

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. С. Шкільняк

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ПРИКЛАДИ Й ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

УДК 510.6(075.8)

Ш66

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук О. Г. Ганюшкін,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. В. Провотар,
д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України Ю. В. Крак

*Рекомендовано до друку
вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 3 від 28 жовтня 2021 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 1–22 від 31 січня 2022 року)*

Шкільняк С. С.

Ш66

Математична логіка. Приклади й задачі : навч. посіб. — К. :
ВПЦ "Київський університет", 2022. — 304 с.

ISBN

Наведено приклади типових задач із математичної логіки, запропоновано вправи і задачі для самостійного розв'язання. Викладений у стислій формі теоретичний матеріал дозволяє використовувати посібник як довідник з основ математичної логіки.

Для студентів спеціальностей "Інформатика", "Системний аналіз", "Прикладна математика", "Програмна інженерія".

УДК 510.6(075.8)

ISBN

© Шкільняк С. С., 2022

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2022

ПЕРЕДМОВА

Логіка – це наука про закони мислення. Оксфордський словник [44] визначає логіку як науку, що досліджує принципи коректних міркувань.

Математична логіка – це наука про закони *математичного* мислення.

У загальносвітоглядному аспекті поняття і методи математичної логіки необхідні для обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання та формування сучасної наукової картини світу. У прикладному аспекті апарат математичної логіки необхідний для адекватного моделювання різноманітних предметних областей, створення сучасних програмних та інформаційних систем.

Математична логіка має на меті формалізацію та дослідження законів мислення математичними методами. По суті, математична логіка є формальною логікою, що використовує математичний апарат.

Формальна логіка вивчає акти мислення (поняття, судження, умовиведення, доведення) з погляду їхньої форми, логічної структури, абстрагуючись від конкретного змісту.

Предметом математичної логіки є дослідження математичних міркувань. Математична логіка вивчає математичні теорії загалом за допомогою формальних логіко-математичних мов. При цьому найважливішими є питання несуперечливості, повноти, розв'язності таких теорій.

Зародження логіки відносять до VI ст. до н. е. (Фалес, Парменід, Піфагор). Загальні принципи логічних міркувань розвинув Платон. Основоположником логіки як цілісної науки був Арістотель. Він розробив аксіоматичний метод, створив першу систему логіки – силогістику, заклали основи модальної логіки.

Визначним кроком у розвитку логіки була ідея створення універсального логічного числення, яку запропонував Г. Лейбніц. Хоча ця ідея значно випередила свій час, вона фактично привела до виникнення математичної логіки.

Першу завершену систему власне математичної логіки на базі строгої логіко-математичної мови (алгебри логіки) запропонували Дж. Буль та А. де Морган. Поняття предиката і кванторів увів Г. Фреге, він також розвинув теорію смислу логіко-математичних мов. На цій основі Дж. Пеано виклав цілі розділи математики мовою математичної логіки та аксіоматизував арифметику.

На межі XIX–XX ст. було відкрито парадокси, пов'язані з основними поняттями теорії множин, що призвело до кризи в математиці. Для виходу із кризи Л. Брауер висунув інтуїціоністську програму, у якій запропонував відмовитися від актуальної (завершеної, цілісної) нескінченності та деяких логічних законів (виключеного третього, зняття подвійного заперечення), вважаючи допустимими в математиці лише конструктивні доведення.

Інший шлях запропонував Д. Гільберт, який виступив із програмою обґрунтування математики. Програма Гільберта передбачала побудову формально-аксіоматичних моделей основних розділів математики та подальше доведення їх несуперечливості надійними, фінітними засобами. Таким чином, математичні теорії стали предметом вивчення окремої математичної науки, яку Д. Гільберт назвав *метаматематикою*, або *теорією доведень*. Визначальний внесок у створення і розвиток теорії доведень зробили Г. Генцен, В. Аккерман, П. Бернайс та ін. Саме з розроблення Д. Гільбертом та його учнями теорії доведень на базі розвинутої в роботах Г. Фреге та Б. Рассела логічної мови починається становлення математичної логіки як окремої математичної дисципліни.

Роботи на основі програми Гільберта привели до низки важливих результатів, проте тривалі спроби повністю її реалізувати не були вдаливими. Нemoжливiсть такої реалізації та принципову обмеженість формально-аксіоматичного методу засвідчили знамениті теореми К. Гьоделя про неповноту, згідно з якими несуперечливість кожної досить багатой формальної теорії не можна довести засобами самої теорії.

З математичною логікою тісно пов'язана теорія алгоритмів, яка визначає і досліджує формальні моделі алгоритмів та алгоритмічно обчислюваних функцій. Як окремий розділ математики, що вивчає загальні властивості алгоритмів, теорія алгоритмів виникла в межах математичної логіки в 30-ті рр. XX ст. Необхідність уточнення поняття алгоритму стала неминучою після усвідомлення неможливості існування алгоритмів розв'язання низки масових проблем, передусім пов'язаних з арифметикою та математичною логікою (проблеми істинності для арифметичних формул та для формул числення предикатів першого порядку, десята проблема Гільберта про розв'язність діофантових рівнянь). Проте для доведення неіснування алгоритму треба мати його точне математичне визначення, тому після сформування поняття алгоритму як нової та окремої сутності першочерговою стала проблема знаходження і дослідження адекватних формальних моделей алгоритму й алгоритмічно обчислюваної функції. Доведено, що

кожна з відомих на сьогодні таких моделей задає (з точністю до кодування) один і той самий клас функцій. Тому є всі підстави вважати, що кожна з цих моделей дає строге математичне уточнення інтуїтивного поняття алгоритмічно обчислюваної функції. Таке твердження вперше сформулював у 1936 р. А. Чорч (*теза Чорча*).

Поява комп'ютерів стала потужним імпульсом для розвитку математичної логіки та теорії алгоритмів. Виявилось, що математична логіка вже має готовий апарат для проєктування обчислювальної техніки: алгебра логіки лежить в основі схемотехніки комп'ютерів. Мови програмування базуються на тих чи інших уточненнях поняття алгоритму.

До найважливіших застосувань математичної логіки, без сумніву, належить автоматизація пошуку доведень теорем. Ефективне знаходження доведень конче необхідне для успішного розв'язання низки задач, що виникають у сучасних інтелектуальних інформаційних системах. Такими є, зокрема, задачі подання знань і робота з ними в базах даних і знань, задачі логічного програмування і дедуктивних баз даних. Найважливішими з методів пошуку доведень є метод семантичних таблиць, формальною основою якого є створене Г. Генценом секвенційне числення; запропонований ним же метод натурального виведення та розроблений А. Дж. Робінсоном метод резолюцій.

Поняття і методи математичної логіки засвідчують високу ефективність в інформатиці та програмуванні. При цьому зазвичай використовують класичну логіку предикатів. Особливе місце класичної логіки передусім зумовлене тим, що її закони мають універсальний характер, вони виражають загальні закони мислення людини. Класична логіка детально досліджена, вона має широке застосування, для неї побудовано багато систем автоматизованого доведення. Класична логіка є основою низки спеціальних логік (модальних, темпоральних, програмних, епістемічних тощо). Проте класична логіка, незважаючи на всі позитивні вартості, має низку обмежень, які ускладнюють її застосування. Вона недостатньо враховує структурованість, неповноту, частковість інформації про предметну область, її динаміку.

Обмеження класичної логіки предикатів роблять актуальною проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язання задач штучного інтелекту та інформатики стала передумовою виникнення композиційно-номінативних логік, які будуються на базі спільного для логіки та програмування композиційно-номінативного підходу. Зазначені логіки базуються на загальних

класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення називають квазіарними. Застосування композиційно-номінативного підходу дає змогу побудувати низку логічних моделей різноманітних предметних областей, що перебувають на різних рівнях абстрактності та загальності.

Для адекватного опису світу, який змінюється та розвивається, доцільно використовувати модальні логіки. Виняткова гнучкість модальних логік дозволяє застосовувати їх для аналізу та моделювання найрізноманітніших аспектів діяльності людини. Передусім це стосується створення інтелектуальних інформаційних систем, зокрема систем штучного інтелекту, систем знань, експертних систем, задач опису та моделювання складних динамічних систем. Поєднуючи можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів, дістаємо композиційно-номінативні модальні логіки, зокрема транзитивні та темпоральні композиційно-номінативні логіки.

Розвиток інформаційних технологій і програмування зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Її апарат належить до основних засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є ядром сучасних систем оброблення інформації та систем штучного інтелекту. Ідеї та методи математичної логіки з кожним роком усе глибше пронизують математику, інформатику, лінгвістику, філософію.

Пропонований посібник написано на основі підручника [10] та посібників [9, 26], він є подальшим розвитком посібника [26]. Викладений у [26] матеріал перероблено та значно доповнено, при цьому враховано останні наукові результати у сфері математичної логіки. Матеріал посібника розширено низкою нових оригінальних прикладів і задач. Додано нові розділи, присвячені логікам квазіарних предикатів в нетрадиційним логікам, істотно оновлено розділ, присвячений модальним логікам. Матеріал, присвячений арифметичності та арифметичній ієрархії, викладається в дисципліні "Теорія алгоритмів", тому в посібнику тепер немає відповідного розділу. У кінці кожного підрозділу наведено запитання для самоконтролю, вправи і задачі для самостійного розв'язання. Стило викладений теоретичний матеріал дозволяє використовувати посібник як довідник з основ математичної логіки.

Посібник узгоджено із програмою обов'язкової навчальної дисципліни "Математична логіка" для студентів освітнього рівня "бакалавр" освітньої програми "Інформатика" спеціальності "Комп'ютерні науки".

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АС	– алгебраїчна система
ДНС	– деномінаційний символ
ЗМС	– загальна модальна система
ІАФ	– істинна арифметична формула
ІМ	– іменна множина
ІЛП	– інтуїціоністська логіка предикатів
ІПЛ	– інтуїціоністська пропозиційна логіка
ІПЧ	– інтуїціоністське пропозиційне числення
КНЛ	– композиційно-номінативна логіка
КНМЛ	– композиційно-номінативна модальна логіка
КНМС	– композиційно-номінативна модальна система
КНФ	– кон'юнктивна нормальна форма
КС	– константний символ
ЛТЛ	– лінійна темпоральна логіка
ЛТЛМ	– ЛТЛ майбутнього
ММС	– мультимодальна транзиційна модальна система
МР	– правило <i>modus ponens</i>
НЗУ	– найзагальніший уніфікатор
НКЛ	– неокласична логіка
ПВ	– правило виведення
ПК	– правило комутативності
ПЛ	– пропозиційна логіка
ПП	– правило підстановки
ПР	– правило резолюцій
ПС	– предикатний символ
ПФ	– пропозиційна формула

ПЧ	– пропозиційне числення
РНЛ	– реномінативна логіка
РНКЧ	– реномінативне неокласичне числення
РТЛ	– темпоральна логіка з розгалуженим часом
САЧ	– скінченно-аксіоматизована частина
ТМЛ	– транзиційна модальна логіка
ТМС	– транзиційна модальна система
Т _м МС	– темпоральна ТМС
ТТ	– теорема тавтології
ЧІЧП	– чисте інтуїціоністське числення предикатів
ЧНКЛ	– чиста першопорядкова неокласична логіка
ЧКНЛ	– чиста першопорядкова композиційно-номінативна логіка
ЧНКЧ	– чисте першопорядкове неокласичне числення
ЧП-1	– числення предикатів першого порядку
ФЕНКЛ	– неокласична логіка функціонально-екваційного рівня
ФЕНКЧ	– функціонально-екваційне першопорядкове неокласичне числення
ФС	– функціональний символ

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Наведемо спочатку основні визначення та позначення, які будемо використовувати в цьому посібнику. Загалом будемо дотримуватись, якщо інше не зазначено окремо, позначень із робіт [9–12, 26].

Вважатимемо відомими базові математичні поняття множини, відношення, відображення, декартового добутку тощо.

Множини натуральних, цілих, раціональних та дійсних чисел позначатимемо N , Z , Q та R .

Множину всіх підмножин (булеан) довільної множини A позначатимемо 2^A .

Нехай f – однозначна часткова функція вигляду $f: A \rightarrow R$, де A та R – довільні множини.

Якщо значення $f(a)$ визначене, то пишемо $f(a) \downarrow$. Якщо $f(a)$ невизначене, то пишемо $f(a) \uparrow$. Якщо $f(a)$ визначене та дорівнює b , то пишемо $f(a) \downarrow = b$ або $f(a) \downarrow b$.

Для функцій f та g пишемо $f(a) \equiv g(b)$, якщо із $f(a) \downarrow$ та $g(b) \downarrow$ випливає $f(a) = g(b)$.

Множину $D_f = \{a \in A \mid f(a) \downarrow\}$ назвемо *множиною визначення функції* f .

Множину $E_f = \{b \in R \mid f(a) \downarrow b \text{ для деякого } a \in D_f\}$ назвемо *множиною значень функції* f .

Поняття висловлення та предиката. Основним поняттям логіки із семантичного погляду є поняття *предиката*. Із цим поняттям тісно пов'язане поняття *висловлення*.

Висловлення – це речення, яке можна розглядати з погляду його істинності чи хибності.

Суб'єкт (суб'єкти) – це те, про кого або про що йдеться у висловленні. Предикат виражає *властивості* суб'єкта (суб'єктів) та *відношення* між ними.

Приклад 1.1.1. Предикат "x є простим числом" стає висловленням:

- "5 є простим числом", якщо значенням імені x є число 5;
- "4 є простим числом", якщо значенням x є число 4.

Дане – це множина пар імен суб'єктів та їхніх значень.

Висловлення є значенням предиката на конкретному даному (аргументі).

Приклад 1.1.2. Застосуємо предикат " $x > y$ та $y > z \Rightarrow x > z$ " до даного $[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]$, тоді отримаємо таке висловлення: " $17 > 11$ та $11 > 3 \Rightarrow 17 > 3$ ".

Висловлення може набувати одного із двох істиннісних значень – T (істина) або F (хиба, фальш), тому із семантичного погляду *предикат* уточнимо як *функцію*, що конкретним іменованим суб'єктам зіставляє значення T або F . Звідси таке визначення.

Предикат на множині D – це часткова функція вигляду $P : D \rightarrow \{T, F\}$.

Кожний предикат P на D задається двома множинами:

$T(P) = \{d \in D \mid P(d) = T\}$ – *область істинності* предиката P ;

$F(P) = \{d \in D \mid P(d) = F\}$ – *область хибності* предиката P .

Предикат P *однозначний*, якщо $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

Предикат P *тотальний*, якщо $T(P) \cup F(P) = D$.

Числення. До центральних понять математичної логіки належить поняття числення. Воно відображує інтуїтивну уяву про поширене в математиці індуктивне породження об'єктів.

Числення – це скінченна множина точно визначених *породжувальних правил*, або *правил виведення* (ПВ), які дозволяють із певних заданих об'єктів отримувати інші об'єкти.

Засновки – це об'єкти, до яких застосовуються ПВ.

Висновок – це отриманий із засновків об'єкт.

Множину породжених численням об'єктів задають індуктивно. На першому кроці процесу породження початкові об'єкти задаються ПВ із порожньою множиною засновків. Об'єкт *породжується* на певному кроці, якщо його отримують за допомогою певного ПВ із об'єктів, породжених на попередніх кроках.

Далі будемо розглядати *числення зі входом*: у таких численнях на першому кроці породження початкові об'єкти беремо з певної (вхідної) множини.

Поняття числення зі входом на синтаксичному рівні уточнимо як поняття *формальної системи*. На цьому понятті базуються формально-аксіоматичні системи гільбертівського типу.

Формальна система – це трійка (L, A, P) , де L – мова, A – множина аксіом, P – множина правил виведення (ПВ).

Мова задається *алфавітом* і правилами побудови її слів, які називаються *формулами*. Кожна аксіома є формулою.

ПВ діють на множині формул.

ПВ мають вигляд $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash P$, де $P_1, P_2, \dots, P_n$ – засновки, P – висновок.

Теорема – це формула, отримана із аксіом за допомогою скінченної кількості застосувань ПВ.

Виведення – це скінченна послідовність формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, де кожна із цих формул *або* аксіома, *або* отримана з попередніх за допомогою деякого ПВ.

Логічні системи. Поняття логіки уточнимо через поняття логічної системи.

Логічна система – це об'єкт вигляду $(M, \mathfrak{J}, I, \models, \vdash)$; тут:

– M – моделі логіки (світи розгляду);

– $\mathfrak{J}$ – дескрипції (засоби опису світів, формули);

– I – відношення денотації (інтерпретації) дескрипцій на моделях;

– $\models$ – відношення семантичної *істинності* на множині дескрипцій;

– $\vdash$ – відношення *вивідності* на множині дескрипцій.

Відношення $\models$ уточнюється за допомогою поняття *істинного предиката*.

Відношення $\vdash$ уточнюється за допомогою поняття *числення*.

Для задання відношення вивідності найчастіше використовують формально-аксіоматичні числення гільбертівського типу та числення генценівського типу (секвенційні числення).

Фундаментальні властивості логіки задаються такими умовами:

– *несуперечливість* $\vdash \subseteq \models$;

– *повнота* $\models \subseteq \vdash$.

Основні закони традиційної логіки. З античних часів відомі три основні закони традиційної логіки:

- тотожності;
- несуперечливості;
- виключеного третього.

Закон тотожності (*lex identitatis*) у загальному вигляді формулюється так:

У процесі одного й того самого міркування
використовувані поняття не мають змінюватися.

Це засвідчує фундаментальну роль закону тотожності для організації мислення людини.

Закон тотожності у спрощеному вигляді формулюється так: *A* суть *A*. Це веде до дуже огрубленого його математичного формулювання: $A \leftrightarrow A$. Формула $A \leftrightarrow A$ створює ілюзію тривіальності закону тотожності, водночас цього ніяк не можна сказати про його загальне формулювання. Варто зауважити, що порушення закону тотожності у вигляді підміни значень слів найчастіше використовується для побудови софізмів.

Закон несуперечливості формулюється так:

Обидва твердження *A* та $\neg A$
не можуть виконуватися одночасно.

Інколи його називають законом суперечливості (*lex contradictionis*).

Математичне формулювання закону несуперечливості цілком адекватне: $\neg(A \ \& \ \neg A)$.

Зрозуміло, що в цьому законі обидва твердження *A* та $\neg A$ мають розглядатися в один і той самий час в одному й тому самому контексті. Справді, один і той самий об'єкт в один і той самий час в одному й тому самому місці не може мати взаємовиключних властивостей.

Закон виключеного третього в загальному вигляді формулюється так:

Обидва твердження A та $\neg A$
не можуть заперечуватися одночасно.

Сильна форма закону виключеного третього (*tertium non datur*) формулюється так:

Одне з тверджень A чи $\neg A$ істинне.

Закон *tertium non datur* має таке математичне формулювання:
 $A \vee \neg A$.

У XVII ст. до цих трьох основних законів додався закон достатньої підстави (Г. Лейбніц):

Жодне твердження не можна приймати
без достатніх підстав.

Це означає: жодне твердження не може визнаватися істинним, якщо воно не є наслідком раніше прийнятих тверджень або строго встановлених фактів. Прийняття цього закону відокремлює логіку точних наук від змістовної, житейської логіки.

Закон достатньої підстави загалом не має математичного формулювання.

Побудова програмно-орієнтованих логік. Розширення сфери застосування математичної логіки висвітлило принципові обмеження класичної логіки предикатів. У класичній логіці предикати трактуються як тотальні скінченноарні відображення, водночас в інформатиці та програмуванні широко використовуються загальні класи часткових відображень над складними номінативними (іменними) даними. Класична логіка недостатньо враховує структурованість, неповноту, частковість інформації про предметну область, її динаміку. Це виводить на перший план проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Таку побудову природно вести на базі єдиного для логіки та програмування композиційно-номінативного підходу (див. [11]).

Композиційно-номінативний підхід (КНП) опирається на загальнометодологічний *принцип розвитку* як сходження від абстрактного до конкретного.

Основними науковими принципами КНП є принципи композиційності й номінативності.

Принцип композиційності трактує засоби побудови програм (функцій, предикатів) як алгебраїчні операції. Для логіки це означає зведення логічних зв'язок і кванторів до композицій предикатів.

Принцип номінативності вимагає використання відношень іменування для побудови семантичних моделей та опису програм (функцій, предикатів).

Згідно із КНП логіки будуюмо в семантико-синтаксичному стилі:

- спочатку фіксуємо рівень абстракції розгляду предметної області (ПО), тобто неформально фіксуємо інтенціональну (змістовну) модель світу;

- потім будуюмо відповідні до розглянутого рівня абстракції математичні моделі ПО – предикатні композиційно-номінативні системи; вони задають семантичні аспекти логік;

- далі будуюмо відповідні формально-аксіоматичні числення, що задають синтаксичні аспекти логік.

Композиційно-номінативна система (КНС) – це об'єкт вигляду (Cs , Ds , Dns); тут:

- Cs – композиційна система;

- Ds – дескриптивна система;

- Dns – денотаційна система.

Поняття КНС є спільним для логіки та програмування. Поняття *програми* теж адекватно уточнюється за допомогою відповідних КНС.

Композиційні системи (КС) задають семантичні моделі логіки. Вони визначають засоби побудови функцій і предикатів над деякою множиною даних.

Дескриптивні системи задають дескрипції, що є описами функцій і предикатів. Вони задають синтаксис мови логіки. Дескрипціями є формули (для логік функціонального рівня використовуємо допоміжні дескрипції – терми).

Денотаційні системи задають денотати (значення) дескрипцій. Вони визначають відношення денотації (інтерпретації).

Композиційна система – це об'єкт вигляду (D, Fn, Cm) ; тут:

– D – множина даних;

– Fn – множина функцій і предикатів над D ;

– Cm – множина композицій (операцій) над Fn .

КС задає дві алгебри:

– композиційну алгебру (Fn, Cm) ;

– алгебру даних (D, Fn) .

Під алгеброю тут розумітимемо множину із заданими на ній функціями і предикатами. Такі алгебри називають також алгебраїчними системами (АС).

Застосування КНП дає змогу побудувати низку логічних моделей різноманітних ПО на різних рівнях абстрактності та загальності (див., напр., [11–13, 27, 28, 43]).

Логіки, побудовані на основі КНП, називаються *композиційно-номінативними*.

Побудову КНЛ починаємо із гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня абстракції множини даних.

Пропозиційний рівень. На цьому рівні дані трактуються гранично абстрактно як "чорні скриньки". Жодна властивість даних не є доступною. На пропозиційному рівні предикати мають вигляд $P : A \rightarrow \{T, F\}$, де A – сукупність абстрактних елементів, які неможливо відрізнити один від одного. Кожний предикат P на такому абстрактному даному може набувати певного істиннісного значення або бути невизначеним, тому на пропозиційному рівні композиції предикатів працюють лише з вираженими предикатами істиннісними значеннями.

Композиції пропозиційного рівня традиційно називають логічними зв'язками. Найвідомішими логічними зв'язками є заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція, імплікація, еквіваленція.

Сингулярний рівень. На цьому рівні дані трактуються гранично конкретно як "білі скриньки". Тут фіксується єдиний клас даних. Композиціями сингулярного рівня є гранично конкретні аплікативні композиції. Практично кожний логічний засіб можна трактувати як аплікативну композицію.

Сингулярні логіки досліджені М. С. Нікітченком (див. [11]).

Номінативний рівень. На цьому рівні дані можна трактувати як "рябі скриньки", побудовані з "білих" і "чорних". Такі дані називаються *номінатами*. Відповідні логіки відносимо до *номінативного* рівня.

Номінативний рівень дуже багатий, він розпадається на низку підрівнів. Найважливішим є підрівень однозначних однорівневих номінатів – *іменних множин*. До цього підрівня відносимо *класичні першопорядкові* логіки.

На рівні ІМ далі можна виділити:

1) *номінативно-безкванторні* рівні:

- реномінативний;
- реномінативно-екваційний (реномінативний із предикатами рівності);
- безкванторний (безкванторно-функціональний);
- безкванторно-екваційний (безкванторно-функціональний із композицією рівності);

2) *першопорядкові* рівні:

- кванторний;
- кванторно-екваційний (кванторний із предикатами рівності);
- функціональний;
- функціонально-екваційний (функціональний із композицією рівності).

Ієрархічно-номінативний рівень. На цьому рівні дані – це ієрархічні номінати; їх будують індуктивно із множин предметних імен і предметних значень. Відповідні логіки – це логіки ієрархічних номінативних даних.

Ієрархічно-номінативний рівень дуже багатий, зроблено лише перші кроки з його дослідження (див., напр., [11]).

Спектр КНЛ за рівнем абстракції розгляду зображено на рис. 1.1.

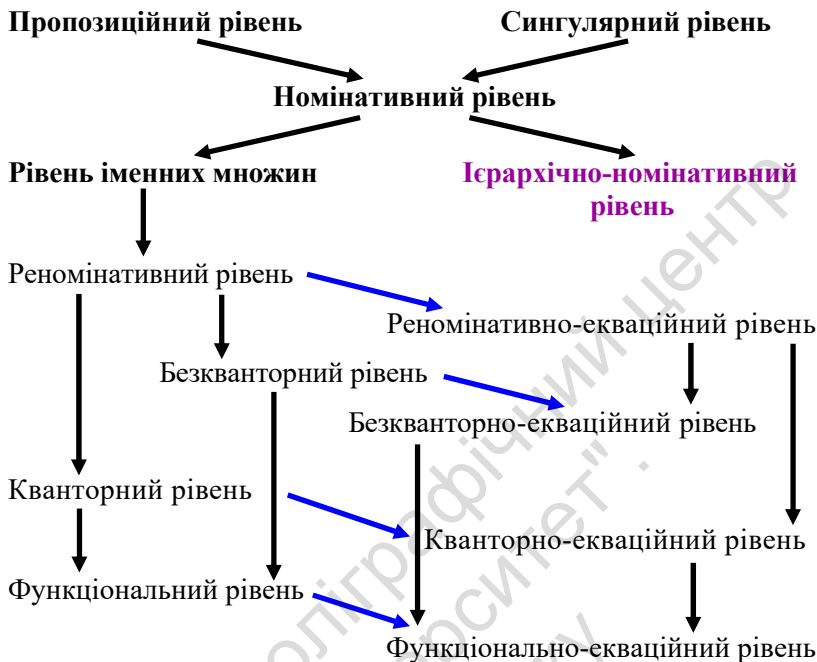


Рис. 1.1. Спектр КНЛ за рівнем абстракції розгляду

Запитання для самоконтролю

1. Що таке висловлення?
2. Що таке предикат?
3. Дайте визначення області істинності та області хибності предиката.
4. Що таке числення?
5. Що таке формальна система?
6. Який вигляд мають правила виведення?
7. Що таке теорема?
8. Що таке виведення?
9. Сформулюйте основні закони традиційної логіки.
10. Опишіть принципи композиційно-номінативного підходу.

11. Що таке логічна система?
12. Що таке композиційно-номінативна система?
13. Що таке композиційна система?
14. Опишіть особливості пропозиційного рівня.
15. Перелічіть номінативно-безкванторні рівні.
16. Перелічіть першопорядкові рівні.
17. Опишіть спектр КНЛ за рівнем абстракції розгляду.

Вправи

Проаналізуйте нижченаведені міркування. Якщо вони некоректні, то які закони логіки порушують?

1. Якщо ти їси менше, то голоднішаєш. Якщо ти голоднішаєш, то їси більше. Отже, якщо ти їси менше, то їси більше [8].

2. Той, хто хоче щось вивчити, цього не знає. Незнаючий – невіглас. Отже, тільки невігласи хочуть вчитись [8].

3. Студенти, які хочуть вчитися, вчаться й без заохочення. Студентів, які не хочуть вчитися, заохочувати марно. Отже, студентів заохочувати не потрібно [8].

4. Сіль та цукор білі. Ніщо не може бути одночасно цукром і сіллю. Отже, ніщо не може бути білим [6].

5. Злодій не хоче брати щось погане. Надбання доброго – добра справа. Отже, злодій робить добру справу (античний софізм).

6. Учитель завжди хоче, щоб його учень став мудрим і припинив бути невігласом. Таким чином, він хоче, щоб його учень став тим, чим він не є, та припинив бути тим, чим він є. Отже, він хоче перевести його з буття в небуття, тобто знищити (античний софізм).

7. Якщо тобі холодно, то ти тепло вдягаєшся. Якщо тепло вдягнутися, то стане гаряче. Якщо тобі гаряче, то ти роздягаєшся. Отже, якщо тобі холодно, то ти роздягаєшся.

2. ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА

На пропозиційному рівні предикати розглядаємо як абстрактні, тобто як функції вигляду $P : A \rightarrow \{T, F\}$, де A – сукупність абстрактних елементів. На цьому рівні дані трактуємо як "чорні скриньки", які неможливо відрізнити одне від одного. Тому на пропозиційному рівні предикати можна розглядати як задані на одиничному абстрактному даному. Кожний предикат P на цьому даному може набувати певного істиннісного значення або бути невизначеним. Таким чином, на пропозиційному рівні композиції – засоби утворення складніших висловлень чи предикатів із простіших – фактично працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями.

Пропозиційні композиції називають логічними зв'язками. Те, що на пропозиційному рівні композиції працюють лише з істиннісними значеннями, пояснює трактування логічних зв'язок у класичній логіці як булевих функцій.

Логіку пропозиційного рівня називають *пропозиційною логікою* (ПЛ). Уживаною є також назва *логіка висловлень* [6, 7].

2.1. Пропозиційні композиції.

Мова пропозиційної логіки

Логічні зв'язки відповідають певним зворотам природної мови. Найпоширенішими логічними зв'язками є заперечення $\neg$, диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція $\&$, імплікація $\rightarrow$, еквіваленція $\leftrightarrow$, а також роздільна диз'юнкція $\oplus$. Для логіки часткових однозначних предикатів такі зв'язки називають клінієвими, оскільки вони відповідають логічним зв'язкам сильної тризначної логіки Кліні [5].

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\rightarrow(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$, $\oplus(P, Q)$ будемо позначати $\neg P$, $P \vee Q$, $P \& Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$, $P \oplus Q$. Зазначені предикати задамо так:

$$\begin{aligned}
(\neg P)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow = F, \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow = T, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } P(d) \uparrow; \end{cases} \\
(P \vee Q)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\
(P \& Q)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\
(P \rightarrow Q)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \\
(P \leftrightarrow Q)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) = Q(d), \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) \neq Q(d), \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } P(d) \uparrow \text{ або } Q(d) \uparrow; \end{cases} \\
(P \oplus Q)(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) \neq Q(d), \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) = Q(d), \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } P(d) \uparrow \text{ або } Q(d) \uparrow. \end{cases}
\end{aligned}$$

Через області істинності й хибності відповідних предикатів зазначені логічні зв'язки визначаються так:

$$\begin{aligned}
T(\neg P) &= F(P); \\
F(\neg P) &= T(P); \\
T(P \vee Q) &= T(P) \cup T(Q); \\
F(P \vee Q) &= F(P) \cap F(Q); \\
T(P \& Q) &= T(P) \cap T(Q); \\
F(P \& Q) &= F(P) \cup F(Q); \\
T(P \rightarrow Q) &= F(P) \cup T(Q); \\
F(P \rightarrow Q) &= T(P) \cap F(Q); \\
T(P \leftrightarrow Q) &= (T(P) \cap T(Q)) \cup (F(P) \cap F(Q)); \\
F(P \leftrightarrow Q) &= (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q)); \\
T(P \oplus Q) &= (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q)); \\
F(P \oplus Q) &= (T(P) \cap T(Q)) \cup (F(P) \cap F(Q)).
\end{aligned}$$

Наведемо основні властивості логічних зв'язок.

1. Комутативність $\vee$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$P \vee Q = Q \vee P;$$

$$P \& Q = Q \& P;$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P;$$

$$P \oplus Q = Q \oplus P.$$

2. Асоціативність $\vee$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R);$$

$$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R);$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R);$$

$$(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R).$$

3. Дистрибутивність $\vee$ відносно $\&$ та $\&$ відносно $\vee$:

$$(P \vee Q) \& R = (P \& R) \vee (Q \& R);$$

$$(P \& Q) \vee R = (P \vee R) \& (Q \vee R).$$

4. Зняття подвійного заперечення:

$$\neg \neg P = P.$$

5. Ідемпотентність $\vee$ та $\&$:

$$P = P \vee P;$$

$$P = P \& P.$$

6. Закони поглинання:

$$P \& (P \vee Q) = P;$$

$$(P \& Q) \vee P = P.$$

7. Закон контрапозиції:

$$P \rightarrow Q = (\neg Q) \rightarrow (\neg P).$$

8. Закони де Моргана:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \& \neg Q;$$

$$\neg(P \& Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

9. Зведення $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ до $\neg$, $\vee$ та $\&$:

$$P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q;$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P) = ((\neg P) \vee Q) \& ((\neg Q) \vee P);$$

$$P \oplus Q = ((\neg P) \& Q) \vee ((\neg Q) \& P).$$

Композиції $\neg$ та $\vee$ будемо називати *базовими пропозиційними композиціями*.

У цьому випадку композиції $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ є *похідними*, вони виражаються, згідно із властивостями 8 та 9, через базові пропозиційні композиції $\neg$ та $\vee$.

Мова пропозиційної логіки. Для точного дослідження предикатів та висловлень на пропозиційному рівні треба ввести *мову пропозиційної логіки* (мову ПЛ).

Алфавіт мови ПЛ: символи логічних зв'язок $\neg$, $\vee$ та нескінченна множина Ps пропозиційних символів (імен, змінних).

Правильно побудовані вирази мови ПЛ називають *пропозиційними формулами* (ПФ). Для запису ПФ виберемо *префіксну* (польську) форму, коли символ операції передує аргументам.

Множину всіх ПФ позначимо Fp .

Дамо індуктивне визначення ПФ:

- 1) кожний $A \in Ps$ є ПФ; такі ПФ назвемо *атомарними*;
- 2) якщо Φ та Ψ є ПФ, то $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ є ПФ.

Для бінарних операцій звичніше користуватися *інфіксною* формою, коли символ операції записується між аргументами, але тоді потрібні додаткові символи – дужки "(" і ")". Записи формул в інфіксній формі вважаємо скороченнями ПФ. У записах скорочень ПФ будемо також уживати символи похідних пропозиційних композицій $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$.

Наприклад, вираз $\neg(\Phi\vee\Psi)$ – скорочення "справжньої" ПФ $\neg\vee\Phi\Psi$; вирази $\Phi\&\Psi$, $\Phi\rightarrow\Psi$ та $\Phi\leftrightarrow\Psi$ – це, відповідно, скорочення ПФ $\neg\vee\neg\Phi\neg\Psi$, $\vee\neg\Phi\Psi$ та $\neg\vee\neg\vee\neg\Phi\Psi\neg\vee\neg\Psi\Phi$.

Для зменшення кількості дужок у скороченнях ПФ задамо в порядку спадання такий пріоритет символів логічних зв'язок: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Уведемо правило розставлення дужок справа наліво. Наприклад, $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow\neg A\vee D$ означає $A\rightarrow(B\rightarrow(C\rightarrow((\neg A)\vee D)))$.

Скорочення ПФ надалі також називатимемо ПФ.

Розглянемо традиційну інтерпретацію ПФ за допомогою істиннісних оцінок.

Часткова істиннісна оцінка мови – це довільне відображення $v: Ps \rightarrow \{T, F\}$.

Таке ν продовжимо до $\nu : Fr \rightarrow \{T, F\}$. Для цього задамо:

$$\nu(\neg\Phi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } \nu(\Phi) = F, \\ F, & \text{якщо } \nu(\Phi) = T, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } \nu(\Phi) \uparrow. \end{cases}$$

$$\nu(\vee\Phi\Psi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } \nu(\Phi) = T \text{ або } \nu(\Psi) = T, \\ F, & \text{якщо } \nu(\Phi) = F \text{ та } \nu(\Psi) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Повна істиннісна оцінка мови – це довільне тотальне відображення $\tau : Ps \rightarrow \{T, F\}$.

Таке відображення продовжимо до $\tau : Fr \rightarrow \{T, F\}$ так, як це зроблено для ν .

Повну істиннісну оцінку мови традиційно називають просто істиннісною оцінкою.

Теорема 2.1.1. Нехай істиннісна оцінка ρ є розширенням істиннісної оцінки ν : для всіх $p \in Ps$ маємо $\nu(p) \downarrow \Rightarrow \rho(p) \downarrow = \nu(p)$. Тоді для кожної $\Psi \in Fr$ маємо: $\nu(\Psi) \downarrow \Rightarrow \rho(\Psi) \downarrow = \nu(\Psi)$.

Тавтології. Це істинні формули мови ПЛ.

Формула Ψ є *тавтологією*, якщо $\tau(\Psi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ .

Це означає: ПФ Ψ є тавтологією, якщо Ψ істинна на кожному наборі значень її пропозиційних символів.

Твердження 2.1.1. Φ є тавтологією $\Leftrightarrow$ для кожної істиннісної оцінки ν маємо: $\nu(\Phi) = T$ або $\nu(\Phi)$ невизначене.

Наслідок 2.1.1. Якщо Φ – не тавтологія, то $\nu(\Phi) = F$ для деякої істиннісної оцінки ν .

Формула Ψ є *суперечністю*, якщо $\tau(\Psi) = F$ для кожної істиннісної оцінки τ .

Це означає: ПФ Ψ є суперечністю, якщо Ψ хибна на кожному наборі значень її пропозиційних символів.

Зрозуміло, що Φ тавтологія $\Leftrightarrow \neg\Phi$ суперечність.

Кожна ПФ із множиною пропозиційних символів X задає певну X -арну функцію на двоелементній множині $\{0, 1\}$, тобто *булеву функцію*. З іншого боку, кожна X -арна булева функція задається деякою ПФ, причому для цієї булевої функції множина таких ПФ нескінченна.

Кожна тавтологія задає тотальну булеву функцію, що набуває тільки значення 1, тобто константу 1.

Кожна суперечність задає тотальну булеву функцію, що набуває тільки значення 0, тобто константу 0.

Тавтології називають *законами пропозиційної логіки*.

Деякі тавтології мають власні назви.

Приклад 2.1.1. Основоположні закони логіки виражають такі тавтології:

- закон тотожності: $P \leftrightarrow P$;
- закон виключеного третього (*tertium non datur*): $(\neg P) \vee P$;
- закон суперечливості (*lex contradictionis*): $\neg(P \& (\neg P))$.

Приклад 2.1.2. Законами пропозиційної логіки є записані мовою ПЛ основні властивості пропозиційних композицій.

1. Закони комутативності для $\vee$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P;$$

$$P \& Q \leftrightarrow Q \& P;$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P);$$

$$P \oplus Q \leftrightarrow Q \oplus P.$$

2. Закони асоціативності для $\vee$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$:

$$(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R);$$

$$(P \& Q) \& R \leftrightarrow P \& (Q \& R);$$

$$((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R));$$

$$((P \oplus Q) \oplus R) \leftrightarrow (P \oplus (Q \oplus R)).$$

3. Закони дистрибутивності для $\vee$ та $\&$:

$$(P \vee Q) \& R \leftrightarrow (P \& R) \vee (Q \& R);$$

$$(P \& Q) \vee R \leftrightarrow (P \vee R) \& (Q \vee R).$$

4. Закон зняття подвійного заперечення:

$$\neg \neg P \leftrightarrow P.$$

5. Закони ідемпотентності для $\vee$ та $\&$:

$$P \leftrightarrow P \vee P;$$

$$P \leftrightarrow P \& P.$$

6. Закони поглинання:

$$P \& (P \vee Q) \leftrightarrow P;$$

$$(P \& Q) \vee P \leftrightarrow P.$$

7. Закон контрапозиції:

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P).$$

8. Закони де Моргана:

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \ \& \ \neg Q;$$

$$\neg(P \ \& \ Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q.$$

Відношення логічного наслідку та логічної еквівалентності. На множині ПФ введемо:

– відношення логічного (тавтологічного) наслідку $|\models_t$;

– відношення логічної (тавтологічної) еквівалентності $\sim_t$.

Формула Ψ є *логічним (тавтологічним) наслідком* формули Φ (позначаємо $\Phi |\models_t \Psi$), якщо формула $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Формули Φ та Ψ *логічно (тавтологічно) еквівалентні* (позначаємо $\Phi \sim_t \Psi$), якщо $\Phi |\models_t \Psi$ та $\Psi |\models_t \Phi$.

Формула Ψ є *логічним (тавтологічним) наслідком множини формул* $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, що позначимо $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} |\models_t \Psi$, якщо $\Phi_1 \ \& \ \dots \ \& \ \Phi_n |\models_t \Psi$.

Замість $\emptyset |\models_t \Psi$ писатимемо $|\models_t \Psi$.

Приклад 2.1.3. Основні властивості відношень $|\models_t$ та $\sim_t$:

1) відношення $|\models_t$ рефлексивне і транзитивне;

2) відношення $\sim_t$ рефлексивне, транзитивне і симетричне;

3) Φ тавтологія $\Leftrightarrow |\models_t \Phi$;

4) $\Phi \sim_t \Psi \Leftrightarrow |\models_t \Phi \Leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi \Leftrightarrow \Psi$ тавтологія.

Множина ПФ $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ *суперечлива*, якщо кон'юнкція $\Phi_1 \ \& \ \dots \ \& \ \Phi_n$ – суперечність.

Твердження 2.1.2. $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} |\models_t \Psi \Leftrightarrow \{\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg \Psi\}$ суперечлива.

Поняття логічного наслідку поширимо на довільні множини формул.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – деякі множини формул.

Для спрощення замість $\{\Phi\} \cup \Gamma$ будемо писати Φ, Γ або Γ, Φ .

Δ є *логічним (тавтологічним) наслідком* Γ (позн. $\Gamma |\models_t \Delta$), якщо для кожної істиннісної оцінки $\tau: Fr \rightarrow \{T, F\}$ із того, що $\tau(\Phi) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$, випливає $\tau(\Psi) = T$ для деякої $\Psi \in \Delta$.

Звідси $\Gamma \not\models_t \Delta \Leftrightarrow$ існує істиннісна оцінка $\tau: Fr \rightarrow \{T, F\}$ така:

$\tau(\Phi) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та $\tau(\Psi) = F$ для всіх $\Psi \in \Delta$.

Відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивне, але не транзитивне.

Справді, очевидно $\Delta \models_t \Delta$, але із $\Gamma \models_t \Delta$ та $\Delta \models_t \Sigma$ не має впливати $\Gamma \models_t \Sigma$. Останнє засвідчує такий приклад.

Приклад 2.1.4. $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \models_t \{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\}$ та $\{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\} \models_t \Psi$, водночас маємо $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \not\models_t \Psi$.

Розглянемо властивості відношення $\models_t$ для множин формул.

Приклад 2.1.5. Властивість гарантованої наявності логічного наслідку:

C) якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, то $\Gamma \models_t \Delta$.

Приклад 2.1.6. Властивість монотонності:

M) нехай $\Gamma \models_t \Delta$, $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$; тоді $\Lambda \models_t \Sigma$.

Приклад 2.1.7. Властивості декомпозиції формул:

$\neg_L$) $\neg \Phi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma \models_t \Delta, \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_t \Delta$;

$\vee_L$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_t \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models_t \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma \models_t \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Phi, \Psi$;

$\&_L$) $\Phi \& \Psi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models_t \Delta$;

$\&_R$) $\Gamma \models_t \Delta, \Phi \& \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Phi$ та $\Gamma \models_t \Delta, \Psi$;

$\rightarrow_L$) $\Phi \rightarrow \Psi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Phi$ та $\Psi, \Gamma \models_t \Delta$;

$\rightarrow_R$) $\Gamma \models_t \Delta, \Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_t \Delta, \Psi$;

$\leftrightarrow_L$) $\Phi \leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models_t \Delta$ та $\Gamma \models_t \Delta, \Phi, \Psi$;

$\leftrightarrow_R$) $\Gamma \models_t \Delta, \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_t \Delta, \Psi$ та $\Psi, \Gamma \models_t \Delta, \Phi$.

Властивості $\neg_L$, $\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, у яких фігурують тільки базові композиції, назвемо базовими властивостями декомпозиції формул на пропозиційному рівні.

Визначальною особливістю традиційної логіки є принцип заміни еквівалентних (заміни рівних). Це означає можливість заміни еквівалентних (заміни рівних) компонент, незважаючи на контексти. Принцип заміни еквівалентних засвідчує екстенсіональний характер традиційної логіки. Утіленням цього принципу в логіці є теореми еквівалентності та заміни еквівалентних.

Теорема 2.1.2 (еквівалентності ПЛ). Нехай Φ' отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_t \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim_t \Psi_n$, то $\Phi \sim_t \Phi'$.

Теорема 2.1.3 (заміни еквівалентних ПЛ). Нехай $\Phi \sim_t \Psi$. Тоді $\Phi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_t \Delta$ та $\Gamma \models_t \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Psi$.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення логічних зв'язок (пропозиційних композицій) $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, \oplus$.
2. Як виражаються $\&, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$ через $\neg$ та $\vee$?
3. Дайте індуктивне визначення ПФ.
4. Як задається пріоритет символів логічних зв'язок у скороченнях ПФ?
5. Дайте визначення часткової істиннісної оцінки та повної істиннісної оцінки мови ПЛ.
6. Що таке тавтологія? Наведіть приклади тавтологій.
7. Що таке суперечність? Наведіть приклади суперечностей.
8. Наведіть тавтології, які виражають основні закони традиційної логіки.
9. Запишіть основні властивості пропозиційних композицій.
10. Дайте визначення відношення $\models_t$ логічного (тавтологічного) наслідку для формул.
11. Дайте визначення відношення $\sim_t$ логічної (тавтологічної) еквівалентності формул.
12. Дайте визначення відношення логічного наслідку зі скінченної множини формул.
13. Укажіть основні властивості відношень $\models_t$ та $\sim_t$.
14. Що таке суперечлива множина формул?
15. Дайте визначення відношення $\models_t$ логічного наслідку для множин формул.
16. Укажіть основні властивості відношення $\models_t$ для множин формул.
17. Сформулюйте теорему еквівалентності ПЛ.
18. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних ПЛ.

Вправи

1. Доведіть, що наведені у прикладі 2.1.2 закони ПЛ є тавтологіями.

2. Доведіть твердження 2.1.2.

3. Доведіть наведені у прикладі 2.1.3 властивості відношень $\models$ та $\sim$.

4. Доведіть наведені у прикладі 2.1.5 властивості відношення $\models$ для множин формул.

5. З'ясуйте, чи правильними є такі твердження:

1) якщо диз'юнкція двох формул є тавтологією, то кожна із цих формул є тавтологією;

2) якщо кон'юнкція двох формул є тавтологією, то кожна із цих формул є тавтологією;

3) якщо імплікація двох формул є тавтологією, то кожна із цих формул є тавтологією;

4) якщо еквіваленція двох формул є тавтологією, то кожна із цих формул є тавтологією.

Відповідь аргументуйте.

6. З'ясуйте, чи є такі ПФ тавтологіями:

1) $(A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C)$;

2) $A \vee B \& C \rightarrow A \vee B \& \neg C \rightarrow A$;

3) $(N \rightarrow M) \& (D \rightarrow R) \rightarrow \neg M \vee \neg (D \rightarrow \neg N) \& \neg R$;

4) $A \rightarrow B \& C \rightarrow \neg C \vee \neg B \rightarrow \neg A$;

5) $A \rightarrow M \vee D \rightarrow D \rightarrow A \& M \leftrightarrow B \& D$;

6) $A \vee B \& \neg A \vee C \& B \vee C \rightarrow \neg A \& C$;

7) $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow \neg (A \& C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow C \vee B$;

8) $B \vee C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \vee A$;

9) $((C \rightarrow \neg A \& B) \rightarrow D) \rightarrow D \& \neg C \& (B \rightarrow A)$;

10) $A \vee B \& C \rightarrow (A \vee B) \& (\neg C \rightarrow A)$;

11) $(A \& \neg B \rightarrow G \& D) \rightarrow (\neg D \rightarrow G \vee (B \rightarrow \neg A))$;

12) $(A \rightarrow B) \& B \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow B \& C$;

13) $(A \vee \neg B \rightarrow C) \& (\neg A \& B \rightarrow A) \rightarrow C \& (B \rightarrow A)$;

14) $(A \rightarrow B) \& C \rightarrow (C \rightarrow A) \rightarrow B \& C$.

7. З'ясуйте, чи правильно:

1) $\{A, A \rightarrow B\} \models B$;

2) $\{B, A \rightarrow B\} \models A$;

- 3) $\{\neg A, A \rightarrow B\} \models_t \neg B$;
- 4) $\{\neg B, A \rightarrow B\} \models_t \neg A$;
- 5) $\{A \vee B, \neg A \vee C\} \models_t B \vee C$;
- 6) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee D\} \models_t B \vee C$;
- 7) $\{A \rightarrow C, B \rightarrow D, A \vee B\} \models_t D \& C$;
- 8) $\{A \vee B \rightarrow C \rightarrow D, \neg A \& \neg B\} \models_t C \& \neg D$;
- 9) $\{A \vee B, B \rightarrow C, \neg A \vee \neg C\} \models_t \neg A \vee D$;
- 10) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, B \vee \neg D\} \models_t \neg A \vee \neg C$;
- 11) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \vee C \rightarrow B \vee D$;
- 12) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& C \rightarrow B \& D$;
- 13) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \vee C \rightarrow B \& D$;
- 14) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& C \rightarrow B \vee D$;
- 15) $A \& D \rightarrow B \vee C \models_t (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \vee (D \rightarrow B)$;
- 16) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D\} \models_t \neg A \vee \neg C$.

8. З'ясуйте, у якому відношенні щодо $\models_t$ перебувають ПФ $A \& B \rightarrow C \& D$, $A \vee B \rightarrow C \& D$, $A \& B \rightarrow C \vee D$, $A \vee B \rightarrow C \vee D$.

9. Розставте дужки в наведених нижче формулах, щоб вони стали тавтологіями:

- 1) $A \rightarrow B \vee \neg A \& B$;
- 2) $\neg A \& \neg B \rightarrow C \vee D \vee \neg \neg A \vee B \rightarrow C$.

10. Знайдіть, якщо це можливо, ПФ Ψ таку, щоб зазначена нижче ПФ була тавтологією:

- 1) $(\Psi \& A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \Psi)$;
- 2) $((C \rightarrow \neg A \& B) \rightarrow \Psi) \rightarrow \Psi \& C \& (B \rightarrow A)$;
- 3) $(A \& \neg B \rightarrow \Psi) \rightarrow (\neg \Psi \vee (B \rightarrow \neg A))$;
- 4) $(A \rightarrow \Psi \& (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg \Psi \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow \Psi \& C)$;
- 5) $A \& B \vee C \& \Psi \rightarrow (B \vee \Psi) \& (A \vee C)$;
- 6) $((\Psi \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow A \rightarrow \Psi)) \vee (\neg B \rightarrow \Psi \rightarrow C)$.

2.2. Пропозиційне числення

Аксіоматичні системи гільбертівського типу базуються на запропонованому Д. Гільбертом понятті формальної системи. Такі аксіоматичні системи пропозиційної логіки називають пропозиційними численнями, або численнями висловлень.

Пропозиційне числення (ПЧ) – це формальна система (L, Ax, P) , де L – мова ПЛ, Ax – множина аксіом ПЧ, P – множина правил виведення ПЧ.

Множина Ax задається єдиною схемою аксіом $\neg\Phi\vee\Phi$, тобто Ax складається з усіх ПФ вигляду $\neg\Phi\vee\Phi$, які назвемо *пропозиційними аксіомами*.

Множина P складається із таких правил виведення:

П1) $\Phi \vdash \Psi\vee\Phi$ – правило розширення;

П2) $\Phi\vee\Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення;

П3) $\Phi\vee(\Psi\vee\Xi) \vdash (\Phi\vee\Psi)\vee\Xi$ – правило асоціативності;

П4) $\Phi\vee\Psi, \neg\Phi\vee\Xi \vdash \Psi\vee\Xi$ – правило перетину.

Теоремою ПЧ називають формулу, яка виводиться із пропозиційних аксіом за допомогою правил виведення П1–П4.

Те, що формула Φ – теорема, позначатимемо $\vdash \Phi$.

Різні варіанти ПЧ можуть відрізнятися мовами та наборами аксіом і правил виведення (див., напр., [7]).

Висновки правил П1–П4 є тавтологічними наслідками засновків. Пропозиційна аксіома – тавтологія, тому кожна теорема ПЧ – тавтологія. Отже, має місце *теорема коректності* ПЛ.

Теорема 2.2.1. Кожна теорема ПЧ є тавтологією.

Виразні можливості ПЧ можна розширити введенням похідних правил виведення.

Твердження 2.2.1. Якщо $\vdash A\vee B$, то $\vdash B\vee A$.

$\vdash A\vee B$ за припущенням, $\vdash \neg A\vee A$ як аксіома, тому $\vdash B\vee A$ за П4.

Твердження 2.2.2. Якщо $\vdash A$ та $\vdash A\rightarrow B$, то $\vdash B$.

$\vdash A$ за припущенням, $\vdash B\vee A$ за П1, звідки $\vdash A\vee B$. За припущенням $\vdash A\rightarrow B$, тобто $\vdash \neg A\vee B$, тому $\vdash B\vee B$ за П4, звідки $\vdash B$ за П2.

Твердження 2.2.3. Якщо $\vdash A_1, \dots, \vdash A_n$ та $\vdash A_1\rightarrow\dots\rightarrow A_n\rightarrow B$, то $\vdash B$.

Справді, застосуємо n разів твердження 2.2.2.

Твердження 2.2.4. Якщо $\vdash (A\vee B)\vee C$, то $\vdash A\vee(B\vee C)$.

Із $\vdash (A\vee B)\vee C$ за ПК $\vdash C\vee(A\vee B)$, звідки $\vdash (C\vee A)\vee B$ за П3. Далі за ПК $\vdash B\vee(C\vee A)$, за П3 маємо $\vdash (B\vee C)\vee A$. Тепер за ПК отримуємо $\vdash A\vee(B\vee C)$.

Твердження 2.2.4 та ПЗ у сукупності дають

Наслідок 2.2.1. $\vdash (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow \vdash A \vee (B \vee C)$.

Твердження 2.2.1 та 2.2.2 можна інтерпретувати як нові похідні правила виведення:

$A \vee B \vdash B \vee A$ – *правило комутативності* (скорочено ПК);

$A, A \rightarrow B \vdash B$ – *правило modus ponens* (скорочено МР).

Наслідок 2.2.1 трактуємо як узагальнене похідне правило виведення:

$A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ та $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$ – *повна асоціативність* (скорочено АС).

Розглянемо приклади виведень у пропозиційному численні.

Приклад 2.2.1. Якщо $\vdash \neg \neg A \vee B$, то $\vdash A \vee B$.

Маємо $\vdash \neg \neg A \vee A$ (аксіома), $\vdash \neg \neg A \vee B$ (умова), тому $\vdash A \vee B$ за П4.

Приклад 2.2.2. Якщо $\vdash A \vee B$, то $\vdash \neg \neg A \vee B$.

Маємо $\vdash \neg \neg A \vee \neg A$ (аксіома), тому $\vdash \neg A \vee \neg \neg A$ за ПК. Звідси та з умови $\vdash A \vee B$ за П4 маємо $\vdash B \vee \neg \neg A$, тому $\vdash \neg \neg A \vee B$ за ПК.

Приклад 2.2.3. Якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash A \rightarrow \neg B$, то $\vdash \neg A$.

Маємо $\vdash \neg A \vee B$ (умова) та $\vdash \neg A \vee \neg B$ (умова), тому за ПК $\vdash B \vee \neg A$ та $\vdash \neg B \vee \neg A$. За П4 тоді $\vdash \neg A \vee \neg A \Rightarrow \vdash \neg A$ за П2.

Приклад 2.2.4. $\vdash A \rightarrow B \rightarrow A$.

Із аксіоми $\vdash \neg A \vee A$ за ПК $\vdash A \vee \neg A$. За П1 $\vdash \neg B \vee (A \vee \neg A)$, за АС $\vdash (\neg B \vee A) \vee \neg A$, звідки за ПК маємо $\vdash \neg A \vee (\neg B \vee A)$, тобто $\vdash A \rightarrow B \rightarrow A$.

Приклад 2.2.5. $\vdash A \rightarrow \neg A \rightarrow B$.

Маємо $\vdash \neg \neg A \vee \neg A$ (аксіома), тому $\vdash \neg A \vee \neg \neg A$ за ПК. За П1 маємо $\vdash B \vee (\neg A \vee \neg \neg A)$, за ПК маємо $\vdash (\neg A \vee \neg \neg A) \vee B$, звідки за АС маємо $\vdash \neg A \vee (\neg \neg A \vee B)$, тобто $\vdash A \rightarrow \neg A \rightarrow B$.

Приклад 2.2.6. Якщо $\vdash A \vee B$, то $\vdash A \vee C \vee B$.

Маємо $\vdash A \vee B$ (умова) $\vdash B \vee A$ (за ПК) $\vdash C \vee (B \vee A)$ (за П1) $\vdash (C \vee B) \vee A$ (за АС) $\vdash A \vee (C \vee B)$ (за ПК).

Приклад 2.2.7. Якщо $\vdash A \vee B$, то $\vdash \neg A \rightarrow C \vee B$.

Маємо $\vdash A \vee B$ (умова) $\vdash \neg \neg A \vee B$ (за прикладом 2.2.1)
 $\vdash B \vee \neg \neg A$ (за ПК) $\vdash C \vee (B \vee \neg \neg A)$ (за П1) $\vdash (C \vee B) \vee \neg \neg A$ (за АС)
 $\vdash \neg \neg A \vee (C \vee B)$ (за ПК), тобто $\vdash \neg A \rightarrow C \vee B$.

Приклад 2.2.8. Якщо $\vdash A \rightarrow B \rightarrow C$ та $\vdash B$, то $\vdash A \rightarrow C$.

Маємо $\vdash \neg A \vee \neg B \vee C$ (умова) $\vdash (\neg B \vee C) \vee \neg A$ (за ПК)
 $\vdash \neg B \vee (C \vee \neg A)$ (за АС); звідси та з $\vdash B$ (умова) маємо $\vdash C \vee \neg A$ за
MP $\vdash \neg A \vee C$ (за ПК), тобто $\vdash A \rightarrow C$.

Приклад 2.2.9. Якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash B \rightarrow C$, то $\vdash A \rightarrow C$.

Маємо $\vdash \neg A \vee B$ (умова) $\vdash B \vee \neg A$ (за ПК); звідси та з $\vdash \neg B \vee C$
(умова) маємо $\vdash \neg A \vee C$ за П4, тобто $\vdash A \rightarrow C$.

Приклад 2.2.10. Якщо $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$, то $\vdash A \vee C$.

Із аксіоми $\vdash \neg A \vee A$ за ПК $\vdash A \vee \neg A$. За П1 $\vdash B \vee (A \vee \neg A)$, за АС
 $\vdash (B \vee A) \vee \neg A$, за ПК $\vdash \neg A \vee (B \vee A)$, за АС $\vdash (\neg A \vee B) \vee A$; звідси та
з $\vdash \neg (\neg A \vee B) \vee C$ (умова) за П4 маємо $\vdash A \vee C$.

Приклад 2.2.11. Якщо $\vdash A \vee A \vee B$, то $\vdash A \vee B$.

Маємо $\vdash A \vee (A \vee B)$ (умова) $\vdash (A \vee B) \vee A$ (за ПК) $\vdash B \vee ((A \vee B) \vee A)$
(за П1) $\vdash ((A \vee B) \vee A) \vee B$ (за ПК) $\vdash (A \vee B) \vee (A \vee B)$ (за АС) $\vdash A \vee B$
(за П2).

Приклад 2.2.12. Якщо $\vdash A \vee B \vee A \vee C$, то $\vdash B \vee A \vee C$.

ПФ $B \vee A \vee C$ позначимо X . З умови $\vdash A \vee X$ за ПК $\vdash X \vee A$. За
П1 $\vdash C \vee (X \vee A)$, за АС $\vdash (C \vee X) \vee A$, звідки $\vdash A \vee (C \vee X)$ за ПК. За
АС $\vdash (A \vee C) \vee X$, за П1 $\vdash B \vee ((A \vee C) \vee X)$; за АС $\vdash (B \vee (A \vee C)) \vee X$,
тобто $\vdash XX$. Тепер за П2 $\vdash X$, тобто $\vdash B \vee A \vee C$.

Приклад 2.2.13. Якщо $\vdash A \vee B \vee C$, то $\vdash A \vee C \vee B$.

Маємо $\vdash A \vee (B \vee C)$ (умова) $\vdash (B \vee C) \vee A$ (за ПК) $\vdash B \vee (C \vee A)$ (за
АС) $\vdash C \vee (B \vee (C \vee A))$ (за П1) $\vdash (C \vee B) \vee (C \vee A)$ (за АС)
 $\vdash (C \vee A) \vee (C \vee B)$ (за ПК) $\vdash C \vee (A \vee (C \vee B))$ (за АС) $\vdash (A \vee (C \vee B)) \vee C$
(за ПК) $\vdash B \vee ((A \vee (C \vee B)) \vee C)$ (за П1) $\vdash ((A \vee (C \vee B)) \vee C) \vee B$ (за ПК)
 $\vdash (A \vee (C \vee B)) \vee (C \vee B)$ (за АС) $\vdash (C \vee B) \vee (A \vee (C \vee B))$ (за ПК)
 $\vdash A \vee ((C \vee B) \vee (A \vee (C \vee B)))$ (за П1) $\vdash (A \vee (C \vee B)) \vee (A \vee (C \vee B))$ (за
АС) $\vdash (A \vee (C \vee B))$ (за П2).

Властивість ПФ бути тавтологією трактується як її семантична істинність, властивість бути теоремою – як синтаксична істинність. Адекватність семантичної та синтаксичної істинності, тобто *повноту* логічних засобів ПЧ, засвідчує *теорема тавтології* (скорочено ТТ).

Теорема 2.2.2 (тавтології). Кожна тавтологія є теоремою.

У ПЛ теорему тавтології часто об'єднують із теоремою коректності. У розширеному вигляді ТТ для ПЧ записується так:

Теорема 2.2.3. Множина теорем ПЧ збігається із множиною тавтологій.

Наслідок 2.2.2. Якщо $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \models_t \Phi$ та $\vdash \Phi_1, \dots, \vdash \Phi_n$, то $\vdash \Phi$.

Приклад 2.2.14. З наслідку 2.2.1, зокрема, випливають такі окремі наслідки:

- 1) $\vdash A \& B \Leftrightarrow \vdash A$ та $\vdash B$;
- 2) $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vdash \neg B \rightarrow \neg A$;
- 3) якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash B \rightarrow C$, то $\vdash A \rightarrow C$;
- 4) $\vdash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$ та $\vdash B \rightarrow A$;
- 5) якщо $\vdash A \leftrightarrow B$, то $(\vdash A \Leftrightarrow \vdash B)$.

Із ТТ випливає *несуперечливість* ПЧ:

не існує ПФ A такої, що $\vdash \neg \Psi$ та $\vdash \neg \neg \Psi$.

Справді, якщо $\vdash \neg \Psi$ та $\vdash \neg \neg \Psi$, то Ψ та $\neg \Psi$ – одночасно тавтології, що неможливо.

На основі ТТ отримуємо також *розв'язність* ПЧ.

Теорема 2.2.4. Множина теорем ПЧ алгоритмічно розв'язна відносно множини всіх ПФ.

Справді, для встановлення $\vdash \neg \Psi$ достатньо встановити, чи є Ψ тавтологією, а для цього будемо таблицю істинності для Ψ .

Розглянемо приклади виведень із використанням ТТ.

Приклад 2.2.15. Якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$, то $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee D$.

Маємо $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \vee C \rightarrow B \vee D$. Звідси і з умови $\vdash A \vee B$ та $\vdash C \rightarrow D$ за ТТ отримуємо $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee D$.

Приклад 2.2.16. Якщо $\vdash A \vee C \rightarrow B \& D$, то $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$.

Маємо $A \vee C \rightarrow B \& D \models_t (A \rightarrow B) \& (C \rightarrow D)$. Далі застосуємо ТТ.

Приклад 2.2.17. З'ясуйте, чи правильно: якщо $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee D$, то $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$.

Нехай $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee D \Rightarrow \vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$. Тоді має бути $A \vee C \rightarrow B \vee D \models (A \rightarrow B) \& (C \rightarrow D)$. При $\tau(A) = \tau(C) = \tau(D) = T$ та $\tau(B) = F$ маємо $\tau(A \vee C \rightarrow B \vee D) = T$ та $\tau((A \rightarrow B) \& (C \rightarrow D)) = F$.

Отже, з умови $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee D$ не випливає $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке пропозиційне числення?
2. Що таке пропозиційна аксіома?
3. Наведіть правила виведення пропозиційного числення.
4. Що таке теорема пропозиційного числення?
5. Сформулюйте похідне правило комутативності.
6. Сформулюйте похідне правило modus ponens.
7. Чому пропозиційне числення несуперечливе?
8. Сформулюйте теорему коректності для ПЧ.
9. Сформулюйте теорему тавтології для ПЧ.
10. Чому теорему тавтології назвали теоремою повноти ПЧ?
11. Наведіть наслідки теореми тавтології.
12. Наведіть алгоритм розв'язання ПЧ.

Вправи

1. Доведіть у пропозиційному численні без використання ТТ:

- 1) $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$;
- 2) якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash \neg A \rightarrow B$, то $\vdash B$;
- 3) $\vdash B \rightarrow A \vee B$;
- 4) $\vdash \neg A \rightarrow A \rightarrow B$;
- 5) $\vdash (\neg A \rightarrow B) \vee \neg A$;
- 6) $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vdash \neg B \rightarrow \neg A$;
- 7) якщо $\vdash A \vee B$, то $\vdash C \vee A \vee B$, $\vdash A \vee B \vee C$;
- 8) якщо $\vdash A \rightarrow C$, то $\vdash A \rightarrow B \vee C$;
- 9) $\vdash A \vee A \rightarrow A$;
- *10) $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$;
- 11) якщо $\vdash A \vee A \vee B$, то $\vdash \neg \neg A \vee B$;

- 12) якщо $\vdash A \vee B \vee C$, то $\vdash C \vee A \vee B$, $\vdash B \vee C \vee A$;
 13) якщо $\vdash A \vee B \vee C$, то $\vdash B \vee A \vee C$, $\vdash C \vee B \vee A$;
 *14) якщо $\vdash A \rightarrow C$ та $\vdash B \rightarrow C$, то $\vdash A \vee B \rightarrow C$;
 15) якщо $\vdash A \vee (B \rightarrow C)$ та $\vdash B$, то $\vdash A \vee C$;
 16) якщо $\vdash A \rightarrow B \rightarrow C$ та $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash A \rightarrow C$;
 17) якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash A \vee C \rightarrow B \vee C$;
 *18) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$;
 *19) $\vdash A \& B \rightarrow A$.
2. З'ясуйте, чи правильно: якщо $(\vdash A \Leftrightarrow \vdash B)$, то $\vdash A \Leftrightarrow B$.
3. З'ясуйте, які з наведених тверджень правильні:
- 1) якщо $\vdash A \& C \rightarrow B \& D$, то $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$;
 - 2) якщо $\vdash A \vee C \rightarrow B \& D$, то $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$;
 - 3) якщо $\vdash A \& C \rightarrow B \vee D$, то $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$;
 - 4) якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$, то $\vdash A \& C \rightarrow B \& D$;
 - 5) якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$, то $\vdash A \vee C \rightarrow B \& D$;
 - 6) якщо $\vdash A \rightarrow B$ та $\vdash C \rightarrow D$, то $\vdash A \& C \rightarrow B \vee D$.
4. З'ясуйте, які з наведених тверджень правильні:
- 1) а) якщо $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$, то $\vdash A \rightarrow C$;
 б) якщо $\vdash A \rightarrow C$, то $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$;
 - 2) а) якщо $\vdash A \rightarrow B \& C$, то $\vdash A \rightarrow B$;
 б) якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash A \rightarrow B \& C$;
 - 3) а) якщо $\vdash A \& B \rightarrow C$, то $\vdash A \rightarrow C$;
 б) якщо $\vdash A \rightarrow C$, то $\vdash A \& B \rightarrow C$;
 - 4) а) якщо $\vdash A \vee C \rightarrow B$, то $\vdash A \rightarrow B$;
 б) якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash A \vee C \rightarrow B$.

2.3. Метод резолюцій пропозиційної логіки

Метод резолюцій [20, 8, 14] є найпоширенішим методом пошуку доведень. На момент виникнення цей метод дуже добре підійшов для реалізації на тогочасних комп'ютерах, його й досі найчастіше використовують у системах пошуку доведень.

Пропозиційну формулу вигляду A або $\neg A$, де $A \in Ps$, називають *літералом* (а також *літерою*).

Таким чином, літерали (літери) – це атомарні формули чи заперечення атомарних формул.

Пропозиційну формулу, яка має вигляд диз'юнкції кількох літералів, назовемо *диз'юнктом*.

Однолітерний диз'юнкт назовемо *одиничним*.

Символ 0 трактуємо як диз'юнкт, що не має жодного літерала, – *порожній диз'юнкт*.

Порожній диз'юнкт можна інтерпретувати як суперечність – логічну константу F .

Літерали A та $\neg A$ назовемо *контрарними*.

Правило резолюції (ПР) має вигляд $D, D' \vdash R$.

Тут D та D' – диз'юнкти, причому маємо літерал L у D та контрарний йому літерал L' у D' ; R – це диз'юнкт, утворений диз'юнкцією всіх літералів D , відмінних від L , та всіх літералів D' , відмінних від L' .

Такий диз'юнкт R назовемо *резольвентою* диз'юнктів D та D' .

Тоді кажуть, що резольвента R отримана за диз'юнктами D та D' за правилом резолюцій.

Зокрема, якщо D та D' – контрарні літерали, то R – порожній диз'юнкт, тобто R – це 0.

Теорема 2.3.1. Нехай R – резольвента диз'юнктів D та D' . Тоді $\{D, D'\} \models R$.

Таким чином, правило резолюцій коректне.

Метод резолюцій ПЛ базується на зведенні формул до кон'юнктивної нормальної форми (КНФ), тобто ПФ подаємо як кон'юнкцію диз'юнктів, а далі від кон'юнкції диз'юнктів переходимо до множини диз'юнктів.

Нехай S – множина диз'юнктів.

Послідовність диз'юнктів $D_1, D_2, \dots, D_n$ – *резольутивне виведення* диз'юнкта D_n із S , якщо кожний D_i або належить до S , або отриманий із попередніх диз'юнктів цієї послідовності за допомогою ПР.

Диз'юнкт D *виводиться* із S , якщо існує резольутивне виведення D із S .

Резольутивне виведення 0 із S назовемо *спростуванням* S , або *доведенням суперечливості* множини диз'юнктів S .

Теорема 2.3.2. Множина диз'юнктивів S суперечлива $\Leftrightarrow$ існує резолютивне виведення 0 із S .

Це означає *повноту* методу резолюцій.

За твердженням 2.1.2 $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\} \models_t \Phi \Leftrightarrow \{\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi\}$ суперечлива. Нехай ПФ $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi$ мають відповідно КНФ $D_{11} \& \dots \& D_{1k_1}, \dots, D_{m1} \& \dots \& D_{mk_m}, D_{01} \& \dots \& D_{0k_0}$. Тоді маємо:

$\{\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi\}$ суперечлива $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow S = \{D_{11}, \dots, D_{1k_1}, \dots, D_{m1}, \dots, D_{mk_m}, D_{01}, \dots, D_{0k_0}\}$ суперечлива $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$ існує резолютивне виведення 0 із S .

Отже, для доведення того, що $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\} \models_t \Phi$, достатньо вказати резолютивне виведення 0 із відповідної множини диз'юнктивів $\{D_{11}, \dots, D_{1k_1}, \dots, D_{m1}, \dots, D_{mk_m}, D_{01}, \dots, D_{0k_0}\}$.

Якщо диз'юнкт D – тавтологія, то $\{D_1, \dots, D_n, D\}$ суперечлива $\Leftrightarrow \{D_1, \dots, D_n\}$ суперечлива. Тому тавтології по мірі їх появи будемо видаляти із множини диз'юнктивів.

Диз'юнкт D є тавтологією $\Leftrightarrow D$ містить контрарну пару літералів.

Розглянемо приклади резолютивних виведень.

Будемо використовувати співвідношення

$$\neg(P \vee Q) \sim_t \neg P \& \neg Q;$$

$$\neg(P \& Q) \sim_t \neg P \vee \neg Q;$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \sim_t P \& \neg Q.$$

Приклад 2.3.1. З'ясуємо, чи правильно

$$\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P\} \models_t P.$$

Виведемо 0 із $\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P, \neg P\}$.

Із $P \vee Q$ та $\neg P \vee R$ за ПП маємо $Q \vee R$.

Із $Q \vee R$ та $\neg Q \vee S$ за ПП маємо $R \vee S$.

Із $R \vee S$ та $\neg R \vee S \vee P$ за ПП маємо $S \vee P$.

Із $S \vee P$ та $\neg S \vee P$ за ПП маємо P .

Із P та $\neg P$ за ПП маємо 0.

Отже, множина $\{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee S, \neg R \vee S \vee P, \neg S \vee P, \neg P\}$ суперечлива, тому твердження про наявність $\models_t$ правильне.

Приклад 2.3.2. З'ясуємо, чи суперечлива множина

$$\{P \vee \neg Q, \neg Q \vee S \vee \neg P, \neg S, Q, R \vee S\}.$$

Спробуємо вивести 0 із зазначеної множини.

Із $P \vee \neg Q$ та $\neg Q \vee S \vee \neg P$ за ПР маємо $\neg Q \vee S$.

Із $\neg Q \vee S$ та $\neg S$ за ПР маємо $\neg Q$.

Із $\neg Q$ та Q за ПР маємо 0.

Отже, множина $\{P \vee \neg Q, \neg Q \vee S \vee \neg P, \neg S, Q, R \vee S\}$ суперечлива. Зауважимо, що для виведення 0 не використовували всі диз'юнкти множини, а саме диз'юнкт $R \vee S$.

Приклад 2.3.3. З'ясуємо, чи суперечлива множина

$\{P \vee Q, Q \vee S \vee \neg P, \neg Q\}$.

Спробуємо вивести 0 із зазначеної множини.

Із $P \vee Q$ та $\neg Q$ за ПР маємо P .

Із P та $Q \vee S \vee \neg P$ за ПР маємо $Q \vee S$.

Із $Q \vee S$ та $\neg Q$ за ПР маємо S .

Із $\neg Q$ та $Q \vee S \vee \neg P$ за ПР маємо $S \vee \neg P$.

Із $S \vee \neg P$ та $P \vee Q$ за ПР маємо $Q \vee S$.

Далі нові диз'юнкти отримати неможливо.

Для пропозиційних символів, що входять до складу диз'юнктив нашої множини, ми вивели літери P та S , маємо у множині літеру $\neg Q$ як одиничний диз'юнкт. Розглянемо таку оцінку: $\tau(P) = T$, $\tau(S) = T$, $\tau(Q) = F$. За такої оцінки всі диз'юнкти множини набувають значення T , тому множина несуперечлива.

Приклад 2.3.4. З'ясуємо, чи правильно

$\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models A \vee C \rightarrow B \vee D$.

Маємо $\neg(A \vee C \rightarrow B \vee D) \sim_t (A \vee C) \& \neg(B \vee D) \sim_t (A \vee C) \& \neg B \& \neg D$.

Спробуємо вивести 0 із $\{\neg A \vee B, \neg C \vee D, A \vee C, \neg B, \neg D\}$.

Із $\neg A \vee B$ та $\neg B$ за ПР маємо $\neg A$.

Із $\neg C \vee D$ та $\neg D$ за ПР маємо $\neg C$.

Із $\neg A$ та $A \vee C$ за ПР маємо C .

Із C та $\neg C$ за ПР маємо 0.

Отже, множина $\{\neg A \vee B, \neg C \vee D, A \vee C, \neg B, \neg D\}$ суперечлива, тому твердження про наявність $\models_t$ правильне.

Приклад 2.3.5. З'ясуємо, чи правильно

$\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models A \vee B \rightarrow C \vee D$.

Маємо $\neg(A \vee B \rightarrow C \vee D) \sim_t (A \vee B) \& \neg(C \vee D) \sim_t (A \vee B) \& \neg C \& \neg D$.

Спробуємо вивести 0 із $\{\neg A \vee B, \neg C \vee D, A \vee B, \neg C, \neg D\}$.

Із $\neg A \vee B$ та $A \vee B$ за ПР маємо B .

Із $\neg C \vee D$ та $\neg D$ за ПР маємо $\neg C$.

Далі нові диз'юнкти отримати неможливо.

Розглянемо таку оцінку: $\tau(B) = T$, $\tau(C) = F$, $\tau(D) = F$; $\tau(A)$ можна задати довільно. За такої оцінки всі диз'юнкти множини набувають значення T , тому множина несуперечлива, звідки твердження про наявність $\models$ спростоване.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке літерал?
2. Що таке диз'юнкт?
3. Що таке контрарні літерали?
4. Як інтерпретуємо порожній диз'юнкт?
5. Що таке резольвента диз'юнктів?
6. Як формулюється правило резолюції?
7. У чому полягає коректність правила резолюції?
8. Що таке резолютивне виведення?
9. Що таке спростування множини диз'юнктів?
10. У чому полягає повнота методу резолюцій?

Вправи

1. Використовуючи метод резолюцій пропозиційної логіки, з'ясуйте, чи правильно:

- 1) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C\} \models B \vee D$;
- 2) $\{A \vee B, B \rightarrow C, \neg A \vee \neg C\} \models \neg A \vee D$;
- 3) $\{B \rightarrow A, C \rightarrow D, B \& \neg D\} \models A \& \neg C$;
- 4) $\{A \rightarrow C, B \rightarrow D, A \vee B\} \models D \& C$;
- 5) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee D \& C\} \models \neg A \vee \neg C$;
- 6) $\{\neg A \rightarrow B, Q \rightarrow D, \neg B \vee \neg D\} \models A \vee \neg Q$;
- 7) $\{A \rightarrow C, \neg D \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models \neg C \rightarrow D$;
- 8) $\{A \vee B \vee C, \neg A \vee C, \neg B\} \models \neg C$;
- 9) $\{A \vee B \vee C, \neg A \vee C, \neg B\} \models C$;
- 10) $\{A \vee B \rightarrow C \rightarrow D, \neg A \& \neg B\} \models C \& \neg D$;

- 11) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D\} \models_t \neg A \vee \neg C$;
- 12) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& D \rightarrow B \vee C$;
- 13) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& C \rightarrow B \& D$;
- 14) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \vee C \rightarrow B \& D$;
- 15) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& C \rightarrow B \vee D$;
- 16) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \& B \rightarrow C \vee D$.

2. Використовуючи метод резолюцій пропозиційної логіки, з'ясуйте, у якому відношенні щодо $\models$ перебувають ПФ:

$$A \& B \rightarrow C \& D, A \vee B \rightarrow C \& D, A \& B \rightarrow C \vee D, A \vee B \rightarrow C \vee D.$$

2.4. Пропозиційне секвенційне числення

Властивості декомпозиції формул (див. підрозділ 2.1) дозволяють звести відношення логічного наслідку для множин формул із виділеною складною формулою до відношень логічного наслідку для множин формул із компонентами цієї складної формули. Це дуже важлива властивість *підформульності*.

Формально-аксіоматичні системи, які формалізують відношення логічного наслідку між двома множинами формул, називають *секвенційними численнями*. Основними об'єктами таких систем є секвенції, роль правил виведення грають секвенційні форми.

У класичному, генценівському варіанті [5, 6, 18], секвенціями називають об'єкти вигляду $\Gamma \rightarrow \Delta$, де Γ та Δ – скінченні множини формул, $\rightarrow$ – новий символ, що не входить до алфавіту мови.

У цьому посібнику ми будемо розглядати форму запису секвенцій за допомогою специфікованих формул, подібну до форми запису семантичних таблиць Бета [6, 8].

Секвенції будемо трактувати як множини специфікованих формул. Це означає, що кожна формула секвенції має вигляд $\vdash \Phi$ або $\neg \Phi$, де Φ – формула мови, $\vdash$ та $\neg$ – нові символи поза алфавітом мови. Отже, кожна формула секвенції відзначена (специфікована) ліворуч одним із двох символів – $\vdash$ чи $\neg$.

Така форма запису секвенцій узгоджується із формою запису логічного наслідку для множин формул. Формулу, яка міститься

в лівій множині відношення логічного наслідку, відзначаємо символом $\vdash$ та називаємо $\vdash$ -формулою; формулу, яка міститься у правій множині цього відношення, відзначаємо символом $\dashv$ та називаємо $\dashv$ -формулою.

Для відношення логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$ (для ПЛ $\models$ – це $\models_t$) відповідну секвенцію позначаємо $\vdash \Gamma \dashv \Delta$.

Тут Γ – це множина $\vdash$ -формул, Δ – множина $\dashv$ -формул.

Не деталізуючи, секвенції специфікованих формул також позначаємо Σ .

Секвенційне числення будується таким чином:

секвенція $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ вивідна $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Секвенція Σ замкнена, якщо існує формула Φ : $\vdash \Phi \in \Sigma$ та $\dashv \Phi \in \Sigma$.

Замкненість секвенції $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ означає $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

Проте з умови $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ випливає $\Gamma \models \Delta$, тому замкнені секвенції грають роль аксіом.

Семантичним властивостям відношення логічного наслідку зіставимо синтаксичні аналоги – *секвенційні форми*. Такі форми є правилами виведення секвенційних числень.

Секвенційні форми записуємо у вигляді $\frac{\Sigma}{\Omega}$ або $\frac{\Sigma}{\Omega}$.

Тут Σ, Λ, Ω – секвенції.

Секвенції над ризикою називають засновками, секвенції під ризикою – висновками.

У нас засновки – це секвенції, зіставлені правим частинам відповідних властивостей відношення логічного наслідку, висновки – це секвенції, зіставлені їхнім лівим частинам.

Згідно із властивостями $\neg_L, \neg_R, \vee_L, \vee_R$ введемо такі базові секвенційні форми:

$$\begin{array}{l} \vdash \neg \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}; \qquad \neg \neg \frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg A, \Sigma}; \\ \vdash \vee \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}; \qquad \neg \vee \frac{\vdash A, \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}. \end{array}$$

На базі властивостей відношення $\models_t$ отримуємо основну властивість секвенційних форм.

Теорема 2.4.1. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді:

a) $\Lambda \models_i K \Leftrightarrow \Gamma \models_i \Delta$;

b) $\Gamma \not\models_i \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models_i K$.

2. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K \quad \vdash X \vdash Z}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді:

a) $\Lambda \models_i K$ та $X \models_i Z \Leftrightarrow \Gamma \models_i \Delta$;

b) $\Gamma \not\models_i \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models_i K$ або $X \not\models_i Z$.

На базі властивостей $\rightarrow_L$, $\rightarrow_R$, $\&_L$, $\&_R$ відношення $\models_i$ можна додатково ввести похідні секвенційні форми $\vdash \rightarrow$, $\vdash \rightarrow$, $\vdash \&$, $\vdash \&$:

$$\begin{array}{c} \vdash \rightarrow \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \rightarrow B, \Sigma} \qquad \vdash \rightarrow \frac{\vdash A, \vdash B, \Sigma}{\vdash A \rightarrow B, \Sigma} \\ \vdash \& \frac{\vdash A, \vdash B, \Sigma}{\vdash A \& B, \Sigma} \qquad \vdash \& \frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \& B, \Sigma} \end{array}$$

Виведення у секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають *секвенційними*.

Демо індуктивне визначення секвенційного дерева.

1. Секвенція Σ утворює *тривіальне* секвенційне дерево з єдиною вершиною Σ , яка є коренем дерева.

2. Нехай α – секвенційне дерево з коренем Σ , β – секвенційне дерево з коренем Υ , нехай $\frac{\Sigma}{\Omega}$ та $\frac{\Sigma \quad \Upsilon}{\Omega}$ – секвенційні форми.

Тоді $\frac{\alpha \quad \beta}{\Omega}$ та $\frac{\alpha \quad \beta}{\Omega}$ – секвенційні дерева з коренем Ω .

Тривіальне секвенційне дерево *замкнене*, якщо це замкнена секвенція.

Нетривіальне секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист (кінцева вершина, відмінна від кореня) – замкнена секвенція.

Секвенційне дерево з коренем Σ називають також секвенційним деревом секвенції Σ .

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ . Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ .

Опишемо процедуру побудови виведення для заданої *скінченної* секвенції Σ .

Побудова дерева починається з кореня дерева Σ , у процесі побудови від складніших формул переходимо до простіших, тому секвенційні форми застосовуємо від висновків до засновків.

Секвенції ми трактуємо як *множини* специфікованих формул, тому повтори формул у секвенціях неможливі: якщо в результаті виконання форми отримуємо специфіковану формулу, яка вже є в секвенції, то таку формулу-копію до секвенції не заносимо.

Побудова секвенційного дерева розбита на етапи. Опишемо етап виведення для певної незамкненої секвенції-листа η .

На початку етапу активізуємо всі неатомарні формули секвенції η . До кожної активної формули далі застосуємо відповідну секвенційну форму.

Після застосування секвенційної форми утворені нею формули стають *пасивними*, до таких формул на цьому етапі секвенційні форми не застосовуються.

Після виконання всіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист Ω на замкненість.

Якщо всі листи збудованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево і побудова виведення завершена *позитивно*.

Якщо у збудованому дереві є листи – незамкнені секвенції, то для кожного такого листа продовжуємо виведення так, як описано вище.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) побудову завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) побудову завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево; у такому дереві існує шлях, усі вершини якого є незамкненими секвенціями, – незамкнений шлях.

Побудову секвенційного дерева для зліченної секвенції опишемо нижче для загальнішого випадку першопорядкових секвенційних числень.

Теорема 2.4.2 (коректності). Якщо секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна, то $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 2.4.3 (про контрмодель). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існує істиннісна оцінка $\tau: Fr \rightarrow \{T, F\}$ така:

- 1) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \tau(\Phi) = T$;
- 2) $\neg \Phi \in H \Rightarrow \tau(\Phi) = F$.

Таку істиннісну оцінку τ називають *контрмоделлю* для секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$.

Звідси маємо теорему повноти секвенційних числень.

Теорема 2.4.4. Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна.

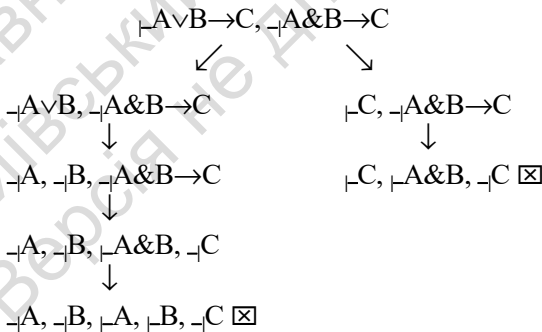
Побудову секвенційних дерев зручніше вести зверху-вниз, тоді секвенційні форми записуємо в перевернутому вигляді: висновки – над ризикою, засновки – під ризикою.

Нагадаємо, що при побудові дерева секвенційні форми застосуємо від висновків до засновків.

Замкнені секвенції відмічаємо символом $\boxtimes$.

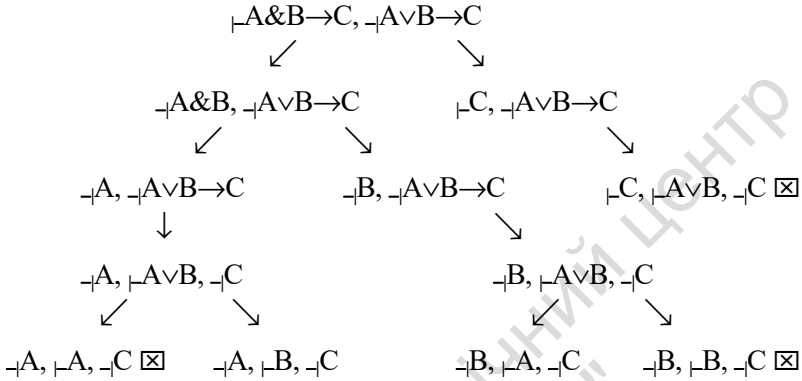
Зауважимо, що побудова в секвенційному численні виведення *формули* Φ означає побудову виведення *секвенції* $\neg \Phi$.

Приклад 2.4.1. Для встановлення $A \vee B \rightarrow C \models_i A \& B \rightarrow C$ побудуємо виведення секвенції $\vdash A \vee B \rightarrow C, \neg A \& B \rightarrow C$.



Ми збудували замкнене секвенційне дерево, тому маємо $A \vee B \rightarrow C \models_i A \& B \rightarrow C$.

Приклад 2.4.2. Для встановлення $A \& B \rightarrow C \models_t A \vee B \rightarrow C$ побудуємо виведення секвенції $\vdash A \& B \rightarrow C, \neg A \vee B \rightarrow C$.



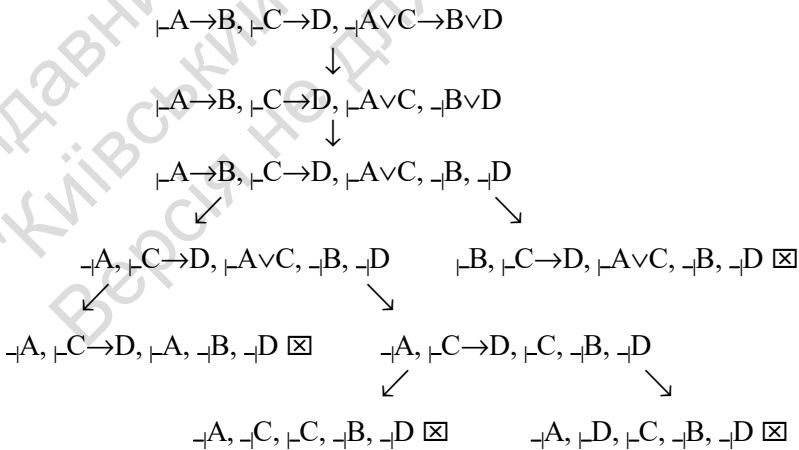
Отримали незамкнене секвенційне дерево, тому спростували $A \& B \rightarrow C \models_t A \vee B \rightarrow C$.

За двома незамкненими листами можна отримати два контр-прикладі:

$$\tau(A) = F, \tau(B) = T, \tau(C) = F;$$

$$\tau(A) = T, \tau(B) = F, \tau(C) = F.$$

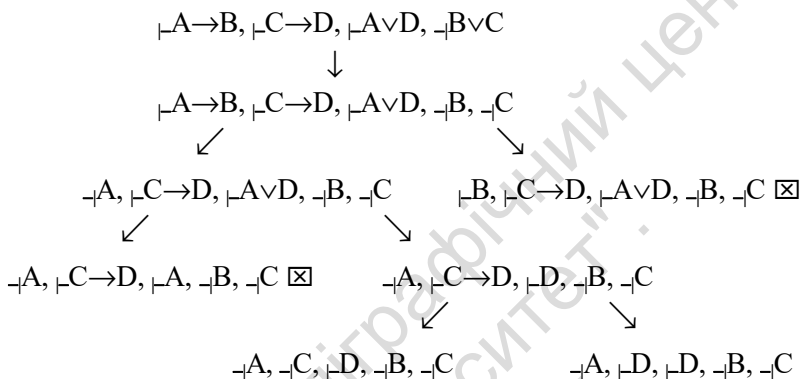
Приклад 2.4.3. Для встановлення правильності $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_t A \vee C \rightarrow B \vee D$ побудуємо виведення секвенції $\vdash A \rightarrow B, \vdash C \rightarrow D, \neg A \vee C \rightarrow B \vee D$.



Ми збудували замкнене секвенційне дерево, тому маємо $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_i A \vee C \rightarrow B \vee D$.

Приклад 2.4.4. Для встановлення правильності

$\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee D\} \models_i B \vee C$ побудуємо виведення секвенції $\vdash A \rightarrow B, \vdash C \rightarrow D, \vdash A \vee D, \neg B \vee C$.



Ми отримали незамкнене секвенційне дерево, тому спрости-
вали $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee D\} \models_i B \vee C$.

За двома незамкненими листами можна отримати такі два контрприкладі:

$$\tau(A) = F, \tau(B) = F, \tau(C) = F, \tau(D) = T;$$

$$\tau(A) = F, \tau(B) = F, \tau(C) = F, \tau(D) = T.$$

Фактично це один і той самий контрприклад.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає властивість підформульності?
2. Що таке секвенційне числення?
3. Дайте визначення секвенції відзначених (специфікованих) формул.
4. Що таке замкнена секвенція?
5. Що таке секвенційна форма?
6. Що таке засновки та висновки секвенційних форм?

7. Укажіть базові секвенційні форми пропозиційного рівня.
8. Укажіть похідні секвенційні форми пропозиційного рівня.
9. Сформулюйте теорему про основну властивість секвенційних форм.
10. Що таке секвенційне дерево?
11. Дайте визначення замкненого секвенційного дерева.
12. Дайте визначення вивідної секвенції.
13. Опишіть побудову секвенційного дерева.
14. Що таке замкнений шлях; незамкнений шлях?
15. Сформулюйте теорему коректності для секвенційних числень.
16. Сформулюйте теорему повноти для секвенційних числень.

Вправи

1. На основі властивостей $\leftrightarrow_L$ та $\leftrightarrow_R$ відношення $\models$, введіть похідні секвенційні форми $\vdash \leftrightarrow$ та $\vdash \nleftrightarrow$.

2. Збудуйте у пропозиційному секвенційному численні виведення чи доведіть його відсутність, указавши контрмодель, для таких формул:

- 1) $(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- 2) $(A \rightarrow B \& C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- 3) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)$;
- 4) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A \vee B)$;
- 5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$;
- 6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \& C \rightarrow A)$;
- 7) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)$;
- 8) $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$;
- 9) $((A \rightarrow C) \rightarrow D) \& \neg D \rightarrow A \& \neg C$;
- 10) $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \& (A \rightarrow D) \rightarrow \neg A$;
- 11) $(A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$;
- 12) $((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow (A \rightarrow C) \& (D \rightarrow B)$.

3. Використовуючи пропозиційне секвенційне числення, установіть, чи правильно:

- 1) $\{A \vee B, \neg A \vee C\} \models_i B \vee C$;
- 2) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_i A \& C \rightarrow B \& D$;
- 3) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_i A \vee C \rightarrow B \& D$;
- 4) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \models_i A \& C \rightarrow B \vee D$;
- 5) $\{A \vee B, B \rightarrow C, \neg A \vee \neg C\} \models_i \neg A \vee D$;
- 6) $\{A \vee B \rightarrow C \rightarrow D, \neg A \& \neg B\} \models_i \& \neg D$;
- 7) $\{A \rightarrow C, B \rightarrow D, A \vee B\} \models_i D \& C$;
- 8) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D\} \models_i \neg A \vee \neg C$;
- 9) $A \& D \rightarrow B \vee C \models_i (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \vee (D \rightarrow B)$.

3. ЛОГІКИ НОМІНАТИВНИХ РІВНІВ. РЕНОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ

На номінативних рівнях предикати задаються на номінативних даних – номінатах. Далі розглядатимемо однорівневі однозначні номінати – іменні множини. Це множина пар: перша компонента – ім'я, друга – значення цього імені. При цьому одне ім'я не може іменувати два різних значення. Функції, зокрема предикати, задані на ІМ, називаються *квазіарними*. Поняття квазіарної функції виникає тоді, коли множина її аргументів наперед не фіксована.

3.1. Квазіарні функції та предикати

Іменні множини. Нехай V та A – довільні множини, які будемо відповідно трактувати як множину предметних імен (змінних) та множину предметних (базових) значень.

V - A -іменна множина (V - A -ІМ) – це однозначна функція вигляду $\delta : V \rightarrow A$.

Якщо V та A маємо на увазі, то V - A -ІМ називаємо просто іменною множиною (ІМ).

ІМ будемо подавати у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n, \dots]$.

Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

У записі $[v_1 \mapsto f_1(d), \dots, v_n \mapsto f_n(d), \dots]$ указуємо тільки ті компоненти $v_i \mapsto f_i(d)$, для яких $f_i(d) \downarrow$.

Поняття ІМ дуже об'ємне. Файли, послідовності, n -ки природно трактувати як ІМ. Поняття індексованої множини можна вважати синонімом поняття ІМ.

Для V - A -ІМ вводимо функцію $asn : {}^V A \rightarrow 2^V$:

$$asn(\delta) = D_\delta = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta \text{ для деякого } a \in A\}$$

V - A -ІМ δ *максимальна*, або *V -повна*, якщо $asn(\delta) = V$.

Максимальні V - A -ІМ – це тотальні однозначні функції $V \rightarrow A$.

Множину всіх таких V - A -ІМ будемо позначати A^V .

Множину всіх $\delta \in {}^V A$ таких, що $asn(\delta) = X$, де $X \subseteq V$, позначатимемо A^X .

Такі ІМ є тотальними однозначними функціями із X в A .

ІМ δ скінченна, або фінітна, якщо $asn(\delta)$ скінченна.

Множину всіх фінітних V - A -ІМ позначатимемо ${}^V A_F$.

Множини фінітних ІМ $L \subseteq A^{\{x_1, \dots, x_n\}}$ та $M \subseteq A^{\{y_1, \dots, y_n\}}$ назвемо еквівалентними відносно іменування базових значень, або *name*-еквівалентними, якщо для всіх $a_1, \dots, a_n \in A$ маємо

$$[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n] \in L \Leftrightarrow [y_1 \mapsto a_1, \dots, y_n \mapsto a_n] \in M.$$

Базою *name*-еквівалентних ІМ вигляду $L \subseteq A^{\{x_1, \dots, x_n\}}$ назвемо множину n -к $S \subseteq A^n$ таку:

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \mid [x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n] \in L\}.$$

Для ІМ уведемо традиційні теоретико-множинні операції $\cup$, $\cap$ та $\setminus$. Операції $\cap$ та $\setminus$ над ІМ діють без обмежень. Водночас операція $\cup$ над ІМ – часткова.

Приклад 3.1.1. $[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \cap [x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 4] = [y \mapsto 2]$.

$$[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \setminus [x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 4] = [v \mapsto 0, x \mapsto 1].$$

$[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \cup [x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 4]$ не дає однозначної ІМ.

$$[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \cup [x \mapsto 1, z \mapsto 4] = [v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 4].$$

Уведемо параметричну операцію $\parallel_X$ звуження V - A -ІМ за множиною $X \subseteq V$:

$$\delta \parallel_X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X\}.$$

Поширимо $\parallel_X$ на множини ІМ:

$$M \parallel_X = \{\delta \parallel_X \mid \delta \in M\}.$$

Уведемо параметричну операцію $\parallel_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$:

$$\delta \parallel_{-X} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \notin X\} = \delta \parallel (V \setminus X).$$

Далі замість $\delta \parallel_{-\{z\}}$ та $\delta \parallel_{-\{x, \dots, z\}}$ писатимемо $\delta \parallel_{-z}$ та $\delta \parallel_{-x, \dots, z}$.

Приклад 3.1.2. $[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \parallel \{x, y, z\} = [x \mapsto 1, y \mapsto 2];$
 $[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \parallel_{-x, y, z} = [v \mapsto 0].$

На множині ІМ задамо відношення $=_z$ рівності з точністю до компоненти з іменем z :

$$d =_z h, \text{ якщо } d \parallel_{-z} = h \parallel_{-z}.$$

Задамо відому [2, 9, 11] операцію ∇ накладання ІМ d на ІМ h :

$$h \nabla d = d \cup (h \parallel_{-asn(d)}).$$

Операція ∇ монотонна за першим аргументом:

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \nabla \delta \subseteq \beta \nabla \delta.$$

Приклад 3.1.3.

$$[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \nabla [x \mapsto 3, z \mapsto 4] = [x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 4, v \mapsto 0].$$

$$[v \mapsto 0, x \mapsto 1, y \mapsto 2] \nabla [x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 4] = [x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 4, v \mapsto 0].$$

Параметричну операцію реномінації $r^{[v_1 \mapsto x_1, \dots, v_n \mapsto x_n]} : V^A \rightarrow V^A$, де всі $v_i, x_i \in V$, задамо так:

$$r^{[v_1 \mapsto x_1, \dots, v_n \mapsto x_n]}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), \dots, v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \parallel_{-v_1, \dots, v_n}).$$

Якщо тут $\delta(x_i) \uparrow$, то компонента з іменем v_i відсутня.

Таку $r^{[v_1 \mapsto x_1, \dots, v_n \mapsto x_n]}$ далі позначатимемо $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}$.

Замість $y_1, \dots, y_n$ також скорочено писатимемо $\bar{y}$.

Тоді замість $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}$ можна писати $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Маємо властивість елімінації тотожних перейменувань:

$$r_{\bar{z}, \bar{x}}^{\bar{z}, \bar{v}}(d) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d).$$

Операція $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ монотонна: $\delta_1 \subseteq \delta_2 \Rightarrow r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta_1) \subseteq r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta_2)$.

Окремим випадком операції $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ є операція r із відсутніми парами імен. Тракуємо її як тотожне відображення на V^A .

Послідовне застосування двох операцій реномінації $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назовемо згортою операцій $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ і позначимо $r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \bullet r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$.

Нехай маємо послідовне застосування двох операцій реномінації $r_{s_1, \dots, s_l, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k}$ та $r_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m}$, де $\{w_1, \dots, w_m\} \cap \{u_1, \dots, u_k\} = \emptyset$. Тоді для кожного $d \in {}^V A$ маємо

$$r_{s_1, \dots, s_l, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k} (r_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m} (d)) = r_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k} (d),$$

де кожні a_i та b_j задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i, & \text{якщо } x_i \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l, & \text{якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l, \\ z_l, & \text{якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j, & \text{якщо } y_j \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l, & \text{якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l, \\ z_l, & \text{якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l. \end{cases}$$

Операцію $r_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k}$ назовемо *згортою операцій* $r_{s_1, \dots, s_l, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k}$ (внутрішня, застосовується першою) та $r_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m}$ (зовнішня); будемо її позначати $r_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m} \bullet r_{s_1, \dots, s_l, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_k}$.

У скороченому вигляді згортку операцій $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (зовнішня) та $r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ (внутрішня) позначатимемо $r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \bullet r_{\bar{y}}^{\bar{u}}$.

Приклад 3.1.4. Згортка реномінацій неасоціативна:

$$r_x^x (r_y^y (d)) = r_y^{x \bullet y} (d) = r_{x, x}^{x, y} (d) = r_x^y (d) \Rightarrow r_x^x \bullet r_y^y = r_x^y;$$

$$r_x^y (r_y^x (d)) = r_x^{y \bullet x} (d) = r_{y, y}^{y, x} (d) = r_y^x (d) \Rightarrow r_x^y \bullet r_y^x = r_y^x.$$

Приклад 3.1.5. Маємо

$$\begin{aligned} r_{y, u}^{x, y} (r_{v, u}^{x, y} (d)) &= r_{y, u}^{x, y} (d \parallel_{-y, z} \cup [y \mapsto d(v), z \mapsto d(u)]) = \\ &= h \parallel_{-x, y} \cup [x \mapsto h(y), y \mapsto h(u)] = \\ &= (d \parallel_{-x, y, z} \cup [z \mapsto d(u)]) \cup [x \mapsto d(u), y \mapsto d(u)] = r_{v, u, u}^{x, y, z} (d), \end{aligned}$$

де $h = d \parallel_{-y, z} \cup [y \mapsto d(v), z \mapsto d(u)]$. Звідси $r_{y, u}^{x, y} \bullet r_{v, u}^{y, z} = r_{v, u, u}^{x, y, z}$.

Приклад 3.1.6. $r_{y,b,v}^{x,a,u}(r_{c,z,u}^{a,y,v}(d)) = r_{z,b,u,z,u}^{x,a,u,y,v}(d) = r_{z,b,z,u}^{x,a,y,v}(d) \Rightarrow$
 $\Rightarrow r_{y,b,v}^{x,a,u} \cdot r_{c,z,u}^{a,y,v} = r_{z,b,u,z,u}^{x,a,u,y,v} = r_{z,b,z,u}^{x,a,y,v}.$

Для стислості коми в списках імен реномінації далі можемо не писати.

Квазіарні функції та предикати. Функції, задані на ІМ, називають квазіарними.

Функцію вигляду $f: {}^V A \rightarrow R$ назвемо *V-A-квазіарною*.

Функцію вигляду $f: {}^V A_F \rightarrow R$ назвемо *V-A-фінарною*.

Функцію вигляду $f: A^X \rightarrow R$ назвемо *X-арною*.

Зауважимо, що традиційні *n*-арні функції вигляду $f: A^n \rightarrow R$ можуть трактуватися як $\{1, \dots, n\}$ -арні.

Квазіарна функція *f* повнототальна, якщо $f(d) \downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Квазіарна функція *f* монотонна, якщо: $d \subseteq d' \Rightarrow f(d) \subseteq f(d')$.

Для однозначних квазіарних функцій монотонність означає еквітонність – збереження вже прийнятого значення при розширенні даних.

Однозначна квазіарна функція *f* еквітонна, якщо

$$f(d) \downarrow \text{ та } d \subseteq d' \Rightarrow f(d') \downarrow = f(d).$$

V-квазіарна функція на *A* – це функція вигляду $f: {}^V A \rightarrow A$.

Надалі розглядатимемо лише однозначні *V*-квазіарні функції на *A*. Клас таких функцій будемо позначати Fn^{V-A} . Якщо множини *V* маємо на увазі, то замість Fn^{V-A} також пишемо Fn^A .

Клас еквітонних *V*-квазіарних функцій на *A* будемо позначати FnE^{V-A} . Клас повнототальних еквітонних *V*-квазіарних функцій на *A* будемо позначати FnC^{V-A} .

V-*A*-квазіарний предикат, або *V*-квазіарний предикат на *A* – це часткова неоднозначна, узагалі кажучи, функція вигляду $Q: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$.

Ім'я $z \in V$ строго неістотне для квазіарної функції (предиката) *g*, якщо $g(d_1) = g(d_2)$ для всіх $d_1, d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$.

Це рівносильно твердженню: для всіх $d \in {}^V A$, $a, b \in A$ маємо

$$g(d \nabla x \mapsto a) = g(d \nabla x \mapsto b) = g(d \parallel_{-x}).$$

Ім'я *z* слабо неістотне для квазіарної функції (предиката) *g*, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) \cong g(d_2)$.

Це рівносильно твердженню: для всіх $d \in {}^V A$, $a, b \in A$ маємо
 $g(d \nabla x \rightarrow a) \equiv g(d \nabla x \rightarrow b)$ та $g(d \nabla x \rightarrow a) \equiv g(d \parallel_{-x})$.

Ім'я x слабо неістотне для *еквітонної* функції (предиката) g , якщо $g(d \nabla x \rightarrow a) \equiv g(d \nabla x \rightarrow b)$ для довільних $d \in {}^V A$ та $a, b \in A$.

Кожний квазіарний предикат $Q : {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ однозначно задається двома множинами:

- область істинності $T(Q) = \{d \in {}^V A \mid Q(d) \downarrow = T\}$;
- область хибності $F(Q) = \{d \in {}^V A \mid Q(d) \downarrow = F\}$.

Квазіарний предикат Q *однозначний*, або P -предикат, якщо
 $T(Q) \cap F(Q) = \emptyset$.

Квазіарний предикат Q *тотальний*, або T -предикат, якщо
 $T(Q) \cup F(Q) = {}^V A$.

Клас V - A -квазіарних предикатів позначатимемо Pr^{V-A} .

Якщо множину V маємо на увазі, то замість Pr^{V-A} також скорочено пишемо Pr^A .

Клас V - A -квазіарних P -предикатів позначаємо PrP^{V-A} , скорочено PrP^A .

Клас V - A -квазіарних T -предикатів позначаємо PrT^{V-A} , скорочено PrT^A .

Надалі в першу чергу будемо розглядати клас P -предикатів.

Клас V - A -квазіарних *еквітонних* P -предикатів позначаємо $PrPE^{V-A}$, скорочено $PrPE^A$.

Клас V - A -квазіарних *еквітонних повнототальних* P -предикатів позначаємо $PrPC^{V-A}$, скорочено $PrPC^A$.

Квазіарний предикат $Q : {}^V A \rightarrow \{T, F\}$ назвемо:

- *неспростовним*, або *частково істинним*, якщо $F(Q) = \emptyset$;
- *виконуваним*, якщо $T(Q) \neq \emptyset$;
- *усюди невизначеним* (позн. $\perp$), якщо $T(Q) = F(Q) = \emptyset$;
- *тотожно істинним* (позн. T), якщо $T(Q) = {}^V A$ і $F(Q) = \emptyset$;
- *тотожно хибним* (позн. F), якщо $T(Q) = \emptyset$ і $F(Q) = {}^V A$.

Маємо такі константні квазіарні P -предикати: $\perp$, T , F .

Неспростовність та виконуваність природно пов'язані.

Твердження 3.1.1. Q неспростовний $\Leftrightarrow \neg Q$ невиконуваний.

Справді, предикат Q неспростовний $\Leftrightarrow F(Q) = \emptyset \Leftrightarrow T(\neg Q) = \emptyset \Leftrightarrow \neg Q$ невиконуваний.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення V - A -іменної множини. Наведіть приклади іменних множин.
2. Що таке максимальна (V -повна) V - A -іменна множина?
3. Що таке *pate*-еквівалентні множини фінітних ІМ?
4. Визначте базу *pate*-еквівалентних множин фінітних ІМ.
5. Які ви знаєте операції над іменними множинами?
6. Дайте визначення операції накладання ∇ для ІМ.
7. Дайте визначення операції реномінації для ІМ.
8. Дайте визначення операції згортки реномінацій.
9. Чому операція згортки реномінацій некомутативна?
10. Що таке V - A -квазіарна функція; V - A -фінарна функція?
11. Що таке X -арна функція; n -арна функція?
12. Дайте визначення повнототальної квазіарної функції.
13. Дайте визначення монотонної квазіарної функції.
14. Дайте визначення еквітонної квазіарної функції.
15. Що таке V -квазіарна функція на A ?
16. Що таке V - A -квазіарний предикат?
17. Дайте визначення строго неістотного предметного імені для квазіарної функції.
18. Дайте визначення слабо неістотного предметного імені для квазіарної функції.
19. Що таке область істинності та область хибності V - A -квазіарного предиката?
20. Що таке однозначний квазіарний предикат; тотальний квазіарний предикат?
21. Дайте визначення:
 - неспростовного квазіарного предиката;
 - виконуваного квазіарного предиката;
 - усюди невизначеного квазіарного предиката;
 - тотожно істинного квазіарного предиката;
 - тотожно хибного квазіарного предиката.
22. Які ви знаєте константні однозначні квазіарні предикати?

Вправи

1. Доведіть, що операція згортки реномінацій асоціативна.
2. Знайдіть такі згортки операцій реномінації:

$$1) r_{yx}^{xy} \bullet_{zy}^{yz};$$

$$2) r_{zy}^{yz} \bullet_{yx}^{xy};$$

$$3) r_{uv}^{xy} \bullet_{wx}^{yz};$$

$$4) r_{wu}^{xz} \bullet_{zx}^{wy};$$

$$5) r_{vu}^{xy} \bullet_{yzxz}^{xyzu};$$

$$6) r_{zwx}^{xyv} \bullet_{jxs}^{xyz};$$

$$7) r_{vu}^{xy} \bullet_{zyz}^{yxv} \bullet_{xxy}^{zyx};$$

$$8) r_{sz}^{xy} \bullet_{wxu}^{xzv} \bullet_{yzxz}^{xyzu};$$

3.2. Композиційні системи квазіарних функцій та предикатів

Композиція реномінації. Найабстрактнішими серед логік номінативного рівня є реномінативні. Починаючи із цього рівня, можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації.

Нехай F_n – множина V -квазіарних функцій вигляду ${}^V A \rightarrow R$.

Параметризована за множиною пар імен 1-арна композиція реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}: F_n \rightarrow F_n$ кожній функції f зіставляє функцію

$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)$, значення якої для кожного $d \in {}^V A$ задається так:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)(d) = f(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Розписуючи детально операцію реномінації, отримуємо:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(f)(d) = f([v_1 \mapsto d(x_1), \dots, v_n \mapsto d(x_n)] \cup d \upharpoonright_{-v_1, \dots, v_n}).$$

Зокрема, композиція реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}: Pr^{V-A} \rightarrow Pr^{V-A}$ кожному предикату P зіставляє предикат $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, значення якого для кожного $d \in {}^V A$ задається так:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Множиною базових композицій логік реномінативного рівня є $CR = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\}$.

Композицію $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ можна задати через області істинності та хибності предиката $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$:

$$T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\};$$

$$F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\}.$$

Окремим випадком композиції реномінації є композиція R із відсутніми перейменуваннями – тотожна реномінація. Трактуюмо її як тотожне відображення $Pr^{V-A} \rightarrow Pr^{V-A}$.

Композиція реномінації асоціативна та некомутативна.

Це впливає із відповідної властивості операції реномінації.

Твердження 3.2.1. За умови $z \notin \{\bar{x}, y\}$ ім'я $z \in V$ (строого) неістотне для $R_{\bar{x}, y}^{\bar{v}, z}(P)$.

Справді, при $z \notin \{\bar{x}, y\}$ маємо:

$$d_1 =_{-z} d_2 \Rightarrow r_{\bar{x}, y}^{\bar{v}, z}(d_1) = r_{\bar{x}, y}^{\bar{v}, z}(d_2) \Rightarrow R_{\bar{x}, y}^{\bar{v}, z}(P)[d_1] = R_{\bar{x}, y}^{\bar{v}, z}(P)[d_2].$$

Результатом послідовного виконання двох композицій $R_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ (застосовується першою) та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (застосовується другою) є композиція реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$, яка визначається так:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)[d] = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))[d] = P[r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)].$$

Тоді маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))[d] = R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)[r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)] = P[r_{\bar{y}}^{\bar{w}}(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))] = P[r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)].$$

Композиція $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ називається *згорткою* композицій реномінації $R_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Теорема 3.2.1. Маємо такі основні властивості композиції реномінації:

R) $R(P) = P$ – елімінація тотожної реномінації;

RI) $R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(p) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ – згортка тотожної пари імен;

RU) $R_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ за умови $z \in V$ (строого) неістотне для P ;

$R \neg) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – $R \neg$ -дистрибутивність;

$R \vee) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$ – $R \vee$ -дистрибутивність.

Аналогічно записуються властивості $R \rightarrow$, $R \&$, $R \leftrightarrow$.

$RR) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$ – згортка реномінацій.

Предикати рівності. На реномінативно-екваційному рівні додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності.

Можна розглядати два різновиди таких предикатів:

– предикати строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$;

– предикати слабкої рівності $=_{xy}$.

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задамо через їхні області істинності й хибності:

$$T(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow = d(y) \downarrow\};$$

$$F(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow \neq d(y) \downarrow\};$$

$$T(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow = d(y) \downarrow\} \cup \{d \in {}^V A \mid d(x) \uparrow \text{ та } d(y) \uparrow\};$$

$$F(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow \neq d(y) \downarrow\} \cup \\ \cup \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow, d(y) \uparrow \text{ або } d(x) \uparrow, d(y) \downarrow\}.$$

Множиною базових композицій реномінативних логік зі слабкою рівністю є $CR_{=} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, =_{xy}\}$.

Множиною базових композицій реномінативних логік зі строгою рівністю є $CR_{\equiv} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \equiv_{xy}\}$.

Множиною строго неістотних для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ предметних імен є $V \setminus \{x, y\}$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, монотонні й еквітонні.

Водночас предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й нееквітонні:

Приклад 3.2.1. $\equiv_{xy}([z \rightarrow a] = T, \equiv_{xy}([z \rightarrow a, x \rightarrow a]) = F$, проте $\equiv_{xy}([z \rightarrow a, x \rightarrow a, y \rightarrow a,]) = T$.

Твердження 3.2.2. Маємо такі основні властивості предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$:

– кожний предикат $=_{xx}$ є неспростовним;

– кожний предикат $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним;

– для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлексивність та симетричність: для кожного $d \in {}^V A$

$$=_{xy}(d) = =_{xy}(d) \text{ та } \equiv_{xy}(d) = \equiv_{xy}(d);$$

– для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо транзитивність: для кожного $d \in {}^V A$

$$\equiv_{xy}(d) = T \text{ та } \equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T.$$

Водночас для $=_{xy}$ транзитивності за окремими даними немає.

Приклад 3.2.2. Для $d = [x \mapsto a, z \mapsto b]$, де $a \neq b$, маємо $=_{xy}(d) \uparrow$, $=_{yz}(d) \uparrow$, $=_{xz}(d) = F$.

Це означає: $=_{xy}$ та $=_{yz}$ на такому d неспростовні, водночас $=_{xz}$ на такому d хибний.

Для предикатів $\equiv_{xy}$ маємо очевидну властивість заміни рівних: для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V A$

$$\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow R_{\bar{z}, x}^{\bar{u}, v}(P)(d) = R_{\bar{z}, y}^{\bar{u}, v}(P)(d).$$

Для предикатів $=_{xy}$ заміни рівних за окремими даними немає.

Приклад 3.2.3. Для $d = [x \mapsto a, z \mapsto b]$ маємо $=_{xy}(d) \uparrow$, тому значення x та y слабо рівні. Задамо

$$P([x \mapsto a, z \mapsto b, y \mapsto a]) = T, P([x \mapsto a, z \mapsto b]) = F, \text{ тоді отримаємо } R_x^v(P)(d) = T, R_y^v(P)(d) = F.$$

Композиція суперпозиції. На функціональних рівнях за допомогою функцій можна формувати нові аргументи для функцій і предикатів. Це дає змогу ввести параметризовану за іменами композицію суперпозиції.

$(n+1)$ -арна композиція *суперпозиції* $S^{v_1, \dots, v_n}$ квазіарним функціям $f, g_1, \dots, g_n$ зіставляє квазіарну функцію $S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)$, значення якої для кожного $d \in {}^V A$ обчислюється так:

$$\begin{aligned} S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)(d) &= \\ &= f([v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)] \cup (d \parallel (\bigwedge \{v_1, \dots, v_n\}))). \end{aligned}$$

Виділення квазіарних функцій на A та квазіарних предикатів на A індукує виділення суперпозицій двох типів:

- $(Fn^A)^{n+1} \rightarrow Fn^A$ функцій у функції (результатом є функція);
- $Pr^A \times (Fn^A)^n \rightarrow Pr^A$ функцій у предикати (результатом є предикат).

Суперпозицію без параметрів S трактуємо як тотожне відображення.

Можливість формувати нові значення за допомогою функцій буде неповною без можливості одержувати з ІМ базові предметні значення за вказаним іменем. Тому на функціональних рівнях дуже природний вигляд має задання множини спеціальних 0-арних композицій – *функцій деномінації* $Nf^d = \{ 'v | v \in V \}$.

Функція деномінації (розіменування) $'v$ задається так:

$$'v(d) = d(v).$$

Композиції реномінації можна промодельовувати за допомогою композицій суперпозицій та функцій деномінації:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(f) = S^{v_1, \dots, v_n}(f, 'x_1, \dots, 'x_n).$$

Множиною базових композицій логік безкванторно-функціонального рівня є $CF = \{ \neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x \}$.

Теорема 3.2.2. Маємо основні властивості композиції суперпозиції (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$):

SI) Елімінація суперпозиції без параметрів: $S(\varphi) = \varphi$.

S $\neg$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\neg$:

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f}).$$

S $\vee$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\vee$:

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f}).$$

Аналогічно записуємо властивості дистрибутивності суперпозиції щодо $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$.

SS) Згортка суперпозицій (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$, позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ відповідно для $u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_k; r_1, \dots, r_k; w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_m; s_1, \dots, s_m$):

$$\begin{aligned} S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\varphi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) &= \\ = S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\varphi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})). \end{aligned}$$

CN) Згортка імен (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n}(\varphi, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\varphi, g_1, \dots, g_n).$$

Зокрема, $S^{x_1, \dots, x_m}(\varphi, 'x_1, \dots, 'x_m) = \varphi$.

SD) Згортка неістотних імен для функцій деномінації:

$$S^{v_1, \dots, v_n}('x, g_1, \dots, g_n) = 'x \text{ за умови } x \notin \{ \bar{v} \}.$$

DF) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(x, f, g_1, \dots, g_n) = f.$$

Зокрема, маємо $S^x(x, f) = f$.

CU) Згортка за неістотним іменем (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$):

за умови x строго неістотне для φ маємо:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\varphi, f, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\varphi, g_1, \dots, g_n).$$

Зокрема, тоді маємо $S^x(\varphi) = \varphi$.

За умови x слабко неістотне для φ маємо:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\varphi, f, g_1, \dots, g_n) \simeq S^{v_1, \dots, v_n}(\varphi, g_1, \dots, g_n).$$

Зокрема, маємо $S^x(\varphi, f) \simeq \varphi$.

Композиції рівності. Функціональні рівні мають вигляд певною мірою недовершених, якщо за можливості формувати нові предметні значення та видобувати такі значення із даного за вказаним іменем вони не матимуть можливостей ототожнювати й розрізняти предметні значення. Для явної реалізації таких можливостей доцільно ввести спеціальні *композиції рівності* вигляду $Fn^A \times Fn^A \rightarrow Pr^A$. Це означає перехід до *функціональних рівнів із рівністю*, або *функціонально-екваційних рівнів*.

Можна розглядати два різновиди композиції рівності:

- слабкої (з точністю до визначеності) рівності $\equiv$;
- строгої (точної) рівності $\equiv$.

Композиції $\equiv$ та $\equiv$ задаються так:

$$\begin{aligned} \equiv(f, g)(d) &= \begin{cases} T, \text{ якщо } f(d) \downarrow \text{ та } g(d) \downarrow \text{ та } f(d) = g(d), \\ F, \text{ якщо } f(d) \downarrow \text{ та } g(d) \downarrow \text{ та } f(d) \neq g(d), \\ \text{невизначене, якщо } f(d) \uparrow \text{ або } g(d) \uparrow. \end{cases} \\ \equiv(f, g)(d) &= \begin{cases} T, \text{ якщо } (f(d) \downarrow, g(d) \downarrow \text{ та } f(d) = g(d)) \\ \text{або } (f(d) \uparrow \text{ та } g(d) \uparrow), \\ F, \text{ якщо } (f(d) \downarrow, g(d) \downarrow, f(d) \neq g(d)) \text{ або} \\ (f(d) \downarrow, g(d) \uparrow) \text{ або } (f(d) \uparrow, g(d) \downarrow). \end{cases} \end{aligned}$$

Множиною базових композицій безкванторно-функціональних логік зі слабкою рівністю є $CF_{=} = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, =\}$.

Множиною базових композицій безкванторно-функціональних логік зі строгою рівністю є $CF_{\equiv} = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, \equiv\}$.

Композиції суперпозиції та $=$ зберігають монотонність і еквітонність квазіарних функцій та предикатів.

Водночас композиція $\equiv$ монотонність і еквітонність не зберігає.

Замість (f, g) та $\equiv(f, g)$ також традиційно пишемо $f=g$ та $f\equiv g$.

Далі вважаємо $P \in Pr^A$ та $h, f, f_1, \dots, f_n, g, g_1, \dots, g_n \in Fn^A$.

Теорема 3.2.3. Маємо такі основні властивості слабкої рівності:

Rf) рефлексивність: кожен предикат $f=f$ неспростовний;

Sm) симетричність: $T(f=g) = T(g=f)$ та $F(f=g) = F(g=f)$;

звідки $f=g \Leftrightarrow g=f$;

Tr) транзитивність: $f=g \ \& \ g=h \Rightarrow f=h$;

більш того: $T(f=g) \cap T(g=h) \subseteq T(f=h)$;

EF) $f_1 = g_1 \ \& \dots \ \& \ f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(h, g_1, \dots, g_n)$;

EP) $f_1 = g_1 \ \& \dots \ \& \ f_n = g_n \Rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(P, f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(P, g_1, \dots, g_n)$;

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$S^{v_1, \dots, v_n}((f, h), f_1, \dots, f_n) = (S^{v_1, \dots, v_n}(f, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n))$.

Із Tr отримуємо: неспростовним є кожен предикат вигляду $=(f, g) \ \& \ =(g, h) \rightarrow =(f, h)$.

Зауважимо, що композиція еквіваленції $\leftrightarrow$ для предикатів є аналогом відношення слабкої рівності для функцій.

Теорема 3.2.4. Маємо основні властивості строгої рівності:

Rfs) кожен предикат вигляду $f\equiv f$ тотожно істинний;

Sms) $f\equiv g \Leftrightarrow g\equiv f$;

Trs) $d \in T(f\equiv g)$ та $d \in T(g\equiv h) \Rightarrow d \in T(f\equiv h)$;

EsF) $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предикат $S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n) \equiv S^{v_1, \dots, v_n}(h, g_1, \dots, g_n)$ тотожно істинний;

EsP) $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$\Rightarrow S^{v_1, \dots, v_n}(P, f_1, \dots, f_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(P, g_1, \dots, g_n)$, тобто це однако-ві предикати;

$$\begin{aligned} \text{SsE)} \quad S^{v_1, \dots, v_n}(\equiv(g, h), f_1, \dots, f_n) = \\ = \equiv(S^{v_1, \dots, v_n}(g, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n)). \end{aligned}$$

Із Trs отримуємо:

кожний предикат вигляду $\equiv(f, g) \ \& \ \equiv(g, h) \rightarrow \equiv(f, h)$ тотожно істинний.

Твердження 3.2.3. Предикати $\equiv(f, g)$ та $\equiv(g, h)$ тотожно істинні $\Rightarrow$ предикат $\equiv(f, h)$ теж тотожно істинний.

Композиції квантифікації. На *першопорядкових* рівнях можна застосовувати предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести 1-арні параметричні композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$.

Наявність композицій квантифікації є характерною особливістю першопорядкових логік.

Дамо визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$.

Предикати $\exists x(P)$ та $\forall x(P)$ позначатимемо $\exists xP$ та $\forall xP$.

Для кожного $d \in {}^V A$ задамо:

$$\begin{aligned} \exists xP(d) &= \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) \downarrow = F \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ \forall xP(d) &= \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = F, \\ T, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) \downarrow = T \text{ для всіх } a \in A, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Композиція $\forall x$ похідна, вона подається так: $\forall xP = \neg \exists x \neg P$.

Множиною базових композицій чистих першопорядкових логік (логік кванторного рівня) є $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x\}$.

Множиною базових композицій чистих першопорядкових логік зі слабкою рівністю є $CQ_{=} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x, =_{xy}\}$.

Множиною базових композицій чистих першопорядкових логік зі строгою рівністю є $CQ_{\equiv} = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$.

Множиною базових композицій першопорядкових функціональних логік є $CQF = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, \exists x\}$.

Множиною базових композицій першопорядкових функціональних логік зі слабкою рівністю є $CQF_{=} = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, \exists x, =\}$.

Множиною базових композицій першопорядкових функціональних логік зі строгою рівністю є $CQF_{\equiv} = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, \exists x, \equiv\}$.

Теорема 3.2.5. Основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$:

1) комутативність однотипних кванторів:

$$\exists x \exists y P = \exists y \exists x P;$$

$$\forall x \forall y P = \forall y \forall x P;$$

2) закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \exists x P = \forall x \neg P;$$

$$\neg \forall x P = \exists x \neg P;$$

3) неістотність квантифікованих імен:

$$\exists x \exists x P = \exists x P;$$

$$\exists x \forall x P = \forall x P;$$

$$\forall x \exists x P = \exists x P;$$

$$\forall x \forall x P = \forall x P;$$

4) закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та $\&$:

$$\exists x P \vee \exists x Q = \exists x (P \vee Q);$$

$$\forall x P \& \forall x Q = \forall x (P \& Q).$$

Теорема 3.2.6. Маємо такі властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен:

– ім'я $x \in V$ строго неістотне для предикатів $\exists x P$ та $\forall x P$;

– ім'я $x \in V$ строго неістотне для $P \Leftrightarrow P = \forall x P \Leftrightarrow P = \exists x P$;

– ім'я $x \in V$ неістотне для $P \Leftrightarrow P \equiv \forall x P \Leftrightarrow P \equiv \exists x P$.

Теорема 3.2.7. Властивості кванторів, пов'язані з реномінаціями:

$\text{Ren)} \exists y P = \exists z R_z^y(P)$, якщо z строго неістотне для P ;

$R\exists s) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y P) = \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y P) = \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(P)$,

якщо z строго неістотне для P та $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists R) R_{\bar{v}, y}^{\bar{u}, x}(\exists x P) = R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)$; зокрема $R_x^x(\exists x P) = \exists x P$.

За умови слабкої неістотності імені z у властивостях Ren та $R\exists$ маємо слабку рівність.

Ці властивості можна переформулювати для $\forall x$.

Додамо до них неістотність верхніх імен у реномінаціях:

$$\exists y R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(P) = R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(P) \text{ та } \forall y R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(P) = R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(P) \text{ при } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}.$$

Теорема 3.2.8. Властивості кванторів, пов'язані із суперпозиціями:

$S\exists b$) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$:

$$S^{\bar{v}}(\exists x P, \bar{f}) \equiv \exists x S^{\bar{v}}(P, \bar{f}).$$

Для $S\exists b$ умови: $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ та x неістотне для $f_1, \dots, f_n$.

$S\exists$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ (тут $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$):

$$\begin{aligned} S^{v_1, \dots, v_n}(\exists x P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)) = \\ = \exists x S^{v_1, \dots, v_n}(P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)). \end{aligned}$$

Властивості $S\exists b$ та $S\exists$ можна переформулювати для $\forall x$ як $S\forall b$ та $S\forall$.

Зробимо деякі зауваження.

Rm1. Обмежувальні умови дистрибутивності та спеціальної дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів є істотними.

Rm2. Для $S\exists b$ та $S\forall b$ маємо рівність із точністю до визначеності $\equiv$. Справді, задамо еквітонні f та P такі:

$$P(d) \uparrow \text{ при } v \notin asn(d) \text{ та } P([x \mapsto 0, y \mapsto 0, v \mapsto 0]) = T;$$

$$f(d) \uparrow \text{ при } x \notin asn(d) \text{ та } f(d) = 0 \text{ при } x \in asn(d).$$

Тоді маємо:

$$x \text{ неістотне для } f, \exists x S^v(P, f)([v \mapsto 0]) = T, S^v(\exists x P, f)([v \mapsto 0]) \uparrow.$$

Водночас для властивостей $R\exists$ та $R\forall$ рівність строга!

Теорема 3.2.9. Композиції $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ зберігають еквітонність, фінарність і повнототальність квазіарних предикатів.

Наслідок 3.2.1. Класи $PrPE^{V-A}$ та $PrPC^{V-A}$ замкнені щодо композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Наслідок 3.2.2. Класи $PrPE^{V-A}$ та $PrPC^{V-A}$ замкнені щодо $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$.

Теорема 3.2.10. Композиції $S^{\bar{v}}$, = зберігають еквітонність, фінарність і повнототальність квазіарних функцій та предикатів.

Наслідок 3.2.3. Класи $FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}$ та $FnC^{V-A} \cup PrPC^{V-A}$ замкнені щодо $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $R_x^{\bar{v}}$, $S^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$, =.

Композиційні предикатні системи та предикатні алгебри.

Семантичною основою КНЛ є композиційні предикатні системи. Це трійки вигляду $(D, \mathbf{P}, \mathbf{C})$, де D – множина предикатів та функцій на D , $\mathbf{C}$ – множина композицій над $\mathbf{P}$. Така система $(D, \mathbf{P}, \mathbf{C})$ задає дві алгебри: *алгебру* (алгебраїчну систему) *даних* $(D, \mathbf{P})$ та *композиційну предикатну алгебру* $(\mathbf{P}, \mathbf{C})$.

Для логік квазіарних предикатів D конкретизується як множина ${}^V A$ всіх V - A -ІМ, де A – множина базових даних A (традиційно будемо вважати $A \neq \emptyset$).

Для логік реномінативних та чистих першопорядкових рівнів множина $\mathbf{P}$ конкретизується як множина V - A -квазіарних предикатів Pr^{V-A} . Для логік цих рівнів композиційні системи набувають вигляду $({}^V A, Pr^{V-A}, \mathbf{C})$. Будемо їх називати *композиційними системами V - A -квазіарних предикатів*. Композиційні алгебри вигляду $(Pr^{V-A}, \mathbf{C})$ називатимемо *композиційними алгебрами V - A -квазіарних предикатів*.

Для логік безкванторно-функціональних та першопорядкових функціональних рівнів множина $\mathbf{P}$ конкретизується як множина V - A -квазіарних функцій та V - A -квазіарних предикатів $Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}$. У цьому випадку композиційні системи мають вигляд $({}^V A, Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, \mathbf{C})$, їх будемо називати *композиційними системами V - A -квазіарних функцій та предикатів*. Композиційні алгебри вигляду $(Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, \mathbf{C})$ називатимемо *композиційними алгебрами V - A -квазіарних функцій та предикатів*.

Отже, для КНЛ розглянутих рівнів отримуємо такі композиційні алгебри:

1) $AR^{V-A} = (Pr^{V-A}, CR)$ – реномінативна композиційна алгебра квазіарних предикатів;

2) $AR_{=}^{V-A} = (Pr^{V-A}, CR_{=})$ – реномінативна композиційна алгебра квазіарних предикатів зі слабкою рівністю;

3) $AR_{\equiv}^{V-A} = (Pr^{V-A}, CR_{\equiv})$ – реномінативна композиційна алгебра квазіарних предикатів зі слабкою рівністю;

4) $AF^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CF)$ – безкванторна композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів;

5) $AF_{=}^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CF_{=})$ – безкванторна композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів зі слабкою рівністю;

6) $AF_{\equiv}^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CF_{\equiv})$ – безкванторна композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів зі строгою рівністю;

7) $AQ^{V-A} = (Pr^{V-A}, CQ)$ – чиста першопорядкова композиційна алгебра квазіарних предикатів;

8) $AQ_{=}^{V-A} = (Pr^{V-A}, CQ_{=})$ – чиста першопорядкова композиційна алгебра квазіарних предикатів зі слабкою рівністю;

9) $AQ_{\equiv}^{V-A} = (Pr^{V-A}, CQ_{\equiv})$ – чиста першопорядкова композиційна алгебра квазіарних предикатів зі строгою рівністю;

10) $AQF^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CQF)$ – першопорядкова композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів;

11) $AQF_{=}^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CQF_{=})$ – першопорядкова композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів зі слабкою рівністю;

12) $AQF_{\equiv}^{V-A} = (Fn^{V-A} \cup Pr^{V-A}, CQF_{\equiv})$ – першопорядкова композиційна алгебра квазіарних функцій та предикатів зі строгою рівністю.

Приклад 3.2.4. Замкненість класу EP^{A} щодо композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}$, $\exists x$ та еквітонність і повнототальність предикатів $\equiv_{xy}$ дає змогу виділити такі підалгебри еквітонних та еквітонних повнототальних предикатів:

– $ARE^{V-A} = (PrPE^{V-A}, CR)$ та $ARC^{V-A} = (PrPC^{V-A}, CR)$ – підалгебри AR^{V-A} ;

– $ARE_{=}^{V-A} = (PrPE^{V-A}, CR_{=})$ та $ARC_{=}^{V-A} = (PrPC^{V-A}, CR_{=})$ – підалгебри $AR_{=}^{V-A}$;

– $AQE^{V-A} = (PrPE^{V-A}, CQ)$ та $AQC^{V-A} = (PrPC^{V-A}, CQ)$ – підалгебри AQ^{V-A} ;

– $AQE_{=}^{V-A} = (PrPE^{V-A}, CQ_{=})$ та $AQC_{=}^{V-A} = (PrPC^{V-A}, CQ_{=})$ – підалгебри $AQ_{=}^{V-A}$.

Приклад 3.2.5. Замкненість класу $FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}$ щодо композицій $\neg, \vee, S^{\bar{V}}, =, \exists x$ та еквітонність і повнототальність функцій $'x$ дає змогу виділити такі підалгебри еквітонних і еквітонних повнототальних функцій та предикатів:

- $AFC^{V-A} = (FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CF)$ та
- $AFC^{V-A} = (FnC^{V-A} \cup PrPC^{V-A}, CF)$ – підалгебри AF^{V-A} ;
- $AFC_{=}^{V-A} = (FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CF_{=})$ та
- $AFC_{=}^{V-A} = (FnC^{V-A} \cup PrPC^{V-A}, CF_{=})$ – підалгебри $AF_{=}^{V-A}$;
- $AQFC^{V-A} = (FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CQF)$ та
- $AQFC^{V-A} = (FnC^{V-A} \cup PrPC^{V-A}, CQF)$ – підалгебри AQF^{V-A} ;
- $AQFC_{=}^{V-A} = (FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CQF_{=})$ та
- $AQFC_{=}^{V-A} = (FnC^{V-A} \cup PrPC^{V-A}, CQF_{=})$ – підалгебри $AQF_{=}^{V-A}$.

Особливості логік квазіарних предикатів. Для часткових предикатів не виконуються деякі важливі закони класичної логіки.

Приклад 3.2.6. Правило *modus ponens* не виконується для загального випадку квазіарних предикатів.

Справді, задамо P як $\perp$, Q – як F . Тоді $P \rightarrow Q$ теж $\perp$.

Отже, P та $P \rightarrow Q$ неспростовні (частково істинні), водночас Q тотожно хибний.

Приклад 3.2.7. Задамо предикат P як T , Q – як $\perp$, S – як F . Тоді:

- $P \rightarrow Q$ та $Q \rightarrow S$ неспростовні, $P \rightarrow S$ тотожно хибний;
- $P \leftrightarrow Q$ та $Q \leftrightarrow S$ неспростовні, $P \leftrightarrow S$ тотожно хибний.

Приклад 3.2.8. Нехай для предикатів p, q, s маємо $p(d) = T$, $q(d) \uparrow$, $s(d) = F$;

тоді $p(d) \equiv q(d)$ та $q(d) \equiv s(d)$, але спростовується $p(d) \equiv s(d)$.

Приклади 3.2.7 та 3.2.8 заперечують транзитивність імплікації, еквіваленції та слабкої рівності. Саме ця нетранзитивність є причиною невиконання деяких законів класичної логіки для класів часткових предикатів, які використовують слабо рівні клінієві зв'язки.

Отже, відмінність логіки часткових предикатів і логіки класичної виявляється вже на пропозиційному рівні. Більше того, предикати із прикладів 3.2.6–3.2.8 еквітонні.

Приклад 3.2.9. Для загального випадку квазіарних предикатів традиційні логічні закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ уже не виконуються.

Задамо предикат P так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = F \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких d , що $x \notin \text{asn}(d)$, маємо $P(d) = T$ та $\exists xP(d) = F$.

Задамо тепер предикат P так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = T \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких d , що $x \notin \text{asn}(d)$, маємо $\forall xP(d) = T$ та $P(d) = F$.

Твердження 3.2.4. Для еквітонних предикатів логічні закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ виконуються.

Приклад 3.2.10. Існують квазіарні предикати такі: $P \simeq \forall xP$ та не виконується $P \simeq \exists xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ та } P(d \nabla x \mapsto b) \uparrow.$$

Тоді для всіх $d \in {}^V A$ маємо $\forall xP(d) \uparrow$, тому $P \simeq \forall xP$.

Водночас $P(d) = F$ при $x \notin \text{asn}(d)$, але $\exists xP(d) = T$ для всіх $d \in {}^V A$, тому $P \simeq \exists xP$ спростовується.

Приклад 3.2.11. Існують квазіарні предикати такі: $P \simeq \exists xP$ та не виконується $P \simeq \forall xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ та } P(d \nabla x \mapsto b) \uparrow.$$

Тоді для всіх $d \in {}^V A$ маємо $\exists xP(d) \uparrow$, тому $P \simeq \exists xP$.

Водночас $P(d) = T$ при $x \notin \text{asn}(d)$, проте $\forall xP(d) = F$ для всіх $d \in {}^V A$, тому $P \simeq \forall xP$ спростовується.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення композиції реномінації.
2. Дайте визначення згортки композиції реномінації.
3. Наведіть основні властивості композиції реномінації.
4. Дайте визначення предиката строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$.
5. Дайте визначення предиката слабкої рівності $\approx_{xy}$.
6. Наведіть основні властивості предикатів строгої рівності.
7. Наведіть основні властивості предикатів слабкої рівності.
8. Чому для предикатів слабкої рівності немає транзитивності за окремими даними?
9. Чому для предикатів слабкої рівності немає заміни рівних за окремими даними?
10. Дайте визначення композиції суперпозиції.
11. Які ви знаєте різновиди композицій суперпозиції?
12. Дайте визначення функції деномінації (розіменування).
13. Як промодельовувати композицію реномінації за допомогою композиції суперпозиції та функцій деномінації?
14. Наведіть основні властивості композицій суперпозиції.
15. Дайте визначення композиції строгої рівності $\equiv$.
16. Дайте визначення композиції слабкої рівності $\approx$.
17. Наведіть основні властивості композиції строгої рівності.
18. Наведіть основні властивості композиції слабкої рівності.
19. Перелічіть базові композиції:
 - реномінативних логік;
 - реномінативних логік зі строгою рівністю;
 - реномінативних логік зі слабкою рівністю;
 - логік безкванторно-функціонального рівня;
 - безкванторно-функціональних логік зі строгою рівністю;
 - безкванторно-функціональних логік зі слабкою рівністю.
20. Дайте визначення композицій квантифікації $\exists x$ та $\forall x$.
21. Наведіть основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$.
22. Наведіть властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен.

23. Наведіть властивості кванторів, пов'язані з реномінаціями.
24. Наведіть властивості кванторів, пов'язані із суперпозиціями.
25. Перелічіть базові композиції:
 - чистих першопорядкових логік;
 - чистих першопорядкових логік зі строгою рівністю;
 - чистих першопорядкових логік зі слабкою рівністю;
 - першопорядкових функціональних логік;
 - першопорядкових функціональних логік зі строгою рівністю;
 - першопорядкових функціональних логік зі слабкою рівністю.
26. Опишіть композиційні предикатні алгебри КНЛ реномінативних, безкванторно-функціональних, чистих першопорядкових та першопорядкових функціональних рівнів.
27. Опишіть підалгебри еквітонних та еквітонних повнотальних предикатів відповідних предикатних алгебр.
28. Опишіть підалгебри еквітонних і еквітонних повнотальних функцій та предикатів відповідних предикатних алгебр.
29. Наведіть приклади, коли вже для еквітонних предикатів порушується транзитивність еквіваленції та слабкої рівності.
30. Обґрунтуйте, чому для загального випадку квазіарних предикатів не виконуються традиційні логічні закони $T(P) \subseteq T(\exists x P)$ та $T(\forall x P) \subseteq T(P)$.

Вправи

1. Доведіть наведені в підрозділі властивості:
 - композиції реномінації;
 - предикатів строгої рівності;
 - предикатів слабкої рівності;
 - композицій суперпозиції;
 - композиції строгої рівності;
 - композиції слабкої рівності;
 - композицій квантифікації $\exists x$ та $\forall x$.
2. Доведіть властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен.
3. Доведіть властивості кванторів, пов'язані з реномінаціями.
4. Доведіть властивості кванторів, пов'язані із суперпозиціями.

5. Доведіть, що композиції $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ зберігають еквітонність, фінарність і повнототальність квазіарних предикатів.

6. Доведіть, що композиції $S^{\bar{v}}$, $=$ зберігають еквітонність, фінарність і повнототальність квазіарних функцій та предикатів.

7. Доведіть твердження 3.2.4.

8. Знайдіть згортки композицій реномінації:

$$1) R_{yx}^{xy} \circ R_{zy}^{yz} ;$$

$$2) R_{zy}^{yz} \circ R_{yx}^{xy} ;$$

$$3) R_{uv}^{xy} \circ R_{wx}^{yz} ;$$

$$4) R_{wu}^{xz} \circ R_{yx}^{xy} ;$$

$$5) R_{vu}^{xy} \circ R_{yzx}^{xyzu} ;$$

$$6) R_{uwx}^{xyv} \circ R_{jxx}^{xyz} ;$$

$$7) R_{vu}^{xy} \circ R_{zyz}^{jxv} \circ R_{xy}^{jx} ;$$

$$8) R_{sz}^{xy} \circ R_{wxu}^{xzv} \circ R_{yzxz}^{xyzu} ;$$

3.3. Реномінативна логіка

Семантичною основою реномінативних логік (РНЛ) є композиційні системи квазіарних предикатів реномінативного рівня, вони мають вигляд $({}^V A, Pr^{V-A}, CR)$. Кожна така система визначає реномінативну композиційну предикатну алгебру $AR^{V-A} = (Pr^{V-A}, CR)$ та алгебру даних із квазіарними предикатами $({}^V A, Pr^{V-A})$. Побудова реномінативної композиційної алгебри фактично визначає мову РНЛ: терми такої алгебри є формулами мови РНЛ.

Алфавіт мови РНЛ:

- V – множина предметних імен;
- Ps – множина предикатних символів (ПС) – *сигнатура* мови РНЛ;
- $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\}$ – множина символів базових композицій.

Демо індуктивне визначення множини Fr формул мови РНЛ:

- кожен $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо *атомарними*;
- нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ – формули.

Позначимо через $nm(\Phi)$ множину всіх імен, які фігурують у символах реномінації формули Φ .

Позначимо через $\sigma(\Phi)$ множину всіх тих $p \in Ps$, які входять до складу формули Φ .

Назвемо $nt(\Phi)$ множиною імен формули Φ , $\sigma(\Phi)$ назвемо сигнатурою формули Φ .

При запису вживатимемо традиційні скорочення формул, використовуючи символи $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ та дужки "(" і ")". Пріоритет символів композицій: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

У множині V виділимо підмножину $V_T \subseteq V$ імен, гарантовано неістотних для всіх $p \in Ps$ – тотально неістотних імен. Неістотність імен із V_T постулюється, їх також називають *синтетично неістотними*. Для визначення множин гарантовано (строго) неістотних для формул імен задамо функцію $v: Fr \rightarrow 2^V$:

$$v(p) = V_T \text{ для всіх } p \in Ps;$$

$$v(\neg\Phi) = v(\Phi);$$

$$v(\vee\Phi\Psi) = v(\Phi) \cup v(\Psi);$$

$$v(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (v(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin v(\Phi)_{i \in 1, \dots, n}\}.$$

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Ps)$.

Абстрагуючись від способів запису формул, отримаємо, що мова РНЛ визначається розширеною сигнатурою.

Формула мови РНЛ Φ *примітивна*, якщо Φ атомарна або Φ має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$, де реномінація не має тотожних перейменувань та $\{\bar{z}\} \cap v(p) = \emptyset$.

Інтерпретуємо мову РНЛ на композиційних предикатних системах реномінативного рівня $CS = ({}^V A, Pr^{V-A}, CR)$. Символи Ps позначають базові предикати в Pr^{V-A} , для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I: Ps \rightarrow Pr^{V-A}$. Продовжимо таке I до відображення інтерпретації формул $I: Fr \rightarrow Pr^{V-A}$ згідно з побудовою складніших формул із простіших за допомогою символів Cs :

$$- I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)); I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi));$$

$$- I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi)).$$

Трійку (CS, Σ, I) назвемо інтерпретацією мови сигнатури Σ . Така (CS, Σ, I) визначається об'єктом $A = (({}^V A, Pr^{V-A}), \Sigma, I)$, який назвемо алгеброю (AC) із доданою сигнатурою (мовою).

Така A визначає композиційну систему $({}^V A, Pr^{V-A}, CR)$, тому АС із доданою сигнатурою є семантичними моделями, які пов'язують мову логіки з алгеброю даних. АС із доданою сигнатурою надалі вважатимемо інтерпретаціями мови та будемо скорочено позначати $A = (A, I)$.

Значення формули Φ при інтерпретації $A = (A, I)$ – це предикат $I(\Phi)$; позначатимемо його Φ_A .

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації на A , або A -неспростовна, якщо Φ_A – неспростовний (частково істинний) предикат. Це позначатимемо $A \models \Phi$.

Φ виконувана при інтерпретації на A , або A -виконувана, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Φ неспростовна, якщо Φ неспростовна при кожній інтерпретації. Це позначатимемо $\models \Phi$.

Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

У випадку РНЛ еквітонних предикатів клас семантичних моделей звужується до композиційних систем $({}^V A, PrPE^{V-A}, CR)$, відповідно звужується клас інтерпретацій. У логіках еквітонних предикатів природно розглядати *слабку* неістотність, тоді трактуємо V_T як множину імен, гарантовано слабо неістотних для всіх $p \in Ps$, – тотально слабо неістотних імен.

Для визначення множин гарантовано слабо неістотних для формул імен задаємо функцію $\mu : Fr \rightarrow 2^V$, це робимо аналогічно заданню функції $\nu : Fr \rightarrow 2^V$.

$$\mu(p) = V_T \text{ для всіх } p \in Ps;$$

$$\mu(\neg\Phi) = \mu(\Phi);$$

$$\mu(\vee\Phi\Psi) = \mu(\Phi) \cup \mu(\Psi);$$

$$\mu(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \mu(\Phi)_{i \in 1, \dots, n}\}.$$

Зауважимо, що для РНЛ поняття тотально неістотних імен не настільки змістовне, як для першопорядкових КНЛ.

Тавтології. На рівень РНЛ із пропозиційного рівня переноситься поняття тавтології. Змістовно тавтології – це формули, які мають структуру тавтологій пропозиційної логіки.

Формула мови РНЛ *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд $R_x^v \Phi$.

Множину пропозиційно нерозкладних формул позначимо Fr_0 .

Кожна формула або пропозиційно нерозкладна, або отримується із пропозиційно нерозкладних за допомогою $\neg$ та $\vee$.

Істиннісна оцінка мови РНЛ – це довільне тотальне відображення $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Часткова істиннісна оцінка мови РНЛ – це довільне відображення $v : Ps \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо до $v : Fr \rightarrow \{T, F\}$ так:

$$v(\neg\Phi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } v(\Phi) = F, \\ F, & \text{якщо } v(\Phi) = T, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } v(\Phi) \text{ невизначене.} \end{cases}$$

$$v(\vee\Phi\Psi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } v(\Phi) = T \text{ або } v(\Psi) = T, \\ F, & \text{якщо } v(\Phi) = F \text{ та } v(\Psi) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Твердження 3.3.1. Нехай $v(p) \downarrow \Rightarrow \rho(p) \downarrow = v(p)$ для кожного $p \in Ps$. Тоді для кожної $\Phi \in Fr$ маємо: $v(\Phi) \downarrow \Rightarrow \rho(\Phi) \downarrow = v(\Phi)$.

Формула Φ – *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істинній оцінці τ .

Кожна тавтологія є неспростовною формулою.

Зворотнє твердження не виконується.

Приклад 3.3.1. Формули $\Phi \leftrightarrow R_x^x(\Phi)$ та $R_y^x(\neg\Phi \vee \Phi)$ неспростовні, але не тавтології.

Твердження 3.3.2. Φ тавтологія $\Leftrightarrow$ для кожної часткової істиннісної оцінки v маємо $v(\Phi) = T$ або $v(\Phi) \uparrow$.

Наслідок 3.3.1. Φ не тавтологія $\Rightarrow v(\Phi) = F$ для деякої часткової істиннісної оцінки v .

Семантичні властивості РНЛ. На множині формул РНЛ уведемо такі відношення.

Ψ є *тавтологічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models_t \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim_t \Psi$), якщо $\Phi \models_t \Psi$ та $\Psi \models_t \Phi$.

Ψ є (неспростовнісним) логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ неспростовна.

Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$): $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Ψ є слабким логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо для всіх інтерпретацій A маємо:

$$A \models \Phi \Rightarrow A \models \Psi.$$

Приклад 3.3.2. Наведемо основні властивості відношень $\models_t$, $\models$, $\models$, $\sim_t$, $\sim$:

- 1) відношення $\models_t$, $\models$ та $\models$ рефлексивні й транзитивні;
- 2) відношення $\sim_t$ та $\sim$ рефлексивні, транзитивні й симетричні;
- 3) Φ тавтологія $\Leftrightarrow \models_t \Phi$;
- 4) Φ неспростовна $\Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \models \Phi$;
- 5) $\Phi \sim_t \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія;
- 6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \Psi$ та $\models \Psi \rightarrow \Phi$;
- 7) $\Phi \models_t \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;
- 8) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$.

Приклад 3.3.3. Не завжди маємо $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \models_t \Psi$.

Формули $R_y^x(\Phi \vee \Psi)$ та $R_y^x(\Psi \vee \Phi)$ пропозиційно нерозкладні, тому можна задати істиннісну оцінку τ таку: $\tau(R_y^x(\Phi \vee \Psi)) = T$ та $\tau(R_y^x(\Psi \vee \Phi)) = F$, звідки $R_y^x(\Phi \vee \Psi) \not\models_t R_y^x(\Psi \vee \Phi)$. Водночас $R_y^x(\Phi \vee \Psi) \models R_y^x(\Psi \vee \Phi)$.

Приклад 3.3.4. Не завжди маємо $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$.

Для кожної інтерпретації A маємо: $A \models \Phi \Rightarrow A \models R_y^x(\Phi)$, тому $\Phi \models R_y^x(\Phi)$. Водночас $\Phi \not\models R_y^x(\Phi)$. Справді, конкретизуємо Φ як "x парне" & "y парне". При інтерпретації на N на даному $d = [x \mapsto 0, y \mapsto 1]$ маємо $(\Phi \rightarrow R_y^x(\Phi))_N(d) = F$, адже $\Phi_N(d) = T$ та $R_y^x(\Phi)_N(d) = \Phi_N(r_y^x(d)) = F$:

$$\Phi_N(d) = ("x \text{ парне}" \& "y \text{ парне"})([x \mapsto 0, y \mapsto 1]) = T;$$

$$\Phi_N(r_y^x(d)) = ("x \text{ парне}" \& "y \text{ парне"})([x \mapsto 1, y \mapsto 1]) = F.$$

Для РНЛ успадковуються наведені у 2.1 властивості пропозиційного рівня.

Укажемо властивості формул РНЛ, пов'язані з реномінацією. Вони відображають відповідні властивості цієї композиції.

Теорема 3.3.1. Маємо такі властивості формул РНЛ:

R) $R(\Phi) \sim \Phi$ – елімінація тотожної реномінації;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – згортка тотожної пари імен;

R $\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \sim \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – R $\neg$ -дистрибутивність;

R $\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$ – R $\vee$ -дистрибутивність;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – згортка реномінацій;

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови z (слабо) неістотне для Φ ;

RII) якщо $\models \Phi$, то $\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

Аналогічно R $\vee$ записуємо властивості R $\rightarrow$, R $\&$, R $\leftrightarrow$.

Основою виконання еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності.

Теорема 3.3.2 (еквівалентності). Нехай Φ' отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Відношення $\models_i$ для множин формул РНЛ визначається так само, як для множин ПФ.

Наведені у прикладі 2.1.5 властивості справджуються для множин формул мови РНЛ.

Поширимо на множини формул відношення неспростовнісного логічного наслідку $\models$.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – деякі множини формул, A – інтерпретація мови.

Вважатимемо, що Δ є (неспростовнісним) наслідком Γ при інтерпретації A , якщо для всіх $d \in {}^V A$ з того, що $\Phi_A(d) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$, випливає: неможливо $\Psi_A(d) = F$ для всіх $\Psi \in \Delta$.

Використовуючи області істинності та хибності предикатів, подамо це більш елегантно.

Надалі у випадку $\Gamma_A \models \Delta$ скорочено позначатимемо:

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \text{ як } T(\Gamma_A), \quad \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) \text{ як } T(\Delta_A),$$

$$\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \text{ як } F(\Gamma_A), \quad \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \text{ як } F(\Delta_A).$$

Δ є (неспростовнісним) наслідком Γ при інтерпретації A , що позначаємо $\Gamma_A \models \Delta$, якщо

$$T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) = \emptyset.$$

Δ є (неспростовнісним) логічним наслідком Γ , що позначаємо $\Gamma \models \Delta$, якщо

$$\Gamma_A \models \Delta \text{ для всіх інтерпретацій мови } A.$$

Звідси випливає: $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі: $d \in T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A)$.

Отже, $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $d \in {}^V A$ такі: для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d) = T$ і для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(d) = F$.

Відношення неспростовнісного логічного наслідку для множин формул рефлексивне, проте не транзитивне.

Приклад 3.3.5. Маємо $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \models \{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\}$ та $\{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\} \models \Psi$, водночас $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \not\models \Psi$.

Для відношення неспростовнісного логічного наслідку для множин формул справджується теорема заміни еквівалентних.

Теорема 3.3.3. Нехай $\Phi \sim \Psi$; тоді маємо:

$$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta \text{ та } \Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi.$$

Розглянемо властивості відношення логічного наслідку для множин формул.

Приклад 3.3.6. Властивість монотонності:

$$\Gamma \subseteq \Lambda \text{ та } \Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma).$$

Приклад 3.3.7. Властивість гарантованої наявності логічного наслідку: завжди маємо

$$C) \Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi.$$

Звідси умова гарантованої наявності $\Gamma \models \Delta$:

існує Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Приклад 3.3.8. Маємо такі властивості декомпозиції формул:

$$\neg_L) \neg \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi;$$

$$\begin{aligned}
\neg_R) \Gamma \models \Delta, \neg\Phi &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta; \\
\vee_L) \Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta; \\
\vee_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi &\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi.
\end{aligned}$$

Властивості, пов'язані з реномінацією, отримуємо на основі властивостей $R, RI, RU, RR, R\neg, R\vee$. Кожна з них продукує дві відповідні властивості для відношення $\models$, коли виділена формула міститься у лівій чи правій частині цього відношення.

Приклад 3.3.9. Властивості спрощення:

$$\begin{aligned}
R_L) R(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta; \\
R_R) \Gamma \models R(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models \Phi, \Delta; \\
RI_L) R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\
RI_R) \Gamma \models R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta; \\
RU_L) R_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ за умови } z \in v(\Phi); \\
RU_R) \Gamma \models R_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta \text{ за умови } z \in v(\Phi).
\end{aligned}$$

Приклад 3.3.10. Властивості еквівалентних перетворень:

$$\begin{aligned}
RR_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\
RR_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Delta; \\
R\neg_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\
R\neg_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta; \\
R\vee_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta; \\
R\vee_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Delta.
\end{aligned}$$

Нормальні форми в РНЛ. Формула мови РНЛ Φ перебуває у *слабкій нормальній формі*, якщо символи реномінації у Φ застосовні тільки до ПС.

Формула Φ перебуває в *нормальній формі*, або *нормальна*, якщо Φ перебуває у слабкій нормальній формі та всі $R_{\bar{x}}^{\bar{z}}p$ примітивні, тобто $R_{\bar{x}}^{\bar{z}}$ не мають тотожних перейменувань та $\{\bar{z}\} \cap v(p) = \emptyset$.

Теорема 3.3.4. Для кожної Φ можна збудувати Ψ в нормальній формі таку: $\Phi \sim \Psi$.

Зведення Φ до нормальної форми виконуємо так.

Використовуючи $R\neg$ та $R\vee$, просуваємо реномінації вглиб формули.

Використовуючи RR , згортаємо сусідні символи реномінації.

При появі тотожних перейменувань усуваємо їх згідно із RI та робимо спрощення згідно з RU .

За теоремою еквівалентності після просунення всіх символів реномінації на рівень ПС і усунення тотожних перейменувань та виконання спрощень дістанемо нормальну формулу Ψ таку, що $\Phi \sim \Psi$.

Формулу Ψ у нормальній формі, утворену із Φ за допомогою перетворень на основі $R\neg$, $R\vee$, RR , RI та RU , назвемо *нормалізанта* формули Φ .

Наслідок 3.3.2. Нехай Ψ – нормалізанта формули Φ . Тоді $\Phi \sim \Psi$.

Наслідок 3.3.3. Нехай Ψ_1 та Ψ_2 – нормалізанти формули Φ . Тоді $\Psi_1 \sim \Psi_2$.

Формула Φ – *субтавтологія*, якщо її нормалізанта – тавтологія. Коректність таких визначень гарантує

Теорема 3.3.5. Якщо Ψ_1 та Ψ_2 – нормалізанти формули Φ та Ψ_1 – тавтологія, то Ψ_2 – тавтологія.

Фундаментальну роль субтавтологій як істинних формул РНЛ установлює

Теорема 3.3.6. Формула Φ – субтавтологія $\Leftrightarrow \models \Phi$.

Пропозиційна схема формули Φ – це пропозиційна формула, яку позначатимемо $Prop(\Phi)$, отримана із Φ опусканням усіх символів, окрім ПС і символів пропозиційних зв'язок.

Теорема 3.3.7. Нехай $Prop(\Phi)$ – не тавтологія й не суперечність. Тоді існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $d_1, d_2 \in {}^V A$ такі, що $\Phi_A(d_1) = T$ та $\Phi_A(d_2) = F$.

Наслідок 3.3.4. $Prop(\Phi)$ не тавтологія $\Rightarrow \Phi$ не може бути субтавтологією.

Приклад 3.3.11. Зведемо до НФ та з'ясуємо, чи є субтавтологією формула $R_{vu}^{xy} (R_{yzx}^{xyz} B \rightarrow R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B))$.

Виконуємо згортки реномінацій: $R_{vu}^{xy} (R_{yzx}^{xyz} B) \sim R_{uzv}^{xyz} B$;

$R_{vu}^{xy} (R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} (A))) \sim R_{uvu}^{xyz} A$; $R_{vu}^{xy} (R_{zy}^{yx} (R_x^z B)) \sim R_{uzu}^{xyz} B$.

Звідси $R_{vu}^{xy} (R_{yzx}^{xyz} B \rightarrow R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B)) \sim R_{uzv}^{xyz} B \rightarrow R_{uvu}^{xyz} A \vee R_{uzu}^{xyz} B$.

Маємо $R_{uzv}^{xyz} B \rightarrow R_{uvu}^{xyz} A \vee R_{uzu}^{xyz} B$ – НФ початкової формули, ця НФ – не тавтологія, тому початкова формула не є субтавтологією.

Запитання для самоконтролю

1. Що є семантичною основою РНЛ?
2. Опишіть мову РНЛ.
3. Як задається множина гарантовано неістотних для формул імен?
4. Що таке розширена сигнатура мови?
5. Як задається інтерпретація мови?
6. Дайте визначення АС із доданою сигнатурою.
7. Як задається відображення інтерпретації мови РНЛ?
8. Дайте визначення неспростовної при інтерпретації формули, неспростовної формули.
9. Дайте визначення виконуваної при інтерпретації формули, виконуваної формули.
10. Що таке істиннісна оцінка мови РНЛ?
11. Як визначається часткова істиннісна оцінка мови РНЛ?
12. Дайте визначення тавтології мови РНЛ.
13. Яке співвідношення між тавтологіями та неспростовними формулами мови РНЛ?
14. Дайте визначення відношення тавтологічного наслідку, тавтологічної еквівалентності в РНЛ.
15. Дайте визначення відношення неспростовнісного логічного наслідку, логічної еквівалентності.

16. Дайте визначення відношення слабого логічного наслідку.
17. Наведіть основні властивості відношень $\models_t, \sim_t, \models, \sim, \models$.
18. Укажіть співвідношення між відношеннями $\models_t, \models, \models$.
19. Наведіть властивості формул РНЛ, пов'язані з композицією реномінації.
20. Як формулюється теорема еквівалентності?
21. Дайте визначення відношення $A \models$ неспростовнісного наслідку для множин формул при заданій інтерпретації.
21. Дайте визначення відношення $\models$ неспростовнісного логічного наслідку для множин формул.
22. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних для відношення $\models$.
23. У чому полягає властивість монотонності відношення $\models$?
24. Сформулюйте умову гарантованої наявності $\Gamma \models \Delta$.
25. Сформулюйте властивості декомпозиції формул.
26. Сформулюйте властивості спрощення для відношення $\models$.
27. Сформулюйте властивості еквівалентних перетворень для відношення $\models$.
28. Дайте визначення слабкої нормальної форми та нормальної форми для формул РНЛ.
29. Опишіть зведення формул РНЛ до нормальної форми.
30. Що таке нормалізанта?
31. Що таке субтавтологія?
32. Що таке пропозиційна схема формули?
33. Який зв'язок субтавтологій та неспростовних формул РНЛ?

Вправи

1. Зведіть до НФ та встановіть, чи це субтавтологія:

- 1) $R_{az}^{xy} (R_{bx}^{xz} B \rightarrow R_{zb}^{xy} (R_{ay}^{yz} A \rightarrow R_{yxa}^{xyz} B))$;
- 2) $R_{zb}^{xy} (R_{y'x}^{xz} A \rightarrow R_{va}^{yz} (R_{yx}^{xz} A \vee R_{zxy}^{yab} B))$;
- 3) $R_{vxy}^{uvw} (R_{xy}^{ux} (A \& B) \rightarrow R_{uvx}^{xyz} A)$;
- 4) $R_{uvw}^{xyz} ((R_{yts}^{uzv} A \rightarrow R_{zxy}^{yuv} B) \rightarrow R_{zxy}^{yts} (\neg B \rightarrow R_{xy}^{xtz} (R_{xy}^{yv} \neg A)))$.

2. Доведіть наведені в підрозділі властивості РНЛ.

3.4. Реномінативні числення

Реномінативні неокласичні числення. Для РНЛ повнототальних еквітонних предикатів можна побудувати формально-аксіоматичні системи гільбертівського типу – *реномінативні неокласичні числення* (РНКЧ).

РНКЧ – це формальна система вигляду $HC = (L, Ax, P)$. Тут L – мова РНЛ із множиною формул Fr , $Ax \subseteq Fr$ – множина аксіом, P – множина правил виведення.

Мову L назвемо мовою РНКЧ. Формулу мови РНКЧ назвемо також формулою РНКЧ.

Розглянемо тут різновид РНКЧ із наперед виділеною множиною V_T тотально неістотних імен (у РНКЧ, описаних у [9, 10, 26], множину V_T задають спеціальними аксіомами синтетичної неістотності імен). РНКЧ, у яких $V_T = \emptyset$, назвемо вільними.

Множина Ax задається такими схемами аксіом:

$AxIP$) $\neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми.

AxR) $R(\Phi) \leftrightarrow \Phi$ – аксіоми елімінації реномінацій.

$AxRI$) $R_{z,\bar{x}}^{\bar{z},\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – аксіоми елімінації тотожних перемінувань.

$AxRU$) $R_{y,\bar{x}}^{\bar{z},\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $z \in \mu(\Phi)$ – аксіоми елімінації пари з неістотним іменем.

$AxR\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – аксіоми $R\neg$ -дистрибутивності.

$AxR\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$ – аксіоми $R\vee$ -дистрибутивності.

$AxRR$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – аксіоми згортки реномінацій.

Множина P складається із таких правил виведення:

P1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – правило розширення;

P2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення;

P3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – правило асоціативності;

P4) $\Phi \vee \Psi, \neg\Psi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – правило перетину;

P5) $\Phi \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – правило реномінації.

Зауважимо, що аксіома АхПР і правила П1–П4 успадковані від пропозиційного числення.

Теорема РНКЧ – це формула, яка виводиться з аксіом за допомогою скінченної кількості застосувань правил виведення.

Те, що Φ є теоремою РНКЧ HC , позначаємо $HC \vdash \Phi$, або $\vdash \Phi$, якщо з контексту зрозуміло, про яке HC ідеться.

Множину теорем РНКЧ HC позначаємо $Th(HC)$.

Теорема 3.4.1. 1. Аксіоми РНКЧ – неспростовні формули.

2. Висновки правил П1–П4 – тавтологічні наслідки засновків.

3. Висновок правила П5 – слабкий логічний наслідок засновку.

Теорема 3.4.2 (істинності). Кожна теорема РНКЧ є неспростовною формулою: $\vdash \Phi \Rightarrow \models \Phi$.

Для РНКЧ справджуються теорема тавтології та синтаксична теорема еквівалентності.

Теорема 3.4.3 (тавтології). Кожна тавтологія є теоремою.

Теорема 3.4.4 (еквівалентності). Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\vdash \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \dots, \vdash \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

Повноту РНКЧ засвідчує

Теорема 3.4.5 (повноти). Нехай Φ – субтавтологія, тоді $\vdash \Phi$.

Ураховуючи теорему 3.3.5, для РНКЧ отримуємо

Наслідок 3.4.1. $\vdash \Phi \Leftrightarrow \models \Phi$.

Важливим наслідком теореми повноти є *розв'язність* РНКЧ: для кожного РНКЧ HC множина $Th(HC)$ розв'язна відносно множини Fr формул мови цього числення.

Стисло розглянуті вище РНКЧ фактично є фрагментом неокласичних числень чистих першопорядкових логік еквітонних повнототальних предикатів, які будуть розглянуті нижче.

Секвенційні числення РНЛ. Формально-аксіоматичні системи генценівського типу – секвенційні числення – будуємо на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул. Стисло опишемо секвенційні числення, які формалізу-

ють відношення неспростовнісного логічного наслідку в РНЛ. Назвемо їх *RC*-численнями. Ці числення фактично є фрагментом секвенційних числень чистих 1-порядкових логік еквітонних предикатів – *QEC*-числень, які будуть детально розглянуті нижче.

Базові секвенційні форми *RC*-числень індукуються властивостями декомпозиції формул (див. приклад 3.3.8), спрощення (див. приклад 3.3.9) та еквівалентних перетворень (див. приклад 3.3.10). Ці властивості нечутливі щодо монотонності (еквітонності) предикатів, тому *RC*-числення формалізують відношення неспростовнісного логічного наслідку в загальному випадку РНЛ.

Умова замкненості секвенції $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ індукована (див. приклад 3.3.7) відповідною умовою гарантованої наявності відношення неспростовнісного логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$:

С) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Базові секвенційні форми *RC*-числень:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash R \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash R(\Phi), \Sigma}; & \vdash R \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash R(\Phi), \Sigma}; \\
 \vdash RI \frac{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}; & \vdash RI \frac{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \\
 \vdash RU \frac{\vdash R_u^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}, \text{ де } y \in v(\Phi); & \vdash RU \frac{\vdash R_u^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{y, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}, \text{ де } y \in v(\Phi); \\
 \vdash RR \frac{\vdash R_x^{\bar{v}} \circ \bar{y}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; & \vdash RR \frac{\vdash R_x^{\bar{v}} \circ \bar{y}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(R_y^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; \\
 \vdash R\neg \frac{\vdash \neg R_x^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(\neg \Phi), \Sigma}; & \vdash R\neg \frac{\vdash \neg R_x^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(\neg \Phi), \Sigma}; \\
 \vdash R\vee \frac{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma}; & \vdash R\vee \frac{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma}{\vdash R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma}; \\
 \vdash \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; & \vdash \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma};
 \end{array}$$

$$\vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \Sigma \quad \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; \quad \neg \vee \frac{\neg \Phi, \neg \Psi, \Sigma}{\neg \Phi \vee \Psi, \Sigma}.$$

Секвенційні форми типів R, RI, RU є допоміжними. Усі інші секвенційні форми – основні.

Як і для пропозиційних секвенційних числень, для *RC*-числень можна додатково ввести похідні секвенційні форми $\vdash \rightarrow$, $\neg \rightarrow$, $\vdash \&$, $\neg \&$ (див. підрозділ 2.4).

Побудова секвенційного дерева для випадку *RC*-числень загалом аналогічна відповідній побудові для випадку пропозиційних секвенційних числень. При цьому враховуємо, що перед застосуванням основної секвенційної форми за необхідності виконуємо спрощення виділеної формули, застосовуючи належну кількість разів допоміжні форми типів R, RI, RU.

Для секвенційних числень РНЛ справджуються теореми коректності та повноти. Теорема коректності:

Теорема 3.4.6. Нехай секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Теорема повноти доводиться на основі теореми про побудову контрмоделі.

Теорема 3.4.7 (про контрмоделі). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для $\vdash \Gamma \neg \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі:

$$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F.$$

Таку пару (A, δ) назвемо контрмоделлю для секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$.

Побудуємо контрмодель за множиною H .

Нехай W – множина всіх предметних імен, які фігурують у формулах H . Візьмемо множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ із $asn(\delta) = W$. Така A дублює W . Задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\delta)$:

$$- \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = T;$$

$$- \neg p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = F;$$

$$- \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(p) \in H \Rightarrow p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(p)_A(\delta) = T;$$

$$- \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(p) \in H \Rightarrow p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{y}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{y}}(p)_A(\delta) = T.$$

На інших $h \in {}^W A$ значення базових предикатів задаємо довільно, ураховуючи умови неістотності імен.

Теорема 3.4.8 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна.

Приклад 3.4.1. Щоб з'ясувати, чи правильно

$R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B) \models R_{uv}^{xy}(R_{ax}^{yz} A)$, побудуємо в RC -численні виведення секвенції $\vdash R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B), \vdash R_{uv}^{xy}(R_{ax}^{yz} A)$.

$$\begin{array}{c} \vdash R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B), \vdash R_{uv}^{xy}(R_{ax}^{yz} A) \\ \downarrow \\ \vdash R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A) \& R_{au}^{xz}(R_z^y B), \vdash R_{uau}^{xyz} A \\ \downarrow \\ \vdash R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A), \vdash R_{au}^{xz}(R_z^y B), \vdash R_{uau}^{xyz} A \\ \downarrow \\ \vdash R_{uau}^{xyz} A, \vdash R_{auu}^{xyz} B, \vdash R_{uau}^{xyz} A \quad \boxtimes \end{array}$$

Отримали замкнене дерево. Це засвідчує вивідність початкової секвенції, звідки $R_{au}^{xz}(R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B) \models R_{uv}^{xy}(R_{ax}^{yz} A)$.

Приклад 3.4.2. Щоб з'ясувати, чи правильно

$\models R_{vu}^{xy}(R_{yzx}^{xyz} B \rightarrow R_{zy}^{yx}(R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B))$, побудуємо в RC -численні виведення секвенції $\vdash R_{vu}^{xy}(R_{yzx}^{xyz} B \rightarrow R_{zy}^{yx}(R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B))$.

$$\begin{aligned}
& \neg R_{vu}^{xy} (R_{yx}^{yz} B \rightarrow R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B)) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{vu}^{xy} (R_{yx}^{yz} B) \rightarrow R_{vu}^{xy} (R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B)) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{vu}^{xy} (R_{yx}^{yz} B), \neg R_{vu}^{xy} (R_{zy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B)) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{uzv}^{xyz} B, \neg R_{uz}^{xy} (R_{xv}^{zy} A \vee R_x^z B) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{uzv}^{xyz} B, \neg R_{uz}^{xy} (R_{xv}^{zy} A) \vee R_{uz}^{xy} (R_x^z B) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{uzv}^{xyz} B, \neg R_{uz}^{xy} (R_{xv}^{zy} A), \neg R_{uz}^{xy} (R_x^z B) \\
& \downarrow \\
& \neg R_{uzv}^{xyz} B, \neg R_{uvu}^{xyz} A, \neg R_{uzu}^{xyz} B
\end{aligned}$$

Отримали незамкнене секвенційне дерево. За незамкненим шляхом задамо контрмодель (M, δ) , для якої $M = \{a, b, c, k, l\}$, $\delta = [x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c, u \mapsto k, v \mapsto l]$. Тоді маємо:

$$R_{uzv}^{xyz} B_M(\delta) = B_M(r_{uzv}^{xyz}(\delta)) = T, R_{uvu}^{xyz} A_M(\delta) = A_M(r_{uvu}^{xyz}(\delta)) = F,$$

$$R_{uzu}^{xyz} B_M(\delta) = B_M(r_{uzu}^{xyz}(\delta)) = F.$$

$$\text{Тут } r_{uzv}^{xyz}(\delta) = [x \mapsto k, y \mapsto c, z \mapsto l, u \mapsto k, v \mapsto l],$$

$$r_{uvu}^{xyz}(\delta) = [x \mapsto k, y \mapsto l, z \mapsto k, u \mapsto k, v \mapsto l],$$

$$r_{uzu}^{xyz}(\delta) = [x \mapsto k, y \mapsto c, z \mapsto k, u \mapsto k, v \mapsto l].$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке реномінативне неокласичне числення?
2. Опишіть множину аксіом РНКЧ.
3. Опишіть множину правил виведення РНКЧ.
4. Сформулюйте теорему істинності РНКЧ.

5. Сформулюйте теорему тавтології для РНКЧ.
6. Сформулюйте синтаксичну теорему еквівалентності.
7. Сформулюйте теорему повноти РНКЧ.
8. Наведіть умову замкненості секвенції в RC -численні.
9. Наведіть базові секвенційні форми RC -числень.
10. Які секвенційні форми RC -числень є основними, а які допоміжними?
11. Сформулюйте для RC -числень теореми коректності та повноти.

Вправи

1. Доведіть синтаксичну теорему еквівалентності РНКЧ.
- 2*. Доведіть теорему повноти РНКЧ.
3. Обґрунтуйте розв'язність РНКЧ.
4. Побудуйте виведення в РНКЧ таких формул:
 - 1) $R_{uv}^{xy} (R_{au}^{xz} (R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B) \rightarrow R_{ax}^{yz} A)$;
 - 2) $R_{az}^{xy} (R_{bx}^{xz} A \rightarrow R_{zb}^{xy} (R_{ay}^{yz} B \rightarrow R_{yxa}^{xyz} A))$.
5. Деталізуйте побудову секвенційного дерева в RC -численнях.
- 6*. Доведіть теореми коректності та повноти RC -числень.
7. Побудуйте в RC -численні виведення чи доведіть його відсутність для таких формул:

- 1) $R_{uv}^{xy} (R_{au}^{xz} (R_{zx}^{xy} A \& R_z^y B) \rightarrow R_{ax}^{yz} A)$;
- 2) $R_{vu}^{xy} (R_{yzx}^{xyz} B \rightarrow R_{xy}^{yx} (R_{xv}^{zy} A \rightarrow R_{xy}^{zx} B))$;
- 3) $R_{az}^{xy} (R_{bx}^{xz} B \rightarrow R_{zb}^{xy} (R_{ay}^{yz} A \rightarrow R_{yxa}^{xyz} B))$;
- 4) $R_{zb}^{xy} (R_{vy}^{xz} A \rightarrow R_{va}^{yz} (R_{yx}^{xz} A \vee R_z^y B))$;
- 5) $R_{vxy}^{uvw} (R_{xy}^{ux} (A \& B) \rightarrow R_{vux}^{xyz} A)$.

4. ЛОГІКИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Характерною особливістю логік першого порядку є наявність дуже потужних композицій квантифікації, або кванторів. Назва "логіка першого порядку" пов'язана з тим, що квантори застосовуються тільки до імен компонентів даних (предметних імен). Для порівняння, у логіках другого порядку дозволяється квантифікація на множині функцій та предикатів.

Описові можливості логіки першого порядку дуже широкі. Загалом кожне математичне поняття можна виразити в логіці першого порядку – це твердження відоме [17] як теза Гільберта. Точніше кажучи, теза Гільберта означає: кожне математичне твердження можна явно описати відповідною мовою першого порядку, отже, неформальне його доведення стає формальним виведенням у відповідному численні першого порядку.

Принципове прийняття тези Гільберта зовсім не означає можливість практичного її застосування. Зазвичай це вимагає явного приєднання до конкретної математичної теорії аксіоматики теорії множин, у якій наявна низка принципово нерозв'язних проблем. Тому для адекватного опису багатьох математичних теорій доцільно розглядати розширення логіки першого порядку, зокрема логіки вищих порядків. Водночас логіки вищих порядків дуже неконструктивні.

4.1. Семантичні моделі та мови класичних логік першого порядку

У класичній логіці функції та предикати скінченноарні, причому предикати тотальні. Базові функції та предикати – тотальні n -арні. У класичній логіці операції реномінації та суперпозиції у явному вигляді не визначаються, задаються неявно; квантори вводяться на синтаксичному рівні, при визначенні формули, їхня семантична роль як логічних операцій розкривається при інтерпретації формул.

Кожний тотальний X -арний предикат P на A однозначно задається областю істинності $T(P)$, адже для таких предикатів $T(P) \cup F(P) = A^X$ та $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

Для X -арного предиката P на A його область істинності має вигляд $T(P) \subseteq A^X$. Така $T(P)$ визначає множину n -ок $S \subseteq A^n$ – базу всіх *nate*-еквівалентних множин ІМ вигляду $L \subseteq A^Y$, де $|X| = |Y| = n$. Ця база однакова для всіх таких *nate*-еквівалентних множин ІМ, вона визначає n -арний предикат S , який назовемо *основою* X -арного предиката P .

Приклад 4.1.1. $\{x, y\}$ -арний предикат $x > y$ на N та $\{u, v\}$ -арний предикат $u > v$ на N мають за основу n -арний предикат $>$, що задається так:

$$(a, b) \in T(>) \Leftrightarrow [x \mapsto a, y \mapsto b] \in T(x > y) \Leftrightarrow [u \mapsto a, v \mapsto b] \in T(u > v).$$

У класичній логіці функції та предикати *еквітонні*. Це означає, що кожную X -арну функцію (предикат) g можна розглядати як Y -арну функцію (предикат) для довільного $Y \supseteq X$, при цьому всі змінні з $Y \setminus X$ неістотні для g (відома процедура введення фіктивних змінних).

Семантичні моделі класичних логік першого порядку. Традиційними семантичними моделями класичної логіки першого порядку є класичні алгебраїчні системи (АС) із тотальними n -арними базовими функціями та предикатами.

Класична АС – це об'єкт вигляду $(A, FF_n^A \cup FPr^A)$, де $A \neq \emptyset$ – носій, або основа АС, FF_n^A та FPr^A – множини скінченноарних функцій та скінченноарних тотальних предикатів, заданих на A . Далі виділяють підмножини $BF \subseteq FF_n^A$ та $BP \subseteq FPr^A$ n -арних базових функцій та предикатів. Імена елементів BF та BP – це *функціональні символи* (ФС) та *предикатні символи* (ПС). Множини ФС та ПС позначаємо відповідно Fs та Ps . Фактично це означає наявність бієкцій між Fs і BF та між Ps і BP . Іноді виділяються певні елементи носія, їх трактуємо як 0-арні функції – константи; іменами таких констант є *константні символи* (КС). Множину КС позначаємо Cns , тоді $Cns \subseteq Fs$.

Множину $\sigma = Fs \cup Ps$ називають *сигнатурою* АС.

Із кожним $g \in \sigma$ зв'язане натуральне число – його *арність*; це арність тієї базової функції чи предиката, що іменується зазначеним символом g . Для КС арність дорівнює 0.

АС із носієм A та сигнатурою σ назвемо *класичною АС із доданою сигнатурою*. Класичні АС із доданою сигнатурою мають вигляд $((A, FFn^A \cup FPr^A), \sigma)$; традиційно їх позначають у скороченому вигляді як (A, σ) .

Задання сигнатури означає виділення базових функцій та предикатів. Це фактично індукує відповідну мову першого порядку.

Синтаксис мови першого порядку. Засобами опису та дослідження логік першого порядку є мови першого порядку. Алфавіт мови класичної логіки першого порядку містить:

- множину V предметних імен (змінних);
- множину Fs функціональних символів заданої арності;
- множину Ps предикатних символів заданої арності;
- символи логічних операцій $\neg, \vee, \exists x$.

У Fs може виділятися підмножина константних символів $Cns \subseteq Fs$.

У Ps може виділятися символ рівності $=$, який завжди інтерпретують як предикат рівності.

У класичній логіці базові функції та предикати n -арні, тому з кожним ФС та ПС зв'язане натуральне число – його арність. Для КС арність дорівнює 0.

Символи $\neg, \vee, \exists x, =$ та предметні імена назвемо *логічними* символами.

Функціональні та предикатні символи, окрім $=$, назвемо *нелогічними* символами.

Множину $\sigma = Fs \cup Ps$ назвемо *сигнатурою* мови першого порядку.

Основними конструкціями мови першого порядку є *терми* та *формули*. Терми використовують для позначення об'єктів (функцій, елементів), формули – для запису тверджень (висловлень), предикатів.

Індуктивне визначення множини Tr термів:

1) кожне предметне ім'я та кожне $c \in Cns$ є термом; такі терми назвемо *атомарними*;

2) якщо $t_1, \dots, t_n$ – терми, f – n -арний ФС, то $ft_1 \dots t_n$ – терм.

Атомарна формула – це вираз вигляду $pt_1 \dots t_n$, де p – n -арний ПС, $t_1, \dots, t_n$ – терми.

Індуктивне визначення множини Fr формул:

- 1) кожна атомарна формула є формулою;
- 2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формули;
- 3) якщо Φ – формула, $x \in V$, то $\exists x\Phi$ – формула.

Позначимо $nm(\Phi)$ множину всіх предметних імен, які входять до складу формули Φ .

Таку $nm(\Phi)$ назовемо *множиною імен* (змінних) формули Φ .

Розширимо nm на множини формул: для $\Gamma \subseteq Fr$ задамо $nm(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} nm(\Phi)$.

Як і в мові ПЛ, вирази $\Phi \& \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$ та $\Phi \leftrightarrow \Psi$ вважаємо скороченнями формул $\neg \vee \neg \Phi \neg \Psi$, $\vee \neg \Phi \Psi$ та $\neg \vee \neg \vee \neg \Phi \Psi \neg \vee \neg \Psi \Phi$.

Користуємося символом $\forall x$, вважаючи вираз $\forall x\Phi$ скороченням формули $\neg \exists x \neg \Phi$.

Для бінарних символів зазвичай використовуємо інфіксну форму запису.

Пріоритет символів: ФС, ПС, $\exists x$ та $\forall x$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Використовуючи додаткові символи – "(", ")" та ",", – традиційно пишемо $f(t_1 \dots t_n)$ та $p(t_1 \dots t_n)$ замість $ft_1 \dots t_n$ та $pft_1 \dots t_n$.

Якщо f чи p бінарний, то пишемо $t_1 ft_2$ чи $t_1 pt_2$.

Зазвичай будемо писати $t_1 \neq t_2$ замість $\neg t_1 t_2$.

Такі скорочення термів та формул теж називатимемо термами та формулами.

Маємо два рівні відмінності мов першого порядку:

1) варіанти (діалекти) мов однієї сигнатури, що відрізняються наборами символів логічних операцій та способами запису термів і формул;

2) істотно різні мови, що відрізняються сигнатурами.

Мова L' сигнатури σ' – *розширення* мови L сигнатури σ , якщо $\sigma' \supseteq \sigma$. У цьому випадку мову L називають *звуженням* мови L' .

Приклад 4.1.2. Мова арифметики L_{ar} визначається сигнатурою $\sigma_{ar} = \{0, 1, +, \times, =\}$, де 0 та 1 – КС, + та $\times$ – бінарні ФС, $=$ – бінарний ПС.

Терм L_{ar} арифметичний. Наприклад, $x \times (y + z)$, $(1 + 1) \times (0 + 1)$.

Формула L_{ar} арифметична.

Приклади формул L_{ar} : $x = y + 1$ атомарна; $\exists z(x + z = y) \ \& \ \neg x = y$.

Приклад 4.1.3. Мова теорії множин L_{set} визначається сигнатурою $\sigma_{set} = \{\in, =\}$, де $\in$ та $=$ – бінарні ПС.

Приклади формул L_{set} : $z \in x$ – атомарна формула; $\exists x \neg \exists y(y \in x)$; $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Приклад 4.1.4. Мова теорії впорядкованих множин L_{ord} визначається сигнатурою $\sigma_{ord} = \{<, =\}$, де $<$ та $=$ – бінарні ПС.

Приклади формул L_{ord} : $x < y$ – атомарна формула; $\forall x \exists y(y < x)$; $z < x \rightarrow x < y \rightarrow z < y$.

Вільні та зв'язані змінні. Колізії. У формулі $\exists x \Phi$ або $\forall x \Phi$ формулу Φ називають *областю дії* квантора $\exists x$ чи $\forall x$. Вираз вигляду $\exists x$ або $\forall x$ називають *кванторним префіксом*.

Входження предметного імені (змінної) x у формулу Φ *зв'язане*, якщо воно міститься в області дії деякого квантора по x , інакше таке входження x у Φ *вільне*.

Якщо існує вільне входження x у формулу Φ , то x – *вільне ім'я* (*вільна змінна*) формули Φ .

Формулу Φ із вільними $x_1, \dots, x_n$ позначаємо $\Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Множину всіх вільних імен (вільних змінних) формули Φ позначимо $fr(\Phi)$.

Для $\Gamma \subseteq Fr$ задаємо $fr(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} fr(\Phi)$.

Формула Φ *замкнена*, якщо Φ не має вільних змінних. Зрозуміло, що тоді $fr(\Phi) = \emptyset$.

Терм, який не містить предметних імен (змінних), називається *замкненим термом*. Зокрема, таким є кожний КС. Замкнений терм будується лише із ФС та має містити КС.

Замкнені терми існують лише в мовах, сигнатури яких містять КС, наприклад у L_{ar} .

Приклад 4.1.5. Арифметична формула $\exists z \exists u (x+z=y+u) \vee z=0$ має вільні змінні x, y, z ;

арифметична формула $\exists z (x+z=y)$ має вільні змінні x, y ;

арифметичний терм $(1+1) \times (1+1)$ замкнений;

арифметична формула $\forall x \forall y (x \times y = y \times x)$ замкнена;

формула $L_{set} \exists x \neg \exists y (y \in x)$ замкнена, $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$ має вільні змінні x, y ;

формула $L_{ord} \forall x \exists y (y > x)$ замкнена,

формула $L_{ord} z < x \rightarrow x < y \rightarrow z < y$ має вільні змінні x, y, z .

Зв'язані імена у формулах можна перейменовувати – замінювати іншими предметними іменами. При цьому може виникнути *колізія* – ситуація, коли вільні імена стали зв'язаними. Це може істотно змінити смисл формули.

Приклад 4.1.6. Із формули $\exists z (x+z=y)$ можна отримати формулу $\exists t (x+t=y)$, коли колізії немає, та формулу $\exists x (x+x=y)$, коли колізія змінила зміст формули.

Якщо при перейменуваннях брати весь час нові імена, які відсутні в розглядуваній формулі, то колізії не виникатимуть.

Вільні входження предметних імен у формулу або терм можна замінювати термами.

Позначимо $\Phi_{x_1, \dots, x_n} [t_1, \dots, t_n]$ формулу, отриману із Φ паралельною заміною всіх вільних входжень $x_1, \dots, x_n$ на терми $t_1, \dots, t_n$, відповідно. Для термів аналогічно вводимо позначення $t_{x_1, \dots, x_n} [t_1, \dots, t_n]$.

Приклад 4.1.7. У загальному випадку формули $\Phi_{x,y}[a,b]$ та $(\Phi_x[a])_y[b]$ різні. Наприклад, якщо Φ – це формула $x \in y$, то $\Phi_{x,y}[y,z]$ – формула $y \in z$, $(\Phi_x[y])_y[z]$ – формула $z \in z$.

При заміні вільних входжень предметних імен термами теж можливі колізії, коли вільне ім'я стає зв'язаним.

Приклад 4.1.8. Нехай Φ – це формула $\exists z (x+z=y)$. Тоді $\Phi_x[u]$ – це формула $\exists z (u+z=y)$; $\Phi_x[z]$ – формула $\exists z (z+z=y)$; отже, маємо колізію.

Розглянутий приклад аргументує таке визначення.

Терм t допустимий для заміни вільного імені x у формулі Φ , якщо x не лежить в області дії ніякого квантора за деяким іменем, яке входить до складу терму t .

Семантика мови першого порядку. Інтерпретуємо мову першого порядку на класичних АС із тією самою сигнатурою.

Інтерпретацією, або *моделлю* мови L сигнатури σ , назвемо АС із доданою сигнатурою вигляду $A = (A, \sigma)$. Множину A називають *областю інтерпретації*.

Предметні імена (змінні) трактуємо як імена елементів (змінні) множини A . Символи логічних операцій інтерпретуємо як відповідні логічні операції. КС інтерпретуємо як конкретні елементи множини A , тобто як функції-константи на A . ФС та ПС інтерпретуємо як функції та предикати відповідної арності на A . При цьому символ $=$ завжди інтерпретуємо як предикат рівності на A , а таку рівність будемо трактувати як тотожність.

Інтерпретація мови L на $A = (A, \sigma)$ задається бієктивним відображенням $I : \sigma \rightarrow BF \cup BP$. Значення символу $g \in \sigma$ позначаємо $g_A : I(g) = g_A$. Для кожного $g \in \sigma$ арності g_A та g рівні.

Продовжимо таке I до відображення $J : Tr \cup Fr \rightarrow FFn^A \cup FPr^A$ інтерпретації термів і формул мови L . Це робимо таким чином:

- $J(x) = 'x'$;
- $J(ft_1 \dots t_n) = I(f)(J(t_1), \dots, J(t_n)) = f_A(J(t_1), \dots, J(t_n))$.
- $J(pt_1 \dots t_n) = I(p)(J(t_1), \dots, J(t_n)) = p_A(J(t_1), \dots, J(t_n))$.
- $J(\neg \Phi) = \neg J(\Phi)$;
- $J(\vee \Phi \Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$;
- $J(\exists x \Phi) = \exists x(J(\Phi))$.

Тут запис $f_A(g_1, \dots, g_n)$ фактично означає $S^{1, \dots, n}(f_A, g_1, \dots, g_n)$, а $p_A(g_1, \dots, g_n)$ означає $S^{1, \dots, n}(p_A, g_1, \dots, g_n)$. Отже, у класичній логіці використовуються операції суперпозиції, проте неявно.

Предметні імена (змінні) інтерпретуємо як відповідні функції розіменування.

Кожний терм із вільними змінними $v_1, \dots, v_n$ інтерпретуємо як $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арну функцію на A , кожну формулу з вільними змінними $v_1, \dots, v_n$ інтерпретуємо як $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арний предикат на A .

Зокрема, кожний замкнений терм інтерпретуємо як функцію-константу на A , кожну замкнену формулу – як константний предикат T чи F на A .

Функцію $J(t)$, що є значенням терму t при інтерпретації на A , позначимо t_A : $J(t) = t_A$.

Предикат $J(\Phi)$, що є значенням формули Φ при інтерпретації на A , позначимо Φ_A : $J(\Phi) = \Phi_A$.

Формула Φ істинна при інтерпретації на A , або істинна на A , або A -істинна, якщо предикат Φ_A є істинним.

Істинність формули Φ на A означає: X -арний предикат Φ_A такий, що $\Phi_A(d) = T$ для всіх $d \in A^X$.

Те, що формула Φ істинна на A , позначаємо $A \models \Phi$.

Формула Φ усюди істинна, якщо Φ істинна при кожній інтерпретації.

Те, що Φ усюди істинна, позначимо $\models \Phi$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації A , або виконувана на A , або A -виконувана, якщо предикат Φ_A є виконуваним.

Те, що Φ A -виконувана, означає: X -арний предикат Φ_A такий, що $\Phi_A(d) = T$ для деякого $d \in A^X$.

Формула Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Приклад 4.1.9. Формула $x = x$ (усюди) істинна.

Приклад 4.1.10. Формула $\forall x \forall y (x = y)$ істинна на всіх 1-елементних АС і тільки на них;

формула $\neg \forall x \forall y (x = y)$ істинна на всіх k -елементних АС, де $k > 1$, і тільки на них.

Приклад 4.1.11. Кожна формула вигляду $\Phi_x[t] \rightarrow \exists x \Phi$ усюди істинна.

Нехай X – множина вільних імен формули $\Phi_x[t] \rightarrow \exists x \Phi$. Припустимо супротивне: існує АС A така, що $A \not\models \Phi_x[t] \rightarrow \exists x \Phi$. Тоді існує $d \in A^X$ таке, що $(\Phi_x[t] \rightarrow \exists x \Phi)_A(d) = F$, звідки $(\Phi_x[t])_A(d) = T$ та $(\exists x \Phi)_A(d) = F$. Нехай $t_A(d) = b \in A$; унаслідок $(\Phi_x[t])_A(d) = T$ тоді

$\Phi_A(d\nabla x \rightarrow b) = T$. Але $(\exists x \Phi)_A(d) = F$, тому $\Phi_A(d\nabla x \rightarrow a) = F$ для всіх $a \in A$, зокрема $\Phi_A(d\nabla x \rightarrow b) = F$. Маємо суперечність.

Замикання формули Φ із вільними іменами $x_1, \dots, x_n$ – це замкнена формула $\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi$.

Замикання формули Φ зазвичай позначаємо $\bar{\Phi}$.

Теорема 4.1.1 (замикання). Для кожних АС A та формули Φ маємо: $A \models \Phi \Leftrightarrow A \models \bar{\Phi}$.

Класичні алгебраїчні системи. Розглянемо деякі важливі поняття, які стосуються семантичних моделей мови логіки – алгебраїчних систем.

АС $B = (B, \sigma)$ називають *розширенням* АС $A = (A, \sigma)$, якщо $A \subseteq B$ та $h_A \subseteq h_B$ для всіх $h \in \sigma$.

Тоді АС A називають *звуженням* АС B .

Також у цьому випадку A називають *підсистемою* АС B , а B – *надсистемою* АС A .

Цей факт позначатимемо $A \subseteq B$.

Множина $C \subseteq A$ утворює *підсистему* $C = (C, \sigma)$ системи $A = (A, \sigma)$, якщо множина C замкнена відносно базових функцій $f_A, f \in \sigma$.

Не для кожної $C \subseteq A$ можна говорити про підсистему (C, σ) .

Приклад 4.1.12. Для АС (N, σ) , де $\sigma = \{+, =\}$, а $+$ та $=$ інтерпретуються як відповідні функції на N , множина непарних чисел $N_n \subseteq N$ незамкнена відносно $+$, тому N_n не утворює підсистеми. Водночас множина парних чисел $N_n \subseteq N$ утворює власну підсистему (N_n, σ) системи (N, σ) .

Нехай множини $A_1 \subseteq A$ та $A_2 \subseteq A$ замкнені відносно всіх базових функцій АС (A, σ) . Тоді $A_1 \cap A_2$ теж замкнена відносно всіх базових функцій АС (A, σ) , якщо тільки $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Отже, якщо (A_1, σ) та (A_2, σ) – підсистеми системи (A, σ) , то або $(A_1 \cap A_2, \sigma)$ – підсистема системи (A, σ) , або $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Підсистему $(A_1 \cap A_2, \sigma)$ назвемо *перетином* підсистем (A_1, σ) та (A_2, σ) .

Теорема 4.1.2. Нехай M – перетин носіїв усіх підсистем системи (A, σ) . Тоді M утворює підсистему (M, σ) або $M = \emptyset$.

Таку (M, σ) назовемо *найменшою підсистемою* системи (A, σ) .

Якщо сигнатура σ містить КС, то (A, σ) гарантовано має найменшу підсистему.

Нехай $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – множина носіїв усіх підсистем АС $A = (A, \sigma)$. Для довільної $B \subseteq A$ множина $C = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, де $I = \{\alpha \in J \mid B \subseteq A_\alpha\}$, є

найменшою множиною, замкненою відносно всіх базових функцій системи $A = (A, \sigma)$. Така C визначає АС (C, σ) , яку називають *підсистемою системи (A, σ) , породженою множиною B* .

Якщо при цьому $C = A$, то кажуть, що АС (A, σ) *породжується підмножиною $B \subseteq A$* .

Приклад 4.1.13. Підсистема $(Z^+, \{1, +, =\})$ АС $(N, \{1, +, =\})$ породжується довільною підмножиною множини Z^+ , яка містить 1. Найменшою такою підмножиною є $\{1\}$.

Приклад 4.1.14. Система $(N, \{+, =\})$ породжується множиною $\{0, 1\}$.

Приклад 4.1.15. Система $N = (N, \{0, 1, +, \times, =\})$ породжується множиною $\{0, 1\}$. Наявність КС 0 та 1 зумовлює те, що в кожній підсистемі такої системи носій містить 0 та 1, але тоді підсистема збігається з усією системою. Отже, така система власних підсистем не має.

Приклад 4.1.16. Система $(Z^+, \{+, =\})$ має підсистеми вигляду $(kZ^+, \{+, =\})$, де $kZ^+ = \{kx \mid x \in Z^+\}$, для довільних $k \in Z^+$.

Запитання для самоконтролю

1. Який предикат ми називаємо основою X -арного предиката?
2. Що є семантичними моделями класичної логіки першого порядку?
3. Що таке класична АС і що таке класична АС із доданою сигнатурою?

4. Опишіть алфавіт класичної мови першого порядку.
5. Що таке логічні символи і що таке нелогічні символи мови першого порядку?
6. Що таке сигнатура мови першого порядку?
7. Дайте визначення терму мови першого порядку.
8. Дайте визначення формули мови першого порядку.
9. У чому полягають відмінності мов першого порядку?
10. Що таке розширення мови першого порядку; звуження мови першого порядку?
11. Дайте визначення мови арифметики. Що таке арифметичний терм; арифметична формула? Наведіть приклади.
12. Дайте визначення мови теорії множин L_{set} . Наведіть приклади формул мови L_{set} .
13. Дайте визначення мови теорії впорядкованих множин L_{ord} . Наведіть приклади формул мови L_{ord} .
14. Що таке область дії квантора?
15. Дайте визначення зв'язаного та вільного входження змінної у формулу.
16. Дайте визначення вільної змінної формули.
17. Дайте визначення замкненого терму. Наведіть приклади.
18. Дайте визначення замкненої формули. Наведіть приклади.
19. Що таке колізія? Як уникати колізій?
20. За якої умови терм допустимий для заміни вільної змінної у формулі?
21. Що таке інтерпретація (модель) мови першого порядку?
22. Як інтерпретуються символи мови першого порядку?
23. Як визначається відображення інтерпретації термів і формул мови першого порядку?
24. Дайте визначення формули, істинної при інтерпретації на АС A .
25. Дайте визначення всюди істинної формули.
26. Дайте визначення формули, виконуваної при інтерпретації на A .
27. Дайте визначення виконуваної формули.
28. Що таке замикання формули?

29. Сформулюйте теорему замикання.
30. Що таке розширення АС; звуження АС; підсистема; над-система?
31. За якої умови множина $C \subseteq A$ утворює підсистему $C = (C, \sigma)$ алгебраїчної системи $A = (A, \sigma)$? Наведіть приклади.
32. Що таке перетин підсистем?
33. Що таке найменша підсистема АС? Чи завжди вона існує? Наведіть приклади.
34. Дайте визначення підсистеми АС (A, σ) , породженої множиною $B \subseteq A$.

Вправи

- Наведіть строге доведення теореми 4.1.1 (замикання).
- Доведіть теорему 4.1.2.
- Доведіть чи спростуйте такі твердження:
 - $\models \forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$;
 - $\models \exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$;
 - $\models \forall x A \vee \forall x B \rightarrow \forall x (A \vee B)$;
 - $\models \forall x (A \vee B) \rightarrow \forall x A \vee \forall x B$;
 - $\models \exists x A \vee \exists x B \rightarrow \exists x (A \vee B)$;
 - $\models \exists x (A \vee B) \rightarrow \exists x A \vee \exists x B$;
 - $\models \forall x A \& \forall x B \rightarrow \forall x (A \& B)$;
 - $\models \forall x (A \& B) \rightarrow \forall x A \& \forall x B$;
 - $\models \exists x A \& \exists x B \rightarrow \exists x (A \& B)$;
 - $\models \exists x (A \& B) \rightarrow \exists x A \& \exists x B$.
- Доведіть, що АС $(Z, \{+, -, \times, =\})$ має найменшу підсистему $(\{0\}, \{+, -, \times, =\})$.
- Доведіть, що система $(N, \{\times, =\})$ не породжується жодною скінченною підмножиною $B \subseteq N$.
- Чи має найменшу підсистему АС $(Z^+, \{+, =\})$?

4.2. Виразність у мовах першого порядку. Арифметичність

Розглянемо приклади описів тверджень мовами першого порядку.

Приклад 4.2.1. У силогістиці Арістотеля наведено такі основні форми простих висловлень (категоричні силогізми):

A (від лат. *affirmo*) – загальноствердне – кожне $S \in P$;

I (від лат. *affirmo*) – частково ствердне – деяке $S \in P$;

E (від лат. *nego*) – загальнозаперечне – жодне $S \notin P$;

O (від лат. *nego*) частково заперечне – деяке $S \notin P$.

Мовою першого порядку ці висловлення описуємо так:

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x));$$

$$\exists x(S(x) \& P(x)) \sim \exists x(S(x) \& (S(x) \rightarrow P(x)));$$

$$\forall x \neg (S(x) \& P(x)) \sim \forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x));$$

$$\exists x(S(x) \& \neg P(x)).$$

Через області істинності відповідних предикатів ці висловлення описуємо так:

$$T(S) \subseteq T(P);$$

$$T(S) \cap T(P) \neq \emptyset;$$

$$T(S) \cap T(P) = \emptyset;$$

$$T(S) \setminus T(P) \neq \emptyset.$$

Із зазначених простих висловлень будуються модуси силогізмів – правила виведення в сучасній термінології. Такі модуси мають два засновки та один висновок, їхній вигляд такий:

$$A \& B \vdash C.$$

Приклади модусів силогізмів:

Barbara кожне $M \in P$ & кожне $S \in M \Rightarrow$ кожне $S \in P$;

Festino жодне $P \notin M$ & деяке $S \in M \Rightarrow$ деяке $S \notin P$;

Baroco кожне $P \in M$ & деяке $S \notin M \Rightarrow$ деяке $S \notin P$.

Зазначимо, що в Арістотеля було 19 модусів, проте він не приймав порожності області істинності. З урахуванням цього маємо 15 правдивих античних модусів силогізмів.

Розглянемо приклади описів мовою теорії множин L_{set} .

Приклад 4.2.2. 1. Предикат " $x = \emptyset$ " виражається формулою $\neg \exists y (y \in x)$.

2. Предикат " $x \subseteq y$ " виражається формулою $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$.

3. Предикат " $x = y \cup z$ " виражається формулою $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \vee u \in z)$.

4. Предикат " $x = (y \cap z) \setminus s$ " виражається формулою $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \ \& \ u \in z \ \& \ \neg u \in s)$.

5. Предикат " $x = 2^y$ " виражається формулою $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \subseteq y)$.

Приклад 4.2.3. Наведемо власні аксіоми аксіоматичної теорії множин ZF.

1. Аксіома пари: $\forall x \forall y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$.

2. Аксіома екстенсійності (об'ємності):

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

3. Аксіома нескінченності: $\exists x (\emptyset \in x \ \& \ \forall y (y \in x \rightarrow s(y) \in x))$;

таке $s(y)$ – наступник y ;

тут маємо: $\emptyset \in x$ – це $\exists u (u \in x \ \& \ \neg \exists v (v \in u))$;

$s(y) \in x$ – це $\exists z (z \in x \ \& \ \forall v (v \in z \leftrightarrow v \in y \vee v = y))$.

4) Аксіома регулярності (фундування):

$$\exists u u \in x \rightarrow \exists y (y \in x \ \& \ \neg \exists z (z \in x \ \& \ z \in y));$$

це означає: $x \neq \emptyset \Rightarrow x$ має мінімальний елемент y (мінімальний у тому сенсі, що цей y не має з x спільного елемента).

Приклад 4.2.4. Розглянемо моделювання натуральних чисел засобами L_{set} .

Маємо 0 – це $\emptyset$; $n+1$ – це $s(n)$, де $z = s(y)$ задається так: $\forall v (v \in z \leftrightarrow v \in y \vee v = y)$.

Тут $z = s(y)$ означає, що z є наступником y .

Тоді 1 – це $\{\emptyset\}$; 2 – це $\{0, 1\}$, тобто $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; 3 – це $\{0, 1, 2\}$, тобто $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc.

Виразність. Нехай $A = (A, \sigma)$ – АС, L – мова сигнатури σ .

Предикат P на A виразний формулою Φ мови L , якщо P – предикат Φ_A .

Предикат P на A виразний в АС A , якщо P виразний деякою формулою Φ мови L .

Отже, предикат P на A виразний в АС A , якщо існує формула Φ мови L така: $P = \Phi_A$. Це означає можливість описати цей предикат за допомогою відповідної мови першого порядку.

Множина, що є областю істинності предиката, виразного в АС A , називається *виразною в АС A множиною*. Формула, що виражає цей предикат, виражає його область істинності.

Зауважимо, що для виразності множин вигляду $M \subseteq A^n$ ми використовуємо n -арні предикати, які є основами відповідних X -арних предикатів. У цьому розумінні предикати "х парне", "у парне", "z парне" виражають множину натуральних парних чисел.

Функція, графік якої – виразна в АС A множина, називається виразною в АС A функцією.

Звідси безпосереднє визначення:

формула Φ виражає функцію $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо Φ виражає предикат " $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ".

Зрозуміло, що залежно від вибору змінної для значення функції маємо різні такі предикати та різні формули: наприклад, " $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ", " $r = f(x_1, \dots, x_n)$ " тощо.

Приклад 4.2.5. Предикати " $x=0$ " та " $x=1$ " в АС $(N, \{\times, =\})$, $(Q, \{\times, =\})$, $(R, \{\times, =\})$ виражаються відповідно формулами $\forall y(x \times y = x)$ та $\forall y(x \times y = y)$.

Приклад 4.2.6. Предикат " $x=0$ " в АС $(N, \{+, =\})$, $(Z, \{+, =\})$, $R, \{+, =\}$ виражається формулою $x+x=x$.

Приклад 4.2.7. Предикати " $x=1$ " та " $x=2$ " виражаються в АС $(N, \{+, =\})$ формулами $\forall u \forall v(x = u+v \rightarrow u = u+v \vee v = v+v) \& \neg x = x+x$ та $\exists z(z=1 \& x = z+z)$.

Приклад 4.2.8. Предикати " $y=x+4$ " та " $|x-y|=2$ " виразні в АС $(R, \{y=x+2, =\})$ формулами

$\exists z(y = z+2 \& z = x+2)$ та $y = x+2 \vee x = y+2$.

Приклад 4.2.9. Предикат " $|x-y|=2$ " в АС $(Z, \{|x-y|=1, =\})$ виражається формулою

$\exists z(|x-z|=1 \& |z-y|=1 \& \neg x=y)$.

Приклад 4.2.10. Предикати " $z=x+1$ " та " $z=x+2$ " виражаються в АС $(Z, \{<=\})$ формулами

$$(x < z) \& \neg \exists v(x < v \& v < z) \text{ та } \exists y(y = x+1 \& z = y+1).$$

Арифметичність. Множину натуральних чисел N з виділеними константами 0 та 1, визначеними на N стандартними бінарними функціями додавання $+$ і множення $\times$ та стандартним предикатом рівності, назовемо *стандартною інтерпретацією*, або *стандартною моделлю* мови арифметики. Інакше кажучи, стандартна інтерпретація L_{ar} – це АС $N = (N, \sigma_{ar})$.

Зауважимо, що при інтерпретації L_{ar} на стандартній моделі $N = (N, \sigma_{ar})$ іменами натуральних чисел можуть бути замкнені терми 0, 1, 1+1, ..., 1+...+1, ... Таке ім'я натурального числа n позначатимемо $\bar{n}$.

Зрозуміло, що $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = 1$, $\overline{n+1} = \bar{n} + 1$ для $n \geq 1$.

Істинна арифметична формула (ІАФ) – це арифметична формула, яка істинна на N .

Кожна всюди істинна арифметична формула є ІАФ, але не кожна ІАФ всюди істинна.

Наприклад, формула $\neg \exists x(x+1 = 0)$ є ІАФ, водночас ця формула не є істинною на $Z = (Z, \sigma_{ar})$ та на $R = (R, \sigma_{ar})$.

Предикати, множини та функції, виразні в $N = (N, \sigma_{ar})$, назовемо *арифметичними*.

Отже, функція f арифметична, якщо її графік Γ_f є арифметичною множиною.

Звідси маємо: арифметична формула Φ виражає функцію $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо Φ виражає предикат " $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ".

Зауважимо, що коли мова йде про арифметичні множини, то за умовчанням розглядають множини вигляду $L \subseteq N^m$. Такі множини є областями істинності m -арних предикатів, які є основами відповідних X -арних предикатів.

Приклад 4.2.11. Клас арифметичних множин замкнений щодо операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.

Справді, нехай множини A та B виражаються арифметичними формулами Φ та Ψ . Тоді $A \cup B$, $A \cap B$ та $\bar{A}$ виражаються відповідно арифметичними формулами $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \& \Psi$ та $\neg \Phi$.

Приклад 4.2.12. Предикати " x є парним числом" та " x кратне 5" арифметичні, вони виражаються формулами $\exists y(x=y+y)$ та $\exists y(x=y+y+y+y+y)$.

Приклад 4.2.13. Предикат " x є простим числом" виражається арифметичною формулою $\forall y \forall z (x=y \times z \rightarrow y=1 \vee z=1) \& \neg x=1$, тому він арифметичний.

Приклад 4.2.14. Предикати " $x \leq y$ " та " $x < y$ " арифметичні, оскільки вони виражаються арифметичними формулами $\exists z(x+z=y)$ та $\exists z(x+z=y \& x \neq y)$.

Використовуючи приклад 4.2.14, у записах арифметичних формул надалі вживатимемо скорочення вигляду $x \leq y$ та $x < y$.

Приклад 4.2.15. Предикат " $x \leq y$ " в АС $N = (N, \sigma_{ar})$, $R = (R, \sigma_{ar})$ та $Z = (Z, \sigma_{ar})$ виражається різними арифметичними формулами. Справді, для N маємо формулу $\exists z(x+z=y)$; для R маємо формулу $\exists z(x+z \times z=y)$; для Z маємо формулу $\exists z \exists u \exists v \exists w(x+z \times z + u \times u + v \times v + w \times w = y)$.

Приклад 4.2.16. Арифметичними є такі предикати:

1) предикат " x ділиться на y " позначимо x/y ; він виражається формулою $\exists z(x=y \times z)$;

2) предикат " z є спільним дільником x та y " виражається формулою $x/z \& y/z$.

Приклад 4.2.17. Арифметичними є такі функції (указуємо змінну z для значення функції):

1) функції $x+y$, $x \times y$, $x-y$ виражаються арифметичними формулами $z=x+y$, $z=x \times y$, $y+z=x$;

2) функція $z = \lfloor x/y \rfloor$ виражається арифметичною формулою $z \times y \leq x \& x < (z+1) \times y$;

3) функція $z = \text{mod}(x, y)$ виражається арифметичною формулою $\exists u(x = z + u \times y \& z < y)$;

4) функція $z = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ виражається арифметичною формулою $z \times z \leq x \& x < (z+1) \times (z+1)$;

5) функція $z = HCD(x, y)$ виражається арифметичною формулою $(x/z \ \& \ y/z) \ \& \ \forall u(x/u \ \& \ y/u \rightarrow u \leq z)$.

Приклад 4.2.18. Арифметичними є такі складні функції:

1) функція $z = \text{mod}(x, [\sqrt{y}])$ виражається формулою

$$\exists a(z = \text{mod}(x, a) \ \& \ a = [\sqrt{y}]);$$

2) функція $z = [\text{mod}(x, [\sqrt{y}]) / t]$ виражається формулою

$$\exists a \exists b(z = [a / t] \ \& \ a = \text{mod}(x, b) \ \& \ b = [\sqrt{y}]).$$

Приклад 4.2.19. Нехай $p(v)$ – це формула із прикладу 4.2.13, яка виражає предикат " v є простим числом". Тоді арифметична формула $\forall x(\exists u(x = u+u \ \& \ u \geq 1+1) \rightarrow \exists y \exists z(x = y+z \ \& \ p(y) \ \& \ p(z)))$ стверджує: "кожне парне число, більше за 2, є сумою двох простих чисел". Це відома проблема Гольдбаха – Ейлера, вона до сих пір не розв'язана. Зауважимо, що слабшу (тернарну) проблему Гольдбаха "кожне непарне число, більше за 5, є сумою трьох простих чисел" розв'язав перуанський математик Гаральд Гелфгот у 2013 р.

Скінченно-істинність. Вважаємо зафіксованою деяку 1-порядкову мову сигнатури σ .

Формула Φ *k-істинна*, якщо $A \models \Phi$ для кожної k -елементної інтерпретації A .

Формула Φ *скінченно-істинна*, якщо Φ є k -істинною для кожного $k > 0$.

Отже, скінченно-істинна формула є істинною при кожній скінченній інтерпретації.

Приклад 4.2.20. Позначимо E_k формулу

$$\exists x_1 \dots \exists x_k ((x_1 \neq x_2) \ \& \dots \ \& (x_1 \neq x_k) \ \& (x_2 \neq x_3) \ \& \dots \ \& (x_{k-1} \neq x_k));$$

вона стверджує, що існує $\geq k$ різних елементів області інтерпретації.

Формулу $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_k$ позначимо G_k , вона стверджує, що існує $\leq k$ різних елементів області інтерпретації.

Отже, E_k є n -істинною для всіх $n \geq k$; G_k є n -істинною для всіх $1 \leq n \leq k$.

Звідси маємо: формула $E_k \& G_k$ k -істинна, причому вона не є n -істинною для кожного $n \neq k$.

Приклад 4.2.21. Існують скінченно-істинні, проте не всюди істинні формули першого порядку.

Розглянемо формулу S вигляду $S_1 \& S_2 \& S_3$, де S_1 має вигляд $\forall x \neg \Phi(x, x)$, S_2 має вигляд $\forall x \forall y \forall z (\Phi(x, y) \& \Phi(y, z) \rightarrow \Phi(x, z))$, S_3 має вигляд $\forall x \exists y \Phi(x, y)$. Така S замкнена.

Нехай $\Phi(x, y)$ – арифметична формула $\exists z (x + z = y \& x \neq y)$, тобто $\Phi(x, y)$ виражає предикат " $x < y$ " на N .

Тоді $N \models S$, звідки $N \models S$, тому замкнена формула $\neg S$ не є всюди істинною.

Якщо $\neg S$ не є скінченно-істинною, то для деякої скінченної $A = (A, \sigma)$ маємо $A \not\models \neg S$, звідки (S замкнена) $A \models S$. Тому $A \models S_1$, $A \models S_2$ та $A \models S_3$. Формули S_1 та S_3 задають умови рефлексивності й транзитивності для Φ_A , тому Φ можна інтерпретувати як предикат " $<$ " на A . Тоді S_3 гарантує існування нескінченного ланцюга $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ елементів A , починаючи з довільного $a_0 \in A$. Отже, A нескінченна. Маємо суперечність, тому $\neg S$ – скінченно-істинна.

Приклад 4.2.22. Формула $\exists x Q(x) \& \forall u \forall v (Q(u) \& Q(v) \rightarrow u = v)$ стверджує, що існує єдиний елемент області інтерпретації, який має властивість Q .

Приклад 4.2.23. Формула

$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \& x \neq z \& y \neq z \& Q(x) \& Q(y) \& Q(z))$ стверджує, що існує ≥ 3 різних елементів області інтерпретації, які мають властивість Q .

Приклад 4.2.24. Формула

$\exists x \exists y \exists z (Q(x) \& Q(y) \& Q(z) \& \forall u (Q(u) \rightarrow u = x \vee u = y \vee u = z))$ стверджує, що існує ≤ 3 різних елементів області інтерпретації, які мають властивість Q .

Приклад 4.2.25. Формула

$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \& x \neq z \& y \neq z \& Q(x) \& Q(y) \& Q(z) \& \forall u (Q(u) \rightarrow u = x \vee u = y \vee u = z))$

стверджує, що існують рівно 3 різні елементи області інтерпретації, які мають властивість Q .

Приклад 4.2.26. Формула $\exists zQ(z) \ \& \ \forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \ \& \ x < y))$ при інтерпретації на N стверджує *нескінченність* множини чисел, які мають властивість Q .

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення предиката, виразного в АС.
2. Дайте визначення множини, виразної в АС.
3. Дайте визначення функції, виразної в АС.
4. Що таке стандартна модель мови арифметики?
5. Дайте визначення істинної арифметичної формули.
6. У чому полягає різниця між істинними арифметичними формулами та всюди істинними арифметичними формулами?
7. Дайте визначення арифметичного предиката, арифметичної множини, арифметичної функції.
8. Що таке k -істинна формула?
9. Що таке скінченно-істинна формула?
10. Як співвідносяться класи скінченно-істинних та всюди істинних формул?

Вправи

1. Наведіть приклади "природних" двоелементних інтерпретацій L_{ar} .
2. Опишіть мовою першого порядку наведені вислови авторства [6, 8] відомих логіків та з'ясуйте істинність отриманих формул.
 - 1) (Л. Керрол). Деякі птахи, що гордяться своїм хвостом, не можуть співати. Жодна птаха, окрім пави, не гордиться своїм хвостом. Отже, деякі пави не можуть співати.
 - 2) (Л. Керрол). Усі леви люті. Деякі леви не п'ють каву. Отже, деякі з любителів кави не люті.

- 3) (Л. Керрол). Золото важке. Ніщо, окрім золота, не може змусити його мовчати. Отже, ніщо легке не може змусити його мовчати.
- 4) (Л. Керрол). Деякі подушки м'які. Жодна кочерга не м'яка. Отже, деякі кочерги – не подушки.
- 5) (Л. Керрол). Лише хоробрий гідний слави. Деякі хвальки – боягузи. Отже, деякі хвальки не гідні слави.
- 6) (С. Кліні). Цьому ніхто не повірить. Отже, суддя цьому не повірить.
- 7) (С. Кліні). Дурень був би на це здатен. Я на це не здатен. Отже, я не дурень.
- 8) (С. Кліні). Надія ще не втрачена. Отже, ще не все втрачено.
- 9) (С. Кліні). Усі політики – актори. Деякі актори – лицеміри. Отже, деякі політики – лицеміри.
- 10) (С. Кліні). Кожний, хто може розв'язати цю задачу, – математик. Кебот не може її розв'язати. Отже, Кебот не математик.
- 11) (М. Непейвода). Не всі політики пройдисвіти. Усі пройдисвіти розумні. Отже, деякі політики дурні.
- 12) (М. Непейвода). Ті студенти, які щось учили, розв'язали деякі задачі. Андрій не розв'язав жодної задачі. Отже, Андрій нічого не вчив.
- 13) (М. Непейвода). Усі жарти мають смішити людей. Жодна постанова уряду не є жартом. Отже, жодна постанова уряду не має смішити людей.
- 14) (А. де Морган) Людина є твариною. Отже, кожна голова людини є головою тварини (наведено в 1847 р. як приклад міркування, яке виходить за межі силогістики Арістотеля).
3. Укажіть формули належної мови, що виражають предикати:
- 1) " $\text{mod}(x, 3) = 0$ ", " x парне", " x непарне" в АС (Z ; $\{+, =\}$);
 - 2) " $y = x+9$ " в АС (N , $\{y = x+3, =\}$);
 - 3) " $|x-y| = 6$ " в АС (R ; " $|x-y| = 2, =\}$);

- 4) " $x = 0$ " та " $x = 1$ " в $AC(N; <, =)$;
- 5) " $x = 1$ " та " $x = -1$ " в $AC(Z; \{ \times, = \})$;
- 6) " $x = 1$ " та " $x = z \times y$ " в $AC(R; \{ +, "y = x^2", = \})$.

4. Укажіть формули L_{set} , які виражають:

- 1) " $X \subset Y$ ";
- 2) " $X = Y \setminus (Z \cup S)$ ";
- 3) " $X = Y \cap (Z \setminus S)$ ";
- 4) " $X \cap Y = Z \setminus S$ ";
- 5) " $Z \cup S = 2^{X \setminus Y}$ ".

5. Укажіть формули L_{ar} , що виражають предикати:

- 1) "існує більше чотирьох парних чисел";
- 2) "існує не менше чотирьох непарних чисел";
- 3) "існує не більше двох повних кубів";
- 4) "існує менше трьох повних квадратів";
- 5) "не існує простих чисел, кратних 4";
- 6) "існують прості числа, кратні 5";
- 7) "існують рівно 2 непрості числа, кратні 4";
- 8) "існує менше 4 повних квадратів, кратних 5";
- 9) "існують принаймні 3 непарні прості числа";
- 10) "існують рівно 3 парні числа, що є точними кубами";
- 11) "існує більше 2 простих чисел, не кратних 3";
- 12) "неправильно, що існують рівно 2 числа, що є сумою 4 квадратів";
- 13) "існує менше чотирьох парних непростих чисел";
- 14) "існує більше двох чисел, що є сумою трьох кубів";
- 15) "множина непарних чисел нескінченна";
- 16) "існує єдине парне просте число".

6. Наведіть формули L_{ar} , що виражають функції:

- 1) $z = x \div y$;
- 2) $z = |x - y|$;
- 3) $z = [\sqrt[3]{y}]$;
- 4) $z = \text{mod}(x, [y/u])$;
- 5) $z = HCK(x, y)$;
- 6) $z = HCD(x, [y/u])$;
- 7) $z = [x / HCK(y, v)]$;

- 8) $z = [\sqrt{HCK(x, y)}]$;
- 9) $z = HCD([\sqrt{x}], y)$;
- 10) $r = HCK(x, [\sqrt{[y/z]}])$;
- 11) $r = [HCD(x, y)/[\sqrt{z}]]$;
- 12) $r = [\sqrt{HCD([x/y], z)}]$.

4.3. Відношення логічного наслідку. Еквівалентні перетворення формул

Тавтології мови першого порядку. Тавтології – це формули, які мають структуру тавтологій пропозиційної логіки. У мовах першого порядку поняття тавтології вводиться подібно до поняття тавтології мови РНЛ.

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд $\exists x\Phi$.

Нехай Fr_0 – множина пропозиційно нерозкладних формул мови першого порядку L . Зрозуміло, що кожна формула мови або пропозиційно нерозкладна, або її отримують із пропозиційно нерозкладних формул за допомогою символів $\neg$ та $\vee$.

Істиннісна оцінка мови L – це довільне тотальне відображення $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Часткова істиннісна оцінка мови L – це довільне відображення $v : Ps \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо до $v : Fr \rightarrow \{T, F\}$ так:

$$v(\neg\Phi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } v(\Phi) = F, \\ F, & \text{якщо } v(\Phi) = T, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } v(\Phi) \text{ невизначене.} \end{cases}$$

$$v(\vee\Phi\Psi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } v(\Phi) = T \text{ або } v(\Psi) = T, \\ F, & \text{якщо } v(\Phi) = F \text{ та } v(\Psi) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Формула Φ – *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істинній оцінці мови τ .

Для тавтологій мови першого порядку маємо властивості, аналогічні властивостям тавтологій мови РНЛ.

Твердження 4.3.1. Φ – тавтологія $\Leftrightarrow$ для кожної часткової істиннісної оцінки v маємо $v(\Phi) = T$ або $v(\Phi) \uparrow$.

Наслідок 4.3.1. Φ – не тавтологія $\Rightarrow v(\Phi) = F$ для деякої часткової істиннісної оцінки v .

Кожна тавтологія мови першого порядку є всюди істинною формулою, але зворотно неправильне.

Приклад 4.3.1. Усюди істинні формули $x=x$, $\exists x \exists y \Phi \rightarrow \exists y \exists x \Phi$ – не тавтології.

Відношення логічного наслідку та логічної еквівалентності. На множині формул мови першого порядку введемо відношення тавтологічного наслідку $\models_t$, логічного наслідку $\models$, слабого логічного наслідку $\models$, тавтологічної еквівалентності $\sim_t$ та логічної еквівалентності $\sim$.

Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models_t \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim_t \Psi$), якщо $\Phi \models_t \Psi$ та $\Psi \models_t \Phi$.

Ψ є логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ усюди істинна.

Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$), якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

$\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow$ формули $\Phi \rightarrow \Psi$ та $\Psi \rightarrow \Phi$ усюди істинні.

Ψ є слабким логічним наслідком формули Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо для всіх інтерпретацій A

$$A \models \Phi \Rightarrow A \models \Psi.$$

Логічний наслідок із $\emptyset$ означає істинність без умов. Тому замість $\emptyset \models_t \Phi$, $\emptyset \models \Phi$, $\emptyset \models \Phi$ пишемо відповідно $\models_t \Phi$, $\models \Phi$, $\models \Phi$.

Приклад 4.3.2. Основні властивості відношень $\models_t$, $\models$, $\models$, $\sim_t$, $\sim$:

- 1) відношення $\models_t$, $\models$, $\models$ рефлексивні й транзитивні;
- 2) відношення $\sim_t$ та $\sim$ рефлексивні, транзитивні й симетричні;
- 3) Φ – тавтологія $\Leftrightarrow \models_t \Phi$;

- 4) Φ усюди істинна $\Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \Vdash \Phi$;
- 5) $\Phi \sim_i \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ – тавтологія;
- 6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \Psi$ та $\models \Psi \rightarrow \Phi$;
- 7) $\Phi \models_i \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;
- 8) $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \Vdash \Psi$.

Зауважимо, що п. 4 дає обґрунтування позначення $\models \Phi$ для того, що Φ усюди істинна.

Приклад 4.3.3. Не завжди маємо $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \models_i \Psi$.

Справді, $\exists x \exists y x = y \models \exists y \exists x x = y$, проте $\exists x \exists y x = y \not\models_i \exists y \exists x x = y$.

Приклад 4.3.4. Не завжди маємо $\Phi \Vdash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$.

Маємо $x=0 \Vdash \forall x x=0$ за теоремою замикання. Однак $(x=0)_M(0) = T$, $(\forall x(x=0))_M(0) = F$, тому $(x=0 \rightarrow \forall x(x=0))_M(0) = F$, звідки $x=0 \not\models \forall x x=0$.

Приклад 4.3.5. Якщо x не вільне в Ψ , то $\Phi \rightarrow \Psi \Vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi$.

Нехай X – множина вільних імен формули $\Phi \rightarrow \Psi$. Нехай маємо супротивне: існує $A = (A, \sigma)$ така, що $A \models \Phi \rightarrow \Psi$ та $A \not\models \exists x \Phi \rightarrow \Psi$. Тоді існує $d \in A^X$ таке, що $(\exists x \Phi \rightarrow \Psi)_A(d) = F$, звідки $(\exists x \Phi)_A(d) = T$ та $\Psi_A(d) = F$. Згідно з $(\exists x \Phi)_A(d) = T$ маємо $\Phi_A(d \nabla x \mapsto b) = T$ для деякого $b \in A$. Однак x не вільне в Ψ , тому $\Psi_A(d \nabla x \mapsto b) = \Psi_A(d) = F$. Звідси $(\Phi \rightarrow \Psi)_A(d \nabla x \mapsto b) = F$, що суперечить $A \models \Phi \rightarrow \Psi$.

Приклад 4.3.6. З'ясуємо, чи правильно $\models \exists x A \vee B \rightarrow A \vee \exists x B$.

Конкретизуємо A та B як арифметичні формули $x=0$ та $x \neq x$.

Тоді $\exists x A \vee B \rightarrow A \vee \exists x B$ конкретизується як $\Phi(x)$:

$$\exists x x=0 \vee x \neq x \rightarrow x=0 \vee \exists x x \neq x.$$

Маємо $\Phi_M(1) = F \Rightarrow N \not\models \Phi$, що спростовує $\models \exists x A \vee B \rightarrow A \vee \exists x B$.

Приклад 4.3.7. З'ясуємо, чи правильно $\models A \& \forall x B \rightarrow \forall x A \& B$.

Конкретизуємо A та B як арифметичні формули $x=0$ та $x=x$.

Тоді $A \& \forall x B \rightarrow \forall x A \& B$ конкретизується як $\Phi(x)$:

$$x=0 \& \forall x x=x \rightarrow \forall x x=0 \& x=x.$$

Маємо $\Phi_M(0) = F \Rightarrow N \not\models \Phi$, що спростовує

$$\models A \& \forall x B \rightarrow \forall x A \& B.$$

Приклад 4.3.8. З'ясуємо, чи правильно $\models \forall xA \vee \exists xB \rightarrow \exists xA \vee \forall xB$.

Конкретизуємо А та В як арифметичні формули $x \neq x$ та $x=0$.

Тоді $\forall xA \vee \exists xB \rightarrow \exists xA \vee \forall xB$ конкретизується як $\Phi(x)$:

$$\forall x x \neq x \vee \exists x x=0 \rightarrow \exists x x \neq x \vee \forall x x=0.$$

Маємо $N \not\models \Phi$, що спростовує $\models \forall xA \vee \exists xB \rightarrow \exists xA \vee \forall xB$.

Приклад 4.3.9. З'ясуємо, чи правильно $A \rightarrow B \models \exists xA \rightarrow \exists xB$.

Конкретизуємо А та В як арифметичні формули $x=0$ та $x \neq x$.

Тоді $A \rightarrow B$ та $\exists xA \rightarrow \exists xB$ конкретизуються як $\theta(x)$:

$$x=0 \rightarrow x \neq x \text{ та } \Phi(x): \exists x x=0 \rightarrow \exists x x \neq x.$$

Маємо $(\theta \rightarrow \Phi)_M(1) = F \Rightarrow N \not\models \theta \rightarrow \Phi \Rightarrow \theta \not\models \Phi$, що спростовує $A \rightarrow B \models \exists xA \rightarrow \exists xB$.

Приклад 4.3.10. З'ясуємо, чи правильно $A \rightarrow B \models \forall xA \rightarrow \forall xB$.

Конкретизуємо А та В як арифметичні формули $x=x$ та $x=0$.

Тоді $A \rightarrow B$ та $\forall xA \rightarrow \forall xB$ конкретизуються як

$$\theta(x): x=x \rightarrow x=0 \text{ та } \Phi(x): \forall x x=x \rightarrow \forall x x=0.$$

Маємо $(\theta \rightarrow \Phi)_M(0) = F \Rightarrow N \not\models \theta \rightarrow \Phi \Rightarrow \theta \not\models \Phi$, що спростовує $A \rightarrow B \models \forall xA \rightarrow \forall xB$.

Приклад 4.3.11. З'ясуємо, чи правильно:

a) $\models \exists x(P \& Q) \rightarrow \exists xP \& Q$;

b) $\models \exists xP \& Q \rightarrow \exists x(P \& Q)$;

c) $\forall xP \rightarrow \exists xQ \models \forall xP \rightarrow Q$.

a) Конкретизуємо Р та Q як арифметичну формулу $x=0$.

Тоді $\exists x(P \& Q) \rightarrow \exists xP \& Q$ конкретизується як $\Phi(x)$:

$$\exists x(x=0 \& x=0) \rightarrow \exists x x=0 \& x=0.$$

Маємо $\Phi_M(1) = F \Rightarrow N \not\models \Phi$, що спростовує $\models \exists x(P \& Q) \rightarrow \exists xP \& Q$.

b) Конкретизуємо Р та Q як арифметичні формули $x=0$ та $x \neq 0$.

Тоді $\exists xP \& Q \rightarrow \exists x(P \& Q)$ конкретизується як $\Phi(x)$:

$$\exists x x=0 \& x \neq 0 \rightarrow \exists x(x=0 \& x \neq 0).$$

Маємо $\Phi_M(0) = F \Rightarrow N \not\models \Phi$, що спростовує

$$\models \exists xP \& Q \rightarrow \exists x(P \& Q).$$

с) Конкретизуємо P та Q як арифметичні формули $x=x$ та $x=0$.

$\forall x P \rightarrow \exists x Q$ та $\forall x P \rightarrow Q$ конкретизуються як θ :

$\forall x x=x \rightarrow \exists x x=0$ та $\Phi(x): \forall x x=x \rightarrow x=0$.

Маємо $N \models \theta$ та $\Phi_N(1) = F$, тому $N \not\models \Phi$, звідки $\theta \not\models \Phi$, тому спростовано $\forall x P \rightarrow \exists x Q \models \forall x P \rightarrow Q$.

Еквівалентні перетворення формул. Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності. Вона втілює характерний для традиційної логіки і математики принцип заміни рівних на рівні, незважаючи на контексти, що засвідчує екстенсіональний характер традиційної логіки. Цей принцип може не виконуватись для логік інтенсіонального типу, зокрема модальних.

Теорема 4.3.1 (еквівалентності). Нехай Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

За наявності в мові логіки функціональних символів та символу рівності додатково маємо теореми рівності.

Теорема 4.3.2 (рівності для термів). Нехай терм τ' отримано з терму τ заміною деяких входжень термів $t_1, \dots, t_n$ на терми $s_1, \dots, s_n$, відповідно. Якщо $\models t_1 = s_1, \dots, \models t_n = s_n$, то $\models \tau = \tau'$.

Теорема 4.3.3 (рівності для формул). Нехай Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень термів $t_1, \dots, t_n$ на терми $s_1, \dots, s_n$, відповідно. Якщо $\models t_1 = s_1, \dots, \models t_n = s_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Формула Φ перебуває у *пренексній формі*, або Φ є *пренексною формулою*, якщо Φ має вигляд $Qx_1 \dots Qx_n B$, де Qx_k – кванторний префікс $\exists x_k$ або $\forall x_k$, B – безкванторна формула, яку називають *матрицею* формули Φ .

Якщо Φ безкванторна, то вона вже перебуває у пренексній формі.

Коли ідеться про пренексну форму, то $\forall x$ не прийнято виражати через $\neg$ та $\exists x$.

Теорема 4.3.4. 1) $\exists x A \sim \exists y A_x[y]$, якщо y не вільна в A ;

2) $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$ та $\neg \exists x A \sim \forall x \neg A$;

3) $\exists x B \vee C \sim \exists x (B \vee C)$ та $\forall x B \vee C \sim \forall x (B \vee C)$, якщо x не вільна в C .

Формула A' називається *варіантою* формули A , якщо A' можна отримати з A послідовними замінами такого типу: підформулу $\exists xC$ замінюємо на $\exists yC_x[y]$, де y не вільне в C .

Теорема 4.3.5 (про варіанту). Якщо A' – варіанта формули A , то $A \sim A'$.

Уведемо пренексні операції над формулами, які дозволять кожному формулу перетворити до еквівалентної їй пренексної формули.

Пренексними операціями над формулою A назвемо операції:

- а) заміни A деякою її варіантою;
- б) заміни в A підформулу вигляду $\neg\exists xB$ та $\neg\forall xB$ на $\forall x\neg B$ та $\exists x\neg B$, відповідно;
- в) заміни в A підформулу вигляду $QxB \vee C$ на $Qx(B \vee C)$ та підформулу вигляду $C \vee QxB$ на $Qx(C \vee B)$, якщо x не вільне в C .

Пренексною формою формули A назвемо пренексну формулу A' , утворену з A за допомогою пренексних операцій.

Теорема 4.3.6. Кожна формула має пренексну форму, причому якщо A' – пренексна форма формули A , то $A \sim A'$.

Можна ввести додаткові пренексні операції для $\&$:

- д) заміни в A підформулу вигляду $QxB \& C$ на $Qx(B \& C)$ та підформулу вигляду $C \& QxB$ на $Qx(C \& B)$, якщо x не вільне в C .

Побудову пренексних форм доцільно здійснювати в системі логічних операцій $\{\neg, \vee, \&, \exists x, \forall x\}$.

Можна також ввести додаткові пренексні операції для $\rightarrow$:

- е) заміни в A підформулу вигляду $B \rightarrow QxC$ на $Qx(B \rightarrow C)$, якщо x не вільне в B ;
- ж) заміни в A підформулу вигляду $\exists xB \rightarrow C$ на $\forall x(B \rightarrow C)$ та підформулу вигляду $\forall xB \rightarrow C$ на $\exists x(B \rightarrow C)$, якщо x не вільне в C .

Проте доцільніше подавати $\rightarrow$ через $\neg$ та $\vee$.

Водночас для $\leftrightarrow$ подібних пренексних операцій немає.

Приклад 4.3.12. Пренексна форма для формули

$$\exists z(x=y+z) \rightarrow (x=y) \vee \exists z((x=y+z) \& \neg(z=0)).$$

Записуємо послідовність еквівалентних перетворень:

$$\neg \exists z(x=y+z) \vee (x=y) \vee \exists z((x=y+z) \& \neg(z=0)) \rightarrow \text{подамо } \rightarrow \text{ через } \neg \text{ та } \vee;$$

$\neg\exists z(x=y+z)\vee(x=y)\vee\exists t((x=y+t)\&\neg(t=0))$ – операція а);
 $\forall z(\neg x=y+z)\vee(x=y)\vee\exists t((x=y+t)\&\neg(t=0))$ – операція б);
 $\forall z(\neg x=y+z)\vee\exists t(x=y\vee x=y+t\&\neg(t=0))$ – операція с);
 $\forall z\exists t(\neg x=y+z\vee x=y\vee x=y+t\&\neg(t=0))$ – операція с).

Приклад 4.3.13. Пренексна форма для формули

$$\exists y\forall xA(x,y) \rightarrow \forall x\exists yA(x,y).$$

Записуємо послідовність еквівалентних перетворень:

$\neg\exists y\forall xA(x,y) \vee \forall x\exists yA(x,y)$ – подаємо $\rightarrow$ через $\neg$ та $\vee$;
 $\neg\exists y\forall xA(x,y) \vee \forall u\exists zA(z,u)$ – операція а) – отримання варіанти;
 $\forall y\exists x\neg A(x,y) \vee \forall u\exists zA(z,u)$ – двічі б);
 $\forall y\exists x(\neg A(x,y) \vee \forall u\exists zA(z,u))$ – двічі с) – виносимо $\forall y$ та $\exists x$;
 $\forall y\exists x\forall u\exists z(\neg A(x,y) \vee A(z,u))$ – двічі с) – виносимо $\forall u$ та $\exists z$.

В отриманій пренексній формулі послідовність кванторів та сама, що й у різнокванторній варіанті початкової формули. Зауважимо, що виконувати операції с) можна в іншій послідовності, це дасть інші пренексні формули, проте в нашому прикладі завжди $\forall y$ має передувати $\exists x$, а $\forall u$ має передувати $\exists z$.

Наприклад, виконання операції с) в послідовності

$$\begin{aligned}
 &\forall y\exists x\neg A(x,y) \vee \forall u\exists zA(z,u) \sim \forall y(\exists x\neg A(x,y) \vee \forall u\exists zA(z,u)) \sim \\
 &\sim \forall y\forall u(\exists x\neg A(x,y) \vee \exists zA(z,u)) \sim \forall y\forall u\exists x(\neg A(x,y) \vee \exists zA(z,u)) \sim \\
 &\sim \forall y\forall u\exists x\exists z(\neg A(x,y) \vee A(z,u))
 \end{aligned}$$

дає пренексну формулу, у якій лише два блоки однотипних кванторів. Це найоптимальніший варіант: менше ніж два таких блоки однотипних кванторів у нас отримати неможливо.

Приклад 4.3.14. Пренексна форма формули

$$\forall xA(x) \rightarrow \forall y(\exists zB(x,y,z) \rightarrow \neg\forall xA(x)\&\exists xC(x,y)).$$

$\neg\forall uA(u) \vee \forall y(\neg\exists zB(x,y,z) \vee \neg\forall tA(t)\&\exists vC(v,y))$ – різнокванторна варіанта;

$$\exists u\neg A(u) \vee \forall y(\forall z\neg B(x,y,z) \vee \exists t\neg A(t)\&\exists vC(v,y)) \text{ – операції б);}$$

$$\exists u\forall y\forall z\exists t\exists v(\neg A(u) \vee \neg B(x,y,z) \vee \neg A(t)\&C(v,y)) \text{ – операції с).}$$

Відношення логічного наслідку для множин формул.

Відношення $\models_i$ для множин формул мови першого порядку визначається так, як для множин ПФ. Наведені у прикла-

ді 2.1.5 властивості справджуються для множин формул мови першого порядку.

Поширимо на множини формул відношення логічного наслідку $\models$.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – деякі множини формул мови L .

Позначимо $Vf = fr(\Gamma \cup \Delta)$.

Δ є наслідком Γ при інтерпретації $A = (A, \sigma)$, що позначаємо $\Gamma_A \models \Delta$, якщо для всіх $d \in A^{Vf}$

$\Phi_A(d) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma \Rightarrow \Psi_A(d) = T$ для деякої $\Psi \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ , що будемо позначати $\Gamma \models \Delta$, якщо

$\Gamma_A \models \Delta$ для всіх інтерпретацій A .

Звідси випливає:

$\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують інтерпретація $A = (A, \sigma)$ та $d \in A^{Vf}$ такі:

для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(d) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(d) = F$.

Неформально, використовуючи інфінітарні диз'юнкцію та кон'юнкцію, те, що $\Gamma \models \Delta$, можна подати так: $\bigwedge_{\Phi \in \Gamma} \Phi \models \bigvee_{\Psi \in \Delta} \Psi$.

Якщо Γ та Δ скінченні, то цей вираз можна вважати строгим визначенням для $\Gamma \models \Delta$ у логіці першого порядку.

Зокрема, $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \models \Psi \Leftrightarrow \Phi_1 \& \dots \& \Phi_n \models \Psi$.

Відношення $\models$ логічного наслідку для множин формул рефлексивне, але не транзитивне.

Нетранзитивність $\models$ засвідчує повний аналог прикладу 3.3.6:

Приклад 4.3.15. Маємо $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \models \{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\}$ та $\{\Phi \vee \Psi, \Psi \vee \neg \Phi\} \models \Psi$, водночас $\{\Phi \vee \Psi \vee \neg \Phi\} \not\models \Psi$.

Для $\models$ справджується теорема заміни еквівалентних.

Теорема 4.3.7. Нехай $\Phi \sim \Psi$; тоді маємо: $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Властивостями відношення $\models$ на пропозиційному рівні є монотонність, гарантована наявність логічного наслідку та властивості декомпозиції формул.

Приклад 4.3.16. Базові властивості рівня відношення $\models$ на пропозиційному рівні:

М) $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma)$ – монотонність;

С) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$;

- $\neg_L) \neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi;$
- $\neg_R) \Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta;$
- $\vee_L) \Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta;$
- $\vee_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi.$

Приклад 4.3.17. Властивості декомпозиції формул для похідних зв'язок $\&$ та $\rightarrow$:

- $\&_L) \Phi \& \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models \Delta;$
- $\&_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \& \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi \text{ та } \Gamma \models \Delta, \Psi;$
- $\rightarrow_L) \Phi \rightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta;$
- $\rightarrow_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta, \Psi.$

Новими для першопорядкових логік є властивості елімінації кванторів. Ці властивості спираються на теореми 4.3.8 та 4.3.9.

Теорема 4.3.8. Нехай $z \notin nm(\Gamma \cup \Delta)$; тоді

$$\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi_x[z], \Gamma \models \Delta.$$

Теорема 4.3.9. Для довільних $A = (A, \sigma)$ та $y \in V$ маємо:

$$\Gamma \models_A \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_A \Delta, \exists x\Phi, \Phi_x[y].$$

Приклад 4.3.18. Базові властивості елімінації кванторів:

- $\exists_L) \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi_x[z], \Gamma \models \Delta \text{ за умови } z \notin nm(\Gamma \cup \Delta);$
- $\exists_R) \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \Phi_x[y].$

Приклад 4.3.19. Похідні властивості елімінації квантора $\forall x$:

- $\forall_L) \forall x\Phi, \Gamma \models_A \Delta \Leftrightarrow \forall x\Phi, \Phi_x[y], \Gamma \models_A \Delta;$
- $\forall_R) \Gamma \models \Delta, \forall x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi_x[z] \text{ за умови } z \notin nm(\Gamma \cup \Delta).$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке пропозиційно нерозкладна формула першого порядку?
2. Як визначається істиннісна оцінка мови першого порядку?
3. Як визначається часткова істиннісна оцінка мови першого порядку?
4. Дайте визначення тавтології мови першого порядку.
5. Як співвідносяться класи тавтологій і всюди істинних формул?

6. Дайте визначення тавтологічного наслідку, тавтологічної еквівалентності.

7. Дайте визначення логічного наслідку.

8. Дайте визначення логічної еквівалентності.

9. Дайте визначення слабкого логічного наслідку.

10. Укажіть основні властивості відношень $\models$, $\models$, $\models$, $\sim$, $\sim$.

11. Укажіть співвідношення між відношеннями $\models$, $\models$, $\models$.

12. Сформулюйте теорему еквівалентності.

13. Що таке варіанта?

14. Сформулюйте теорему про варіанту.

15. Дайте визначення пренексної формули.

16. Опишіть пренексні операції.

17. Що таке пренексна форма формули?

18. Сформулюйте теорему про пренексну формулу.

19. Дайте визначення відношення наслідку для множин формул при зазначеній інтерпретації.

20. Дайте визначення відношення логічного наслідку для множин формул.

21. Чи є відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивним; транзитивним?

22. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних.

23. Сформулюйте базові властивості рівня відношення $\models$ на пропозиційному рівні.

24. Сформулюйте властивості декомпозиції формул.

25. Сформулюйте властивості елімінації кванторів.

Вправи

1. З'ясуйте, чи правильно:

1) a) $P \rightarrow Q \models \forall x P \rightarrow \forall x Q$;

b) $\forall x P \rightarrow \forall x Q \models P \rightarrow Q$;

c) $\forall x P \rightarrow \forall x Q \models \exists x P \rightarrow \exists x Q$;

2) a) $\exists x P \rightarrow Q \models \exists x (P \rightarrow Q)$;

b) $\exists x (P \rightarrow Q) \models \exists x P \rightarrow Q$;

c) $\forall x P \rightarrow \exists x Q \models P \rightarrow \exists x Q$;

- 3) а) $\forall x(P \vee Q) \models \forall xP \vee Q$;
 б) $\models \forall xP \vee Q \rightarrow \forall x(P \vee Q)$;
 в) $\exists xP \rightarrow \exists xQ \models \forall xP \rightarrow \forall xQ$.

2. З'ясуйте, як співвідносяться щодо $\models$ та $\models$ формули вигляду:

- 1) $A \rightarrow B$ та $\exists xA \rightarrow \exists xB$;
- 2) $A \rightarrow B$ та $\forall xA \rightarrow \forall xB$;
- 3) $\forall x(A \vee B)$ та $\forall xA \vee \forall xB$;
- 4) $\exists xA \& \exists xB$ та $\exists x(A \& B)$;
- 5) $\forall x(A \vee B)$ та $\forall xA \vee B$;
- 6) $\exists xA \vee B$ та $\exists x(A \vee B)$;
- 7) $\forall x(A \& B)$ та $\forall xA \& B$;
- 8) $\exists xA \& B$ та $\exists x(A \& B)$;
- 9) $\exists x(A \rightarrow B)$ та $\exists xA \rightarrow B$;
- 10) $\forall x(A \rightarrow B)$ та $\forall xA \rightarrow B$;
- 11) $\forall xA \rightarrow \exists xB$ та $A \rightarrow B$;
- 12) $\exists xA \rightarrow \forall xB$ та $A \rightarrow B$;
- 13) $A \vee B$ та $\exists xA \vee \forall xB$;
- 14) $\forall xA \vee B$ та $A \vee \forall xB$;
- 15) $\forall x(A \vee B)$ та $\exists xA \vee B$;
- 16) $A \& B$ та $\exists xA \& \forall xB$;
- 17) $\forall xA \& B$ та $A \& \forall xB$;
- 18) $A \vee \exists xB$ та $\forall xA \& B$.

3. Наведіть відмінні від наведених у підрозділі приклади скінченно-істинних, але не всюди істинних формул першого порядку.

4. Укажіть пренексну форму для таких формул:

- 1) $\forall x \neg \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x B(x) \rightarrow \neg \exists y A(x, y)$;
- 2) $\neg \forall x A(x) \& \exists x B(x) \vee \forall x (\forall y C(x, y) \rightarrow A(y))$;
- 3) $\forall x A(x) \rightarrow \forall y (\forall z B(x, y, z) \leftrightarrow \neg \forall x A(x))$;
- 4) $\forall x \forall y A(x, y) \& \exists x B(x) \rightarrow \neg \exists x A(x, y)$;
- 5) $\exists x \neg \forall y A(x, y) \rightarrow \neg \exists x B(x, y) \rightarrow \exists y A(x, y)$;
- 6) $\neg \forall x A(x) \vee \neg \exists x B(x) \vee \forall x (\forall y C(x, y, z) \rightarrow A(y))$;

- 7) $\exists x A(x, y) \rightarrow \forall y (\forall z B(x, y, z) \rightarrow \neg \forall x \forall y A(x, y))$;
- 8) $\forall x \exists y A(x, y, z) \& \neg \exists x B(x, y) \rightarrow \forall x C(x, y)$;
- 9) $\exists x A(x) \rightarrow \exists y (\forall x B(x, y) \vee \neg \forall z C(x, z) \rightarrow \neg \exists x C(x, y))$;
- 10) $\exists z (x=y+z) \rightarrow (x=y) \vee \exists z ((x=y+z) \& \neg (z=0))$.

5. Доведіть теорему заміни еквівалентних.
6. Доведіть властивості декомпозиції формул.
7. Доведіть властивості елімінації кванторів.

4.4. Гомоморфізми алгебраїчних систем. Метод автоморфізмів

Нехай $A = (A, \sigma)$ та $B = (B, \sigma)$ – класичні АС однієї сигнатури.

Нехай $\varphi : A \rightarrow B$. При розгляді X -арних функцій та предикатів таке φ природним чином продовжимо до $\varphi : A^X \rightarrow B^X$:

$$\varphi([v \mapsto a_i]_{i \in I}) = [v \mapsto \varphi(a_i)]_{i \in I}, \text{ де } X = \{a_i\}_{i \in I}.$$

При розгляді базових, n -арних функцій та предикатів, продовжуємо φ до $\varphi : A^n \rightarrow B^n$ так: $\varphi(a_1, \dots, a_n) = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$.

Якщо $\varphi : A \rightarrow B$ – сюр'єкція, то $\varphi^{-1}(B^X) = A^X$.

Гомоморфізм АС A в АС B – це відображення $\varphi : A \rightarrow B$ таке, що для всіх $f \in Fs, p \in Ps, d \in A^n$:

$$\varphi(f_A(d)) = f_B(\varphi(d)) \quad (HF)$$

$$p_A(d) = T \Rightarrow p_B(\varphi(d)) = T \quad (HP)$$

Гомоморфізм φ АС A в АС B повний, якщо (HP) замінюється сильнішою умовою:

$$p_A(d) = p_B(\varphi(d)) \quad (EP)$$

Повний гомоморфізм φ назвемо *сильним гомоморфізмом*, якщо φ сюр'єктивне.

Повний гомоморфізм φ назвемо *ізоморфізмом*, якщо φ бієктивне.

Для класичних АС якщо σ містить символ рівності $=$, то сильний гомоморфізм стає ізоморфізмом: (EP) гарантує ін'єктивність φ , що за умови сюр'єктивності φ дає бієктивність φ .

АС A та АС B ізоморфні, що будемо позначати $A \cong B$, якщо існує ізоморфізм A у B .

Відношення $\cong$ на множині АС одної сигнатури є відношенням еквівалентності, тому таке визначення коректне.

Ізоморфізм АС A в АС A назовемо автоморфізмом АС A .

Кожна АС $A = (A, \sigma)$ має тривіальний автоморфізм – тотожне відображення $A \rightarrow A$.

Приклад 4.4.1. Розглянемо АС $A = (\{5x \mid x \in N\}, \{+, =\})$ та $B = (\{2x \mid x \in N\}, \{+, =\})$.

Відображення $\varphi(x) = \frac{5}{2}x$ є бієкцією $B \rightarrow A$, причому для $+$ та $=$ виконуються (HF) та (EP). Отже, φ є ізоморфізмом B у A .

Відображення $\varphi(x) = \frac{2}{5}x$ є бієкцією $A \rightarrow B$, причому для $+$ та $=$ маємо (HF) та (EP). Отже, φ є ізоморфізмом A у B .

Приклад 4.4.2. Задамо відображення $\varphi : N \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ парне,} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ непарне.} \end{cases}$$

Таке φ – гомоморфізм $(N, \{+, =\})$ в $(\{0, 1\}, \{+, =\})$, тому що для $+$ та $=$ маємо (HF) та (HP).

Приклад 4.4.3. Розглянемо АС $A = (Z, \{+, =\})$. Тоді відображення $\varphi(x) = -x$ є бієкцією $Z \rightarrow Z$, причому для $+$ та $=$ маємо (HF) та (EP). Отже, φ є автоморфізмом АС $A = (Z, \{+, =\})$.

Приклад 4.4.4. Опишіть усі автоморфізми АС

$$R_{<} = (R; \{<, =\}).$$

Умова (EP) для предиката $<$ має вигляд $a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$. Тому кожне бієктивне монотонно зростаюче відображення $R \rightarrow R$ є автоморфізмом АС $R_{<}$.

Відношення еквівалентності $\approx$ на множині A називають відношенням конгруентності на АС $A = (A, \sigma)$, якщо $\approx$ стабільне відносно базових функцій АС A .

Це означає: для кожного $f \in Fs$

якщо $a_1 \approx b_1, \dots, a_n \approx b_n$, то $f_A(a_1, \dots, a_n) \approx f_A(b_1, \dots, b_n)$.

Нехай $\approx$ – відношення конгруентності на $A = (A, \sigma)$.

Задамо фактор-систему $B = (B, \sigma)$ системи A за відношенням $\approx$. Для кожного $a \in A$ позначимо $[a] = \{c \in A \mid a \approx c\}$. Задамо множину $B = \{[a] \mid a \in A\}$. Таку B позначатимемо $A/\approx$.

Для кожних $f \in Fs$ та $p \in Ps$ задамо:

$$f_B([a_1], \dots, [a_n]) = [f_A(a_1, \dots, a_n)];$$

$$p_B([a_1], \dots, [a_n]) = T \Leftrightarrow \text{існують } c_1 \in [a_1], \dots, c_n \in [a_n]: p_A(a_1, \dots, a_n) = T.$$

Таке визначення f_B коректне, тому що $\approx$ конгруентне.

Задамо канонічне відображення $\varphi: A \rightarrow A/\approx$:

$$\varphi(a) = [a] \text{ для кожного } a \in A.$$

Теорема 4.4.1. Канонічне відображення $\varphi: A \rightarrow A/\approx$ є гомоморфізмом $A = (A, \sigma)$ у $B = (B, \sigma)$.

Такий гомоморфізм φ називають *канонічним*.

Приклад 4.4.5. Нехай $N = (N, \sigma_{ar})$. Задамо відношення $\approx$ на N : $m \approx n \Leftrightarrow \text{mod}(m, 2) = \text{mod}(n, 2)$.

Таке $\approx$ є відношенням конгруентності на N .

Задамо $N/\approx = \{[0], [1]\}$. Тут $[0]$ та $[1]$ – відповідно множини парних і непарних натуральних чисел.

Задамо інтерпретацію на $(N/\approx, \sigma_{ar})$ символів $0, 1, +, \times$.

Константні символи 0 та 1 інтерпретуємо відповідно як елементи носія $[0]$ та $[1]$.

ФС $+$ та $\times$ інтерпретуємо таким чином:

$$+([0], [0]) = [0]; \quad \times([0], [0]) = [0];$$

$$+([0], [1]) = [1]; \quad \times([0], [1]) = [0];$$

$$+([1], [0]) = [1]; \quad \times([1], [0]) = [0];$$

$$+([1], [1]) = [0]; \quad \times([1], [1]) = [1].$$

Таку фактор-систему $(N/\approx, \sigma_{ar})$ позначимо N_{mod2} .

Задамо канонічний гомоморфізм – канонічне відображення

$$\varphi : N \rightarrow N/\approx : \varphi(n) = \begin{cases} [0], & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ [1], & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Теореми про гомоморфізми та ізоморфізм. При розгляді теорем про гомоморфізми та ізоморфізм символи $\&$ та $\forall x$ похідних логічних операцій трактуємо як символи розширеного алфавіту (фактично $\&$ та $\forall x$ стають рівноправними з $\vee$ та $\exists x$).

Формулу, утворену з атомарних формул за допомогою символів логічних операцій $\vee$, $\&$ та $\exists x$, назвемо *$\exists$ -позитивною*.

Формулу, утворену з атомарних формул за допомогою символів логічних операцій $\vee$, $\&$, $\exists x$ та $\forall x$, назвемо *позитивною*.

Розглянемо теореми про гомоморфізми та ізоморфізм для класичних АС X -арних функцій і предикатів.

Теорема 4.4.2. Нехай $\varphi : A \rightarrow B$ – гомоморфізм АС $A = (A, \sigma)$ в АС $B = (B, \sigma)$. Тоді:

1) для кожного терму t сигнатури σ із множиною предметних імен X для кожного $d \in A^X$ маємо $\varphi(t_A(d)) = t_B(\varphi(d))$;

2) для кожної $\exists$ -позитивної формули Φ сигнатури σ із множиною вільних імен X та кожного $d \in A^X$ маємо

$$\Phi_A(d) = T \Rightarrow \Phi_B(\varphi(d)) = T.$$

Теорема 4.4.3. Нехай сюр'єктивне відображення $\varphi : A \rightarrow B$ є гомоморфізмом АС $A = (A, \sigma)$ в АС $B = (B, \sigma)$. Тоді виконується твердження 1) теореми 4.4.2 та твердження:

2) для кожної позитивної формули Φ сигнатури σ із множиною вільних імен X та кожного $d \in A^X$ маємо

$$\Phi_A(d) = T \Rightarrow \Phi_B(\varphi(d)) = T.$$

Наслідок 4.4.1. Нехай φ – сюр'єктивний гомоморфізм АС $A = (A, \sigma)$ в АС $B = (B, \sigma)$. Тоді для кожної позитивної формули Φ сигнатури σ якщо $A \models \Phi$, то $B \models \Phi$.

Теорема 4.4.4 (про ізоморфізм). Нехай $\varphi : A \rightarrow B$ – ізоморфізм АС $A = (A, \sigma)$ в АС $B = (B, \sigma)$. Тоді виконується твердження 1) теореми 4.4.2 та:

2) для кожної формули Φ сигнатури σ із множиною вільних імен X для кожного $d \in A^X$ маємо $\Phi_A(d) = \Phi_B(\varphi(d))$.

Наслідок 4.4.2. Нехай φ – ізоморфізм АС $A = (A, \sigma)$ в АС $B = (B, \sigma)$. Тоді для кожної формули Φ сигнатури σ маємо

$$A \models \Phi \Leftrightarrow B \models \Phi.$$

Наслідок 4.4.3. Нехай φ – автоморфізм АС $A = (A, \sigma)$. Тоді для кожної формули Φ сигнатури σ із множиною вільних імен X для кожного $d \in A^X$ маємо $\Phi_A(d) = \Phi_A(\varphi(d))$.

Приклад 4.4.6. Покажемо істотність умови позитивності у формулюванні теорем 4.4.2 та 4.4.3.

Канонічне відображення $\varphi : N \rightarrow N/\approx$, де $N/\approx = \{[0], [1]\}$, є сюр'єктивним гомоморфізмом N в N_{mod2} .

Нехай Φ – це формула $\neg(1 + 1) = 0$. Тоді $N \models \Phi$, але $N_{mod2} \not\models \Phi$, адже $+[1], [1] = [0]$.

АС $A = (A, \sigma)$ та $B = (B, \sigma)$ однієї сигнатури *елементарно еквівалентні*, якщо для кожної формули Φ сигнатури σ маємо $A \models \Phi \Leftrightarrow B \models \Phi$. Цей факт позначимо $A \approx B$.

Елементарна еквівалентність АС засвідчує, що вони мають однакові властивості на рівні логіки першого порядку, тобто їх не можна відрізнити, використовуючи мову першого порядку.

Приклад 4.4.7. $(R; \{\times, =\}) \not\approx (Q; \{\times, =\})$. Справді, нехай Φ – це формула $\forall x \exists y (x = y \times y \times y)$. Тоді $(R; \{\times, =\}) \models \Phi$ та $(Q; \{\times, =\}) \not\models \Phi$.

Приклад 4.4.8. $(Z; \{+, =\}) \not\approx (Q; \{+, =\})$. Справді, нехай Φ – це формула $\forall x \exists y (x = y + y)$. Тоді $(Q; \{+, =\}) \models \Phi$ та $(Z; \{+, =\}) \not\models \Phi$.

Приклад 4.4.9. $(N; \{+, =\}) \not\approx (R; \{+, =\})$. Справді, нехай Φ – це формула $\forall x \forall y \exists z (x = y + z)$. Тоді $(R; \{+, =\}) \models \Phi$ та $(N; \{+, =\}) \not\models \Phi$.

Приклад 4.4.10. $(N, \{\leq, =\}) \not\approx (Z, \{\leq, =\})$. Справді, нехай Φ – це формула $\exists m \forall x (m \leq x)$. Тоді $(N, \{\leq, =\}) \models \Phi$ та $(Z, \{\leq, =\}) \not\models \Phi$.

З ізоморфізму АС A та B випливає (наслідок 4.4.2) їхня елементарна еквівалентність. Зворотне неправильне, адже елементарно еквівалентні АС можуть мати носії різної потужності.

Можна довести [7], що $(Q, \{<, =\}) \cong (R, \{<, =\})$, але ці АС не ізоморфні, тому що Q зліченна, а R має потужність континууму. Отже,

$$A \cong B \Rightarrow A \approx B;$$

$$A \not\approx B \Rightarrow A \not\cong B.$$

Метод автоморфізмів. Цей метод доведення невивразності предикатів в АС базується на теоремі про вивразність.

Теорема 4.4.5 (про вивразність). Нехай φ – автоморфізм АС $A = (A, \sigma)$. Якщо предикат $P : A^X \rightarrow \{T, F\}$ вивразний в A , то $P(d) = P(\varphi(d))$ для всіх $d \in A^X$.

Отже, для доведення невивразності P в A достатньо знайти автоморфізм φ системи A такий, що порушується умова

$$P(d) = P(\varphi(d)).$$

Приклад 4.4.11. Предикат " $z = x+y$ " невивразний в АС $Z_{<} = (Z, \{<, =\})$.

Відображення $\varphi(x) = x+1$ є автоморфізмом $Z_{<}$, тому що таке φ бієктивне і зберігає значення предикатів $<$ та $=$.

Однак $\varphi(0) = 1$, тому виконується $0 = 0+0$ та не виконується $\varphi(0) = \varphi(0) + \varphi(0)$.

Приклад 4.4.12. Предикат " $x < y$ " невивразний в АС $Z_{+} = (Z, \{+, =\})$.

Відображення $\varphi(x) = -x$ є автоморфізмом Z_{+} , тому що таке φ бієктивне і зберігає значення функції $+$ та предиката $=$. Однак $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(1) = -1$, тому виконується $0 < 1$ та не виконується $\varphi(0) < \varphi(1)$.

Приклад 4.4.13. Предикати " $x=1$ " та " $y=x+1$ " невивразні в АС $(N, \{y=x+2, =\})$.

$$\text{Відображення } \varphi(x) = \begin{cases} x+1, & x \text{ парне,} \\ x-1, & x \text{ непарне,} \end{cases}$$

є автоморфізмом такої АС, оскільки бієктивне і зберігає значення базових предикатів.

Предикат " $x=1$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(1) = T \text{ та } P(\varphi(1)) = P(0) = F.$$

Предикат " $y = x+1$ " позначимо $Q(x, y)$. Тоді

$$Q(0, 1) = T \text{ та } Q(\varphi(0), \varphi(1)) = Q(1, 0) = F.$$

Приклад 4.4.14. Предикати " $x=3$ " та " $|x-y|=2$ " невиразні в АС $(Z, \{x-y=3, =\})$.

$$\text{Відображення } \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & \text{mod}(x,3)=0, \\ x-1, & \text{mod}(x,3)=1 \text{ або } \text{mod}(x,3)=2, \end{cases}$$

є автоморфізмом такої АС, оскільки бієктивне і зберігає значення базових предикатів.

Предикат " $x=3$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(3) = T \text{ та } P(\varphi(3)) = P(5) = F.$$

Предикат " $|x-y|=2$ " позначимо $Q(x, y)$. Тоді

$$Q(2, 0) = T \text{ та } Q(\varphi(2), \varphi(0)) = Q(1, 2) = F.$$

Приклад 4.4.15. З'ясуємо виразність у $R_m = (R; \{x-y=1, =\})$ предикатів " $x=0$ ", " $x-y=1$ ", " $y=x+2$ ".

Відображення $\varphi(x) = -x$ та $\alpha(x) = x+1$ є автоморфізмами R_m .

Предикат " $x=0$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(0) = T \text{ та } P(\alpha(0)) = P(1) = F.$$

Предикат " $x-y=1$ " позначимо $Q(x, y)$. Тоді

$$Q(1, 0) = T \text{ та } Q(\varphi(1), \varphi(0)) = Q(-1, 0) = F.$$

Предикат " $y=x+2$ " позначимо $S(x, y)$. Тоді

$$S(0, 2) = T \text{ та } S(\varphi(0), \varphi(2)) = S(0, -2) = F.$$

Ці предикати невиразні в R_m .

Приклад 4.4.16. З'ясуємо виразність у $Z_m = (Z; \{x-y=4, =\})$ предикатів " $x=4$ ", " $x-y=4$ ", " $|x-y|=12$ ".

Відображення $\varphi(x) = -x$ є автоморфізмом Z_m .

Предикат " $x=4$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(4) = T \text{ та } P(\alpha(4)) = P(1) = F.$$

Предикат " $x-y=4$ " позначимо $Q(x, y)$. Тоді

$$Q(4, 0) = T \text{ та } Q(\varphi(4), \varphi(0)) = Q(-4, 0) = F.$$

Ці предикати невиразні в R_m .

Предикат " $|x-y|=12$ " виразний у R_m формулою

$$\exists z \exists u (|x-z|=4 \ \& \ |z-u|=4 \ \& \ |u-y|=4 \ \& \ \neg x=u \ \& \ \neg z=y).$$

Приклад 4.4.17. З'ясуємо виразність у $Z_d = (Z; \{x/y, =\})$ предикатів " $x=0$ ", " $x=1$ ", " $z=x \times y$ ".

Відображення $\varphi(x) = -x$ є автоморфізмом Z_d .

Предикат " $x=1$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(0) = T \text{ та } P(\varphi(0)) = P(-1) = F.$$

Предикат " $z=x \times y$ " позначимо $Q(x, y, z)$. Тоді

$$Q(1, 1, 1) = T \text{ та } Q(\varphi(1), \varphi(1), (\varphi(1))) = Q(-1, -1, -1) = F.$$

Ці предикати невиразні в Z_d .

Предикат " $x=0$ " виразний у Z_d формулою $\neg \exists z(z/x)$.

Приклад 4.4.18. Предикати " $x=2$ ", " $y=x+2$ ", " $z=x+y$ " невиразні в АС $N_x = (N, \{\times, =\})$.

Відображення, задане умовою $\varphi(2^a \cdot 3^b \cdot c) = 2^b \cdot 3^a \cdot c$, – автоморфізм такої АС, оскільки бієктивне і зберігає значення функції $\times$ та предиката $=$.

Предикат " $x=2$ " позначимо $P(x)$. Тоді

$$P(2)=T \text{ та } P(\varphi(2))=P(3)=F.$$

Предикат " $y=x+2$ " позначимо $S(x, y)$. Тоді

$$S(2, 4)=T \text{ та } S(\varphi(2), \varphi(4)) = S(3, 9)=F.$$

Предикат " $z=x+y$ " позначимо $Q(x, y, z)$. Тоді

$$Q(2, 2, 4) = T \text{ та } Q(\varphi(2), \varphi(2), (\varphi(4))) = Q(3, 3, 9) = F.$$

Приклад 4.4.19. Опишіть усі автоморфізми АС

$$N_+ = (N; \{+, =\}).$$

Предикат " $x=0$ " виражаємо формулою $x+x=x$.

Предикат " $x=1$ " виражаємо формулою

$$\forall u \forall v (x=u+v \rightarrow u=u+u \vee v=v+v) \& \neg x=x+x.$$

Тому виразним є кожний предикат вигляду " $x=m$ ", де m – фіксоване натуральне число; наприклад, " $x=3$ " виражаємо формулою $\exists z(z=1 \& x = z+z+z)$. Таку формулу для предиката " $x=m$ " позначимо $Cm(x)$. Тоді " $x=m$ " – це $Cm_{N_+}(x)$.

Нехай $\varphi : N \rightarrow N$ – бієкція. Якщо φ не є тотожним відображенням, то для деякого m маємо $\varphi(m) \neq m$. Маємо $Cm_{N_+}(m) = T$ та $Cm_{N_+}(\varphi(m)) = F$. Проте за теоремою 4.4.5 для виразного предиката $Cm_{N_+}(x)$ має бути $Cm_{N_+}(m) = Cm_{N_+}(\varphi(m))$. Отже, таке φ не може бути автоморфізмом N_+ .

Таким чином, N_+ не має нетривіальних автоморфізмів.

Приклад 4.4.20. Опишіть усі автоморфізми АС

$$N_s = (N; \{y=x+1, =\}).$$

Предикати " $x=0$ " та " $x=1$ " виражаємо формулами $\neg\exists y(x=y+1)$ та $\exists z(\neg\exists y(z=y+1) \& x=z+1)$. Тому в N_s виразним є кожний предикат вигляду " $x=m$ " для довільного $m \in N$.

Далі аналогічно прикладу 4.4.19 показуємо, що N_s не має нетривіальних автоморфізмів.

Зауваження. Якщо АС A не має нетривіальних автоморфізмів, то для такої A метод автоморфізмів не діє.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення гомоморфізму АС.
2. Дайте визначення повного гомоморфізму, сильного гомоморфізму АС.
3. Дайте визначення ізоморфізму АС.
4. Що таке автоморфізм АС?
5. Що таке відношення конгруентності?
6. Що таке фактор-система?
7. Що таке канонічний гомоморфізм?
8. Сформулюйте теореми про гомоморфізм.
9. Сформулюйте теорему про ізоморфізм та її наслідки.
10. Дайте визначення елементарно еквівалентних АС.
11. Як співвідносяться поняття ізоморфізму та елементарної еквівалентності АС?
12. Сформулюйте теорему про виразність.
13. Опишіть метод автоморфізмів для доведення невиразності предикатів у АС.

Вправи

1. Доведіть: відношення $\cong$ на множині АС однієї сигнатури – це відношення еквівалентності.
2. Нехай $\varphi : A \rightarrow B$ – гомоморфізм $A = (A, \sigma)$ у $B = (B, \sigma)$. Нехай множина $D \subseteq B$ утворює підсистему системи B . Доведіть, що множина $\varphi^{-1}(D) \subseteq A$ утворює підсистему системи A .

3. З'ясуйте, як співвідносяться щодо ізоморфізму такі АС:

- 1) $(N; \{+, =\})$, $(Z; \{+, =\})$, $(Q; \{+, =\})$ та $(R; \{+, =\})$;
- 2) $(N; \{<, =\})$, $(Z; \{<, =\})$, $(Q; \{<, =\})$ та $(R; \{<, =\})$;
- 3) $(N; \{\leq, =\})$, $(Z; \{\leq, =\})$, $(Q; \{\leq, =\})$ та $(R; \{\leq, =\})$.

4. З'ясуйте, як співвідносяться щодо елементарної еквівалентності такі АС:

- 1) $(N; \{\times, =\})$, $(Z; \{\times, =\})$, $(Q; \{\times, =\})$, $(R; \{\times, =\})$, $(C; \{\times, =\})$;
- 2) $(N; \{+, =\})$, $(Z; \{+, =\})$ та $(R; \{+, =\})$;
- 3) $(N; \{<, =\})$, $(Z; \{<, =\})$ та $(Q; \{<, =\})$;
- 4) $(N; \{\leq, =\})$, $(Z; \{\leq, =\})$ та $(R; \{\leq, =\})$.

5. Опишіть усі автоморфізми таких АС:

- 1) $(Z; \{<, =\})$;
- 2) $(Z; \{+, =\})$;
- 3) $(N; \{|x-y|=1, =\})$.

6. З'ясуйте виразність предикатів у таких АС:

- 1) " $x=4$ ", " $\text{mod}(x, 4)=3$ ", " $y=x+1$ ", " $z=x \times y$ " в АС $(Z; \{+, =\})$;
- 2) " $x=3$ ", " $\text{mod}(x, 3)=0$ ", " $\text{mod}(x, 3)=2$ ", " $y=x+1$ " в АС $(N; \{+, =\})$;
- 3) " $\text{mod}(x, 3)=0$ ", " $\text{mod}(x, 5)=2$ ", " $\text{mod}(x, 2)=1$ ", " $\text{mod}(x, 3)=1$ " в АС $(Z; \{+, =\})$;
- 4) " $x=10$ ", " $\text{mod}(x, 3)=0$ ", " $\text{mod}(x, 2)=1$ ", " $z=x+y$ " в АС $(N; \{\times, =\})$;
- 5) " $x=3$ ", " $x=7$ ", " $x=-1$ ", " $x=-2$ ", " $z=x+y$ ", " $x=y+6$ ", " $z=x+y+1$ " в АС $(Z; \{\times, =\})$;
- 6) " $x=0$ ", " $x=2$ ", " $x=3$ ", " $z=x+1$ " в АС $(N; \{<, =\})$;
- 7) " $x=0$ ", " $x=1$ ", " $x=2$ " в АС $(N; \{y=x+1, =\})$;
- 8) " $x=2$ ", " $x=6$ ", " $y=x+6$ ", " $y=x+1$ " в АС $(N; \{y=x+2, =\})$;
- 9) " $x=3$ ", " $y=x+2$ ", " $y=x+6$ ", " $x=1$ " в АС $(N; \{y=x+3, =\})$;
- 10) " $x=4$ ", " $y=x+3$ ", " $|x-y|=12$ " в АС $(N; \{y=x+4, =\})$;
- 11) " $x=2$ ", " $|x-y|=4$ ", " $y=x+6$ " в АС $(Z; \{y=x+2, =\})$;
- 12) " $x=5$ ", " $x-y=4$ ", " $|x-y|=6$ " в АС $(Z; \{x-y=3, =\})$;
- 13) " $x=0$ ", " $x-y=1$ ", " $y=x+3$ " в АС $(Q; \{|x-y|=1, =\})$;
- 14) " $|x-y|=3$ ", " $y-x=2$ ", " $z=x+y$ " в АС $(Z; \{|x-y|=1, =\})$;
- 15) " $x=2$ ", " $|x-y|=3$ ", " $z=x+y$ ", " $x-y=2$ " в АС $(Z; \{|x-y|=2, =\})$;
- 16) " $x=1$ ", " $|x-y|=6$ ", " $z=x \times y$ ", " $y=x+4$ " в АС $(R; \{|x-y|=3, =\})$;
- 17) " $x=1$ ", " $x=5$ ", " $z=x+y$ ", " x – просте" в АС $(N; \{x/y, =\})$.

4.5. Неокласичні логіки першого порядку

У цьому підрозділі розглянемо першопорядкові композиційно-номінативні логіки еквітонних квазіарних предикатів – неокласичні логіки (НКЛ) першого порядку. Основну увагу приділимо НКЛ кванторного рівня – чистим першопорядковим НКЛ.

Мови чистих першопорядкових КНЛ. Чиста першопорядкова композиційно-номінативна логіка квазіарних предикатів (ЧКНЛ) – це КНЛ квазіарних предикатів кванторного рівня. Семантичними моделями ЧКНЛ є композиційні системи квазіарних предикатів вигляду $({}^V A, Pr^{V-A}, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина базових композицій чистих першопорядкових логік.

Алгебра $AQ^{V-A} = (Pr^{V-A}, CQ)$ – це чиста першопорядкова композиційна алгебра квазіарних предикатів, її побудова визначає мову ЧКНЛ.

Алфавіт мови ЧКНЛ:

- V – множина предметних імен;
- Ps – множина предикатних символів (*сигнатура* мови);
- $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина символів базових композицій.

Множину *Fr формул* мови ЧКНЛ задаємо індуктивно:

- кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули *атомарні*;
- нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Мови ЧКНЛ рівні, якщо в них однакові множини формул.

При записі застосовуємо традиційні скорочення формул, використовуючи символи $\rightarrow, \&, \leftrightarrow, \forall x$ та дужки "(" і ")". Пріоритет символів композицій: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ та $\forall x, \neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Як і в мовах РНЛ, для $\Phi \in Fr$ задаємо множину імен $nm(\Phi)$ та сигнатуру формули $\sigma(\Phi)$.

$\sigma(\Phi)$ – це множина всіх тих $p \in Ps$, які входять до складу Φ .

$nm(\Phi)$ – це множина всіх $v \in V$, які фігурують у символах ре-номінації та квантифікації Φ .

Розширюємо σ та nm на множини формул: для $\Gamma \subseteq Fr$ задамо

$$nm(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} nm(\Phi); \quad \sigma(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} \sigma(\Phi).$$

У множині V виділимо підмножину $V_T \subseteq V$ імен, гарантовано неістотних для всіх $p \in Ps$ – тотально неістотних імен. Імена із V_T також називають синтетично неістотними. Для визначення множин гарантовано (строго) неістотних для формул імен задамо функцію $v: Fr \rightarrow 2^V$. Для всіх $p \in Ps$ маємо $v(p) = V_T$, далі задаємо:

$$v(\neg\Phi) = v(\Phi);$$

$$v(\vee\Phi\Psi) = v(\Phi) \cup v(\Psi);$$

$$v(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (v(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin v(\Phi)_{i \in 1, \dots, n}\};$$

$$v(\exists x\Phi) = v(\Phi) \cup \{x\}.$$

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Ps)$.

Абстрагуючись від способів запису формул, отримуємо, що мова ЧНКЛ визначається розширеною сигнатурою.

Формула мови ЧНКЛ Φ *примітивна*, якщо Φ атомарна або Φ має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$, де реномінація не має тотожних перейменувань та $\{\bar{v}\} \cap v(p) = \emptyset$.

Чисті першопорядкові логіки еквітонних предикатів. ЧНКЛ еквітонних квазіарних предикатів називається [9, 26] числою першопорядковою *неокласичною* логікою (ЧНКЛ). ЧНКЛ та ЧНКЛ мають однакові класи мов, а відрізняються різними класами семантичних моделей.

Далі в цьому підрозділі розглядатимемо ЧНКЛ.

У випадку ЧНКЛ клас семантичних моделей звужується до композиційних систем вигляду $(^V A, PrPE^{V-A}, CQ)$, відповідно звужується клас інтерпретацій.

У логіках еквітонних предикатів замість строгої беремо *слабку* неістотність, тому трактуємо V_T як множину імен, гарантовано слабо неістотних для всіх $p \in Ps$ – тотально слабо неістотних імен.

Інтерпретуємо мову ЧНКЛ на композиційних системах еквітонних предикатів вигляду $CS = (^V A, PrPE^{V-A}, CQ)$. Символи Ps позначають базові предикати в $PrPE^{V-A}$, для опису цього позначення задамо тотальне однозначне $I: Ps \rightarrow PrPE^{V-A}$. Продовжимо I до відображення інтерпретації формул $I: Fr \rightarrow PrPE^{V-A}$ згідно з побудовою складніших формул із більш простих за допомогою символів Cs :

$$- I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)); I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi));$$

$$- I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi));$$

$$- I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)).$$

Трійку (CS, Σ, I) назвемо інтерпретацією мови сигнатури Σ . Така (CS, Σ, I) визначається алгеброю (AC) із доданою сигнатурою $A = (({}^V A, PrPE^{V-A}), \Sigma, I)$. Ці AC із доданою сигнатурою є семантичними моделями, які пов'язують мову логіки з алгеброю даних, тому AC із доданою сигнатурою надалі вважатимемо інтерпретаціями мови та скорочено позначатимемо $A = (A, I)$.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $A = (A, I)$ – позначаємо Φ_A .

Ім'я $x \in V$ *неістотне* для формули Φ , якщо для кожної інтерпретації A x неістотне для Φ_A .

Формула Φ *неспростовна (частково істинна) при інтерпретації на A* , або *A -неспростовна*, якщо Φ_A – неспростовний предикат. Цей факт позначимо $A \models \Phi$.

Φ *неспростовна (частково істинна)*, якщо Φ неспростовна при кожній інтерпретації. Цей факт позначимо $\models \Phi$.

Φ *виконується при інтерпретації на A* , або *A -виконується*, якщо Φ_A виконуваний.

Φ *виконується*, якщо Φ виконується при деякій інтерпретації.

Тавтології. На рівень ЧНКЛ із пропозиційного рівня переноситься поняття тавтології. Це формули мови ЧНКЛ, які мають структуру тавтологій мови ПЛ.

Формула мови ЧНКЛ *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ чи $\exists x\Phi$. Позначимо Fr_0 множину всіх пропозиційно нерозкладних формул мови.

Істиннісна оцінка мови ЧНКЛ – це довільне тотальне відображення $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$.

Часткова істиннісна оцінка мови ЧНКЛ – це довільне відображення $\nu : Ps \rightarrow \{T, F\}$.

Продовжимо до $\nu : Fr \rightarrow \{T, F\}$ так:

$$\nu(\neg\Phi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } \nu(\Phi) = F, \\ F, & \text{якщо } \nu(\Phi) = T, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } \nu(\Phi) \uparrow. \end{cases}$$

$$v(\vee\Phi\Psi) = \begin{cases} T, & \text{якщо } v(\Phi) = T \text{ або } v(\Psi) = T, \\ F, & \text{якщо } v(\Phi) = F \text{ та } v(\Psi) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Твердження 4.5.1. Нехай v та ρ – часткові істиннісні оцінки такі, що для кожного $p \in Ps$ маємо: $v(p) \downarrow \Rightarrow \rho(p) \downarrow = v(p)$. Тоді для кожної формули Φ маємо: $v(\Phi) \downarrow \Rightarrow \rho(\Phi) \downarrow = v(\Phi)$.

Формула Φ – *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істинній оцінці τ .

Кожна тавтологія є неспростовною формулою. Проте зворотне неправильне.

Приклад 4.5.1. Формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{x}}\Phi$ та $\exists x \exists y \Phi \leftrightarrow \exists y \exists x \Phi$ неспростовні, але не тавтології.

Твердження 4.5.2. Φ – тавтологія $\Leftrightarrow v(\Phi) = T$ або $v(\Phi) \uparrow$ для кожної часткової істиннісної оцінки v .

Наслідок 4.5.1. Φ – не тавтологія $\Rightarrow v(\Phi) = F$ для деякої часткової істиннісної оцінки v .

Семантичні властивості ЧНКЛ. Аналогічно мові РНЛ на множині формул мови ЧНКЛ уведемо такі відношення.

Ψ є *тавтологічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models_t \Psi$), якщо формула $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Ψ є (*неспростовнісним*) *логічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models \Psi$), якщо формула $\Phi \rightarrow \Psi$ неспростовна.

Φ та Ψ *тавтологічно еквівалентні* (позн. $\Phi \sim_t \Psi$), якщо

$$\Phi \models_t \Psi \text{ та } \Psi \models_t \Phi.$$

Φ та Ψ *логічно еквівалентні* (позн. $\Phi \sim \Psi$), якщо

$$\Phi \models \Psi \text{ та } \Psi \models \Phi.$$

Ψ є *слабким логічним наслідком* Φ (позн. $\Phi \models = \Psi$), якщо для всіх інтерпретацій A маємо:

$$A \models \Phi \Rightarrow A \models \Psi.$$

Приклад 4.5.2. Властивості відношень $\models_t$, $\models$, $\models =$, $\sim_t$, $\sim$:

- 1) відношення $\models_t$, $\models$ та $\models =$ рефлексивні й транзитивні;
- 2) $\sim_t$ та $\sim$ рефлексивні, транзитивні й симетричні;
- 3) Φ тавтологія $\Leftrightarrow \models_t \Phi$;

- 4) Φ неспростовна $\Leftrightarrow \models \Phi \Leftrightarrow \Vdash \Phi$;
- 5) $\Phi \sim_i \Psi \Leftrightarrow \Phi \leftrightarrow \Psi$ тавтологія;
- 6) $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \Psi$ та $\models \Psi \rightarrow \Phi$;
- 7) $\Phi \models_i \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$;
- 8) $\Phi \Vdash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$.

На рівень ЧНКЛ із рівня РНЛ переносяться приклади 3.3.4 та 3.3.5, які засвідчують:

- не завжди маємо $\Phi \models \Psi \Rightarrow \Phi \models_i \Psi$;
- не завжди маємо $\Phi \Vdash \Psi \Rightarrow \Phi \models \Psi$.

Основою еквівалентних перетворень формул КНЛ є

Теорема 4.5.1 (еквівалентності). Нехай Φ' отримана із Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Для ЧНКЛ успадковуємо властивості пропозиційного рівня.

Із реномінативного рівня успадковуємо властивості формул R, RI, RU, RR, R $\neg$, R $\vee$, які пов'язані з реномінацією.

Розглянемо властивості ЧНКЛ, пов'язані із кванторами.

Приклад 4.5.3. Властивості кванторів, для подання яких не використовуються реномінації. Такі властивості ЧНКЛ цілком аналогічні властивостям класичної логіки.

- Q1) $\forall x\Phi \sim \neg \exists x\neg\Phi$ та $\exists x\Phi \sim \neg \forall x\neg\Phi$.
- Q2) $\Phi \models \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi \models \Phi$.
- Q3) $\models \Phi \Leftrightarrow \models \forall x\Phi$.
- Q4) $\Phi \Vdash \forall x\Phi$ та $\forall x\Phi \Vdash \Phi$, але не завжди $\Phi \models \forall x\Phi$.
- Q5) $\exists x\Phi \sim \forall x\exists x\Phi$; $\exists x\Phi \sim \exists x\exists x\Phi$; $\forall x\Phi \sim \forall x\forall x\Phi$; $\forall x\Phi \sim \exists x\forall x\Phi$.
- Q6) $\Phi \sim \forall x\Phi \Leftrightarrow \Phi \models \forall x\Phi \Leftrightarrow \exists x\Phi \models \Phi \Leftrightarrow \exists x\Phi \sim \Phi$.
- Q7) Якщо $\models \Phi$, то $\models \exists x\Phi$, $\Phi \sim \exists x\Phi$ та $\models \Phi \sim \forall x\Phi$.
- Q8) Якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$, то $\models \exists x\Phi \rightarrow \exists x\Psi$ та $\models \forall x\Phi \rightarrow \forall x\Psi$.
- Q9) Якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$ та $\models \Psi \rightarrow \forall x\Psi$, то $\models \exists x\Phi \rightarrow \Psi$.
- Q10) Якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$ та $\models \Phi \rightarrow \forall x\Phi$, то $\models \Phi \rightarrow \forall x\Psi$.
- Q11) $\exists x\exists y\Phi \sim \exists y\exists x\Phi$ та $\forall x\forall y\Phi \sim \forall y\forall x\Phi$.
- Q12) $\exists y\forall x\Phi \models \forall x\exists y\Phi$, але не завжди $\forall x\exists y\Phi \models \exists y\forall x\Phi$.
- Q13) $\exists x\Phi \vee \exists x\Psi \sim \exists x(\Phi \vee \Psi)$ та $\forall x\Phi \& \forall x\Psi \sim \forall x(\Phi \& \Psi)$.
- Q14) $\exists x(\Phi \& \Psi) \models \exists x\Phi \& \exists x\Psi$ та $\forall x\Phi \vee \forall x\Psi \models \forall x(\Phi \vee \Psi)$.

Приклад 4.5.4. Властивості формул, пов'язані із кванторами та реномінаціями.

Ren) $\exists y\Phi \sim \exists zR_z^y(\Phi)$ за умови z неістотне для Φ – перейменування кванторного імені.

$\text{R}\exists$) $R_x^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \sim \exists yR_x^{\bar{v}}(\Phi)$, якщо $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ – проста (обмежена) $\text{R}\exists$ -дистрибутивність.

$\text{R}\exists$) $R_x^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \sim \exists zR_x^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi)$, де z неістотне для Φ та $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ – $\text{R}\exists$ -дистрибутивність.

UnR) $\exists xR_{y,\bar{u}}^{x,\bar{v}}(\Phi) \sim R_{y,\bar{u}}^{x,\bar{v}}(\Phi)$ при $x \notin \{y, \bar{v}\}$ – неістотність верхніх імен у реномінаціях.

Зокрема, при $x \neq y$ маємо $\exists xR_y^x(\Phi) \sim R_y^x(\Phi)$.

Зазначені властивості правильні для загального випадку ЧКНЛ без обмежень монотонності (еквітонності), але це вже не так для властивостей із наступного прикладу.

Приклад 4.5.5. У випадку ЧНКЛ маємо властивості:

$$\text{R}\exists x) \models R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi) \rightarrow \exists v_1 \dots \exists v_n \Phi;$$

$$\forall x \text{R}) \models \forall v_1 \dots \forall v_n \Phi \rightarrow R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi).$$

Критерій неістотності предметних імен для формул:

Теорема 4.5.2. $x \in V$ (слабо) неістотне для $\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x\Phi$.

Для логік ЕП маємо $\models \forall x\Phi \rightarrow \Phi$ та $\models \Phi \rightarrow \exists x\Phi$, звідки випливає

Наслідок 4.5.2. x неістотне для $\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x\Phi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \forall x\Phi \Leftrightarrow \models \exists x\Phi \leftrightarrow \Phi \Leftrightarrow \models \exists x\Phi \rightarrow \Phi$.

Неістотні імена дають змогу робити перейменування кванторних імен.

Теорема 4.5.3. Нехай $y \in V$ неістотне для Φ . Тоді $\exists x\Phi \sim \exists yR_y^x(\Phi)$ та $\forall x\Phi \sim \forall yR_y^x(\Phi)$.

Приклад 4.5.6. Умова $\{x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}\}$ є істотною для властивості $\text{R}\exists$ s. Справді,

$$\exists vR_u^v(\Phi) \sim R_u^v(\Phi) \text{ при } v \neq u;$$

$$\exists v R_v^v(\Phi) \sim \exists v \Phi;$$

$$R_u^v(\exists v \Phi) \sim \exists v \Phi;$$

$$\text{неправильно, що } \exists u R_u^v(\Phi) \sim R_u^v(\exists u \Phi).$$

Для пронесення символів реномінації через символи $\exists x$, якщо умова властивості $R\exists s$ не виконується, потрібно спочатку замінити підформулу $\exists x \Phi$ на підформулу $\exists z R_z^{\hat{o}}(\Phi)$, де z неістотне для Φ та $z \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$. Це дає можливість далі застосувати властивість $R\exists s$.

Таким чином, для виконання еквівалентних перетворень довільних формул треба мати достатній (потенційно нескінченний) запас неістотних для формул імен. Це дає змогу пронести реномінації вглиб формули і тим самим перетворити формулу до вигляду, близького до класичного, коли реномінації застосовуємо лише до ПС.

Для формул класичної логіки істотними є тільки їхні *вільні* предметні імена, від яких *може залежати* значення відповідних предикатів. Це зумовлено фактом, що у класичній логіці для кожного базового предиката за допомогою спеціальної *функції арності* $ar: Ps \rightarrow N$ визначається скінченна стандартна множина *істотних* імен: для n -арного предиката істотними є саме імена $1, \dots, n$.

Для логік квазіарних предикатів важливою є не лише істотність, але передусім *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів ЧКНЛ будемо вказувати множину *неістотних* імен, від яких їхні значення *не залежать*.

Предметні імена, неістотність яких постулюється, називають синтетично неістотними.

Предметне ім'я $x \in V$ тотально неістотне, якщо x неістотне для кожного $p \in Ps$.

Можливість виконання еквівалентних перетворень довільних формул вимагає наявності нескінченної множини тотально неістотних імен. Тому розглядатимемо тільки такі мови ЧКНЛ та їхні інтерпретації, для яких зазначена множина нескінченна. Це означає, що у множині V виділено нескінченну підмножину $V_T \subseteq V$ тотально неістотних імен.

У загальному випадку ЧКНЛ трактуємо V_T як множину імен, гарантовано строго неістотних для всіх $p \in Ps$. У випадку ЧКНЛ еквітонних предикатів – ЧНКЛ – трактуємо V_T як множину імен, гарантовано слабо неістотних для всіх $p \in Ps$.

Для визначення множин гарантовано слабо неістотних для формул мови ЧНКЛ імен задаємо функцію $\mu : Fr \rightarrow 2^V$ таку:

$$\mu(p) = V_T \text{ для всіх } p \in Ps;$$

$$\mu(\neg\Phi) = \mu(\Phi);$$

$$\mu(\vee\Phi\Psi) = \mu(\Phi) \cup \mu(\Psi);$$

$$\mu(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \mu(\Phi)_{i \in 1, \dots, n}\};$$

$$\mu(\exists x\Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}.$$

Пару (Ps, μ) назвемо сигнатурою синтетичної неістотності. Така сигнатура є аналогом сигнатури класичної логіки (Ps, ar) . На відміну від випадку класичної логіки, сигнатура синтетичної неістотності не впливає на множину формул ЧНКЛ, але обмежує клас інтерпретацій.

Ми однотипно задаємо $\mu(p) = V_T$ для всіх $p \in Ps$. Таке початкове задання μ можна узагальнити, задаючи $\mu(p)$ індивідуально для різних $p \in Ps$. Тоді тотальна неістотність імені x означає $x \in \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$, тому множиною тотально неістотних імен буде

$V_T = \bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$. Постулювання нескінченності множини тотально неістотних імен вимагає, щоб V_T була нескінченною.

Зауважимо, що для символів, які позначають спеціальні предикати (напр. символи $=_{xy}$ для предикатів рівності), множина неістотних імен задається окремо (напр. для $=_{xy}$ маємо $\mu(p) = V \setminus \{x, y\}$).

Теорема 4.5.4. Нехай $y \in V_T$ та $y \notin nm(\Phi)$; тоді $y \in \mu(\Phi)$.

У загальному випадку ЧКНЛ:

нехай $y \in V_T$ та $y \notin nm(\Phi)$; тоді $y \in v(\Phi)$.

Теорема 4.5.5. $x \in \mu(\Phi) \Rightarrow x$ (слабо) неістотне для Φ .

У загальному випадку ЧКНЛ:

$x \in v(\Phi) \Rightarrow x$ (строго) неістотне для Φ .

Наслідок 4.5.3. $x \in \mu(\Phi) \Rightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та $\models \exists x \Phi \rightarrow \Phi$.

Фундаментальним твердженням про семантичні моделі КНЛ є

Теорема 4.5.6 (про розширення). Нехай АС однієї сигнатури $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ та формула Φ такі, що для кожних $p \in \sigma(\Phi)$ та $d \in {}^V A$ маємо: $p_A(d) \downarrow \Rightarrow p_B(d) \downarrow = p_A(d)$. Тоді для кожного $d \in {}^V A$ маємо: $\Phi_A(d) \downarrow \Rightarrow \Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d)$.

Теорема про розширення індукована монотонністю композицій. Вона виконується для загального випадку логік квазіарних предикатів.

Нехай $A = (A, I_A)$ і $B = (A, I_B)$ – АС однієї сигнатури.

АС B – *система розширень* для АС A , якщо для всіх $p \in Ps$ та $\delta \in {}^V A$ маємо:

$$p_A(\delta) \downarrow \Rightarrow p_B(\delta) \downarrow = p_A(\delta).$$

Наслідок 4.5.4. Нехай $B = (A, I_B)$ – система розширень для $A = (A, I_A)$. Тоді для всіх Φ та $d \in {}^V A$ маємо:

$$\Phi_A(d) \downarrow \Rightarrow \Phi_B(d) \downarrow = \Phi_A(d).$$

Еквівалентні перетворення формул. Розглянемо еквівалентні перетворення формул мови ЧКНЛ. Такі перетворення правильні й для ЧНКЛ, лише замість строгої неістотності та функції v маємо слабку неістотність та функцію μ .

Формула Ψ перебуває в *різнokванторній* формі, якщо всі входження кванторних префіксів у формулу Ψ , коли вони є, – за різними тотально неістотними іменами, причому кожне кванторне ім'я z формули Ψ не може лежати в області дії символу $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ такого, що $z \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

Формулу в різнokванторній формі назвемо *різнokванторною*.

Формула Ψ перебуває у *нормальній формі*, якщо всі символи реномінації у цій формулі, коли вони є, застосовані тільки до ПС, а всі входження кванторних префіксів у формулу Ψ , коли вони є, – за різними тотально неістотними іменами.

Формулу в нормальній формі назвемо *нормальною формулою*.

Теорема 4.5.7. Для кожної формули Φ можна побудувати різнokванторну формулу Ξ : $\Phi \sim \Xi$.

Для побудови такої Ξ використовуємо властивість Rep і теорему еквівалентності, при застосуванні Rep кожного разу беремо *нове* $z \in V_T$.

Теорема 4.5.8. Для кожної формули Φ можна побудувати нормальну формулу Ψ : $\Phi \sim \Psi$.

Спочатку будуємо різнокванторну $\Xi \sim \Phi$. Далі, використовуючи RR , $\text{R}\neg$, $\text{R}\vee$ та $\text{R}\exists$, проносимо всі символи реномінації вглиб формули до рівня ПС; при цьому при появі відповідної ситуації виконуємо спрощення згідно із R , RI , RU . Отримуємо нормальну Ψ : $\Psi \sim \Xi \sim \Phi$.

Приклад 4.5.7. Зведемо до нормальної форми формулу $R_{xy}^{uv}(\forall vB \ \& \ \exists zA \vee R_{su}^{xv}(\forall xB \rightarrow \exists vC))$.

Візьмемо нові $p, q, m, n \in V_T$. Маємо $\forall vB \sim \forall pR_p^v B$,
 $\exists zA \sim \exists qR_q^z A$, $\forall xB \sim \forall mR_m^x B$, $\exists vC \sim \exists nR_n^v C$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } R_{xy}^{uv}(\forall vB \ \& \ \exists zA \vee R_{su}^{xv}(\forall xB \rightarrow \exists vC)) &\sim \\ R_{xy}^{uv}(\forall pR_p^v B \ \& \ \exists qR_q^z A \vee R_{su}^{xv}(\forall mR_m^x B \rightarrow \exists nR_n^v C)) &\sim \\ \sim \forall pR_{xy}^{uv}(R_p^v B) \ \& \ \exists qR_{xy}^{uv}(R_q^z A) \vee (\forall mR_{xy}^{uv}(R_{su}^{xv}(R_m^x B)) &\rightarrow \\ \rightarrow \exists nR_{xy}^{uv}(R_{su}^{xv}(R_n^v C))) &\sim \forall pR_{xp}^{uv} B \ \& \ \exists qR_{xyq}^{uvz} A \vee (\forall mR_{xxm}^{uvx} B \rightarrow \exists nR_{xns}^{uvx} C). \end{aligned}$$

Це нормальна форма початкової формули.

Для довільної формули Φ визначимо множину $fr(\Phi)$ усіх її *квазівільних* імен. Для цього задамо таку функцію fr : $Fr \rightarrow 2^V$.

Для кожного $p \in Ps$ візьмемо $fr(p) = \emptyset$. Далі значення функції fr визначатимемо індуктивно:

$$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi);$$

$$fr(\vee\Phi\Psi) = fr(\Phi) \cup fr(\Psi);$$

$$fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\};$$

$$fr(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (fr(\Phi) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \cup \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Розширимо fr на множини формул: $fr(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} fr(\Phi)$.

Приклад 4.5.8. $fr(\forall x\Phi) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\};$
 $fr(\exists y R_y^x \Phi) = fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi) \setminus \{x\}.$

Теорема 4.5.9. Якщо $y \in v(p)$ для кожного $p \in \sigma(\Phi)$ та $y \notin fr(\Phi)$, то $y \in v(\Phi)$.

У випадку ЧНКЛ маємо: якщо $y \in \mu(p)$ для кожного $p \in \sigma(\Phi)$ та $y \notin fr(\Phi)$, то $y \in \mu(\Phi)$.

Наслідок 4.5.5. Нехай $y \in V$ неістотне для кожного $p \in \sigma(\Phi)$ та $y \notin nt(\Phi)$; тоді $y \in v(\Phi)$.

У випадку ЧНКЛ маємо: нехай $y \in V$ неістотне для кожного $p \in \sigma(\Phi)$ та $y \notin nt(\Phi)$; тоді $y \in \mu(\Phi)$.

Формула Φ мови ЧКНЛ *квазізамкнена*, якщо $fr(\Phi) = \emptyset$.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки предикатів, проте семантичними аналогами замкнених формул їх вважати не можна.

Справа в тому, що до складу формули можуть входити предикатні символи, для яких множини істотних імен нескінченні. Можливість для формули бути залежною від нескінченної множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема неокласичної логіки, що суттєво її відрізняє від класичної.

Пропозиційною схемою формули Φ назвемо пропозиційну формулу $Prop(\Phi)$, отриману з Φ опусканням усіх символів, окрім предикатних і символів пропозиційних зв'язок.

Теорема 4.5.10. Нехай формула Φ квазізамкнена, $Prop(\Phi)$ не тавтологія і не суперечність, причому Φ не містить спеціальних ПС із явно виділеними істотними іменами (напр. символів рівності $=_{xy}$). Тоді існують АС $A = (A, I)$ та $d_1, d_2 \in {}^V A$ такі:

$$\Phi_A(d_1) = T \text{ та } \Phi_A(d_2) = F.$$

Якщо $Prop(\Phi)$ не тавтологія й не суперечність, то існують істиннісні оцінки τ_1, τ_2 такі, що $\tau_1(Prop(\Phi)) = T$ та $\tau_2(Prop(\Phi)) = F$. Задамо $A = \{a, b\}$. Візьмемо $z \in V$ таке, що $z \notin nt(\Phi)$ та $z \notin \mu(\Phi)$. Для кожних $d \in A^{nt(\Phi)}$ та $p \in \sigma(\Phi)$ визначимо $p_A(d) \uparrow$. Тепер для

кожних $d \in A^{nm(\Phi)}$ та $p \in \sigma(\Phi)$ задамо $p_A(d \nabla z \rightarrow a) = \tau_1(p)$ та $p_A(d \nabla z \rightarrow b) = \tau_2(p)$. Тоді $\Phi_A(d \nabla z \rightarrow a) = T$ та $\Phi_A(d \nabla z \rightarrow b) = F$.

У логіці квазіарних предикатів квазізамкнені формули не обов'язково інтерпретуються як константні предикати. Водночас у класичній логіці кожна замкнена формула завжди інтерпретується як тотожно істинний або тотожно хибний предикат.

Теорема 4.5.11. Для кожної формули Φ можна побудувати квазізамкнену нормальну формулу Ξ таку, що $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Xi$.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Визначення відношення $\models$ неспростовнісного логічного наслідку для множин формул у ЧНКЛ цілком аналогічне відповідному визначенню для множин формул у РНЛ.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – деякі множини формул, A – інтерпретація мови.

Δ є неспростовнісним наслідком Γ при інтерпретації A , що позначаємо $\Gamma_A \models \Delta$, якщо $T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) = \emptyset$.

Δ є неспростовнісним логічним наслідком Γ , що позначаємо $\Gamma \models \Delta$, якщо

$\Gamma_A \models \Delta$ для всіх інтерпретацій мови A .

Теорема заміни еквівалентних справджується для ЧНКЛ.

Теорема 4.5.12. Нехай $\Phi \sim \Psi$; тоді маємо: $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Розглянуті вище для відношення $\models$ властивості пропозиційного та реномінативного рівнів успадковуються на кванторному рівні.

Приклад 4.5.9. Властивості монотонності та гарантованої наявності логічного наслідку:

М) $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma)$;

С) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

Звідси умова гарантованої наявності $\Gamma \models \Delta$:

існує Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Приклад 4.5.10. Базові властивості декомпозиції формул:

$\neg_L$) $\neg \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg \Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$$\begin{aligned} \vee_L) \Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta; \\ \vee_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi &\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi. \end{aligned}$$

Приклад 4.5.11. Похідні властивості декомпозиції формул для $\&$ та $\rightarrow$:

$$\begin{aligned} \&_L) \Phi \& \Psi, \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Phi, \Psi, \Gamma \models \Delta; \\ \&_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \& \Psi &\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi \text{ та } \Gamma \models \Delta, \Psi; \\ \rightarrow_L) \Phi \rightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta; \\ \rightarrow_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \rightarrow \Psi &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta, \Psi. \end{aligned}$$

Властивості, пов'язані з реномінацією та кванторами, отримуємо на основі властивостей $R, RI, RU, RR, R\neg, R\vee, R\exists, R\forall$. Кожна з них продукує дві відповідні властивості для відношення $\models$, коли виділена формула міститься у лівій чи правій частині цього відношення.

Приклад 4.5.12. Властивості спрощення:

$$\begin{aligned} R_L) R(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta; \\ R_R) \Gamma \models R(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models \Phi, \Delta; \\ RI_L) R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\ RI_R) \Gamma \models R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta; \\ RU_L) R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ за умови } z \in \mu(\Phi); \\ RU_R) \Gamma \models R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta \text{ за умови } z \in \mu(\Phi). \end{aligned}$$

Приклад 4.5.13. Базові властивості еквівалентних перетворень:

$$\begin{aligned} RR_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\ RR_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Delta; \\ R\neg_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta; \\ R\neg_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta; \\ R\vee_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta &\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta; \\ R\vee_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Delta &\Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Delta; \end{aligned}$$

$R\exists_{SL}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists_{SR}) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists_L) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$R\exists_R) \Gamma \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Delta$.

Для $R\exists_L$ та $R\exists_R$ умова: $z \in V_T \setminus nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Подібним чином можна сформулювати похідні властивості еквівалентних перетворень для $\&$, $\rightarrow$ та $\forall x$: $R\&_L$, $R\&_R$, $R\rightarrow_L$, $R\rightarrow_R$, $R\forall_{SL}$, $R\forall_{SR}$, $R\forall_L$, $R\forall_R$.

Приклад 4.5.14. Базові властивості елімінації кванторів:

$\exists_L) \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$;

$\exists_R) \Gamma \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \exists x\Phi, R_z^x(\Phi), \Delta$

Приклад 4.5.15. Похідні властивості елімінації кванторів:

$\forall_L) \Gamma \models \forall x, \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models R_z^x(\Phi), \Delta$ за умови $z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \forall x\Phi)$;

$\forall_R) \forall x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \forall x\Phi, R_y^x(\Phi), \Gamma \models \Delta$.

Наведені у прикладах 4.5.9, 4.5.10, 4.5.12–4.5.14 властивості назвемо базовими властивостями відношення $\models$ на кванторному рівні.

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть семантичні моделі ЧКНЛ.
2. Що таке чиста першопорядкова композиційна алгебра квазіарних предикатів?
3. Опишіть алфавіт мови ЧКНЛ.
4. Дайте визначення формули мови ЧКНЛ.
5. Що таке множина імен формули мови ЧКНЛ; сигнатура формули мови ЧКНЛ?
6. Як задається множина гарантовано неістотних для формул мови ЧКНЛ імен?
7. Що таке розширена сигнатура мови ЧКНЛ?
8. Що таке примітивна формула мови ЧКНЛ?

9. Що є семантичними моделями ЧНКЛ?
10. Як задається відображення інтерпретації в мовах ЧНКЛ?
11. Дайте визначення неспростовної формули мови ЧНКЛ.
12. Дайте визначення виконуваної формули мови ЧНКЛ.
13. Дайте визначення тавтології мови ЧНКЛ.
14. Як визначаються відношення $\models$, $\models$, $\models$, $\sim$, $\sim$ у ЧНКЛ?
15. Наведіть основні властивості $\models$, $\models$, $\models$, $\sim$, $\sim$ у ЧНКЛ.
16. Сформулюйте теорему еквівалентності в ЧНКЛ.
17. Наведіть властивості кванторів у ЧНКЛ, у яких не використовуються реномінації.
18. Наведіть властивості формул мови ЧНКЛ, пов'язані із кванторами та реномінаціями.
19. Сформулюйте критерій неістотності предметних імен для формул мови ЧНКЛ.
20. Що таке тотально неістотне предметне ім'я?
21. Як задається множина гарантовано слабо неістотних для формул мови ЧНКЛ імен?
22. Що таке сигнатура синтетичної неістотності?
23. Сформулюйте теорему про розширення.
24. Що таке система розширень?
25. Що таке різнокванторна формула мови ЧНКЛ?
26. Що таке нормальна формула мови ЧНКЛ?
27. Як виконується зведення формули мови ЧНКЛ до нормальної форми?
28. Як визначається множина квазівільних імен формули?
29. Що таке квазізамкнена формула?
30. Чому логіка квазіарних предикатів суттєво відрізняється від класичної?
31. Дайте визначення відношення $\models$ неспростовнісного логічного наслідку для множин формул у ЧНКЛ.
32. Наведіть властивості декомпозиції формул для відношення $\models$.
33. Наведіть властивості спрощення та еквівалентних перетворень для $\models$.
34. Наведіть властивості елімінації кванторів для $\models$.
35. Сформулюйте теорему заміни еквівалентних для ЧНКЛ.

Вправи

1. Доведіть теорему еквівалентності для випадку ЧНКЛ.
2. Доведіть наведені у прикладах 4.5.3 та 4.5.4 властивості, пов'язані із кванторами.
3. Доведіть критерій неістотності предметних імен для випадку ЧНКЛ.
4. З'ясуйте, чи правильно:

$$|= (\Phi \rightarrow \forall x\Phi) \rightarrow (R_y^x(\Phi) \leftrightarrow \Phi);$$

$$|= (\Phi \rightarrow \forall x\Phi) \rightarrow (R_{y,\bar{u}}^{x,\bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi)).$$
5. Доведіть теореми 4.5.4 та 4.5.5.
6. Доведіть теорему про розширення.
7. Доведіть теорему 4.5.9.
8. Доведіть теорему 4.5.11 про зведення до квазізамкненої нормальної форми.
9. Зведіть до нормальної форми такі формули мови ЧНКЛ:
 - 1) $R_{zy}^{yus}(R_{xy}^{uv}(\exists xA \vee \exists x(B \vee R_x^u A))) \rightarrow R_{uv}^{xy}\forall xB$;
 - 2) $R_{zw}^{xy}(R_{vy}^{xzv}(\exists yA \& R_z^x B) \vee R_{vu}^{yz}(R_{yx}^{xz}\exists yB\forall xC))$;
 - 3) $R_{zy}^{yx}(R_{xvz}^{uvy}\exists xA \vee R_x^z\exists xB) \rightarrow R_{wv}^{xy}(R_{vy}^{xz}\exists yC \vee \exists xR_{zy}^{yzv}A)$.
10. Зведіть формули із вправи 9 до квазізамкненої нормальної форми.
11. Задайте пренексні операції у ЧНКЛ.
12. Сформулюйте та доведіть теорему про пренексну форму для формул ЧНКЛ.
13. Зведіть формули із вправи 9 до пренексної форми.
14. Сформулюйте похідні властивості $R\forall_{SL}$, $R\forall_{SR}$, $R\forall_L$, $R\forall_R$.
15. Доведіть властивості $R\exists_{SL}$, $R\exists_{SR}$, $R\exists_L$, $R\exists_R$ та $R\forall_{SL}$, $R\forall_{SR}$, $R\forall_L$, $R\forall_R$.
16. Доведіть властивості елімінації кванторів $\exists_L$, $\exists_R$ та $\forall_L$, $\forall_R$.

4.6. Першопорядкові неокласичні логіки функціонально-екваційного рівня

Семантичними моделями першопорядкових НКЛ функціонально-екваційного рівня, або функціонально-екваційних НКЛ (ФЕНКЛ), є композиційні системи еквітонних квазіарних функцій та предикатів вигляду $(^V A, FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CQF_{=})$, де $CQF_{=} = \{\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'x, \exists x, =\}$ – множина базових композицій першопорядкових функціональних логік зі слабкою рівністю.

Алгебра $AQFE_{=}^{V-A} = (FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CQF_{=})$ – це першопорядкова композиційна алгебра еквітонних квазіарних функцій та предикатів, її побудова визначає мову ФЕНКЛ.

Алфавіт мови ФЕНКЛ:

- V – множина предметних імен;
- Ps – множина предикатних символів (ПС);
- Fns – множина функціональних символів (ФС);
- Dns – множина деномінаційних символів (ДНС);
- $Cs = \{\neg, \vee, S^{v_1, \dots, v_n}, 'x, \exists x, =\}$ – множина символів базових композицій.

позичій.

Множину $Fns \cup Dns$ позначимо Fs .

Множину $\sigma = Fns \cup Ps$ назовемо сигнатурою мови ФЕНКЛ.

Множини термів Tr і формул Fr мови ФЕНКЛ вводитимемо індуктивно.

T1. Кожний ФС та кожний ДНС є термом; такі терми назовемо *атомарними*.

T2. Нехай $t, t_1, \dots, t_n$ – терми; тоді $S^{v_1, \dots, v_n} t t_1 \dots t_n$ – терм.

Ф1. Кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули *атомарні*.

Ф2. Нехай t та s – терми; тоді $=ts$ – формула.

Ф3. Нехай Φ – формула, $t_1, \dots, t_n$ – терми; тоді $S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n$ – формула.

Ф4. Нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi, \vee\Phi\Psi$ та $\exists x\Phi$ – формули.

Формули $=ts, \vee\Phi\Psi, \vee\neg\Phi\Psi, \neg\neg\neg\Phi\neg\Psi, \neg\neg\neg\neg\neg\Phi\Psi\neg\neg\neg\Psi\Phi, \neg\neg\neg\neg\neg\Psi$ позначимо відповідно $t=s, \Phi\vee\Psi, \Phi\rightarrow\Psi, \Phi\&\Psi, \Phi\leftrightarrow\Psi, \forall x\Psi$. Зазначені скорочення також називатимемо формулами.

Для скорочень термів і формул уживатимемо допоміжні символи "(" , ")" та ",". Зокрема, замість $S^{v_1 \dots v_n} t t_1 \dots t_n$ та $S^{v_1 \dots v_n} \Phi t_1 \dots t_n$ будемо писати $S^{v_1 \dots v_n} (t, t_1, \dots, t_n)$ та $S^{v_1 \dots v_n} (\Phi, t_1, \dots, t_n)$. Для побудови скорочень термів і формул використовуватимемо також символи похідних композицій $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $\forall x$ і допоміжні символи "(" , ")" та ",". Не пишемо зайвих дужок, уводячи такий пріоритет символів композицій: $=$, $S^{v_1 \dots v_n}$, $\exists x$ та $\forall x$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ та $\leftrightarrow$.

Позначимо $\sigma(\varphi)$ множину всіх тих символів сигнатури, які входять до складу терму чи формули φ .

Позначимо $nm(\varphi)$ множину всіх імен, які фігурують у символах суперпозиції та квантифікації, що входять до складу терму чи формули φ . Позначимо $dnm(\varphi)$ множину всіх імен, які фігурують у деномінаційних символах терму чи формули φ .

Множину $nm(\varphi) \cup dnm(\varphi)$ позначимо $ndn(\varphi)$ і назвемо *множиною імен* φ .

Розширимо σ , nm , ndn на множини формул $\Gamma \subseteq Fr$:

$$\sigma(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} \sigma(\Phi); \quad nm(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} nm(\Phi); \quad ndn(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \Gamma} ndn(\Phi).$$

Виділимо нескінченну підмножину $V_T \subseteq V$ імен, гарантовано неістотних для всіх $g \in Fns \cup Ps$ – тотально неістотних імен.

Для визначення множин гарантовано слабо неістотних для термів та формул імен задамо функцію $\mu : Tr \cup Fr \rightarrow 2^V$:

$$\mu(x) = V \setminus \{x\} \text{ для кожного } x \in Dns;$$

$$\mu(g) = V_T \text{ для всіх } g \in Fns \cup Ps;$$

$$\mu(S^{v_1 \dots v_n} t t_1 \dots t_n) = (\mu(t) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(t)\}} \mu(t_i);$$

$$\mu(S^{v_1 \dots v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = (\mu(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \cap \bigcap_{\{i | v_i \notin \mu(\Phi)\}} \mu(t_i);$$

$$\mu(\neg \Phi) = \mu(\Phi);$$

$$\mu(\vee \Phi \Psi) = \mu(\Phi) \cap \mu(\Psi);$$

$$\mu(\exists x \Phi) = \mu(\Phi) \cup \{x\}.$$

Теорема 4.6.1. Нехай $\varphi \in Tr \cup Fr$, нехай $y \in V_T$ та $y \notin ndn(\varphi)$; тоді $y \in \mu(\varphi)$.

Теорема 4.6.2. $x \in \mu(\tau) \Rightarrow x$ неістотне для терму τ ;

$x \in \mu(\Phi) \Rightarrow x$ неістотне для формули Φ .

Пара $(Fns \cup Ps, \mu)$ – це сигнатура синтетичної неістотності.

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Fns \cup Ps)$.

Інтерпретуємо мову ФЕНКЛ на композиційних системах еквівентних функцій та предикатів – об'єктах вигляду $CS = ({}^V A, FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}, CQF=)$. Символи Fns та Ps позначають базові функції у FnE^{V-A} та базові предикати у $PrPE^{V-A}$; для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I : Fns \cup Ps \rightarrow FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}$.

Продовжимо I до відображення інтерпретації термів та формул $I : Tr \cup Fr \rightarrow FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A}$ згідно з побудовою складніших термів та формул із простіших за допомогою символів Cs :

- $I(S^{v_1 \dots v_n} tt_1 \dots t_n) = S^{v_1 \dots v_n}(I(t), I(t_1), \dots, I(t_n))$;
- $I(=ts) = (I(t), I(s))$;
- $I(S^{v_1 \dots v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = S^{v_1 \dots v_n}(I(\Phi), I(t_1), \dots, I(t_n))$;
- $I(\neg \Phi) = \neg(I(\Phi))$; $I(\vee \Phi \Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$;
- $I(\exists x \Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку (CS, Σ, I) назвемо інтерпретацією мови сигнатури Σ . Ця (CS, Σ, I) визначається алгеброю (AC) із доданою сигнатурою $A = ({}^V A, FnE^{V-A} \cup PrPE^{V-A})$, Σ, I . Такі AC із доданою сигнатурою є семантичними моделями, які пов'язують мову логіки з алгеброю даних; надалі їх вважатимемо інтерпретаціями мови ФЕНКЛ та скорочено позначатимемо $A = (A, I)$.

Функцію $I(t)$ – значення терму t при інтерпретації на A – позначатимемо t_A .

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на A – позначатимемо Φ_A .

Ім'я $x \in V$ неістотне для терму t , якщо x неістотне для t_A для кожної інтерпретації A .

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ , якщо x неістотне для Φ_A для кожної інтерпретації A .

Визначення A -неспростовної, неспростовної, A -виконуваної, виконуваної формули мови ФЕНКЛ такі самі, як відповідні визначення для формул мови ЧНКЛ.

Теорема 4.6.3. Ім'я $x \in V$ неістотне для формули $\Phi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \forall x \Phi \Leftrightarrow \models \exists x \Phi \rightarrow \Phi;$$

$$\text{ім'я } x \in V \text{ неістотне для терму } \tau \Leftrightarrow \models \forall y (\tau = S^x(\tau, y)).$$

Поняття тавтології, тавтологічного наслідку, тавтологічної еквівалентності для ФЕНКЛ успадковуються з реномінаційного та кванторного рівнів. Єдиною істотною відмінністю є визначення пропозиційно нерозкладної формули.

Формулу мови ФЕНКЛ назвемо *пропозиційно нерозкладною*, якщо вона атомарна або має вигляд $=ts$, $\exists x \Phi$ чи $S^{v_1 \dots v_n} \Phi t_1 \dots t_n$.

Визначення і властивості відношень неспростовнісного логічного наслідку $\models$, логічної еквівалентності $\sim$, слабкого логічного наслідку $\parallel$, логічного наслідку для множин формул у випадку ФЕНКЛ аналогічні відповідним визначенням і властивостям для ЧКНЛ.

Семантичні властивості формул ФЕНКЛ індуковані відповідними властивостями композицій.

Для пропозиційних композицій і кванторів такі властивості аналогічні відповідним властивостям формул класичної логіки. Зокрема, це властивості Q1–Q14 із прикладу 4.5.3.

Приклад 4.6.1. Основні властивості композиції суперпозиції.

SIT) Елімінація суперпозиції без параметрів для термів:

$$\models S(t) = t.$$

SI(Φ) Елімінація суперпозиції без параметрів для формул:

$$S(\Phi) \sim \Phi.$$

S¬) Дистрибутивність суперпозиції щодо ¬:

$$S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{f}) \sim \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f}).$$

S∨) Дистрибутивність суперпозиції щодо ∨:

$$S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{f}) \sim S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{f}).$$

Аналогічно записуємо властивості дистрибутивності суперпозиції щодо $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$.

Властивості дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів:

$$S\exists s) S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \sim \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \text{ за умови } y \notin \{\bar{v}\} \text{ та } y \text{ неістотне для } \bar{t}.$$

$$S\exists) S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) \sim \exists y S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, y) \text{ за умови } y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t})) \text{ та } y \in V_T.$$

Властивості згортки суперпозицій (тут $\Phi \in Fr$, $\tau \in Tr$, позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ відповідно для $u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_k; r_1, \dots, r_k; w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_m; s_1, \dots, s_m$):

$$\text{SS}\Phi) S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \sim S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}));$$

$$\text{SST}) \models S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) = S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})).$$

Властивості згортки імен та спрощення:

$$\text{CN}\Phi) S^{x, \bar{v}}(\Phi, x, \bar{t}) \sim S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t});$$

$$\text{CNT}) \models S^{x, \bar{v}}(\tau, x, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t});$$

$$\text{SD}) \models S^{\bar{v}}(x, \bar{t}) = x, \text{ якщо } x \notin \{\bar{v}\};$$

$$\text{SF}) \models S^{x, \bar{v}}(x, \tau, \bar{t}) = \tau;$$

$$\text{CU}\Phi) S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}) \sim S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \text{ якщо } x \in \mu(\Phi);$$

$$\text{CUT}) \models S^{x, \bar{v}}(\tau, \tau, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t}), \text{ якщо } x \in \mu(\tau).$$

Приклад 4.6.2. Властивості композиції слабкої рівності:

$$\text{Rf) рефлексивність: } \models t = t;$$

$$\text{Sm) симетричність: } t = s \sim s = t;$$

$$\text{Tr) транзитивність: } t = s, s = r \models t = r;$$

ET) заміна рівних у термах:

$$t = s \models S^{\bar{v}, z}(\tau, \bar{r}, t) = S^{\bar{v}, z}(\tau, \bar{r}, s);$$

EФ) заміна рівних у формулах:

$$t = s \models S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t) \leftrightarrow S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, s);$$

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$$S^{\bar{v}}(s = r, \bar{t}) \sim S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(r, \bar{t}).$$

Основою еквівалентних перетворень формул мови ФЕНКЛ є теорема еквівалентності та теореми рівності. Вони формулюються аналогічно відповідним теоремам мови класичної логіки (теореми 4.3.1–4.3.3). Для відношення неспростовнісного логічного наслідку для множин формул мови ФЕНКЛ справджується теорема заміни еквівалентних (теорема 4.5.12).

Терми та формули мови ФЕНКЛ можна звести до класично-подібного вигляду, коли символи суперпозиції застосовні тільки до символів базових функцій і базових предикатів.

Терм мови ФЕНКЛ нормальний, якщо:

– усі його символи суперпозиції (якщо вони є) застосовані тільки до ФС;

– в усіх його символах суперпозиції (якщо вони є) згорнуті неістотні імена і зроблені спрощення згідно із CNT, CUT, SIT, SD, SF.

Формула Ψ мови ФЕНКЛ нормальна, або перебуває в нормальній формі, якщо всі символи суперпозиції у Ψ застосовані тільки до ФС чи ПС, в усіх цих символах суперпозиції згорнуті неістотні імена й виконані спрощення згідно із CNФ, CUФ, SIФ та CNT, CUT, SIT, SD, SF.

Зрозуміло, що в нормальній формулі всі її терми нормальні.

Теорема 4.6.4. Для кожної формули Φ можна побудувати нормальну формулу Ψ таку: $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

Побудову нормальної Ψ виконуємо так. Використовуючи $S\rightarrow$ та $S\vee$, просуваємо символи суперпозиції вглиб формули. Згідно із SSФ та SST згортаємо символи суперпозиції; використовуючи SE, проносимо $=$ через суперпозицію. При появі відповідної ситуації виконуємо спрощення згідно із CNФ, CUФ, SIФ та CNT, CUT, SIT, SD, SF.

Властивості відношень неспростовнісного логічного наслідку для множин формул ФЕНКЛ відтворюють відповідні семантичні властивості формул. Це властивості декомпозиції формул та умова наявності логічного наслідку, пов'язані із суперпозицією властивості спрощення та еквівалентних перетворень (на основі властивостей із прикладу 4.6.1). До них додаємо наведені нижче властивості елімінації кванторів та властивості, пов'язані з композицією слабкої рівності.

Приклад 4.6.3. Базові властивості елімінації кванторів:

$$\exists_{SL}) \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow S^x(\Phi, 'z), \Gamma \models \Delta \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus ndn(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi);$$

$$\exists_{SR}) \Gamma \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \exists x\Phi, S^x(\Phi, t), \Delta.$$

Приклад 4.6.4. Властивості, пов'язані зі слабкою рівністю:

C_{Rf}) $\Gamma \models t=t, \Delta$ – індукована Rf умова гарантованої наявності логічного наслідку;

$$Sm) t=s, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow t=s, s=t, \Gamma \models \Delta;$$

$$Tr) t=s, s=r, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow t=s, s=r, t=r, \Gamma \models \Delta.$$

Приклад 4.6.5. Властивості заміни рівних:

$$ET_L) t=s, S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=s, S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Gamma \models \Delta;$$

$$ET_R) t=s, \Gamma \models S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=s, \Gamma \models S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Delta;$$

$$EF_L) t=s, S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=s, S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Gamma \models \Delta;$$

$$EF_R) t=s, \Gamma \models S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=s, \Gamma \models S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Delta.$$

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть семантичні моделі ФЕНКЛ.
2. Опишіть алфавіт мови ФЕНКЛ.
3. Дайте визначення терму та формули мови ФЕНКЛ.
4. Що таке множина імен формули мови ФЕНКЛ?
5. Як задається множина гарантовано неістотних для формул мови ФЕНКЛ імен?
6. Як задається відображення інтерпретації в мовах ФЕНКЛ?
7. Наведіть основні властивості композиції суперпозиції в мовах ФЕНКЛ.
8. Наведіть основні властивості композиції слабкої рівності в мовах ФЕНКЛ.
9. Що таке нормальний терм мови ФЕНКЛ?

10. Що таке нормальна формула мови ФЕНКЛ?
11. Як виконується зведення формули мови ФЕНКЛ до нормальної форми?
12. Наведіть властивості елімінації кванторів у ФЕНКЛ.
13. Наведіть властивості відношення $\models$ для множин формул ФЕНКЛ, пов'язані з рівністю.

Вправи

1. Доведіть теореми 4.6.1–4.6.3.
2. Випишіть у явному вигляді властивості спрощення та еквівалентних перетворень відношення $\models$ для множин формул ФЕНКЛ.
3. Сформулюйте властивості елімінації кванторів $\forall_{SL}, \forall_{SR}$.
4. Доведіть властивості елімінації кванторів $\exists_{SL}, \exists_{SR}$.
5. Доведіть властивості елімінації кванторів $\forall_{SL}, \forall_{SR}$.
6. Доведіть властивості заміни рівних.

5. АКСІОМАТИЧНІ СИСТЕМИ ЛОГІК ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Формально-аксіоматичні системи гільбертівського типу класичних логік першого порядку називають численнями першого порядку, або теоріями першого порядку.

5.1. Теорії першого порядку

Під *теорією* першого порядку тут, як і у [21], розуміємо формальну систему $T = (L, A, P)$, де L – мова першого порядку, A – множина аксіом, яка розбита на множини *логічних* аксіом і множини *власних* аксіом, P – множина правил виведення. Мову теорії першого порядку T позначаємо $L(T)$.

У широкому сенсі під теорією першого порядку розуміють довільну множину замкнених формул деякої мови першого порядку (див. [17]). Інколи це поняття розуміють вужче, як множину замкнених формул деякої мови першого порядку, які виводяться з певної множини аксіом, що означає замкненість теорії як множини формул відносно правил виведення. У цьому випадку кожна теорія визначається відповідним численням предикатів і множиною власних аксіом. Водночас під численням першого порядку іноді розуміють тільки числення предикатів першого порядку; тоді одночасно вживають терміни "числення предикатів" і "прикладне числення предикатів" (див. [21]), коли прикладне числення предикатів першого порядку означає те, що ми назвали теорією першого порядку.

Множина логічних аксіом теорії першого порядку задається такими схемами аксіом:

Ax1) $\neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми;

Ax2) $\Phi_x[t] \rightarrow \exists x\Phi$ – аксіоми підстановки;

Ax3) $x = x$ – аксіоми тотожності;

Ax4) $x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f x_1 \dots x_n = f y_1 \dots y_n$ та

$x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow p x_1 \dots x_n \rightarrow p y_1 \dots y_n$ – аксіоми рівності.

У випадку чистих логік першого порядку маємо $Fs = \emptyset$, тому $Ax2$ та $Ax4$ набувають вигляду:

$Ax2p) \Phi_x[y] \rightarrow \exists x \Phi$;

$Ax4p) x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow px_1 \dots x_n \rightarrow py_1 \dots y_n$.

У випадку чистих логік першого порядку без виділених предикатів рівності залишаються лише схеми аксіом $Ax1$ та $Ax2p$.

Множина правил виведення P складається із таких правил:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – правило розширення;

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення;

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – правило асоціативності;

П4) $\Phi \vee \Psi, \neg \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – правило перетину;

П5) $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi$, якщо x не вільна в Ψ , – правило $\exists$ -введення.

Логічні аксіоми є у всіх теоріях першого порядку, власні аксіоми визначають специфіку тієї чи іншої теорії, орієнтацію цієї теорії на відповідну предметну область.

Теоремою теорії першого порядку T називають формулу, яка виводиться із аксіом за допомогою скінченної кількості застосувань ПВ.

Множину теорем теорії T позначаємо $Th(T)$.

Те, що A – теорема, позначаємо $T \vdash A$, або $\vdash A$, якщо T маємо на увазі.

Абстрагуючись від наборів символів логічних операцій, способів запису термів та формул, наборів логічних аксіом і правил виведення, можна стверджувати: теорія першого порядку визначається сигнатурою мови та множиною власних аксіом.

Сигнатурою теорії першого порядку називають сигнатуру мови цієї теорії.

Формулу мови теорії називають також формулою теорії.

Теорія T' називається розширенням теорії T , якщо $Th(T) \subseteq Th(T')$.

У цьому випадку теорію T називають звуженням теорії T' .

Розширення (звуження) T' теорії T називають простим, якщо T та T' мають однакові мови.

Теорії першого порядку T_1 та T_2 називають еквівалентними (позн. $T_1 \sim T_2$), якщо $Th(T_1) = Th(T_2)$.

Приклад 5.1.1. Якщо $T_1 \sim T_2$, то T_1 та T_2 мають однакові мови.

Справді, якщо $T_1 \sim T_2$, то $\text{Th}(T_1) = \text{Th}(T_2)$, тому множини логічних аксіом T_1 та T_2 збігаються, тому збігаються множини пропозиційних аксіом T_1 та T_2 , звідки збігаються множини формул T_1 та T_2 , тобто $L(T_1) = L(T_2)$.

Потужністю теорії T називають потужність множини $\text{Th}(T)$.

Зокрема, теорія першого порядку зі скінченною чи зліченною сигнатурою зліченна, теорія першого порядку із сигнатурою потужністю α має потужність α .

Розглянемо кілька прикладів теорій першого порядку.

Приклад 5.1.2. Теорія першого порядку, яка не містить власних аксіом, називається *численням предикатів першого порядку* (скор. ЧП-1). Якщо при цьому в сигнатурі відсутні функціональні символи, то отримуємо *чисте* числення предикатів першого порядку.

Приклад 5.1.3. Особливе місце серед формальних теорій займає теорія натуральних чисел – *формальна арифметика*. Позначимо її Ar . Мовою Ar є мова L_{ar} .

Власні аксіоми Ar такі:

$$Ar1) \neg (x+1=0);$$

$$Ar2) x+1=y+1 \rightarrow x=y;$$

$$Ar3) x+0=x;$$

$$Ar4) x+(y+1)=(x+y)+1;$$

$$Ar5) x \times 0 = 0;$$

$$Ar6) x \times (y+1) = x \times y + x;$$

$$Ar7) A_x[0] \ \& \ \forall x(A \rightarrow A_x[x+1]) \rightarrow \forall x A \text{ – аксіоми індукції.}$$

Кожна власна аксіома формальної арифметики є ІАФ.

Приклад 5.1.4. *Елементарна теорія груп* – це теорія першого порядку Gr сигнатури $\{\bullet, e, =\}$, де e – константний символ, $\bullet$ – бінарний функціональний символ. Власні аксіоми Gr такі:

$$G1) x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z;$$

$$G2) \forall x (e \bullet x = x);$$

$$G3) \forall x \exists y (y \bullet x = e).$$

Приклад 5.1.5. Елементарною теорією полів називають теорію першого порядку сигнатури $\{0, 1, +, \times, =\}$, де 0 та 1 – константні символи, + та $\times$ – бінарні ФС. Власні аксіоми Fl такі:

$$Fl1) x+y=y+x;$$

$$Fl2) x+(y+z)=(x+y)+z;$$

$$Fl3) x \times y = y \times x;$$

$$Fl4) x \times (y \times z) = (x \times y) \times z;$$

$$Fl5) x \times (y+z) = x \times y + x \times z;$$

$$Fl6) \forall x(x+0=x);$$

$$Fl7) \forall x(x \times 1=x);$$

$$Fl8) \forall x \neg y(x+y=0);$$

$$Fl9) \forall x(\neg(x=0) \rightarrow \exists y(x \times y=1));$$

$$Fl10) \neg(0=1).$$

Теорема 5.1.1. 1) Логічні аксіоми – всюди істинні формули;
2) висновки правил П1–П4 – тавтологічні наслідки засновків;
3) висновок правила П5 – слабкий логічний наслідок засновку.

Приклад 5.1.6. Кожна теорема ЧП-1 є всюди істинною формулою.

Справді, логічні аксіоми всюди істинні, правила виведення зберігають усюди істинність.

Приклад 5.1.7. Умова "x не вільне в Ψ " істотна для П5.

Справді, маємо $x=0 \rightarrow x=0 \not\models \exists x(x=0) \rightarrow x=0$, тому що формула $x=0 \rightarrow x=0$ усюди істинна, а згідно з $(\exists x(x=0) \rightarrow x=0)_N(1) = F$ маємо $N \not\models \exists x(x=0) \rightarrow x=0$.

Приклад 5.1.8. Для П5 $\models$ не можна посилити до $\models$.

Справді, $x=0 \rightarrow 1=0 \models \exists x(x=0) \rightarrow x=0$, але $((x=0 \rightarrow 1=0) \rightarrow \rightarrow \exists x(x=0) \rightarrow 1=0)_N(1) = F$, тому $x=0 \rightarrow 1=0 \not\models \exists x(x=0) \rightarrow 1=0$.

Моделлю теорії першого порядку T називається інтерпретація мови теорії, на якій істинні всі власні аксіоми теорії T .

Приклад 5.1.9. Моделлю ЧП-1 є кожна інтерпретація його мови.

Приклад 5.1.10. Моделлю формальної арифметики $Ar \in N$ – стандартна інтерпретація L_{ar} . Таку модель називають *стандартною моделлю формальної арифметики*.

Приклад 5.1.11. Моделлю елементарної теорії груп Gr є кожна група; моделлю елементарної теорії полів Fl є кожне поле.

Формула Φ називається *істинною* в теорії T , якщо Φ істинна на кожній моделі теорії T .

Коректність теорій першого порядку гарантує

Теорема 5.1.2 (істинності). Кожна теорема теорії першого порядку T істинна в T .

Із пропозиційного рівня на першопорядковий переноситься теорема тавтології.

Теорема 5.1.3 (тавтології). Кожна тавтологія є теоремою.

Наслідок 5.1.1. $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \models_i \Phi$ та $\vdash \Phi_1, \dots, \vdash \Phi_n \Rightarrow \vdash \Phi$.

Приклади виведень у теоріях першого порядку. Розглянемо тепер приклади виведень у теоріях першого порядку. Фактично це виведення в численнях предикатів першого порядку. При виведеннях використовуємо теорему тавтології (ТТ).

Приклад 5.1.12. $\vdash \forall x A \rightarrow A$.

Маємо $\vdash \neg A \rightarrow \exists x \neg A$ (аксіома $Ax2$), звідки $\vdash \neg \exists x \neg A \rightarrow A$ за ТТ, тобто $\vdash \forall x A \rightarrow A$.

Приклад 5.1.13 (правило $\forall$ -введення). Якщо $\vdash A \rightarrow B$ та x не вільне в A , то $\vdash A \rightarrow \forall x B$.

Якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$ за ТТ, звідки $\vdash \exists x \neg B \rightarrow \neg A$ за П5. Тоді за ТТ $\vdash \neg \neg A \rightarrow \neg \exists x \neg B$, отже, $\vdash A \rightarrow \forall x B$.

Приклад 5.1.14 (правила $\exists$ -дистрибутивності та $\forall$ -дистрибутивності). Якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ та $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$.

Маємо $\vdash A \rightarrow B$ (умова), $\vdash B \rightarrow \exists x B$ (аксіома $Ax2$), звідки за ТТ $\vdash A \rightarrow \exists x B$, тому $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ за П5.

З умови маємо $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$ за ТТ, маємо $\vdash \neg A \rightarrow \exists x \neg A$ (аксіома $Ax3$), звідки за ТТ $\vdash \neg B \rightarrow \exists x \neg A$. За П5 $\vdash \exists x \neg B \rightarrow \exists x \neg A$, тому $\vdash \neg \exists x \neg A \rightarrow \neg \exists x \neg B$ за ТТ, тобто $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$.

Приклад 5.1.15 (правило узагальнення). Якщо $\vdash A$, то $\vdash \forall x A$.

Якщо $\vdash A$, то за П1 $\vdash \forall x A \vee A$, звідки за ТТ $\vdash \neg A \rightarrow \forall x A$. Тоді $\vdash \exists x \neg A \rightarrow \forall x A$ за П5, тобто $\vdash \forall x A \vee \forall x A$. Тепер $\vdash \forall x A$ за П2.

Приклад 5.1.16 (правило уособлення). Якщо $\vdash \forall xA$, то $\vdash A$.

За прикладом 5.1.12 $\vdash \forall xA \rightarrow A$. Звідси та з умови $\vdash \forall xA$ за МР маємо $\vdash A$.

Приклад 5.1.17 (теорема замикання). $\vdash A \Leftrightarrow \vdash \bar{A}$, де $\bar{A}$ – замикання формули A .

Впливає з правил узагальнення та уособлення.

Приклад 5.1.18 (правило підстановки). Якщо $\vdash A$, то $\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

Маємо $\vdash \neg A_x[t] \rightarrow \exists x \neg A$ як $Ax2$, тому $\vdash \forall xA \rightarrow A_x[t]$ за ТТ. Із $\vdash A$ маємо $\vdash \forall xA$ за правилом узагальнення, тому за МР $\vdash A_x[t]$.

Нехай імена $y_1, \dots, y_n$ не входять до складу формул A та $A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$. Позначимо B формулу $A_{x_1, \dots, x_n}[y_1, \dots, y_n]$. Згідно з $\vdash A_x[t]$ маємо $\vdash A_{x_1}[y_1]$, $\vdash A_{x_1, x_2}[y_1, y_2]$, $\dots$, $\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[y_1, \dots, y_n]$, $\vdash B_{x_1}[t_1]$, $\dots$, $\vdash B_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$. Однак $B_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$ – це і є формула $A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

На основі прикладів 5.1.13, 5.1.14, 5.1.18 вводимо похідні правила виведення:

правило $\forall$ -вв: $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \forall xB$, якщо x не вільне в A ;

правило $\exists$ -дис: $A \rightarrow B \vdash \exists xA \rightarrow \exists xB$;

правило $\forall$ -дис: $A \rightarrow B \vdash \forall xA \rightarrow \forall xB$;

правило підстановки (ПП): $A \vdash A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

Приклад 5.1.19 (теорема підстановки).

$\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n A$ та $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \rightarrow A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

Як $Ax2$ маємо $\vdash A \rightarrow \exists x_n A$, $\dots$, $\vdash \exists x_{i+1} \dots \exists x_n A \rightarrow \exists x_i \dots \exists x_{i+1} \dots \exists x_n A$, $\dots$, $\vdash \exists x_2 \dots \exists x_n A \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n A$, звідки $\vdash A \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n A$ за ТТ. Тепер за правилом підстановки $\vdash A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n A$.

Використовуючи приклад 5.1.12 замість аксіоми $Ax2$, аналогічно попередньому маємо $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \rightarrow A$, звідки за правилом підстановки $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \rightarrow A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

Приклад 5.1.20 (симетрія рівності). Для довільних термів a та b маємо $\vdash a = b \leftrightarrow b = a$.

Маємо $\vdash x = y \rightarrow x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x$ (аксіома рівності для ПС $=$), звідки за ТТ маємо $\vdash x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x \rightarrow y = x$. Однак $\vdash x = x$ (Ax3), тому послідовно маємо $\vdash x = x \rightarrow y = x \rightarrow y = x$ та $\vdash x = y \rightarrow y = x$ за МР. Аналогічно $\vdash y = x \rightarrow x = y$, тому за ТТ маємо $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$. Звідси за ПП $\vdash a = b \leftrightarrow b = a$.

Приклад 5.1.21 (транзитивність рівності). Для довільних термів a, b, c маємо $\vdash a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$.

Маємо $\vdash y = x \rightarrow y = z \rightarrow y = y \rightarrow x = z$ (аксіома рівності для ПС $=$), тому за ТТ маємо $\vdash y = y \rightarrow y = x \rightarrow y = z \rightarrow x = z$. Однак $\vdash y = y$ (Ax3), тому за МР $\vdash y = x \rightarrow y = z \rightarrow x = z$. Маємо $\vdash x = y \rightarrow y = x$ (приклад 5.1.10), тому $\vdash x = y \rightarrow y = z \rightarrow x = z$ за ТТ. Тепер за ПП отримуємо $\vdash a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$.

Приклад 5.1.22. $\vdash \exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$.

Маємо $\vdash A \rightarrow \exists x A$ як Ax2, звідки $\vdash \exists y A \rightarrow \exists y \exists x A$ за $\exists$ -дис. Проте x не вільна в $\exists y \exists x A$, тому за П5 $\vdash \exists x \exists y A \rightarrow \exists y \exists x A$ (1).

Аналогічно доводимо $\vdash \exists y \exists x A \rightarrow \exists x \exists y A$. Звідси та з (1) за ТТ маємо $\vdash \exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$.

Приклад 5.1.23. $\vdash \exists x B \vee \exists x C \rightarrow \exists x (B \vee C)$.

За ТТ $\vdash B \rightarrow B \vee C$ та $\vdash C \rightarrow B \vee C$, тому за $\exists$ -дис $\vdash \exists x B \rightarrow \exists x (B \vee C)$ та $\vdash \exists x C \rightarrow \exists x (B \vee C)$. Звідси за ТТ маємо $\vdash \exists x B \vee \exists x C \rightarrow \exists x (B \vee C)$.

Приклад 5.1.24. $\vdash \exists x (B \vee C) \rightarrow \exists x B \vee \exists x C$.

Маємо $\vdash B \rightarrow \exists x B$ та $\vdash C \rightarrow \exists x C$ як Ax2, тому за ТТ отримуємо $\vdash B \vee C \rightarrow \exists x B \vee \exists x C$. Проте x не вільна в $\exists x B \vee \exists x C$, тому за П5 маємо $\vdash \exists x (B \vee C) \rightarrow \exists x B \vee \exists x C$.

Приклад 5.1.25. $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B \& \forall x C$.

Маємо $\vdash B \& C \rightarrow B$ та $\vdash B \& C \rightarrow C$ за ТТ, звідки за $\forall$ -дис маємо $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B$ та $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x C$, тому за ТТ отримуємо $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B \& \forall x C$ за ТТ.

Приклад 5.1.26. $\vdash \forall xB \& \forall xC \rightarrow \forall x(B \& C)$.

Маємо $\vdash \forall xB \rightarrow B$ та $\vdash \forall xC \rightarrow C$ (приклад 5.1.12), звідки за ТТ маємо $\vdash \forall xB \& \forall xC \rightarrow B \& C$. Проте x не вільна в $\forall xB \& \forall xC$, тому за $\forall$ -вв отримуємо $\vdash \forall xB \& \forall xC \rightarrow \forall x(B \& C)$.

Приклад 5.1.27. $\vdash (\exists xA \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists xB)$.

Як $Ax2$ маємо $\vdash A \rightarrow \exists xA$, звідки $\vdash \neg \exists xA \rightarrow \neg A$; як $Ax2$ маємо $\vdash B \rightarrow \exists xB$, тому за ТТ отримуємо $\vdash \neg \exists xA \vee B \rightarrow \neg A \vee \exists xB$, тобто $\vdash (\exists xA \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists xB)$.

Приклад 5.1.28. $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$ за умови x не вільна в A .

Згідно із прикладом 5.1.12 маємо $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$, звідки (*) за ТТ $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \& A \rightarrow B$. Проте x не вільна в A та в $\forall x(A \rightarrow B)$, тому x не вільна в $\forall x(A \rightarrow B) \& A$, звідки за $\forall$ -вв $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \& A \rightarrow \forall xB$. Звідси за ТТ $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$.

*Обґрунтування застосування ТТ:

$$P \rightarrow (A \rightarrow B) \sim \neg P \vee \neg A \vee B \sim (\neg P \& A) \vee B \sim P \& A \rightarrow B.$$

Приклад 5.1.29. $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$.

За ТТ $\vdash (A \rightarrow B) \& A \rightarrow B$ як тавтологія, звідки за $\forall$ -дис $\vdash \forall x((A \rightarrow B) \& A) \rightarrow \forall xB$ (1). Згідно із прикладом 5.1.26 маємо $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \& \forall xA \rightarrow \forall x((A \rightarrow B) \& A)$; звідси та з (1) за ТТ маємо $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \& \forall xA \rightarrow \forall xB$, звідки $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall xA \rightarrow \forall xB$ за ТТ.

Приклад 5.1.30. $\vdash (\exists xA \rightarrow \exists xB) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B)$.

Треба довести $\vdash \neg \exists xA \vee \exists xB \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$.

За ТТ $\vdash \neg A \rightarrow \neg A \vee B$ та $\vdash B \rightarrow \neg A \vee B$, тому за $\exists$ -дис отримуємо $\vdash \exists x \neg A \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$ (1) та $\vdash \exists xB \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$ (2). Маємо $\vdash A \rightarrow \exists xA$ ($Ax2$), звідки за ТТ $\vdash \neg \exists xA \rightarrow \neg A$; як $Ax2$ маємо $\vdash \neg A \rightarrow \exists x \neg A$, тому за ТТ $\vdash \neg \exists xA \rightarrow \exists x \neg A$ (3). Із (1), (2), (3) за ТТ $\vdash \neg \exists xA \vee \exists xB \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$.

Приклад 5.1.31. $\vdash (\forall xA \rightarrow B) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B)$.

Треба довести $\vdash \neg \forall xA \vee B \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$, тобто довести $\vdash \neg \neg \exists x \neg A \vee B \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$.

За ТТ маємо $\vdash \neg A \rightarrow \neg A \vee B$ та $\vdash B \rightarrow \neg A \vee B$, тому за $\exists$ -дис маємо $\vdash \exists x \neg A \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$ (1) та $\vdash \exists xB \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$ (2). Як $Ax2$ маємо $\vdash B \rightarrow \exists xB$; звідси та з (1) і (2) за ТТ отримуємо $\vdash \neg \neg \exists x \neg A \vee B \rightarrow \exists x(\neg A \vee B)$.

Приклад 5.1.32. $\vdash \exists x B \leftrightarrow \exists y B_x[y]$ за умови y не вільна у B .

Маємо $\vdash B_x[y] \rightarrow \exists x B$ як $Ax2$, звідки $\vdash \exists y B_x[y] \rightarrow \exists x B$ за П5. Однак $(B_x[y])_y[x]$ збігається з B , тому що y не вільна у B . Тому $\vdash B \rightarrow \exists y B_x[y]$ як $Ax3$, звідки $\vdash \exists x B \rightarrow \exists y B_x[y]$ за П5. Звідси та з $\vdash \exists y B_x[y] \rightarrow \exists x B$ маємо $\vdash \exists x B \leftrightarrow \exists y B_x[y]$ за ТТ.

Приклад 5.1.33. $\vdash \neg \forall x B \leftrightarrow \exists x \neg B$ та $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \forall x \neg B$.

За ТТ $\vdash \neg \neg \exists x \neg B \leftrightarrow \exists x \neg B$, тобто $\vdash \neg \forall x B \leftrightarrow \exists x \neg B$.

Доводимо $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \forall x \neg B$. Покажемо $\vdash \neg \exists x B \rightarrow \neg \exists x \neg \neg B$ та $\vdash \neg \exists x \neg \neg B \rightarrow \neg \exists x B$, звідки за ТТ отримаємо $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \neg \exists x \neg \neg B$, тобто $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \forall x \neg B$.

За ТТ $\vdash \neg \neg B \rightarrow B$, звідки за $\exists$ -дис $\vdash \exists x \neg \neg B \rightarrow \exists x B$, тому за ТТ $\vdash \neg \exists x B \rightarrow \neg \exists x \neg \neg B$.

За ТТ $\vdash B \rightarrow \neg \neg B$, звідки за $\exists$ -дис $\vdash \exists x B \rightarrow \exists x \neg \neg B$, тому за ТТ $\vdash \neg \exists x \neg \neg B \rightarrow \neg \exists x B$.

Приклад 5.1.34. $\vdash \exists x B \vee C \leftrightarrow \exists x (B \vee C)$, якщо x не вільна в C .

Доведемо $\vdash \exists x B \vee C \rightarrow \exists x (B \vee C)$. За ТТ $\vdash B \rightarrow B \vee C$, тому за $\exists$ -дис $\vdash \exists x B \rightarrow \exists x (B \vee C)$ (1). За ТТ маємо $\vdash C \rightarrow B \vee C$, як $Ax2$ маємо $\vdash B \vee C \rightarrow \exists x (B \vee C)$, звідки $\vdash C \rightarrow \exists x (B \vee C)$ за ТТ. Звідси та з (1) за ТТ маємо $\vdash \exists x B \vee C \rightarrow \exists x (B \vee C)$ (2).

Доведемо $\vdash \exists x (B \vee C) \rightarrow \exists x B \vee C$ за умови x не вільна в C . Маємо $\vdash B \rightarrow \exists x B$ як $Ax2$, звідки за ТТ $\vdash B \vee C \rightarrow \exists x B \vee C$. Проте x не вільна в C та в $\exists x B$, тому x не вільна в $\exists x B \vee C$, звідки за П5 $\vdash \exists x (B \vee C) \rightarrow \exists x B \vee C$. Звідси та із (2) за ТТ $\vdash \exists x B \vee C \leftrightarrow \exists x (B \vee C)$.

Приклад 5.1.35. $\vdash \forall x B \vee C \leftrightarrow \forall x (B \vee C)$, якщо x не вільна в C .

За ТТ $\vdash B \rightarrow B \vee C$, тому $\vdash \forall x B \rightarrow \forall x (B \vee C)$ за $\forall$ -дис. За ТТ $\vdash C \rightarrow B \vee C$, тому $\vdash C \rightarrow \forall x (B \vee C)$ за $\forall$ -вв. Звідси та з виведеного $\vdash \forall x B \rightarrow \forall x (B \vee C)$ за ТТ маємо $\vdash \forall x B \vee C \rightarrow \forall x (B \vee C)$ (1).

Згідно із прикладом 5.1.12 маємо $\vdash \forall x (B \vee C) \rightarrow B \vee C$, звідки (*) за ТТ $\vdash \forall x (B \vee C) \& \neg C \rightarrow B$. Проте x не вільна в $\forall x (B \vee C) \& \neg C$, тому за $\forall$ -вв маємо $\vdash \forall x (B \vee C) \& \neg C \rightarrow \forall x B$, звідки за ТТ $\vdash \forall x (B \vee C) \rightarrow \forall x B \vee C$. Звідси та з (1) за ТТ $\vdash \forall x B \vee C \leftrightarrow \forall x (B \vee C)$.

*Обґрунтування застосування ТТ:

$P \rightarrow B \vee C \sim \neg P \vee B \vee C \sim \neg (P \& \neg C) \vee B \sim P \& \neg C \rightarrow B$.

Приклад 5.1.36. $\vdash \exists x B \& C \leftrightarrow \exists x (B \& C)$, якщо x не вільна в C .

Доведемо $\vdash \exists x B \& C \rightarrow \exists x (B \& C)$, якщо x не вільна в C . Маємо $\vdash B \& C \rightarrow \exists x (B \& C)$ як $Ax2$, звідки $\vdash B \rightarrow C \rightarrow \exists x (B \& C)$ за ТТ. Проте x не вільна в $C \rightarrow \exists x (B \& C)$, тому за П5 отримуємо $\vdash \exists x B \rightarrow C \rightarrow \exists x (B \& C)$, звідки за ТТ $\vdash \exists x B \& C \leftrightarrow \exists x (B \& C)$ (1).

Доведемо $\vdash \exists x (B \& C) \rightarrow \exists x B \& C$, якщо x не вільна в C . Маємо $\vdash B \rightarrow \exists x B$ як $Ax2$, звідки $\vdash B \& C \rightarrow \exists x B \& C$ за ТТ. Проте x не вільна в $\exists x B \& C$, тому за П5 маємо $\vdash \exists x (B \& C) \rightarrow \exists x B \& C$.

Із цього та з (1) за ТТ отримуємо $\vdash \exists x B \& C \leftrightarrow \exists x (B \& C)$.

Приклад 5.1.37. $\vdash \forall x B \& C \leftrightarrow \forall x (B \& C)$, якщо x не вільна в C .

Доведемо $\vdash \forall x B \& C \rightarrow \forall x (B \& C)$, якщо x не вільна в C . Маємо $\vdash \forall x B \rightarrow B$ (приклад 1), звідки $\vdash \forall x B \& C \rightarrow B \& C$ за ТТ. Проте x не вільна в $\forall x B \& C$, тому за $\forall$ -вв $\vdash \forall x B \& C \rightarrow \forall x (B \& C)$ (1).

Доведемо $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B \& C$. Маємо $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow B \& C$ (приклад 5.1.12), за ТТ маємо $\vdash B \& C \rightarrow C$, звідки $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow C$ за ТТ (2). За ТТ маємо $\vdash B \& C \rightarrow B$, звідки $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B$ за $\forall$ -дис. Звідси та з (2) за ТТ $\vdash \forall x (B \& C) \rightarrow \forall x B \& C$.

Із цього та з (1) за ТТ отримуємо $\vdash \forall x B \& C \leftrightarrow \forall x (B \& C)$.

Зауважимо, що приклади 5.1.32–5.1.37 – це пункти синтаксичного варіанта теорем про варіанту та про пренексні операції.

Властивості теорій першого порядку. Нехай Γ – множина формул, T – теорія першого порядку. Позначимо $T[\Gamma]$ теорію, утворену з T додаванням формул множини Γ як нових власних аксіом.

Якщо $\Gamma = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$, то замість $T[\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}]$ пишемо $T[\Psi_1, \dots, \Psi_n]$.

При $\Gamma = \{\Psi\}$ пишемо $T[\Psi] \vdash \Phi$.

Теорема 5.1.4 (дедукції). Нехай A – замкнена формула; тоді для довільної формули B маємо: $T \vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow T[A]$.

Наслідок 5.1.2. Нехай $A_1, \dots, A_n$ – замкнені формули; тоді для довільної формули B маємо $T \vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \Leftrightarrow T[A_1, \dots, A_n] \vdash B$.

Приклад 5.1.38. Якщо не вимагати замкненості формули A , то теорема дедукції неправильна. Справді, $Ar[x = 0] \vdash x = 0$, тому за ПП маємо $Ar[x = 0] \vdash y = 0$. Однак формула $x = 0 \rightarrow y = 0$ не $\in$ ІАФ, тому неправильно, що $Ar \vdash x = 0 \rightarrow y = 0$.

Приклад 5.1.39 (теорема редукції). Нехай $\Gamma \subseteq Fr$; тоді маємо $T[\Gamma] \vdash A \Leftrightarrow T \vdash B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$ для деяких $B_1, \dots, B_n$, де кожна формула B_k $\in$ замиканням деякої формули з Γ .

Нехай у виведенні $T[\Gamma] \vdash A$ використано формули $A_1, \dots, A_n$; нехай $B_1, \dots, B_n$ – замикання $A_1, \dots, A_n$. Тоді $T[\Gamma] \vdash A \Leftrightarrow T[A_1, \dots, A_n] \vdash A$. За теоремою замикання $T[B_1, \dots, B_n] \vdash A_1, \dots, T[B_1, \dots, B_n] \vdash A_n$. Отже, $T[B_1, \dots, B_n] \vdash A$, звідки $T \vdash B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$ за наслідком теореми дедукції.

Нехай $T \vdash B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$, тоді $T[\Gamma] \vdash B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$; нехай $B_1, \dots, B_n$ – замикання деяких формул із Γ . За теоремою замикання $T[\Gamma] \vdash B_k$ для всіх $k \in \{1, \dots, n\}$. За МР тоді маємо $T[\Gamma] \vdash A$.

Для теорій першого порядку справджуються синтаксичні варіанти теорем рівності, еквівалентності, теорем про зведення до пренексної форми.

Теорема 5.1.5 (еквівалентності). Нехай A' отримана з формули A заміною деяких входжень формул $B_1, \dots, B_n$ на $P_1, \dots, P_n$, відповідно. Якщо $\vdash B_1 \leftrightarrow P_1, \dots, \vdash B_n \leftrightarrow P_n$, то $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Приклад 5.1.40 (теорема про варіанту). Якщо A' – варіанта формули A , то $\vdash A \leftrightarrow A'$.

Твердження випливає із прикладу 5.1.32 та теореми еквівалентності.

Теорема 5.1.6. Якщо Φ' – пренексна форма формули Φ , то $\vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення теорії першого порядку.
2. Чому множина аксіом теорії першого порядку розбита на множини логічних і власних аксіом?

3. Опишіть множину логічних аксіом теорій першого порядку.
4. Опишіть множину правил виведення теорій першого порядку.
5. Чим визначається теорія першого порядку?
6. Дайте визначення розширення теорії першого порядку та звуження теорії першого порядку.
8. Яке розширення теорії першого порядку називають простим?
9. Наведіть визначення еквівалентних теорій першого порядку.
10. Що таке потужність теорії першого порядку?
11. Що таке числення предикатів першого порядку?
12. Опишіть множину власних аксіом формальної арифметики.
13. Опишіть множину власних аксіом елементарної теорії груп.
14. Чому висновок із правила П5 не є логічним наслідком засновку?
15. Як співвідносяться класи теорем числення предикатів першого порядку та всюди істинних формул?
16. Що таке модель теорії першого порядку?
17. Наведіть приклади теорій першого порядку та їхніх моделей.
18. Опишіть моделі числення предикатів першого порядку.
19. Що таке стандартна модель формальної арифметики?
20. Що таке істинна в теорії формула?
21. Сформулюйте теорему істинності.
22. Сформулюйте теорему тавтології та її наслідок.
23. Сформулюйте правило $\forall$ -введення.
24. Сформулюйте правила $\exists$ -дистрибутивності та $\forall$ -дистрибутивності.
25. Як формулюються правила узагальнення та уособлення?
26. Сформулюйте синтаксичну теорему замикання.
27. Сформулюйте правило підстановки й теорему підстановки.
30. Сформулюйте теорему дедукції та її наслідок.
31. Чому важлива умова замкненості формули A у формулюванні теореми дедукції?
32. Сформулюйте теорему редукції.
33. Сформулюйте синтаксичний варіант теореми еквівалентності.

Вправи

1. Доведіть незалежність кожної схеми логічних аксіом та кожного правила виведення від інших схем аксіом та правил виведення числення предикатів.

2. Визначте, указавши мову та власні аксіоми, теорії першого порядку таких математичних структур:

- 1) напівгрупи;
- 2) напівгрупи з одиницею;
- 3) комутативної групи;
- 4) кільця;
- 5) кільця з одиницею;
- 6) комутативного кільця;
- 7) тіла (некомутативного поля);
- 8) поля;
- 9) частково впорядкованої множини;
- 10) лінійно впорядкованої множини;
- 11) цілком упорядкованої множини;
- 12) ґратки;
- 13) булевої ґратки;
- 14) групи без кручень;
- 15) алгебраїчно замкненого поля;
- 16) упорядкованого поля дійсних чисел.

3. Наведіть виведення в численні предикатів таких формул:

- 1) $\vdash \forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$;
- 2) $\vdash (A \rightarrow \forall x B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow B)$;
- 3) $\vdash \exists x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \exists x B)$;
- 4) $\vdash (A \rightarrow \exists x B) \rightarrow \exists x (A \rightarrow B)$;
- 5) $\vdash (\exists x A \rightarrow B) \rightarrow \exists x (A \rightarrow B)$;
- 6) $\vdash \exists x (A \vee B) \rightarrow (\forall x \neg B \rightarrow \exists x A)$;
- 7) $\vdash (\forall x \neg B \rightarrow \exists x A) \rightarrow \exists x (A \vee B)$;
- 8) $\vdash (\forall x A \rightarrow \forall x B) \rightarrow \exists x (A \rightarrow B)$.

4. Установіть, чи правильно:

- 1) $\vdash \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$;
- 2) $\vdash \forall y \exists x A \rightarrow \exists x \forall y A$;
- 3) $\vdash \exists x A \& \exists x B \rightarrow \exists x (A \& B)$;

- 4) $\vdash \exists x(A \& B) \rightarrow \exists xA \& \exists xB$;
- 5) $\vdash \forall xA \vee \forall xB \rightarrow \forall x(A \vee B)$;
- 6) $\vdash \forall x(A \vee B) \rightarrow \forall xA \vee \forall xB$;
- 7) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$;
- 8) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow \exists xB)$;
- 9) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$;
- 10) $\vdash (A \rightarrow \forall xB) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$;
- 11) якщо $\vdash A \rightarrow \forall xB$, то $\vdash \forall x(A \rightarrow B)$;
- 12) $\vdash \forall xA \& B \rightarrow \forall x(A \& B)$;
- 13) якщо $\vdash \forall xA \& B$, то $\vdash \forall x(A \& B)$;
- 14) $\vdash \exists xA \& B \rightarrow \exists x(A \& B)$;
- 15) якщо $\vdash \exists xA \& B$, то $\vdash \exists x(A \& B)$.

5. Доведіть теорему 5.1.5 – синтаксичний варіант теореми еквівалентності.

6. Сформулюйте та доведіть синтаксичні варіанти теорем рівності.

7. Доведіть теорему 5.1.6 – синтаксичний варіант теореми про пренексну форму.

5.2. Несуперечливість та повнота теорій першого порядку. Теорема Гьоделя про повноту, її наслідки. Категоричність

Теорія першого порядку T *несуперечлива*, якщо не існує формули Φ такої, що $T \vdash \Phi$ та $T \vdash \neg \Phi$.

Несуперечлива теорія першого порядку T називається *повною*, або *максимальною*, якщо для кожної замкненої формули Φ маємо $T \vdash \Phi$ або $T \vdash \neg \Phi$.

Приклад 5.2.1. Теорія першого порядку T суперечлива $\Leftrightarrow T \vdash \Psi$ для кожної формули Ψ .

Твердження $\Leftarrow$ очевидне. Покажемо $\Rightarrow$. Нехай T суперечлива, тоді для деякої формули Φ маємо $T \vdash \Phi$ та $T \vdash \neg\Phi$. Проте для кожної формули Ψ маємо $\{\Phi, \neg\Phi\} \models \Psi$, звідки $T \vdash \Psi$ за ТТ.

Приклад 5.2.2. Числення предикатів першого порядку неповне.

Позначимо S замкненою формулу $\forall x \forall y (x=y)$, яка істинна тільки на 1-елементних інтерпретаціях. Тоді $\neg S$ істинна тільки на всіх n -елементних інтерпретаціях, де $n > 1$. Якщо $\vdash S$, то $\models S$, що неможливо; якщо ж $\vdash \neg S$, то $\models \neg S$, що теж неможливо.

Приклад 5.2.3 (теорема несуперечливості). Нехай T – теорія першого порядку, A – замкнена формула така, що $A \notin \text{Th}(T)$. Тоді теорія $T[\neg A]$ несуперечлива.

Припустимо супротивне: $T[\neg A]$ суперечлива. Тоді за теоремою 7.2.1 $T[\neg A] \vdash A$, звідки за теоремою дедукції $T \vdash \neg A \rightarrow A$.

За ТТ тоді $T \vdash A$, тобто $A \in \text{Th}(T)$, що суперечить $A \notin \text{Th}(T)$.

Приклад 5.2.4 (теорема суперечливості). Нехай T – теорія першого порядку, A – замкнена формула. Тоді маємо:

$T \vdash A \Leftrightarrow T[\neg A]$ суперечлива.

Нехай $T \vdash A$. Тоді $T[\neg A] \vdash A$. Однак $T[\neg A] \vdash \neg A$, оскільки $\neg A$ є аксіомою $T[\neg A]$, тому $T[\neg A]$ суперечлива.

Нехай тепер $T[\neg A]$ суперечлива. Тоді маємо $T[\neg A] \vdash A$, звідки $T \vdash \neg A \rightarrow A$ за теоремою дедукції. Звідси $T \vdash A$ за ТТ.

Теорема 5.2.1 (Лінденбаума). Кожна несуперечлива теорія першого порядку має несуперечливе просте повне розширення.

Теорія першого порядку T *перелічна*, якщо множина $\text{Th}(T)$ алгоритмічно перелічна.

Теорія першого порядку T *розв'язна*, якщо множина $\text{Th}(T)$ алгоритмічно розв'язна відносно множини формул мови теорії.

Приклад 5.2.5. Якщо множина аксіом теорії першого порядку T перелічна, то T перелічна.

Нехай $\aleph$ – алгоритм, який перелічує аксіоми теорії T .

Алгоритм, який перелічує $\text{Th}(T)$, поетапно має виконувати такі дії:

- 1) видати за допомогою алгоритму $\aleph$ чергову аксіому A ;
- 2) до множини вже отриманих теорем однократно застосувати П1–П5 усюди, де це можливо;

3) поповнити множину теорем отриманими новими теоремами та новою аксіомою A .

Приклад 5.2.6. Якщо T – повна теорія першого порядку з алгоритмічно перелічною множиною аксіом, то T розв’язна.

Укажемо алгоритм $\mathfrak{R}$, який за кожною $S \in Fr$ установлює $T \vdash S$ чи $T \vdash \neg S$, тобто $S \in Th(T)$ чи $S \notin Th(T)$. За теоремою замикання $T \vdash S \Leftrightarrow T \vdash \Phi$, де Φ – замикання S , тоді $T \vdash \Phi \Rightarrow S \in Th(T)$ та $T \vdash \neg \Phi \Rightarrow S \notin Th(T)$. Отже, $\mathfrak{R}$ має встановити $T \vdash \Psi$ чи $T \vdash \neg \Psi$ для кожної замкненої Ψ .

Нехай $\mathfrak{R}$ – алгоритм, який перелічує аксіоми теорії T .

Алгоритм $\mathfrak{R}$ поетапно має виконувати такі дії:

1) видати за допомогою алгоритму $\mathfrak{R}$ чергову аксіому A ;
2) до множини вже отриманих теорем однократно застосувати П1–П5 усюди, де це можливо;

3) поповнити множину теорем отриманими новими теоремами та новою аксіомою A ;

4) нехай Thd – множина теорем, отриманих у такий спосіб на поточний момент;

– перевірити $\Phi \in Thd$; якщо так, то видати результат "так" і зупинитись;

– перевірити $\neg \Phi \in Thd$; якщо так, то видати результат "ні" і зупинитись;

– якщо $\Phi \notin Thd$ та $\neg \Phi \notin Thd$, то перейти до 1).

За повнотою T маємо $\Phi \in Th(T)$ або $\neg \Phi \in Th(T)$, тому алгоритм $\mathfrak{R}$ гарантовано зупиниться і видасть результат.

Теорема Гьоделя про повноту. Ця теорема засвідчує повноту логічних засобів класичних логік першого порядку. Вона стверджує, що логічних засобів теорії першого порядку, тобто її аксіом та правил виведення, достатньо для виведення кожної істинної в теорії формули. Інакше кажучи, теорема про повноту засвідчує адекватність семантичної та синтаксичної істинності.

Теорему Гьоделя про повноту можна довести на основі теореми про існування моделі:

Теорема 5.2.2 (Гьоделя – Генкіна). Нехай T – несуперечлива теорія першого порядку потужністю α . Тоді T має модель потужністю $\leq \alpha$.

Наслідок 5.2.1. Кожна несуперечлива зліченна теорія першого порядку має зліченну або скінченну модель.

Теорема 5.2.3 (Гьоделя про повноту, перше формулювання). Нехай T – теорія першого порядку. Формула Φ істинна в $T \Leftrightarrow T \vdash \Phi$.

Теорема 5.2.4 (Гьоделя про повноту, друге формулювання).

Теорія першого порядку T несуперечлива $\Leftrightarrow T$ має модель.

Твердження $\Rightarrow$ випливає з теореми 5.2.2. Нехай тепер T має модель M , тоді кожна формула вигляду $\neg A \& A$ на M хибна, тому $T \vdash \neg A \& A$ неможливо, звідки T несуперечлива.

Приклад 5.2.7. Виведемо теорему 5.2.3 із теореми 5.2.4.

Нехай $\bar{\Phi}$ – замикання Φ . Тоді маємо: $T \vdash \Phi \Leftrightarrow T \vdash \bar{\Phi}$ (за теоремою замикання) $\Leftrightarrow T[\neg \bar{\Phi}]$ суперечлива (за прикладом 5.2.4) $\Leftrightarrow T[\neg \bar{\Phi}]$ не має моделі (за теоремою 5.2.4) $\Leftrightarrow \bar{\Phi}$ істинна в T (кожна модель для $T[\neg \bar{\Phi}]$ – це модель M теорії T , для якої $M \models \neg \bar{\Phi}$, тому якщо $T[\neg \bar{\Phi}]$ не має моделі, то $M \models \bar{\Phi}$ для кожної моделі M теорії T , тобто $\bar{\Phi}$ істинна в T) $\Leftrightarrow$ за теоремою замикання Φ істинна в T .

Розглянемо приклади використання теореми Гьоделя про повноту.

Теорема 5.2.5 (Льовенгейма – Сколема про спуск). Нехай теорія першого порядку T потужністю α має модель, тоді T має модель потужністю $\leq \alpha$.

Якщо T має модель, то T несуперечлива. За теоремою 5.2.2 T має модель потужністю $\leq \alpha$.

Наслідок 5.2.2. Якщо зліченна теорія першого порядку має нескінченну модель, то вона має зліченну модель.

Приклад 5.2.8. Парадокс Сколема в аксіоматичній теорії множин.

В аксіоматичній теорії множин T_{set} (див. [17, 21]) можна довести теорему Кантора про неіснування бієктивного відображення множини A на її булеан (множину всіх підмножин) 2^A . За наслідком 5.2.2 T_{set} має зліченну модель, тобто кількість усіх можливих

множин зліченна, звідки 2^N_M – це 2^N у такій зліченній моделі – теж зліченна! Ця уявна суперечність називається *парадоксом Сколема*. Проте справжнього парадокса тут немає. Хоча множина 2^N_M дійсно зліченна, тобто існує бієктивне відображення 2^N_M на N , це відображення як множина не належить моделі, тобто не є елементом носія моделі. Отже, множина 2^N_M незліченна із внутрішнього погляду T_{set} , хоча із зовнішнього погляду 2^N_M зліченна.

Парадокс Сколема показує, що кожна аксіоматизація теорії множин у вигляді теорії першого порядку зі зліченною множиною аксіом не відображує повністю понять "множина", "булеан множини", "зліченна множина", "бієктивне відображення" тощо. Ці поняття загалом не можуть бути адекватно описані за допомогою теорій першого порядку.

Теорія T *скінченноаксіоматизована*, якщо множина її власних аксіом скінченна.

Скінченноаксіоматизованою частиною (САЧ) теорії T називають просте скінченноаксіоматизоване звуження теорії T .

Приклад 5.2.9 (теорема компактності, перше формулювання). Формула Φ істинна в $T \Leftrightarrow \Phi$ істинна в деякій САЧ $K \subseteq T$.

Нехай Φ істинна в T . За теоремою 5.2.3 тоді $T \models \Phi$. Таке виведення використовує тільки скінченну кількість аксіом, тому може здійснюватися в межах деякої САЧ $K \subseteq T$. Таким чином, $K \models \Phi$, звідки Φ істинна в K .

Кожна модель теорії T є моделлю кожного її звуження, тому якщо Φ істинна в деякій САЧ $K \models \Phi$, то Φ істинна в T .

Приклад 5.2.10 (теорема компактності, друге формулювання). Теорія першого порядку T має модель $\Leftrightarrow$ кожна САЧ теорії T має модель.

Якщо T має модель M , то всі аксіоми T істинні на M . Отже, кожна аксіома з довільної скінченної підмножини аксіом T істинна на M . Тому M є моделлю кожної САЧ теорії T .

Якщо кожна САЧ теорії T має модель, то T несуперечлива, оскільки виведення кожної суперечності (формули вигляду $\neg A \& A$) використовує скінченну кількість аксіом. За теоремою 5.2.2 несуперечлива T має модель.

Теорема 5.2.6 (Льовенгейма – Сколема про підйом). Нехай теорія першого порядку T потужністю α має нескінченну модель, тоді T має модель довільної потужності $\beta \geq \alpha$.

Наслідок 5.2.3. Нехай зліченна теорія першого порядку T має нескінченну модель, тоді T має модель довільної потужності $\beta \geq \alpha$.

Наслідок 5.2.4. Формальна арифметика Ar має нескінченні моделі як завгодно великої потужності.

Моделі Ar , які неізоморфні стандартній моделі, – це нестандартні, або сколемівські, моделі.

Наслідок 5.2.4 засвідчує існування незліченних нестандартних моделей формальної арифметики Ar . Проте існують навіть злічені нестандартні моделі Ar .

Приклад 5.2.11. Зліченна модель Ar , яка неізоморфна її стандартній моделі N .

Нехай ω – новий константний символ. Розширимо Ar до теорії $T = Ar[\{\bar{n} \neq \omega \mid n \in N\}]$.

Нехай K – довільна САЧ теорії T , m – найбільше число таке, що $\bar{n} \neq \omega$ є аксіомою теорії K , або $m = 0$, якщо жодна із формул $\bar{n} \neq \omega$ не є аксіомою K . Тоді $(N, {}^d\sigma_{ar})$, де ${}^d\sigma_{ar} = \sigma_{ar} \cup \{\omega\}$, є моделлю K , тому що достатньо узяти $m + 1$ як значення ω . Отже, кожна САЧ теорії T має модель, тому (приклад 5.2.10) T має модель $(D, {}^\omega\sigma_{ar})$. Аксіоми $Ar1$ та $Ar2$ гарантують нескінченність D . Тоді $\mathbf{D} = (D, \sigma_{ar})$ – це модель Ar . Через наявність ω , яке позначає число, відмінне від кожного натурального числа, така $\mathbf{D}$ неізоморфна N .

Існування нестандартних моделей формальної арифметики засвідчує неадекватність та неповноту опису множини натуральних чисел за допомогою аксіом Ar . Справа тут у тому, що схема аксіом індукції $Ar7$ забезпечує виконання принципу математичної індукції тільки для *зліченної* множини властивостей натуральних чисел, які можуть бути виражені мовою арифметики. Водночас маємо *континуум* властивостей натуральних чисел.

Таким чином, принцип математичної індукції формалізується в Ar не повністю, що засвідчує принципову відмінність між інтуїтивним і формальним його розумінням.

Категоричність. Теорія першого порядку *категорична*, якщо всі її моделі ізоморфні.

Приклад 5.2.12. Теорія першого порядку T , сигнатура якої не має нелогічних символів, а множина власних аксіом складається із формул вигляду $x=u$, категорична.

Справді, усі моделі теорії T 1-елементні. Такі моделі ізоморфні, оскільки сигнатура мови має тільки логічний символ $=$.

Якщо теорія першого порядку T має нескінченні моделі, то вона не може бути категоричною, оскільки внаслідок теореми Льюенгейма – Сколема T має моделі *різних* нескінченних потужностей, а такі моделі неізоморфні.

Нехай α – деяка нескінченна потужність. Зліченну потужність позначаємо ω .

Теорія першого порядку T *α -категорична*, якщо всі її моделі потужністю α ізоморфні.

Приклад 5.2.13. ЧП-1, сигнатура якого не містить нелогічних символів (тобто містить тільки ПС $=$), є прикладом теорії, α -категоричної для довільної α .

Приклад 5.2.14. ЧП-1, сигнатура якого містить єдиний 1-арний ПС як нелогічний символ, – це теорія, яка для довільної α не є α -категоричною.

Приклад 5.2.15. Нехай T – теорія першого порядку, сигнатура якої містить єдиний 1-арний ПС P як нелогічний символ. Нехай власні аксіоми T стверджують: для кожного $k \in N$ існують $\geq k$ елементів із властивістю P та $\geq k$ елементів із властивістю $\neg P$. Тоді T є ω -категоричною, але для кожної незліченної потужності α теорія T не є α -категоричною.

Приклад 5.2.16. Нехай T – теорія першого порядку, нехай її нелогічними символами будуть константні символи $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, які утворюють нескінченну послідовність. Нехай власні аксіоми T мають вигляд $c_i \neq c_j$ для всіх $i \neq j$. Тоді T є α -категоричною для кожної незліченної потужності α , але T не є ω -категоричною.

Для зліченних теорій інших можливостей, крім зазначених у прикладах 5.2.13–5.12.16, не існує. Це засвідчує (див. [21])

Теорема 5.2.7 (Морлі). Якщо зліченна теорія α -категорична для деякої незліченної α , то вона β -категорична для всіх незліченних β .

Прикладом використання поняття категоричності є

Теорема 5.2.8 (Лося – Воота). Нехай α – деяка нескінченна потужність; нехай T – несуперечлива теорія потужністю α , усі моделі якої нескінченні, причому T α -категорична.. Тоді теорія T є повною.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення несуперечливої теорії першого порядку.
2. Дайте визначення повної (максимальної) теорії першого порядку.
3. Чому суперечливі теорії першого порядку тривіальні?
4. Чому числення предикатів першого порядку неповне?
5. Що означає перелічність теорії першого порядку?
6. Що означає розв'язність теорії першого порядку?
7. Сформулюйте теорему Гьоделя – Генкіна про модель.
8. Наведіть перше та друге формулювання теореми Гьоделя про повноту.
9. Чому перше формулювання теореми Гьоделя про повноту названо теоремою адекватності?
10. Сформулюйте теорему Льовенгейма – Сколема про спуск.
11. У чому полягає парадокс Сколема в аксіоматичній теорії множин? Що він засвідчує?
12. Що таке скінченноаксіоматизована теорія першого порядку?
13. Що таке скінченноаксіоматизована частина теорії першого порядку?
14. Сформулюйте теорему компактності (наведіть перше та друге формулювання).
15. Сформулюйте теорему Льовенгейма – Сколема про підйом.
16. Що таке нестандартна модель формальної арифметики?

17. Що засвідчує існування нестандартних моделей формальної арифметики?

18. Чому принцип математичної індукції формалізується в Ar не повністю?

19. Дайте визначення категоричної теорії першого порядку.

20. Дайте визначення α -категоричної теорії першого порядку.

21. Сформулюйте теорему Лося – Воота.

Вправи

1. Доведіть теорему Лінденбаума.

2. Доведіть: проблема k -істинності алгоритмічно розв'язна.

3*. Доведіть, що чисте числення 1-арних предикатів розв'язне (його сигнатура містить тільки 1-арні ПС і не містить ФС та символу рівності $=$).

4**. Видалимо ФС $\times$ і аксіоми $Ar5$ та $Ar6$ із теорії Ar . Доведіть, що отримана таким чином теорія повна та розв'язна.

5. Доведіть теорему Льовенгейма – Сколема про підйом

6. Наведіть приклади категоричних теорій, відмінних від теорії із прикладу 5.2.12.

7. Наведіть приклад ω -категоричної теорії, яка не є α -категоричною для кожної незліченної α та відмінна від теорії із прикладу 5.2.15.

8. Наведіть приклад теорії, α -категоричної для кожної незліченної потужності α , але не ω -категоричної, яка відмінна від теорії із прикладу 5.2.16.

5.3. Аксиоматичні системи

неокласичних логік першого порядку

ЧНКЧ. Формально-аксиоматичними системами гільбертівського типу в ЧНКЛ повнототальних еквітонних предикатів є чисті неокласичні числення, або ЧНКЧ (див. [9, 10, 26]).

ЧНКЧ – це формальна система вигляду $T = (L, Ax, P)$. Тут L – мова ЧНКЛ із множиною формул Fr , яку також назвемо мовою

ЧНКЧ, $Ax \subseteq Fr$ – множина аксіом, P – множина правил виведення. Така Ax розбита на множину $A_{\text{лог}}$ логічних аксіом і множину $A_{\text{вл}}$ власних аксіом.

Розглянемо різновид ЧНКЧ із наперед виділеною множиною V_T тотально неістотних імен (зауважимо, що в ЧНКЧ, описаних у [9, 10, 26], множину V_T задають спеціальними аксіомами синтетичної неістотності імен).

ЧНКЧ, у яких $A_{\text{вл}} = \emptyset$, назвемо стандартними.

ЧНКЧ, у яких $A_{\text{вл}} \neq \emptyset$, назвемо спеціалізованими, або прикладними.

Множину $A_{\text{лог}}$ можна задати такими схемами аксіом:

$Ax_{\text{ПП}}) \neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми;

$Ax_R) R(\Phi) \leftrightarrow \Phi$;

$Ax_{R\neg}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – $R\neg$ -дистрибутивність;

$Ax_{R\vee}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$ – $R\vee$ -дистрибутивність;

$Ax_{RR}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$ – згортка реномінацій;

$Ax_{R\exists s}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ – обмежена $R\exists$ -дистрибутивність;

$Ax_{R\exists}) R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi)$ за умови $z \in V_T$ та

$z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$ – $R\exists$ -дистрибутивність;

$Ax_{R\exists x}) R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(\Phi) \rightarrow \exists v_1 \dots \exists v_n \Phi$ – аксіоми підстановки;

$Ax_{\exists\exists}) \exists x \exists y \Phi \rightarrow \exists y \exists x \Phi$ – комутативність $\exists$ -префіксів;

$Ax_{U\Phi}) \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ за умови $y \in \mu(\Phi)$ – аксіоми неістотності імен для формул.

Множина P складається із таких правил виведення:

P1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – правило розширення;

P2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення;

P3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – правило асоціативності;

P4) $\Phi \vee \Psi, \neg\Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – правило перетину;

P5) $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \forall x \Psi \vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi$ – правило $\exists v$;

P6) $\Phi \rightarrow \forall y \Phi \vdash R_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – правило згортки за неістотним іменем.

Те, що формула Φ є теоремою в численні T , позначаємо $\vdash \Phi$.
Інтерпретацію $A = (A, I)$ мови ЧНКЧ T назвемо моделлю ЧНКЧ T , якщо кожна аксіома числення $T \in A$ -істинною.

Коректність ЧНКЧ засвідчує

Теорема 5.3.1 (істинності). Кожна теорема ЧНКЧ T істинна на кожній моделі T .

Зокрема, кожна теорема стандартного ЧНКЧ – неспростовна формула.

Для ЧНКЧ справджуються теорема тавтології та синтаксична теорема еквівалентності.

Теорема 5.3.2 (тавтології). Кожна тавтологія є теоремою.

Теорема 5.3.3 (еквівалентності). Нехай формула Φ' отримана із формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$, відповідно. Якщо $\vdash \Phi_1 \leftrightarrow \Psi_1, \dots, \vdash \Phi_n \leftrightarrow \Psi_n$, то $\vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

Для гарантовано неістотних імен маємо:

Теорема 5.3.4. $x \in \mu(\Phi) \Rightarrow \vdash \Phi \rightarrow \forall x \Phi$ та $\vdash \exists x \Phi \rightarrow \Phi$.

Для розглянутих у розділі 4 семантичних теорем маємо їхні синтаксичні аналоги в ЧНКЧ.

Приклад 5.3.1. У ЧНКЧ маємо:

- 1) $\vdash \Phi \rightarrow \forall y \Phi \Rightarrow \vdash \exists x \Phi \leftrightarrow \exists y R_y^x(\Phi)$;
- 2) для кожної формули Φ можна побудувати нормальну формулу Ψ таку: $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$;
- 3) для кожної формули Φ можна побудувати квазізамкнену нормальну Ξ таку: $\vdash \Phi \Leftrightarrow \vdash \Xi$.

Для ЧНКЧ справджується [9, 10] теорема повноти.

Теорема 5.3.5. Для кожної формули Φ ЧНКЧ T маємо
 $T \vdash \Phi \Leftrightarrow T \models \Phi$.

Таким чином, для ЧНКЧ семантична істинність еквівалентна істинності синтаксичній.

ФЕНКЧ. Формально-аксіоматичними системами гільбертівського типу в НКЛ повнототальних еквітонних функцій та предикатів функціонально-екваційного рівня є функціонально-екваційні неокласичні числення, або ФЕНКЧ (див. [9, 10, 26]).

ФЕНКЧ – це формальна система вигляду $T = (L, Ax, P)$. Тут L – мова ФЕНКЛ із множиною формул Fr , яку також назвемо мовою ФЕНКЧ, $Ax \subseteq Fr$ – множина аксіом, P – множина правил виведення. Ax розбита на множину $A_{\text{лог}}$ логічних аксіом і множину $A_{\text{вл}}$ власних аксіом.

Як і для випадку ЧНКЧ, розглянемо тут різновид ФЕНКЧ із наперед виділеною множиною V_T тотально неістотних імен (у ФЕНКЧ, описаних у [9, 10, 26], множину V_T задають спеціальними аксіомами синтетичної неістотності імен).

ФЕНКЧ, у яких $A_{\text{вл}} = \emptyset$, назвемо стандартними.

ФЕНКЧ, у яких $A_{\text{вл}} \neq \emptyset$, назвемо спеціалізованими, або прикладними.

Множину $A_{\text{лог}}$ можна задати такими схемами аксіом:

$AxIP) \neg\Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми;

$AxST) S(t) = t$ – елімінація суперпозиції без параметрів для термів;

$AxS\Phi) S(\Phi) \leftrightarrow \Phi$ – елімінація суперпозиції без параметрів для формул;

$AxS\neg) S^{\bar{v}}(\neg\Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t})$ – $S\neg$ -дистрибутивність;

$AxS\vee) S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t})$ – $S\vee$ -дистрибутивність;

$AxSS\Phi)$ аксіоми згортки суперпозицій для формул:

$$S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}));$$

$AxSST)$ аксіоми згортки суперпозицій для термів:

$$S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) = \\ = S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}));$$

$AxCNT) S^{x, \bar{v}}(\tau, x, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t})$ – згортка імен для термів;

$AxCN\Phi) S^{x, \bar{v}}(\Phi, x, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t})$ – згортка імен для формул;

$AxSD) S^{\bar{v}}(x, \bar{t}) = x$, якщо $x \notin \{\bar{v}\}$ – згортка неістотних імен для ДНС;

$AxSF) S^{x, \bar{v}}(x, \tau, \bar{t}) = \tau$ – аксіоми спрощення для ДНС;

$AxS\exists x) S^{\nu_1 \dots \nu_n}(\Phi, t_1, \dots, t_n) \rightarrow \exists \nu_1 \dots \exists \nu_n \Phi$ – аксіоми підстановки;

$Ax\exists\exists) \exists x\exists y\Phi \rightarrow \exists y\exists x\Phi$ – аксіоми комутативності $\exists$ -префіксів;

$AxS\exists) S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \leftrightarrow \exists yS^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, y)$ за умови

$y \in V_T \setminus ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}))$ – $S\exists$ -дистрибутивність;

$AxSE) S^{\bar{v}}(s=r, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(r, \bar{t})$ – дистрибутивність суперпозиції щодо $=$;

$AxRE) 'x = 'x$ – аксіоми рефлексивності для рівності;

$AxET) t = s \rightarrow S^{\bar{v},z}(\tau, \bar{r}, t) = S^{\bar{v},z}(\tau, \bar{r}, s)$ – аксіоми рівності для термів;

$AxE\Phi) t = s \rightarrow (S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t) \leftrightarrow S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s))$ – аксіоми рівності для формул;

$AxUT) \forall y(t = S^x(t, y))$ за умови $y \in \mu(t)$ – аксіоми неістотності імен для термів;

$AxU\Phi) \Phi \rightarrow \forall x\Phi$ за умови $y \in \mu(\Phi)$ – аксіоми неістотності імен для формул.

Множина P правил виведення ФЕНКЧ:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – правило розширення;

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – правило скорочення;

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – правило асоціативності;

П4) $\Phi \vee \Psi, \neg \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – правило перетину;

П5) $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \forall x\Psi \vdash \exists x\Phi \rightarrow \Psi$ – правило $\exists\forall$;

П6) $\Phi \rightarrow \forall x\Phi \vdash S^{x,\bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t})$ – згортка за неістотним іменем для формул;

П7) $\forall y(\tau = S^x(\tau, y)) \vdash S^{x,\bar{v}}(\tau, t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t})$ – згортка за неістотним іменем для термів.

Інтерпретацію $A = (A, I)$ мови ФЕНКЧ T назвемо моделлю ФЕНКЧ T , якщо кожна аксіома числення $T \in A$ -істинною.

Для ФЕНКЧ справджуються синтаксичні аналоги розглянутих у розділі 4 семантичних теорем. Це, зокрема, теореми еквівалентності та про зведення до нормальної форми.

Нарешті, для ФЕНКЧ справджується [9, 10] теорема повноти:

Теорема 5.3.6. Для кожної формули Φ ФЕНКЧ T маємо:

$$T \vdash \Phi \Leftrightarrow T \models \Phi.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке ЧНКЧ?
1. Що таке стандартне ЧНКЧ; прикладне ЧНКЧ?
2. Опишіть множину логічних аксіом ЧНКЧ.
4. Опишіть множину правил виведення ЧНКЧ.
5. Сформулюйте синтаксичні аналоги семантичних теорем ЧНКЛ.
6. Сформулюйте теорему повноти ЧНКЧ.
7. Що таке ФЕНКЧ?
8. Опишіть множину логічних аксіом ФЕНКЧ.
9. Опишіть множину правил виведення ФЕНКЧ.
10. Сформулюйте теорему повноти ФЕНКЧ.

Вправи

1. Доведіть синтаксичну теорему еквівалентності ЧНКЧ.
2. Доведіть теорему 5.3.4.
3. Доведіть, що в ЧНКЧ справджуються такі синтаксичні аналоги теорем ЧНКЛ:
 - 1) $\vdash \Phi \rightarrow \forall y \Phi \Rightarrow \vdash \exists x \Phi \leftrightarrow \exists y R_y^x(\Phi)$;
 - 2) для кожної формули Φ можна побудувати нормальну формулу Ψ таку: $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$;
 - 3) для кожної формули Φ можна побудувати квазізамкнену нормальну Ξ : $\vdash \Phi \leftrightarrow \vdash \Xi$.
4. Для ЧНКЧ задайте пренексні операції.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про зведення до пренексної форми в ЧНКЧ.
6. Сформулюйте у ФЕНКЧ синтаксичні аналоги семантичних теорем ФЕНКЛ.
7. Доведіть теореми еквівалентності та теорему про зведення до нормальної форми у ФЕНКЧ.
8. Для ФЕНКЧ задайте пренексні операції, сформулюйте і доведіть теорему про зведення до пренексної форми.

6. СИСТЕМИ ПОШУКУ ДОВЕДЕНЬ У ЛОГІКАХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Автоматизація пошуку доведень належить до найважливіших застосувань математичної логіки. Ефективне знаходження доведень у край необхідне для успішного розв'язання низки задач, що виникають у сучасних інтелектуальних інформаційних системах та системах штучного інтелекту. Найважливішими методами пошуку доведень є метод семантичних таблиць, формальною основою якого є створене Г. Генценом секвенційне числення, запропонований ним же метод натурального виведення та розроблений Дж. А. Робінсоном метод резолюцій.

6.1. Метод резолюцій логіки першого порядку

Ідейною основою методу резолюцій логіки предикатів першого порядку є теорема Ербрана. Вона використовує зведення формул до спеціальної нормальної форми.

Сколемівська форма. Нехай $\mathcal{Q}\bar{v} M(\bar{v})$ – замкнена пренексна формула. Тут $\mathcal{Q}\bar{v}$ – кванторні префікси (усі за різними предметними іменами), $\bar{v}$ – усі вільні предметні імена (змінні) безкванторної формули M , причому $\bar{v}$ складається із $\exists$ -кванторних імен $y_1, \dots, y_n$ та $\forall$ -кванторних імен $x_1, \dots, x_m$.

Зіставимо кожному кванторному префіксу $\exists y_i$ із $\mathcal{Q}\bar{v}$ функцію f_i , де $\bar{x}_i$ – усі ті $\forall$ -кванторні імена із $\bar{v}$, що передують y_i в $\mathcal{Q}\bar{v}$. Функції f_i зіставимо новий функціональний символ f_i , арність якого дорівнює кількості змінних в $\bar{x}_i$. Якщо y_i не передуює в $\mathcal{Q}\bar{v}$ жодний $\forall$ -кванторний префікс, то f_i – константа, f_i – константний символ.

Замінімо всі входження y_i в M на терм $f_i(\bar{x}_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

У результаті отримаємо формулу

$$\forall x_1 \dots \forall x_m M(x_1, \dots, x_m, f_1(\bar{x}_1), \dots, f_n(\bar{x}_n)).$$

Таке перетворення називається сколемізацією, а самі формули зазначеного вигляду – сколемівськими, або формулами у сколемівській формі.

Приклад 6.1.1. Нехай початкова формула має вигляд

$$\forall x p(x, x) \& \forall x \exists y (q(y) \rightarrow p(x, y)) \& \forall y \exists x (p(x, y)).$$

Зводячи її до пренексної форми, отримуємо формулу $\forall x \forall z \exists y \forall u \exists v (p(x, x) \& (q(v) \rightarrow p(z, y)) \& p(v, u))$. Тепер $\exists y$ зіставимо 2-арний ФС f , $\exists v$ зіставимо 3-арний ФС g , замінимо входження у термом $f(x, y)$, входження v – термом $g(x, y, u)$.

У результаті отримаємо сколемівську формулу

$$\forall x \forall z \forall u (p(x, x) \& (q(f(x, y)) \rightarrow p(z, f(x, y))) \& p(g(x, y, u), u)).$$

Приклад 6.1.2. Нехай початкова формула має вигляд $\exists x p(x) \& \forall x (p(x) \rightarrow \exists y (p(y)))$. Зводячи її до пренексної форми, отримуємо $\exists x \forall z \exists y (p(x) \& (p(z) \rightarrow p(y)))$. Тепер $\exists x$ зіставимо константний символ c , $\exists y$ зіставимо 1-арний ФС f , замінимо входження x константним символом c , входження y – термом $f(z)$.

Отримаємо сколемівську формулу $\forall z (p(c) \& (p(z) \rightarrow p(f(z))))$.

Теорема Ербрана. Для формули у сколемівській формі збудуємо універс із замкнених термів, отриманих усіма можливими застосуваннями сколемівських функціональних символів до сколемівських константних символів. Якщо таких константних символів немає, як у прикладі 6.1.1, то беремо довільний новий константний символ. Так побудований універс називають ербранівським.

Приклад 6.1.3. Для сколемівської функції із прикладу 1 беремо новий константний символ a , тоді ербранівський універс – це множина термів

$$\{a, f(a, a), g(a, a, a), f(f(a, a), a), f(a, f(a, a)), g(f(a, a), a, a), g(a, f(a, a), a), g(a, a, f(a, a)), f(g(a, a, a), a), f(a, g(a, a, a)), g(g(a, a, a), a, a), g(a, g(a, a, a), a), g(a, a, g(a, a, a)), f(f(a, a), f(a, a)), f(g(a, a, a), f(a, a)), f(f(a, a), g(a, a, a)), f(g(a, a, a)), g(a, a, a), \dots \}.$$

Приклад 6.1.4. Для сколемівської функції із прикладу 6.1.2 ербранівський універс – це множина термів $\{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), f(f(f(f(c))))\}, \dots\}$.

Прикладом замкненої формули $\forall x_1 \dots \forall x_m \Phi(x_1, \dots, x_m)$, де Φ – безкванторна формула, назвемо формулу $\Phi_{x_1, \dots, x_m}[t_1, \dots, t_m]$, де $t_1, \dots, t_m$ – замкнені терми.

Теорема 6.1.1 (Ербрана). Пренексна формула $\mathcal{Q}\bar{v} M(\bar{v})$ є суперечністю $\Leftrightarrow$ існують системи термів $t_1^1, \dots, t_m^1, \dots, t_1^k, \dots, t_m^k$ ербранівського універсу сколемівської формули $\forall x_1 \dots \forall x_m \Phi$, де Φ – це формула $M(x_1, \dots, x_m, f_1(\bar{x}_1), \dots, f_n(\bar{x}_n))$ така, що формула

$$\Phi_{x_1, \dots, x_m}[t_1^1, \dots, t_m^1] \& \dots \& \Phi_{x_1, \dots, x_m}[t_1^k, \dots, t_m^k]$$

є суперечністю пропозиційної логіки.

Формулу $\Phi_{x_1, \dots, x_m}[t_1^1, \dots, t_m^1] \& \dots \& \Phi_{x_1, \dots, x_m}[t_1^k, \dots, t_m^k]$ – кон'юнкцію прикладів формули Φ – С. Кліні назвав ербранівською розгорткою формули $\mathcal{Q}\bar{v} M(\bar{v})$.

Метод спростування Ербрана базується на таких співвідношеннях.

Маємо $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Psi$ (тут Ψ – замикання Φ) $\Leftrightarrow \neg \Psi$ суперечність $\Leftrightarrow$ існує ербранівська розгортка, що є суперечністю.

Таким чином, для встановлення $\models \Phi$ будуюмо сколемівську форму для пренексної форми формули $\neg \Psi$, далі поступово породжуємо терми ербранівського універсу та перевіряємо ербранівські розгортки на суперечність.

Метод резолюцій. Цей метод пошуку доведень описано в багатьох джерелах, зокрема у [8, 14, 20]. Істотним для методу резолюцій є пошук *контрарних пар* літер для диз'юнктивів.

Приклад 6.1.5. Нехай $D_1 = A(x) \vee B(x)$ та $D_2 = \neg A(f(y)) \vee C(y)$ – диз'юнкти. Зрозуміло, що в D_1 та D_2 немає контрарних літер. Але можна зробити підстановку терму $f(y)$ замість x у D_1 .

Розглянемо диз'юнкти $D'_1 = A(f(y)) \vee B(f(y))$ та D_2 . У них літери $A(f(y))$ та $\neg A(f(y))$ уже контрарні. Отже, із D'_1 та D_2 можна отримати резольвенту $R = B(f(y)) \vee C(y)$.

Підставляючи різні терми замість y в R , отримаємо інші резольвенти, які можна отримати із D_1 та D_2 за правилом резолюцій. У цьому сенсі R – найзагальніша, інші резольвенти є її конкретизаціями.

Таким чином, для отримання резольвент необхідно робити певні підстановки термів.

Нехай L – мова першого порядку із множиною предметних імен V та множиною термів Tr .

Підстановкою назовемо довільне однозначне відображення $\alpha : V \rightarrow Tr$.

Інакше кажучи, підстановка – це іменна множина $\alpha \in {}^V Tr$.

Якщо така іменна множина порожня, то підстановка *тотожна*.

Якщо така іменна множина скінченна, то підстановка *скінченна*.

Надалі опускаємо в підстановках компоненти вигляду $x \mapsto x$, які відповідають тотожним замінам.

Прикладом терму t за підстановкою α , або α -*прикладом* терму t , назовемо терм $\alpha(t)$, отриманий із терму t паралельними замінами всіх входжень предметних імен $x \in nm(t)$ на терми $\alpha(x)$ за умови $\alpha(x) \downarrow$.

Якщо $\alpha(x) \uparrow$, то заміни імені x немає. Це можна трактувати як тотожну заміну.

Приклад 6.1.6. Нехай маємо терми $t = g(x, h(x, y, z))$ та $\alpha = [x \mapsto a, y \mapsto f(b), z \mapsto c]$. Тоді $\alpha(t) = g(a, h(a, f(b), c))$.

Нехай $\alpha = [x_i \mapsto t_i]_{i \in I}$ та $\beta = [y_j \mapsto s_j]_{j \in J}$ – підстановки. Добутком (композицією) підстановок α та β назовемо підстановку

$$\alpha * \beta = \beta \vee [x_i \mapsto \beta(t_i)]_{i \in I}.$$

Приклад 6.1.7. Нехай маємо терми $\alpha = [x \mapsto f(y), y \mapsto z]$ та $\beta = [x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y]$. Тоді (тут опущена компонента $y \mapsto y$) $\alpha * \beta = [x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y] \vee [x \mapsto \beta(f(y)), y \mapsto \beta(z)] = [x \mapsto f(b), z \mapsto y]$.

Підстановка α – *уніфікатор* для множини термів $\{t_1, \dots, t_n\}$, якщо $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \dots = \alpha(t_n)$.

У цьому випадку кажуть, що множина термів $\{t_1, \dots, t_n\}$ уніфікується підстановкою α .

Множина термів *уніфікується*, якщо для неї існує уніфікатор.

Уніфікатор ν – *найзагальніший уніфікатор* (НЗУ) множини термів $\{t_1, \dots, t_n\}$, якщо для кожного уніфікатора α цієї множини існує підстановка η така, що $\alpha = \nu * \eta$.

Приклад 6.1.8. Нехай маємо множину термів $\{x, f(y)\}$. Тоді $\nu = [x \mapsto f(y)]$ – найзагальніший уніфікатор цієї множини. Справді, уніфікатори цієї множини мають вигляд $\alpha = [x \mapsto f(t), y \mapsto t]$. Але тоді для α підходить підстановка $\eta = [y \mapsto t]$:

$$\alpha = [y \mapsto t] \nabla [x \mapsto f(t)] = [y \mapsto t] \nabla [x \mapsto \eta(f(y))] = [x \mapsto f(y)] * [y \mapsto t].$$

Поняття уніфікатора можна узагальнити на множини пар термів, що дозволяє побудувати алгоритм уніфікації – алгоритм знаходження найзагальнішого уніфікатора.

На сьогодні відомі дуже ефективні алгоритми уніфікації (див., напр., [20, 14]).

Поняття прикладу, підстановки та НЗУ природним чином продовжується на літери (атомарні формули чи їхні заперечення) та диз'юнкти – диз'юнкції літер.

Метод резолюцій логіки предикатів першого порядку базується на зведенні формул до сколемівської форми та перетворенні матриці до кон'юнктивної нормальної форми (КНФ). Така КНФ є кон'юнкцією диз'юнктивів. При цьому використовуються такі семантичні властивості:

$$- \models \forall \bar{v} (K_1 \& \dots \& K_n) \Leftrightarrow \models \forall \bar{v} K_1 \& \dots \& \forall \bar{v} K_n \Leftrightarrow \models K_1 \& \dots \& K_n;$$

– правило підстановки: $\models \Phi \Leftrightarrow \models \Phi_x[t]$ (це дає змогу робити уніфікацію).

Основою методу резолюцій є правило *бінарної резолюції*.

Нехай D_1 та D_2 – диз'юнкти, у яких $nm(D_1) \cap nm(D_2) = \emptyset$. Нехай L_1 – літера D_1 , L_2 – літера D_2 , причому L_1 та L'_2 , де $L_2 = \neg L'_2$, або L_2 та L'_1 , де $L_1 = \neg L'_1$, мають НЗУ ν .

Диз'юнкт $(\nu(D_1) \setminus \nu(L_1)) \vee (\nu(D_2) \setminus \nu(L_2))$ називають *бінарною резолюцією* диз'юнктивів D_1 та D_2 .

Літери L_1 та L_2 називають *відрізними*.

Тут $D \setminus D'$ позначає диз'юнкт, що є диз'юнкцією тих літер D , які не входять до D' .

Крім правила бінарної резолюції, використовують *правило склеювання*.

Нехай у диз'юнкції D не менше двох літер з однаковими предикатними символами мають НЗУ v .

Диз'юнкт $v(D)$ називають *склеюванням* диз'юнкта D .

У загальному вигляді *правило резолюцій* має два диз'юнкти-засновки та один диз'юнкт-висновок – резольвенту засновків.

Диз'юнкт D – *резольвента* диз'юнктів D_1 та D_2 , якщо D є однією з бінарних резольвент:

- 1) D_1 та D_2 ;
- 2) D_1 та склеювання чи прикладу D_2 ;
- 3) склеювання чи прикладу D_1 та D_2 ;
- 4) склеювання чи прикладу D_1 та склеювання чи прикладу D_2 .

Теоретично обґрунтовує метод резолюцій

Теорема 6.1.2 (повноти методу резолюцій). Множина диз'юнктивів S суперечлива $\Leftrightarrow$ існує резольутивне виведення 0 із S .

Практичне використання методу резолюцій передбачає використання допоміжних правил та стратегій (напр. стратегії поглинання), які роблять метод ефективнішим.

Приклад 6.1.9. Маємо диз'юнкт $D = p(x) \vee p(g(y)) \vee \neg q(x)$. Його літери $p(x)$ та $p(g(y))$ мають НЗУ $v = [x \rightarrow g(y)]$.

Диз'юнкт $v(D) = p(g(y)) \vee \neg q(g(y))$ – склеювання диз'юнкта D .

Приклад 6.1.10. Нехай задані диз'юнкти $D_1 = \neg p(x, f(y)) \vee r(y)$ та $D_2 = p(g(a), x) \vee q(x)$. Маємо $x \in nm(D_1) \cap nm(D_2)$, тому візьмемо α -приклад $\alpha(D_2) = p(g(a), u) \vee q(u)$, де $\alpha = [x \rightarrow u]$. Проте $p(x, f(y))$ та $p(g(a), u)$ мають НЗУ $v = [x \rightarrow g(a), u \rightarrow f(y)]$, тому

$$v(D_1) = \neg p(g(a), f(y)) \vee r(y), \quad v(\alpha(D_2)) = p(g(a), f(y)) \vee q(f(y)).$$

Звідси $D = r(y) \vee q(f(y))$ – це бінарна резольвента диз'юнктивів D_1 та $\alpha(D_2)$. Отже, диз'юнкт D – резольвента диз'юнктив-засновків D_1 та D_2 .

Приклад 6.1.11. Маємо диз'юнкти $D_1 = p(x) \vee p(g(y)) \vee q(f(y))$ та $D_2 = \neg p(g(f(a))) \vee p(b)$. Склеюванням диз'юнкта D_1 за НЗУ $[x \mapsto g(y)]$ буде $D'_1 = p(g(y)) \vee q(f(y))$.

Бінарною резольвентою диз'юнктів D'_1 та D_2 за НЗУ $[y \mapsto f(a)]$ буде $D = q(g(f(a))) \vee p(b)$.

Отже, D – резольвента диз'юнктив-засновків D_1 та D_2 .

Приклад 6.1.12. Доведіть чи спростуйте методом резолюцій:

$$\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)).$$

Маємо $\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \& \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x))$ суперечність $\Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \& \exists x(P(x) \& G(x))$ суперечність $\Leftrightarrow$ (зводимо до пренексної форми) $\exists x \forall y \forall z ((G(y) \rightarrow S(y)) \& (P(z) \rightarrow \neg S(z)) \& P(x) \& G(x))$ суперечність.

Виконуємо сколемізацію:

$$\forall y \forall z ((G(y) \rightarrow S(y)) \& (P(z) \rightarrow \neg S(z)) \& P(a) \& G(a));$$

тут a – сколемівський КС.

Множина диз'юнктив: $S = \{\neg G(y) \vee S(y), \neg P(z) \vee \neg S(z), P(a), G(a)\}$.

$\neg P(z)$ та $P(a)$ мають НЗУ $[z \mapsto a]$, за яким $\neg P(z) \vee \neg S(z)$ та $P(a)$ дають резольвенту $\neg S(a)$.

$\neg G(y)$ та $G(a)$ мають НЗУ $[y \mapsto a]$, за яким $\neg G(y) \vee S(y)$ та $G(a)$ дають резольвенту $S(a)$.

Із $\neg S(a)$ та $S(a)$ маємо резольвенту 0. Ми вивели 0 із S , тому

$$\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)).$$

Приклад 6.1.13. Доведіть чи спростуйте методом резолюцій:

$$\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)).$$

Маємо $\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \& \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x))$ суперечність $\Leftrightarrow \forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \& \exists x(P(x) \& S(x))$ суперечність $\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z ((G(y) \rightarrow S(y)) \& (P(z) \rightarrow \neg G(z)) \& P(x) \& S(x))$ суперечність.

Виконуємо сколемізацію (тут a – сколемівський КС):

$$\forall y \forall z ((G(y) \rightarrow S(y)) \& (P(z) \rightarrow \neg G(z)) \& P(a) \& S(a)).$$

Отримали множину диз'юнктив:

$$S = \{-G(y) \vee S(y), \neg P(z) \vee \neg G(z), P(a), S(a)\}.$$

$\neg P(z)$ та $P(a)$ мають НЗУ $[z \rightarrow a]$, за яким $\neg P(z) \vee \neg G(z)$ та $P(a)$ дають резольвенту $\neg G(a)$.

Інші пари диз'юнктив не дають нових резольвент, тому 0 із S не виводиться.

Маємо контрмодель – АС A із $A = \{a\}$, для якої

$$P_A(a) = S_A(a) = T, \neg G_A(a) = F \Rightarrow G_A(a) = T.$$

Отже, ми спростували

$$\forall x(G(x) \rightarrow S(x)) \& \forall x(P(x) \rightarrow \neg G(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x)).$$

Приклад 6.1.14. Формалізуйте мовою першого порядку та з'ясуйте, використовуючи метод резолюцій, істинність такого міркування:

якщо x є батьком y , то y не є батьком x ;

отже, жоден x не є своїм батьком.

Нехай $P(x, y)$ означає: x є батьком y .

Наведене міркування формалізуємо так:

$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \models \forall x \neg P(x, x). \text{ Маємо:}$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \models \forall x \neg P(x, x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \& \neg \forall x \neg P(x, x) \text{ суперечність} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \& \exists x P(x, x) \text{ суперечність} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists z \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \& P(z, z) \text{ суперечність.}$$

$$\text{Виконуємо сколемізацію: } \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \& P(a, a)).$$

Тут a – сколемівський КС.

$$\text{Отримали множину диз'юнктив: } S = \{\neg P(x, y) \vee \neg P(y, x), P(a, a)\}.$$

Склеюванням диз'юнкта $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, x)$ за НЗУ $[y \rightarrow x]$ буде $\neg P(x, x)$. Диз'юнкти $\neg P(x, x)$ та $P(a, a)$ мають НЗУ $[x \rightarrow a]$, за яким $\neg P(x, x)$ та $P(a, a)$ дають резольвенту 0 .

$$\text{Ми вивели } 0 \text{ із } S, \text{ тому } \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \models \forall x \neg P(x, x).$$

Отже, міркування з умови прикладу 6.1.14 є істинним.

Приклад 6.1.15. Формалізуйте мовою першого порядку та з'ясуйте, використовуючи метод резолюцій, істинність такого міркування (див. також [20]):

деякі пацієнти люблять лікарів;

жоден пацієнт не любить ясновидців-шарлатанів;

отже, кожен лікар не є шарлатаном.

Нехай $P(x)$ означає: x є пацієнтом; $D(x)$ означає: x є лікарем;
 $Q(x)$ означає: x є шарлатаном; $A(x, y)$ означає: x любить y .

Наведене міркування формалізуємо так:

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \ \& \ \forall y(D(y) \rightarrow A(x, y)) \ \& \ \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg A(x, y))) \models \\ & \models \forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x(P(x) \ \& \ \forall y(D(y) \rightarrow A(x, y)) \ \& \\ & \ \& \ \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg A(x, y)) \ \& \ \neg \forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ & \text{суперечність} \Leftrightarrow \exists x(P(x) \ \& \ \forall y(D(y) \rightarrow A(x, y)) \ \& \\ & \ \& \ \forall z(P(z) \rightarrow \forall u(Q(u) \rightarrow \neg A(z, u)) \ \& \ \exists v(D(v) \ \& \ Q(v))) \text{ суперечність} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists v \forall y \forall z \forall u (P(x) \ \& \ (\neg D(y) \vee A(x, y)) \ \& \\ & \ \& \ (\neg P(z) \vee \neg Q(u) \vee \neg A(z, u)) \ \& \ D(v) \ \& \ Q(v)) \text{ суперечність.} \end{aligned}$$

Виконуємо сколемізацію (тут a, b – сколемівські КС):

$$\begin{aligned} & \forall y \forall z \forall u (P(a) \ \& \ (\neg D(y) \vee A(a, y)) \ \& \\ & \ \& \ (\neg P(z) \vee \neg Q(u) \vee \neg A(z, u)) \ \& \ D(b) \ \& \ Q(b)). \end{aligned}$$

Отримали множину диз'юнктив:

$$S = \{P(a), \neg D(y) \vee A(a, y), \neg P(z) \vee \neg Q(u) \vee \neg A(z, u), D(b), Q(b)\}.$$

Тут $P(a)$ та $\neg P(z) \vee \neg Q(u) \vee \neg A(z, u)$ мають НЗУ $[z \mapsto a]$, за яким резольвента $\neg Q(u) \vee \neg A(a, u)$;

$\neg D(y) \vee A(a, y)$ та $D(b)$ мають НЗУ $[y \mapsto b]$, за яким резольвента $A(a, b)$;

$\neg Q(u) \vee \neg A(a, u)$ та $Q(b)$ мають НЗУ $[u \mapsto b]$, за яким резольвента $\neg A(a, b)$.

Із $A(a, b)$ та $\neg A(a, b)$ отримуємо резольвенту 0.

Ми вивели 0 із S , тому

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \ \& \ \forall y(D(y) \rightarrow A(x, y)) \ \& \ \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg A(x, y))) \models \\ & \models \forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x)). \end{aligned}$$

Отже, міркування з умови прикладу 6.1.15 є істинним.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке сколемізація?
2. Що таке сколемівська функція?
3. Що таке ербранівський універс?
4. Сформулюйте теорему Ербрана.

5. Що таке інверсна сколемізація?
6. Сформулюйте дуальну форму теореми Ербрана.
7. Опишіть метод спростування Ербрана.
8. Що таке підстановка термів?
9. Що таке приклад терму за підстановкою?
10. Дайте визначення уніфікатора для множини термів.
11. Дайте визначення найзагальнішого уніфікатора.
12. Сформулюйте правило бінарної резолюції.
13. Що таке бінарна резольвента диз'юнктивів?
14. Опишіть правило склеювання.
15. Що таке резольвента диз'юнктивів?
16. Сформулюйте правило резолюцій у загальному вигляді.
17. Сформулюйте теорему повноти методу резолюцій.

Вправи

1. Зведіть до сколемівської форми з матрицею в КНФ формули:
 - 1) $\forall x \neg p(x, x) \& \forall x \exists y p(x, y) \& \forall x \forall z \forall y (p(x, z) \& p(z, y) \rightarrow p(x, y));$
 - 2) $\forall x \neg q(x, x) \& \forall x \forall z \exists y (q(x, y) \rightarrow q(x, z) \& q(z, y)) \&$
 $\& \forall x \forall y \forall z (q(x, y) \& q(y, z) \rightarrow q(x, z));$
 - 3) $\exists x (p(x) \& \forall y (q(y) \rightarrow h(x, y))) \& \forall x (p(x) \rightarrow \forall y (r(y) \rightarrow \neg h(x, y))) \rightarrow$
 $\rightarrow \forall x (q(x) \rightarrow \neg r(x)).$
2. Доведіть, що $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma).$
3. Які з наведених множин мають НЗУ? Знайдіть такі НЗУ, якщо вони є:
 - 1) $\{p(x), p(y)\};$
 - 2) $\{q(x, y), q(x, x)\};$
 - 3) $\{q(x, y, f(y)), q(x, z, z)\};$
 - 4) $\{p(x, y, z), p(u, f(u, v), v)\};$
 - 5) $\{q(x, y, f(y), z, g(y, z), v), q(a, h(a), b, s(a, b), u, h(a, b, u))\}.$
4. Побудуйте всі можливі резольвенти (якщо вони є) для таких пар:
 - 1) $D_1 = p(x, y) \vee \neg q(x)$ та $D_2 = p(z, y) \vee q(z);$
 - 2) $D_1 = \neg p(x) \vee q(x, x)$ та $D_2 = \neg q(y, f(y));$
 - 3) $D_1 = \neg p(x, y, a) \vee \neg p(y, z, b) \vee \neg p(x, b, v) \vee \neg p(a, z, v)$ та
 $D_2 = p(f(x, y), x, y).$

5. Доведіть чи спростуйте методом резолюцій:

$$1) \forall x(G(x) \rightarrow L(x)) \& \neg \exists x(K(x) \& L(x)) \& \forall x(\neg G(x) \rightarrow \neg E(x)) \models \\ \models \neg \exists x(K(x) \& E(x));$$

$$2) \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \models \\ \models \forall x \forall y \forall z \forall u (R(x, y) \& R(y, z) \& R(z, u) \rightarrow R(x, u));$$

$$3) \forall x \forall y (B(x, y) \rightarrow P(x, y)) \models \forall y (\forall x \neg P(x, y) \rightarrow \forall x \neg B(x, y));$$

$$4) \forall x (L(x) \rightarrow T(x)) \models \forall x \forall y (L(x) \& S(x, y) \rightarrow \exists z (T(z) \& S(z, y)));$$

$$5) \forall x \forall y (B(x, y) \leftrightarrow A(x) \& A(y)) \models \forall x \forall y (B(x, y) \rightarrow B(y, x)).$$

6.2. Секвенційні числення класичних чистих першопорядкових логік

Розглянемо секвенційні числення класичних логік кванторного рівня – чистих першопорядкових логік. Такі секвенційні числення назовемо *QCI*.

Для класичних чистих першопорядкових логік базовими є композиції $\vee$, $\neg$ та $\exists x$, тому для секвенцій специфікованих формул можна ввести такі базові секвенційні форми:

$$\frac{\vdash \neg A, \Sigma}{\vdash \neg \neg A, \Sigma}$$

$$\frac{\vdash A, \Sigma}{\vdash \neg \neg A, \Sigma}$$

$$\frac{\vdash A, \Sigma \quad \vdash B, \Sigma}{\vdash A \vee B, \Sigma}$$

$$\frac{\vdash \neg A, \neg B, \Sigma}{\vdash \neg A \vee B, \Sigma}$$

$$\frac{\vdash A_x[y], \Sigma}{\vdash \exists x A, \Sigma}$$

$$\frac{\vdash \neg A_x[y], \neg \exists x A, \Sigma}{\vdash \neg \exists x A, \Sigma}$$

Для $\vdash \exists$ умова: вільна змінна $y \notin \Sigma \cup \{\exists x A\}$.

При застосуванні форми $\vdash \exists$ у пробігає множину всіх вільних змінних множини доступних формул секвенції $\vdash \exists x A, \Sigma$ та її наступників. При цьому виділена $\exists x A$ дублюється в засновку.

Умова замкненості секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$ індукована відповідною властивістю *C*:

C) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

На базі властивостей відношення $\models$ отримуємо основну властивість секвенційних форм.

Теорема 6.2.1. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді:

a) $\Lambda \models K \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models K$.

2. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K \quad \vdash X \vdash Z}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\Lambda \models K$ та $X \models Z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models K$ або $X \not\models Z$.

Опишемо побудову виведення в QCI -численні для заданої скінченної секвенції Σ .

Секвенції ми трактуємо як *множини* специфікованих формул, тому повтори формул у секвенціях неможливі: якщо в результаті виконання форми отримуємо специфіковану формулу, яка вже є у секвенції, то таку формулу-копію до секвенції не заносимо.

Побудова секвенційного дерева розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева.

Опишемо етап виведення для певної незамкненої секвенції-листа η . На цьому етапі будуємо скінченне піддерево з вершиною η таким чином.

На початку етапу активізуємо всі неатомарні формули секвенції η . До кожної активної формули далі застосовуємо відповідну секвенційну форму. При цьому всі $\vdash \exists$ -форми виконуємо перед $\vdash \exists$ -формами. При виконанні $\vdash \exists$ беремо u як *нову* змінну, що не фігурує у формулах секвенцій шляху від кореня до зазначеного листа. Форма $\vdash \exists$ застосовується багатократно для всіх вільних змінних формул секвенцій на шляху від кореня до зазначеного листа. Після застосування секвенційної форми утворені нею формули стають *пасивними*, до таких формул на цьому етапі секвенційні форми не застосовуються.

Після виконання всіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист Ω на замкненість. Якщо Ω незамкнена, то перевіряємо, чи буде Ω фінальною секвенцією.

Незамкнена вершина-секвенція Ω виведення секвенції Σ *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна секвенційна форма або якщо кожне застосування секвенційної форми до Ω не вводить *нових* формул, відмінних від формул шляху від Σ до Ω . Поява фінальної секвенції означає ситуацію повторення незамкненої секвенції на зазначеному шляху. Це сигналізує про наявність у дереві шляху (від кореня до зазначеної фінальної секвенції), усі вершини якого незамкнені, – *незамкненого* шляху. Отже, побудова виведення завершена *негативно*.

Якщо всі листи будованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево. Отже, побудова виведення завершена *позитивно*.

Якщо в будованому дереві є листи, які є незамкненими чи нефінальними секвенціями, то для кожного такого листа продовжуємо виведення так само, як описано вище.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) побудову завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) побудову завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево, а у такому дереві існує незамкнений шлях (ситуація фінальної секвенції);

3) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево; за левою Кеніга нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях; усі його вершини – незамкнені секвенції, адже при появі замкненої секвенції побудова на цьому шляху обірветься; отже, такий нескінченний шлях незамкнений.

Опишемо побудову в *QCI*-численні секвенційного дерева для заданої *зліченної* секвенції Σ . Така побудова розбивається на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини *доступних* на цьому етапі формул.

На початку етапу виконується *крок доступу*. Це означає, що до списку доступних формул додається по одній формулі зі списків $\vdash$ -формул та $\neg$ -формул. Якщо в секвенції немає недоступних $\vdash$ -формул чи $\neg$ -формул (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина $\vdash$ -формула чи $\neg$ -формула, якщо один зі списків порожній).

На етапі виведення для незамкненої секвенції-листа η добуємо скінченне піддерево з вершиною η таким чином. Активуємо (окрім атомарних) усі доступні формули секвенції η . До кожної активної формули далі застосовуємо відповідну секвенційну форму. При цьому всі $\vdash\exists$ -форми виконуємо перед $\vdash\exists$ -формами. При виконанні $\vdash\exists$ беремо u як *нову* змінну, що не фігурує у формулах секвенцій шляху від кореня до зазначеного листа. Форма $\vdash\exists$ застосовується багатократно для всіх вільних змінних *доступних* формул секвенцій на шляху від кореня до зазначеного листа. Після використання секвенційної форми утворені нею формули на поточному етапі *пасивні*, до таких формул на цьому етапі секвенційні форми не застосовуються.

Після виконання всіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист Ω на замкненість.

Якщо всі листи будованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево, тобто побудова завершена *позитивно*. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу і продовжуємо виведення так, як описано вище.

При побудові секвенційного дерева для зліченної секвенції можливі такі випадки:

1) побудову завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево; за лемою Кеніґа нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

У випадку 2) у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, усі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Теорема 6.2.2 (коректності). Якщо секвенція $\vdash\Gamma\Delta$ вивідна, то $\Gamma\models\Delta$.

Якщо секвенція $\vdash\Gamma\Delta$ вивідна, то для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із побудови дерева випливає: $\Lambda\models K$ для кожної його вершини $\vdash\Lambda K$. Для листів дерева це випливає з визначення замкненої секвенції. Збереження секвенційними формами відношення логічного наслідку (від засновків до висновку)

впливає з теореми 6.2.1. Тому для кореня дерева – секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$ – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 6.2.3 (про контрмодель). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, H – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді існують АС $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі (тут $\text{f}\Phi$ – множина вільних змінних формули Φ):

$$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta \parallel_{\text{rf}}) = T \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta \parallel_{\text{rf}}) = F.$$

Пару (A, δ) з такими властивостями назовемо контрмоделлю для секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$.

Нехай W – множина всіх вільних змінних формул з H .

Задаємо АС $A = (A, I)$ з $|A| = |W|$ та ін'єктивну $\delta : W \rightarrow A$.

Така H – модельна множина. Це означає, що для H виконуються умови:

НС) для кожної формули Φ лише одна з формул $\vdash \Phi$ чи $\neg \Phi$ може належати до H ;

$$H \neg) \vdash \neg \Phi \in H \Rightarrow \neg \Phi \in H;$$

$$\neg \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H;$$

$$H \vee) \vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H \text{ або } \vdash \Psi \in H;$$

$$\neg \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \neg \Phi \in H \text{ та } \neg \Psi \in H;$$

$$H \exists) \vdash \exists x \in H \Rightarrow \text{існує } y \in W \text{ таке, що } \vdash \Phi_x[y] \in H;$$

$$\neg \exists x \Phi \in H \Rightarrow \neg \Phi_x[y] \in H \text{ для всіх } y \in W.$$

Задамо на $A = (A, I)$ значення атомарних формул із H :

$$\neg \vdash \theta(\bar{x}) \in H \Rightarrow \theta_A(\delta \parallel_{\bar{x}}) = T;$$

$$\neg \neg \theta(\bar{x}) \in H \Rightarrow \theta_A(\delta \parallel_{\bar{x}}) = F.$$

Для складних формул твердження теореми випливає з того, що H – модельна множина.

Звідси маємо теорему повноти секвенційних QCI-числень.

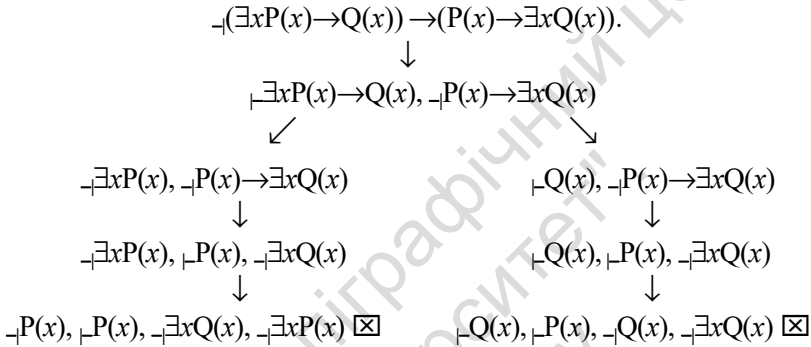
Теорема 6.2.4. Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та $\vdash \Gamma \neg \Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві δ для $\vdash \Gamma \neg \Delta$ існує незамкнений шлях. Нехай H – множина специфікованих формул секвенції цього шляху. За теоремою 6.2.3 існує контрмодель (A, δ) : $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta \parallel_{\text{rf}}) = T$ та $\neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta \parallel_{\text{rf}}) = F$. Згідно з $\vdash \Gamma \neg \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо

$\Phi_A(\delta||_{\text{rf}}) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta||_{\text{rf}}) = F$. Це заперечує $\Gamma \models \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models \Delta$.

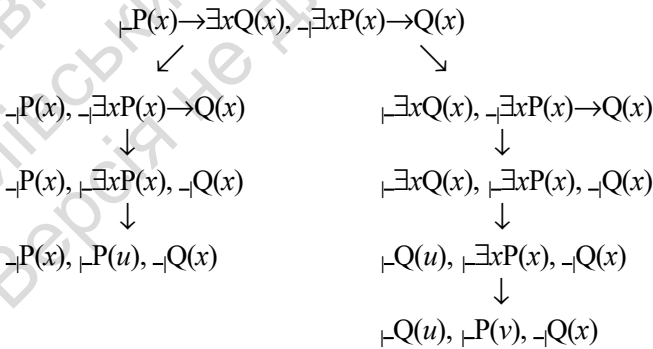
Наведемо приклади побудови виведень в QCL -численнях.

Приклад 6.2.1. Для встановлення того, чи істинна формула $(\exists x P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$, побудуємо виведення секвенції $\neg(\exists x P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$.



Отримали замкнене секвенційне дерево.

Приклад 6.2.2. Для встановлення $P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$ побудуємо виведення секвенції $\vdash P(x) \rightarrow \exists x Q(x), \neg \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$.



Отримали незамкнене секвенційне дерево, що спростовує $P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \exists x P(x) \rightarrow Q(x)$.

Для лівого незамкненого шляху отримуємо контрмодель (A, δ) , для якої $A = \{a, b\}$, тоді

$$\delta = [x \mapsto a, u \mapsto b], P_A(a) = F, P_A(b) = T, Q_A(a) = F.$$

Для правого незамкненого шляху маємо контрмодель (B, δ) , для якої $B = \{a, b, c\}$, тоді

$$\delta = [x \mapsto a, u \mapsto b, v \mapsto c], Q_B(b) = T, P_B(c) = T, Q_B(a) = F.$$

Приклад 6.2.3. Для встановлення $\exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$ побудуємо виведення секвенції $\vdash \exists x \forall y P(x, y), \neg \forall y \exists x P(x, y)$.

$$\begin{array}{c} \vdash \exists x \forall y P(x, y), \neg \forall y \exists x P(x, y) \\ \downarrow \\ \vdash \forall y P(u, y), \neg \forall y \exists x P(x, y) \\ \downarrow \\ \vdash \forall y P(u, y), \neg \exists x P(x, v) \\ \downarrow \\ \vdash P(u, u), \vdash P(u, v), \vdash \forall y P(u, y), \neg \exists x P(x, v) \\ \downarrow \\ \vdash P(u, u), \vdash P(u, v), \vdash \forall y P(u, y), \neg P(u, v), \neg P(v, v) \neg \exists x P(x, v) \quad \boxtimes \end{array}$$

Отримали замкнене секвенційне дерево, що засвідчує наявність $\models$.

Приклад 6.2.4. Для з'ясування того, чи справджується $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \models \forall x (A(x) \& B(x))$, побудуємо виведення секвенції $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x), \neg \forall x (A(x) \& B(x))$.

$$\begin{array}{c}
\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x), \neg \forall x (A(x) \& B(x)) \\
\downarrow \\
\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \neg \forall x (A(x) \& B(x)) \\
\downarrow \\
\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \neg A(z) \& B(z) \\
\downarrow \\
\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \vdash A(z), \vdash B(z), \neg A(z) \& B(z) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \vdash A(z), \quad \vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \\
\vdash B(z), \neg A(z) \quad \vdash A(z), \vdash B(z), \neg B(z) \quad \boxtimes
\end{array}$$

Отримали замкнене дерево – виведення секвенції
 $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x), \neg \forall x (A(x) \& B(x))$, що засвідчує наявність $\models$.

Приклад 6.2.5. Для з'ясування того, чи справджується
 $\models \exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$, побудуємо виведення секвенції $\neg \exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

$$\begin{array}{c}
\neg \exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \\
\downarrow \\
\vdash \exists x (A(x) \vee B(x)), \neg \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \\
\downarrow \\
\vdash \exists x (A(x) \vee B(x)), \neg \exists x A(x), \neg \exists x B(x) \\
\downarrow \\
\vdash A(y) \vee B(y), \neg \exists x A(x), \neg \exists x B(x) \\
\downarrow \\
\vdash A(y) \vee B(y), \neg \exists x A(x), \neg \exists x B(x), \neg A(y), \neg B(y) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\vdash A(y), \neg \exists x A(x), \neg \exists x B(x), \quad \vdash B(y), \neg \exists x A(x), \neg \exists x B(x), \\
\neg A(y), \neg B(y) \quad \neg A(y), \neg B(y) \quad \boxtimes
\end{array}$$

Отримали замкнене дерево – виведення секвенції
 $\neg \exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

Це засвідчує, що $\models \exists x (A(x) \vee B(x)) \models \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

Приклад 6.2.6. Для з'ясування того, чи справджується $\exists x A(x) \& \exists x B(x) \models \exists x (A(x) \& B(x))$, побудуємо виведення секвенції $\vdash \exists x A(x) \& \exists x B(x), \neg \exists x (A(x) \& B(x))$.

$$\begin{array}{c}
 \vdash \exists x A(x) \& \exists x B(x), \neg \exists x (A(x) \& B(x)) \\
 \downarrow \\
 \vdash \exists x A(x), \vdash \exists x B(x), \neg \exists x (A(x) \& B(x)) \\
 \downarrow \\
 \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \exists x (A(x) \& B(x)) \\
 \downarrow \\
 \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \exists x (A(x) \& B(x)), \neg A(y) \& B(y), \neg A(z) \& B(z) \\
 \swarrow \qquad \searrow \\
 \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \vartheta, \neg A(y), \quad \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \vartheta, \neg B(y), \neg A(z) \& B(z) \\
 \neg A(z) \& B(z) \quad \boxtimes \qquad \swarrow \qquad \searrow \\
 \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \vartheta, \quad \vdash A(y), \vdash B(z), \neg \vartheta, \\
 \neg B(y), \neg A(z) \qquad \neg B(y), \neg B(z) \quad \boxtimes
 \end{array}$$

Тут ϑ позначає $\exists x (A(x) \& B(x))$.

Ми отримали незамкнене секвенційне дерево. Для незамкненого шляху маємо контрмодель (M, δ) , для якої $M = \{a, b\}$; тоді $\delta = [y \mapsto a, z \mapsto b]$, $A_M(a) = T$, $A_M(b) = F$, $B_M(a) = F$, $B_M(b) = T$.

Отже, ми спростували $\exists x A(x) \& \exists x B(x) \models \exists x (A(x) \& B(x))$.

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть базові секвенційні форми QCI -числень.
2. Сформулюйте теорему про основну властивість секвенційних форм.
3. Опишіть побудову виведення (секвенційного дерева) в QCI -численні для заданої скінченної секвенції.
4. Опишіть побудову виведення в QCI -численні для заданої нескінченної секвенції.
5. Сформулюйте теорему коректності для QCI -числень.

6. Дайте визначення модельної множини для випадку QCI -числень

7. Сформулюйте теорему про контрмодель для QCI -числень.

8. Сформулюйте теорему повноти для QCI -числень.

Вправи

1. Для секвенційних QCI -числень наведіть похідні секвенційні форми $\vdash \forall$ та $\vdash \exists$.

2. Побудуйте в QCI -численні виведення чи доведіть його відсутність для таких формул:

1) $\forall x(A \& B) \rightarrow \forall x A \& \forall x B$;

2) $\exists x(A \& B) \rightarrow \exists x A \& \exists x B$;

3) $\exists x A \vee \exists x B \rightarrow \exists x(A \vee B)$;

4) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \forall x B)$;

5) $\exists x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B)$;

6) $(\forall x A \rightarrow \forall x B) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B)$;

7) $(\exists x A \rightarrow \forall x B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$;

8) $\forall x A \& B \rightarrow \forall x(A \& B)$;

9) $\forall x(A \& B) \rightarrow \forall x A \& B$;

10) $\exists x(A \& B) \rightarrow \exists x A \& B$;

11) $\exists x(A \vee B) \rightarrow \exists x A \vee B$;

12) $\exists x A \vee B \rightarrow \exists x(A \vee B)$;

13) $\exists x(A \vee \exists x B) \rightarrow \exists x \neg A$;

*14) $\forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$.

6.3. Секвенційні числення неокласичних чистих першопорядкових логік

Опишемо секвенційні числення чистих першопорядкових логік еквітонних квазіарних предикатів – ЧНКЛ. Базовими композиціями цих логік є $\neg$, $\vee$, $R_{\forall}^u$, $\exists x$. Такі секвенційні числення назвемо QEC , їх також називають [9, 26] QZN -численнями.

Властивості відношення неспростовнісного логічного наслідку для множин формул індукують відповідні базові секвенційні форми QEC-числень:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash R \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash R(\Phi), \Sigma}; & \vdash R \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash R(\Phi), \Sigma}; \\
 \vdash RI \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}; & \vdash RI \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \\
 \vdash RU \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{v, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}; & \vdash RU \frac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{z, \bar{u}}^{v, \bar{v}}(\Phi), \Sigma}.
 \end{array}$$

Для $\vdash RU$ маємо умову $x \in \mu(\Phi)$.

$$\begin{array}{ll}
 \vdash RR \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; & \vdash RR \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \bar{w}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; \\
 \vdash R\neg \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg \Phi), \Sigma}; & \vdash R\neg \frac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg \Phi), \Sigma}; \\
 \vdash R\vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma}; & \vdash R\vee \frac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma}; \\
 \vdash \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; & \vdash \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; \\
 \vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \Sigma \quad \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; & \vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; \\
 \vdash R\exists s \frac{\vdash \exists x R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi), \Sigma}; & \vdash R\exists s \frac{\vdash \exists x R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi), \Sigma}; \\
 \vdash R\exists \frac{\vdash \exists z R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \circ \bar{x}_z^x(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi), \Sigma}; & \vdash R\exists \frac{\vdash \exists x R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \circ \bar{x}_z^x(\Phi), \Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi), \Sigma}.
 \end{array}$$

Для $\vdash R\exists$ та $\vdash R\exists s$ маємо умову $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$.

Для $\vdash R\exists$ та $\vdash R\exists$ маємо умови $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$,

$$z \in V_T \setminus nm(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x \Phi)).$$

$$\begin{aligned} & \vdash \exists \frac{\vdash R_z^x(\Phi), \Sigma}{\vdash \exists x\Phi, \Sigma}, \text{ де } z \in V_T \setminus nm(\Sigma, \exists x\Phi); \\ & \vdash \exists \frac{\vdash \exists x\Phi, \vdash R_y^x(\Phi), \Sigma}{\vdash \exists x\Phi, \Sigma}. \end{aligned}$$

Секвенційні форми типів R, RI, RU є допоміжними, усі інші секвенційні форми – основними.

Ураховуючи наявність похідних композицій $\rightarrow$, $\&$ та $\forall x$, можемо ввести відповідні похідні секвенційні форми.

Наведемо тут секвенційні форми $\vdash \forall$ та $\vdash \exists$:

$$\begin{aligned} & \vdash \forall \frac{\vdash R_z^x(\Phi), \Sigma}{\vdash \forall x\Phi, \Sigma}, \text{ де } z \in V_T, z \notin nm(\Sigma, \exists x\Phi); \\ & \vdash \forall \frac{\vdash \forall x\Phi, \vdash R_y^x(\Phi), \Sigma}{\vdash \forall x\Phi, \Sigma}. \end{aligned}$$

Умова замкненості секвенції $\vdash \Gamma \Delta$ індукована відповідною умовою гарантованої наявності відношення неспростовнісного логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$:

С) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

На базі властивостей відношення $\models$ отримуємо основну властивість секвенційних форм. Вона формулюється так, як у випадку класичних секвенційних числень.

Теорема 6.3.1. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма.

Тоді: а) $\Lambda \models K \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

б) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models K$.

2. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \vdash K \quad \vdash X \vdash Z}{\vdash \Gamma \vdash \Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

а) $\Lambda \models K$ та $X \models Z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

б) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models K$ або $X \not\models Z$.

Опишемо поетапну побудову виведення в QEC-численні для скінченної секвенції Σ .

Акцентуємо увагу на особливостях такої побудови порівняно з побудовою виведення у класичних секвенційних численнях чистих першопорядкових логік.

Перед побудовою виведення зафіксуємо деякий список TN (узагалі кажучи, нескінченний) тотально неістотних імен такий, що імена із TN не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

Етап виведення для незамкненої секвенції-листа η полягає в побудові скінченного піддерева з вершиною η . На початку етапу активізуємо всі непримітивні формули секвенції η . До кожної активної формули далі застосовуємо відповідну секвенційну форму. При цьому всі $\neg\exists$ -форми та форми $\neg R\exists$ і $\neg R\exists$ виконуємо перед $\neg\exists$ -формами. Перед застосуванням основної форми виконуємо за необхідності спрощення формули, використовуючи належну кількість раз допоміжні форми типів R , RI , RU . При виконанні $\neg\exists$ беремо z як перше незадіяне ім'я списку TN ; таке ім'я *нове*, воно не фігурує у формулах секвенцій шляху від кореня до зазначеного листа. При виконанні $\neg R\exists$ чи $\neg R\exists$ беремо z із задіяних імен списку TN , якщо $z \notin nm(R_V^u(\exists x\Phi))$, інакше беремо z як перше незадіяне ім'я списку TN . Форма $\neg\exists$ застосовується багатократно для всіх імен формул секвенцій на шляху від кореня до зазначеного листа. Після використання основної форми утворені нею формули на поточному етапі *пасивні*, до таких формул на цьому етапі секвенційні форми не застосовуються.

Після виконання всіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист Ω на замкненість. Якщо Ω незамкнена, то перевіряємо, чи буде Ω фінальною секвенцією. Якщо в будованому дереві є листи, які є незамкненими чи нефінальними секвенціями, то для кожного такого листа робимо наступний крок доступу і продовжуємо виведення так, як описано вище.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

- 1) усі листи будованого дерева замкнені, тобто маємо скінченне замкнене дерево; тоді побудову завершено позитивно;
- 2) побудову завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево; у такому дереві існує незамкнений шлях (ситуація фінальної секвенції);

3) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево; за лемою Кеніґа нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях; такий шлях незамкнений, адже всі його вершини – незамкнені секвенції.

Опишемо поетапну побудову виведення в *QEC*-численні для зліченної секвенції Σ .

Кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини *доступних* на цьому етапі формул.

Перед побудовою виведення зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* тотально неістотних імен такий, що імена із *TN* не зустрічаються у формулах секвенції Σ .

На початку етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних формул додається по одній формулі зі списків $\vdash$ -формул та $\neg$ -формул. Якщо в секвенції немає недоступних $\vdash$ -формул чи $\neg$ -формул, то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку.

На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина $\vdash$ -формула чи $\neg$ -формула, якщо один зі списків порожній).

На етапі виведення для незамкненої секвенції-листа η добудуємо скінченне піддерево з вершиною η так, як описано вище для випадку скінченної секвенції. При цьому форма $\neg\exists$ застосовується багаторазово для всіх імен доступних на поточний момент формул секвенцій на шляху від кореня до зазначеного листа.

Після виконання всіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист на замкненість. Якщо не всі листи будованого дерева замкнені, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу і продовжуємо виведення так, як описано вище.

При побудові секвенційного дерева для зліченної секвенції можливі такі випадки:

1) усі листи будованого дерева замкнені, тобто маємо скінченне замкнене дерево; тоді побудову завершено позитивно;

2) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево; за лемою Кеніґа нескінченне дерево зі скінченим розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях; усі його вершини – незамкнені секвенції, тому такий шлях незамкнений; кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Для *QEC*-числень теорема коректності формулюється і доводиться так само, як для класичних секвенційних числень чистих першопорядкових логік.

Теорема 6.3.2 (коректності). Якщо $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна, то $\Gamma \models \Delta$.

Теореми повноти секвенційних числень опираються на відповідні теореми про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху. Для доведення теореми про контрмоделі використовується метод модельних (хінтиківських) множин.

Сформулюємо теорему про контрмоделі для числення *QEC*.

Теорема 6.3.3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, побудованому для $\vdash \Gamma \vdash \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі:

$$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F. \quad (*)$$

Пару (A, δ) з такими властивостями назвемо контрмоделлю для секвенції $\vdash \Gamma \vdash \Delta$.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова С замкненості. Отже, для множини H виконується умова коректності НС:

НС) для кожної формули Φ лише одна з формул $\vdash \Phi$ чи $\vdash \Phi$ може належати до H .

Застосування форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою числення *QEC*.

Отже, для H виконуються такі умови переходу:

$$\text{HR)} \vdash R(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H;$$

$$\vdash R(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H;$$

$$\text{HRI)} \vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\vdash R_{z, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\text{HRU)} \text{ за умови } y \in \mu(\Phi): \vdash R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\vdash R_{z, \bar{x}}^{y, \bar{v}}(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\text{HRR}) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H;$$

$$\text{HR}\neg) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H;$$

$$\text{HR}\vee) \quad \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H;$$

$\text{HR}\exists s)$ за умови $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ маємо:

$$\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \exists x R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\Phi) \in H;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \exists x R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\Phi) \in H;$$

$\text{HR}\exists)$ за умови $x \in \{\bar{v}, \bar{u}\}$, $z \in V_T \setminus nm(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ маємо:

$$\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \exists z R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \circ_z^x(\Phi) \in H;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow \neg \vdash \exists z R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \circ_z^x(\Phi) \in H;$$

$$\text{H}\neg) \quad \vdash \neg\Phi \in H \Rightarrow \neg \vdash \Phi \in H;$$

$$\neg \vdash \neg\Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H;$$

$$\text{H}\vee) \quad \vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H \text{ або } \vdash \Psi \in H;$$

$$\neg \vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \neg \vdash \Phi \in H \text{ та } \neg \vdash \Psi \in H;$$

$$\text{H}\exists) \quad \vdash \exists x\Phi \in H \Rightarrow \text{існує } y \in W: \vdash R_y^x(\Phi) \in H;$$

$$\neg \vdash \exists x\Phi \in H \Rightarrow \neg \vdash R_y^x(\Phi) \in H \text{ для всіх } y \in W.$$

Множину H з такими властивостями назвемо *модельною*.

Побудуємо контрмодель за модельною множиною H .

Нехай W – множина W всіх предметних імен, які фігурують у формулах H . Візьмемо множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ із $asn(\delta) = W$. Така A дублює W .

Задамо значення базових предикатів на δ та на іменних множинах вигляду $r_y^x(\delta)$:

$$\neg \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = T;$$

$$\neg \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = F;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_A(\delta) = T;$$

$$\neg \vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow p_A(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_A(\delta) = T.$$

Задані таким чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, ураховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h \in {}^w A$.

Для атомарних і примітивних формул твердження (*) теореми впливає з наведеного визначення базових предикатів. Далі доводимо твердження (*) індукцією за складністю формули Φ згідно з пунктами визначення модельної множини.

Теорема 6.3.4 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна в численні *QEC*.

Нехай маємо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ невивідна. Тоді секвенційне дерево ρ для $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ незамкнене, тому в ρ існує незамкнений шлях. Нехай H – множина специфікованих формул секвенцій шляху ρ . За теоремою 6.3.3 існує контрмодель (A, δ) : $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\vdash \Psi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$. Згідно із $\vdash \Gamma \vdash \Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma \models \Delta$.

Наведемо приклади побудови виведень у секвенційних *QEC*-численнях.

Приклад 6.3.1. Побудуємо в численні *QEC* виведення секвенції $\vdash \exists x(P \rightarrow Q), \neg P \rightarrow \forall x Q$.

$$\begin{array}{c}
 \vdash \exists x(P \rightarrow Q), \neg P \rightarrow \forall x Q \\
 \downarrow \\
 \vdash R_u^x(P \rightarrow Q), \neg P \rightarrow \forall x Q \\
 \downarrow \\
 \vdash R_u^x(P \rightarrow Q), \vdash P, \neg \forall x Q \\
 \downarrow \\
 \vdash R_u^x P \rightarrow R_u^x Q, \vdash P, \neg \forall x Q \\
 \downarrow \\
 \vdash R_u^x P \rightarrow R_u^x Q, \vdash P, \neg R_v^x Q \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg R_u^x P, \vdash P, \neg R_v^x Q \quad \vdash R_u^x Q, \vdash P, \neg R_v^x Q
 \end{array}$$

Отримали незамкнене секвенційне дерево. Таким чином, секвенція $\vdash \exists x(P \rightarrow Q), \neg P \rightarrow \forall x Q$ невивідна. За двома незамкненими шляхами секвенційного дерева можна задати дві контрмоделі.

Для шляху, що закінчується лівим листом, маємо контрмодель (A, δ) , для якої $A = \{a, b, c\}$, $\delta = [x \mapsto a, u \mapsto b, v \mapsto c]$; далі маємо

$$P_A(r_u^x(\delta)) = F, P_A(\delta) = T, Q_A(r_v^x(\delta)) = F.$$

Для шляху, що закінчується правим листом, маємо контрмодель (B, δ) , для якої $B = \{a, b, c\}$, $\delta = [x \mapsto a, u \mapsto b, v \mapsto c]$; далі маємо

$$Q_B(r_u^x(\delta)) = T, P_B(\delta) = T, Q_B(r_v^x(\delta)) = F.$$

Для з'ясування, чи справджується $\exists x(P \rightarrow Q) \models P \rightarrow \forall x Q$, треба встановити вивідність секвенції $\vdash \exists x(P \rightarrow Q), \neg P \rightarrow \forall x Q$. Ми показали її невивідність, що спростовує $\exists x(P \rightarrow Q) \models P \rightarrow \forall x Q$.

Приклад 6.3.2. Для з'ясування, чи справджується $\forall x(A \& B) \models \forall x A \& B$, побудуємо в *QEC* виведення секвенції $\vdash \forall x(A \& B), \neg \forall x A \& B$.

$$\begin{array}{c}
 \vdash \forall x(A \& B), \neg \forall x A \& B \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg \forall x A \quad \vdash \forall x(A \& B), \neg B \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg R_z^x(A) \quad \vdash \forall x(A \& B), \neg R_x^x(A \& B), \neg B \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg R_x^x(A \& B), \neg R_z^x(A \& B), \neg R_z^x(A) \quad \vdash \forall x(A \& B), \neg A \& B, \neg B \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg A \& B, \neg R_z^x(A \& B), \neg R_z^x(A) \quad \vdash \forall x(A \& B), \neg A, \neg B, \neg B \quad \square \\
 \downarrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg A \& B, \neg R_z^x(A) \& R_z^x(B), \neg R_z^x(A) \\
 \downarrow \\
 \vdash \forall x(A \& B), \neg A, \neg B, \neg R_z^x(A), \neg R_z^x(B), \neg R_z^x(A) \quad \square
 \end{array}$$

Отримали замкнене дерево – виведення $\vdash \forall x(A \& B), \neg \forall x A \& B$. Це засвідчує $\forall x(A \& B) \models \forall x A \& B$.

Приклад 6.3.3. Виведення секвенції $\neg\exists x(P\vee\exists xQ)\vee\exists x\neg P$.

$$\begin{array}{c}
 \neg\exists x(P\vee\exists xQ)\vee\exists x\neg P \\
 \downarrow \\
 \neg\exists x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P \\
 \downarrow \\
 \neg R_x^x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P, \neg\exists x(P\vee\exists xQ) \\
 \downarrow \\
 \neg P\vee\exists xQ, \neg R_x^x(\neg P), \neg\exists x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P \\
 \downarrow \\
 \neg P\vee\exists xQ, \neg\neg P, \neg\exists x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P \\
 \downarrow \\
 \neg P, \neg\exists xQ, \neg\neg P, \neg\exists x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P \\
 \downarrow \\
 \neg P, \neg\exists xQ, \neg P, \neg\exists x(P\vee\exists xQ), \neg\exists x\neg P \quad \boxed{\times}
 \end{array}$$

Отримали замкнене дерево – виведення $\neg\exists x(P\vee\exists xQ)\vee\exists x\neg P$.

Приклад 6.3.4. Для з'ясування, чи $\models \forall xA\&\forall xB\rightarrow\forall x(A\&B)$, побудуємо в *QEC* виведення секвенції $\neg\forall xA\&\forall xB\rightarrow\forall x(A\&B)$.

$$\begin{array}{c}
 \neg\forall xA\&\forall xB\rightarrow\forall x(A\&B) \\
 \downarrow \\
 \vdash\forall xA\&\forall xB, \neg\forall x(A\&B) \\
 \downarrow \\
 \vdash\forall xA, \vdash\forall xB, \neg\forall x(A\&B) \\
 \downarrow \\
 \vdash\forall xA, \vdash\forall xB, \neg R_z^x(A\&B) \\
 \downarrow \\
 \vdash\forall xA, \vdash\forall xB, \vdash R_x^x(A), \vdash R_z^x(A), \vdash R_x^x(B), \vdash R_z^x(B), \neg R_z^x(A)\&R_z^x(B) \\
 \swarrow \qquad \searrow \\
 \begin{array}{c}
 \vdash\forall xA, \vdash\forall xB, \vdash A, \vdash B, \\
 \vdash R_z^x(A), \vdash R_z^x(B), \neg R_z^x(A) \quad \boxed{\times}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \vdash\forall xA, \vdash\forall xB, \vdash A, \vdash B, \\
 \vdash R_z^x(A), \vdash R_z^x(B), \neg R_z^x(B) \quad \boxed{\times}
 \end{array}
 \end{array}$$

Отримали замкнене дерево – виведення секвенції $\neg \forall x A \& \forall x B \rightarrow \forall x (A \& B)$. Це засвідчує $\models \forall x A \& \forall x B \rightarrow \forall x (A \& B)$.

Приклад 6.3.5. Для з'ясування, чи $\exists x (A \rightarrow B) \models \forall x A \rightarrow \forall x B$, побудуємо в *QEC* виведення секвенції $\neg \exists x (A \rightarrow B), \neg \forall x A \rightarrow \forall x B$.

$$\begin{array}{c}
 \neg \exists x (A \rightarrow B), \neg \forall x A \rightarrow \forall x B \\
 \downarrow \\
 \neg \exists x (A \rightarrow B), \neg \forall x A, \neg \forall x B \\
 \downarrow \\
 \neg R_y^x (A \rightarrow B), \neg \forall x A, \neg R_z^x (B), \\
 \downarrow \\
 \neg R_y^x (A \rightarrow R_y^x (B)), \neg R_z^x (B), \neg R_x^x (A), \neg R_y^x (A), \neg R_z^x (A), \neg \forall x A \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg R_y^x (A), \neg R_z^x (B), \neg A, \quad \neg R_y^x (B), \neg R_z^x (B), \neg A, \\
 \neg R_y^x (A), \neg R_z^x (A), \neg \forall x A \quad \boxed{\times} \quad \neg R_y^x (A), \neg R_z^x (A), \neg \forall x A
 \end{array}$$

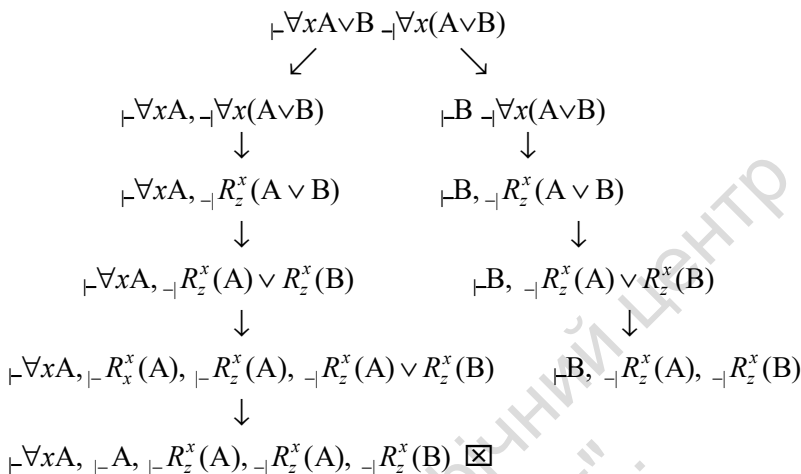
Отримали незамкнене секвенційне дерево, За незамкненим шляхом задаємо контрмодель (M, δ) , для якої $M = \{a, b, c\}$, $\delta = [x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$. Тоді маємо $r_y^x(\delta) = [x \mapsto b, y \mapsto b, z \mapsto c]$, $r_z^x(\delta) = [x \mapsto c, y \mapsto b, z \mapsto c]$, звідки $A_M(\delta) = T$,

$$R_y^x(A)_M(\delta) = A_M(r_y^x(\delta)) = T, \quad R_z^x(A)_M(\delta) = A_M(r_z^x(\delta)) = T,$$

$$R_y^x(B)_M(\delta) = B_M(r_y^x(\delta)) = T, \quad R_z^x(B)_M(\delta) = B_M(r_z^x(\delta)) = F.$$

Секвенція $\neg \exists x (A \rightarrow B), \neg \forall x A \rightarrow \forall x B$ невивідна, що спростовує $\exists x (A \rightarrow B) \models \forall x A \rightarrow \forall x B$.

Приклад 6.3.6. Для з'ясування, чи справджується $\forall x A \vee B \models \forall x (A \vee B)$, побудуємо в *QEC* виведення секвенції $\neg \forall x A \vee B \neg \forall x (A \vee B)$.



Отримали незамкнене секвенційне дерево. За незамкненим шляхом задамо контрмодель (M, δ) , для якої $M = \{a, b\}$, $\delta = [x \mapsto a, z \mapsto b]$. Маємо $r_z^x(\delta) = [x \mapsto b, z \mapsto b]$, звідки $B_M(\delta) = T$,

$$R_z^x(A)_M(\delta) = A_M(r_z^x(\delta)) = F, \quad R_z^x(B)_M(\delta) = B_M(r_z^x(\delta)) = F.$$

Секвенція $\vdash \forall x A \vee B \quad \neg \forall x (A \vee B)$ невивідна, що спростовує $\forall x A \vee B \models \forall x (A \vee B)$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть базові секвенційні форми *QEC*-числень.
2. Сформулюйте теорему про основну властивість секвенційних форм *QEC*-числень.
3. Опишіть побудову виведення в *QEC*-численні для заданої скінченної секвенції.
4. Опишіть побудову виведення в *QEC*-численні для заданої зліченної секвенції.
5. Сформулюйте теорему коректності для *QEC*-числень.
6. Дайте визначення модельної множини для випадку *QEC*-числень.
7. Сформулюйте теорему про контрмодель для *QEC*-числень.
8. Сформулюйте теорему повноти для *QEC*-числень.

Вправи

1. Запишіть похідні секвенційні форми *QEC*-числень типів $R \rightarrow$, $R \&$, $R \forall s$, $R \forall$.

2. Побудуйте в *QEC*-численні виведення чи доведіть його відсутність (указавши контрмодель) для таких формул:

- 1) $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$;
- 2) $\forall x A \& \forall x B \rightarrow \forall x(A \& B)$;
- 3) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B)$;
- 4) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$;
- 5) $\exists x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \exists x B)$;
- 6) $(\forall x A \rightarrow \forall x B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$;
- 7) $(\exists x A \rightarrow \exists x B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$;
- 8) $\forall x(A \vee B) \rightarrow \forall x A \vee B$;
- 9) $\exists x A \& B \rightarrow \exists x(A \& B)$;
- 10) $\exists x(A \& B) \rightarrow \exists x A \& B$;
- 11) $\exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$;
- 12) $\forall x \forall y (B \rightarrow P) \rightarrow \forall y (\forall x \neg P \rightarrow \forall x \neg B)$;
- *13) $\forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$;
- 14) $\forall u \forall v (R_{u,v}^{x,y} A \leftrightarrow R_u^x B \& R_v^y B) \rightarrow \forall u \forall v (R_{u,v}^{x,y} A \rightarrow R_{v,u}^{x,y} A)$.

6.4. Секвенційні числення неокласичних логік функціонально-екваційного рівня

Опишемо секвенційні числення першопорядкових логік еквітонних квазіарних предикатів функціонально-екваційного рівня – ФЕНКЛ. Базовими композиціями цих логік є $\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'x$, $\exists x$, $=$. Такі секвенційні числення ФЕНКЛ назвемо *FQEC*, вони є подальшим розвитком відомих [9, 26] числень *FEZN*.

Умови замкненості секвенції $\vdash \Gamma \Delta$ у *FQEC* індуковані відповідними умовами гарантованої наявності відношення неспростовнісного логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$:

- С) існує формула Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$;
- CRf) $t = t \in \Delta$ для деякого $t \in Tr$.

Базові секвенційні форми числення *FQEC* індуковані наведеними в розділі 4 відповідними семантичними властивостями відношення неспростовнісного логічного наслідку $\models$.

1. Допоміжні секвенційні форми для нормалізації термів.

Нехай Ψ отримана із Φ виконанням кроку нормалізації термів на основі властивостей SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF. Тоді отримуємо базові секвенційні форми $\vdash$ SIT та $\neg$ SIT, $\vdash$ SST та $\neg$ SST, $\vdash$ CNT та $\neg$ CNT, $\vdash$ CUT та $\neg$ CUT, $\vdash$ SD та $\neg$ SD, $\vdash$ SF та $\neg$ SF.

Зазначені форми мають такий вигляд (тут тип означає SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF):

$$\begin{array}{c} \vdash\text{-тип} \frac{\vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi, \Sigma} \qquad \neg\text{-тип} \frac{\neg \vdash \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \Phi, \Sigma} \end{array}$$

Базові секвенційні форми $\vdash$ SIT та $\neg$ SIT, $\vdash$ SST та $\neg$ SST, $\vdash$ CNT та $\neg$ CNT, $\vdash$ CUT та $\neg$ CUT, $\vdash$ SD та $\neg$ SD, $\vdash$ SF та $\neg$ SF індукують похідні секвенційні форми нормалізації термів:

$$\begin{array}{c} \vdash\text{-NrTr} \frac{\vdash B, \Sigma}{\vdash A, \Sigma} \qquad \neg\text{-NrTr} \frac{\neg \vdash B, \Sigma}{\neg \vdash A, \Sigma} \end{array}$$

Тут Ψ отримана із Φ нормалізацією термів згідно із SIT, SST, CNT, CUT, SD, SF.

2. Допоміжні секвенційні форми елімінації за неістотними іменами та спрощення формул:

$$\begin{array}{c} \vdash\text{-SI}\Phi \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash S(\Phi), \Sigma}; \qquad \neg\text{-SI}\Phi \frac{\neg \vdash \Phi, \Sigma}{\neg \vdash S(\Phi), \Sigma}; \\ \vdash\text{-CN}\Phi \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, x, \bar{t}), \Sigma}; \qquad \neg\text{-CN}\Phi \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, x, \bar{t}), \Sigma}; \\ \vdash\text{-CU}\Phi \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}), \Sigma}; \qquad \neg\text{-CU}\Phi \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{x, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}), \Sigma}. \end{array}$$

Для $\vdash$ CU Φ та $\neg$ CU Φ маємо умову $x \in \mu(\Phi)$.

3. Секвенційні форми еквівалентних перетворень:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash S\lrcorner \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; & \vdash S\lrcorner \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; \\
 \vdash S\vee \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}; & \vdash S\vee \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}; \\
 \vdash S\exists s \frac{\vdash \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}), \Sigma}; & \vdash S\exists s \frac{\vdash \exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}), \Sigma}; \\
 \vdash S\exists \frac{\vdash \exists y S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, y), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}), \Sigma}; & \vdash S\exists \frac{\vdash \exists y S^{\bar{v}, x}(\Phi, \bar{t}, y), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}), \Sigma}.
 \end{array}$$

Для $\vdash S\exists s$ та $\vdash S\exists s$ маємо умови $x \notin \{\bar{v}\}$ та $x \in \mu(\bar{t})$.

Для $\vdash S\exists$ та $\vdash S\exists$ маємо умови

$y \in V_T \setminus ndn(S^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}))$, причому $x \in \{\bar{v}\}$ або $x \in \mu(\bar{t})$.

Нехай Ψ отримана із Φ згорткою суперпозицій згідно із SS Φ .
Тоді маємо такі форми:

$$\vdash SS\Phi \frac{\vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi, \Sigma}; \quad \vdash SS\Phi \frac{\vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi, \Sigma}.$$

4. Секвенційні форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$\vdash SE \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t = s, \bar{t}), \Sigma}; \quad \vdash SE \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t = s, \bar{t}), \Sigma}.$$

5. Секвенційні форми декомпозиції формул:

$$\begin{array}{ll}
 \vdash \lrcorner \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \lrcorner \Phi, \Sigma}; & \vdash \lrcorner \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \lrcorner \Phi, \Sigma}; \\
 \vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \Sigma \quad \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; & \vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}.
 \end{array}$$

6. Секвенційні форми елімінації кванторів:

$$\begin{aligned} & \frac{\exists \frac{\vdash S^x(\Phi, y), \Sigma}{\vdash \exists x \Phi, \Sigma}, \text{ де } y \in V_T \text{ та } y \notin ndn(\Sigma, \Phi);}{\vdash \frac{\vdash S^x(\Phi, t), \neg \exists x \Phi, \Sigma}{\neg \exists x \Phi, \Sigma}}. \end{aligned}$$

При застосуванні $\exists$ терм t нормальний, побудований із ФС і ДНС-дублів імен доступних формул секвенції $\neg \exists x \Phi, \Sigma$ та її наступників.

7. Форми, пов'язані із симетричністю і транзитивністю рівності та заміною рівних:

$$\begin{aligned} & \text{Sm } \frac{\vdash t = s, \vdash s = t, \Sigma}{\vdash t = s, \Sigma}; \\ & \text{Tr } \frac{\vdash t = s, \vdash s = r, \vdash t = r, \Sigma}{\vdash t = s, \vdash s = r, \Sigma}; \\ & \frac{\vdash_{\text{ET}} \vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Sigma}; \\ & \frac{\neg_{\text{ET}} \vdash t = s, \neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Sigma}{\vdash t = s, \neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Sigma}; \\ & \frac{\vdash_{\text{E}\Phi} \vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma}; \\ & \frac{\neg_{\text{E}\Phi} \vdash t = s, \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t = s, \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma}. \end{aligned}$$

Основна властивість секвенційних форм *FQEC* формулюється ідентично формулюванню теореми 6.3.1 для *QEC*-числень.

Опишемо побудову виведення – секвенційного дерева – для заданої секвенції Σ (зліченної в загальному випадку). Така побудова розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева. При

цьому кожне застосування секвенційної форми проводиться лише до скінченної множини доступних на поточний момент формул. Секвенції – це *множини* специфікованих формул, тому повторів формул у секвенціях немає.

На початку етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних додається по одній формулі зі списків $\vdash$ -формул та $\neg\vdash$ -формул. Якщо відповідний список вичерпано, то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

З кожним листом дерева пов'язуємо списки ATr , AFs , ADn активних термів, ФС, ДНС-дублів імен. Терми будуються із ФС та ДНС-дублів імен доступних формул.

Після виконання кожної форми перевіряємо, чи будуть усі листи будованого дерева замкненими секвенціями. При появі замкненої секвенції до неї вже не застосовна жодна форма, отже, процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Якщо всі листи побудованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево і побудову завершено позитивно. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу, відповідно розширюємо AFs та ADn .

Нехай після додавання до секвенції-листа нових доступних формул отримано секвенцію η . Далі добудовуємо скінченне піддерево з вершиною η таким чином.

Активізуємо всі доступні непримітивні секвенції η . До кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Після застосування до Φ основної форми ця Φ та формули, утворені з неї такою формою, на зазначеному етапі пасивні, до таких формул на цьому етапі основні форми незастосовні.

Спочатку виконуємо $\vdash\exists$ -форми. Після кожного такого виконання беремо новий $v \in TN$ та розширюємо ADn . Потім розширюємо ATr , будуючи з наявних AFs та ADn усілякі терми в нормальній формі зі вкладеністю суперпозицій $\leq k$. На цьому етапі довжини списків імен суперпозицій $\leq k$, у них для кожного ФС f можна застосувати тільки перші k імен, які не є неістотними для f (якщо f має $< k$ таких імен, то використовуємо тільки їх).

Після виконання $\vdash\exists$ -форм виконуємо $\vdash S\exists$ -форми та $\vdash S\exists$ -форми. При цьому беремо $y \in V_T$ таке, що $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}))$, з наявних імен доступних формул. Якщо такого y серед наявних імен немає, то беремо як y нове ім'я з TN , після чого розширюємо ADn та ATr .

Далі до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму типу $\vdash SS\Phi$, $\vdash SS\Phi$, $\vdash S\neg$, $\vdash S\neg$, $\vdash S\vee$, $\vdash S\vee$, $\vdash S\exists s$, $\vdash S\exists s$, $\vdash \neg$, $\vdash \neg$, $\vdash \vee$, $\vdash \vee$, $\vdash \exists$. Форма $\vdash \exists$ застосовується багатократно, для цього використовуємо терми із ATr .

У процесі застосування основних форм за необхідності виконуємо спрощення. Для цього кожного разу за виникнення відповідної ситуації застосовуємо належну допоміжну форму типів $CN\Phi$, $CU\Phi$, $CI\Phi$. Кожного разу при отриманні елементарної формули для неї виконуємо форму нормалізації термів (типу $NrTr$) до тих пір, поки всі її терми не набудуть нормальної форми.

Застосування форм рівності має певні особливості.

Форми Sm виконуються кожного разу при появі (активізації) *нової* для секвенції формули вигляду $\vdash t=s$.

Форми Tr виконуємо кожного разу при активізації пари формул $\vdash t=s$ та $\vdash s=r$, якщо хоч одна з них *нова* для секвенції.

Форми типу ET виконуються кожного разу при активізації пари формул, одна з яких має вигляд $\vdash t=s$, а інша – вигляд $\vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$ чи $\vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$, причому принаймні одна з них нова для секвенції. Форми типу EF виконуються кожного разу при активізації пари формул, одна з яких має вигляд $\vdash t=s$, а інша – вигляд $\vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ чи $\vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, причому принаймні одна з них нова для секвенції.

При побудові секвенційного дерева для зліченної секвенції можливі такі випадки:

- 1) усі листи будованого дерева замкнені, тобто маємо скінченне замкнене дерево; тоді побудову завершено позитивно;
- 2) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево. У цьому випадку в дереві існує нескінченний незамкнений шлях $\wp$, його вершини не можуть бути замкненими секвенціями.

Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Для $FQEC$ -числень справджуються теореми коректності та повноти.

Теорема 6.4.1 (коректності). Нехай секвенція $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна в численні $FQEC$. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Теорема 6.4.2 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна в численні $FQEC$.

Теорема повноти спирається на теорему про побудову контрмоделі для множини формул незамкненого шляху.

Теорема 6.4.3 (про контрмоделі). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, побудованому для секвенції $\vdash \Gamma \vdash \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді існують $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^V A$ такі:

$$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F.$$

Таку пару (A, δ) назвемо контрмоделлю для секвенції $\vdash \Gamma \vdash \Delta$.

Опишемо побудову контрмоделі за модельною множиною H .

Нехай $W = \{v_0, \dots, v_n, \dots\}$ – множина всіх предметних імен, що фігурують у ДНС та символах суперпозиції формул H , нехай $Dn = \{v \mid v \in W\}$. Нехай Tr – множина всіх нормальних термів, що фігурують у формулах H . Задамо $TW = Tr \cup Dn$.

Нехай $TW = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$, причому кожне v_j – це t_{kj} . Візьмемо множину A таку, що існує бієкція між TW та A . Кожному $t_i \in TW$ відповідає $a_i \in A$, причому кожному v_j відповідає a_{kj} .

Задамо $\delta = [v_0 \mapsto a_{k0}, \dots, v_j \mapsto a_{kj}, \dots]$.

Для всіх $f \in Fns$, наявних в H , задамо f_A та f_B так, щоб виконувалась умова:

$$(t_i)_A(\delta) = a_i \text{ для всіх } t_i \in Tr.$$

Для $t_{kj} = v_j$ маємо $(t_{kj})_A(\delta) = (v_j)_A(\delta) = a_{kj}$.

Нехай $t_m = f \in Fns$. Задаємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$.

Для всіх інших $t_m \in TW$ значення задаємо індукцією за побудовою терму.

Нехай t_p – це $S^{v_{i1}, \dots, v_{in}} f t_{j1} \dots t_{jn}$, де $f = t_m \in Fns$.

Тоді маємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$, $(t_{j1})_A(\delta) = a_{j1}$, ..., $(t_{jn})_A(\delta) = a_{jn}$.
Тому задамо

$$f_A(\delta \nabla v_{i1} \mapsto a_{j1}, \dots, v_{in} \mapsto a_{jn}) = f_B(\delta \nabla v_{i1} \mapsto a_{j1}, \dots, v_{in} \mapsto a_{jn}) = a_p$$

Задамо тепер значення примітивних формул на δ :

$$- \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = T;$$

$$- \neg \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = F;$$

$$- \vdash S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j1} \dots t_{jn} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_{i1} \mapsto a_{j1} \nabla \dots \nabla v_{in} \mapsto a_{jn}) = T;$$

$$- \neg \vdash S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j1} \dots t_{jn} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_{i1} \mapsto a_{j1} \nabla \dots \nabla v_{in} \mapsto a_{jn}) = F.$$

Приклад 6.4.1. Виведення у $FQEC$ секвенції $\vdash \forall xP$, $\neg \exists xP$. Тут маємо атомарний терм $'x$.

$$\begin{array}{c} \vdash \forall xP, \neg \exists xP \\ \downarrow \\ \vdash \forall xP, \vdash S^x(P, 'x), \neg \exists xP, \vdash S^x(P, 'x) \quad \boxtimes \end{array}$$

Приклад 6.4.2. Укажемо виведення у $FQEC$ секвенції $\vdash \forall xS^v(P, S^v(f, 'x))$, $\neg \exists xS^v(P, 'x)$ за умови, що x неістотне для f та P . Тут маємо атомарні терми $'x$, $'v$, f . При побудові секвенційного дерева виконуємо спрощення та елімінації за неістотним іменем.

$$\begin{array}{c} \vdash \forall xS^v(P, S^v(f, 'x)), \neg \exists xS^v(P, 'x) \\ \downarrow \\ \vdash \forall xS^v(P, S^v(f, 'x)), \vdash S^x(S^v(P, S^v(f, 'x)), 'x), \vdash S^x(S^v(P, S^v(f, 'x)), 'v), \\ \vdash S^x(S^v(P, S^v(f, 'x)), f), \neg \exists xS^v(P, 'x), \neg S^x(S^v(P, 'x), 'x), \\ \neg S^x(S^v(P, 'x), 'v), \neg \vdash S^x(S^v(P, 'x), f) \\ \downarrow \\ \vdash \forall xS^v(P, S^v(f, 'x)), \vdash S^v(P, S^v(f, 'x)), \vdash S^x(S^v(P, S^v(f, 'x)), 'v), \\ \vdash S^x(S^v(P, S^v(f, 'x)), f), \neg \exists xS^v(P, 'x), \neg S^v(P, 'x), \\ \neg S^{xv}(P, 'v, S^x('x, 'v)), \neg S^{xv}(P, f, S^x('x, f)) \\ \downarrow \\ \vdash \forall xS^v(P, S^v(f, 'x)), \vdash P, \dots, \neg \exists xS^v(P, 'x), \neg P, \dots \quad \boxtimes \end{array}$$

Приклад 6.4.3. З'ясуємо, чи справджується

$\forall x S^n(P, f) \models \neg \exists x S^n(P, 'x)$. Побудуємо у *FQEC* виведення секвенції $\vdash \forall x S^n(P, f), \neg \exists x S^n(P, 'x)$. Тут атомарні терми $'x, 'v, f$. Далі маємо терми $S^x(f, 'v), S^v(f, 'x), S^x(f, f), S^v(f, f), \dots$. При побудові секвенційного дерева виконуємо спрощення та елімінації за неістотним іменем.

$$\begin{array}{c}
 \vdash \forall x S^n(P, f), \neg \exists x S^n(P, 'x) \\
 \downarrow \\
 \vdash \forall x S^n(P, f), \vdash S^x(S^n(P, f), 'x), \vdash S^x(S^n(P, f), 'v), \vdash S^x(S^n(P, f), f), \\
 \neg \exists x S^n(P, 'x), \neg S^x(S^n(P, 'x), 'x), \neg S^x(S^n(P, 'x), 'v), \neg S^x(S^n(P, 'x), f) \\
 \downarrow \\
 \vdash \forall x S^n(P, f), \vdash S^n(P, f), \vdash S^{xv}(P, 'v, S^x(f, 'v)), \vdash S^{xv}(P, f, S^x(f, f)), \\
 \neg \exists x S^n(P, 'x), \neg S^n(P, 'x), \neg S^{xv}(P, 'v, S^x('x, 'v)), \neg S^{xv}(P, f, S^x('x, f)) \\
 \downarrow \\
 \vdash \forall x S^n(P, f), \vdash S^n(P, f), \vdash S^{xv}(P, 'v, S^x(f, 'v)), \vdash S^{xv}(P, f, S^x(f, f)), \\
 \neg \exists x S^n(P, 'x), \neg S^n(P, 'x), \neg S^x(P, 'v), \neg S^{xv}(P, f, f) \\
 \downarrow \\
 \dots
 \end{array}$$

Отримуємо незамкнене секвенційне дерево, тому далі будуємо контрмодель. Маємо $W = \{x, v\}$;

$$TW = \{ 'x, 'v, f, S^x(f, 'v), S^v(f, 'x), S^x(f, f), S^v(f, f), \dots \};$$

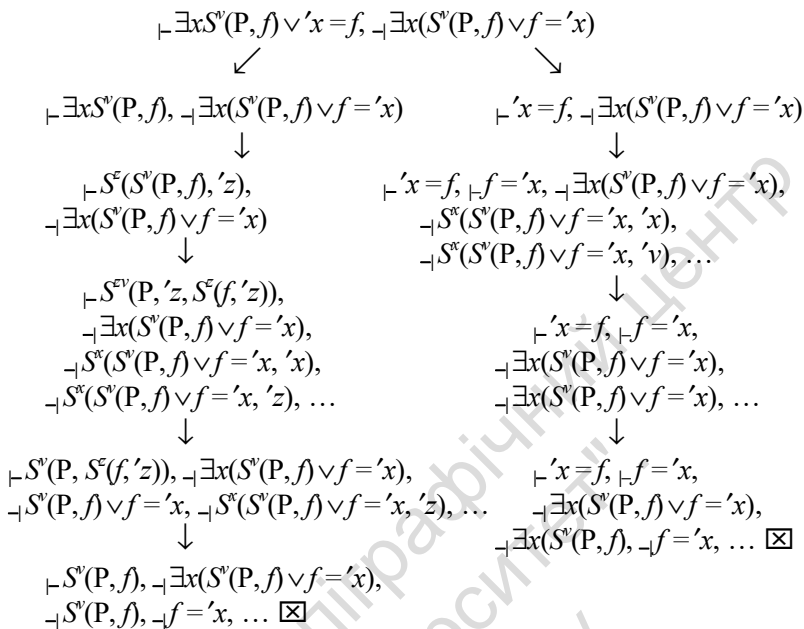
$$\text{відповідна } A = \{a, b, c, e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}.$$

Задаємо $\delta = [x \mapsto a, v \mapsto b]$. Для будованої $A = (A, I)$ маємо:

$$\begin{aligned}
 f_A(\delta) &= c, & S^x(f, 'v)_A(\delta) &= e_1, & S^v(f, 'x)_A(\delta) &= e_2, & S^x(f, f)_A(\delta) &= e_3, \\
 S^v(f, f)_A(\delta) &= e_4, \dots & \text{Далі маємо: } S^n(P, f)_A(\delta) &= T, & S^n(P, 'x)_A(\delta) &= F, \\
 S^x(P, 'v)_A(\delta) &= F, & S^{xv}(P, f, f)_A(\delta) &= F, \dots
 \end{aligned}$$

Приклад 6.4.4. Для з'ясування того, чи справджується твердження $\exists x S^n(P, f) \vee 'x = f \models \exists x (S^n(P, f) \vee 'x = f)$, побудуємо у *FQEC* виведення секвенції $\vdash \exists x S^n(P, f) \vee 'x = f, \neg \exists x (S^n(P, f) \vee 'x = f)$.

При побудові беремо нове $z \in V_T$.



Отримали замкнене секвенційне дерево, тому справджується $\exists x S^v(P, f) \vee 'x = f \models \exists x (S^v(P, f) \vee f = 'x)$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть допоміжні секвенційні форми *FQEC*-числень.
2. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з еквівалентними перетвореннями.
3. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з елімінацією кванторів.
4. Наведіть секвенційні форми *FQEC*-числень, пов'язані з рівністю.
5. Опишіть побудову виведення у *FQEC*-численні для заданої зліченої секвенції.
6. Сформулюйте теореми коректності та повноти для *FQEC*-числень.

7. Сформулюйте теорему про побудову контрмоделі для $FQEC$ -числень.

8. Опишіть побудову контрмоделі у $FQEC$ -численні.

Вправи

1. Запишіть похідні секвенційні форми $FQEC$ -числень для $\rightarrow$ та $\&$.

2. Запишіть похідні секвенційні форми $FQEC$ -числень для $\forall$.

3. Обґрунтуйте секвенційні форми елімінації кванторів у $FQEC$ -численнях.

4. Обґрунтуйте секвенційні форми заміни рівних у $FQEC$ -численнях.

5. Дайте визначення модельної множини для випадку $FQEC$ -числень.

6. Доведіть теорему про побудову контрмоделі для $FQEC$ -числень.

7. Побудуйте у $FQEC$ -численні виведення чи доведіть його відсутність (указавши контрмодель) для таких формул:

1) $\forall x S''(P, S''(f, 'x)) \rightarrow \exists x S''(P, 'x)$;

2) $\forall x (S''(f, f) = 'x) \rightarrow \forall x \exists y (S''(f, 'y) = 'x)$;

3) $\exists x (S'(P, f) \vee f = 'x) \rightarrow \exists x S'(P, f) \vee 'x = f$;

4) $\forall x (S'(P, f) \& g = 'x) \rightarrow \forall x S'(P, f) \& 'x = g$;

5) $\forall x S''(P, f) \& g = 'x \rightarrow \forall x (S''(P, f) \& 'x = g)$;

6) $\exists x (S'(P, f) \rightarrow g = f) \rightarrow \exists x S'(P, f) \rightarrow f = g$;

7) $\exists x S''(P, f) \rightarrow g = f \rightarrow \exists x (S''(P, f) \rightarrow f = g)$.

7. ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Характерним для програмування і моделювання є використання часткових, необов'язково однозначних, відображень над складними даними. Тому постає проблема дослідження програмно-орієнтованих логік часткових предикатів, які можуть бути неоднозначними (недетермінованими).

Класична логіка – це логіка тотальних однозначних X -арних предикатів.

Неокласичні логіки – це логіки часткових однозначних екві-тонних квазіарних предикатів.

У цьому розділі розглянемо більш загальні логіки *часткових неоднозначних* квазіарних предикатів – квазіарних предикатів реляційного типу.

7.1. Квазіарні предикати реляційного типу та їхні семантики

Під V - A -квазіарним предикатом розумітимемо часткову неоднозначну функцію вигляду $Q: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$.

Часткові неоднозначні V - A -квазіарні предикати далі трактуємо як відповідності (відношення) між ${}^V A$ та $\{T, F\}$, тому назвемо їх *предикатами реляційного типу*, або R -предикатами. Вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного квазіарного предиката. Узагальненням R -предикатів є GND -предикати – загальні недетерміновані квазіарні предикати. GND -предикати досліджено, зокрема, у [13].

Клас V - A -квазіарних предикатів реляційного типу позначимо PrR^{V-A} .

Таким чином, клас квазіарних предикатів Pr^{V-A} (див. розд. 3 та підрозд. 4.5) ми конкретизуємо як клас квазіарних R -предикатів PrR^{V-A} .

Позначаємо $Q[d]$ множину значень, які R -предикат Q може прийняти на $d \in {}^V A$.

Маємо $Q[d] \subseteq \{T, F\}$, тому $Q[d]$ може бути одним із $\{\emptyset\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Кожний V - A -квазіарний R -предикат Q однозначно задається двома множинами – областю істинності (T -область) та областю хибності (F -область):

$$T(Q) = \{d \in {}^V A \mid T \in Q[d]\};$$

$$F(Q) = \{d \in {}^V A \mid F \in Q[d]\}.$$

Розглянемо різновиди R -предикатів.

V - A -квазіарний R -предикат Q :

- однозначний, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \emptyset$;
- тотальний, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^V A$;
- неспростовний (частково істинний), якщо $F(Q) = \emptyset$;
- виконуваний, якщо $T(Q) \neq \emptyset$;
- тотально істинний, якщо $T(Q) = {}^V A$;
- тотально хибний, якщо $F(Q) = {}^V A$;
- тотожно істинний, якщо $T(Q) = {}^V A$ та $F(Q) = \emptyset$ (позн. T);
- тотожно хибний, якщо $T(Q) = \emptyset$ та $F(Q) = {}^V A$ (позн. F);
- всюди невизначений, якщо $T(Q) = F(Q) = \emptyset$ (позн. $\perp$);
- тотально амбівалентний, якщо $T(Q) = F(Q) = {}^V A$ (позн. Υ).

Маємо такі константні R -предикати: $\perp$, T , F , Υ .

Часткові однозначні R -предикати назвемо P -предикатами.

Клас P -предикатів далі позначатимемо PrP^{V-A} .

Для P -предикатів замість $Q(d) = \{T\}$ та $Q(d) = \{F\}$ звично пишемо $Q(d) = T$ та $Q(d) = F$.

Області істинності й хибності P -предикатів можна подати традиційно:

$$T(Q) = \{d \mid Q(d) = T\}, F(Q) = \{d \mid Q(d) = F\}.$$

Тотальні R -предикати назвемо T -предикатами.

Клас T -предикатів далі позначатимемо PrT^{V-A} .

Тотальні однозначні R -предикати назвемо TS -предикатами.

Клас TS -предикатів позначатимемо PrT^{V-A} , цей клас суттєво виводжений.

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для R -предиката Q , якщо

$$d \parallel_{-x} = h \parallel_{-x} \Rightarrow Q[d] = Q[h].$$

R -предикат Q *монотонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow Q[d] \subseteq Q[d']$.

R -предикат Q *антитонний*, якщо $d \subseteq d' \Rightarrow Q[d] \supseteq Q[d']$.

Окремим випадком монотонності є еквітонність – збереження прийнятого значення при розширенні даних.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

P -предикат Q *еквітонний*, якщо

$$Q(d) \downarrow \text{ та } d \subseteq d' \Rightarrow Q(d') \downarrow = Q(d).$$

Монотонні R -предикати назвемо RM -предикатами.

Еквітонні P -предикати назвемо PE -предикатами.

Антитонні R -предикати назвемо RA -предикатами.

Антитонні T -предикати назвемо TA -предикатами.

Класи RM -предикатів, RA -предикатів, TA -предикатів, PE -предикатів далі відповідно позначатимемо $PrRM^{V-A}$, $PrRA^{V-A}$, $PrPE^{V-A}$, $PrTA^{V-A}$.

Монотонність предиката означає, що набуте ним значення зберігається при розширенні даних. Для P -предикатів це може трактуватися як збереження інформативності предиката при збільшенні інформативності вхідних даних. Для T -предикатів ситуація протилежна: при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися.

Отже, поняття монотонності малозмістовне для T -предикатів. Для них адекватним є дуальне поняття антитонності. Для T -предикатів антитонність означає, що інформативність предиката не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних.

Якщо Q антитонний, то $Q[\emptyset]$ складається з усіх значень, яких предикат може набувати на ${}^V A$, тобто $Q[\emptyset] = E_Q$. У класі P -предикатів антитонними можуть бути лише майже константні предикати: $Q(d) \equiv T$ для всіх $d \in {}^V A$ або $Q(d) \equiv F$ для всіх $d \in {}^V A$. Тому в класі однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне.

Константні предикати $\perp$, T , F , Υ є монотонними й антитонними.

Приклад 7.1.1. Розглянемо такі предикати.

$$P_1(d) = \begin{cases} \{F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_2(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_3(d) = \begin{cases} \{F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_4(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_5(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_6(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \in asn(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

$$P_7(d) = \begin{cases} \{F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \in asn(d). \end{cases}$$

$$P_8(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d), \\ \{T\}, & \text{якщо } x \in asn(d). \end{cases}$$

$$P_9(d) = \begin{cases} \{T\}, & \text{якщо } x \notin asn(d), \\ \emptyset, & \text{якщо } x \in asn(d). \end{cases}$$

$$P_{10}(d) = \begin{cases} \{T, F\}, & \text{якщо } x \notin asn(d), \\ \{F\}, & \text{якщо } x \in asn(d). \end{cases}$$

P_1 та P_2 немонотонні (нееквітонні) й неантитонні тотальні однозначні, P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) часткові однозначні, P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні, P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні, P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

R -предикат $\tilde{P}$ назвемо дуальним до R -предиката Q , якщо $T(\tilde{Q}) = \overline{F(Q)}$ та $F(\tilde{Q}) = \overline{T(Q)}$.

Приклад 7.1.2. Предикати $\perp$ та Υ взаємно дуальні.

Приклад 7.1.3. Безпосередньо із визначень отримуємо:

$$1) Q \in PrP^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q} \in PrT^{V-A}; Q \in PrT^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q} \in PrP^{V-A};$$

$$Q \in PrTS^{V-A} \Rightarrow \tilde{Q} \in PrTS^{V-A};$$

2) Q монотонний $\Rightarrow \tilde{Q}$ антитонний;

Q антитонний $\Rightarrow \tilde{Q}$ монотонний.

Задамо відображення дуалізації $\delta: PrR^{V-A} \rightarrow PrR^{V-A}$ таким чином:

$$\delta(Q) = \tilde{Q} \text{ для всіх } Q \in PrR^{V-A}.$$

Маємо $\delta(\delta(Q)) = Q$ для кожного $Q \in PrR^{V-A}$.

Приклад 7.1.4. $\delta(T) = T$, $\delta(F) = F$, $\delta(\perp) = \top$, $\delta(\top) = \perp$;

$$\delta(PrP^{V-A}) = PrT^{V-A}, \delta(PrT^{V-A}) = PrP^{V-A}, \delta(PrTS^{V-A}) = PrTS^{V-A};$$

$$\delta(PrPE^{V-A}) = PrTA^{V-A}, \delta(PrTA^{V-A}) = PrPE^{V-A},$$

$$\delta(PrRM^{V-A}) = PrRA^{V-A}, \delta(PrRA^{V-A}) = PrRM^{V-A}.$$

Пропозиційні композиції R -предикатів – логічні зв'язки – визначаються через області істинності й хибності відповідних предикатів так, як для випадку P -предикатів (див. розділ 2).

Композиція реномінації у випадку R -предикатів задається традиційно, через операцію реномінації:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)(d) = Q(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) \text{ для кожного } d \in V_A.$$

Композицію квантифікації $\exists x$ у випадку R -предикатів задаємо через області істинності та хибності предиката $\exists x Q$:

$$T(\exists x Q) = \{d \in V_A \mid T \in Q(d \nabla x \rightarrow a) \text{ для деякого } a \in A\};$$

$$F(\exists x Q) = \{d \in V_A \mid F \in Q(d \nabla x \rightarrow a) \text{ для всіх } a \in A\}.$$

Композиція квантифікації $\forall x$ є похідною, вона задається умовою $\forall x Q = \neg \exists x \neg Q$.

Приклад 7.1.5. Спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори Ez – визначають наявність у даних компоненти з відповідним $z \in V$. Ці предикати використовують для опису властивостей елімінації кванторів (див. [12, 43]).

Предикати-індикатори Ez задаються таким чином:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z) \downarrow\} = \{d \mid z \in asn(d)\};$$

$$F(Ez) = \{d \mid d(z) \uparrow\} = \{d \mid z \notin asn(d)\}.$$

Предикати Ez не є монотонними і не є антитонними.

Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez .

Приклад 7.1.6. Властивості R -предикатів, пов'язані з елімінацією кванторів:

$$T\exists v) T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)),$$

$$\text{зокрема } T(R_y^x(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\exists xP);$$

$$F\exists v) F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)),$$

$$\text{зокрема } F(\exists xP) \cap T(Ey) \subseteq F(R_y^x(P)).$$

Композиції $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ – це базові композиції чистих першопорядкових логік R -предикатів.

Теорема 7.1.1. Композиції $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ зберігають однозначність, тотальність, монотонність, антитонність квазіарних R -предикатів.

Наслідок 7.1.1. Класи $PrP^{V-A}, PrT^{V-A}, PrTS^{V-A}, PrRM^{V-A}, PrRA^{V-A}, PrPE^{V-A}, PrTA^{V-A}$ замкнені щодо композицій $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Композиційну алгебру вигляду $AQR^{V-A} = (PrR^{V-A}, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина базових композицій, назовемо чистою першопорядковою алгеброю R -предикатів. Фактично це алгебра AQ^{V-A} (див. розділ 3), де Pr^{V-A} конкретизовано як PrR^{V-A} .

Приклад 7.1.6. Згідно з наслідком 7.1.1 можна виділити такі підалгебри алгебри AQR^{V-A} :

- $AQP^{V-A} = (PrP^{V-A}, CQ)$ – алгебра P -предикатів;
- $AQT^{V-A} = (PrT^{V-A}, CQ)$ – алгебра T -предикатів;
- $AQTS^{V-A} = (PrTS^{V-A}, CQ)$ – алгебра TS -предикатів;
- $AQRM^{V-A} = (PrRM^{V-A}, CQ)$ – алгебра RM -предикатів;
- $AQRA^{V-A} = (PrRA^{V-A}, CQ)$ – алгебра RA -предикатів;
- $AQPE^{V-A} = (PrPE^{V-A}, CQ)$ – алгебра PE -предикатів;
- $AQTA^{V-A} = (PrTA^{V-A}, CQ)$ – алгебра TA -предикатів.

Приклад 7.1.7. Сингулярні композиційні алгебри, носії яких складаються із константних елементів:

$$\perp^{V-A} = (\{\perp\}, CQ), \Upsilon^{V-A} = (\{\Upsilon\}, CQ), \mathbf{V}^{V-A} = (\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}, CQ);$$

$$\begin{aligned} \text{BP}^{V-A} &= (\{\perp, \text{T}, \text{F}\}, \text{CQ}\}, \text{BT}^{V-A} = (\{\Upsilon, \text{T}, \text{F}\}, \text{CQ}\}, \\ \text{BL}^{V-A} &= (\{\perp, \Upsilon, \text{T}, \text{F}\}, \text{CQ}\}. \end{aligned}$$

Те, що алгебра $\mathfrak{K}$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{K}$, позначимо $\mathfrak{K} \prec \mathfrak{K}$.

Приклад 7.1.8. Маємо такі співвідношення:

$$\perp^{V-A} \prec \text{BP}^{V-A}, \Upsilon^{V-A} \prec \text{BT}^{V-A},$$

$$\text{B}^{V-A} \prec \text{BL}^{V-A}, \text{B}^{V-A} \prec \text{BT}^{V-A}, \text{BP}^{V-A} \prec \text{BL}^{V-A}, \text{BT}^{V-A} \prec \text{BL}^{V-A},$$

$$\text{AQTS}^{V-A} \prec \text{AQP}^{V-A} \text{ та } \text{AQTS}^{V-A} \prec \text{AQT}^{V-A},$$

$$\text{AQP}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A} \text{ та } \text{AQT}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A},$$

$$\text{AQPE}^{V-A} \prec \text{AQP}^{V-A} \text{ та } \text{AQPE}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A},$$

$$\text{AQTA}^{V-A} \prec \text{AQT}^{V-A} \text{ та } \text{AQTA}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A},$$

$$\text{AQR}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A} \text{ та } \text{AQR}^{V-A} \prec \text{AQR}^{V-A}.$$

Нехай δ – відображення дуалізації.

Алгебри (Pr_1, CQ) і (Pr_2, CQ) дуальні, якщо $\delta(\text{Pr}_1) = \text{Pr}_2$ та $\delta(\text{Pr}_2) = \text{Pr}_1$.

Приклад 7.1.9. Маємо такі пари дуальних алгебр:

$$\perp^{V-A} \text{ та } \Upsilon^{V-A}, \text{BP}^{V-A} \text{ та } \text{BT}^{V-A},$$

$$\text{AQP}^{V-A} \text{ та } \text{AQT}^{V-A}, \text{AQPE}^{V-A} \text{ та } \text{AQTA}^{V-A}, \text{AQR}^{V-A} \text{ та } \text{AQR}^{V-A}.$$

Алгебри B^{V-A} , BL^{V-A} , AQTS^{V-A} , AQR^{V-A} автодуальні.

У випадку R -предикатів властивості пропозиційних композицій загалом аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв'язок (див. розділ 2). Те саме стосується більшості властивостей кванторів. Водночас для квазіарних предикатів уже неправильні деякі пов'язані із кванторами закони класичної логіки (див. підрозділ 3.2). Основні властивості композицій реномінації описано в підрозділі 3.2 (див. теореми 3.2.1 та 3.2.7).

Для опису властивостей квазіарних R -предикатів на кванторному рівні використовуватимемо описану в підрозділі 4.5 мову ЧКНЛ. Така мова фактично визначається побудовою композиційної алгебри AQR^{V-A} . У підрозділі 4.5 описано інтерпретацію цієї мови на АС із доданою сигнатурою вигляду $((^V A, \text{PrPE}^{V-A}), \Sigma, I)$. У випадку ЧКНЛ квазіарних R -предикатів клас інтерпретацій роз-

ширимо до АС із доданою сигнатурою вигляду $((^V A, PrR^{V-A}), \Sigma, I)$, які теж скорочено позначатимемо (A, I) .

Виділення підалгебр квазіарних предикатів індукує виділення відповідних класів інтерпретацій. Ми говоримо про загальний клас R -інтерпретацій та підкласи P -, T -, TS -, PE -, TA -, RM - та RA -інтерпретацій.

Такі класи інтерпретацій називають *семантиками*.

Зазначені семантики будемо відповідно позначати

$R, P, T, TS, PE, TA, RM, RA$.

Теорема 7.1.1. Для семантик маємо співвідношення

$TS \subset P \subset R, TS \subset T \subset R,$

$PE \subset RM \subset R, TA \subset RA \subset R, PE \subset P, TA \subset T.$

Логіки $*$ -предикатів будемо називати логіками з $*$ -семантикою (тут $*$ – одне з $R, P, T, TS, PE, TA, RM, RA$).

Зауважимо, що ЧНКЛ – це ЧКНЛ із PE -семантикою, такі логіки розглянуто в підрозділі 4.5.

Відображення дуалізації продовжимо на класи інтерпретацій.

Інтерпретацію $\delta(J) = (A, I_\delta)$ назвемо дуальною до інтерпретації $J = (A, I)$, якщо для кожного $p \in Ps$ маємо

$$T(p_{\delta(J)}) = \overline{F(p_J)} \text{ та } F(p_{\delta(J)}) = \overline{T(p_J)}.$$

У цьому випадку інтерпретація J дуальна до $\delta(J)$:

$$T(p_J) = \overline{F(p_{\delta(J)})} \text{ та } F(p_J) = \overline{T(p_{\delta(J)})}.$$

Теорема 7.1.2. Інтерпретації J та ϑ дуальні $\Rightarrow$ для всіх $\Phi \in Fr$ маємо $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)}$ та $F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}$.

Якщо J та G дуальні, то

Φ_J монотонний $\Leftrightarrow \Phi_G$ антитонний;

Φ_G антитонний $\Leftrightarrow \Phi_J$ монотонний.

Виділення дуальних пар предикатних алгебр індукує виділення дуальних семантик.

Приклад 7.1.10. Маємо такі дуальні пари: P та T , PE та TA , RM та RA .

Семантики R та TS автодуальні.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації J , або J -неспростовна (позн. $J \models \Phi$), якщо предикат Φ_J неспростовний.

Φ неспростовна у класі інтерпретацій K (позн. $K|\models\Phi$), якщо $J|\models\Phi$ для кожної $J\in K$.

Φ виконується при інтерпретації J , або J -виконується, якщо Φ_J – виконуваний предикат.

Формула Φ виконується у класі інтерпретацій K , якщо Φ J -виконується за деякої $J\in K$.

Приклад 7.1.11. Кожна формула виконується в T та виконується в R (задамо інтерпретацію алгеброю $\Upsilon^{V/A}$). Тому поняття виконуваної формули змістовне лише для P -інтерпретацій.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації J (позн. $J|\models\Phi$), якщо Φ_J – тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна у класі інтерпретацій K (позн. $K|\models\Phi$), якщо $J|\models\Phi$ для кожної $J\in K$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації J (позн. $K|\models_{id}\Phi$), якщо $\Phi_J = T$.

Формула Φ тотожно істинна у класі інтерпретацій K , якщо $K|\models_{id}\Phi$ для кожної $J\in K$.

Подібним чином даємо визначення тотально хибної при інтерпретації J та тотально хибної в K формули; тотожно хибної при інтерпретації J та тотожно хибної в K формули.

$$\begin{aligned} \text{Теорема 7.1.3. } \{ \Phi |^P \models \Phi \} &= \{ \Phi |^T \models \Phi \} = \{ \Phi |^{TS} \models_{id} \Phi \} = \\ &= \{ \Phi |^{TS} \models \Phi \} = \{ \Phi |^{TS} \models \Phi \}; \\ \{ \Phi |^R \models \Phi \} &= \{ \Phi |^R \models \Phi \} = \{ \Phi |^R \models_{id} \Phi \} = \{ \Phi |^P \models \Phi \} = \{ \Phi |^P \models_{id} \Phi \} = \\ &= \{ \Phi |^T \models \Phi \} = \{ \Phi |^T \models_{id} \Phi \} = \emptyset. \end{aligned}$$

Поняття тавтології для ЧКНЛ R -предикатів вводимо аналогічно випадку ЧНКЛ (див. підрозділ 4.5).

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть різновиди R -предикатів.
2. Дайте визначення монотонного R -предиката.
3. Дайте визначення антитонного R -предиката.
4. Дайте визначення предиката, дуального до даного R -предиката.

5. Що таке відображення дуалізації?
6. Дайте визначення предиката-індикатора Ez .
7. Наведіть властивості R -предикатів, пов'язані з елімінацією кванторів.
8. Що таке дуальні алгебри?
9. Наведіть приклади підалгебр алгебри AQR^{I-A} та опишіть співвідношення між цими підалгебрами.
10. Які ви знаєте класи інтерпретацій R -предикатів (семантики)?
11. Опишіть співвідношення між семантиками $R, P, T, TS, PE, TA, RM, RA$.
12. Що таке дуальні інтерпретації?
13. Що таке дуальні семантики? Наведіть приклади.
14. Дайте визначення формули:
 - неспростовної;
 - виконуваної;
 - тотально істинної;
 - тотожно істинної.

Вправи

1. Доведіть: $P|=\Phi \Leftrightarrow \neg\Phi$ невиконувана в P .
2. Доведіть наведені вище співвідношення між семантиками (теорема 7.1.1).
3. Доведіть: якщо інтерпретації J та ϑ дуальні, то для всіх $\Phi \in Fr$ маємо $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)}$ та $F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}$ (теорема 7.1.2).
4. Доведіть: Φ тавтологія $\Rightarrow TS|_{=id} \Phi$.
5. Доведіть теорему 7.1.3.

7.2. Відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести низку відношень на множині формул мови ЧКНЛ.

Спочатку введемо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій J :

- 1) істиннісний, або T -наслідок: $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$;
- 2) хибнісний, або F -наслідок: $\Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$;
- 3) сильний, або TF -наслідок:

$$\Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J) \text{ та } F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J);$$

- 4) неспростовнісний, або IR -наслідок:

$$\Phi \models_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \emptyset;$$

- 5) дуальний до IR -наслідку, або DI -наслідок:

$$\Phi \models_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^V A.$$

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α визначатимемо за схемою

$$\Phi \models_{\alpha} \Psi, \text{ якщо } \Phi \models_J \Psi \text{ для кожної } J \in \alpha.$$

Розглядаючи відношення логічного наслідку в семантиках R , P , T , TS , загалом отримуємо 20 відношень.

Приклад 7.2.1. Нехай для семантик α та β маємо $\alpha \subseteq \beta$. Тоді $\models_{\alpha} \subseteq \models_{\beta}$.

Справді, нехай $\Phi \models_{\beta} \Psi$, тоді $\Phi \models_J \Psi$ для кожної $J \in \beta$. Проте $\alpha \subseteq \beta$, тому $\Phi \models_J \Psi$ для кожної $J \in \alpha$. Звідси $\Phi \models_{\alpha} \Psi$. Отже, маємо $\models_{\alpha} \subseteq \models_{\beta}$.

Таким чином, при розширенні семантики відношення логічного наслідку звужується.

У випадках класичної логіки та логіки TS -предикатів усі наведені відношення логічного наслідку збігаються і стають єдиним відношенням, яке позначимо $\models^{TS}$:

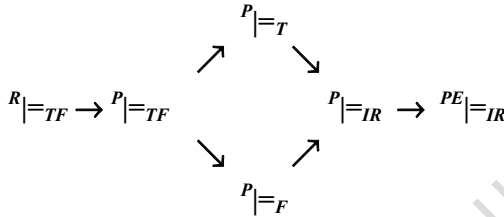
Теорема 7.2.1. Маємо такі властивості відношень логічного наслідку:

- 1) $\models^{P|}_{DI} = \models^{T|}_{IR} = \models^{R|}_{IR} = \models^{R|}_{DI} = \emptyset$;
- 2) $\models^{P|}_{T} = \models^{T|}_{F} ; \models^{P|}_{F} = \models^{T|}_{T} ; \models^{R|}_{T} = \models^{R|}_{F} = \models^{R|}_{TF} ; \models^{P|}_{IR} = \models^{T|}_{DI} ;$
 $\models^{P|}_{TF} = \models^{T|}_{TF}$;
- 3) $\models^{P|}_{IR} = \models^{T|}_{DI} = \models^{TS}$.

Це дає нам п'ять різних невироджених відношень:

$$\models^{P|}_{IR}, \models^{P|}_{T}, \models^{P|}_{F}, \models^{P|}_{TF}, \models^{R|}_{TF}.$$

Теорема 7.2.2. Маємо такі співвідношення між відношеннями логічного наслідку (замість символу $\subseteq$ вживаємо стрілку $\rightarrow$):



Тут $P^E|=IR$ – розглянуте раніше відношення неспростовнісного логічного наслідку для однозначних еквітонних предикатів.

Приклад 7.2.2. Нехай $A \in P$, $p, q, s \in Ps$. Задамо p_A як T , q_A як $\perp$, s_A як F . Тоді $p_A|=IR q$, $q_A|=IR s$, однак $p_A \not|=IR s$. Таким чином, відношення наслідку $_A|=IR$ нетранзитивне.

Проте для відношення *логічного* наслідку $P|=IR$ ситуація нормалізується:

Теорема 7.2.3. Відношення $P|=IR$ транзитивне.

Водночас транзитивність відношень $_|=T$, $_|=F$, $_|=TF$ та $P|=T$, $P|=F$, $P|=TF$, $R|=TF$ безпосередньо випливає із означень.

Приклад 7.2.3. $\Phi \& \neg \Phi |_T \Psi$.

Для кожної $A \in P$ маємо $T(\Phi \& \neg \Phi_A) = T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) = \emptyset$, звідки $T(\Phi \& \neg \Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$, тому $\Phi \& \neg \Phi_A |_T \Psi$ для довільних Φ, Ψ .

Приклад 7.2.4. $\Phi |_F \Psi \vee \neg \Psi$.

Для кожної $A \in P$ маємо $F(\Psi \vee \neg \Psi_A) = F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) = \emptyset$, звідки $F(\Psi \vee \neg \Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$, тому $\Phi_A |_F \Psi \vee \neg \Psi$ для довільних Φ, Ψ .

Приклад 7.2.5. $\Phi \& \neg \Phi \not|_F \Psi$.

Візьмемо $\Phi, \Psi, A \in P$ такі: $F(\Psi_A) \neq \emptyset$ та $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = \emptyset$, тобто $\Phi_A = \perp$; тоді неправильно $F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi \& \neg \Phi_A)$, адже $F(\Phi \& \neg \Phi_A) = T(\Phi_A) \cup F(\Phi_A) = \emptyset$.

Приклад 7.2.6. $\Phi \not|_T \Psi \vee \neg \Psi$

Візьмемо $\Phi, \Psi, A \in P$ такі: $T(\Phi_A) \neq \emptyset$ та $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \emptyset$, тобто $\Psi_A = \perp$; тоді неправильно $T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi \vee \neg \Psi_A)$, адже $T(\Psi \vee \neg \Psi_A) = T(\Psi_A) \cup F(\Psi_A) = \emptyset$.

Приклад 7.2.7. $\Phi \& \neg \Phi \stackrel{R}{\neq}_{TF} \Psi \vee \neg \Psi$.

Візьмемо $A \in R$ таку: $\Phi_A = \top$ та $\Psi_A = \perp$. Тоді маємо $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = {}^V A$ та $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \emptyset$, тому неправильно $T(\Phi \& \neg \Phi_A) \subseteq T(\Psi \vee \neg \Psi_A)$.

Приклад 7.2.8. $\Phi \& \neg \Phi \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi$.

Для кожної $A \in P$ маємо $T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) = \emptyset$ та $F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) = \emptyset$, звідки $T(\Phi \& \neg \Phi_A) = \emptyset$ та $F(\Psi \vee \neg \Psi_A) = \emptyset$, тому $\Phi \& \neg \Phi_A \models_T \Psi \vee \neg \Psi$ та $\Phi \& \neg \Phi_A \models_F \Psi \vee \neg \Psi$.

Таким чином, для кожної $A \in P$ маємо $\Phi \& \neg \Phi_A \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi$, тому $\Phi \& \neg \Phi \models_{TF} \Psi \vee \neg \Psi$.

Приклад 7.2.9. $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \stackrel{R}{\neq}_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$.

Візьмемо $A \in R$ таку: $\Phi_A = \top$ та $\Psi_A = \perp$. Тоді $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = {}^V A$ та $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \emptyset$; тому неправильно $T(\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi)_A) \subseteq T(\Psi \vee \Phi \& \neg \Psi_A)$.

Приклад 7.2.10. $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$.

Для кожної $A \in P$ маємо $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi)_A \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$.

Теорема 7.2.4. Властивості контрапозиції для відношень наслідку:

- 1) $\Phi \models_{IR} \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{IR} \neg \Phi$;
- 2) $\Phi \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{TF} \neg \Phi$;
- 3) $\Phi \models_T \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_F \neg \Phi$ та $\Phi \models_F \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_T \neg \Phi$.

Властивості контрапозиції для відношень логічного наслідку:

- 1) $\Phi \models_{IR}^P \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{IR}^P \neg \Phi$;
- 2) $\Phi \models_{TF}^P \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{TF}^P \neg \Phi$ та $\Phi \models_{TF}^R \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_{TF}^R \neg \Phi$;
- 5) $\Phi \models_T^P \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_F^P \neg \Phi$ та $\Phi \models_F^P \Psi \Leftrightarrow \neg \Psi \models_T^P \neg \Phi$.

Приклад 7.2.11. Неправильними є такі твердження:

- 1) $\Phi \models_T^P \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_T \neg \Phi$;
- 2) $\Phi \models_F^P \Psi \Rightarrow \neg \Psi \models_F \neg \Phi$.

Справді, візьмемо $p, q, s \in Ps$ та інтерпретацію J :

$$F(q_J) \not\subseteq T(p_J) \cup F(p_J), T(q_J) \not\subseteq T(s_J) \cup F(s_J).$$

Тоді $\neg p \& p \models_T q$, $\neg q \models_T \neg p \vee p$, $q \models_F \neg s \vee s$, $\neg s \& s \not\models_F \neg q$.

Відношення логічного наслідку індукують відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації J задаємо за такою схемою:

$$\Phi \sim_* \Psi, \text{ якщо } \Phi \models_* \Psi \text{ та } \Psi \models_* \Phi.$$

Приклад 7.2.12. Для відношення $\sim_{TF}$ маємо:

$$\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J) \text{ та } F(\Phi_J) = F(\Psi_J).$$

Отже, $\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$, тобто Φ_J та Ψ_J – це один і той самий предикат.

Відношення логічної еквівалентності $\sim_{IR}, \sim_T, \sim_F, \sim_{TF}, \sim_{TF}^R$ визначаємо за такою схемою:

$$\Phi \sim_* \Psi, \text{ якщо } \Phi \models_* \Psi \text{ та } \Psi \models_* \Phi.$$

Приклад 7.2.13. $\Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \sim_T \Phi$;

неправильно $\Phi \vee \Psi \& \neg \Psi \sim_F \Phi$.

Маємо $T((\Phi \vee \Psi \& \neg \Psi)_A) = T(\Phi_A) \cup (T(\Psi_A) \cap F(\Psi_A)) = T(\Phi_A)$ для кожної $A \in P$.

Водночас для $B \in P$ такої, що $T(\Psi_B) = F(\Psi_B) = \emptyset$, маємо $F((\Phi \vee \Psi \& \neg \Psi)_B) = F(\Phi_B) \cap (F(\Psi_B) \cup T(\Psi_B)) = \emptyset$.

Приклад 7.2.14. $\Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \sim_F \Phi$;

неправильно $\Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi) \sim_T \Phi$.

Маємо $F((\Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi))_B) = F(\Phi_B) \cup (F(\Psi_B) \cap T(\Psi_B)) = F(\Phi_B)$ для кожної $B \in P$.

Водночас для $A \in P$ такої, що $T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \emptyset$, маємо $T((\Phi \& (\Psi \vee \neg \Psi))_A) = T(\Phi_A) \cap (T(\Psi_A) \cup F(\Psi_A)) = \emptyset$.

Теорема еквівалентності справджується для відношень $\sim_{TF}, \sim_{TF}^R, \sim_{IR}$:

Теорема 7.2.5. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$.

Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Використовуючи відношення логічної еквівалентності, можна описати основні семантичні властивості формул мови ЧКНЛ, пов'язані з реномінаціями та кванторами.

Приклад 7.2.15. Властивості формул мови ЧКНЛ, пов'язані з реномінаціями:

R) $R(\Phi) \sim_{TF} \Phi$ – елімінація тотожної реномінації;

- RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – згортка тотожної пари імен;
 RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $z \in v(\Phi)$;
 R $\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – R $\neg$ -дистрибутивність;
 R $\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$ – R $\vee$ -дистрибутивність;
 RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$ – згортка реномінацій.

Приклад 7.2.16. Традиційні властивості формул, пов'язані з кванторами:

- Q1) $\exists x \exists y \Phi \sim_{TF} \exists y \exists x \Phi$ та $\forall x \forall y \Phi \sim_{TF} \forall y \forall x \Phi$;
 Q2) $\neg \forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \neg \Phi$ та $\neg \exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \neg \Phi$;
 Q3) $\exists x \Phi \sim_{TF} \forall x \exists x \Phi$, $\exists x \Phi \sim_{TF} \exists x \exists x \Phi$; $\forall x \Phi \sim_{TF} \forall x \forall x \Phi$,
 $\forall x \Phi \sim_{TF} \exists x \forall x \Phi$;
 Q4) $\exists x \Phi \vee \exists x \Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi \vee \Psi)$ та $\forall x \Phi \& \forall x \Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi \& \Psi)$;
 Q5) $\exists x(\Phi \& \Psi) \models_{TF} \exists x \Phi \& \exists x \Psi$,
 проте не завжди $\exists x \Phi \& \exists x \Psi \models_{IR} \exists x(\Phi \& \Psi)$;
 Q6) $\forall x \Phi \vee \forall x \Psi \models_{TF} \forall x(\Phi \vee \Psi)$,
 проте не завжди $\forall x(\Phi \vee \Psi) \models_{IR} \forall x \Phi \vee \forall x \Psi$;
 Q7) $\exists y \forall x \Phi \models_{TF} \forall x \exists y \Phi$, проте не завжди $\forall x \exists y \Phi \models_{IR} \exists y \forall x \Phi$;
 Q8) не завжди $\Phi \models_{IR} \exists x \Phi$ та не завжди $\forall x \Phi \models_{IR} \Phi$.

Приклад 7.2.17. Властивості R $\exists$ -дистрибутивності:

R $\exists$ s) $R_u^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \sim_{TF} \exists x R_u^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ – проста R $\exists$ -дистрибутивність;

R $\exists$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi) \sim_{TF} \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^{\bar{y}}(\Phi)$ за умови $z \in V_T \setminus nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi))$ – R $\exists$ -дистрибутивність.

Поняття тавтології і тавтологічного наслідку для ЧКНЛ R-предикатів вводимо традиційно, аналогічно випадку ЧНКЛ (див. підрозд. 4.5).

Нормальні форми формул мови ЧКНЛ визначаємо аналогічно випадку ЧНКЛ, при цьому говоримо про *строгу* неістотність предметних імен. Теорема про зведення формул до нормальної форми переноситься на випадок ЧКНЛ. Те саме стосується поняття квазізамкненості формул.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Введені вище відношення логічного наслідку поширимо на пари множин формул. Спочатку задамо відношення наслідку між двома множинами формул при фіксованій інтерпретації J .

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$, $\Delta \subseteq Fr$. Введемо позначення

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_J) \text{ як } T^\wedge(\Gamma_J), \quad \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_J) \text{ як } F^\wedge(\Delta_J),$$

$$\bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_J) \text{ як } T^\vee(\Delta_J), \quad \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_J) \text{ як } F^\vee(\Gamma_J).$$

Δ є T -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_T \Delta$), якщо $T^\wedge(\Gamma_J) \subseteq T^\vee(\Delta_J)$.

Δ є F -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_F \Delta$), якщо $F^\wedge(\Delta_J) \subseteq F^\vee(\Gamma_J)$.

Δ є TF -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_{TF} \Delta$), якщо

$$T^\wedge(\Gamma_J) \subseteq T^\vee(\Delta_J) \text{ та } F^\wedge(\Delta_J) \subseteq F^\vee(\Gamma_J).$$

Δ є IR -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_{ID} \Delta$), якщо

$$T^\wedge(\Gamma_J) \cap F^\wedge(\Delta_J) = \emptyset.$$

Δ є DI -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_{DI} \Delta$), якщо

$$F^\vee(\Gamma_J) \cup T^\vee(\Delta_J) = \emptyset.$$

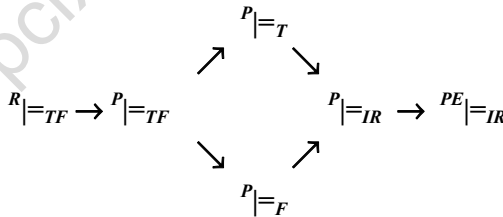
Відношення *логічного* наслідку для множин формул у семантиці α визначатимемо за схемою:

$$\Gamma \models_\alpha \Delta, \text{ якщо } \Gamma \models_J \Delta \text{ для кожної } J \in \alpha.$$

Теорема 7.2.6. Нехай інтерпретації J та ϑ дуальні. Тоді:

- 1) $\Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{DI} \Delta$ та $\Gamma \models_{DI} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} \Delta$;
- 2) $\Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta$ та $\Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$;
- 3) $\Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$.

Співвідношення між цими відношеннями такі самі, як між відношеннями для пар формул:



Для $\models_{IR}$ можна переносити формули з лівої частини логічного наслідку у праву, і навпаки.

Теорема 7.2.7. $\Gamma \models_{IR} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta$ та

$\Gamma \models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta$.

Водночас для $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{TF}^R$ такі перенесення робити не можна.

Приклад 7.2.15. Можливі такі ситуації:

1) $\neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \Phi$; $\Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \neg\Phi$;

2) $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$; $\Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\neg\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$.

Для п. 1 візьмемо $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = \emptyset, T(\Gamma_A) = \emptyset, T(\Delta_A) \neq \emptyset$.

Для п. 2 візьмемо $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = \emptyset, F(\Gamma_A) = \emptyset, F(\Delta_A) \neq \emptyset$.

Теорема 7.2.8. 1) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma^P \models_T \Delta$;

2) $\Gamma^P \models_F \Delta, \neg\Psi, \Psi$;

3) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma^P \models_{TF} \Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Приклад 7.2.16. $\Gamma \not\models_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$.

Справді, візьмемо $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = \emptyset, T(\Delta_A) = \emptyset, F(\Delta_A) \neq \emptyset, T(\Gamma_A) \neq \emptyset, F(\Gamma_A) = \emptyset$.

Приклад 7.2.17. $\neg\Phi, \Phi, \Gamma^R \not\models_{TF} \Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Візьмемо $T(\Phi_A) = F(\Phi_A) = T(\Gamma_A) = V_A, T(\Delta_A) = T(\Psi_A) = F(\Psi_A) = \emptyset$; тоді $\neg\Phi, \Phi, \Gamma^R \not\models_T \Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Розглянемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул.

Надалі $\models$ – одне з відношень $\models_{IR}, \models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{TF}^R$.

Приклад 7.2.18. Для всіх зазначених відношень маємо монотонність:

якщо $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, то $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$.

Приклад 7.2.19. Властивості, які гарантують наявність логічного наслідку.

C) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$ гарантовано для кожного з відношень.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку:

$$(CL) \Phi, \neg\Phi, \Gamma^P \models_T \Delta;$$

$$(CR) \Gamma^P \models_F \Delta, \Phi, \neg\Phi;$$

$$(CLR) \Phi, \neg\Phi, \Gamma^P \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi.$$

Покажемо тут CLR . Для кожної $A \in P$ маємо $T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) = \emptyset$ та $F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) = \emptyset$, звідки:

$$T(\Phi_A) \cap T(\neg\Phi_A) \cap T(\Gamma_A) = T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) \cap T(\Gamma_A) = \emptyset, \text{ що дає}$$

$$\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A \models_T \Delta, \Psi, \neg\Psi;$$

$$F(\Psi_A) \cap F(\neg\Psi_A) \cap F(\Delta_A) = F(\Psi_A) \cap T(\Psi_A) \cap F(\Delta_A) = \emptyset, \text{ що дає}$$

$$\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A \models_F \Delta, \Psi, \neg\Psi.$$

Для кожної $A \in P$ маємо $\Phi, \neg\Phi, \Gamma_A \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$, тому маємо $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 7.2.20. Властивості декомпозиції формул:

$$(\neg\neg_L) \neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta;$$

$$(\neg\neg_R) \Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi;$$

$$(\vee_L) \Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta \text{ та } \Psi, \Gamma \models \Delta;$$

$$(\vee_R) \Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi;$$

$$(\neg\vee_L) \neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta;$$

$$(\neg\vee_R) \Gamma \models \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi \text{ та } \Gamma \models \Delta, \neg\Psi.$$

Приклад 7.2.21. Для $\Gamma^P \models_{IR}$ додатково справджуються:

$$(\neg_L) \neg\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma^P \models_{IR} \Delta, \Phi;$$

$$(\neg_R) \Gamma^P \models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma^P \models_{IR} \Delta.$$

Проте для $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{TF}$ ці властивості неправильні (див. приклад 7.2.15).

Властивості спрощення та еквівалентних перетворень отримуюмо на основі наведених вище властивостей $R, RI, RU, RR, R\neg, R\vee, R\exists, R\exists$. Кожна така властивість R^* продукує чотири відповідні властивості $R^*_L, R^*_R, \neg R^*_L, \neg R^*_R$ для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення міститься у лівій чи правій частині цього відношення.

Приклад 7.2.22. Властивості, індуковані $R \vee$ та $R \exists$:

$$R \vee_L) \quad R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta;$$

$$R \vee_R) \quad \Gamma \models \Delta, R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi);$$

$$\neg R \vee_L) \quad \neg R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg(R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi)), \Gamma \models \Delta;$$

$$\neg R \vee_R) \quad \Gamma \models \Delta, \neg R_x^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg(R_x^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_x^{\bar{v}}(\Psi)).$$

$$R \exists_L) \quad R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_x^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi)).$$

$$R \exists_R) \quad \Gamma \models \Delta, R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_x^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi) \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi)).$$

$$\neg R \exists_L) \quad \neg R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists z R_x^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Gamma \models \Delta \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi)).$$

$$\neg R \exists_R) \quad \Gamma \models \Delta, \neg R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg \exists z R_x^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi) \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(R_x^{\bar{v}}(\exists y \Phi)).$$

Приклад 7.2.23. Властивості елімінації кванторів:

$$\exists_L) \quad \exists x \Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \exists x \Phi);$$

$$\neg \exists_R) \quad \Gamma \models \neg \exists x \Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta \text{ за умови}$$

$$z \in V_T \setminus nm(\Gamma, \Delta, \exists x \Phi);$$

$$\exists \vee_R) \quad \Gamma, Ey \models \exists x \Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \exists x \Phi, R_y^x(\Phi), \Delta;$$

$$\neg \exists \vee_L) \quad \neg \exists x \Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg \exists x \Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta.$$

Наведені властивості є семантичною основою побудови числень секвенційного типу, які формалізують описані вище відношення логічного наслідку для множин формул (див., зокрема, [12, 43]).

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення відношень $J \models_{IR}, J \models_T, J \models_F, J \models_{TF}, J \models_{TF}.$
2. Дайте визначення відношень $P \models_{IR}, P \models_T, P \models_F, P \models_{TF}, R \models_{TF}.$

3. Чому серед 20 відношень логічного наслідку в семантиках R, P, T, TS є лише п'ять різних невироджених відношень: $P|_{=IR}, P|_{=T}, P|_{=F}, P|_{=TF}, R|_{=TF}$?

4. Зобразіть співвідношення між введеними відношеннями логічного наслідку.

5. Чому відношення $A|_{=IR}$ нетранзитивне?

6. Наведіть властивості контрапозиції для відношень наслідку та логічного наслідку.

7. Сформулюйте теорему еквівалентності; для яких відношень вона формулюється?

8. Наведіть властивості формул, пов'язані з реномінаціями.

9. Наведіть традиційні властивості формул, пов'язані із кванторами.

10. Наведіть властивості $R\exists$ -дистрибутивності:

11. Дайте визначення відношень $J|_{=IR}, J|_{=T}, J|_{=F}, J|_{=TF}, J|_{=TF}$ для пар множин формул.

12. Сформулюйте теорему 7.2.6 про дуальні інтерпретації.

13. Для яких відношень логічного наслідку можна переносити формули з лівої частини у праву і навпаки, а для яких таке перенесення робити не можна?

14. Наведіть властивості, які гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку.

15. Наведіть властивості декомпозиції формул для відношень $P|_{=T}, P|_{=F}, P|_{=TF}, R|_{=TF}$.

16. Наведіть властивості декомпозиції формул для відношення $P|_{=IR}$.

17. Опишіть властивості спрощення та еквівалентних перетворень.

18. Наведіть властивості елімінації кванторів.

Вправи

1. Доведіть: $TS|_{=TF} = TS|_{=T} = TS|_{=F} = TS|_{=IR} = TS|_{=DI} = TS|_{=}$.

2. Нехай інтерпретації A та B дуальні. Доведіть:

1) $\Phi_A|_{=T} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|_{=F} \Psi$ та $\Phi_A|_{=F} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|_{=T} \Psi$;

2) $\Phi_A|_{=IR} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|_{=DI} \Psi$ та $\Phi_A|_{=DI} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|_{=IR} \Psi$;

3) $\Phi_A|_{=TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|_{=TF} \Psi$.

3. Доведіть транзитивність відношення $\models_{IR}^P$ (теорема 7.2.3).
4. Доведіть:
 - 1) $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_T \Psi$; $\Phi \not\models_T \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$;
 - 2) $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \not\models_F \Psi$; $\Phi \models_F \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$;
 - 3) $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{IR} \Psi$; $\Phi \models_{IR} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$.
5. Доведіть: $\Phi \& (\Phi \rightarrow \Psi) \models_{TF} \Psi \vee \Phi \& \neg \Psi$ для кожної $A \in P$.
6. Доведіть теорему 7.2.4.
7. Доведіть: $\Phi \alpha_{\sim*} \Psi \Leftrightarrow \Phi \mathcal{J}_{\sim*} \Psi$ для кожної $J \in \alpha$.
8. Доведіть, навівши приклади, що для $\sim_T^P$ та $\sim_F^P$ теорема еквівалентності неправильна.
9. Доведіть:
 - 1) $\Gamma \models_T \Delta, \Phi \Rightarrow \neg \Phi, \Gamma \models_T \Delta$;
 - 2) $\Gamma \models_T \Delta, \neg \Phi \Rightarrow \Phi, \Gamma \models_T \Delta$;
 - 3) $\Phi, \Gamma \models_F \Delta \Rightarrow \Gamma \models_F \Delta, \neg \Phi$;
 - 4) $\neg \Phi, \Gamma \models_F \Delta \Rightarrow \Gamma \models_F \Delta, \Phi$.
10. Доведіть, що можливі такі ситуації:
 - 1) $\neg \Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma \not\models_{TF} \Delta, \Phi$;
 - 2) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg \Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_{TF} \Delta$;
 - 3) $\neg \Phi, \Gamma^R \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma^R \not\models_{TF} \Delta, \Phi$;
 - 4) $\Gamma^R \models_{TF} \Delta, \neg \Phi$ та $\Phi, \Gamma^R \not\models_{TF} \Delta$.
11. Обґрунтуйте властивості, які гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку.
12. Сформулюйте у явному вигляді властивості, індуковані R, RI, RU, RR, R $\neg$, R $\exists$ s.
13. Доведіть властивості елімінації кванторів.

8. НЕТРАДИЦІЙНІ ЛОГІКИ

Традиційна логіка предикатів є істинніснозначною із 2-елементною множиною $\{T, F\}$ істиннісних значень. Вона базується на такому фундаментальному принципі: *значення складного висловлення (предиката) залежить лише від значень його компонент, а не від їхнього сенсу*. Цей принцип формалізується у вигляді *принципу заміни еквівалентних (заміни рівних)*. Це означає можливість заміни еквівалентних (рівних), незважаючи на контексти. Принцип може не виконуватись для логік інтенціонального типу, зокрема модальних.

Розглянемо (у стилі Б. Рассела) приклад твердження, яке здається істинним:

Навіть першокласник Вовочка знає, що $1+1=2$.

Маємо $\int_0^2 x dx = 2$, проте заміна рівних дає не зовсім перекон-

ливе твердження:

Навіть першокласник Вовочка знає, що $1+1 = \int_0^2 x dx$.

Принцип заміни еквівалентних засвідчує *екстенціональний* характер традиційної логіки.

Важливими особливостями традиційної логіки є *рефлексивність*, *транзитивність* та *монотонність* логічного наслідку (аксіоматика логічного наслідку за Тарським). Водночас ці характерні особливості притаманні як класичній, так і низці некласичних логік.

Класична логіка розглядає ситуації як незмінні, вона перестав працювати, коли ми цікавимося не істинністю в конкретній ситуації, а розвитком понять. Вона мало що дає, коли треба формалізувати незнання. Виражаючись (див. [8]) дещо метафорично, класична логіка є логікою конкретного знання та віри, а некласична – це логіка побудови, зміни знання і сумніву. Це мотивує необхідність вивчення нетрадиційних, некласичних логік.

У цьому посібнику стисло розглянемо такі найпоширеніші типи нетрадиційних логік, як багатозначні, інтуїціоністські та модальні.

8.1. Багатозначні логіки

Традиційні логіки є двозначними в тому розумінні, що множина істиннісних значень двоелементна, її позначаємо як $\{T, F\}$. Багатозначні логіки вперше з'явилися сто років тому: у 1920 р. Я. Лукасевич запропонував [40] тризначні логіки для опису модальних висловлень, третє істиннісне значення ним трактувалось як "можливо", "нейтрально", "невизначено". Зазначимо, що опис модальностей за допомогою тризначної логіки виявився не зовсім адекватним, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами. Найважливішим є той факт, що Я. Лукасевич довів саму *можливість* існування неklasичних логік, що за значущістю сумірне з відкриттям неевклідових геометрій.

Я. Лукасевич розвинув тризначні логіки до чотиризначних та багатозначних. Він пов'язав ідею багатозначних логік з теорією імовірності, коли істиннісні значення можуть братися з неперервного інтервалу $[0, 1]$. Цей підхід згодом зумовив виникнення імовірнісних, можливісних та нечітких логік.

У 1921 р. Е. Пост запропонував (див. [4, 14]) n -значні логіки. На відміну від підходу Я. Лукасевича, він зробив це цілком формально, без семантичного обґрунтування.

Найвідомішими із тризначних є сильна та слабка логіки С. Кліні [5], запропоновані для використання в теорії рекурсії. Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр [3], мовах табличних баз даних [15]. Відома також (див. [4]) тризначна логіка Бочвара (логіка абсурду), де третє істиннісне значення трактується як "беззмістовно". Вона фактично є слабкою логікою Кліні, розширеною зовнішніми логічними зв'язками, у яких для результатів ототожнено хибність і беззмістовність.

Нехай $Bool = \{b_1, \dots, b_n\}$ – n -елементна множина істиннісних значень. Функцію вигляду $P : D \rightarrow Bool$ назовемо n -предикатом на множині D . Якщо $Bool = \{T, F\}$, то маємо 2-предикат – традиційний двозначний предикат.

Зауважимо, що тут ми використовуємо термін " n -предикат", а не " n -значний предикат" для того, щоб не змішувати поняття n -значного предиката як багатозначної функції, що на кожному даному може набувати до n значень, із поняттям предиката як

однозначної функції з n -елементною множиною значень (напр., розглянуті нами R -предикати – це неоднозначні 2-предикати).

Тризначна логіка Лукасевича. У нашій термінології – це логіка тотальних однозначних 3-предикатів. У логічній системі Лукасевича було три класи висловлень – істинні, хибні, нейтральні. Позначаючи третє істиннісне значення як $\perp$, отримуємо такі визначення логічних зв'язок тризначної логіки Лукасевича:

$$(\neg_L P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T, \\ \perp, & \text{якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(P \vee_L Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_L Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_L Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T \text{ або } P(d) = Q(d), \\ F, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Еквіваленцію $\leftrightarrow_L$ тлумачимо як похідну зв'язку: $P \leftrightarrow_L Q$ означає $(P \rightarrow_L Q) \&_L (Q \rightarrow_L P)$.

Лукасевичеві імплікація та еквіваленція на парі $(\perp, \perp)$ відрізняються від імплікації та еквіваленції розглянутої нами логіки двозначних часткових предикатів:

$$P(d) = Q(d) = \perp \Rightarrow (P \rightarrow_L Q)(d) = T \text{ та } (P \leftrightarrow_L Q)(d) = T, \\ \text{проте } (P \rightarrow Q)(d) = \perp \text{ та } (P \leftrightarrow_L Q)(d) = \perp.$$

Аргументувати це можна таким чином. При трактуванні $\perp$ як проміжного між F та T істиннісного значення імплікація $A \rightarrow_L B$ як формалізація логічного наслідку має бути істинною, якщо істинність B не менша за істинність A . При цьому трактуванні вже неможливе таке стандартне подання імплікації через диз'юнкцію та заперечення: $P \rightarrow_L Q = \neg_L P \vee_L Q$.

Приклад 8.1.1. У логіці часткових 2-предикатів можна ввести зв'язки, аналогічні $\rightarrow_L$ та $\leftrightarrow_L$, коли $\perp$ трактуємо як "невизначеність". Проте такі зв'язки вже не будуть монотонними.

Багатозначні логіки Поста. Е. Пост запропонував свої багатозначні логіки тотальних однозначних предикатів майже одночасно з Лукасевичем, проте зробив це більш формально, не беручи до уваги філософські та власне логічні мотиви.

Логічні функції (предикати) n -значної логіки Поста набувають значення у множині $\{1, 2, \dots, n\}$. Диз'юнкція й кон'юнкція задаються так, як у багатозначній логіці Я. Лукасевича:

$$(P \vee_P Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$

$$(P \&_P Q)(d) = \min(P(d), Q(d)).$$

Водночас Пост запропонував два варіанти заперечення – традиційне $\neg_P$ (як у Лукасевича) та циклічне $\sim_P$.

Приклад 8.1.2. Традиційне $\neg_P$ та циклічне $\sim_P$ заперечення:

$$(\neg_P P)(d) = n+1 - P(d);$$

$$(\sim_P P)(d) = \begin{cases} P(d)+1, & \text{якщо } P(d) < n, \\ 1, & \text{якщо } P(d) = n. \end{cases}$$

Приклад 8.1.3. Імплікацію у n -значній логіці визначають так:

$$(P \rightarrow_P Q)(d) = \min(n, n - P(d) + Q(d)).$$

Кон'юнкція $\&_P$, диз'юнкція $\vee_P$ та заперечення $\neg_P$ пов'язані законами де Моргана.

Сильна тризначна логіка Кліні. До найважливіших систем багатозначної логіки належать сильна та слабка тризначні логіки Кліні. Істиннісні значення таких логік позначаємо $T, F, \perp$.

Розглянемо сильну тризначну логіку Кліні тотальних однозначних 3-предикатів.

Задамо сильні клінієві зв'язки $\neg_K, \vee_K, \&_K, \rightarrow_K$:

$$(\neg_K P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T, \\ \perp, & \text{якщо } P(d) = \perp. \end{cases}$$

$$(P \vee_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \rightarrow_K Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = F \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Еквіваленція $\leftrightarrow_K$ визначається традиційно: $P \leftrightarrow_K Q$ означає $(P \rightarrow_K Q) \&_K (Q \rightarrow_K P)$.

Визначення логічних зв'язок $\neg_K, \vee_K, \&_K$ збігаються з визначеннями логічних зв'язок $\neg_L, \vee_L, \&_L$ тризначної логіки Лукасевича, проте $\rightarrow_K$ та $\leftrightarrow_K$ задаються не так само, як $\rightarrow_L$ та $\leftrightarrow_L$.

Приклад 8.1.3. Для сильних клінієвих зв'язок маємо:

$$P \&_K Q = \neg_K (\neg_K P \vee_K \neg_K Q);$$

$$P \rightarrow_K Q = \neg_K P \vee_K Q.$$

За базові пропозиційні композиції сильної тризначної логіки Кліні можна взяти $\neg_K$ та $\vee_K$, тоді композиції $\&_K, \rightarrow_K, \leftrightarrow_K$ є похідними.

Слабка тризначна логіка Кліні. Розглянемо слабку тризначну логіку Кліні тотальних однозначних 3-предикатів. На відміну від сильної тризначної логіки Кліні, значення композицій слабкої логіки вважається невизначеним, якщо хоча б один аргумент невизначений.

Слабкі клінієві зв'язки $\vee_W$ та $\&_W$ задамо так:

$$(P \vee_W Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) = T \text{ або } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) = F \text{ та } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \&_W Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) = T \text{ та } Q(d) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow, Q(d) \downarrow \text{ та } P(d) = F \text{ або } Q(d) = F, \\ \perp & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Заперечення $\neg_W$ задається так само як $\neg_K$.

Приклад 8.1.4. Імплікація $\rightarrow_W$ та еквіваленція $\leftrightarrow_W$ є похідними й визначаються так:

$$P \rightarrow_W Q \text{ задається як } \neg_W P \vee_W Q;$$

$$P \leftrightarrow_W Q \text{ задається як } (P \rightarrow_W Q) \&_W (Q \rightarrow_W P).$$

Неважко переконатись, що сильні клінієві зв'язки є монотонними розширеннями відповідних слабких клінієвих зв'язок.

Чотиризначна логіка Белнапа. Дослідження чотиризначних логік започаткував ще Я.Лукасевич. Проте на особливу увагу серед чотиризначних заслуговує логіка Белнапа [30]. Це зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією. Логіка Белнапа має сильний епістемічний відтінок, вона є зручним засобом формалізації відповідей на поставлені інформаційній системі запитання, якщо ця система містить неповні та суперечливі дані. При описі епістемічного стану системи треба брати до уваги як можливу суперечливість інформації, так і її відсутність.

Згідно з Белнапом, інформаційна система працює в режимі запитання-відповідь. При цьому інформаційні повідомлення, які система отримує з різних джерел, можуть бути підтверджені чи спростовані. Тому необхідно, щоб система не ігнорувала суперечливу інформацію і була в змозі продовжити в розумний спосіб функціонування навіть тоді, коли виявлено суперечності. Традиційна двозначна логіка в таких ситуаціях не працює, адже для неї наявність суперечності руйнує систему.

Отже, можна виділити чотири випадки.

1. Отримане системою повідомлення було підтверджено і ніколи не було спростовано. Таке повідомлення вважається *істинним* та позначається як *T*.

2. Отримане системою повідомлення було спростовано та ніколи не було підтверджено. Таке повідомлення вважається *хибним* та позначається як *F*.

3. Отримане системою повідомлення було як підтверджено, так і спростовано (ситуація дуже типова, напр., експериментальні результати різних груп можуть істотно відрізнятися; окрім того, людині властиво помилятися). Таке повідомлення можна вважати *парадоксальним*, позначаємо його як *TF* (у Белнапа – *Both*).

4. Система не має ні підтвердження, ні спростування повідомлення, про його істиннісне значення нічого не відомо. Тоді істиннісне значення повідомлення *невизначене*, його позначаємо як $\perp$ (у Белнапа – *None*).

Таким чином, отримуємо логіку із множиною істиннісних значень $\{T, F, \perp, TF\}$. Відповідно до змістів цих значень Белнап отримав [30] єдине продовження класичних логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, $\&$ із $\{T, F\}$ на $\{T, F, \perp, TF\}$.

Приклад 8.1.5. Визначення логічних зв'язок логіки Белнапа $\neg_B$, $\vee_B$ та $\&_B$ подамо традиційно, у вигляді таблиць істинності.

P	T	F	$\perp$	TF
$\neg_B$	F	T	$\perp$	TF

$P \vee_B Q$	T	F	$\perp$	TF
T	T	T	T	T
F	T	F	$\perp$	TF
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
TF	T	TF	T	TF

$P \&_B Q$	T	F	$\perp$	TF
T	T	F	$\perp$	TF
F	F	F	F	F
$\perp$	$\perp$	F	$\perp$	T
TF	TF	F	T	TF

Приклад 8.1.6. Імплікація $\rightarrow_B$ та еквіваленція $\leftrightarrow_B$ логіки Белнапа є похідними:

$P \rightarrow_B Q$ задається як $\neg_B P \vee_B Q$;

$P \leftrightarrow_B Q$ задається як $(P \rightarrow_B Q) \&_B (Q \rightarrow_B P)$.

Логіка Белнапа – це чотиризначна логіка тотальних однозначних предикатів. Водночас її можна трактувати як тризначну

логіку *часткових* однозначних предикатів із множиною істиннісних значень $\{T, F, TF\}$.

Зауважимо, що використання тризначних логік тотальних однозначних предикатів, зокрема сильної логіки Кліні, для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією здається неадекватним. Справді, $\perp$ та TF ототожнювати не можна, адже вони мають різний статус.

Те саме стосується двозначної логіки часткових однозначних предикатів, яка відповідає сильній логіці Кліні.

Нескінченнозначні логіки. Якщо множина істиннісних значень нескінченна, то логіку називають *нескінченнозначною*. Нескінченнозначними є такі спеціальні логіки, як імовірнісні, можливісні, нечіткі. Для нескінченнозначних *неперервних* логік множиною істиннісних значень є інтервал $[a, b]$. Без обмежень загальності таким інтервалом може бути $[0, 1]$.

Приклад 8.1.7. Логічні зв'язки $\neg_c, \vee_c, \&_c, \rightarrow_c$ неперервної логіки задаються так:

$$(\neg_c P)(d) = 1 - P(d);$$

$$(P \vee_c Q)(d) = \max(P(d), Q(d));$$

$$(P \&_c Q)(d) = \min(P(d), Q(d));$$

$$(P \rightarrow_c Q)(d) = \max(1 - P(d), Q(d)).$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке n -предикат на множині D ?
2. Опишіть логічні зв'язки тризначної логіки Лукасевича.
3. У чому полягає відмінність лугасевичевих $\rightarrow_L$ та $\leftrightarrow_L$ від імплікації та еквіваленції логіки часткових 2-предикатів?
4. Дайте визначення логічних зв'язок n -значної логіки Поста.
5. Опишіть різновиди заперечення в n -значній логіці Поста.
6. Дайте визначення логічних зв'язок сильної тризначної логіки Кліні.
7. Дайте визначення логічних зв'язок слабкої тризначної логіки Кліні.

8. Як трактуються істиннісні значення в чотиризначній логіці Белнапа?

9. Дайте визначення логічних зв'язок логіки Белнапа.

10. Дайте визначення логічних зв'язок неперервної логіки.

Вправи

1. З'ясуйте співвідношення між зв'язками $\neg_L$, $\vee_L$, $\&_L$, $\rightarrow_L$ тризначної логіки Лукасевича.

2. Доведіть, що зв'язки n -значної логіки Поста $\&_P$, $\vee_P$ та $\neg_P$ пов'язані законами де Моргана.

3. Дайте явні визначення зв'язок $\rightarrow_W$ та $\leftrightarrow_W$ слабкої тризначної логіки Кліні.

4. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_W$, $\vee_W$ та $\&_W$ слабкої тризначної логіки Кліні.

5. Дайте визначення зв'язок $\rightarrow_B$ та $\leftrightarrow_B$ логіки Белнапа у вигляді таблиць істинності.

6. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_B$, $\vee_B$ та $\&_B$ логіки Белнапа.

7. З'ясуйте, чи пов'язані законами де Моргана зв'язки $\neg_c$, $\vee_c$ та $\&_c$ неперервної логіки.

8.2. Інтуїціоністська логіка

Криза основ математики на межі XIX–XX ст., зумовлена відкриттям парадоксів теорії множин, спонукала вчених шукати шляхи виходу з цього стану. Один з таких шляхів запропонував на початку XX ст. голландський математик Л. Брауер. Він стверджував, що закони математики не мають ні абсолютного, ні апріорного характеру. Ці закони є узагальненням роботи зі скінченними множинами стійких у часі об'єктів, тому їх поширення на нескінченні множини об'єктів неадекватне. Отже, необхідно або цілком відмовитися від нескінченних множин, що не зовсім розумно, або перейти до нової логіки, інтуїтивно зрозумілої. Така логіка має описувати математичні твердження не як абстрактні істину чи фальш, а як твердження про можливість виконання де-

якої побудови. Математичне доведення має давати таку побудову та її обґрунтування.

Такі методи, що дають побудову, Брауер назвав *ефективними*, а запропоновану ним логіку й математику – *інтуїціоністськими*.

Перші формальні моделі інтуїціоністської логіки ввів А. Гейтінг – учень Л. Брауера. Згодом з'явилися семантичні моделі (інтерпретації) інтуїціоністської логіки.

Для інтуїціоністської логіки не діють закон виключеного третього і пов'язані з ним закони де Моргана, закон зняття подвійного заперечення. Пропозиційні зв'язки $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$ тут незалежні, проте еквіваленція подається через імплікацію та кон'юнкцію: $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$. Квантори $\exists x$ та $\forall x$ теж незалежні.

Мова інтуїціоністської логіки. Розглянемо інтуїціоністську логіку пропозиційного рівня – *інтуїціоністську пропозиційну логіку* (ІПЛ). Задамо синтаксис мови ІПЛ.

Алфавіт мови: символи логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$; множина Ps пропозиційних символів.

Множину формул мови ІПЛ позначимо Fp . Індуктивне визначення формули мови ІПЛ:

- 1) кожний $A \in Ps$ є формулою;
- 2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\&\Phi\Psi$, $\rightarrow\Phi\Psi$ – формули.

Далі розглянемо *чисту першопорядкову інтуїціоністську логіку предикатів* (ІПП).

Задамо синтаксис мови ІПП.

Алфавіт мови складається з таких символів:

- предметні імена (змінні) $x, y, z, \dots$;
- предикатні символи (ПС) $p_0, p_1, p_2, \dots$ заданої арності;
- символи логічних операцій $\neg, \vee, \&, \rightarrow$ та $\exists x, \forall x$.

Множина Ps предикатних символів – це *сигнатура* мови ІПП.

Атомарна формула мови ІПП – це вираз вигляду $px_1 \dots x_n$, де p – n -арний ПС, $x_1, \dots, x_n$ – предметні імена (змінні).

Дамо індуктивне визначення формули мови ІПП:

- 1) кожна атомарна формула є формулою;
- 2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\&\Phi\Psi$, $\rightarrow\Phi\Psi$ – формули;

3) якщо Φ – формула, x – предметне ім'я, то $\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi$ – формули.

Множину формул мови ІЛП позначимо Fr .

Реляційна семантика інтуїціоністської логіки. На відміну від класичної логіки, яка є логікою конкретного знання, інтуїціоністська логіка передбачає накопичення знань. На цій ідеї Брауера базуються найпопулярніші семантичні моделі інтуїціоністської логіки – *моделі можливих світів*, або *реляційні моделі*. Моделі можливих світів були започатковані Л. Брауером і А. Гейтінгом, далі розвинуті С. Кріпке та Я. Хінтіккою. Вони також успішно використовуються для описання семантики модальних логік.

Моделлю можливих світів інтуїціоністської логіки, або *реляційною інтуїціоністською моделлю*, назвемо трійку $M = (S, \triangleright, I)$.

Тут S – множина світів, $\triangleright$ – бінарне відношення на S , I – відображення інтерпретації атомарних формул на світах. Відношення $\triangleright$ є відношенням часткового порядку на S .

Задамо для випадку ІЛІ відображення інтерпретації: $I : Ps \times S \rightarrow \{T, F\}$.

Світи узгоджуються з відношенням $\triangleright$ так. Якщо $\alpha \triangleright \beta$ та $I(A, \alpha) = T$, то $I(A, \beta) = T$. Це означає: при русі світами за відношенням $\triangleright$ істинність атомарних формул *не може* перейти у фальш.

Відображення $I : Ps \times S \rightarrow \{T, F\}$ індуктивно продовжимо до відображення $J : Fr \times S \rightarrow \{T, F\}$:

- 1) $J(A, \alpha) = I(A, \alpha)$ для всіх $A \in Ps$;
- 2) $J(\Phi \vee \Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow J(\Phi, \alpha) = T$ або $J(\Psi, \alpha) = T$;
- 3) $J(\Phi \& \Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow J(\Phi, \alpha) = T$ та $J(\Psi, \alpha) = T$;
- 4) $J(\neg \Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $J(\Phi, \beta) = F$;
- 5) $J(\Phi \rightarrow \Psi, \alpha) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо: якщо $J(\Phi, \beta) = T$, то $J(\Psi, \beta) = T$.

Те, що $J(\Phi, \alpha) = T$, тобто формула Φ істинна у світі α , позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ істинна в реляційній моделі M (позн. $M \models \Phi$), якщо для всіх $\alpha \in S$ маємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ інтуїціоністськи істинна (позн. $\models \Phi$), якщо для кожної реляційної моделі M маємо $M \models \Phi$.

Для ІЛП світами є АС заданої сигнатури σ , яка визначає мову такої логіки.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $I: \bigcup_{\alpha \in S} (Ps \times S \rightarrow Pr^\alpha)$.

Світи узгоджуються з відношенням $\triangleright$ таким чином:

- нехай $\alpha = (A, \sigma)$, $\beta = (B, \sigma)$ та $\alpha \triangleright \beta$, тоді $A \subseteq B$;
- нехай $p \in Ps$; якщо $\alpha \triangleright \beta$ та $p_\alpha(a_1, \dots, a_n) = T$, то $p_\beta(a_1, \dots, a_n) = T$.

Отже, при русі світами за відношенням $\triangleright$ їхні носії можуть тільки розширюватися, при цьому істинність атомарних формул не може перейти у фальш.

Значення формули у світі α визначаємо індуктивно:

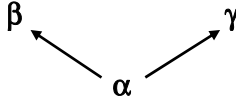
- 1) для атомарних формул $p_\alpha(d) = T$ означає $I(p, \alpha)(d) = T$;
- 2) $(\Phi \vee \Psi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow \Phi_\alpha(d) = T$ або $\Psi_\alpha(d) = T$;
- 3) $(\Phi \& \Psi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow \Phi_\alpha(d) = T$ та $\Psi_\alpha(d) = T$;
- 4) $(\neg \Phi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\Phi_\beta(d) = F$;
- 5) $(\Phi \rightarrow \Psi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \triangleright \beta$, маємо: якщо $\Phi_\beta(d) = T$, то $\Psi_\beta(d) = T$;
- 6) $(\exists x \Phi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow$ для деякого $a \in A$ маємо $\Phi_\alpha(d \nabla x \mapsto a) = T$;
- 7) $(\forall x \Phi)_\alpha(d) = T \Leftrightarrow$ для всіх β таких, що $\alpha \triangleright \beta$, для всіх $a \in B$ маємо $\Phi_\beta(d \nabla x \mapsto a) = T$.

Істинність формули Φ у світі α позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ істинна в реляційній моделі M (позн. $M \models \Phi$), якщо для всіх $\alpha \in S$ маємо $\alpha \models \Phi$.

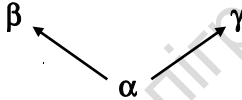
Формула Φ мови сигнатури σ інтуїціоністськи істинна (позн. $\models \Phi$), якщо для кожної реляційної моделі M зі світами сигнатури σ маємо $M \models \Phi$.

Приклад 8.2.1. Покажемо, що формула $A \vee \neg A$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель M таку, що $M \not\models A \vee \neg A$.



Задамо $I(A, \alpha) = F$, $I(A, \beta) = T$, $I(A, \gamma) = F$. Тоді неправильно $\alpha \models A$. Для правильності $\alpha \models \neg A$ необхідно $\alpha \not\models A$, $\gamma \not\models A$, $\beta \not\models A$. Однак $I(A, \beta) = T$, тому $\beta \models A$. Отже, неправильно $\alpha \models \neg A$, звідки $\alpha \not\models A \vee \neg A$, тому $M \not\models A \vee \neg A$.

Приклад 8.2.2. Покажемо, що формула $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель M таку, що $M \not\models (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.



Задамо $I(A, \alpha) = F$, $I(B, \alpha) = F$, $I(A, \beta) = T$, $I(B, \beta) = F$, $I(A, \gamma) = F$, $I(B, \gamma) = T$. Тоді маємо: $\beta \models A$, $\beta \not\models B$, $\gamma \models B$, $\gamma \not\models A$. Тепер, згідно з $\alpha \triangleright \beta$, маємо $\alpha \not\models A \rightarrow B$, а згідно з $\alpha \triangleright \gamma$, тоді $\alpha \not\models B \rightarrow A$. Отже, $\alpha \not\models (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$, тому $M \not\models (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

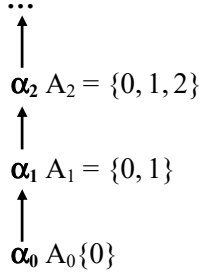
Приклад 8.2.3. Покажемо, що формула $\neg\neg A \rightarrow A$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель M таку, що $M \not\models \neg\neg A \rightarrow A$.



Задамо $I(A, \alpha) = I(A, \beta) = I(A, \gamma) = F$, $I(A, \delta) = T$. Тоді внаслідок $\beta \triangleright \gamma \triangleright \delta$ маємо $I(\neg A, \gamma) = F$ та $I(\neg\neg A, \beta) = T$, тому згідно з $\alpha \triangleright \beta$ та $I(A, \beta) = F$ маємо $I(\neg\neg A \rightarrow A, \alpha) = F$.

Звідси отримуємо $\alpha \models \neg\neg A \rightarrow A$, тому $\mathbf{M} \models \neg\neg A \rightarrow A$.

Приклад 8.2.4. Задамо $\mathbf{M}$ таку, що $\mathbf{M} \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.



Для кожного α_n його носій – це $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$.

Задамо $P_{\alpha_n}(k) = T$ для всіх $k < n$ та $P_{\alpha_n}(n) = F$.

Маємо $P_{\alpha_0}(0) = F$; але $\neg P_{\alpha_0}(0) = T$ означає $P_{\alpha_n}(0) = F$ для всіх n , що неправильно, тому $\neg P_{\alpha_0}(0) = F$. Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_0}(0) = F$.

Маємо $P_{\alpha_1}(0) = F$; але $\neg P_{\alpha_1}(1) = T$ означає $P_{\alpha_n}(1) = F$ для всіх $n \geq 1$, що неправильно, тому $\neg P_{\alpha_1}(1) = F$. Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_1}(1) = F$.

Продовжуючи, отримуємо $(P \vee \neg P)_{\alpha_2}(2) = F$ тощо.

Отже, $(P \vee \neg P)_{\alpha_n}(n) = F$ для кожного α_n , тому $(\forall x(P(x) \vee \neg P(x)))_{\alpha_n} = F$ для кожного α_n . Звідси для кожного α_n маємо $\alpha_n \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, тому $\mathbf{M} \models \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

Зауважимо, що у класичній логіці $\models \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$. Це знову підтверджує, що в інтуїціоністській логіці є формули, які суперечать формулам класичної логіки.

Інтуїціоністські числення. Інтуїціоністські числення гільбертівського типу та генценівського (секвенційного) типу розг-

лянуто, зокрема, у [5, 8]. Стисло опишемо лише чисте інтуїціоністське числення предикатів (ЧІЧП).

Приклад 8.2.5. Множина аксіом ЧІЧП визначається такими схемами аксіом:

- A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
- A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
- A3) $A \& B \rightarrow A$;
- A4) $A \& B \rightarrow B$;
- A5) $A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$;
- A6) $A \rightarrow A \vee B$;
- A7) $B \rightarrow A \vee B$;
- A8) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
- A9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$;
- AI) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- AQ1) $A \rightarrow \exists x A$;
- AQ2) $\forall x A \rightarrow A$.

Множина правил виведення ЧІЧП:

MP) $A, A \rightarrow B \vdash B$ – *modus ponens*;

ПЄ) $A \rightarrow B \vdash \exists x A \rightarrow B$, якщо x не вільна у B , – правило $\exists$ -введення;

ПВ) $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \forall x B$, якщо x не вільна в A , – правило $\forall$ -введення.

Кожна теорема ЧІЧП є теоремою класичного числення предикатів, але зворотне неправильне.

Приклад 8.2.6. У ЧІЧП не можна вивести $\neg\neg A \rightarrow A$, $A \vee \neg A$, але можна вивести $A \rightarrow \neg\neg A$.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність підходу Брауера до побудови інтуїціоністської логіки?
2. Які закони класичної логіки не діють для інтуїціоністської логіки?

3. Опишіть синтаксис мови інтуїціоністської пропозиційної логіки (ІПЛ).

4. Опишіть синтаксис мови інтуїціоністської логіки предикатів (ІЛП).

5. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) інтуїціоністської логіки?

6. Як задається відображення інтерпретації для випадку ІПЛ?

7. Як задається відображення інтерпретації для випадку ІЛП?

8. Що означає узгодженість світів з відношенням $\triangleright$ для випадку ІПЛ?

9. Як задається значення формули у світі α для випадку ІПЛ?

10. Що є світами реляційної моделі для випадку ІПЛ?

11. Що означає узгодженість світів з відношенням $\triangleright$ для ІЛП?

12. Як задається значення формули у світі α для випадку ІЛП?

13. Як визначається істинність формули в реляційній моделі інтуїціоністської логіки?

14. Дайте визначення інтуїціоністськи істинної формули для випадків ІПЛ та ІЛП.

15. Що таке контрмодель для формули інтуїціоністської логіки?

16. Наведіть приклади тавтологій, які не є інтуїціоністськи істинними.

17. Наведіть приклади всюди істинних формул, які не є інтуїціоністськи істинними.

Вправи

1. Побудуйте реляційну модель M інтуїціоністської логіки таку:

1) $M \models (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$;

2) $M \models (B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$;

3) $M \models (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \vee B$;

4) $M \models (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

5) $M \models (\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$;

6) $M \models (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg \neg B \rightarrow A)$;

7) $M \models ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;

8) $M \models \neg(A \& B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$;

9) $M \models (A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$;

10) $M \models (A \leftrightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C) \vee (A \leftrightarrow C)$.

2. Побудуйте реляційну модель $\mathbf{M}$ інтуїціоністської логіки таку:

$$\mathbf{M} \models (A_1 \leftrightarrow A_2) \vee (A_1 \leftrightarrow A_3) \vee \dots \vee (A_1 \leftrightarrow A_n) \vee \dots \vee (A_{n-1} \leftrightarrow A_n).$$

Зауважимо, що ця формула – тавтологія класичної логіки. Це засвідчує, що інтуїціоністська логіка не може задаватися жодною скінченною множиною істиннісних значень.

3. Побудуйте реляційну модель $\mathbf{M}$ інтуїціоністської логіки таку:

$$\mathbf{M} \models \neg \forall x P(x) \text{ та } \mathbf{M} \not\models \exists x P(x).$$

4*. Побудуйте в ЧЧП виведення таких формул:

1) $A \rightarrow \neg \neg A$;

1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$;

3) $\neg \neg (A \vee \neg A)$;

4) $\neg \neg (\neg \neg A \rightarrow A)$;

5) $\neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$;

6) $\neg \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$.

9. МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ

Традиційні логіки орієнтовані на опис одного конкретного стану світу. Якщо світ змінюється та розвивається, то для його опису доцільно використовувати модальні логіки [16, 19, 31, 33, 36]. Модальності – це властивості тверджень, які в тому чи іншому аспекті характеризують міру їх істинності чи наше ставлення до них. Серед модальних логік виділяються загальні, або алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо.

Модальності "необхідно" й "можливо" називають загальними, або алетичними.

Модальності, які мають часовий зміст, називають часовими, або темпоральними. До основних часових відносять модальності "завжди було", "колись було", "завжди буде", "колись буде". Міркування з твердженнями, що містять часові модальності, вивчає часова, або темпоральна, логіка.

Модальності, що характеризують міру обґрунтованості знання, називають епістемічними. Такими є модальності "достовірно", "доведено", "підтверджено", "обґрунтовано", "вірогідно", "спростовно". Міркування з твердженнями, що містять епістемічні модальності, вивчає епістемічна логіка, або логіка знання.

Модальності "обов'язково", "дозволено", "заборонено" характеризують норми й нормативні поняття. Такі модальності називаються деонтичними. Логіка, у якій вивчаються міркування з деонтичними модальностями, називається деонтичною, або прескриптивною. Уживана також назва "логіка норм".

Останні роки характеризуються бурхливим розвитком модальних логік. Такі логіки можуть ефективно використовуватись для аналізу й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини. Особливого значення модальні логіки набувають (див., напр., [29, 35–39, 41, 42]) у зв'язку зі створенням сучасних інформаційних та програмних систем. Епістемічна логіка успішно застосовується для опису інтелектуальних інформаційних систем. Дуже важливим є використання апарату темпоральної логіки для адекватного опису й моделювання складних динамічних систем, специфікації та верифікації програм.

Модальні та темпоральні логіки відомі з античності (Арістотель, Діодор Кронос). Виникнення сучасної модальної логіки започатковано дослідженнями К. Льюїса у 1912–1916 рр. та Я. Лукасевича у 1920 р. Особливе значення мала робота "Symbolic logic", написана К. Льюїсом і К. Ленгфордом у 1932 р. У роботах цього періоду формалізовано систему класичних модальностей і розпочато дослідження різних систем модальної логіки (класичні аксіоматичні системи S1–S5). Модальність трактується як спеціальний оператор (композиція), який застосовується до предикатів. Уточненням і формалізацією модальних логік займалися К. Гедель, Я. Лукасевич, Д. Гільберт, Г. Генцен, А. Тарський, Р. Карнап та ін.

Спочатку дослідження модальних логік велись у синтаксичному стилі, для них не було чітко сформульованих семантик. Уперше алгебраїчна семантика для системи S4 була побудована в 1948 р. (А. Тарський, Дж. Мак-Кінсі). Інтенсивна розробка семантик модальних логік розпочалась на рубежі 50–60-х рр. ХХ ст. Важливим етапом у розвитку модальних логік була розробка семантик можливих світів, або реляційних семантик (С. Кангер, С. Кріпке, Я. Хінтікка). Концепція можливих світів природно пов'язана з модальною логікою. Фундаментальним поняттям цієї концепції є поняття можливості одного світу відносно іншого. Семантичні моделі модальної логіки на основі зазначеної концепції дозволяють природно трактувати як загальні модальності "необхідно" й "можливо", так і спеціальні модальності (часові, епістемічні, деонтичні).

Семантики можливих світів виявились дуже плідними для дослідження інших типів логік, зокрема інтуїціоністської логіки. Згодом були запропоновані узагальнення реляційної семантики (Д. Скотт, Р. Монтегю).

9.1. Алетичні модальні логіки

Основними модальними операторами алетичної (загальної) модальної логіки є оператори $\Box$ – "необхідно" та $\Diamond$ – "можливо". Вони пов'язані таким чином: $\Diamond P = \neg \Box \neg P$ та $\Box P = \neg \Diamond \neg P$.

На початкових етапах дослідження модальної логіки велика увага приділялась вивченню суперпозицій основних модальностей, таких, наприклад, як "необхідно, що необхідно", "необхідно, що можливо", "можливо, що необхідно, що можливо" тощо. Такі суперпозиції модальностей з інтуїтивного погляду дещо дивні, тому були запропоновані аксіоми, що дозволяли зводити складні модальності до модальностей певної форми.

Приклад 9.1.1. У найсильнішій формі редукція модальностей реалізована в системі S5, де кожна суперпозиція модальностей еквівалентна модальності без суперпозицій. Це означає, що для предиката P маємо шість таких різних предикатів: P , $\Box P$, $\Diamond P$, $\neg P$, $\Box \neg P$, $\Diamond \neg P$.

Приклад 9.1.2. Найприродніша з редукцій модальностей зводить повторення однакових модальних операторів $\Box$ чи $\Diamond$ до єдиного такого оператора. У відповідній системі S4 існує 14 різних модальностей: P , $\Box P$, $\Diamond P$, $\Box \Diamond P$, $\Diamond \Box P$, $\Box \Diamond \Box P$, $\Diamond \Box \Diamond P$ та 7 дуальних модальностей, коли замість P беремо $\neg P$.

Для ще слабшої системи S3 існує 42 різні модальності, а для систем S2 та S1 кількість різних модальностей нескінченна.

Розглянемо найпопулярніші аксіоматичні системи загальної, або алетичної, модальної логіки на пропозиційному рівні. Мова цих систем – розширення мови пропозиційної логіки.

Алфавіт мови складається із множини Ps предикатних символів, символів пропозиційних композицій $\neg$, $\vee$ та символу $\Box$ модальної композиції (модального оператора) "необхідно".

Множина формул Fm визначається індуктивно:

- 1) кожний $P \in Ps$ є формулою, такі формули атомарні;
- 2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg \Phi$, $\vee \Phi \Psi$, $\Box \Phi$ – формули.

Символ $\Diamond$ трактується як скорочення для $\neg \Box \neg$.

Приклад 9.1.3. Аксіоматична система K . Множина аксіом системи K складається з аксіом пропозиційної логіки та аксіом, що задаються схемою

$$AxNr) \Box(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box \Phi \rightarrow \Box \Psi).$$

Приклад 9.1.4. Аксіоматична система T . Множина аксіом складається з аксіом системи K та аксіом, що задаються схемою

$$Ax\Box) \Box \Phi \rightarrow \Phi.$$

Приклад 9.1.5. Аксиоматична система B (брауерівська). Множина аксіом складається з аксіом системи T та аксіом, що задаються схемою

$$Ax(B) \Phi \rightarrow \Box \Diamond \Phi.$$

Приклад 9.1.6. Аксиоматична система $S4$. Множина аксіом складається з аксіом системи T та аксіом, що задаються схемою

$$Ax(S4) \Box \Phi \rightarrow \Box \Box \Phi.$$

Приклад 9.1.7. Аксиоматична система $S5$. Множина аксіом складається з аксіом системи T та аксіом, що задаються схемою

$$Ax(S5) \Diamond \Phi \rightarrow \Box \Diamond \Phi.$$

Правила виведення всіх наведених вище систем складаються з правил виведення пропозиційної логіки, до яких додається *правило модальзації*:

$$PM) \Phi \vdash \Box \Phi.$$

Системи модальної логіки, які включають схему аксіом $AxNr$ і правило ПМ, називаються *нормальними*.

Зауважимо, що льюїсові системи $S1$, $S2$ та $S3$ [19] не є нормальними.

Те, що формула Φ є теоремою системи K , T , B , $S4$, $S5$, будемо відповідно позначати так:

$$K \vdash, T \vdash, B \vdash, S4 \vdash, S5 \vdash.$$

Приклад 9.1.8. Повний опис пропозиційної аксиоматичної модальної системи $S4$.

Схеми аксіом:

$$Ax(PP) \neg \Phi \vee \Phi \text{ (пропозиційні аксіоми);}$$

$$Ax(Nr) \Box(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box \Phi \rightarrow \Box \Psi);$$

$$Ax(\Box) \Box \Phi \rightarrow \Phi;$$

$$Ax(S5) \Diamond \Phi \rightarrow \Box \Diamond \Phi.$$

Правила виведення:

$$П1) \Phi \vdash \Psi \vee \Phi \text{ – розширення;}$$

$$П2) \Phi \vee \Phi \vdash \Phi \text{ – скорочення;}$$

$$П3) \Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi \text{ – асоціативності;}$$

$$П4) \Phi \vee \Psi, \neg \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi \text{ – перетину;}$$

$$PM) \Phi \vdash \Box \Phi \text{ – модальзації.}$$

Семантику описаних аксіоматичних систем модальної логіки можна задавати різними способами. Спочатку були запропоновані алгебраїчні семантики, однак вони виявились не зовсім прийнятними з інтуїтивного погляду. Це змусило шукати іншу, змістовнішу інтерпретацію модальних систем. Такими є реляційні семантики, або семантики можливих світів.

Моделью можливих світів, або реляційною моделлю, назвемо трійку $M = (S, \triangleright, I)$.

Тут S – множина світів, $\triangleright$ – бінарне відношення на S , I – відображення $I : Ps \times S \rightarrow \{T, F\}$ інтерпретації атомарних формул на світах.

Нехай $\alpha, \beta \in S$. Традиційне трактування $\alpha \triangleright \beta$ таке: світ β *можливий* відносно світу α , або світ β *досяжний* зі світу α . Це означає, що всяке твердження, істинне у світі β , можливе у світі α . Тому $\triangleright$ називають відношенням досяжності.

При такому розумінні кожне твердження, істинне в α , можливе в α , звідки $\alpha \triangleright \alpha$. Це означає, що при такому розумінні відношення $\triangleright$ рефлексивне, проте це не так у загальному випадку (напр., для деонтичних систем це відношення іррефлексивне).

Відображення $I : Ps \times S \rightarrow \{T, F\}$ індуктивно продовжується до відображення інтерпретації формул на світах $I : Fm \times S \rightarrow \{T, F\}$:

- $I(\neg\Phi, \alpha) = \neg(I(\Phi, \alpha))$;
- $I(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(I(\Phi, \alpha), I(\Psi, \alpha))$;
- $I(\Box\Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$, інакше $I(\Box\Phi, \alpha) = F$.

Таким чином, Φ *необхідно* істинна у світі α , якщо Φ істинна в усіх світах, досяжних з α .

Формула Φ *істинна в моделі M* (позначаємо $M \models \Phi$), якщо $I(\Phi, \alpha) = T$ для всіх $\alpha \in S$.

Модель можливих світів M називають:

- 1) *T-моделлю*, якщо $\triangleright$ рефлексивне;
- 2) *B-моделлю*, якщо $\triangleright$ рефлексивне й симетричне;

3) $S4$ -моделлю, якщо $\triangleright$ рефлексивне й транзитивне;

4) $S5$ -моделлю, якщо $\triangleright$ рефлексивне, транзитивне, симетричне.

Формула Φ T -істинна (B -істинна, $S4$ -істинна, $S5$ -істинна), що позначаємо $t|\models\Phi$ (відп. $b|\models\Phi$, $s4|\models\Phi$, $s5|\models\Phi$), якщо Φ істинна на кожній T -моделі (B -моделі, $S4$ -моделі, $S5$ -моделі).

Відомо [19, 14], що між аксіомами AxB , $AxS4$, $AxS5$ і властивостями відношення досяжності $\triangleright$ для B -моделей, $S4$ -моделей, $S5$ -моделей існує безпосередній зв'язок:

AxB дає умову симетричності відношення досяжності;

$AxS4$ дає умову транзитивності відношення досяжності;

$AxS5$ дає умову транзитивності й симетричності відношення досяжності.

Багато важливих властивостей відношення досяжності описуються відповідними схемами аксіом з модальностями, наприклад щільність, зв'язність, функціональність тощо [4, 14].

Приклад 9.1.8. Щільність відношення досяжності описується схемою аксіом

$$Ax Dn) \Box\Box\Phi \rightarrow \Box\Phi.$$

Водночас деякі властивості відношення досяжності, зокрема іррефлексивність, асиметричність, антисиметричність, описати аксіомами такого типу неможливо (див., напр., [14]).

Для описаних модальних систем справджуються теореми коректності й повноти [16, 19].

Теорема 9.1.1. Для кожної формули Φ мови алетичної модальної логіки:

$$1) t|\models\Phi \Leftrightarrow t|\models\Phi;$$

$$2) b|\models\Phi \Leftrightarrow b|\models\Phi;$$

$$3) s4|\models\Phi \Leftrightarrow s4|\models\Phi;$$

$$4) s5|\models\Phi \Leftrightarrow s5|\models\Phi.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке модальність?

2. Які модальності називають алетичними? Наведіть приклади.

3. Які модальності називають темпоральними? Наведіть приклади.
4. Які модальності називають епістемічними? Наведіть приклади.
5. Які модальності називають деонтичними? Наведіть приклади.
6. Де використовують модальні логіки?
7. Які співвідношення пов'язують модальні оператори $\Box$ та $\Diamond$?
8. Опишіть алфавіт і дайте визначення формули мови алетичної модальної логіки.
9. Опишіть аксіоматичні системи K , T , B , $S4$, $S5$ алетичної модальної логіки.
10. Сформулюйте правило модалізації.
11. Що таке модель можливих світів (реляційна модель) алетичної модальної логіки?
12. Чому відношення на світах називають відношенням досяжності?
13. Як задається відображення інтерпретації формул на світах?
14. Як визначається істинність формули в реляційній моделі?
15. Дайте визначення реляційної T -моделі, B -моделі, $S4$ -моделі, $S5$ -моделі.
16. Дайте визначення T -істинної, B -істинної, $S4$ -істинної, $S5$ -істинної формули.
17. Як пов'язані аксіоми AxB , $AxS4$, $AxS5$ та властивості відношення досяжності?
18. Сформулюйте теореми коректності й повноти систем алетичної модальної логіки.

Вправи

1. Дайте повні описи аксіоматичних модальних систем T , B та $S5$.
2. З'ясуйте, у якому відношенні щодо T -істинності перебувають формули $\Phi \rightarrow \Diamond \Phi$, $\Diamond \Phi \rightarrow \Phi$, $\Box \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi \rightarrow \Box \Phi$, $\Box \Phi \rightarrow \Diamond \Phi$, $\Diamond \Phi \rightarrow \Box \Phi$.
3. Поясніть зв'язок аксіоми $Ax\Box$ із рефлексивністю відношення досяжності.
4. Поясніть зв'язок аксіом AxB , $AxS4$, $AxS5$ із відповідними властивостями відношення досяжності для B -систем, $S4$ -систем, $S5$ -систем.

5. Покажіть, що формули вигляду $\Box A \rightarrow A$, $A \rightarrow \Box A$, $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, $\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$ істинні не на всіх реляційних моделях. Наведіть відповідні приклади таких моделей.

6. З'ясуйте, які властивості відношення досяжності описують такі схеми аксіом:

- 1) $\Box \Phi \rightarrow \Diamond \Phi$;
- 2) $\Diamond \Phi \rightarrow \Box \Phi$;
- 3) $\Diamond \Phi \leftrightarrow \Box \Phi$;
- 4) $\Diamond \Box \Phi \rightarrow \Box \Diamond \Phi$.

7. Доведіть у T -численні:

- 1) якщо $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash \Box A \rightarrow \Box B$ та $\vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$;
- 2) якщо $\vdash A \leftrightarrow B$, то $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ та $\vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$;
- 3) $\vdash \Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$;
- 4) $\vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$;
- 5) $\vdash \Box(A \& B) \leftrightarrow (\Box A \& \Box B)$;
- 6) $\vdash (\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$;
- 7) $\vdash \Diamond(A \& B) \rightarrow (\Diamond A \& \Diamond B)$;
- 8) $\vdash \Box(A \rightarrow \Diamond(B \rightarrow C)) \rightarrow \Diamond(B \rightarrow \Box A \rightarrow \Diamond B)$.

9.2. Темпоральні логіки

Основними модальностями темпоральної (часової) логіки є відомі ще з античних часів модальності "завжди було", "колись було", "завжди буде", "колись буде". Звідси отримуємо такі основні темпоральні модальні композиції (темпоральні оператори): $\Box \uparrow$ (завжди буде), $\Box \downarrow$ (завжди було), $\Diamond \uparrow$ (колись буде), $\Diamond \downarrow$ (колись було).

Темпоральні оператори $\Box \uparrow$, $\Box \downarrow$, $\Diamond \uparrow$, $\Diamond \downarrow$ пов'язані так:

$$\neg \Diamond \uparrow P = \Box \uparrow \neg P;$$

$$\neg \Box \uparrow P = \Diamond \uparrow \neg P;$$

$$\neg \Diamond \downarrow P = \Box \downarrow \neg P;$$

$$\neg \Box \downarrow P = \Diamond \downarrow \neg P.$$

Для темпоральних модальних систем *базовими* далі будемо вважати оператори $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$. Тоді $\Diamond\uparrow$ та $\Diamond\downarrow$ є похідними темпоральними операторами й визначаються так:

$\Diamond\uparrow P$ означає $\neg\Box\uparrow\neg P$,

$\Diamond\downarrow P$ означає $\neg\Box\downarrow\neg P$.

Аксіоматичні системи пропозиційної темпоральної логіки. Розглянемо аксіоматичні системи темпоральної логіки на пропозиційному рівні. Мова таких систем є розширенням мови пропозиційної логіки.

Алфавіт мови: множина Ps предикатних символів, символи пропозиційних композицій $\neg$ і $\vee$, символи темпоральних операторів $\Box\uparrow$, $\Box\downarrow$.

Множина формул Fm визначається індуктивно:

1) кожний $P \in Ps$ є формулою; такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\Box\uparrow\Phi$, $\Box\downarrow\Phi$ – формули.

Символи $\Diamond\uparrow$ та $\Diamond\downarrow$ трактуємо як скорочення $\neg\Box\uparrow\neg$ та $\neg\Box\downarrow\neg$.

Приклад 9.2.1. Мінімальне темпоральне числення K_t є аналогом системи K .

Аксіомами K_t є аксіоми пропозиційної логіки та аксіоми, що задані такими схемами:

$AxNr\uparrow) \Box\uparrow(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box\uparrow\Phi \rightarrow \Box\uparrow\Psi)$;

$AxNr\downarrow) \Box\downarrow(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box\downarrow\Phi \rightarrow \Box\downarrow\Psi)$;

$AxT\uparrow) \Phi \rightarrow \Box\uparrow\Diamond\downarrow\Phi$;

$AxT\downarrow) \Phi \rightarrow \Box\downarrow\Diamond\uparrow\Phi$.

Аксіоми $AxNr\uparrow$ та $AxNr\downarrow$ є стандартними модальними аксіомами для $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$.

Аксіоми $AxT\uparrow$ та $AxT\downarrow$ відображають принципи змішування часів.

Приклад 9.2.2. Темпоральне числення T_t є аналогом алетичної системи T .

Множина аксіом T_t складається з аксіом числення K_t та аксіом, що задаються схемами

$Ax\Box\uparrow) \Box\uparrow\Phi \rightarrow \Phi$;

$Ax\Box\downarrow) \Box\downarrow\Phi \rightarrow \Phi$.

Приклад 9.2.3. Темпоральне числення B_t є аналогом алетичної системи B .

Множина аксіом B_t складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

$$Ax B_{\uparrow}) \Phi \rightarrow \Box \uparrow \Diamond \uparrow \Phi;$$

$$Ax B_{\downarrow}) \Phi \rightarrow \Box \downarrow \Diamond \downarrow \Phi.$$

Приклад 9.2.4. Темпоральне числення $S4_t$ є аналогом алетичної системи $S4$.

Множина аксіом $S4_t$ складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

$$Ax S4_{\uparrow}) \Box \uparrow \Phi \rightarrow \Box \uparrow \Box \uparrow \Phi;$$

$$Ax S4_{\downarrow}) \Box \downarrow \Phi \rightarrow \Box \downarrow \Box \downarrow \Phi.$$

Приклад 9.2.5. Аналогом алетичної системи $S5$ є темпоральне числення $S5_t$.

Множина аксіом $S5_t$ складається з аксіом числення T_t та аксіом, що задаються схемами

$$Ax S5_{\uparrow}) \Diamond \uparrow \Phi \rightarrow \Box \uparrow \Diamond \uparrow \Phi;$$

$$Ax S5_{\downarrow}) \Diamond \downarrow \Phi \rightarrow \Box \downarrow \Diamond \downarrow \Phi.$$

Правила виведення темпоральних числень T_t , B_t , $S4_t$, $S5_t$ складаються із правил виведення пропозиційної логіки, до яких додаються правила модалізації для $\Box \uparrow$ та $\Box \downarrow$:

$$ПМ_{\uparrow}) \Phi \vdash \Box \uparrow \Phi;$$

$$ПМ_{\downarrow}) \Phi \vdash \Box \downarrow \Phi.$$

Реляційна семантика темпоральної логіки задається так, як реляційна семантика алетичної логіки. Аналогічно поняттю моделі можливих світів уводимо поняття темпоральної моделі, але тепер $\triangleright$ фактично вказує напрямок часу – від минулого до майбутнього.

Визначення відображення інтерпретації формул на світах $I: Fm \times S \rightarrow \{T, F\}$ має єдину відмінність від визначення I для алетичної модальної логіки: замість п. 4 маємо пп. 4 $\uparrow$ та 4 $\downarrow$ для формул вигляду $\Box \uparrow \Phi$ і $\Box \downarrow \Phi$:

4 $\uparrow$) $I(\Box \uparrow \Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \triangleright \beta$, інакше $I(\Box \uparrow \Phi, \alpha) = F$;

4 $\downarrow$) $I(\Box \downarrow \Phi, \alpha) = T \Leftrightarrow I(\Phi, \beta) = T$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\beta \triangleright \alpha$, інакше $I(\Box \downarrow \Phi, \alpha) = F$.

Різновиди темпоральних логік. Стисло опишемо різновиди темпоральних логік. У низці робіт (див., напр., [16, 33]) розглядались такі розширення мінімальної темпоральної логіки, моделі яких мають властивості фізичного часу (лінійність, дискретність чи континуальність, скінченність чи нескінченність, циклічність тощо). Популярними також є дослідження, присвячені метричним темпоральним логікам [33, 35, 36].

Класифікація систем темпоральної логіки наведена в [33].

Передусім виділяють *пропозиційні* та *першопорядкові* темпоральні логіки. Немодальною частиною цих логік є відповідно класичні пропозиційна та першопорядкова логіки.

У першопорядкових темпоральних логіках можна накладати різні обмеження на взаємодію кванторів і темпоральних операторів. У загальному випадку дозволяється модальний оператор в області дії квантора. *Обмежену* темпоральну логіку першого порядку отримують, заборонивши квантифікацію над темпоральними операторами. У деяких різновидах темпоральних логік виділяють *локальні* змінні, які можуть набувати різних значень на різних станах, і *глобальні* змінні, значення яких однакові для всіх станів.

Залежно від природи часу можна виділити *лінійні* й *розгалужені* темпоральні логіки.

Якщо вважати, що в кожен момент часу існує єдиний можливий наступний момент, тобто час має лінійний характер, то отримуємо системи темпоральної логіки з *лінійним* часом – лінійні темпоральні логіки (ЛТЛ). Темпоральні модальності тоді описують події вздовж єдиної лінії часу.

У ЛТЛ виділяють логіки з *однонаправленим* часом, або логіки майбутнього.

Іншим варіантом є розгалужений час. Тоді час має деревоподібну структуру: у кожен момент він може поділитися на альтернативні потоки, подаючи різні варіанти майбутнього. Отримуємо системи темпоральної логіки з *розгалуженим* часом, або розгалужені темпоральні логіки (РТЛ). Темпоральні модальності тут відбивають розгалужену природу часу.

Можна виділити темпоральні логіки з *дискретним* (виділяються окремі точки часу) та *неперервним* часом (час має неперервний, щільний характер). З останніх виділяють логіки, у яких стани часу мають інтервальний характер; такі *інтервальні* темпоральні логіки запропоновані Ч. Гембліном.

При введенні метрики в потоки часу отримуємо *метричні* темпоральні логіки.

Приклад 9.2.6. Мінімальне метричне темпоральне числення побудував А. Прайор [45]. Основними операторами цього числення є $\uparrow n$ – "буде через n одиниць часу" та $\downarrow n$ – "було n одиниць часу тому".

Неметричні часові оператори $\Box\uparrow$, $\Box\downarrow$, $\Diamond\uparrow$, $\Diamond\downarrow$ виражаються через $\uparrow n$ та $\downarrow n$:

$$\Box\uparrow P = \forall n (\uparrow n P);$$

$$\Diamond\uparrow P = \exists n (\uparrow n P);$$

$$\Box\downarrow P = \forall n (\downarrow n P);$$

$$\Diamond\downarrow P = \exists n (\downarrow n P).$$

Метричну темпоральну логіку узагальнив Д. Кліффорд [32]. Він увів потоки часу та відповідні часові оператори $\tau\uparrow n$ та $\tau\downarrow n$, які означають "у потоці τ через n одиниць часу буде істинним" і "у потоці τ n одиниць часу тому було істинним", а також описав відповідні темпоральні числення.

Розглянемо детальніше лінійні та розгалужені темпоральні логіки. Для ЛТЛ відношення досяжності на світах (станах світу) має бути функціональним. Найпопулярнішим варіантом таких логік є ЛТЛ майбутнього (ЛТЛМ) (див. [41]). Моделлю часу в такій логіці є впорядкована структура, яка ізоморфна $(N, \leq)$. Час вважається дискретним, він має початковий момент (для якого немає попереднього моменту) і нескінченно простягається в майбутнє. Темпоральними операторами такої логіки є $\Box$ (завжди) і $\Diamond$ (колись), які в цьому випадку відповідають традиційним темпоральним операторам $\Box\uparrow$ та $\Diamond\uparrow$, і метричний оператор $\uparrow 1$ (у наступний момент), який називають next-оператором. При цьому можна задати $\Diamond P$ як $\neg\Box\neg P$.

Приклад 9.2.7. Мову пропозиційної ЛТЛМ можна задати аналогічно розглянутому вище випадку пропозиційної темпоральної логіки.

При цьому п. 2 індуктивного визначення формули мови буде таким:

2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $\Box\Phi$, $\Diamond\Phi$, $\Uparrow\Phi$ – формули.

Реляційна модель для ЛТЛМ – це трійка $(N, \leq, I)$, де $I: Ps \times N \rightarrow \{T, F\}$.

Задамо відображення $J: Fm \times N \rightarrow \{T, F\}$ для модалізованих формул:

$$J(\Box\Phi, t) = T \Leftrightarrow J(\Phi, s) = T \text{ для всіх } s \geq t;$$

$$J(\Uparrow\Phi, t) = J(\Phi, t+1).$$

Тоді маємо: $J(\Diamond\Phi, t) = T \Leftrightarrow J(\Phi, s) = T$ для деякого $s \geq t$.

Приклад 9.2.8. Аксиоматичні системи гільбертівського типу пропозиційної ЛТЛМ можна утворити шляхом поповнення аксіом і правил виведення пропозиційного числення правилом $\Phi \vdash \Box\Phi$ та схемами темпоральних аксіом:

$$- \Box(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box\Phi \rightarrow \Box\Psi);$$

$$- \Diamond\Phi \leftrightarrow \neg\Box\neg\Phi;$$

$$- \Uparrow(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Uparrow\Phi \rightarrow \Uparrow\Psi);$$

$$- \Box\Phi \rightarrow \Phi \ \& \ \Uparrow\Phi \ \& \ \Box\Uparrow\Phi;$$

$$- \Box(\Phi \rightarrow \Uparrow\Phi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Box\Phi);$$

$$- \Uparrow\Phi \leftrightarrow \neg\Uparrow\neg\Phi.$$

Існує багато різновидів ЛТЛМ [29, 33, 38]. У деяких варіантах темпоральні оператори діють тільки для опису *строого* майбутнього. Іноді множину станів часу роблять обмеженою.

Загальнішим випадком є ЛТЛ із темпоральними операторами майбутнього й минулого часів. Такі ЛТЛ мають виразніші можливості. Відповідні класи ЛТЛ розглядаються також на першопорядковому рівні (першопорядкові ЛТЛ).

У темпоральних логіках із розгалуженим часом, або РТЛ, час має деревоподібну структуру – кожен його момент може мати багато наступних.

Зазвичай розглядають РТЛ майбутнього. У цих логіках структура часу відповідає нескінченному дереву, часова лінія вздовж кожного шляху в дереві ізоморфна $(N, <)$. Кожна вершина дерева в загальному випадку допускає нескінченну кількість наступників, але не менше одного. Відношення досяжності $\triangleright$ у реляційних моделях РТЛ задовольняє умову: для кожного s існує t таке, що $s \triangleright t$. Розглядають окремі типи таких РТЛ, у яких допускаються тільки скінченні чи навіть обмежені розгалуження часу.

Відомими системами пропозиційних РТЛ є логіка дерева обчислень CTL (Computational Tree Logic) і повна логіка розгалуженого часу CTL* [33, 37].

Відомі також системи РТЛ першого порядку, отримані поєднанням відповідних систем пропозиційних РТЛ і логіки першого порядку [29, 33].

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть базові темпоральні оператори.
2. Які співвідношення пов'язують темпоральні оператори $\Box\uparrow$, $\Box\downarrow$, $\Diamond\uparrow$, $\Diamond\downarrow$?
3. Опишіть алфавіт і дайте визначення формули мови пропозиційної темпоральної логіки.
4. Опишіть мінімальне темпоральне числення K_t .
5. Опишіть темпоральні числення T_t , B_t , $S4_t$, $S5_t$.
6. Як ми трактуємо відношення $\triangleright$ для випадку реляційної моделі темпоральної логіки?
7. Як задається значення формули у світі α для випадку темпоральної логіки?
8. Опишіть класифікацію систем темпоральної логіки.
9. Охарактеризуйте лінійні темпоральні логіки.
10. Охарактеризуйте розгалужені темпоральні логіки.
11. Наведіть оператори мінімальної метричної темпоральної логіки Прайора.
12. Як можна визначити неметричні часові оператори через метричні $\uparrow n$ та $\downarrow n$?
13. Опишіть мову пропозиційної ЛТЛМ.

Вправи

1. Дайте повний опис (схеми аксіом і правила виведення):
 - 1) пропозиційної темпоральної K_t -системи;
 - 2) пропозиційної темпоральної T_t -системи;
 - 3) пропозиційної темпоральної $S4_t$ -системи;
 - 4) пропозиційної темпоральної $S5_t$ -системи;
 - 5) пропозиційної темпоральної B_t -системи.
2. Дайте повний опис аксіоматичної системи пропозиційної ЛТЛМ.

9.3. Епістемічні та деонтичні логіки

Епістемічна логіка – це розділ модальної логіки, у якому досліджуються міркування з модальностями "відомо", "правильно", "доведено", "спростовано".

Засновником епістемічної логіки як науки є фінський логік Я. Хінтікка. У 1962 р. у роботі "Знання і опінія" він вирішив застосувати апарат модальної логіки для порівняльної логічної характеристики того, що є змістом знання і змістом опінії, віри. Для епістемічної логіки Я. Хінтікка запропонував семантику можливих світів, назвавши такі світи епістемічними.

Постулати епістемічної логіки описано, зокрема, у [4].

У цьому посібнику обмежимося розглядом найважливішого з практичного погляду різновиду епістемічної логіки – епістемічної логіки знання. У цьому випадку вводимо лише модальні оператори знання. Розглядаємо логіки пропозиційного рівня.

Епістемічна логіка знання. У найпростішому варіанті такої логіки маємо єдиний оператор знання K , що відповідає наявності єдиного суб'єкта знання (експерта, агента).

Алфавіт мови пропозиційної епістемічної логіки з одним експертом: множина P_s предикатних символів, символи пропозиційних композицій $\neg$ і $\vee$, символ K модального оператора знання.

Множина формул Fe визначається індуктивно:

- 1) кожний $P \in P_s$ є формулою; такі формули атомарні;
- 2) нехай Φ та Ψ – формули, тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $K\Phi$ – формули.

Множина аксіом у системах епістемічної логіки знання з одним експертом складається з аксіом пропозиційної логіки, до яких додаємо певні епістемічні аксіоми, що задаються схемами:

$AxEN) K(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (K\Phi \rightarrow K\Psi);$

$AxRe) K\Phi \rightarrow \Phi;$

$AxPR) K\Phi \rightarrow KK\Phi;$

$AxNR) \neg K\Phi \rightarrow K\neg K\Phi.$

Аксіома $AxRe$ називається *аксіомою реальності знання* ("якщо я знаю, то це справді так"). Вона є аналогом аксіоми $Ax\Box$ алетичної модальної логіки.

Аксіома $AxPR$ називається *аксіомою позитивної рефлексії* ("якщо я знаю, то я знаю, що знаю"). Вона є аналогом аксіоми $AxS4$ алетичної модальної логіки.

Аксіома $AxNR$ називається *аксіомою негативної рефлексії* ("якщо я не знаю, то я знаю, що не знаю"). Вона є аналогом аксіоми $AxS5$ алетичної модальної логіки.

Правила виведення в системах епістемічної логіки знання з одним експертом складаються із правил виведення пропозиційної логіки, до яких додається *правило знання*:

$PK) \Phi \vdash K\Phi.$

Приклад 9.3.1. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом $AxEN$ та $AxRe$, є аналогом системи T алетичної модальної логіки. Таку систему називають $T_{(1)}$.

Приклад 9.3.2. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом $AxEN$, $AxRe$ та $AxPR$, є аналогом системи $S4$ алетичної модальної логіки. Таку систему називають $S4_{(1)}$.

Приклад 9.3.3. Система епістемічної логіки, що включає схеми аксіом $AxEN$, $AxRe$ та $AxNR$, є аналогом системи $S5$ алетичної модальної логіки. Таку систему називають $S5_{(1)}$.

Реляційна семантика для аксіоматичних систем пропозиційної епістемічної логіки знання вводиться так, як для аксіоматичних систем алетичної модальної логіки.

Відношення досяжності $\triangleright$ трактується так: $\alpha \triangleright \beta$ означає, що експерт (агент) у ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

При цьому аксіома $AxRe$ дає умову рефлексивності відношення досяжності $\triangleright$.

Аксіома $AxPR$ дає умову транзитивності $\triangleright$.

Аксіома $AxNR$ дає умову транзитивності й симетричності $\triangleright$.

Узагальненням епістемічної логіки знання з одним експертом є епістемічна логіка знання з n експертами. У цьому випадку вводимо скінченну множину операторів знання $K_1, \dots, K_n$. Відповідно визначається мова логіки. Аксиоматичні системи епістемічної логіки знання з n експертами замість однієї схеми аксіом $AxEN$ містять n схем аксіом такого самого типу для $K_1, \dots, K_n$. Те саме стосується схем аксіом $AxRe$, $AxPR$, $AxNR$.

Системи пропозиційної епістемічної логіки знання з n експертами (агентами), відповідні до систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$, називають $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

При визначенні реляційної семантики таких систем замість єдиного відношення $\triangleright$ маємо n відношень $\triangleright_1, \dots, \triangleright_n$. При цьому $\alpha \triangleright_k \beta$ означає, що k -й експерт (агент) у ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

На базі епістемічних логік розроблено мови опису систем знань із неповною інформацією, що дозволяє не тільки робити запити бази знань, але й мати інформацію про повноту чи неповноту отриманих знань. Детальніше про це див., зокрема, в [1].

Деонтична логіка. Деонтична логіка – це розділ модальної логіки, у якому вивчають міркування з термінами "обов'язково", "дозволено", "заборонено". Деонтичну логіку називають також логікою норм, її предметом є нормативні міркування. Сам термін "деонтична" походить від давньогрецького *deontis*, що означає "так як має бути", "належним чином".

Творцем сучасної деонтичної логіки є Г. фон Врігт, який у 1951 р. сформулював проблеми деонтичної логіки й навів їх розв'язки. Подальший розвиток деонтична логіка отримала в роботах С. Кангера, А. Андерсона, А. Прайора та ін.

Зауважимо, що сама можливість побудови деонтичної логіки сумнівна з погляду багатьох логіків і філософів. На їхню думку, логіка має справу з реченнями, які є істинними або хибними. Однак деонтичні (нормативні) речення не є ні істинними, ні хибними, тому що належать не реальному, а ідеальному "світу належного".

Побудову деонтичної логіки природно здійснювати на базі семантики можливих світів. Поняття деонтичного світу введено ще Е. Кантом. Він запропонував класичну інтерпретацію можливого світу як деонтичного. Кант визначив моральний світ як світ, що відповідає всім модальним законам, яким він може бути згідно з волею розумних істот і яким має бути згідно із законами моральності. На думку Канта, моральний світ – це ідеальний світ, один з варіантів можливого світу, де все ідеально діє і взаємодіє. Тому, узагальнюючи, деонтичний світ – це світ, який ми хотіли б мати.

Кант постулював існування єдиного модального світу, але деонтична логіка допускає існування багатьох світів. Наприклад, кілька деонтичних світів можна трактувати як різні проекти законів, що розглядаються Верховною Радою.

Концепцію семантики можливих світів для деонтичної логіки можна конкретизувати у двох аспектах:

- 1) можливий світ – це деонтичний світ;
- 2) відношення досяжності – це відношення між світом, у якому будується деонтичний світ, і цим деонтичним світом.

У мінімальному (стандартному) варіанті деонтичної логіки маємо базовий деонтичний оператор O – "обов'язково".

Приклад 9.3.4. Похідні деонтичні оператори визначаються так (тут Q – предикат):

- 1) оператор P – "дозволено": PQ означає $\neg O \neg Q$;
- 2) оператор F – "заборонено": FQ означає $O \neg Q$;
- 3) оператор I – "байдуже": IQ означає $PQ \& P \neg Q$.

Мову деонтичної логіки вводимо стандартно.

Приклад 9.3.5. Пропозиційна аксіоматична деонтична система DS .

Множина аксіом і правил виведення системи DS складається з аксіом і правил виведення пропозиційної логіки, до яких додаємо деонтичні аксіоми, що є аналогами аксіом $AxNr$ та $Ax\Box$, і правило виведення PO , що є аналогом правила модалізації.

Деонтичні аксіоми системи DS задаються схемами:

$$AxDNr) O(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (O\Phi \rightarrow O\Psi);$$

$$AxD\Box) O\Phi \rightarrow P\Phi.$$

Правило виведення ПО:

ПО) $\Phi \vdash \text{O}\Phi$.

Властивості оператора **O** подібні до властивостей $\Box$.

Водночас у деонтичній логіці формула $\text{O}\Phi \rightarrow \Phi$ у загальному випадку не є істинною. Вона означає: "якщо має бути Φ , то Φ ".

На відміну від відношення досяжності алетичної модальної логіки, у деонтичній логіці відношення досяжності $\triangleright$ має бути:

- 1) іррефлексивним, тобто неможливим є $\alpha \triangleright \alpha$;
- 2) мати властивість незавершеності, тобто для кожного світу α існує світ β такий: $\alpha \triangleright \beta$.

Ці властивості можна трактувати як незбіг належного й реального та як існування для кожного світу свого деонтичного світу.

У деонтичній логіці існують твердження, інтуїтивно неприйнятні, але які можна формально довести в описаній системі. Це засвідчує не зовсім адекватну формалізацію деонтичної логіки.

Приклад 9.3.6. А. Прайор показав, що теоремою є формула $\text{O}\neg\Phi \rightarrow \text{O}(\Phi \rightarrow \Psi)$, але вона інтуїтивно неприйнятна, адже її можна інтерпретувати так: у корпусі факультету заборонено палити, отже, якщо ви палите, то можна вбивати. Це дає підстави сумніватися у трактуванні Г. фон Врігтом формули $\text{O}(\Phi \rightarrow \Psi)$ як твердження про похідний обов'язок: зробити Ψ у разі виконання Φ .

Приклад 9.3.7. А. Прайор запропонував визначати похідний обов'язок формулою $\Phi \rightarrow \text{O}\Psi$, але тоді теоремою буде $\neg\Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow \text{O}\Psi)$, яка парадоксальна, тому що означає: те, що не існує, зобов'язує робити все, що завгодно.

Приклад 9.3.8. Формула $\text{F}\Phi \rightarrow \text{F}(\Phi \& \Psi)$ також є парадоксальною. Ця формула означає: із заборони дії випливає заборона поєднувати її з іншою дією. Це правильно, зокрема, і для дії, що компенсує порушення заборонної дії. Наприклад, якщо заборонено лаятися, то заборонено лаятися й вибачатися.

Побудова кванторних деонтичних логік зіштовхується з низкою принципових труднощів.

Приклад 9.3.9. Формули $\text{O}\exists x\neg\Phi(x)$ та $\neg\text{P}\forall x\Phi(x)$ еквівалентні, але за деонтичною сутністю вони різні. Перша формула стве-

рджус, що обов'язково існує індивід, який виконує $\neg\Phi$, друга – що не дозволено кожному виконувати Φ .

Різновидом деонтичної логіки є *логіка санкцій*, запропонована А. Андерсоном (див. [4]). У цій логіці деонтичний оператор **O** виражається за допомогою оператора $\Box$ і константного предиката **S**, який означає санкцію (штраф).

OQ визначається як $\Box(\neg Q \rightarrow S)$, тоді FQ означає $\Box(Q \rightarrow S)$, IQ означає $\Box(Q \& \neg S)$.

Відповідне числення Sd логіки санкцій включає аксіому $\neg\Box S$, яка означає, що кари можна уникнути.

Приклад 9.3.10. Варіантом логіки санкцій є [4] деонтична логіка з нормативним кодексом – предикатною константою **N**.

OQ задається як $\Box(N \rightarrow Q)$, FQ – як $\Box(N \rightarrow \neg Q)$, PQ – як $N \& Q$. Відповідне числення включає аксіому $\Diamond N$, яка означає можливість дотримання нормативного кодексу.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає епістемічна логіка?
2. Опишіть мову епістемічної логіки знання з одним експертом.
3. Назвіть аксіоми:
 - реальності знання;
 - позитивної рефлексії;
 - негативної рефлексії.
4. Аналогом яких систем атлетичної логіки є епістемічні системи $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$?
5. Як визначається реляційна семантика епістемічної логіки знання з одним експертом?
6. Як трактується відношення досяжності в реляційній семантиці епістемічної логіки?
7. Як пов'язані аксіоми $AxRe$, $AxPR$, $AxNR$ та властивості відношення досяжності?
8. Опишіть мову епістемічної логіки знання з n експертами.
9. Опишіть аксіоматичні системи епістемічної логіки знання з n експертами $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.

10. Які особливості реляційної семантики епістемічної логіки знання з n експертами?
11. Що вивчає деонтична логіка?
12. Що таке деонтичний світ?
13. Які особливості концепції семантики можливих світів для деонтичної логіки?
14. Які ви знаєте деонтичні оператори?
15. Опишіть мову деонтичної логіки.
16. Опишіть деонтичну систему DS .
17. Які властивості відношення досяжності в реляційній семантиці деонтичної логіки?
18. Чи можна вважати цілком адекватною формалізацію деонтичної логіки?
19. Які особливості має логіка санкцій Андерсона?
20. Що таке деонтична логіка з нормативним кодексом?

Вправи

1. Дайте повні описи пропозиційних епістемічних систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$.
2. Дайте повні описи пропозиційних епістемічних систем $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.
3. Укажіть схеми аксіом і правила виведення:
 - пропозиційної епістемічної $S4_{(2)}$ -системи;
 - пропозиційної епістемічної $S4_{(3)}$ -системи;
 - пропозиційної епістемічної $S5_{(2)}$ -системи;
 - пропозиційної епістемічної $S5_{(3)}$ -системи.
4. Визначте реляційну семантику систем $T_{(1)}$, $S4_{(1)}$, $S5_{(1)}$.
5. Визначте реляційну семантику систем $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$.
6. Дайте явний опис мови деонтичної логіки.
7. Чому деонтична формула $x = y \rightarrow 0x = y$ парадоксальна?
8. Дайте повне описання пропозиційного числення Sd логіки санкцій Андерсона.
9. Покажіть, що в численні Sd :
 - а) $\vdash \mathbf{OA} \rightarrow \mathbf{PA}$;
 - б) $\vdash \mathbf{O(A \rightarrow B)} \rightarrow (\mathbf{OA} \rightarrow \mathbf{OB})$.

9.4. Композиційно-номінативні модальні логіки часткових предикатів

Синтезуючи можливості традиційних модальних логік та логік часткових квазіарних предикатів, отримуємо *композиційно-номінативну модальну логіку* (КНМЛ). Ураховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, акцентуємо увагу на КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого – *транзиційних* КНМЛ. Такі логіки досліджувались, зокрема, в [11, 22–25].

Центральним поняттям КНМЛ є поняття *композиційно-номінативної модальної системи* (КНМС). КНМС – це об'єкт вигляду $M = (Cms, Ds, Dns)$, де:

Cms – композиційна модальна система, задає семантичні аспекти світу;

Ds – дескриптивна система, визначає множину стандартних дескрипцій – множину Fm формул мови КНМЛ;

Dns – денотаційна система, яка визначає значення стандартних дескрипцій (формул мови) на семантичних моделях; задається відображенням інтерпретації Im .

Композиційні модальні системи можна віднести до семантичних моделей реляційного типу, вони мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де:

S – множина станів світу;

R – множина відношень на S вигляду $R \subseteq S \times S^n$;

Pr – множина предикатів на станах світу;

C – множина композицій на Pr ; визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня й базовими модальними композиціями.

Для КНМЛ номінативних рівнів поняття КНМС уточнюється [22] так. Множину станів світу S конкретизуємо як множину алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де A_α – множина базових даних стану α , Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^v A_\alpha \rightarrow \{T, F\}$, це предикати стану α . Предикати вигляду ${}^v A \rightarrow \{T, F\}$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$, назовемо глобальними.

Далі обмежимося розглядом КНМЛ кванторного рівня чистих першопорядкових КНМЛ. Композиції таких КНМЛ визначаються базовими загальнологічними композиціями $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ і базовими модальними композиціями.

Мови КНМЛ. Опишемо мову КНМЛ кванторного рівня. Алфавіт мови:

- множина V предметних імен;
- множина Ps предикатних символів – загальнологічна сигнатура;
- $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ – множина символів базових загальнологічних композицій;
- множина Ms символів базових модальних композицій – модальна сигнатура.

Задамо множину Fm формул мови.

Маємо $Ps \subseteq Fm$; такі $p \in Ps$ – *атомарні* формули; далі задаємо індуктивно:

$$FP) \Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow \neg\Phi \in Fm \text{ та } \vee\Phi\Psi \in Fm;$$

$$FR) \Phi \in Fm \Rightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in Fm;$$

$$F\exists) \Phi \in Fm \Rightarrow \exists x\Phi \in Fm;$$

$$FM) \Phi \in Fm \text{ та } \mathfrak{K} \in Ms \Rightarrow \mathfrak{K}\Phi \in Fm.$$

У множині V виділимо підмножину $V_T \subseteq V$ імен, гарантовано неістотних для всіх $p \in Ps$, – *тотально неістотних імен*.

Для визначення множин гарантовано (строго) неістотних для формул імен задамо функцію $v: Fr \rightarrow 2^V$:

- $v(p) = V_T$ для всіх $p \in Ps$;
- $v(\neg\Phi) = v(\Phi)$;
- $v(\vee\Phi\Psi) = v(\Phi) \cup v(\Psi)$;
- $v(R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} \Phi) = (v(\Phi) \cup \{v_1, \dots, v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin v(\Phi)_{i \in 1, \dots, n}\}$;
- $v(\exists x\Phi) = v(\Phi) \cup \{x\}$;
- $v(\mathfrak{K}\Phi) = v(\Phi)$.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою Ms , однотипністю відношень із R для кожного $\mathfrak{K} \in Ms$ і сигнатурою синтетичної неістотності $\sigma = (Ps, v)$.

У випадку КНМЛ еквітонних предикатів для визначення множин гарантовано слабо неістотних для формул імен аналогічно функції v задаємо функцію $\mu : Fr \rightarrow 2^V$.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах світу $Im : Ps \times S \rightarrow Pr$, при цьому має виконуватись умова $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Таке Im продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Im : Fm \times S \rightarrow Pr$.

$$IP) Im(\neg\Phi, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha));$$

$$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha));$$

$$IR) Im(R_x^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = R_x^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha));$$

$$I\exists) Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, & \text{якщо існує } a \in A_\alpha : Im(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = T, \\ F, & \text{якщо } Im(\Phi, \alpha)(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

IM) $Im(\mathfrak{H}\Phi, \alpha)(d)$ визначається значеннями $Im(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних, пов'язаних із $\mathfrak{H}$, відношеннях із R .

Таким чином, КНМС можна уточнити як об'єкт вигляду $M = ((S, R, Pr, C), Fm, Im)$.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α , позначаємо Φ_α .

Формула Φ неспростовна у стані $\alpha \in S$ (позн. $\alpha \models \Phi$), якщо предикат Φ_α неспростовний.

Формула Φ неспростовна в КНМС M , або частково істинна в КНМС M (позн. $M \models \Phi$), якщо $\alpha \models \Phi$ для всіх $\alpha \in S$.

Нехай τ – клас КНМС певного типу.

Формула Φ τ -неспростовна (позн. $M_\tau \models \Phi$), якщо $M \models \Phi$ для всіх КНМС $M \in \tau$.

Якщо τ мається на увазі, то пишемо просто $\models \Phi$.

Транзиційні модальні системи. Важливим класом КНМС є *транзиційні* модальні системи (ТМС). Вони є основою транзиційних КНМЛ (ТМЛ), у межах яких природно можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо.

Окремими випадками ТМС є загальні транзиційні, темпоральні, мультимодальні системи.

ТМС – це КНМС, у яких множина R складається з відношень вигляду $R \subseteq S \times S$. Ці відношення трактуємо як відношення переходу на станах.

ТМС, у яких $R = \{\triangleright\}$, а базовою модальною композицією є $\Box$ ("необхідно"), називають *загальними* (ЗМС).

ТМС, у яких $R = \{\triangleright\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box\uparrow$ ("завжди буде") і $\Box\downarrow$ ("завжди було"), називають *темпоральними* (ТмМС).

ТМС із $R = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i , $i \in I$, у яких кожному $\triangleright_i \in R$ зіставлена відповідна модальна композиція K_i , назвемо *мультимодальними* (ММС).

ЗМС є окремим випадком ММС, для них R складається з єдиного бінарного відношення $\triangleright$ та наявна єдина базова модальна композиція K , за дією ідентична $\Box$.

Для ММС дія кожної K_i аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого відношення $\triangleright_i$, $i \in I$.

Для ЗМС традиційно задають дуальну композицію $\Diamond$ ("можливо"): $\Diamond P$ означає $\neg \Box \neg P$.

Для ТмМС задають дуальні композиції $\Diamond\uparrow$ ("колись буде") і $\Diamond\downarrow$ ("колись було"): $\Diamond\uparrow P$ означає $\neg \Box\uparrow \neg P$; $\Diamond\downarrow P$ означає $\neg \Box\downarrow \neg P$.

ТМС номінативних рівнів будемо також подавати у вигляді $M = (S, R, A, Im)$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$.

Приклад 9.4.1. Опишемо мову чистих першопорядкових ЗМС. Алфавіт мови:

- множина V предметних імен;
- множина Ps предикатних символів;
- множини символів базових композицій $Cs = \{\neg, \vee, R_x^{\bar{v}}, \exists x\}$ та $Ms = \{\Box\}$.

Множину Fm формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP , FR , $F\exists$, а п. FM уточнимо так:

$$F\Box) \Phi \in Fm \Rightarrow \Box\Phi \in Fm.$$

Для запису скорочень формул також використовуємо символи похідних композицій $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $\forall x$ та $\Diamond$. Наприклад, $\Diamond\Phi$ означає $\neg\Box\neg\Phi$. Такі скорочення теж називаємо формулами.

При визначенні відображення Im для формул вигляду $\Box\Phi$ п. ІМ уточнимо як І $\Box$ таким чином:

$$Im(\Box\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Im(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S : \alpha \triangleright \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S : \alpha \triangleright \delta \text{ та } Im(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β , що $\alpha \triangleright \beta$, то для кожного $d \in {}^V A$ вважаємо $Im(\Box\Phi, \alpha)(d) \uparrow$.

Приклад 9.4.2. Опишемо мову чистих першопорядкових ТММС. Алфавіт мови:

- множина V предметних імен;
- множина Ps предикатних символів;
- множини символів базових композицій $Cs = \{\neg, \vee, R_x^{\bar{v}}, \exists x\}$ та $Ms = \{\Box \uparrow, \Box \downarrow\}$.

Множину Fm формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP, FR, F $\exists$, а п. FM уточнимо так:

$$F\Box\uparrow\downarrow \Phi \in Fm \Rightarrow \Box\uparrow\Phi \in Fm \text{ та } \Box\downarrow\Phi \in Fm.$$

Для запису скорочень формул також використовуємо символи похідних композицій $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $\forall x$ та $\Diamond\uparrow$, $\Diamond\downarrow$.

Наприклад, $\Diamond\uparrow\Phi$ та $\Diamond\downarrow\Phi$ означають $\neg\Box\uparrow\neg\Phi$ та $\neg\Box\downarrow\neg\Phi$.

При визначенні відображення Im для формул $\Box\uparrow\Phi$ та $\Box\downarrow\Phi$ п. ІМ уточнимо як І $\Box\uparrow\downarrow$ таким чином:

$$Im(\Box\uparrow\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Im(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S : \alpha \triangleright \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S : \alpha \triangleright \delta \text{ та } Im(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$Im(\Box\downarrow\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Im(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S : \delta \triangleright \alpha, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S : \delta \triangleright \alpha \text{ та } Im(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує $\beta : \alpha \triangleright \beta$, то $Im(\Box\uparrow\Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A$.

Якщо для $\alpha \in S$ не існує $\beta : \beta \triangleright \alpha$, то $Im(\Box\downarrow\Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A$.

Приклад 9.4.3. Опишемо мову чистих першопорядкових ММС. Алфавіт мови:

- множина V предметних імен;
- множина Ps предикатних символів;
- множини символів базових композицій $Cs = \{\neg, \vee, R_x^{\bar{v}}, \exists x\}$ та $Ms = \{K_i \mid i \in I\}$.

Множину Fm формул мови визначаємо згідно з наведеними вище пп. FP, FR, F $\exists$, а п. FM уточнимо так:

FK) $\Phi \in Fm$ та $K_i \in Ms \Rightarrow K_i \Phi \in Fm$.

При визначенні відображення Im для формул вигляду $K_i \Phi$ п. IM уточнимо як IK таким чином:

$$Im(K_i \Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Im(\Phi, \delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta \text{ та } Im(\Phi, \delta)(d) = F, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β , що $\alpha \triangleright_i \beta$, то $Im(\Box \Phi, \alpha)(d) \uparrow$ для кожного $d \in {}^V A$.

Залежно від умов, накладених на $\triangleright$, можна визначати різні класи ЗМС та ТмМС. Традиційно розглядають випадки, коли $\triangleright$ може бути рефлексивним, симетричним, транзитивним.

Якщо $\triangleright$ рефлексивне, то в назві ЗМС та ТмМС пишемо символ R ; якщо $\triangleright$ транзитивне, то пишемо символ T ; якщо $\triangleright$ симетричне, то пишемо S .

Отримуємо такі типи ЗМС:

R -ЗМС, T -ЗМС, S -ЗМС, RT -ЗМС, RS -ЗМС, TS -ЗМС, RTS -ЗМС.

Відповідно маємо такі типи ТмМС:

R -ТмМС, T -ТмМС, S -ТмМС, RT -ТмМС,

RS -ТмМС, TS -ТмМС, RTS -ТмМС.

Якщо $\triangleright$ симетричне, то $Im(\Box \uparrow \Phi, \alpha)(d) = Im(\Box \downarrow \Phi, \alpha)(d)$ для всіх α, d . Це означає, що дія композицій $\Box \uparrow$ та $\Box \downarrow$ ідентична, це фактично композиція $\Box$.

Отже, якщо $\triangleright$ симетричне, то типи S -ТмМС, RS -ТмМС, TS -ТмМС, RTS -ТмМС ідентичні відповідно типам S -ЗМС, RS -ЗМС, TS -ЗМС, RTS -ЗМС.

Зауважимо, що R -ЗМС, RS -ЗМС, RT -ЗМС, RTS -ЗМС подібні відповідно до класичних T -модельної, B -модельної, $S4$ -модельної та $S5$ -модельної структур.

Залежно від властивостей відношень $\triangleright_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо випадки, коли $\triangleright_i$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними, причому всі $\triangleright_i$ однотипні. Якщо всі $\triangleright_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ R ; якщо всі $\triangleright_i$ транзитивні, то пишемо T ; якщо всі $\triangleright_i$ симетричні, то пишемо S .

Отримуємо такі чисті типи ММС:

R -ММС, T -ММС, S -ММС, RT -ММС, RS -ММС, TS -ММС, RTS -ММС.

ММС зі скінченними множинами однотипних відношень $\triangleright_i$ назвемо *епістемічними*, або ММС епістемічного типу. Загальні ТМС є окремим випадком епістемічних ММС.

Традиційні системи епістемічної логіки знання можна природно розглядати в межах ММС епістемічного типу.

Зокрема, R -ММС, RT -ММС, RTS -ММС є узагальненнями відповідно епістемічних $T_{(n)}$ -, $S4_{(n)}$ -, $S5_{(n)}$ -систем.

Приклад 9.4.4. Для ММС можливі набагато складніші, змішані типи.

Наприклад, відношення $\triangleright_1$ транзитивне, відношення $\triangleright_2$ транзитивне й рефлексивне, $\triangleright_3$ симетричне тощо.

За умови $d \notin {}^V A_\delta$ постає питання: як задати значення $\Phi_\delta(d)$? Залежно від відповіді на нього можна виділити ТМЛІ із сильною умовою та із загальною умовою визначеності на станах.

Нехай при $d \notin {}^V A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d) \uparrow$. Це рівносильно умові $\Phi_\delta(d) \downarrow \Rightarrow d \in {}^V A_\delta$. Така властивість – це *сильна умова визначеності на станах* [22]. ТМС із такою умовою назвемо St -ТМС.

Конкретизуючи, отримуємо St -ЗМС, St -ТММС та St -ММС.

У випадку загальних St -ТМС із $(\Box\Phi)_\alpha(d) = T$ впливає $d \in {}^V A_\delta$ для всіх δ таких, що $\alpha \triangleright \delta$. Це означає: базові об'єкти (базові дані) не можуть зникати при переході до стану-наступника.

Проте сильна умова визначеності на станах занадто обмежувальна. За цієї умови також порушується еквітонність предикатів при дії модальних композицій.

Приклад 9.4.5 (див. [22]). Задамо *St*-ЗМС таку: $S = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha = \{a, b\}$, $A_\beta = \{b\}$ та $d = [x \mapsto b]$, $d' = [x \mapsto b, y \mapsto a]$. Задамо $p_\alpha(d) = T$, $p_\alpha(d') = T$, $p_\beta(d) = T$.

Нехай предикати p_α та p_β еквітонні. Згідно з $d' \notin {}^V A_\beta$ маємо $p_\beta(d') \uparrow$. Отже, маємо $d \subset d'$, $(\Box p)_\alpha(d) = T$ та $(\Box p)_\alpha(d') \uparrow$, що суперечить еквітонності предиката $(\Box p)_\alpha$.

Більш природною здається загальна умова визначеності на станах:

за умови $d \notin {}^V A_\delta$ задаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$.

Тут d_δ – позначення ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$.

Неформально це означає, що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти вигляду $v \mapsto a$ з базовими даними $a \in A_\delta$. Звідси випливає, що у випадку ТМС із загальною умовою визначеності на станах маємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d \in {}^V A$.

Базові модальні композиції ТМС із загальною умовою визначеності на станах уже зберігають (див. [22]) еквітонність.

За умовчанням далі будемо говорити про ТМС із загальною умовою визначеності на станах.

Взаємодія модальних композицій ТМС із реномінаціями та кванторами. Обмежимося розглядом ЗМС. Аналогічні твердження формулюються для ТмМС та ММС.

Символи модальних композицій можна проносити (див. [22, 24]) через реномінації.

Теорема 9.4.1. Для довільних Φ , $\alpha \in St$, $d \in {}^V A$ маємо

$$R_x^{\bar{v}} \Box \Phi_\alpha(d) = \Box R_x^{\bar{v}} \Phi_\alpha(d).$$

Наслідок 9.4.1. Кожна формула вигляду $R_x^{\bar{v}}(\Box \Phi) \leftrightarrow \Box R_x^{\bar{v}}(\Phi)$ неспростовна.

Розглянемо взаємодію модальних композицій та кванторів.

Теорема 9.4.2 (див. [11, 22]). Формули $\exists x \Box \Phi \rightarrow \Box \exists x \Phi$ та $\Box \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Box \Phi$ є неспростовними у випадку ЗМС еквітонних предикатів.

Наслідок 9.4.2. Формули $\Diamond \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Diamond \Phi$ та $\exists x \Diamond \Phi \rightarrow \Diamond \exists x \Phi$ неспростовні у випадку ЗМС еквітонних предикатів.

Це вже не так [24] для загального випадку ЗМС зі знятою умовою еквітонності.

Приклад 9.4.6. Формула вигляду $\exists x \Box \Phi \rightarrow \Box \exists x \Phi$ спростовна.

Побудуємо ЗМС, у якій спростовується $\exists x \Box \Phi \rightarrow \Box \exists x \Phi$. Нехай $St = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha = \{a, b\}$, $A_\beta = \{b\}$. Нехай для $p \in Ps$ неістотні всі імена, крім x, y . Маємо $[x \mapsto a, y \mapsto b]_\beta = [y \mapsto b]$.

Задамо $p_\beta([y \mapsto b]) = T$, $p_\beta([x \mapsto b, y \mapsto b]) = F$. Ураховуючи $A_\beta = \{b\}$, із $p_\beta([x \mapsto b, y \mapsto b]) = F$, маємо $\exists x p_\beta([y \mapsto b]) = F$, тому $\Box \exists x p_\alpha([y \mapsto b]) = F$. Із $p_\beta([x \mapsto a, y \mapsto b]_\beta) = p_\beta([y \mapsto b]) = T$ отримуємо $\Box p_\alpha([x \mapsto a, y \mapsto b]) = T$, звідки $\exists x \Box p_\alpha([y \mapsto b]) = T$. Отже, $(\exists x \Box p \rightarrow \Box \exists x p)_\alpha([y \mapsto b]) = F$, тому $\alpha \neq \exists x \Box p \rightarrow \Box \exists x p$.

Приклад 9.4.7. Формула вигляду $\Box \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Box \Phi$ спростовна.

Побудуємо ЗМС, у якій спростовується $\Box \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Box \Phi$. Нехай $St = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{b\}$. Маємо $[x \mapsto a]_\beta = \emptyset$. Нехай для $p \in Ps$ неістотні всі імена, крім x . Задамо $p_\alpha(\emptyset) = F$, $p_\beta(\emptyset) = F$, $p_\beta([x \mapsto b]) = T$. Тоді $\forall x p_\beta(\emptyset) = T$, звідки $\Box \forall x p_\alpha(\emptyset) = T$. Згідно з $[x \mapsto a]_\beta = \emptyset$ маємо $p_\beta([x \mapsto a]) = p_\beta([x \mapsto a]_\beta) = p_\beta(\emptyset) = F$, тому $\Box p_\alpha([x \mapsto a]) = F$. Звідси $\forall x \Box p_\alpha(\emptyset) = F$. Отже, отримали $(\Box \forall x p \rightarrow \forall x \Box p)_\alpha(\emptyset) = F$, тому $\alpha \neq \Box \forall x p \rightarrow \forall x \Box p$.

Зауважимо, що у ЗМС прикладів 9.4.6 та 9.4.7 предикат p_β нееквітонний.

Наслідок 9.4.3. Для ЗМС немонотонних (нееквітонних) предикатів формули вигляду $\exists x \Box \Phi \rightarrow \Box \exists x \Phi$, $\Box \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Box \Phi$ та $\Diamond \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Diamond \Phi$, $\exists x \Diamond \Phi \rightarrow \Diamond \exists x \Phi$ не є неспростовними.

Приклад 9.4.8. Формули $\Box \exists x \Phi \rightarrow \exists x \Box \Phi$ та $\forall x \Box \Phi \rightarrow \Box \forall x \Phi$ спростовні [11, 22] уже для ЗМС еквітонних предикатів.

Побудуємо ЗМС еквітонних предикатів, у якій спростовуються зазначені формули.

Нехай $St = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$, $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{a, b\}$. Нехай для $p, q \in Ps$ неістотні всі імена, крім x .

Задамо $p_\alpha([x \mapsto a]) = F$, $p_\beta([x \mapsto a]) = F$, $p_\beta([x \mapsto b]) = T$. З умови $p_\beta([x \mapsto a]) = F$ маємо $(\Box p)_\alpha([x \mapsto a]) = F$, звідки, згідно з $A_\alpha = \{a\}$, отримуємо $(\exists x \Box p)_\alpha([x \mapsto a]) = F$. Згідно з $p_\beta([x \mapsto b]) = T$ маємо $(\exists x p)_\beta([x \mapsto a]) = T$, звідки $(\Box \exists x p)_\alpha([x \mapsto a]) = T$. Таким чином, $(\Box \exists x p \rightarrow \exists x \Box p)_\alpha([x \mapsto a]) = F$, тому $\alpha \not\models \Box \exists x p \rightarrow \exists x \Box p$.

Задамо $q_\alpha([x \mapsto a]) = T$, $q_\beta([x \mapsto a]) = T$, $q_\beta([x \mapsto b]) = F$. З умови $p_\beta([x \mapsto a]) = F$, тоді $(\forall x q)_\beta([x \mapsto a]) = F$, звідки маємо $(\Box \forall x q)_\alpha([x \mapsto a]) = F$. Маємо $R = \{\alpha \triangleright \beta\}$, тому $q_\beta([x \mapsto a]) = T$ дає $(\Box q)_\alpha([x \mapsto a]) = T$, звідки $(\forall x \Box q)_\alpha([x \mapsto a]) = T$ внаслідок $A_\alpha = \{a\}$. Отримали $(\forall x \Box q \rightarrow \Box \forall x q)_\alpha([x \mapsto a]) = F$, тому $\alpha \not\models \forall x \Box q \rightarrow \Box \forall x q$.

Наслідок 9.4.4. Формули $\forall x \Diamond \Phi \rightarrow \Diamond \forall x \Phi$ та $\Diamond \exists x \Phi \rightarrow \exists x \Diamond \Phi$ спростовні вже для ЗМС еквітонних предикатів.

Аналогічні контрмоделі можна побудувати для ТмМС і ММС.

Формула $\forall x \Box \Phi \rightarrow \Box \forall x \Phi$ відома як *формула Баркан*.

Формула $\Box \forall x \Phi \rightarrow \forall x \Box \Phi$ – це конверсія формули Баркан.

Як показує приклад 9.4.7, формула Баркан є спростовною. За теоремою 9.4.2 конверсія формули Баркан істинна в кожній ЗМС еквітонних предикатів. Водночас конверсія формули Баркан спростовується [16] у деяких реляційних моделях алетичної модальної логіки. Суперечності тут немає, адже у цих реляційних моделях за умови $d \notin {}^V A_\beta$ значення $\Phi_\beta(d)$ вважається хибним, а ми розглядаємо *часткові* предикати, коли значення $\Phi_\beta(d)$ може бути невизначеним.

Для першопорядкових ЗМС, ТмМС та ММС побудовано (див., напр., [23, 25]) числення секвенційного типу. Такі числення базуються на реляційних семантичних моделях зазначених логік. Основою побудови цих числень є властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул мов таких ТМЛ. Для побудованих секвенційних числень доведено теореми коректності й повноти.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення КНМС.
2. Як уточнюється поняття КНМС для КНМЛ номінативних рівнів?
3. Опишіть синтаксис мови КНМЛ кванторного рівня.
4. Як задаються в КНМС множини гарантовано неістотних для формул імен?
5. Що таке сигнатура синтетичної неістотності КНМС?
6. Як визначається тип КНМС?
7. Опишіть відображення інтерпретації формул на станах світу КНМС.
8. Дайте визначення:
 - неспростовної в КНМС формули;
 - неспростовної формули.
9. Що таке транзиційна модальна система?
10. Що таке загальна ТМС (ЗМС)?
11. Що таке темпоральна ТМС (ТмМС)?
12. Що таке мультимодальна ТМС (ММС)?
13. Опишіть мови:
 - чистих першопорядкових ЗМС;
 - чистих першопорядкових ТмМС.
14. Дайте визначення:
 - R -ЗМС, T -ЗМС, S -ЗМС, RT -ЗМС, RS -ЗМС, TS -ЗМС, RTS -ЗМС;
 - R -ТмМС, T -ТмМС, S -ТмМС, RT -ТмМС, RS -ТмМС, TS -ТмМС, RTS -ТмМС;
 - R -ММС, T -ММС, S -ММС, RT -ММС, RS -ММС, TS -ММС, RTS -ММС.
15. Що таке ММС епістемічного типу?
16. Що таке ТМС із сильною умовою визначеності на станах?
17. Що таке ТМС із загальною умовою визначеності на станах?
18. Як взаємодіють модальні композиції ТМС із реномінаціями?
19. Наведіть приклади взаємодії модальних композицій із кванторами.

Вправи

1. Задайте відображення Im для формул вигляду $\Diamond\Phi$.
2. Задайте відображення Im для формул вигляду $\Diamond\uparrow\Phi$ та $\Diamond\downarrow\Phi$.
3. Доведіть теорему 9.4.1.
4. Доведіть теорему 9.4.2.
5. Дайте явний опис взаємодії модальних композицій $TmMC$ та MMC із реномінаціями.
6. Побудуйте контрмоделі для аналогів формул прикладів 9.4.6–9.4.7 у випадках MMC та $TmMC$.
7. Побудуйте контрмоделі для аналогів формул прикладів 9.4.8 у випадках MMC та $TmMC$ еквітонних предикатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Андон Ф. И.** Логические модели интеллектуальных информационных систем / Ф. И. Андон, А. Е. Яшунин, В. А. Резниченко. – К. : Наукова думка, 1999.
2. **Басараб И. А.** Композиционные базы данных / И. А. Басараб, Н. С. Никитченко, В. Н. Редько. – К. : Либідь, 1992.
3. **Глушков В. М.** Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наукова думка, 1974.
4. **Ішмуратов А. Т.** Вступ до філософської логіки / А. Т. Ішмуратов. – К. : Абрис, 1997.
5. **Клини С.** Введение в метаматематику / С. Клини. – М. : ИЛ, 1957.
6. **Клини С.** Математическая логика / С. Клини. – М. : Мир, 1973.
7. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М. : Наука, 1976.
8. **Непейвода Н. Н.** Прикладная логика / Н. Н. Непейвода. – Новосибирск : НГУ, 2000.
9. **Нікітченко М. С.** Основи математичної логіки / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2006.
10. **Нікітченко М. С.** Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
11. **Нікітченко М. С.** Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2013.
12. **Нікітченко М. С.** Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.

13. **Нікітченко М. С.** Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2018. – № 2–3. – С. 31–45.
14. **Основи дискретної математики** / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – К. : Наукова думка, 2002.
15. **Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови** / В. Н. Редько, Д. Б. Буй, Ю. Й. Брона, С. А. Поляков. – К. : Академперіодика, 2001.
16. **Семантика модальных и интенциональных логик** : сб. статей / под ред. В. А. Смирнова. – М. : Прогресс, 1981.
17. **Справочная книга по математической логике** : в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайса. – М. : Наука, 1982–1983.
18. **Такеути Г.** Теория доказательств / Г. Такеути. – М. : Мир, 1978.
19. **Фейс Р.** Модальная логика / Р. Фейс. – М. : Наука, 1974.
20. **Чень Ч.** Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. – М. : Наука, 1983.
21. **Шенфилд Дж.** Математическая логика / Дж. Шенфилд – М. : Наука, 1975.
22. **Шкільняк О. С.** Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
23. **Шкільняк О. С.** Секвенційні числення темпоральних і мультимодальних логік часткових предикатів / О. С. Шкільняк // Штучний інтелект. – 2013. – № 1. – С. 55–66.
24. **Шкільняк О. С.** Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів / О. С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2014. – Вып. 2. – С. 99–110.

25. **Шкільняк О. С.** Композиційно-номінативні модальні логіки немонотонних часткових предикатів та їх числення / О. С. Шкільняк, В. С. Касьянюк, Л. М. Малютенко // Пробл. програмування. – 2017. – № 2. – С. 24–39.
26. **Шкільняк С. С.** Математична логіка. Приклади і задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
27. **Шкільняк С. С.** Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності / С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2019. – № 3. – С. 28–44.
28. **Шкільняк С. С.** Композиційно-номінативні логіки безкванторних рівнів / С. С. Шкільняк, Д. Б. Волковицький // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 48–62.
29. **Ben-Ari M.** Mathematical Logic for Computer Science. – 2nd edition / M. Ben-Ari. – Springer-Verlag, 2001.
30. **Belnap N.** The logic of questions and answers / N. Belnap, T. Steel. – New Haven and London : Yale Univ. Press, 1976.
31. **Cocchiarella N. B.** Modal logic / N. B. Cocchiarella, M. A. Freund. – Oxford University Press, 2008.
32. **Clifford D.** Tense and tense logic / D. Clifford. – Hague : Mouton, 1975.
33. **Emerson E. A.** Temporal and Modal Logic / E. A. Emerson // Handbook of Theoretical Computer Science. – 1995. – Vol. B. – Ch. 16.
34. **Gabbay D.** Elementary logic (A procedural perspective) / D. Gabbay. – Prentice Hall Europe, 1998.
35. **Handbook of Logic in Computer Science** : in 5 vol. / Eds. S. Abramsky, D. Gabbay, T. S. E Maibaum. – Oxford : Clarendon Press, 1994–2000.
36. **Handbook of Modal Logics.** V.3. Studies in Logic and Practical Reasoning / Eds. P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. – Elsevier, 2006.

37. **Huth M.** Logic in Computer Science (Second Edition) / M. Huth, M. Ryan. – Cambridge University Press, 2004.
38. **Kröger F.** Temporal logic and state systems / F. Kröger, S. Merz. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
39. **Logics of Specification Languages.** EATCS Series, Monograph in Theoretical Computer Sciens / Eds. D. Bjorner, M. C. Henson. – Heidelberg : Springer, 2008.
40. **Łukasiewicz J.** O logice trójwartościowej / J. Łukasiewicz. – Ruch Filozoficzny. – Lwów, 1920. – Vol. 5.
41. **Manna Z.** The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli. – New-York : Springer-Verlag, 1991.
42. **Middelburg S. A.** Logic and specification / S. A. Middelburg. – London : Chapman & Hall Computing, 1993.
43. **Nikitchenko M.** Algebras and logics of partial quasiary predicates / M. Nikitchenko and S. Shkilniak // Algebra and Discrete Mathematics. – 2017. – Vol. 23, № 2. – P. 263–278.
44. **Oxford English Dictionary :** in 12 vol. / Eds. J. Simpson and E. Weiner. – Clarendon Press, 1989.
45. **Prior A. N.** Past, Present and Future / A. N. Prior. – Oxford : Clarendon, 1967.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
СПИСОК СКОРОЧЕНЬ	7
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ	9
2. ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА	19
2.1. Пропозиційні композиції. Мова пропозиційної логіки.....	19
2.2. Пропозиційне числення.....	29
2.3. Метод резолюцій пропозиційної логіки	35
2.4. Пропозиційне секвенційне числення	40
3. ЛОГІКИ НОМІНАТИВНИХ РІВНІВ. РЕНОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ	49
3.1. Квазіарні функції та предикати	49
3.2. Композиційні системи квазіарних функцій та предикатів	56
3.3. Реномінативна логіка	72
3.4. Реномінативні числення	83
4. ЛОГІКИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	90
4.1. Семантичні моделі та мови класичних логік першого порядку.....	90
4.2. Виразність у мовах першого порядку. Арифметичність.....	102
4.3. Відношення логічного наслідку. Еквівалентні перетворення формул	112

4.4. Гомоморфізми алгебраїчних систем. Метод автоморфізмів	123
4.5. Неокласичні логіки першого порядку	133
4.6. Першопорядкові неокласичні логіки функціонально-екваційного рівня	149
5. АКСІОМАТИЧНІ СИСТЕМИ ЛОГІК ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	157
5.1. Теорії першого порядку	157
5.2. Несуперечливість та повнота теорій першого порядку. Теорема Гьоделя про повноту, її наслідки. Категоричність	170
5.3. Аксиоматичні системи неокласичних логік першого порядку	178
6. СИСТЕМИ ПОШУКУ ДОВЕДЕНЬ У ЛОГІКАХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	184
6.1. Метод резолюцій логіки першого порядку	184
6.2. Секвенційні числення класичних чистих першопорядкових логік	194
6.3. Секвенційні числення неокласичних чистих першопорядкових логік	203
6.4. Секвенційні числення неокласичних логік функціонально-екваційного рівня	215
7. ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ	226
7.1. Квазіарні предикати реляційного типу та їхні семантики	226
7.2. Відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів	235

8. НЕТРАДИЦІЙНІ ЛОГІКИ	247
8.1. Багатозначні логіки.....	248
8.2. Інтуїціоністська логіка	255
9. МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ	264
9.1. Алетичні модальні логіки	265
9.2. Темпоральні логіки.....	271
9.3. Епістемічні та деонтичні логіки	278
9.4. Композиційно-номінативні модальні логіки часткових предикатів	285
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	297

Навчальне видання

ШКІЛЬНЯК Степан Степанович

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ПРИКЛАДИ Й ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*
Технічний редактор *Ю. Куценко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 17,7. Наклад 100. Зам. № 222-10478.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № КЗ.
Підписано до друку 18.11.22

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет",
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
[http: vpc.knu.ua](http://vpc.knu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02