МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова,
Г. А. Кузнецова

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА У СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

Ю. В. Ситникова. *Лінійна та векторна алгебра у схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання)* / Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 109 с.

Автори : Ю. В. Ситникова,
С. М. Ламтюгова,
Г. А. Кузнецова

Рецензент:
канд. фіз.-мат. наук., доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 7 від 15.02.18

Рекомендовано для студентів 1, 2 курсів усіх спеціальностей як додатковий допоміжний матеріал для самостійного оволодіння темою «Лінійна та векторна алгебра», які вивчаються в курсі вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

У довіднику викладено теоретичний матеріал щодо векторної та лінійної алгебри, який входить до курсу вищої математики та вивчається студентами перших й других курсів економічних, будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Довідник «Лінійна та векторна алгебра» складається з двох розділів – «Лінійна алгебра» та «Векторна алгебра» та додатків.

Перед розглядом основного матеріалу представлено окремі факти з історії виникнення та подальшого розвитку такого розділу математики як алгебра.

Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять означення, формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв’язання типових задач із застосуванням зазначеного теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі теоретичні матеріали, теореми та задачі, розв’язання яких викликає труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв’язання більш складних задач.

Наприкінці створено абетковий покажчик, який допоможе швидко знайти довідникову інформацію за математичним терміном, а також відповідь на шукане питання щодо розв’язання задач.

ІЗ ІСТОРІЇ АЛГЕБРИ

Алгебра – слово арабського походження, у перекладі – «заповнення» – розділ математики, який можна охарактеризувати як узагальнення та розширення арифметики. Найбільш вживаним це слово є у назвах різних алгебраїчних систем та зустрічається у загальній алгебрі. У більш широкому розумінні алгебра є розділом математики, який присвячено вивченню операцій над елементами множини довільної природи, які узагальнюють звичайні операції додавання й множення чисел. Алгебра поєднує такі категорії: елементарна алгебра, загальна алгебра, універсальна алгебра, лінійна алгебра та алгебраїчна комбінаторика.

Одним з фундаментальних понять сучасної математики є вектор, або його узагальнення – тензор, який знайшов широке застосування в механіці, фізиці, техніці. Поява терміну «вектор» відбулась у 1845 році завдяки ірландському математику та астроному Уільяму Гамільтону під час його роботи над побудовою числових систем та узагальненням комплексних чисел. А вже в 1901 році Уіллард Гібсс видав підручник з векторного аналізу, в якому це поняття було сформульовано остаточно.

Поступово була створена загальна теорія векторного простору, яка відіграє важливу роль в сучасній фізиці. Наприклад, деякі фізичні величини, такі як, сила, швидкість, прискорення і т.п., зручно представляти напрямними відрізками та виконувати різноманітні математичні дії над ними.

У лінійній алгебрі вектором називається елемент лінійного простору, що відповідає загальному означенню, яке надано у цьому довіднику. Вектори можуть бути різної природи: напрямні відрізки, матриці, числа, функції та інші, але усі лінійні простори однієї розмірності ізоморфні між собою. Таким поняттям вектору користуються під час розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а також при роботі з лінійним операторами (приклад, оператор повороту). Часто це означення розширюють завдяки означенню норми або скалярного добутку, після чого оперують з нормованими й евклідовими просторами. Зі скалярним добутком пов'язують поняття кута між векторами, а з нормою – поняття довжини вектору. Деякі математичні об'єкти, як то матриці, тензори та інші, в тому числі ті, що мають більш загальну структуру ніж кінцеву, задовольняють аксіомам векторного простору, тобто можуть розглядатися як вектори.

1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Визначники

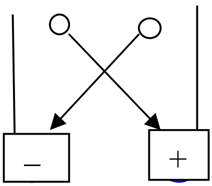
Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Визначником (детермінант-том) n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел	$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Позначають визначник ще як *det* від *determinate* – «визначати», або $\left\| a_{ij} \right\|$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$)	
Числа a_{ij} називаються *елементами визначника*, де i - номер рядка ($i = \overline{1,n}$), а j – номер стовпця ($j = \overline{1,n}$)	
Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* визначника	
Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ - го порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i-го рядка і j-го стовпця	
Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток вигляду	$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
ПРИКЛАД 1. Записати мінор M_{13} і алгебраїчне доповнення A_{13} для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 9 & 7 & -2 & 3 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 11 \end{vmatrix}$.	

Розв'язання. Щоб записати мінор M_{13}, закреслимо з початкового визначника перший рядок і третій стовпчик, отримаємо: $M_{13} = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -8 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 11 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчне доповнення A_{13} має вигляд

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -8 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 11 \end{vmatrix}$$

1.1.1 Обчислення визначників

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Визначник першого порядку містить тільки один елемент і величина такого визначника дорівнює цьому елементу	$\Delta_1 = \lvert a_{11} \rvert = a_{11}$
ПРИКЛАД 1. Визначник $\Delta_1 = \lvert -123 \rvert = -123$.	
Визначник другого порядку обчислюють за правилом: добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим же знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$ $= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$; 

ПРИКЛАД 2. Обчислити визначник другого порядку $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 7 \cdot 10 - 8 \cdot 9 = 70 - 72 = -2$.

Відповідь: $\Delta_2 = -2$.

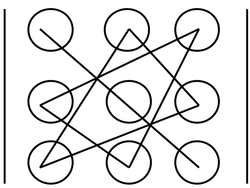
Визначник третього порядку обчислюють за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

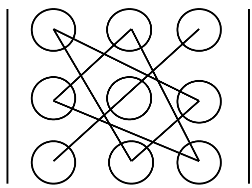
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32};$$

правило трикутників у вигляді схеми:



+



–

ПРИКЛАД 3. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 9 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0\cdot1\cdot7 + 9\cdot1\cdot(-2) + (-5)\cdot1\cdot4 - (-5)\cdot1\cdot(-2) -$$

$$-0\cdot1\cdot4 - 9\cdot1\cdot7 = 0 - 18 - 20 - 10 - 0 - 63 = -111\,.$$

Відповідь: $\Delta_3 = -111$.

Обчислення визначника за елементами рядка (стовпця)

Визначник n*-го порядку* дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення	$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj}$

ПРИКЛАД 4. Обчислити визначник четвертого порядку $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, розкладаючи його: а) за елементами 2-го рядка; б) за елементами 4-го стовпця.

Розв'язання. а) обчислимо визначник, розкладаючи його за елементами 2-го рядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + (-1)\cdot A_{22} +$$

$$+(-2)\cdot A_{23} + 5\cdot A_{24} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot M_{22} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23}+5\cdot(-1)^{2+4}M_{24}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -3 & 7\\0 & 8 & 4\\1 & 5 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & -3 & 7\\6 & 8 & 4\\7 & 5 & 0\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & 7\\6 & 0 & 4\\7 & 1 & 0\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\6 & 0 & 8\\7 & 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=-(0+0+(-12)-56-40-0)-(0+(-84)+210-392-0-0)+$$
$$+2\cdot(0+56+42-0-0-0)+5\cdot(0+112+(-18)-0-0-60)=$$
$$=108+266+196+170=740\,;$$

б) обчислимо визначник, розкладаючи його за елементами 4-го стовпця:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}0 & 2 & -3 & 7\\1 & -1 & -2 & 5\\6 & 0 & 8 & 4\\7 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=7\cdot A_{14}+5\cdot A_{24}+$$

$$+4\cdot A_{34}+0\cdot A_{44}=7\cdot(-1)^{1+4}\cdot M_{14}+5\cdot(-1)^{2+4}\cdot M_{24}+$$

$$+4\cdot(-1)^{3+4}\cdot M_{34}+0\cdot(-1)^{4+4}M_{44}=-7\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\6 & 0 & 8\\7 & 1 & 5\end{vmatrix}+$$

$$+5\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\6 & 0 & 8\\7 & 1 & 5\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\1 & -1 & -2\\7 & 1 & 5\end{vmatrix}+0=$$

$$=-7\cdot(0+(-56)+(-12)-0-8-(-30))+5\cdot(0+112+(-18)-0-$$
$$-60-0)+(-4)\cdot(0+(-28)+(-3)-21-0-10)=$$
$$=322+170+248=740\,.$$

Відповідь: $\Delta_4=740$.

1.1.2 Властивості визначників

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис, графічне зображення</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Величина визначника не зміниться, якщо елементи рядків та стовпців поміняти місцями</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Перевірити першу властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.
Розв’язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -9 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = -45 - 8 = -53$. Поміняємо елементи рядків та стовпців місцями і обчислимо отриманий визначник:
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -9 \cdot 5 - 1 \cdot 8 = -45 - 8 = -53 .$$
Отримали два рівних результати.
Відповідь: $\Delta_2 = -53$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число $\lambda \neq 0$, то величина визначника зміниться у λ разів:
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{ij} & \dots & \lambda \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$</td></tr>
</table>

$$
=\lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

ПРИКЛАД 2. Перевірити другу властивість для визначника $\Delta_2=\begin{vmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$$
\Delta_2=\begin{vmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3\cdot(-3) & 3\cdot 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)\cdot 5-3\cdot 4\cdot 1=3\cdot(-15-4)=
$$

$$
=3\cdot(-19)=-57 .
$$

З іншої сторони:

$$
\Delta_2=3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot(-15-4)=3\cdot(-19)=-57 .
$$

Отримали два рівних результати.

Відповідь: $\Delta_2=-57$.

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює нулю:

$$
\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}=0
$$

Доведення. Нуль є спільним множником рядка (стовпця), тобто спільним множником визначника (за другою властивістю визначників)

ПРИКЛАД 3. Перевірити третю властивість для визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot 0 + 6 \cdot 9 \cdot 0 + (-5) \cdot 4 \cdot 0 -$$

$-(-5) \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 9 \cdot 0 = 0$, властивість виконується.

Відповідь: $\Delta_3 = 0$.

4. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

ПРИКЛАД 4. Перевірити четверту властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 57 & 11 \\ 57 & 11 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 57 & 11 \\ 57 & 11 \end{vmatrix} = 57 \cdot 11 - 11 \cdot 57 = 0$, властивість виконується.

Відповідь: $\Delta_2 = 0$.

5. Якщо два рядка (стовпця) визначника пропорційні, то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & k\cdot a_{i3} & \dots & k\cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0\,.$$

Доведення. За другою властивістю визначників винесемо коефіцієнт пропорційності k за знак визначника, тоді отримаємо визначник з двома однаковими рядками, а за четвертою властивістю він дорівнює нулю

6. Якщо два рядка (стовпця) визначника переставити місцями, то отримаємо визначник протилежного знаку:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ПРИКЛАД 5. Перевірити шосту властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -4 - 6 = -10$, тепер переставимо місцями 1-й і 2-й стовпці, обчислимо новий визначник:

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot 4 = 6+4 = 10$, отримали протилежне число, отже, властивість виконується

7. Якщо всі елементи k-того рядка (стовпця) визначника представити у вигляді суми двох доданків $a_k + b_k \quad (k=\overline{1,\, n})$, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, у яких всі рядки (стовпці), крім k-того, такі самі, як у початковому визначнику, а k-тий рядок (стовпець) одного з визначників складається з елементів a_k, а другого – з елементів b_k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & a_{k3}+b_{k3} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ПРИКЛАД 6. Перевірити сьому властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix} = -1\cdot(1+3) - 2\cdot(5+8) = -4 - 26 = -30$, тепер представимо визначник у вигляді суми двох визначників і обчислимо цю суму: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} =$ $= -1\cdot 1 - 2\cdot 5 + (-1)\cdot 3 - 2\cdot 8 = -1 - 10 - 3 - 16 = -30$, отримали рівні значення, отже, властивість виконується
8. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те саме число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), то величина визначника не зміниться: $$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \dots & \dots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$ *Доведення.* Визначник, який стоїть у правій частині рівності, можна представити у вигляді суми двох визначників, один з яких дорівнює даному, а другий має два пропорційні один одному рядка і, значить, дорівнює нулю (властивість п’ять). Таким чином, величина даного визначника не змінилась
Зауваження. Восьма властивість дозволяє утворювати нульові елементи у визначнику, що потім робить його обчислення дуже простим

1.1.3 Обчислення визначників шляхом елементарних перетворень

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис,
графічне зображення</td></tr>
<tr><td colspan="2">Під елементарними перетвореннями визначника
розуміють наступні операції:</td></tr>
<tr><td>1) перестановка місцями двох рядків (стовпців), при цьому визначник змінює свій знак;
2) множення рядка (стовпця) на ненульове число, при цьому визначник множиться на це число;
3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) визначника відповідних елементів другого рядка (стовпця), які помножені на одне й теж саме число</td><td>$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_1 \rightleftarrows r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} -2 & 2\cdot 3 \\ 1 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2 + r_1\cdot 2 \to r_2}{=}$
$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1+2\cdot(-2) & 4+2\cdot 3 \end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ідея методу є наступною – за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців звести визначник до трикутного вигляду і обчислити його, знайшовши добуток елементів, які утворюють головну діагональ. Або за допомогою елементарних перетворень отримати рядок (стовпчик), який містить тільки один ненульовий елемент, а потім обчислити визначник, розклавши його за елементами цього рядка (стовпчика). Це дозволяє знизити порядок визначника на одиницю</td></tr>
</table>

Зауваження 1. Якщо отримуємо нулі в рядку, то працюємо зі стовпцями, і навпаки – якщо отримуємо нулі у стовпчику, то працюємо з рядками	
Визначник, в якому всі елементи, які знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *визначником верхнє трикутного вигляду*	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$
Визначник, в якому всі елементи, які знаходяться вище головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *визначником нижнє трикутного вигляду*	$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Зауваження 2. Будь-який визначник можна привести до трикутного вигляду, користуючись його основними властивостями	
Теорема. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі	

ПРИКЛАД 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$,

попередньо отримавши нулі та розкриваючи його: а) за елементами третього рядка; б) за елементами першого стовпця.

Розв'язання. а) обчислимо визначник, попередньо отримавши нулі та розкриваючи його за елементами третього рядка. Виберемо у третьому рядку елемент $a_{33} = -1$, який не зміниться, всі інші елементи перетворимо на нулі. Будемо працювати зі стовпцями: третій стовпчик, в якому знаходиться $a_{33}=-1$, помножимо на два та додамо до першого стовпчика, другий стовпчик не зміниться, так як елемент $a_{32}=0$, потім третій стовпчик помножимо на три та додамо до четвертого стовпчика:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&2&-3&7\\1&-1&-2&5\\2&0&-1&3\\3&1&5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{s_3\cdot 2+s_1\to s_1\\ s_3\cdot 3+s_4\to s_4}}{=}\begin{vmatrix}-6&2&-3&-2\\-3&-1&-2&-1\\0&0&-1&0\\13&1&5&15\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{3+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-6&2&-2\\-3&-1&-1\\13&1&15\end{vmatrix}=-(90+6-26-26-6+90)=-128\,;$$

б) обчислимо визначник, попередньо отримавши нулі та розкриваючи його за елементами першого стовпця. Виберемо у першому стовпчику елемент $a_{21}=1$, який не зміниться, всі інші елементи перетворимо на нулі. Будемо працювати з рядками: перший рядок не зміниться, так як елемент $a_{11}=0$, другий рядок, в якому знаходиться $a_{21}=1$, помножимо на (-2) та додамо до третього рядка, потім другий рядок помножимо на (-3) та додамо до четвертого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&2&-3&7\\1&-1&-2&5\\2&0&-1&3\\3&1&5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2\cdot(-2)+r_3\to r_3\\ r_2\cdot(-3)+r_4\to r_4}}{=}\begin{vmatrix}0&2&-3&7\\1&-1&-2&5\\0&2&3&-7\\0&4&11&-15\end{vmatrix}=$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 4 & 11 & -15 \end{vmatrix} = -(-90 + 154 + 84 - 84 + 154 - 90) = \\ = -128$$

Відповідь: $\Delta = -128$.

ПРИКЛАД 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, звівши його до трикутного вигляду.

Розв'язання. Поміняємо місцями перший і другий рядки (знак визначника зміниться на протилежний за шостою властивістю); помножимо перший рядок на (-2) і додамо до третього, потім на (-3) і додамо до четвертого; помножимо другий рядок на (-1) і додамо до третього, потім на (-2) і додамо до четвертого; помножимо третій рядок на $(-17/6)$ і додаємо до четвертого:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \rightleftarrows r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \cdot (-2) + r_3 \to r_3 \\ r_1 \cdot (-3) + r_4 \to r_4}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 11 & -15 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 \cdot (-1) + r_3 \to r_3 \\ r_2 \cdot (-2) + r_4 \to r_4}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 17 & -29 \end{vmatrix} \overset{r_3 \cdot (-17/6) + r_4 \to r_4}{=}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 32/3 \end{vmatrix} = -1\cdot 2\cdot 6\cdot 32/3 = -128 .$$

Відповідь: $\Delta = -128$.

ПРИКЛАД 3. Обчислити визначник за допомогою елементарних перетворень: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, на (-1) і додамо до третього, на (-3) і додамо до четвертого:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Поділимо другий рядок на 4, при цьому значення визначника помножиться на 4:

$$4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Помножимо третій рядок на (-5) і додамо до другого, на (-7) і додамо до четвертого:

$$4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 5\end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями другий і третій рядки, при цьому зміниться знак визначника:

$$-4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 5\end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями третій і четвертий рядки, при цьому зміниться знак визначника:

$$4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями третій і четвертий стовпці, при цьому зміниться знак визначника:

$$-4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}.$$

Отримали визначник верхнє трикутного вигляду. Тоді за теоремою:

$$-4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-4\cdot 1\cdot 1\cdot 5\cdot(-1)=20.$$ *Відповідь:* 20.

1.2 Матриці

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Матриця – це прямокутна таблиця чисел (або алгебраїчних символів чи математичних функцій), яка складається з m рядків та n стовпців	$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$
ПРИКЛАД 1. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$ – матриця складається з двох рядків і трьох стовпців.	
ПРИКЛАД 2. $A=\begin{pmatrix}\cos x & tgx\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$ – матриця складається з двох рядків і двох стовпців.	
Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, де i – номер рядка ($i=\overline{1,m}$), а j – номер стовпця ($j=\overline{1,n}$)	
Позначають матрицю символом	$A=\lVert a_{ij}\rVert$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

Розмір матриці визначається кількістю її рядків і кількістю стовпців. Позначають символом $m \times n$, де m – кількість рядків, n – кількість стовпців
ПРИКЛАД 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ – задана матриця складається з двох рядків і семи стовпців, тобто її розмір 2×7.
ПРИКЛАД 4. $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ – задана матриця складається з чотирьох рядків та одного стовпця, тобто її розмір 4×1.

1.2.1 Типи матриць

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Квадратна матриця – це матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, тобто її розмір $m \times m$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$
ПРИКЛАД 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & 5 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ – задана матриця складається з трьох рядків і трьох стовпців, тобто її розмір 3×3.	

Головна діагональ матриці складається з елементів, розташованих з лівого верхнього кута до правого нижнього кута	$A = \left(\searrow \right)$
Бічна діагональ матриці складається з елементів, розташованих з правого верхнього кута до лівого нижнього кута	$A = \left(\swarrow \right)$
Матриця, всі діагональні елементи якої не дорівнюють нулю, називається *діагональною*	$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & a_{n\,n} \end{pmatrix}$
Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші – нулю, називається *одиничною*	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$
Нульова матриця – це матриця, елементи якої дорівнюють нулю	$O \equiv \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$
Матриця розміру $m \times 1$ називається *вектор-стовпчик*	$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Матриця розміру $1\times n$ називається *вектор-рядок*	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\end{pmatrix}$
В системі матриць нульова матриця має властивості звичайного нуля	$A\cdot O=O$ і $O\cdot A=O$
Дві матриці A і B називаються *рівними,* якщо вони однакового розміру та відповідні елементи $A=\left\lVert a_{ij}\right\rVert$ і $B=\left\lVert b_{ij}\right\rVert$ цих матриць рівні	
ПРИКЛАД 2. Матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 12 & 5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 12 & 5\end{pmatrix}$ є рівними, так як їх розміри однакові 2×2 і відповідні елементи рівні. Значить, $A=B$.	
ПРИКЛАД 3. Матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 12 & 5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 12\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ не рівні, так як їх розміри однакові 2×2, а відповідні елементи не рівні. Тобто, $A\neq B$.	
Матриця називається *трикутною,* якщо всі її елементи, які розташовані вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$ або $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$	
Матриця, що утворюється з матриці A $(m\times n)$ заміною	

<table>
<tr><td>рядків стовпцями (або навпаки), називається транспонованою матрицею відносно матриці A і позначається A^T $(n\times m)$</td><td>$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 4. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб отримати транспоновану матрицю A^T, замінимо перший рядок матриці A на перший стовпчик матриці A^T, а другий рядок матриці A на другий стовпчик матриці A^T, отримаємо: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Матриця A називається симетричною, якщо $A^T=A$, отже, $a_{ji}=a_{ij}$</td><td>$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Матриця A називається кососиметричною, якщо $A^T=-A$, отже, $a_{ji}=-a_{ij}$</td><td>$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 5. Показати, що матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ є симетричною.</td></tr>
</table>

Розв'язання. Транспонуємо матрицю A: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Отримали матрицю A^T, рівну матриці A. Отже, за означенням, матриця A є симетричною.
ПРИКЛАД 6. Показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ є кососиметричною. *Розв'язання.* Транспонуємо матрицю A: $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 8 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$, помножимо транспоновану матрицю на (-1): $-A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} = A$, або $A^T = -A$. Отже, за означенням, матриця A є кососиметричною.

1.2.2 Операції над матрицями

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Додавання (віднімання) матриць Додавати можна лише матриці однакового розміру	
Сумою (різницею) двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того ж	$A + B = C$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

<table>
<tr><td>розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B</td><td>$A - B = C$,
$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.
Розв’язання. Знайдемо суму матриць:
$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+(-9) & -2+(-7) & 0+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -9 & -5 \end{pmatrix},$$
тепер знайдемо різницю матриць:
$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-(-9) & -2-(-7) & 0-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Множення матриць на число</td></tr>
<tr><td>Добутком матриці A на число λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A</td><td>$B = \lambda \cdot A$,
$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 2. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -3$.
Розв’язання.
$$B = -3 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 \cdot 6 & -3 \cdot 7 \\ -3 \cdot (-2) & -3 \cdot (-3) \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Множення матриць</td></tr>
<tr><td colspan="2">Множити можна матриці лише тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої</td></tr>
</table>

Добутком матриць $A=\left\|a_{is}\right\|$ (розміру $m\times n$) і $B=\left\|b_{sj}\right\|$ (розміру $n\times k$), називається матриця $C=\left\|c_{ij}\right\|$ (розміру $m\times k$), елементи якої обчислюються за правилом	$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+$ $+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{sj}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$
Щоб отримати елемент c_{ij}, необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B	
Зауваження 1. В загальному випадку, операція множення матриць не комутативна, тобто $A\cdot B\neq B\cdot A$, навіть коли це можливо	

ПРИКЛАД 3. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A\cdot B$ і $B\cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot(-2)+2\cdot 4\\ -2\cdot 0+(-3)\cdot 1 & -2\cdot(-1)+(-3)\cdot 3 & -2\cdot(-2)+(-3)\cdot 4\\ 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot(-1)+1\cdot 3 & 0\cdot(-2)+1\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+2 & -1+6 & -2+8 \\ 0-3 & 2-9 & 4-12 \\ 0+1 & 0+3 & 0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & -7 & -8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot1+(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot0 & 0\cdot2+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot1 \\ 1\cdot1+3\cdot(-2)+4\cdot0 & 1\cdot2+3\cdot(-3)+4\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+2+0 & 0+3-2 \\ 1-6+0 & 2-9+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

В розглянутому прикладі можливо було виконати множення $A\cdot B$ і $B\cdot A$. В результаті ми отримали матриці з різними елементами та різного розміру. В першому випадку отримали матрицю розміром 3×3, а в другому – 2×2.

Зауваження 2. Операція множення можлива завжди для квадратних матриць однакового розміру

Зауваження 3. Символічний запис A^2 означає добуток двох однакових квадратних матриць: $A^2=A\cdot A$. Аналогічно, $A^3=A\cdot A\cdot A$, $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}$

ПРИКЛАД 4. Знайти A^2, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Так як $A^2=A\cdot A$, тоді

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot2+(-3)\cdot1 & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot0 \\ 1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot(-3)+0\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ПРИКЛАД 5. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Так як $A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = A\cdot A^2$, тоді

$$A^3=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-6 & -3 \\ 4-3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Зауваження 4. Наведемо деякі цікаві властивості обернених матриць:

1. визначник двох взаємно обернених матриць дорівнює одиниці; значить, визначник оберненої матриці є числом, оберненим до визначника вихідної матриці:

$$det(A\cdot A^{-1}) = detA\cdot detA^{-1} = detE = 1 \Rightarrow detA^{-1} = \frac{1}{detA};$$

2. знаходження оберненої матриці для транспонованої рівносильне до транспонування оберненої матриці:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

3. матриця, обернена для добутку матриць, дорівнює добутку обернених матриць, які множаться у протилежному порядку:

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

1.2.3 Властивості матричних операцій

<table>
<tr><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td colspan="2">Властивості, пов’язані з додаванням:</td></tr>
<tr><td>1. Для будь-якої матриці A існує протилежна матриця $(-A)$ така, що</td><td>1. $A+(-A)=A-A=0$</td></tr>
<tr><td>2. Якщо A і B – матриці одного розміру, тоді</td><td>2. $A+B=B+A$</td></tr>
<tr><td>3. Якщо A, B і C – матриці одного розміру, тоді</td><td>3. $(A+B)+C=A+(B+C)$</td></tr>
<tr><td>4. Транспонування суми матриць еквівалентне транспонуванню кожної матриці суми</td><td>4. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Властивості, пов’язані з множенням:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Припустимо, що розміри матриць такі, що відповідні добутки визначені, і нехай λ і μ – довільні числа $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, тоді
1. $\lambda\left(\mu A\right)=\left(\lambda\mu\right)A$;
2. $\lambda\left(AB\right)=\left(\lambda A\right)B=A\left(\lambda B\right)$;
3. $(AB)C=A(BC)$;
4. $\left(AB\right)^T=B^T A^T$;
5. добуток діагональних матриць, які мають рівні порядки, є комутативним:</td></tr>
</table>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ПРИКЛАД 1. Прямим обчисленням упевнитись у справедливості третьої властивості для множення матриць, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(AB)C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}=(AB)C.$$

ПРИКЛАД 2. Прямим обчисленням упевнитись у справедливості четвертої властивості для множення матриць на прикладі довільних матриць другого порядку $A=\left\| a_{ij} \right\|$ і $B=\left\| b_{ij} \right\|$.

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$, отриманий результат співпадає з добутком $A \cdot B$.
Властивості, пов'язані з додаванням і множенням:
Нехай розміри матриць такі, що відповідні операції додавання і множення визначені, і λ – довільне число $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$, тоді 1. $A(B+C) = AB + AC$; 2. $(A+B)C = AC + BC$; 3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

1.2.4 Ранг матриці

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Рангом матриці A ($rangA$ або $r(A)$) розміру $m \times n$ називається таке ціле число r, яке дорівнює найбільшому порядку мінору, відмінного від нуля, цієї матриці. Таких мінорів може бути декілька. Будь-який мінор матриці, відмінний від нуля, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається *базисним.* Матриці A і B називаються *еквівалентними* ($A \sim B$), якщо $r(A) = r(B)$. *Теорема.* Ранг матриці не змінюється від елементарних перетворень матриці: 1) перестановка місцями рядків (стовпців); 2) множення рядка (стовпця) на ненульове число; 3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів другого рядка (стовпця), що	

помножені на одне й теж саме число; 4) викреслювання рядка (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю; 5) заміна рядків відповідними стовпцями, і навпаки
ПРИКЛАД 1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. *Розв'язання.* Викреслюємо з матриці A другий рядок, другий, третій і четвертий стовпці, отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, яка є еквівалентною до A. Так як $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 -$ $-10 = 1 \neq 0$, то $r(A) = 2$.
ПРИКЛАД 2. Визначити ранг матриці $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$ *Розв'язання.* Для визначення рангу, зведемо матрицю A до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці. Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, потім на (-3) і додамо до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Помножимо другий рядок на (-1) і додамо до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді ранг матриці A дорівнює $rang(A) = 2$.

1.2.5 Обернена матриця

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис, графічне зображення</td></tr>
<tr><td>Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо</td><td>$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$,
де E – одинична матриця</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадратна матриця A $n-$го порядку називається е вироженою (несингулярною), якщо її визначник $\det A$ не дорівнює нулю. В протилежному випадку матриця називається виродженою (сингулярною)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема. Будь-яка е вироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Алгоритм знаходження оберненої матриці:
1) обчислити визначник матриці $\det A$;
2) знайти транспоновану матрицю A^T;
3) обчислити алгебраїчні доповнення для кожного елемента транспонованої матриці;
4) записати обернену матрицю за формулою:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix};$$
5) перевірити рівності: $A^{-1} \cdot A = E$ або $A \cdot A^{-1} = E$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 1. Знайти до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

обернену матрицю A^{-1}.

Розв'язання.

Знайдемо визначник матриці $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 4 - 0 - 56 - 1 = -59 \neq 0 ,$$

отже матриця A є невиродженою, тобто має обернену.

Знайдемо транспоновану матрицю $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 28 = -31 ,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 ,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3 ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 ,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 0) = -8 ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 3 = -10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -(14 - 1) = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$$

Отже, $A^{-1} = \dfrac{1}{-59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -62 - 1 + 4 & -31 + 3 + 28 & 0 + 4 - 4 \\ 6 + 2 - 8 & 3 - 6 - 56 & 0 - 8 + 8 \\ -20 + 13 + 7 & -10 - 39 + 49 & 0 - 52 - 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -59 & 0 & 0 \\ 0 & -59 & 0 \\ 0 & 0 & -59 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

отже, обернена матриця знайдена вірно.

Відповідь: $A^{-1} = -\dfrac{1}{59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix}$.

ПРИКЛАД 2. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

Розв'язання. Обчислимо визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 3 +$

$+0 - 6 - 0 - 9 = 24 \neq 0$, тобто обернена матриця існує.

Знайдемо транспоновану матрицю

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -\left(0 - 3\right) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -\left(4 - 2\right) = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-\left(3-1\right)=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3-6=-3,$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-\left(9-0\right)=-9,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9-0=9.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & 3 & -3\\ -2 & 10 & -2\\ -3 & -9 & 9\end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку:

$$A^{-1}A=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & 3 & -3\\ -2 & 10 & -2\\ -3 & -9 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9\cdot3+3\cdot1-3\cdot2 & 9\cdot0+3\cdot3-3\cdot3 & 9\cdot1+3\cdot1-3\cdot4\\ -2\cdot3+10\cdot1-2\cdot2 & -2\cdot0+10\cdot3-2\cdot3 & -2\cdot1+10\cdot1-2\cdot4\\ -3\cdot3-9\cdot1+9\cdot2 & -3\cdot0-9\cdot3+9\cdot3 & -3\cdot1-9\cdot1+9\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}27+3-6 & 0+9-9 & 9+3-12\\ -6+10-4 & 0+30-6 & -2+10-8\\ -9-9+18 & 0-27+27 & -3-9+36\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 0 & 0\\ 0 & 24 & 0\\ 0 & 0 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$ Обернена матриця знайдена правильно. *Відповідь:* $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & 3 & -3\\ -2 & 10 & -2\\ -3 & -9 & 9\end{pmatrix}$.

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Основні визначення

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка складається з m рівнянь з n невідомими, називається система вигляду	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$ де x_j – невідомі, a_{ij} – коефіцієнти системи, b_i – вільні члени ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$)
Такі системи зручно записувати у *матричній формі*	$A\cdot X=B$

<table>
<tr><td>A – матриця коефіцієнтів, яка називається основною матрицею</td><td>$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>X – вектор-стовпчик невідомих x_j</td><td>$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>B – вектор-стовпчик вільних членів b_i</td><td>$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i=0$ $(i=\overline{1,m})$</td><td>$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Система називається неоднорідною, якщо хоча б один вільний член не дорівнює нулю</td></tr>
<tr><td>Розширеною матрицею системи називається матриця $\overline{A}$, яка доповнена стовпцем вільних членів</td><td>$$\overline{A}=\left(A\middle|B\right)=$$</td></tr>
</table>

	$=\left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Розв'язком системи називається сукупність n чисел, які при підстановці замість невідомих в систему рівнянь обертають всі рівняння у тотожності
Система рівнянь називається *сумісною,* якщо вона має хоча б один розв'язок; *несумісною,* якщо вона не має жодного розв'язку
Система рівнянь називається *визначеною,* якщо вона має тільки один розв'язок; *невизначеною,* якщо вона має більше, ніж один розв'язок
Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною, якщо ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи. Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг сумісної системи менший за число невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків
ПРИКЛАД. Переконатися, що дана система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$ сумісна і невизначена. *Розв'язання.* Для знаходження рангу основної матриці

$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$ знайдемо мінор найбільшого порядку, відмінний від нуля:

$$M_1=3\neq 0,\ \ M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-6+1)-1\cdot(-18+3)+2\cdot(6-6)=0,$$

отже найбільшим мінором, відмінним від нуля, є мінор M_2, значить $rang\,A=2$.

Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 3\\ 6 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -3 & -2\end{array}\right)$. Для визначення рангу, зведемо матрицю $\overline{A}$ до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці. Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, потім на (-1) і додамо до третього, отримаємо:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 3\\ 6 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -3 & -2\end{array}\right)\overset{\substack{r_1\cdot(-2)+r_2\to r_2\\ r_1\cdot(-1)+r_3\to r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & -5 & -5\end{pmatrix}\sim$$

Тепер помножимо другий рядок на -1 і додамо до третього рядка, отримаємо:

$\overset{r_2\cdot(-1)+r_3\to r_3}{\sim}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$ $rang\,\overline{A}=2$. Оскільки $rang\,A=rang\,\overline{A}=r=2<n=3$, то система сумісна і невизначена.

1.3.2 Розв'язання СЛАР методом Крамера

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Для СЛАР, яка має n рівнянь і n невідомих, основна матриця має вигляд	$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix};$
визначник цієї матриці називається *визначником системи*	$\Delta=\det A=$ $=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$
Якщо визначник системи не дорівнює нулю $\Delta\neq 0$, тоді СЛАР має єдиний розв'язок, який знаходять за *формулами Крамера*	$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ де Δ_j $(j=\overline{1,n})$ – визначник, отриманий з визначника системи Δ, заміною j-го стовпчика стовпчиком вільних членів B

Якщо визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$), тоді маємо два випадки:

1) система несумісна, тобто не має розв'язків, якщо хоча б один з $\Delta_j \neq 0$;
2) система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків, якщо всі $\Delta_j = 0$

Зауваження. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, тому що завжди існує тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Тобто, якщо визначник однорідної системи $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний нульовий розв'язок. А якщо $\Delta = 0$, тоді однорідна система має нескінченну множину розв'язків

ПРИКЛАД 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера і зробити перевірку.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 1; \\ x + 2y - 3z = 1; \\ 2x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 12 + 12 - 2 - 9 = 10 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 12 + 12 - 2 - 3 = 20,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3-6-6+6+1+18=10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12-1-4-4+3+4=10,$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{10}=2, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{10}=1, \quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{10}{10}=1.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{cases} 3\cdot 2-2\cdot 1-3\cdot 1=6-2-3=1; \\ 2+2\cdot 1-3\cdot 1=2+2-3=1; \\ 2\cdot 2-1-1=4-1-1=2. \end{cases}$$

Відповідь: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

ПРИКЛАД 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера і зробити перевірку:

$$\begin{cases} x+2y+3z=8; \\ 3x+y+z=6; \\ 2x+y+2z=6. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+9+4-6-12-1=-4\neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16+18+12-18-24-8=-4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 54 + 16 - 36 - 48 - 6 = -8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 24 + 24 - 16 - 6 - 36 = -4,$$

$$x = \frac{-4}{-4} = 1, \quad y = \frac{-8}{-4} = 2, \quad z = \frac{-4}{-4} = 1$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1 + 4 + 3 = 8; \\ 3 \cdot 1 + 2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6; \\ 2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 + 2 = 6. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

ПРИКЛАД 3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 27 - 20 + 6 - 24 + 15 = 0$, тому із системи можна виключити, наприклад, третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Положимо $x_3 = t$, де t – довільне дійсне число. Виразимо x_1 і x_2 через t за допомогою метода Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2t = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2t; \\ 2x_1 - x_2 = -3t, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2t & 3 \\ -3t & -1 \end{vmatrix} = 2t + 9t = 11t,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2t \\ 2 & -3t \end{vmatrix} = -3t + 4t = t, \ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{11t}{7}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{t}{7}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} -\dfrac{11t}{7} + 3 \cdot \left(-\dfrac{t}{7}\right) + 2t = -\dfrac{11t}{7} - \dfrac{3t}{7} + \dfrac{14t}{7} = 0; \\ 2 \cdot \left(-\dfrac{11t}{7}\right) - \left(-\dfrac{t}{7}\right) + 3t = -\dfrac{22t}{7} + \dfrac{t}{7} + \dfrac{21t}{7} = 0; \\ 3 \cdot \left(-\dfrac{11t}{7}\right) - 5 \cdot \left(-\dfrac{t}{7}\right) + 4t = -\dfrac{33t}{7} + \dfrac{5t}{7} + \dfrac{28t}{7} = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = -\dfrac{11t}{7}$, $x_2 = -\dfrac{t}{7}$, $x_3 = t$, $t \in R$.

1.3.3 Розв’язання СЛАР методом оберненої матриці

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Розглянемо СЛАР, яка має n рівнянь і n невідомих, яка записана у матричній формі	$A \cdot X = B$

Якщо матриця A – *невироджена* ($\det A \neq 0$), то вона має обернену матрицю A^{-1}	$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$

ПРИКЛАД 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 1; \\ x + 2y - 3z = 1; \\ 2x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 12 + 12 - 2 - 9 = 10 \neq 0 .$$

Транспонуємо основну матрицю: $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, знайдемо її алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -\left(2 - 3\right) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 ,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -\left(-1+6\right) = -5 ,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3 ,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -\left(-9+3\right) = 6 ,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 ,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\left(-3+4\right) = -1 ,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 ,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 12 \\ -5 & 3 & 6 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 12 \\ -5 & 3 & 6 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 12\cdot 2 \\ -5\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 2 \\ -5\cdot 1 - 1\cdot 1 + 8\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x = 2 ,\ y = 1,\ z = 1 .$$

Відповідь: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

ПРИКЛАД 2. Розв’язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} x+y+z=2; \\ 5x-4y-4z=1; \\ 2x+y+2z=2. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’яжемо систему за допомогою оберненої матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник системи:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-8+5-8+8-10+4=-9\neq 0\,.$$

Транспонуємо основну матрицю: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, та знайдемо її алгебраїчні доповнення і запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -18 & 0 & 9 \\ 13 & 1 & -9 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -18 & 0 & 9 \\ 13 & 1 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ -18 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \\ 13 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

1.3.4 Розв'язання СЛАР методом Гауса

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення

Розглянемо СЛАР, яка має m рівнянь і n невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод Гауса складається з двох етапів:

1) на першому етапі (прямий хід) послідовно виключають невідомі за допомогою рівносильних перетворень системи (елементарних перетворень розширеної матриці системи). В результаті система (розширена матриця системи) зводиться до ступінчатої форми (трикутного вигляду).
2) на другому етапі (обернений хід) розв'язують отриману еквівалентну систему (знаходять невідомі) знизу-догори

Зауваження. A – основна матриця, $\overline{A}$ – розширена матриця системи.

ПРИКЛАД 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса:

$$\begin{cases} 3x-2y-3z=1; \\ x+2y-3z=1; \\ 2x-y-z=2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Прямий хід. Запишемо систему у вигляді розширеної матриці:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Помножимо перший рядок на (-3) і додамо до другого, потім на (-2) і додамо до третього, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Помножимо другий рядок на 5, третій на (-8) і додамо, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right).$$

Обернений хід. Тепер систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1; \\ \quad -8y+6z=-2; \\ \qquad -10z=-10. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо $z=1$, підставляємо в друге рівняння $-8y+6\cdot 1=-2$, звідки $y=1$. Підставляємо все в перше рівняння $x+2\cdot 1-3\cdot 1=1$, тоді $x=2$.

Відповідь: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

ПРИКЛАД 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Прямий хід. Запишемо систему у вигляді розширеної матриці: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$.

Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, на (-4) і додамо до третього, отримаємо: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$.

Помножимо 2-ий рядок на (-1) и додамо до 3-го:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Запишемо отриману еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ -3x_2 - 2x_3 = -2; \\ -2x_3 = 4. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо: $x_3 = -2$, підставляємо в друге рівняння

$$-3x_2 - 2\cdot(-2) = -2, \quad -3x_2 + 4 = -2, \quad -3x_2 = -6, \quad x_2 = 2,$$

тепер підставляємо все у перше рівняння

$$x_1 + 2 + 2\cdot(-2) = -1, \quad x_1 + 2 - 4 = -1, \quad x_1 = 1.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2\cdot(-2) = 1 + 2 - 4 = -1; \\ 2\cdot 1 - 2 + 2\cdot(-2) = 2 - 2 - 4 = -4; \\ 4\cdot 1 + 2 + 4\cdot(-2) = 4 + 2 - 8 = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

ПРИКЛАД 3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді розширеної матриці: $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$. Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, на (-3) і додамо до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & -14 & -2\end{pmatrix}$. Помножимо другий рядок на (-2) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Тоді систему можна записати у вигляді: $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0;\\ -7x_2-x_3=0;\\ 0\cdot x_3=0.\end{cases}$

З третього рівняння маємо, що x_3 може бути довільним дійсним числом. Нехай $x_3=t$. Підставляємо в друге рівняння $-7x_2-t=0$, звідки $x_2=-\frac{t}{7}$. Підставляємо все в перше рівняння

$$x_1+3\cdot\left(-\frac{t}{7}\right)+2t=0,\quad x_1-\frac{3t}{7}+2t=0,\quad x_1=\frac{3t}{7}-2t,$$

$$x_1=\frac{3t-14t}{7},\quad x_1=\frac{-11t}{7}.$$

Відповідь: $x_1=-\frac{11t}{7}$, $x_2=-\frac{t}{7}$, $x_3=t$, $t\in R$.

ПРИКЛАД 4. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 22x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему методом Гауса. Запишемо систему у вигляді розширеної матриці:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 22 \\ 2 & 3 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Помножимо перший рядок на (-1) і додамо до другого, на (-2) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Помножимо другий рядок на (-1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 + 4x_3 + 21x_4 = 0; \\ -x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Нехай $x_4 = t$, $t \in R$.

Підставимо в третє рівняння

$$-x_3 - 6t = 0, \text{ звідки } x_3 = -6t.$$

Підставляємо в друге рівняння

$$x_2 + 4\cdot(-6t) + 21t = 0, \text{ звідки } x_2 = 24t - 21t = 3t.$$

Підставляємо все в перше рівняння

$$x_1 + 3t - 6t + t = 0, \text{ звідки } x_1 = -3t + 6t - t = 2t.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2t + 3t - 6t + t = 6t - 6t = 0; \\ 2t + 2\cdot 3t + 5\cdot(-6t) + 22t = 2t + 6t - 30t + 22t = 0; \\ 2\cdot 2t + 3\cdot 3t + 5\cdot(-6t) + 17t = 4t + 9t - 30t + 17t = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2t$, $x_2 = 3t$, $x_3 = -6t$, $x_4 = t$, $t \in R$.

ПРИКЛАД 5. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему методом Гауса. Запишемо систему у вигляді розширеної матриці: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, на (-3) і додамо до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Помножимо другий рядок на (-1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у вигляді: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_2 - 7x_3 = 0; \\ 3x_3 = 0. \end{cases}$

З третього рівняння маємо, що $x_3 = 0$. З другого рівняння $x_2 = 0$. З першого рівняння $x_1 = 0$.

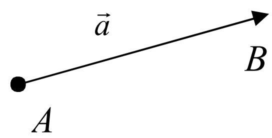
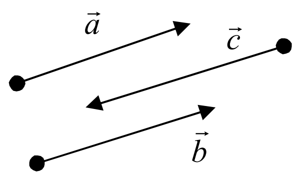
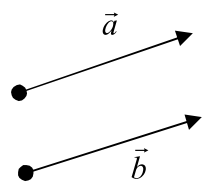
Перевірка:

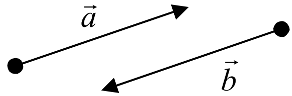
$$\begin{cases} 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0; \\ 2 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0 = 0; \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

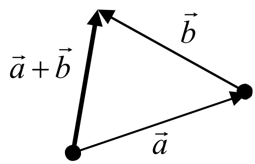
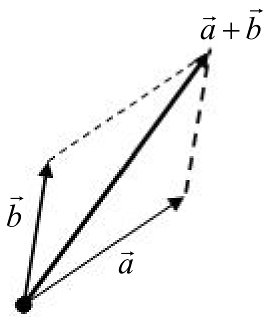
2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

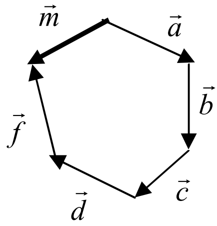
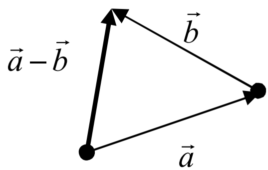
2.1 Основні визначення

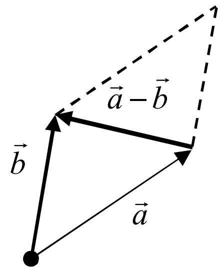
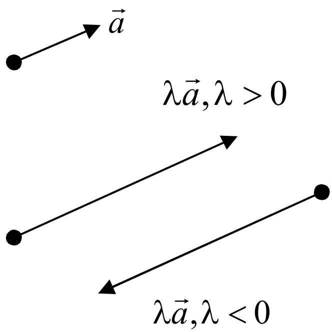
Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Вектор – це спрямований відрізок, який позначають однією малою латинською буквою $\vec{a}$, або двома великими латинськими $\overrightarrow{AB}$, де перша A – це *початок вектору*, B *– кінець вектору*	 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$
Довжина вектора або *модуль* вектора – це скалярна величина вектора (це величина додатна)	$\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
Нуль-вектор $\left(\vec{0}\right)$ – це вектор у якого початок і кінець співпадають	 $\overrightarrow{AA}$
Колінеарні вектори – це вектори, які лежать на одній прямій або розташовані на паралельних	 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{c} \parallel \vec{b}$
Рівними векторами називають вектори, які однаково спрямовані та мають однакову довжину. *Зауваження*. Два вектори рівні тільки, якщо їх можна сумістити без повороту	

Одиничним вектором (або *ортом*) називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці	$\lvert\vec{a}\rvert = 1$
Протилежні вектори – це два вектори, які мають протилежні напрями та рівні модулі	

2.2 Дії над векторами

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
1. Додавання	
Правило трикутника Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком першого вектору $\vec{a}$, а кінець з кінцем другого вектору $\vec{b}$	
Правило паралелограму Якщо доданки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то суму $\vec{a}+\vec{b}$ знаходять завдяки таким побудовам: на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуємо паралелограм. Діагональ цього паралелограму й буде сумою $\vec{a}+\vec{b}$	
Зауваження 1. Для колінеарних векторів правило паралелограму не застосовується	

<table>
<tr><td>Сумою декількох векторів є вектор, отриманий після численних послідовних додавань векторів. Тобто, такий вектор, початок якого співпадає з початком першого вектору-доданку, а кінець – з кінцем останнього вектору-доданку.
Таке правило називають правилом многокутника або правилом ланцюжка</td><td>$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f}$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 2. Сума протилежних векторів дорівнює нуль-вектору: $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$</td></tr>
<tr><td>Додавання векторів є комутативним:</td><td>$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$</td></tr>
<tr><td>Додавання векторів є асоціативним:</td><td>$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Віднімання</td></tr>
<tr><td>Правило трикутника
Щоб отримати різницю $\vec{a} - \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ достатньо привести вектори до спільного початку, а потім побудувати вектор, початок якого співпадає з початком першого вектору $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектору $\vec{b}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 3. Модуль різниці може бути меншим за модуль зменшуваного (довжини вектору $\vec{a}$), але й може бути більшим або ж рівним</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Правило паралелограму
Щоб отримати різницю $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ достатньо привести вектори до спільного початку та побудувати паралелограм. Діагональ отриманого паралелограма, яка з’єднуватиме кінцеву точку вектору $\vec{a}$ з кінцевою точкою вектору $\vec{b}$ й буде вектором різниці $\vec{a}-\vec{b}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Множення вектору на число</td></tr>
<tr><td>Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число λ (яке не дорівнює нулю), необхідно побудувати новий вектор, довжина якого помножена на λ, а його напрямок співпадає з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, або має протилежний напрямок, якщо $\lambda < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Властивості множення на число (вони аналогічні основним властивостям множення чисел)</td><td>$\mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$;
$(\mu+\lambda)\vec{a} = \mu\vec{a}+\lambda\vec{a}$;
$\mu\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right) = \mu\vec{a}+\mu\vec{b}-\mu\vec{c}$;
$\lambda\vec{a} = 0$,
якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a}$=0</td></tr>
<tr><td>Будь-який вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді</td><td>$\vec{a} = \vec{a}_0 \cdot \lvert\vec{a}\rvert$,
де $\vec{a}_0$ – орт, спрямований однаково з вектором $\vec{a}$</td></tr>
</table>

Лінійною комбінацією векторів називають вираз	$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+...+\lambda_n\vec{r}$, де λ_1, λ_2, …, λ_n – довільні числа
Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то знайдеться таке число λ, яке називають відношенням вектору $\vec{b}$ до колінеарного вектору $\vec{a}$ ($\vec{a}\neq 0$)	$\vec{b}=\lambda\vec{a}$ *(умова колінеарності)*, $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}=\lambda$ або $\vec{b}:\vec{a}=\lambda$

Зауваження 4. До лінійної комбінації векторів можна застосовувати всі правила перетворень, встановлених в алгебрі для многочленів першого порядку (Додаток А)

ПРИКЛАД 1. Спростити вираз $\frac{4\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}}{2}+\frac{7\vec{c}-5\vec{a}}{3}$.

Розв'язання. Приведемо заданий вираз до спільного знаменнику, отримаємо

$$\frac{4\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}}{2}+\frac{7\vec{c}-5\vec{a}}{3}=\frac{12\vec{a}-9\vec{b}+15\vec{c}+14\vec{c}-10\vec{a}}{6}=$$

$$=\frac{2\vec{a}-9\vec{b}+29\vec{c}}{6}.$$

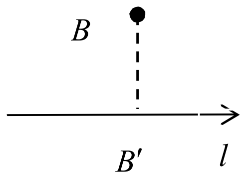
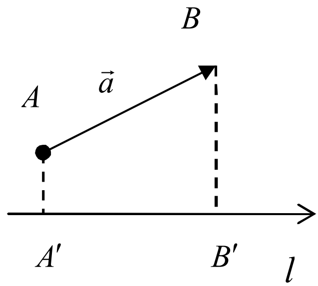
ПРИКЛАД 2. Довести, що при будь-якому розташуванні точок A, B, C справедлива рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$.

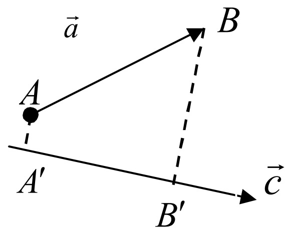
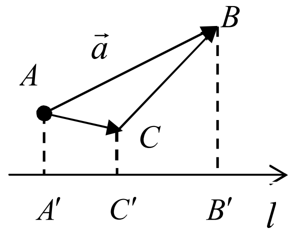
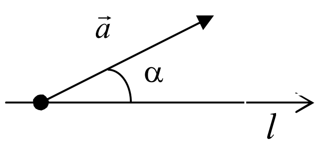
Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{BC}$ відкладено від кінця вектору $\overrightarrow{AB}$, вектор $\overrightarrow{CA}$ від кінця вектору $\overrightarrow{BC}$, тоді кінець вектору $\overrightarrow{CA}$ співпадає з початком вектору $\overrightarrow{AB}$. Таким чином, сума $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ є вектором у якого початок співпадає з кінцем, а це і є нуль-вектор, тож

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0.$$

ПРИКЛАД 3. При якій умові вектори $\vec{a}+\vec{b}$ й $\vec{a}-\vec{b}$ колінеарні?
Розв'язання. Переглянувши правило паралелограму для додавання та віднімання векторів, можна пересвідчитися, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, бо на них можна побудувати паралелограм, діагоналі якого й будуть ці вектори $\vec{a}+\vec{b}$ й $\vec{a}-\vec{b}$.

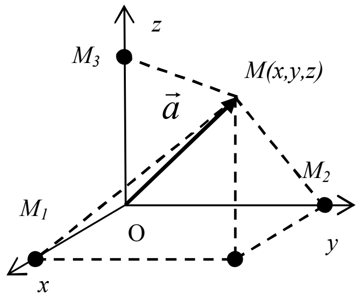
2.3 Проекція вектору

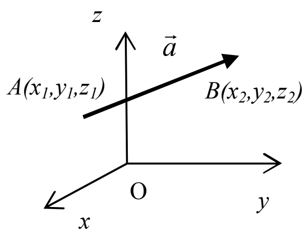
Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Проекція точки на вісь l – це основа перпендикуляру проведеного з точки на вісь l	
Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називають довжину $\overrightarrow{A'B'}$ цієї осі, який розташовано між проекціями A' та B' його початкової точки A та кінцевої точки B, взятої з додатним знаком, якщо напрямок $\overrightarrow{A'B'}$ співпадає з напрямом осі проекції, та зі знаком «$-$», якщо ці напрямки протилежні	

<table>
<tr><td>Якщо вісь l задана вектором $\vec{c}$, то вектор $\overrightarrow{A'B'}$ називають також геометричною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на напрямок вектора $\vec{c}$. Позначають $пр_{\vec{c}}\overrightarrow{AB}$, $пр_{\vec{c}}\vec{a}$. Алгебраїчною проекцією вектору є деяке дійсне число, тобто скаляр, його значення не залежить від вибору одиниці масштабу</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Властивості проекцій</td></tr>
<tr><td>Проекція суми векторів на будь-яку вісь l (або вектор) дорівнює сумі проекцій цих векторів на вісь l (або вектор)</td><td>$$пр_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) =$$ $$= пр_l\vec{a}+пр_l\vec{b}+пр_l\vec{c}$$</td></tr>
<tr><td>Наприклад, $$пр_l(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = пр_l\overrightarrow{AC}+пр_l\overrightarrow{CB}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Алгебраїчна проекція вектора на будь-яку вісь дорівнює добутку довжини вектору на косинус кута між вектором та віссю</td><td>$$пр_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$$ 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження. Геометричну проекцію вектора на вісь називають компонентою вектора на осі або координатами вектору</td></tr>
</table>

2.4 Координати вектору

<table>
<tr><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td>Будь-який вектор можна розкласти на три доданки, які лежать на осях координат
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

Якщо на кожній координатній осі (Ox , Oy , Oz відповідно) відкласти одиничні вектори (орти) та позначити їх $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то вектор $\vec{a}$ матиме таке розкладання</td><td>

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
x , y , z – координати вектору $\vec{a}$.
Записують: $\vec{a} = (x, y, z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 1. Проекції вектора на координатні осі, числа x , y , z , називають його декартовими координатами.
Зауваження 2. Між компонентами та проекціями існує залежність, що компоненту отримують завдяки множенню основного одиничного вектору $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ на проекцію, тобто $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$</td></tr>
<tr><td>Координати вектору, який задано координатами початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$</td><td>

$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$</td></tr>
</table>

Довжина (модуль) вектору $\overrightarrow{AB}$ – це відстань між точками A та B: $$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$	
Довжина (модуль) вектору $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
ПРИКЛАД 1. Знайти модуль вектору $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати $A(-2,3,-4)$ та $B(-1,-2,5)$. *Розв'язання.* Оскільки відомі координати точок початку та кінця вектору, скористаємось формулою $$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right),$$ та отримаємо координати шуканого вектору $\overrightarrow{AB}$ $$\overrightarrow{AB}=\left(-1+2,-2-3,5+4\right)=\left(1,-5,9\right),$$ $$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{1+25+81}=\sqrt{107}.$$	
Дії над векторами, заданими своїми координатами	
Додавання Під час додавання векторів додаються їх однойменні проекції	$\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)$
Віднімання (різниця) Віднімання виконується аналогічно додаванню	$\vec{a}-\vec{b}=\left(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\right)$
Множення вектору на число Щоб помножити вектор на число, необхідно кожну координату цього вектору помножити на це число	$\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{c}=\lambda\vec{a}$, $\vec{c}=\lambda\vec{a}=\left(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\right)$

ПРИКЛАД 2. Знайти модуль вектору $\vec{a}$, якщо $\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}+\vec{d}$, де $\vec{c}=\left(-4,3,-1\right)$, $\vec{b}=\left(-3,-7,0\right)$, $\vec{d}=\left(2,1,-8\right)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектору $\vec{a}$, виконуючи дії з векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Спочатку знайдемо вектори $3\vec{b}$ та $2\vec{c}$:

$$3\vec{b}=\left(-3\cdot 3,-7\cdot 3,0\cdot 3\right)=\left(-9,-21,0\right),$$

$$2\vec{c}=\left(-4\cdot 2,3\cdot 2,-1\cdot 2\right)=\left(-8,6,-2\right).$$

Відшукаємо координати вектору $\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}+\vec{d}$:

$$\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}+\vec{d}=\left(-9+8+2,-21-6+1,0+2-8\right)=\left(1,-26,-6\right),$$

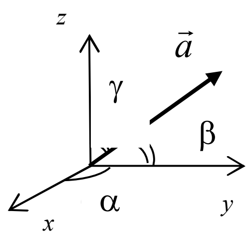
тоді $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+26^2+6^2}=\sqrt{1+676+36}=\sqrt{713}\approx 26,7$.

Напрямні косинуси вектору $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$ – це косинуси кутів α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатним напрямом відповідної осі Ox, Oy, Oz та які можна знайти за формулами

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$



ПРИКЛАД 3. Знайти координати вектору $\vec{a}$ та його напрямні косинуси, якщо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(1,-2,3)$, $B(3,-3,2)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектору $\overrightarrow{AB}$ за формулою $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(3-1,-3+2,2-3\right) = \left(2,-1,-1\right).$$

Для знаходження напрямних косинусів нам потрібно знайти модуль вектору, який обчислимо згідно формули $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},$$

а тепер знайдемо безпосередньо напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{6}}.$$

ПРИКЛАД 4. Визначити координати початку вектору $\overrightarrow{AB} = \left(2,-3,-1\right)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(4,-6,-2)$.

Розв'язання: Координати вектору за відомими координатами початку і кінця визначаються за формулою:

$$\overline{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right),$$

тобто

$$\overrightarrow{AB} = \left(4 - x_A, -6 - y_A, -2 - z_A\right) = \left(2,-3,-1\right),$$

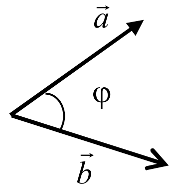
$$4 - x_A = 2, \quad -6 - y_A = -3, \quad -2 - z_A = -1,$$

$$x_A = 4 - 2 = 2, \quad y_A = -6 + 3 = -3, \quad z_A = -2 + 1 = -1.$$

Таким чином, початком вектору $\overrightarrow{AB} = \left(2,-3,-1\right)$ є точка $A(2,-3,-1)$.

2.5 Добутки векторів

2.5.1 Скалярний добуток векторів

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Скалярним добутком векторів називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними *Зауваження.* Знак скалярного добутку залежить від кута між векторами. Так, якщо кут φ – тупий, то скалярний добуток буде від'ємним, оскільки косинус тупого кута має від'ємне значення; якщо кут φ – гострий, то скалярний добуток буде додатним, тому що косинус гострого кута – додатний	Позначають: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\varphi$. 
Скалярний добуток *у координатній формі*	$\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
Скалярний добуток у *проекціях векторів*	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\|\vec{b}\right\|\cdot пр_{\vec{b}}\vec{a}=\left\|\vec{a}\right\|\cdot пр_{\vec{a}}\vec{b}$
Фізичний зміст скалярного добутку	$A=\vec{F}\cdot\vec{s}$, де A - це *робота сили* $\vec{F}$ при *переміщенні* $\vec{s}$

Обчислення косинуса кута між векторами	$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}$, $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}$
Властивості скалярного добутку	
Властивість *комутативності*	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
Властивість *розподілення*	$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
Властивість *асоціативності*	$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \cdot(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$
*Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів (*кут між ними становить 90^0). Якщо вектори перпендикулярні то їх скалярний добуток дорівнює нулю	$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$, $(\cos\varphi = 0)$
Скалярний добуток вектора на самого себе називають *скалярним квадратом*	$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$, $\vec{a}^2 = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}$

ПРИКЛАД 1. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що $\lvert\vec{a}\rvert = 2$ і $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, а кут φ між ними дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. За означенням скалярного добутку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\varphi = 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3.$$

ПРИКЛАД 2. При якому значенні α вектори $\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{b}-\alpha\vec{a}$ ортогональні?

$$\vec{a}=(0,2,2),\ \vec{b}=(3,1,2).$$

Розв'язання. Вектори є ортогональними тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.
Знайдемо координати векторів:

$$\vec{a}+3\vec{b}=(0,2,2)+3\cdot(3,1,2)=(0,2,2)+(9,3,6)=(9,5,8),$$

$$\vec{b}-\alpha\vec{a}=(3,1,2)-\alpha\cdot(0,2,2)=(3,1,2)-(0,2\alpha,2\alpha)=$$

$$=(3,1-2\alpha,2-2\alpha).$$

Складемо скалярний добуток і прирівняємо його до нуля:

$$\left(\vec{a}+3\vec{b},\vec{b}-\alpha\vec{a}\right)=(9,5,8)\cdot(3,1-2\alpha,2-2\alpha)=9\cdot 3+$$

$$+5\cdot\left(1-2\alpha\right)+8\cdot\left(2-2\alpha\right)=27+5-10\alpha+16-16\alpha=48-26\alpha,$$

$$48-26\alpha=0,\quad 26\alpha=48,$$

$$\alpha=\frac{48}{26}=\frac{24}{13}.$$

ПРИКЛАД 3. Перевірити на ортогональність вектори $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ та $\vec{b}=-7\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot\left(-7\right)-3\cdot\left(-2\right)+1\cdot 8=-14+6+8=0.$$

Отже, задані вектори перпендикулярні, тому що скалярний добуток заданих векторів дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 4. Знайти вектор $\vec{c}$, колінеарний вектору $\vec{a}=(-1,-1,5)$ і такий, що $(\vec{b},\vec{c})=2$, де $\vec{b}=(3,-2,-2)$.

Розв'язання. Нехай $\vec{c}=\left(x,y,z\right)$. За умовою колінеарності двох векторів: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{5}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$\left(\vec{b},\vec{c}\right)=3x-2y-2z=2.$$

Тоді

$$\begin{cases}\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{5};\\ 3x-2y-2z=2,\end{cases}\quad \frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{5}=t,\quad \begin{cases}\dfrac{x}{-1}=t;\\ \dfrac{y}{-1}=t;\\ \dfrac{z}{5}=t,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-t;\\ y=-t;\\ z=5t,\end{cases}$$

$$3\cdot\left(-t\right)-2\cdot\left(-t\right)-2\cdot 5t=2,$$

$$-3t+2t-10t=2,\quad -11t=2,\quad t=-\frac{2}{11},$$

$$\begin{cases}x=-\left(-\dfrac{2}{11}\right)=\dfrac{2}{11};\\ y=-\left(-\dfrac{2}{11}\right)=\dfrac{2}{11};\\ z=5\cdot\left(-\dfrac{2}{11}\right)=-\dfrac{10}{11}.\end{cases}$$

Таким чином, $\vec{c}=\left(\dfrac{2}{11},\dfrac{2}{11},-\dfrac{10}{11}\right)$.

ПРИКЛАД 5. Визначити роботу сили $\vec{F}(-2,4,3)$ під час руху з точки $A(-2,3,-4)$ до точки $B(2,-3,4)$.

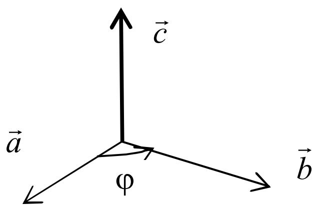
Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{s}$:

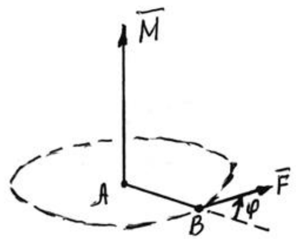
$$\vec{s}=\overrightarrow{AB}=\left(2+2,-3-3,4+4\right)=\left(4,-6,8\right).$$

Обчислимо роботу сили

$$A=\vec{F}\cdot\vec{s}=-2\cdot 4+4\cdot(-6)+3\cdot 8=-8-24+24=-8.$$

2.5.2 Векторний добуток векторів

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Векторним добутком двох векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ та $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє таким умовам: 1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) модуль вектору $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними; 3) трійка векторів та вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мають однакову орієнтацію (Додаток Б).	Позначають: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ або $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; 1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; 2) $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\varphi$; 3) 
Зауваження. Кут φ відкладається проти ходу годинникової стрілки	
Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ *у координатній формі*	$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$
Векторний добуток вектору на самого себе	$\vec{0}=\vec{a}\times\vec{a}$
Векторний добуток ортів (одиничних векторів)	$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

Геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограму, побудованого на цих векторах	$S_{паралелограма} = \left\lvert \vec{a} \times \vec{b} \right\rvert$ $S_{трикутника} = \frac{1}{2}\left\lvert \vec{a} \times \vec{b} \right\rvert$
Фізичний зміст векторного добутку: момент $\overrightarrow{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки A дорівнює векторному добутку сили $\vec{F}$, прикладеної у точці B, на вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$ (плече сили $\vec{F}$), який спрямований від точки A до точки B	$\overrightarrow{M} = \vec{F} \times \vec{s}$ 
Умова колінеарності векторів (паралельність векторів)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$
Властивості векторного добутку:	
При перестановці множників векторний добуток набуває протилежного знаку	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
Властивість *розподілення*	$\left(\vec{a} + \vec{c}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}$
Властивість *сполучення* відносно числового множнику	$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

ПРИКЛАД 1. Задані вектори $\vec{a} = (2, 7, 3)$, $\vec{b} = (-4, -1, 2)$, $\vec{c} = (-3, -4, 0)$. Знайти: 1) проекцію вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, 2) площу паралелограму, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. 1) знайдемо проекцію вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ за формулою:

$$np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|},$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(2-4;7-1;3+2)=(-2;6;5),$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-2\cdot(-3)+6\cdot(-4)+5\cdot 0=-18,$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}=\sqrt{25}=5,$$

$$np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{18}{5};$$

2) знайдемо площу паралелограму, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за формулою:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 7 & 3\\ -4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}7 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 7\\ -4 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(14+3)-\vec{j}\cdot(4+12)+\vec{k}\cdot(-2+28)=17\vec{i}-16\vec{j}+26\vec{k},$$

$$S=\sqrt{17^2+(-16)^2+26^2}=\sqrt{289+256+676}=\sqrt{1221}\text{ (кв. од.)}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти площу і довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо

$$\vec{a}=6\vec{p}+\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q},\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4,\ \angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|(6\vec{p}+\vec{q})\times(\vec{p}-\vec{q})\right|.$$

Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(6\vec{p}+\vec{q}\right)\times\left(\vec{p}-\vec{q}\right)=6\left(\vec{p}\times\vec{p}\right)-6\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)+\left(\vec{q}\times\vec{p}\right)-$$

$$-\left(\vec{q}\times\vec{q}\right)=6\cdot 0-6\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)-\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)-0=-7\left(\vec{p}\times\vec{q}\right).$$

Знайдемо модуль векторного добутку:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|-7\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)\right|=7\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=7\cdot 3\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=84\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=42\sqrt{2}.$$

Таким чином, $S=42\sqrt{2}$ (кв. од.).

Діагональ AC:

$$\left|AC\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(6\vec{p}+\vec{q}+\vec{p}-\vec{q}\right)^2}=\sqrt{\left(7\vec{p}\right)^2}=\sqrt{49\vec{p}^2}=$$

$$=\sqrt{49\cdot 3^2}=\sqrt{441}=21.$$

Діагональ BD:

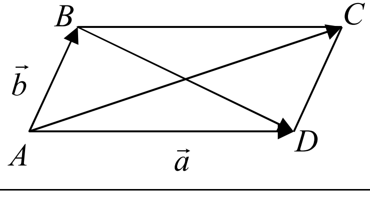
$$\left|BD\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(6\vec{p}+\vec{q}-\left(\vec{p}-\vec{q}\right)\right)^2}=\sqrt{\left(6\vec{p}+\vec{q}-\vec{p}+\vec{q}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(5\vec{p}+2\vec{q}\right)^2}=\sqrt{25\vec{p}^2+20\vec{p}\vec{q}+4\vec{q}^2}=$$

$$\sqrt{25\vec{p}^2+20\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)+4\vec{q}^2}=$$

$$=\sqrt{25\cdot 3^2+20\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{4}+4\cdot 4^2}=$$

$$=\sqrt{225+240\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+64}=\sqrt{289+120\sqrt{2}}\approx 21,42.$$



ПРИКЛАД 3. Спростити вираз $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)$.

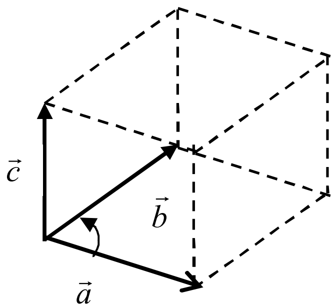
Розв'язання. Відкриємо дужки та скористаємось властивостями векторного добутку, отримаємо

$$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)=3\vec{a}\times 2\vec{a}-2\vec{b}\times 2\vec{a}+3\vec{a}\times 5\vec{b}-2\vec{b}\times 5\vec{b}=$$

$$=6\vec{a}\times\vec{a}-4\vec{b}\times\vec{a}+15\vec{a}\times\vec{b}-10\vec{b}\times\vec{b}=6\cdot\bar{0}-4\vec{b}\times\vec{a}+15\vec{a}\times\vec{b}-$$

$$-10\cdot 0=-4\vec{b}\times\vec{a}+15\vec{a}\times\vec{b}=4\vec{a}\times\vec{b}+15\vec{a}\times\vec{b}=19\vec{a}\times\vec{b}.$$

2.5.3 Мішаний добуток векторів

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Мішаним добутком трьох векторів або *векторно-скалярним добутком* називається число, абсолютна величина якого виражає об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах. Знак добутку буде додатним, якщо репери векторів та одиничних векторів мають однакову орієнтацію, або від'ємним у протилежному випадку (Додаток Б)	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$  $V=\left\|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\|$
Мішаний добуток векторів $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ та $\vec{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$ у *координатній формі*	$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

Геометричний зміст мішаного добутку: абсолютне значення мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах	$V_{паралелiпiп} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ $V_{пiрамiд} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Умова компланарності (або умова приналежності трьох векторів до однієї площини) *у координатній формі*	$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$
Властивості мішаного добутку	
Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$
Перестановка двох сусідніх множників змінює знак	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$
Властивість *розподілення*	$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{d}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$
Властивість *сполучення* відносно числового множнику	$\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\left(\lambda\vec{c}\right)$
Мішаний добуток *дорівнює нулю*, якщо: а) серед множників є нуль-вектор; б) два вектори колінеарні	$\vec{a}\vec{0}\vec{b} = 0$ $\vec{a}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{b} = 0$

ПРИКЛАД 1. Задані координати точок $A(2,2,1)$, $B(3,0,3)$, $C(13,4,11)$, $D(0,2,5)$. Знайти: 1) величину кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 2) площу трикутника ABC; 3) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання.

1) знайдемо кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},$$

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, 0-2, 3-1) = (1,-2,2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (13-2, 4-2, 11-1) = (11,2,10),$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 11 - 2\cdot 2 + 2\cdot 10 = 27,$$

$$\cos\varphi = \frac{27}{3\cdot 15} = \frac{3}{5},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right);$$

2) знайдемо площу трикутника ABC за формулою:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-20-4)\vec{i}-(10-22)\vec{j}+(2+22)\vec{k}=-24\vec{i}+12\vec{j}+24\vec{k}\ ,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-24)^2+12^2+24^2}=\sqrt{1296}=36\ ,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 36=18\ \text{(кв. од.)};$$

3) знайдемо об'єм піраміди $ABCD$ за формулою:

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|,$$

$$\overrightarrow{AD}=(0-2,2-2,5-1)=(-2,0,4)\ ,$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 11 & 2 & 10\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=8+0+40-(-8)-$$

$$-(-88)-0=144\ ,$$

$$V=\frac{1}{6}\left|144\right|=24\ \text{(куб. од).}$$

ПРИКЛАД 2. Задані вершини піраміди $A_1(2,-3,5)$, $A_2(0,2,1)$, $A_3(-2,-2,3)$, $A_4(3,2,4)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини A_4.

Розв'язання. Об'єм піраміди можна знайти за формулою $V=\dfrac{S_{\text{осн}}\cdot H}{3}$, звідки $H=\dfrac{3V}{S_{\text{осн}}}$.

Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо за допомогою векторного добутку за формулою:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(0-2,2+3,1-5)=(-2,5,-4)\ ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (-2-2, -2+3, 3-5) = (-4, 1, -2),$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-10+4)\vec{i} - (4-16)\vec{j} + (-2+20)\vec{k} = -6\vec{i} + 12\vec{j} + 18\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + 18^2} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14},$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14} \text{ (кв. од.)}.$$

Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ обчислимо за допомогою мішаного добутку трьох векторів, на яких побудована піраміда $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})\right|,$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (3-2, 2+3, 4-5) = (1, 5, -1),$$

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2+80-10+4-20-20 = 36$$

$$V = \frac{1}{6}|36| = 6 \text{ (куб. од.)}.$$

Тоді $\quad H = \dfrac{3 \cdot 6}{3\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{14}}{14} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

ПРИКЛАД 3. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ належать одній площині.

Розв'язання. Чотири точки належать одній площині, якщо три вектори, побудовані з цих точок, компланарні, тобто їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-2, 5+1) = (-1, -1, 6),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-1, 2-2, 1+1) = (-2, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-1, 1-2, 3+1) = (1, -1, 4).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 - 8 - 2 = 0.$$

Таким чином, точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ належать одній площині.

2.5.4 Подвійний векторний добуток

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Подвійним векторним добутком $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ називається векторний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$	$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} =$ $= \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$
Зауваження 1. Векторний добуток вектора $\vec{a}$ на векторний добуток $\vec{b}\times\vec{c}$ дорівнює $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, тож $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \ne \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$	

Властивості подвійного векторного добутку	
При круговій перестановці множників маємо три різні вектори	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} =$ $=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$, $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a} =$ $=\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} =$ $=\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$
При перестановці двох множників отримуємо інший вектор	$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}$, $-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}$
Розкладання вектору $\vec{b}$ на дві компоненти, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до заданого вектору $\vec{a}$ *Зауваження 2.* Якщо вектор $\vec{a}$ вважати одиничним, то маємо таке розкладання вектору $\vec{b}$	$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=$ $=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ тобто $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=$ $=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}^2\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$. $\vec{b}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}+\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$
Зауваження 3. Добутки чотирьох та більше векторів можна привести до добутків меншої кількості векторів	

ПРИКЛАД 1. Обчислити $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$.

Розв'язання. Введемо позначення $\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\vec{g}$ та зробимо перестановку в векторно-скалярному добутку $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{g}$, тоді

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{g}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{g}\right)=\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]=$$

$$=\vec{a}\cdot\left[\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\vec{d}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\right]=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

або $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$.

У випадку, коли $\vec{d}=\vec{a}$ знайдемо:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right).$$

ПРИКЛАД 2. Довести, що, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то виконується

$$\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]\right\}=\vec{a}^{\,4}\cdot\vec{b}.$$

Розв'язання. Як відомо

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{a}^{\,2}.$$

Помножимо векторно ліворуч на вектор $\vec{a}$, отримаємо:

$$\vec{a}\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]=-\vec{a}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{a}\right),$$

Повторюючи цю операцію, знайдемо:

$$\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]\right\}=\vec{a}^{\,2}\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right]=\vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)-$$

$$-\vec{a}^{\,2}\cdot\overrightarrow{a}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}^{\,4}\cdot\vec{b}.$$

Що й потрібно було довести.

2.6 Розкладання вектору за базисом

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис, графічне зображення</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо вектори $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}$ утворюють упорядковану лінійно незалежну систему і додавання до неї хоча б одного вектору робить її лінійно залежною, то система векторів $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}$ утворює базис</td></tr>
<tr><td>Якщо для довільного вектору $\vec{a}$ та довільної системи векторів $\left\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}\right\}$ виконується рівність (1), то кажуть, що вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією вказаної системи векторів</td><td>$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+...$
$...+a_n\vec{e_n}$ (1)</td></tr>
<tr><td>Рівність (1) називають розкладанням вектору $\vec{a}$ у базисі векторів $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}$</td><td>$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+...+a_n\vec{e_n}$,
де $a_1,a_2,...,a_n$ –
координати вектору $\vec{a}$ у новому базисі</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема. Будь який вектор у просторі можна розкласти за базисом, при цьому цей розклад єдиний</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження. Для того, щоб деякий вектор $\vec{a}$ розкласти за базисом $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}$ необхідно знайти коефіцієнти $a_1,a_2,...,a_n$, при яких лінійна комбінація векторів $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},...\vec{e_n}$ буде дорівнювати вектору $\vec{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі, якщо</td></tr>
</table>

$\vec{a} = (1,3,6)$, $\vec{b} = (-3,4,-5)$, $\vec{c} = (1,-7,2)$, $\vec{d} = (-2,17,5)$.

Розв'язання. Три вектори утворюють базис, якщо вони не компланарні. Складемо з координат цих векторів визначник, якщо визначник не дорівнює нулю, то вектори утворюють базис:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 126 - 24 + 18 - 35 = 78 \neq 0,$$

тобто вектори утворюють базис.

Для розкладання вектора $\vec{d}$ у новому базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ запишемо векторне рівняння: $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$.

Складемо систему рівнянь і розв'яжемо її методом Крамера:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2; \\ 3x + 4y - 7z = 17; \\ 6x - 5y + 2z = 5, \end{cases}$$

$$\Delta = 78,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 17 & 4 & -7 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 85 + 105 - 20 + 102 + 70 = 156,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 17 & -7 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 34 + 15 + 84 - 102 + 12 + 35 = 78,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 17 \\ 6 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 30 - 306 + 48 + 45 + 85 = -78,$$

$$x=\frac{156}{78}=2,\ y=\frac{78}{78}=1,\ z=\frac{-78}{78}=-1$$

Перевірка: $\begin{cases} 2-3\cdot 1-1=2-3-1=-2; \\ 3\cdot 2+4\cdot 1-7\cdot(-1)=6+4+7=17; \\ 6\cdot 2-5\cdot 1+2\cdot(-1)=12-5-2=5. \end{cases}$

Таким чином, $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

2.7 Власні вектори і власні числа квадратної матриці

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Будь-яку упорядковану множину n дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають n*-вимірною точкою* M, тобто $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множину всіх n-вимірних точок називають n*-вимірним точковим простором* R^n. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають *координатами* точки M. Число n називають *розмірністю простору*. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Розглянемо відповідне лінійне відображення простору R^n самого в себе: $\vec{y}=A\vec{x}$. Якщо існують ненульовий вектор $\vec{x}$ і число λ такі, що виконується рівність $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, то говорять, що λ – *власне число* матриці A, а $\vec{x}$ – її *власний вектор*, який відповідає власному числу λ. Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор. Вказане матричне рівняння можна подати у вигляді: $$A\vec{x}=\lambda E\vec{x},\ (A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$$	

<table>
<tr><td colspan="2">Ця однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв’язок $\vec{x}$ тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю
$$\det(A-\lambda E)=0 .$$
Одержане рівняння називається характеристичним рівнянням матриці A . Відповідний многочлен
$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)$$
називається характеристичним многочленом матриці A</td></tr>
<tr><td>Характеристичне рівняння в розгорнутій формі</td><td>$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Власні числа λ_j $(j=\overline{1,n})$ є коренями характеристичного рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Множину всіх власних чисел λ_j $(j=\overline{1,n})$ даної матриці називають її спектром</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо відоме деяке власне число λ , то з однорідної системи $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ можна знайти відповідні власні вектори</td></tr>
<tr><td colspan="2">Властивості власних чисел:
1. Кожному власному вектору відповідає одне власне число.
2. Якщо $\vec{x}$ – власний вектор з власним числом λ , то довільний вектор $\alpha\vec{x}$ $\alpha\neq 0$, колінеарний вектору $\vec{x}$, також є власним вектором з тим же власним числом λ . Значить, власний вектор визначається з точністю до довільного</td></tr>
</table>

ненульового множника. Зазвичай виділяють одиничні власні вектори.

3. Якщо $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_1$ – власні вектори матриці A з одним і тим же власним числом λ, то їх сума $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ також є власним вектором матриці A з тим же самим власним числом λ.

4. Визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел $\det A=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

5. *Слідом* матриці A називається сума всіх елементів головної діагоналі $SpA=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. Слід матриці A дорівнює сумі всіх її власних чисел

6. $SpA=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$

ПРИКЛАД 1. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda E|=0,$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\lambda&4\\4&1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)-16=1-2\lambda+\lambda^2-16=$$

$$=\lambda^2-2\lambda-15,$$

$$\lambda^2-2\lambda-15=0,$$

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64,$$

$$\lambda_1=\frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{2+8}{2}=5,$$

$$\lambda_2=\frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Таким чином, власними числами є $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-3$.

Знайдемо відповідні власні вектори.

Нехай $\lambda_1=5$, підставимо його в однорідну систему рівнянь:

$$(A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\4 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}1-5 & 4\\4 & 1-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 4\\4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0.$$

Розв’яжемо отриману систему: $\begin{cases}-4x_1+4x_2=0;\\4x_1-4x_2=0.\end{cases}$

З обох рівнянь маємо: $x_1=x_2$. Нехай $x_2=1$, тоді $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Таким чином, власному числу $\lambda_1=5$ відповідає власний вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\lambda_2 = -3$, підставимо його в однорідну систему рівнянь:

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1-(-3) & 4 \\ 4 & 1-(-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Розв'яжемо отриману систему: $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

З обох рівнянь маємо: $x_1 = -x_2$. Нехай $x_2 = 1$, тоді $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, власному числу $\lambda_2 = -3$ відповідає власний вектор $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ПРИКЛАД 2. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$|A-\lambda E|=0,$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(1-\lambda)^3+1+1-(1-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)=0,$$

$$-\lambda^3+3\lambda^2=0,$$

$$\lambda^2(3-\lambda)=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=3.$$

Таким чином, власними числами є $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$.

Знайдемо відповідні власні вектори. Нехай $\lambda_1=0$, підставимо його в однорідну систему рівнянь:

$$\left(A-\lambda E\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Розв'яжемо отриману систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Маємо: $x_1 = -x_2 - x_3$, $x_2, x_3 \in R$. Нехай $x_2 = 0,\ x_3 = 1$, тоді $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, власному числу $\lambda_1 = 0$ відповідає власний вектор $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $x_2 = 1,\ x_3 = 0$, тоді $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, власному числу $\lambda_2 = 0$ відповідає власний вектор $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Нехай $\lambda_3 = 3$, підставимо його в однорідну систему рівнянь:

$$(A-\lambda E)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0, \qquad \begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}1-3 & 1 & 1\\ 1 & 1-3 & 1\\ 1 & 1 & 1-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

Розв'яжемо отриману систему: $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0;\\ x_1-2x_2+x_3=0;\\ x_1+x_2-2x_3=0.\end{cases}$

Маємо: $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0;\\ x_2-x_3=0;\\ 0\cdot x_3=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x_3\in \mathrm{R};\\ x_2=x_3;\\ x_1=x_3.\end{cases}$ нехай $x_3=1$, тоді

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Таким чином, власному числу $\lambda_3=3$ відповідає

власний вектор $X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
2. Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия / М. Я. Выгодский. – М. : Наука, 1963. – 528 с.
3. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Наука, 1973. – 872 с.
4. Гуран І. Математика для економістів : Підручник / І. Гуран, О. Гутік. – Львів, 2006. – 382 с.
5. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математичний аналіз / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в четырех частях / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
7. Коваленко Л. Б. Вища математика (модуль 1) : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.
8. Колосов А. І. Вища математика для економістів : у 2-х модулях : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 – Економіка підприємства і 6.030509 – Облік і аудит [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Модуль 2. – 257 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/35973/.
9. Конев В. В. Линейная алгебра : учеб. пособие / В. В. Конев. – Томск : Изд. ТПУ, 2008. - 65 с.

10. Кузнецова Г. А. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/34810.

11. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1966. – 272 с.

12. Ситникова Ю. В. Вища математика : конспект лекцій з дисципліни (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа) / Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 158 с.

АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Правила перетворення многочленів

Під час додавання та віднімання многочленів користуються правилами розкриття дужок, як то:

1) щоб відкрити дужки перед якими стоїть знак плюс, потрібно просто опустити дужки, при цьому усі знаки одночленів зберігаються;
2) щоб відкрити дужки перед якими стоїть знак мінус, потрібно опустити дужки та замінити усі знаки одночленів на протилежні.

Щоб додати або відняти многочлени потрібно:

1) відкрити дужки за правилами розкриття дужок;
2) максимально привести подібні.

Щоб помножити многочлен на одночлен потрібно кожен одночлен многочлена помножити на одночлен і потім привести подібні.

Щоб помножити многочлен на многочлен потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен одночлен іншого многочлена та додати отримані добутки.

При цьому слід пам’ятати про формули скороченого множення, які спрощують процес множення многочленів.

ДОДАТОК Б

Поняття реперу в просторі

Просторовим репером називають сукупність трьох не компланарних векторів, докладених до однієї точки та заданих у визначеному порядку. Наприклад,

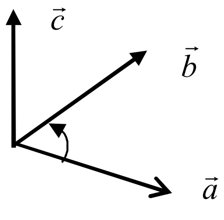


Рисунок Б.1

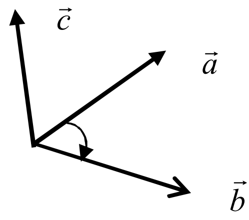


Рисунок Б.2

на рисунку Б.1 представлено *правий репер,* тому що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектору $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки для спостерігача, око якого знаходиться у кінці вектору $\vec{c}$. Якщо поворот виконується за годинниковою стрілкою, як на рисунку Б.2, то репер називають *лівим.* Якщо задані два репери і кожен з них правий або лівий, то кажуть, що ці репери мають *однакову орієнтацію*; якщо один правий, а інший – лівий, то репери мають *протилежну орієнтацію.*

Довідкове видання

СИТНИКОВА Юлія Валеріївна,
ЛАМТЮГОВА Світлана Миколаївна,
КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
У СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2017, поз. 139М

Підп. до друку 30.05.2018. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,3
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.