

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ: КУРС ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Алгебра та аналітична геометрія: Курс лекцій [Електронний ресурс]: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 273 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу (протокол № 4 від 25.04.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ: КУРС ЛЕКЦІЙ

Укладач:
Відповідальний
редактор

*Бохонов Юрій Євгенович, канд. ф. - мат. н, доцент
Подколзін Г.Б., канд. ф. - мат. н., доцент*

Рецензент:

Голуб А.П., д-р ф.-мат. н., провідний науковий співробітник

Інституту математики НАН України

Курс лекцій «Алгебра та аналітична геометрія: Курс лекцій» призначено для вивчення студентами спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» основ аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Особливу увагу приділено теорії лінійних просторів, операторів, матриць та визначників, причому, остання викладається з точки зору апарату алгебр Грассмана. Алгебраїчний апарат застосовується до задач, що виникають у аналітичній геометрії. Викладено теорію прямих і площин, а також кривих другого порядку, зведення їх до головних осей. Деякі важливі класичні приклади матриць, нестандартні задачі на знаходження визначників вміщено в доповненнях.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ	5
1. Лекція 1. Векторні лінійні простори	6
2. Лекція 2. Підпростори лінійних просторів	14
3. Лекція 3. Геометричні простори	20
3.1. Ділення відрізка у даному відношенні	23
4. Лекція 4. Матриці та дії з ними	27
5. Лекція 5. Лінійні оператори та їхні матриці	45
5.1. Координати вектора у різних базисах	55
5.2. Матриця оператора у різних базисах	59
6. Лекція 6. Зовнішній добуток та його властивості, алгебра Грассмана	65
6.1. Парність підстановки	70
6.2. Зовнішній добуток і алгебра Грассмана	71
7. Лекція 7. Детермінант (визначник) матриці та його властивості	75
8. Лекція 8. Обчислення визначника (теорема лапласа, обернена матриця	93
9. Лекція 9. Методи знаходження рангу матриці та оберненої матриці; матричні рівняння	99
9.1. Метод Гауса	101
9.2. Матричні рівняння	102
10. Лекція 10. Теорія лінійних систем алгебраїчних рівнянь	109
10.1. Способи визначення лінійного підпростору	119
10.2. Перетин та сума лінійних підпросторів	123
11. Лекція 11. аналітична геометрія. операції з векторами. скалярний та векторний добутки	125
11.1. Векторний добуток	131
12. Лекція 12. аналітична геометрія. операції з векторами. Векторний та мішаний добутки	

	139
12.1. Мішаний добуток трьох векторів	143
12.2. Об'єм тетраедра	145
13.Лекція 13. Рівняння прямої у просторі і на площині	147
13.1. Нормальне рівняння прямої	154
14.Лекція 14. Площина у просторі.	161
15.Лекція 15. Канонічні рівняння ліній другого порядку	174
15.1. Канонічне рівняння еліпса	174
15.2. Канонічне рівняння гіперболи	180
15.3. Канонічне рівняння параболи	185
16.Лекція 16. Оптичні властивості кривих другого порядку; інші форми рівнянь другого порядку	189
16.1. Параметричне зображення кривих другого порядку .	193
16.2. Рівняння кривих другого порядку у полярній системі координат	194
17.Лекція 17. Деякі відомості про квадратичні форми і їхні перетворення	196
18.Лекція 18. Перетворення рівняння кривої другого порядку шляхом повороту координатних осей	202
18.1. Інваріанти кривих другого порядку	213
19.Додаток І. Деякі важливі матриці	219
20.Додаток ІІ. Деякі важливі приклади і методи знаходження визначників	228
21.Додаток ІІІ. Теорема Біне-Коші і Лапласа	261
22.Література	267
23.Предметний покажчик	271

ВСТУП

Курс лекцій «Алгебра та аналітична геометрія: Курс лекцій» поєднує в собі основні алгебраїчні структури, насамперед, основи теорії скінченновимірних лінійних просторів і лінійних операторів в них і стандартні задачі аналітичної геометрії. При цьому потрібний алгебраїчний апарат вже викладено для просторів довільної розмірності, що дає змогу їхнього ефективного застосування.

При викладенні теорії лінійних просторів особливо ретельно вивчаються такі конструкції як сума і перетин лінійних підпросторів, пряма сума.

Особлива увага в теорії операторів приділяється методиці знаходження матриці лінійного оператора у певному базисі і зв'язку його матриць у різних базисах.

Для викладення теорії визначників матриць використовується техніка зовнішніх добутків в алгебрі Грассмана. Це дає, на думку автора, більш прозоре і зрозуміле доведення основних властивостей визначників.

Розвинений алгебраїчний апарат далі застосовується при дослідженні лінійних об'єктів у аналітичній геометрії – прямих і площин, приводяться основні способи їхнього визначення. Особлива увага приділяється нормальним рівнянням прямої і площини, що дає змогу розглянути деякі важливі задачі, зокрема, на знаходження бісектриси та бісекторіальної площини.

В розділі, присвяченому аналітичній геометрії, розглядаються канонічні рівняння кривих другого порядку на площині, а також зведення загальних рівнянь до канонічного вигляду. При цьому використовуються матриці повороту системи координат і їхні властивості.

В посібнику вміщено три додатки – з деякими важливими класичними прикладами матриць, нестандартним методам знаходження визначників, що може бути використано на практичних заняттях, та теоремами Біне-Коші і Лапласа.

ЛЕКЦІЯ 1. ВЕКТОРНІ ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

План

- 1). Означення групи
- 2). Означення кільця і поля.
- 3). Означення лінійного векторного простору.
- 4). Гомоморфізм та ізоморфізм просторів.
- 5). Лінійні комбінації векторів.
- 6). Базис простору.

Означення 1.1. Групою G називається множина елементів, на якій визначена одна операція (яка іноді називається законом композиції), що ставить у відповідність двом елементам $a, b \in G$ деякий елемент $c \in G$. Іноді, виходячи з міркувань зручності, будемо позначати цю операцію як добуток ($ab=c$), називаючи групу мультиплікативною, іноді – як суму ($a + b = c$), називаючи групу адитивною.

Операція повинна задовольняти такі аксіоми.

1. Для $a, b \in G$ $(ab)c = a(bc)$ – закон асоціативності.
2. Існує такий елемент $e \in G$, що для довільного $a \in G$ $ae = ea = a$. Цей елемент називається одиничним або тотожним, оскільки композиція з ним не змінює елемент a .
3. Для кожного $a \in G$ існує елемент b такий, що $ab=ba=e$. Елемент b називається оберненим до a і буде позначатися a^{-1} . Іноді кажуть, що в групі визначене ділення.
4. Якщо в групі виконується ще аксіома комутативності для довільних $a, b \in G$, тобто $ab = ba$, то група називається комутативною або абелевою на честь математика Нільса Хенріка Абеля¹.

¹ Нільс Г'єнрік А́бель (норв. *Niels Henrik Abel*; 5/08/1802, м. Фіннхой, провінція Ругаланн, Норвегія – 6/04,1829, м. Фроланн, провінція Еуст-Агдер, Норвегія.) – видатний математик.

Говорячи про абстрактні групи, як правило, групову операцію називають добутком. Якщо ж група комутативна, то часто зручніше абстрактну групу вважати адитивною і групову операцію називати сумою.

У групі може існувати тільки одна одиниця. Справді, якщо e_1 також одиниця, то, з одної боку, $ee_1 = e_1$, а з іншого – $ee_1 = e$, тобто $e_1 = e$.

Для кожного елемента існує тільки один обернений. Дійсно, якщо $ab=ac=e$, то, розглянувши елемент bac і застосувавши аксіому 1, одержимо: $(ba)c = c = b(ac) = b$, отже, $b=c$.

Доведемо, що $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Для доведення треба показати, що їхній добуток дорівнює одиничному елементу. Справді, $abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = e$. Оскільки обернений елемент єдиний, це і доводить твердження. Зрозуміло, що така ж формула справедлива для довільної кількості співмножників:
$$(a_1a_2\dots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\dots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Через a^k будемо позначати добуток $a\dots a$ (k разів). З попереднього випливає, що $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$, тому будемо вживати позначення $a^{-k} = (a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$.

Групи, як ми побачимо далі, можуть бути скінченними або нескінченними. Кількість елементів скінченної групи називається її порядком. Порядок нескінченної групи – це потужність множини її елементів.

Приклади. Далі будемо використовувати позначення: $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

1. Якщо закон композиції в групі – операція множення чисел, то мультиплікативними групами будуть такі множини: $\mathbb{R} \setminus 0$, $\mathbb{C} \setminus 0$. Очевидно, це абелеві групи. Одиничним елементом у них є число 1. Оберненим елементом до кожного елемента a (відповідно для кожної з множин) є обернене число

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

2. $G = \mathbb{R}_+$ (множина дійсних додатних чисел) і $G = \mathbb{Q}_+$ (множина раціональних додатних чисел) утворюють абелеві мультиплікативні групи.

3. Якщо законом композиції є операція додавання, то групами будуть множини $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. Очевидно, це абелеві групи. Одиничним елементом в них є число 0, оскільки композиція довільного числа з 0 (тобто додавання 0) не змінить його. Оберненим для a , очевидно, є число $-a$.

4. Множина з двох чисел $\{1, -1\}$ – мультиплікативна абелева група.

5. $Z_2 = \{0, 1\}$. Композиція – додавання, що визначається так: $1+1=0$, одиниця групи – нуль.

Далі ми зустрінемося з іншими прикладами груп.

Означення 1.2. Множина R , для двох довільних елементів якої визначені дві операції – додавання і множення, внаслідок яких знову одержуються елементи із R , називається кільцем, якщо ці операції задовольняють аксіомам 1–7:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (асоціативність додавання);

2) $a + b = b + a$ (комутативність додавання);

3) існує елемент $0 \in R$, що $a + 0 = 0 + a = a$ (існування нуля);

4) для $a \in R$ існує елемент $b \in R$, що $a + b = b + a = 0$; позначення: $b = -a$ (існування оберненого елемента відносно додавання);

5) $a(bc) = (ab)c$ (асоціативність добутку);

6) існує $e \in R$ (або інколи позначають $1 \in R$), що $ea = ae = a$ (існування одиниці);

7) $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивність множення відносно додавання).

Якщо виконується аксіома:

8) $ab = ba$ (комутативність добутку), кільце називається комутативним або абелевим.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, елементи кільця не повинні мати обернені щодо операції множення. Якщо ж для деякого елемента a існує елемент r такий, що $ar = e$, то він називається правим оберненим до a . Аналогічно визначається лівий обернений: $la = e$.

Твердження 1.1. В асоціативній алгебрі лівий і правий обернений елементи до даного елемента співпадають.

Доведення. Це має місце завдяки асоціативності множення. Маємо: $e = ar$. Помножимо зліва обидві частини цієї рівності на l : $le = l = (la)r = er = r$. Це й треба було довести.

Тепер обернений до a елемент можна позначити через a^{-1} .

Якщо для деяких ненульових елементів a і b $ab=0$, то вони називаються дільниками нуля.

Якщо елемент a є дільником одиниці, то він не є дільником нуля. Дійсно, нехай $ab=0$. Помножимо обидві частини рівності на a^{-1} : $a^{-1}ab=b=0$.

Існують кільця без дільників нуля і одиниці, наприклад, кільце цілих чисел.

Означення 1.3. Якщо виконуються сім перших аксіом і аксіома:

9) для $a \in Z$, $a \neq 0$ існує елемент b такий, що $ab = ba = e$, $b \equiv a^{-1}$, то таке кільце називається тілом.

Означення 1.4. Якщо виконуються аксіоми 1–9, то таке комутативне тіло називається полем.

Відомо, що скінченне тіло є поле (теорема Веддерберна²).

Підмножина $R_1 \subseteq R$ називається підкільцем кільця R , коли вона є кільцем і замкнена відносно усіх операцій кільця.

Нехай R_1 і R_2 – кільця. Відображення $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ називається гомоморфізмом, якщо воно переводить операції кільця R_1 в операції кільця R_2 , тобто для $x, y \in R$ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$. Радимо читачеві перевірити (як це робилося в випадку груп), що при гомоморфізмі нуль R_1 переходить в нуль R_2 , а одиниця – в одиницю.

Гомоморфізм кільця в себе називається ендоморфізмом.

Взаємнооднозначний гомоморфізм називається ізоморфізмом; ізоморфізм кільця на себе називається автоморфізмом.

² **Веддерберн, Джозеф** (2/02/1882, Форфар, східна Шотландія – 9/10/1948, Принстон, США) – відомий математик.

Приклади кілець:

- 1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, причому три останніх – поля;
- 2) $Z[x]$ – кільце всіх многочленів від змінної x ;
- 3) $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.

Означення 1.5. Нехай E – адитивна абелева група, для елементів якої визначені операції додавання та множення на елементи деякого поля K , причому, виконуються аксіоми для $a, b \in K, x, y \in E$:

- 1) $a(bx) = (ab)x, 1 \cdot x = x$;
- 2) $(a + b)x = ax + bx$;
- 3) $a(x + y) = ax + ay$.

Тоді E називається векторним лінійним простором над полем K або просто – лінійним простором над полем K . Якщо простору $K = \mathbb{R}$, простір називається дійсним, якщо $K = \mathbb{C}$ – комплексним. Як правило, з контексту буде зрозуміло, над яким полем розглядається простір.

Наведемо деякі наслідки з означення лінійного простору.

А) $\forall x \in E, 0 \in K \quad 0x = 0 \in E, \forall a \in K, 0 \in E \quad a0 = 0 \in E$.

Дійсно, $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$, звідки, додаючи обернений до $0x$ елемент (що існує в абелевій групі) до обох частин рівності, одержимо $0x = 0$. Аналогічно $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0$, і $a0 = 0$.

Б) $(-1)x = -x$. Дійсно, $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x$, тобто вектор $(-x)$ протилежний до x .

В) Якщо $ax = 0$, то або $a = 0$, або $x = 0$. Дійсно, якщо $a \neq 0$, то $0 = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1x = x$, і $x = 0$.

З першої аксіоми випливає, що $a(-x) = -ax$.

Означення 1.6. Множина $F \subset E$ називається підпростором простору E , якщо разом з довільними векторами $x, y \in F$ в неї входить кожна їхня лінійна комбінація $ax + by$ ($a, b \in K$).

Означення 1.7. Лінійні простори E і F називаються гомоморфними, якщо існує відображення $\varphi : E \rightarrow F$, яке задовольняє умову

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \alpha, \beta \in K.$	(1.1)
---	-------

Взаємно однозначний гомоморфізм при умові $\varphi(E) = F$ називається ізоморфізмом.

Означення 1.8. Система векторів $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ називається системою твірних лінійного простору, якщо кожен його елемент x можна подати у вигляді лінійної комбінації елементів e , тобто

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$	(1.2)
----------------------------	-------

При цьому кажуть, що лінійний простір – це лінійна оболонка системи $e = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Означення 1.9. Система векторів $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$	(1.3)
----------------------------	-------

можлива тоді і лише тоді, коли всі елементи x_i дорівнюють 0.

В протилежному випадку система називається лінійно залежною. Тобто, якщо

існує хоча б одне $x_j \neq 0$ і при цьому $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$, то система $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ буде

лінійно залежною. З цього, зокрема, випливає, що система, яка містить нульовий вектор, обов'язково лінійно залежна. Дійсно, цей вектор досить

помножити на довільне не рівне нулю число (наприклад, на одиницю), а всі інші – на нулі, і тоді умова (1.3) буде справджуватись.

Очевидно, якщо взяти всі елементи E , то вони будуть утворювати систему твірних, але серед них, безумовно, є лінійно залежні.

Означення 1.10. Лінійно незалежна система твірних простору називається його базисом.

Доведемо, що кожен елемент простору має єдине зображення у вигляді (1.2), якщо елементи $e_1, e_2, \dots, e_n$ утворюють базис. Дійсно, коли є ще одне зображення

$x = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, тоді, віднімаючи ці рівності, одержимо, що

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i = 0,$$

а це суперечить лінійній незалежності векторів базису.

Виявляється, що всі базиси лінійного простору мають однакові потужності (однакову кількість елементів).

Твердження 1.1. Нехай системи векторів $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ і $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ утворюють базис лінійного простору. Тоді $m=n$.

Доведення. Для визначеності будемо вважати, що $m < n$. Візьмемо вектор g_1 і перенесемо його в перший базис. Нова система буде лінійно залежною, і цей вектор зобразимо у вигляді лінійної комбінації векторів з f . Нехай, скажімо, перед першим вектором f_1 цієї лінійної комбінації коефіцієнт не дорівнює нулю, отже, f_1 можна виразити через g_1 і решту елементів $f_2, \dots, f_m$. Розглянемо нову сукупність $\{g_1, f_2, \dots, f_m\}$. Очевидно, вона буде лінійно незалежною системою твірних, тобто, базисом простору. Дійсно, вектор g_1 лінійно виражається через вектори $f_1, \dots, f_m$, а вони утворюють базис. Будемо діяти так само, аж поки в новій системі не опиняться вектори $\{g_1, \dots, g_m\}$, які будуть становити базис простору, а значить, вектори $\{g_{n-m+1}, \dots, g_n\}$, що

залишилися в системі g , будуть лінійно виражатись через вектори $\{g_1, \dots, g_m\}$, що неможливо, оскільки система g утворює базис.

Означення 1.11. Лінійний простір називається скінченновимірним, якщо він має скінченний базис. Кількість елементів базису називається вимірністю простору і позначається $\dim(E)$.

Зауважимо: можна довести, що базис завжди існує в просторі, котрий має скінченну систему твірних. Читачу радимо зробити це самостійно.

Означення 1.12. Нехай $g_1, g_2, \dots, g_m$ - деяка система векторів, серед яких існує максимальна лінійно незалежна підсистема r ($r \leq m$) векторів. Число r називається її рангом, а множина цих лінійно незалежних векторів – базою системи.

Твердження 1.2. Нехай $g_1, g_2, \dots, g_r$ - лінійно незалежна система. Тоді система $g_1 + \lambda g_2, g_2, \dots, g_r \forall \lambda \in \mathbb{R}$ також лінійно незалежна.

Доведення. Перевіримо, в якому випадку лінійна комбінація векторів нової системи може дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned}\beta_1(g_1 + \lambda g_2) + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_n g_n &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \beta_1 g_1 + (\lambda \beta_1 + \beta_2) g_2 + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_n g_n &= 0.\end{aligned}$$

Завдяки лінійній незалежності початкової системи всі коефіцієнти одержаної рівності дорівнюють нулю:

$$\beta_1 = \lambda \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0,$$

що й доводить лінійну незалежність нової системи.

Наслідок 1. Якщо до будь-якого вектора лінійно незалежної системи додати лінійну комбінацію інших векторів, одержимо лінійно незалежну систему.

Теорема 1.1. Якщо до будь-якого вектора системи з m векторів, що має ранг $r \leq m$, додати лінійну комбінацію інших векторів, ранг утвореної нової системи також буде дорівнювати r .

Доведення очевидне: у визначенні рангу беруть участь r лінійно незалежних векторів – база системи. Додавання до будь-якого з них лінійної комбінації векторів, які лінійно виражаються через вектори бази, очевидно, не змінюють ранг системи, додавання лінійних комбінацій векторів бази, як тільки що було показано, також приведе до нової системи, ранг якої дорівнює рангу попередньої.

Означення 1.13. Процедура додавання до вектора системи лінійної комбінації інших векторів називається елементарним перетворенням.

Отже, теорему 1.1 можна сформулювати ще й так: ранг системи векторів не змінюється в результаті її елементарних перетворень.

Контрольні запитання

- 1). Навести приклади груп, кілець, полів та лінійних просторів.
- 2). Пояснити ізоморфізм лінійних просторів однакової розмірності.
- 3). Які системи векторів у геометричних просторах становлять базис? Дати пояснення.

ЛЕКЦІЯ 2. ПІДПРОСТОРИ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ

План

- 1). Означення підпростору лінійного простору.
- 2). Доповнення базису підпростору до базису простору.
- 3). Сума і перетин підпросторів, пряма сума.

Теорема 2.1. Нехай E_1 — підпростір в E і $e_1, e_2, \dots, e_m$ - базис в E_1 . Тоді його можна доповнити до базису всього E .

Доведення. Дійсно, візьмемо будь-який базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ в E і розглянемо сукупність векторів $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$, що, безумовно, буде системою твірних E . Будемо викидати з цієї сукупності по черзі вектори, які є лінійними комбінаціями попередніх. При цьому базисні вектори з E_1 залишаться, бо вони

лінійно незалежні між собою. Таким чином через скінченну кількість кроків буде побудовано базис простору E .

Нехай E_1 і E_2 — лінійні підпростори простору E . Зрозуміло, що множина $E_1 \cap E_2$ є підпростір простору E , а множина всіх лінійних комбінацій вигляду $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ також утворює підпростір простору E . Її будемо позначати $E_1 + E_2$. Позначимо $n_1 = \dim(E_1), n_2 = \dim(E_2), n_0 = \dim(E_1 \cap E_2)$.

Теорема 2.2. Справедлива формула:

$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$	(2.1)
---	-------

Доведення. Виберемо базис $\{h_1, \dots, h_m\} \subset E_1 \cap E_2$ і доповнимо його до базису E_1 :

$\{h_1, \dots, h_m, f_1, \dots, f_k\}$ та $E_2: \{h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_l\}$. Очевидно, сукупність

$\{h_1, \dots, h_m, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l\}$ буде системою твірних в $E_1 + E_2$. Доведемо її лінійну незалежність. Нехай має місце рівність

$$\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = 0.$$

Звідси

$$\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k = -\beta_1 g_1 - \dots - \beta_l g_l \equiv h.$$

Права частина рівності, вектор, який позначено через h , належить E_2 , а ліва — до E_1 , значить, вирази в обох частинах належать до $E_1 \cap E_2$, отже, h можна розкласти за базисом $\{h_1, \dots, h_m\}$, і тоді $-\beta_1 g_1 - \dots - \beta_l g_l = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_m h_m$. Звідси маємо: $\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_m h_m + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = 0$, що протирічить лінійній незалежності векторів $\{h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_l\}$. Отже, $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$, а тоді $h=0$, з чого випливає лінійна залежність векторів системи $\{h_1, \dots, h_m, f_1, \dots, f_k\}$, а це

неможливо, оскільки вона становить базис у E_1 . Звідси випливає, що $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. Це й завершує доведення лінійної незалежності твірної системи $\{h_1, \dots, h_m, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l\}$ в $E_1 + E_2$.

Нехай E_1, E_2 - лінійні підпростори простору E і $E = E_1 + E_2$. Кожен вектор $x \in E$ можна зобразити у вигляді суми векторів $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 : x = x_1 + x_2$. Взагалі кажучи, таке зображення може бути неєдиним. Це легко проілюструвати на прикладі трьохвимірного простору, в якому взято дві площини, що перетинаються під ненульовим кутом. Візьмемо на лінії їхнього перетину точку O , два вектори в одній площині, що виходять з O і перетинаються під ненульовим кутом, та аналогічно два вектори в другій площині, причому ні один з цих векторів не лежить на лінії перетину площин. Очевидно, побудовані вектори утворюють систему твірних простору, але будуть лінійно залежними і тому кожен вектор простору можна записати як їхню лінійну комбінацію неєдиним способом. Це означає, що кожен вектор простору можна зобразити як суму векторів цих площин неєдиним способом. Якщо ж взяти площину і пряму, що перетинає цю площину під ненульовим кутом, то довільний вектор простору можна зобразити як суму векторів площини і прямої єдиним способом. Для цього можна вибрати деякий базис в площині. Тоді разом з довільним вектором прямої він буде утворювати базис простору.

Означення 2.1. Нехай E_1, E_2 - підпростори в E , причому $E_1 + E_2 = E$ і для довільного вектора $a \in E$ зображення $a = x + y$, де $x \in E_1, y \in E_2$ єдине. Тоді будемо говорити, що простір E є пряма сума підпросторів E_1 і E_2 і позначати це так: $E = E_1 \oplus E_2$.

Аналогічно можна утворити пряму суму довільної скінченної множини лінійних просторів.

Виявляється, що досить перевіряти однозначність зображення тільки нульового вектора з E як суму нульових векторів з E_1 і E_2 . Цього буде необхідно і досить

для того, щоб сума підпросторів, які утворюють весь простір, була прямою. Дійсно, якщо сума пряма, то кожен вектор, в тому числі і нульовий, має єдине зображення. Навпаки, якщо нульовий вектор має єдине таке зображення, а деякий вектор $a \in E$ має два зображення: $a = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, тоді $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$, причому $x_1 - y_1 \in E_1, x_2 - y_2 \in E_2$ і з однозначності зображення нуля випливає, що $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Таким самим чином аналогічне твердження доводиться для довільної скінченної прямої суми підпросторів. Радимо читачеві зробити це самостійно.

Нехай $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в E_1 , $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ — базис в E_2 , тоді, очевидно, $e \cup f$ — базис в $E_1 \oplus E_2$.

Теорема 2.3. Нехай $E_1, \dots, E_m \subset E$ — лінійні підпростори простору E . Тоді $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$, тоді і лише тоді, коли

$$E = \sum_{i=1}^m E_i \text{ і } E_j \cap \left(\sum_{i \neq j} E_i \right) = \{0\}.$$

Доведення. Необхідність. Нехай сума підпросторів пряма. Покажемо, що при цьому виконується дана умова. Нехай це не так, тобто, перетин підпросторів непорожній:

$$E_j \cap \left(\sum_{i \neq j} E_i \right) \neq \{0\}.$$

Означає, що

$$\exists l_j \in E_j, l_j \in E_1 + \dots + E_{j-1} + E_{j+1} + \dots + E_m, l_j \neq 0.$$

Тоді $l_j = l_1 + \dots + l_{j-1} + l_{j+1} + \dots + l_m \Rightarrow l_1 + \dots + l_{j-1} - l_j + l_{j+1} + \dots + l_m = 0$. Це означає, що нуль-вектор може бути зображений у вигляді сум векторів підпросторів неоднозначно, а це суперечить тому, що сума підпросторів пряма.

Достатність. Нехай умова теореми виконується, тобто, кожен підпростір $E_j, j=1, \dots, m$ має нульовий перетин з сумами інших підпросторів $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m E_i$. Якщо

уявити, що існують вектори $l_j \in E_j, j=1, \dots, m$ такі, що

$$l_1 + \dots + l_{j-1} + l_j + l_{j+1} + \dots + l_m = 0,$$

тоді звідси випливає, що $l_j = -l_1 - \dots - l_{j-1} - l_{j+1} - \dots - l_m \forall j=1, \dots, m$. Але з умови теореми такий спільний вектор підпросторів може бути тільки нульовий, тобто, $l_j = 0 \forall j=1, \dots, m$. Це означає, що нуль-вектор простору можна зобразити єдиним способом як суму нуль-векторів, що лежать у кожному з підпросторів суми, що й означає, що ця сума пряма.

Зауважимо, що у випадку двох підпросторів $E = E_1 \oplus E_2$ тоді і тільки тоді, коли $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Приклад 2.1. Нехай $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$. Розглянемо впорядковані набори з n чисел:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \triangleq (x_1, \dots, x_n)^T, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \triangleq (y_1, \dots, y_n)^T.$$

Тут T – операція транспонування, яка полягає в заміні рядка на відповідний стовпчик (або навпаки).

Будемо називати їх векторами-стовпчиками. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ та $y_1, y_2, \dots, y_n$ будемо називати компонентами або координатами цих векторів. Введемо операції додавання таких векторів та множення їх на число:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T, \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)^T, \quad \alpha \in K.$$

Очевидно, ці операції задовольняють аксіоми лінійного простору, тому така множина векторів утворює лінійний простір, що позначається K^n , зокрема, $\mathbb{R}^n$ при $K = \mathbb{R}$ і $\mathbb{C}^n$ - при $K = \mathbb{C}$.

Легко бачити, що вектори

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$$

утворюють базис простору $\mathbb{R}^n$, що називається канонічним базисом простору.

Отже, можна вважати, що $K^n = K \times K \times \dots \times K = K \oplus K \oplus \dots \oplus K$, оскільки в скінченновимірному випадку, як неважко показати, прямі добутки та прямі суми абелевих груп співпадають.

Нехай E_n - n -вимірний лінійний простір. Зробимо важливий висновок: кожному вектору $\forall x \in E_n$ можна зіставити вектор-стовпчик з $\mathbb{R}^n$, що утворений з коефіцієнтів розкладу його за деяким базисом (формула (1.2)) і навпаки: по кожному вектору-стовпчику можна побудувати вектор з E_n , користуючись формулою (1.2). Таким чином, кожен n -вимірний простір ізоморфний простору $\mathbb{R}^n$, і тому всі n -вимірні простори ізоморфні між собою.

Отже, нехай у n -вимірному лінійному просторі E_n вибрано базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$

і вектору $x \in E_n : x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ зіставляється вектор-стовпчик з $\mathbb{R}^n$ з коефіцієнтів цього розкладу, який будемо позначати

$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$	(2.2)
---	---------

Для економії місця його інколи записують у рядок і позначають

$$[x]_e = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Означення 2.2. Лінійний простір називається нормованим, якщо на ньому задано числову функцію, що називається нормою, значення якої для $x \in E_n$ позначається $\|x\|$, і ця функція задовольняє умови:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Властивість 3) називається нерівністю трикутника.

Зрозуміло, що модуль «геометричного» вектора на площині E_2 і у просторі (трьохвимірному) E_3 дає приклад норми.

Контрольні запитання

- 1). Що таке підпростір лінійного простору?
- 2). Чи утворює підпростір об'єднання підпросторів.
- 3). Що можна сказати про суму підпросторів і її розмірність.?
- 4). Навести приклади підпросторів у геометричному трьохвимірному просторі.

Лекція 3. ГЕОМЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

План

- 1). Визначення лінійних операцій для геометричних векторів.
- 2). Базиси у двовимірному та трьохвимірному просторах.
- 2). Ділення відрізка у даному відношенні.
- 3). Застосування до деяких планіметричних задач.

Вектори на площині і у просторі

Означення 3.1. Вектором $\overrightarrow{OA}$ (геометричним) називається направлений відрізок. Точка O - початок вектора, A - його кінець.

Вектор визначається його довжиною або модулем, що позначається $|\overrightarrow{OA}|$, і напрямом.

Також будемо позначати такий вектор однією літерою: $\vec{a}$.

Два вектори вважаються рівними, якщо вони лежать на двох паралельних прямих або на одній прямій (колінеарні прямі), мають однакові модулі і напрями.

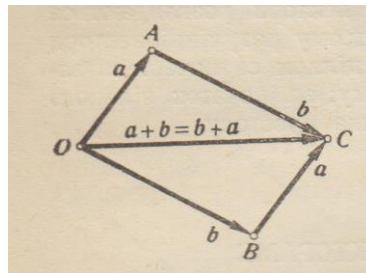
Для колінеарних векторів будемо застосовувати позначення $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Якщо треба підкреслити, що вони також однаково направлені, будемо використовувати позначення $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$. Для векторів, що мають протилежні напрямки вживаємо позначення $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор – це вектор, початок і кінець якого співпадають. Очевидно, його модуль дорівнює нулю.

Додавання векторів

Означення 3.2. Сумою векторів $\vec{OA}, \vec{OB}$ (що мають спільний початок) називається діагональ $\vec{OC}$ паралелограма, побудованого на цих векторах (Мал. 3.1):

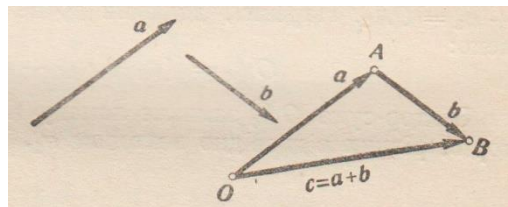
$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$	(3.1)
-----------------------------------	-------



Мал. 3.1

Зауважимо, що цей паралелограм може бути виродженим, якщо вектори колінеарні. За означенням вектори $\vec{AC} = \vec{OB}$, тому суму можна визначати за правилом трикутника (Мал. 3.2):

$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}.$	(3.2)
-----------------------------------	-------



Мал. 3.2

Зафіксуємо точку O на площині чи в просторі. Будемо називати її початком або полюсом. Вектор $\overrightarrow{OA}$ називається радіусом-вектором точки A відносно O .

Означення 3.3. множення вектора на число. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Вектор $\alpha \vec{a}$, колінеарний $\vec{a}$, має той самий напрям, що і $\vec{a}$, при $\alpha > 0$ і протилежний, якщо $\alpha < 0$, і їхні модулі пов'язані співвідношенням $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$.

Легко бачити, що вектори на площині або у просторі утворюють лінійні простори. Читач легко самостійно перевірить виконання аксіом лінійного простору.

Базис на площині утворюють два довільні неколінеарні вектори $\vec{a}, \vec{b}$. Те, що вони становлять систему твірних, випливає з правила паралелограма їхнього додавання: очевидно, довільний вектор $\vec{c}$ можна подати як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}$. Припущення їхньої лінійної залежності $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$ привело б до висновку їхньої колінеарності: $\alpha \vec{a} = -\beta \vec{b}$, а це протирічить умові.

Аналогічно базис у просторі утворюють три довільні некомпланарні вектори, тобто, такі, що не лежать в одній площині або не паралельні спільній площині.

Нехай $f = (f_1, f_2, f_3) \subset E_3$ - базис простору і $\vec{r} \in E_3$. Розкладемо його за цим базисом:

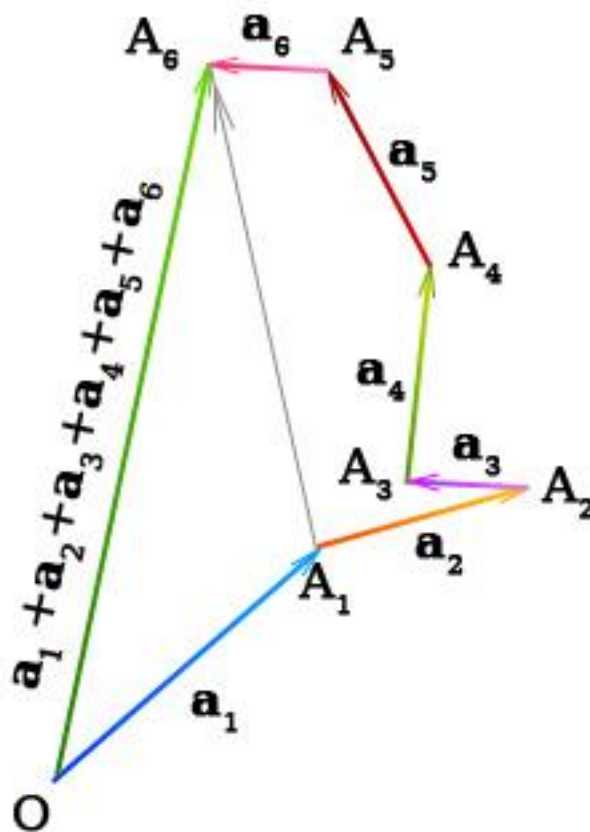
$$\vec{r} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3.$$

Очевидне зіставлення $\vec{r} \in E_3 \leftrightarrow [\vec{r}]_f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ задає ізоморфізм цих просторів.

Застереження. Не можна вважати, що вектори $\vec{r} \in E_3, [\vec{r}]_f \in \mathbb{R}^3$ рівні, оскільки вони належать різним просторам. Між ними є взаємно однозначна відповідність.

Приклад 3.1. Для векторів на площині або у просторі має місце рівність (Мал.3.3: тут $n=6$):

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}.$	(3.3)
--	-------



Мал. 3.3

Для доведення треба застосувати правило трикутника додавання векторів і метод математичної індукції.

Ділення відрізка у даному відношенні

Нехай M_1, M_2 - точки на відрізку (Мал. 3.1). Треба поділити його точкою M , що лежить між ними або зовні відрізка $[M_1, M_2]$, на частини, довжини яких

мають дане відношення: $\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = |\lambda|$. Якщо точка M лежить на відрізку, то

$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}, \lambda > 0$. Якщо M лежить зовні відрізка, то в цьому співвідношенні $\lambda < 0$.

Зафіксуємо деяку точку O , початок, і розглянемо радіуси-вектори вказаних

точок: $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}, \vec{r} = \overrightarrow{OM}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$. Тоді $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}$. З

урахуванням попередніх рівностей одержимо:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}) \Rightarrow (1 + \lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{1 + \lambda}(\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2).$$

Інколи зручно вважати, що відрізок ділиться у відношенні, яке записується

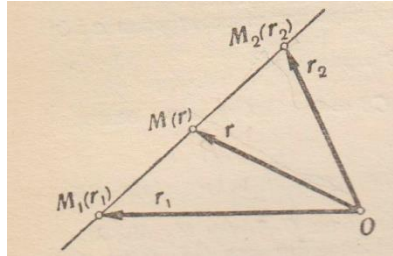
таким чином: $\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$. Тоді з доведеного випливає формула

$$\vec{r} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_2\vec{r}_1 + \lambda_1\vec{r}_2).$$

Отже, доведено формули, за якими знаходиться радіус-вектор точки, що ділить відрізок у даному відношенні:

$\vec{r} = \frac{1}{1 + \lambda}(\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2)$	(3.4)
---	-------

$$\vec{r} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_2 \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{r}_2).$$

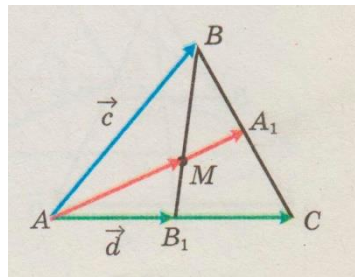


Мал. 3.4

Читаач самостійно выпише відповідні формули для координат точки, що ділить даний відрізок у певному відношенні.

Задача Довести, що точка з радіусом-вектором $\vec{r}$ тоді і тільки тоді лежить на відрізку, кінці якого мають радіуси-вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$, коли існують коефіцієнти $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$, що має місце рівність $\vec{r} = \theta_1 \vec{r}_1 + \theta_2 \vec{r}_2$.

Приклад 3.2. Доведемо, що точкою перетину медіани трикутника діляться у відношенні 2:1, відраховуючи від вершини (Мал. 3.5).



Мал. 3.5

Маємо трикутник $\triangle ABC$, AA' , BB' - його медіани, M - точка їхнього перетину.

Введемо позначення: $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{b}$.

Неколінеарні вектори $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис площини. Нехай

$$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{MB'}|} = \frac{\lambda}{1} = \lambda > 0 \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MB'}.$$

Застосовуючи першу формулу (2.3), одержимо:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{\lambda+1} \vec{c} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{2} \vec{b}.$$

Оскільки A' - середина сторони BC , $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Але вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA'}$ і $\overrightarrow{AA'}$ колінеарні і однаково направлені, тому існує таке додатне число μ , що

$$\overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{MA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{AM} = \frac{1+\mu}{\mu} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\mu}{2(1+\mu)}(\vec{b} + \vec{c}).$$

Звідси і з попереднього маємо:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{\lambda+1} \vec{c} = \frac{\mu}{2(1+\mu)}(\vec{b} + \vec{c}).$$

З однозначності розкладу за базисом випливають рівності:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} = \frac{\mu}{2(1+\mu)}, \\ \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\mu}{2(1+\mu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \lambda\mu = \mu + \lambda\mu, \\ \frac{2}{\lambda+1} = \frac{\mu}{1+\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda, \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = \lambda = 2.$$

Тобто, дві медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1. Зрозуміло, що це справедливо і для третьої медіани. Таким чином, точка перетину довільних двох медіан ділить їх у відношенні 2:1, звідки випливає, що всі три медіани перетинаються у спільній точці.

Нехай вибрано деякий початок, точку O . Виразимо радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки перетину медіан $\triangle ABC$ через радіуси-вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ його вершин.

$$\text{З попереднього } \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \vec{c} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow$$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$	(3.5)
---	-------

Контрольні запитання

- 1). Як застосувати формулу ділення відрізка для доведення факту, що медіани трикутника перетинаються у одній точці?
- 2). Навести формулу для центра мас системи матеріальних точок.
- 3). Сформулювати і довести теорему Менелая.

Лекція 4. МАТРИЦІ ТА ДІЇ З НИМИ

План

- 1). Сума та добуток матриць.
- 2). Властивості операцій з матрицями.
- 3). Транспонування матриці та його властивості.
- 4). Обернена матриця.
- 5). Стовпчиковий ранг матриці.
- 4). Комутант матриць.
- 5). Елементарні матриці та алгоритм Гауса.
- 6). Зведення матриці до діагонального вигляду.

Означення 4.1. Матрицею A називається прямокутна таблиця, елементи якої a_{jk} , $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ належать деякому полю K :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$	(4.1)
--	---------

Як правило, ми будемо розглядати два випадки: $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$.

Інколи матрицю будемо позначати $A = (a_{jk})$.

Елементи a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ квадратної матриці A називаються діагональними.

Кажуть, що вони знаходяться на головній діагоналі.

Матриці вважаються рівними, якщо у них рівні елементи, що стоять на однакових місцях.

Нульова матриця складається тільки з нульових елементів:

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$	(4.2)
---	-------

Означення 4.2. Вектори $a_j = (a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn})$, $j = 1, \dots, m$ називаються її векторами-рядками матриці, вектори

$$a^{(k)} = (a_{1k} \ a_{2k} \ \dots \ a_{mk})^T = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, n$$

називаються її векторами-стовпчиками.

Означення 4.3. Якщо матриця має m рядків і n стовпчиків, то кажуть, що вона має розмірність $m \times n$. Інколи, щоб підкреслити цю обставину, будемо писати $A(m \times n)$.

Можна визначити поняття суми матриць однакових розмірностей та множення їх на скаляри, елементи поля.

Означення 4.4. Сума двох матриць однакових розмірностей:

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$	(4.3)
---	-------

$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$	
---	--

Означення 4.5. Множення матриці на число.

Нехай $\lambda \in K$. Тоді

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$	(4.4)
--	-------

Означення 4.6. Лінійною комбінацією матриць $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається вираз $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

Легко перевіряється справедливість виконання аксіом лінійного простору для матриць однакової розмірності. Таким чином приходимо до важливого висновку:

Твердження 4.1. Матриці однакої розмірності $m \times n$ утворюють лінійний простір.

Простір таких матриць над полем K буде позначатись $M_{m \times n}(K)$.

Легко вказати один з базисів цього простору, що складається з матриць, всі елементи яких нулі крім елемента j -го рядка ($j=1, \dots, m$) і k -го стовпчика ($k=1, \dots, n$), який дорівнює одиниці. Очевидно, розмірність цього простору дорівнює mn .

Означення 4.6. Добуток двох матриць. Нехай є дві матриці наступних розмірностей: $A(m \times n)$ і $B(n \times k)$. Добутком AB називається матриця $C(m \times k)$,

елементи якої знаходяться за правилом: $c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}$.

Більш докладно:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n a_{1l} b_{l1} & \sum_{l=1}^n a_{1l} b_{l2} & \dots & \dots & \sum_{l=1}^n a_{1l} b_{lk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{il} b_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj} & \dots & \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{ml} b_{l1} & \sum_{l=1}^n a_{ml} b_{l2} & \dots & \vdots & \sum_{l=1}^n a_{ml} b_{lk} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \vdots & c_{mk} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Будемо при цьому говорити, що при визначенні елементу матриці c_{ij} i -й рядок матриці A множиться на j -й стовпчик матриці B , і це множення відбувається за вказаним правилом.

Застереження. Якщо $m \neq k$, добуток матриць $B(n \times k)$ і $A(m \times n)$ не визначено.

Для квадратних матриць однакової розмірності визначені добутки AB і BA .

Взагалі кажучи, $BA \neq AB$. Радимо читачу підібрати приклад некомутуючих матриць, скажімо, розмірностей 2×2 .

Дамо важливу інтерпретацію формули (4.5) добутку двох матриць. Для цього спочатку розглянемо випадок, в якому друга матриця має лише один стовпчик:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \dots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \dots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_1 \\ \dots \\ a_{m1}b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}b_2 \\ a_{22}b_2 \\ \dots \\ a_{m2}b_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}b_n \\ a_{2n}b_n \\ \dots \\ a_{mn}b_n \end{pmatrix} = \\
&= b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Формула

$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$	(4.6)
--	-------

Означає, що результат множення вказаних матриць є лінійною комбінацією векторів-стовпчиків $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T$, $j=1, \dots, n$ матриці A , першого множника.

Розглянемо тепер загальний випадок множення матриць за формулою (4.5), що є узагальненням (4.6). Легко бачити, що

$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$	(4.7)
--	-------

$$\begin{aligned}
&= \left(b_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_{n1} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \dots, b_{1k} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{2k} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_{nk} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) = \\
&= \left(\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \dots \\ c_{mk} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Це означає, що вектори-стовпчики матриці $AB=C$ є лінійними комбінаціями векторів-стовпчиків матриці A з коефіцієнтами, що є елементами матриці B . Аналогічним чином доводиться, що вектори-рядки матриці $AB=C$ є лінійними комбінаціями векторів-рядків матриці B з коефіцієнтами, що є елементами матриці A .

Теорема 4.1. Операція множення асоціативна.

Нехай є три матриці наступних розмірностей: $A(m \times n)$, $B(n \times k)$ і $C(k \times l)$.

Доведемо, що $(AB)C = A(BC)$.

Введемо позначення:

$$U = AB, S = UC = (AB)C,$$

$$V = BC, T = AV = A(BC).$$

Маємо:

$$u_{iv} = \sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} b_{\mu v}, s_{ij} = \sum_{v=1}^k u_{iv} c_{vj} = \sum_{v=1}^k \left(\sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} b_{\mu v} \right) c_{vj} = \sum_{v=1}^k \sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} b_{\mu v} c_{vj};$$

$$v_{\mu j} = \sum_{v=1}^k b_{\mu v} c_{vj}, t_{ij} = \sum_{v=1}^k a_{i\mu} v_{\mu j} = \sum_{v=1}^k a_{i\mu} \left(\sum_{v=1}^k b_{\mu v} c_{vj} \right) c_{vj} = \sum_{v=1}^k \sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} b_{\mu v} c_{vj} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^k a_{i\mu} b_{\mu v} c_{vj}.$$

Отже, доведено, що елементи матриць $S = (AB)C$ і $T = A(BC)$, що знаходяться на однакових місцях, рівні: $s_{ij} = t_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Це й означає справедливість рівності для добутків матриць, яку треба було довести.

Розглянемо зараз квадратні матриці однакової розмірності. Як було вже зазначено, операція добутку асоціативна, але, взагалі кажучи не комутативна. Серед таких матриць виділяється одинична матриця:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$	(4.8)
---	-------

Легко перевірити, що $AI = IA = A$.

Означення 4.7. Квадратна матриця A називається лівим дільником одиниці, якщо існує матриця R така, що $AR = I$. При цьому матриця R називається правою оберненою до A . Аналогічно, матриця називається правим дільником одиниці, якщо існує матриця L така, що $LA = I$. Матриця L називається лівою оберненою до A .

Пізніше буде показано, що, насправді, якщо матриця A є лівим дільником одиниці, то вона є і її правим дільником, і її права і ліва обернені матриці співпадають, тому вони будуть називатись просто оберненими. Цим фактом ми будемо користуватись поки що без доведення. Обернена до A матриця позначається A^{-1} .

Твердження 4.2. Обернена матриця в разі її існування, єдина.

Доведення. Нехай B, C - обернені до матриці A , тобто,

$$AB = BA = I, AC = CA = I.$$

Помножимо рівність $AB = I$ зліва на C . В результаті отримаємо:

$$CAB = C \Rightarrow B = C.$$

Означення 4.8. Квадратна матриця A називається лівим дільником нуля, якщо існує ненульова матриця B така, що $AB = 0$. Аналогічно, матриця називається правим дільником одиниці, якщо існує ненульова матриця C така, що $CA = 0$.

Твердження 4.3. Якщо матриця є дільником одиниці, вона не може бути дільником нуля.

Доведення. Нехай для матриці A існує A^{-1} , а також існує матриця B така, що $AB = 0$. Помножимо обидві частини останньої рівності на A^{-1} , в результаті чого одержимо: $A^{-1}AB = 0 \Rightarrow B = 0$, а це протирічить умові.

Читач сам доведе, що матриця не може бути дільником одиниці, якщо вона є дільником нуля.

Обернена матриця має очевидні властивості:

$$\begin{aligned} \left((A)^{-1} \right)^{-1} &= A, \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ (\alpha A)^{-1} &= \alpha^{-1}A^{-1} \quad \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Означення 4.9. Лінійний простір, на якому визначено асоціативну операцію множення, дистрибутивну відносно операції додавання, називається алгеброю (асоціативною).

Інакше кажучи, алгебра – це лінійний простір, який є кільцем.

Слід зауважити, що елементи алгебри не обов'язково мають обернені. Більш того, в алгебрі може не існувати одиниці. Якщо ж вона існує, то така алгебра називається алгеброю з одиницею.

З попередніх досліджень робимо висновок, що лінійний простір квадратних матриць однієї розмірності є алгеброю з одиницею.

Означення 4.10. Комутантом квадратних матриць A і B однієї розмірності називається матриця, що позначається $[A, B]$, і знаходиться за формулою

$[A, B] = AB - BA.$	(4.9)
---------------------	-------

Очевидно, що для того, щоб дві квадратні матриці комутували, необхідно і достатньо, щоб їхній комутант дорівнював нулю.

Неважко пересвідчитись, що, взагалі кажучи, $[[A, B], C] \neq [A, [B, C]]$, тобто, операція обчислення комутанту неасоціативна. Радимо читачу знайти відповідний приклад.

Твердження 4.4. Для комутанта справедлива тотожність Якобі³:

$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$	(4.10)
--	--------

Доведення. Маємо:

$$[[A, B], C] = [AB - BA, C] = ABC - BAC - CAB + CBA,$$

$$[[B, C], A] = [BC - CB, A] = BCA - CBA - ABC + +ACB,$$

$$[[C, A], B] = [CA - AC, B] = CAB - ACB - BCA + BAC.$$

Додаючи одержані рівності, пересвідчуємось у справедливості (4.10).

Отже, якщо у лінійному просторі квадратних матриць однієї розмірності ввести множення, яким є комутант, і для якого справедлива тотожність Якобі, одержимо неасоціативну алгебру, яка називається алгеброю Лі⁴.

Приклад 4.1. Елементарні перетворення. Розглянемо матриці, які будемо називати елементарними:

1) «збурена одинична» - діагональна матриця

³ **Якобі, Карл Густав Якоб** (нім. *Carl Gustav Jacob Jacobi*; 10/12/1804, Потсдам -18/02/1851, Берлін) - видатний математик.

⁴ **Маріус Софус Лі** (норв. *Marius Sophus Lie*; 17/12/1842, Нордфьордейд, Норвегія – 18/02/1899 – 18/02/1899, Христіанія, нині Осло, Норвегія) - видатний математик.

$$D_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & d_{ii} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & 0 & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Очевидно, якщо $d_{ii} \neq 0$, ця матриця має обернену.

2) матриця перестановки

M_{ji}^r зліва до вищого, j -го рядка, буде додаватись нижчий i -й рядок, помножений на m_{ji} .

Аналогічні правила діють при множенні матриці справа на $M_{ji}^{(l)}$ та M_{ji}^r . Треба тільки рядок замінити на стовпчик.

Очевидно, $D_{ii} = D_{ii}^T$ і $P_{ij} = P_{ij}^T$, тобто ці матриці симетричні, вони збігаються зі своїми спряженими. $M_{ji}^{(l)}$ та M_{ji}^r - не симетричні матриці, $(M_{ji}^{(l)})^T = M_{ij}^r$.

Для елементарних матриць легко знайти обернені. Якщо $d_{ii} \neq 0$, то матриця D_{ii}^{-1} буде мати такий же самий вигляд, як і D_{ii} , тільки в ній замість елемента d_{ii} стоятиме елемент d_{ii}^{-1} .

$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^T$, тому що $P_{ij}^2 = E$. Це зрозуміло і без обчислень, тому що одноразове множення на P_{ij} переставить i -й та j -й рядки A , а друге множення поверне їх на попередні місця, тобто P_{ij}^2 діє як тотожне перетворення. M_{ij}^{-1} — матриця такого ж вигляду, як і P_{ij} , але замість елемента m_{ij} вона матиме елемент $-m_{ij}$. Це також можна зрозуміти без обчислень. Спочатку при множенні на M_{ij} зліва до j -го рядка додається i -й, помножений на m_{ij} , а далі при множенні на матрицю з елементом $-m_{ij}$ на тому ж місці до одержаного рядка додається i -й, помножений на $-m_{ij}$, і в результаті буде одержано j -й рядок матриці A в його первісному вигляді.

Розглянемо тепер процедуру множення матриці A на різні елементарні матриці, які вибираються в такий спосіб. Спочатку, якщо $a_{11} \neq 0$, помножимо A зліва на

M_{21} , де $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$. У результаті елемент $b_{21}^{(1)}$ одержаної матриці

буде дорівнювати нулю. Зазначимо, що новий елемент на діагоналі в другому рядку і стовпчику буде обчислюватись за формулою

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}.$$

Потім аналогічно підберемо M_{31} і т. ін. (якщо відповідні діагональні елементи не дорівнюватимуть нулю). Таким чином

можна зробити так, що під діагоналлю одержаної матриці будуть знаходитися лише нулі. Якщо ж $a_{11} = 0$, то за допомогою множення на деяку матрицю P_{j1} можна переставити рядки так, що на місці (1,1) опиниться ненульовий елемент. (Якщо ж всі елементи першого стовпчика дорівнюють нулю, то процедура переноситься на наступний ненульовий стовпчик.) Тепер те ж саме робимо у випадку $b_{22}^{(1)} = 0$, але переставляємо другий рядок лише з рядками, які розташовані нижче другого (якщо в деякому з них у другому стовпчику є ненульовий елемент) і т. ін. У результаті прийдемо до матриці $B = LA$, елементи якої, що знаходяться нижче діагоналі, нульові (через $\tilde{L}$ позначено добуток усіх елементарних матриць, що відповідали вказаним перетворенням). Така матриця B називається верхньою трикутною (верхньотрикутною).

Аналогічно при множенні A на елементарні матриці справа можна звести її до нижньотрикутного вигляду.

Зведення матриці до верхньотрикутного вигляду еквівалентне відомому методу Гауса, який використовується для розв'язання систем лінійних рівнянь.

Сформулюємо результат.

Теорема 4.2. Кожна матриця за допомогою елементарних перетворень може бути зведена до верхньотрикутного (нижньотрикутного) вигляду.

Якщо матриця зведена до верхньотрикутного вигляду, можна, помноживши справа на елементарні матриці, звести її до діагонального вигляду, тобто в одержаній матриці C нулі будуть під і над діагоналлю. Треба тільки пояснити, що робити, коли на діагоналі матриці B_k , що одержана з B , на k -му кроці таких перетворень, опиниться число нуль. Тоді треба переставити стовпчики k -й та деякий l -й ($l > k$), якщо $b_{kl} \neq 0$, а потім за допомогою $\tilde{b}_{kk} = b_{kl} \neq 0$, що опиниться на діагоналі, в результаті множення зліва на елементарні матриці зробити нулі під діагоналлю. Потім при множенні на відповідні елементарні матриці справа можна зробити нулі правіше діагоналі. Таким чином, прийдемо до діагональної матриці C , причому деякі елементи на діагоналі (у випадку виродженої

матриці) можуть бути нульовими. Тепер, множачи на відповідні матриці D_{ii} , можна одержати на діагоналі на місці ненульових елементів одиниці. Отже, одержимо діагональну матрицю D , на діагоналі якої розташовані лише одиниці і нулі (у випадку виродженої початкової матриці A). Кількість одиниць є рангом матриці A , оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу (теорема 1.1) і тому не залежить від процедури зведення до діагонального вигляду. Всі одержані таким чином матриці можуть лише відрізнятись порядком розташування одиниць і нулів. Отже,

$$D = LAR, \quad (4.15)$$

де L і R — добутки елементарних матриць.

Сформулюємо результат.

Теорема 4.3. Кожна квадратна матриця може бути зведена до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень, причому на діагоналі будуть знаходитися лише одиниці і нулі (у випадку виродженості матриці), кількість яких не залежить від способу зведення. Таке зображення єдине з точністю до порядку розташування одиниць і нулів на діагоналі.

Зауваження. З цієї теореми випливає ще одне і досить просте доведення асоціативності множення квадратних матриць: для елементарних матриць асоціативність перевіряється легко, отже, зображуючи кожен матрицю як добуток елементарних, доводимо асоціативність множення для цих трьох матриць.

Інколи діагональну матрицю D з числами $d_{11}, \dots, d_{nn}$ на діагоналі зручно позначати

$$D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}). \quad (4.16)$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, в зображенні матриці за формулою (4.15) L і R не обов'язково трикутні матриці — адже в процесі діагоналізації, можливо,

переставлялись рядки. Але, якщо на кожному кроці ведучий діагональний елемент не дорівнював нулю, матрицю A множили зліва тільки на елементарні нижньотрикутні матриці $M_{ji}^{(l)}$ і не множили на P_{ij} . Добуток нижньотрикутних матриць – також нижньотрикутна матриця; позначимо її через $\tilde{L}$. Тоді $\tilde{L}A = R$, і R – верхньотрикутна матриця, звідки, помноживши обидві частини цієї рівності зліва на $L = \tilde{L}^{-1}$, будемо мати зображення матриці A у вигляді добутку нижньотрикутної і верхньотрикутної матриць:

$$A = LR. \quad (4.17)$$

Задача. Довести, що якщо матриця не є дільником одиниця, то вона є дільником нуля.

Означення 4.11. Матриці, пов'язані співвідношенням типу (4.15), називаються еквівалентними, якщо L, R - невироджені.

Зауваження. Таке співвідношення можна записати не тільки для квадратних матриць, але і для довільних прямокутних.

Нехай $L(m \times m), A(m \times n), R(n \times n), B(m \times n)$ і має місце рівність типу (4.15):

$$LAR = B.$$

Тоді матриці A і B називаються еквівалентними.

Теорема 4.3. для загальних прямокутних матриць може бути сформульована так: довільну матрицю шляхом елементарних перетворень можна привести до трапецієвидної форми. Оскільки на квазидіагоналі (на якій знаходяться елементи a_{jj}) можуть бути нулі, то більш точно цю форму можна назвати східчастою.

З теореми 4.3. легко випливає наступний фундаментальний факт.

Теорема 4.4. Ранги двох прямокутних матриць співпадають тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні.

Доведення базується на можливості зведення матриці шляхом елементарних перетворень, інакше кажучи, шляхом множення на елементарні квадратні матриці вказаних розмірностей до трапецієвидної форми

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & * & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

на діагоналі якої знаходиться r одиниць. У разі співпадіння рангів матриць A і B їх зводимо до I_r з подальшим множенням на матриці, обернені до елементарних:

$$I_r = L_A A R_A = L_B B R_B \Rightarrow B = (L_B^{-1} L_A) A (R_A R_B^{-1}).$$

Якщо ж матриці A і B еквівалентні: $LAR = B$, то, як було доведено, кожен з матриць L, R можна подати як добуток елементарних матриць, які не змінюють ранг при множенні їх на будь-яку матрицю.

Контрольні запитання

- 1). Для яких матриць визначено добуток?
- 2). Який зміст стовпчикого рангу матриці, що відображає один простір у інший?
- 3). Які елементарні матриці відповідають яким перетворенням у алгоритмі Гауса?
- 4). Чому лівий та правий дільники одиниці для матриці (у разі їхнього існування) співпадають? На яку властивість добутку тут треба спиратись при поясненні?

ЛЕКЦІЯ 5. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ТА ЇХНІ МАТРИЦІ

План

- 1). Знаходження матриці лінійного оператора у вибраному базисі.
- 2). Матриця переходу до іншого базису.
- 3). Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах.
- 4). Приклади матриць деяких важливих операторів.

Далі лінійний простір (абстрактний) розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K , де, як правило, $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$, будемо позначати E_n . Елементи поля також будемо називати скалярами.

Означення 5.1. Відображення $E_n \rightarrow E_m$ таке, що $\forall x_1, x_2 \in E_n, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ виконується співвідношення

$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$	(5.1)
---	-------

Множину лінійних операторів будемо позначати $L(E_n, E_m)$. При цьому E_n називається областю його визначення.

Означення 5.1. Нехай $A \in L(E_n, E_m)$ Множина векторів з E_n , яка переводиться оператором A в нульовий вектор, називається ядром оператора і позначається $Ker A$. Тобто, $Ker A = \{x \in E_n : Ax = 0\}$.

Аналогічно визначається ядро матриці.

Твердження 5.1. $Ker A$ є лінійним підпростором простору E_n .

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in Ker A \subset E_n \Rightarrow Ax_1 = 0, Ax_2 = 0$. Тоді $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Ker A.$$

Розмірність $Ker A$ називається дефектом оператора: $def(A) = \dim(Ker A)$.

Означення 5.2. Множина векторів $\text{Im}(A) \triangleq AE_n = \{y = Ax, x \in E_n\}$ називається образом оператора.

Твердження 5.2. $\text{Im}(A)$ є лінійним підпростором E_m . Його розмірність називається рангом оператора і позначається $\text{rank}(A)$.

Доведення. Нехай $y_1, y_2 \in \text{Im}(A) \subset E_m$. Це означає, що

$$\exists x_1, x_2 \in E_n : y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2.$$

Тоді

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in \text{Im}(A) \subset E_m,$$

що й треба було довести.

Означення 5.3. Лінійний оператор називається невинудженим, якщо він має нульове ядро.

Означення 5.4. Лінійний оператор, що діє в одновимірний простір скалярів, тобто, $A \in L(E_n, K)$, називається лінійним функціоналом.

Норми в E^n і E^m будемо позначати $\|x\|_n$ і $\|y\|_m$ або без індексів, якщо з контексту буде зрозуміло, про який простір йде мова.

Нормою оператора A називається число $\|A\|$, яке знаходиться таким чином:

$\ A\ = \sup_{x \in E_n} \frac{\ Ax\ _m}{\ x\ _n}.$	(5.2)
--	-------

Оскільки $\|z\|_n = \left\| \frac{x}{\|x\|_n} \right\|_n = \frac{\|x\|_n}{\|x\|_n} = 1$, це можна переписати у вигляді

$\ A\ = \sup_{\ z\ =1} \ Az\ _m.$	(5.3)
------------------------------------	-------

Можна визначити операцію сум операторів та добуток оператора на число і взагалі лінійну комбінацію операторів A і B : $E^n \rightarrow E^m$ за формулою

$(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$	(5.4)
--	---------

Нульовий оператор 0 визначається так: $0x = 0$ для $x \in E_n$. Треба тільки пам'ятати, що його образ — нульовий вектор в E^n . Очевидно, $\|0\| = 0$, $\|I\| = 1$.

Протилежний до A оператор є результат множення числа -1 на A : $-A$. Таким чином, оператори, що діють з E_n в E_m , утворюють лінійний нормований простір, який позначається $L(E_n, E_m)$ (нерівність $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ випливає з властивостей супремуму). Якщо $A \in L(E_k, E_m)$, $B \in L(E_n, E_k)$, можна визначити оператор $AB \in L(E_n, E_m)$: для $x \in E_n$

$(AB)x = A(Bx)$	(5.5)
-----------------	---------

Якщо $A \in L(E_m, E_k)$, $B \in L(E_n, E_m)$, $C \in L(E_l, E_n)$, то буде справедливий закон:

$A(BC) = (AB)C$	(5.6)
-----------------	---------

Взагалі кажучи, оператори між собою не комутують.

Розглядаючи оператори, що діють з E_n в E_n , побачимо, що вони утворюють кільце. Як вже відзначалось, в ньому є одиничний оператор — одиниця кільця.

Взагалі кажучи, не у всякої квадратної матриці існує обернена, але, якщо вона існує, то, як було показано в 1.6, ліва і права обернені матриці для такої матриці співпадають.

Якщо деяка множина є векторним простором і водночас кільцем, вона називається алгеброю. Отже, $L(E_n, E_n)$ утворюють нормовану алгебру. З визначення супремуму випливає властивість норми: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$; $\|I\| = 1$.
Якщо A^{-1} — обернений до A оператор, то $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$ і $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$.

МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Знайдемо вигляд оператора $A \in L(E_n, E_m)$ у конкретних базисах $e_1, \dots, e_n \in E_n$, $f_1, \dots, f_m \in E_m$. Для цього подіємо оператором на всі базисні вектори в E_n і одержані вектори з E_m розкладемо за базисом в E_m .

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\ &\vdots \\ Ae_n &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{aligned} \quad (5.7)$$

Простежимо за перетвореннями координат вектора $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ при дії на нього

оператора A . Нехай $Ax = y = \sum_{j=1}^m y_j f_j \in E_m$. Тоді згідно з (5.7)

$$Ax = A \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n x_k (Ae_k) = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} f_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) f_j = \sum_{j=1}^m y_j f_j,$$

тобто

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.8)$$

Це дає змогу кожному оператору поставити у відповідність прямокутну таблицю з m рядками і n стовпчиками, що називається матрицею. Оскільки матриця оператора $A \in L(E_n, E_m)$ суттєво пов'язана з базисами просторів, в яких діє оператор, то її зручно позначати $[A]_{f,e}$ і (увага!) коефіцієнти в рядках у розкладі (5.7) записувати стовпчиками в матрицю:

$$[A]_{f,e} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

і так зручно робити завдяки формулі (5.8): в сумі змінюється другий індекс a_{jk} , тобто, k і індекс вектора-стовпчика x . Лінійний простір матриць, у яких m рядків, n стовпчиків будемо позначати $M_{m,n}$, у випадку $m=n$ будемо писати просто M_n .

Означення 5.5. Елементи вигляду a_{ii} , $i = 1, \dots, \min\{m, n\}$ називаються діагональними.

Означення 5.6. Кажуть, що елементи a_{ij} , $i - j = k = \text{const}$ утворюють квазидіагональ. Легко бачити, що кожна квазидіагональ паралельна діагоналі.

Означення 5.7. Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її недіагональні елементи дорівнюють нулю. Діагональна матриця з однаковими елементами на діагоналі називається скалярною. Скалярна матриця з одиницями на діагоналі називається одиничною. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

Легко бачити, що діагональні квадратні матриці комутують між собою.

Матриці з ненульовими елементами на діагоналі утворюють комутативну мультиплікативну групу. Всі діагональні матриці утворюють комутативне кільце.

Означення 5.8. Транспонованою по відношенню до A називається матриця, кожен i -й рядок якої є i -м стовпчиком матриці A . Для транспонованої матриці будемо вживати позначення A^T . Очевидно, елементи цих двох матриць пов'язані співвідношенням:

$$a_{kj}^T = a_{jk} \quad (5.10)$$

Тепер можна визначити поняття добутку матриці A на вектор x , координати якого зручно записувати стовпчиком, згідно з (5.8). Його координатами будуть добутки векторів-рядків матриці на вектор-стовпчик x :

$$[Ax]_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_j \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} = [y]_f \quad (5.11)$$

Отже, одержали формальне правило:

$$[y]_f = [Ax]_f = [A]_{fe} [x]_e. \quad (5.12)$$

Зауважимо, що оператору $A \in L(E_n, E_n)$ відповідає квадратна матриця.

Очевидно, таке зображенні оператора A за допомогою матриці не єдине, бо вона істотно залежить від вибору базисів. В інших базисах йому відповідатиме інша матриця.

Читач самостійно перевірить властивості операції транспонування:

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= A, \\ (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T.\end{aligned}$$

Нехай тепер $l \in L(E_n, K)$, тобто, лінійний функціонал. З (5.12) випливає, що

$$lx = [l]_e [x]_e = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n l_k x_k. \quad (5.13)$$

Підкреслимо: вектору $x \in E_n$ у базисі e відповідає вектор-стовпчик

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ а лінійному функціоналу в тому ж базисі — матриця з одного рядка}$$

або вектор-рядок: $[l]_e = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$. Такі вектори-рядки називають ще ковекторами, а їхній простір, простір лінійних функціоналів над E_n , — спряженим по відношенню до E_n . Для нього застосовують позначення: $E_n^* \equiv E^n$.

Приклад 5.1. Нехай E_4 - лінійний простір многочленів від x степені не вище третьої. В ньому можна вибрати базис $e = \{1, x, x^2, x^3\}$. Нехай D - оператор першої похідної. Знайдемо його матрицю. Запишемо рівності (5.7) :

$$\begin{aligned}D1 &= 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3; \\ Dx &= 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3; \\ Dx^2 &= 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3; \\ Dx^3 &= 0 \cdot 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3.\end{aligned}$$

За формулою (5.9) маємо:

$$[D]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \sim [P(x)]_e = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Тоді

$$(DP)(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \sim [(DP)(x)]_e = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}_e$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємось, що $[(DP)(x)]_{e,e} = [D]_{e,e} [P(x)]_e$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_e,$$

тобто, формулу (5.9) підтверджено. ■

Приклад 5.2. Оператор повороту на площині.

Нехай на площині E_2 вибрано базис $e = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Дія на кожен вектор площини оператора повороту $U(\varphi)$ на кут φ , полягає в тому, що вектор обертається на цей кут. Щоб знайти матрицю оператора повороту в даному базисі треба подіяти їм на кожен базисний вектор і результат розкласти по цьому базису. Маємо:

$$\begin{aligned} U(\varphi)\vec{i} &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \\ U(\varphi)\vec{j} &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}. \end{aligned}$$

Тепер за відомим правилом виписуємо матрицю оператора повороту:

$[U(\varphi)]_{e\,e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$	(5.14)
--	--------

Нехай

$$\vec{r} = E_2, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow [\vec{r}]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тоді

$[U(\varphi)\vec{r}]_e = [U(\varphi)]_{e\,e} [\vec{r}]_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{pmatrix}.$	(5.15)
--	--------

Очевидно, поворот вектора на кут ψ , а потім на φ - це поворот одразу на кут $\varphi + \psi$. Отже, діючи на довільний вектор-стовпчик з координат у даному базисі на матриці, що відповідають вказаним операторам поворотів, одержимо:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix}$$

Як вже вказувалось, той самий результат одержимо, якщо будемо обертати вектор на кут $\varphi + \psi$, а такому оператору відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$$

Отже, доведено тотожність:

$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}.$	(5.16)
--	--------

Звідси маємо відомі з тригонометрії формули додавання для функцій косинус і синус:

$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi. \end{aligned}$	(5.17)
--	--------

Очевидно, поворот на кут 0 – це одиничний оператор, обернений до повороту на кут φ , є поворот на кут $-\varphi$, звідки одержимо формули для операторів і їхніх матриць:

$U(0) = I, U(-\varphi) = U^{-1}(\varphi),$ $[U(-\varphi)]_{ee} = [U(\varphi)]_{ee}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = [U(\varphi)]_{ee}^*.$	(5.18)
--	--------

Зробимо важливе зауваження. Позначимо через $a^{(j)}$, $j=1, \dots, n$ j -й вектор-стовпчик матриці A . Тоді формулу (5.11) можна записати у такий спосіб:

$$[Ax]_f = x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)}. \quad (5.19)$$

Це означає, що довільний вектор з $\text{Im}(A)$ можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів-стовпчиків матриці A . Ці вектори, взагалі кажучи, можуть бути лінійно залежними. Розмірність бази векторів-стовпчиків, тобто, ранг цієї

системи, називається стовпчиковим рангом матриці. Зрозуміло, що вона і є розмірністю $\text{Im}(A)$, тобто $\text{rank}(A)$. Аналогічно можна ввести поняття її рядкового рангу. Пізніше буде доведено, що ці ранги співпадають.

Теорема 5.1. Нехай лінійний оператор A діє з простору E в простір G . Справедлива формула:

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) \quad (5.20)$$

Доведення. Нехай $r = \text{rank}(A)$, тобто, в підпросторі $\text{Im}(A) \subset G$ можна знайти базис з r векторів: $\{g_1, \dots, g_r\}$. В просторі E існують вектори $\{f_1, \dots, f_r\}$ такі, що $\{g_1 = Af_1, \dots, g_r = Af_r\}$. Зауважимо, що їхній вибір, взагалі кажучи, не є однозначним. Якби система $\{f_1, \dots, f_r\}$ була лінійно залежною, тобто існувала б їхня нетривіальна лінійна комбінація, в якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю, що дорівнювала б нулю: $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r = 0$, то, подівавши на обидві частини рівності оператором A , мали б, що $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r = 0$, а це протирічить лінійній незалежності системи $\{g_1, \dots, g_r\}$. З цього випливає, що підпростір F , породжений системою $\{f_1, \dots, f_r\}$, не перетинається з $\text{Ker}(A)$. Покажемо, що його сума з $\text{Ker}(A)$ породжує весь простір E . Нехай $z \in E$. Розглянемо вектор $u = Az \in \text{Im}(A)$. Тоді в підпросторі F знайдеться вектор x , такий що $Ax = u$ і він записується як лінійна комбінація векторів з системи $\{f_1, \dots, f_r\}$: $x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r$. При цьому $u = Ax = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_r g_r$. Звідси $Az = Ax \Rightarrow A(z - x) = 0$, тобто, $z - x \in \text{Ker}(A)$. Але $z = x + (z - x)$. З доведеної раніше формули (2.1) про розмірність суми двох просторів і випливає справедливості формули (5.20).

Зауваження. Нехай матриця діє з n -вимірного простору в себе, тобто, вона квадратна розмірності $n \times n$; r – її ранг. Число $d = n - r$ називається дефектом матриці. З формули (5.20) випливає, що дефект – це розмірність $\text{Ker}(A)$.

З формули (5.20) випливає, що матриця з ненульовим ядром (з дефектом більшим за нуль) не може переводити простір на весь простір.

КООРДИНАТИ ВЕКТОРА У РІЗНИХ БАЗИСАХ

Нехай є два базиси в E_n : $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ і $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, причому перехід від e до e' (від нового до старого) дається оператором T : $Te_k = e'_k$. З'ясуємо, як пов'язані координати довільного вектора $x \in E_n$ в цих базисах.

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{k=1}^n x'_k e'_k.$$

Розкладемо $Te_k = e'_k$ по старому базису e :

$$Te_k = e'_k = \sum_{j=1}^n t_{jk} e_j.$$

В результаті

$$x = \sum_{k=1}^n x'_k \sum_{j=1}^n t_{jk} e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n t_{jk} x'_k \right) e_j = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Отже, $x_j = \sum_{k=1}^n t_{jk} x'_k$, що відповідає дії матриці $[T]_{e,e'}$ оператора T зліва на вектор-стовпчик $[x]_{e'}$, координат $x \in E_n$ у новому базисі:

$$[x]_e = [T]_{e,e'} [x]_{e'} \quad (5.21)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Зауваження. Будемо називати канонічним базисом простору систему векторів

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нехай вектори $e'_k = Te_k, k=1, \dots, n$ мають координати $e'_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}, k=1, \dots, n$.

Тоді безпосередньою перевіркою впевнюємось, що матриця $[T]_{e,e'}$ оператора T переходу від старого базису до нового має вигляд

$$[T]_{e,e'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Підкреслимо, що оператор T заміни базису переводить старий базис e у новий e' , а його матриця $[T]_{e,e'}$ діє в протилежному напрямку, переводячи вектор-стовпчик $[x]_{e'}$ координат довільного вектора у новому базисі в вектор-

стовпчик $[x]_e$ його координат у старому базисі. Виявляється, що це не випадково: якщо задані дві множини X і Y , простори $\Phi(X)$ і $\Phi(Y)$ числових функцій, визначених на цих множинах, і відображення $\varphi : X \rightarrow Y$, то простори функцій відображаються в оберненому порядку. Дійсно, нехай $f : Y \rightarrow R$ — функція з $\Phi(Y)$. Їй можна зіставити функцію $g(x) \equiv f(\varphi(x)) \equiv (f\varphi)(x)$ (композиція двох функцій), визначену на X , тобто ми побудували відображення $\Phi(x)$ в $\Phi(y)$, яке позначається φ^* . Таким чином, маємо діаграму

$$\begin{array}{ccc} & \varphi^* & \\ \Phi(X) & \longleftarrow & \Phi(Y) \\ & \varphi & \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (5.24)$$

Такі ситуації - типові в теорії категорій, яка є мовою сучасної математики.

Теорема 5.2. Для того щоб лінійний оператор $A : E_n \rightarrow E_n$ мав обернений, необхідно і достатньо, щоб він переводив деякий базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в базис $g = \{g_1, \dots, g_n\}$.

Доведення. Нехай лінійний оператор A переводить базис e в базис g . Обернений оператор A^{-1} можна визначити спочатку на базисних векторах: $A^{-1}g_i = e_i, i = 1, \dots, n$, а потім продовжити на весь простір по лінійності:

$$A^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (A^{-1} g_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

З останньої рівності випливає, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Дійсно,

$$AA^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i g_i \right) = A \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = \sum_{i=1}^n x_i g_i.$$

Навпаки, нехай оператор A має обернений. Візьмемо деякий базис e і подіємо на базисні вектори оператором A . Тоді одержимо деяку систему векторів f , де $f_i = Ae_i$, $i = 1, \dots, n$. Доведемо, що одержані вектори лінійно незалежні. Справді, з їхньої лінійної залежності $\sum \alpha_i f_i = 0$ випливає, що $A^{-1}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i e_i = 0$, а це протирічить лінійній незалежності векторів з e . Тепер зрозуміло, що система утворює базис, тому що кількість векторів у цій системі дорівнює розмірності простору.

Зауважимо, що оператор, який має обернений, визначений на всьому лінійному просторі, переводить цей простір на себе взаємно однозначно. Такий оператор називається ще невиродженим або неособливим.

МАТРИЦЯ ОПЕРАТОРА У РІЗНИХ БАЗИСАХ

Розглянемо питання, як зміниться вигляд матриці оператора $A \in L(E_n, E_m)$ при заміні базиса в цих просторах. Позначимо матрицю оператора в базисах $e = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E_n$, $g = \{g_1, \dots, g_m\} \subset E_m$ через $[A]_{ge}$, а в нових базисах

$e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, $g' = \{g'_1, \dots, g'_m\}$ через $A_{g'e'}$. Позначимо оператори, які переводять базиси e в e' , а g в g' відповідно через T ($Te_k = e'_k$) і S ($Sg_k = g'_k$).

Корисно скористатись наступною зрозумілою діаграмою:

(5.25)

$$\begin{array}{ccc}
[x]_e \in R^n & \xrightarrow{[A]_{g,e}} & R^m \ni [Ax]_g = [A]_{ge}[x]_e \\
\swarrow & & \searrow \\
& E_n \xrightarrow{A} E_m & \\
[T]_{e,e'} \uparrow & \downarrow T \quad S \downarrow & \uparrow [S]_{e,e'} \\
& E_n \xrightarrow{A} E_m & \\
\swarrow & & \searrow \\
[x]_{e'} \in R^n & \xrightarrow{[A]_{g',e'}} & R^m \ni [Ax]_{g'} = [A]_{g'e'}[x]_{e'}
\end{array}$$

Візьмемо вектор $[x]_{e'} \in R^n$ у лівому нижньому куті діаграми і переведемо його в простір R^m у правому верхньому куті. Це можна зробити двома способами: спочатку множимо його на матрицю $[T]_{e,e'}$, а потім на $[A]_{ge}$ або спочатку множимо на $[A]_{g'e'}$, а потім на $[S]_{e,e'}$. Результати будуть однакові, отже $[A]_{ge}[T]_{e,e'} = [S]_{e,e'}[A]_{g'e'}$. Звідси маємо:

$$[A]_{g'e'} = ([S]_{e,e'})^{-1} [A]_{ge} [T]_{e,e'} \quad (5.26)$$

Аналогічно можна виписати формулу для знаходження матриці оператора в старих базисах через його матрицю в нових базисах.

Зауважимо, що при $n = m$, $g=e$, $g'=e'$ маємо $S = T$, і формула (5.26) набуває вигляду

$$[A]_{e'e'} = ([T]_{e,e'})^{-1} [A]_{ee} [T]_{e,e'} \quad (5.27)$$

$$[A]_{ee} = ([T]_{e,e'}) [A]_{e'e'} [T]_{e,e'}^{-1} \quad (5.28)$$

Означення 5.9. Матриці в E_n , пов'язані співвідношенням (5.27), називаються подібними.

Зараз для з'ясування деяких властивостей будемо використовувати більш прості позначення для матриць, не вказуючи, в яких базисах вони записані. Отже, нехай є дві пари матриць $A_1 = T^{-1}AT$ і $B_1 = T^{-1}BT$, то $A_1B_1 = T^{-1}ATT^{-1}BT = T^{-1}ABT$, тобто добутки подібних матриць теж подібні; одинична матриця I переходить в себе: $T^{-1}IT = T^{-1}T = I$. Тому відображення подібності є ендоморфізм кільця матриць. Якщо деяка матриця A подібна до нульової матриці 0 , то $0 = T^{-1}AT$ і $AT = 0$ (після домноження зліва на T) і так само $A = 0$, тобто, ядро цього ендоморфізму нульове.

Випишемо властивості оператора заміни базису, які впливають з його означення. Нехай в лінійному просторі E_n є базиси $f = \{f_1, \dots, f_n\}$, $g = \{g_1, \dots, g_n\}$, $h = \{h_1, \dots, h_n\}$. Будемо позначати оператори заміни базису таким чином:

$$T_{gf}f_j = g_j, T_{hg}g_j = h_j, j = 1, \dots, n. \quad (5.29)$$

Нехай $x \in E_n$ і $[x]_f, [x]_g, [x]_h \in \mathbb{R}^n$ - вектори-стовпчики з коефіцієнтів розкладу x за цими базисами. Як було вказано, матриці операторів заміни базису діють у протилежному напрямку

$$[x]_f = [T]_{fg}[x]_g, [x]_g = [T]_{gh}[x]_h, [x]_f = [T]_{fh}[x]_h. \quad (5.30)$$

Очевидно, мають місце тотожності:

$[T]_{fh} = [T]_{fg}[T]_{gh}.$	(5.31)
--------------------------------	--------

$[T]_{gf} = ([T]_{fg})^{-1}, [T]_{fg} = ([T]_{gf})^{-1}.$	(5.32)
---	--------

Розглянемо тепер ситуацію, важливу для застосувань на практиці.

Нехай в лінійному просторі векторів-стовпчиків $\mathbb{R}^n$ є базиси $f = \{f_1, \dots, f_n\}$,

$g = \{g_1, \dots, g_n\}$, і вибрано канонічний базис

$$e = \{e_1, \dots, e_n\}, e_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T.$$

Зауважимо, що зараз ми не будемо вживати квадратні дужки, як раніше, для позначення векторів-стовпчиків, щоб не переобтяжувати форму запису. Будемо вважати, що вектори базисів f, g мають координати, що є їхніми розкладами за канонічним базисом:

$f_j = f_{1j}e_1 + \dots + f_{nj}e_n = f_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + f_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \vdots \\ f_{nj} \end{pmatrix}, j=1, \dots, n.$	(5.33)
--	--------

Аналогічно

$g_j = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{pmatrix}, j=1, \dots, n.$	(5.34)
--	--------

Тоді матриці переходу записуються таким чином:

$[T]_{ef} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}, [T]_{eg} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}.$	(5.35)
---	--------

Задача полягає у знаходженні матриці переходу $[T]_{fg}$ оператора переходу від базису f до базису g : $T_{gf} f_j = g_j, j=1, \dots, n$.

Згідно з (5.31) $[T]_{eg} = [T]_{ef} [T]_{fg} \Rightarrow$

$[T]_{fg} = ([T]_{ef})^{-1} [T]_{eg}.$	(5.36)
--	--------

Аналогічно для матриці переходу $[T]_{gf}$ оператора переходу від базису g до базису $f: T_{fg}g_j = f_j, j=1,...,n$ справедлива формула:

$[T]_{gf} = ([T]_{eg})^{-1} [T]_{ef}.$	(5.37)
--	--------

Запишемо одержану формулу в розгорнутому вигляді. Нехай є розклад $T_{gf}f_j$ за базисом f_j :

$$T_{gf}f_j = s_{1j}f_1 + s_{2j}f_2 + \dots + s_{nj}f_n, \quad j=1,...,n.$$

Тоді матриця цього оператора має вигляд:

$$[T]_{fg} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

В результаті співвідношення (5.36) буде мати вигляд:

$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}.$	(5.38)
---	--------

Читач самостійно запише розгорнуту формулу, що відповідає (5.37).

Пізніше буде доведено формулу для оберненої матриці, і ми зможемо розв'язати задачу на розглянуту тему.

Означення 5.10. Підпростір $\tilde{E} \subset E_n$ називається інваріантним відносно дії лінійного оператора $A: E_n \rightarrow E_n$, якщо $\forall x \in \tilde{E} \Rightarrow Ax \in \tilde{E}$.

Нехай $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \tilde{E}$ - базис у $\tilde{E}$. Доповнимо його до базису ц всьому просторі:

$e = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\} \subset E$. З інваріантності оператора відносно $\tilde{E}$ випливає:

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{m1}e_m,$$

...

$$Ae_m = a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \dots + a_{mm}e_m,$$

$$Ae_1 = a_{1,m+1}e_1 + a_{2,m+1}e_2 + \dots + a_{m,m+1}e_m + a_{m+1,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{n,m+1}e_n,$$

...

$$Ae_1 = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{mn}e_m + a_{m+1,n}e_{m+1} + \dots + a_{nn}e_n.$$

Матриця оператора в такому базисі має вигляд

$[A]_{ee} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$	(5.39)
--	--------

Якщо $E_n = E_m \dot{+} E_k$, базис простору є об'єднанням базисів підпросторів і оператор інваріантний відносно обох підпросторів, тоді його матриця в такому базисі має вигляд

$[A]_{ee} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$	(5.40)
---	--------

Контрольні запитання

- 1). За яким правилом виписується матриця оператора у вибраних базисах образу і прообразу?
- 2). Пояснити, в яку сторону і чому діє матриця оператора переходу до нового базису?
- 3). Навести приклади базисів у просторах поліномів степені не вище даної. Знайти матрицю оператора похідної.

ЛЕКЦІЯ 6. ЗОВНІШНІЙ ДОБУТОК ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ, АЛГЕБРА ГРАССМАНА⁵

План

- 1). Підстановки та їхня парність.
- 2). Зовнішній добуток і алгебра Грассмана.
- 3). Властивості зовнішнього добутку.
- 4). Базис у алгебрі Грассмана.

ГРУПА ПІДСТАНОВОК

Познайомимось з важливою групою – групою підстановок або симетричною групою, яка позначається S_n .

⁵ Грассман, Герман Гюнтер (нім. *Hermann Günther Grassmann*; 15/04/1809, Штеттін – 26/09/1877, Штеттін) – видатний фізик, математик, філолог.

Нехай є деякі n натуральних чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Якщо якось переставити ці числа, одержимо перестановку $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Відомо, що кількість всіх перестановок дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Перестановка, в якій $j_1 < j_2 < \dots < j_n$, називається узгодженою або правильною.

Означення 6.1. Взаємно однозначне відображення деякої підмножини множини натуральних чисел на себе називається підстановкою. Підстановку визначається двома перестановками – початковою та її образом і записується у вигляді

$$\sigma = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

На практиці будемо зустрічатись, як правило, лише з випадком правильної верхньої перестановки, тобто, верхній рядок якої впорядкований: $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, але в деяких конструкціях загальної теорії буде потрібен загальний випадок (6.1).

Зараз будемо вважати, що верхня перестановка - це $\{1, 2, \dots, n\}$.

Кількість чисел в обох перестановках називається степенем підстановки. Можна визначити добуток двох підстановок однакових степенів. Зазначимо, що дві перестановки, виконані по черзі, є знову перестановка. Треба тільки вказати формальне правило, за яким, знаючи кожен з підстановок, визначених цими перестановками, можна одержати результат суперпозиції двох перестановок.

Нехай є дві підстановки

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j_1 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{j_1} & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

Визначимо, куди потрапило перше число (1) першого рядка підстановки A після двох перестановок. Спочатку воно перейшло в число j_1 (після першої перестановки), потім знаходимо число j_1 в верхньому рядку B . Йому відповідає

число k_{j_i} в нижньому рядку B . Таким чином, числу 1 в результаті двох перестановок відповідає число k_{j_1} , яке треба в підстановці $C \equiv AB$ підписати під 1. Далі те ж саме треба зробити з числами 2,3,..., n з верхнього рядка підстановки A .

Приклад 6.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 4, 1, 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4, 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо $C = AB$:

$$1 \rightarrow 3(A), 3 \rightarrow 4(B), 1 \rightarrow 4(C),$$

$$2 \rightarrow 4(A), 4 \rightarrow 1(B), 1 \rightarrow 1(C),$$

$$3 \rightarrow 1(A), 1 \rightarrow 2(B), 1 \rightarrow 2(C),$$

$$4 \rightarrow 2(A), 2 \rightarrow 3(B), 1 \rightarrow 3(C).$$

Отже,

$$C = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 1, 2, 3 \end{bmatrix}.$$

Тепер, не виписуючи діаграм, знайдемо, наприклад, $D = AB$:

$$\begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 4, 1, 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 1, 2, 3 \end{bmatrix}$$

Зазначимо, що для даних підстановок $AB = BA$, але, взагалі кажучи, симетричні групи не комутативні.

Легко помітити, що підстановка

$$E = \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{bmatrix}$$

виконує роль одиниці або тотожного елемента при такому множенні.

Нехай ϵ підстановка

$$A = \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \end{bmatrix}.$$

Знайдемо обернену для A підстановку. Легко бачити, що такою підстановкою $B \equiv A^{-1}$ буде

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} k_1, k_2, \dots, k_n \\ 1, 2, \dots, n \end{bmatrix}.$$

Перепишемо тепер B так, щоб верхня перестановка в ній була правильною. Для цього треба переписати її таким чином, щоб у верхньому рядку в ній під k_1 знаходилось число 1, під $k_2 - 2$ і т.ін.

Таку підстановку B виписати нелегко. Обмежимося тим, що випишемо два числа в нижньому рядку, припустивши, що $k_1 < k_2$:

$$B = \begin{bmatrix} 1, & \dots & k_1, & \dots & k_2, & \dots & n \\ \dots & \dots & 1, & \dots & 2, & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Легко помітити, що в даному випадку $AB = BA = E$.

Радимо читачеві перевірити самостійно асоціативність такого множення підстановок:

$$(AB)C = A(BC).$$

Тепер можна зробити висновок, що підстановки степеня n утворюють групу, яка називається симетричною групою степені n і позначається S_n . Неважко перевірити, що при $n > 2$ вона некомутативна.

Якщо переставити два довільні числа нижнього рядка E , одержимо підстановку, яка називається транспозицією:

$$T_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1, \dots, i, \dots, j, \dots, n \\ 1, \dots, j, \dots, i, \dots, n \end{bmatrix}.$$

(Нижні індекси показують, які числа в нижньому рядку переставлені; верхній – степінь підстановки.)

Таку транспозицію іноді будемо позначати (i, j) .

Якщо переставити сусідні числа, одержимо елементарну транспозицію.

Наприклад, елементарна транспозиція степені 4:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 1, 3, 4 \end{bmatrix}.$$

Легко перевірити, що довільна транспозиція T задовольняє тотожність $T^2 = E$.

Нехай є підстановка

$$A = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 4, 1 \end{bmatrix}.$$

Щоб отримати підстановку

$$B = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 4, 3 \end{bmatrix},$$

що одержана з A перестановкою в нижньому рядку чисел 3 і 4, які стоять на першому та четвертому місцях, виявляється, треба обчислити добуток $T_{14} A$.

Перевіримо це:

$$T_{14}A = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 2, 3, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 4, 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 4, 3 \end{bmatrix} = B.$$

Таке правило неважко довести в загальному випадку. Треба тільки уважно прослідкувати за пересуванням чисел.

Очевидно, довільна підстановка може бути одержана з тотожної в результаті кількох транспозицій. Тому, враховуючи одержане правило, робимо висновок, що довільна підстановка може бути представлена як добуток кількох транспозицій. Зауважимо, що транспозиція може бути представлена як добуток елементарних транспозицій. Цікаво підрахувати їх число. Нехай $i < j$ і треба з E одержати транспозицію

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1, & \dots & i, & \dots & j, & \dots & n \\ 1 & \dots & j, & \dots & i, & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Для того щоб пересунути індекс j в E вправо на місце i , треба зробити $j - i$ перестановок сусідніх чисел: i переставити з числами $i+1, i+2, i+3, \dots, j$. Потім пересувається індекс j , що вже знаходиться на $(j - 1)$ -му місці, вліво на місце i , тобто переставити його з $j - 1 - i$ числами. Всього ми повинні були виконати $2(j - i) - 1$ (непарне число) транспозицій сусідніх чисел. З попереднього відомо: це означає, що розглядувана транспозиція дорівнює добутку непарного числа елементарних транспозицій.

ПАРНІСТЬ ПІДСТАНОВКИ

З попередніх спостережень легко зробити висновок, що деякі підстановки одержуються після непарного числа елементарних транспозицій (наприклад, довільні транспозиції), деякі – після їх парного числа. Це дає змогу поставити кожній підстановці $A \in S_n$ число $\varepsilon(A)$ з множини $Z_2 = \{1, -1\}$ (мультиплікативної групи з двох елементів, де $1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1, (-1) \cdot (-1) = 1$), яке називається парністю підстановки, причому будемо вимагати, щоб це відображення $\varepsilon : S_n \rightarrow Z_2$ було гомоморфізмом груп. Парність тотожної підстановки за означенням дорівнює одиниці. Парність кожної елементарної транспозиції будемо вважати рівною -1 . Тоді, наприклад, парність $\varepsilon(T)$ довільної транспозиції T_{ij} , буде теж рівною -1 , бо T_{ij} є добуток непарного числа

$2(j-i)-1$ елементарних транспозицій, а завдяки гомоморфізму парність непарного добутку елементарних транспозицій є непарним добутком мінус одиниць, тобто мінус одиницею.

Підстановка, яка є добутком непарного числа довільних транспозицій, також має парність (-1) , і завдяки гомоморфізму – при знаходженні парності добутку - парності співмножників множаться за правилом множення в Z_2 .

Підстановки, що можуть бути зображені як добуток парної кількості транспозицій, завдяки тому ж правилу мають парність 1. Так, наприклад, $\varepsilon(E) = \varepsilon(T_{ij}^2) = \varepsilon(T_{ij})\varepsilon(T_{ij}) = (-1)(-1) = 1$.

На прикладі поняття парності можна зробити загальне зауваження щодо гомоморфізму: він може загубити деякі властивості початкової групи, на якій він визначений. Так, S_n при $n \geq 3$ – некомутативна група, а її образ при гомоморфізмі «парність» – комутативна група $\mathbb{Z}_2$.

ЗОВНІШНІЙ ДОБУТОК І АЛГЕБРА ГРАССМАНА

Нехай E_n — лінійний простір над полем K (характеристика якого не дорівнює 2 — частіше це будуть $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$) і $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ — деякий базис в E_n . Будемо позначати $\Lambda^0(E_n) \equiv K$, $\Lambda^1(E_n) \equiv E_n$. Елементи цих просторів будемо називати 0-векторами та, відповідно, 1-векторами.

Нехай для векторів в $x, y \in E_n$ визначена операція множення, яка позначається $x \wedge y$. Ця операція за означенням вважається антикомутативною, тобто, $y \wedge x = -x \wedge y$, асоціативною - $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ і дистрибутивною по відношенню до додавання: $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$. На вектори такого вигляду можна натягти лінійний простір (тобто розглянути всілякі їхні лінійні комбінації). Позначимо його $\Lambda^2(E_n)$.

Зразу зауважимо, що $x \wedge x = 0$, бо $x \wedge x = -x \wedge x$, звідки $2x \wedge x = 0$, і за властивостями лінійного простору (оскільки $2 \neq 0$ в $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) $x \wedge x = 0$.

Очевидно, його розмірність дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Далі можна розглянути формальні добутки $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ ($i \neq j, i \neq k, j \neq k$). З асоціативності зовнішнього добутку випливає, що дужки в такому добутку розставляти не треба:

$$e_i \wedge e_j \wedge e_k = e_i \wedge (e_j \wedge e_k) = (e_i \wedge e_j) \wedge e_k. \quad (6.4)$$

З властивостей антикомутативності і асоціативності випливає, що

$$e_i \wedge e_j \wedge e_k = \varepsilon(\sigma) e_{\sigma(i)} \wedge e_{\sigma(j)} \wedge e_{\sigma(k)},$$

де $\sigma \in S_3$ - деяка підстановка. Справді, перестановку індексів можна зробити, застосувавши кілька транспозицій, які змінюють парність (i, j, k) . Очевидно, парність нової підстановки дорівнює $\varepsilon(\sigma)$. Це означає, що парності перестановок (i, j, k) і $(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$ відрізняються множителем $\varepsilon(\sigma)$.

На такі вектори, як на базисні, натягуємо лінійний простір - $\Lambda^3(E_n)$. Розглядаючи добутки довільної кількості співмножників, одержимо простір — $\Lambda^k(E_n)$. Зауважимо, що у виразі $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ немає рівних співмножників, бо їх добуток дорівнював би нулю. Очевидно, $\dim(\Lambda^k(E_n)) = C_n^k$.

Таким чином дійдемо до $\Lambda^n(E_n)$ - одновимірного простору, натягнутого на єдиний базисний вектор $e_n \wedge \dots \wedge e_n$. Далі, взявши пряму суму $\Lambda^0(E_n) \oplus \Lambda^1(E_n) \oplus \dots \oplus \Lambda^k(E_n) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(E_n)$, одержимо алгебру Грассмана $\Lambda(E_n)$ векторного простору E_n :

$$\dim(\Lambda^n(E_n)) = \sum_{k=0}^n \dim(\Lambda^k(E_n)) = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

за властивістю біноміальних коефіцієнтів.

Елементи з $\Lambda^k(E_n)$ називаються однорідними порядку k або k -векторами Грассмана. Так, елементи з $\Lambda^1(E_n)$ будемо називати 1-векторами, з $\Lambda^2(E_n)$ — 2-векторами або бівекторами Грассмана і т.ін.

Такий підхід не потребує ділення на факторіали, тому може бути впроваджений, якщо $\text{char}(K) \neq 0$.

Доведемо, що елементи $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ однієї степені однорідності лінійно незалежні при різних наборах $i_1, \dots, i_k$ (те, що незалежними будуть елементи різних степенів, очевидно).

Нехай $\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$. Візьмемо фіксований елемент $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$.

Нехай $i_{k+1}, \dots, i_n$ - індекси, доповнюючі до $i_1, \dots, i_k$, так що разом вони утворюють деяку перестановку чисел $1, 2, \dots, n$. Очевидно, що кожен з інших елементів суми має хоча б один з доповнюючих індексів. Тому, коли обидві частини домножити на вектор $e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, одержимо

$$a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = 0,$$

звідки $a_{i_1 \dots i_k} = 0$.

Теорема 6.1. Для того щоб вектори $x_1, \dots, x_k \in E_n$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = 0 \tag{6.5}$$

Доведення. Якщо вектори лінійно залежні, то який-небудь вектор з них,

скажімо, x_k , можна вважати лінійною комбінацією інших: $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i$. Тоді

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i (x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge x_i) = 0,$$

тому що кожен доданок суми містить пару однакових співмножників.

Доведемо, що, навпаки, з $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_k = 0$ випливає лінійна залежність векторів. Для цього досить довести протилежне твердження: якщо вектори лінійно незалежні, то $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0$. В разі їхньої лінійної незалежності їх можна доповнити до базису E_n деякими векторами $x_{k+1}, \dots, x_n$. Тоді $x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge x_{k+1} \wedge \dots \wedge x_n \neq 0$, бо цей вектор є твірним для $\Lambda^n(E_n)$. Тим більше, $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0$.

Наслідок. Якщо до деякого елемента лінійно незалежної системи додати деяку лінійну комбінацію інших елементів, то одержана таким чином система буде лінійно незалежною.

Доведення. Додамо, наприклад, до елемента x_k лінійну комбінацію $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i$ і

введемо позначення $\tilde{x} = x_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i$.

Знайдемо добуток елементів $x_1, \dots, x_{k-1}, \tilde{x}$:

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge \tilde{x} = x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge x_k + x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right).$$

Другий доданок дорівнює нулю, оскільки кожен елемент цієї суми містить два однакових елементи.

Означення 6.2. Елементи з $\Lambda^k(E^n)$ називаються k -векторами. Вектор вигляду $a_{i_1} \dots a_{j_k} e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ називається розкладеним.

Для кращого засвоєння викладеного матеріалу розглянемо декілька прикладів. Для спрощення запису будемо в них позначати зовнішній добуток ab , а не $a \wedge b$.

Приклад 6.2. Перемножити два вектори:

$$X_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad X_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

Помножимо ці вирази за правилами множення многочленів (завдяки дистрибутивності), враховуючи властивості зовнішнього добутку:

$$X_1 X_2 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2)(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{22}e_1e_2 + a_{12}a_{21}e_2e_1 = \\ = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1e_2$$

Приклад 6.3. Перемножити три вектори:

$$X_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, X_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, X_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3.$$

Розкриваючи дужки, не будемо виписувати доданки, що містять однакові вектори співмножники, оскільки їхні добутки дорівнюють нулю:

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) \wedge (a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = \\ = (a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{11}a_{23}e_1 \wedge e_3 + a_{12}a_{21}e_2 \wedge e_1 + a_{12}a_{23}e_2 \wedge e_3 + a_{13}a_{21}e_3 \wedge e_1 + a_{13}a_{22}e_3 \wedge e_2) \wedge \\ \wedge (a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = \\ a_{11}a_{22}a_{33}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + a_{11}a_{23}a_{32}e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 + a_{12}a_{21}a_{33}e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 + \\ + a_{12}a_{23}a_{31}e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + a_{13}a_{21}a_{32}e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 + a_{13}a_{22}a_{31}e_3 \wedge e_2 \wedge e_1.$$

У кожному з доданків упорядкуємо добутки базисних векторів, тобто зведемо до вигляду $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Враховуючи рівності

$$e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = -e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 = -e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \\ e_2 \wedge e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

після зведення подібних членів дістаємо

$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 =$ $= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$	(6.6)
---	-------

Контрольні запитання

- 1). Як множити підстановки?
- 2). Як знаходити парність добутку підстановок?

3). Яки чином при зовнішньому множенні лінійних комбінації векторів з коефіцієнтами, які є елементи векторів-рядків матриці, з'являється детермінант?

ЛЕКЦІЯ 7. ДЕТЕРМІНАНТ (ВИЗНАЧНИК) МАТРИЦІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

План

- 1). Означення детермінанта за допомогою зовнішнього добутку лінійних комбінацій векторів-рядків квадратної матриці.
- 2). Властивості детермінанта.
- 3). Обернена матриця.
- 4). Ранг матриці та його властивості.

Зіставимо квадратній матриці A :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	(7.1)
---	-------

вектори рядки

[illegible]

де $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в просторі E_n або в підпросторі $\Lambda^1(E_n)$ Грассманової алгебри $\Lambda^n(E_n)$.

Обчислимо зовнішній добуток:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \\ = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n).$$

Зауважимо, що ненульовими можуть бути тільки доданки вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ з попарно нерівними індексами $i_k, k=1,\dots,n$. Кожен з них можна, користуючись правилами множення в алгебрі Грассмана, звести до вигляду

$$\varepsilon(\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n,$$

де використано позначення: $i_j = \sigma(j)$,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{bmatrix} \in S_n$$

і $\varepsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ - парність цієї підстановки.

Підкреслимо: наша задача полягає в тому, щоб добуток базисних елементів був правильним, тобто співмножники були розташовані в порядку зростання індексів. Отже,

$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \right) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n.$	(7.3)
--	-------

Означення 7.1. Число у дужках формули, коефіцієнт перед $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$, називається детермінантом або визначником матриці, і для нього вживається одне з позначень:

$ A = \Delta(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$	(7.4)
---	-------

Тепер формула (7.3) запишеться у вигляді

$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n.$	(7.5)
--	---------

Зауваження. Очевидно, до такого ж самого виразу можна прийти, використовуючи довільний інший базис. Більш того, рівність (7.5) залишається справедливою, якщо система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ лінійно залежна.

З методу обчислення випливає, що в сумі (7.3) $n!$ доданків, бо кожен з них відповідає певній перестановці інших індексів – номерів стовпчиків, у яких розташовані елементи матриці, а перші індекси, які відповідають номерам рядків, знаходяться в порядку зростання, тобто, всього доданків стільки, скільки існує перестановок з n елементів - $n!$.

Ще раз підкреслимо, що детермінант можна визначити тільки для квадратної матриці.

Обчислимо детермінант матриці другого порядку, користуючись правилами зовнішнього множення. Згідно з означенням для цього слід перемножити вектори $x_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$, і $x_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$: $x_1 \wedge x_2 =$

$$= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{12}a_{21}e_2 \wedge e_1 =$$

$$= a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 - a_{12}a_{21}e_1 \wedge e_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2.$$

Визначник – це числовий коефіцієнт перед правильним добутком $e_1 \wedge e_2$, тобто,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Значення визначнику матриці третього порядку знаходиться завдяки рівності (6.6):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

⁶ Саррюс (фр. *Pierre-Frédéric Sarrus*; 10/03/1798, Сент-Афрік, департамент Аверон – 20/11/1861) – французький математик.

$$= \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) (a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n}) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Треба тепер відзначити, що коли $\tau = \begin{bmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ 1 & \dots & n \end{bmatrix} \in S_n$,

$j_1 = \tau(1), j_2 = \tau(2), \dots, j_n = \tau(n)$, то, навпаки, $1 = \tau^{-1}(j_1), 2 = \tau^{-1}(j_2), \dots, n = \tau^{-1}(j_n)$, і

оскільки $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)$ (дійсно, $1 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\tau^{-1}\tau) = \varepsilon(\tau^{-1})\varepsilon(\tau)$), звідки

$\varepsilon(\tau^{-1}) = (\varepsilon(\tau))^{-1} = \varepsilon(\tau)$), останній вираз можна записати у вигляді

$$\sum_{\tau^{-1} \in S_n} \varepsilon(\tau^{-1}) (a_{1\tau^{-1}(1)} a_{2\tau^{-1}(2)} \dots a_{n\tau^{-1}(n)}) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n,$$

тому що як τ , так і τ^{-1} однаково пробігають всю групу S_n . Отже, приходимо до виразу (7.3) після перепозначення $\sigma = \tau^{-1}$, тобто, обидва підходи дають один і той же вираз для визначника матриці. Будемо називати перший з них правилом рядків, а другий – стовпчиком. Сформулюємо результат.

Теорема 7.1. Маємо: $\det(A^T) = \det(A)$, де A^T - матриця транспонована до A .

Справді, обчислення $\det(A^T)$ за правилом стовпчиків збігається з обчисленням $\det(A)$ за правилом рядків.

Теорема 7.2. Визначник діагональної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

Доведення. Дійсно, нехай

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Зіставляючи цій матриці вектори-рядки $x_1 = a_{11}e_1, \dots, x_n = a_{nn}e_n$, одержуємо:

$x_1 \wedge \dots \wedge x_n = a_{11} \dots a_{nn} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, що й доводить твердження.

Цей результат можна узагальнити. Нехай матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

де A_1 - матриця розмірності $m \times m$, а A_2 - матриця розмірності $n \times n$. Така матриця називається блочно-діагональною. Для неї справедлива формула:

$$\det A = \det A_1 \det A_2.$$

Але зараз буде доведено ще більш загальний результат.

Теорема 7.3. Визначник східчастої матриці

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix},$$

де $A_1(m \times m)$, $A_2(n \times n)$, $B(m \times n)$, дорівнює добутку визначників матриць, що розташовані на її діагоналі:

$$\det A = \det A_1 \det A_2.$$

Доведення. Зіставивши матриці A вектори-рядки

$$x_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{1m}e_m,$$

...

$$x_m = a_{m1}e_1 + \dots + a_{mm}e_m,$$

$$x_{m+1} = a_{m+1,1}e_1 + \dots + a_{m+1,m}e_m + a_{m+1,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+1,m+n}e_{m+n},$$

...

$$x_{m+n} = a_{m+n,1}e_1 + \dots + a_{m+n,m}e_m + a_{m+n,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+n,m+n}e_{m+n},$$

одержимо:

$$\begin{aligned}
x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x_{m+1} \dots \wedge x_{m+n} &= (a_{11}e_1 + \dots + a_{1m}e_m) \wedge \dots \wedge (a_{m1}e_1 + \dots + a_{mm}e_m) \wedge \\
&\wedge (a_{m+1,1}e_1 + \dots + a_{m+1,m}e_m + a_{m+1,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+1,m+n}e_{m+n}) \wedge \dots \wedge \\
&\wedge (a_{m+n,1}e_1 + \dots + a_{m+n,m}e_m + a_{m+n,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+n,m+n}e_{m+n}) = \det A e_1 \wedge \dots \wedge e_m \wedge e_{m+1} \dots \wedge e_{m+n}.
\end{aligned}$$

При зовнішньому множенні $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ на лінійні комбінації

$a_{m+1,1}e_1 + \dots + a_{m+1,m}e_m, \dots, a_{m+n,1}e_1 + \dots + a_{m+n,m}e_m$ з векторів $x_{m+1} \dots \wedge x_{m+n}$, очевидно, одержимо нулі. Отже,

$$\begin{aligned}
x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x_{m+1} \dots \wedge x_{m+n} &= \\
\det A e_1 \wedge \dots \wedge e_1 \wedge e_{m+1} \dots \wedge e_{m+n} &= (a_{11}e_1 + \dots + a_{1m}e_m) \wedge \dots \wedge (a_{m1}e_1 + \dots + a_{mm}e_m) \wedge \\
&\wedge (a_{m+1,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+1,m+n}e_{m+n}) \wedge \dots \wedge (a_{m+n,m+1}e_{m+1} + \dots + a_{m+n,m+n}e_{m+n}) = \\
&= (\det A_1 e_1 \wedge \dots \wedge e_1) \wedge (\det A_2 e_{m+1} \dots \wedge e_{m+n}) = \det A_1 \det A_2 e_1 \wedge \dots \wedge e_1 \wedge e_{m+1} \dots \wedge e_{m+n},
\end{aligned}$$

звідки і одержуємо формулу $\det A = \det A_1 \det A_2$.

Зауваження. Зокрема, формула справедлива для блочно-діагональної матриці.

Теорема 7.4. Якщо переставити місцями два рядки (стовпчики), визначник змінить знак.

Справедливість цього факту випливає з антикомутативності зовнішнього множення: це відповідає перестановці множників у формулі (7.3), в результаті чого знак визначника зміниться.

Наслідок. Визначник матриці, що має два однакових рядки (стовпчики), дорівнює нулю.

Дійсно, з теореми 7.4 випливає, що $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$.

Тепер дамо інтерпретацію теореми 6.1 мовою теорії визначників.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ - вектори-рядки матриці A : $x_i = \sum_j a_{ij}e_j$. Теорема стверджує,

що вони лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$, але цей зовнішній добуток дорівнює $\det(A)e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, звідки випливає, що $\det(A) = 0$.

Те саме стосується векторів-стовпчиків. Сформулюємо результат.

Теорема 7.5. Визначник матриці дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори-рядки (або вектори-стовпчики) лінійно залежні.

Зауважимо, що раніше доведена теорема 7.4 є частинним випадком теореми 7.5.

З теореми 7.5 з очевидністю випливає

Теорема 7.6. Вектори-рядки матриці або її вектори-стовпчики лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

Теорема 7.7. Нехай є квадратні матриці A і A_1 , і один вектор-рядок (вектор-стовпчик) матриці A_1 відрізняється від відповідного вектора-рядка (вектора-стовпчика) матриці A числовим множником α , а всі відповідні інші їхні елементи співпадають. Тоді $\det(A_1) = \alpha \det(A)$.

Доведення. Нехай вектор матриці A , про який йде мова, має вигляд $x_k = a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kn}e_n, 1 \leq k \leq n$, а відповідний вектор матриці A_1 - $x'_k = \alpha a_{k1}e_1 + \alpha a_{k2}e_2 + \dots + \alpha a_{kn}e_n = \alpha x_k$. Справедливість твердження випливає з властивості однорідності зовнішнього добутку векторів: $\det(A_1)e_1 \wedge \dots \wedge e_n =$
 $= x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge \alpha x_k \wedge x_{k+1} \wedge \dots \wedge x_n = \alpha (x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} \wedge x_k \wedge x_{k+1} \wedge \dots \wedge x_n) =$
 $= \alpha \det(A)e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

Теорема 7.8. Якщо кожен елемент j -го рядка (стовпчика) визначника подано у вигляді суми двох доданків, то визначник Δ дорівнює сумі двох визначників, у яких співпадають всі рядки (стовпчики) крім j -го рядка (стовпчика). При цьому у одного визначника (Δ_1) j -го рядок (стовпчик) складається з перших доданків, а у іншого (Δ_2) - з других доданків:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} + b_{j1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{jn} + b_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

(7.7)

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{j1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Зауваження. Формула у випадку сум у стовпчиках записується відповідним чином.

Доведення проведемо лише в одному варіанті; в другому все робиться аналогічно.

Вектор, який відповідає j -му рядку визначника, має вигляд $x_j = x'_j + x''_j$, тому доведення впливає з дистрибутивності і формули (7.5):

$$\begin{aligned} \Delta \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n &= x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge (x'_j + x''_j) \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_n = \\ &= x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge x'_j \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_n + x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge x''_j \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_n = \\ &= \Delta_1 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n + \Delta_2 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = (\Delta_1 + \Delta_2) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Наслідок. Визначник не зміниться, якщо до деякого його рядка (стовпчика) додати лінійну комбінацію останніх рядків (стовпчиків). Дійсно, в силу теореми 7.8 він розпадеться на суму двох визначників, причому в одному з них рядок (стовпчик) буде лінійною комбінацією інших і буде дорівнювати нулю за теоремою 7.1.

Означення 7.3. Нехай викреслено k деяких рядків і k стовпчиків матриці (не обов'язково квадратної) і утворено матрицю, елементами якої є елементи даної матриці, що знаходяться на перетині цих рядків і стовпчиків. Визначник так побудованої нової матриці називається мінором даної матриці. Число k називається порядком мінора.

Очевидно, в ненульовій матриці можна знайти ненульовий мінор найбільшого порядку, і він, взагалі кажучи, не буде єдиним. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що його елементи знаходяться у верхньому лівому куті матриці. Нехай його порядок дорівнює r . Застосовуючи теорему 7.5 до рядків мінора, побачимо, що вони лінійно незалежні. Те ж саме стосується його векторів-стовпчиків. Доповнюючи вектори-рядки мінора до відповідних векторів-рядків самої матриці, побачимо, що й вони будуть лінійно незалежними. Так само лінійно незалежними будуть відповідні стовпчики.

Нехай матриця A має m рядків і n стовпчиків і r – максимальна кількість лінійно незалежних векторів-рядків ($r \leq m$), тобто, рядковий ранг матриці. Будемо вважати, що також $r \leq n$. Розглянемо матрицю, що складається з цих r рядків:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Нехай $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - деякий базис простору. Як і раніше, розглянемо зовнішній добуток з r множників, векторів-рядків:

$$(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n) \wedge \dots \wedge (a_{r1}e_1 + a_{r2}e_2 + \dots + a_{rn}e_n) \neq 0$$

(нерівність нулю випливає з теореми 7.1). Цілком очевидно, що він буде лінійною комбінацією добутоків вигляду $D_i e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, в яких номери базисних векторів утворюють зростаючу послідовність: $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, причому, беруться всі можливі такі комбінації, а коефіцієнти при них - це мінори матриці. Оскільки вектори $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ утворюють базис у підпросторі алгебри Грассмана, то хоча б один з коефіцієнтів $D_i \neq 0$, тобто, знайдеться ненульовий мінор порядку r . А тоді і відповідні r вектори-стовпчики лінійно незалежні. Якщо s – стовпчиковий ранг матриці, то з доведеного випливає, що

$r \leq s$. Відправляючись тепер від векторів-стовпчиків, так само доведемо, що $s \leq r$. Дійсно, беремо зовнішній добуток

$$(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{m1}e_m) \wedge \dots \wedge (a_{1s}e_1 + a_{2s}e_2 + \dots + a_{ms}e_m) \neq 0$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, пояснюємо, що знайдеться ненульовий мінор порядку s і відповідні s рядків будуть лінійно незалежними. Тоді $s \leq r$ і в результаті $s = r$.

Отже, доведено важливий факт:

Теорема 7.9. Рядковий і стовпчиковий ранги матриці співпадають і дорівнюють найбільшому з порядків її ненульових мінорів.

Друге доведення теореми 7.9.

Теорема 7.9 дуже важлива, і корисно буде поглянути на її доведення з іншої, так би мовити, внутрішньої точки зору.

Зауваження. Якщо усі мінори матриці дорівнюють нулю, то мінори вищого порядку теж дорівнюють нулю. Доведення спирається на узагальнену теорему Лапласа (див. Додаток 3), за якою довільний визначник можна розкласти за визначниками меншого порядку, що знаходяться на виділених k рядках матриці.

Отже, нехай r - найвищий порядок серед ненульових мінорів. Виберемо такий ненульовий мінор і будемо вважати, що він займає місце у лівому верхньому куті матриці, що, зрозуміло, не порушую загальності:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$	(7.8)
--	---------

Позначимо

$D \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$	(7.9)
--	-------

Будемо розширювати цей мінор до мінорів порядку $r + 1$ наступним чином:
допишемо справа стовпчик з номером l , $r + 1 \leq l \leq n$, а знизу будемо дописувати
по черзі рядок з номером i : $r + 1 \leq i \leq n$:

$\Delta_i \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{i,l} \end{vmatrix}$	(7.10)
--	--------

Зразу помітимо, що варіант $1 \leq i \leq r$ не відповідає рядку матриці, тому що в мінорі будуть повторюватись її рядки, а такого мінору в матриці немає. Все рівно зауважимо, що цей мінор з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Якщо ж $r + 1 \leq i \leq n$, знову $\Delta_i = 0$, оскільки найбільший порядок серед ненульових мінорів матриці дорівнює r . Отже, при всіх $1 \leq i \leq n$ мінор (7.10) дорівнює нулю. Розглянемо алгебраїчні доповнення до елементів останнього рядка цього мінору. Оскільки вони не залежать від елементів a_{ij} , $1 \leq j \leq r$ цього рядка, в їхніх позначеннях можна вживати один індекс:

$A_j \triangleq (-1)^{j+r+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$	(7.11)
---	--------

Розкриваючи нульовий визначник (7.10) за нижнім рядком, враховуючи, що доповнення до останнього елементу рядка – це даний мінор $D \neq 0$ одержимо:

$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0.$	(7.12)
--	----------

Звідси маємо:

$a_{il} = \left(-\frac{A_1}{D}\right)a_{i1} + \left(-\frac{A_2}{D}\right)a_{i2} + \dots + \left(-\frac{A_r}{D}\right)a_{ir}.$	(7.13)
---	----------

Ще раз підкреслимо, що рівність справедлива для всіх $1 \leq i \leq n$, коефіцієнти таких лінійних комбінацій від i не залежать, а це означає, що довільний l - ий стовпчик матриці є лінійною комбінацією стовпчиків з номерами $j = 1, \dots, r$.

Зауважимо, що, виходячи з того самого ненульового мінору, аналогічним способом доводиться, що довільний рядок матриці є лінійна комбінація перших r її рядків. Отже, стовпчиковий і рядковий ранги матриці співпадають і дорівнюють найбільшому з порядків ненульових мінорів.

Означення 7.4. Нехай матриця квадратна і в ній виділено деякий мінор. Визначник з елементів, що залишились після викреслювань, називається доповнюючим мінором. Нехай було викреслено рядки $i_1, i_2, \dots, i_k, 1 \leq k \leq n-1$ і стовпчики $j_1, j_2, \dots, j_k$. Алгебраїчним доповненням до даного мінора називається доповнюючий мінор, помножений на $(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k}$.

Теорема 7.10. Ранг матриці не змінюється в результаті її елементарних перетворень, тобто, додавання до будь-якого рядка (стовпчика) лінійної комбінації інших рядків (відповідно стовпчиків).

Справедливість цього факту випливає з теореми 7.8, наслідку з неї і теореми 7.9.

Зауважимо, що цей факт було доведено іншим методом – теорема 1.1.

Означення 7.5. Нехай A, B - матриці, що мають однакову кількість рядків. Матриця з тієї ж кількості рядків, що є об'єднанням векторів-стовпчиків спочатку однієї, а потім другої матриць, називається блочною матрицею і позначається

$(A B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$	(7.14)
--	--------

Позначимо $b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$. Якщо цей вектор є лінійною комбінацією векторів-стовпчиків матриці A , то $\text{rank}(A|b^{(1)}) = \text{rank}(A)$. Якщо ж він лінійно незалежний зі стовпчиками матриці A , то

$$\text{rank}(A|b^{(1)}) = \text{rank}(A) + 1 \Rightarrow \text{rank}(A|b^{(1)}) \leq \text{rank}(A) + 1.$$

Тобто, при приписування до матриці стовпчика ранг нової матриці не змінюється, якщо стовпчик лінійно залежний зі стовпчиками матриці або збільшується на одиницю, якщо стовпчик лінійно незалежний зі стовпчиками матриці. Навпаки: при викреслюванні стовпчика матриці нова матриця має той самий ранг, коли викреслений стовпчик лінійно залежний зі стовпчиками матриці, або зменшується на одиницю, якщо викреслений стовпчик лінійно незалежний зі стовпчиками матриці. Справді, з нової матриці початкова матриця одержана шляхом додавання стовпчика, лінійно незалежного зі стовпчиками матриці, і треба застосувати попереднє правило.

В результаті проведених міркувань для рангу блочної матриці приходимо до оцінки зверху:

$\text{rank}(A B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$	(7.15)
--	--------

Сформулюємо результат.

Теорема 7.11. Для рангу блочної матриці справедлива нерівність (7.15). Рівність в цій нерівності може бути тоді і тільки тоді, коли вектори-стовпчики

двох матриць лінійно незалежні. Якщо вектори-стовпчики матриці B лінійно виражаються через вектори-стовпчики матриці A , то $\text{rank}(A|B) = \text{rank}(A)$.

Твердження 7.1. Нехай вектори стовпчики матриці A' - це деякі вектори-стовпчики матриці A . Тоді $\text{rank}(A') \leq \text{rank}(A)$.

Доведення. Базисні вектори-стовпчики матриці A' утворюють підсистему системи базисних векторів-стовпчиків матриці A , що й доводить нерівність.

Твердження 7.2. Нехай вектори-стовпчики матриці B - це лінійні комбінації векторів-стовпчиків матриці A . Довести, що $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$.

Доведення. З теореми 7.11 випливає: $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A|B) = \text{rank}(A)$.

Задача 7.2. Довести, що ранг суми двох матриць не перевищує суми їхніх рангів.

Доведення. Сума матриць $A+B$ - це матриця, утворена лінійними комбінаціями блочної матриці $(A|B)$. З твердження 7.2 і нерівності (7.15) випливає:

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A|B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B),$$

Що й треба було довести.

Теорема 7.12. Ранг добутку двох матриць не перевищує рангів кожної з матриць-співмножників.

Доведення. Як зазначалось (див. формулу (4.7)), вектори-стовпчики матриці AB - це лінійні комбінації векторів-стовпчиків матриці A , а тоді з твердження 7.2 випливає справедливність нерівності $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$.

Аналогічно, вектори-рядки матриці $AB = C$ є лінійними комбінаціями векторів-рядків матриці B , звідки $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.

Теорема 7.13. Нехай квадратна матриця B має обернену. Тоді ранг AB дорівнює рангу матриці A .

Доведення. $\text{rank}(A) = \text{rank}((AB)B^{-1}) \leq \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$.

Звідси $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$.

Теорема 7.14 (нерівність Фробеніуса⁷). Для рангів добутоків матриць має місце нерівність

$\text{rank}(BC) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B).$	(7.16)
---	----------

Нехай матриця L діє у лінійних просторах $L: E \rightarrow G$, $F \subset E$ - лінійний підпростір. Як відомо,

$$\dim E = \dim \ker(L) + \dim \text{Im}(L) \Rightarrow \dim \ker(L) = \dim E - \dim \text{Im}(L).$$

Тоді для звуження матриці L на підпростір F справедлива оцінка

$$\dim \ker(L|_F) \leq \dim \ker(L) = \dim E - \dim \text{Im}(L).$$

Нехай $F = \text{Im}(BC)$, $E = \text{Im}(B)$, $L = A$. Запишемо попереднє співвідношення для цих просторів:

$$\dim \ker(A|_{\text{Im}(BC)}) \leq \dim \ker(A) = \dim \text{Im}(B) - \dim \text{Im}(A).$$

Зауважимо, що $\dim \text{Im}(AB) \leq \dim \text{Im}(A)$. Тоді з доведеної нерівності випливає:

$$\dim \ker(A|_{\text{Im}(BC)}) \leq \dim \text{Im}(B) - \dim \text{Im}(AB).$$

Для звуження матриці на A на $\text{Im}(BC)$ має місце рівність

$$\dim \ker(A|_{\text{Im}(BC)}) = \dim \text{Im}(BC) - \dim \text{Im}(ABC).$$

Тоді

$$\dim \text{Im}(BC) - \dim \text{Im}(ABC) \leq \dim \text{Im}(B) - \dim \text{Im}(AB).$$

⁷ Фробеніус Фердинанд Георг (нім. *Ferdinand Georg Frobenius*; 26/10/1849, Берлін – 3/08/1917, Шарлоттенбург) – видатний німецький математик.

Звідки

$$\dim \operatorname{Im}(BC) + \dim \operatorname{Im}(AB) \leq \dim \operatorname{Im}(ABC) + \dim \operatorname{Im}(B).$$

З означення рангу випливає нерівність, яку треба було довести.

Теорема 7.15 (нерівність Сільвестра⁸). Нехай кількість стовпчиків матриці A і кількість рядків матриці B дорівнюють n . Для рангів добутоків матриць має місце нерівність

$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB) + n.$	(7.16)
---	--------

Доведення. Запишемо нерівність Фробеніуса для матриць $A_1 = A, B_1 = I, C_1 = B$, враховуючи, що $\dim \operatorname{Im} I = n$:

$$\operatorname{rank}(B_1 C_1) + \operatorname{rank}(A_1 B_1) \leq \operatorname{rank}(A_1 B_1 C_1) + \operatorname{rank}(I).$$

Звідси

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I) \leq \operatorname{rank}(AB) + n.$$

Контрольні запитання

- 1). Чому детермінант матриці, що має рівні (або пропорційні) рядки, дорівнює нулю.
- 2). Сформулювати критерій лінійної залежності системи векторів, використовуючи детермінант матриці, що утворена з координат векторів?
- 3). Чому співпадають стовпчиковий і рядковий ранги матриці?

⁸ Сильвестр, Джеймс Джозеф (англ. *James Joseph Sylvester*; 3/09/1814, Лондон, - 15/03/1897, Оксфорд) – відомий математик.

ЛЕКЦІЯ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА (ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА⁹), ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

План

- 1). Різні правила обчислення визначників.
- 2). Ще про властивості визначників.
- 3). Орієнтовні базиси.

Кожен елемент a_{ij} матриці можна вважати її одновимірним мінором. Викреслюючи рядок i стовпчик, у яких знаходиться цей елемент, одержимо мінор, який позначимо M_{ji} .

Означення 8.1. Алгебраїчним доповненням елемента матриці A називається число $D_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.

Правило обчислення визначника.

Кожен елемент a_{ij} матриці можна вважати її одновимірним мінором. Викреслюючи рядок i стовпчик, у яких знаходиться цей елемент, одержимо мінор, який позначимо M_{ji} .

Означення 8.2. Алгебраїчним доповненням елемента матриці A називається число $D_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.

Теорема 8.1 (Лапласа, частинний випадок). Справедлива формула розкриття визначника за i -м рядком:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1} D_{1i} + a_{i2} D_{2i} + \dots + a_{ik} D_{ki} + \dots + a_{in} D_{ni} = \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{1i} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{2i} + \dots + (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ki} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{ni}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

⁹ Лаплас, П'єр-Сімон (фр. *Pierre-Simon Laplace*; 23/03/1749, Бомон ан Онж, Франція – 5/03/1827, Париж) – великий математик і астроном.

Зауваження. Загальну теорему Лапласа доведено у Додатку 3, але при першому читанні її можна випустити.

Доведення. Для більшої наочності спочатку доведемо формулу розкриття за першим рядком:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}D_{11} + a_{12}D_{21} + \dots + a_{1k}D_{k1} + \dots + a_{1n}D_{n1} = \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{21} + \dots + (-1)^{1+k}a_{1k}M_{k1} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{n1}.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Будемо перетворювати зовнішній добуток, використовуючи позначення (7.2):

$$\begin{aligned}x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \det A e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = \\ &= a_{11}e_1 \wedge (a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) + \\ &+ a_{12}e_2 \wedge (a_{21}e_1 + a_{23}e_3 + \dots + a_{2n}e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1}e_1 + a_{n3}e_3 + \dots + a_{nn}e_n) + \\ &+ \dots + a_{1j}e_j \wedge (a_{21}e_1 + a_{23}e_3 + \dots + a_{2,j-1}e_{j-1} + a_{2,j+1}e_{j+1} + \dots + a_{2n}e_n) \wedge \dots \wedge \\ &\wedge (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{n,j-1}e_{j-1} + a_{n,j+1}e_{j+1} + \dots + a_{nn}e_n) + \dots + \\ &+ a_{1n}e_n \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + \dots + a_{2,n-1}e_{n-1}) \wedge \dots \wedge (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{n,n-1}e_{n-1}) = \\ &= a_{11}M_{11}e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n + a_{12}M_{21}e_2 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n + \dots + \\ &+ \dots + a_{1j}M_{j1}e_j \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_n + \dots + \\ &+ a_{1n}M_{n1}e_n \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11}e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n + (-1)^{1+2}a_{12}M_{21}e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n + \dots + \\ &+ \dots + (-1)^{j-1}a_{1j}M_{j1}e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge e_j \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_n + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1}a_{1n}M_{n1}e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} \wedge e_n.\end{aligned}$$

Зауважимо, що для знаку $(-1)^{j-1}$ доцільніше писати вираз $(-1)^{j+1}$, і т.ін., що відповідає додаванню номерів рядка і стовпчика.

Отже,

$$\begin{aligned} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \det A e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \left((-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{21} + \dots + (-1)^{1+k} a_{1k} M_{k1} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{n1} \right) e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Тим самим теорему доведено.

Аналогічна формула справедлива, якщо розкривати визначник по першому стовпчику.

Доведемо тепер формулу розкриття визначника за довільним i -м рядком. Аналогічна формула має місце при розкритті визначника за довільному j -м стовпчиком.

Маємо:

$$\begin{aligned} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \det A e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= (a_{11} e_1 + \dots + a_{1n} e_n) \wedge \dots \wedge (a_{i-1,1} e_1 + \dots + a_{i-1,n} e_n) \wedge (a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n) \wedge \\ &\quad \wedge (a_{i+1,1} e_1 + \dots + a_{i+1,n} e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1} e_1 + \dots + a_{nn} e_n) = \\ &= (-1)^{i-1} (a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n) \wedge (a_{11} e_1 + \dots + a_{1n} e_n) \wedge \dots \wedge (a_{i-1,1} e_1 + \dots + a_{i-1,n} e_n) \wedge \\ &\quad \wedge (a_{i+1,1} e_1 + \dots + a_{i+1,n} e_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1} e_1 + \dots + a_{nn} e_n). \end{aligned}$$

Застосуємо розглянуту техніку розкриття визначника за першим рядком, розуміючи, що елемент матриці a_{i1} знаходиться зараз у 1-му рядку і має номери $(1,1)$, довільний елемент a_{ij} першого рядку має номери $(1, j)$. Отже,

$$\begin{aligned} \det A &= \\ &= (-1)^{i-1} \left((-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{21} + \dots + (-1)^{1+k} a_{1k} M_{k1} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{n1} \right) = \\ &= (-1)^{i+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{i+2} a_{12} M_{21} + \dots + (-1)^{i+k} a_{1k} M_{k1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{1n} M_{n1}. \end{aligned}$$

Формулу доведено.

Радимо читачу самостійно довести формулу розкриття визначника за довільним стовпчиком.

Наслідок.

$$\sum_j a_{ij} D_{jk} = 0 \quad (8.3)$$

якщо D_{jk} – алгебраїчні доповнення до елементів j -того стовпчика ($k \neq i$).

Дійсно, цю суму можна інтерпретувати (з точністю до знака) як розкриття визначника за i -м рядком, але в такому визначнику i -й та k -й рядки однакові. У такому разі, як уже відомо, визначник дорівнює нулю. Звідси випливає дуже важливий наслідок.

Зіставимо матриці A матрицю, елементи якої обчислюються в такий спосіб: в i -му стовпчику запишемо по черзі алгебраїчні доповнення до елементів i -го рядка. Тобто, кожен елемент матриці B буде мати вигляд

$$b_{ij} = D_{ji},$$

Якщо тепер перемножити A і B у довільному порядку (AB або BA), то за попередніми властивостями одержимо скалярну матрицю, діагональ якої буде складатись з однакових чисел, а саме, $\det(A)$ (недіагональні елементи будуть дорівнювати нулю).

Означення 8.3. Матриця B , елементи якої знаходяться за формулами

$$b_{ij} = D_{ji}, \quad (8.4)$$

називається приєднаною для A .

Отже, $AB = BA = \det(A)I$. Тоді з властивостей визначника випливає, що $\det(AB) = \det(A)$. Якщо $\det(A) = 0$, матриця A є дільником нуля і, як відомо, не може бути дільником одиниці.

Нехай тепер $\det(A) \neq 0$. З попередніх міркувань можна визначити обернену до A матрицю, якщо B – приєднана до неї:

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} B. \quad (8.5)$$

Підкреслимо, що для невиродженої матриці ліва і права обернені матриці співпадають. Інакше кажучи, така матриця комутує зі своєю оберненою: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Теорема 8.2 (про визначник добутку матриць). Нехай A, B , — матриці в $\mathbb{R}^n$. Тоді

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad (8.6)$$

Доведення. Нехай $C = AB$ і $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – деякий базис, в якому

$$g_j = \sum_{i=1}^n b_{ji} e_i, f_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} g_j, j, k = 1, \dots, n.$$

При цьому, згідно (7.5),

$$g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_n = \det(B) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = \det(A) g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_n.$$

Якщо $\{g_j\}$ не утворює базис, то A – вироджена матриця, а тому і AB – теж вироджена (якщо, скажімо, B – дільник нуля, то, завдяки асоціативності, AB – теж дільник нуля) і $\det(A) = \det(AB) = 0$. Отже, в цьому випадку теорему доведено. Аналогічно теорема доводиться, коли B – вироджена матриця. Розглянемо тепер випадок невироджених A і B .

З наведених формул випливає, що $f_k = \sum_j c_{jk} e_j$. Тепер, з одного боку,

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \det A g_1 \wedge \dots \wedge g_n = \det A \det B e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

з іншого –

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \det C \, e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

Звідки $\det C = \det AB = \det A \det B$. Теорему доведено.

Висновок. Нехай $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Тоді $\det I = 1 = \det A \det A^{-1}$, і

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}. \quad (8.7)$$

З цієї формули можна одразу зробити висновок, що значення визначника не залежить від того, в якому базисі ми брали зображення оператора матрицею.

Адже в іншому базисі матриця оператора має вигляд $\tilde{A} = TAT^{-1}$, де T – матриця заміни базису. Тоді

$$\det \tilde{A} = \det T \cdot \det A \cdot \det T^{-1} = \det T \cdot \det A \cdot (\det T)^{-1} = \det A.$$

Отже,

$$\det TAT^{-1} = \det A. \quad (8.8)$$

Таким чином, можна говорити про визначник оператора як інваріант, тобто величину, незалежну від базису, в якому оператор зображується матрицею.

Вправа 8.1. Довести формулу (8.6), виходячи з зображення матриці в формі (4.15). Вказівка: спочатку довести формулу для довільних елементарних матриць.

Зауваження. Невироджені матриці, які діють у лінійному просторі E_n над полем K , утворюють мультиплікативну групу, що позначається $GL_n(K)$ – *general linear group*. Оскільки добуток таких матриць – теж невинроджена матриця, кожна невинроджена матриця має обернену, одинична матриця теж невинроджена. Отже, завдяки формулі (8.6) можна зробити висновок, що функція $\det : GL(n, K) \rightarrow K$ є гомоморфізм з групи невинроджених

матриць на мультиплікативну групу поля K (в нашому випадку $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ або $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

ОРІЄНТОВНІ БАЗИСИ

Означення 8.4. Базис у $\mathbb{R}^n$ називається правим, якщо визначник з їхніх векторів-стовпчиків додатний. Якщо ж він від'ємний, базис називається лівим. Лінійно залежна система з n векторів не орієнтована, оскільки вказаний визначник для неї дорівнює нулю.

Означення 8.5. Кажуть, що два базиси в $\mathbb{R}^n$ мають однакову орієнтацію, якщо матриця переходу від одного до іншого має додатний визначник. Якщо визначник від'ємний, то базиси мають протилежну орієнтацію.

Якщо в базисі, що має певну орієнтацію, переставити два довільні вектори, то новий базис буде мати протилежну орієнтацію по відношенню до даного. Справді, це призведе до перестановки стовпчиків вказаного визначника, і той змінить знак. Це зауваження стосується перестановки місцями довільної кількості векторів. Орієнтація нового базису буде залежати від парності цієї перестановки. При парній базис буде орієнтований так само, при непарній перестановці базис змінить орієнтацію.

Найпростішим прикладом правого базису в $\mathbb{R}^n$ є канонічний базис.

Означення 8.5. Невироджений лінійний оператор (матриця) $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ зберігає орієнтацію, якщо $\det(A) > 0$. Якщо ж $\det(A) < 0$, він змінює орієнтацію.

Контрольні запитання

- 1). Чому можна знаходити обернену матрицю за допомогою методу Гауса, виконуючи елементарні перетворення блочної матриці, де один з блоків – одинична матриця?
- 2). За яким правилом утворюється приєднана матриця і яка її властивість?

ЛЕКЦІЯ 9.

МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ ТА ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ; МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

План

- 1). Методи обвідних мінорів та Гауса знаходження рангу матриці.
- 2). Матричні рівняння та методи їхнього розв'язання.

1. Метод обвідних мінорів

Означення 8.1. Нехай M_k - мінор k -го порядку. Якщо до нього можна дописати ще один рядок і один стовпчик, то одержимо мінор $k+1$ -го порядку, який називається обвідним для даного мінора.

Нехай для даної матриці знайдено ненульовий мінор k -го порядку. Якщо не можна вказати мінорів більшого порядку (матриця має k рядків або стовпчиків), то її ранг дорівнює k . Якщо не існує обвідного ненульового мінора, то ранг дорівнює k . Якщо існує ненульовий обвідний мінор, то аналогічні дослідження слід продовжити.

Приклад 8.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

Вибираємо мінор другого порядку, елементи якого знаходяться на перетині рядків 1 і 2, а стовпчиків – теж 1 і 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Побудуємо обвідний мінор з елементами на перетині рядків 1, 2, 3 і стовпчиків 1, 2, 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Висновок: треба шукати інший обвідний мінор. Візьмемо такий, елементи якого лежать на перетині рядків 1, 2, 3 і стовпчиків 1, 2, 4:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 22.$$

Оскільки у матриці тільки 3 рядки, більших за розмірністю мінорів не існує, і ранг матриці дорівнює 3: $\text{rank} A = 3$.

2. Метод Гауса¹⁰

Знайдемо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Нехай $a_{11} \neq 0$. Якщо $a_{11} = 0$, знаходимо $a_{k1} \neq 0$ і переставляємо рядки 1-й та k -й.

Якщо ж всі елементи першого стовпчика дорівнюють нулю, переходимо до другого стовпчика. Отже, нехай $\Delta_1 \triangleq a_{11} \neq 0$. Додамо до другого рядка перший,

помножений на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$. В результаті в другому рядку, j -му стовпчику буде

елемент $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} = \frac{a_{11} a_{2j} - a_{1j} a_{21}}{a_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix}}{a_{11}}$. Позначимо $\Delta_2 \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Потім так само до третього рядка додамо перший, помножений на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і т.ін. В

k -му рядку, j -му стовпчику буде елемент

¹⁰ **Гаус, Йоганн Карл Фрідріх** (нім. *Johann Carl Friedrich Gauß*, лат. *Carolus Fridericus Gauss*; 30/04/1777, Брауншвейг, – 23/02/1856, Геттінген) – геніальний математик, астроном, геодезист, фізик.

$$a_{kj}^{(1)} = a_{kj} - \frac{a_{k1}}{a_{11}} a_{1j} = \frac{a_{11}a_{kj} - a_{1j}a_{k1}}{a_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{k1} & a_{kj} \end{vmatrix}}{a_{11}}.$$

Після цієї процедури під елементом a_{11} в першому стовпчику одержимо нулі.

Новим діагональним елементом в другому рядку буде $a_{22}^{(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

Знову проводимо аналогічний аналіз і, якщо цей діагональний елемент не дорівнює нулю, аналогічним чином робимо нулі в другому стовпчику під діагональним елементом. Нехай $m < n$. Випишемо матрицю на p -му кроці процедури ($p < m < n$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1,p+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2p}^{(1)} & a_{2,p+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{pp}^{(p-1)} & a_{p,p+1}^{(p-1)} & \dots & a_{pn}^{(p-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+1,p+1}^{(p)} & \dots & a_{p+1,n}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,p+1}^{(p)} & \dots & a_{n,n}^{(p)} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Після закінчення цього процесу прийдемо до матриці трапецієвидної форми, на діагоналі якої, взагалі кажучи, можуть бути і нульові елементи. В такому випадку матрицю часто називають східчастою. Очевидно, шляхом переставляння стовпчиків, якщо це потрібно, можна зробити так, щоб перші r елементів на діагоналі не дорівнювали нулю, а інші були б нульовими. Нагадаємо: під діагональними елементами знаходяться нулі! Це означає, що існує ненульовий мінор порядку r , і цей порядок найбільший. Отже, ранг матриці дорівнює r . Зауважимо, що у випадку невиродженої квадратної матриці можна таким чином прийти до верхньо-трикутної матриці з ненульовими елементами на діагоналі, добуток яких дорівнюватиме визначнику матриці. Нагадаємо, що всі проведені елементарні перетворення не

змінюють рангу матриці, а у випадку квадратної матриці не змінюють її визначника.

Радимо читачу самостійно розібрати випадок $m > n$.

Матричні рівняння

Нехай є матриці таких розмірностей: $A(m \times m)$, $X(m \times k)$, $B(m \times k)$, $\det(A) \neq 0$.

Запропонуємо методику розв'язання матричного рівняння

$$AX = B \quad (9.3)$$

Очевидно,

$$X = A^{-1}B \quad (9.4)$$

Але зараз покажемо, що таке розв'язання можна провести методом Гауса.

Запропонуємо спочатку методику знаходження оберненої матриці методом Гауса.

В главі 2 було показано, що при виконанні умови $\det(A) \neq 0$ елементарними перетвореннями, множачи на елементарні матриці тільки зліва, дану матрицю можна звести до діагонального вигляду: $LA = I$, тобто, $L = A^{-1}$. Помножимо зліва на матрицю L тотожність $AA^{-1} = I$. Одержимо $LA A^{-1} = LI$ і в результаті - $A^{-1} = LI$. Це треба трактувати так: якщо з одиничною матрицею робити ті самі елементарні перетворення, що і з рядками матриці A , приводячи її до діагонального вигляду, одержимо з одиничної матриці обернену до A матрицю. На практиці записують розширену матрицю: зліва A , а справа – одиничну і роблять з обома однакові елементарні перетворення, приводячи A до одиничної. Тоді справа одержимо A^{-1} .

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай треба розв'язати матричне рівняння $AX = B$ з невиродженою квадратною матрицею A . Звичайно, $X = A^{-1}B = LB$. На цю рівність треба подивитись з такої точки зору: $LAX = A^{-1}B = LB$, тобто, з лівою і правою частинами блочної матриці $(A|B)$ треба робити однакові елементарні перетворення, зводячи її ліву частину до одиничної матриці. В результаті отримаємо матрицю $X = LB = A^{-1}B$, розв'язок матричного рівняння.

Аналогічно можна діяти при розв'язанні рівняння $XA = B : X = BA^{-1}$. Треба тільки одночасно здійснювати елементарні перетворення стовпчиків обох матриць у блочній матриці $(A|B)$ – робити одиниці на побічній діагоналі матриці A . Тоді на місці правої матриці одержимо розв'язок рівняння, матрицю X .

Елементарні перетворення можна застосовувати також у випадку виродженої матриці коефіцієнтів при невідомій матриці. Тоді одержимо безліч розв'язків або не одержимо жодного при несумісності рівняння.

Для застосування більш звичної процедури елементарних перетворень рядків, а не стовпчиків можна спочатку транспонувати обидві частини рівняння $XA = B$, одержавши рівняння $A^*X^* = B^*$, здійснити процедуру елементарних перетворень рядків, що викладена раніше, а потім транспонувати знайдену матрицю: $(X^*)^* = X$.

Приклад.

$XA=B$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} + 4x_{12} & 0 \\ 3x_{21} + 4x_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3x_{11} + 4x_{12} = 2; \\ 3x_{21} + 4x_{22} = 0. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_{11}; \\ x_{21} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_{22}. \end{matrix}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_{11} \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_{22} & x_{22} \end{pmatrix}.$

Повернемося тепер до задачі про матрицю переходу від одного базису до іншого.

Приклад 9.2. Нехай є базиси в $\mathbb{R}^3$:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; g_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю переходу $[T]_{fg}$ від базису f до базису g .

Нагадаємо, що дані вектори стовпчики – це коефіцієнти розкладу базисних векторів за канонічним базисом. Тоді можна виписати матриці операторів переходу:

$$[T]_{ef} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, [T]_{eg} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використаємо формулу (5.37): $[T]_{gf} = ([T]_{eg})^{-1} [T]_{ef}$.

Не приводячи зрозумілі обчислення, випишемо потрібні матриці:

$$([T]_{eg})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$[T]_{gf} = ([T]_{eg})^{-1} [T]_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

З допомогою знайденої матриці переходу, знаючи розклад вектора x за

базисом $f : [x]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, підрахувати коефіцієнти його розкладу за базисом g ,

тобто, знайти вектор $[x]_g$.

Маємо:

$$[x]_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна біло б шукати матрицю $[T]_{gf}$ оператора переходу

$T_{fg} : T_{fg} g_j = f_j$ безпосередньо, розв'язуючи системи лінійних рівнянь. Першу з них можна одержати, маючи розклад

$$s_{11}g_1 + s_{21}g_2 + s_{31}g_3 = f_1.$$

В розширеному варіанті вона має вигляд

$$\begin{cases} -2s_{11} + s_{31} = -2, \\ s_{11} + 2s_{21} = 3, \\ -s_{11} + 3s_{21} + s_{31} = 2 \end{cases}$$

або еквівалентно

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Для інших елементів матриці переходу також будемо мати:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Замість розв'язання кожної системи окремо можна розв'язувати матричну

систему $[T]_{eg}[T]_{gf} = [T]_{ef}$, де

$$[T]_{gf} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Можна, наприклад, скористатись методом Гауса, здійснюючи елементарні перетворення розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Читаач може впевнитись, що розв'язком системи буде вже знайдена матриця переходу.

Контрольні запитання

- 1). В чому полягає метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці?
- 2). В чому полягає метод Гауса знаходження рангу матриці?
- 3). Чому, застосовуючи метод Гауса до блочної матриці, одержуємо розв'язок матричного рівняння?

ЛЕКЦІЯ 10. ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

План

- 1). Лінійні однорідні та неоднорідні системи.
- 2). Основна та розширена матриці системи.
- 3). Сумісність ситем лінійних рівнянь та теорема Кронекера-Капеллі.
- 4). Фундаментальна система розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь.
- 5). Теорема Крамера.
- 6). Способи визначення лінійного підпростору.
- 7). Перетин та сума лінійних підпросторів.

Означення 10.1. Система рівнянь вигляду

$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$	(10.1)
--	--------

називається алгебраїчною лінійною неоднорідною. У випадку $b_i = 0, i = 1, \dots, n$ вона називається однорідною. Якщо $m = n$, система називається квадратною. Цілком зрозуміло, що якщо ввести позначення

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$	(10.2)
--	--------

цю систему можна записати у більш компактному матрично-векторному вигляді:

$$Ax = b. \tag{10.3}$$

Однорідна система має вигляд $Ax = 0$.

Означення 10.2. Система називається сумісною, якщо вона має розв'язки.

Очевидно, однорідна система завжди має розв'язки: принаймні їй задовольняє нуль-вектор: $A0 = 0$. При деяких умовах вона може мати неєдиний розв'язок і тоді, як уже відомо, такі розв'язки утворюють підпростір $\text{Ker}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 10.3. Розширеною матрицею системи алгебраїчних рівнянь називається матриця, що складається з векторів-стовпчиків матриці лівої частини і стовпчика з правої частини системи.

Рангом розширеної матриці називається найбільший з порядків серед всіх її ненульових мінорів. Це еквівалентно розмірності бази векторів-стовпчиків розширеної матриці.

Зрозуміло, що ранг розширеної матриці не менше рангу основної матриці системи.

Доведемо тепер основний результат теорії лінійних систем.

Теорема 10.1. (Кронекера¹¹ - Капеллі¹²). Для того, щоб лінійна система була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги її основної і розширеної матриць співпадали.

Доведення. Нехай $a_1, \dots, a_n$ - вектори-стовпчики матриці системи, а b - вектор-стовпчик її правої частини. Запишемо систему у векторному вигляді:

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$$

Очевидно, для сумісності системи необхідно і досить, щоб вектор-стовпчик b був лінійною комбінацією векторів-стовпчиків $a_1, \dots, a_n$. Необхідність. Нехай система має розв'язки, тобто, існують $x_1, \dots, x_n$, при яких справедлива написана рівність. Звідси випливає, що ранг розширеної матриці не більший за ранг основної, але, як відомо, ранг розширеної матриці не менше рангу основної, отже, вони рівні.

Достатність. Навпаки, якщо вказані ранги однакові і дорівнюють $r \leq n$, то базис простору, натягнутого на вектори $a_1, \dots, a_n$ (будемо вважати, що це саме вектори $a_1, \dots, a_r$), збігатиметься з базисом для простору, який натягнуто на $a_1, \dots, a_n, b$, а тому ці вектори лінійно залежні:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} a_{r+1} + \dots + \alpha_n a_n + \beta b = 0.$$

При цьому $\beta \neq 0$, оскільки вектори $a_1, \dots, a_r$ лінійно незалежні, а вектори $a_{r+1}, \dots, a_n$ можна виразити як лінійні комбінації векторів $a_1, \dots, a_r$. Рівність $\beta = 0$ означала б лінійну залежність векторів $a_1, \dots, a_r$. Отже, b можна подати як лінійну комбінацію векторів $a_1, \dots, a_n$.

¹¹ **Кронекер, Леопольд** (нім. *Leopold Kronecker*; 7/12/1823, Легніца, 29/12/1891, Берлін.) – видатний математик.

¹² **Капеллі, Альфредо** (італ. *Alfredo Capelli*; 5/08/1855, Мілан, - 28/01/1910, Неаполь) – відомий математик.

Зауважимо, що взагалі система може мати або єдиний, або неєдиний розв'язок, або зовсім його не мати (якщо не виконано умови теореми Кронекера-Капеллі – це стосується неоднорідної системи). З'ясуємо, який вигляд має розв'язок системи у випадку його неєдиності. Частинним будемо називати будь-який розв'язок системи.

Розглянемо спочатку однорідні системи. Як відзначалось всяка така система сумісна, тому що має хоча б один, а саме, нульовий розв'язок. З'ясуємо, при яких умовах її розв'язок буде неєдиний. Існування $x \neq 0$ такого, що $Ax = 0$ означає, що вектори-стовпчики матриці системи лінійно залежні (необхідна і достатня умова), а це, в свою чергу, означає, що ранг матриці менше, ніж кількість стовпчиків або, іншими словами, менше кількості невідомих. Якщо ж система квадратна, при такій умові її визначник дорівнює нулю. Сформулюємо результат.

Теорема 10.2. Лінійна однорідна система має неєдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг її матриці менше ніж розмірність вектора невідомих. У разі квадратної системи для цього необхідно і достатньо, щоб визначник матриці системи дорівнював нулю. ■

З доведеної теореми випливає, що квадратна однорідна система має єдиний розв'язок ($x = 0$) тоді і тільки тоді, коли $\det(A) \neq 0$.

Ще раз нагадаємо, що завдяки властивості лінійності матриці розв'язки однорідної системи утворюють підпростір $\text{Ker}(A)$ в $\mathbb{R}^n$. Виберемо в ньому деякий базис $g = \{g_1, \dots, g_d\}$. Тоді довільний розв'язок x_0 однорідної системи можна подати у вигляді лінійної комбінації цих базисних векторів:

$$x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i g_i.$$

Означення 10.4. Базис підпростору $\text{Ker}(A)$ називається фундаментальною системою розв'язків однорідної системи.

Зауважимо, що існує безліч фундаментальних систем.

Теорема 10.3. Загальний розв'язок неоднорідної лінійної системи дорівнює сумі її частинного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи (права частина дорівнює нулю).

Доведення. Нехай $\tilde{x}$ - деякий частинний розв'язок системи $Ax = b$, тобто, $A\tilde{x} = b$. Тоді $A(x - \tilde{x}) = b$, а це означає, що $x_0 = x - \tilde{x}$ - розв'язок однорідної системи. $x_0 \in \text{Ker}(A)$, в цьому ядрі є свій базис, по якому можна розкласти довільний вектор, що йому належить, а це й відповідає загальному розв'язку однорідної системи. Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд: $x = \tilde{x} + x_0$.

Нехай $\{g_1, \dots, g_d\}$ - деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи. Тоді зображення загального розв'язку неоднорідної системи буде мати вигляд:

$$x = \tilde{x} + \sum_{k=1}^d \alpha_k g_k.$$

Теорема 10.5 (Крамера¹³). Лінійна квадратна система (10.1) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

Наслідок: лінійна квадратна однорідна система має єдиний, нульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

Доведення очевидне: квадратна матриця має обернену тоді і лише тоді, коли її визначник не дорівнює нулю. Отже, розв'язуючи лінійну квадратну систему, маємо: $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$.

¹³ **Крамер, Габріель Габріель** (нім. *Gabriel Cramer*, 31/07/1704, Женева, Швейцарія – 4/01/1752, Баньоль-сюр-Сез, Франція) – видатний математик, учень і друг Йогана Бернуллі.

Застосуємо правило знаходження елементів оберненої матриці для розв'язку квадратної системи лінійних рівнянь при умові $\Delta \equiv \det A \neq 0$.

Нехай треба розв'язати неоднорідну систему лінійних рівнянь (9.3). Для знаходження j -ї компоненти невідомого вектора $x = A^{-1}b$ або невідомої x_j треба, згідно з правилами множення матриці на вектор, j -й рядок матриці помножити на вектор-стовпчик b . У результаті одержимо

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^n D_{ji} b_i}{\Delta}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10.4)$$

Вираз у чисельнику відповідає розкладу по j -му стовпчику визначника Δ_j , що має такий вигляд:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (10.5)$$

Отже, маємо формулу, що називається формулою Крамера, для довільної компоненти вектора-розв'язку неоднорідної лінійної системи:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10.6)$$

Метод Гауса розв'язання лінійних систем

Зіставимо системі (9.1) розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (10.7)$$

Виконуючи елементарні перетворення цієї матриці, які, нагадаємо, полягають в множенні на відповідні числа першого рядка, якщо діагональний елемент $a_{11} \neq 0$, і додавання до інших рядків, щоб під цим діагональним елементом в першому стовпчику зробити нулі. Якщо ж цей елемент дорівнює нулю, треба переставити цей рядок з деяким іншим рядком, в якому елемент першого рядка не дорівнює нулю (якщо такий існує), а потім діяти, як було вказано. Далі треба діяти так само з другим стовпчиком і т.ін. В результаті прийдемо до матриці трапецієвидної форми або до верхньотрикутної в залежності від розмірності матриці та її рангу. Якщо основна матриця системи квадратна і невироджена, її можна звести до діагональної форми з ненульовими елементами на діагоналі, і її розв'язки знаходяться зрозумілим чином:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} d_{11} & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{array} \right), \quad (10.8)$$

$$x_i = \frac{b_i}{d_{ii}}, i = 1, \dots, n. \quad (10.9)$$

Розглянемо сумісну систему (виконано умови теореми Кронекера-Капеллі) з матрицею $A(m \times n)$, з рангом r , причому $r \leq m < n$. Елементарними перетвореннями розширену матрицю приводимо до вигляду (ми зберегли ті ж самі позначення для елементів одержаної матриці для простоти запису):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (10.10)$$

Перенесемо доданки в кожному рівнянні, які містять невідомі $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Останні тотожності $0=0$ можна не писати. В результаті одержимо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 - \sum_{j=r+1}^n a_{1j}x_j \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 - \sum_{j=r+1}^n a_{2j}x_j \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & b_r - \sum_{j=r+1}^n a_{rj}x_j \end{array} \right) \quad (10.11)$$

Елементарними перетворення приводимо основну матрицю систему до діагонального вигляду і розв'язуємо, як це було описано раніше. В цьому випадку перші r невідомих $x_1, \dots, x_r$ лінійно залежать від $x_{r+1}, \dots, x_n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \sum_{i=r+1}^n \alpha_{1i} x_i \\ \beta_2 + \sum_{i=r+1}^n \alpha_{2i} x_i \\ \dots \\ \beta_r + \sum_{i=r+1}^n \alpha_{ri} x_i \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Це можна переписати як лінійну комбінацію частинного розв'язку неоднорідної системи і лінійної комбінації векторів фундаментальної системи розв'язків однорідної системи:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} \alpha_{1,r+1} \\ \alpha_{2,r+1} \\ \dots \\ \alpha_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Випадок $m > n \geq r$ радимо читачу розглянути самостійно.

Може статись так, що матрицю буде приведено до так званого «східчастого» вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & & & & & & & & & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,j_2} & & & & & & & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3,j_3} & \dots & \cdot & \cdot & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \dots & 0 & a_{m,j_m} & \dots & a_{mn} \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & & & & & & & & & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто, рядки матриці починаються з нулів, і кожного разу із зростанням номера рядка на одиницю кількість таких нулів буде монотонно збільшуватись не менше, ніж на одиницю. При розв'язанні такої системи треба діяти, як і у минулому випадку (при умові сумісності системи), залишаючи зліва ті стовпчики, які породжують мінор найбільшого порядку, що дорівнює рангу матриці, а інші доданки системи переносити в праву частину.

Приклад 10.1. $Ax = b, A(3 \times 5), x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T \in \mathbb{R}^5, b \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

Тепер перенесемо члени рівняння, що містять x_1, x_3 (в першому і третьому стовпчиках) в праву частину:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \frac{2}{3}x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 - x_3; \\ x_4 = 1; \\ x_5 = 1 - \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_3 \\ x_3 \\ 1 \\ 1 - \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Читач повинен був впевнитись, що умову теореми Кронекера-Капеллі виконано: рангі основної і розширеної матриць співпадають і дорівнюють 3. Як бачимо, розв'язок системи є сумою частинного розв'язку неоднорідної системи $g = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$ і загального розв'язку однорідної системи – лінійної комбінації двох векторів

$$f_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, f_2 = \left(0 \ -1 \ 1 \ 0 \ -\frac{2}{3} \right)^T,$$

що становлять фундаментальну систему її розв'язків і яка, в свою чергу, утворює базис $\text{Ker}(A)$; $\text{def}(A) = \dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = 5 - 3 = 2$.

СПОСОБИ ВИЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПІДПРОСТОРУ

Нехай G_k - підпростір лінійного простору G_n (нижні індекси вказують на їхні розмірності, $k < n$). Нехай $g^{(k)} = \{g_1, \dots, g_k\} \subset G_k$ - базис підпростору, а $g^{(n)} = \{g_1, \dots, g_k, g_{k+1}, \dots, g_n\} \subset G_n$ - базис простору.

Відомо, що підпростір можна задати як сукупність усіх лінійних комбінацій його базисних векторів:

$G_k = \{\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K\}.$	(10.14)
---	-----------

З іншого боку, ми бачили, що фундаментальна система розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь $Ax=0$ утворює базис підпростору цих розв'язків, тобто, ядра матриці - $Ker(A)$. Виникає задача: як, знаючи базис підпростору, знайти систему лінійних однорідних рівнянь, фундаментальна система розв'язків якої співпадала б з відомим базисом даного підпростору. Зразу треба зауважити, що така система може бути знайдена неєдиним чином, оскільки базисів у підпросторі існує безліч.

Нехай $g_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{ni} \end{pmatrix}$. **Зауваження.** Як вже вказувалось, вектори з G_k і вектори-

стовпчики – це елементи різних просторів, тому між ними не можна ставити знак рівності, але в даному випадку для зручності будемо використовувати знак рівності, розуміючи, що, насправді, він означає ототожнення.

Нехай $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in G_k$. Тоді його можна розкласти за базисом підпростору:

$$x = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{pmatrix} g_{1k} \\ \vdots \\ g_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо лінійну систему відносно коефіцієнтів розкладу $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} g_{11}\alpha_1 + \dots + g_{1k}\alpha_k = x_1, \\ \dots \\ g_{n1}\alpha_1 + \dots + g_{nk}\alpha_k = x_n. \end{cases}$$

Будемо досліджувати її, застосовуючи метод Гауса, записавши спочатку розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} & x_1 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2k} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nk} & x_n \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1k} & \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\ 0 & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2k} & \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{g}_{kk} & \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n c_{k+1,j} x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^n c_{nj} x_j \end{array} \right)$$

Тепер за теоремою Кронекера-Капеллі для сумісності одержаної системи необхідно і достатньо, щоб координати вектора x задовольняли б лінійній системі

$\begin{cases} c_{k+1,1}x_1 + c_{k+1,2}x_2 + \dots + c_{k+1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n = 0. \end{cases}$	(10.15)
--	---------

Можна трохи модифікувати викладений спосіб. Розкладемо за канонічним базисом вектор x :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зважаючи на це, запишемо неоднорідну частину розширеної системи без «іксів», а замість них вставимо координати векторів-стовпчиків канонічного базису, тобто, неоднорідна частина зараз буде одиничною матрицею:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nk} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Тоді в результаті виконання процедур методу Гауса в правій частині рядки утвореної розширеної матриці, що відповідають нульовим рядкам лівої частини, дадуть коефіцієнти системи (10.15).

Зауваження. Можна ставити більш загальну задачу: підпростір породжується системою твірних, не обов'язково лінійно незалежною. Звичайно, можна вибрати базу цієї системи, тобто, найбільшу систему лінійно незалежних векторів, яка буде становити базис цього підпростору. А можна діяти викладеним методом, просто в лівій частині розширеної матриці після виконання всіх дій методу Гауса буде більше нульових рядків.

Приклад 10.4.

$$\text{Нехай } g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Маємо:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & -3 & x_2 \\ 2 & 1 & 4 & x_3 \\ 0 & -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & 2 & -2x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_4 \end{array}\right).$$

Одержуємо систему лінійних рівнянь, що описує підпростір:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Читач повинен самостійно зробити цю задачу із застосуванням другого способу.

ПЕРЕТИН ТА СУМА ЛІНІЙНИХ ПІДПРОСТОРІВ

Нехай $G_k, G_l \subset E_n$. Очевидно, $G = G_k \cap G_l$ - лінійний підпростір в E_n .

Якщо кожен з цих підпросторів визначається системою лінійних рівнянь відповідно

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = 0, \end{cases}$$

то їхній перетин визначається системою

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = 0. \end{cases}$$

Перейдемо до визначення суми двох підпросторів. Зауважимо, що об'єднання підпросторів не є, взагалі кажучи, підпростором.

Означення 10.5. Сумою підпросторів G і $\tilde{G}$ називається наступна множина сум векторів:

$$G + \tilde{G} \triangleq \{g + \tilde{g}, g \in G, g \in \tilde{G}\}.$$

Цілком очевидно, що $G + \tilde{G}$ є лінійним підпростором.

Якщо $g = \{g_1, \dots, g_k\}$, $\tilde{g} = \{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_l\}$ - системи твірних цих підпросторів, то їхнє об'єднання $g \cup \tilde{g} = \{g_1, \dots, g_k, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_l\}$ буде системою твірних їхньої суми. Базисом суми підпросторів буде база системи $g \cup \tilde{g}$.

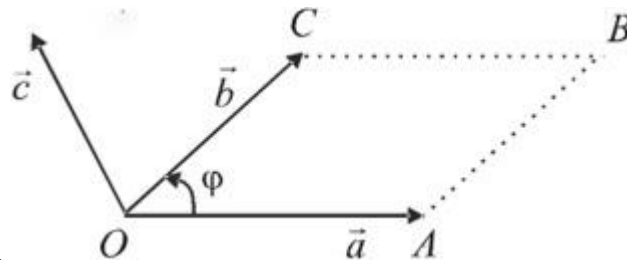
Контрольні запитання

- 1). Який вигляд має загальний розв'язок неоднорідної системи з виродженою матрицею?
- 2). Як описати підпростір системою лінійних рівнянь?
- 3). Як описати підпростір через його базис?
- 4). Як описати перетин і суму підпросторів?
- 5). Навести приклад непрямої суми, що дає весь простір?

ЛЕКЦІЯ 11. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

СКАЛЯРНИЙ ТА



План

- 1). Скалярний добуток двох векторів та його властивості.
- 2). Проекція вектора на вісь.
- 3). Вираз скалярного добутку через координати векторів у ортогональному базисі.
- 4). Векторний добуток двох векторів та його властивості.
- 5). Знаходження векторного добутку через координати векторів-співмножників.

Зараз не буде суттєво – якому з геометричних просторів належать вектори.

Означення 11.1. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$, називається число (скаляр), що обчислюється за формулою

$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \varphi.$	(11.1)
---	--------

Зауважимо, що для скалярного добутку не суттєвий напрямок повороту від одного вектора до іншого.

З означення легко одержати властивість комутативності скалярного добутку:

$\vec{b} \vec{a} = \vec{a} \vec{b}.$	(11.2)
--------------------------------------	--------

Дійсно: якщо кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$, то кут між $\vec{b}$ і $\vec{a}$ також дорівнює $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$, і його косинус не змінюється.

Далі,

$\vec{a}^2 = \vec{a} \vec{a} = \vec{a} ^2 \Rightarrow \vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \vec{a}}.$	(11.3)
--	--------

З означення миттєво впливає нерівність:

$ \vec{a} \vec{b} \leq \vec{a} \vec{b} .$	(11.4)
---	--------

Очевидно, рівність в цій нестрогій нерівності може бути тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні.

Якщо один з векторів – орт, тобто, одиничний за модулем вектор (будемо позначати його $\vec{e}$), то скалярний добуток – це величина проекції, яку будемо позначати $p_{\vec{e}} \vec{a}$ іншого вектора на пряму, що визначається цим вектором – вектор їй колінеарний:

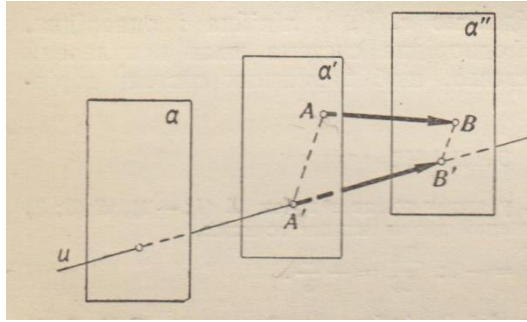
$\vec{a} \vec{e} = \vec{a} \cos \varphi = p_{\vec{e}} \vec{a}.$	(11.5)
---	--------

Маючи неединичний вектор $\vec{b}$, йому можна зіставити колінеарний орт, що має однаковий з ним напрям: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$. Тоді величину проекції можна виразити через скалярний добуток:

$p_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \vec{e} = \frac{\vec{a} \vec{b}}{ \vec{b} }.$	(11.6)
--	--------

Зауваження. Величину проекції не треба плутати з проекцією вектора на вісь, що визначається ортом $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{e}$ (Мал. 11.1), – вектором, який будемо позначати

$P_{\vec{e}} \vec{a} = (p_{\vec{e}} \vec{a}) \vec{e} = (\vec{a} \vec{e}) \vec{e} = \frac{(\vec{a} \vec{b})}{ \vec{b} ^2} \vec{b}.$	(11.7)
--	--------



Мал. 11.1

Нехай є два вектори, такі що кінець першого співпадає з початком другого. Будемо через їхні початки і кінці проводити паралельні площини, які перетинаються з прямою, що визначається вектором $\vec{c}$. При цьому, очевидно, будемо мати проекції векторів на цю пряму і

$p_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = p_{\vec{c}} \vec{a} + p_{\vec{c}} \vec{b}.$	(11.8)
---	--------

З цієї рівності випливає властивість адитивності скалярного добутку:

$(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}.$	(11.9)
--	--------

Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Доведемо, що

$(\alpha \vec{a}) \vec{b} = \alpha (\vec{a} \vec{b}).$	(11.10)
--	---------

У випадку $\alpha \geq 0$ це очевидно: при $\alpha > 0$ вектори $\vec{a}$ і $\alpha \vec{a}$ колінеарні, мають однакові напрямки і тому утворюють один і той самий кут $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$ з вектором $\vec{b}$. При $\alpha = 0$ рівність також очевидна.

Якщо ж $\alpha < 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\alpha \vec{a}$ колінеарні, мають протилежні напрямки і утворюють кут $\pi - \varphi \in [0, \pi]$ при $\varphi \in [0, \pi]$. Отже, маємо:

$$(\alpha \vec{a}) \vec{b} = |\alpha \vec{a}| |\vec{b}| \cos(\pi - \varphi) = -|\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = \alpha |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = \alpha \vec{a} \vec{b}.$$

З означення скалярного добутку випливає:

Твердження 11.1. Скалярний добуток між двома ненульовими векторами дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони ортогональні.

Зауважимо, що скалярний добуток нульового вектора теж дорівнює нулю, тому вважається, що нульовий вектор ортогональний будь-якому вектору.

Приклад 11.1. Нехай на векторах $\vec{a} = \vec{c}$, $\vec{b} = \vec{d}$ побудовано паралелограм з діагоналями $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

Маємо:

$$|\vec{d}_1|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b},$$

$$|\vec{d}_2|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}.$$

Додавши ці рівності, одержимо, так звану тотожність паралелограма:

$ \vec{d}_1 ^2 + \vec{d}_2 ^2 = 2(\vec{a} ^2 + \vec{b} ^2).$	(11.11)
---	----------------

Наслідок: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Справді, прирівнявши квадрати цих модулів, враховуючи, що вони співпадають зі скалярними квадратами, відповідно, суми і різниці, одержимо:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} \Rightarrow 4\vec{a}\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.$$

Твердження 11.2. Має місце нерівність трикутника:

$ \vec{a} + \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} .$	(11.12)
---	----------------

Доведення.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2,$$

звідки й випливає справедливність (11.12).

Зауваження. В нерівності трикутника має місце рівність тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні і мають однаковий напрямок.

При доведенні слід скористатись зауваженням після нерівності (11.4).

ВИРАЗ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ

Будемо вважати, що задано прямокутну систему координат з напрямними ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, що мають спільний початок, точку O . Як відомо, ці не компланарні вектори утворюють базис простору, який в даному випадку називається ортонормованим.

Нехай

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Будемо вважати, що вектор $\vec{u}$ утворює з координатними осями або, що те ж саме, з їхніми напрямними ортами кути, відповідно, α, β, γ . Будемо множити обидві частини рівності по черзі на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В результаті одержимо:

$$x = |\vec{u}| \cos \alpha, y = |\vec{u}| \cos \beta, z = |\vec{u}| \cos \gamma.$$

В результаті

$$\vec{u} = |\vec{u}| (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}).$$

В частинному випадку $|\vec{u}| = 1$ традиційно позначивши $\vec{u} = \vec{e}$, будемо мати:

$\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}, \vec{e} = 1.$	(11.13)
--	---------

Після піднесення до скалярного квадрату одержимо:

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$	(11.14)
---	---------

Обчислимо скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами у ортонормованому базисі: $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$.

Беручи до уваги доведену дистрибутивність скалярного добутку і те, що $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$, одержимо:

$\vec{a}\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$	(11.15)
---	---------

Зіставимо цим двом векторам відповідні їм вектори-стовпчики координат у

даному базисі: $\vec{a} \sim [\vec{a}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \sim [\vec{b}] = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Тоді, згідно з (11.14) можна ввести

скалярний добуток для векторів-стовпчиків, який позначається $([\vec{a}], [\vec{b}])$, за формулою:

$([\vec{a}], [\vec{b}]) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$	(11.16)
--	---------

В частинному випадку $[\vec{b}] = [\vec{a}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ маємо:

$[\vec{a}] = \sqrt{[\vec{a}][\vec{a}]} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$	(11.17)
---	---------

Завдяки формулі (11.15) ця операція з векторами-стовпчиками задовольняє усім аксіомам скалярного добутку:

- 1). $([\vec{a}], [\vec{a}]) \geq 0, ([\vec{a}], [\vec{a}]) = 0 \Leftrightarrow [\vec{a}] = 0$,
- 2). $([\vec{b}], [\vec{a}]) = ([\vec{a}], [\vec{b}])$,
- 3). $(\alpha[\vec{a}] + \beta[\vec{b}], [\vec{c}]) = \alpha([\vec{a}], [\vec{c}]) + \beta([\vec{b}], [\vec{c}])$.

Тепер можна знайти косинус кута між двома векторами, заданими своїми координатами у ортонормованому базисі:

$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$	(11.18)
---	---------

Нехай вісь визначається своїм напрямним ортом $\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$,
 $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Тоді для величини проекції цього вектора на вісь справедлива формула:

$p_{\vec{e}} \vec{a} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$	(11.19)
---	---------

Зауважимо також, що з (11.18) випливає

$ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$	(11.20)
---	---------

Рівність тут має місце тоді і тільки тоді, коли координати векторів-стовпчиків пропорційні.

Також має місце нерівність трикутника:

$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$	(11.21)
--	---------

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

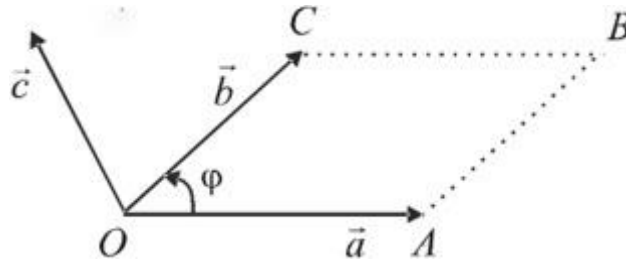
Означення 11.2. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, називається вектор $\vec{c} \triangleq [\vec{a}, \vec{b}]$, який має наступні властивості:

- 1). Він ортогональний до кожного з цих векторів, тобто, ортогональний до площини, що визначена ними;
- 2). Напрямок $\vec{c}$ такий, що якщо з його кінця дивитись на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то найкоротший поворот (на кут $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$) від першого множника до другого

повинен здійснюватись проти годинникової стрілки, тобто, в додатному напрямку;

$$3). |\vec{c}| = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Властивість 3) треба інтерпретувати таким чином: **модуль векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на його сторонах.**



Мал. 11.2

Зауваження. Розглянемо трійку векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\}$. Вона має властивість: з кінця $\vec{c}$ (третього вектора) видно, що найкоротший поворот від $\vec{a}$ (першого вектора) до $\vec{b}$ (другого вектора) здійснюється проти годинникової стрілки. Зробивши кругову заміну, одержимо трійку $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$. Правило виконується знову: з кінця $\vec{a}$ видно, що найкоротший поворот від $\vec{b}$ до $\vec{c}$ здійснюється проти годинникової стрілки. Ще раз зробимо кругову заміну і одержимо трійку $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$. І знову робимо висновок, що це правило виконується: з кінця $\vec{b}$ видно, що найкоротший поворот від $\vec{c}$ до $\vec{a}$ здійснюється проти годинникової стрілки. Впорядкована трійка векторів, що має описану властивість, називається правою. Це узгоджується з поняттям орієнтованого базису. Зараз ще рано розглядати загальний випадок, але в частинному випадку трьох базисних взаємно ортогональних векторів $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = [\vec{i}, \vec{j}]\}$, напрямних для координатних осей, зіставляючи їм вектори-

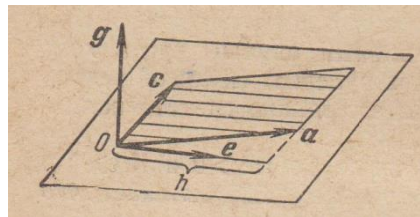
стовпчики $[\vec{i}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [\vec{j}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [\vec{k}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, будемо мати додатний визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Теорема 11.1. Нехай зафіксовано вектор $\vec{c}$ на площині P , і нехай $\vec{a}$ - довільний вектор цієї площини. Позначимо через $\vec{n}$ орт нормалі до площини, тобто, ортогональний до неї. Візьмемо орт $\vec{e}$, що лежить в цій площині і ортогональний до вектора $\vec{c}$, причому, щоб трійка $\{\vec{e}, \vec{c}, \vec{n}\}$ була правою.

При зроблених припущеннях має місце формула:

$[\vec{a}, \vec{c}] = p_{\vec{e}} \vec{a} \vec{c} \vec{n}.$	(11.22)
---	-----------



Мал. 11.3.

Модуль векторного добутку в лівій частині дорівнює площі паралелограма, побудованого на його сторонах. В той самий час $|p_{\vec{e}} \vec{a}|$ дорівнює висоті паралелограма, опущеній на сторону, що визначається вектором $\vec{c}$. Отже і модуль правої частини дорівнює площі цього паралелограма. За умовою вектори в обох частинах рівності колінеарні. Доведемо, що вони мають однакові напрямки. Нагадаємо, що трійка $\{\vec{e}, \vec{c}, \vec{n}\}$ права. Вектори $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{n}\}$ теж утворюють праву трійку, якщо $\vec{a}$ і $\vec{e}$ лежать по одну сторону від $\vec{c}$. В цьому випадку, очевидно, $p_{\vec{e}} \vec{a} > 0$. Якщо ж орт $\vec{e}$ той самий, він і $\vec{a}$ лежать по різні боки від $\vec{c}$, тоді трійка $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{n}\}$ ліва, $[\vec{a}, \vec{c}]$ і $\vec{n}$ мають протилежні напрямки, а, оскільки, $p_{\vec{e}} \vec{a} < 0$, отже, формула (11.22) також справедлива.

Забігаючи вперед, розглянемо скалярний добуток вектора $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ некомпланарний з цими двома вектор $\vec{d}$.

Означення 11.3. $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{d}$ називається мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$.

Зрозуміло, що на векторах $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ можна побудувати похилий паралелепіпед.

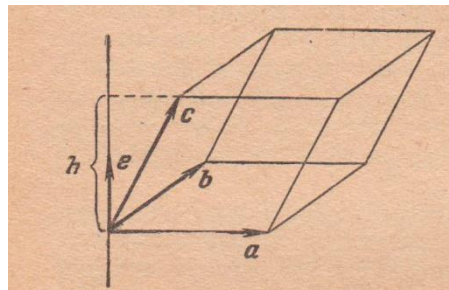
Проекція вектора $\vec{d}$ на $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ додатна, якщо $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ - права трійка і навпаки, від'ємна, якщо вони утворюють ліву трійку. Очевидно, що $\vec{c} \vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}] \vec{d} = p_{\vec{c}} \vec{d} |\vec{c}|$, і цей скалярний добуток є висота паралелепіпеда.

Згадавши, що модуль векторного добутку перших двох векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на них, одержимо важливий результат.

Теорема 11.2. Скалярний добуток вектора $\vec{d}$ на векторний добуток $[\vec{a}, \vec{b}]$, тобто, мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ у разі некомпланарності цих трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на них, взятому зі знаком плюс чи мінус в залежності, праву чи ліву трійку $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ вони утворюють:

$V_{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})} = \pm [\vec{a}, \vec{b}] \vec{d}.$	(11.23)
---	---------

Очевидно, у разі компланарності векторів формула (11.23) дає нульовий об'єм.



Мал. 11.4.

Зауважимо, що це питання більш детально буде розглянуте пізніше при вивченні мішаного добутку.

Зауваження. При доведенні формули вважалось, що основою паралелепіпеда була грань $(\vec{a}; \vec{b})$, паралелограм, і її площа знаходилась за допомогою векторного добутку саме цих векторів. Цілком зрозуміло, що той самий результат можна отримати, знаходячи за допомогою векторного добутку площ інших граней.

Властивості векторного добутку

1).

$[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}].$	(11.24)
---	---------

По-перше, модулі цих векторів рівні. Справедливість співвідношення випливає з визначення напрямку векторного добутку 2), оскільки найкоротший поворот на той самий кут $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$ проти годинникової стрілки від вектора $\vec{b}$ до вектора $\vec{a}$ видно, якщо дивитись з кінця протилежного вектора, тобто, $-\vec{c}$. Це й означає, що $[\vec{b}, \vec{a}] = -\vec{c} = -[\vec{a}, \vec{b}].$

2). Наслідок:

$[\vec{a}, \vec{a}] = 0.$	(11.25)
---------------------------	---------

Справді,

$$[\vec{a}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{a}] \Rightarrow 2[\vec{a}, \vec{a}] = 0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{a}] = 0.$$

3).

$[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}], \alpha \in \mathbb{R}.$	(11.26)
---	---------

Доведення. При $\alpha = 0$ рівність очевидна. Очевидно також, що модулі векторів в різних частинах рівності однакові. Дослідимо їхні напрямки. При $\alpha > 0$

вектори $\vec{a}$ і $\alpha\vec{a}$ мають однакові напрямки, тому вектори в обох частинах, що є добутки, мають однакові напрямки.

Оскільки при $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -|\alpha|$, досить довести рівність $[-\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.

Нехай $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$. Якщо найкоротший кут повороту від $\vec{a}$ до $\vec{b}$, що здійснюється проти годинникової стрілки, дорівнює $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$, то саме проти годинникової стрілки здійснюється найкоротший поворот на кут $\pi - \varphi, \pi - \varphi \in [0, \pi], \sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ від $-\vec{a}$ до $\vec{b}$, якщо дивитись з протилежної сторони, тобто, з кінця вектора $-\vec{c} = -[\vec{a}, \vec{b}]$. Отже, доведено, що $[-\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$. Тепер при $\alpha < 0$ маємо:

$$[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [-|\alpha|\vec{a}, \vec{b}] = -[|\alpha|\vec{a}, \vec{b}] = -|\alpha|[\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}].$$

4).

$[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$	(11.27)
---	---------

Доведення будемо здійснювати у два етапи. Спочатку розглянемо випадок трьох компланарних векторів. Згідно з (11.22) $[\vec{a}, \vec{c}] = p_{\vec{e}}\vec{a}|\vec{c}|\vec{n}$, $[\vec{b}, \vec{c}] = p_{\vec{e}}\vec{b}|\vec{c}|\vec{n}$, $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = p_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b})|\vec{c}|\vec{n}$, де $\vec{e} \perp \vec{c}$. Тоді, згідно з властивістю проекцій, одержимо:

$$[\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}] = p_{\vec{e}}\vec{a}|\vec{c}|\vec{n} + p_{\vec{e}}\vec{b}|\vec{c}|\vec{n} = (p_{\vec{e}}\vec{a} + p_{\vec{e}}\vec{b})|\vec{c}|\vec{n} = p_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b})|\vec{c}|\vec{n} = [(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}].$$

Розглянемо тепер загальний випадок трьох некомпланарних векторів.

Оскільки $[\vec{a}, \vec{c}], [\vec{b}, \vec{c}], [(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}]$ ортогональні вектору $\vec{c}$, то вони компланарні, отже, лінійно залежні, і тому, наприклад, вектор $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}]$ можна подати як лінійну комбінацію двох інших векторів (читач легко проаналізує і інші випадки). Маємо:

$$\left[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}].$$

Помножимо скалярно обидві частини рівності на $\vec{b}$, враховуючи, як вже вказувалось після доведення теореми 11.2, той факт, що $[\vec{b}, \vec{c}] \vec{b} = 0$, одержимо:

$$\left[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right] \vec{b} = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] \vec{b}.$$

Доведемо, що модулі чисел $[\vec{a}, \vec{c}] \vec{b}$ і $\left[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right] \vec{b}$ рівні. Вони дають об'єми паралелепіпедів, але, як вказувалось, ті самі об'єми можна одержати, використовуючи модулі добутків $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$ і $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] \vec{c}$. Площі паралелограмів, що побудовані на векторах $\vec{b}$ і $\vec{a}$ і на $\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$ рівні, оскільки мають спільну основу, $|\vec{b}|$, і однакові висоти. Отже, $\left| \left[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right] \vec{b} \right| = \left| [\vec{a}, \vec{c}] \vec{b} \right|$, і тоді $|\alpha| = 1$.

Помітимо, що вектор $\vec{a} + \vec{b}$ лежить між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому, в спільній площині. Звідси випливає, що трійки $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$ і $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{b}\}$ однакової орієнтації, звідки й випливає $\alpha = 1$. Радимо читачу самостійно довести, що $\beta = 1$.

Теорема 11.3. Нехай вектори з $a, b \in \mathbb{R}^3$ задано своїми координатами:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}.$$

Тоді їхній векторний добуток можна обчислити за формулою:

$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}.$	(11.28)
---	---------

При доведенні формули скористаємось дистрибутивністю векторного добутку, формулою (11.27), і «таблицею множення»:

$$\begin{cases} \vec{i}\vec{i} = 0 & \vec{i}\vec{j} = \vec{k} & \vec{i}\vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j}\vec{i} = -\vec{k} & \vec{j}\vec{j} = 0 & \vec{j}\vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k}\vec{i} = \vec{j} & \vec{k}\vec{j} = -\vec{i} & \vec{k}\vec{k} = 0 \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}] = \\ &= a_1b_2[\vec{i}, \vec{j}] + a_1b_3[\vec{i}, \vec{k}] + a_2b_1[\vec{j}, \vec{i}] + a_2b_3[\vec{j}, \vec{k}] + a_3b_1[\vec{k}, \vec{i}] + a_3b_2[\vec{k}, \vec{j}] = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Зауваження. Зіставимо векторам $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ вектористовпчики з $\mathbb{R}^3$ їхнього розкладу за канонічним базисом:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді, легко бачити, векторний добуток цих векторів з $\mathbb{R}^3$ можна знайти за формулою

$$[a, b] = a^T B \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цікаво помітити, що матриця B кососиметрична, тобто, вона задовольняє умові

$$B^T = -B.$$

Приклад 11.1. Нехай точки $O(x_0, y_0, z_0), A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ є вершинами трикутника. Очевидно, сторонам трикутника відповідають вектори-стовпчики $\vec{OA} \sim (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)^T$ і $\vec{OB} \sim (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)^T$. Очевидно, площа трикутника, побудована на цих векторах, знаходиться за формулою:

$S = \frac{1}{2} \text{mod}[\vec{a}, \vec{b}] = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}.$	(11.29)
--	---------

Особливо зручного вигляду формула набуває, коли всі вершини лежать на одній координатній площині. Випишемо формулу у випадку, коли вони лежать на координатній площині xOy :

$S = \frac{1}{2} \text{mod}[\vec{a}, \vec{b}] = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$	(11.30)
---	---------

Контрольні запитання

- 1). Пояснити, чому проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій цих векторів?
- 2). Довести нерівність Коші-Буняковського у трьохвимірному випадку.
- 3). Пояснити анти комутативність векторного добутку.
- 4). Як розкласти подвійний векторний добуток за базисом.

ЛЕКЦІЯ 12. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ

План

- 1). Відсутність асоціативності векторного добутку. Тотожність Якобі.
- 2). Мішаний добуток трьох векторів та його застосування.
- 3). Знаходження мішаного добутку через координати векторів-співмножників.
- 4). Об'єм тетраедра.

Цілком зрозуміло, що векторний добуток можна застосовувати скільки завгодно разів (як, скажімо, для дійсних чисел). При цьому завжди постає питання про асоціативність. Якщо квадратні матриці однакової розмірності утворювали асоціативне кільце, то, якщо замість звичайного множення застосовувати множення як комутант, то ми бачили, що така операція не асоціативна, але для неї справедлива інша властивість – тотожність Якобі, і тоді такі матриці утворюють алгебру Лі.

Маючи на увазі сказане, будемо досліджувати векторний добуток трьох векторів. А саме, маючи добуток $[\vec{b}, \vec{c}]$, помножимо його зліва на $\vec{a}$ і розглянемо вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

Теорема 12.1. Справедлива формула

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}.$	(12.1)
--	--------

Зауваження. Якщо записати вираз у правій частині менш традиційно – скаляр після вектора:

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, то можна запропонувати просте мнемонічне правило для запам'ятовування: «бац мінус цаб».

- 1). Розглянемо спочатку випадок колінеарних векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Тоді $[\vec{b}, \vec{c}] = 0$, і ліва частина дорівнює нулю. Розглянемо праву частину.

Позначимо $\vec{c}_0 = \frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c}, |\vec{c}_0| = 1 \Rightarrow \vec{c} = |\vec{c}| \vec{c}_0$. Тоді, очевидно, $\vec{b} = \pm |\vec{b}| \vec{c}_0$.

Знайдемо доданки в правій частині формули.

$$(\vec{a}\vec{c})\vec{b} = \pm |\vec{b}| |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) \vec{c}_0,$$

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \pm |\vec{b}| |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) \vec{c}_0.$$

Це й доводить рівність.

Розглянемо випадок неколінеарних векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

$[\vec{b}, \vec{c}]$ – вектор нормалі до площини $P \triangleq (\vec{b}; \vec{c})$, в який знаходяться вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Відзначимо, що в силу їхньої неколінеарності вони утворюють базис цієї площини. $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ – вектор, ортогональний до $[\vec{b}, \vec{c}]$ і тому належить площині $P = (\vec{b}; \vec{c})$, а це означає, що його можна розкласти за вказаним базисом:

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$	(12.2)
---	--------

Задача полягає в доведенні рівностей: $\beta = \vec{a}\vec{c}, \gamma = \vec{a}\vec{b}$.

Доведемо спочатку першу з цих рівностей. Розглянемо вектор $\vec{e} \in P, |\vec{e}| = 1, \vec{e} \perp \vec{c}$.

Нехай $\vec{n} \perp P, |\vec{n}| = 1$ і трійка $\{\vec{e}, \vec{c}, \vec{n}\}$ – права. Згідно з формулою (11.22)

$[\vec{b}, \vec{c}] = p_e \vec{b} \vec{c} \vec{n} = \vec{c} (\vec{b}\vec{e}) \vec{n}.$	(12.3)
--	--------

Введемо ще орт $\vec{c}_0 = \frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c}$. В результаті отримаємо праву трійку одиничних векторів $\{\vec{e}, \vec{c}_0, \vec{n}\}$, яка утворює декартовий прямокутний базис. Розкладемо вектор $\vec{a}$ за цим базисом, враховуючи, що його координати в ньому дорівнюють його скалярним добуткам на базисні вектори:

$\vec{a} = (\vec{a}\vec{e})\vec{e} + (\vec{a}\vec{c}_0)\vec{c}_0 + (\vec{a}\vec{n})\vec{n}.$	(12.4)
--	--------

Перемножимо векторно рівності (12.3) і (12.4):

$$\begin{aligned} \left[\vec{a} \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right] &= p_e \vec{b} |\vec{c}| (\vec{a}\vec{e}) [\vec{e}\vec{n}] + p_e \vec{b} |\vec{c}| (\vec{c}_0\vec{a}) [\vec{c}_0\vec{n}] + p_e \vec{b} |\vec{c}| (\vec{a}\vec{n}) [\vec{n}\vec{n}] = \\ &= |\vec{c}| (\vec{a}\vec{e}) (\vec{b}\vec{e}) [\vec{e}\vec{n}] + |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) (\vec{b}\vec{e}) [\vec{c}_0\vec{n}]. \end{aligned}$$

Помітивши, що $[\vec{e}\vec{n}] = -\vec{c}_0$, $[\vec{c}_0\vec{n}] = \vec{e}$, одержимо:

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right] = -|\vec{c}| (\vec{a}\vec{e}) (\vec{b}\vec{e}) \vec{c}_0 + |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) (\vec{b}\vec{e}) \vec{e}$$

або

$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right] = \vec{c} (\vec{a}\vec{c}_0) (\vec{b}\vec{e}) \vec{e} - (\vec{a}\vec{e}) (\vec{b}\vec{e}) \vec{c}.$	(12.5)
--	--------

Зауважимо, що рівності (12.2) і (12.5) відповідають розкладу $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right]$ за різними базисами. Прирівняємо праві частини цих рівностей:

$$\beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) (\vec{b}\vec{e}) \vec{e} - (\vec{a}\vec{e}) (\vec{b}\vec{e}) \vec{c}.$$

Помножимо обидві частини скалярно на $\vec{e}$, враховуючи ортогональність $\vec{e}$ і $\vec{c}$:

$$\beta (\vec{b}\vec{e}) = |\vec{c}| (\vec{a}\vec{c}_0) (\vec{b}\vec{e}) = (\vec{a}\vec{c}) (\vec{b}\vec{e}).$$

Завдяки неколінеарності $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор $\vec{b}$ не ортогональний $\vec{e}$ і $\vec{b}\vec{e} \neq 0$ і звідси $\beta = \vec{a}\vec{c}$.

Для доведення $\gamma = -\vec{a}\vec{b}$ досить в проведених міркуваннях поміняти місцями вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і врахувати, що $\left[\vec{a}, \left[\vec{c}, \vec{b} \right] \right] = -\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right]$.

Задача 12.1. Довести справедливості тотожності Якобі

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = 0.$	(12.6)
--	--------

Вказівка. Для кожного доданку у лівій частині скористатись формулою (12.1), а потім додати рівності.

Задача 12.2. Описати всі випадки, в яких векторний добуток асоціативний:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}].$$

Двічі скористаємось формулою (12.1):

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}, \quad [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -(\vec{c}\vec{b})\vec{a} + (\vec{c}\vec{a})\vec{b}.$$

Прирівняємо вирази у правих частинах:

$$(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} = -(\vec{c}\vec{b})\vec{a} + (\vec{c}\vec{a})\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}\vec{b})\vec{c} = (\vec{c}\vec{b})\vec{a}.$$

Остання рівність може мати місце, якщо $\vec{a} \parallel \vec{c}$ і виконується останнє співвідношення або $\vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \perp \vec{c}$. Звичайно, асоціативність має також місце, якщо один з векторів нульовий.

МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Означення мішаного добутку трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ було вже сформульоване.

Нагадаємо, що це число (скаляр), що дорівнює скалярному добутку векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$: $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$. З означення миттєво випливає, що

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}].$$

З'ясуємо поведінку мішаного добутку при інших перестановках дужок.

Як вже вказувалось, у зауваженні після теореми 11.2, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, можна знайти, обчислюючи за допомогою векторного добутку площу будь-якої її основи, а потім скалярно множачи

результат $[\vec{a}, \vec{b}]$ на третій вектор $\vec{c}$. Нехай ці вектори утворюють праву трійку.

Нагадаємо, що в цій ситуації вектор нормалі $[\vec{a}, \vec{b}]$ до площини $(\vec{a}; \vec{b})$ і $P_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}$,

вектор-проекція вектора $\vec{c}$ на цю нормаль мають однакові напрями, при цьому величина проекції $p_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c} > 0$, отже, їхній скалярний добуток додатний. Вже

відзначалось, що правими будуть також трійки, які можна одержати з даної правої трійки шляхом кругових заміन. Отже, нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - права трійка. Тоді

також правими будуть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}, \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}, \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$.

Врахуємо також комутативність скалярного добутку. В такому разі об'єм паралелепіпеда знаходиться за будь-якою з формул:

$V = [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}] \vec{a} = [\vec{c}, \vec{a}] \vec{b} = \vec{c} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b} [\vec{c}, \vec{a}].$	(12.7)
--	--------

Якщо ж вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку, величина проекції $p_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c} < 0$, і усі вирази у формулі (12.7) будуть давати $-V$.

Рівність

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}]$$

показує, що мішаний добуток не залежить від способу розстановки квадратних дужок. З цього випливає, що для позначення мішаного добутку можна не вживати квадратні дужки:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} \triangleq [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}].$	(12.8)
---	--------

Отже, можна сформулювати властивість мішаного добутку:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$	(12.9)
---	--------

Теорема 12.2. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Необхідність. Нехай вектори компланарні. Це означає, що, наприклад, вектор $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = 0$.

Достатність. Нехай $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = 0$. Це означає, що $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c}$, а оскільки за означенням векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$, то це й означає, що всі три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежать у одній площині.

ВИРАЗ МІШАНОГО ДОБУТКУ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ

Нехай відомо координати вектора в деякому ортонормованому базисі:

$$\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T, \vec{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \vec{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)^T.$$

Скористаємось такою формулою для обчислення мішаного добутку:

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) = \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Остаточно

$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$	(12.9)
--	--------

ОБ'ЄМ ТЕТРАЕДРА

Приклад 12.1. Нехай тетраедр побудовано на трьох векторах, що мають спільний початок:

$$\vec{a}=(a_1 \ a_2 \ a_3)^T, \vec{b}=(b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \vec{c}=(c_1 \ c_2 \ c_3)^T.$$

Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$V = \pm \frac{1}{6} \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$	(12.10)
--	---------

Знак «+» відповідає правій трійці векторів, знак «-» - лівій.

Доведення випливає з того факту, що в паралелепіпеді, об'єм якого знаходиться як мішаний добуток, містить в собі 6 рівновеликих тетраедри.

Приклад 12.2. Нехай у просторі взято 4 точки $O(x_0, y_0, z_0), A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$. Їх можна розглядати як вершини тетраедра. В частинному випадку тетраедр буде виродженим, якщо усі ці точки лежать в одній спільній площині. Задача полягає у знаходженні об'єму тетраедра і з'ясуванні, чи будуть вектори

$$\vec{OA} \sim (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)^T,$$

$$\vec{OB} \sim (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)^T$$

$$\vec{OC} \sim (x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0)^T$$

утворювати праву чи ліву трійку.

Як випливає з формули (12.10),

$V = \frac{1}{6} \text{mod } \vec{OA} \vec{OB} \vec{OC} = \frac{1}{6} \text{mod } \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$	(12.11)
---	---------

Якщо визначник в цій формулі додатний, вектори утворюють праву трійку, якщо він від'ємний – ліву.

Зауважимо, що визначник у (12.11) можна ще записати таким чином:

$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$	(12.12)
---	---------

Для доведення досить у визначнику четвертого порядку перший рядок відняти від усіх інших рядків, а потім розкрити одержаний визначник за четвертим стовпчиком.

Контрольні запитання

- 1). Які властивості має мішаний добуток?
- 2). Що таке орієнтовний об'єм?

ЛЕКЦІЯ 13. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ І НА ПЛОЩИНІ

План

- 1). Параметричне та канонічне рівняння прямої.
- 2). Рівняння прямої у відрізках.
- 3). Загальне рівняння прямої.
- 4). Кут між прямими та рівняння бісектриси кута.
- 5). Нормальне рівняння прямої.
- 6). Відхилення точки від прямої та його застосування до задач геометрії.

Параметричне та канонічне рівняння прямої.

Запишемо рівняння прямої $\mathcal{L}$, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ колінеарно даному вектору, який називається напрямним:

$$\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \sim [\vec{a}] = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

Нехай $M(x, y, z) \in \mathcal{L}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \sim \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ лежить на

прямій, рівняння якої треба написати. Зрозуміло, що цей вектор колінеарний напрямному вектору $\vec{a}$ і необхідна і достатня умова колінеарності запишеться у вигляді $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$. Звідси одержимо рівняння прямої у параметричному вигляді, записане у векторній формі:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$ $t \in \mathbb{R}.$	(13.1)
---	--------

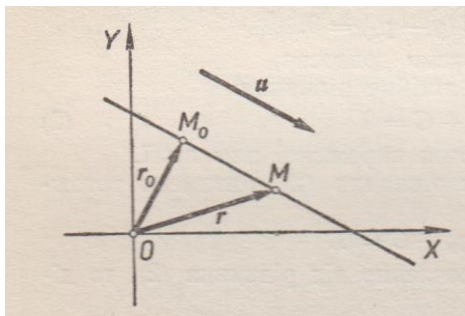
В координатній формі воно запишеться таким чином:

$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn. \end{cases}$	(13.2)
---	--------

Виразивши параметр t через координати, одержимо:

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$	(13.3)
--	--------

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої (Мал. 13.1).



Мал. 13.1.

Слід зауважити, що напрямним може бути вектор, у якого певна координата у

вибраному базисі дорівнює нулю, наприклад, $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} \sim [a] = \begin{pmatrix} l \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$. Тоді

припускається запис канонічного рівняння у вигляді

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}.$	(13.4)
--	--------

З (13.2) випливає, що це треба розуміти таким чином, що $z \equiv z_0$ і зображення прямої буде мати вигляд

$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \\ z = z_0. \end{cases}$	(13.5)
--	--------

Пізніше, познайомившись з рівнянням площини, ми дамо ще одне пояснення такої ситуації.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві (різні) точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Зрозуміло, що роль напрямного може грати вектор

$\overrightarrow{M_1M_2} \sim \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$. Використаємо канонічне рівняння прямої (13.13), де роль

точки M_0 може грати будь-яка з точок M_1 або M_2 . В результаті одержимо:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$	(13.6)
--	--------

Канонічні рівняння двох прямих дозволяють розв'язати задачу на знаходження кута φ між ними. Власне, для цього потрібно знати лише їхні напрямні вектори, які в координатному зображенні мають вигляд

$$\vec{a}_1 \sim (l_1 \quad m_1 \quad n_1), \quad \vec{a}_2 \sim (l_2 \quad m_2 \quad n_2).$$

Тоді

$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$	(13.7)
---	--------

Звідси випливають умови колінеарності двох прямих:

$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	(13.8)
---	--------

і ортогональності:

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$	(13.9)
------------------------------------	--------

Прямі на площині

Зрозуміло, що параметричне зображення прямої буде мати вигляд

$\begin{cases} x = x_0 + t l, \\ y = y_0 + t m. \end{cases}$	(13.10)
--	---------

Канонічне рівняння:

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$	(13.11)
--	---------

З нього можна одержати рівняння прямої, яка не є ортогональною до координатної осі Ox . При цьому треба помітити, що $\frac{m}{l} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \triangleq k$. При цьому α - кут, відмінний від прямого, під яким пряма перетинає координатну вісь Ox . В результаті приходимо до рівняння

$y = y_0 + k(x - x_0).$	(13.12)
-------------------------	---------

Якщо нас не цікавить інформація про координати точки M_0 , ввівши позначення $b = kx_0 + y_0$, одержимо:

$y = kx + b.$	(13.13)
---------------	---------

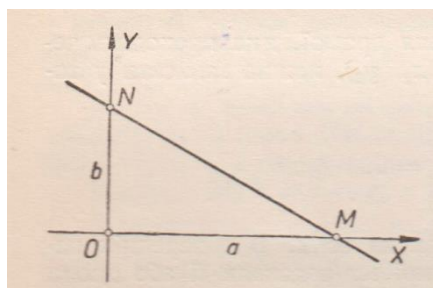
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки –

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$	(13.14)
--	---------

З останнього рівняння одержимо його частинний випадок, коли точки лежать на координатних осях, тобто, є координатами точок перетину прямої з осями координат. Нехай ці точки мають координати відповідно $(a, 0)$ і $(0, b)$.

Підставивши їх у (13.12), будемо мати: $\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}$. Звідси одержимо так зване рівняння у відрізках (маються на увазі відрізки на координатних осях, що їх відтинає пряма – Мал. 13.2):

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$	(13.15)
----------------------------------	---------



Мал. 13.2.

Нехай є трикутник з вершинами $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$.

Задача 13.1. Написати рівняння медіани кута $\angle M_2 M_1 M_3$.

Треба скористатись рівнянням прямої, що проходить через дві точки. Однією тут буде точка $M_1(x_1, y_1)$, а другою – середина сторони $M_1 M_2$ з координатами $\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$. Читач самостійно закінчить розв'язання.

Задача 13.2. Написати рівняння бісектриси кута $\angle M_2 M_1 M_3$.

Напрямними ортами сторін $M_1 M_2, M_1 M_3$, будуть вектори, відповідно,

$$\frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Напрямним вектором бісектриси буде їхня сума. Далі слід скористатись канонічним рівнянням прямої (13.14). Читач закінчить розв'язання самостійно.

Загальне рівняння прямої

Поставимо тепер задачу: написати рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0)$ і яка ортогональна вектору $\vec{N} \sim \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Очевидно, вектор, який у координатах має вигляд $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, лежить на шуканій прямій, і він ортогональний вектору нормалі $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю, звідки одержимо рівняння:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$	(13.16)
--------------------------------	---------

Знову таки, якщо нас не цікавить інформація про координати точки $M_0(x_0, y_0)$, після позначення $c = -(ax_0 + by_0)$ перепишемо це рівняння у вигляді:

$ax + by + c = 0.$	(13.17)
--------------------	---------

Треба пам'ятати, що при цьому коефіцієнти a і b є координатами вектора нормалі до прямої.

Це рівняння називається загальним рівнянням прямої.

Нехай тепер задане лінійне рівняння (13.17). Доведемо, що воно визначає пряму.

Візьмемо ще одну точку $M_0(x_0, y_0)$, яка задовольняє рівняння: $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Віднімаючи ці два рівняння, одержимо: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Отже, вектор $r - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ ортогональний вектору $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$, а це значить, що множина усіх таких векторів визначає площину.

Нехай є трикутник з вершинами $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$.

Задача 13.3. Написати рівняння висоти трикутника, що виходить з вершини M_1 .

Напрямний вектор сторони M_1M_2 в координатах має вигляд: $\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix}$. Цей

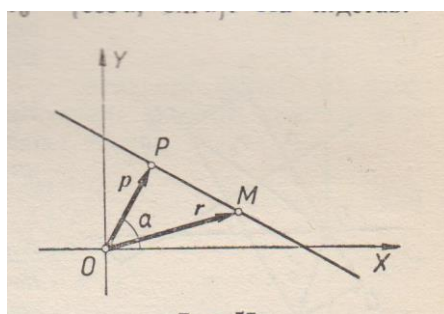
вектор і можна взяти вектором нормалі і підставити його координати у (13.16).

Нормальне рівняння прямої

Задача ставиться таким чином: відомо, що пряма, що не проходить через початок координат, знаходиться на відстані $p, p > 0$ від нього; $\vec{n} \sim \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ - відомий орт нормалі, який має напрям у бік прямої. Треба записати рівняння прямої.

Нехай $M(x, y)$ - довільна точка на прямій, $\vec{r} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - її радіус-вектор. Очевидно, величина ортогональної проекції $p_{\vec{n}} \vec{r}$ для довільної точки прямої – величина стала і дорівнює p . Записуючи цю проекцію за допомогою скалярного добутку, одержимо: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, звідки шукане рівняння, що називається нормальним рівнянням прямої, буде мати вигляд (Мал. 13.3):

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$	(13.18)
--	-----------



Мал. 13.3

Зауважимо (і це дуже важливо!), що вільний член $(-p)$ в нормальному рівнянні обов'язково від'ємний. Це зауваження допомагає звести загальне рівняння до нормального. Отже, треба нормувати вектор нормалі $\vec{N} \sim \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Для цього досить поділити його на власний модуль, вибираючи перед ним знак «плюс» або «мінус». Такий модуль з урахуванням знаку називається нормуючим множником. Але в нашій задачі цей знак повинен вибиратись цілком однозначно: після ділення на нього вільного члену c повинна вийти від'ємна величина. Отже, цей нормуючий множник треба взяти рівним $(-\operatorname{sgn} c)\sqrt{a^2 + b^2}$. В результаті від загального рівняння прямої (13.17) прийдемо до нормального рівняння вигляду (13.18):

$\frac{a}{-\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{-\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{-\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$	(13.19)
---	---------

Зміст коефіцієнтів рівняння такий:

$$\frac{a}{-\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{-\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha,$$

α - кут нахилу орту нормалі до прямої, що направлений у її сторону.

Із застосуванням цього рівняння розв'язуються важливі задачі.

Зразу відзначимо, що оскільки одержаний вільний член має зміст $-p$, де, нагадаємо, $p > 0$ - відстань від початку координат до прямої, то, маючи нормальне рівняння (13.19), зразу знаходимо цю відстань:

$$p = \frac{c}{\operatorname{sgn} c \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Остаточно, відстань p від початку координат до прямої, що задана рівнянням $ax + by + c = 0$, знаходиться за формулою:

$p = \frac{ c }{\sqrt{a^2 + b^2}}.$	(13.20)
-------------------------------------	---------

Означення 13.1. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - будь-яка точка площини і (13.18) – нормальне рівняння прямої $\mathcal{L}$. Величина

$\delta(M_0, \mathcal{L}) \triangleq x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p$	(13.21)
---	---------

називається відхиленнями точки M_0 від прямої $\mathcal{L}$.

Підкреслимо, що початок координат має завжди від’ємне відхилення від прямої.

З’ясуємо геометричний зміст цього поняття. Розглянемо вісь, на який лежить орт нормалі до прямої, і її напрям співпадає з напрямом орта. Проекція радіуса-

вектора точки M_0 , тобто, вектора $\vec{r}_0 \sim \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, на цю вісь дорівнює його

скалярному добутку на орт нормалі до прямої:

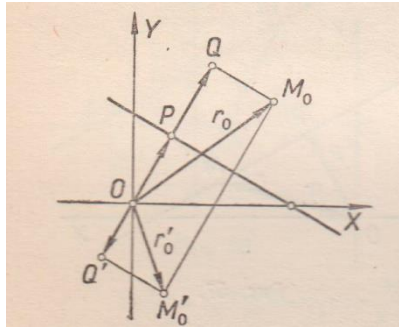
$$p_n \vec{r}_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha.$$

Якщо точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від прямої, $p_n \vec{r}_0 > p$ і $\delta(M_0, \mathcal{L}) = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p > 0$. Це є характеристика півплощини, яка має властивість, що початок координат не лежить в ній: відхилення від прямої будь-якої її точки додатне. Але в даному випадку відхилення дорівнює відстані від точки до прямої.

Якщо точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від прямої, $p_n \vec{r}_0 < p$ і $\delta(M_0, \mathcal{L}) = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p < 0$, і це також є характеристика точок півплощини, яка містить початок координат: їхнє відхилення від прямої

від'ємне. В цьому випадку відхилення точки від прямої і її відстань до неї мають різні знаки.

Описану ситуацію проілюстровано на Мал. 13.4:



Мал. 13.4.

Позначимо через $d(M_0, \mathcal{L})$ відстань від точки до прямої. З наведених міркувань маємо формулу:

$d(M_0, \mathcal{L}) = \delta(M_0, \mathcal{L}) = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p .$	(13.22)
---	---------

Напишемо також формули для відхилення і відстані, відправляючись від рівняння (13.19):

$\delta(M_0, \mathcal{L}) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{-(\operatorname{sgn} c) \sqrt{a^2 + b^2}}.$	(13.23)
--	---------

$d(M_0, \mathcal{L}) = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}.$	(13.24)
---	---------

Рівняння бісектриси між двома прямими.

Нехай дві прямі, що перетинаються, задано своїми нормальними рівняннями:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0,$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p_2 = 0.$$

Нехай $\vec{n}_1 \vec{n}_2 > 0$. Очевидно, це свідчить, що кут між ортами нормалей до прямих гострий, а в такому разі кут перетину прямих, в якому знаходиться початок координат, тупий. Відстані точок бісектриси, що лежить у цьому куті, дорівнюють їхнім відхиленням, узятим з протилежними знаками. Отже рівняння бісектриси цього кута можна знайти, прирівнявши їхні відхилення (для зручності ми залишаємо позначення координат точок бісектриси тими ж самим, що і точок самих прямих):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = x \cos \beta + y \sin \beta - p_2.$$

Читач самостійно зробить подальші перетворення.

Очевидно, рівняння бісектриси кута, вертикального з цим кутом, буде таким самим.

Міркуючи аналогічним чином, помічаємо, що відхилення точок бісектриси двох інших вертикальних кутів мають різні знаки, то, прирівнюючи відстані точок бісектриси до цих прямих, треба прирівнювати одне відхилення і інше, тільки з протилежним знаком або зразу прирівняти до нуля суму відхилень:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 + x \cos \beta + y \sin \beta - p_2 = 0.$$

Пучок прямих

Означення 13.2. Сукупність

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, a, b \in \mathbb{R}$	(13.25)
--	---------

називається пучком прямих з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Очевидно, всі прямі пучка проходять через його центр. Якщо $b \neq 0$, рівняння пучка можна записати у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k \in \mathbb{R}$. Аналогічно при $a \neq 0$: $p(y - y_0) = x - x_0$, $p \in \mathbb{R}$.

Теорема 13.1. Якщо відомі дві прямі пучка, його рівняння можна записати, не знаходячи центра.

Доведення. Нехай відомо дві прямі пучка

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

За змістом твердження вони повинні бути не паралельними і різними. В обох випадках коефіцієнти рівняння не повинні бути пропорційними, тобто, вектори нормалей повинні бути неколінеарними: $\lambda(a_1, b_1)^T \neq \mu(a_2, b_2)^T \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. В такому разі система

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$	(13.26)
---	---------

має єдиний розв'язок (її визначник не дорівнює нулю), який є центром пучка.

Доведемо, що рівняння будь-якої прямої пучка можна подати у вигляді

$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$	(13.27)
---	---------

Зауважимо, що прямій $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ відповідає значення параметра $\lambda = 0$, а прямій $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ відповідає значення $\lambda = \infty$. Дійсно, попереднє рівняння при $\lambda \neq 0$ можна переписати у вигляді $\frac{1}{\lambda}(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, і при $\lambda = \infty$ воно дає друге рівняння: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Оскільки центр пучка є

розв'язком системи (13.26) і задовольняє кожне її рівняння, то він задовольняє рівняння (13.27).

Візьмемо довільну точку $M'(x', y')$, що не задовольняє жодному з рівнянь системи (13.26), і підставимо її координати в рівняння (13.27):

$$a_1x' + b_1y' + c_1 + \lambda(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0.$$

Звідси

$$\lambda = -\frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_2x' + b_2y' + c_2}.$$

Підставляючи це значення у (13.27), одержимо рівняння, якому задовольняють координати центра пучка і дана точка $M'(x', y')$, тобто, це рівняння задає конкретну пряму пучка.

Задача 13.4. Довести, що необхідною умовою перетину в одній точці трьох прямих

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0, a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

є рівність нулю визначника

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай $M'(x', y')$ є точкою перетину трьох прямих. Це означає, що система сумісна, і тоді за теоремою Кронекера-Капеллі ранги основної і розширеної матриць системи

$\left(\begin{array}{cc c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right)$	(13.28)
--	---------

повинні співпадати. Це означає, що якщо, скажімо, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг розширеної матриці повинен також дорівнювати двом, звідки і випливає справедливість твердження.

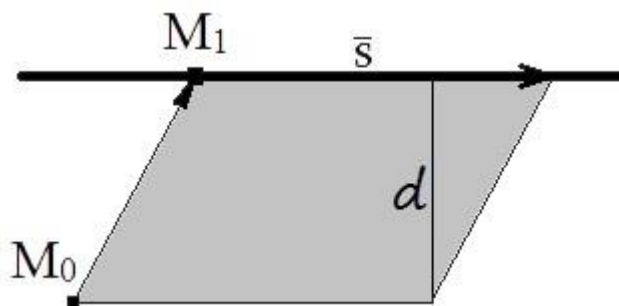
Зауваження. Якщо дві перші прямі паралельні, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, а перша і третя

прямі співпадають: $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3}$, визначник (13.28) дорівнює нулю, але три

прямі не мають жодної спільної точки. Тому рівність нулю визначника (13.28) є необхідною, але не достатньою умовою існування спільної точки у трьох прямих.

Задача. Знайти відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої, заданої канонічним рівнянням $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$.

Розв'язання. Розглянемо паралелограм, що побудовано на векторах $\vec{s} = (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k}$ і $\overrightarrow{M_1M_0}$.



З означення векторного добутку випливає, що його площа S дорівнює $|\overrightarrow{M_1M_0} \vec{s}|$.

З іншого боку, шукана відстань – це висота цього паралелограму, опущена на сторону, що лежить на прямій. Отже, $|\vec{s}|d = |\overrightarrow{M_1M_0} \vec{s}|$. Звідси

$d = \frac{ \overrightarrow{M_1 M_0} \vec{s} }{ \vec{s} } = \overrightarrow{M_1 M_0} \vec{e} $	(13.29)
---	---------

де $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{s}|} \vec{s}$. - напрямний орт даної прямої.

Контрольні запитання

- 1). В чому полягає необхідна і достатня умова того, що рівняння прямої першого порядку?
- 2). Яке відхилення має початок координат?
- 3). Як визначити, чи лежить точка по один бік з початком координат від даної прямої, чи по різні?
- 4). Як визначити величину кута, в якому лежить дана точка?

ЛЕКЦІЯ 14

ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

План

- 1). Загальне рівняння площини.
- 2). Рівняння площини, що проходить через три точки.
- 3). Рівняння площини у відрізках.
- 4). Нормальне рівняння площини.
- 5). Відхилення точки від площини та його застосування до задач геометрії.
- 6). Мимобіжні прямі та знаходження відстані між ними та спільного перпендикуляру до них.

Задача: написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і ортогональна до вектора (нормалі) $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \sim [\vec{n}] = (a \quad b \quad c)^T$:

Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка площини, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \sim [\vec{r}] = (x \ y \ z)^T$ - її радіус-вектор. Довільний вектор площини має вигляд

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \sim [\vec{r} - \vec{r}_0] = (x - x_0 \ y - y_0 \ z - z_0)^T. \quad \text{Тоді}$$

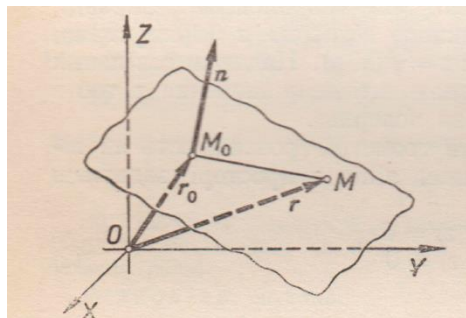
для того, щоб точка $M(x, y, z)$ належала площині, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова ортогональності:

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}) = 0.$$

В результаті приходимо до рівняння

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$	(14.1)
---	----------

Див. Мал. 14.1:



Ввівши позначення $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, подамо це рівняння у вигляді:

$ax + by + cz + d = 0.$	(14.2)
-------------------------	----------

Одержане рівняння називається загальним рівнянням площини.

Навпаки, розглянемо рівняння $ax + by + cz + d = 0$. Доведемо, що воно визначає площину. Візьмемо ще одну точку, що задовольняє рівняння:

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Після їхнього віднімання одержимо:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Це означає, що вектор $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ ортогональний вектору $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, тобто, він лежить на площині, у якої $\vec{N}$ - вектор нормалі.

Зауваження. Неповні рівняння площин.

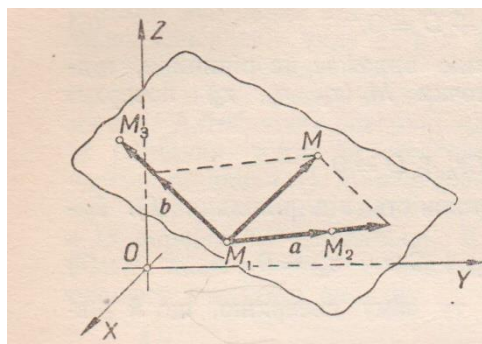
1). Нехай $c = 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $ax + by + d = 0$. Її вектор нормалі має координати $(a; b; 0)^T$. Очевидно, він ортогональний до напрямного орта $(0; 0; 1)^T$ осі Oz , і тому площина паралельна цій осі.

2). Нехай $b = c = 0, a \neq 0$. Тоді рівняння площини має вигляд $ax + d = 0$. Її вектор нормалі має координати $(a; 0; 0)^T$. Очевидно, він колінеарний до орта $(1; 0; 0)^T$ нормалі до координатної площини yOz , і тому дана площина паралельна цій координатній площині.

Інші неповні рівняння площини у просторі читач розбере самостійно.

Рівняння площини, що проходить через три точки.

Нехай задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$. Утворимо два вектори: $\overrightarrow{M_1M_2} \sim (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T, \overrightarrow{M_1M_3} \sim (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)^T$. (Мал. 14.2.)



Мал. 14.2.

Очевидно, що задані три точки визначають, причому, єдину площину тоді і тільки тоді, коли вони не лежать на одній прямій, що еквівалентно умові, що виписані вектори не колінеарні, що, в свою чергу, еквівалентно умові непропорційності їхніх координат, що означає, що ранг матриці з координат вказаних векторів дорівнює двом:

$\text{rank} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 2.$	(14.3)
---	--------

Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка площини і розглянемо ще третій вектор

$$\overrightarrow{M_1M} \sim (x - x_1, y - y_1, z - z_1)^T.$$

Тоді необхідною і достатньою умовою, щоб чотири точки лежали в одній спільній площині є рівність нулю мішаного добутку цих трьох векторів, що, як відомо, можна записати таким чином:

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$	(14.4)
--	--------

Розкриваючи визначник, одержимо, при умові (14.3), шукане рівняння площини, що проходить через три точки.

Знайдемо кут φ між двома площинами, що визначаються рівняннями

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$	(14.5)
$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$	

Очевидно, цей кут дорівнює куту між нормальми, який визначається з рівняння

$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$	(14.6)
---	--------

Наслідок 1. Площини (14.5) паралельні тоді і тільки тоді, коли їхні нормалі колінеарні, тобто, координати векторів нормалей пропорційні:

$(a_2, b_2, c_2)^T = t(a_1, b_1, c_1)^T.$	(14.7)
---	--------

Наслідок 2. Площини (14.5) ортогональні тоді і тільки тоді, коли ортогональні їхні нормалі:

$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$	(14.8)
------------------------------------	--------

Рівняння площини у відрізках на осях

Будемо вважати, що площина не проходить через початок координат і точки її перетину є $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$.

Будемо шукати коефіцієнти загального рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для цього по черзі будемо підставляти точки перетину площини з координатними осями, в результаті чого одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} Aa + D = 0, \\ Bb + D = 0, \\ Cc + D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{D}{a}, \\ B = -\frac{D}{b}, \\ C = -\frac{D}{c}. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення в рівняння, одержимо:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Остаточно, рівняння у відрізках має вигляд:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$	(14.9)
--	--------

Нормальне рівняння площини

Подібно до міркувань, які дали змогу написати нормальне рівняння прямої, будемо вважати, що задано орт нормалі

$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \sim [\vec{n}] = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)^T$	(14.10)
---	---------

до площини, що спрямований у бік площини $\mathcal{P}$, яка знаходиться на відстані $p > 0$ від початку координат.

Якщо довільна точка $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$, то проекція її радіуса-вектора на вісь напрямний вектор якої – це даний вектор нормалі, має сталу величину, що дорівнює p : $p_{\vec{n}}\vec{r} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \equiv p$.

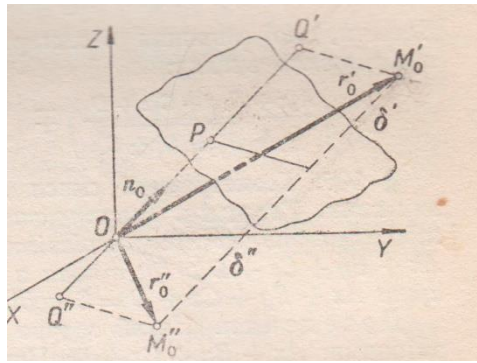
Отже, приходимо до нормального рівняння площини:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$	(14.11)
---	---------

Так само, як і у випадку прямої на площині, для довільної точки простору $M_0(x_0, y_0, z_0)$ вводиться понятті її відхилення до площини:

$\delta(M_0, \mathcal{P}) \triangleq x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$	(14.12)
--	---------

При цьому величина проекції радіуса-вектора точки на орт нормалі $p_{\vec{n}}\vec{r} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma > p$, якщо ця точка і початок координат лежать по різні сторони від площини, і $p_{\vec{n}}\vec{r} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma < p$, якщо вони лежать по один бік від площини. Підкреслимо, що початок координат має від'ємне відхилення від довільної площини. (Див. Мал. 14.3)



Мал. 14.3.

Покажемо тепер, як від загального рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$ перейти до нормального. Оскільки у нормальному рівнянні вільний член обов'язково від'ємний, $-p < 0$, то обидві частини загального рівняння треба поділити на нормуючий множник $(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

$\frac{x}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{y}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} +$ $+ \frac{z}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{d}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$	(14.13)
--	---------

Отже, таким чином одержали нормальне рівняння площини. Коефіцієнти при змінних величинах – це косинуси кутів, які орт нормалі до площини, спрямований в її бік, утворює з координатними осями.

Задача 14.1. Знайти відстань між двома паралельними площинами

1). Якщо початок координат не лежить між паралельними площинами, орт нормалі, що проведено у бік кожної з них, один і той же. Тоді вони мають рівняння:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_1 = 0$$

і

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_2 = 0.$$

Зрозуміло, що відстань між ними в такому випадку обчислюється за формулою

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = |p_2 - p_1|.$$

2). Якщо початок координат лежить між цими паралельними площинами, орти нормалей, що проведено у бік кожної з них, протилежні. Їхні рівняння запишуться таким чином:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_1 = 0,$$

$$x(-\cos \alpha) + y(-\cos \beta) + z(-\cos \gamma) - p_2 = 0.$$

Тоді

$$d(P_1, P_2) = p_1 + p_2.$$

Задача 14.2. Написати рівняння бісекторних площин між двома площинами, що перетинаються:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Читач повинен застосувати міркування аналогічні тим, що були проведені у плоскому випадку при знаходженні бісектрис кутів між прямими, що перетинаються.

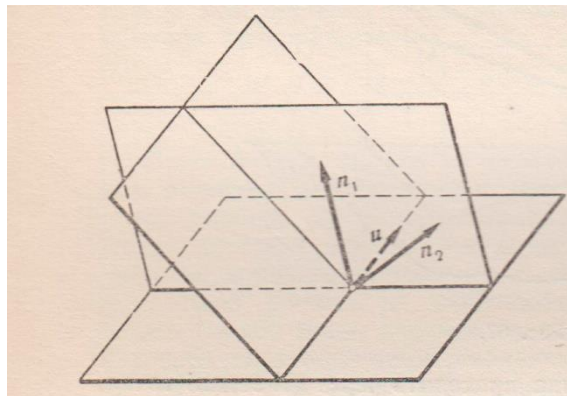
Зауваження. Умова перетину двох площин полягає в сумісності даної системи лінійних рівнянь: їхні розширені і основні матриці повинні мати однакові ранги.

Задача 14.3. Нехай пряму задано як перетин двох площин:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Написати рівняння цієї прямої.



Мал. 14.4.

Розв'язуючи задачу в загальному вигляді, спочатку треба переконатись в тому, що площини не паралельні, тобто, що їхні нормалі не колінеарні. Нехай це так. Знайдемо напрямний вектор $\vec{q}$ як векторний добуток цих нормалей:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \triangleq u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}.$$

Знайдемо якийсь розв'язок $M_0(x_0, y_0, z_0)$ даної системи, наприклад, надавши одній якійсь змінній довільне значення, а два інші знайшовши як розв'язок одержаної системи з двох рівнянь. Після цього вже зрозуміло, як записати канонічне рівняння.

Задача 14.4. Нехай пряму задано як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Написати рівняння цієї прямої, а також її проекцію на координатні площини xOy, yOz, zOx .

Знайдемо напрямний вектор прямої:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Підставимо у систему $y = 2$. Тоді знайдемо: $x = z = -1$.

Отже, канонічне рівняння прямої перетину двох даних площин має вигляд:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

Проекція прямої на координатну площину xOy (при цьому $z = 0$):

$$-2x + y - 2 = 0.$$

Проекція прямої на координатну площину yOz (при цьому $x = 0$):

$$-3y + 2z + 2 = 0.$$

Проекція прямої на координатну площину zOx (при цьому $y = 0$):

$$-3x + z - 2 = 0.$$

Задача 14.5. Нехай є дві мимобіжні прямі:

$$\mathcal{L}_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\mathcal{L}_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Написати рівняння паралельних площин, в яких вони лежать, знайти відстань між цими прямими і написати рівняння загального перпендикуляра до цих прямих.

Зауважимо, що умова мимобіжності полягає в тому, що напрямні вектори

$\vec{q}_1 \sim (l_1, m_1, n_1)^T$, $\vec{q}_2 \sim (l_2, m_2, n_2)^T$ прямих не колінеарні, а також в тому, що система цих рівнянь не сумісна. В цьому треба пересвідчитись, розв'язуючи конкретну задачу.

Вектор нормалі до двох паралельних площин знайдемо за допомогою векторного добутку напрямних векторів прямих:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \vec{k} \triangleq N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k}.$$

Далі рівняння паралельних площин, в кожній з яких лежать відповідна пряма, запишеться у вигляді:

$$\mathcal{P}_1: N_x(x-x_1) + N_y(y-y_1) + N_z(z-z_1) = 0,$$

$$\mathcal{P}_2: N_x(x-x_2) + N_y(y-y_2) + N_z(z-z_2) = 0.$$

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між одержаними паралельними площинами. Її можна знайти як модуль різниці відхилень площин від початку координат.

Перейдемо до знаходження спільного перпендикуляру до двох мимобіжних прямих, який перетинає кожен з них.

Знайдемо рівняння двох площин $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2$, що проходять через, відповідно, прямі $\mathcal{L}_1$, і $\mathcal{L}_2$ і які ортогональні до $\mathcal{P}_1$ (а також до $\tilde{\mathcal{P}}_2$).

Очевидно, напрямний вектор першої прямої, знайдений перпендикуляр до площини, в який вона лежить, і довільний вектор цієї шуканої площини $\tilde{\mathcal{P}}_1$ компланарні, тому її рівняння запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічний вигляд буде мати рівняння площини $\tilde{\mathcal{P}}_2$:

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = 0.$$

Система цих двох рівнянь і визначає спільний перпендикуляр. За допомогою описаної процедури від системи можна перейти до канонічного рівняння.

Задача 14.6. Нехай пряму задано як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Знайти точку Q , симетричну відносно цієї прямої точці $P(4,1,6)$. Написати також канонічне рівняння прямої та знайти на ній точку, що є центром вказаної симетрії.

Будемо позначати радіус-вектор точки P через $\vec{r}_p$. Тобто, $\vec{r}_p = 4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.

Знайдемо напрямний вектор прямої:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Для більшої зручності візьмемо колінеарний йому вектор $\vec{q} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Легко бачити, що точка $M_0(-5, 7, 0)$ лежить на прямій.

Канонічне рівняння прямої буде мати вигляд:

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Зауважимо, що вектори

$\overrightarrow{PM_0} = -9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$ і $\vec{q} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ не ортогональні:

$$\overrightarrow{PM_0} \vec{q} = (-9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k})(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = -36 \neq 0.$$

Нехай точка M належить прямій і $\overrightarrow{PM} \perp \vec{q}$. Очевидно, $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{q}$ і

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM_0} + t\vec{q}$. Знайдемо число t з умови ортогональності:

$$(\overrightarrow{PM_0} + t\vec{q})\vec{q} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PM_0} \vec{q} + |\vec{q}|^2 t = -36 + 9t = 0 \Rightarrow t = 4.$$

Отже, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM_0} + 4\vec{q} = (-9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}) + 4(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Звідси точка на прямій, центр симетрії має радіус-вектор

$$\vec{r}_M = \vec{r}_P + \overrightarrow{PM} = (4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}) + (-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Точка Q , симетрична P відносно прямої або, що те ж саме, відносно центру симетрії, точки $M(3, -1, 4)$, має радіус-вектор

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + 2\overrightarrow{PM} = (4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}) + 2(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Пучок площин

Означення 14.1. Сукупність площин, що перетинаються по одній прямій, називається пучком площин. Їхня спільна пряма називається віссю пучка.

Теорема 14.1. Нехай дві площини

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$	(14.14)
--	---------

перетинаються по прямій. Тоді пучок площин з віссю, що визначається системою (14.14), описується одно параметричною сукупністю рівнянь

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$	(14.15)
---	---------

Зауваження. Як і в разі пучка прямих, параметру $\lambda = \infty$ відповідає друга площина:

$$\frac{1}{\lambda}(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \Rightarrow \forall \lambda = \infty \Rightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Доведення таке саме, як і для пучка прямих. Точці $M'(x', y', z')$, що не лежить на осі і не задовольняє жодному з рівнянь, відповідає значення параметра

$$\lambda = -\frac{a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1}{a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2}.$$

Площина, що проходить через цю точку і вісь пучка, має рівняння (14.15).

В'язка площин

Означення 14.2. Сукупність площин, що мають одну спільну точку, називається в'язкою площин з центром у цій спільній точці.

Теорема 14.2. Нехай три площини

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$	(14.16)
--	---------

перетинаються в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тоді в'язка площин з центром у цій точці описується двопараметричною сукупністю рівнянь

	(14.17)
--	---------

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \mu(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0,$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$	
--	--

Доведення. Очевидно, центр в'язки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє цьому рівнянню. Довільна площина в'язки визначається цим центром і ще такими двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, що разом з $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не лежать на одній прямій. З умови випливає, що вектори нормалей $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ трьох даних площин не компланарні, тому вони утворюють базис простору. Отже, вектор нормалі $\vec{N}$ площини, що проходить через точки M_0, M_1, M_2 , лінійно виражається через ці вектори нормалей:

$$\vec{N} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2 + \gamma\vec{n}_3 \Rightarrow \vec{N} \parallel \frac{1}{\alpha}\vec{N} = \vec{n}_1 + \frac{\beta}{\alpha}\vec{n}_2 + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{n}_3 \triangleq \vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2 + \mu\vec{n}_3,$$

Чим доведено, що ці три точки однозначно визначають певну площину в'язки.

Контрольні запитання

- 1). Як знайти проєкцію вектора на площину?
- 2). Як скласти рівняння бісекторіальної площини між двома непаралельними площинами?
- 3). Як визначити, чи є прямі мимобіжними, чи паралельними?

ЛЕКЦІЯ 15

КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

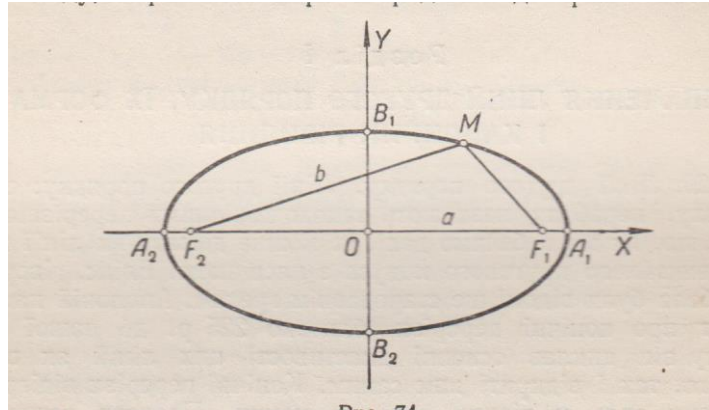
План

- 1). Канонічні рівняння кривих другого порядку - еліпса, гіперболи та параболи.
- 2). Ексцентриситет та директриса кривих другого порядку.
- 3). Дотичні до кривих другого порядку.
- 4). Криві другого порядку як конічні перерізи.

Канонічне рівняння еліпса

Означення 15.1. Еліпсом називається геометричне місце точок на площині таке, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала.

Зауваження. Якщо два фокуси співпадають, то еліпс є колом.



Мал. 15.1.

Нехай вибрано фокуси $F_1(c,0), F_2(-c,0), c \geq 0$, $M(x,y)$ - довільна точка еліпса, відстані від неї до фокусів називаються фокальними радіусами. Застосуємо позначення:

$ \vec{F_1M} = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \vec{F_2M} = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_1 + r_2 = 2a.$	(15.1)
---	--------

З означення еліпса випливає:

$r_1 + r_2 = 2a$	(15.2)
------------------	--------

або, в координатній формі

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$	(15.3)
---	--------

Очевидно, $2a$ - вісь еліпса, яку будемо вважати горизонтальною.

Перед подальшими перетвореннями зробимо деякі оцінки.

По-перше, з нерівності трикутника випливає: $0 \leq 2c < 2a \Leftrightarrow 0 \leq c < a$.

По-друге,

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a, r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \leq 2a.$$

По-третє,

$$\begin{aligned} 2a &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-c)^2} + \sqrt{(x+c)^2} = \\ &\geq |x-c| + |x+c| \geq |x-c+x+c| \geq 2|x|. \end{aligned}$$

Отже, $|x| \leq a$. Також, з урахуванням попередньої нерівності, будемо мати нерівність, яку буде використано далі: $c|x| < a^2$.

Перетворюючи це рівняння одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Як було доведено, друга умова в цій системі виконується автоматично, тому піднесення обох частин рівняння приведе до еквівалентного рівняння:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

З доведеної раніше оцінки випливає, що права частина рівняння додатна, тому піднесення обох його частин до квадрату приведе до еквівалентного рівняння:

$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Введемо позначення: $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, b - вертикальна піввісь еліпса. Тоді остання рівність, що називається канонічним рівнянням еліпса, буде мати симетричний вигляд:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$	(15.4)
--	--------

Зауваження. Якщо $c = 0 \Rightarrow a = b \triangleq r$, одержимо відоме рівняння кола:

$x^2 + y^2 = r^2.$	(15.5)
--------------------	--------

Легко бачити, що $(0, b)$ - точка з найвищою ординатою, а $(0, -b)$ - з найнижчою.

Це дає підставу називати значення b вертикальною піввіссю еліпса. Треба також зазначити, що його піввісі знаходяться у співвідношенні: $0 < b \leq a$.

Очевидно еліпс – фігура, яка має осі симетрії – осі координат, а початок координат є центром його симетрії. Це дає змогу казати, що еліпс – центральна лінія.

Означення 15.2. Ексцентриситетом ε еліпса називається відношення:

$\varepsilon = \frac{c}{a}.$	(15.6)
------------------------------	--------

З означення випливає, що для еліпса

$0 \leq \varepsilon < 1.$	(15.7)
---------------------------	--------

Для кола $\varepsilon = 0$.

Вважаючи, що $r_1 \neq r_2$, помножимо обидві частини (15.2) на $r_1 - r_2$.

В результаті прийдемо до системи:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ 2a(r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = -2\frac{c}{a}x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = a + \varepsilon x. \end{cases}$$

Очевидно, формули справедливі і при $r_1 = r_2 = a$. Тоді $x = 0$.

Остаточно: для фокальних радіусів еліпса мають місце формули

$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = a + \varepsilon x. \end{cases}$	(15.8)
--	--------

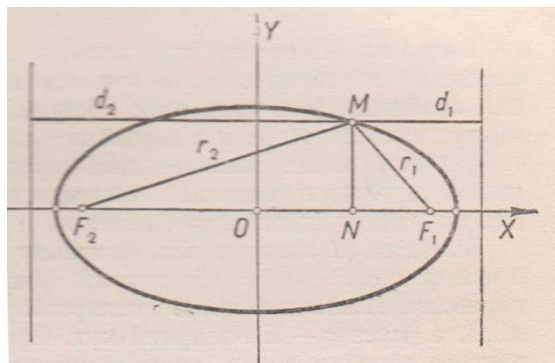
Означення 15.3. Директрисами еліпса називаються дві вертикальні прямі, що мають рівняння:

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$	(15.9)
----------------------------------	--------

Помітимо, що директриси знаходяться зовні еліпса, який не є колом, оскільки

$0 < \varepsilon < 1$, і $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Директриси кола знаходяться на нескінченності.

(Див. Мал. 15.2.)



Мал. 15.2.

Теорема 15.1. Відношення довжин фокальних радіусів еліпса до відстаней до відповідних директрис дорівнює ексцентриситету.

Доведення. Нехай $M(x, y)$ - точка еліпса, r_1 - її фокальний радіус, що проведений з правого фокуса $(c, 0)$, і d_1 - відстань до правої директриси $x = \frac{a}{\varepsilon}$.

Аналогічно визначається d_2 . Маємо: $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$, $d_2 = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}$.

З (15.8) $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \frac{a - \varepsilon x}{a - \varepsilon x} = \varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \frac{a + \varepsilon x}{a + \varepsilon x} = \varepsilon$. Отже,

$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$	(15.10)
--	---------

Дотична до еліпса

Розглянемо пряму, рівняння якої записано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - спільна точка прямої і еліпса. Зрозуміло, що її координати задовольняють рівнянню еліпса: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Знайшовши умову єдиності такої спільної точки, одержимо рівняння дотичної. Підставимо координати точки прямої в рівняння еліпса:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} \right) t + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \left(\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t + 2 \left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} \right) \right) = 0.$$

Умовою існування єдиної спільної точки є $t = 0$, двократний корінь рівняння, і це приводить до рівності:

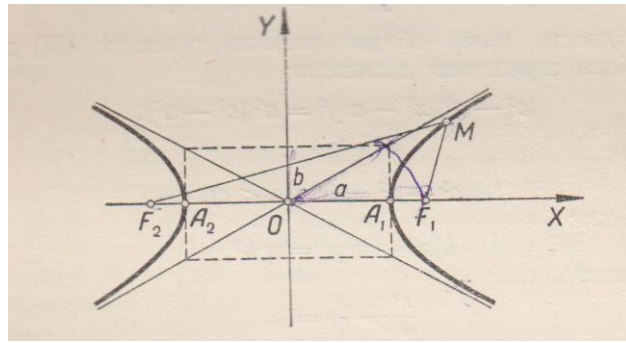
$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0.$$

Таким чином, приходимо до рівняння дотичної до еліпса у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$	(15.11)
--	---------

Канонічне рівняння гіперболи

Означення 15.4. Гіперболою називається геометричне місце точок на площині таке, що модуль різниці відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала (Мал. 15.3).



Мал. 15.3

Як і у випадку еліпса, будемо користуватись схожими позначеннями: фокуси мають координати: $F_1(c, 0), F_2(-c, 0), c \geq 0$. Фокальні радіуси:

$$|\overrightarrow{F_1 M}| = r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, |\overrightarrow{F_2 M}| = r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, |r_1 - r_2| = 2a.$$

З другого варіанта нерівності трикутника $2c > |r_2 - r_1| = 2a \Rightarrow c > a$.

Розглянемо випадок $r_2 > r_1$. Випадок $r_1 < r_2$ приведе до того самого результату.

Помножимо на суму $r_1 + r_2$ рівняння $r_2 - r_1 = 2a$:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2a(r_2 + r_1) \Leftrightarrow (x + c)^2 - (x - c)^2 = 4cx = 2a(r_2 + r_1).$$

Звідси

$$2cx = a \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right) \geq a(|x + c| + |x - c|) \geq a|x + c - x + c| = 2ac.$$

Звідси $x \geq a \Rightarrow cx \geq a^2$. Аналогічно при $r_2 < r_1$ одержимо: $x \leq -a$.

Знайдемо рівняння гіперболи.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a \Leftrightarrow$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Як було доведено при $r_2 > r_1$, має місце нерівність $cx - a^2 \geq 0$, і це означає, що при піднесенні останнього рівняння до квадрату одержимо еквівалентне рівняння:

$$\begin{aligned} c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 &= a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \end{aligned}$$

Ввівши позначення $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$	(15.12)
--	---------

Читач перевірить, що таке саме рівняння отримаємо при $r_2 < r_1$.

Ексцентриситет гіперболи знаходиться за такою ж формулою:

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$	(15.13)
----------------------------------	---------

Рівняння директрис:

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$	(15.14)
----------------------------------	---------

Для гіперболи ситуація така сама, як і для еліпса: директриса її не перетинає:

$$|x| = \frac{a}{\varepsilon} < a.$$

Знайдемо тепер вирази фокальних радіусів. Для цього помножимо обидві частини рівності $r_2 - r_1 = 2a$ при $r_2 > r_1$ ($x > 0$) на $r_2 + r_1$: $r_2^2 - r_1^2 = 2a(r_2 + r_1) \Rightarrow$

$$(x+c)^2 - (x-c)^2 = 2a(r_2 + r_1) \Rightarrow 2cx = a(r_2 + r_1).$$

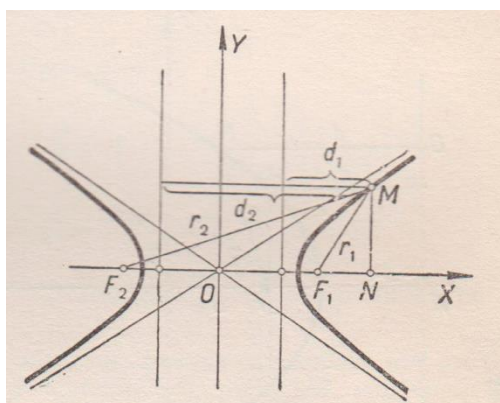
Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} r_2 + r_1 = 2\frac{c}{a}x, \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 + r_1 = 2\varepsilon x, \\ r_2 - r_1 = 2a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \varepsilon x + a, \\ r_1 = \varepsilon x - a. \end{cases}$$

Читач самостійно розгляне випадок $r_2 < r_1$ ($x < 0$). Сформулюємо результат:

$\begin{cases} x > 0, r_2 > r_1: \\ r_1 = \varepsilon x - a, \\ r_2 = \varepsilon x + a, \end{cases} \begin{cases} x < 0, r_2 < r_1: \\ r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = -a - \varepsilon x. \end{cases}$	(15.15)
--	---------

Теорема 15.2. Відношення довжин фокальних радіусів гіперболи до відстаней до відповідних директрис дорівнює ексцентриситету (Мал. 15.4.).



Мал. 15.4.

Доведення. Нехай $M(x, y), x > 0$ - точка гіперболи, r_1 - її фокальний радіус, що проведений з правого фокуса $(c, 0)$, і d_1 - відстань до правої директриси $x = \frac{a}{\varepsilon}$.

Аналогічно визначається d_2 . Маємо: $d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}, d_2 = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}$.

$$\text{З (15.15) } \frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon x - a} = \varepsilon, \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \frac{a + \varepsilon x}{a + \varepsilon x} = \varepsilon.$$

Читач самостійно розгляне випадок $x < 0$.

Отже, як і у випадку еліпса доведено формули:

$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$	(15.16)
--	---------

Дотична до гіперболи

Розглянемо пряму, рівняння якої записано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - спільна точка прямої і гіперболи. Зрозуміло, що її координати задовольняють її рівнянню: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Знайшовши умову єдиності такої спільної точки, одержимо рівняння дотичної. Підставимо координати точки прямої в рівняння гіперболи:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} \right) t + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \left(\left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} \right) t + 2 \left(\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} \right) \right) = 0.$$

Умовою існування єдиної спільної точки є $t=0$, двократний корінь рівняння, і це приводить до рівності

$$\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0.$$

Таким чином, приходимо до рівняння дотичної до гіперболи у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$	(15.17)
--	-----------

Асимптоти гіперболи

З рівняння гіперболи видно, що на ній є точки з як завгодно великими за модулем координатами, отже, постає питання про існування асимптоти.

Розглянемо спочатку випадок $x, y > 0$. Маємо: $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Оцінимо різницю

$$\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-ab}{x \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x} \right)^2} + 1 \right)} \triangleq \alpha(x).$$

Очевидно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$. Тобто, $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} x + \alpha(x)$, де величина $\alpha(x)$ -

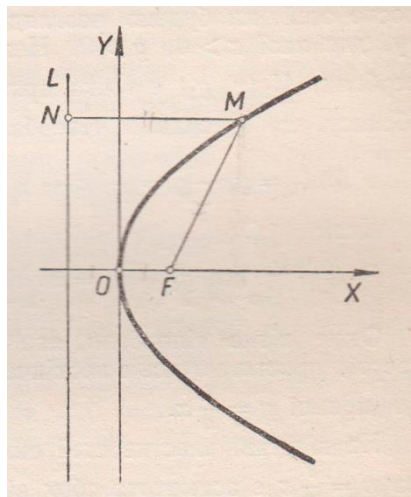
нескінченно мала на нескінченності. Тоді за означенням $y = \frac{b}{a} x$ похила

асимптота гіперболи при $x, y > 0, x, y \rightarrow \infty$, тобто, в першій чверті. Читач самостійно пересвідчиться, що це рівняння задає також асимптоту гіперболи у

третій чверті, а $y = -\frac{b}{a}x$ - асимптоту у другій та четвертій чвертях. На цих прямих лежать діагоналі прямокутника, сторони якого мають рівняння $x = \pm a, y = \pm b$.

Канонічне рівняння параболи

Означення 15.5. Параболою називається геометричне місце точок, відстань від кожної з яких до фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до прямої, що лежить на цій площині, яка називається директрисою (Мал. 15.5.).



Мал. 15.5.

Традиційно вважається, що фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Тоді директриса має рівняння $x = -\frac{p}{2}$. Очевидно, початок координат $O(0,0)$ лежить на параболі, це точка з найменшою абсцисою, і називається вона вершиною параболи. З означення параболи випливає рівність:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Таким чином, одержали канонічне рівняння параболи:

$y^2 = 2px.$	(15.18)
--------------	---------

Константа p називається параметром параболи.

Для параболи неможливо визначити ексцентриситет за формулами (15.6) або (15.13), як це робилось для еліпса і гіперболи, але можна скористатись іншим його визначенням, яке дається для тих кривих другого порядку теоремами 15.1 і 15.2, в яких доведено формули, відповідно, (15.10) і (15.16): $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Тепер можна зробити зауваження: кожне невід'ємне число є ексцентриситетом якоїсь кривої другого порядку. При $\varepsilon \in [0,1)$ це еліпс, при $\varepsilon = 1$ - парабола, при $\varepsilon \in (1, \infty)$ - гіпербола.

Дотична до параболи

Запишемо рівняння дотичної до параболи в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ належить параболі, значить, її координати задовольняють її рівнянню: $y_0^2 = 2px_0$. Знаходячи спільну точку прямої (дотичної) і параболи, підставимо координати прямої в її рівняння:

$$y_0^2 + 2y_0mt + m^2t^2 = 2px_0 + 2plt \Rightarrow m^2t^2 + 2(y_0mt - plt) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2t^2 + 2(y_0(y - y_0) - p(x - x_0)) = 0.$$

Умова дотику полягає в тому, що квадратне рівняння має один двократний корінь, в даному випадку $t = 0$. Це можливо, якщо

$$y_0(y - y_0) - p(x - x_0) = 0 \Rightarrow y_0y - y_0^2 - px + 2px_0 - px_0 = 0.$$

Таким чином, приходимо до рівняння дотичної до параболи:

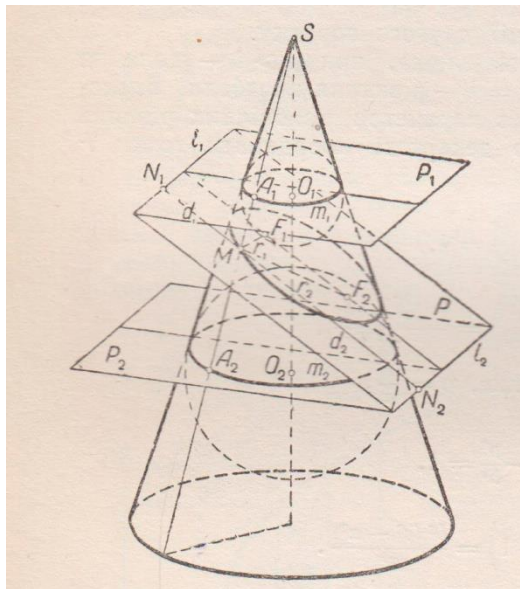
$$y_0 y = p(x + x_0).$$

(15.19)

Лінії другого порядку як конічні перерізи

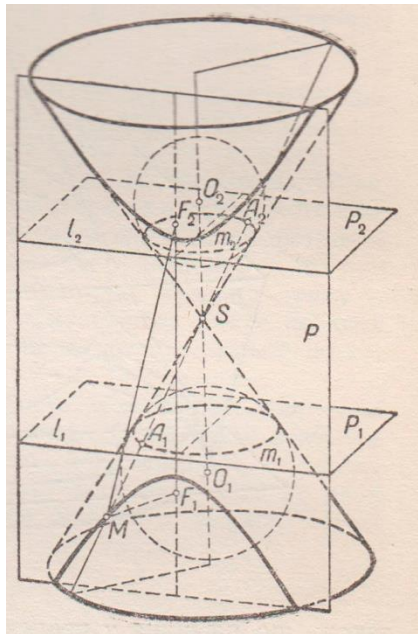
Сформулюємо без доведення наступні важливі твердження:

1) лінія перетину конуса з площиною, що не проходить через його вершину і перетинає всі його твірні, є еліпс:



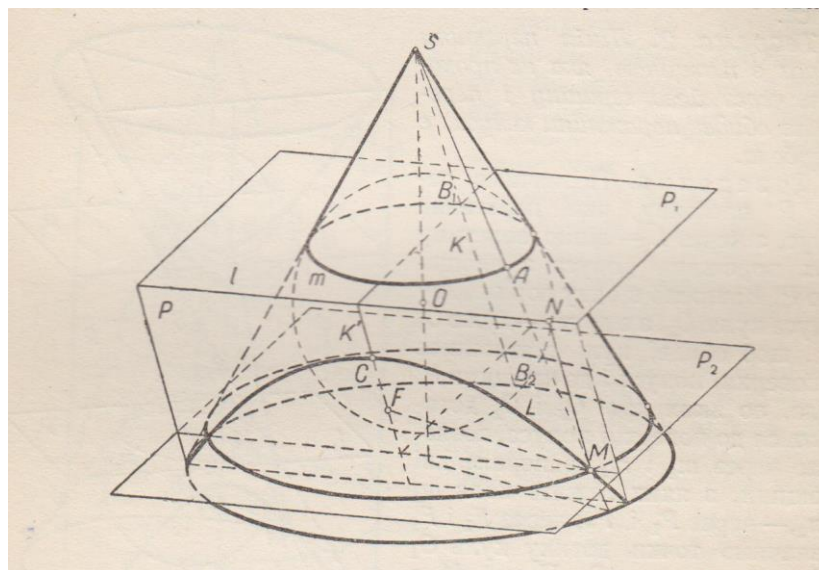
Мал. 15.6.

2) Лінія, перетину конуса з площиною, що не проходить через його вершину і перетинає обидві його порожнини, є гіпербола:



Мал. 15.7.

3) Лінія, перетину конуса з площиною, що не проходить через його вершину і паралельна одній з його твірних, є парабола:



Мал. 15.8.

Контрольні запитання

- 1). Навести всі формули для знаходження ексцентриситету.
- 2). Як знаходити дотичні до кривих другого порядку без застосування методів математичного аналізу?

ЛЕКЦІЯ 16. ОПТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ; ІНШІ ФОРМИ РІВНЯНЬ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План

- 1). Оптичні властивості еліпса, гіперболи та параболи.
- 2). Параметричні та полярні рівняння кривих другого порядку.

Оптичні властивості кривих другого порядку

Теорема 16.1. Нормаль до еліпса в довільній його точці є бісектрисою кута між фокальними радіусами цієї точки.

Доведення. Очевидно, нормаль до дотичної в точці $M_0(x_0, y_0)$ - вектор в координатному зображенні $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)^T$ є напрямним до його нормалі в цій точці.

Тоді канонічне рівняння нормалі до еліпса можна записати у вигляді:

$$\frac{a^2(x - x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y - y_0)}{y_0}.$$

Знайдемо абсцису точки перетину $M'(x', 0)$ нормалі з віссю Ox ($y = 0$):

$$x' = \varepsilon^2 x_0.$$

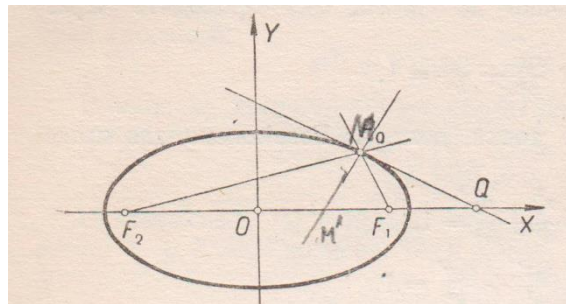
Відстані від $M'(x', 0)$ до правого і лівого фокусів дорівнюють, відповідно,

$d'_1 = c - \varepsilon^2 x_0, d'_2 = c + \varepsilon^2 x_0$. Знайдемо відношення фокальних радіусів до цих відстаней:

$$\frac{MF_1}{M_0F_1} = \frac{d'_1}{r_1} = \frac{c - \varepsilon^2 x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{c - \varepsilon \frac{c}{a} x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a - \varepsilon x_0}{a - \varepsilon x_0} = \varepsilon.$$

$$\frac{MF_2}{M_0F_2} = \frac{d'_2}{r_2} = \frac{c + \varepsilon^2 x_0}{a + \varepsilon x_0} = \frac{c + \varepsilon \frac{c}{a} x_0}{a + \varepsilon x_0} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a + \varepsilon x_0}{a + \varepsilon x_0} = \varepsilon.$$

Відстань цих відношень і означає, згідно з відомим фактом елементарної геометрії, що M_0M' - бісектриса кута між фокальними радіусами точки еліпса M_0 . З оптичної точки зору це означає, що промінь, випущений з одного з фокусу еліпса, попадає в інший фокус (Мал. 16.1.).



Мал. 16.1.

Теорема 16.2. Нормаль до гіперболи в довільній її точці є бісектрисою зовнішнього кута між фокальними радіусами цієї точки.

Доведення. Рівняння нормалі до гіперболи в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{a^2(x - x_0)}{x_0} = -\frac{b^2(y - y_0)}{y_0}.$$

Абсциса точки $M'(x', 0)$ перетину цієї нормалі з віссю Ox ($y = 0$):

$$x' = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x_0 = \frac{c^2}{a^2} x_0 = \varepsilon^2 x_0.$$

Відстані від $M'(x', 0)$ до правого і лівого фокусів дорівнюють, відповідно,

$$d'_1 = \varepsilon^2 x_0 - c = \varepsilon(\varepsilon x_0 - a), d'_2 = \varepsilon^2 x_0 + c = \varepsilon(\varepsilon x_0 + a).$$

Звідси

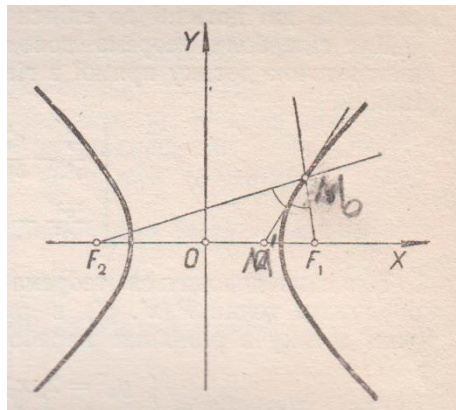
$$\frac{M'F_1}{M_0F_1} = \frac{d'_1}{r_1} = \frac{\varepsilon(\varepsilon x_0 - a)}{\varepsilon x_0 - a} = \varepsilon,$$

$$\frac{MF_2}{M_0F_2} = \frac{d'_2}{r_2} = \frac{\varepsilon(\varepsilon x_0 + a)}{(\varepsilon x_0 + a)} = \varepsilon.$$

Отже, $\frac{MF_1}{M_0F_1} = \frac{MF_2}{M_0F_2}$ і за теоремою з елементарної геометрії про бісектрису кута,

зовнішнього до трикутника, нормаль є такою бісектрисою кута між променями, що виходять з фокусів і є зовнішньою для кута трикутника у вершині $M_0(x_0, y_0)$.

З оптичної точки зору це означає, що промінь, випущений з одного з фокусу гіперболи, відбиваючись від неї, продовжує йти так, ніби то його було випущено з іншого фокуса (Мал. 16.2.).



Мал. 16.2.

Теорема 16.3. Дотична до параболи в довільній точці утворює рівні кути з її фокальним радіусом і перпендикуляром, опущеним з неї на директрису.

Доведення. Дотична до параболи в точці $M_0(x_0, y_0)$ має рівняння $y_0 y = p(x + x_0)$, точка її перетину з горизонтальною координатною віссю

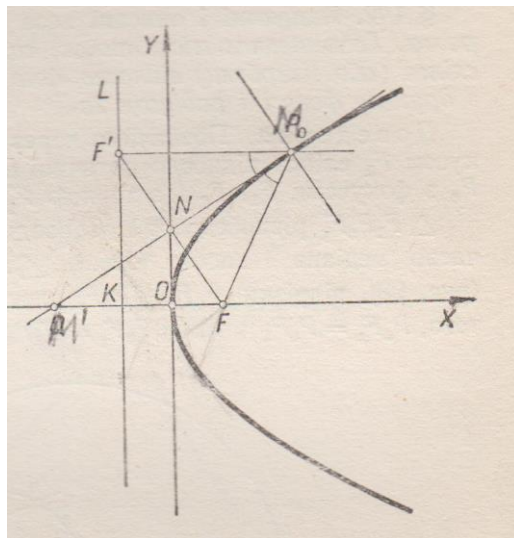
$Ox (y=0)$ має координати $M'(-x_0, 0)$, і тому $MF = x_0 + \frac{p}{2}$. Відстань від

$M_0(x_0, y_0)$ до фокуса і до директриси M_0F' дорівнює

$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + 2px_0} =$$

$$= \sqrt{x_0^2 + px_0 + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2} = x_0 + \frac{p}{2}.$$

Отже, $MF'M_0F$ - ромб і тому його діагональ MM_0 є бісектрисою кута при вершині $M_0(x_0, y_0)$, що й треба було довести. З цього випливає, що нормаль до параболи в точці $M(x_0, y_0)$ є бісектрисою зовнішнього кута. Це, в свою чергу, означає, що промінь, випущений з фокуса, відбившись від параболи, далі йде по перпендикуляру до осі Oy , тобто, по променю, паралельному осі Ox . В цьому і полягає оптична властивість параболи (Мал. 16.3.).



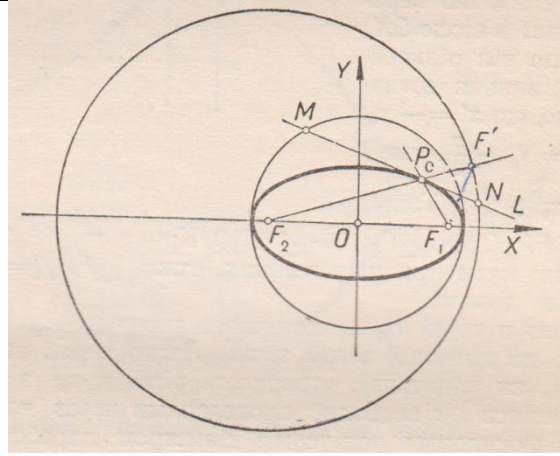
Мал. 16.3.

Задача 1. Розглянути геометричне місце точок, симетричних фіксованому фокусу відносно довільної дотичної. Довести, що це ГМТ є коло з центром в іншому фокусі радіуса $2a$ (воно називається напрямним колом).

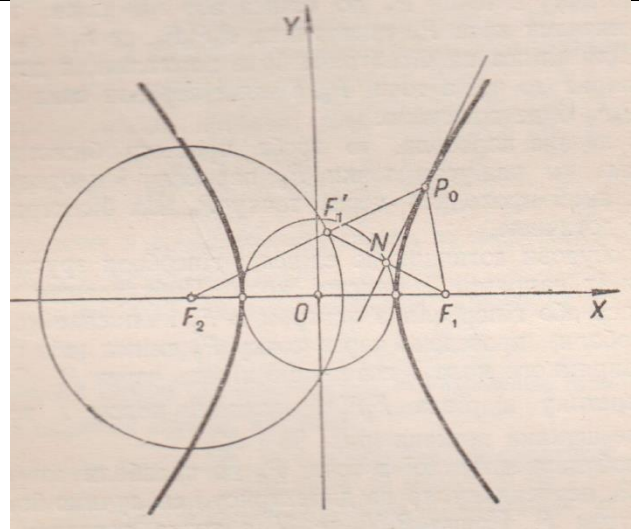
Вказівка: скористатись оптичними властивостями вказаних кривих.

Задача 2. Розглянути геометричне місце точок перетину довільної дотичної з ортогональною до неї прямою що проходить через фіксований фокус. Довести, що це ГМТ є коло (воно називається описаним) радіуса a , центр якого є центром кривої.

Вказівка: доведення випливає з твердження задачі 1. Див. Мал. 16.4, 16.5.



Мал. 16.4.



Мал. 16.5.

Параметричне зображення кривих другого порядку

1). Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Проведемо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами $a > b > 0$. Нехай A довільна точка більшого кола. Проведемо через неї і початок координат відрізок OA і нехай B - точка його перетину з меншим колом. Проведемо $AA_1 \perp Ox$, $BP \perp AA_1$, $BP \parallel Ox$, $P(x, y)$ - точка перетину цих відрізків. Проведемо також $BB_1 \perp Ox$. Позначимо $\angle AOA_1 = \varphi$. Доведемо, що P належить еліпсу. З $\triangle AOA_1$ $x = a \cos \varphi$. Очевидно, $PA_1 = BB_1$. З $\triangle BOB_1$ $y = b \sin \varphi$. Отже,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1, \text{ що й треба було довести.}$$

Остаточно: параметризація еліпса

$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$	(16.1)
--	--------

2). Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Проведемо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами $b > a > 0$. Проведемо з початку координат під кутом $\varphi > 0$ до осі Ox і промінь і позначимо точки перетину з колами, відповідно, B, A . З цих точок проведемо дотичні до кіл і позначимо через B', A' їхні точки перетину з віссю Ox . Тоді

$$OB' = \frac{b}{\cos \varphi}, OA' = \frac{a}{\cos \varphi}. \text{ Проведемо через точку } A'(x, 0) \text{ перпендикулярну до осі}$$

Ox пряму і відкладемо на ній відрізок довжиною $y = btg\varphi$. Доведемо, що точка

$$P(x, y), x = \frac{a}{\cos \varphi}, y = btg\varphi \text{ лежить на гіперболі. Це очевидно, оскільки}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \varphi} - \frac{b^2 tg^2 \varphi}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - tg^2 \varphi = 1.$$

Отже одержали параметризацію гіперболи:

$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi}, \\ y = btg\varphi. \end{cases}$	(16.2)
--	--------

Легко бачити, що параметризацією гіперболи також є

$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi, \\ y = b \operatorname{sh} \varphi. \end{cases}$	(16.3)
--	--------

Для параболи роль параметра грає змінна $y: x = \frac{y^2}{2p}$.

Рівняння кривих другого порядку у полярній системі координат

Нагадаємо означення полярних координат. Нехай xOy - координатна площина з напрямними ортами $\vec{i}, \vec{j}$ осей Ox, Oy відповідно. Нехай $\vec{r}$ - радіус-вектор точки $M(x, y)$, $\rho = |\vec{r}|$ і φ - кут повороту від вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{r}$; $\varphi \in [0, 2\pi)$.

З тригонометрії відомо, що $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Таким чином, довільній точці $M(x, y)$ при $x^2 + y^2 > 0$ однозначно зіставляються числа ρ, φ , які називаються її полярними координатами. Зауважимо, що початку координат $O(0,0)$ не відповідає єдине значення кута φ . Точка $O(0,0)$, з якої виходять радіуси-вектори точок площини, називається полярним центром.

Розглянемо зразу три криві другого порядку. Будемо вважати, що полярний центр співпадає з лівим фокусом у випадку еліпса, правим фокусом у випадку гіперболи і фокусом у випадку параболи.

Проведемо через полярний центр перпендикуляр до координатної осі Ox і половина довжини утвореної хорди, тобто, відрізка між фокусом і точкою P на кривій позначимо через p . Вона називається полярним параметром кривої.

Зразу відзначимо, що для параболи цей параметр є відстанню фокуса до директриси, і він входить у її рівняння у декартових координатах. Нехай $x = d_0$

- рівняння директриси. Для еліпса $d_0 = -\frac{a}{\varepsilon}$, для гіперболи - $d_0 = \frac{a}{\varepsilon}$, для

параболи - $d_0 = -\frac{p}{2}$.

Відстань d' від точки P до директриси, як відомо, знаходиться за формулою

$d' = \frac{p}{\varepsilon}$. Нехай полярний радіус точки P дорівнює ρ і він утворює кут φ з

додатним напрямком осі Ox . Якщо d - відстань від довільної точки кривої до

директриси, то $d = d' + \rho \cos \varphi = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi$. Отже,

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi} = \varepsilon \Rightarrow \rho = p + \varepsilon \rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Одержали рівняння кривої другого порядку у полярних координатах, в якому міститься константа – полярний параметр кривої:

$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$	(16.4)
--	--------

Знайдемо цей параметр p для різних типів кривих.

Для еліпса треба підставити

$$x = -c, y = p: \frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow p^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}.$$

Для гіперболи –

$$x = c, y = p: \frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow p^2 = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}.$$

Для параболи, як вже було сказано, це її параметр.

Контрольні запитання

- 1). В чому полягають оптичні властивості кривих другого порядку?
- 2). Запропонувати дві різні параметризації гіперболи.
- 3). Знайти полярні рівняння еліпса, якщо вважати, що полярний центр знаходиться в різних фокусах?

ЛЕКЦІЯ 17. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ І ЇХНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

План

- 1). Зсув і поворот систем координат.
- 2). Формули переходу від старих координат до нових.

3). Перетворення загального рівняння.

В цій лекції ми повинні оперувати поняттями лінійної алгебри, з якими більш детально і ґрунтовно познайомимось в другому семестрі. Зараз сформулюємо кілька означень і фактів, необхідних при вивченні теорії рівнянь другої степені від двох змінних, які описують криві другого порядку.

Ми будемо мати справу з операторами в $\mathbb{R}^2$, тобто, з квадратними матрицями другого порядку. Будемо вважати, що в просторі задано скалярний добуток, який для векторів u, v буде позначатись (u, v) .

Пізніше буде обґрунтовано, що для лінійного оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ існує, притому, єдиний лінійний оператор $A^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, що має властивість:

$(Au, v) = (u, A^*v).$	(17.1)
------------------------	--------

Цей оператор називається спряженим до A . Якщо A - матриця, то A^* - транспонована до A .

Означення 17.1. Оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Означення 17.2. Ненульовий вектор $u \in \mathbb{R}^n$ називається власним, що відповідає власному числу λ , якщо

$Au = \lambda u.$	(17.2)
-------------------	--------

Це співвідношення можна переписати таким чином:

$$(\lambda I - A)u = 0.$$

Зауваження. Власні числа діагональної матриці – це елементи її діагоналі.

Для існування ненульового розв'язку (17.2) необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$\det(\lambda I - A) = 0.$	(17.3)
----------------------------	--------

Очевидно, власні вектори, що відповідають даному власному числу, утворюють підпростір (який називається власним підпростором) лінійного простору, в якому діє оператор.

Вираз в лівій частині (17.3), очевидно, після розкриття визначника буде многочленом степені, що дорівнює порядку матриці. Він називається характеристичним многочленом матриці. Будемо позначати його $\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Без детального доведення сформулюємо результат.

Теорема 17.1. Самоспряжений оператор, квадратна матриця порядку n , має n дійсних, власних чисел, а власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні між собою.

Пояснимо, чому власні вектори самоспряженого оператора дійсні.

Справді, нехай $Au = \lambda u, u \neq 0$. Тоді

$$\lambda(u, u) = (Au, u) = (u, Au) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u) \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}.$$

Нехай тепер $Au = \lambda u, Av = \mu v, u, v \neq 0, \lambda \neq \mu$.

$$\text{Маємо: } \lambda(u, v) = (Au, v) = (u, Av) = \mu(u, v) \Rightarrow (\lambda - \mu)(u, v) = 0 \Rightarrow (u, v) = 0.$$

Згідно з теоремою 17.1 у просторі можна вибрати ортонормований базис з власних векторів оператора, а оператор переходу буде зберігати скалярний добуток (ортонормований базис переводити в ортонормований). Такий оператор називають унітарним в комплексних просторах і ортогональним – у дійсних.

Нехай U - унітарний оператор, тобто,

$$(Uu, Uv) = (u, v) \Rightarrow (u, v) = (U^*Uu, v) \Rightarrow U^*U = I.$$

Це означає, що спряжений оператор до унітарного є також його лівим оберненим: $U^* = U^{-1}$. Але у асоціативній алгебрі лівий і правий обернені співпадають (твердження 1.1). Звідси в даному випадку робиться ще один висновок: спряжений до унітарного оператора теж унітарний оператор. Таким чином, унітарні оператори утворюють групу, що позначається $U_n(\mathbb{C})$.

Унітарний оператор, що діє у дійсному просторі, називається ортогональним.

Група ортогональних матриць позначається $O_n(\mathbb{R})$.

Її підгрупа матриць з додатним визначником - такі матриці не змінюють орієнтацію - позначається $SO_n(\mathbb{R})$ – *special linear*.

Теорема 17.2. Характеристичний многочлен матриці лінійного оператора не змінюється при переході до іншого базису.

Нехай A, A' - матриці оператора в старому і новому базисах відповідно, а T – матриця заміни базису. Тоді, як відомо,

$$A' = T^{-1}AT \Rightarrow \lambda I - A' = \lambda T^{-1}IT - T^{-1}AT = T^{-1}(\lambda I - A)T \Rightarrow$$

$$\det(\lambda I - A') = \det T^{-1}(\lambda I - A)T = \det T^{-1} \det(\lambda I - A) \det T = \det(\lambda I - A).$$

Наслідок. Корені характеристичного многочлена не змінюється при переході до іншого базису.

Далі ми будемо використовувати заміну базису за допомогою повороту.

Очевидно, це унітарний оператор.

Загальне рівняння кривої другого порядку

Перетворення координат

Зсув

Розглянемо рівняння другого порядку з двома змінними:

$2F(\xi_1, \xi_2) \triangleq a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + 2a_{13}\xi_1 + 2a_{23}\xi_2 + a_{33} = 0.$	(17.4)
---	--------

Ввівши позначення

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{21} = a_{12},$	(17.5)
--	--------

$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = a_{33},$	(17.6)
---	--------

перепишемо рівняння у вигляді

$(A\xi, \xi) + 2(a, \xi) + b = 0,$	(17.7)
------------------------------------	----------

де A - симетрична матриця, в якій $a_{12} \neq 0$ (інакше квадратична форма

$\Omega(\xi, \xi) = (A\xi, \xi)$ мала б діагональний вигляд).

Зробимо перетворення зсуву так, щоб позбутись лінійних членів. Нехай

$\xi = x + r.$	(17.8)
----------------	----------

Тут ξ - вектор старих координат, x - вектор нових координат, $r \sim (x_{01}, x_{02})^T$ - вектор зсуву нової системи до старої. Відзначимо також, що r - радіус-вектор нового початку координат системи $x_1 O x_2$ в системі $\xi_1 O \xi_2$.

Після заміни (17.8) рівняння (17.7) перепишеться у вигляді

$(Ax, x) + 2(Ar + a, x) + ((Ar, r) + 2(a, r) + b) = 0.$	(17.9)
---	----------

Будемо тепер вимагати виконання співвідношення

$Ar + a = 0.$	(17.10)
---------------	-----------

Запишемо також цю умову у координатній формі:

$a'_{13} = \frac{\partial F(x_{01}, x_{02})}{\partial \xi_1} = a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02} + a_{13} = 0,$ $a'_{23} = \frac{\partial F(x_{01}, x_{02})}{\partial \xi_2} = a_{12}x_{01} + a_{22}x_{02} + a_{23} = 0,$ $a'_{33} = 2F(x_{01}, x_{02}) = a_{11}x_{01}^2 + 2a_{12}x_{01}x_{02} + a_{22}x_{02}^2 + 2a_{13}x_{01} + 2a_{23}x_{02} + a_{33}.$	(17.11)
--	-----------

Якщо $\det(A) \neq 0$, можна знайти вектор зсуву з умови

$Ar = -a \Rightarrow r = -A^{-1}a.$	(17.12)
-------------------------------------	---------

(Випадок $\det(A) = 0$ розглянемо окремо.)

Якщо ввести позначення $(Ar, r) + 2(a, r) + b = -C$, рівняння перепишеться у вигляді

$(Ax, x) = C.$	(17.13)
----------------	---------

При перетворенні симетрії на площині

$x = -\tilde{x}$ рівняння (17.13) не змінить свого вигляду:

$$(Ax, x) = (-A\tilde{x}, -\tilde{x}) = (A\tilde{x}, \tilde{x}).$$

Отже, крива симетрична відносно початку координат і тому називається центральною. Зважаючи на (17.2), робимо висновок, що центральна лінія характеризується умовою $\det(A) \neq 0$. Приклади центральних кривих другого порядку – це еліпс, гіпербола. Сюди можна також включити пару прямих, що перетинаються в початку координат. Вони також мають рівняння другої степені: $\alpha^2 x^2 - y^2 = 0$.

Треба пам'ятати, що перетворення зсуву не є лінійним оператором в даному просторі, і йому не можна зіставити матрицю, але можна вийти в простір більшої розмірності, де операції зсуву матрицю можна зіставити.

Введемо так звані однорідні координати за формулами

$\xi_1 = \frac{x_1}{x_3}, \xi_2 = \frac{x_2}{x_3}.$	(17.14)
---	---------

Тоді рівняння (17.4) після множення обох частин на x_3^2 запишеться у вигляді

$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$	(17.15)
--	---------

Позначимо через x'_1, x'_2, x'_3 однорідні координати точок в новій системі координат, яка виникла після зсуву. Тоді

$\begin{cases} \xi_1 = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x'_1}{x'_3} + x_{01}, \\ \xi_2 = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x'_2}{x'_3} + x_{02}. \end{cases}$	(17.16)
--	---------

Звідси

$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x_{01}x'_3, \\ x_2 = x'_2 + x_{02}x'_3, \\ x_3 = x'_3. \end{cases}$	(17.17)
---	---------

Легко бачити, що старі однорідні координати виражаються через нові за допомогою наступної матриці:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{01} \\ 0 & 1 & x_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$	(17.18)
---	---------

Зауважимо, що визначник цієї матриці дорівнює 1.

Контрольні запитання

1). Як записати формули зсуву системи координат?

2). Як знаходити зсув системи координат, щоб центри еліпса і гіперболи співпадали б з початком координат?

ЛЕКЦІЯ 18. ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ШЛЯХОМ ПОВОРОТУ КООРДИНАТНИХ ОСЕЙ

План

- 1). Зведення загального рівняння другого порядку до канонічного вигляду.
- 2). Знаходження кута повороту координатних осей нової системи, в якій крива матиме канонічне рівняння.
- 3). Приклади зведення до канонічного вигляду загальних рівнянь еліпса, гіперболи і параболи.
- 4). Інваріанти кривих другого порядку і класифікація кривих.

Оскільки зсув не завжди (у випадку виродженої матриці A) може звести загальне рівняння до вигляду (17.10), будемо вивчати, як на загальне рівняння діє поворот координатних осей. Отже, розглядається рівняння

$(A\xi, \xi) + 2(a, \xi) + b = 0.$	(18.1)
------------------------------------	--------

Треба шляхом повороту координатних осей звести його до канонічного вигляду. Задача відповідає зведенню до діагональної форми матриці A .

Далі ми зведемо квадратичну форму у новому базисі $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ до канонічного вигляду з матрицею

$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}, a'_{21} = a'_{12} = 0.$	(18.2)
---	--------

Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$(A'x', x') = a'_{11}x'^2_1 + a'_{22}x'^2_2 = c.$	(18.3)
---	--------

Слід відзначити, що при $C = 0$ і різних знаках власних чисел λ_1, λ_2 рівняння визначає пару прямих, що перетинаються; якщо знаки λ_1, λ_2 однакові, то дійсних розв'язків рівняння немає, і кажуть про пару уявних прямих.

Оскільки при переході до нового базису характеристичне рівняння не змінюється, то не змінюються його корені. Тому коефіцієнти a'_{11}, a'_{22} діагональної матриці співпадають з власними числами матриці A : λ_1, λ_2 . Нагадаємо – вони знаходяться як корені характеристичного рівняння

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$	(18.4)
--	--------

Якщо зразу виписати канонічну форму у вигляді

$(A'x', x') = a'_{11}(x'_1)^2 + a'_{22}(x'_2)^2.$	(18.5)
---	--------

немає гарантії, що здійснено саме поворот координатних осей. Можливий випадок, коли дане перетворення – це поворот і дзеркальне відображення, що не відповідатиме геометричній постановці задачі.

Вивчимо детальніше перетворення координат, що відповідає повороту координатних осей.

Нехай є система координат xOy . Повернемо її на кут φ ($\varphi > 0$, коли поворот здійснюється проти годинникової стрілки, $\varphi < 0$, якщо за годинниковою стрілкою), і одержимо нову систему $x'Oy'$. Знайдемо зв'язок між координатами вектора в старій і новій системах координат. Нехай $\{e_1, e_2\}$ і $\{e'_1, e'_2\}$ -ортонормовані базиси, напрямні орти осей. З умови випливає, що кут між

e'_1 і e_1 дорівнює φ , між e'_1 і e_2 дорівнює $\frac{\pi}{2} - \varphi$, між e'_2 і e_1 дорівнює $\frac{\pi}{2} + \varphi$, між e'_2 і e_2 дорівнює φ . Застосуємо відому схему визначення матриці оператора повороту $U(\varphi)$

$\begin{cases} e'_1 = U(\varphi)e_1 = u_{11}e_1 + u_{21}e_2, \\ e'_2 = U(\varphi)e_2 = u_{12}e_1 + u_{22}e_2. \end{cases}$	(18.6)
--	--------

Для знаходження коефіцієнтів розкладу помножимо скалярно обидві частини кожного розкладу на вектори e_1 і e_2 , враховуючи, що скалярний добуток одиничних векторів дорівнює косинусу кута між ними. В результаті одержимо:

$\begin{cases} e'_1 = U(\varphi)e_1 = (\cos \varphi)e_1 + (\sin \varphi)e_2, \\ e'_2 = U(\varphi)e_2 = -(\sin \varphi)e_1 + (\cos \varphi)e_2. \end{cases}$	(18.7)
---	--------

Щоб не переобтяжувати записи, будемо позначати матриці так само, як і оператори, добре розуміючи ситуацію. Отже, тепер можна виписати матрицю оператора повороту і її дію на вектори-стовпчики:

$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$ $[r]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U(\varphi)[r]_{e'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$	(18.8)
---	--------

звідки

$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi, \\ x_2 = x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi. \end{cases}$	(18.9)
--	--------

З рівності

$$[r]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

одержимо:

$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \end{cases}$	(18.10)
---	---------

Запишемо в нашій ситуації матрицю в старих координатах через матрицю в нових і навпаки (див. (5.27), (5.28)):

$A = U(\varphi)A'U^{-1}(\varphi) = U(\varphi)A'U^*(\varphi),$	(18.11)
---	---------

$A' = U^{-1}(\varphi)AU(\varphi) = U^*(\varphi)AU(\varphi).$	(18.12)
--	---------

Нагадаємо, що раніше для ортогональної матриці (і в більш загальному випадку – для унітарної в комплексному просторі) було доведено, що $U^{-1}(\varphi) = U^*(\varphi)$.

Враховуючи, що $x = U(\varphi)x'$, $x' = U^{-1}(\varphi)x = U^*(\varphi)x$, маємо:

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= (U(\varphi)A'U^*(\varphi)x, x) = (A'U^*(\varphi)x, U^*(\varphi)x) = (A'x', x') = \\ &= (U^*(\varphi)AU(\varphi)x', x'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Ax, x) + 2(a, x) &= \\ &= (U^*(\varphi)AU(\varphi)x', x') + 2(U^*(\varphi)a, x') = (U^{-1}(\varphi)AU(\varphi)x', x') + 2(U^1(\varphi)a, x') = \\ &= (A'x', x') + 2(a', x'). \end{aligned}$$

Виберемо кут φ таким чином, щоб добуток матриць $U^{-1}(\varphi)AU(\varphi)$ мав би вигляд (18.2). Знайдемо

$$U^*(\varphi)AU(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi & a_{12} \cos^2 \varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos \varphi \sin \varphi - a_{12} \sin^2 \varphi \\ a_{12} \cos^2 \varphi + (a_{22} - a_{11}) \cos \varphi \sin \varphi - a_{12} \sin^2 \varphi & a_{22} \cos^2 \varphi - 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{11} \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Тепер зручно записати

$$\begin{aligned} A' &= U^*(\varphi)AU(\varphi) = \\ &= \cos^2 \varphi \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi & a_{12} + (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi - a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi \\ a_{12} + (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi - a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi & a_{22} - 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{11} \operatorname{tg}^2 \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi & a_{12} + (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi - a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi \\ a_{12} + (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi - a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi & a_{22} - 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{11} \operatorname{tg}^2 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Одержана матриця повинна мати діагональну форму. Для цього досить, щоб $\operatorname{tg} \varphi$ задовольняв рівняння

$a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi - (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi - a_{12} = 0.$	(18.13)
--	-----------

Виявляється, його зовсім не обов'язково розв'язувати.

Знайдемо, наприклад,

$$a'_{11} = \lambda_1 = \frac{a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}$$

при умові $a_{12} \operatorname{tg}^2 \varphi = (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi + a_{12}$:

$$a'_{11} = \lambda_1 = \frac{a_{11} + 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = a_{22} + a_{12} \frac{2a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{11} - a_{22}}{(a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \varphi + 2a_{12}}$$

Звідси, випускаючи елементарні перетворення, будемо мати:

$$\begin{aligned}
tg\varphi &= a_{12} \frac{(a_{11} + a_{22} - 2\lambda)}{(a_{22} - a_{11})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2} = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}} \frac{(a_{11} + a_{22} - 2\lambda)(\lambda - a_{22})}{(a_{22} - a_{11})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2} = \\
&= \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}} \frac{-2(\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22} - a_{11})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2}{(a_{22} - a_{11})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2} = \\
&= \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}
\end{aligned}$$

Отже,

$tg\varphi = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}},$	(18.14)
--	---------

або аналогічно

$tg\varphi = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}.$	(18.15)
--	---------

Користуючись формулами (18.10), можна записати рівняння нових координатних осей Ox'_1, Ox'_2 , в координатах x_1, x_2 .

Вісь Ox'_1 має рівняння $x'_2 = 0$, вісь Ox'_2 - $x'_1 = 0$.

$$Ox'_1 : x_2 = (tg\varphi)x_1$$

$$Ox'_2 : x_2 = -\frac{1}{tg\varphi}x_1 \tag{18.16}$$

Оскільки $\xi = x + r$, $x = \xi - r$, маємо остаточно :

$$O\xi'_1 : \xi_2 = (tg\varphi)(\xi_1 - r_1) + r_2$$

$$O_{\xi_2'} : \xi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} (\xi_1 - r_1) + r_2 \quad (18.17)$$

Треба визначити, як вибирати кут повороту.

1). $a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{22} = \lambda_2$ мають однакові знаки. Дійсній кривій відповідає випадок

$$\frac{\lambda_1}{C} > 0, \frac{\lambda_2}{C} > 0.$$

Зрозуміло, що це еліпс. Щоб він мав канонічний вигляд, треба, щоб $|\lambda_1| = |a'_{11}| < |a'_{22}| = |\lambda_2|$ - тоді його горизонтальна піввісь буде більша за вертикальну. Саме з цих міркувань вибирається $\operatorname{tg} \varphi$, наприклад, в формулі (6.3.15).

2). a'_{11} , a'_{22} мають різні знаки. Тоді крива є гіперболою. Для того, щоб вона мала канонічне рівняння, треба, щоб

$$\frac{\lambda_1}{C} > 0, \frac{\lambda_2}{C} < 0$$

3). Параболічний випадок. Він відповідає $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Приклад 1. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \{1; 9\}, a = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Власні числа додатні, тому ця крива є еліпс. Отже вибираємо

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

Для здійснення зсуву за формулою (17.9), знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тепер } r = -A^{-1}a = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-C = (Ar, r) + 2(a, r) + b = \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 18 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + 9 = -9.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'+1 \end{pmatrix} \text{ і в системі } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ рівняння запишеться у вигляді:}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 9.$$

За формулою (18.13) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{1-5} = -1$. Зручно вважати, що $\cos \varphi > 0$, тому

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отже, запишемо канонічне рівняння в координатах

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'; \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$$

$$\frac{(x'')^2}{3^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1.$$

Рівняння нових координатних осей в системі координат (x, y) :

$$Ox'': y = -(x-1)+1 \Rightarrow y = -x+2,$$

$$Oy'': y = x-1+1 \Rightarrow y = x.$$

Приклад 2. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad b = 11.$$

Знайдемо вектор зсуву системи координат:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Звідси } r_1 = -1, r_2 = 2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

$$(Ar, r) + 2(a, r) + b = -C,$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 2 \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 11 = -9 = -C.$$

Звідси $C = 9$. В нових координатах рівняння запишеться у вигляді

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 9.$$

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$, власні числа матриці $\lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 9\}$.

Отже, крива – гіпербола. Для того, щоб вона мала канонічний вигляд, треба взяти $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1$. Отже, прийдемо до канонічного рівняння:

$$9(x'')^2 - (y'')^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{3^2} = 1;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{22}} = \frac{3}{9 - 8} = 3.$$

Рівняння осі Ox'' : $y - 2 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 5$,

осі Oy'' : $y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Параболічний випадок.

Маємо рівняння кривої другого порядку $(Ax, x) + 2(a, x) + b = 0$, де A - симетрична матриця, $\det(A) = 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Одне з власних чисел матриці буде дорівнювати нулю, друге позначимо λ .

Як і раніше, перейдемо до нової системи координат $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ за допомогою ортогональної матриці

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Рівняння перепишеться у вигляді

$$(U^*(\varphi)AU(\varphi)x', x') + 2(a, U(\varphi)x') + b = 0.$$

Виберемо $U(\varphi)$ так, що $A' = U^*(\varphi)AU(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Як відомо, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ - тут врахували, що одне власне число матриці

дорівнює нулю.

Позначимо $a' = U^*(\varphi)a$. Рівняння перепишеться у вигляді

$$\lambda (x_2')^2 + 2a_1'x_1' + 2a_2'x_2' + b = 0$$

а). Нехай $a_1' \neq 0$.

Після виділення повного квадрату і простих перетворень одержимо:

$$\lambda \left(x_2' + \frac{a_2'}{\lambda} \right)^2 + 2 \frac{a_1'}{\lambda} \left(x_1' + \frac{1}{2a_1'} \left(b - \frac{(a_2')^2}{\lambda} \right) \right) = 0.$$

Отже, ввівши заміни

$$x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda}, \quad x_1'' = x_1' + \frac{1}{2a_1'} \left(b - \frac{(a_2')^2}{\lambda} \right)$$

і позначення $p = \frac{a_1'}{\lambda}$, прийдемо до канонічного рівняння параболи:

$$(x_2'')^2 = 2px_1''.$$

б). $a_1' = 0$.

Після виділення повного квадрату і простих перетворень одержимо:

$$\left(x_2' + \frac{a_2'}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left(b - \frac{(a_2')^2}{\lambda} \right) = 0$$

і

$$x_2' = \frac{1}{\lambda} \left(-a_2' \pm \sqrt{\frac{(a_2')^2}{\lambda} - b} \right).$$

Це рівняння пари прямих, якщо $\frac{(a_2')^2}{\lambda} - b \neq 0$. Воно вироджується в одну пряму,

якщо $\frac{(a_2')^2}{\lambda} - b = 0$.

Приклад 3. Звести рівняння другого порядку до головних осей:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ власні числа цієї матриці: } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \operatorname{tg} \varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -1.$$

Візьмемо $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді

$$U(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^*(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U(\varphi) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = U^*(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = U^*(\varphi) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda} = x_2' + \sqrt{2}, \quad x_1'' = x_1' + \frac{1}{2a_1'} \left(b - \frac{(a_2')^2}{\lambda} \right) = x_1' - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(4 - \frac{8}{2} \right) = x_1'.$$

В результаті прийдемо до канонічного рівняння:

$$(x_2'')^2 = 2\sqrt{2} x_1',$$

де

$$x_2'' = x_2' + \frac{a_2'}{\lambda} = \frac{x + y + 2}{\sqrt{2}}$$

$$x_1'' = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

Інваріанти кривих другого порядку

Вже відзначалось, що при зсуві і повороті рівняння (18.1) перетворюється таким чином, що не змінюються коефіцієнти характеристичного многочлена, які зараз позначимо $I_1 = Sp(A), I_2 = \delta \triangleq \det(A)$. Такі величини, незалежні від

перетворень, називаються інваріантними відносно цих перетворень або просто інваріантами. Зауважимо, що $Sp(A) \triangleq a_{11} + a_{22}$ називається слідом матриці.

Вже відзначалось, що в однорідних координатах перетворенню зсуву відповідає матриця (17.16). Якщо здійснювати поворот і зсув, то такому перетворенню в однорідних координатах відповідатиме матриця $T(\varphi)$:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & x_{01} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & x_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T(\varphi)x'.$	(17.18)
---	---------

Її визначник, очевидно, теж, як і для (17.16), дорівнює 1. Визначник спряженої (транспонованої) матриці також дорівнює 1.

Запишемо, як перетвориться квадратична форма, що в однорідних координатах відповідає рівнянню під дією перетворення $T(\varphi)$. При цьому будемо вживати позначення:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \det(\tilde{A}) \triangleq \Delta \triangleq I_3.$$

Маємо:

$$(\tilde{A}x, x) = (\tilde{A}T(\varphi)x', T(\varphi)x') = (T^*(\varphi)\tilde{A}T(\varphi)x', x').$$

Звідси $I'_3 \triangleq \det(T^*(\varphi)\tilde{A}T(\varphi)) = \det(T^*(\varphi))\det(\tilde{A})\det(T(\varphi)) = \det(\tilde{A}) = I_3.$

Отже, отримали ще один інваріант кривої другого порядку.

Запропонуємо тепер схему зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Розглянемо спочатку центральні криві.

Спочатку знаходимо власні числа матриці, корені її характеристичного рівняння: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Яке з цих чисел вважати першим, а яке другим, пояснимо пізніше.

Здійснивши поворот осей, зведемо рівняння до вигляду

$$\lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + 2a'_{13}x'_1 + 2a'_{23}x'_2 + a'_{33} = 0.$$

Паралельним зсувом перенасемо центр кривої в початок координат. Після цього зникнуть члени першого порядку:

$$\lambda_1 (x''_1)^2 + \lambda_2 (x''_2)^2 + a''_{33} = 0.$$

Скористаємось інваріантністю визначника матриці всіх коефіцієнтів, тобто, Δ .
Маємо:

$$\Delta = \Delta'' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 a''_{33} = \delta a''_{33}.$$

Звідси знаходимо вільний член канонічного рівняння: $a''_{33} = \frac{\Delta}{\delta}$.

Після цього канонічне рівняння лінії другого порядку буде мати вигляд:

$$\lambda_1 (x''_1)^2 + \lambda_2 (x''_2)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda_1 (x''_1)^2 + \lambda_2 (x''_2)^2 = -\frac{\Delta}{\delta}.$	(17.19)
---	-----------

Після цього запишемо канонічне рівняння, якщо $\Delta \neq 0$:

	(17.20)
--	-----------

$\frac{(x_1'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right)} + \frac{(x_2'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right)} = 1.$	
--	--

Треба відзначити, що можуть бути наступні випадки.

1). $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0, \frac{\Delta}{\delta\lambda_1} < 0, \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} < 0, -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}$. Тоді це канонічне рівняння еліпса,

причому власні числа треба нумерувати так, щоб виконувалась остання нерівність. Якщо при вказаних знаках власних чисел $\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$, то рівняння не має розв'язків, і кажуть, що це випадок уявного еліпса.

2). $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0, \frac{\Delta}{\delta\lambda_1} < 0, \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$. Тоді це канонічне рівняння гіперболи.

Нумерувати власні числа треба так, щоб виконувалась остання нерівність.

3). $\Delta = 0$.

$\lambda_1 (x_1'')^2 + \lambda_2 (x_2'')^2 = 0.$	(17.21)
--	---------

При $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$ маємо еліптичний тип, але крива вироджується у точку.

При $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$ це гіперболічний тип, ліва частина рівняння розкладається на два лінійних множники, яким відповідають рівняння прямих:

$\begin{cases} \sqrt{\lambda_1} x_1'' + \sqrt{-\lambda_2} x_2'' = 0, \\ \sqrt{\lambda_1} x_1'' - \sqrt{-\lambda_2} x_2'' = 0. \end{cases}$	(17.22)
--	---------

(Вважалось, що $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.)

Розглянемо параболічний випадок: $\delta = 0$.

Здійснимо поворот таким чином, щоб вісь параболи була б колінеарна власному вектору матриці квадратичної форми, що відповідає ненульовому власному числу $\lambda_2 \neq 0$. В результаті одержимо рівняння:

$\lambda_2 (x'_2)^2 + 2a'_{13}x'_1 + 2a'_{23}x'_2 + a'_{33} = 0.$	(17.23)
---	-----------

Обчислимо третій інваріант:

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a''_{33} \end{vmatrix} = -(a'_{13})^2 \lambda_2.$$

а). Нехай лінія не вироджена, що відповідає умові $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a'_{13} \neq 0$.

Лінія не центральна, тому система для визначення центра в даному випадку несумісна:

$$\begin{cases} a'_{13} = 0, \\ \lambda_2 x'_2 + a'_{23} = 0. \end{cases}$$

В нашому випадку $a'_{13} \neq 0$.

Перенесемо початок координат у вершину лінії, яку визначимо умовами, що є наслідками (17.11):

$\begin{cases} a''_{33} = \lambda_2 (x'_{02})^2 + 2a'_{13}x'_{01} + 2a'_{23}x'_{02} + a'_{33} = 0, \\ a'_{23} = \lambda_2 x'_{02} + a'_{23} = 0. \end{cases}$	(17.24)
---	-----------

З (17.11) також випливає, що $a''_{13} = a'_{13}$.

Таким чином ми позбавимось вільного члена, і в нових координатах одержимо рівняння

$$\lambda_2 (x'_2)^2 + 2a''_{13}x'_1 = 0.$$

a''_{13} знайдемо, використовуючи третій інваріант:

$$\Delta = \Delta'' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a''_{13})^2 \lambda_2 \Rightarrow a''_{13} = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}}.$$

В результаті одержимо канонічне рівняння:

$(x'_2)^2 \pm \frac{2}{\lambda_2} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} x'_1 = 0.$	(17.25)
---	---------

Для того, щоб напрям нової осі Ox'' співпадав з напрямом осі параболі, знак перед коренем треба вибрати таким чином, щоб виконувалась умова:

$\pm \frac{2}{\lambda_2} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} x'_1 < 0.$	(17.26)
--	---------

З другого рівняння (17.24) знайдемо:

$x'_{02} = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}.$	(17.27)
---	---------

Звідси $x''_2 = x'_2 - x'_{02} = x'_2 + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2} (\lambda_2 x'_2 + a'_{23}).$

Рівняння осі параболі в нових координатах має вигляд $x''_2 = 0$. В старих координатах воно запишеться таким чином:

$\lambda_2 x'_2 + a'_{23} = 0.$	(17.28)
---------------------------------	---------

б). Розглянемо вироджений випадок: $\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{13} = 0$.

Рівняння (17.23) запишеться у вигляді

$\lambda_2 (x'_2)^2 + 2a'_{23}x'_2 + a'_{33} = 0.$	(17.29)
--	---------

Помножимо обидві частини рівняння на λ_2 і виділимо повний квадрат:

$$(\lambda_2 x'_2 + a'_{23})^2 - ((a'_{23})^2 - \lambda_2 a'_{33}) = 0.$$

Випадок $(a'_{23})^2 - \lambda_2 a'_{33} < 0$ не відповідає дійсній кривій. Якщо $(a'_{23})^2 - \lambda_2 a'_{33} > 0$, ліва частина рівняння розкладається на два лінійних множники, і прирівнюючи кожен з них до нуля одержуємо дві паралельні прямі:

$\lambda_2 x'_2 + a'_{23} - \sqrt{(a'_{23})^2 - \lambda_2 a'_{33}} = 0,$ $\lambda_2 x'_2 + a'_{23} + \sqrt{(a'_{23})^2 - \lambda_2 a'_{33}} = 0.$	(17.30)
---	---------

Отже, розглянуто всі можливі випадки, показано, до якої невиродженої кривої або до прямих – у виродженому випадку – можна привести загальне рівняння другого порядку. Ще раз нагадаємо отримані результати.

I. $\Delta \neq 0$ - невироджена лінія другого порядку.

- 1) $\delta > 0$ - еліпс дійсний або уявний;
- 2) $\delta < 0$ - гіпербола;
- 3) $\delta = 0$ - парабола.

II. $\Delta = 0$ - лінія другого порядку вироджується у пару прямих.

- 1) $\delta > 0$ - еліптичний тип, пара комплексно-спряжених прямих;
- 2) $\delta < 0$ - гіперболічний тип – пара прямих, що перетинаються;
- 3) $\delta = 0$ - параболічний тип – пара паралельних прямих – дійсних або уявних.

Контрольні запитання

- 1). Яка ідея повороту системи координат для приведення рівнянь центральних кривих до головних осей?

- 2). Як знайти кут повороту для приведення центральних кривих до головних осей?
- 3). Як зводити до канонічного вигляду рівняння параболи?

ДОДАТОК І. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ КЛАСИЧНІ МАТРИЦІ

Приклад І.1. Перетворення координат на площині. Нехай є система координат xOy . Повернемо її на кут φ ($\varphi > 0$, коли поворот здійснюється проти годинникової стрілки, $\varphi < 0$, якщо за годинниковою стрілкою), і одержимо нову систему $x'Oy'$. Знайдемо зв'язок між координатами вектора в старій і новій системах координат. Нехай $\{e_1, e_2\}$ і $\{e'_1, e'_2\}$ - ортонормовані базиси, напрямні орти осей. З умови випливає, що кут між e'_1 і e_1 дорівнює φ , між e'_1 і e_2 дорівнює $\frac{\pi}{2} - \varphi$, між e'_2 і e_1 дорівнює $\frac{\pi}{2} + \varphi$, між e'_2 і e_2 дорівнює φ . Застосуємо відому схему визначення матриці оператора повороту $U(\varphi)$

$$\begin{cases} e'_1 = U(\varphi)e_1 = u_{11}e_1 + u_{21}e_2 \\ e'_2 = U(\varphi)e_2 = u_{12}e_1 + u_{22}e_2 \end{cases}$$

Для визначення коефіцієнтів розкладу помножимо скалярно обидві частини кожного розкладу на вектори e_1 і e_2 , враховуючи, що скалярний добуток одиничних векторів дорівнює косинусу кута між ними. В результаті одержимо:

$$\begin{cases} e'_1 = U(\varphi)e_1 = (\cos \varphi)e_1 + (\sin \varphi)e_2 \\ e'_2 = U(\varphi)e_2 = -(\sin \varphi)e_1 + (\cos \varphi)e_2 \end{cases}$$

$$[U(\varphi)]_{e,e'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (I.1)$$

Нехай r – довільний вектор площини, $r = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$. Як було доведено,

$$[r]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = [U(\varphi)]_{e,e'} [r]_{e'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

звідки одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi \\ x_2 = x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (I.2)$$

Зауважимо, що виконання двох по черзі поворотів на кути φ , а потім ψ або спочатку на ψ , а потім на φ еквівалентне повороту на кут $\varphi + \psi$. Що ж до координат вектора при цих поворотах, то вони множаться на матрицю $U(\psi)U(\varphi)$ або на $U(\varphi + \psi)$ і результати повинні бути однакові, тобто

$$U(\varphi + \psi) = U(\psi)U(\varphi) \quad (I.3)$$

Робимо висновок: такі матриці між собою комутують (читач може перевірити це безпосередньо). Знайшовши добуток, маємо

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix},$$

звідки одержуємо відомі з тригонометрії формули:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi.\end{aligned}$$

Зауважимо, що при $\varphi = 0$ повороту немає, і такому виродженому повороту відповідає одинична матриця. Якщо після повороту на кут φ виконаємо поворот на кут $-\varphi$, тобто, в протилежному напрямку, то в результаті виконається поворот на 0, а це для матриць набуває вигляду

$$U(-\varphi)U(\varphi) = I$$

Робимо висновок, що $(U(\varphi))^{-1} = U(-\varphi)$ - обернена матриця, яку одразу можна знайти, користуючись властивостями тригонометричних функцій

$$(U(\varphi))^{-1} = U(-\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

Отже, одержали транспоновану матрицю. Остаточно

$$(U(\varphi))^{-1} = U(-\varphi) = (U(\varphi))^T \quad (I.5)$$

Тепер можна нові координати виразити через старі, користуючись співвідношенням (2.3.29):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = [U(\varphi)]_{e,e'}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (I.6)$$

Зміст формул (5.27), (5.28) можна висловити мовою теорії груп. Матриці такого типу утворюють мультиплікативну абелеву групу. Ми одержали ізоморфізм між групою поворотів кола на довільні кути і групою матриць. Зауважимо, що на комплексній площині поворот на кут φ відповідає множенню на число $e^{i\varphi}$, а такі числа утворюють підгрупу в $\mathbb{C} \setminus 0$. У цьому випадку одержимо також ізоморфізм цих груп і групи $\{e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Згадавши, що довільне комплексне число $z = a + ib$ може бути подане у вигляді $a + ib = |z|e^{i\varphi} = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$, ($a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$), то тепер числу z можна зіставити матрицю

$$a + ib \sim |z| \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

а комплексно спряженому ($\bar{z} = a - ib = |z|e^{-i\varphi}$) -

$$a - ib \sim \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

Визначником матриці $A = (a_{ik})$ другого порядку називається число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (пізніше ми дамо означення визначника довільної квадратної матриці). З цього прикладу ми бачимо, що визначник побудованої матриці є квадратом модуля комплексного числа, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а визначники матриць повороту осей координат дорівнюють одиниці. Якщо взяти два вектори $x, y \in \mathbf{R}^2$, які утворюють кут α , то скалярний добуток між ними $(x, y) = \|x\|\|y\|\cos\alpha$ не зміниться після дії

на кожен вектор оператором $U(\varphi)$, тому що при повороті евклідові норми вектора та кут між ними не змінюються: $(x,y)=(U(\varphi)x,U(\varphi)y)$.

Приклад I.2. Матриці перестановок.

Так називаються матриці P з M_n , у яких у довільному рядку i у довільному стовпчику знаходиться рівно одна одиниця, а всі інші елементи – нулі. Покажемо на прикладі, як діє на вектор a матриця перестановок з M_4 :

$$Pa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, одиниця в першому рядку матриці P стоїть на другому місці (номер стовпчика - 2), і при множенні друга a_2 координата вектора перемістилась на перше місце, в другому рядку матриці одиниця на третьому місці, і третя координата a_3 вектора перемістилась на друге місце. Читач може самостійно прослідкувати за переміщеннями останніх координат вектора. З іншого боку, перша координата a_1 пересунулась на третє місце, тому що в третьому рядку на першому місці знаходиться одиниця; друга координата a_2 пересунулась на перше місце, тому що в першому рядку на другому місці знаходиться одиниця і т.ін. Узагальнюючи проведені дослідження, неважко впевнитись, що виконуються правила, що будуть сформульовані нижче.

- 1). Нехай на місці (i, j) матриці P знаходиться одиниця. Тоді при множенні її на вектор на i -е місце переставиться j -та координата a_j вектора a .
- 2). i -та координата a_i вектора a пересунеться на місце j , якщо на місці (j,i) матриці P знаходиться одиниця.

Проста перевірка показує, що добуток матриць перестановок – також матриця перестановок (елементи в кожному стовпчику матриці, яка є правим

множником, будуть переставлятися за вказаним правилом). Якщо розглядати різні степені цієї матриці, то через те, що вектор має скінченну кількість координат, значення $P^k a$ і $P^l a$ при певних різних k і l співпадуть, звідки $P^{|k-l|} a = a$, отже, P у деякому степені дорівнює одиничній матриці. Звідси випливає, що кожна матриця перестановок має обернену, тобто, вона є дільником одиниці, а тому, як було показано раніше, вона не є дільником нуля, значить, така матриця є невинродженою. Більш детальний аналіз показує, що $P^{-1} = P^T$. Для доведення треба скористатись правилом 2). Нехай в P одиниця стояла на місці (j, i) , то в P^T вона знаходиться на місці (i, j) . Отже, при множенні вектора на матрицю P i -та координата a_i пересунеться на місце j , а при множенні одержаного вектора на P^T a_j пересунеться на i -те місце, тобто, кожна i -та координата залишиться на місці при множенні на $P^T P$. Отже, $P^T P = I$.

При множенні даної матриці на матриці перестановок вказані перетворення відбуваються з векторами-стовпчиками. Радимо читачу перевірити це самостійно.

Із всього сказаного випливає, що матриці перестановок утворюють групу, одиницею якої є одинична матриця, причому, некомутативну при $n > 2$, і вона ізоморфна групі перестановок з n елементів, що розглядалась в главі 1.

Розглянемо так звану основну циркулянтну матрицю перестановки:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дослідимо степені цієї матриці:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, верхня «наддіагональ» пересувається вправо-вгору і з одиниці в лівому нижньому куті виникає нижня «піддіагональ». При піднесенні до кубу обидві квазидіагоналі зсуваються вправо-вгору. Звідси випливає. Що $C^n = I$. Будемо також вважати, що $C^0 = I$.

Приклад I.3. Циркулянтні матриці.

$$A \in M_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & . & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Кожен наступний рядок – це результат циклічного зсуву попереднього, отже, кожен рядок – деяка циклічна перестановка першого рядка. Легко бачити, що кожна квазидіагональ цієї матриці складається з однакових елементів: головна діагональ – з елементів a_1 , квазидіагональ на сусідній позиції справа від головної і елемент в лівому нижньому куті – з елементів a_2 - будемо їхні номери позначати $(2,n)$, на другій квазидіагоналі справа від головної і на другій

квазидіагоналі зліва-унизу з елементів a_3 - номери $(3,n-1)$ і т.ін. Отже, елементи матриці на вказаних квазидіагоналях можна одержати, якщо одиничну матрицю помножити на a_1 , пару квазидіагоналей $(2,n)$ основної циркулянтної матриці перестановок C помножити на a_2 , елементи квазидіагоналей $(3,n-1)$ C^2 помножити на a_3 і т.ін. В результаті одержимо формулу:

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} C^k.$$

Приклад I.4. Матриці Тьоплиця¹⁴.

$$A \in M_{n+1}.$$

Нехай є скінченна послідовність комплексних чисел

$\{a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матриці Тьоплиця (в іншій главі вони будуть називатись клітинами Жордана):

¹⁴ **Тьоплиц, Отто** (1/08/1881, Бреслау, Германія, - 15/02/1940, Ієрусалим, Палестина) – видатний математик.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що справедливо наступне зображення матриці Тьопліця:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{-k} L^k + \sum_{k=0}^n a_k R^k.$$

ДОДАТОК II. ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ПРИКЛАДИ І МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

Приклад II.1. Визначник Вандермонда¹⁵ та його застосування.

Так називається визначник вигляду:

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Покажемо, як знайти цей визначник, використовуючи рекурентні співвідношення.

Спочатку підрахуємо його при $n=2$. Маємо:

¹⁵ Вандермонд, Александр Теофил (фр. *Alexandre-Théophile Vandermonde*; 28/02/1735, Париж, – 1/01/1796, Париж) – відомий математик і музикант.

$$\Delta_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad (\text{II.2})$$

Обчислюючи тепер цей визначник при $n=3$:

$$\Delta_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

віднімемо від третього стовпчика другий, помножений на x_1 , від другого – перший, помножений на x_1 . Одержимо

$$\begin{aligned} \Delta_3(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\Delta_2(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Методом математичної індукції доведемо формулу:

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (\text{II.3})$$

Нехай формула справедлива для визначників порядку $n-1$. У визначнику порядку n віднімемо від кожного стовпчика попередній, помножений на x_1 :

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & \dots & x_3^{n-1} - x_3^{n-2} x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \Delta_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Використання припущення індукції

$$\Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_{n-1} - x_1) = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j)$$

доводить формулу.

Запишемо також такий самий результат для транспонованого визначника Вандермонда:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Дамо одне з застосувань визначника Вандермонда. Треба побудувати многочлен, який в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ набуває значення $y_1, y_2, \dots, y_n$. Усі значення аргументів вважаються попарно різними. Многочлен, що має n коефіцієнтів, має степінь $n-1$:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \equiv f(x). \quad (\text{II.4})$$

З умови випливає використання рівностей

Для доведення (II.8) розкладемо $\frac{f(x)}{F(x)}$ в суму елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Помноживши на знаменник, одержимо:

$$f(x) = A_1(x - x_2) \dots (x - x_n) + A_2(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \dots + A_n(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Підставляючи по черзі $x = x_1, x = x_2, x = x_n$, одержимо

$$\begin{aligned} f(x_1) &= A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n), \\ f(x_2) &= A_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n), \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n) &= A_n(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Співмножники при цих коефіцієнтах у правих частинах відмінні від нуля і зображуються за допомогою похідної многочлена $F(x)$. Дійсно,

$$F'(x) = (x - x_2) \dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (\text{II.9})$$

Підставляючи по черзі $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_n$, одержимо

[illegible]

З двох систем рівностей маємо

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, A_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}, \dots, A_n = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \quad (\text{II.10})$$

що й доводить (II.8).

Приклад II.2. Визначник Фур'є. Так називається визначник Вандермонда від коренів степені n з одиниці.

Спочатку знайдемо квадрат цього визначника двома методами, але другим, технічно більш простим, – після вивчення лінійних унітарних просторів (Лекція II.5).

Нехай є розв'язки рівняння $x^n - 1 = 0$. Позначимо їх

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \exp\left(\frac{2\pi k}{n} i\right), k = 1, \dots, n-1.$$

Звідси $\varepsilon_k^{n-1} = \varepsilon_k^{-1}$, і з теореми Вієта випливає, що $\prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = (-1)^{n+1}$.

Обчислимо $\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k)$. Розглянемо похідну многочлена

$$P(x) = x^n - 1 = \prod_{m=0}^{n-1} (x - \varepsilon_m) \Rightarrow$$

$$P'(x) = nx^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k),$$

$$P'(\varepsilon_l) = \sum_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_l - \varepsilon_k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{n-1} (\varepsilon_l - \varepsilon_k) = n\varepsilon_l^{n-1} = \frac{n}{\varepsilon_l} \Rightarrow$$

$$\prod_{m=0}^{n-1} P'(\varepsilon_m) = \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{n}{\varepsilon_m} = \frac{n^n}{\prod_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m} = (-1)^{n+1} n^n.$$

Отже,

$$\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = (-1)^{n+1} n^n.$$

Пов'яжемо одержаний результат з визначником Вандермонда.

Маємо:

$$\begin{aligned} \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{m=0}^{k-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_m) = \\ &= \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} (-1) (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = \prod_{m=0}^{n-1} \left((-1)^{m-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \right) = \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Отже,

$$\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k).$$

Звідси

$$\begin{aligned} &= \prod_{\substack{m=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = \prod_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \right) = \\ &= \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \right)^2. \end{aligned}$$

Використаємо відоме значення визначника Вандермонда:

$$V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{n-1} \prod_{k=m+1}^n (\varepsilon_m - \varepsilon_k).$$

З попереднього

$$\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) \right)^2 = (-1)^{n+1} n^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V^2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

Звідси

$$|V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)| = n^{\frac{n}{2}}.$$

Підрахуємо тепер сам визначник $V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Будемо використовувати

позначення $\sigma = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow \varepsilon_k = \varepsilon_1^k = \sigma^{2k}, k = 0, \dots, n-1$.

Перепишемо визначник Вандермонда більш докладно:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} (\varepsilon_m - \varepsilon_k) &= \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} (\varepsilon_1^m - \varepsilon_1^k) = \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} (\sigma^{2m} - \sigma^{2k}) = \\ &= (\sigma^2 - 1)(\sigma^4 - 1)(\sigma^6 - 1) \dots (\sigma^{2(n-2)} - 1)(\sigma^{2(n-1)} - 1) \cdot \\ &\quad \cdot (\sigma^4 - \sigma^2)(\sigma^6 - \sigma^2) \dots (\sigma^{2(n-2)} - \sigma^2)(\sigma^{2(n-1)} - \sigma^2) \cdot \\ &\quad \cdot (\sigma^6 - \sigma^4)(\sigma^8 - \sigma^4) \dots (\sigma^{2(n-2)} - \sigma^4)(\sigma^{2(n-1)} - \sigma^4) \cdot \\ &\quad \cdot \dots \cdot \\ &\quad \cdot (\sigma^{2(n-2)} - \sigma^{2(n-3)})(\sigma^{2(n-1)} - \sigma^{2(n-3)}) \cdot \\ &\quad \cdot (\sigma^{2(n-1)} - \sigma^{2(n-2)}) = \\ &= \sigma(\sigma - \sigma^{-1})\sigma^2(\sigma^2 - \sigma^{-2})\sigma^3(\sigma^3 - \sigma^{-3}) \dots \sigma^{n-2}(\sigma^{n-2} - \sigma^{-(n-2)})\sigma^{n-1}(\sigma^{n-1} - \sigma^{-(n-1)}) \cdot \\ &\quad \cdot \sigma^3(\sigma - \sigma^{-1})\sigma^4(\sigma^2 - \sigma^{-2}) \dots \sigma^{n-1}(\sigma^{n-3} - \sigma^{-(n-3)})\sigma^n(\sigma^{n-2} - \sigma^{-(n-2)}) \cdot \\ &\quad \cdot \sigma^5(\sigma - \sigma^{-1})\sigma^6(\sigma^2 - \sigma^{-2}) \dots \sigma^{n-2}(\sigma^{n-2} - \sigma^{-(n-2)})\sigma^{n+1}(\sigma^{n-3} - \sigma^{-(n-3)}) \cdot \\ &\quad \cdot \dots \cdot \\ &\quad \cdot \sigma^{2n-5}(\sigma - \sigma^{-1})\sigma^{2n-4}(\sigma^2 - \sigma^{-2}) \cdot \\ &\quad \cdot \sigma^{2n-3}(\sigma - \sigma^{-1}). \end{aligned}$$

Помітимо, що

$$\sigma^{m-k} - \sigma^{-(m-k)} = 2i \sin \frac{\pi(m-k)}{n}.$$

В скороченому вигляді попередній добуток запишеться таким чином:

$$\begin{aligned} V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= \prod_{0 \leq k < m \leq n-1}^{n-1} (\sigma^{2m} - \sigma^{2k}) = \prod_{0 \leq k < m \leq n-1}^{n-1} \sigma^{m+k} (\sigma^{m-k} - \sigma^{-(m-k)}) = \\ &= \prod_{0 \leq k < m \leq n-1}^{n-1} \sigma^{m+k} \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2i \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right) = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} \sigma^{m+k} \right) \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2i \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right) = \end{aligned}$$

Оскільки при множенні степенів σ показники додаються, розглянемо уважніше наступну суму :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} (m+k) &= \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m + \sum_{k=0}^{m-1} k \right) = \sum_{m=1}^{n-1} \left(m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right) = \frac{3}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m = \\ &= \frac{3}{2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Використавши це значення, одержимо:

$$\begin{aligned} V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= i^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} \sigma^{m+k} \right) \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2i \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right) = \\ &= i^{\frac{n(n-1)}{2}} \sigma^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2i \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right). \end{aligned}$$

Помітимо, що

$$\sigma^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \sigma^{\frac{n}{2}} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}. \text{ Звідси}$$

$$\sigma^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \left(\sigma^{\frac{n}{2}} \right)^{(n-1)^2} = \left(\cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} + i \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} \right)^{(n-1)^2} = i^{(n-1)^2}.$$

В результаті

$$V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = i^{\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)^2} \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right) = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right).$$

Зауважимо, що для більш «приємного» виразу у показнику степені числа i , можна до нього додати довільне число, що ділиться на 4, наприклад, $-2n(n-1)$.

$$\text{Тоді } \frac{(n-1)(3n-2)}{2} - 2n(n-1) = -\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Оскільки при $0 \leq k < m \leq n-1 \Rightarrow \frac{\pi(m-k)}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin \frac{\pi(m-k)}{n} > 0$. Звідси

випливає:

$$|V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)| = \prod_{0 \leq k < m \leq n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(m-k)}{n} \right) = n^{\frac{n}{2}}.$$

Остаточно:

$$V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = i^{-\frac{(n-1)(n+2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}.$$

Приклад II.3. Визначник, що зводиться до визначника Вандермонда.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Використаємо дещо штучний прийом. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ - корені многочлена степені n : $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$. Згідно з формулою Вієта $a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Звідси $x^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} - \dots - a_{n-1} x - a_n$. Підставляючи в цю рівність $x = x_k, k = 1, \dots, n$, будемо мати: $x_k^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_k^{n-1} - a_2 x_k^{n-2} - \dots - a_{n-1} x_k - a_n$. Після заміни елементів останнього стовпчика такими виразами, будемо мати:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & (x_1 + \dots + x_n) x_1^{n-1} - a_2 x_1^{n-2} - \dots - a_{n-1} x_1 - a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & (x_1 + \dots + x_n) x_2^{n-1} - a_2 x_2^{n-2} - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & (x_1 + \dots + x_n) x_n^{n-1} - a_2 x_n^{n-2} - \dots - a_{n-1} x_n - a_n \end{vmatrix} = \\
 &= (x_1 + \dots + x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_2 x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_2 x_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_2 x_n^{n-2} \end{vmatrix} + \\
 &+ \dots + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_{n-1} x_1 - a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_{n-1} x_2 - a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_{n-1} x_n - a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_n \end{vmatrix} = \\
 &= (x_1 + \dots + x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 + \dots + x_n) \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j).
 \end{aligned}$$

В попередньому виразі всі визначники крім першого дорівнюють нулю, оскільки вони мають пропорційні стовпчики. Визначник, що залишився, – це

визначник Вандермонда, значення якого було знайдено в попередньому прикладі.

Приклад II.4. Ще один визначник, що зводиться до визначника Вандермонда.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \dots & 1+x_{n-1} & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_{n-1}^2 & 1+x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1+x_1^{n-2} & 1+x_2^{n-2} & \dots & 1+x_{n-1}^{n-2} & 1+x_n^{n-2} \\ 1+x_1^{n-1} & 1+x_2^{n-1} & \dots & 1+x_{n-1}^{n-1} & 1+x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Використаємо штучний прийом розширення визначника до визначника порядку $n+1$, який у даному випадку має те ж саме значення:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \dots & 1+x_{n-1} & 1+x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_{n-1}^2 & 1+x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1+x_1^{n-2} & 1+x_2^{n-2} & \dots & 1+x_{n-1}^{n-2} & 1+x_n^{n-2} \\ 0 & 1+x_1^{n-1} & 1+x_2^{n-1} & \dots & 1+x_{n-1}^{n-1} & 1+x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Відніmemo перший рядок від усіх інших:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -1 & x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ -1 & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Запишемо одиницю, що знаходиться на місці (1,1), у вигляді 2-1 і скористаємось властивістю визначника, вважаючи, що перший рядок є сума таких рядків: $(2;1;\dots;1) + (-1;0;\dots;0)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -1 & x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ -1 & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -1 & x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ -1 & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ 1 & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - V(1, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= x_1 x_2 \dots x_n V(x_1, x_2, \dots, x_n) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_n - 1) V(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_n - 1)) V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Приклад II.5. Виділення лінійних множників у визначнику, який розкладається як многочлен від кількох змінних.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, якщо розкрити цей визначник, одержимо однорідний многочлен четвертої степені від трьох змінних, але для його знаходження не будемо

використовувати прямі методи. Досить знайти всі лінійні дільники цього многочлена. Тоді він буде с точністю до константи буде дорівнювати їхньому добутку. Потім знайдемо цю константу, прирівнюючи коефіцієнти при старшій степені однієї з змінних або підставляючи замість його змінних певні числа, вибираючи їх таким чином, щоб визначник легко обчислювався.

Додамо до першого рядка другий, третій та четвертий рядки. Визначник від цього не зміниться:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, один лінійний множник знайдено: $x + y + z$.

Тепер до першого стовпчика додамо другий і віднімемо третій та четвертий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y-z & x & y & z \\ x-y-z & 0 & z & y \\ -x+y+z & z & 0 & x \\ -x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (y+z-x) \begin{vmatrix} -1 & x & y & z \\ -1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі за допомогою аналогічних дій знаходимо дільники $z + x - y$ та $x + y - z$.

Радимо читачу зробити це самостійно. Добуток знайдених дільників – многочлен четвертої степені відносно трьох змінних. Отже,

$$\Delta = a(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$$

Старший його член, що містить четверту степінь змінної x , має вигляд $-ax^4$.

Виходячи з означення визначника, формули (7.4), помічаємо, що підстановка індексів елементів нашого визначника, що дорівнюють x , має вигляд

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. З неї можна утворити тотожню підстановку, зробивши дві транспозиції сусідніх елементів: першого і другого та третього і четвертого, отже її парність дорівнює нулю, і коефіцієнт перед x^4 буде дорівнювати одиниці, з чого випливає, що $a = -1$. Отже, $\Delta = -(x + y + z)(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$.

Цікаво відзначити, що при виконанні умов $y + z > x > 0, z + x > y > 0, x + y > z > 0$ величини x, y, z є сторонами деякого трикутника, і з формули Герона випливає, що квадрат його площі можна виразити через знайдений визначник:

$$S^2 = \frac{x+y+z}{2} \frac{y+z-x}{2} \frac{z+x-y}{2} \frac{x+y-z}{2} = -\frac{\Delta}{16}.$$

Приклад II.6. Розглянемо ще один приклад, де застосовується методика прикладу 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Якщо підставляти по черзі $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$, одержимо кожного разу визначник з двома однаковими рядками, і він дорівнює нулю. Отже, наш визначник, який є многочленом від x степені n , може бути розкладений на множники: $\Delta = k(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. Порівнюючи коефіцієнти при x^n в розкладі визначника і після множення виразів у дужках в останньому многочлені, робимо висновок: $k = a_0$.

Відповідь: $\Delta = a_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

Приклад II.7. Визначник кососиметричної матриці.

Так називається матриця, у якої $a_{ji} = -a_{ij}$. Звідси випливає, що $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii=0} \Rightarrow a_{ii} = 0$, тобто, її діагональні елементи дорівнюють нулю.

Нехай матриця A має непарний порядок $2n-1$. Знайдемо її визначник:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \dots & \omega \\ -\alpha & 0 & \gamma & \dots & . \\ -\beta & -\gamma & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ -\omega & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник за відомою властивістю дорівнює визначнику транспонованої матриці:

$$\Delta(A) = \Delta(A^T) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & \dots & -\omega \\ \alpha & 0 & -\gamma & \dots & . \\ \beta & \gamma & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \omega & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2n-1} \Delta(A) = -\Delta(A),$$

Звідки випливає: $\Delta(A) = 0$.

Приклад II.8.

Зображення визначника у вигляді суми визначників за формулою (7.7).

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник за цією формулою по першому рядку, потім по другому, будемо мати:

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \dots
\end{aligned}$$

Застосовуючи ту ж формулу і далі, прийдемо до суми 2^n визначників, рядки яких будуть мати вигляд $(a_k \ a_k \ \dots \ a_k), k=1, \dots, n$ або $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$.

Очевидно, при $n \geq 3$ кожен з таких визначників буде мати не менше двох рядків першого або другого типів, причому, перші пропорційні, а другі рівні, отже, всі ці визначники дорівнюватимуть нулю. Слід окремо розглянути визначник 2-го порядку:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$=(b_2 - b_1) \left(\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1).$$

Приклад II.9. Метод зміни всіх елементів визначника.

Розглянемо ситуацію, коли додавання до всіх елементів визначника певного числа значно полегшує подальші обчислення.

Нехай треба обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

Як і в минулому прикладі будемо застосовувати формулу (7.7). В результаті прийдемо до 2^n визначників, елементи яких не будуть мати вигляд сум типу $a_{ij} + x$. Всі визначники, що містять не менше, як два рядки вигляду $(x \ x \ \dots \ x)$, дорівнюють нулю. Залишаться визначники, в яких є тільки один рядок такого вигляду, причому, в якомусь визначнику він буде перший, в іншому – другий і, нарешті, n -ий. Розкладемо кожен такий визначник за таким рядком, виносячи x за дужки. При розкладі будемо мати суму алгебраїчних

доповнень до елементів першого рядка, потім другого і, нарешті, n -го. Позначаючи ці алгебраїчні доповнення через A_{ij} , одержимо:

$$\tilde{\Delta} = \Delta + x \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

Цю формулу варто застосовувати, якщо зручно обчислюються алгебраїчні доповнення.

Проілюструємо можливість використання одержаної формули на прикладі.

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Якщо до кожного його елемента додати $-x$, будемо мати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x).$$

З одержаної формули $\tilde{\Delta} = (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$. Підкреслимо: A_{ij} -

алгебраїчні доповнення більш простого за формою визначника Δ . Алгебраїчні доповнення його кожного недіагонального елемента дорівнюють нулю

(перевірте!). Алгебраїчні ж доповнення кожного його діагонального елемента дорівнюють добутку всіх інших елементів головної діагоналі. Отже,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i=1}^n (a_1 - x) \dots (a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x) \dots (a_n - x) = \\ &= (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i=1}^n (a_1 - x) \dots (a_i - x) \dots (a_n - x) \frac{1}{a_i - x} = \\ &= x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right).\end{aligned}$$

Приклад II.10. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \alpha & \dots & \alpha \\ \beta & \beta & \lambda_3 & \dots & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Подамо елементи останнього рядка визначника у вигляді сум:

$$\beta = 0 + \beta, \dots, \beta = 0 + \beta, \lambda_n = (\lambda_n - \beta) + \beta$$

Тоді за властивістю визначника маємо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \dots & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \beta & \beta & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \dots & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \beta & \beta & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \dots & \beta & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_n - \beta) \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \dots & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \beta & \beta & \dots & \lambda_{n-2} & \alpha \\ \beta & \beta & \dots & \beta & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \dots & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \beta & \beta & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \dots & \beta & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_n - \beta) \Delta_{n-1} + \beta \begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2 & \dots & \alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \beta & \beta & \dots & \lambda_{n-1} & \alpha \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер у останньому визначнику відніmemo останній рядок, помножений на α , від інших рядків:

$$\Delta_n = (\lambda_n - \beta) \Delta_{n-1} + \beta \begin{vmatrix} \lambda_1 - \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \lambda_2 - \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \beta - \alpha & \beta\alpha & \dots & \lambda_{n-1} - \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta_n = (\lambda_n - \beta) \Delta_{n-1} + \beta(\lambda_1 - \alpha) \dots (\lambda_{n-1} - \alpha).$$

Якщо описану процедуру застосувати до транспонованої матриці, одержимо визначник, якій дорівнює даному і також не зміниться значення Δ_{n-1} , але для нього буде справедлива формула:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha(\lambda_1 - \beta) \dots (\lambda_{n-1} - \beta)}{\lambda_n - \alpha} - \frac{\Delta_n}{\lambda_n - \alpha} = \\ & = \frac{\beta(\lambda_1 - \alpha) \dots (\lambda_{n-1} - \alpha)}{\lambda_n - \beta} - \frac{\Delta_n}{\lambda_n - \beta}. \end{aligned}$$

Виключаючи з цих рівностей Δ_{n-1} , одержимо:

$$\Delta_n \left(\frac{1}{\lambda_n - \beta} - \frac{1}{\lambda_n - \alpha} \right) = \frac{\beta(\lambda_1 - \alpha) \dots (\lambda_{n-1} - \alpha)}{\lambda_n - \beta} - \frac{\alpha(\lambda_1 - \beta) \dots (\lambda_{n-1} - \beta)}{\lambda_n - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Delta_n = \frac{\beta(\lambda_1 - \alpha) \dots (\lambda_{n-1} - \alpha)(\lambda_n - \alpha) - \alpha(\lambda_1 - \beta) \dots (\lambda_{n-1} - \beta)(\lambda_n - \beta)}{\beta - \alpha}, \alpha \neq \beta.$$

Приклад II.11. Трьохдіагональні матриці.

$A \in M_n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Знайдемо рекурентну формулу для визначників трьохдіагональної матриці.

Такий визначник зручно позначити $\det(A(1, \dots, k+1))$.

$$\det(A(1, \dots, k+1)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & 0 \\ 0 & \dots & \cdot & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} & a_{k,k+1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+1,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{k-2,k-3} & a_{k-2,k-2} & a_{k-2,k-1} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{k,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{k-2,k-3} & a_{k-2,k-2} & a_{k-2,k-1} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_{k+1,k} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+1,k+1} \det(A(1, \dots, k)) - a_{k+1,k} a_{k,k+1} \det(A(1, \dots, k-1)).$$

Приклад II.12. Обчислимо визначник трьохдіагональної матриці вигляду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & -\alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \alpha + \beta & -\alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

$$\text{Помітимо, що } \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

За допомогою методу математичної індукції доведемо, що

$$\Delta_n = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

Для $n = 2$ формула вірна.

Розкриваючи визначник по першому стовпчику, маємо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & -\alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \alpha + \beta & -\alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta)\Delta_n +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \alpha + \beta & -\alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2} =$$

$$= (\alpha + \beta) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n\beta - \alpha\beta^n - \alpha^n\beta + \alpha\beta^n}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Наслідок. Нехай $\beta = -\alpha \neq 0$. Тоді

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha^2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \alpha^2 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{n-1}}{-2\alpha} = \frac{1 + (-1)^n}{-2} \alpha^{n-2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2} \alpha^{n-2} = \begin{cases} 0, n = 2k + 1, \\ -\alpha^{n-2}, n = 2k. \end{cases}$$

Задача для самостійного роз'язання. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

Приклад II.13. Обчислимо визначник трьохдіагональної матриці вигляду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & & & & \\ c & a & b & 0 & \dots & & & & \\ 0 & c & a & b & \dots & & 0 & & \\ 0 & 0 & c & a & \dots & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \dots & a & b & 0 & 0 \\ & & 0 & & \dots & c & a & b & 0 \\ & & & & \dots & 0 & c & a & b \\ & & & & \dots & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

Будемо вважати, що $\Delta_0 = 1$. Очевидно, $\Delta_1 = a, \Delta_2 = a^2 - bc, \dots$

Розкриваємо визначник за першим рядком:

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix} = \\
&= a\Delta_{n-1} - bc \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Отже, одержали лінійне рекурентне співвідношення:

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n - a\Delta_{n-1} + bc\Delta_{n-2} = 0.$$

Використовується евристичне припущення, що послідовність, яка йому задовольняє, є лінійною комбінацією членів геометричних прогресій $\lambda_j^n, j=1,2, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. (строге пояснення можна одержати, познайомившись в майбутньому з жордановою нормальною формою матриці). Підставивши λ_j^n у рекурентне співвідношення, одержимо:

$$\lambda_j^n - a\lambda_j^{n-1} + bc\lambda_j^{n-2} = 0 \Rightarrow \lambda_j^{n-2}(\lambda_j^2 - a\lambda_j + bc) = 0.$$

Отже λ_j можна одержати, розв'язавши так зване характеристичне рівняння:

$$\lambda^n - a\lambda^{n-1} + bc\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a\lambda + bc = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}.$$

За формулами Вієта $\lambda_1 + \lambda_2 = a, \lambda_1\lambda_2 = bc$. Також з рівняння $\lambda^2 - a\lambda = -bc \Rightarrow a\lambda^2 - a^2\lambda = -abc$ - все це нам стане у пригоді.

Розглянемо поки що випадок різних коренів квадратного рівняння, що забезпечується умовою

$$a^2 - 4bc \neq 0.$$

Отже, $\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$. Підставляючи по черзі $n=1, n=2$ і прирівнюючи лінійні комбінації відомим значенням визначників, одержимо:

$$\begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = a^2 - bc. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю лінійну систему відносно невідомих коефіцієнтів:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda_2 \\ a^2 - bc & \lambda_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda_2 \\ a^2 - bc & \lambda_2^2 \end{vmatrix}}{\lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{a\lambda_2^2 - a^2\lambda_2 + bc\lambda_2}{bc(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{bc(\lambda_2 - a)}{bc\sqrt{a^2 - 4bc}} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{a^2 - 4bc}},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & a \\ \lambda_1^2 & a^2 - bc \end{vmatrix}}{bc(\lambda_2 - \lambda_1)} = -\frac{a\lambda_1^2 - a^2\lambda_1 + bc\lambda_1}{2bc\sqrt{a^2 - 4bc}} = -\frac{bc(\lambda_1 - a)}{2bc\sqrt{a^2 - 4bc}} = \frac{a - \lambda_1}{2\sqrt{a^2 - 4bc}} = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{a^2 - 4bc}}.$$

В результаті приходимо до відповіді у випадку різних коренів характеристичного рівняння ($a^2 - 4bc \neq 0$):

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left(\frac{\sqrt{a^2 - 4bc} - a}{2} \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^n + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left(\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Розглянемо тепер випадок існування кратних коренів характеристичного рівняння, що має місце при виконанні умови $a^2 - 4bc = 0 \Rightarrow bc = \frac{a^2}{4}$.

Нехай λ_1 = корінь характеристичного рівняння. В цьому випадку $\lambda_1 = \frac{a}{2}$.

Зауважимо, що $\Delta_1 = a, \Delta_2 = a^2 - bc = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$.

Будемо шукати Δ_n у наступному вигляді:

$$\Delta_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n.$$

Як відзначалось, $\lambda_1 = \frac{a}{2}$ задовольняє характеристичне рівняння. Доведемо, що послідовність $q_n = n \lambda_1^n$ задовольняє рекурентне співвідношення. Підставимо цей вираз у рекурентне співвідношення:

$$\begin{aligned} n \lambda_1^n - a(n-1) \lambda_1^{n-1} + bc(n-2) \lambda_1^{n-2} &= \lambda_1^{n-2} \left(n \lambda_1^2 - a n \lambda_1 + a \lambda_1 - b c n - \frac{a^2}{2} \right) = \\ &= \lambda_1^{n-2} \left(n(\lambda_1^2 - a \lambda_1 + bc) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи в рівність $\Delta_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n$ по черзі $n=1; 2$, отримаємо лінійну систему рівнянь відносно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_1 = a, \\ C_1 \lambda_1^2 + 2C_2 \lambda_1^2 = \frac{3}{4}a^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (C_1 + C_2) \frac{a}{2} = a, \\ (C_1 + 2C_2) \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2. \end{cases}$$

Якщо $a = 0$, то або $b = 0$, або $c = 0$. В цьому випадку $\Delta_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Якщо $a \neq 0$, приходимо до системи

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 2C_2 = 3. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = C_2 = 1$ і $\Delta_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

Запишемо більш докладно визначник - го порядку більш докладно:

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{bc} & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 2\sqrt{bc} & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 2\sqrt{bc} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\sqrt{bc} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 2\sqrt{bc} & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 2\sqrt{bc} \end{vmatrix} = (n+1)(\sqrt{bc})^n.$$

Приклад II.14. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-3} & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & 0 & & & & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник $\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Такі визначники будуть вивчатись у главі 5. $\det(\lambda I - A)$ називається характеристичним многочленом матриці A .

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{n-1} & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_1 & 0 & & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & & & \lambda & -1 & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ a_{n-2} & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ a_{n-3} & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & 0 & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n - a_{n-1} \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & & & \dots & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda \end{pmatrix} + a_{n-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & & & \dots & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda \end{pmatrix} -$$

$$-a_{n-3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ & & & \dots & -1 \\ 0 & & & & \lambda \end{vmatrix} - \dots - (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - a_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots - a_1 \lambda - a_0.$$

В главі 5 ми побачимо, що визначник

$$\chi(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - a_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots - a_1 \lambda - a_0$$

є так званим характеристичним многочленом матриці

Приклад II.15. Нехай $a_{11} \neq 0$. Зіставимо визначнику

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник Δ_{n-1} порядку $n-1$ з елементами

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad (\text{II.11})$$

$i, j = 2, \dots, n$, тобто,

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{in} \end{vmatrix} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{n1} & a_{nj} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Справедлива формула:

$\Delta_n = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \Delta_{n-1}$	(II.13)
--	------------------

Доведення. Будемо перетворювати визначник Δ_n за методом Гауса, віднімаючи від кожного i – го рядка ($i = 2, \dots, n$) перший, помножений на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. В результаті кожен j -й елемент ($j = 2, \dots, n$) i –го рядка буде мати вигляд:

$$a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Таких елементів в i –му рядку буде $n-1$, отже, за визначник можна винести $\frac{1}{(a_{11})^{n-1}}$. В першому стовпчику будуть знаходитись всі нулі крім першого елемента a_{11} . Розкриваючи визначник за першим стовпчиком, отримаємо

$$\frac{a_{11}}{(a_{11})^{n-1}} \Delta_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \Delta_{n-1}^{(1)}, \text{ що й треба було довести.}$$

Визначники Якобі (якобіани)

В рамках цього курсу немає можливості пояснювати, яким чином у математиці виникають наступні визначники. Зазначимо тільки, що вони використовуються у математичному аналізі.

1). Якобіан у циліндричних координатах:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

2). Якобіан у сферичних координатах:

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2 \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \rho^2 \left(\cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \right) = \rho^2 \sin \theta .
\end{aligned}$$

3). Якобіан у узагальнених сферичних координатах.

$$x = a\rho \sin^\beta \theta \cos^\alpha \varphi, y = b\rho \sin^\beta \theta \sin^\alpha \varphi, z = c\rho \cos^\beta \theta ;$$

.

$$\begin{aligned}
\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} &= abc \begin{vmatrix} \sin^\beta \theta \cos^\alpha \varphi & \beta \rho \sin^{\beta-1} \theta \cos \theta \cos^\alpha \varphi & -\alpha \rho \sin^\beta \theta \cos^{\alpha-1} \varphi \sin \varphi \\ \sin^\beta \theta \sin^\alpha \varphi & \rho \beta \sin^{\beta-1} \theta \cos \theta \sin^\alpha \varphi & \alpha \rho \sin^\beta \theta \sin^{\alpha-1} \varphi \cos \varphi \\ \cos^\beta \theta & -\rho \beta \cos^{\beta-1} \theta \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \alpha \beta abc \rho^2 \sin^{2\beta-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \alpha \beta abc \rho^2 \sin^{2\beta-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi (\cos \theta (\cos \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi) + \\
&+ \sin \theta (\sin \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \sin^2 \varphi)) = \alpha \beta abc \rho^2 \sin^{2\beta-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi .
\end{aligned}$$

Остаточно:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \alpha \beta abc \rho^2 \sin^{2\beta-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi .$$

ДОДАТОК III. ТЕОРЕМИ БІНЕ-КОШІ І ЛАПЛАСА

Зовнішній добуток k -лінійних комбінацій m -вимірних векторів

Нехай

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}g_1 + a_{12}g_2 + \dots + a_{1m}g_m \\
f_2 &= a_{21}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{2m}g_m \\
&\dots\dots\dots \\
f_k &= a_{k1}g_1 + a_{k2}g_2 + \dots + a_{km}g_m
\end{aligned}
\tag{III.1}$$

Позначимо: $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\} \subset M$, де $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$,
 $G_\gamma = g_{\gamma_1} \wedge g_{\gamma_2} \wedge \dots \wedge g_{\gamma_k}$. Введемо також позначення для мінора матриці A
коєфіцієнтів попередньої системи рівностей, що утворена стовпчиками з
номерами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$:

$$A_\Gamma = \begin{vmatrix} a_{1\gamma_1} & \dots & a_{1\gamma_k} \\ . & . & . \\ a_{k\gamma_1} & \dots & a_{k\gamma_k} \end{vmatrix}
\tag{III.2}$$

Лема III.1.

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k = \sum_{\Gamma} A_\Gamma G_\Gamma,
\tag{III.3}$$

де Γ пробігають всі k -елементні підмножини множини $M = \{1, 2, \dots, m\}$.

Доведення.

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in M} a_{1\alpha_1} a_{1\alpha_2} \dots a_{1\alpha_k} g_{\alpha_1} \wedge g_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge g_{\alpha_k},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ попарно нерівні між собою. В такому випадку будемо писати:

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k = \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j} a_{1\alpha_1} a_{1\alpha_2} \dots a_{1\alpha_k} g_{\alpha_1} \wedge g_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge g_{\alpha_k}$$

Цілком зрозуміло, що такі системи індексів утворюють всі можливі k -
елементні підмножини M , причому, кожен такий набір зустрінеться $k!$ разів.

Нехай $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\} \subset M$ - правильний набір, тобто, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$. Введемо
позначення для підстановки номерів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$:

$\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$, $\varepsilon(\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}) \in \{1, -1\}$ - її парність. Тоді

$g_{\alpha_1} \wedge g_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge g_{\alpha_k} = \varepsilon(\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}) g_{\gamma_1} \wedge g_{\gamma_2} \wedge \dots \wedge g_{\gamma_k}$. Отже,

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k &= \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j} a_{1\alpha_1} a_{1\alpha_2} \dots a_{1\alpha_k} g_{\alpha_1} \wedge g_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge g_{\alpha_k} = \\ &= \sum_{\Gamma} \left(\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \varepsilon(\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}) a_{1\alpha_1} \dots a_{1\alpha_k} \right) g_{\gamma_1} \wedge g_{\gamma_2} \wedge \dots \wedge g_{\gamma_k}, \text{ оскільки} \\ \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \varepsilon(\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}) a_{1\alpha_1} \dots a_{1\alpha_k} &= \begin{vmatrix} a_{1\gamma_1} & \dots & a_{1\gamma_k} \\ . & . & . \\ a_{k\gamma_1} & \dots & a_{k\gamma_k} \end{vmatrix} = A_{\Gamma} \end{aligned}$$

З формули (III.3) можна одержати кілька важливих наслідків.

Теорема Біне¹⁷ - Коші¹⁸.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ . & . & . \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ . & . & . \\ b_{k1} & \dots & b_{km} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ . & . & . \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

де $A=BC$, причому $k < m$. Нехай $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\} \subset M = \{1, 2, \dots, m\}$, де

$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$. Позначимо

$$B_{\Gamma} = \begin{vmatrix} b_{1\gamma_1} & \dots & b_{1\gamma_k} \\ . & . & . \\ b_{k\gamma_1} & \dots & b_{k\gamma_k} \end{vmatrix}, C^{\Gamma} = \begin{vmatrix} c_{\gamma_1 1} & \dots & c_{\gamma_1 k} \\ . & . & . \\ c_{\gamma_k 1} & \dots & c_{\gamma_k k} \end{vmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

¹⁷ **Біне, Жак Філіпп Марі** (*Jacques Philippe Marie Binet*; 2/02/1786, Ренн – 12/05/1786, Париж) - видатний математик, механік і астроном.

¹⁸ **Коші, Огюстен Луї** (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 21/08/1789, Париж — 23/05/1857) - великий математик, член Паризької академії наук (1816), Петербурзької академії наук (1831).

Тоді

$$\det A = \sum_{\Gamma \in M} B_{\Gamma} C^{\Gamma} \quad (\text{III.6})$$

Доведення. Нехай вектори $e_1, e_2, \dots, e_k$ лінійно незалежні. Розглянемо вектори

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}g_1 + b_{12}g_2 + \dots + b_{1m}g_m, & g_1 &= c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1k}e_k, \\ f_2 &= b_{21}g_1 + b_{22}g_2 + \dots + b_{2m}g_m, & g_2 &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2k}e_k, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ f_k &= b_{k1}g_1 + b_{k2}g_2 + \dots + b_{km}g_m, & g_m &= c_{m1}e_1 + c_{m2}e_2 + \dots + c_{mk}e_k. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Тоді

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1k}e_k, \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2k}e_k, \\ &\dots\dots\dots \\ f_k &= a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kk}e_k. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Тоді $f_1 \wedge f_2 \dots \wedge f_k = (\det A) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k$, а також $f_1 \wedge f_2 \dots \wedge f_k =$
 $= \sum_{\Gamma} B_{\Gamma} g_{\gamma_1} \wedge g_{\gamma_2} \wedge \dots \wedge g_{\gamma_k}.$

З (III.7) випливає, що

$$\begin{aligned} g_{\gamma_1} &= c_{\gamma_1 1}e_1 + c_{\gamma_1 2}e_2 + \dots + c_{\gamma_1 k}e_k, \\ g_{\gamma_2} &= c_{\gamma_2 1}e_1 + c_{\gamma_2 2}e_2 + \dots + c_{\gamma_2 k}e_k, \\ &\dots\dots\dots \\ g_{\gamma_k} &= c_{\gamma_k 1}e_1 + c_{\gamma_k 2}e_2 + \dots + c_{\gamma_k k}e_k. \end{aligned}$$

звідки $g_{\gamma_1} \wedge g_{\gamma_2} \wedge \dots \wedge g_{\gamma_k} = C^{\Gamma} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k$ і в результаті $f_1 \wedge f_2 \dots \wedge f_k =$

$$(\det A)e_1 \wedge \dots \wedge e_n = f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \sum_{\Gamma} A_{1\Gamma} A_{2\Gamma} e_{\Gamma} \wedge e_{\Gamma'} = \sum_{\Gamma} \varepsilon(\Gamma, \Gamma') A_{1\Gamma} A_{2\Gamma} e_{\Gamma} \wedge e_{\Gamma'}.$$

Обчислимо парність $\varepsilon(\Gamma, \Gamma')$ підстановки $\Gamma \cup \Gamma'$. Нехай $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k$. Очевидно, всі елементи, що менші за γ_1 знаходяться в Γ' , цьому γ_1 утворює $\gamma_1 - 1$ транспозицій з цими елементами з Γ' . Аналогічно, всі елементи, що менші за γ_2 окрім γ_1 знаходяться в Γ' і утворюють $\gamma_2 - 2$ транспозицій з елементами з Γ' і т.ін. Таким чином

$$\varepsilon(\Gamma, \Gamma') = \gamma_1 + \dots + \gamma_k - (1 + 2 + \dots + k) = \gamma_1 + \dots + \gamma_k - \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{III.10})$$

Отже, формулу доведено. Можна довести аналогічну формулу у випадку, коли береться не перші, а довільні k рядків.

Зауваження. Доведена раніше іншим способом формула розкриття визначника по рядку або стовпчику є частинним випадком формули Лапласа.

Наслідок 2 . Для того, щоб вектори $f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n$, ..., $f_k = a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kn}e_n$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб хоча б один мінор матриці коефіцієнтів (a_{ij}) не дорівнював нулю.

Доведення. Дійсно, для лінійної незалежності необхідно і достатньо, щоб $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k \neq 0$, але $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k = \sum_{\Gamma} A_{\Gamma} e_{\Gamma}$ і, оскільки всі e_{Γ} лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб хоча б один з мінорів $A_{\Gamma} \neq 0$.

Наслідок 3. Нехай $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{v,r}$, $C \in M_{r,n}$, $\text{rank}(A) = r_A$, $\text{rank}(B) = r_B$, $\text{rank}(C) = r_C$, $A = BC$. Тоді $r_A \leq r_B, r_C$.

Доведення очевидне.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра та геометрія: Лінійна алгебра. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,31 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 296 с.
2. Конспект лекцій з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
4. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: навч. посіб. Для студ. Вищ. Навч. закл./М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. – 296 с.
5. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

6. ДОДАТКОВА

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. - М.: «Наука», 1979, 511 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. - М.: «Наука», 1984, 175 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц: учебник / Р. Беллман. - М.: «Наука», 1969, 367 с.

4. Блох Э. Л. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения: учебное пособие / Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский, В. Я. Турин. - М.: Высшая школа, 1971. 256 с.
5. Бубнов В.А. Линейная алгебра: компьютерный практикум / В.А. Бубнов, Г. С. Толстова, О. Е. Клемешева. - М.: ЛБЗ, 2012. 168 с.
6. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра: учебник / Б. Л. Ван дер Варден. - М.: «Наука», 1976. 648 с.
7. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э. Б. Винберг. - М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. 544 с.
8. Воеводин В.В. Линейная алгебра: учебник / В. В. Воеводин. - М.: «Наука», 1974. 336 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц: монография / Ф. Р. Гантмахер. - М.: «Наука», 1967. 575 с.
10. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / И. М. Гельфанд. - М.: «Наука», 1971. 271 с.
11. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ: учебник / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. -: «Наука», 1969. 475 с.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: учебник / Л. И. Головина. - М.: Наука, 1985. 392 с.
13. Гомонов, С.А. Математика. Линейная алгебра: Учебно-справочное пособие / С. А. Гомонов. - М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. 144 с.
14. Горлач, Б.А. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2012. 480 с.
15. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. - М.: «Наука», 1970. 528 с.
16. Икрамов Х.Д. Задачи по линейной алгебре: сборник задач / Х. Д. Икрамов. - М.: «Наука», 1975. 319 с.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М.: «Наука», 1974. 296 с.
18. Каган В.Ф. Основания теории определителей: учебник / В. Ф. Каган. - Гос. изд-во Украины, 1922. 78 с.

19. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия: учебник / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - М.: «Наука», 1986. 303 с.
20. Кочетков, Е.С. Линейная алгебра: учебное пособие / Е. С. Кочетков, А. В. Осокин. - М.: Форум, 2012. 416 с.
21. Курбатова Г.И. Курс лекций по алгебре: учебник / Г. И. Курбатова, В.Б. Филиппов. - СПб: Изд-во «Лань», 2015. 655 с.
22. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1968. 431 с.
23. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1973. 400 с.
24. Ланкастер П. Теория матриц: монография/ М. Ланкастер.- «Наука», 1978. 280 с.
25. Ленг С. Алгебра: учебник / С. Ленг. - М.: «МИР», 1968. 564 с.
26. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи: сборник задач / Г. Лефор. - М.: «Наука», 1973. 462 с.
27. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры: учебник / А. И. Мальцев. - М.: «Наука», 1970. 400 с.
28. Попов А.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / А. М. Попов. - М.: Изд-во РУДН, 2007. 183 с.
29. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра: учебник / М. М. Постников. - Москва, «Наука», 1986. 400 с.
30. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры: учебное пособие / В. В. Прасолов. - М.: МЦНМО, 2015. 576 с.
31. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. / И. В. Проскуряков. - М.: «Наука», 1978. 384 с.
32. Рудык, Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б. М. Рудык, - М.: НИЦ ИНФРА, 2013. 318 с.
33. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. - К.: «Либідь», 2003. 599 с.

- 34.Смирнов В. И. Курс высшей математики: учебник в 8 т. / В. И. Смирнов.
– М.: Физмат «Наука», 1974, Т.3, ч.1. 323 с.
- 35.Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения: учебное пособие / Г.
Стренг. - М.: Мир, 1980. 454 с.
- 36.Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебник / Д. К. Фаддеев. - М.: «Наука»,
1984. 416 с.
- 37.Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С.
Соминский. - М.: «Наука», 1977. 288 с.
- 38.Хорн Р. Матричный анализ: монография / Р. Хорн, Ч. Джонсон. - М.:
«Мир», 1989. 655 с.
- 39.Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебник /
И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. - М.: «Физматлит», 2009. 511 с.
- 40.Шевцов, Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное
пособие / Г. С. Шувцов. - М.: Магистр, НИЦ ИНФРА-М, 2013. 528 с.
- 41.Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные
пространства : учебник / Г. Е. Шилов. - М.: «Наука», 1969. 431 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Алгебра 34

- асоціативна 34
- Грасмана 71
- Лі 35

Алгебраїчне доповнення 87

База системи векторів 14

Базис лінійного простору 14

Вектор 10

- рядок 19
- стовпчик 28

Вектори

- лінійна залежність 11
- лінійна незалежність 11
- ортонормовані 129

Визначник 77

- Вандермонда 228
- добутку матриць 97
- матриці 77
- Фур'є 232

Гомоморфізм

- кілець 9
- лінійних просторів 10

Група

- адитивна 6
- мультиплікативна 7
- підстановок 35

Директриса

- до гіперболи 181
- до еліпса 177
- до параболи 186

Добуток

- зовнішній 71
- матриць 29

Дотична

- до гіперболи 183
- до еліпса 179
- до параболи 191

Ексцентриситет

- гіперболи 181
- еліпса 177
- параболи 186

Ендоморфізм кілець 9

Ізоморфізм

- кілець 9
- лінійних просторів 11

Інваріанти кривих другого порядку 213

Кільце 9

Комутатор 34

Матриця

- діагональна 35
- кососиметрична 138
- лінійного оператора 45
- невироджена 46
- обернена 33
- одинична 33
- приєднана 96
- ранг 42
- транспонована 197
- трикутна 43

Матриці

- еквівалентні 43
- подібні 60

Міnor 84

Множення

- векторне векторів 131
- вектора на число 18
- мішане векторів 133
- скалярне векторів 125

Норма вектора 20

Нормаль 144

Образ лінійного оператора 46

Оператор

- лінійний 45
- повороту на площині 52

Ортогональні вектори 128

Перестановка 65

Підстановка 65

Правило

- обчислення визначника 93
- трикутника додавання векторів 21

Поле 9

Проекція вектора на вісь 126

Ранг

- лінійного оператора 46
- матриці 76
- матриці рядковий 85
- матриці стовпчиковий 77

Рівняння бісектриси 152, 157

Рівняння

- гіперболи канонічне 180
- еліпса канонічне 176
- параболи канонічне 185
- площини загальне 163
- площини нормальне 166
- площини, що проходять через три точки 163
- площини у відрізках 165
- прямої загальне 152
- прямої канонічне 149
- прямої нормальне 153
- прямої параметричні 147

Система

- лінійних рівнянь 109
- твірних 11

Слід матриці 213

Сума векторів 21

Теорема

- Крамера 113
- Кронекера-Капеллі 111
- Лапласа 93

Тіло 9

Транспозиція елементів підстановки 68

Ядро

- лінійного оператора 45
- матриці 45