та ідентифікації систем керування. Показано зв'язок між спостережуваністю та керованістю. Третій розділ присвячений питанням дослідження стійкості та аналітичного конструювання регуляторів систем керування. Дослідження задач керування як задач варіаційного числення розглянуто в четвертому розділі. У п'ятому – сформульовано теореми принципу максимуму Понтрягіна для різних постановок задач, показано його зв'язок із класичним варіаційним численням, обговорено методи розв'язання крайової задачі принципу максимуму, наведено відповідні твердження для дискретних систем. Метод динамічного програмування для задач оптимального керування й постановки задач та їх розв'язання даним методом як для дискретних, так і для неперервних систем розглянуто в шостому розділі підручника. Сьомий розділ присвячено алгоритму фільтрації Калмана – Б'юсі, указано на зв'язок між задачами оцінювання та оптимального керування.

РОЗДІЛ 1
ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ, ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ, СТРУКТУРНІ СХЕМИ ОПИСУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

1.1. Про предмет дослідження

Ідеї та основні принципи теорії керування рухомими об'єктами, переважно військового призначення, виникли в 30-ті рр. минулого сторіччя. Було поставлено задачі розрахунку траєкторій для досягнення заданої висоти чи дальності, планування рухів за умов обмежених ресурсів тощо. Поява кібернетики та електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) дозволила значно прискорити й поліпшити розрахунки, увести поняття оптимальності. Здебільшого використовувався підхід, пов'язаний із варіаційним численням. У 50-ті рр. XX ст. було розроблено новий підхід: принцип максимуму Понтрягіна [7], який дозволив складну задачу оптимального керування звести до простішої задачі з диференціальних рівнянь та оптимізації.

Іншим потужним методом теорії керування став метод динамічного програмування Беллмана [2]. Ідея методу полягає в тому, що оптимізаційна задача великої розмірності зводиться до послідовності задач оптимізації меншої розмірності. Це дає можливість побудувати досить прості рекурентні формули для знаходження керування на всьому інтервалі часу. Утім у дискретному випадку для значної кількості точок розбиття інтервалу в пам'яті ЕОМ треба зберігати дуже велику кількість варіантів, що призвело до так званого "прокляття розмірності" для цього методу.

У межах трьох зазначених основних підходів (варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна, динамічне програмування) розроблено багато методів знаходження керувань для різних класів задач: технічних, економічних, соціальних та ін.

Для постановки задач оптимального керування необхідно, у першу чергу, визначити цільову функцію оптимізаційного процесу. З цією метою треба з'ясувати фізичний зміст задачі та записати її формальною мовою математичних співвідношень. Для здійснення ефективного керування процесом потрібно вибрати адекватну математичну модель, яка враховувала б різноманітні зовнішні впливи, що діють на систему. За умови, що вибрані математична модель та цільова функція, відомі параметри системи та її поточний стан, можна ставити задачу знаходження найкращого керування, яке оптимізувало б цільову функцію.

Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.1 [3, 5]. Розглянемо рух у площині маятника, підвішеного до точки опори за допомогою жорсткого невагомого стрижня. Рівняння руху маятника після певних перетворень можна звести до вигляду

$$\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+\sin x(t)=u(t), \tag{1.1}$$

де $x(t)$ – кут відхилення маятника, $\dot{x}(t)$ – швидкість маятника, β – параметр, $u(t)$ – керування, вибір якого може впливати на рух маятника.

Позначимо $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=\dot{x}(t)$. Тоді рівняння (1.1) можна переписати у вигляді еквівалентної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-\beta x_2(t)-\sin x_1(t)+u(t).\end{cases} \tag{1.2}$$

Нехай у початковий момент часу t_0 маятник відхилено на певний кут із певною початковою швидкістю, тобто

$$\begin{aligned}x_1(t_0)&=x_1^0\\ x_2(t_0)&=x_2^0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Вважатимемо також, що на керуючий параметр накладені обмеження

$$|u(t)|\le u^*,\ u^*=\text{const}>0,\ t_0\le t\le t_1. \tag{1.4}$$

Маючи математичний опис фізичної задачі, можемо поставити задачу оптимального керування, наприклад зупинити маятник у точці стійкої рівноваги за мінімальний час, тобто мінімізувати функціонал

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt \tag{1.5}$$

за умови, що

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= 2\pi, \\ x_2(t_1) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Приклад 1.2 [4]. Нехай математична точка A масою m рухається вздовж прямої. На неї діє сила u. Положення точки A характеризується координатою $x = x(t)$. Нехай також виконуються умови

$$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \overline{u},\ (\overline{u} > 0)\,. \tag{1.8}$$

Ставиться задача: визначити силу $u = u_0(t)$, під дією якої точка A рухається так, що із заданого початкового стану (1.7) переміщується в інший заданий стан на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1\ , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за мінімально можливий час (1.5).

Для розв'язання задачі треба записати рівняння руху точки A. Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна подати у вигляді

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = u. \tag{1.10}$$

Точку A, рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили u, розглядаємо як приклад керованої системи. Величину u називають *керуючим впливом*, *функцією керування* або просто *керуванням*. Поставлена задача в теорії керування називається *задачею швидкодії*.

При розв'язуванні таких задач використовують поняття фазових координат та фазового простору. У даному прикладі фазовими координатами є дві змінні: $x_1(t)$ та $x_2(t)$, пов'язані зі змінною $x(t)$ рівностями $x_1 = x(t)$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$; фазовим простором є координатна площина.

Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$m\frac{dx_2}{dt} = u, \tag{1.11}$$

а граничні умови (1.7), (1.9) – у вигляді

$$\begin{aligned} &x_1(t_0) = x_1^0 = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1 = x^1, \\ &x_2(t_0) = 0, \qquad\quad x_2(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають *фазовою точкою системи*. Площину (див. рис. 1.1) називають *фазовою площиною*, або *фазовим простором*, елементами якого є вектори фазових координат.

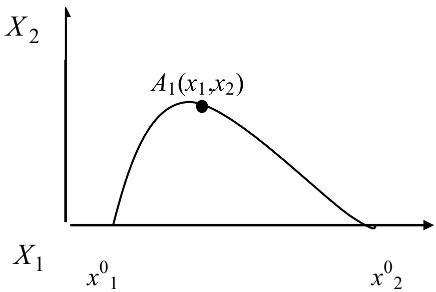


Рис. 1.1

Зі зміною часу t точка змінює положення й утворює фазову траєкторію системи.

Поставлену задачу можна сформулювати так: знайти керування u з допустимої області (1.8), за допомогою якого система (1.11) з однієї заданої точки простору x_1^0 переходить у іншу задану точку x_2^0 за мінімальний час.

Приклад 1.3. Нехай рух об'єкта описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Модель (1.13) можна інтерпретувати як математичну модель польоту літаючого об'єкта (наприклад ракетоносія) сталої потужності.

Відомо:

$$\begin{aligned} x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \\ x_2(t_0) = x_2^0, \quad x_2(t_1) = x_2^1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Початковий та кінцевий моменти часу відомі. Керування обмежене:

$$|u| \le \bar{u}. \tag{1.15}$$

Ставиться задача: знайти керування $u^0(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$, яке переводить систему з початкової точки (x_1^0, x_2^0) у точку (x_1^1, x_2^1) за фіксований час $T = t_1 - t_0$ і забезпечує мінімум цільової функції:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \to \min_u .$$

Таке керування $u^0(t)$ називається *оптимальним керуванням*.

Приклад 1.4. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів у динамічних системах на прикладі моделі бою двох сторін. Динаміку бою можна описати системою рівнянь [4]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -bx_2 + u(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_1 + v(t), \end{aligned}$$

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць сторони A, що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$, $x_2(t)$ – кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони B; $u(t)$, $v(t)$ – темпи надходження бойових одиниць із резерву для сторін A та B, відповідно, на момент часу t; a, b – середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін A та B, відповідно; $T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0,$$

$$x_2(t_0) = x_2^0,$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм: знайти керування $u^0(t)$ за обмежень $0 \le u(t) \le \bar{u}, \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}}$, щоб досягався екстремум вибраного функціонала якості $Q(u(t))$. Тут $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ – задані величини.

Критерієм найкращого керування може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ – на кінець бою сторона B має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ – мета сторони A: максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою.

Можна ввести й інші критерії оптимальності.

Приклад 1.5. Є система з випадковими збуреннями

$$\frac{dx_1}{dt} = u, \tag{1.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t). \tag{1.17}$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий процес, $|u(t)| \le k = \text{const}, t \in [t_0, t_1]$.

Мета керованої системи (1.16) – відтворити рух некерованої системи (1.17). Оскільки $x_2(t)$ – випадковий процес, то критерій оптимальності записується через математичне сподівання:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u. \tag{1.18}$$

1.2. Структурні схеми опису систем керування

Систему керування в загальному випадку можна зобразити у вигляді структурної схеми (рис. 1.2):

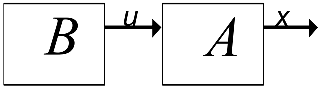


Рис. 1.2

Тут: A – об'єкт керування; B – пристрій керування (керуючий пристрій), $x(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_n(t)\right)^T$ – вектор фазових координат, або фазовий стан системи; T – знак транспонування; $x(t)\in X$, X – фазовий простір, $u(t)=\left(u_1(t),\ldots,u_r(t)\right)^T$ – векторна функція керування.

Вектор $x(t)$ називають *вихідним сигналом*. Вектор $u(t)$ називають *вхідним сигналом* (входом до об'єкта A).

Будемо вважати, що фазовий стан $x(t)$ об'єкта керування A в довільний момент часу $t>t_0$ визначається повністю й однозначно за його відомим початковим станом $x(t_0)$ і керуванням $u(t)$ при $t>t_0$. Пару векторних функцій $(u(t),x(t))$ називають процесом керування. Для різних систем керування внутрішні характеристики об'єкта керування описуються відповідними залежностями різної природи – алгебраїчними, диференціальними, інтегральними та ін.

Правила (закон) перетворення вхідних сигналів на вихідні називають *рівнянням об'єкта*.

Широко розповсюджені неперервні системи керування, об'єкти яких описуються звичайними диференціальними рівняннями (див. прикл. 1.1–1.3). Такі системи називають *системами із зосередженими параметрами*. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, називаються *системами з розподіленими параметрами*.

Критеріями оптимальності керування (критеріями якості об'єкта керування) є функції або функціонали на екстремум.

Зміст оптимальності в різних задачах може бути різним:

– зведення системи до заданого стану за найкоротший проміжок часу, тобто найшвидше;

– мінімізація енергетичних витрат на керування;

– мінімізація відхилення фазового стану системи від заданої траєкторії тощо.

Процес керування, що забезпечує екстремум (мінімум або максимум) функціонала якості об'єкта керування, називається *оптимальним процесом керування*.

Наприклад, системи керування, для яких критерієм якості є мінімум часу переходу системи з однієї множини станів до іншої, називають *системами, оптимальними за швидкодією*.

Дослідимо тепер, які функції виконує пристрій керування B (рис. 1.2). Розглянемо два суттєво різні типи систем керування.

1) Системи програмного керування, або незамкнені (без оберненого зв'язку).

У таких системах об'єкти керування A мають точно визначені наперед рівняння, що описують їх функціонування. Ці об'єкти керування позбавлені впливу випадкових збурень. Критерій якості для них є детермінованою величиною. Усі канали зв'язку, як пристрою керування так і об'єкта керування, захищені від будь-яких випадкових зовнішніх впливів та збурень.

Оптимальне керування $u^O(t)$ можна обчислити наперед для всіх t ще до початку функціонування системи. Керуючий пристрій B має забезпечити тільки подачу розрахованого наперед керування $u^0(t)$ на вхід об'єкта керування A. За цим принципом можна керувати системою, наведеною у прикл. 1.1.

Утім системи програмного керування мають обмежене застосування на практиці. Зазвичай система керування має додаткові лінії зв'язку, за якими надходить інформація про стан об'єкта A на вхід керуючого пристрою B.

2) Системи керування з оберненим зв'язком (замкнені системи керування, рис. 1.3).

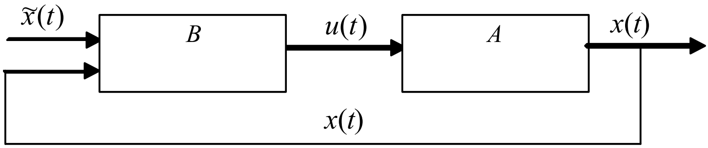


Рис. 1.3

Тут $\tilde{x}(t)$ – заданий (програмний) вплив, що визначає роботу пристрою B. Для програмних систем цей сигнал можна вважати частиною внутрішньої структури пристрою B. Зазвичай системи без оберненого зв'язку не мають суттєвого практичного значення. Обернений зв'язок необхідний, оскільки динамічні характеристики систем можуть бути відомі лише наближено й, крім того, на систему можуть впливати зовнішні збурення переважно випадкового характеру. Контур оберненого зв'язку дозволяє керуючому пристрою враховувати відхилення й відповідно корегувати рух.

Системи з випадковими збуреннями, що діють на об'єкт керування, можна зобразити у вигляді структурної схеми (рис. 1.4):

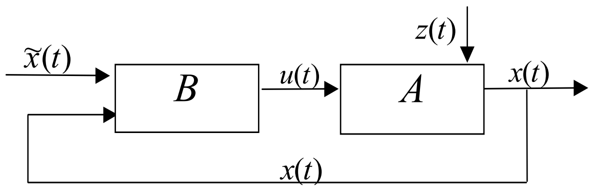


Рис. 1.4

Тут $z(t)$ – вектор випадкових збурень.

Критерій оптимальності для таких систем: знайти мінімум (максимум) функціонала

$$Q = M\{\int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t)dt\},$$

де $M\{\cdot\}$ – математичне сподівання.

Параметри керування реальних систем не можуть набувати довільних значень, тобто завжди $u(t) \in \Omega(U)$. Множину $\Omega(U)$ називають *областю допустимих керувань* (*областю керування*), де U – простір змінних $u_1,\ldots,u_r$. Множина $\Omega(U)$ задається зазвичай системою рівностей або нерівностей.

Аналогічно $x(t) \in \Omega(X)$, де $\Omega(U)$ – область можливих станів системи, X – простір змінних $x_1,\ldots,x_n$.

У загальному випадку можуть бути обмеження на функціонали від вектор-функцій $u(t)$, $x(t)$, $z(t)$:

$$L_\mu[x(t),u(t),z(t)] \in \Omega_\mu(L),\ \mu = \overline{1,m},$$

де $\Omega_\mu(L)$ – допустима область зміни функціонала.

Зауваження 1.1. У теорії керування вважають, що керування є кусково-неперервними або вимірними функціями. Вважають також, що функції $u_i(t)$ у точках розриву неперервні справа; крім того, $u_i(t)$ неперервні на кінцях відрізка, де $i = 1,\overline{k}$, $\overline{k}$ – кількість точок розриву. Чому так? Тому, що оптимальні керування $u^0(t)$ для багатьох систем є кусково-неперервними, а розв'язку задачі у класі неперервних функцій не існує. Наприклад, припустимо, що розривна функція $u^0(t)$ – єдине оптимальне керування деякої системи керування. Побудуємо іншу функцію, близьку до $u^0(t)$, але неперервну. Тоді, яку б близьку до оптимального керування неперервну функцію ми не взяли, завжди можна побудувати іншу неперервну функцію, яка буде ще ближчою до оптимального керування, але відрізнятиметься від $u^0(t)$. Тобто в класі неперервних функцій оптимального керування просто не існує, тому задача оптимізації в класі неперервних функцій не буде мати розв'язку. Кусково-неперервні керування дозволяють для широкого класу систем отримати точний математичний розв'язок задачі оптимізації.

Термінологія, наведена вище, справедлива не тільки для неперервних систем, а й для дискретно-неперервних і дискретних систем керування.

Класифікація систем керування можлива також за іншими ознаками:

1) Системи з повною інформацією про об'єкт керування. Такі системи – математична абстракція. Це тому, що в керуючий пристрій B введена повна апріорна інформація: рівняння об'єкта, усі обмеження, інформація про критерій оптимальності, про сигнал $x(t)$, збурення $z(t)$, про стан $x(t)$ у кожний момент часу t, що в реальних системах зробити майже неможливо.

Утім ця абстракція часто з достатньою точністю відповідає реальним системам керування, коли неповнотою інформації можна знехтувати.

2) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування й пасивним її накопиченням у процесі керування. Нехай неповнота інформації – це неповнота заданого сигналу $x(t)$, тобто на вхід надходить сигнал $y(t): y(t) \neq \widetilde{x}(t)$. Процес накопичення інформації про $x(t)$ не залежить від алгоритму (стратегії) керуючого пристрою B. Накопичення інформації полягає у спостереженні й побудові прогнозу про сигнал $x(t)$. Сам процес спостереження не залежить від того, яке рішення прийме пристрій B про характер $x(t)$. Інформацію, отриману в результаті спостережень, можна тільки використати, але її не можна збільшити.

3) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування, але з активним накопиченням її в процесі керування (системи дуального керування). Пристрій B подає на A деяку послідовність керувань $\{u_i(t)\}$ (тут i – індекс послідовності) і за оберненим зв'язком отримує реакції $\{y_i(t)\}$, які аналізуються керуючим пристроєм B. Пристрій B робить висновки про характеристики об'єкта керування, зокрема про сигнал $x(t)$. Мета цих дій об'єкта B – сприяти точнішому вивченню характеристик об'єкта керування A для ефективнішого керування цим об'єктом, тобто для генерації необхідних керувань. Системи з неповною інформацією виникають через те, що на них впливають випадкові, непередбачені збурення.

1.3. Математична постановка задач оптимального керування

Для математичної постановки задачі оптимального керування розглянемо фазові координати системи як функції часу $x = x(t)$ на деякому проміжку $t_0 \le t \le t_1$. У початковий момент t_0 потрібно задати початкову умову $x(t_0) = x_0$, а також керування як функції часу $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$. Тоді фазові координати $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ визначатимуться як розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x_0,$$

де $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$ – відома вектор-функція, $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{1, n}$ – компоненти вектора $f(x(t), u(t), t)$, t – час. Функція $f(x(t), u(t), t)$ описує внутрішні характеристики об'єкта керування та враховує зовнішні впливи на об'єкт.

Означення 1.1. Неперервна функція $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє рівність

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \le t \le t,$$

називається розв'язком даної задачі Коші, або траєкторією, що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$ та керуванню $u = u(\cdot)$ і позначається через $x = x(\cdot, u, x_0)$ або $x = x(t, u, x_0)$. Початкова точка траєкторії $x(t_0, u, x_0)$ називається *лівим кінцем траєкторії*, t_0 – *початковим моментом часу*, $x(t_1, u, x_0)$ – *правим кінцем траєкторії*, t_1 – *кінцевим моментом часу*.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування в загальному випадку. Нехай

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le t_1, \tag{1.19}$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1, \tag{1.20}$$

де $G(t)$ – деяка задана множина з $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – задані множини на числовій осі $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$. Не виключено, що $\Theta_0 = R, \Omega_1 = R$.

Обмеження вигляду (1.19) часто називають *фазовими обмеженнями*.

Функції керування $u = u(t)$ мають задовольняти певні вимоги неперервності та гладкості, оскільки при надто розривних функціях $u(t)$ поставлена задача та керування $u(t)$ можуть не мати сенсу. У більшості прикладних задач керування $u(t)$ вибираються у вигляді кусково-неперервних функцій (див. зауваження 1.1.). Нагадаємо, що функція $u(t)$ називається кусково-неперервною на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо $u(t)$ неперервна в усіх точках $t \in [t_0, t_1]$ за винятком, можливо, лише скінченної кількості точок $\tau_1, \ldots, \tau_p \in [t_0, t_1]$, у яких функція $u(t)$ може мати розриви першого роду, тобто існують скінченні границі

$$\lim_{t \to \tau_i - 0} u(t) = u(\tau_i - 0), \quad \lim_{t \to \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i + 0), \ i = \overline{1, p}.$$

Є класи задач керування, у яких від функцій $u(t)$, крім неперервності, вимагається існування їх кусково-неперервних похідних. Такі керування називають *кусково-гладкими*.

Керування $u(t)$, узагалі кажучи, задовольняють певні обмеження, які запишемо у вигляді

$$u(t) \in V(t), \ t_0 \le t \le t_1,$$

де $V(t)$ – задана множина: $V(t) \subseteq E^r$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Наприклад, в обмеженнях (1.4) прикладу 1.1 множина $V(t)$ має вигляд

$$V(t) = \{u : u \in E^1, |u(t)| \le u^*, \forall t \in [t_0, t_1]\}.$$

Обмеження (1.20) потрібні, оскільки початковий і кінцевий моменти часу можуть залежати від керування (напр. у задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$. З обмеження (1.19) випливає: при $t = t_0$ та $t = t_1$: $x(t_0) \in G(t_0)$, $x(t_1) \in G(t_1)$, відповідно.

Утім бувають ситуації, наприклад при $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти й розглядати окремо.

Вважатимемо, що в E^n при кожному $t_0 \in \Theta_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $t_1 \in \Theta_1$ задана множина $S_1(t_1)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо записувати у вигляді

$$\begin{aligned} &x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in \Theta_0, \\ &x(T) \in S_1(T), T \in \Theta_1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

У задачах оптимального керування прийнята така класифікація умов (1.20), (1.21): якщо множина Θ_0 складається з єдиної точки, то початковий момент часу називають фіксованим; якщо Θ_1 складається з єдиної точки T, то кінцевий момент часу називають фіксованим.

Якщо множина $S_0(t_0)$ (або $S_1(t_1)$) складається з однієї точки й не залежить від t_0: $S_0(t_0) = \{x_0\}, t_0 \in \Theta_0$ (або, відповідно, $S_1(T) = \{x_1\}, T \in \Theta_1$), то кажуть, що лівий (правий) кінець траєкторії закріплений.

Якщо $S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in \Theta_0$ або $S_1(t_1) \equiv E^n, t_1 \in \Theta_1$, то лівий (правий) кінець траєкторії називають вільним.

В інших випадках лівий (правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Наприклад:

$$S_0(t_0) = \left\{ \begin{array}{c} y : y \in G(t_0), h_i(y, t_0) \le 0, i = \overline{1, m}, \\ h_i(y, t_0) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0} \end{array} \right\}, \tag{1.22}$$

де функції $h_i(y, t_0)$ визначені при $y \in G(t), t \in \Theta_0$.

У прикладних застосуваннях часто виникають задачі, у яких лівий і правий кінці траєкторії вибираються залежно один від одного. Це можна записати так:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in S(t_0, t_1), t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1, \tag{1.23}$$

де $S(t_0, t_1)$ при кожному $(t_0, t_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ – задана множина з $E^n \times E^n$.

Приклад такої множини:

$$S_0(t_0,t_1)=\left\{\begin{matrix}(x,y)\in E^n\times E^n, g_i(x,y,t_0,t_1)<0, i=\overline{1,m},\\ g_i(x,y,t_0,t_1)=0, i=\overline{m+1,s}\end{matrix}\right\}, \quad (1.24)$$

де $g_i(x,y,t_0,t_1)$, $i=\overline{1,s}$ – задані функції змінних

$$(x,y,t_0,t_1)\in E^n\times E^n\times\Theta_0\times\Theta_1.$$

Зрозуміло, що множини $S_0(t_0)$ та $S_1(t_1)$ з умов (1.21) є частинним випадком множини $S(t_0,t_1)$ з умови (1.23), коли $S(t_0,t_1)=S_0(t_0)\times S_1(t_1)$, а множина (1.22) – частинний випадок множини (1.24).

Далі, нехай задані множини Θ_0, Θ_1 на числовій осі R і $\sup\Theta_0<\inf\Theta_1$; $V(t)\subseteq E^r$, $G(t)\subseteq E^n$ при всіх t: $\sup\Theta_0<t<\inf\Theta_1$.

Нехай також задані множини $S_0(t_0)$, $S_1(t_1)$, причому $S_0(t_0)\subseteq G(t_0)$, $t_0\in\Theta_0$, $S_1(t_1)\subseteq G(t_1)$, $t_1\in\Theta_1$.

Нехай рух фазової точки $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}=f(x,u,t), \quad (1.25)$$

де функція $f(x,u,t)$ визначена при $x\in G(t)$, $u\in V(t)$, $t_0\le t\le t_1$.

Означення 1.2. Набір $(t_0,t_{1,}x_0,u(\cdot),x(\cdot))$ називається *допустимим набором*, якщо керування $u=u(\cdot)=(u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ визначене й кусково-неперервне на $t_0\le t\le t_1$ і задовольняє обмеження $u(t)\in V(t)$, $t_0\le t\le t_1$; $t_0\in\Theta_0$, $t_1\in\Theta_1$, $t_0\le t_1$; $x=x(\cdot)=x(\cdot,u(t),x_0)$ – траєкторія задачі Коші

$$\dot{x}=f(x,u,t),\ t_0\le t\le t_1,\ x(t_0)=x_0, \quad (1.26)$$

яка визначена на відрізку $[t_0,t_1]$ і задовольняє фазове обмеження (1.19), а $x(t_0)=x_0\in S_0(t_0)$ $x(t_1)\in S_1(t_1)$.

Будемо вважати, що множина допустимих наборів $(t_0,t_{1,}x_0,u(\cdot),x(\cdot))$ непорожня.

Зауваження 1.2. Позначення, наприклад $z(t)=(z_1(t),\ldots,z_m(t))^T$, означає значення функції z у точці t. Саму ж функцію будемо позначати $z(\cdot)$, або просто z. Сама функція – це відображення області визначення функції в простір E^m, яке ставить у відповідність до кожної точки t з області визначення деяку точку з E^m.

Обмеження в задачах можуть бути обмеженнями на значення функції, наприклад $u(t)\in V(t)$. Якщо ж обмеження накладається на всю функцію $u(\cdot)$ у цілому й не є обмеженням на значення функції в конкретних точках t, то тоді використовується позначення $u(\cdot)$. Обмеження на всю функцію $u(\cdot)$ у цілому означає, що функція $u(\cdot)$, яка задовольняє це обмеження, в окремих точках або проміжках як завгодно малої довжини може набувати довільних значень.

Зміст обмежень визначається також згідно з контекстом.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (цільова функція, функціонал)

$$J(x_0,u(\cdot),x(\cdot),t_0,t_1)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt+g_0(x_0,x(t_1),t_0,t_1), \tag{1.27}$$

де $f^0(x(t),u(t),t)$, $g_0(x_0,x(t_1),t_0,t_1)$ – задані функції при $x\in G(t)$, $u\in V(t)$, $\sup\Theta_0<\inf\Theta_1$, $S_0(t_0)\subseteq G(t_0)$, $t_0\in\Theta_0$, $S_1(t_1)\subseteq G(t_1)$, $t_1\in\Theta_1$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів вигляду $(t_0,t_{1,}x_0,u(\cdot),x(\cdot))$.

Зауваження 1.3. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціонала (- J).

Позначимо $J_*=\inf(t_0,t_{1,}x_0,u(\cdot),x(\cdot))$, де нижня грань береться за всіма допустимими наборами.

Означення 1.3. Допустимий набір $(t_{0^*}, t_{1^*,} x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ називається розв'язком задачі оптимального керування, $u_*(\cdot)$ – оптимальним керуванням, $x_*(\cdot)$ – оптимальною траєкторією системи, якщо

$$J(t_{0^*}, t_{1^*,} x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_*.$$

Тоді задачу оптимального керування можна записати так:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) =$$

$$= \int_{t0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \to \inf; \tag{1.28}$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \;\; t_0 \le t \le t_1; \tag{1.29}$$

$$x \in G(t),\, t_0 \le t \le t_1; \tag{1.30}$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0) \;\; x(t_1) \in S_1(t_1),\; t_0 \in \Theta_0,\; t_1 \in \Theta_1; \tag{1.31}$$

$$u \in V(t),\, t_0 \le t \le t_1. \tag{1.32}$$

Вважаємо тут керування $u = u(\cdot)$ кусково-неперервним на $[t_0, t_1]$ (якщо не вказане інше).

Зокрема, якщо $f^0 \equiv 1, g_0 \equiv 0$, то $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot)) = t_1 - t_0$, тобто маємо задачу швидкодії. Якщо початковий момент часу закріплений, тобто $\Theta_0 = \{t_0\}$, то в задачі (1.28)–(1.32) включення $t_0 \in \Theta_0$ опускають, замість $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ пишуть $J(t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, а замість $S_0(t_0)$ – S_0.

Аналогічно роблять, якщо закріплений кінцевий момент часу t_1 або один з кінців траєкторії. Якщо $V(t) = E^r$, $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$ або $S_0(t_0) \equiv E^n$, або $S_1(t_1) \equiv E^n$, то відповідні обмеження в постановці задачі (1.28)–(1.32) опускають.

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування загальнішого вигляду порівняно із задачею (1.28)–(1.32). У теорії керування розглядаються також задачі, що враховують запізнення інформації; задачі з параметрами, дискретним часом, загальнішим виглядом цільової функції; задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, стохастичних рівнянь тощо.

РОЗДІЛ 2
КЕРОВАНІСТЬ, СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ НЕПЕРЕВНИХ І ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

2.1. Постановка та дослідження задач керованості лінійних систем

Розглянемо систему керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \tag{2.1}$$

де $x(t)$ – n-вимірний, $u(t)$ – m-вимірний вектори-стовпці, $A(t)$, $B(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від часу t. Такі системи називаються *нестаціонарними системами керування*.

Означення 2.1. Система (2.1) називається цілком керованою, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (2.1) задовольняє умови $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Позначимо: $X(t,\xi)$ – фундаментальна матриця для однорідних рівнянь, що відповідають рівнянням (2.1), нормована в точці ξ. Позначимо матрицю $W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi)$. Матрицю $W(t,\xi)$ називають *матрицею імпульсних перехідних функцій*.

Вважаємо, що $W(\mathrm{t},\xi) = \begin{pmatrix} w_1(\mathrm{t},\xi) \\ \vdots \\ w_n(\mathrm{t},\xi \end{pmatrix}$, де $w_i(\mathrm{t},\xi)$ – вектор-рядок:

$$w_i(\mathrm{t},\xi) = (w_{i1}(\mathrm{t},\xi), \ldots, w_{in}(\mathrm{t},\xi))\,,\ i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 [4]. Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою, необхідно й достатньо, щоб вектори-функції $w_1(\mathrm{t},\xi),\ldots,w_n(\mathrm{t},\xi)$ були лінійно незалежними на довільному проміжку $[t_0,t_1]$.

Зауважимо, що умови, наведені в теоремі 2.1, практично важко використовувати, оскільки матриця $W(t,\xi)$ наперед не задається і її треба кожного разу обчислювати для різних значень t та ξ. Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці $A(t), B(t)$.

Розглянемо це питання для систем керування, у яких A, B – матриці зі сталими елементами. Такі системи будемо називати *лінійними стаціонарними системами*:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\,. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (2.3) n-го порядку необхідно й достатньо, щоб

$$\mathrm{rang} S_n = \mathrm{rang}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n\,. \tag{2.4}$$

Наслідок 2.1. Якщо в системі (2.3) вектор керування $u(t)$ одновимірний, а $B = b$ – стовпчик, то необхідна й достатня умова цілком керованості має вигляд

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0\,. \tag{2.5}$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) називаються критеріями цілком керованості Калмана для лінійних стаціонарних систем.

Означення 2.2 *(цілком керованість на заданому проміжку)*. Нестаціонарна система (2.1) називається *цілком керованою на заданому проміжку* $[t_0,t_1]$, якщо для двох довільних значень $x^0, x^1 \in X$ фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [t_0,t_1]$, що розв'язок цієї системи задовольняє крайові умови $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0,t_1]$ виконується умова

$$\mathrm{rang}\left[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\right] = n\,, \tag{2.6}$$

де $z_1(t)=B(t), \quad z_k(t)=A(t)z_{k-1}(t)-\dfrac{dz_{k-1}}{dt}$, $k=\overline{2,n}$,

то система (2.1) – цілком керована на заданому проміжку.

Якщо вектори-функції $w_i(t,\xi)$, $i=\overline{1,n}$ при $t=t_1$ лінійно залежні на заданому проміжку $[t_0,t_1]$, то

$$\operatorname{rang}\left[z_1(t),z_2(t),\ldots,z_n(t)\right]<n. \tag{2.7}$$

2.2. Спостережуваність у лінійних системах керування

У теорії керування розглядаються задачі про спостережуваність. Зміст цих задач полягає в тому, щоб установити алгоритм визначення частини або всіх фазових координат системи за умови, що відомі друга частина фазових координат або деякі функції від цих координат, а також математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t), \tag{2.8}$$

де $x(t)$ – n-вимірний вектор стану системи, $A(t)$ – відома матриця $n\times n$.

Означення 2.3. Задачу знаходження вектора $x(t)$ стану системи (2.8) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0,t_1]$ функцією

$$y(t)=q^T(t)x(t), \tag{2.9}$$

де $q(t)$– відома n-вимірна вектор-функція, будемо називати *задачею спостережуваності* лінійної системи (2.8). Функцію $y(t)$ називають функцією (сигналом) виходу системи (2.8).

Зауваження 2.1. Узагальнення означення 2.3: знайти вектор $x(t)$ або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією виходу

$$y(t)=G^T(t)x(t), \tag{2.10}$$

де $G(t)$ – відома матриця $n\times m$.

Означення 2.4. Якщо задача спостережуваності (2.8), (2.9) (або (2.8), (2.10)) має розв'язок, то система називається цілком спостережуваною або частково спостережуваною залежно від того, усі чи частину компонент вектора $x(t)$ удається встановити.

Означення 2.5. Пара матриць $A(t), G(t)$ називається спостережуваною, якщо можна розв'язати задачу спостережуваності для системи (2.8) за вектором виходу (2.10).

Розглянемо найпростіші розв'язки задач спостережуваності.

Теорема 2.4. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі $n-1$ похідні від вектора виходу (2.10) системи (2.8). Тоді для існування розв'язку задачі спостережуваності для системи (2.8) у фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} \widetilde{S}_n = n\,, \tag{2.11}$$

де

$$\widetilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)), \tag{2.12}$$

$$G_1^T(t) = G^T(t),\ G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt},\ \nu = \overline{1, n-1}\,. \tag{2.13}$$

Доведення. Продиференціюємо $n-1$ разів співвідношення (2.10) та отримаємо n рівностей:

$$\begin{aligned}
&y(t) = G_1^*(t)x(t),\\
&y'(t) = \left[\frac{dG_1^*(t)}{dt} + G_1^*(t)A(t)\right]x(t) = G_2^*(t)x(t),\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(t) = \left[\frac{dG_{n-1}^*(t)}{dt^{n-1}} + G_{n-1}^*(t)A(t)\right]x(t) = G_n^*(t)x(t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Розглянемо (2.14) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора $x(t)$. Її розв'язок існує, якщо ранг матриці системи дорівнює n (достатня умова). Оскільки ранг матриці системи дорівнює рангу $\widetilde{S}_n$, то теорему доведено.

Зауваження 2.2. При $G_1(t) = q(t)$ умова (2.11) набуває вигляду

$$\det\ \widetilde{S}_n(t) = \det(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \neq 0\,, \qquad (2.15)$$

де

$$q_1^T(t) = q^T(t),\ q_\nu^T(t) = q_{\nu-1}^T(t)A(t) + \frac{dq_{\nu-1}^T(t)}{dt},\ \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \widetilde{S}_n^{*^{-1}}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

(це випливає із системи (2.14)).

Зауваження 2.3. Якщо система рівнянь (2.8) стаціонарна, тобто $A(t) = A = \text{const}$ і $G_1(t) = \text{const}$ (або $q(t) = \text{const}$), то матриця $\widetilde{S}_n$, умови (2.11), (2.15) і формула (2.16) набудуть відповідно вигляду:

$$\widetilde{S}_n(t) = (G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G)\,.$$

$$\text{rang}\widetilde{S}_n = \text{rang}(G, A^T G, \ldots, A^{T\,n-1} G) = n\,. \qquad (2.17)$$

$$\det \widetilde{S}_n(t) = \det\,(q, A^T q, \ldots, A^{T^{n-1}} q) \neq 0\,. \qquad (2.18)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} q^T \\ q^T A \\ \vdots \\ q^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Зазначимо, що розв'язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов'язано з необхідністю чисельно знаходити похідні заданої функції виходу $y(t)$.

2.3. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$\operatorname{rang}(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n, \qquad (2.20)$$

де

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t) z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, k = \overline{2, n}$$

для лінійної системи керування

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Запишемо також умову цілком спостережуваності для лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ з виходом $y(t) = G^T(t)x(t)$:

$$\operatorname{rang}(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)) = n, \qquad (2.21)$$

де

$$G_1^T(t) = G^T(t),\ G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt},\ \nu = \overline{1, n-1}.$$

Зміст позначень тут той самий, що й вище в цьому розділі. Умови (2.20), (2.21) подібні між собою за формою. Утім існує зв'язок між ними й за змістом.

Теорема 2.5. Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t), \qquad (2.22)$$

то виконується умова (2.21) цілком спостережуваності системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ з виходом $y(t) = G^T(t)x(t)$.

Систему (2.22) називають спряженою до системи керування (2.1). Таким чином, дана теорема дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем. Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв'язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли елементи матриць A, G не залежать від t, і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

Теорема 2.6. Для того, щоб існував розв'язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.23}$$

з вектором виходу (вимірів)

$$y = G^T x, \tag{2.24}$$

необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\mathrm{rang}\tilde{S}_n = \mathrm{rang}(G, A^T G, \dots, A^{T\,n-1} G) = n\,. \tag{2.25}$$

Зауваження 2.4. Найчастіше задачі спостережуваності виникають у системах керування, тому вони розв'язуються паралельно із задачею керування рухом системи. Щодо лінійних систем, це означає, що задача спостережуваності виникає не для системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),$ а для системи керування $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, де $u(t)$ – m-вимірний вектор керування. При цьому вектор виходу $y(t) = G^T(t)x(t)$ має розмірність m.

2.4. Ідентифікація параметрів математичних моделей динамічних систем

У багатьох випадках дослідникам невідомі як сама структура математичних моделей системи керування, так і параметри моделей. Це зумовлює необхідність оцінки або самої структури й параметрів математичної моделі, або значень окремих параметрів при заданій наперед структурі моделі.

Розглянемо задачу знаходження невідомих параметрів математичної моделі, якщо її структура визначена у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Задача знаходження (оцінки) невідомих параметрів математичної моделі об'єкта дослідження називається *задачею ідентифікації*.

Для ілюстрації підходів до розв'язання проблем такого типу розглянемо найпростішу задачу ідентифікації.

Нехай стан системи визначається вектором $x(t)$ із n-вимірного евклідового простору і для деякого значення аргументу t у результаті вимірів отримані вектори

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \tag{2.26}$$

У цьому випадку задача ідентифікації полягає в необхідності знайти таку матрицю A розмірністю $n \times n$, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \\ &\ldots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Якщо для відомих вимірів (2.26) існує матриця A, яка задовольняє співвідношення (2.27), то задача ідентифікації системи має розв'язок.

Позначивши рядки матриці A через $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_n^T$, рівняння (2.27) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = a_j^T x, \\ &\ldots\ldots \qquad\qquad , \ (j = 1,2,\ldots,n) \\ &\frac{d^n x_j}{dt^n} = a_j^T \frac{d^n x}{dt^n}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Розглядаючи співвідношення (2.28) при кожному значенні j як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядка $a_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$, можна записати:

$$\begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix} \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{2.29}$$

Умова існування розв'язку системи (2.29):

$$\det\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \neq 0. \tag{2.30}$$

Якщо умова (2.30) виконується, то це означає, що параметри a_j математичної моделі в цьому випадку визначаються за формулами

$$a_j = \begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{2.31}$$

У результаті підстановки співвідношень (2.27) в умову (2.30) неважко отримати

$$\det(x, Ax, \ldots A^{n-1}x) \neq 0. \tag{2.32}$$

Порівнявши (2.32) з умовою (2.5) цілком керованості системи (2.3), можна сформулювати зв'язок між задачами ідентифікації та керованості: для існування розв'язку задачі ідентифікації у вигляді математичної моделі $\frac{dx}{dt} = Ax$ за умови спостереження вектора стану $x(t)$ достатньо, щоб матриця A та вектор $x(t)$ задовольняли умову (2.5) цілком керованості системи (2.3), де $b = x(t)$.

Подібну аналогію можна встановити також між умовами ідентифікації та цілком спостережуваності.

Оскільки матриця A наперед невідома, то на практиці умову ідентифікації перевіряють за допомогою умови (2.30).

Зауважимо, що необхідна й достатня умова поставленої задачі ідентифікації полягає в тому, щоб збігалися ранги основної та розширеної матриць у системі (2.29).

2.5. Керованість, спостережуваність та ідентифікація дискретних лінійних систем керування

Важливим розділом теорії керування є дослідження дискретних систем керування, тобто систем, які змінюють свій стан у дискретні моменти часу. Зауважимо, що системи керування, у яких у керуючому пристрої використовуються процесори, за природою є дискретними системами, оскільки процесор змінює свій стан (проводить обчислення) з певною тактовою частотою.

Не вдаючись до детального опису процесу дискретизації неперервних систем, будемо вважати, що рівняння руху дискретної лінійної системи керування задаються у вигляді

$$x(k) = A(k)x(k-1) + B(k)u(k-1), \tag{2.33}$$

де $x(k) = x(t_k)$ – n-вимірний вектор стану системи в момент часу (у точці) t_k, $u(k-1) = u(t_{k-1})$ – m-вимірний вектор керування в момент часу t_{k-1}, $A(k), B(k)$ – матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від моменту часу t_k. Дискретний аргумент t_k набуває значення із заданої послідовності моментів часу:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_N < \ldots .$$

Розглянемо рух системи (2.33) на деякому інтервалі часу $[t^{(0)}, t^{(1)}]$.

Означення 2.6. Лінійну дискретну систему керування (2.33) будемо називати цілком керованою на заданому інтервалі від $t^{(0)} = t_k$ до $t^{(1)} = t_{k+N}$, якщо для двох довільних станів $x^{(0)} \in X$, $x^{(1)} \in X$, де X – множина допустимих станів системи (2.33), існує така послідовність керувань $u(k), u(k+1), \ldots, u(k+N-1)$, за допомогою якої система (2.33) переходить зі стану $x^{(0)} \in X$ у стан $x^{(1)} \in X$, тобто $x(k) = x^{(0)}$, $x(k+N) = x^{(1)}$.

Теорема 2.8. Необхідною й достатньою умовою цілком керованості лінійної дискретної системи (2.33) є умова:

$$\begin{gathered}\operatorname{rang}(A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+2)B(k+1),\\ A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+3)B(k+2),\ldots,B(k+N)) = n.\end{gathered} \tag{2.34}$$

Зауваження 2.5. Постановка задачі про керованість дискретних систем має сенс за умови $Nm \geq n$.

Наслідок 2.2. Для лінійної стаціонарної дискретної системи (елементи матриць $A(k) = A,\ B(k) = B$ не залежать від дискретного аргументу t_k, тобто є сталими) умова цілком керованості (2.34) набуває вигляду

$$\operatorname{rang}(B, AB, A^{n-1}B) = n, \tag{2.35}$$

а у випадку, коли матриця B є стовпцем b, – вигляду

$$\det(b, Ab, A^{n-1}b) \neq 0.$$

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних дискретних систем.

Нехай задана дискретна система

$$x(k+1) = A(k+1)x(k) \tag{2.36}$$

і відомий m-вимірний вектор виходу (вимірів) системи

$$y(k) = G^T(k)x(k) \tag{2.37}$$

у дискретні моменти часу t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1}.

Означення 2.7. Якщо за відомою дискретною системою (2.36) і відомим m-вимірним вектором виходу (2.37) у дискретні моменти часу t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1} можна відновити стан системи, то така система називається спостережуваною дискретною системою.

Теорема 2.9. Для спостережуваності системи (2.36) за відомим виходом (2.37) необхідно й достатньо виконання умови

$$\begin{gathered}\operatorname{rang}(G(k), A^T(k)G(k+1), \ldots \\ \ldots, A^T(k)A^T(k+1)\ldots A^T(k+n-2)G^T(k+n-1)) = n.\end{gathered} \tag{2.38}$$

Наслідок 2.3. Якщо для матриць виконується умова $A(k) = A, \quad G(k) = G$, де матриці A та G не залежать від дискретного аргументу t_k, то умова спостережуваності (2.38) набуває вигляду

$$\operatorname{rang}(G, A^T G, A^{T\,n-1} G) = n\,.$$

Наслідок 2.4. Якщо виконуються умови наслідку 2.3 і матриця G є стовпцем g, то умова спостережуваності записується так:

$$\det(g, A^T g, A^{T^{n-1}} g) \neq 0\,.$$

Тоді відновлений вектор стану дискретної системи $x(k)$ буде визначатися за формулою

$$x(k) = \begin{pmatrix} g^T \\ g^T A \\ \vdots \\ g^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Розглянемо задачу ідентифікації для лінійних дискретних систем.

Нехай задана лінійна стаціонарна дискретна система

$$x(k+1) = Ax(k)\,, \tag{2.40}$$

де A – невідома стала матриця розмірністю $n \times n$.

Означення 2.8. Якщо за відомими значеннями векторів $x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n)$ стану лінійної стаціонарної системи (2.40) можна відновити (знайти) матрицю A, то система називається такою, що може бути ідентифікованою, а процес знаходження матриці A – ідентифікацією системи (2.40).

Теорема 2.10. Якщо виконується умова

$$\det(x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)) \neq 0\,, \tag{2.41}$$

то задача ідентифікації для лінійної дискретної системи (2.40) за відомими значеннями векторів виходу має розв'язок.

РОЗДІЛ 3
ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ РУХІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

3.1. Дослідження стійкості руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування

Нехай система керування описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – відповідно вектори стану та керувань, $F(t, x(t), u(t))$ $-n$-вимірна вектор-функція, що описує рух системи.

Для постановки задач дослідження стійкості та конструювання регуляторів потрібно задати певний бажаний рух системи (3.1). Вважатимемо, що траєкторія $x(t)$ на інтервалі $[t_0, \infty)$ змінюється згідно із заданим програмним режимом:

$$x(t) = x_{np}(t),\ t \in [t_0, \infty). \tag{3.2}$$

Нехай у момент часу $t^{(0)}$ система задовольняє умову $x(t) = x_{np}(t)$. Тоді задачу програмного керування можна сформулювати так: знайти програмне керування $u_{np}(t)$, при якому розв'язок системи (3.1) забезпечує умову (3.2).

Задача дослідження стійкості програмного руху $x_{np}(t^{(0)})$ полягає у визначенні властивостей розв'язку системи (3.1) під дією програмного керування $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, якщо в початковий момент часу $t^{(0)}$ вектор стану системи отримує деяке збурення $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)})\ . \tag{3.3}$$

Означення 3.1. Програмний рух $x_{пр}(t)$ системи (3.1) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, якщо для початкових умов системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{пр}(t)) \tag{3.4}$$

виконується нерівність $\left\|\Delta x(t^{(0)})\right\| = \left\|x(t^{(0)}) - x_{пр}(t^{(0)})\right\| \le \delta$, то при $t > t^{(0)}$ для розв'язку системи (3.4) справедлива оцінка $\left\|\Delta x(t)\right\| \le \varepsilon$, де $\Delta x(t) = x(t) - x_{пр}(t)$.

Програмний рух системи (3.4) називається асимптотично стійким, якщо до умов стійкості додається гранична умова: $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\Delta x(t)\right\| = 0$.

Під дією початкових збурень траєкторія збуреного руху матиме вигляд $x(t) = x_{пр}(t) + \Delta x(t)$. Запишемо рівняння для $\Delta x(t)$ згідно із системою (3.4):

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x(t)}{dt} &= F(t, x_{пр}(t) + \Delta x(t), u_{пр}(t)) - F(t, x_{пр}(t), u_{пр}(t)) = \\ &= \Phi(t, \Delta x(t), u_{пр}(t)).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Очевидно, що стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (3.4) означає стійкість за Ляпуновим незбуреного руху $\Delta x(t) \equiv 0$ для системи (3.5). Надалі будемо досліджувати на стійкість незбурений рух $\Delta x(t) \equiv 0$.

Зазвичай програмний рух системи (3.4) і відповідний незбурений рух системи (3.5) є нестійкими. Тому будемо розглядати задачу забезпечення стійкості цих систем шляхом уведення додаткового керування $\Delta u(t, \Delta x(t))$, яке разом із програмним керуванням становить закон керування системою:

$$u(t) = u_{пр}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)). \tag{3.6}$$

Тоді задача аналітичного конструювання регулятора системи (3.1) полягає у виборі такої залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$, за якої розв'язок $\Delta x(t) \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))), \tag{3.7}$$

де $X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{пр}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)))$, був би стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

Якщо задати наперед структуру залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$ з точністю до значень деяких параметрів, то задача аналітичного конструювання регулятора зведеться до вибору значень цих параметрів системи (3.7) згідно з умовами стійкості за Ляпуновим розв'язку $\Delta x(t) \equiv 0$.

3.2. Стійкість у застосуванні до аналітичного конструювання регуляторів лінійних систем керування

Нехай система (3.7) є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)) . \tag{3.8}$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо систему (3.8) у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)) . \tag{3.9}$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (3.9) сформулюємо таким чином: знайти матрицю $C(t)$ розмірністю $m \times n$ таку, що при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.9), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t), \tag{3.10}$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x . \tag{3.11}$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь [16].

Теорема 3.1. Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.12}$$

необхідно й достатньо, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3.13}$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{3.14}$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо наведену теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11). Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння:

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0\,. \tag{3.15}$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці C, тобто $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Згідно з теоремою 3.1, невідомі елементи матриці C вибираємо з умови $\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (3.11).

Теорема 3.2 (критерій Рауса – Гурвіца). Нехай характеристичне рівняння (3.13) має вигляд

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \tag{3.16}$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.16) мали від'ємні дійсні частини: $\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, необхідно й достатньо виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_2 \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

де $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 > 0$.

Отже, має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \text{ тощо.} \qquad (3.18)$$

Якщо застосувати критерій Рауса – Гурвіца до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці C. У результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0\,,\ j = \overline{1,n}\,. \qquad (3.19)$$

Матриця C, що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (3.14). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості (теорема 3.1) лінійна стаціонарна система (3.11) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

На основі результатів про керованість та спостережуваність розглянемо як приклад конструктивний спосіб знаходження керування $u(x)$ у лінійних стаціонарних системах і дослідимо умови існування матриці C, за яких система $\dfrac{dx}{dt} = (A + BC)x$ ($A, B, C - \text{const}$) буде асимптотично стійкою.

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu\,,\ A, b - \text{const}\,. \qquad (3.20)$$

Тут A – $n \times n$-матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0, \qquad (3.21)$$

то існує функція керування

$$u = c^T x\,, \qquad (3.22)$$

де $c=(c_1,\ldots,c_n)^T$, при якій система

$$\frac{dx}{dt}=(A+bc^T)x \tag{3.23}$$

має наперед задані довільні корені характеристичного рівняння

$$\det(A+bc^T-\lambda E)=0\,. \tag{3.24}$$

Доведення цієї теореми можна знайти, зокрема, у [4]. Доведення побудовано таким чином, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1,\ldots,c_n$ за відомими значеннями коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристичного рівняння (3.24). У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c=(S^{-1})^T\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1}(p-a). \tag{3.25}$$

Тут $S=(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$, $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}=S^{-1}A^nb$, $a-n$-вектор-стовпчик, що знаходиться через відомі значення коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристичного рівняння (3.24) (фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного полінома).

Для того, щоб розв'язати задачу аналітичного конструювання одновимірного (зазначимо, що такий спосіб можна застосувати також до конструювання багатовимірного) регулятора, потрібно вибрати вектор a таким, щоб він забезпечував від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння (3.24) системи керування (3.20). За цієї умови вектор c, отриманий через вектор a згідно з формулою (3.25), і забезпечить асимптотичну стійкість лінійної системи. Тоді керування, за теоремою 3.3, буде визначатися формулою (3.22).

3.3. Застосування методів Ляпунова до дослідження стійкості програмних рухів

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), u(t, x(t))), \tag{3.26}$$

яка відповідає системі (3.7) при $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$.

Як відомо з теорії стійкості [23], найзагальнішим методом дослідження систем на стійкість є метод функцій Ляпунова (або прямий, або другий метод Ляпунова). Цей метод не вимагає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (3.26) і дозволяє зробити висновок про характер стійкості нульового розв'язку системи, використовуючи функції Ляпунова, що мають бути спеціально побудовані. За характером поведінки функцій Ляпунова згідно із системою (3.26) і робиться висновок про стійкість або нестійкість нульового розв'язку.

Наведемо означення та формулювання основних теорем другого методу Ляпунова. Нехай для системи (3.26) існує така сукупність керувань $u(t, x(t))$, при яких у деякій області

$$\|x\| \le H \tag{3.27}$$

виконуються умови існування розв'язків рівнянь (3.26). Тут H – деяке задане число, $H > 0$.

Нехай функція $X(t, x(t), u(t, x(t)))$ аналітична (неперервна й диференційована) в області (3.27) і задовольняє умову $X(t, 0, u(t, 0)) = 0$.

Розглянемо стаціонарну систему, тобто частинний випадок системи (3.26), коли права частина рівнянь явно не залежить від часу:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)). \tag{3.28}$$

Уведемо до розгляду неперервну функцію $v(x)$, яка задовольняє умови:

а) $v(0) = 0$;

б) $v(x)$ однозначна в області (3.27);

в) $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j}$, $j=\overline{1,n}$ неперервні в області (3.27).

Означення 3.2. Функція $v(x)$ називається додатно визначеною, якщо для деякого заданого числа $H>0$ в області $\|x\|\le H$ виконується умова $v(x)>0$, $\|x\|\ne 0$.

Означення 3.3. Функція $v(x)$ називається додатно сталою, якщо для деякого заданого числа $H>0$ в області $\|x\|\le H$ виконується умова $v(x)\ge 0$.

Аналогічно вводяться поняття від'ємно визначеної та від'ємно сталої функцій.

Означення 3.4. Функція $v(x)$ називається знакозмінною, якщо в області $\|x\|\le H$ для як завгодно малого заданого числа $H>0$ вона набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Функції $v(x)$ називаються функціями Ляпунова.

Прикладом додатно визначеної функції Ляпунова є функція $v(x)=x^T Dx$, де D – квадратна симетрична матриця, для якої виконуються нерівності Сільвестра:

$$d_{11}>0,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}>0,\ \ldots,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}>0. \quad (3.29)$$

Теорема 3.4. Якщо для системи керування (3.28) можна визначити таку додатно визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна за t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt}=\operatorname{grad}^T v(x)\frac{dx}{dt}=\operatorname{grad}^T v(x)X(x,u(x))=w(x) \qquad (3.30)$$

була від'ємно сталою функцією $w(x)\le 0$, то програмний рух $x(t)\equiv 0$ системи (3.28) стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.5. Якщо для системи (3.28) можна визначити таку додатно визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна за t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{grad}^T v(x) \frac{dx}{dt} = \mathrm{grad}^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$$

була від'ємно визначеною функцією $w(x) < 0$, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.6. Якщо для системи (3.28) можна знайти таку функцію $v(x)$, щоб її повна похідна (3.30) згідно з цією системою була від'ємно визначеною функцією $w(x) < 0$, а сама функція $v(x)$ при цьому не була додатно сталою, тобто в як завгодно малій області $\|x\| \leq H$ (H – задане число, $H > 0$) $v(x)$ могла набувати від'ємних значень, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) нестійкий за Ляпуновим.

Зауваження 3.1. Можна дослідити на стійкість систему керування (3.26), права частина якої явно залежить від t. Тоді використовується поняття функції Ляпунова, параметрично залежної від t: $v(t, x)$ – диференційована за своїми аргументами функція при $t > t_0$ в області $\|x\| \leq H$ (H – задане число, $H > 0$) така, що $v(t, 0) \equiv 0$.

Тут і далі t_0 – початковий момент часу.

Розглянемо метод дослідження на стійкість за першим (лінійним) наближенням системи керування (3.28). Цей метод називають ще *першим методом Ляпунова*. При його застосуванні з правої частини рівнянь нелінійної системи виділяється лінійна за x частина. Потім окремо досліджується на стійкість система, у рівнянні якої праворуч стоїть лише щойно виділена лінійна функція. Це система першого, або лінійного, наближення. Тоді характер стійкості розв'язку початкової нелінійної системи буде таким самим, як і розв'язку системи першого наближення. Формулювання основних теорем цього методу наведені нижче.

Зобразимо систему (3.28) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + \widetilde{X}(x, u(x)), \tag{3.31}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} | x=0 & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} | x=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} | x=0 & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} | x=0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} | x=0 & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial u_m} | x=0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1} | x=0 & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial u_m} | x=0 \end{pmatrix},$$

функція $\widetilde{X}(x,u(x))$ при $x \to 0$ має порядок малості не нижче другого. Права частина системи (3.28) – n-вимірна вектор-функція:

$$X(x,u(x)) = (X_1(x,u(x)), \ldots, X_n(x,u(x)))^T .$$

Нехай керування задається у вигляді $u(x) = Cx$. Тоді система першого наближення має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x . \tag{3.32}$$

Теорема 3.7. Якщо програмний рух $x(t) \equiv 0$ для системи першого наближення $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ є асимптотично стійким за Ляпуновим, то такий рух асимптотично стійкий також і для нелінійної системи (3.31) незалежно від вигляду нелінійних функцій $\widetilde{X}(x,u(x))$.

Теорема 3.8. Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи першого наближення (3.32) $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) буде нестійкий за Ляпуновим незалежно від вигляду нелінійних функцій $\widetilde{X}(x,u(x))$.

Теорема 3.9. Якщо характеристичне рівняння $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ системи першого наближення (3.32) не має коренів з додатними дійсними частинами, то, залежно від характеру нелінійності функцій $\widetilde{X}(x,u(x))$, програмний рух $x(t)\equiv 0$ нелінійної системи (3.31) може бути як стійким, так і нестійким за Ляпуновим.

Означення 3.5. Програмний рух $x(t)\equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt}=X(x,u(x))+R(t,x) \qquad (3.33)$$

називається стійким за умови постійно діючих збурень, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0, \exists\delta_2>0$ такі: якщо

$$\|x(t_0)\|\le\delta_1,\ \|R(t_0,x)\|\le\delta_2,$$

то при $t\ge t_0$ для траєкторії системи виконується нерівність $\|x(t)\|\le\varepsilon$, $t\ge t_0$.

Теорема 3.10. Якщо для системи $\frac{dx}{dt}=X(x,u(x))$ можна знайти таку додатно визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна за t згідно з цією системою $\frac{dv}{dt}=\mathrm{grad}^T v(x)X(x,u(x))=w(x)$ була від'ємно сталою функцією $w(x)\le 0$ (тобто виконувалися умови теореми 3.4), то програмний рух $x(t)\equiv 0$ системи (3.33) буде стійким за умови постійно діючих збурень.

РОЗДІЛ 4
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ МЕТОДАМИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1. Постановка задач керування як задач варіаційного числення

Варіаційне числення, як відомо, вивчає методи, що дозволяють знаходити мінімальні та максимальні значення функціоналів. Задачі, у яких потрібно дослідити функціонал на екстремум, називають *варіаційними задачами* [33].

Даний розділ присвячений дослідженню можливостей застосування відомих методів варіаційного числення до задач оптимізації систем керування.

Для того, щоб показати, як і в яких випадках задачі теорії керування можна звести до задач варіаційного числення, запишемо окремо постановки задач теорії керування та варіаційного числення.

Задача теорії керування полягає в тому, що для системи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i = \overline{1,n}, \tag{4.1}$$

де $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ – відповідно вектор стану та вектор керувань, з початковим станом

$$x_i(t_0) = x_{0i} \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

на фіксованому проміжку часу $[t_0, t_1]$ треба знайти такий вектор керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.2) траєкторію $x(t)$, які б забезпечували мінімум функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt\ . \tag{4.3}$$

Наведемо *задачу Лагранжа варіаційного числення.* Потрібно знайти таку вектор-функцію $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ з початковою умовою (4.2), щоб функціонал

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G^1(x,\frac{dx}{dt},t)dt \tag{4.4}$$

набував мінімального значення.

Для того, щоб показати, як задачу теорії керування можна звести до задачі варіаційного числення, будемо вимагати, щоб керування в системі (4.1) було у вигляді

$$u_i=\phi_i(x,\frac{dx}{dt},t),\ i=\overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) у (4.3), отримаємо функціонал $Q=\int_{t_0}^{t_1} G^1(x,\frac{dx}{dt},t)dt$, який є функціоналом (4.4) задачі Лагранжа.

Таким чином, за умов (4.5) задача оптимізації (4.1)–(4.3) системи керування полягає у знаходженні оптимальної траєкторії, на якій досягається мінімум функціонала (4.4), що повністю збігається із задачею Лагранжа. Отже, коли в системах керування вектор керувань можна зобразити у вигляді (4.5), то задачу оптимального керування можна звести до задачі варіаційного числення.

Наведемо постановки основних задач варіаційного числення в термінах теорії керування.

Задача Майєра. Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1), початковий і кінцевий стани

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{4.6}$$

функціонал

$$Q=g(x,u,t)\big|_{t=t_1}, \tag{4.7}$$

де $g(x,u,t)$ – функція, визначена на множині кінцевих станів системи.

Необхідно знайти таку вектор-функцію керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.6) траєкторію $x(t)$, щоб функціонал (4.7) набував свого мінімального значення.

Задача Больца. Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1), початковий і кінцевий стани (4.6), функціонал

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt+g(x,u,t)\,|_{t=t_1}\,. \qquad (4.8)$$

Задача Больца полягає в знаходженні такої вектор-функції керувань $u(t)$, щоб задовольнялись умови (4.1), (4.6) і функціонал (4.8) набував мінімального значення.

Зазначимо, що остання задача є найзагальнішою, але шляхом уведення додаткових змінних завжди можна одну з наведених задач звести до іншої, і навпаки.

4.2. Необхідні та достатні умови екстремуму функціоналів

Для дослідження необхідних і достатніх умов екстремуму функціоналів наведемо деякі означення.

Означення 4.1. Змінна величина Q називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ і позначається $Q[x(t)]$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу відповідає число $Q[x(t)]$.

Означення 4.2. Функція

$$\delta x(t)=x(t)-x^{O}(t) \qquad (4.9)$$

називається варіацією аргументу $x(t)$.

Означення 4.3. Якщо приріст $\Delta Q[x(t)]=Q[x(t)]-Q[x^{O}(t)]$ функціонала $Q[x(t)]$ можна записати у вигляді

$$\Delta Q[x(t)]=Q[x(t)]-Q[x^{O}(t)]=Q[x^{O}(t)+\delta x(t)]-Q[x^{O}(t)]=$$
$$=L[x(t),\delta x(t)]+\beta[x(t),\delta x(t)]\times \max_{t\in[t_0,t_1]}\left\|\delta x(t)\right\|, \qquad (4.10)$$

то $L[x(t),\delta x(t)]$ – лінійна відносно варіації аргументу $\delta x(t)$ частина приросту функціонала $Q[x(t)]$ – називається варіацією функціонала й позначається

$$\delta Q[x(t)=]L[x(t),\delta x(t)]\,. \qquad (4.11)$$

Тут $\beta[x(t),\delta x(t)]\to 0$ при $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\left\|\delta x(t)\right\|\to 0$.

Теорема 4.1. Якщо функціонал $Q[x(t)]$ має варіацію (4.11) і досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму) на $x^0(t)$, де $x^0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то $\delta Q[x^0(t)] = 0$.

Наведемо необхідні й достатні умови екстремуму функціонала залежно від постановок задач варіаційного числення.

Задача із закріпленими (нерухомими) кінцями траєкторії.

Теорема 4.2. Необхідними умовами екстремуму функціонала

$$Q[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt \tag{4.12}$$

для $x(t) \in C^1_{[t_0,t_1]}$ із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$ $x(t_1) = x_1$ за умови, що функція $G = G(x, \dot{x}, t)$ – двічі диференційована за всіма своїми аргументами, є *рівняння Ейлера – Лагранжа:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{4.13}$$

тобто якщо функціонал (4.12) досягає екстремуму на кривій $x^0(t)$, то ця крива є розв'язком рівняння (4.13).

Зауваження 4.1. Рівняння (4.13) завжди є диференціальними рівняннями другого порядку. Для одновимірного $x(t)$ рівняння (4.13) можна аналітично проінтегрувати в таких випадках:

– G не залежить явно від $\dot{x}$: $G = G(x, t)$;

– G не залежить явно від t: $G = G(x, \dot{x})$;

– G не залежить явно від x: $G = G(\dot{x}, t)$;

– G лінійна відносно $\dot{x}$: $G = g_1(x, t) + \dot{x} \cdot g_2(x, t)$.

Розв'язок рівнянь (4.13) визначає цілу множину кривих, на яких функціонал (4.12) може досягати екстремуму, а може й не досягати. Щоб визначити, чи досягається екстремум на окремих кривих і дослідити його характер, треба перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Умова Якобі в аналітичній формі [33].

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{x\dot{x}} \right) w - \frac{d}{dt}\left(G_{\dot{x}\dot{x}} w' \right) = 0 .$$

Це рівняння називається *рівнянням Якобі*. Якщо існує розв'язок рівняння $w(t)$ такий, що при $t = t_0$: $w(t_0) = 0$ і не дорівнює нулю в жодній іншій точці проміжку $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$, то існує поле, що складається з кривих – розв'язків (4.13), яке включає досліджувану криву $x(t)$.

Теорема 4.3. Нехай крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13), що задовольняє умову Якобі. Тоді достатньою умовою досягнення функціоналом $Q[x(t)]$ вигляду (4.12) мінімуму на кривій $x(t)$ є *умова Вейєрштрасса*:

$$E(x, \dot{x}, t, v) \geq 0 \qquad (4.14)$$

для довільних значень v, $t_0 \leq t \leq t_1$, де

$$E(x, \dot{x}, t, v) = G(x, v, t) - G(x, \dot{x}, t) - (v - \dot{x})^T G_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$$

– функція Вейєрштрасса.

Зауваження 4.2. Умова Вейєрштрасса має також необхідний характер у тому розумінні, що, якщо в точках досліджуваної кривої $x(t)$ – розв'язку рівняння (4.13), яка задовольняє умову Якобі, для деяких значень v функція $E(x, \dot{x}, t, v)$ має протилежні знаки, то екстремум не досягається.

Теорема 4.4. Якщо на кривій $x(t)$ досягається мінімум функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії, то виконується *умова Лежандра*:

$$G_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x}, t) \geq 0 \qquad (4.15)$$

для довільних значень $\dot{x}$, $t_0 < t \leq t_1$.

Теорема 4.5. Нехай досліджувана крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Тоді умова Лежандра (4.15) у поєднанні з умовою Якобі є достатніми умовами досягнення мінімуму функціоналом (4.12) на кривій $x(t)$.

Зауваження 4.2. Наведені вище умови є достатніми умовами сильного мінімуму функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Детальніше про сильний і слабкий екстремуми функціонала можна прочитати в [33]. Щоб отримати умови максимуму функціонала, треба в наведених вище умовах мінімуму (4.14), (4.15) узяти знаки нерівностей протилежними.

Розглянемо варіаційну задачу з рухомим кінцем траєкторії. Нехай один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0) = x_0$, а інший – на кривій $x(t) = \phi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, тобто $x(t_1) = \phi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необхідними умовами екстремуму функціонала (4.12) на множині неперервно диференційованих функцій $x(t)$ таких, що один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0) = x_0$, а інший – на кривій $x(t) = \phi(t)$, тобто $x(t_1) = \phi(t_1)$, є рівняння Ейлера-Лагранжа $\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$ і умова трансверсальності:

$$G\Big|_{t=t_1} - \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i(t_1) - \dot{\varphi}_i(t_1)] \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t=t_1} = 0. \tag{4.16}$$

Тут, як і раніше, $G(x, \dot{x}, t)$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція.

Умову (4.16) можна записати в компактнішій формі:

$$[G + (\dot{\varphi} - \dot{x})^T G_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_1} = 0.$$

Дослідимо варіаційні задачі для функціоналів із вищими похідними:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), \dot{x}(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t), t)dt. \tag{4.17}$$

Теорема 4.7. Необхідною умовою екстремуму функціонала (4.17) на множині $2n$ разів неперервно диференційованих функцій $x(t)$, заданих разом зі своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно в початковий і кінцевий моменти часу за умови, що функція G за всіма аргументами $n+2$ рази диференційована, є рівняння *Ейлера – Пуассона*:

$$G_x - \frac{d}{dt}G_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}G_{\ddot{x}} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} G_{x^{(n)}} = 0. \tag{4.18}$$

Зазначимо, що диференціальне рівняння (4.18) є рівнянням порядку $2n$.

Теорема 4.8. Якщо на кривій $x(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала (4.17), виконана умова

$$G_{x^{(n)}x^{(n)}} \ge 0\,(\le 0) \tag{4.19}$$

і відрізок $[t_0, t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0 [33], то на цій кривій досягається мінімум (максимум) функціонала (4.17).

4.3. Варіаційна задача на умовний екстремум із закріпленими кінцями траєкторій

Розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt\,, \tag{4.20}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, у випадку, коли змінні $x_1, \ldots, x_n$ – залежні.

Вигляд залежності будемо визначати трьома типами співвідношень:

кінцеві: $\phi_j(x,t) = 0,$ (4.21)

диференціальні: $\varphi_j(x, \dot{x}, t) = 0,$ (4.22)

інтегральні: $\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_j(x, \dot{x}, t)dt, \quad j = 1,2,\ldots, m < n\,.$ (4.23)

Задача мінімізації функціонала (4.20) з урахуванням однієї з умов (4.21)–(4.23) називається *варіаційною задачею на умовний екстремум*. Задача мінімізації функціонала (4.20) із залежностями диференціального типу (4.22) називається *загальною задачею Лагранжа*. До неї зводяться всі інші задачі на умовний екстремум.

Розв'язок задачі (4.20), (4.22) збігається з розв'язком задачі на безумовний екстремум функціонала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} G'(x, \dot{x}, t)dt\,, \text{ де } G' = G + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\phi_j\,. \tag{4.24}$$

Тут $\lambda_j(t)$, $j = \overline{1,m}$ – деякі невизначені функції, які разом із функціями $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ є незалежними аргументами функціонала (4.24).

Рівняння Ейлера – Лагранжа для функціонала (4.24)

$$\frac{\partial G'}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G'}{\partial \dot{x}} = 0$$

разом з обмеженнями (4.22) утворюють замкнену систему $n+m$ рівнянь із невідомими $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ та $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,m}$.

Сталі інтегрування вказаної системи знаходяться із заданих умов $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

4.4. Варіаційна задача для систем з обмеженнями на керування

Розглянемо задачу керування з обмеженнями на керування типу нерівностей. Ідея розв'язання такої задачі методами варіаційного числення полягає в тому, щоб звести початкову задачу до близької задачі, яка розв'язувалася б простіше.

Нехай система керування описується рівняннями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i=\overline{1,n}. \tag{4.25}$$

На керування задані обмеження:

$$\psi(u) = \psi(u_1,\ldots,u_r) \le 0. \tag{4.26}$$

Кінці траєкторії закріплені: $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$; час t_1-t_0 – не фіксований.

Треба знайти керування, на якому досягається мінімум функціонала:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt. \tag{4.27}$$

Одним з підходів до розв'язання такої задачі є накладення "штрафу" у випадку, коли керування виходять із заданої області. Уведемо функцію "штрафу":

$$L(u) = \begin{cases} 0, & \psi(u) \le 0 \\ K\psi^2(u), & \psi(u) > 0, \quad K - \text{const} >> 0. \end{cases}$$

Тоді задачу знаходження керування можна звести до задачі знаходження мінімуму функціонала

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} \left[G(x,u,t) + L(u)\right]dt\,. \qquad (4.28)$$

Отже, початкова задача зведена до задачі на безумовний екстремум функціонала (4.28). Розв'язок цієї задачі може бути знайдений відомими варіаційними методами.

4.5. Канонічна форма рівнянь Ейлера – Лагранжа

Отримаємо рівняння Ейлера – Лагранжа $G_x - \frac{d}{dt}G_{\dot{x}} = 0$ у канонічній формі для функціонала $Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,\dot{x},t)dt.$ Не обмежуючи загальності викладення матеріалу, будемо розглядати випадок, коли $x(t)$ – скалярна функція.

Уведемо нові змінні p та H:

$$p = G_{\dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\,, \qquad (4.29)$$

$$H = -G + \dot{x}G_{\dot{x}} = -G + \dot{x}p. \qquad (4.30)$$

Продиференціювавши рівність (4.30) за всіма змінними, отримаємо:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}, \qquad (4.31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + p, \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} = \frac{dx}{dt}\,. \qquad (4.33)$$

Покажемо, що функція H не залежить від $\dot{x}$. Дійсно, з урахуванням рівності (4.32) та вигляду змінної p (4.29) маємо:

$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + p \equiv 0$. Таким чином, H є функцією змінних x, p, t: $H = H(x, p, t)$. Ураховуючи це, маємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dp}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt}. \end{cases} \tag{4.34}$$

Ця система називається *гамільтоновою*, або *канонічною формою рівняння Ейлера – Лагранжа*.

У випадку, коли $x(t)$ – n-вимірна функція, зведення рівняння Ейлера – Лагранжа до канонічної форми здійснюється аналогічно [4].

Теорема 4.9. Функція $H = H(x, p, t)$ досягає екстремуму за $x(t)$ за тих самих умов, що й функціонал Q, тобто з рівнянь Ейлера – Лагранжа випливають умови екстремуму функції $H = H(x, p, t)$.

Наведена канонічна форма рівнянь Ейлера – Лагранжа (4.34) важлива при розв'язуванні як задач варіаційного числення, так і задач теорії керування.

РОЗДІЛ 5
Метод динамічного програмування Беллмана для систем керування з неперевним і дискретним часом

5.1. Метод динамічного програмування розв'язання задач оптимального керування

Розглянемо задачу оптимального керування: знайти керування та траєкторії, на яких функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.1}$$

досягає екстремального (мінімального) значення для системи

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t), \tag{5.2}$$

де

$$x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T \in \Omega_t(X) \subseteq X, \tag{5.3}$$

$$u(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t))^T \in \Omega_t(U) \subseteq U. \tag{5.4}$$

Тут X – фазовий простір, U – простір керувань, $t \in [t_0, t_1]$.

У задачі (5.1)–(5.4) моменти часу t_0, t_1 у загальному випадку вважаються невідомими й підлягають визначенню. Ці моменти після їх визначення будемо позначати через t_0^0, t_1^0.

Метод динамічного програмування є наслідком принципу оптимальності, який був сформульований Р. Беллманом [2]. Принцип оптимальності справедливий для достатньо широкого класу задач оптимального керування, але не для всіх. Для задачі (5.1)–(5.4) принцип оптимальності може бути сформульований таким чином: якщо деяка траєкторія AC керованої системи (5.2) є оптимальною траєкторією задачі (5.1)–(5.4), то траєкторія BC

також буде оптимальною при будь-якому виборі точки B на оптимальній траєкторії AC.

Наведемо інше формулювання принципу оптимальності. Нехай $u^0(t), x^0(t),\ t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (5.1)–(5.4), де $u^0(t)$ – оптимальне керування, $x^0(t)$ – оптимальна траєкторія, і нехай t' – довільний фіксований момент часу, $t' \in [t_0, t_1]$. Тоді розв'язок задачі (5.1)–(5.4) для $t \ge t'$ визначається фіксованим значенням $x^0(t')$ і не залежить від $u^0(t), x^0(t)$ для $t < t'$, тобто

$$\inf_{u \in \Omega(U(x^0(t')))} \{\int_{t'}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1))\} = \int_{t'}^{t_1} G(x^0,u^0,t)dt + \Phi(x^0(t_1)).$$

Для задачі (5.1)–(5.4) принцип оптимальності Беллмана доводиться на основі властивості адитивності визначеного інтеграла [4].

Доведення принципу оптимальності можна виконати таким чином. Нехай

$$Q^0 = \inf_{\substack{u(t) \in \Omega_t(U) \\ x(t) \in \Omega_t(X) \\ t_0^0 \le t \le t_1^0}} Q(u) = \int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0, u^0, t)dt + \Phi(x^0(t_1^0)) =$$

$$= \int_{t_0^0}^{t^*} G(x^0,u^0,t)dt + \int_{t^*}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt + \Phi(x^0(t_1^0)) = Q_1^0 + Q_2^0.$$

Тут t^* – довільна точка з $[t_0^0, t_1^0]$.

Розглянемо задачу (5.1)–(5.4) за умови, що

$$t_0^0 = t^*, x(t^*) = x^0(t^*).$$

Розв'язок цієї задачі позначимо через $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t), t^* \le t \le t_1^0$.

Припустимо, усупереч принципу оптимальності, що цей розв'язок не збігається з $u^0(t), x^0(t)$ при $t > t^*$. Тоді

$$\tilde{Q} = \int_{t^*}^{\tilde{t}_1} G(\tilde{x}, \tilde{u}, t)dt + \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1)) < Q_2^0.$$

Побудуємо допустиме керування для задачі (5.1)–(5.4) у вигляді кусково-неперервної функції

$$u_*(t) = \begin{cases} u^0(t), & t_0^0 \le t < t^*, \\ \widetilde{u}(t), & t^* \le t < t_1^0. \end{cases}$$

Відповідна до цього керування траєкторія матиме вигляд

$$x_*(t) = \begin{cases} x^0(t), & t_0^0 \le t < t^*, \\ \widetilde{x}(t), & t^* \le t \le t_1^0. \end{cases}$$

Для розв'язку $u_*(t), x_*(t)$ задачі (5.1)–(5.4) маємо

$$Q(u_*) = Q_1^0 + \tilde{Q} < Q_1^0 + Q_2^0 = Q^0.$$

Остання нерівність указує на те, що розв'язок $u^0(t), x^0(t)$ не є оптимальним, оскільки $u_*(t)$ дає менше значення функціонала Q.

Протиріччя доводить справедливість принципу оптимальності.

Різницеве рівняння Беллмана для дискретних систем

Наведемо дискретний аналог задачі оптимального керування (5.1)–(5.4). Розіб'ємо заданий інтервал часу рівномірно точками: $t_0^0 = t_0, t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots, t_1^0 = t_N$.

Позначимо підінтервали часу через $\Delta t_k = \Delta t = t_{k+1} - t_k$, стан системи в моменти часу t_k – через $x(t_k) = x_k, k = \overline{0, N}$, керування – відповідно $u(t_k) = u_k, k = \overline{0, N-1}$. Тоді дискретний аналог функціонала (5.1) матиме вигляд

$$Q = Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, t_k)\Delta t_k + \Phi(x_N) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x_k, u_k, t_k) + \Phi(x_N) \longrightarrow \inf. \tag{5.5}$$

Отримаємо дискретний аналог для системи (5.2):

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t_k}=f(x_k,u_k,t_k),\ \text{звідки}$$

$$x_{k+1}-x_k=f(x_k,u_k,t_k)\Delta t_k=F(x_k,u_k,t_k),\ k=\overline{0,N-1}. \qquad (5.6)$$

Множини (5.3), (5.4) у випадку дискретного часу відповідно набудуть вигляду

$$x_k\in\Omega_k(X),\ \ k=\overline{0,N}, \qquad (5.7)$$

$$u_k\in\Omega_k(U),\ \ k=\overline{0,N-1}\,. \qquad (5.8)$$

Для постановки задачі оптимального керування дискретною системою (5.6) припускаємо, що множини (5.7), (5.8) непорожні та обмежені. Задача оптимального керування (5.5)–(5.8) має сенс лише в тому випадку, коли з точок множини $\Omega_0(X)$ можна перейти в точки множини $\Omega_N(X)$ через точки множин $\Omega_k(X)$, $k=\overline{1,N-1}$.

Означення 5.1. Множина $\Omega_N(X)$ називається *досяжною* з точок $x_k\in\Omega_k(X)$, $k=\overline{0,N-1}$, якщо існують такі допустимі керування $\{u_j\}, j=\overline{k,N-1}$, що відповідна до них згідно з рівнянням (5.6) траєкторія $\{x_j\}, j=\overline{k,N}$ з початковою точкою x_k з'єднує цю точку з деякою точкою множини $\Omega_N(X)$.

Якщо множина початкових значень $\Omega_0(X)$ складається не з одного елемента, то задача (5.5)–(5.8) розбивається на дві задачі:

а) знаходження допустимих керувань, які доставляють мінімум функціонала (5.5) при фіксованому значенні $x_0\in\Omega_0(X)$, тобто

$$\min_{\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}} Q(x_0,t_0,\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1})=Q(x_0,t_0)\,;$$

б) знаходження мінімуму $Q(x_0,t_0)$ як функції змінної x_0 на множині $\Omega_0(X)$, тобто

$$Q^0=\min_{x_0\in\Omega_0(X)} Q(x_0,t_0)=Q^0(t_0)\,.$$

Для фіксованого моменту часу $t_k, k=\overline{0,N-1}$ уведемо деяку функцію $S_k(x_k,t_k)$, яку будемо називати *функцією Беллмана,* у вигляді

$$S_k(x_k,t_k)=\min_{\{u_j\}_{j=k}^{j=N-1}}\{\sum_{j=k}^{N-1}F_0(x_j,u_j,t_j)+\Phi(x_N)\}=$$

$$=\sum_{j=k}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0(x_k),t_j)+\Phi(x_N), \qquad (5.9)$$

де $u_j^0(x_k)$, $k=\overline{j,N-1}$, – послідовність керувань, що відповідає оптимальному руху системи (5.6) з деякої точки $x_k \in \Omega_k(X)$, узятої в момент t_k, у точки множини $\Omega_N(X)$.

Виокремимо у формулі (5.9) перший член. Отримаємо

$$S_k(x_k,t_k)=F_0(x_k,u_k^0(x_k),t_k)+\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0(x_k),t_j)+\Phi(x_N).$$

Далі візьмемо $j=k+1$ і для керувань $u_k^0(x_k)$, під дією яких система (5.6) переходить у точку x_{k+1}: $x_{k+1}=F_0(x_k,u_k^0(x_k),t_k)$, розглянемо функцію Беллмана

$$S_{k+1}(x_{k+1},t_{k+1})=\min_{\{u_k\}_{j=k+1}^{j=N-1}}\{\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j,t_j)+\Phi(x_N)\}=$$

$$=\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0(x_{k+1}),t_j)+\Phi(x_N), \qquad (5.10)$$

де $u_j^0(x_{k+1})$, $j=\overline{k+1,N-1}$ – послідовність керувань, які відповідають оптимальному руху системи (5.6) із вказаної точки $x_{k+1}\in\Omega_{k+1}(X)$ у точки множини $\Omega_N(X)$.

З принципу оптимальності Беллмана випливає, що розв'язок задачі (5.5)–(5.8) на проміжку $[t_k,t_N]$ збігається з розв'язком відповідної задачі на $[t_{k+1},t_N]$, якщо перехід від x_k до x_{k+1}

здійснено згідно з оптимальним керуванням $u_k^0(x_k)$ для системи керування (5.6). Звідси будуть збігатися керування

$$u_k^0(x_k) = u_j^0(x_{k+1}), \ \ j = \overline{k+1, N-1}.$$

Отже, ураховуючи це та формулу (5.10), вираз для функції $S_k(x_k, t_k)$ можна записати у вигляді

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}).$$

Оскільки $x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k)$, то остаточно отримаємо:

$$S_k(x_k, t_k) = \min_{u_k \in \Omega_k(U)} \{F_0(x_k, u_k, t_k) + S_{k+1}(F(x_k, u_k, t_k), t_{k+1})\} \quad (5.11)$$

для всіх $k = \overline{0, N-1}$. При цьому $S_N(x_N, t_N) = \Phi(x_N)$.

Рівняння (5.11) називається *різницевим рівнянням Беллмана.*

Отримане рівняння Беллмана лежить в основі *методу динамічного програмування.*

5.2. Алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем

Алгоритм методу динамічного програмування розв'язання задачі вигляду (5.5)–(5.8) для дискретних систем керування складається з двох частин: знаходження керувань як функцій від станів системи (прямий хід) та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (зворотний хід).

А: Прямий хід

Крок 1. Покладемо в рівнянні Беллмана (5.11) $k = N-1$ та розв'яжемо задачу

$$S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1}) =$$
$$= \min_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1}(U)} \{F_0(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}) + \Phi(F(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}))\}$$

для всіх точок множини $\Omega_{N-1}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$, тобто для точок

$$x_N = F(x_{N-1}, u_{N-1}(x_{N-1}), t_{N-1}) \in \Omega_N(X).$$

Знаходимо $u_{N-1}^0(x_{N-1})$ як функцію точок $x_{N-1} \in \Omega_{N-1}(X)$.

Крок 2. Для $k = N-2$ розв'яжемо задачу

$$S_{N-2}(x_{N-2}, t_{N-2}) =$$

$$= \min_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}) + S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1})\} =$$

$$= \min_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}) +$$

$$+ S_{N-1}(F(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}), t_{N-1})\}$$

для всіх $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Звідси знаходимо $u^0_{N-2}(x_{N-2})$ для $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$.

Продовжуємо далі процес, поки не дійдемо до $k = 0$.

Крок N. Для $k = 0$ розв'яжемо задачу

$$S_0(x_0, t_0) = \min_{u_0 \in \Omega_0(U)} \{F_0(x_0, u_0, t_0) + S_1(F(x_0, u_0, t_0), t_1)\}$$

для всіх $x_0 \in \Omega_0(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Одержимо $u^0_0(x_0), x_0 \in \Omega_0(X)$.

В: Зворотний хід.

Якщо множина $\Omega_0(X)$ складається більш ніж з одного елемента, то потрібно розв'язати задачу:

$$\min_{x_0 \in \Omega_0(X)} S_0(x_0, t_0) = S_0(x^0_0, t_0) = Q^0(t_0).$$

Знайшовши x^0_0, отримаємо оптимальне керування $u^0_0(x^0_0) = u^0_0$ у момент часу $t = t_0$.

Крок 1. Підставимо знайдені оптимальні x^0_0, $u^0_0(x^0_0)$ у рівняння (5.6):

$$x^0_1 = F(x^0_0, u^0_0, t_0).$$

Знайшли x^0_1 у момент $t = t_1$. Підставляючи значення x^0_1 у функцію $u^0_1(x^0_1)$, отриману на прямому ході алгоритму, знаходимо оптимальне керування $u^0_1(x^0_1) = u^0_1$.

Продовжуємо цей процес.

$\vdots$

Крок N. Аналогічно знаходимо керування $u_{N-1}^0(x_{N-1}^0) = u_{N-1}^0$ і точку $x_N^0 = F(x_{N-1}^0, u_{N-1}^0, t_{N-1})$.

Отже, знайшли $\{u_j^0\}, j = \overline{0, N-1}, \{x_j^0\}, j = \overline{0, N}$ – оптимальне керування та оптимальну траєкторію для задачі (5.5)–(5.8).

Зауваження 5.1. До переваг методу динамічного програмування належить зведення початкової задачі великої розмірності до послідовного розв'язання однотипних задач меншої розмірності. Таким чином, замість одночасного знаходження всіх $N \cdot r$ невідомих керувань для задачі оптимального керування (5.5)–(5.8) послідовно розв'язуємо N задач умовної мінімізації за $u_k, k = \overline{0, N-1}$, і кожна з цих задач має r невідомих.

Зауваження 5.2. Метод динамічного програмування завжди дає розв'язок задачі синтезу оптимального керування, яка полягає в знаходженні оптимального керування як функції фазових координат системи. Зокрема, для дискретних систем синтезуючі керування отримуємо на прямому ході алгоритму.

5.3. Рівняння Беллмана для неперервних систем керування

5.3.1. Рівняння Беллмана для неперервних систем в інтегральній формі

Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом і вільними правими кінцями траєкторій. Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.12}$$

для системи

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \tag{5.13}$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ і з обмеженнями на керування

$$u = u(t) \in \Omega_t(U) \tag{5.14}$$

та на траєкторії

$$x = x(t) \in \Omega_t(X) \tag{5.15}$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Вважаємо, що моменти часу t_0, t_1 фіксовані, функції $G(x,u,t)$, $\Phi(x(t))$ та вектор-функції $f(x,u,t)$ неперервні за змінними x,u й кусково-неперервні за t на проміжку $[t_0,t_1]$. Крім того, для функції $f(x,u,t)$ виконуються умови Ліпшица за змінною керування, тобто для довільних w,v із множини (5.14):

$$\left| f(x,w,t) - f(x,v,t) \right| \le \alpha \left| w - v \right|,$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина.

Припускаємо, що $u(t)$ – кусково-неперервна функція змінної t на проміжку $[t_0,t_1]$.

Візьмемо для довільного фіксованого $t \in [t_0,t_1]$ деяку точку $x = x(t) \in \Omega_t(X)$. Для t та $x(t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$, відповідно, розглянемо задачу (5.12)–(5.15). Розв'язок цієї задачі запишемо як $u^0(\tau,x)$, $x^0(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t_1$. Мінімум відповідного функціонала для даного розв'язку позначимо через $S(x,t)$.

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t\le\tau\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\int_t^{t_1} G(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \varPhi(x(t_1))\} =$$

$$= \int_t^{t_1} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau + \varPhi(x^0(t_1)).$$

Візьмемо на інтервалі $[t,t_1]$ довільний момент часу $t+\Delta t$ і точку $x(t+\Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)$. Розглянемо задачу (5.12)–(5.15) для $t+\Delta t$, $x(t+\Delta t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$, відповідно. Зазначимо, що ця задача відрізняється від попередньої лише початковими даними.

Мінімум відповідного функціонала позначимо через $S(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$.

$$S(x(t+\Delta t), t+\Delta t) =$$

$$= \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t+\Delta t\le\tau\le t_1 \\ x(t+\Delta t)\in\Omega_{t+\Delta t}(X)}} \{ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1)) \} =$$

$$= \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau, x(t+\Delta t), \tau) d\tau + \Phi(\tilde{x}(t_1)),$$

де $\tilde{u}(\tau, x(t+\Delta t))$, $\tilde{x}(\tau)$ – розв'язок задачі (5.12)–(5.15) на проміжку $[t+\Delta t, t_1]$.

Виберемо за $x(t+\Delta t)$ той стан системи (5.13), у який вона потрапляє в момент $t+\Delta t$, рухаючись із точки $x(t)$ по оптимальній траєкторії $x^0(\tau)$, тобто за стан $x(t+\Delta t)$ візьмемо стан $x^0(t+\Delta t)$. Тоді, згідно з принципом оптимальності, розв'язки наведених вище двох задач збігаються на проміжку $t+\Delta t \le \tau \le t \le t_1$. Тому

$$S(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Повернемося до значення функціонала $S(x,t)$. Використовуючи властивість адитивності інтеграла, можемо записати:

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Звідси

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t+\Delta t), t+\Delta t),$$

де траєкторія $x^0(t+\Delta t)$ системи (5.13) отримана під дією керування $u^0(\tau)$.

Отже,

$$S(x,t)=\int\limits_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau+S(x^0(t+\Delta t,u^0(\tau)),t+\Delta t).$$

Ця рівність виконується лише для оптимального керування $u^0(\tau)$. Якщо брати інші керування з множини допустимих керувань згідно з (5.14), то права частина останньої рівності може тільки збільшитись.

Отже, отримаємо рівняння Беллмана в інтегральній формі:

$$S(x,t)=$$

$$=\min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}}\left\{\int\limits_{t}^{t+\Delta t} G(x(\tau),u(\tau,x),\tau)d\tau+S(x(t+\Delta t,u(\tau,x)),t+\Delta t)\right\}. \qquad \textbf{(*)}$$

Розглянемо задачу із закріпленими кінцями траєкторій та вільним часом для автономної системи й запишемо рівняння Беллмана. Потрібно знайти керування й траєкторії, на яких функціонал

$$Q=Q(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1} G(x,u)dt+\Phi(x(t_1)) \qquad (5.16)$$

досягає мінімального значення для системи

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad (5.17)$$

із закріпленими кінцями $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$ та обмеженнями на керування й траєкторію

$$u=u(t)\in\Omega_t(U),\ x=x(t)\in\Omega_t(X),\ t\in[t_0,t_1]. \qquad (5.18)$$

Зауважимо, що, оскільки моменти часу не фіксовані, то мінімум функціонала (5.16) буде функцією лише початкового стану x_0. Позначимо це значення через $S(x_0)$:

$$S(x_0)=\min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t_0\le\tau\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}}\left\{\int\limits_{t_0}^{t_1} G(x,u)d\tau+\Phi(x(t_1))\right\}.$$

Аналогічно попередній задачі отримаємо

$$S(x_0) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le\tau\le t_0+\Delta t \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x,u)d\tau +$$

$$+ \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0+\Delta t\le\tau\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{ \int_{t_0+\Delta t}^{t_1} G(x,u)d\tau + \Phi(x(t_1))\}.$$

З принципу оптимальності маємо

$$S(x_0) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le\tau\le t_0+\Delta t \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x,u)d\tau + S(x(t_0+\Delta t, u(\tau))) \right\}.$$

Оскільки це можна застосувати до довільної точки x фазової траєкторії, то отримаємо *рівняння Беллмана в інтегральній формі* для задачі з вільним часом для автономної системи (яке позначимо через **):

$$S(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} G(x,u)d\tau + S(x(t+\Delta t, u(\tau))) \right\}. \quad \textbf{(**)}$$

Розглянемо задачу швидкодії для автономної системи: знайти мінімум функціонала

$$T = t_1 - t_0 \tag{5.19}$$

для системи

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{5.20}$$

із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ і обмеженнями на керування та траєкторії

$$u = u(t) \in \Omega_t(U)\,,\ x = x(t) \in \Omega_t(X)\,,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{5.21}$$

Зазначимо, що за умови $G(x,u) \equiv 1, \Phi(x) \equiv 0$ у (5.16) ця задача є частковим випадком попередньої задачі (5.16)–(5.18) і функція $S(x)$ буде мати зміст мінімального часу досягнення системою (5.20) точки x_1 з точки x. Позначимо цей мінімальний час через $T(x)$. Тоді з рівняння ** отримаємо *рівняння Беллмана в* *інтегральній формі* для задачі швидкодії для автономної системи (це рівняння позначимо через ***):

$$T(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{\Delta t + T(x(t+\Delta t, u(\tau)))\right\}. \qquad \textbf{(***)}$$

5.3.2. Рівняння Беллмана в диференціальній формі для неперервних систем

Для задач (5.12)–(5.15), (5.16)–(5.18), (5.19)–(5.21) запишемо рівняння Беллмана в диференціальній формі. Для цього скористаємося отриманими вище рівняннями Беллмана в інтегральній формі. Додатково до наведених у цих задачах умов будемо вважати: керування $u(t)$ неперервні за t, для задачі (5.12)–(5.15) функція $S(x,t)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = \mathrm{grad}_x^T S(x,t) = (\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n})$, $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}$; для задачі (5.16)–(5.18) функція $S(x)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial S(x)}{\partial x} = \mathrm{grad}_x^T S(x) = (\frac{\partial S(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S(x)}{\partial x_n})$; для задачі (5.19)–(5.21) функція $T(x)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \mathrm{grad}_x^T T(x) = (\frac{\partial T(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial T(x)}{\partial x_n})$.

За цих припущень, розклавши рівняння Беллмана в інтегральній формі ***, **, ***** у ряди Тейлора та знехтувавши членами другого порядку й вище, можна записати ці рівняння у вигляді:
для задачі з фіксованим часом і вільним правим кінцем

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau),\tau)\Delta t + S(x,t) +$$

$$+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + \mathrm{grad}_x^T S(x,t)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

для задачі із закріпленими кінцями й вільним часом

$$S(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau))\Delta t + S(x) +$$

$$+\mathrm{grad}_x^T S(x)(x(t+\Delta t, u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

для задачі швидкодії

$$T(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\Delta t + T(x) +$$

$$+\mathrm{grad}_x^T Tx)(x(t+\Delta t, u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\}.$$

Тут τ – деяке фіксоване значення, $o(\Delta t)$ – нескінченно мала вищого порядку малості, ніж Δt. Зауважимо, що величини $S(x,t)$, $S(x)$, $T(x)$ ліворуч і праворуч взаємно знищуються. При переході до границі при $\Delta t \to 0$ матимемо:

$$\tau \to t, u(\tau) \to u(t), x(\tau) \to x(t), x(t+\Delta t, u(\tau)) \to x(t),$$

$$\frac{x(t+\Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \to \dot{x}(t).$$

Отже, одержимо рівняння:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0\le t\le t_1}} \{G(x,u,t) + \mathrm{grad}_x^T S(x,t)\dot{x}(t)\},$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0\le t\le t_1}} \{G(x,u) + \mathrm{grad}_x^T S(x)\dot{x}(t)\} = 0,$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0\le t\le t_1}} \{\mathrm{grad}_x^T T(x)\dot{x}(t)\} = -1.$$

Ці рівняння мають виконуватись у кожній точці оптимальної траєкторії систем $\dot{x} = f(x,u,t)$ або $\dot{x} = f(x,u)$.

У результаті *рівняння Беллмана в диференціальній формі* набудуть вигляду (позначимо їх символами **+** відповідно до **∗**):

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0\le t\le t_1}} \{G(x,u,t) + \mathrm{grad}_x^T S(x,t)\dot{x}(t)\}, \qquad \textbf{(+)}$$

$$S(x,t_1) = \Phi(x(t_1)).$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ t_0\le t\le t_1}} \{G(x,u)+\mathrm{grad}_x^T S(x)\dot{x}(t)\}=0, \qquad \textbf{(++)}$$

$$S(x_1)=\Phi(x_1).$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ t_0\le t\le t_1}} \{\mathrm{grad}_x^T T(x)\dot{x}(t)\}=-1, \qquad \textbf{(+++)}$$

$$T(x_1)=0.$$

Початкові умови, які записані для кожного з рівнянь Беллмана, випливають із вигляду функцій $S(x,t)$, $S(x)$, $T(x)$, відповідно.

Зауваження 5.3. Рівняння Беллмана для дискретних і неперервних систем є необхідними й достатніми умовами оптимальності [4, 16], що дає повне обґрунтування методу динамічного програмування.

Зауваження 5.4. Для неперервних систем, що описуються диференціальними рівняннями, застосування відповідних рівнянь Беллмана, які є нелінійними рівняннями в частинних похідних, вимагає додаткових досліджень [16].

5.4. Метод динамічного програмування для задачі побудови оптимального регулятора лінійних систем керування

Нехай об'єкт керування описується рівняннями

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u, \qquad (5.22)$$

де $x(t)=(x_1,\dots,x_n)^T$ – вектор стану системи, $A(t)$ – $n\times n$-матриця, $u(t)=(u_1,\dots,u_r)^T$ – вектор керувань, $B(t)$ $B(t)$ – матриця розмірністю $n\times r$, $t\in[t_0,t_1]$.

Початковий стан заданий $x(t_0)=x_0$, час t_1 – фіксований, стан $x(t_1)$ – вільний.

Задача полягає в тому, щоб для системи (5.22) знайти керування й траєкторію, на яких функціонал

$$Q(x,u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^TQ(t)x+u^TR(t)u)dt+\frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1) \qquad (5.23)$$

досягає мінімального значення. Тут $Q(t), R(t), F$ – симетричні додатно визначені матриці.

Задача оптимального керування лінійною системою (5.22) з мінімізацією квадратичного функціонала (5.23) у теорії керування називається *задачею аналітичного конструювання оптимального регулятора* для лінійної системи.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою рівняння Беллмана в диференціальній формі, яке для даної задачі набуває вигляду

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=$$

$$=\min_{u(t)}\{\frac{1}{2}x^TQ(t)x+\frac{1}{2}u^TR(t)u+\mathrm{grad}_x^T S(x,t)(A(t)x+B(t)u)\},$$

де $\mathrm{grad}_x^T S(x,t)=\dfrac{\partial S^T(x,t)}{\partial x}=(\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x_n})$.

Знайдемо керування з необхідної умови екстремуму:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial u}=R(t)u+B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0,$$

$$R(t)u=-B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Звідси $u^0=-R^{-1}(t)B^T(t)\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x}$.

Підставимо це керування в рівняння Беллмана для $S(x,t)$. Маємо

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^TQ(t)x+$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+$$

$$+(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T(A(t)x-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})\},$$

звідки

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^TQ(t)x-$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^TB(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+$$

$$+(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^TA(t)x,$$

$$S(x,t_1)=\frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1).$$

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді квадратичної форми $S(x,t)=\frac{1}{2}x^TP(t)x,$ де $P(t)$ – симетрична матриця, що підлягає визначенню. Знайдемо похідні за часом і за станами цієї функції. Маємо $\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=P(t)x, \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x.$

Підставимо ці вирази в рівняння й отримаємо:

$$-\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x=\frac{1}{2}x^TQ(t)x-\frac{1}{2}x^TP(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x+$$

$$+x^TP(t)A(t)x.$$

Це буде виконуватися для довільних значень x тоді й тільки тоді, коли матриця $P(t)$ задовольнятиме рівняння

$$-\frac{1}{2}\frac{dP(t)}{dt}=\frac{1}{2}Q(t)-\frac{1}{2}P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t).$$

Скористаємось тим, що для матриць справедливо $CD=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}C^TD$. Остаточно отримаємо:

$$\frac{dP(t)}{dt}=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)-Q(t)+$$
$$+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t). \tag{5.24}$$

$$P(t_1)=F. \tag{5.25}$$

Диференціальні рівняння (5.24) називаються *матричними рівняннями Ріккаті.*

Таким чином, матрична функція $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є розв'язком задачі Коші (5.24), (5.25) зі зворотним напрямком зміни аргументу t .

Розв'язавши цю задачу Коші, знайдемо $P(t)$, а значить, і функцію $S(x,t)$. Тоді оптимальне керування

$$u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$$

і система керування набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]x.$$

Разом з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ маємо задачу Коші, розв'язавши яку, отримаємо оптимальну траєкторію.

Отже, використовуючи метод динамічного програмування, для лінійної нестаціонарної системи (5.22) знайшли оптимальне керування й оптимальну траєкторію, на яких функціонал (5.23) досягає мінімального значення.

РОЗДІЛ 6
Принцип максимуму Понтрягіна для розв'язання задач оптимального керування

6.1. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій та фіксованими початковим і кінцевим моментами часу

Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій і фіксованим часом (відповідні термінологія та позначення введені у п. 1.3).

Треба мінімізувати функціонал

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \to \inf \tag{6.1}$$

для системи

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{6.2}$$

за умов

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{6.3}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \tag{6.4}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – фазові координати, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – керування, що вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0, t_1]$, моменти часу t_0, t_1 і точки x_0, x_1 – задані, множина $V \subseteq E^r$ (E^r – евклідів r-вимірний простір) не залежить від часу, фазові обмеження для $t \in [t_0, t_1]$ відсутні, $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Зазначимо, що керування в точках розриву не впливають на розв'язок рівняння (6.2) (згідно з означенням 1.1.) і на значення інтеграла (6.1), а значить, і на задачу (6.1)–(6.4). Тому в точках розриву керування можна довизначити довільно, аби не порушувалось обмеження $u(t) \in V$, $t_0 \le t \le t_1$.

Для формальної постановки задачі введемо деякі позначення й будемо вважати виконаними певні припущення. Залежність від t та інших аргументів у формулах, де це не викликає непорозумінь, опускатимемо. Вважаємо, що

$$u(t) = u(t+0) = \lim_{t \to t+0} u(t) \text{ при } t_0 \le t \le t_1 \text{ та } u(t_1) = u(t_1 - 0).$$

Припустимо, що функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$ мають частинні похідні (для спрощення записів аргументи функцій будемо опускати в тих випадках, які не викликають непорозумінь):

$$\frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^j}{\partial x_i} = f^j_{x_i}, \; i = \overline{1, n}.$$

Аналогічно позначимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f^n_{x_1} & \cdots & f^n_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_x \\ \vdots \\ f^n_x \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} = f^0_x = (f^0_{x_1}, \quad \ldots, \quad f^0_{x_n})^T. \tag{6.5}$$

Вважаємо: функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$ та частинні похідні f_x, f^0_x з формул (6.5) – неперервні за сукупністю аргументів $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, t_1]$.

Уведемо n допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))^T \in E^n$ та сталу ψ_0. Для цих змінних і сталої визначимо функцію:

$$\begin{aligned} &H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t), u(t), t) + \psi_1(t) f^1(x(t), u(t), t) + \\ &+ \ldots + \psi_n(t) f^n(x(t), u(t), t) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) f(x(t), u(t), t). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ називається *функцією Гамільтона – Понтрягіна.*

Нехай $u = u(t)$ – кусково-неперервне керування, що задовольняє умову (6.4), а $x(t) = x(t,u,x_0)$ – розв'язок системи (6.2), що відповідає цьому керуванню $u(t)$, початковій умові x_0 і визначений на всьому відрізку $[t_0,t_1]$.

Парі $(u(t),x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь відносно змінних $\psi(t) = (\psi_1(t),...,\psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} =$$

6.7)

$$= -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f^j(x(t),u(t),t)}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}}, i = \overline{1,n},$$

де $\psi_0(t) = \psi_0$ – стала величина.

Систему лінійних диференціальних рівнянь (6.7) називають *спряженою системою*, що відповідає парі $(u(t),x(t,u,x_0))$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишемо систему (6.7) у векторній формі:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H_x(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} =$$

$$= -\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t) - (f_x(x(t),u(t),t)^T \psi(t)$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Теорема 6.1 (принцип максимуму – необхідна умова оптимальності; закріплені кінці траєкторій, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.1)–(6.4).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

$$1)\ \psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1; \qquad (6.8)$$

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0). \qquad (6.9)$$

Центральне місце в теоремі 6.1 займає умова максимуму. Тому теорему 6.1 і аналогічні теореми прийнято називати *принципом максимуму.* Умова (6.8) гарантує, що функція не перетвориться на тотожний нуль, і робить умову максимуму (6.9) змістовною.

Як користуватися теоремою 6.1 на практиці?

Знаходять функцію $u = u(x, t, \psi, \psi_0)$, що дає $\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$. При цьому змінні x, t, ψ і стала ψ_0 вважаються параметрами.

Зазначимо, що

$$u = u(x, t, \psi, \psi_0) \in V. \qquad (6.10).$$

Якщо початкова задача (6.1)–(6.4) має розв'язок, то функція (6.10) визначена на непорожній множині, що випливає з умови максимуму (6.9).

Далі складаємо систему з $2n$ диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases} \qquad (6.11)$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ відносно невідомих функцій $x(t), \psi(t)$.

Загальний розв'язок системи (6.11) містить $2n$ довільних сталих. Для їх визначення треба мати $2n$ умов. У задачі (6.1)–(6.4) ці умови такі: $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$.

Система (6.11) містить ще один невідомий параметр $\psi_0 \le 0$. Як його визначити? Зауважимо, що функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$, яка визначається співвідношенням (6.6), лінійна й однорідна відносно змінних $\psi_0,\psi_1,...,\psi_n$, тобто $H(x(t),u(t),t,\alpha\psi(t),\alpha\psi_0)=\alpha H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ для $\forall\alpha$.
Звідси та з умови

$$\begin{aligned} &H(x(t),u(x,t,\psi(t),\psi_0),t,\psi(t),\psi_0)= \\ &=\sup_{u\in V} H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0) \end{aligned} \qquad (6.12)$$

маємо

$$u(x,t,\alpha\psi(t),\alpha\psi_0)\equiv u(x,t,\psi(t),\psi_0) \qquad (6.13)$$

для $\forall\alpha$.

Звідси випливає, що теорема 6.1 визначає $\psi_0,\psi_1,...,\psi_n$ лише з точністю до додатного множника, і цим множником можна скористатися на свій розсуд.

На практиці, ураховуючи умови теореми 6.1, зокрема обмеження (6.8), найчастіше покладають

$$|\psi_0|^2+\|\psi(\bar{t})\|^2=1, \psi_0\le 0, \qquad (6.14)$$

де $\bar{t}$ – деякий момент часу, $t_0\le\bar{t}\le t_1$, наприклад $\bar{t}=t_0$ або $\bar{t}=t_1$.

У тих задачах, у яких удається заздалегідь показати, що $\psi_0<0$, замість умови нормування (6.14) часто покладають $\psi_0=-1$, тобто для визначення $2n+1$ невідомих параметрів системи (6.11) ($2n$ сталих із загального розв'язку цієї системи плюс параметр ψ_0) маємо $2n+1$ умову (6.3), (6.14). Зазвичай можна очікувати, що існують лише окремі ізольовані функції $x(t),\psi(t)$ $t\in[t_0,t_1]$ і значення ψ_0, які задовольняють умови (6.11), (6.3), (6.14).

Крайову задачу, що складається з умови максимуму (6.12), системи диференціальних рівнянь (6.11), крайових умов (6.3) та умови нормування (6.14), називають *крайовою задачею принципу максимуму* для задачі оптимального керування (6.1)–(6.4).

Нехай удалося визначити з умов (6.11), (6.3), (6.14) деякі $x(t), \psi(t), \psi_0, t_0 \le t \le t_1$. Підставимо їх у (6.10) і отримаємо функцію

$$u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0) \in V, \; t_0 \le t \le t_1. \tag{6.15}$$

Нехай ця функція кусково-неперервна. З (6.10), (6.12), (6.15) випливає, що отримане керування $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умову максимуму (6.9), тобто згідно з теоремою 6.1 може претендувати на роль оптимального керування задачі (6.1)–(6.4), а відповідна до нього траєкторія $x(t) = x(t, u(t), x_0)$, $t_0 \le t \le t_1$ – на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Отже, вони є розв'язком, підозрілим на оптимальний. Чи буде знайдена пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ насправді розв'язком задачі (6.1)–(6.4), тобто оптимальним розв'язком, теорема 6.1 не гарантує, оскільки ця теорема дає лише необхідну умову оптимальності. Може бути, що пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умови теореми 6.1, але не є розв'язком задачі (6.1)–(6.4).

Утім, якщо з якихось міркувань відомо (зазвичай із фізичного змісту задачі), що задача (6.1)–(6.4) має розв'язок, а з крайової задачі принципу максимуму знайдені $x(t), \psi(t), \psi_0, t_0 \le t \le t_1$ однозначно, то знайдене керування (6.15) і буде оптимальним. Якщо ж інформації про існування розв'язку задачі (6.1)–(6.4) наперед немає, або крайову задачу принципу максимуму задовольняє кілька знайдених керувань, підозрілих на оптимальне, то для з'ясування питання про їх оптимальність потрібні додаткові й часом досить складні дослідження.

Отже, схема використання принципу максимуму описана.

6.2. Формулювання принципу максимуму Понтрягіна для задачі з вільними або рухомими кінцями траєкторій і фіксованим часом

Розглянемо задачу оптимального керування із загальнішими умовами на кінцях траєкторій; початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, фіксовані:

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\,dt + \Phi(x(t_1)) \to \inf, \tag{6.16}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{6.17}$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \tag{6.18}$$

$$u(t) \in V, \ t_0 \le t \le t_1, \tag{6.19}$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$; початковий і кінцевий моменти часу t_0, t_1 фіксовані; $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Вважаємо, що правий кінець траєкторій або вільний: $S_I \equiv E^n$, або рухомий:

$$S_I = \{x \in E^n : g_j(x) = 0, j = \overline{1, s_I}\}, \tag{6.20}$$

або

$$S_I = \{x \in E^n : g_j(x) \le 0, j = \overline{1, m_I}, g_j(x) = 0, j = \overline{m_I + 1, s_I}\}. \tag{6.21}$$

Зокрема, якщо в умові (6.20) покладемо: $g_j(x) = x_j - x_{jI}$ та $s_I = n$, то отримаємо випадок закріпленого правого кінця: $x(t_1) = x_I$.

Аналогічно для лівого кінця. Вважаємо, що лівий кінець траєкторій або вільний: $S_0 \equiv E^n$, або рухомий:

$$S_I = \{x \in E^n : h_j(x) = 0, j = \overline{1, s_0}\}, \tag{6.22}$$

або

$$S_0 = \{x \in E^n : h_j(x) \le 0, j = \overline{1, m_0}, h_j(x) = 0, j = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \tag{6.23}$$

Далі вважатимемо: функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$, $g_j(x), j = \overline{1, s_I}$, $h_j(x), j = \overline{1, s_0}$, $\Phi(x)$ мають частинні похідні за змінними $x_1, \ldots, x_n$ і неперервні разом із цими похідними за сукупністю своїх аргументів при всіх $x \in E^n$, $u(t) \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

Також позначимо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x = (\Phi_{x_1}, \ldots, \Phi_{x_n})^T,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x} = g_{j_x} = (g_{j_{x_1}}, \dots, g_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_I},$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x} = h_{j_x} = (h_{j_{x_1}}, \dots, h_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_0}.$$

Теорема 6.2 (принцип максимуму – необхідна умова оптимальності; кінці траєкторій не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.16)–(6.19).

Тоді необхідно існують неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0); \qquad (6.9)$$

4) на лівому та правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (6.16)–(6.19) означають, що вектор $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ ортогональний до множини S_I у точці $x(t_1) \in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ – до множини S_0 у точці $x(t_0) \in S_0$.

Якщо $u(t)$ є обмеженою вимірною функцією, то формулювання теореми 6.2 зберігається, лише умова максимуму вигляду (6.9) і включення (6.19) будуть виконуватись майже всюди на $[t_0, t_1]$.

Зауважимо, що умова (6.13) однорідності функції $u(t)$ справедлива також для цієї задачі, а властивість ортогональності вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ до множини S_I і вектора $\psi(t_0)$ до множини S_0 не порушиться, якщо величини $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ помножити на одне й те саме число $\alpha > 0$.

Тому тут також можна прийняти умову нормування (6.14), або умову $\psi_0 = -1$, якщо відомо, що $\psi_0 < 0$.

Ще треба вказати $2n$ умов для визначення $2n$ сталих, від яких залежатиме загальний розв'язок системи (6.11). Для цього розглянемо *умови трансверсальності* на кінцях траєкторії $x(t)$.

Наведемо ці умови на правому кінці траєкторії.

1) Правий кінець вільний: $S_I \equiv E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))$ до всього простору E^n означає:

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=0. \qquad (6.24)$$

Це дає n граничних умов для системи (6.11).

2) Правий кінець рухомий:

а) Нехай множина S_I задається у вигляді (6.20) і $g_{j_x}(x(t_1))\neq 0,\, j=\overline{1,s_I}$.

Тоді гіперплощина

$$g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0$$

– це дотична площина до поверхні, яка визначається рівнянням $g_j(x)=0$ у точці $x(t_1)$, а множина

$$\Gamma=\{x\in E^n : g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0,\, j=\overline{1,s_I}\}$$

– дотична площина до множини S_I у точці $x(t_1)$.

Умова ортогональності вектора a до множини S_I у точці $x(t_1)$ означає ортогональність a до дотичної площини Γ, тобто скалярний добуток $(a, x-x(t_1))=0$ при $\forall x\in\Gamma$ за означенням. Тоді з умови трансверсальності маємо:

$$(\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1)))^T(x-x(t_1))=0$$

для всіх x : $g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0,\, j=\overline{1,s_I}$.

За теоремою Фаркаша [5] існують числа $a_1,\dots,a_{s_I}$ такі, що

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=\sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1)). \qquad (6.25)$$

Сюди ж додамо умову $x(t_1)\in S_I$, тобто

$$g_j(x(t_1))=0,\, j=\overline{1,s_I}. \qquad (6.26)$$

Усього умови трансверсальності (6.25), (6.26) дають $n+s_I$ умов, з яких s_I умов можна використати для визначення додаткових параметрів $a_1,\ldots,a_{s_I}$, а решту n умов – приєднати до системи (6.11).

б) Нехай множина S_I задається у вигляді (6.21) і $g_{j_x}(x(t_1)) \neq 0, j=\overline{1,s_I}$. Тоді умова трансверсальності означає, що існують числа $a_1,\ldots,a_{s_I}$:

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=\sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1)), \qquad (6.27)$$

$$a_j g_j(x(t_1))=0, a_j \geq 0, j=\overline{1,m_I}, g_j(x(t_1))=0, j=\overline{m_I+1,s_I}. \qquad (6.28)$$

Таким чином, співвідношення (6.27), (6.28) також дають $n+s_I$ умов, з яких s_I умов використовуються для визначення параметрів $a_1,\ldots,a_{s_I}$, а решта n умов приєднуються до системи (6.11). Зауважимо, що для всіх тих $j, 1 \leq j \leq m_I$, для яких $g_j(x(t_1))<0$ (неактивні обмеження), з (6.28) випливає, що $a_j=0$. Тоді невизначеними залишаються лише a_j з індексами j, для яких $g_j(x(t_1))=0$ (активні обмеження).

3) Правий кінець закріплений:

$$x(t_1)=x_I. \qquad (6.29)$$

Тоді умову трансверсальності можна розглядати як умову ортогональності вектора $\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))$ до вектора нульової довжини – тобто до точки x_I. Це завжди тривіально виконується. Значить, у випадку закріпленого кінця умова трансверсальності вироджується й не містить ніякої інформації.

У цьому випадку маємо n граничних умов, які треба приєднати до системи (6.11).

Розглянемо умови трансверсальності на лівому кінці траєкторії $x(t)$.

1) Лівий кінець вільний: $S_0 \equiv E^n$.

Тоді умова трансверсальності записується так:

$$\psi(t_0)=0. \qquad (6.30)$$

2) Лівий кінець рухомий.

Якщо множина S_0 має вигляд (6.22) $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0, j = \overline{1, s_0}$, то умова трансверсальності запишеться таким чином: існують числа $b_1, \ldots, b_{s_0}$ такі, що

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \qquad (6.31)$$

і до (6.31) треба додати умову $x(t_0) \in S_0$, що означає:

$$h_j(x(t_0)) = 0, j = \overline{1, s_0}. \qquad (6.32)$$

Якщо множина S_0 має вигляд (6.23) і $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0, j = \overline{1, s_0}$, то умова трансверсальності:

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \qquad (6.33)$$

і до (6.31) треба додати умову $x(t_0) \in S_0$, що означає:

$$b_j h_j(x(t_0)) = 0, \ b_j \geq 0, \ j = \overline{1, m_0}, \qquad (6.34)$$

$$h_j(x(t_0)) = 0, j = \overline{m_0 + 1, s_0}.$$

3) Лівий кінець закріплений:

$$x(t_0) = x_0. \qquad (6.35)$$

Умова трансверсальності тривіально виконується.

Співвідношення (6.30)–(6.35) дають n граничних умов для системи (6.11).

6.3. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування з невідомими початковим і кінцевим моментами часу

Розглянемо задачу оптимального керування, у якій початковий і кінцевий моменти часу невідомі й підлягають визначенню:

$$J(t_0, t_1, x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_1), t_1) \to \inf, \qquad (6.36)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \qquad (6.37)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \quad (6.38)$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \quad (6.39)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$; початковий і кінцевий моменти часу невідомі; $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Задача (6.36)–(6.39) – частинний випадок загальної задачі оптимального керування (1.28)–(1.32).

Вважаємо, що правий кінець траєкторій або вільний:

$$S_I(t_1) \equiv E^n, t_1 \in R,$$

або рухомий:

$$S_I(t_1) = \{x \in E^n : g_j(x, t_1) \le 0, j = \overline{1, m_I}, \\ g_j(x, t_1) = 0, j = \overline{m_I + 1, s_I}\}, t_1 \in R. \quad (6.40)$$

Аналогічно вважаємо, що лівий кінець траєкторій або вільний:

$$S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in R,$$

або рухомий:

$$S_0(t_0) = \{x \in E^n : h_j(x, t_0) \le 0, j = \overline{1, m_0}, \\ h_j(x, t_0) = 0, j = \overline{m_0 + 1, s_0}\}, t_0 \in R. \quad (6.41)$$

Зазначимо, що випадки $m_I = 0$ або $s_I = m_I$, а також $m_0 = 0$ або $s_0 = m_0$ у (6.40), (6.41) не виключаються.

Нехай функції $f^j(x, u, t), j = \overline{0, n}$, та їх частинні похідні $f_x^j(x, u, t), j = \overline{0, n}$, – неперервні за сукупністю аргументів $(x, u, t) \in E^n \times V \times R$, а функції $\Phi(x, t), g_j(x, t), j = \overline{1, s_I}$, $h_j(x, t), j = \overline{1, s_0}$ та їх частинні похідні за x та t – $\Phi_x, \Phi_t, g_{j_x}, g_{j_t}, h_{j_x}, h_{j_t}$ – неперервні за сукупністю $(x, t) \in E^n \times R$.

Теорема 6.3 (принцип максимуму – необхідна умова оптимальності; кінці траєкторій – або вільні, або рухомі, або закріплені;

початковий і кінцевий моменти часу невідомі та підлягають визначенню).

Нехай набір $(t_0, t_1, u(t), x(t))$ є розв'язком задачі (6.36)–(6.39).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної u досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0); \tag{6.9}$$

4) на лівому та правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності.

Розглянемо умови трансверсальності на кінцях траєкторії $x(t)$.

1) Правий кінець вільний: $S_I(t_1) \equiv E^n, t_1 \in R$.

Умови трансверсальності:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1), t_1) = 0, \tag{6.24}$$

$$H(x(t_1), u(t_1), t_1, \psi(t_1), \psi_0) - \psi_0 \Phi_t(x(t_1), t_1) = 0. \tag{6.42}$$

2) Правий кінець рухомий.

Нехай множина $S_I(t_1)$ має вигляд (6.40), причому функції $g_{j_x}(x(t_1), t_1), g_{j_t}(x(t_1), t_1)$ не дорівнюють нулю одночасно для всіх $j = \overline{1, s_I}$.

Тоді умови трансверсальності означають:

існують числа $a_1, \ldots, a_{s_I}$ такі, що

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1), t_1) = \sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1), t_1). \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} &a_j g_j(x(t_1), t_1) = 0, a_j \ge 0, j = \overline{1, m_I}, \\ &g_j(x(t_1)) = 0, j = \overline{m_I + 1, s_I}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$H(x(t_1),u(t_1),t_1,\psi(t_1),\psi_0)-\psi_0\Phi_t(x(t_1),t_1)=$$
$$=-\sum_{j=1}^{s_I}a_j g_{j_t}(x(t_1),t_1). \qquad (6.43)$$

3) Правий кінець закріплений.

Умови трансверсальності:

$$x(t_1)=x_I. \qquad (6.29)$$
$$H(x_I,u(t_1),t_1,\psi(t_1),\psi_0)-\psi_0\Phi_t(x(t_I),t_1)=0. \qquad (6.44)$$

1) Лівий кінець вільний: $S_0 \equiv E^n, t_0 \in R$.

Умови трансверсальності:

$$\psi(t_0)=0, \qquad (6.30)$$
$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=0. \qquad (6.45)$$

2) Лівий кінець рухомий.

У випадку, коли множина $S_0(t_0)$ має вигляд (6.41), причому функції $h_{j_x}(x(t_0),t_0), h_{j_t}(x(t_0),t_0)$ не дорівнюють нулю одночасно для всіх $j=\overline{1,s_0}$, то умови трансверсальності означають: існують числа $b_1,\ldots,b_{s_0}$ такі, що

$$\psi(t_0)=-\sum_{j=1}^{s_0}b_j h_{j_x}(x(t_0),t_0), \qquad (6.33)$$

$$b_j h_j(x(t_0),t_0)=0,\ b_j \ge 0,\ j=\overline{1,m_0},$$
$$h_j(x(t_0),t_0)=0, j=\overline{m_0+1,s_0}. \qquad (6.34)$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=\sum_{j=1}^{s_0}b_j h_{j_t}(x(t_0),t_0). \qquad (6.46)$$

3) Лівий кінець закріплений.

Умови трансверсальності:

$$x(t_0)=x_0, \qquad (6.35)$$
$$H(x_0,u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=0. \qquad (6.47)$$

Наявність у задачі невідомих моментів часу t_0,t_1 зумовила появу додаткових умов (6.42)–(6.47), з яких знаходимо t_0,t_1.

6.4. Застосування принципу максимуму до задачі швидкодії

Для системи керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}, \begin{cases} x_1(t_1) = 0 \\ x_2(t_1) = 0 \end{cases}$$

та за умови обмеження на керування $|u(t)| \le 1$ знайти керування й траєкторії, які мінімізують час руху системи із заданої початкової точки в початок координат.

У даній задачі критерій оптимальності

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \to \min .$$

Розв'язання. Застосовуємо принцип максимуму Понтрягіна.

Будуємо функцію Гамільтона – Понтрягіна (відразу покладаємо $\psi_0 = -1$)

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u(t) - 1.$$

Записуємо спряжену систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = \dfrac{dH(x(t), u(t), t, \psi(t))}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = \dfrac{dH(x(t), u(t), t, \psi(t))}{dx_2} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Шукаємо керування $u^0(t)$, при якому функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ досягає максимуму: $\max\limits_u H(x(t), u, t, \psi(t))$. Зауважимо, що в даній задачі функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ лінійна за керуванням $u(t)$ на замкненому проміжку $|u(t)| \le 1$, а значить, може досягати максимуму лише на кінцях цього відрізка.

Якщо $\psi_2(t) > 0$, то функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ зростає зі зростанням $u(t)$, тому її максимум досягається на правому кінці відрізка, тобто $u^0 = 1$. Аналогічно при $\psi_2(t) < 0$ отримуємо $u^0 = -1$. Якщо $\psi_2(t) = 0$, то $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ від $u(t)$ не залежить, і його можна покласти довільним з допустимої області, зокрема $u^0 = 0$. Значить, $u^0 = sign\,\psi_2(t)$ для $\psi_2(t) \neq 0$.

Знаходимо $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ як розв'язок спряженої системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Отримаємо

$$\psi_1(t) = C_1$$
$$\psi_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Таким чином, оптимальне керування визначається за формулою $u^0 = sign(-C_1 t + C_2)$.

Оскільки знайдена функція $\psi_2(t)$ лінійна, то вона може змінювати свій знак на довільному замкненому проміжку не більш ніж в одній точці. Значить, керування $u^0(t)$ буде змінюватися з +1 на –1 (або з –1 на +1) теж не більш ніж в одній точці на проміжку $[t_0, t_1]$. Цю точку називають *точкою перемикання.*

Отже, незалежно від вибору початкової точки x_0, $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, відповідне оптимальне керування є кусковосталою функцією, яка набуває значення +1 або –1 та має не більше двох інтервалів сталості.

Розглянемо можливі випадки.

а) $u^0 = 1$. Система керування набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 1 \end{cases}$$

Знайдемо звідси $x_1(t)$ як функцію від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = x_2 \Rightarrow dx_1(t) = x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + C,$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином, отримали сім'ю парабол. Серед них є тільки одна, що проходить через початок координат. У цьому випадку стала величина $C = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії лежить на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = 1$.

Знайдемо час руху системи з урахуванням того, що $dx_2(t) = dt$. Для цього проінтегруємо друге рівняння:

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = x_2(t_1) - x_2(t_0) = -x_2(t_0) = -x_{20}.$$

б) $u^0 = -1$. Тоді система керування набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -1 \end{cases}$$

Знайдемо, як і вище, залежність $x_1(t)$ від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = -dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = -x_2 \Rightarrow dx_1(t) = -x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + D,$$

де D – стала інтегрування.

Аналогічно отримали сім'ю парабол, серед яких є тільки одна, що проходить через початок координат у випадку, коли $D = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії вибрана на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = -1$.

Знайдемо час руху системи:

$$T=-\int\limits_{t_0}^{t_1}dt=-\int\limits_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)}dx_2(t)=-x_2(t_1)+x_2(t_0)=x_2(t_0)=x_{20}.$$

Позначимо дуги, по яких система може потрапити в початок координат, через L_1 та L_{-1} для керувань $u^0=1$ та $u^0=-1$, відповідно (рис. 6.1). Очевидно, що при $x_0\in L_1$ оптимальна траєкторія є частиною дуги L_1, а у випадку $x_0\in L_{-1}$ – частиною дуги L_{-1}. Напрямок руху за кривими – до початку координат.

Крива $L_{-1}L_1$ називається *лінією перемикання.* Лінія перемикання $L_{-1}L_1$ поділяє всю фазову площину на дві частини: $X_{-1}X_1$.

в) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0=-1$ на $u^0=1$. Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_{-1} фазової площини: $x_0\in X_{-1}$ (див. рис. 6.1). Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від x_0 до точки B під дією керування $u^0=-1$ і від точки B до початку координат під дією керування $u^0=1$.

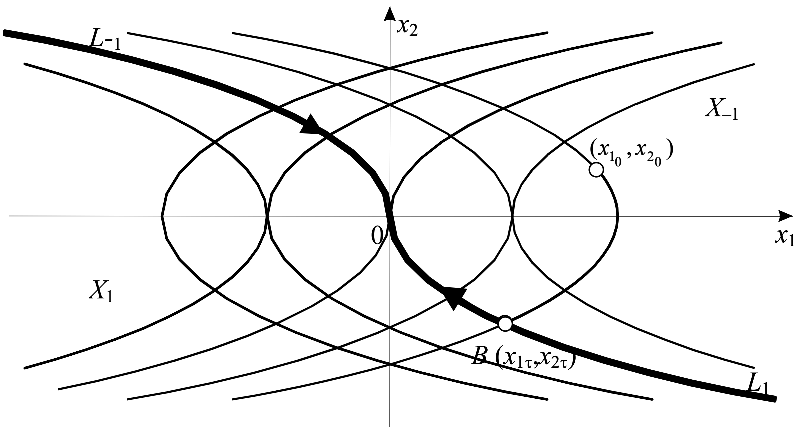


Рис. 6.1

Рух від початкової точки x_0 до точки B буде здійснюватися по параболі: $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D$. Знайдемо сталу D за умови, що дана парабола проходить через точку $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$. Маємо

$$x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2 + D \Rightarrow D = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2.$$

Від точки B до початку координат система буде рухатись під дією керування $u^0 = 1$ по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$. У цьому випадку стала величина $C = 0$.

Знайдемо координати $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$ точки B як точки перетину двох парабол:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}$$

Отримаємо:

$$x_{1\tau} = \frac{1}{2}(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2)$$

$$x_{2\tau} = -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}$$

Знайдемо тепер час руху системи керування з початкової точки x_0 у початок координат. Він буде складатися з часу руху з точки x_0 у точку B і з часу руху з точки B у початок координат. Позначимо момент часу, у який система потрапляє в точку B, через τ. Тоді загальний час руху системи дорівнюватиме $(\tau - t_0) + (t_1 - \tau)$.

Знайдемо час руху системи з точки x_0 у точку B під дією керування $u^0 = -1$:

$$\int_{t_0}^{\tau} dt = \tau - t_0 = -\int_{x_2(t_0)}^{x_2(\tau)} dx_2(t) = x_{20} - x_{2\tau}.$$

Час руху системи від точки B у початок координат по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$ під дією керування $u^0 = 1$:

$$t_1 - \tau = -x_{2\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}\ .$$

Отже, загальний час руху системи з точки x_0 у початок координат для випадку, коли керування спочатку є, а потім у точці B перемикається на $u^0 = 1$, буде

$$T = (\tau - t_0) + (t_1 - \tau) = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}\ .$$

г) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$. Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_1 фазової площини: $x_0 \in X_1$. Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від точки x_0 – під дією керування $u^0 = 1$ – до точки перемикання, і далі по дузі L_{-1} лінії перемикання – під дією керування $u^0 = -1$ – до початку координат.

Виконавши аналогічні п. в) дії й перетворення, знайдемо час руху системи в цьому випадку:

$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}\ .$$

Таким чином, з розглянутих випадків випливає, що мінімальний час переведення системи із заданої точки x_0 у початок координат визначається лише координатами початкової точки траєкторії:

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} + x_{20}, \quad x_0 \in X_{-1},$$

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}} - x_{20}, \quad x_0 \in X_1.$$

Зазначимо, що для лінійних систем керування принцип максимуму для задачі швидкодії є необхідною й достатньою умовою оптимальності [4]. Отже, знайдені керування та траєкторія є оптимальними.

6.5. Про методи розв'язання крайової задачі принципу максимуму

Для числового розв'язання крайової задачі принципу максимуму можуть бути використані відомі числові методи, наприклад стрільби, прогонки, різні ітераційні методи.

Крайова задача принципу максимуму (див., напр., задачу (6.12), (6.11), (6.3), (6.14)) має низку специфічних особливостей, які ускладнюють застосування стандартних методів розв'язання крайових задач. Розглянемо деякі з таких особливостей.

1) Функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$, що визначається з умови максимуму, нелінійно залежить від своїх аргументів. Тому диференціальні рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}, \tag{6.11}$$

які входять до крайової задачі, також будуть нелінійними, навіть тоді, коли система керування $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ лінійна відносно $x(t), u(t)$.

2) Функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ може бути не всюди диференційованою й навіть розривною (напр., $u = sign\,\psi$ у задачі оптимальної швидкодії для лінійних систем). Унаслідок цього можуть порушуватися, зокрема, певні аналітичні властивості правих частин системи рівнянь, які входять до крайової задачі.

3) Крайова задача принципу максимуму ускладнюється в тих випадках, коли з умови $\sup\limits_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ визначається неоднозначно.

Ці та інші обставини ускладнюють дослідження проблем існування, єдиності, стійкості розв'язку крайової задачі принципу максимуму, збіжності числових методів, що застосовуються. За умови числового розв'язання прикладних задач оптимального керування вказані проблеми долаються, зазвичай шляхом урахування специфіки конкретної задачі та її фізичного змісту.

6.6. Зв'язок між методом принципу максимуму та класичним варіаційним численням

Розглянемо основну задачу варіаційного числення: серед неперервних функцій $x = x(t), t_0 \le t \le t_1$, що мають кусково-неперервні похідні $\dot{x}(t)$ і задовольняють умови $x(t_0) \in S_0$, $x(t_1) \in S_I$, знайти таку, на якій функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

досягає екстремуму (мінімального значення), де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, S_0, S_1 – задані множини з E^n.

Для простоти обмежимося випадком:

лівий кінець траєкторій закріплений: $x(t_0) = x_0, t_0$ – задане;

правий кінець $x(t_1)$ або закріплений: $x(t_1) = x_I, t_1$ – задане, або вільний: $S_I \equiv E^n, t_1$ – задане, або рухомий і лежить на заданій гладкій кривій:

$$S_I = S_I(t_1) = \{x \in E^n : g(x, t_1) = x - \varphi(t_1) = 0$$
$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\}.$$

Позначимо $\dot{x}(t) = u(t)$ і запишемо задачу в еквівалентному вигляді як задачу оптимального керування:

$$Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt \to \inf,$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$
$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) \in S_I(t_1).$$

Тут $f^0(x(t), u(t), t)$ – неперервна функція, що має неперервні похідні: $f_x^0(x(t), u(t), t)$, $f_u^0(x(t), u(t), t)$, $f_t^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ut}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ux}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{uu}^0(x(t), u(t), t)$ для всіх $(x(t), u(t), t) \in E^n \times E^n \times [t_0, \infty)$.

Скористаємось принципом максимуму Понтрягіна. Згідно з теоремою 6.3 маємо:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u\,, \qquad (6.48)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-H_x(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t)\,. \qquad (6.49)$$

Для розв'язку $(x(t),u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ даної задачі оптимального керування має виконуватись необхідна умова:

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\,, \qquad (6.50)$$

де $\psi(t)$ – розв'язок системи (6.49) при $x=x(t,u(t)),u=u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Тут $V=E^n$.

Умова (6.50) може виконуватись лише в стаціонарній точці, тобто

$$H_u(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi(t),\ \ t_0 \le t \le t_1\,. \qquad (6.51)$$

Звідси: $\psi_0 \ne 0$, оскільки інакше при $\psi_0=0$ з (6.51) отримаємо $\psi(t)\equiv 0$, що протирічить умові (6.8) з теореми 6.3. Отже, можна вважати: $\psi_0=-1$.

Тоді співвідношення (6.48)–(6.51) набудуть вигляду:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u\,, \qquad (6.52)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t)\,, \qquad (6.53)$$

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\,, \qquad (6.54)$$

$$\psi(t)=f_u^0(x(t),u(t),t)\,. \qquad (6.55)$$

З рівняння (6.53): $\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0)$.

Звідси, з урахуванням (6.55), випливає, що

$$f_u^0(x(t),u(t),t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0)\,. \qquad (6.56)$$

Це рівняння називається *рівнянням Ейлера в інтегральній формі*. Тут $u(t)=\dot{x}(t),\ \ t_0 \le t \le t_1$. Якщо (6.56) продиференціювати за t, то отримаємо рівняння Ейлера – Лагранжа класичного варіаційного числення в диференціальній формі:

$$\frac{d}{dt}(f_u^0(x(t),u(t),t)) - f_x^0(x(t),u(t),t)) = 0$$
$$u(t) = \dot{x}(t), \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Необхідною умовою досягнення функцією $H(x(t),u,t,\psi(t))$ максимуму при $u = u(t)$ є недодатність квадратичної форми:

$$\sum_{i,j=1}^{n} H(x(t),u,t,\psi(t))\xi_i\xi_j \le 0$$

для довільних $\xi_1,\ldots,\xi_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, $t_0 \le t \le t_1$.

Звідси, ураховуючи вираз (6.51), отримаємо:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{u_i u_j}^0(x(t),u,t)\xi_i\xi_j \ge 0, \; t_0 \le t \le t_1. \tag{6.57}$$

Це необхідна умова Лежандра. Зокрема, при n=1 маємо:

$$f_{uu}^0(x(t),u,t) \ge 0, \; t_0 \le t \le t_1.$$

Виведемо тепер умову Вейєрштрасса. Перепишемо (6.54) з урахуванням (6.51), (6.55):

$$\begin{aligned} 0 &\le H(x(t),u(t),t,\psi(t)) - H(x(t),v,t,\psi(t)) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v-u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned} \tag{6.58}$$

для $\forall\, v \in E^n$ за умови, що $(x(t),u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, – розв'язок початкової задачі.

Уведемо функцію

$$\begin{aligned} &E(x(t),u(t),t,v) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v-u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned}. \tag{6.59}$$

Це функція Вейєрштрасса. Тоді відома умова Вейєрштрасса

$$E(x(t),u(t),t,v) \ge 0, \; \forall\, v \in E^n, \; t_0 \le t \le t_1$$

випливає з нерівності (6.58).

Із принципу максимуму Понтрягіна (теореми 6.1–6.3) випливає неперервність спряжених функцій $\psi(t)$ та

$$H(x(t),u(t),t,\psi(t)) = \sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t)) \quad \text{на} \quad \text{відрізку} \quad [t_0,t_1].$$

Тому з урахуванням співвідношень (6.51), (6.54), (6.55) маємо:

$$[f_u^0(x(t),u(t),t)]_t = 0,$$

$$[u^T(t) f_u^0(x(t),u(t),t) - f^0(x(t),u(t),t)]_t = 0\,. \qquad (6.60)$$

Тут позначено: $[z(t)]_t = z(t+0) - z(t-0)$.

Оскільки рівності (6.60) виконані для всіх $t:\ t_0 \le t \le t_1$, то вони виконуються, зокрема, і в ті моменти t, коли функція $x(t)$ може мати злам, тобто коли похідна $\dot{x}(t)$ має розрив. Якщо врахувати, що $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, то умови (6.60) переходять у відомі умови Вейєрштрасса – Ердмана [33].

Розглянемо умови на правому кінці траєкторії $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Якщо цей кінець вільний, то згідно з умовою трансверсальності (6.24) виконується $\psi(t_1) = 0$. Тоді, згідно з (6.55), маємо:

$$\psi(t_1) = f_u^0(x(t),u(t_1),t_1)0\,. \qquad (6.61)$$

Якщо правий кінець рухомий, тобто

$$x(t_1) \in S_I(t_1) = \{x \in E^n : g_j(x,t_1) = x_j - \varphi_j(t_1) = 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\}\,,$$

то згідно з умовами трансверсальності (6.27), (6.43) існують сталі $a_1,\ldots,a_n$ такі, що

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_x}(x(t_1),t_1) = a_i, \qquad (6.27)$$

$$\begin{aligned} H(x(t_1),u(t_1),t_1,\psi(t_1)) &= -\sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_t}(x(t_1),t_1) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(t_1) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_1)\phi_j(t_1) = \psi^T(t_1)\phi(t_1). \end{aligned} \qquad (6.28)$$

Оскільки $H(x(t),u,t,\psi(t)) = -f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t)u$ і $\psi(t)$ виражається формулою (6.55), то з останньої рівності маємо:

$$f^0(x(t_1),u(t_1),t_1) + (f_u^0(x(t_1),u(t_1),t_1))^T(\phi(t_1) - u(t_1)) = 0\,. \qquad (6.62)$$

Умови (6.61), (6.62), де $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, є відомими умовами трансверсальності для вільного й рухомого правого кінця, відповідно [33].

Таким чином, для $V \equiv E^n$ з принципу максимуму випливають усі основні необхідні умови екстремуму, відомі в класичному варіаційному численні. Утім, якщо $V \neq E^n$, то співвідношення (6.51) не виконується, і умова Вейєрштрасса теж може не виконуватись. Умова максимуму є узагальненням умови Вейєрштрасса з варіаційного числення. Перевага умови максимуму перед умовою Вейєрштрасса полягає в тому, що вона може застосовуватись для будь-якої множини $V \subseteq E^n$, зокрема замкненої, та для загальніших задач. Випадок замкненої множини V важливіший для прикладних досліджень, оскільки значення оптимальних керувань найчастіше лежать на границі множини V.

6.7. Принцип максимуму для дискретних систем

Розглянемо дискретний керований процес, що описується системою рівнянь вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k)), k = \overline{0, N-1}, \tag{6.63}$$

$$x(0) = a. \tag{6.64}$$

Тут $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^T$, $k = \overline{0, N}$ – вектор-стовпчик із простору E^n, який визначає стан процесу в момент k, поточні керування

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_m(k))^T, u(k) \in G_k \subset E^m, k = \overline{0, N-1}. \tag{6.65}$$

G_k – деяка множина, яка залежить від k, вектор-функції $f_k = f_k(x(k), u(k)) = (f_k^1, \dots, f_k^n)^T$, $k = \overline{0, N}$ визначені на $E^n \times G_k$, a – заданий вектор, число N – фіксоване.

Позначимо набір $x = \{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$, який будемо називати *фазовою траєкторією процесу*, а набір $u = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ – *керуванням процесу*.

Задача оптимального керування формулюється таким чином: знайти такі керування u та фазову траєкторію x, які задоволььняють систему рівнянь (6.63), початкову умову (6.64), обмеження (6.65) і мінімізують функціонал

$$Q(x,u)=\sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(x(k),u(k))+f_N^0(x(N)), \qquad (6.66)$$

де $f_k^0(x(k),u(k))$, $k=\overline{0,N}$ – скалярні функції.

Керування та траєкторію, які є розв'язком задачі (6.63)–(6.66), позначимо $\tilde{u}$ та $\tilde{x}$ і будемо називати *оптимальним керуванням* та *оптимальною фазовою траєкторією,* відповідно.

Уведемо функцію Гамільтона:

$$H_k(\psi(k+1),x(k),u(k))=\sum_{k=0}^{n}\psi_{k+1}^i f_k^i(x(k),u(k))-f_k^0(x(k),u(k))=$$

$$=\psi^T(k+1)f_k\,(x(k),u(k))-f_k^0(x(k),u(k)),$$

де функції $\psi(k)$ такі, що

$$\begin{aligned}\psi(k)&=-\frac{\partial f_k^0}{\partial x(k)}+\psi(k+1)\frac{\partial f_k}{\partial x(k)}=\\&=\frac{\partial H(\psi(k+1),x(k),u(k))}{\partial x(k)},k=\overline{N-1,0}\end{aligned} \qquad (6.67)$$

$$\psi(N=-\frac{\partial f_N^0}{\partial x(N)}\,. \qquad (6.68).$$

Теорема 6.4 (дискретний принцип максимуму). Нехай $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ – відповідно оптимальні фазова траєкторія та керування для задачі (6.63)–(6.66), $\tilde{\psi}(1),\ldots,\tilde{\psi}(N)$ – розв'язок рівнянь (6.67), (6.68) при $x=\tilde{x}$, $u=\tilde{u}$.

Нехай:

1) f_k^0, $k=\overline{0,N}$, f_k, $k=\overline{0,N-1}$ – неперервно диференційовані за своїми аргументами.

Також для всіх $k=\overline{0,N-1}$ виконуються обмеження:

2) f_k^0 – опуклі за $u(k)$;

3) f_k – лінійні за $u(k)$;

4) G_k – опуклі замкнені множини, що мають внутрішні точки.

Тоді для довільних $k=\overline{0,N-1}$ гамільтоніан $H_k(\tilde{\psi}(k+1),\tilde{x}(k),u(k))$ досягає максимуму за $u(k)\in G_k$ у точці $\tilde{u}(k)$.

Зауваження 6.1. Якщо в задачі (6.63)–(6.66) функції f_k^0 опуклі, а f_k лінійні не тільки за керуваннями, але й за фазовими змінними $x(k)$, то умови теореми 6.4 будуть також достатніми [8].

Зауваження 6.2. Функція Гамільтона H_k уздовж оптимальної траєкторії відрізняється від свого максимального значення на величину порядку $O(h)$, де h – крок різницевої схеми. Чим менше крок різницевої схеми, тим точніше виконується дискретний принцип максимуму. Якщо ж дискретна система не пов'язана з різницевою апроксимацією неперервних процесів, то принцип максимуму може не виконуватися.

Зауваження 6.3. У дискретних задачах оптимальні керування $\tilde{u}(k)$ при кожному k, $k=\overline{0,N-1}$ завжди є стаціонарними точками функції Гамільтона H_k, тобто

$$\left.\frac{\partial H_k}{\partial u(k)}\right|_{\tilde{u}(k)=u(k)}=0.$$

РОЗДІЛ 7
ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ СТОХАСТИЧНИХ І ЛІНІЙНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИСТЕМ

7.1. Двоїстість задач оцінювання станів стохастичних систем та оптимального керування для лінійних детермінованих систем

З теорією оптимального керування тісно пов'язані задачі теорії оцінювання, яка є окремим достатньо повно розробленим напрямом. Обмежимося розглядом задачі оцінювання стану стохастичних систем із неперервним часом [4, 9].

Нехай стохастичний процес із неперервним часом задається співвідношеннями [9]:

$$dx = A(t)x(t)dt + d\upsilon, \tag{7.1}$$

$$dy = C(t)x(t)dt + de, \tag{7.2}$$

де $x(t)$ – n-вимірний вектор стану, $y(t)$ – p-вимірний вектор спостережень. Вважаємо: $x(t_0)$ – початковий стан, математичне сподівання $Mx(t_0) = m$ – відомий сталий вектор, R_0 – коваріаційна матриця стану $x(t_0)$.

Припустимо, що $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – стохастичні процеси з некорельованими приростами та з коваріаційними функціями $R_1(s,t)$ і $R_2(s,t)$, відповідно, $s \in T, t \in T, T = \{t : -\infty < t < \infty\}$, процеси $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – взаємно некорельовані й не корельовані з випадковим вектором $x(t_0)$.

Вважаємо, що $A(t), C(t)$ – задані матриці відповідних розмірностей, елементи яких є неперервними функціями часу t.

Припустимо, що вихідний сигнал $y(t)$ спостерігається на інтервалі (t_0, t_1). Треба знайти найкращу оцінку вектора стану в момент часу t_1. Для повної постановки задачі потрібно задати вигляд допустимих оцінок і вказати, яка оцінка вважається найкращою.

За спостереженнями $y(t)$ на (t_0, t_1) будемо шукати оцінку скалярного добутку $a^T x(t_1)$ у вигляді, лінійному за $y(t)$:

$$a^T \hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m, \tag{7.3}$$

де a – довільний заданий сталий вектор, b – сталий вектор, що визначається з умови незміщеності оцінки, $u(t)$ – p-вимірна вектор-функція, що вважається неперервною за t і є невідомою. Знак "–" у формулі (7.3) поставлений із метою отримання кінцевого результату в компактнішій формі.

Таким чином, оцінки вигляду (7.3) вважаються допустимими.

Найкращу оцінку будемо шукати з критерію

$$M[a^T \hat{x}(t_1) - a^T x(t_1)]^2 \to \inf, \tag{7.4}$$

де $\inf$ береться за всіма допустимими оцінками. Отже, задача оцінювання поставлена.

У такій постановці задача оцінювання зводиться до знаходження функції $u(t)$ та сталого вектора b, які є невідомими.

Покажемо, що задача оцінки стану стохастичної системи є двоїстою до задачі керування детермінованою системою. Для цього перепишемо критерій в іншому вигляді. З (7.2) та (7.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} a^T \hat{x}(t_1) &= -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [u^T(t) C x(t) dt + u^T(t) de(t)] + b^T m. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Надалі залежність величин від t там, де це не викликатиме непорозумінь, будемо опускати.

Уведемо вектор z як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u \tag{7.6}$$

з початковою умовою

$$z(t_1) = a \ . \tag{7.7}$$

Тоді матимемо:

$$a^T x(t_1) = z^T(t_1)x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d[z^T(t)x(t)] \, . \tag{7.8}$$

Ураховуючи (7.1), (7.7), можемо записати:

$$\begin{aligned} d[z^T x] &= dz^T x + z^T dx = \\ &= -z^T Axdt - u^T Cxdt + z^T Axdt + z^T d\upsilon = \\ &= -u^T Cxdt + z^T d\upsilon. \end{aligned}$$

Підставимо отриманий вираз у (7.8):

$$a^T x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d[-u^T Cx(t)dt + z^T d\upsilon(t)] \, . \tag{7.9}$$

З (7.5) і (7.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &a^T[x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = \\ &= z^T(t_0)x(t_0) - b^T m + \int_{t_0}^{t_1} d[u^T(t)de(t) + z^T(t)d\upsilon(t)]. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$Ma^T[x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = [z(t_0) - b]^T m \ .$$

Звідси, якщо покласти $z(t_0) = b$, то оцінка (7.5) буде незміщеною при всіх a та при довільному виборі u.

Піднесемо вираз (7.10) до квадрата та візьмемо математичне сподівання:

$$\begin{aligned} &M[a^T \hat{x}(t_1) - a^T x(t_1)]^2 = [(z(t_0) - b)^T m]^2 + z^T(t_0)R_0 x(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t)R_1 z(t) + u^T(t)R_2 u(t)]dt. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Таким чином, знаходження функції u такої, що лінійна оцінка (7.3) є оптимальною в середньоквадратичному розумінні, еквівалентне задачі оптимального керування для лінійної детермінованої системи (7.6) з початковою умовою (7.7) та критерієм, у якому мінімізується квадратичний за u функціонал:

$$z^T(t_0)R_0x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt \to \inf_u . \quad (7.12)$$

Отже, довели теорему:

Теорема 7.1 (двоїстості). Задача оцінювання стану системи, яка описується співвідношеннями (7.1) та (7.2) за умови, що найкращу оцінку шукаємо в класі лінійних оцінок вигляду (7.3) за середньоквадратичним критерієм (7.4), еквівалентна задачі знаходження оптимального керування для лінійної детермінованої системи (7.6), (7.7) із критерієм оптимальності (7.12).

Задача керування, що розглянута в теоремі двоїстості, дещо відрізняється в позначеннях від звичайного формулювання її в теорії лінійного оптимального керування. Щоб полегшити порівняння, сформулюємо спочатку відомі результати у стандартній формі.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u \quad (7.13)$$

із заданою початковою умовою $x(t_0)=x_0$, для якої потрібно знайти керування, що мінімізує функціонал

$$x^T(t_1)Q_0x(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)Q_1x(t)+u^T(t)Q_2u(t)]dt . \quad (7.14)$$

Припускаємо, що матриці Q_0, Q_1 – додатно напіввизначені, Q_2 – додатно визначена. Елементи всіх матриць у задачі є неперервними функціями часу. Розв'язок такої задачі відомий [3, 8]:

$$u=-Lx , \quad (7.15)$$

де

$$L=Q_2^{-1}B^TS , \quad (7.16)$$

де матриця S – розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$-\frac{dS}{dt}=A^TS+SA+Q_1-SBQ_2^{-1}B^TS \quad (7.17)$$

з початковою умовою

$$S(t_1)=Q_0. \quad (7.18)$$

Отже, (7.15) – лінійний за x закон керування.

Якщо рівняння Ріккаті (7.17) з умовою (7.18) має розв'язок, то розв'язок (7.15), (7.16) наведеної задачі оптимального керування існує та є єдиним [8, 10].

Таким чином, з порівняння зі стандартним формулюванням випливає, що задача (7.6), (7.7), (7.12), розглянута в теоремі 7.1, має розв'язок:

$$u(t) = -K^T z(t) , \tag{7.19}$$

де

$$K = PC^T R_2^{-1} , \tag{7.20}$$

матриця P – розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP \tag{7.21}$$

з початковою умовою

$$P(t_0) = R_0 .$$

Нижче еквівалентність задачі оцінювання стану (7.6), (7.7), (7.12) і стандартної задачі оптимального керування (7.13), (7.14) проілюстрована таблицею, у якій указана відповідність позначень.

Стандартна задача оптимального керування	**Задача оцінювання стану**
t	$-t$
t_0	t_1
t_1	t_0
A	A^T
B	C^T
Q_0	R_0
Q_1	R_1
Q_2	R_2
S	P
L	K^T

7.2. Фільтр Калмана – Б'юсі

У реальних системах керування часто використовується фільтр Калмана – Б'юсі, який дає оцінки поточних фазових координат, а тому входить до складу оберненого зв'язку системи. Для побудови фільтра Калмана – Б'юсі скористаємося результатами, отриманими вище.

Отже, за допомогою детермінованої теорії керування була визначена функція u у вигляді (7.19), яка дає найкращу оцінку. Запишемо цей результат так, щоб отримати для оцінки стохастичне диференціальне рівняння.

Оцінка задається формулою (7.5):

$$a^T \hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m ,$$

де u визначається за (7.19), (7.20).

З метою отримання стохастичного диференціального рівняння продиференціюємо вираз (7.5). Зауважимо, що u та b неявно залежать від t_1. Тому перепишемо (7.5) у такому вигляді, у якому ця залежність буде явною.

З рівняння (7.6) з урахуванням (7.19) знаходимо:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u = -(A - KC)^T z . \tag{7.22}$$

Нехай матриця $\psi(t, t_1)$ – розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d\psi}{dt} = A - KC)^T \psi \tag{7.23}$$

з умовою

$$\psi(t_1, t_1) = I, \tag{7.24}$$

де I – одинична матриця відповідної розмірності. Тоді розв'язок рівняння (7.22) з початковою умовою (7.7): $z(t_1) = a$ становить:

$$z(t) = \psi^T(t_1, t) a . \tag{7.25}$$

Отже,

$$u(t) = -K^T \psi^T(t_1, t) a , \tag{7.26}$$

$$b = z(t_0) = \psi^T(t_1, t_0) a . \tag{7.27}$$

Тоді вираз (7.5) для оцінки набуде вигляду

$$a^T \hat{x}(t_1) = a^T \int_{t_0}^{t_1} \psi(t_1,t)Kdy(t) + a^T \psi(t_1,t_0)m\,. \tag{7.28}$$

Значить, якщо виберемо

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t_1,t)Kdy(t) + \psi(t_1,t_0)m\,, \tag{7.29}$$

то отримаємо оцінку $\hat{x}$ таку, що середньоквадратична похибка оцінювання буде мінімальною за всіх a.

Диференціюємо вираз (7.29) і отримуємо

$$d\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial\psi(t_1,t)}{\partial t_1} Kdy(t) + \frac{\partial\psi(t_1,t_0)}{\partial t_1} m] dt_1 + Kdy(t_1) =$$

$$= (A-KC)\hat{x}(t_1)dt_1 + Kdy(t_1) = \tag{7.30}$$

$$= A\hat{x}(t_1)dt_1 + K[dy(t_1) - C\hat{x}(t_1)dt_1].$$

Таким чином, лінійна оцінка, що мінімізує середньоквадратичну похибку оцінювання, задовольняє лінійне стохастичне диференціальне рівняння (7.30). Початкове значення оцінки отримаємо з урахуванням умови (7.29):

$$\hat{x}(t_0) = m.$$

Віднімемо (7.30) із (7.1) і знайдемо, що вектор похибки оцінювання $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\tilde{x} = (A-KC)\tilde{x}dt_1 + d\upsilon - Kde\,. \tag{7.31}$$

Для коваріації похибки оцінювання можна отримати диференціальне рівняння [9]:

$$\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T + R_1 - KCQ\_QC^T K^T + KR_2K^T =$$

$$= AQ + QA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CQ - QC^T R_2^{-1} CP + PC^T R_2^{-1} CP \tag{7.32}$$

з початковою умовою

$$Q(t_0) = R_0\,. \tag{7.33}$$

Віднімемо рівняння (7.32) з рівняння (7.21) і отримаємо:

$$\frac{d(Q-P)}{dt}=$$

$$=A(Q-P)+(Q-P)A^T-(Q-P)C^T R_2^{-1}CP-PC^T R_2^{-1}C(Q-P).$$

Оскільки $Q(t_0)=P(t_0)=R_0$, то $Qt)=P(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ [9].

Таким чином, коваріація похибки оцінювання визначається рівнянням (7.21) з початковою умовою $P(t_0)=R_0$.

Отже, ураховуючи, що момент часу t_1 може вибиратися довільно, довели таку теорему:

Теорема 7.2 (Калмана – Б'юсі). Лінійна оцінка вектора стану для системи, яка описується співвідношеннями (7.1), (7.2), задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\hat{x}(t)=A\hat{x}dt+K[dy-C\hat{x}dt], \qquad (7.34)$$

$$\hat{x}(t_0)=Mx(t_0)=m, \qquad (7.35)$$

де $K=PC^T R_2^{-1}$, P – коваріація похибки оцінювання, що задовольняє рівняння

$$\frac{dP}{dt}=AP+PA+R_1-PC^T R_2^{-1}CP,$$

$$P(t_0)=R_0.$$

Зауваження 7.1. Оскільки рівняння (7.34) є стохастичним диференціальним рівнянням, то його розв'язок можна зобразити лише за допомогою стохастичних інтегралів [9].

Зауваження 7.2. За умови, що стохастичні процеси $\{x(t),t\in T\}$ та $\{y(t),t\in T\}$ мають гауссів розподіл, умовний розподіл $x(t)$ відносно відомого $y(s),t_0\le s\le t$ також буде гауссів з умовним математичним сподіванням $M\,x/y=\hat{x}$ та умовною коваріацією P [9].

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема: "Керованість лінійних систем"

Приклад 1.1. Дослідити систему на цілком керованість:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + u. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему в матрично-векторній формі.

Маємо: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$

Отже, тут $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

За необхідною й достатньою умовою цілком керованості маємо:

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = 0 \times 4 - 1 \times 1 \neq 0 .$$

Таким чином, система є цілком керованою.

Приклад 1.2. Дослідити систему на цілком керованість:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2u \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u .$$

Розв'язання. За необхідною й достатньою умовою цілком керованості

$$\det(b, Ab) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-8) - 0 \cdot 2 = -16 \neq 0 .$$

Система є цілком керованою.

Приклад 1.3. Дослідити систему на цілком керованість:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = u_1 - u_2\\ \dot{x}_3 = x_4\\ \dot{x}_4 = u_2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&-1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Маємо $A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&0\\1&-1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \operatorname{rang}(B, AB) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} = 4.$$

За необхідною та достатньою умовою цілком керованості система є цілком керованою.

Приклад 1.4. Визначити, за яких λ, b_1, b_2, b_3 система керування, що задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix} \text{ та вектором } b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \text{ є цілком керованою.}$$

Розв'язання. Після проведення необхідних матрично-векторних обчислень умова цілком керованості описується рівнянням

$$\det(b, Ab, A^2b) = \det\begin{pmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda^2 b_1 + 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_2 & \lambda b_2 + b_3 & \lambda^2 b_2 + 2\lambda b_3 \\ b_3 & \lambda b_3 & \lambda^2 b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ 0 & b_3 & 2\lambda b_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & 2\lambda b_2 + b_3 \\ b_3 & 2\lambda b_3 \end{pmatrix} = b_3(2\lambda b_2 b_3 - 2\lambda b_2 b_3 - b_3^2) = -b_3^3 \neq 0\,.$$

Отже, система цілком керована при $b_3 \neq 0$ та довільних λ, b_1, b_2.

Завдання для самостійної роботи

Приклад 1.5. За яких значень параметра p система є цілком керованою?

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + (p-3)x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + (p^2 - p)u_1(t) \end{cases}$$

Приклад 1.6. Визначити, за яких a, b, c система керування, що задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ та вектором $$b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$ є цілком керованою.

Приклад 1.7. Дослідити систему на цілком керованість:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) - u_2(t) \end{cases}$$

Приклад 1.8. Дослідити систему на цілком керованість:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

Приклад 1.9. Дослідити систему на цілком керованість залежно від параметра c:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t) + cu(t) \end{cases}$$

Тема: "Спостережуваність лінійних систем"

Приклад 2.1. Дослідити систему на цілком керованість та спостережуваність:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \; y = (1,0) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$$

Розв'язання. Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; q^T = (1,0).$$

Отже, $A \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\det(b, Ab) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0,$$

тобто система є цілком керованою.

Для дослідження на цілком спостережуваність скористаємося необхідною й достатньою умовою цілком спостережуваності.

Оскільки

$$q^T A = (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1), \; A^T q = (q^T A)^T = (0,1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

і, згідно з умовою, $q=(1,0)^T=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

то $\det(q,A^T q)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=1\neq 0.$

Отже, система є цілком спостережуваною.

Приклад 2.2. Дослідити систему на цілком керованість та спостережуваність:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u,\ y=(0,1)\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_2\,.$$

Розв'язання. Маємо:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ q^T=(0,1)\,.$$

Звідси $A\cdot b=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

$$\det(b,Ab)=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=0\times 0-1\times 1=-1\neq 0,$$

тобто система є цілком керованою.

Далі

$$q^T A=(0,1)\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=(0,0)\,,\ A^T q=(0,0)^T=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ q=(0,1)^T=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Тоді $\det(q,A^T q)=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ система не є цілком спостережуваною.

Приклад 2.3. Дослідити систему на спостережуваність і відновити вектор фазових координат, якщо це можливо.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\-1 & 3 & 4\\17 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ y(t)=-3x_1-2x_2-3x_3.$$

Розв'язання. Маємо $q^T = (-3,-2,-1)$.

Знаходимо $A^T q = (-18,-14,-7)^T$,

$$(A^T)^2 q = A^T (A^T q) = (-123,-89,-49)^T .$$

Тоді $\det \tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -18 & -123 \\ -2 & -14 & -89 \\ -1 & -7 & -49 \end{pmatrix} = -27 \neq 0 \quad \Rightarrow$

система є спостережуваною і ми можемо відтворити вектор фазових координат.

Відтворення фазових координат здійснюється за формулою

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\tilde{S}_3^T)^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Для цього зробимо такі обчислення (зважаючи на те, що похідні від фазових координат беруться внаслідок заданої системи):

$$\dot{y}(t) = -3\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) - 3\dot{x}_3(t) =$$
$$= -3(x_1(t) + 3x_2(t)) - 2(-x_1(t) + 3x_2(t) + 4x_3(t)) -$$
$$-3(17x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)) =$$
$$= -18x_1(t) - 14x_2(t) - 7x_3(t).$$
$$\ddot{y}(t) = -18\dot{x}_1(t) - 14\dot{x}_2(t) - 7\dot{x}_3(t) =$$
$$= -123x_1(t) - 89x_2(t) - 49x_3(t).$$

На останньому кроці обчислимо матрицю $(\tilde{S}_3^T)^{-1}$, дописавши праворуч до $\tilde{S}_3^T$ одиничну 3×3-матрицю й виконуючи необхідні перетворення Жордана – Гаусса до тих пір, поки не з'явиться одинична 3×3-матриця ліворуч. Остаточно запишемо:

$$B = (\tilde{S}_3^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 1/3 & 0 \\ 7/9 & -8/9 & 1/9 \\ 40/9 & 7/9 & -2/9 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Приклад 2.4. Дослідити систему на спостережуваність і відновити вектор фазових координат, якщо це можливо.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = x_1(t) + 2x_2(t).$$

Приклад 2.5. Дослідити систему на спостережуваність і відновити вектор фазових координат, якщо це можливо.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = 3x_1(t) + x_2(t).$$

Приклад 2.6. Дослідити систему на спостережуваність і відновити вектор фазових координат, якщо це можливо.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$
$$y(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 3x_3(t).$$

Приклад 2.7. Дослідити систему на цілком керованість і спостережуваність залежно від параметрів a, b:

$$\ddot{x}(t) + a^2\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$
$$y(t) = x(t)$$
$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$$

Приклад 2.8. Дослідити систему на спостережуваність залежно від параметра a. n – порядковий номер студента в списку групи. Зафіксувавши значення параметра, відновити вектор фазових координат, якщо це можливо.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + nx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + nx_2(t) \end{cases}$$
$$y(t) = ax_1(t) + x_2(t).$$

Приклад 2.9. Дослідити систему на спостережуваність залежно від параметра a. Зафіксувавши значення параметра, відновити вектор фазових координат.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -n \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = nx_1 + ax_2 + 3x_3,$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з } А-Д; \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з } Е-К; \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з } Л-П; \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з } Р-Ф; \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з } Х-Я. \end{cases}$$

Приклад 2.10. Дослідити систему на спостережуваність залежно від значення параметра a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a^2 x_1(t) \end{cases}$$

$$y_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

Тема: "Аналітичне конструювання регуляторів"

Приклад 3.1. Розв'язати задачу аналітичного конструювання регулятора лінійної системи

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки маємо лінійну стаціонарну систему, то керування можна вибрати у вигляді $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо $A + BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c_1 & -1 \\ -4 & 1+c_2 \end{pmatrix}$.

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\det(A + BC - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1+c_1-\lambda & -1 \\ -4 & 1+c_2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (2 + c_1 + c_2)\lambda + ((1+c_1)(1+c_2) - 4) = 0.$$

Побудуємо матрицю Гурвіца:

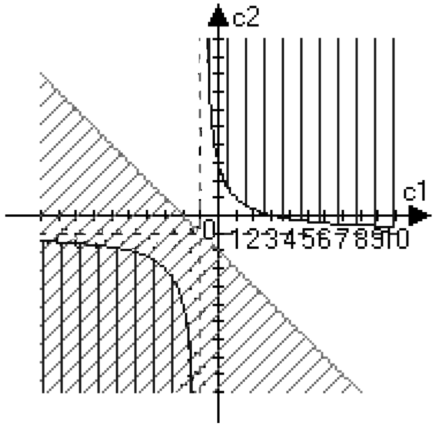
$$G = \begin{bmatrix} -(2+c_1+c_2) & 1 \\ 0 & (1+c_1)(1+c_2)-4 \end{bmatrix}.$$

Згідно з теоремою 3.2 маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -(2 + c_1 + c_2) > 0 \\ \Delta_2 = -(2 + c_1 + c_2)((1 + c_1)(1 + c_2) - 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 < -2 \\ (1+c_1)(1+c_2) > -4. \end{cases}$$

Шукані елементи матриці C, що визначаються останньою нерівністю, і дають розв'язок поставленої задачі. Область стійкості закреслена прямими, що перетинаються в третьому октанті:



Приклад 3.2. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду $u(t) = c^T x(t)$, $c^T = \left(c_1, ..., c_n\right)$ таке, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Розв'язання. У нашому випадку маємо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $Ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Відповідно $S = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\det S = 6 - 2 = 4 \neq 0$, тобто система цілком керована.

Обчислимо $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A^2 b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^2b = -\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

За відомими значеннями власних чисел запишемо характеристичне рівняння

$$(\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \ .$$

Знайдемо вектор-стовбчик $p - a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Остаточно обчислимо значення коефіцієнтів керування:

$$c = (S^{-1})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix}(p-a) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{3} - \frac{18}{6} \\ \frac{6}{3} + \frac{18}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукане модальне керування має вигляд

$$u(t) = -6x_1(t) + 7x_{2.}(t) \ .$$

Завдання для самостійної роботи

У прикл. 3.3–3.6, шукаючи керування у вигляді

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

розв'язати задачу аналітичного конструювання регулятора таких лінійних систем:

Приклад 3.3. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.4. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.5. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.6. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

Приклад 3.7. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t). \end{cases}$

Приклад 3.8. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду $u(t) = c^T x(t)$, $c^T = (c_1, ..., c_n)$ таке, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5.$

Приклад 3.9. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду $u(t) = c^T x(t)$, $c^T = (c_1, ..., c_n)$ таке, щоб характеристичне рівняння лінійної системи керування, що задана через матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ та вектор $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, мало наперед задані корені $\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -1.$

Приклад 3.10. Побудувати регулятор $u(t)$, який забезпечує асимптотичну стійкість нульовому розв'язку системи керування, що описана диференціальним рівнянням

$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u(t).$$

Регулятор шукати у вигляді

$$u(t) = c_1 x''(t) + c_2 x'(t) + c_3 x(t).$$

Тема: "Розв'язання задач керування методами варіаційного числення"

Приклад 4.1. Знайти криві, на яких може досягатися екстремум функціонала, і дослідити характер екстремуму:

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi/2} ((\dot{x})^2 - x^2)dt, \quad \text{кінці закріплені:}$$

$$x(0) = 0,\ x\left(\pi/2\right) = 1.$$

Розв'язання. Маємо: $G(x, \dot{x}, t) = (\dot{x})^2 - x^2$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція. Скористаємося необхідною умовою екстремуму. Для цього складемо й розв'яжемо рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Тут $G'_x = -2x;\ G'_{\dot{x}} = 2x'$.

Отримаємо рівняння Ейлера – Лагранжа у вигляді

$$-2x - \frac{d}{dt}2x' = 0 \quad \Rightarrow \ -2x - 2x'' = 0 \quad \Rightarrow \ x + x'' = 0.$$

Складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0: \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Тоді $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ – загальний розв'язок рівняння.

З граничних умов знаходимо невідомі константи C_1, C_2:

$$x(0) = C_1 = 0;\ x\left(\pi/2\right) = C_2 = 1.$$

Отже, $x^o(t) = \sin(t)$ – крива, підозріла на екстремум.

Перевіримо достатні умови екстремуму. Для перевірки умови Якобі складемо й розв'яжемо рівняння Якобі. Знайдемо: $G_{xx} = -2$ $G_{xx} = -2,\ G_{x\dot{x}} = 0, G_{\dot{x}\dot{x}} = 2$. Тоді рівняння Якобі матиме вигляд

$$-2w - 2\dot{w} = 0.$$

Звідси $w(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$. Ураховуючи граничні умови, отримаємо розв'язок $w(t) = \sin(t)$. Тоді $w(0) = 0,\quad w(t) = \sin(t) \neq 0$ при $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, тобто крива $x^o(t) = \sin(t)$ може бути включена в поле. Умова Якобі виконується.

Умова Лежандра: $G_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$. Маємо: $G_{\dot{x}} = 2x'$; $G_{\dot{x}\dot{x}} = 2 \geq 0$ для довільних значень $\dot{x}$.

Отже, умова Лежандра виконується в поєднанні з умовою Якобі. Таким чином, на кривій $x^o(t)$ функціонал досягає сильного мінімуму.

Приклад 4.2. Знайти криві, на яких може досягатися екстремум, і дослідити характер екстремуму функціонала $Q = \int\limits_{t_0}^{t_1} u^2(t)dt$ для рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = u$. Кінці закріплені: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $x(t_1) = x_1, \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$; проміжок часу $[t_0, t_1]$ – фіксований.

Розв'язання. Підставимо рівняння у функціонал: $Q = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 dt.$

Тут $G = G(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = \ddot{x}^2$.

Скористаємося необхідною умовою екстремуму – рівнянням Ейлера – Пуассона для $n = 2$:

$$\frac{dG}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dG}{d\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{dG}{d\ddot{x}} = 0.$$

Знаходимо $\frac{dG}{dx} = 0$; $\frac{dG}{d\dot{x}} = 0$; $\frac{dG}{d\ddot{x}} = 2\ddot{x}$.

Рівняння Ейлера – Пуассона набуває вигляду

$$\frac{d^2}{dt^2}(2\ddot{x}) = 0 \text{ або } x^{(4)} = 0.$$

Знаходимо загальний розв'язок цього рівняння:

$$x(t)=\frac{C_1}{6}t^3+\frac{C_2}{2}t^2+C_3t+C_4.$$

Звідси $u(t)=\ddot{x}(t)=C_1t+C_2$.

Невідомі сталі $C_1,\dots,C_4$ визначаються із заданих умов на кінцях відрізка $[t_0,t_1]$. Маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_1,\dots,C_4$:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{6}t_0^3 & \frac{1}{2}t_0^2 & t_0 & 1\\ \frac{t_0^2}{2} & t_0 & 1 & 0\\ \frac{1}{6}t_1^3 & \frac{1}{2}t_1^2 & t_1 & 1\\ \frac{t_1^2}{2} & t_1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\\ x_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix}.$$

Позначимо

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{6}t_0^3 & \frac{1}{2}t_0^2 & t_0 & 1\\ \frac{t_0^2}{2} & t_0 & 1 & 0\\ \frac{1}{6}t_1^3 & \frac{1}{2}t_1^2 & t_1 & 1\\ \frac{t_1^2}{2} & t_1 & 1 & 0\end{bmatrix}=T\,,\quad \begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix}=C\,,\begin{bmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\\ x_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix}=X\,.$$

Тоді маємо рівняння $TC=X$. Звідси вектор невідомих сталих величин знаходимо за формулою $C=T^{-1}X$.

Для знайдених сталих отримаємо криву $x^o(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала.

Перевіримо достатні умови екстремуму. Відрізок $[t_0,t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0. Далі маємо: $G_{\ddot{x}\ddot{x}}=2>0$. Отже, на отриманій кривій $x^o(t)$ даний функціонал досягає мінімуму.

Завдання для самостійної роботи

У прикл. 4.3–4.10 знайти криві, на яких може досягатися екстремум функціонала, і дослідити характер екстремуму.

Приклад 4.3.

$$I[x(t)]=\int\limits_{-1}^{0}(12tx(t)-(\dot{x}(t))^2)dt;\ x(-1)=1,\ x(0)=0.$$

Приклад 4.4.

$$I[x(t)]=\int\limits_{0}^{1}((\dot{x}(t))^2+12tx(t))dt;\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$$

Приклад 4.5. $I[x(t)]=\int\limits_{0}^{1}(x^2(t)+2\dot{x}^2(t)+\ddot{x}^2(t))dt;$

$$x(0)=0,\ x(1)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(1)=-sh1.$$

Приклад 4.6. $I[x(t)]=\int\limits_{0}^{1}(x^2(t)+\ddot{x}^2(t))dt;$

$$x(0)=y_0,\ x(1)=y_1,\ \dot{x}(0)=y_0',\ \dot{x}(1)=y'.$$

Приклад 4.7.

$$I[x(t),y(t)]=\int\limits_{o}^{\pi/4}(2y(t)-4x^2(t)+\dot{x}^2(t)-\dot{y}^2(t))dt;$$

$$x(0)=0, x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Приклад 4.8. $I[x(t),y(x)]=\int\limits_{0}^{\pi/2}(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)-2x(t)y(t))dt;$

$$x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Приклад 4.9. $I[x(t), y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + 2x(t)y(t))dt;$

$$x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 .$$

Приклад 4.10. $I[x(t)] = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt;\ \ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 .$

Тема: "Метод динамічного програмування для дискретних систем керування"

Приклад 5.1. Знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + u(i)) + x_2(3)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + 2u(i) + x_2(i) \\ x_2(i+1) = x_1(i) + u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

і обмеженнями на керування $|u(0)| \le 2, \quad |u(1)| \le 3, \quad |u(2)| \le 5$.

Розв'язання. Застосуємо метод динамічного програмування.
Тут $N = 3$.
Прямий хід.
1. $k = 2$.

$$S_2(x_1(2), x_2(2), t(2)) = \min_{|u(2)| \le 5} \{x_1(2) + u(2) + x_2(3))\} =$$

$$= \min_{|u(2)| \le 5} \{x_1(2) + u(2) + u(2) + x_1(2))\} = \min_{|u(2)| \le 5} \{2x_1(2) + 2u(2)\} .$$

Звідси оптимальне керування $u^o(2) = -5$.

2. $k=1$. З попереднього кроку маємо:

$$S_2(x_1(2), x_2(2), t(2)) = 2x_1(2) - 10.$$

Різницеве рівняння Беллмана матиме вигляд

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) =$$

$$= \min_{|u(1)|\le 3} \{x_1(1) + u(1) + 2(x_1(1) + 2u(1) + x_2(1)) - 10\} =$$

$$= \min_{|u(1)|\le 3} \{3x_1(1) + 5u(1) + 2x_2(1) - 10\}.$$

Звідси оптимальне керування $u^o(1) = -3$.

3. $k=0$. Маємо:

$$S_1(x_1(1), x_2(1), t(1)) = 3x_1(1) + 2x_2(1) - 25.$$

Тоді

$$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) =$$

$$= \min_{|u(0)|\le 2} \{x_1(0) + u(0) + 3(x_1(0) + 2u(0) + x_2(0)) + 2(x_1(0) + u(0)) - 25\} =$$

$$= \min_{|u(0)|\le 2} \{6x_1(0) + 3x_2(0) + 9u(0) - 25\}.$$

Звідси оптимальне керування

$$u^o(0) = -2.$$

Отже, мінімальне значення функціонала

$$S_0(x_1(0), x_2(0), t(0)) = -37 = Q^O.$$

Зворотний хід.

1. $k=0$. Маємо: $u^o(0) = -2$. Значення $x_1^O(0), x_2^O(0)$ беремо з початкових умов. Тоді з рівнянь системи маємо

$$x_1^O(1) = x_1^O(0) + 2u^O(0) + x_2^O(0) = -3.$$

$$x_2^O(1) = u^O(0) + x_1^O(0) = -1.$$

2. $k=1$.

$$u^o(1) = -3$$

$$x_1^O(2) = x_1^O(1) + 2u^O(1) + x_2^O(1) = -10$$

$$x_2^O(2) = u^O(1) + x_1^O(1) = -6.$$

3. $k = 2$.

$$u^o(2) = -5$$

$$x_1^O(3) = x_1^O(2) + 2u^O(2) + x_2^O(2) = -26$$

$$x_2^O(2) = u^O(2) + x_1^O(2) = -15 \,.$$

Відповідь:
оптимальне керування

$$u^o(0) = -2\,,\; u^o(1) = -3\,,\; u^o(2) = -5\,;$$

оптимальна траєкторія

$$x_1^O(0) = 1, \quad x_2^O(0) = 0\,;$$

$$x_1^O(1) = -3, \quad x_2^O(1) = -1\,;$$

$$x_1^O(2) = -10, \quad x_2^O(2) = -6\,;$$

$$x_1^O(3) = -26, \quad x_2^O(3) = -15\,.$$

Приклад 5.2. Розв'язати методом динамічного програмування задачу оптимального керування:

$$J = \int_0^1 (-xu + u^2)dt + x(1), \text{ якщо}$$

$$\dot{x} = u, \;\; x(t) \in [0;1]; \;\; t \in [0;1]; \;\; u(t) \in \mathrm{R}.$$

Розв'язання. Дискретизуємо дану задачу, вважаючи, що на часових інтервалах h_0, h_1 та h_2 система рухається під впливом керувань u_0, u_1, u_2, відповідно. Причому мають місце рівності $x_{k+1} = x_k + u_k h_k$; $k = \overline{0,2}$, де x_0, x_1, x_2 – стани системи. Записаний в умові функціонал набуде вигляду

$$J = \sum_{k=0}^{2} (-x_k u_k + u_k^2) h_k + x_3 \,.$$

Використовуючи метод динамічного програмування, мінімізуємо його по керуваннях u_0, u_1 та u_2.

1) $k = N - 1 = 2.$

Випишемо рівняння Беллмана. Ураховуючи, що $x_3 = x_2 + u_2 h_2$, одержуємо

$$S_2(x_2, t_2) = \min_{u_2}\{(-x_2 u_2 + u_2^2)h_2 + x_3\} =$$

$$= \min_{u_2}\{u_2^2 h_2 - u_2 x_2 h_2 + x_2 + u_2 h_2\} =$$

$$= \min_{u_2}\{u_2^2 h_2 + u_2(1 - x_2)h_2 + x_2\}.$$

Ця функція опукла вниз по u_2, тому мінімум знаходимо просто:

$$(u_2^2 h_2 + u_2(1 - x_2)h_2 + x_2)'_{u_2} = 2u_2 h_2 + (1 - x_2)h_2 + (1 - x_2)h_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_2 = \frac{x_2 - 1}{2},$$

$$S_2(x_2, t_2) = \frac{(x_2 - 1)^2}{4}h_2 + \frac{x_2 - 1}{2}(1 - x_2)h_2 + x_2 = x_2 - \frac{(x_2 - 1)^2 h_2}{4}.$$

2) $k = N - 2 = 1.$

Рівняння Беллмана для k=2 має вигляд

$$S_1(x_1, t_1) = \min_{u_1}\{(-x_1 u_1 + u_1^2)h_1 + S_2(x_2, t_2)\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{(-x_1 u_1 + u_1^2)h_1 + x_2 - \frac{(x_2 - 1)^2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{u_1^2 h_1 - h_1 x_1 u_1 + x_1 + u_1 h_1 - u_1^2\frac{h_1^2 h_2}{4} - \frac{h_1 h_2 (x_1 - 1)}{2}u_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{u_1^2\left(h_1 - \frac{h_1^2 h_2}{4}\right) + u_1\left(h_1 - h_1 x_1 - \frac{h_1 h_2 (x_1 - 1)}{2}\right) + x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4}\right\} =$$

$$= \min_{u_1}\left\{u_1^2\left(h_1\frac{4 - h_1^2 h_2}{4}\right) + u_1\left(h_1(1 - x)\cdot\frac{2 + h_2}{2}\right) + x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4}\right\}.$$

Оскільки $h_1 < 1, h_2 < 1,$ то $h_1 \dfrac{4 - h_1^2 h_2}{4} > 0.$ Тому функція у фігурних дужках опукла донизу по u_1, а її мінімум також можна знайти через похідну.

$$\left(u_1^2 \left(h_1 \frac{4 - h_1^2 h_2}{4} \right) + u_1 \left(h_1 (1 - x) \cdot \frac{2 + h_2}{2} \right) + x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4} \right)'_{u_1} =$$

$$= 2u_1 \left(h_1 \frac{4 - h_1 h_2}{4} \right) + \left(h_1 (1 - x_1) \frac{2 + h_2}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{(x_1 - 1)(2 + h_2)}{4 - h_1 h_2},$$

$$S_1(x_1, t_1) = \frac{(x_1 - 1)^2 (2 + h_2)^2}{(4 - h_1 h_2)^2} h_1 \cdot \frac{4 - h_1 h_2}{4} +$$

$$+ \frac{(x_1 - 1)(2 + h_2)}{4 - h_1 h_2} \cdot \frac{h_1 (1 - x_1)(2 + h_2)}{2} + x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4} =$$

$$= \frac{(x_1 - 1)^2 (2 + h_2)^2 h_1}{4\,(4 - h_1 h_2)} - \frac{(x_1 - 1)^2 (2 + h_2)}{2\,(4 - h_1 h_2)} + x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2 h_2}{4} =$$

$$= x_1 - \frac{(x_1 - 1)^2}{4} \left(h_2 - \frac{(2 + h_2)^2 h_1}{4 - h_1 h_2} \right) =$$

$$= x_1 - (x_1 - 1)^2 \left(\frac{h^2}{4} - \frac{(2 + h_2)^2 h_1}{4\,(4 - h_1 h_2)} \right).$$

Покладемо $A = \dfrac{h^2}{4} - \dfrac{(2 + h_2)^2 h_1}{4\,(4 - h_1 h_2)}.$

3) $k = N - 3 = 0.$

$$S_0(x_0, t_0) = \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + S_1(x_1, t_1) \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + x_1 - (x_1 - 1)^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ (-x_0 u_0 + u_0^2) h_0 + x_0 + u_0 h_0 - (u_0 h_0 + (x_0 - 1))^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ u_0^2 h_0 - x_0 h_0 u_0 + x_0 + u_0 h_0 - u_0^2 h_0^2 A - 2A h_0 (x_0 - 1) u_0 - (x_0 - 1)^2 A \} =$$

$$= \min_{u_0} \{ u_0^2 (h_0 - h_0^2 A) + u_0 (h_0 (1 - x_0)(1 + 2A)) + x_0 - (x_0 - 1)^2 A \} .$$

Якщо припустити, що $h_0 - h_0^2 A > 0$, то функція теж буде опуклою вниз.

$$\left(u_0^2 (h_0 - h_0^2 A) + u_0 h_0 (1 - x_0)(1 + 2A) \right)'_{u_0} =$$

$$= 2u_0 (h_0 - h_0^2 A) + h_0 (1 - x_0)(1 + 2A) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{(x_0 - 1)(1 + 2A)}{1 - h_0 A}.$$

x_0, h_0, h_1, h_2 – задані величини.

Набір оптимальних керувань u_0, u_1, u_2 та стани системи x_1, x_2, x_3 визначаються так:

$$A = \frac{h^2}{4} - \frac{(2 + h_2)^2 h_1}{4(4 - h_1 h_2)};$$

$$u_0 = \frac{(x_0 - 1)(1 + 2A)}{1 - h_0 A}; \quad x_1 = x_0 + h_0 u_0;$$

$$u_1 = \frac{(x_1 - 1)(2 + h_2)}{4 - h_1 h_2}; \quad x_2 = x_1 + h_1 u_1;$$

$$u_2 = \frac{x_2 - 1}{2}; \; x_3 = x_2 + h_2 u_2.$$

Завдання для самостійної роботи

Приклад 5.3. Знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{3} (x_1(i) + 2u(i)) + x_2(4)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + 2x_2(i) + 2u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2, \quad |x_2(0)| = 1$

і обмеженнями на керування

$$|u(0)| \le 1, \quad |u(1)| \le 2, \quad |u(2)| \le 5, \quad |u(3)| \le 4 .$$

Приклад 5.4. Знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + u(i)) + x_1(3)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + 2u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами $|x_1(0)| \le 9, \quad |x_2(0)| \le 19$

і обмеженнями на керування $|u(0)| \le 3, \quad |u(1)| \le 1, \quad |u(2)| \le 4.$

Приклад 5.5. Знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + x_2(i) + u(i)) + x_1(3) + x_2(3)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = 2x_1(i) - x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) - u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0$

і обмеженнями на керування $|u(0)| \le 1, \quad |u(1)| \le 2, \quad |u(2)| \le 3.$

Приклад 5.6. Знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{3} (x_1(i) + 2u(i)) + x_2(4)$$

досягає мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) + 2x_2(i) + 2u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1$

і обмеженнями на керування

$$|u(0)| \le 4, \quad |u(1)| \le 3, \quad |u(2)| \le 2, \quad |u(3)| \le 1 .$$

Тема: "Метод динамічного програмування для неперервних систем керування"

Приклад 6.1. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \int_0^T u^2(t)dt + \lambda x^2(T)$$

набуває мінімального значення для системи

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

з початковою умовою $x(0) = x_0$. Тут $\lambda > 0$ – задана стала величина, T – задане, $0 \le t \le T$.

Розв'язання. Оскільки час фіксований, то рівняння Беллмана в диференціальній формі для цієї задачі запишемо у вигляді (+). Маємо

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_u \{u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} u(t)\} ,$$

$$S(x,T) = \lambda x^2(T) .$$

Звідси

$$\min_u \{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} u(t)\} = 0 .$$

З необхідної умови мінімуму за керуванням маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + 2u(t) = 0 .$$

Отже, знайдене керування буде функцією від x , t і матиме вигляд

$$u^0(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} .$$

Підставивши цей вираз у рівняння Беллмана

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0\,,$$

одержимо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2=0\,.$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних. Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді полінома з невідомими коефіцієнтами, які залежать від часу t:

$$S(x,t)=c_0(t)+c_1(t)x+c_2(t)x^2\,.$$

Підставимо останній вираз $S(x,t)$ у рівняння Беллмана та в умову для $S(x,t)$:

$$\begin{cases} c_0'(t)+c_1'(t)x+c_2'(t)x^2-\frac{1}{4}(c_1(t)x+2c_2(t)x)^2=0 \\ c_0(T)+c_1(T)x+c_2(T)x^2=\lambda x^2 \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} c_0'(t)-\frac{1}{4}c_1^2(t)=0 \\ c_1'(t)-c_1(t)c_2(t)=0 \\ c_2'(t)-c_2^2(t)=0 \end{cases}$$

з умовами

$$\begin{cases} c_0(T)=0 \\ c_1(T)=0\,. \\ c_2(T)=\lambda \end{cases}$$

Звідси, ураховуючи, що $c_1^2(t)\ge 0$, знаходимо

$$c_0(t)\equiv 0\,,\; c_1(t)\equiv 0\,,\; 0\le t\le T\,.$$

Розв'яжемо останнє рівняння системи:

$$\frac{dc_2(t)}{dt} - c_2^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_2(t)}{c_2^2(t)} = dt \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c_2(t)} = t + C \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{t+C},$$

де C – стала інтегрування.

Ураховуючи умову $c_2(T) = -\dfrac{1}{T+C} = \lambda$, маємо $C = -\dfrac{1+\lambda T}{\lambda}$.

Отже, $c_2(t) = \dfrac{\lambda}{1-\lambda(t-T)}$. Таким чином, $S(x,t) = \dfrac{\lambda^2}{1-\lambda(t-T)}$. Тоді функція керування $u^0 = -\dfrac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)}$, $0 \le t \le T$ як функція координат системи є розв'язком задачі синтезу оптимального керування.

Далі підставимо u^0 у систему:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d(1-\lambda(t-T))}{1-\lambda(t-T)} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln C(1-\lambda(t-T)),$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином, траєкторія має вигляд $x = C(1-\lambda(t-T))$. Невідому константу визначимо з умови $x(0) = 1 + \lambda TC = x_0$. Звідси $C = \dfrac{x_0}{1+\lambda T}$. Отже, оптимальна траєкторія матиме вигляд

$$x^0(t) = \frac{(1-\lambda(t-T))x_0}{1+\lambda T}.$$

Тоді $u^0(t) = \dfrac{\lambda x_0}{1+\lambda T}$ – оптимальне керування, $0 \le t \le T$.

Приклад 6.2. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{1} u^2(t)dt + \frac{1}{2}x_2^2(1),$$

де $t \in [t_0, 1]$, для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

з початковою умовою

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

досягає мінімального значення.

Розв'язання. Запишемо рівняння Беллмана для функції $S(x,t)$:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_u \{\frac{1}{2}u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\}$$

за умови

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2}x_2^2(1).$$

З необхідної умови мінімуму маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2} + u(t) = 0.$$

Звідси $u^0(x_1, x_2, t) = -\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}$.

Підставимо це $u^O(x_1, x_2, t)$ у рівняння Беллмана. Отже, для розв'язання задачі треба знайти функцію $S(x_1, x_2, t)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

за умови, що $S(x_1, x_2, t) = \dfrac{1}{2}x_2^2(1)$.

Функцію $S(x_1, x_2, t)$ шукатимемо у вигляді квадратичної форми:

$$S(x_1, x_2, t) = c_{11}(t)x_1^2 + 2c_{12}(t)x_1x_1 + c_{22}(t)x_2^2.$$

Підставимо це зображення функції $S(x_1,x_2,t)$ у рівняння та умову для функції $S(x_1,x_2,t)$ і для визначення коефіцієнтів полінома отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} c'_{11}(t)-2c_{12}^2(t)=0 \\ c'_{12}(t)+c_{11}(t)-2c_{12}(t)c_{22}(t)=0 \\ c'_{22}(t)+2c_{12}(t)-2c_{22}^2(t)=0 \end{cases}$$

з умовами

$$\begin{cases} c_{11}(1)=0 \\ c_{12}(1)=0 \\ c_{22}(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Виконавши необхідні обчислення, знаходимо:

$$c_{11}(t)=c_{12}(t)\equiv 0;\ c_{22}(t)=\frac{1}{2(2-t)},\ t\in[t_0,1].$$

У даному випадку

$$S(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2}\frac{x_2^2(t)}{2-t}.$$

Тоді $u^0(x_1,x_2,t)=\dfrac{x_2(t)}{t-2}$ – розв'язок задачі синтезу оптимального керування. Система керування матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{x_2}{t-2} \end{cases}.$$

Інтегруємо систему

$$\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dt}{t-2} \quad\Rightarrow\quad \ln x_2=\ln C(t-2) \quad\Rightarrow\quad x_2=C(t-2)$$

$$\dot{x}_1(t)=C(t-2),\ x_1(t)=Ct(\frac{1}{2}t-2)+D,$$

де C,D – сталі інтегрування.

З початкових умов знайдемо невідомі сталі інтегрування:

$$x_1(t_0) = Ct_0(\frac{1}{2}t_0 - 2) + D = x_{10},$$

$$x_2(t_0) = C(t_0 - 2) = x_{20}.$$

Звідси

$$C = \frac{x_{20}}{(t_0 - 2)}, \ D = x_{10} - \frac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0 - 2)}{(t_0 - 2)}.$$

Отже, оптимальна траєкторія системи матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_{20}}{(t_0 - 2)} t(\dfrac{1}{2}t - 2) + x_{10} - \dfrac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0 - 2)}{(t_0 - 2)} \\ x_2(t) = \dfrac{x_{20}}{t_0 - 2}(t - 2) \end{cases}$$

Тоді оптимальне керування $u^0(x_1, x_2, t) = \dfrac{x_{20}}{t_0 - 2}$.

Завдання для самостійної роботи

Приклад 6.3. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \int_0^T u^2(t)dt + x^2(T)$$

набуває мінімального значення для системи

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + u(t)$$

з початковою умовою $x(0) = x_0$.

Тема: "Принцип максимуму Понтрягіна"

Приклад 7.1. Для системи керування

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$x(0) = x(1) = 0$$

знайти оптимальні керування та траєкторії, на яких функціонал

$$J = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt$$

досягає мінімального значення.

Розв'язання.

1) Складаємо функцію Гамільтона – Понтрягіна

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u^2(t) + x^2(t)) + \psi(t)u(t).$$

2) Покладемо $\psi_0 = -1$. Тоді

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u^2(t) + x^2(t)) + \psi(t)u(t).$$

Знаходимо керування, яке максимізує функцію Гамільтона – Понтрягіна: $H = H(x,u,t,\psi,\psi_0)$.

З необхідної умови екстремуму маємо:

$$H'_u = -2u(t) + \psi(t) = 0,$$

звідки $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$.

Оскільки функція H як функція змінної u опукла вгору, то достатньо скористатися лише необхідною умовою екстремуму, тобто знайдене $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$ буде точкою максимуму функції H.

3) Складаємо диференціальне рівняння відносно $\psi(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt} = -H'_x = -2\psi_0 x(t).$$

Оскільки $\psi_0 = -1$, то $\dfrac{d\psi}{dt} = -2\psi_0 x(t) = 2x(t)$.

4) Підставляємо знайдене u в рівняння системи:

$$\dot{x}(t) = u(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Приєднуємо до диференціального рівняння відносно $\psi(t)$ рівняння системи разом із крайовими умовами. У результаті отримуємо крайову задачу принципу максимуму:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\psi(t)}{2} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = 2x(t) \end{cases},$$

$$x(0) = x(1) = 0\,.$$

Розв'яжемо її. Запишемо систему у вигляді рівняння другого порядку й розв'яжемо його:

$$\ddot{x} = \left(\frac{\psi(t)}{2}\right)^{/} = \frac{1}{2}\cdot\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2}(2x(t)) = x(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) - x(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$ – загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо сталі C_1, C_2 із крайових умов:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_1,$$

$$x(1) = C_1(e^{+1} - e^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Звідси $x(t) \equiv 0$, значить $\psi(t) \equiv 0$. Тоді $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2} \equiv 0$, $t \in [0,1]$.

Отже, $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$ – розв'язок, підозрілий на оптимальний.

Перевіримо, чи буде знайдений підозрілий на оптимальний розв'язок оптимальним.

Оскільки $x^2(t) \geq 0, u^2(t) \geq 0$, то $J = \int\limits_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt \geq 0$, тобто мінімальне значення функціонала дорівнює нулю. Утім при $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ маємо $\int\limits_0^1 (u^2(t) + x^2(t))dt = 0$.

Таким чином, у задачі отримано тільки один підозрілий на оптимальний розв'язок, і на ньому даний функціонал набуває свого мінімального значення.

Звідси $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ і є оптимальним розв'язком.

Приклад 7.2. Для системи керування

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$x(0) = A, \quad x(1) = B,$$

де $A \neq 0, \quad B \neq 0$ – задані числа, знайти оптимальні керування та траєкторії, на яких функціонал

$$J = \int_0^1 (u^2(t) + 2tx(t))dt$$

досягає мінімального значення.

Розв'язання.

1) $H(x, u, t, \psi, \psi_0) = \psi_0(u^2(t) + 2tx(t)) + \psi(t)u(t)$.

2) Покладемо $\psi_0 = -1$. Тоді

$$H(x, u, t, \psi, \psi_0) = -(u^2(t) + 2tx(t)) + \psi(t)u(t).$$

Оскільки функція H як функція змінної u опукла вгору, то її максимум знаходимо з умови

$$H'_u = -2u(t) + \psi(t) = 0, \text{ звідки } u(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

3) Спряжена система $\dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x = -2\psi_0 t = 2t$.

4) Підставимо керування $u(t) = \dfrac{\psi(t)}{2}$ у систему керування:

$$\dot{x}(t) = u(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

У результаті отримаємо крайову задачу принципу максимуму:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\psi(t)}{2} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = 2t \end{cases},$$

$$x(0) = A, \quad x(1) = B.$$

Розв'яжемо її:

$$\ddot{x} = \left(\frac{\psi(t)}{2} \right)^{/} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\psi}(t) = \frac{1}{2} 2t = t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) - t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2 .$$

Знайдемо невідомі сталі з крайових умов:

$$x(0) = C_2 = A, \quad x(1) = \frac{1}{6} + C_1 + A = B \quad \Rightarrow \quad C_1 = B - A - \frac{1}{6} .$$

Отже, підозрілий на оптимальний розв'язок даної задачі:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{6} + (B - A - \dfrac{1}{6})t + A \\ u(t) = \dfrac{t^2}{2} + (B - A - \dfrac{1}{6}) \end{cases}$$

Оскільки принцип максимуму Понтрягіна – лише необхідна умова оптимальності, то, щоб перевірити, чи буде знайдений розв'язок оптимальним, треба проводити додаткові дослідження.

Приклад 7.3. Для системи керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

із закріпленим лівим кінцем траєкторій $x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$ за умови, що правий кінець траєкторій вільний, знайти оптимальні керування та траєкторії, на яких функціонал

$$J = \int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t))dt + x_1^2(1) + x_2^2(1)$$

досягає мінімального значення.

Розв'язання.

1) $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$.

2) Покладемо $\psi_0 = -1$. Тоді

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t) .$$

З необхідної умови екстремуму маємо:

$$H'_{u_1} = -2u_1(t) + \psi_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{2}$$

$$H'_{u_2} = -2u_2(t) + \psi_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{2}.$$

Знайдені $u_1(t)$, $u_2(t)$ дають точку максимуму функції H, оскільки H як функція цих змінних опукла вгору.

3) Спряжена система відносно ψ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = -2\psi_0 x_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

4) Підставимо знайдені керування $u_1(t)$, $u_2(t)$ у вихідну систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t) \end{aligned}.$$

Умови трансверсальності на вільному правому кінці траєкторії:

$$\psi_1(1) + 2x_1(1) = 0,$$
$$\psi_2(1) + 2x_2(1) = 0.$$

Крайова задача принципу максимуму:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t) && x_1(0) = 1 \\ &\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t), && x_2(0) = 0 \\ &\dot{\psi}_1(t) = 0 && \psi_1(1) + 2x_1(1) = 0 \\ &\dot{\psi}_2(t) = 2x_2(t) && \psi_2(1) + 2x_2(1) = 0 \end{aligned}$$

Розв'яжемо цю задачу.

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}_1(t) = 0 \;\Rightarrow\; x_1(t) = C_1 t + C_2,$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_2(t) = x_2(t) \;\Rightarrow\; \ddot{x}_2(t) = x_2 \;\Rightarrow\; x_2(t) = D_1 e^{t} + D_2 e^{-t},$$

$$\psi_1(t) = 2\dot{x}_1(t) = 2C_1,$$
$$\psi_2(t) = 2\dot{x}_2(t) = 2(D_1e^t - D_2e^{-t}).$$

Знайдемо невідомі сталі з умов на кінцях:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_2 = 1 \\ \psi_1(1) + 2x_1(1) = 2C_1 + 2(C_1 + C_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(0) = D_1 + D_2 = 0 \\ \psi_2(1) + 2x_2(1) = 2(D_1e - D_2e^{-1}) + 2(D_1e + D_2e^{-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_2 = 0 \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

Отже, знайдені підозрілі на оптимальні траєкторія та керування:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{t}{2} + 1, \\ x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{1}{2}, \quad t \in [0,1]. \\ u_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Приклад 7.4. Для системи керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

з вільними кінцями траєкторій знайти оптимальні керування та траєкторії, на яких функціонал

$$J = \int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t))dt + x_1^2(1) + x_2^2(1)$$

досягає мінімального значення.

Розв'язання. Аналогічно прикладу 7.3 отримаємо:

1) $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$.

2) Покладемо $\psi_0 = -1$. Тоді

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(u_1^2(t) + u_2^2(t) + x_2^2(t)) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t).$$

З необхідної умови екстремуму маємо:

$$H'_{u_1} = -2u_1(t) + \psi_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \; u_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{2}$$

$$H'_{u_2} = -2u_2(t) + \psi_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \; u_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{2}.$$

Знайдені u_1, u_2 дають точку максимуму функції H, оскільки H як функція цих змінних опукла вгору.

3) Спряжена система відносно ψ має вигляд:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = 0$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = -2\psi_0 x_2 = 2x_2$$

4) Підставимо знайдені керування $u_1(t)$, $u_2(t)$ у вихідну систему:

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t)$$

Випишемо умови трансверсальності на обох кінцях:

$$\psi_1(0) = 0$$

$$\psi_2(0) = 0$$

$$\psi_1(1) + 2x_1(1) = 0$$

$$\psi_2(1) + 2x_2(1) = 0$$

Розв'язуючи крайову задачу принципу максимуму (див. прикл. 7.3), маємо:

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = \dot{u}_1(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = C_1 t + C_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2(t) = \dot{u}_2(t) = \frac{1}{2}\dot{\psi}_2(t) = \frac{1}{2}\cdot 2x_2(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_2(t) - x_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = D_1 e^{t} + D_2 e^{-t}.$$

$$\psi_1(t) = 2u_1(t) = 2\dot{x}_1(t) = 2C_1,$$

$$\psi_2(t) = 2u_2(t) = 2\dot{x}_2(t) = 2(D_1e^t - D_2e^{-t}).$$

З умов трансверсальності знайдемо всі невідомі сталі:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = 2C_1 = 0 \\ \psi_1(1) + 2x_1(1) = 2C_1 + 2(C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2(0) = 2(D_1 - D_2) = 0 \\ \psi_2(1) + 2x_2(1) = 2(D_1e^t - D_2e^{-t}) + 2(D_1e^t + D_2e^{-t}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases}.$$

Звідси підозрілий на оптимальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv 0 \\ x_2(t) \equiv 0 \\ u_1(t) \equiv 0 \\ u_2(t) \equiv 0 \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

З умови задачі легко бачити, що цей розв'язок є дійсно оптимальним (порівняти з прикл. 7.3).

Завдання для самостійної роботи

У прикл. 7.5–7.10 знайти за принципом максимуму підозрілі на оптимальність розв'язки задачі оптимального керування.

Приклад 7.5.

$$J = \int_0^T (u^2(t) - x^2(t))dt \to \min; \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = x(T) = 0.$$

Приклад 7.6. $J = \int_0^1 u^2(t)dt + x^2(1) \to \min; \quad \dot{x} = u; \quad x(0) = A,$

правий кінець вільний.

Приклад 7.7. $J=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x^2(1) \to \min; \quad \dot{x}=u; \quad x(0)=0,$

правий кінець вільний.

Приклад 7.8.

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t)+u^2(t))dt \to \min; \quad x(0)=0; \quad \dot{x}(t)=-ax(t)+u(t),$$

правий кінець вільний.

Приклад 7.9. $J=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x^2(1) \to \min;\ \dot{x}=u;\ x(1)=B;\ x(0)$

– вільний.

Приклад 7.10. $J=\int_0^1 (u_1^2+u_2^2+x_2^2)dt + x_1^2(1)+x_2^2(1) \to \min;$

$\dot{x}_1=u_1;\ \dot{x}_2=u_2; \quad x_1(1)=B_1;\ x_2(1)=B_2,$ ліві кінці вільні.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ "ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ"

для студентів напряму підготовки 6.040302 "Інформатика",
спеціалізації "Теоретична кібернетика",
"Теорія і практика програмування", "Математична інформатика"

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Теорія керування" є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем "бакалавр" галузі знань 0403 "Системні науки та кібернетика" за напрямом підготовки 6.040302 "Інформатика"**.**

"Теорія керування" є дисципліною самостійного вибору навчального закладу. Викладається в першому семестрі четвертого курсу обсягом 108 год (*3 кредити ECTS*), зокрема: *лекції – 34 год, практичні заняття – 17 год, самостійна робота – 57 год.* Передбачено два *змістові модулі* та дві *модульні контрольні роботи*; завершується семестр *заліком.*

Мета дисципліни – вивчення й засвоєння основних положень теорії керування, принципів і методів розв'язання проблем, пов'язаних із керуванням складними системами, та оволодіння практичними навичками розв'язання задач керування.

Завдання – ознайомити студентів із основними положеннями теорії керування, принципами й методами розв'язання прикладних задач, пов'язаних із керуванням складними системами.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основи теорії керування, основні методи керування – принцип максимуму Понтрягіна, методи динамічного програмування Беллмана, варіаційне числення в застосуваннях до розв'язання задач керування, поняття керованості, спостережуваності, ідентифікації систем, основи дослідження стійкості програмних рухів систем керування;

вміти: використовувати основні теоретичні положення теорії керування, принципи й методи розв'язання проблем, пов'язаних із керуванням складними системами; володіти практичними навичками при розв'язуванні задач керування складними системами.

Місце дисципліни. Нормативна навчальна дисципліна "Теорія керування" є складовою частиною професійної підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем "бакалавр".

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна "Теорія керування" є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін, як "Моделювання динамічних систем", "Прикладні задачі теорії оцінювання".

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти. Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 "Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення" (ЗМ1) входять чотири теми:

- Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування.
- Керованість, спостережуваність та ідентифікація систем керування.
- Стійкість руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування.
- Методи варіаційного числення для розв'язання задач оптимального керування.

У змістовий модуль 2 "Метод динамічного програмування. Принцип максимуму Понтрягіна" (ЗМ2) входять чотири теми:

Принцип Беллмана й рівняння Беллмана для систем з дискретним часом.

Метод динамічного програмування. Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач.

Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом.

Дискретний принцип максимуму. Оцінювання станів. Фільтр Калмана – Б'юсі".

Обов'язково для заліку впродовж семестру набрати 20 балів.

Оцінювання за формами контролю. Студентам, які набрали сумарно менше ніж *20 балів*, для одержання іспиту/заліку необхідно перескласти модульні контрольні роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перескладання МКР здійснюються відповідно до "Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 року.

	ЗМ1	**ЗМ2**	**Залік**	**Підсумкова оцінка**
Мінімум	**10**	**10**	**15**	**60**
Максимум	**30**	**30**	**40**	**100**

Кількість балів відповідає:

- **0–34** – оцінці "незадовільно" з обов'язковим перескладанням дисципліни;
- **35–59** – оцінці "незадовільно" з можливістю повторного складання;
- **60–64** – оцінці "задовільно" ("достатньо");
- **65–74** – оцінці "задовільно";
- **75–84** – оцінці "добре";
- **85–89** – оцінці "добре" ("дуже добре");
- **90–100** – оцінці "відмінно".

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення

Тема 1. Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування – 12 год.

Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей. Структурні схеми для опису систем керування. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді [4]. *Поняття узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Формулювання теорем, ідея доведення. Постановка задач Лагранжа, Майєра, Больца* [4, 5].

Тема 2. Керованість, спостережуваність та ідентифікація систем керування – 18 год.

Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості [1, 4, 8]. *Спостережуваність у лінійних системах керування. Достатня умова існування розв'язку задачі спостережуваності. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю. Ідентифікація параметрів математичних моделей динамічних систем* [1, 4, 8, 30].

Тема 3. Стійкість руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування – 14 год.

Основні означення та критерії дослідження стійкості програмних рухів систем. Аналітичне конструювання регуляторів. Застосування методів Ляпунова до дослідження стійкості програмних рухів.

Тема 4. Методи варіаційного числення для розв'язання задач оптимального керування – 14 год.

Постановка задач теорії керування як задач варіаційного числення. Необхідні й достатні умови екстремуму функціоналів. Задача на умовний екстремум. Канонічна форма рівнянь Ейлера – Лагранжа.

Модульна контрольна робота 1.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ. Метод динамічного програмування. Принцип максимуму Понтрягіна

Тема 5. Принцип Беллмана й рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Метод динамічного програмування – 6 год.

Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана. Виведення рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом. Метод динамічного програмування (дискретний час). Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування [4–6, 8, 30].

Тема 6. Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач – 20 год.

Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом. Метод динамічного програмування (неперервний час). Теореми про достатню умову оптимальності – метод динамічного програмування (неперервний час). Без доведення. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування. Висновки: переваги й недоліки методу динамічного програмування [4–6, 8, 30].

Тема 7. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом – 6 год.

Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Теорема про необхідну умову оптималь-

ності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані). Умови трансверсальності [4–6, 8, 30].

Тема 8. Принцип максимуму для випадку: початковий і кінцевий моменти часу фіксовані та лівий кінець траєкторії закріплений, правий кінець траєкторії – вільний. Дискретний принцип максимуму. Оцінювання станів систем. Фільтр Калмана – Б'юсі – 13 год.

Доведення теореми про необхідну умову оптимальності – принцип максимуму для випадку: початковий і кінцевий моменти часу фіксовані та лівий кінець траєкторії закріплений, правий кінець траєкторії – вільний. Доведення теорем про зв'язок між принципом максимуму та класичним варіаційним численням [4–6, 8, 30]. *Оцінювання станів стохастичних систем. Теорема двоїстості. Теорема Калмана – Б'юсі.*

Модульна контрольна робота 2.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тематичний план лекцій і семінарських занять

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота
Змістовий модуль 1. Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення				
1	Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування. Структурні схеми систем керування	2		4
2	Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Постановка та дослідження задач керованості для нестаціонарних і стаціонарних систем	2	2	2
3	Критерій керованості для стаціонарних і нестаціонарних лінійних систем. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування	2		4
4	Спостережуваність у системах керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування	2	2	4
5	Ідентифікація параметрів систем керування. Керованость, спостережуваність, ідентифікація дискретних систем керування	2		2
6	Стійкість програмного руху систем керування. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування	2		4
7	Застосування методів Ляпунова до дослідження стійкості програмних рухів. Системи першого наближення	2	2	4
8	Зведення задачі керування до задачі варіаційного числення. Основні задачі варіаційного числення	2		
9	Необхідні та достатні умови знаходження екстремальних траєкторій	2	1	4

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота
Змістовий модуль 1. Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення				
10	Задачі на умовний екстремум, з обмеженнями на керування. Канонічна форма рівнянь Ейлера – Лагранжа	1		3
Модульна контрольна робота 1		1	1	
Змістовий модуль II. Метод динамічного програмування. Принцип максимуму Понтрягіна. Фільтр Калмана – Б`юсі				
11	Принцип Беллмана й рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Метод динамічного програмування	2	2	2
12	Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування принципу Беллмана до розв'язання окремих задач	2	2	4
13	Рівняння Беллмана в інтегральній і диференціальній формах	2	2	2
14	Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування	2		4
15	Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом. Задача швидкодії	2	1	2
16	Доведення принципу максимуму. Дискретний принцип максимуму	2		4
17	Оцінювання станів систем керування. Фільтр Калмана – Б'юсі	1	1	4
Модульна контрольна робота 2		1	1	
УСЬОГО		34	17	57

Загальний обсяг – 108 год, у тому числі:
лекції – 34 год;
практичні заняття – 17 год;
самостійна робота – 57 год.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення

Тема 1. Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування **– 12 год.**

Лекція 1. Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування **– 2 год**.

Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей. Структурні схеми для опису систем керування. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді [4].

Завдання для самостійної роботи **(4 год).** Математичні постановки задач оптимального керування за різних припущень [4].

Лекція 2. Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Постановка та дослідження задач керованості для нестаціонарних і стаціонарних систем **– 2 год**.

Поняття узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Формулювання теореми, ідея доведення [4].

Практичне заняття 1. Приклади задач оптимального керування. Основні характеристики задач оптимального керування. Класифікація моделей, параметрів, обмежень [4] **– 2 год**.

Завдання для самостійної роботи **(2 год).** Приклади систем, що описують керівні процеси з різних галузей знань. Навести приклади задач керування [5, 6, 8].

Тема 2. Керованість, спостережуваність та ідентифікація систем керування **– 18 год.**

Лекція 3. Критерій керованості для стаціонарних і нестаціонарних лінійних систем. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування **– 2 год.**

Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості [5, 6, 8].

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Підібрати приклади систем, що описуються диференціальними рівняннями з розривними правими частинами з різних галузей знань. Навести приклади задач Лагранжа, Майєра, Больца [5, 6, 8].

Лекція 4. Спостережуваність у системах керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування – **2 год.**

Постановка й дослідження задач спостережуваності. Нестаціонарні системи. Стаціонарні системи. Теорема про достатню умову цілком спостережуваності [5, 6, 8].

Практичне заняття 2. Розв'язання задач керованості, спостережуваності та ідентифікації для лінійних стаціонарних систем [5, 6, 8] **– 2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Розв'язання задач керованості для лінійних стаціонарних і нестаціонарних систем [5, 6, 8].

Лекція 5. Ідентифікація параметрів систем керування. Керованість, спостережуваність, ідентифікація дискретних систем керування – **2 год.**

Постановка й дослідження задач ідентифікації моделей систем керування. Критерій існування розв'язку задачі ідентифікації [4, 8, 30].

***Завдання для самостійної роботи* (2 год).** Розв'язання задач керованості, спостережуваності, ідентифікації для лінійних стаціонарних систем [4–6, 8, 30].

Тема 3. Стійкість руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування – 14 **год**.

Лекція 6. Стійкість програмного руху систем керування. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування – **2 год.**

Означення стійкості програмного руху за Ляпуновим. Критерій стійкості для стаціонарних лінійних систем. Аналітичне конструювання регуляторів, модальне керування [1, 3, 4, 30].

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Розв'язання задач дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем [4].

Лекція 7. Застосування методів Ляпунова до дослідження стійкості програмних рухів. Системи першого наближення [4] – **2 год.**

Формулювання основних означень. Виведення систем першого наближення. Критерії стійкості [4].

Практичне заняття 2. Знаходження областей стійкості програмних рухів – **2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Дослідження областей стійкості систем першого наближення. Другий метод Ляпунова [4].

Тема 4. Методи варіаційного числення для розв'язання задач оптимального керування – 14 год.

Лекція 8. Зведення задачі керування до задачі варіаційного числення. Основні задачі варіаційного числення – **2 год.**

Основні задачі варіаційного числення – Лагранжа, Майєра, Больца. Умови розв'язання задач керування як задач варіаційного числення [4, 30].

Лекція 9. Необхідні та достатні умови знаходження екстремальних траєкторій – **2 год.**

Необхідні умови Ейлера – Лагранжа. Умова Якобі. Достатні умови Вейєрштрасса, Лежандра та ін. [4].

Практичне заняття 3. Приклади знаходження оптимальних траєкторій методами варіаційного числення – **2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Дослідження критеріїв достатності екстремуму траєкторій [4, 30].

Лекція 10. Задачі на умовний екстремум з обмеженнями на керування. Канонічна форма рівнянь Ейлера – Лагранжа – **2 год.**

Застосування методів варіаційного числення до розв'язання певних класів задач оптимального керування [4, 30].

***Завдання для самостійної роботи* (3 год).** Зв'язок методів керування із задачами варіаційного числення. Числова реалізація [4, 5].

Модульна контрольна робота 1.

Контрольні запитання до ЗМ1

1. Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей.
2. Структурні схеми для опису систем керування.

3. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді. Основні означення й терміни. Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Без доведення.

4. Постановка й дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості.

5. Постановка й дослідження задач керованості для лінійних систем. Стаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості.

6. Цілком керованість на заданому проміжку. Теорема про достатню умову цілком керованості на заданому проміжку.

7. Спостережуваність у лінійних системах керування. Теорема про достатню умову існування розв'язку задачі спостережуваності.

8. Спостережуваність у лінійних системах керування. Теорема про достатню умову, що виражається через розв'язок інтегрального рівняння; існування розв'язку задачі спостережуваності.

9. Теореми про зв'язок між спостережуваністю та керованістю.

10. Ідентифікація в системах керування.

11. Керованість, спостережуваність, ідентифікація дискрентих лінійних систем.

12. Стійкість за Ляпуновим програмних рухів систем керування.

13. Аналітичне конструювання регуляторів систем керування.

14. Системи першого наближення та другий метод Ляпунова для дослідження стійкості програмних рухів.

15. Постановка задачі оптимального керування як задачі варіаційного числення. Постановка задач Лагранжа, Майєра, Больца.

16. Неохідні умови знаходження оптимальних траєкторій методами варіаційного числення.

17. Умова Якобі та достатні умови екстремуму функціоналів.

18. Необхідні й достатні умови для функціоналів вищих порядків.

19. Загальна задача Лагранжа.

20. Задача з обмеженнями на керування.

21. Гамільтоніан, або канонічна форма рівнянь Ейлера – Ланранжа.

Контрольні завдання до ЗМ1

1. Задача на умови цілком керованості та спостережуваності.

За яких обмежень на величини b_1, b_2, ω система, що наведена нижче, буде:

а) цілком керованою;

б) цілком спостережуваною?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \omega x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_2 + b_2 u \end{cases}.$$

Спостереження має вигляд $y = x_1$.

2. Розв'язати задачу аналітичного конструювання регулятора для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 2x_2 + u_2 \end{cases}.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ. Метод динамічного програмування. Принцип максимуму Понтрягіна. Фільтр Калмана – Б'юсі

Тема 5. Принцип Беллмана й рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Метод динамічного програмування **– 6 год**.

Лекція 11. Принцип Беллмана й рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Метод динамічного програмування [3–5, 8, 30] –**2 год.**

Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана. Виведення рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом. Метод динамічного програмування (дискретний час). Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування [3–5, 8, 30].

Практичне заняття 5. Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач [3–5, 7, 30] – **2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (2 год).** Розв'язання задач методом динамічного програмування для систем з дискретним часом [3–5, 8, 30].

Тема 6. Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач – **20 год**.

Лекція 12. Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач – **2 год.**

Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом. Метод динамічного програмування (неперервний час). Теореми про достатню умову оптимальності в методі динамічного програмування (неперервний час) [3–5, 8, 30].

Практичне заняття 6. Метод динамічного програмування в диференціальній формі задач [3–5, 8, 30] – **2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (4 год).** Застосування методу динамічного програмування (неперервний час) до розв'язання окремих задач [3–5, 8, 30].

Лекція 13. Рівняння Беллмана в інтегральній і диференціальній формах – **2 год**.

Рівняння Беллмана для трьох класів задач. Інтегральна форма. Диференціальна форма [3–5, 8, 30].

Практичне заняття 7. Застосування методу динамічного програмування до розв'язання окремих задач [3–5, 8, 30] – **2 год.**

***Завдання для самостійної роботи* (2 год).**

Розв'язання задач теорії керування методом динамічного програмування [3–5, 8, 30].

Лекція 14. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування – **2 год.**

Використання методу динамічного програмування для знаходження оптимального регулятора лінійної системи з квадратичним критерієм якості [4, 5].

***Завдання для самостійної роботи* (2 год).**

Побудувати регулятор для конкретних систем [4, 5].

Тема 7. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом – **6 год.**

Лекція 15. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом – **2 год**.

Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Принцип максимуму Понтрягіна. Теорема про необхідну умову оптимальності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані). Умови трансверсальності [3–5, 8, 30].

Практичне заняття 8. Розв'язання задач методом принципу максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом (закріплені та вільні кінці траєкторії, фіксований час). Умови трансверсальності [3–5, 8, 30] –**2 год.**

Завдання для самостійної роботи **(2 год).** Розв'язання задач методом принципу максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом [3–5, 8, 30].

Тема 8. Принцип максимуму для випадку: початковий і кінцевий моменти часу фіксовані та лівий кінець траєкторії закріплений, правий кінець траєкторії – вільний. Дискретний принцип максимуму – **13 год.**

Лекція 16. Принцип максимуму. Задача швидкодії. Дискретний принцип максимуму – **2 год.**

Теореми про необхідну умову оптимальності – принцип максимуму для випадку: початковий і кінцевий моменти часу фіксовані та лівий кінець траєкторії закріплений, правий кінець траєкторії – вільний. Лінійна задача оптимальної швидкодії. Приклад системи керування, що описується системою двох диференціальних рівнянь із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна (керування – скаляр). Зв'язок між принципом максимуму та класичним варіаційним численням [3–5, 8, 30].

Завдання для самостійної роботи **(4 год).** Розв'язання задач методом принципу максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом (закріплені та вільні кінці траєкторії, фіксований час). Приклад принципу максимуму для задач у дискретній постановці [3–5, 8, 30].

Лекція 17. Оцінювання станів систем керування. Фільтр Калмана – Б'юсі – **2 год.**

Формулювання задач, установлення зв'язку між задачами оцінювання станів стохастичних систем та оптимального керування для лінійних детермінованих систем. Теорема двоїстості. Фільтр Калмана – Б'юсі [3–5, 8, 30].

Практичне заняття 9. Розв'язання задач методом принципу максимуму Понтрягіна. Задача швидкодії [3–5, 8, 30] – **1 год.**

Завдання для самостійної роботи **(4 год).** Розв'язання задач оптимального керування. Застосування методу градієнтного спуску та узагальнених градієнтних методів до розв'язання задач оптимального керування [3–6, 8, 30].

Модульна контрольна робота 2.

Контрольні запитання до ЗМ2

1. Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана.

2. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом.

3. Метод динамічного програмування (дискретний час).

4. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування. Висновки: переваги та недоліки методу динамічного програмування.

5. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом.

Метод динамічного програмування (неперервний час).

6. Теореми про достатню умову оптимальності – метод динамічного програмування (неперервний час). Без доведення.

7. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.

8. Огляд числових методів для задач оптимального керування.

9. Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Без доведення .

10.Принцип максимуму Понтрягіна. Теорема про необхідну умову оптимальності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані). Без доведення.

11.Лінійна задача оптимальної швидкодії. Приклад системи керування, що описується системою двох диференціальних рівнянь із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна.

12.Дискретний принцип максимуму. Теорема (дискретний принцип максимуму).

13. Оцінювання станів систем керування. Фільтр Калмана – Б'юсі.

Контрольні завдання до ЗМ2

1. За допомогою методу динамічного програмування для дискретних систем розв'язати задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

$$J(u) = \int_0^3 (u(t) + x_2(t))\,dt - x_1(3) \to \inf_u$$

$$\begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ |x_2(0)| \le 1 \end{matrix}, \ |u(0)| \le 1, \ |u(1)| \le 2, \ |u(2)| \le 3.$$

2. Задача на метод принципу максимуму.

Серед допустимих кусково-неперервних керувань $u(t)$ знайти оптимальні або підозрілі на оптимальні керування, що мінімізують функціонал $J(u)$ на траєкторіях такої диференціальної системи:

$$J(u) = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t))\,dt - x^2(1) \to \inf$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,1].$$

Обидва кінці траєкторії вільні.

Запитання до заліку

1. Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей.
2. Структурні схеми для опису систем керування.
3. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді. Основні означення й терміни. Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь із розривними правими частинами. Без доведення.
4. Постановка задачі оптимального керування як задачі варіаційного числення. Постановка задач Лагранжа, Майєра, Больца.
5. Постановка й дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості.
6. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Стаціонарні системи. Теорема про необхідну й достатню умову цілком керованості.
7. Цілком керованість на заданому проміжку. Теорема про достатню умову цілком керованості на заданому проміжку.
8. Спостережуваність у лінійних системах керування. Теорема про достатню умову існування розв'язку задачі спостережуваності.
9. Спостережуваність у лінійних системах керування. Теорема про достатню умову, що виражається через розв'язок інтегрального рівняння; існування розв'язку задачі спостережуваності.
10. Теореми про зв'язок між спостережуваністю та керованістю.
11. Матриці імпульсних перехідних функцій та їх обчислення. Спряжені системи. Теорема про властивості розв'язків спряжених систем.
12. Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Без доведення.

13. Принцип максимуму Понтрягіна. Теорема про необхідну умову оптимальності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані).

14. Лінійна задача оптимальної швидкодії на прикладі системи керування, що описується системою двох диференціальних рівнянь із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна.

15. Дискретний принцип максимуму. Теорема (дискретний принцип максимуму).

16. Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана.

17. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом.

18. Метод динамічного програмування (дискретний час).

19. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.

20. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом.

21. Метод динамічного програмування (неперервний час).

22. Теореми про достатню умову оптимальності – метод динамічного програмування (неперервний час).

23. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.

24. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування.

25. Оцінювання станів систем керування. Фільтр Калмана – Б'юсі.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Атанс М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М., 1968.

2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М., 1960.

3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление / А. Брайсон, Ю-ши Хо. – М., 1972.

4. Бублик Б. Н. Основы теории управления / Б. Н. Бублик, Н. Ф. Кириченко. – К., 1975.

5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М., 1980.

6. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М., 1975.

7. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М., 1983.

8. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М., 1975.

9. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления / К. Острем. – М., 1973.

10. Флеминг У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. – М., 1978.

Додаткова

11. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М., 1979.

12. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем / М. Аоки. – М., 1971.

14. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана / А. В. Балакришнан. – М., 1984.

15. Бейко И. В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зинько. – К., 1983.

16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М., 1969.

17. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах : учеб. пособ. / Б. Н. Бублик, В. Я. Данилов, А. Г. Наконечный. – К., 1988.

19. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. Кириллова. – М., 1971.

20. Гноенский Л. С. Математические основы теории управляемых систем / Л. С. Гноенский, Г. А. Каменский, Л. Э. Эльсгольц. – М., 1969.

21. Зайцев Г. Ф. Основы автоматического управления и регулирования / Г. Ф. Зайцев, В. И. Костюк, П. И. Чинаев. – К., 1977.

22. Иванов В. А. Теория оптимальных систем автоматического регулирования / В. А. Иванов, Н. В. Фалдин. – М., 1981.

23. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971.

24. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М., 1973.

25. Ли Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. – М., 1972.

26. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев. – М., 1981.

28. Пропой А. И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов / А. И. Пропой. – М., 1973.

29. Растригин Л. А. Современные принципы управления сложными системами / Л. А. Растригин. – М., 1980.

30. Сейдж Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт. – М., 1982.

31. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М., 1978.

32. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем / Я. З. Цыпкин. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М., 1969.

ЗМІСТ

Навчальне видання

КРАК Юрій Васильович
ШАТИРКО Андрій Володимирович

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ІНФОРМАТИКІВ

Підручник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат $60x84^{1/16}$. Ум. друк. арк. 10,23. Наклад 100. Зам. № 215-7498.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К9.
Підписано до друку 18.11.15

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
б-р Т. Шевченка, 14, 01601, м. Київ
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02