

В.В. Собчук, О.В. Чичурін, І.В. Кальчук, Т.В. Жигалло

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
АНАЛІЗУ ТА
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ
ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ
АЛГЕБРИ MATHEMATICA**

Міністерство освіти і науки України
Волинський національний університет імені Лесі Українки

В.В. Собчук, О.В. Чичурін, І.В. Кальчук, Т.В. Жигалло

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
АНАЛІЗУ ТА
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ
ЗАСОБАМИ КОМП’ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ
MATHEMATICA

Підручник

Рекомендовано вченою радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки

Київ – 2021

УДК 519.62/.63+517]:510.589](075.8)

С 55

*Рекомендовано вченою радою Волинського національного
університету імені Лесі Українки (протокол No 14 від 26 листопада 2020 р.)
Серія «Посібники та підручники ВНУ імені Лесі Українки»*

Рецензенти:

Барабаш О. В. — доктор технічних наук, професор, професор кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів і систем Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”;

Пічкур В. В. — доктор фіз.-мат. наук, доцент, професор кафедри моделювання складних систем факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Харкевич Ю. І. — кандидат фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри теорії функцій та методики викладання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

С 55 Собчук В. В. Розв’язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп’ютерної алгебри Mathematica: підручник. /

Собчук Валентин Володимирович, Чичурін Олександр Вячеславович, Кальчук Інна Володимирівна, Жигалло Тетяна Василівна – Київ: Міленіум, 2021. 420 с.

ISBN 978-966-8063-79-8

Підручник висвітлює застосування системи комп’ютерної алгебри Mathematica для розв’язування задач математичного аналізу, алгебри, теорії функцій, чисельних методів та диференціальних рівнянь. Видання пропонує новітні підходи до вивчення класичних курсів математики, розширює горизонти викладацької та студентської спільноти в процесі вивчення даних дисциплін.

Книга адресована викладачам, аспірантам, студентам вузів, які здобувають фах за освітніми програмами “Математика”, “Комп’ютерна математика”, “Прикладна математика”, “Середня освіта (Математика)”, “Системний аналіз”, “Комп’ютерні науки” та спеціалізуються в області математичного аналізу, теорії функцій, теорії диференціальних рівнянь, динамічних систем, теорії стійкості та в галузі математичного моделювання.

ISBN 978-966-8063-79-8

УДК 519.62/.63+517]:510.589](075.8)

© Собчук В.В., Чичурін О.В.,
Кальчук І.В., Жигалло Т.В.

© Волинський національний університет
імені Лесі Українки, 2021 р.

V.V. Sobchuk, A.V. Chichurin, I.V. Kalchuk, T.V. Gygalo

**SOLVING PROBLEMS
OF ANALYSIS AND
DIFFERENTIAL
EQUATIONS
BY MEANS
OF COMPUTER ALGEBRA
MATHEMATICA**

ЗМІСТ

ВСТУП.....	12
РОЗДІЛ І. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ	
КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ	19
1.1. Характеристика систем комп'ютерної алгебри	19
1.1.1. Призначення, як працюють системи комп'ютерної алгебри.....	20
1.1.2. Типова структура системи комп'ютерної алгебри	22
1.1.3. Основні функціональні можливості систем комп'ютерної алгебри	24
1.1.4. Огляд систем комп'ютерної алгебри	27
РОЗДІЛ ІІ. ОСНОВИ РОБОТИ З СИСТЕМОЮ MATHEMATICA.....	36
2.1. Арифметичні оператори, функції, константи.....	37
2.1.1. Арифметичні функції.....	37
2.1.2. Іменовані константи.....	39
2.1.3. Скорочена форма представлення арифметичних операцій	40
2.2. Типи даних	42
2.2.1. Арифметичні операції з цілими та раціональними числами	42
2.2.2. Арифметичні операції з дійсними числами.....	43
2.2.3. Арифметичні операції з комплексними числами	45
2.2.4. Змінні	46
2.3. Вирази, їх перетворення та обчислення.....	48
2.3.1. Функції, оператори і символи обчислення виразів.....	48
2.3.2. Підстановки	50
2.3.3. Перетворення виразів	52

Питання, тести для самоконтролю	60
Обов'язкові та додаткові задачі	60
РОЗДІЛ III. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ.....	62
3.1 Двовимірна графіка.....	63
3.1.1. Графічна функція Plot.....	63
3.1.2. Вибір стилю графіка	69
3.1.3. Позначення кривих на графіках функцій	72
3.1.4. Графіки спеціальних типів	73
3.2. Тривимірна графіка.....	77
3.2.1. Створення контурних графіків	77
3.2.2. Побудова графіків поверхні	78
3.2.3. Побудова фігур.....	79
Питання, тести для самоконтролю	81
Обов'язкові та додаткові задачі	82
РОЗДІЛ IV. СПЕЦІАЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ	84
4.1. Обчислення сум.....	84
4.1.1. Обчислення сум в аналітичному вигляді.....	84
4.1.2. Обчислення сум в чисельному вигляді.....	87
4.1.2. Обчислення сум з використанням символу сумування	88
4.2. Табулювання функції.....	89
4.3. Обчислення границь	94
4.3.1. Технологія обчислення границь в системі Mathematica	94
4.4. Розклад функції в степеневий ряд	98
4.3.1. Технологія розкладу функції в ряд Тейлора в системі Mathematica	

.....	98
4.3.2. Похибки степеневих рядів Тейлора	104
4.3.3. Комп'ютерні технології оцінки похибки рядів	104
4.5. Обчислення похідних.....	108
Питання, тести для самоконтролю	112
Обов'язкові та додаткові задачі	113
РОЗДІЛ V. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ СТВОРЕННЯ ВЕКТОРІВ ТА МАТРИЦЬ	116
5.1. Типи даних	116
5.1.1. Дійсні числа	117
5.1.2. Комплексні числа	119
5.1.3. Символьні змінні	120
5.1.4. Списки і масиви.....	120
5.2. Представлення векторів та матриць	120
5.2.1. Генерація векторів та матриць за допомогою функції Range.....	122
5.2.2. Генерація векторів та матриць за допомогою функції Table.....	122
5.2.3. Виділення та введення елементів векторів та матриць	123
5.3. Робота зі списками. Створення векторів та матриць.....	127
5.3.1. Виявлення структури вектора чи матриці	127
5.3.2. Перетворення та створення векторів та матриць.....	128
5.3.3. Комбінування векторів та матриць	132
5.3.4. Створення векторів та матриць.....	133
5.4. Математичні операції над векторами та матрицями	134
5.4.1. Арифметичні операції.....	134

5.4.2. Арифметичні операції.....	136
5.4.3. Математичні операції з векторами та матрицями	137
Питання, тести для самоконтролю	138
Обов'язкові та додаткові задачі	139
РОЗДІЛ VI. МАТЕМАТИЧНІ ФУНКЦІЇ.....	141
6.1. Елементарні математичні функції.....	141
6.1.1. Безпосереднє обчислення функцій.....	142
6.1.2. Присвоєння аргументу числового значення.....	142
6.2. Спеціальні математичні функції.....	143
6.2.1. Ортогональні поліноми.....	143
6.2.2. Інтегральні показникові функції.....	147
6.2.3. Гамма-функція	150
6.2.4. Функції Бесселя	155
6.2.5. Функції Ейрі.....	160
6.2.6. Бета-функція (ейлерів інтеграл першого роду).....	165
6.2.7. Функції статистичних розподілів та функції помилок.....	167
6.2.8. Функції генерації випадкових чисел	170
6.2.9. Еліптичні інтеграли і функції	171
6.3. Інтегральні перетворення	181
6.3.1. Перетворення Лапласа	181
6.3.2. Z-перетворення	185
6.3.3. Перетворення Фур'є.....	186
Питання, тести для самоконтролю	190
Обов'язкові та додаткові задачі	191

РОЗДІЛ VII. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ195

7.1. Пошук мінімального та максимального числа в сукупності чисел	195
7.2. Класичний метод визначення екстремуму аналітичної функції	198
7.2.1. Визначення координат точок перегину	202
7.3. Пошук локального мінімуму аналітичної функції	203
7.4. Пошук глобального максимуму (мінімуму) аналітичної функції...	208
Питання, тести для самоконтролю	211
Обов'язкові та додаткові задачі	212

РОЗДІЛ VIII. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ214

8.1. Розв'язування рівнянь в аналітичному вигляді.....	214
8.1.2. Функція Roots	217
8.2. Чисельні методи розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь	220
8.2.1. Функція NSolve.....	220
8.2.2. Функція NRoots	222
8.2.3. Функція FindRoot	223
8.3. Інтервальні методи розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь	225
8.4. Визначення коренів рівнянь із застосуванням інтерполяції.....	228
8.5. Перевірка правильності розв'язку рівняння.....	230
Питання, тести для самоконтролю	234
Обов'язкові та додаткові задачі	235

РОЗДІЛ IX. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ236

9.1. Методи та алгоритми розв'язування систем алгебраїчних рівнянь	236
--	-----

9.1.1. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	236
9.1.2. Розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь	243
9.2. Комп'ютерні технології розв'язування рівнянь в системі Mathematica	245
9.2.1. Функція Solve[F,X].....	245
9.2.2. Функція Solve[F,X,Y].....	252
9.2.3. Функція NSolve[F,X].....	253
9.2.4. Опції функція Solve.....	255
9.2.5. Функція FindRoot[F, {X,x ₀ }]	255
9.2.6. Функція Eliminate[F,x]	257
9.2.7. Матричні методи розв'язування систем лінійних рівнянь	260
Питання, тести для самоконтролю	263
Обов'язкові та додаткові задачі	264
РОЗДІЛ X. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	266
10.1. Розв'язування диференціальних рівнянь в середовищі Mathematica	266
10.1.1. Аналітичні методи.....	267
10.1.2. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь	274
10. 2. Чисельні розв'язки диференціальних рівнянь	286
10.2.1. Метод Ейлера.....	286
10.2.2. Метод Рунге–Кутти.....	291
10.2.3. Метод Адамса	297
10. 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	301
10. 4. Системи диференціальних рівнянь першого порядку.....	307

10. 5. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку	315
10. 6. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків	325
10. 7. Системи лінійних диференціальних рівнянь.....	331
10. 8. Нелінійних диференціальні рівняння першого порядку	344
10. 9. Нелінійних диференціальні рівняння вищих порядків	369
10. 10. Різницевий метод. Апроксимація, стійкість, збіжність.....	379
10. 11. Система Лоренца та глобальний атрактор	392
10. 12. Диференціальні рівняння в частинних похідних	398
10.12.1. Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку	399
10.12.2. Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку	402
Питання, тести для самоконтролю	412
Обов'язкові та додаткові задачі	413
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	415

ВСТУП

Стрімкий розвиток інформаційних технологій призвів до створення програмних технологій, що дозволяють значно полегшувати обчислення багатьох задач з різних областей математики, фізики, біології тощо. До такого інструментарію відносяться системи комп'ютерної алгебри, тобто засоби автоматизації математичних розрахунків. В цьому класі програмного забезпечення існує багато аналогів різної спрямованості і принципу побудови.

Комп'ютерну математику можна визначити як сукупність теоретичних, методичних, алгоритмічних, апаратних і програмних засобів, які призначені для ефективного розв'язування за допомогою комп'ютерів широкого кола математичних задач з високим ступенем візуалізації. Широкого поширення набувають різноманітні засоби комп'ютерної математики, зокрема програмні, які називають системами комп'ютерної математики (СКМ).

Системи комп'ютерної математики або так звані системи комп'ютерної алгебри — це клас програмного забезпечення (комп'ютерна програма або пакет програм), що дозволяє виконувати найрізноманітніші математичні операції та перетворення математичних виразів, заданих в чисельній та символьній (змінні, функції, поліноми, матриці тощо) формах.

Комп'ютерна алгебра — галузь математики, що лежить на межі алгебри та обчислювальних методів. Усі широко відомі СКМ дозволяють проводити як символьні обчислення, так і використовувати чисельні методи. Сьогодні такі системи є одним із основних обчислювальних інструментів комп'ютерного моделювання. Вони знаходять застосування у різних галузях науки.

Сучасні системи комп'ютерної математики містять функції практично з усіх розділів математики, підтримують інтерактивну візуалізацію, одну чи кілька мов програмування і часто дозволяють комбінувати алгоритми,

математичні формули, текст, графіку, діаграми чи анімацію зі звуком, а також результати обчислення в одному файлі.

СКМ полегшують та прискорюють розв'язування складних задач, мінімізують можливість помилки у розрахунках та прибирають психологічний бар'єр при розв'язанні складних математичних задач, роблячи цей процес цікавим та простішим. Використання СКМ дає можливість не заглиблюватись у математичні розрахунки (використання програми як своєрідного надпотужного калькулятора для виконання розрахунків за алгоритмами), або навпаки, поглиблене розв'язування задачі (стандартне розв'язування задачі, що супроводжується самостійним аналізом і розробкою алгоритму розв'язання або поглиблений розв'язок задачі, що супроводжується віртуальними експериментами).

На теперішній момент системи комп'ютерної математики (професійного призначення) представлені переважно продуктами компаній MathSoft, MathWorks, Waterloo Maple тощо. Вони стають потужними засобами діяльності як професійних математиків, так і тих, хто використовує математику для побудови й дослідження математичних моделей в різних предметних галузях, зокрема, й в системі освіти. Їх використовують для розв'язування наукових, інженерних, навчальних задач, наочної візуалізації даних і результатів обчислень і як зручні та повні довідники з математичних обчислень. Завдяки потужній графіці, засобам візуального програмування й використання техніки мультимедіа роль СКМ виходить далеко за межі лише математичних розрахунків. Вони широко використовуються в освіті як потужні інструментальні засоби для підготовки електронних уроків, курсів лекцій та електронних книг з динамічними прикладами, які студент сам може змінювати та виконувати навчальні дослідження.

Завдяки створенню СКМ професійні математики, а також ті, хто використовує математичні методи, одержали потужні засоби інтенсифікації діяльності. Їх використання дає змогу значною мірою підсилити інтелектуальну діяльність, можливість автоматизувати виконання не тільки

чисельних, а й аналітичних (символьних) обчислень та графічних побудов. За допомогою СКМ можна виконувати такі види аналітичних обчислень, як знаходження границь функцій та похідних, обчислення невизначених та визначених інтегралів, розкладання функцій в ряди, розв'язування багатьох класів диференціальних рівнянь в аналітичному поданні, виконання різноманітних спрощень, перетворень, підстановок тощо.

За останні кілька десятиріч розроблено низку математичних пакетів як спеціалізованих (Eureca, MacMath, StatGraph, Reduse, MacSyma, SketchPad, Cabrs і ін.), так і універсальних (Derive, MathCad, MathLab, Maple, Mathematica, MuPad) зі зручним інтерфейсом, в яких реалізовано значну кількість стандартних та спеціальних математичних операцій та функцій, потужні графічні засоби дво- і тривимірної графіки, власні мови програмування, засоби підготовки математичних текстів для друку, експортування даних в інші програмні продукти та імпортування з них даних для опрацювання. Все це забезпечує широкі можливості для ефективної роботи з пакетами фахівців різних профілів. Системи комп'ютерної математики активно використовуються у навчальному процесі в всьому світі. Так, згідно даних офіційного сайту розробника системи Mathematica, тисячі університетів з 61 країни є офіційними користувачами системи Mathematica. Серед них такі освітні заклади: Пекінський, Кембриджський, Колумбійський, Гарвардський, Стенфордський, Московський державний, Австралійський національний, Каліфорнійський, Оксфордський університети, Лондонська школа економіки та політичних наук і багато інших. Згідно результатів дослідження, представленого норвезькими науковцями, використання систем комп'ютерної математики у навчальному процесі є звершеним фактом, які відмічають ефективність використання таких продуктів. Крім того, дослідники зазначають, що впровадження таких систем у процес навчання повинно бути метою для технічної освіти, та пропонують такі рекомендації для підвищення ефективності даного процесу: орієнтація на використання єдиного програмного засобу в межах освітнього закладу; побудова курсів,

що базуються на математиці з урахуванням використання відповідної системи; наявність комп'ютерних лабораторій, що дозволяють ефективно використовувати програмний засіб. Все ширшого поширення набувають згадані математичні пакети в системі освіти, зокрема у ВНЗ в процесі підготовки вчителів математики. СКМ використовуються як компоненти комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання. Їх використання дає змогу ефективно будувати та досліджувати математичні моделі, проводити навчальні дослідження. Це відповідає Болонському процесу удосконалення вищої освіти. У четвертому пункті Великої Хартії університетів, який стосується методології організації навчальних досліджень та освітнього процесу в університетах, зокрема вказується, що студенти залучаються до участі в наукових дослідженнях і що основним методом навчання є проведення навчальних досліджень у рамках навчальних предметів, які моделюють наукові дослідження у відповідній предметній галузі. Причому форми навчальної роботи постійно вдосконалюються та наближаються до методології відповідної галузі науки. Використання дослідницького підходу стосується не тільки університетської освіти, а й шкільної.

Отже, підготовка майбутніх учителів математики до використання СКМ як в процесі навчання, так і в подальшій професійній діяльності набуває особливого значення. Тому розробка методик навчання математичних дисциплін з використанням СКМ, створення на їх основі інформаційних навчальних середовищ є досить актуальною проблемою. На даний час в складному процесі реформування системи освіти, намаганнях зберегти традиції високого рівня фундаментальності математичних навчальних програм зі збагаченням їх ідеями дослідницьких підходів у навчанні (які включають у себе: постановку задачі, формування та експериментальну перевірку гіпотез, пошук дедуктивних доведень, систематизацію нових знань, метод проєктів), учнецентриської освіти, освітніх методів співпраці, міжпредметної та практичної орієнтації навчання математики, розв'язання

життєво важливих задач. Крім професійних математичних пакетів (які досить ефективно можуть бути використані у навчальному процесі ВНЗ і значно менше у загальноосвітній школі) створюються спеціальні пакети, основним призначенням яких є підтримка навчання шкільного та університетських курсів математики, використання математичних методів в процесі навчання інших предметів. На основі цих програмних засобів (їх природно віднести також до СКМ) створюють зручне комп'ютерно-орієнтоване навчальне середовище для експериментування в певній математичній галузі (алгебрі, математичному аналізі, планіметрії, стереометрії, теорії ймовірності і математичній статистиці, математичній логіці тощо), надають низку послуг розв'язання типових математичних задач, візуалізації абстракцій. Досить плідними щодо генерування нових ідей, дослідження закономірностей дає використання СКМ, в яких реалізовано режим динамічних параметрів (прямого керованого неперервного маніпулювання параметрами комп'ютерної моделі).

Світовими лідерами серед пакетів динамічної геометрії є такі: Cabri (Франція), SketchPad (США), Cinderella (ФРН), Next (ФРН). Серед пакетів комп'ютерної алгебри: Derive (Нова Зеландія); Mathematica (США); Maple (США); MathCAD (США). У більшості розвинених країн світу комп'ютерні математичні системи, зокрема пакети динамічної геометрії і комп'ютерної алгебри, є визнаними і прийнятими засобами навчання математики.

Особливої уваги заслуговують програмні продукти, що створюються українськими розробниками. Саме такі програми розраховані на вітчизняну методичну систему навчання математики. В Україні створено кілька систем комп'ютерної математики, рівень розробки яких відповідає світовим і які рекомендовані Міністерством освіти і науки України для використання у навчальному процесі загальноосвітніх навчальних закладів. Це, зокрема:

- Gran1 (автори М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова) призначена для

підтримки навчання алгебри і початків аналізу, стохастики; містить режим динамічних параметрів;

- Gran-2D (автори М.І. Жалдак, О.І. Вітюк; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова),
- DG (автори С.А. Раков, К.О. Осенко; Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди) – пакети динамічної геометрії;
- Gran-3D (автори М.І. Жалдак, О.І. Вітюк; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова) для підтримки навчання стереометрії, частково – алгебри і початків аналізу;
- ТерМ (автор М.С. Львов; Херсонський державний університет) призначено для комп'ютерної підтримки практичних занять з алгебри в загальноосвітній школі.

На базі цих програмних засобів створено програмно-методичні комплекси ПМК Gran, DG, ТерМ, що успішно використовуються в школах і ВУЗах України. Досить відомі вони і за межами України. І все ж головною проблемою на даний час є розробка методик (методичних систем навчання), орієнтованих на використання створених СКМ у навчальному процесі, створення навчального та методичного забезпечення з питань їх використання в навчальному процесі та відповідна підготовка вчителів, формування у них інформаційної культури.

Використання комп'ютера та інформаційних технологій дають змогу збагатити математичну науку, розширити її застосування, суттєво вплинути на математичну діяльність (зміст, методи, засоби). Що ж до змісту освіти (зокрема математичної), то слід зазначити, що засвоїти обсяг знань, якого буде достатньо у суспільстві знань, не вдасться, оскільки термін подвоєння знань постійно скорочується. На даний момент за різними оцінками вони складають менше 10 років. Тому слід вчитися все життя. Таким чином, головним змістом математичної освіти стане не опанування певними алгоритмами розв'язування математичних задач (вони, до речі, досить

ефективно розв'язуються за допомогою комп'ютера), а математична компетентність, розуміння і застосування математичних методів дослідження. Все це, очевидно, повинно враховуватися при розробці систем навчання математичних дисциплін і в середній, і у вищій школі.

Однією з найпотужніших поширених систем комп'ютерної алгебри є Mathematica. Вона має надзвичайно велику функціональну наповненість (є навіть синтезування звуку). Mathematica має високу швидкість обчислень. Можливості Mathematica орієнтовані на користувачів — професійних математиків; розв'язування задач в середовищі Mathematica вимагає не тільки вміння оперувати будь-якою функцією, але й знань методів розв'язання прикладних задач, призначення та способів застосування вбудованих функцій та процедур.

Система комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica була розроблена компанією Wolfram Research. Вона містить безліч функцій, як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків. Крім того, система підтримує роботу з графікою і звуком, включаючи побудову дво- і тривимірних графіків функцій, рисування довільних геометричних фігур, імпорт і експорт зображень та звуку. Крім того, Mathematica — це інтерпретована мова функціонального програмування. Mathematica підтримує і процедурне програмування із застосуванням стандартних операторів управління виконанням програми (цикли і умовні переходи), і об'єктно-орієнтований підхід. Mathematica допускає відкладені обчислення. Також в системі Mathematica можна задавати правила роботи з тими чи іншими виразами. Mathematica — гнучка символна мова, що підтримує безліч парадигм програмування, просунуті інструменти відлагодження, автоматичне проектування інтерфейсу тощо. Вона спрощує весь процес розробки від дизайну до впровадження. Mathematica всі дані, програми, формули, графіки, документи представляє у вигляді символних виразів. Повноцінна робота в Mathematica потребує глибокого розуміння вбудованого інструментарію, що забезпечує можливість розв'язання задач самої складної природи.

РОЗДІЛ I. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Характеристика систем комп'ютерної алгебри

Комп'ютерні математичні системи, як клас спеціалізованих програмних засобів, розрахованих на індивідуальну роботу, з'явилися на початку 80-х років XX століття. Цьому сприяло зародження в цей же час індустрії персональних комп'ютерів, що відкрило дорогу таким системам до масового користувача. За час, що минув від початку нинішнього століття, світ комп'ютерної математики докорінно змінився в порівнянні з багатьма іншими сегментами програмного забезпечення. Суттєво зросла продуктивність існуючих систем, значно збагатився набір їх функціональних можливостей, увібравши в себе результати новітніх наукових досліджень. З'явилися нові оригінальні програмні продукти для розв'язання різноманітних математичних задач. Ці програмні продукти виокремились в повноцінну розвинену область математичної науки — комп'ютерну математику.

Комп'ютерна математика — це сукупність методів та засобів, що забезпечують максимально комфортну і швидку підготовку алгоритмів і програм для розв'язання математичних задач будь-якої складності, при цьому, в переважній більшості випадків, з високим рівнем візуалізації всіх етапів розв'язання.

Системи комп'ютерної математики (СКМ) за переважаючим типом обчислень поділяють на два класи:

- *інженерні пакети* — створені для ефективного виконання громіздких чисельних розрахунків;
- *системи комп'ютерної алгебри* — орієнтовані, насамперед, на символічні перетворення математичних об'єктів й аналітичне розв'язання пов'язаних з ними задач.

Зауважимо, що в наукових дослідженнях і технічних розрахунках фахівцям доводиться значно більше часу присвячувати перетворенням формул, ніж власне чисельним розрахункам, однак, коли з'явилися ЕОМ основна увага приділялася саме автоматизації чисельних розрахунків.

Комп'ютерна алгебра виникла в середині ХХ століття на стику математики та інформатики. Це наука про ефективні алгоритми обчислень математичних об'єктів. Синонімами терміну “комп'ютерна алгебра” є “символьні обчислення”, “аналітичні обчислення”, “аналітичні перетворення”, “формальні обчислення”.

Система комп'ютерної алгебри (СКА, англ. *Computer algebra system*, CAS) — це прикладна програма для символьних обчислень, тобто виконання перетворень і роботи з математичними виразами в аналітичній (символьній) формі.

У системах комп'ютерної алгебри широко представлені багато розділів математики, зокрема: символьне інтегрування, гіпергеометричне підсумовування, границі, похідні від елементарних і спеціальних функцій, системи алгебраїчних рівнянь, диференціальні рівняння, факторизація поліномів, чисельні методи, діофантові рівняння тощо.

Активна розробка систем комп'ютерної алгебри розпочалася в кінці 60-х років ХХ століття. З тих пір створено велику кількість різних систем, які отримали різну ступінь поширення, деякі системи продовжують розвиватися, інші відмирають, постійно з'являються нові.

1.1.1. Призначення, як працюють системи комп'ютерної алгебри

Основне призначення систем комп'ютерної алгебри (СКА) — робота з математичними виразами в символьній формі. Базовими типами даних СКА є числа і математичні вирази. СКА працюють таким чином:

- i. математичні об'єкти (алгебраїчні вирази, ряди, рівняння, вектори, матриці тощо) і вказівки, що з ними робити, задаються

користувачем на вхідній мові системи у вигляді символьних виразів;

- ii. інтерпретатор аналізує і переводить символьні вирази у внутрішнє представлення;
- iii. символьний процесор системи виконує необхідні перетворення або обчислення і видає відповідь у математичній нотації (рис. 1.1, 1.2).

Алгоритми внутрішніх перетворень мають алгебраїчну природу, що й відображено в назві систем.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} x^2 - y = 0 \\ x^2 - (y-2)^2 = 0 \end{array} \right] \text{solve}, x, y &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx &\rightarrow \ln(x-2) - \frac{5}{x-2} \\ (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 \text{expand} &\rightarrow x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 \end{aligned}$$

Рис. 1.1. Приклади символьних перетворень в MathCAD.

Далеко не кожна математична задача має обумовлений наявними математичними формалізмами аналітичний розв'язок.

```
solve([x^2-y=0,x^2-(y-2)^2=0],[x,y]);
[[x=-2,y=4],[x=1,y=1],[x=-1,y=1],[x=2,y=4]]

integrate((x+3)/(x^2-4*x+4),x);
log(x-2)-5/(x-2)

expand((x-1)*(x+2)*(x-3)^2);
x^4-5 x^3+x^2+21 x-18
```

Рис. 1.2. Приклади символьних перетворень в Maxima.

Фахівці з прикладної і комп'ютерної математики одностайні в думці, що багато важливих прикладних задач не можуть бути формалізовані настільки, щоб бути розв'язаними аналітично, в кращому випадку вони можуть розв'язуватись лише чисельними методами.

Стосовно класифікації систем комп'ютерної алгебри необхідно відзначити, що за *критерієм функціонального призначення* часто виокремлюють такі СКА

- *загального призначення (універсальні)* — найвідоміші з цих систем: Derive, Mathematica, Maple, Macsyma (і її наступник Maxima), Scratchpad (і її наступник Axiom), Reduce, MuPAD, MathCAD, MATHLAB, Sage, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris;
- *спеціалізовані* — це системи для розв'язання задач одного або декількох суміжних розділів символічної математики. Спеціалізовані системи дозволяють працювати в широкому діапазоні предметних областей. Прикладами таких систем є: GAP (алгебра груп), Cadabra (тензорна алгебра), KANT (алгебра і теорія чисел) тощо.

Класифікація СКА за *типом архітектури* є швидше наслідком історії становлення, тому що у більшості систем на сучасному етапі структури однакові. Характерною ознакою є використання власного чи запозиченого ядра. У деяких системах на початках було ядро одного виробника, потім розробники перейшли на ядро іншого. Наприклад, у MathCAD символічні обчислення виконувалися на базі ядра системи Maple, а починаючи з 14 версії, використовується символічне ядро MuPAD.

1.1.2. Типова структура системи комп'ютерної алгебри

Внутрішню структуру системи комп'ютерної алгебри становлять:

- ядро системи;
- інтерфейсна оболонка;

- бібліотеки спеціалізованих програмних модулів і функцій;
- пакети розширення;
- довідкова система.

Функції ядра, як правило, реалізуються на машинно-орієнтованій мові, тому що потрібна висока продуктивність їх виконання. У деяких СКА оптимізація машинного коду забезпечується, зокрема, за допомогою часткової реалізації функціональності на мові асемблера або апаратно.

Ядро містить реалізації операторів і вбудованих функцій, що забезпечують виконання аналітичних перетворень математичних виразів на основі системи певних правил.

Об'єм ядра зазвичай обмежують, при цьому до нього додають бібліотеки додаткових процедур і функцій. Розподіл складу алгоритмів символічних обчислень, що забезпечуються системою, між ядром і бібліотеками здійснюється за принципом балансу продуктивності і функціональності з врахуванням поточного стану найбільш поширеного апаратного забезпечення. У більшості комерційних СКА алгоритми обчислень і програмні модулі ядра є ноу-хау розробників і відносяться до даних, які ретельно приховуються.

Бібліотеки спеціалізованих програмних модулів і функцій, пакети розширення містять систематизовані за призначенням реалізації алгоритмів обробки абстрактних об'єктів, розв'язання типових математичних задач.

Бібліотеки та пакети функціонально розширюють ядро, а також забезпечують можливості програмування алгоритмів не лише на мові самої системи, але й на мові її реалізації, а у багатьох СКА й на основних мовах програмування високого рівня.

Інтерфейсні оболонки забезпечують підтримку всіх функцій, необхідних для інформаційних і керуючих взаємодій між системою і користувачами, серед яких введення, редагування, збереження, обмін програмами, використання різних апаратних засобів.

У більшості СКА інтерфейсні оболонки різні для різних операційних систем (ОС), при цьому провідні системи комп'ютерної алгебри працюють без перекомпілювання вихідного коду, як на різних апаратних платформах, так і під управлінням різних операційних систем; користувацькі інтерфейси забезпечують схожі візуальні сценарії роботи в СКА на різних комп'ютерах, в різних ОС.

Довідкова система всіх СКА містить і забезпечує користувачів описами функціональних можливостей та демонстраційними прикладами роботи, інформаційними повідомленнями про поточний стан системи, а також відомостями про математичні засади алгоритмів.

Справедливим є твердження, що багато СКА, по суті, є не тільки інструментами для отримання та аналізу розв'язків, але й математичними енциклопедіями. Для СКА типовою є організація і забезпечення діалогу отримання покрокових довідок з вкладеними рівнями абстракції та/або конкретизації інформації. Зазвичай користувачеві доступні коротка контекстна довідка про функціональне призначення обраного елемента, інформація про синтаксис й семантику операторів і функцій мови з демонстративними прикладами, опис реалізованих варіантів розв'язування. Інформативність довідкової системи забезпечується обов'язковим описом всіх функцій ядра, інструментами пошуку відомостей про об'єкт СКА за іменем, тематичним розділом, ключовими словами. У багатьох системах в підсистемі допомоги містяться навчальні матеріали з розподілом за категоріями користувачів, інтерактивні навчальні курси розв'язання математичних задач в середовищі системи. Деякі СКА мають консультанта-репетитора, який виконує покрокове розв'язання прикладів з коментарями.

1.1.3. Основні функціональні можливості систем комп'ютерної алгебри

Системи комп'ютерної алгебри дозволяють реалізовувати аналітичні та чисельні методи розв'язування задач, представляючи отримані результати в

математичній нотації. СКА забезпечують графічну візуалізацію розрахунків, оформлення отриманих результатів та підготовку до друку [37]. Використовуючи СКА, в аналітичній формі можна виконувати:

- спрощення виразів до компактнішого розміру або приведення до стандартного вигляду;
- підстановки символьних і чисельних значень у вирази;
- перетворення математичних виразів: розкриття добутків і степенів, часткова і повна факторизація (розкладання на множники);
- розкладання на прості дроби, забезпечення виконання обмежень, запис тригонометричних функцій через експоненти, перетворення логічних виразів;
- знаходження границь функцій і послідовностей;
- операції з рядами (підсумовування, множення, суперпозиція);
- диференціювання в частинних і повних похідних;
- знаходження невизначених і визначених інтегралів (символьне інтегрування);
- аналіз функцій на неперервність;
- пошук екстремумів функцій і асимптот;
- символьне розв'язування задач оптимізації: знаходження глобальних екстремумів, умовних екстремумів тощо;
- розв'язування лінійних і нелінійних рівнянь;
- алгебраїчне (нечисельне) розв'язування диференціальних і кінцево-дискретних рівнянь;
- інтегральні перетворення;
- пряме і зворотне швидке перетворення Фур'є, інтерполяція, екстраполяція і апроксимація, операції з векторами;
- матричні операції: обернення, факторизація, розв'язання спектральних задач;

- статистичні обчислення;
- машинне доведення теорем.

Якщо задача має точний аналітичний розв’язок, користувач СКА може отримати цей розв’язок в явному вигляді (зрозуміло, мова йде про задачі, для яких відомий алгоритм побудови точного розв’язку).

Більшість систем комп’ютерної алгебри забезпечують також:

- числові операції довільної точності;
- цілочисельну арифметику для великих чисел;
- обчислення фундаментальних констант з довільною точністю;
- підтримку функцій теорії чисел;
- редагування математичних виразів в двовимірній формі (з індексами, звичайними дробами тощо);
- побудова графіків аналітично заданих функцій;
- побудова графіків функцій за табличними значеннями;
- побудова графіків функцій в двох або трьох вимірах;
- анімація графіків різних типів;
- використання пактів розширення спеціального призначення;
- програмування на вбудованій мові.

Деякі системи комп’ютерної алгебри також забезпечують:

- створення і редагування графіки (створення комп’ютерних зображень, а також обробку сигналів та аналіз зображень);
- синтез звуку.

У СКА можна проводити обчислення в арифметиці з плаваючою точністю і вказувати точність. Реалізована й точна раціональна арифметика, тобто можна здійснювати чисельні розрахунки без втрати точності.

До особливостей СКА відносять переважно *інтерактивний характер роботи* — користувач не знає заздалегідь ні розміру, ні форми результатів і тому повинен мати можливість коригувати хід обчислень на всіх етапах,

задавати режим покрокового виконання з виведенням проміжних результатів.

Більшість СКА в сучасній реалізації не тільки можна застосовувати для дослідження різних математичних і науково-технічних задач з використанням вбудованих і додаткових функцій, вони містять всі складові мов програмування — де факто є проблемо орієнтованими мовами програмування високого рівня [8–12, 28, 34–38, 43–53].

1.1.4. Огляд систем комп'ютерної алгебри

На вітчизняному ринку масові системи комп'ютерної алгебри представлені лише закордонними програмами. Це пов'язано з тим, що сучасні програми цього класу відносяться до числа найбільш складних програмних продуктів, що вимагають для своєї розробки великих інтелектуальних, трудових і фінансових витрат. Пік розробки таких програм припав на початок 90-х років XX століття, що співпало з глибокою економічною і фінансовою кризою на початках української державності. За таких умов створення програм, здатних конкурувати з численними зарубіжними програмами комп'ютерної математики, було практично неможливим.

Найбільш потужними і якісними серед універсальних систем комп'ютерної алгебри є комерційні пакети Maple і Mathematica, розробка яких здійснюється на постійній основі вже десятиліттями. Ці системи мають власні ядра, оснащені розвиненим користувацьким інтерфейсом і мають різноманітні потужні графічні та редакторські можливості.

Maple



Програмний продукт компанії Waterloo Maple Software, Inc. (<http://www.maplesoft.com/>), яка з 1984 року випускає програмні продукти, орієнтовані на складні математичні обчислення, візуалізацію даних і моделювання. Maple містить перевірені, надійні і ефективні символічні і чисельні алгоритми для розв'язання величезного спектру математичних

задач. Maple вміє виконувати складні алгебраїчні перетворення і спрощення над полем комплексних чисел, знаходити скінченні і нескінченні суми, добутки, границі та інтеграли, розв'язувати в символьному вигляді і чисельно системи алгебраїчних рівнянь і нерівностей, знаходити корені многочленів, розв'язувати аналітичним способом і чисельно системи звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних. У Maple включені пакети підпрограм для розв'язування задач лінійної і тензорної алгебри, евклідової і аналітичної геометрії, теорії чисел, теорії ймовірностей і математичної статистики, комбінаторики, і багатьох інших областей математичної науки [15, 33].

Більше того, Maple дозволяє виконувати чисельні і аналітичні розрахунки з можливістю інтерактивного редагування тексту і формул на робочому листі. Завдяки представленню формул в поліграфічному форматі, чудовій дво- і тривимірній графіці та анімації Maple є одночасно й потужним науковим графічним редактором. Проста і ефективна мова-інтерпретатор, відкрита архітектура, можливість перетворення кодів Maple в коди C робить його дуже ефективним засобом створення нових алгоритмів. Maple оснащено інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, простими правилами роботи і широким функціоналом.

Розробник	Waterloo Maple, Inc.
Написана на	C, мова Maple
Операційна система	Microsoft Windows (7, 8, 10), macOS, Linux
Перший випуск	1982



Mathematica



Система Mathematica компанії Wolfram Research Inc.

(<http://www.wolfram.com/>) має надзвичайно широкий набір засобів, для перетворення складних математичних алгоритмів в програми. Фактично всі алгоритми, що формують курс вищої математики ВУЗів, вбудовані до комп'ютерної системи Mathematica. У деяких країнах (наприклад, в США)

система вищої освіти тісно пов'язана з цим продуктом. Величезна перевага системи Mathematica полягає в тому, що її оператори і способи запису алгоритмів прості і природні. Mathematica є однією з найпотужніших і детально розроблених систем комп'ютерної алгебри. З її допомогою легко здійснюються чисельні і символьні обчислення. Сильною стороною системи, яка вигідно вирізняє її від інших СКА, є дво- і тривимірний графік, який застосовується для візуалізації кривих і поверхонь. Середовище Mathematica містить мову програмування високого рівня з більш потужним і природним функціональним стилем і стилем правил перетворень. Система інтерактивна, тобто працює в режимі постійного діалогу з користувачем. Вона гнучка і універсальна в тому сенсі, що може бути використана широким колом користувачів, від школярів до фахових математиків та інших фахівців, робота яких пов'язана з математикою [8-11, 27, 28, 33–41, 43–53].

Головна перевага Mathematica, що робить її безперечним лідером серед інших систем високого рівня, полягає в тому, що ця система отримала дуже широке поширення в усьому світі, охопивши величезні області застосування в наукових і інженерних дослідженнях та у сфері освіти.

Розробник	Wolfram Research
Написана на	C
Операційна система	Microsoft Windows (7, 8, 10), macOS, Linux
Перший випуск	1988

Однією з самих популярних та масових систем комп'ютерної математики, орієнтованої на вищу школу є система MathCAD. Назва системи походить від двох слів — MATNematica (математика) і CAD (Computer Aided Design — системи автоматизованого проєктування, або САПР)

MathCAD



Mathcad — система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проєктування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводом, яка вирізняється легкістю використання і застосування для колективної роботи [33, 26].

MathCAD був задуманий і спочатку написаний Алленом Раздовом з Массачусетського технологічного інституту (MIT), співзасновником компанії Mathsoft, яка з 2006 року є частиною корпорації PTC (Parametric Technology Corporation). MathCAD має інтуїтивно зрозумілий і простий для використання інтерфейс користувача. Для введення формул і даних можна використовувати як клавіатуру, так і спеціальні панелі інструментів. Деякі з математичних можливостей MathCAD (версії до 13.1 включно) ґрунтуються на підмножині системи комп'ютерної алгебри Maple (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Починаючи з 14 версії — використовує символічне ядро MuPAD.

Робота здійснюється в межах робочого листа, на якому рівняння і вирази відображаються графічно, на противагу текстовому запису в мовах програмування. При створенні документів-додатків використовується принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — “що бачиш, те й отримуєш”).

MathCAD — це багатофункціональна інтерактивна обчислювальна система, що дозволяє завдяки вбудованим алгоритмам розв'язувати аналітично і чисельно велику кількість математичних задач, не застосовуючи програмування. Робочий документ MathCAD — електронна книга з формулами, обчислення яких виконуються автоматично в тому порядку, в якому записані вирази. Відрізняється простим і зручним інтерфейсом, записом виразів стандартними математичними символами, дво- і тривимірною графікою хорошого рівня, можливістю підключення до поширених офісних та конструкторських програм, а також до мережі Internet. Програма MathCAD поєднує в собі набір потужних інструментів для технічних розрахунків з поліграфічною якістю написання формул і гнучкий, потужний текстовий редактор. MathCAD досить зручно використовувати для навчання, обчислень і інженерних розрахунків. Є можливість створення електронних книг (e-Book).

Розробник	Mathsoft, PTC
Написана на	C

Операційна система	Microsoft Windows (7, 8, 10)
Перший випуск	1986

Відмінною рисою сучасного стану ІТ є те, що комерційні програмні продукти в багатьох випадках повністю або частково можна замінити некомерційним програмним забезпеченням, аналогами з відкритим вихідним кодом — вільними програмами. Чільне місце серед некомерційних проєктів займають системи Axiom, Maxima і Reduce. Важливо зазначити, що технічно, завдяки відкритості східного коду, системи Axiom, Maxima і Reduce гнучкіші у використанні від Maple і Mathematica. Незважаючи на те що розробки зазначених некомерційних систем започатковані ще до появи Maple і Mathematica, в цих системах поки не досягнуто “енциклопедичності”, притаманної Maple і Mathematica.



Maxima

Написана на мові Common Lisp. Є наступником системи Macsyma, яка розроблялась (*Massachusetts Institute of Technology* MIT) з 1968 по 1982 роки в рамках проєкту Project MAC, що фінансується Міністерством енергетики США (DOE) та іншими державними організаціями. Професор Вільям Шелтер (англ. Bill Schelter) з Техаського університету в Остіні підтримував один з варіантів системи, відомий як DOE Macsyma, з 1982 року до самої своєї смерті в 2001 році. У 1998 році Шелтер отримав від Міністерства енергетики дозвіл опублікувати вихідний код DOE Macsyma під ліцензією GPL і в 2000 році він створив проєкт на SourceForge.net (<http://maxima.sourceforge.net/>) для підтримки і подальшого розвитку DOE Macsyma під ім'ям Maxima.

Maxima має широкий набір засобів для проведення аналітичних обчислень, чисельних обчислень і побудови графіків. За набором можливостей система близька до таких комерційних систем, як Maple і

Mathematica. Водночас вона оснащена високим ступенем інтегрованості: може працювати на всіх основних сучасних операційних системах на комп'ютерах, починаючи від планшетів, і аж до найпотужніших. Для системи побудовано кілька графічних інтерфейсів користувача і надбудов: XMaxima (інтегровано в поставку в багатьох ОС), wxMaxima (заснований на wxWidgets; інтегровано в поставку для ОС Windows) та інших, а також може працювати в режимі командного рядка (використовуючи псевдографіку) [12].

Для редагування наукових текстів в Maxima може використовуватися програма texmacs, яка дозволяє експортувати документи в ряд популярних форматів, включаючи TeX/LaTeX і HTML/MathML. Завдяки відкритому коду системи з'явилися похідні рішення, наприклад, на основі Maxima зроблена програма Stack, призначена для автоматизованої перевірки правильності математичних виразів, Остання може успішно застосовуватись, зокрема, для комп'ютерної перевірки відповідей користувачів, які навчаються математиці.

Автор	Проект MAC МассачусетськогоТІ
Розробник	Уїльям Шелтер
Написана на	Common Lisp
Операційна система	Linux, MS Windows, Mac OS X, FreeBSD, Android
Перший випуск	1982

Axiom

Вільна система комп'ютерної алгебри. Вона складається з середовища інтерпретатора, компілятора і бібліотеки, яка описує строгу, математично правильну ієрархію типів. Розробка системи було розпочато в 1971 році групою дослідників IBM під керівництвом Річарда Дженкса (Richard Dimick Jenks). Спочатку система називалася Scratchpad. На початках проєкт розглядався як дослідницька платформа для розробки нових ідей з обчислювальної математики [12]. У 90-х роках XX століття система була продана компанії Numerical Algorithms Group (NAG), отримала назву Axiom і стала комерційним продуктом. Але в силу низки причин система не отримала комерційного успіху і була відкликана з ринку в жовтні 2001 року. NAG

вирішила трансформувати Axiom у вільне програмне забезпечення й відкрила вихідні коди під модифікованою ліцензією BSD. У 2007 році у Axiom з'явилися дві гілки (2 fork) з відкритим вихідним кодом: OpenAxiom і FriCAS. Розробка системи триває, виходять її нові версії.

Автор	Проект IBM (Richard Dimick)
Розробник	Незалежна група розробників
Написана на	Common Lisp
Операційна система	Кросплатформене ПЗ
Перший випуск	1986

Reduce

Reduce — безкоштовна система комп'ютерної алгебри загального призначення, що має розширені можливості для застосування у фізиці.

Reduce найстаріша система комп'ютерної алгебри, розробку якої розпочав в 1960-і роки XX століття Ентоні Херн (Anthony C. Hearn). Пізніше до створення системи приєдналися й інші розробники. Система написана цілком на спеціально створеній для неї мові Portable Standard Lisp — діалекті Lisp, який розширює та доповнює мову зі стандартним дужковим ліпс-синтаксисом, спеціальною мовою RSL з ALGOLоподібним синтаксисом. RSL використовується як основа для користувацької мови системи [12].

З грудня 2008 року Reduce став безкоштовно поширюватись як відкрите програмне забезпечення під видозміненою ліцензією BSD license на сайті SourceForge (до цього пакет був комерційний з вартістю ліцензії 695 \$).

Reduce має широкий набір засобів для проведення аналітичних обчислень, чисельних обчислень і побудови графіків. За набором можливостей система близька до таких комерційних систем як Maple і Mathematica. Водночас вона має високий ступінь інтегрованості: вона може працювати на всіх основних сучасних операційних системах та комп'ютерних архітектурах. Для редагування наукових текстів в Reduce може використовуватися програма texmacs, що дозволяє експортувати

документи в низку популярних форматів, включаючи TeX (LaTeX) і HTML (MathML).

Reduce доступна на різних платформах Unix, Linux, Microsoft Windows, Apple Macintosh, iOS і Android. Майже всі ці реалізації засновані на Portable Standard Lisp або ж Codemist Standard Lisp. Розробка системи продовжується й надалі виходять нові версії.

Проект Anthony C. Hearn	
Автор	
Розробник	Anthony C. Hearn
Написана на	Portable Standard Lisp
Операційна система	Кросплатформене ПЗ
Перший випуск	2011

Без серйозного реального досвіду роботи в кожній системі вкрай важко об'єктивно порівнювати можливості різних універсальних систем комп'ютерної алгебри і тим більше рекомендувати якусь з них. Поза всяким сумнівом, вибір залежить від предметної області, наукових, освітніх та технічних досліджень. Крім того, потрібна висока фахова підготовка з різноманітних областей математичної науки.

Використання можливостей СКА дозволяє зробити процес вивчення математики більш доступним для розуміння студентами та учнями. Наприклад, в рамках розділу “Функції та їх властивості. Дослідження функцій”, використовуючи графічні можливості математичних пакетів, можна наочно продемонструвати особливості перетворення графіків функцій, побудувати графіки функцій і показати їх властивості, виражені на графічній мові, розкрити геометричний зміст першої і другої похідних. Тим самим, викладач успішно використовує свою комп'ютерну фаховість під час навчання математиці, зокрема, привертає інтерес слухачів до найбільш важливих математичних понять та об'єктів.

Розглянуті вище програмні продукти можуть бути використані при вивченні багатьох дисциплін, таких як геометрія, теорії ймовірностей, теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, математичної статистика, фізика та низки інших технічних дисциплін.

Якщо при вивченні математики, фізики й інших наук студент освоїть прийоми роботи з будь-якою досить потужною системою комп'ютерної алгебри, то він виявиться значно краще підготовленим до розв'язання математичних задач, з якими він може зіткнутися, зокрема, у своїй дослідницькій роботі. Застосування систем комп'ютерної алгебри для математичних досліджень здійснюватимемо далі на базі Mathematica.

РОЗДІЛ II. ОСНОВИ РОБОТИ З СИСТЕМОЮ MATHEMATICA

Для розв’язування задач в середовищі комп’ютерної алгебри Mathematica необхідно знати:

- правила представлення і введення даних;
- функції математичних операцій;
- вбудовані функції обчислень;
- комп’ютерні технології розв’язування математичних задач.

Розв’язуючи задачі, необхідно дотримуватись основних правил:

- не слід розв’язувати задачу за принципом “здогадки”, натискаючи безладно всі клавіші та кнопки панелі інструментів. Розв’язуючи математичну задачу, на самих початках думати, приймати рішення і лише по тому натискати клавіші;
- необхідно перевіряти достеменність отриманих відкликів в процесі розв’язання задачі;
- завжди аналізувати отриманий результат;
- якщо не дотримуватись цих правил, то розв’язку можна й не отримати, більше того, він може виявитись абсолютно хибним.

Слід зауважити, що розв’язання математичної задачі вкрай потребує уважності, сконцентрованості, акуратності.

Система Mathematica оснащена потужним арсеналом з понад 700-та математичних символів (грецьких та латинських букв, операторів, функцій, команд). Для зручної роботи в системі слід активно використовувати її ресурси для форматування документів та приведення їх до належного вигляду. Передусім кожен крок обчислень слід супроводжувати пояснювальними коментарями. Їх можна безпосередньо вводити, форматуючи під текстовий формат необхідної стилістики. При цьому бажано дотримуватись загальноприйнятих правил форматування математичних текстів [8–11, 27, 28, 33–41, 44–53].

2.1. Арифметичні оператори, функції, константи

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має повний набір арифметичних операторів, функцій та констант [27].

Символ/операція	Зміст	Приклади
+	Додавання	$3+5$, $a+b$, $\sin x + \cos x$
-	Віднімання	$5-3$, $a-b$, $\sin x - \cos x$
*	Множення	$5*3$, $a*b$, $\sin x * \cos x$
/	Ділення	$5/3$, a/b , $\sin x / \cos x$
$\wedge$	Піднесення до степеня	5^2 , a^3 , a^k , $(\sin x)^2$
<code>Sqrt[x]</code>	Добування квадратного кореня	<code>Sqrt[2]</code> , <code>Sqrt[a+b]</code> , <code>Sqrt[e^x]</code>

Арифметичні операції в системі Mathematica здійснюється над дійсними та комплексними числами, над контейнерами типу вектор чи матриця, над виразами і функціями.

2.1.1. Арифметичні функції

В системах комп'ютерних алгебр до арифметичних функцій відносять зазвичай функції:

- виконання арифметичних операцій над числами;
- визначення дільників цілих чисел;
- визначення найменшого спільного кратного;
- обчислення факторіалів;
- приведення дійсних чисел до найближчих цілих;
- отримання простих чисел.

Розглянемо основні з них.

Система Mathematica оснащена таким функціями для виконання арифметичних операцій

<code>Plus[x, y, ...]</code>	– виконує сумування чисел $x, y, \dots$;
<code>Times[x, y, ...]</code>	– обчислює добуток чисел $x, y, \dots$;

Divide[x,y]	– здійснює ділення x на y;
Mod[x,y]	– повертає остачу від ділення x на y.

Розглянемо приклади виконання арифметичних операцій

```
Plus[1,2,3,4,5,6,b]
21+b
Plus[m,n,Pi,E,2,3,Cos[x]]
5+m+n+ $\pi$ +e+Cos[5]
Times[y,Exp[3],5]
5e3y
Divide[3.,7]
0,4285714
Mod[327,20]
7
```

Для визначення дільників цілих чисел та найменшого спільного кратного використовують функції:

Divisors[n]	– визначає цілочисельні дільники числа n;
DivisorSigma[k,n]	– знаходить суму піднесених в k степінь додатних дільників числа n;
ExtendedGCD[n,m]	– знаходить найбільший спільний дільник чисел m та n;
GCD[n1,n2,...]	– знаходить найбільший спільний дільник цілих чисел n1,n2,...;
LCM[n1,n2,...]	– знаходить найменше спільне кратне цілих чисел n1,n2,... .

Власне дільники цілих чисел та спільне кратне Mathematica знаходить так

```
Divisors[112102]
{1,2,23,46,2437,56051,112102}
DivisorSigma[6,3]
730
GCD[1200,125,75,50]
25
LCM[24,36,12,8]
72
```

Приведення дійсних чисел до найближчих цілих здійснюється за допомогою функцій:

Round[x]	– округлює x до найближчого цілого;
Floor[x]	– повертає найбільше ціле число, що не перевищує x ;
Ceiling[x]	– повертає найменше ціле число, більше або рівне x ;
Quotient[n,m]	– повертає заокруглене ціле число n/m , яке не перевищує значення n/m .

Значення x в цих функціях може бути не лише числом, але й вектором чисел та навіть вектором функцій, що обчислюються.

```
f=14,3
Round[f]
14,3
14
Floor[f]
14
Ceiling[f]
15
Quotient[7,3]
2
```

Факторіали числа n обчислюються за допомогою функцій

Factorial[n]	– обчислює значення факторіала числа n ;
Factorial2[n]	– обчислює значення подвійного факторіала числа n .

Дані функції обчислюють факторіали додатних і від’ємних дійсних, цілих та дробових чисел. Вони дозволяють обчислювати факторіали досить великих чисел. У випадку цілих значень n факторіали записуються так

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n, \quad 0! = 1,$$

$$n!! = n \times (n - 2) \times (n - 4) \times \dots, \quad 0!! = 1.$$

2.1.2. Іменовані константи

Іменовані константи є об’єктами, що мають унікальне ім’я, яке розпочинається з прописної літери. Константа має наперед визначене

значення, яке не змінюється при обчисленнях. В системі комп'ютерної алгебри Mathematica є такі іменовані константи:

E	– основа натурального логарифма;
Pi	– відношення довжини кола до діаметра;
I	– уявна одиниця ($\sqrt{-1}$);
Infinity	– додатна нескінченність; при від'ємній нескінченності ставиться знак “–” (мінус);
Degree	– число радіан в градусі, що має значення;
EulerGamma	– стала Ейлера: 0,577216;
GoldenRatio	– поділ відрізка за правилом золотого перетину — константа, що має значення $(1 + \sqrt{5})/2$;
Catalan	– константа Каталана: 0,915966.

Для отримання чисельного значення константи у вигляді дійсного числа необхідно перед її назвою поставити символ N. Над іменованими константами можна виконувати будь-які математичні операції. При цьому необхідно зазначити, що обчислення здійснюються над дійсними числами. Для цього існує багато способів, наприклад, ставиться точка в кінці цілого числа, використовується функція N[%], яка вводиться в кінці отриманої символьної відповіді. Розглянемо приклади отримання констант та дій над ними.

```
{N[E],N[Pi],N[Degree]}
{2.71828, 3.14159, 0.0174533}
{N[EulerGamma],N[GoldenRatio],N[Catalan]}
{0,577216, 1.61803, 0.915966}
5.*Catalan
4.57983
3.*Pi*EulerGamma-GoldenRatio/Catalan
3.67365
```

2.1.3. Скорочена форма представлення арифметичних операцій

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica є спеціальна форма запису математичних операцій, яку називають *скороченою*. Кожному такому запису (оператору) відповідає своя вбудована функція. Такими функціями є

AddTo[x, dx]	– додає dx до x і повертає нове значення x; оператором функції є $x+=dx$;
SubtractFrom[x, dx]	– віднімає dx від x і повертає нове значення x, що дорівнює $x-dx$; оператором функції є $x-=dx$;
TimesBy[x, k]	– множить x на k і повертає нове значення x, що дорівнює kx ; оператором функції є $x*=k$;
Divide[x, k]	– ділить x на k і повертає нове значення x, що дорівнює x/k ; оператором функції є $x/=k$.

Скорочені форми запису арифметичних операцій можна застосовувати як при чисельних, так і при символьних обчисленнях. Продуктивність цієї форми запису математичних операцій не лише в більш компактній формі представлення, але й в тому, що одночасно з виконанням операцій присвоюються нові значення x. Наведемо приклади використання скороченого запису операцій.

```
x=3
AddTo[x,5]
3
8
TimesBy[x,10]
80
Divide[x,2]
40
```

```
f=Sin[z]
AddTo[f,Cos[z]]
Sin[z]
Cos[z]+Sin[z]
TimesBy[f,f]
(Cos[z]+Sin[z])2
TimesBy[f,(a+b)]
(a+b)(Cos[z]+Sin[z])2
Divide[f,(a-b)]

$$\frac{(a+b)(\cos[z]+\sin[z])^2}{(a-b)}$$

```

2.2. Типи даних

Система комп'ютерної алгебри Mathematica працює з досить широким набором даних. Це числа, змінні, вирази, функції [27].

Позначення	Типи чисел	Приклади
Integer	Цілочисельні	265.-24
Rational	Раціональні	22/121.-14/84
Real	Дійсні	254.6, -23.46, 3.8*10 ⁻⁴
Complex	Комплексні	5+3*I, 4-2*I

Символьні змінні можуть утворювати як завгодно складні вирази, які система здатна спрощувати. Одні символьні змінні можуть бути замінені іншими, утворюючи нові вирази та навіть формули. Система має велику кількість функцій, з якими користувачі можуть працювати як зі звичайними даними, виконуючи математичні операції. Pozнайомимось з основними типами даних та різноманітними технологіями математичних перетворень та обчислень.

2.2.1. Арифметичні операції з цілими та раціональними числами

Система Mathematica виконує обчислення з цілими та раціональними числами без похибок. При цьому немає обмежень на розрядність чисел.

Приклад 2.1. Обчислити такі вирази:

$$100!!, \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{17} + \frac{5}{22} + \frac{1}{121}.$$

Розв'язок.

100!!

3424322470251197624824643289520818597511

8675053719198827915654463488000000000000

1/2+2/3+1/6

$\frac{4}{3}$

2/17+3/7+5/22+1/121

$\frac{22513}{28798}$

Приклад демонструє, що система обчислила подвійний факторіал числа 100 з абсолютною точністю. Ефективно система сумує раціональні числа. Слід зазначити, що будь-які обчислення у випадку цілих та раціональних чисел мають результат лише за умови наявності точного розв'язку. Якщо точний розв'язок відсутній, то програма наближеного розв'язку не видає. Вона лише повторює вихідний вираз. Покажемо це на прикладі.

Приклад 2.2. Обчислити такі функції:

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}, \quad e^{-1}, \quad \ln 5, \quad \ln e^2, \quad \sin^2 1 + \cos^2 1, \quad e^{-x} \cdot e^x.$$

Розв'язок.

```
Pi/2*Sin[Pi/2]
  Pi
  2
E^(-1)
  1
  e
Log[5]
  Log[5]
Log[E^2]
  2
Sin[1]^2+Cos[1]^2
  Sin[1]^2+Cos[1]^2
E^(-x)*E^(x)
  1
```

2.2.2. Арифметичні операції з дійсними числами

Дійсні числа в системі Mathematica представляються в *нормальній формі*. Нормальною формою називається така форма, в якій мантиса (без урахування знаку) знаходиться на півінтервалі $[0,1)$ ($0 \leq a < 1$). При представленні числа в нормальній формі ціла частина відокремлюється від дробової точкою, наприклад: 1.35, -11.256, 0.22. При цьому 0 цілих можна опустити і замість 0.22 записати .22. Такі числа називають *числами з фіксованою крапкою*. Точка в кінці числа є ознакою того, що число дійсне.

Наприклад, число 221 є цілочисельним, а 221. – дійсним, $2/7$ є раціональним, а число $2./7$ – дійсним.

При представленні числа з фіксованою крапкою в нормальній формі число записується у вигляді мантиси з цілою та дробовою частинами і порядку у вигляді степеня числа 10, відокремленого знаком множення, наприклад: $2 * 10^2$, $-3 * 10^3$, $0.221 * 10^{-3}$, $.12 * 10^{-5}$. Замість знаку множення може використовуватись пробіл. Такі числа називаються числами з плаваючою точкою, оскільки їх представлення неоднозначне: $1.25 * 10^2 = 12.5 * 10^1 = 12500 * 10^{-2} = .0125 * 10^4$. Арифметичні операції над дійсними числами дають наближений результат. Система комп'ютерної алгебри Mathematica оперує наближеними числами досить широкого діапазону. Максимальні і мінімальні числа мають значення:

$$1.79769 * 10^{308}, \quad 2.22507 * 10^{-308}.$$

Ці числа можна вивести на екран за допомогою системних змінних \$MaxMachineNumber та \$MinMachineNumber.

Дійсні числа можна бути представлені за допомогою функцій:

$N[k]$	k — число довільного типу, наприклад цілочисельне або раціональне;
$N[k, n]$	k — число довільного типу, n — число цифр результату.

Як приклад наведемо результати представлення чисел 3 та $2/7$ у вигляді дійсних за допомогою вбудованих функцій. Зверніть увагу на те, що при представленні числа $2./7$ за допомогою функції $N[k, n]$ результатом є число лише з шістьма знаками при тому, що $n=27$.

```
N[3]
3
N[3,15]
3.000000000000000
N[2/7]
0.285714
N[2/7,27]
0.285714285714285714286
N[2./7,27]
0.285714
```

2.2.3. Арифметичні операції з комплексними числами

Комплексне число зображується в такому вигляді

$$z = \text{Re}[z] + I * \text{Im}[z] \quad \text{чи} \quad z = \text{Re}[z] + \text{Im}[z] * I, \quad \text{де}$$

$\text{Re}[z]$	— дійсна частина комплексного числа z ;
$\text{Im}[z]$	— уявна частина комплексного числа z ;
I	— уявна одиниця; $I = (\sqrt{-1})$ записується великою літерою латиниці.

У виразах комплексного числа знак множення можна замінювати пробілом. Дійсна та уявна частина комплексного числа можуть бути числами довільного вигляду, а також символьними змінними, виразами та функціями, наприклад:

$$2+3*i, \quad 0.5-6.3 \ i, \quad a+i*b, \quad \text{Log}[6.5]+i*\text{Cos}[x].$$

Система комп'ютерної алгебри Mathematica для виконання операцій над комплексними числами містить такі функції:

$\text{Abs}[z]$	— обчислює модуль комплексного числа z ;
$\text{Arg}[z]$	— повертає модуль комплексного числа z ;
$\text{Conjugate}[z]$	— повертає комплексне число, спряжене до z ;
$\text{Re}[z]$	— повертає дійсну частину комплексного числа z ;
$\text{Im}[z]$	— повертає уявну частину комплексного числа z .

```
z=5-3 i
5-3 i
Abs[z]
 $\sqrt{34}$ 
Arg[z]
 $-\text{ArcTan}\left[\frac{3}{5}\right]$ 
Conjugate[z]
5+3 i
Re[z]
5
Im[z]
-3
```

Система дозволяє виконувати довільні математичні обчислення над комплексними числами, які доступні для випадку дійсних чисел.

2.2.4. Змінні

Змінні — це об'єкти, що приймають різні значення як чисельні так і символьні. При цьому змінною може бути довільний об'єкт, навіть такі як графічний чи звуковий. Ім'я змінної називається *ідентифікатором*, воно завжди починається з букви і може містити довільні символи.

Змінні в системі комп'ютерної алгебри Mathematica є глобальними, тобто такими, які можна змінювати під час обчислень. *Глобальна змінна* (англ. global variable) – змінна, яка доступна в будь-якій області видимості, за винятком перекриття її іншою змінною з тим самим ім'ям.

Приклад 2.3. *Присвоїмо змінній x значення $x=1.5$ і обчислимо $\text{Sin}[x]$, потім присвоїмо значення $x=0.35$ і знову обчислимо $\text{Sin}[x]$.*

Розв'язок. Отримаємо дві різні відповіді. Система допускає переприсвоєння змінної. Розв'язок виглядатиме

```
x=1.5
Sin[x]
1.5
0.997495
x=0.35
Sin[x]
0.35
0.342898
```

Присвоювання в системі Mathematica реалізується двома способами: за допомогою функцій та операторів. Основні функції такі:

<code>Set[y, f]</code>	– обчислює значення функції f і присвоює результат значенню y ; присвоєння є глобальним;
<code>Set[{y1, y2, ...}, {f1, f2, ...}]</code>	– обчислює значення функцій $f1, f2, \dots$ і присвоює їх, відповідно, значенням $y1, y2, \dots$; присвоєння є глобальним;

SetDelayed[y, f]	– присвоює змінній y не обчислене значення f (функція затриманого присвоювання);
SetDelayed[{y1, y2, ...}, {f1, f2, ...}]	– присвоює змінним y1, y2, ... не обчислені значення f1, f2, ... (затримане присвоювання).

Розглянемо ці функції на прикладах.

Наведемо приклад знаходження функції Set[y, f] і оператора y=f.

```
Set[y, Sin[1.]]
0.841471
y
0.841471
Set[y, Sin[1.5]]
Sin[x]
0.997495
y
0.997495
x=1.
Sin[x]
1.
0.841471
x=1.5
Sin[x]
1.5
0.997495
```

Приклад демонструє, що присвоєння значення y змінній f за допомогою функції та оператора ідентичні.

```
Set[{y1, y2, y3}, {E^2., Cos[1.], 2./3+7/4}]
{7.38906, 0.540302, 2.41667}
y1
7.38906
y2
0.540302
y3
2.41667
```

Продemonстровано приклад присвоєння значень трьох функцій, відповідно, змінним y_1, y_2, y_3 . Отримати окремо значення змінних y_1, y_2, y_3 можна завжди під час виконання довільних обчислень.

Розглянемо тепер функцію затриманого присвоювання. Аналогом функції затриманого присвоювання `SetDelayed[y, f]` є оператор $y:=f$. Ці функція та оператор обчислюють значення f , присвоюють його y , але розв'язок (при натисканні комбінації `<Shift>+<Enter>`) на екран не видають. Лише при зверненні до y отримуємо результат присвоювання (затримане присвоювання).

```
SetDelayed[y, Sin[1.]]
```

```
y
```

```
0.841471
```

```
(y-1)/(y+1)
```

```
-0.0860883
```

```
y:=Sin[1.]
```

```
y
```

```
0.841471
```

```
y^3
```

```
0.595823
```

Зауважимо, що змінні з одним і тим самим ім'ям можуть бути в різних місцях програми. Це призводить до конфліктів. Розв'язок може бути помилковим. Тому в системі Mathematica передбачена можливість зняття присвоєних значень. Це здійснюється за допомогою функції `Clear[y]` чи символу `"=."`.

2.3. Вирази, їх перетворення та обчислення

2.3.1. Функції, оператори і символи обчислення виразів

При введенні математичних виразів і виконанні обчислень слід дотримуватись таких правил синтаксису:

- знак множення можна замінити пробілом;
- будь-яка вбудована функція записується з прописної літери, а аргументи містяться в квадратних дужках "[]";
- круглі дужки "()" застосовуються для визначення пріоритету обчислень і виділення самостійних частин виразу;
- квадратні дужки "[]" використовуються для параметрів функції;
- фігурні дужки "{ }" використовуються для запису векторів, матриць та інших даних у вигляді списків.

При обчисленні виразів використовуються такі функції, оператори, символи:

$N[f]$	— обчислюється у вигляді дійснозначного результату функції f ;
$N[f, n]$	— обчислюється у вигляді дійснозначного результату функції f , з числом цифр рівним n ;
f / N	— обчислюємо вираз f в числовому вигляді;
$N[\%]$	— обчислюємо в числовому вигляді функції, які передують операції;
$\%$	— повертає результат останньої операції;
$\%\%$	— повертає результат передостанньої операції;
$\% \dots \%$	— повертає результат операції, виконаної в стрічці, яка відстоїть від кінця на число символів $\%$;
$\%n$	— повертає результат операції в стрічці n .

Наведемо приклад вищенаведених функцій, операторів та символів при обчисленні функції $z = 3 \cdot \log[5] + 3/7$.

```

z=3 Log[5]+3/7
%
3/7+3Log[5]
3/7+3Log[5]
N[%]
5.25689
N[z,20]
5.2568851658737296952
z / N
5.25689
%%
5.2568851658737296952

```

Якщо результатом обчислень є дійсні числа, то програма може видавати список, що містить мантису і порядок кожного числа. Для цього призначена функція `MantissaExponent[x]`. Наприклад, дійсні числа 23.325 , $125 \cdot 10^5$, $0.0234 \cdot 10^{-3}$ за допомогою даної функції перетворюються у вектор з матрис та і векторів чисел [27].

```
MantissaExponent[{23.325, 125.10^5, 0.0234 10^(-3)}]
{{0.23325, 2}, {0.125, 8}, {0.234, -4}}
```

Підстановки є математичним апаратом обчислення функцій при числових значеннях змінних. Вони дозволяють табулювати функції при широкій зміні аргумента. У випадку символьних змінних підстановки дозволяють створювати нові математичні вирази, отримувати формули.

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica підстановки здійснюються за допомогою символу `"/."`. Комбінації цих символів, функцій і змінних такі:

$f(x) /. x \rightarrow a$

$f(x, y, \dots) /. \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, \dots\}$

$\{f_1(x), f_2(x), \dots\} /. x \rightarrow a$

$\{f_1(x, y, \dots), f_2(x, y, \dots), \dots\} /. \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, \dots\}$

$f(x) /. x \rightarrow \{x_0, x_1, \dots\}$

Вирази підстановок мають такий контекст:

$f(x) /. x \rightarrow a$	– здійснює підстановку у вираз $f(x)$ значення $x=a$. При цьому, якщо a є чисельним значенням змінної, то здійснюється не лише підстановка, але й обчислюється вираз $f(x)$. Аргумент x може бути дійсним або комплексним числом.
$f(x, y, \dots) /. \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, \dots\}$	– здійснює підстановки у вирази $f(x, y, \dots)$ змінні $a, b, \dots$. Відкликом є чисельне значення функції, якщо всі змінні — числа, і функція, якщо хоча б одна із змінних є символьною;
$\{f_1(x), f_2(x), \dots\} /. x \rightarrow a$	– здійснює підстановку у всі вирази значення $x=a$. Відкликом є вектор

	чисел, якщо a — число, і вектор математичних виразів, якщо a символічне значення змінної;
$\{f_1(x, y, \dots), f_2(x, y, \dots), \dots\} /. \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, \dots\}$	– підстановки змінних $a, b, \dots$ в усі функції і обчислення їх значень, якщо змінні є числами;
$f(x) /. x \rightarrow \{x_0, x_1, \dots\}$	– табулювання функції $f(x)$.

Розглянемо приклади підстановок.

Приклад 2.4. Здійснити підстановки аргументів $x = 1, y = 2, x = a, y = b$ у вирази

$$z_1 = x e^x \ln x - 1, \quad z_2 = x^2 + y^2 + \sin^2 x + \cos^2 x + 1.5.$$

Визначити також значення z_2 при $x = y = a$.

Розв'язок. В даному випадку вирази для підстановок будуть такими:

$$z_1 /. x \rightarrow 1;$$

$$z_2 /. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}$$

Реалізація цих виразів дасть такий результат:

```

z1=x E^x+Log[x]-1.;
z1/.x->1.
1.71828
Z2=x^2+y^2+Sin[x]^2+Cos[x]^2+1.5;
z2/.{x->1,y->2}
7.5
z2/.y->2.
5.5+x^2+Cos[x]^2+Sin[x]^2
z1/.x->a
-1.+ae^2+Log[a]
z2/.{x->a,y->b}
1.5+a^2+b^2+Cos[a]^2+Sin[a]^2
z2/.{x->a,y->a}
1.5+2a^2+Cos[a]^2+Sin[a]^2

```

Таким чином, помічаємо, що система не лише здійснила підстановку даних у вираз, але й визначила їх числові значення. На жаль, вона не змогла спростити вираз $\cos^2 x + \sin^2 x$, який при будь-якому значенні x рівний 1.

Приклад 2.5. Здійснити підстановки значень $x = 1$, $y = 2$ та $x = 1, y = a$ одночасно у функції

$$z_3 = \sin x + \cos x, \quad e^{-x}, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \ln x;$$

$$z_4 = \sin(x+y) + \cos\left(\frac{x}{y}\right), \quad e^{-(x+y)}, \quad \frac{xy-1}{xy+1}, \quad \ln(x^2+y^2).$$

Розв'язок. В цьому випадку вирази для підстановок такі:

$$z_3 /. x \rightarrow 1.$$

$$z_4 /. \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2\}$$

Реалізувавши ці вирази отримаємо:

```
z3={Sin[x]+Cos[x],E^(-x),(x-1)/(x+1),Log[x]}
z1/.x->1.
{Cos[x]+Sin[x],e^-x,-1+x/1+x,Log[x]}
{1.38177,0.367879,0.,0.}
z4={Sin[x+y]+Cos[x/y],E^(-x-y),(x y-1)/(x y+1),Log[x^2+y^2]};
z4/.{x->1.,y->2.}
{1.0187,0.0497871,0.333333,1.60944}
z4/.{x->1.,y->a}
{Cos[1/a]+Sin[1.+a],e^-1.-a,-1+1.a/1+1.a,Log[1.+a^2]}
```

2.3.3. Перетворення виразів

При введенні формул, роботі з математичними моделями, в процесі будь-яких символьних обчислень досліднику доводиться перетворювати математичні вирази з метою їх спрощення, високої наочності чи то розуміння фізичної сутності отриманих виразів [27].

Зазвичай ці процедури не формалізовані. Їх виконання є однією з найінтелектуальніших задач.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має кілька десятків вбудованих функцій перетворення та спрощення виразів, зведення їх до очікуваного вигляду. Ці функції дозволяють виконувати такі операції:

- розкриття дужок;

- зведення до спільного знаменника;
- зведення подібних членів;
- скорочення аналітичних виразів;
- спрощення тригонометричних виразів тощо.

Інтелектуальність системи комп'ютерної алгебри багато в чому залежить від кількості таких функцій і якості програм, що їх використовують. В цьому сенсі система Mathematica — одна з найінтелектуальніших систем комп'ютерної алгебри.

Розглянемо основні функції символьних перетворень системи Mathematica:

<code>Simplify[f]</code>	– спрощує вираз f ;
<code>FullSimplify[f]</code>	– спрощує вираз f , що містить спеціальні функції;
<code>Expand[f]</code>	– розкриває і розширює вираз f ;
<code>Collect[f, x]</code>	– представляє вираз f за степенями x ;
<code>TrigExpand[f]</code>	– перетворює тригонометричні вирази;
<code>Factor[f]</code>	– розкладає математичні вирази на множники.

Кожна з цих функцій має кілька форм та типів представлень. Розглянемо детально ці функції на прикладах.

Функція `Simplify`

Основне призначення функції `Simplify` — спрощення математичних виразів. При цьому відсутні обмеження на складність виразів, тип функцій та змінних.

Функція спрощує вирази, приводячи члени до спільного знаменника, спрощуючи тотожності, зводячи подібні члени, розкладаючи поліноми на множники і понижуючи степінь шляхом скорочення, перетворюючи функції, зокрема, й тригонометричні. Технологія перетворення проста і полягає в такому:

- вводиться функція, яка потребує спрощення, з присвоюванням їй унікального імені, наприклад f ;
- вводиться функція `Simplify[f]`;

iii. отримується розв'язок натисканням клавіш <Shift>+<Enter>.

Якщо функція f не потрібна для подальших обчислень, її можна окремо не вводити.

Приклад 2.6. Спростити вирази

$$\frac{957828}{3831312}, \quad (\sin x + \cos x)^2 - 1, \quad \frac{315 + 297x - 62x^2 - 42x^3 + 3x^4 + x^5}{105 - 41x - x^2 + x^3}.$$

Розв'язок. Спрощення виразів за допомогою функції `Simplify[f]` виглядатиме так:

```
Simplify[957828/3831312]
1/4
Simplify[(315+297x-62x^2-42x^3+3x^4+x^5)/(105-41x-x^2+x^3)]
3+4x+x^2
Simplify[(Sin[x]+Cos[x])^2-1]
Sin[2 x]
```

Результати далеко не тривіальні, однак система добре впоралась зі спрощенням виразів.

Функція `FullSimplify`

Ця функція також призначена для спрощення виразів. Проте спрощення виконує більш “фахово”, чим функція `Simplify[f]`. Крім того вона може оперувати спеціальними функціями.

Приклад 2.7. Спростити вирази

$$x \sin x \cos y + \frac{x^2 + 1}{x} \sin y \cos x, \quad (\sin x + \cos x)^2, \quad \frac{1 - \cos 2x}{2} + \cos x^2 + a.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію `FullSimplify[f]` для спрощення цих виразів отримаємо:

```
FullSimplify[x*SIN[x]*cos[x]+(x^2+1)/x*SIN[y]Cos[x]]
Cos[x] Sin[y]/x + xSin[x+y]
FullSimplify[(Sin[x]+Cos[x])^2]
1+Sin[2 x]
FullSimplify[(1+Cos[2 x])/2+Cos[x]^2+a]
1+a
```

Функції `Simplify[f]` та `FullSimplify[f]` спрощують вирази як з дійсними, так і з комплексними змінними. Продемонструємо перевагу функції `FullSimplify[f]`, застосувавши для спрощення двох виразів цієї вправи функцію `Simplify[f]`.

```
Simplify[x*Sin[x]*Cos[x]+(x^2+1)/x*Sin[y]Cos[x]]
x Cos[y]Sin[x] +  $\frac{(1+x^2)\text{Cos}[x] \text{Sin}[y]}{x}$ 
Simplify[(Sin[x]+Cos[x])^2]
(Cos[x]+Sin[x])^2
```

Перевагу функції `FullSimplify[f]` очевидні, адже функція `Simplify[f]` не впоралась навіть зі спрощенням виразу $(\sin x + \cos x)^2$.

Функція `Expand`

Функція `Expand[f]` виконує перетворення розкриття та розширення виразів. Таких функцій багато, розглянемо основні з них:

<code>Expand[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить до цілого додатного степеня;
<code>ExpandAll[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить до цілого додатного степеня в будь-якому місці виразу <code>f</code> ;
<code>ExpandNumerator[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить до цілого додатного степеня в чисельнику виразу <code>f</code> ;
<code>ExpandDenominator[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить до цілого додатного степеня в знаменнику виразу <code>f</code> ;
<code>PowerExpand[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить до цілого додатного степеня вкладені вирази функції <code>f</code> ;
<code>ComplexExpand[f]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить вирази до цілого додатного степеня, вважаючи, що змінні виразу <code>f</code> є дійсними;
<code>ComplexExpand[f, {x1, ...}]</code>	– розкриває дужки добутків і підносить вирази до цілого додатного степеня, вважаючи, що всі змінні <code>x1, x2, ...</code> виразу <code>f</code> є комплексними;
<code>FunctionExpand[f]</code>	– представляє спрощені вирази функції <code>f</code> , що містять спеціальні функції.

Функції Expand дозволяють:

- здійснювати розкриття та розширення виразів при будь-яких типах змінних (дійсних та комплексних, чисельних та символьних);
- спрощувати вирази в процесі розкриття і розширення;
- здійснювати розкриття і розширення в будь-якому потрібному місці виразу (чисельнику, знаменнику, аргументі елементарної чи спеціальної функції тощо);
- здійснює операції зі спеціальними функціями;
- здійснює розкриття і розширення функцій, представляючи змінні у вигляді дійсних чи комплексних змінних.

Проілюструємо можливості функцій Expand на прикладах.

Expand[(a+b) (a-b) (a+c) / (a+1) ^3]

$$\frac{a^3}{(1+a)^3} - \frac{ab^2}{(1+a)^3} + \frac{a^2c}{(1+a)^3} - \frac{b^2c}{(1+a)^3}$$

ExpandAll[(a+b) (a-b) (a+c) / (a+1) ^3]

$$\frac{a^3}{1+3a+3a^2+a^3} - \frac{ab^2}{1+3a+3a^2+a^3} + \frac{a^2c}{1+3a+3a^2+a^3} - \frac{b^2c}{1+3a+3a^2+a^3}$$

ExpandNumerator[(x^2-1) ^5/ (x+1) ^3]

$$\frac{-1+5x^2-10x^4+10x^6-5x^8+x^{10}}{(1+x)^3}$$

ExpandDenominator[(x^2-1) ^5/ (x+1) ^3]

$$\frac{(-1+x^2)^5}{1+3x+3x^2+x^3}$$

PowerExpand[Sqrt[(x+2) ^4 a b] / (x-1) ^3]

$$\frac{\sqrt{a} \sqrt{b} (2+x)^2}{(-1+x)^3}$$

ComplexExpand[Sqrt[(x+2) ^4 a b] / (x-1) ^3]

$$\frac{\sqrt{a} \sqrt{b} (2+x)^2}{(-1+x)^3}$$

FunctionExpand[{EulerE[5,x],BernoulliB[5,x],Fibonacci[7,x]}]

$$\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{5x^4}{2} + x^5, -\frac{x}{6} + \frac{5x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} + x^5, 1 + 6x^2 + 5x^4 + x^6 \right\}$$

FunctionExpand[EulerE[5,x]+BernoulliB[5,x]-x^2-x^3-1/x]

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - 5x^4 + 2x^5$$

Функція Collect

Функція `Collect[f]` має таке представлення:

<code>Collect[f, x]</code>	– здійснює зведення спільних членів функції f за змінною x ;
<code>Collect[f, {x1, x2, ...}]</code>	– здійснює зведення спільних членів функції f за змінними $x_1, x_2, \dots$.

Приклад 2.8. Звести подібні доданки у виразах:

$$(x+a)^3 - (x-a)^2, \quad (x-y)(x+y)^2 \sqrt{(x+y)^3},$$
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + x - y, \{x, y\}.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію `Collect[f]`, отримуємо

```
Collect[(x+a)^3-(x-a)^2, x]
-a^2+a^3+(2a+3a^2)x+(-1+3a)x^2+x^3
Collect[(x-y)(x+y)^2Sqrt[(x+y)^3], x]
x^3Sqrt[(x+y)^3]+x^2ySqrt[(x+y)^3]-xy^2Sqrt[(x+y)^3]-y^3Sqrt[(x+y)^3]
Collect[1/(x+y)+1/(x-y)+x-y, {x, y}]
x+1/(x-y)-y+1/(x-y)
```

Помічаємо, що в останньому виразі програма не звела подібні доданки, а лише повторила його.

Функція Factor

Основне призначення функції `Factor[f]` — розклад функції f на множники. Ці функції також дозволяють здійснювати операції винесення за дужки, зведення до спільного знаменника та низку інших дій.

До функції f та її аргументів не накладається жорстких вимог. Вона може бути поліномом необмеженого степеня, тригонометричною функцією, містити в собі елементарні та спеціальні функції. Її аргументи можуть бути дійсними та комплексними числами, а також символьними змінними.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має значну кількість вбудованих функцій `Factor[f]` та опцій до них. Приведемо основні з них:

<code>Factor[f]</code>	– розклад функції f на прості множники;
<code>FactorList[f]</code>	– повертає сукупність множників і число показника степеня до кожного з них. Наприклад, для функції $f = (x-3)(x+2)^2(x+a)$ отримаємо $\{\{1, 1\}, \{x-3, 1\}, \{x+2, 2\}, \{x+a, 1\}\}$;
<code>FactorTerms[f]</code>	– виносить за дужки спільний множник, що міститься в f ;
<code>FactorTermsList[f]</code>	– виділяє спільний множник, який міститься в f , представляючи функцію у вигляді, відмінному від початкового;
<code>FactorInteger[n]</code>	– повертає прості множники цілого числа n ;
<code>Factor[f, Trig -> True]</code>	– розклад тригонометричної функції на прості множники.

Розглянемо приклади використання функції `Factor[f]` для розкладу низки виразів.

```
Factor[18 x^3+45 x^2+x-14]
(-1+2 x) (2+3 x) (7+3 x)
Factor[x^3+x^2 (3+a-b)+x (3 a-3 b-a b)-3 a b]
-(b-x) (3+x) (a+x)
FactorList[x^5+x^4-6 x^3-x^2-x+6]
{{1,1}, {-2+x, 1}, {-1+x, 1}, {3+x, 1}, {1+x+x^2, 1}}
FactorTerms[3 x^3-3 x^2-51 x-45]
3 (-15-17x-x^2+x^3)
FactorTermsList[3 x^3-3 x^2-51 x-45]
{3,-15-17x-x^2+x^3}
FactorInteger[1235]
{{5,1},{13,1},{19,1}}
```

Важливо відзначити, що функція `Factor[f]` виконує розклади на множники тригонометричних виразів. Для цього лише потрібно застосувати опцію `Trig -> True`.

Функції перетворень тригонометричних виразів

Перетворення тригонометричних виразів (спрощення, розкриття, розширення) може здійснюватись за допомогою функцій `Simplify` та

Expand. Однак є випадки, коли ці функції не можуть виконати перетворення і повертають вихідний вираз. В таких випадках корисно використовувати спеціальні функції перетворень тригонометричних виразів. Система Mathematica має низку функцій для спрощення виразів, що містять тригонометричні функції. Серед основних з них необхідно відзначити такі:

TrigReduce[f]	– спрощує вирази, які містять тригонометричні функції;
TrigExpand[f]	– забезпечує розширення тригонометричних функцій;
TrigFactor[f]	– розкладає на множники тригонометричні вирази;
TrigToExp[f]	– представляє тригонометричні вирази в експоненціальній формі;
ExpToTrig[f]	– представляє експоненціальні вирази в тригонометричній формі.

Наведемо приклади застосування даних функцій для спрощення тригонометричних виразів.

```
TrigReduce[Sin[x]+Cos[x]^2]
1+Sin[2 x]
TrigReduce[2 Sin[1/2 (x+y)] Sin[1/2 (x-y)]]
Cos[x]-Cos[y]
TrigExpand[Sin[4 x]]
4Cos[x]^2Sin[x]-4Cos[x]Sin[x]^2
TrigFactor[Cos[x]-Cos[y]]
-2Sin[x/2-y/2]Sin[x/2+y/2]
TrigToExp[Cos[x]+Sin[x]]
 $\frac{e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}}{2} + \sin[x]$ 
ExpToTrig[E^x+E^(-x)]
2 Cosh[x]
```

Ми розглянули лише основні з понад п'ятдесяти вбудованих функцій системи комп'ютерної алгебри Mathematica. Глибоке вивчення решти специфічних функцій системи вимагає глибоких знань математики та фахових навичок роботи з Mathematica. Зазвичай ці можливості

використовуються при практичних інженерних розрахунках і наукових дослідженнях.

Питання, тести для самоконтролю

1. Що таке арифметичні оператори, функції, константи?
2. Які арифметичні функції використовуються в системі Mathematica?
3. Які іменовані константи використовуються в системі Mathematica?
4. Як обчислити факторіал та подвійний факторіал в системі Mathematica?
5. Опишіть методологію скороченої форми представлення арифметичних операцій в системі.
6. Які типи даних використовуються в системі Mathematica?
7. Охарактеризуйте арифметичні операції з цілими та раціональними числами.
8. Дайте характеристику арифметичних операції з дійсними числами.
9. Опишіть арифметичні операції з комплексними числами.
10. Які змінні використовуються в системі Mathematica?
11. Що вам відомо про вирази, їх перетворення та обчислення в системі?
12. Які функції, оператори і символи обчислення виразів використовуються в системі Mathematica?
13. Охарактеризуйте підстановки, що використовуються в системі Mathematica.
14. Опишіть підходи до перетворення виразів в системі.
15. Як спрощувати вирази, що містять тригонометричні функції в системі Mathematica?

Обов'язкові та додаткові задачі

Пропонуємо для самостійного опрацювання підбір прикладів для спрощення. Користувачу необхідно самостійно вибрати функцію

перетворення, при цьому головною задачею є отримати відповідь, яка співпадає з наведеними. У випадку невдачі не слід драматизувати. Адже слід пам'ятати, що багато процедур спрощення в математиці не формалізовані. Цей процес настільки інтелектуальний, що допускає розмаїття відповідей. Важливо показати, що результати перетворень вірні.

№ задачі	Вираз	Відповідь
1.	$\frac{x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 18x - 21}{x^3 - 7x^2 + 3x - 21}$	$x - 3$
2.	$\frac{x^4 + x^3(a + b) + x^2(ab - 1) - x(a + b) - ab}{(x + 1)(x^2 + x(a + b) + a + ab)}$	$x - 3$
3.	$1/8 (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$	$\cos^4 x$
4.	$\cos x (4 \sin x - 8 \sin^3 x)$	$\sin 4x$
5.	$\cos x + i \sin x$	e^{ix}
6.	$1/16 (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$	$\cos^5 x$
7.	$1/64 (-\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x)$	$\sin^7 x$
8.	$7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x$	$\sin 7x$
9.	$1/i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$	$\arcsin z$
10.	$\arcsin (x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2})$	$\arcsin x - \arcsin y$
11.	$1.5e^{ix} - i \sin x + 0.5e^{-ix}$	$2 \cos x$
12.	$3x^3 + 7x + i(10x^2 + 30)$	$(x + 2i)(x + 3i)(3x - 5i)$
13.	$x^4 + 17x^3 + 13x^2 - 233x - 204$	$(x - 4)(x + 17)(x + 3)(x + 1)$
14.	$\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}}$	$\Gamma(2x)$
15.	$\frac{2x + a^{\log_a x} + 3}{3}$	$x + 1$
16.	$\arcsin x + \arccos x$	$\pi/2$

РОЗДІЛ III. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ

Візуалізація обчислень є одним з етапів комп'ютерних технологій розв'язування математичних задач. Вона не лише корисна, але й незамінна в багатьох випадках. Таким випадками є:

- визначення області локалізації дійсних коренів при розв'язуванні алгебраїчних та трансцендентних рівнянь;
- визначення виду функції інтерполяції при синтезі математичної моделі об'єкту чи явища;
- перевірка адекватності розв'язку математичної задачі;
- вивчення особливостей функції: наявність максимумів та мінімумів, точок перегину, розривів, інтервалів монотонності тощо;
- вивчення особливостей розв'язування прикладних задач: представлення отриманої функції, тривалості перехідних процесів тощо;
- Порівняння різних варіантів розв'язку задачі для вибору оптимального.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica є лідером в роботі з графікою. Вона володіє багатим арсеналом можливостей і дозволяє будувати надзвичайно широкий спектр функцій. Водночас, технологія побудови графіків достатньо проста і ґрунтується на використанні вбудованих функцій.

Велике розмаїття опцій дозволяє оформлювати графічні образи практично в будь-якому бажаному вигляді.

Графіки в системі Mathematica є *об'єктами*. Їм можна присвоювати імена і потому оперувати як з довільними об'єктами. З огляду на надзвичайно потужний інструментарій графіки в системі Mathematica, зосередимось лише на області її застосування для візуалізації обчислень.

Детально з інструментарієм графіки можна познайомитись в [8-11, 27, 42, 45].

3.1 Двовимірна графіка

3.1.1. Графічна функція `Plot`

Графічна функція `Plot` дозволяє будувати графіки функції $y = f(x)$ в двовимірному просторі в прямокутній системі координат. На одному графіку можна зобразити кілька функцій. За замовчуванням на екран виводиться координатна сітка [27].

Вбудована функція `Plot` має таке представлення:

```
Plot[f, {x, xmin, xmax}]
```

```
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]
```

де

f	— функція, графік якої будується;
f_i	— i -та функція, графік якої відображається, $i=1, 2, \dots$;
x	— аргумент функції f ;
$x_{\min}, x_{\max}$	— інтервали зміни аргумента x .

Розглянемо приклади побудови графіків за допомогою функції `Plot`.

Приклад 3.1. Побудувати графік функції $y = xe^{-x}$ в діапазоні x від 0 до 5.

Розв'язок. В даному випадку функція `Plot` має таке представлення:

```
Plot[x Exp[-x], {x, 0, 5}]
```

`Plot[x Exp[-x], {x, 0, 5}]`

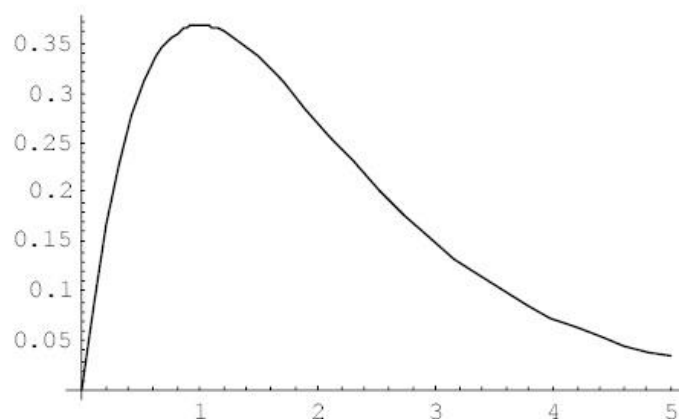


Рис. 3.1. Графічне представлення функції $y = xe^{-x}$.

Графік функції $y = xe^{-x}$, $x \in [0,5]$ зображено на рис. 3.1.

Приклад 3.2. Побудувати на одному рисунку в діапазоні x від 0 до 1.5 графіки таких функцій:

$$y_1 = xe^{-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1+x^4}, \quad y_3 = 0.6, \quad y_4 = -1 + e^x.$$

Розв'язок. В цьому випадку функція Plot, має вигляд:

```
Plot[x Exp[-x], 1/(1+x^4), 0.6, -1+Exp[x]], {x, 0, 1.5}]
```

Її реалізацію наведено на рис. 3.2.

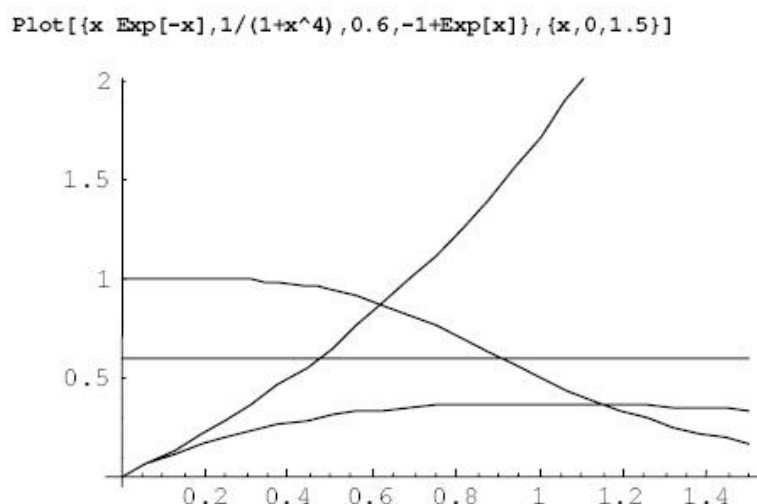


Рис. 3.2. Побудова сімейства графіків на одному рисунку.

Двовимірний графік із застосуванням функції Plot, навіть в простому, розглянутому в прикладах 3.1 – 3.2, вигляді, широко застосовується в комп'ютерних технологіях розв'язування математичних задач.

Визначення області ізоляції кореня

Переважає більшість нелінійних та трансцендентних рівнянь розв'язується наближеними чисельними методами. Для цього необхідно знати кількість коренів рівняння в області локалізації. Найкращим в застосуванні є графоаналітичний спосіб розв'язування цієї задачі, коли з вигляду графіка знаходять кількість коренів та область їх локалізації.

Приклад 3.3. Визначити кількість дійсних коренів рівняння

$$\ln(4 - 2x) + x^2 - 2 = 0$$

і області їх ізоляції.

Розв'язок. Представимо функцію $f(x) = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$ за допомогою її графіка. Функція Plot в даному випадку матиме вигляд:

```
Plot[Log[4-2 x]+x^2-2], {x,-2,2}]
```

Реалізацію для цієї функції зображено на рис. 3.3.

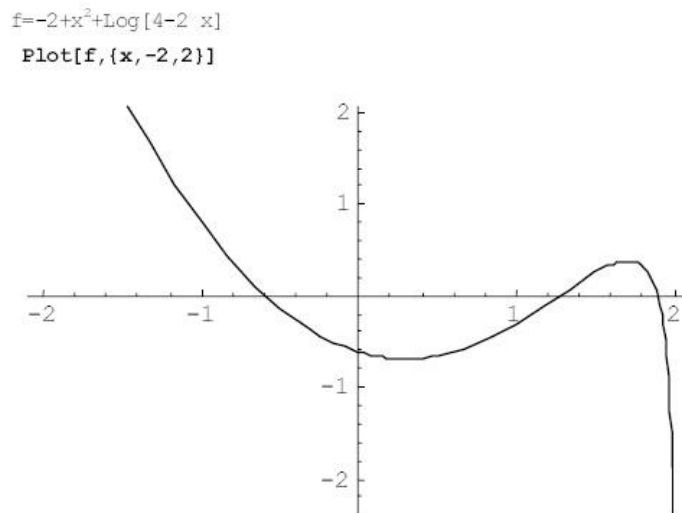


Рис. 3.3. Графік функції $f(x) = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$.

З графіку рис.3.3. видно, що рівняння має три дійсних корені (точки перетину з віссю абсцис). При цьому областями їх локалізації можна вважати інтервали: $(-1,0)$, $(1,1.5)$, $(1.5,2)$. З графіка також помічаємо, що функція $f(x) = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$ має чотири особливі точки: максимуму і мінімуму, перегину та точку перегину, координати якої можна наближено визначити. Після цього рівняння можна розв'язати чисельними методами.

Перевірка вірності розв'язку задачі

Перевірка вірності розв'язку задачі за допомогою графічних образів здійснюється через порівняння функції істинної та отриманої за результатами обчислень. Розглянемо типовий приклад цього випадку.

Приклад 3.4. Розклад функції $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ представлено поліномом третього степеня $y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Встановити діапазон значень x , для яких такий розклад допустимий.

Розв'язок. Розв'яжемо задачу за допомогою візуалізації обчислень. Представимо функції $y(x)$ та $f(x)$ на одному графіку і порівнюючи їх встановимо шуканий діапазон.

Графіки функцій $y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ та $f(x) = e^x$, отримані за допомогою функції `Plot`, представлені на рис. 3.4.

```
z:=1+x+x^2/2+x^3/6
```

```
Plot[z, Exp[x]], {x,0,6}]
```

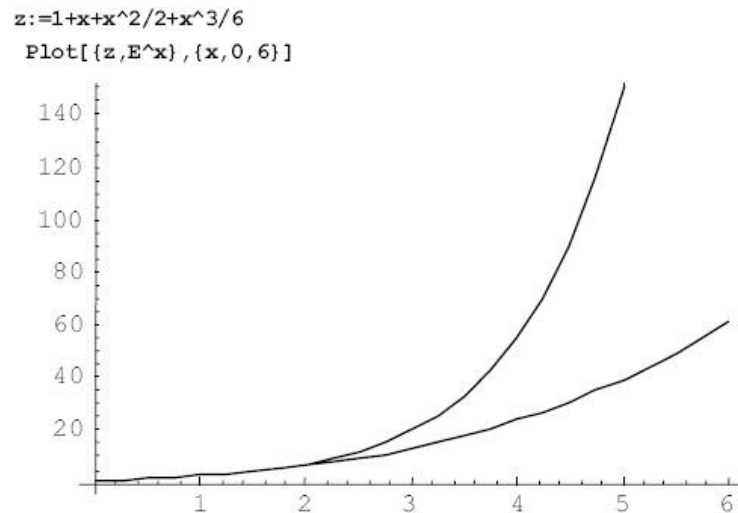


Рис. 3.4. Графік функцій $y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ та $f(x) = e^x$.

З графіків помічаємо, що розклад показникової функції в ряд Тейлора, обмеженого членом не вище третього степеня, допустимий в діапазоні значень x від 0 до 2, тобто $x \in [0,2]$. Із зростанням x похибка функції $y(x)$ суттєво зростає, й застосування такого розкладу неприйнятне. Необхідно збільшувати степінь полінома, тобто брати до уваги більше членів ряду Тейлора розкладу показникової функції.

Опції функції `Plot`

Вищерозглянута вбудована функція `Plot` використовує набір опцій за замовчуванням, що часто не влаштовує потреб користувача, з огляду на те, що:

- погано вибрано масштаб;
- відсутнє позначення осей;
- в низці випадків функцій криві не відрізняються за стилістикою;
- відсутня назва графіка.

Для створення графіка очікуваного користувачем вигляду використовують опції функції `Plot`. Всі опції можна отримати, якщо вивести

їх список командою `Options[Plot]` . Опції функції `Plot` задаються у вигляді:

`Options Name -> Options Value`

Значення (Value) опції може бути чисельним чи символьним. Розглянемо опції, які найчастіше необхідні для візуалізації обчислень. До таких опцій відносять:

- встановлення масштабу по осях;
- визначення імені вісі;
- визначення імені графіка;
- вибір стилю графіка.

З цією метою використовуються опції:

`PlotRange -> {ymin, ymax}`
`AxesLabel -> {"Tx", "Ty"}`
`PlotLabel -> "T"`
`Axes -> None`

В даних опціях прийняті такі позначення:

y_{min}, y_{max}	— мінімальне і максимальне значення функції по осі y ;
T_x, T_y	— написи на осях x та y ;
T	— текст імені графіка.

Опції мають такий зміст:

<code>PlotRange ->{y_{min}, y_{max}}</code>	— встановлює масштаб по осі y від y_{min} до y_{max} з автоматичним вибором кроку;
<code>AxesLabel ->{"T_x", "T_y"}</code>	— встановлюють підписи змісту T_x та T_y по осях x та y , відповідно;
<code>PlotLabel ->"T"</code>	— текст назви графіка, зокрема кириличним шрифтом;
<code>Axes ->None</code>	— знищує осі графіка.

Функція `Plot` може мати одночасно кілька опцій, які відокремлюються одна від одної комою. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 3.5. Побудувати:

- графік функції f в діапазоні x від 1 до 5 і масштабі по осі y від -1 до 2 з написами x та $y(x)$ по осям;

- ii. *графік функції f в діапазоні x від 0 до 7 і масштабі по осі y від -1 до 2;*
- iii. *графік функції $y = \sin x$ з його назвою.*

Розв'язок. Використовуючи опції функції Plot отримаємо для відповідних випадків:

- i. `Plot[f,{x, 1, 5}, PlotRange ->{-1, 2}]`
- ii. `Plot[f,{x, 0, 7}, PlotLabel -> {-1, 2}, AxesLabel -> {"x", "y(x)"}]`
- iii. `Plot[f,{x, 0, 5}, PlotLabel ->"Графік функції y=sin(x)"]`

Приклад 3.6. Побудувати графік функції $f(x) = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$, вибравши діапазон $f(x)$ від $f(x)_{\min} = -1$ до $f(x)_{\max} = 0.6$ і звужити діапазон x від -1 до 2. Дано графіку назву "Графік функції $\text{Log}(4 - 2x) + x^2 - 2$ ".

Розв'язок. При таких вимог до графіка функція Plot має вигляд:

```
f= Log[4-2 x]+x^2-2
Plot[f, {x, -1, 2}, PlotRange -> {-1, 0.6}, PlotLabel ->
"Графік функції Log(4-2 x)+x^2-2"]
```

Реалізацію графіка наведено на рис. 3.5.

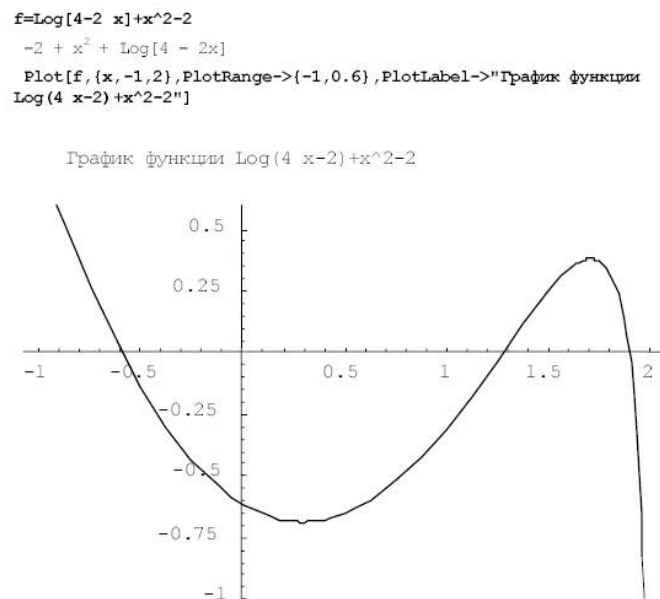


Рис. 3.5. Графік функції $f(x) = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$.

3.1.2. Вибір стилю графіка

Для вибору необхідного стилю графіка в системі комп'ютерної алгебри Mathematica використовують арсенал відповідних опцій та директив.

Опція PlotStyle

Опція PlotStyle дозволяє вибрати колір лінії та її товщину. Дана опція має такі варіанти:

```
PlotStyle -> {Heu[c1], Heu[c2], ...}
```

```
PlotStyle -> {GrayLevel[k1], GrayLevel [k2], ...}
```

де

$c_1, c_2, \dots$	— коди кольору лінії відповідних функцій;
$k_1, k_2, \dots$	— коди товщини ліній відповідних функцій.

Коди c_i та k_i вибираються з діапазону 0 – 1, тобто $c_i, k_i \in [0,1]$.

Приклад 3.7. *Необхідно представити функції $y_1 = xe^{-x}$, $y_2 = x^2$ у вигляді графіка в діапазоні x від 0 до 5. Лінії графіка повинні відрізнятися товщиною.*

Розв'язок. В даному випадку функція Plot має вигляд:

```
Plot[{x Exp[-x], x^2}, {x, 0, 5},
```

```
PlotStyle -> {GrayLevel[0.2], GrayLevel[0.8]}]
```

Реалізацію зображено на рис. 3.6.

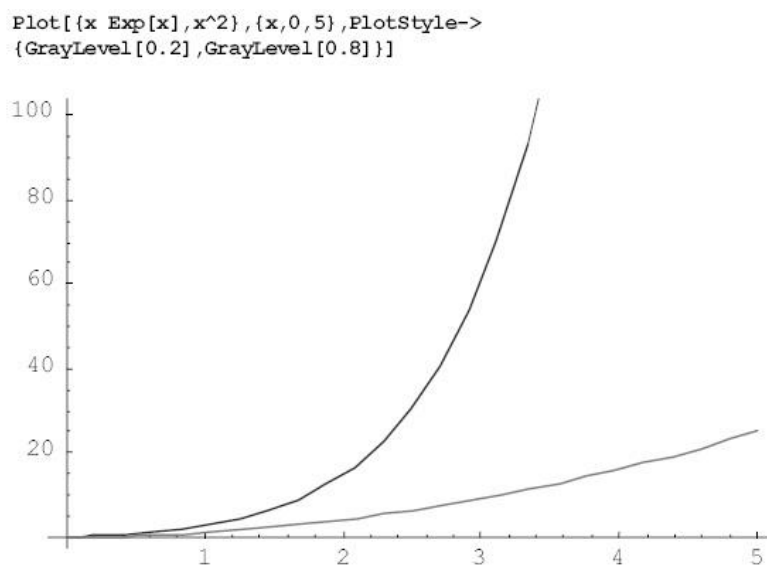


Рис. 3.6. Графіки функцій $y_1 = xe^{-x}$, $y_2 = x^2$.

Стиль графіка можна встановлювати за допомогою директив, які дозволяють формувати лінії різних форм. Система Mathematica має набір директив опції PlotStyle, які дозволяють вибрати такі стилі графіка:

Dashing[{r ₁ , r ₂ , ...}]	– встановлює величину наступних пунктирів пунктирної лінії, які періодично повторюються; значення довжини r _i задається в долях ширини лінії графіка;
AbsoluteDashing[{d ₁ , d ₂ , ...}]	– встановлює величину наступних штрихів пунктирної лінії, які періодично повторюються; значення довжини d _i задається в долях ширини лінії графіка;
PointSize[d]	– задає графік у вигляді кругів діаметра d, які змінюються в долях загальної ширини графіка;
AbsolutePointSize[d]	– задає графік у вигляді кругів діаметром d, що вимірюються в пікселях;
Thickness[r]	– встановлює товщину r лінії графіка, як долю її повної ширини;
AbsoluteThickness[r]	– встановлює товщину r лінії графіка в пікселях.

Наведемо приклади побудови графіків з використанням функції PlotStyle з директивами.

```
Plot[{Log[4-2 x]+x^2-2, 1/(1+x^4)}, {x,-2,2}, PlotStyle->
{AbsoluteDashing[{1,3}], AbsoluteDashing[{1,10}]}]
```

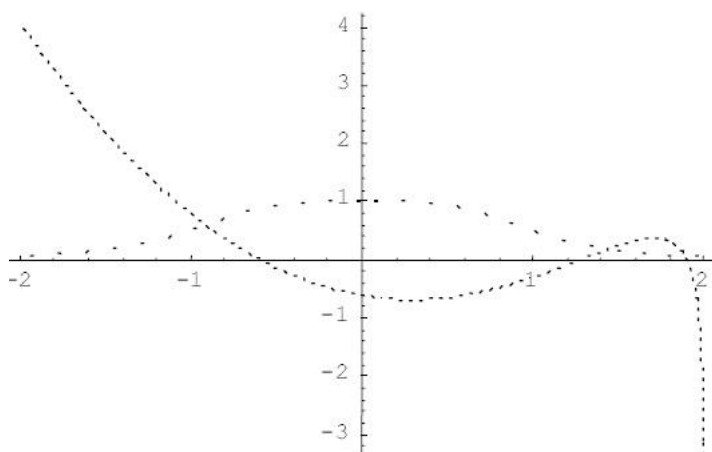


Рис. 3.7. Графіки функцій $y_1 = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$, $y_2 = \frac{1}{1+x^4}$, пунктирними лініями.

Приклад 3.7. Побудувати в різних стилях графіки функцій

$$y_1 = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2, \quad y_2 = \frac{1}{1 + x^4},$$

використовуючи директиви опції `PlotStyle`. Необхідно реалізувати два види стилів: пунктирні лінії та графіки з лініями різної товщини.

Розв'язок. У випадку графіків у вигляді пунктирних ліній функція `Plot` має вигляд:

```
Plot[{Log[4-2 x]+x^2-2, 1/(1+x^4)}, {x,-2,2}],
PlotStyle -> {AbsoluteDashing[1,3], AbsoluteDashing[1,10]}
```

Графік функції в даному випадку наведено на рис. 3.7. Для випадку графіків представлення з різною товщиною ліній функція `Plot` виглядатиме:

```
Plot[{Log[4-2 x]+x^2-2, 1/(1+x^4)}, {x,-2,2},
PlotStyle -> {Thickness[0.007], Thickness[0.001]}
```

Графік функції в даному випадку наведено на рис. 3.8.

```
Plot[{Log[4-2 x]+x^2-2,1/(1+x^4)}, {x,-2,2}, PlotStyle-
->{Thickness[0.007],Thickness[0.001]}}
```

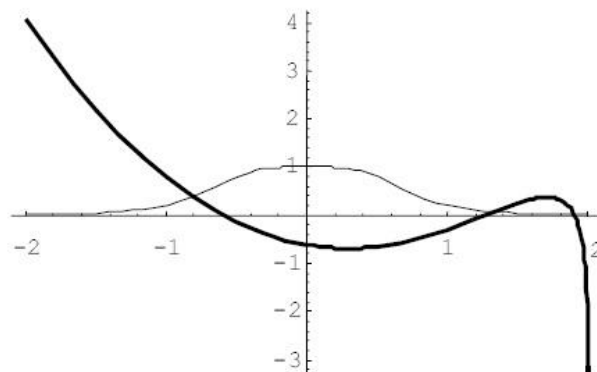


Рис. 3.8. Графіки функцій $y_1 = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$, $y_2 = \frac{1}{1+x^4}$, з різною товщиною ліній.

Приклад 3.8. Побудувати на одному рисунку в діапазоні x від 1 до 10 графіки функцій

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \ln x, \quad y_3 = \frac{x-1}{x+1}$$

використовуючи директиви опції `PlotStyle`, з використанням різних стилів.

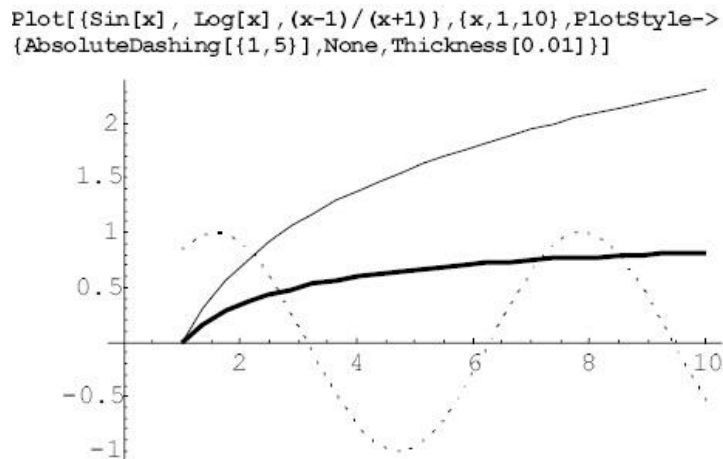


Рис. 3.9. Графіки функцій з різними стилями.

Розв'язок. Зобразимо не використовуючи жодних стилів графік функції $y_2 = \ln x$. Для решти ж функцій застосуємо стилі. Зокрема, використаємо для функції $y_1 = \sin x$ пунктирні лінії та лінії різної товщини — для $y_3 = \frac{x-1}{x+1}$. Тоді функція `Plot`, з використанням відповідних директив, матиме вигляд:

```
Plot[{Sin[x], Log[x], (x-1)/(x+1)}, {x, 1, 10},
PlotStyle -> {AbsoluteDashing[1, 5], None, Thickness[0.01]}]
```

Графік наведено на рис. 3.9.

3.1.3. Позначення кривих на графіках функцій

Позначення кривих в полі графіка суттєво підвищує наочність графічного представлення функцій. Для цього система комп'ютерної алгебри Mathematica має низку опцій підпаketу `Legend` пакету `Graphics`, до якого звертаються у такий спосіб:

```
<<Graphics`Legend`
```

В підпаketі є опція для позначення кривих

```
PlotLegend -> {"T1", "T2", ...}
```

де "T₁", "T₂", ... — рядки, що позначають функції $y_1, y_2, \dots$. Для застосування цієї опції необхідно, щоб криві $y_1, y_2, \dots$ не накладались одна на одну. Це можна реалізувати за допомогою стилів.

```
<<Graphics`Legend`
Plot[{Sin[x], Log[x]}, {x, 1, 10}, AxesLabel->
{"x", "y(x)"}, PlotStyle-> {AbsoluteDashing[{1, 5}],
Thickness[0.01]}, PlotLegend-> {"Sin (x)", "Ln (x)"}]
```

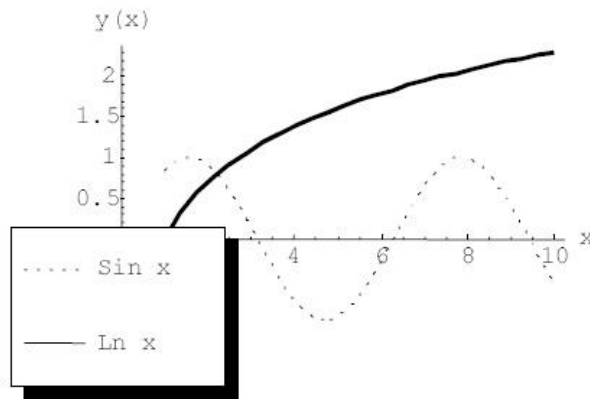


Рис. 3.10. Позначення кривих математичними функціями.

Приклад 3.9. Побудувати на одному графіку в діапазоні x від 1 до 10 графіки функцій

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \ln x$$

використовуючи директиви опції `PlotStyle`, з використанням різних стилів. Позначення кривих виконати у вигляді математичних виразів.

Розв'язок. В цьому випадку графіки функцій необхідно зобразити потовщеною лінією та пунктирною лінією. Функція `Plot` набере вигляду:

```
Plot[{Sin[x], Log[x]}, {x, 1, 10}],
PlotStyle -> {AbsoluteDashing[1, 5], Thickness[0.01]},
PlotLegend -> {"Sin (x)", "Ln (x)"}
```

Графік наведено на рис. 3.10.

3.1.4. Графіки спеціальних типів

Розглянемо інструментарій створення графіків в логарифмічному масштабі та в полярних координатах в системі комп'ютерної алгебри Mathematica.

Побудова графіків в логарифмічному масштабі

Побудова графіків в логарифмічному масштабі здійснюється за допомогою функцій типу `LogPlot[f, {x, xmin, xmax}]`, де

f	— функції, графіки яких будуємо;
$x_{\min}, x_{\max}$	— діапазони зміни аргумента функції f ;
x_i, y_i	— координати точки i функції f , заданої у вигляді матриці (таблиці) $i=1, 2, \dots$.

Власне наведемо перелік функцій для побудови графіків в логарифмічному масштабі та охарактеризуємо їх призначення:

<code>LogPlot[f, {x, x_{min}, x_{max}}]</code>	— створює лінійно-логарифмічний графік функції f в діапазоні x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (напівлогарифмічний масштаб з логарифмічним масштабом по осі y);
<code>LogLinearPlot[f, {x, x_{min}, x_{max}}]</code>	— створює логарифмічний лінійний графік функції f в діапазоні x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (логарифмічний масштаб по осі x);
<code>LogLogPlot[f, {x, x_{min}, x_{max}}]</code>	— будує графік функції f в логарифмічному масштабі по обох осях;
<code>LogListPlot[f, {x₁, y₁}, {x₂, y₂}...]</code>	— створює лінійно-логарифмічний точковий графік функції f в діапазоні x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (напівлогарифмічний масштаб з логарифмічним масштабом по осі y);
<code>LogLinearListPlot[f, {x₁, y₁}, {x₂, y₂}...]</code>	— створює логарифмічний лінійний точковий графік функції f в діапазоні x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (логарифмічний масштаб по осі x);
<code>LogLogListPlot[f, {x₁, y₁}, {x₂, y₂}...]</code>	— будує точковий графік функції f в логарифмічному масштабі по обох осях.

Приклад 3.10. Побудувати в діапазоні x від 1 до 5 в напівлогарифмічному масштабі графік функції

$$y = x^8 e^x + \sinh x.$$

Розв'язок. В цьому випадку графіки функцій необхідно зобразити потовщеною лінією та пунктирною лінією. Функція `LogPlot` набере вигляду:

```
LogPlot[x^8 Exp[x]+Sinh[x], {x, 1, 5}]
```

```
<<Graphics`Graphics`
LogPlot[x^8 Exp[x]+ Sinh[x], {x,1,5}, AxesLabel-> {"x", "Log(x)"}]
```

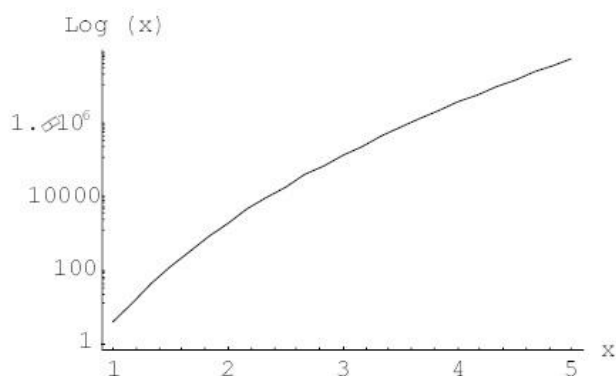


Рис. 3.11. Графік функції $y = x^8 e^x + \sinh x$ в напівлогарифмічному масштабі.

Графік наведено на рис. 3.11.

Побудова графіків в полярній системі координат

Створення графіків в полярній системі координат здійснюється за допомогою функцій типу `PolarPlot[f, {t, tmin, tmax}]`, де

f	— функції, графіки яких будуємо;
f_i	— i -та функції багатфункціонального графіка;
t_{min}, t_{max}	— значення кута t полярної системи координат t_{min} від до t_{max} ;
r_i	— i -тий радіус списку радіусів полярної системи координат.

Наводимо перелік функцій для побудови графіків в полярній системі координат з характеристикою їх призначення:

<code>PolarPlot[f, {t, t_{min}, t_{max}}]</code>	— будує графік положення кінця вектора f при зміні кута t від t_{min} до t_{max} ;
<code>PolarPlot[{f₁, f₂, ...}, {t, t_{min}, t_{max}}]</code>	— будує графік сукупності функцій при зміні кута t від t_{min} до t_{max} ;
<code>PolarPlot[{r₁, r₂, ...}, {t, t_{min}, t_{max}}]</code>	— будує графік списку r , рівномірно змінюючи кутову координату.

Розглянемо приклади побудови графіків в полярній системі координат.

Приклад 3.11. В діапазоні зміни x від 0 до 2π , представити функцію

$$f(x) = \frac{1 + 2 \sin x}{1 + 2 \cos x}$$

у вигляді графіка в полярній системі координат.

Розв'язок. Функція `PolarPlot` буде мати вигляд

```
PolarPlot[(1+2 Sin[x])/(1+2 Cos[x]), {x,0,2 Pi}]
```

Графік цієї функції наведено на рис. 3.12.

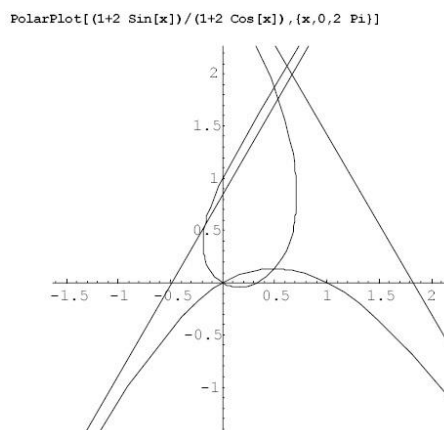


Рис. 3.12. Графік функції $f(x) = \frac{1+2 \sin x}{1+2 \cos x}$ в полярних координатах.

Приклад 3.12. Побудувати в полярній системі координат сімейство функцій

$$-3 \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}, \quad 3 \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}, \quad 3e^{-2x}, \quad \sin(5x+1)$$

якщо $x_{\min} = -3, x_{\max} = 3$.

Розв'язок. Функція PolarPlot буде мати вигляд

```
PolarPlot[({-3 Sqrt[(x+3)/(3-x)], 3 Sqrt[(x+3)/(3-x)],  
3 Exp[-2 x], Sin[5 x+1]}), {x,-3,3}]
```

Графік наведено на рис. 3.13.

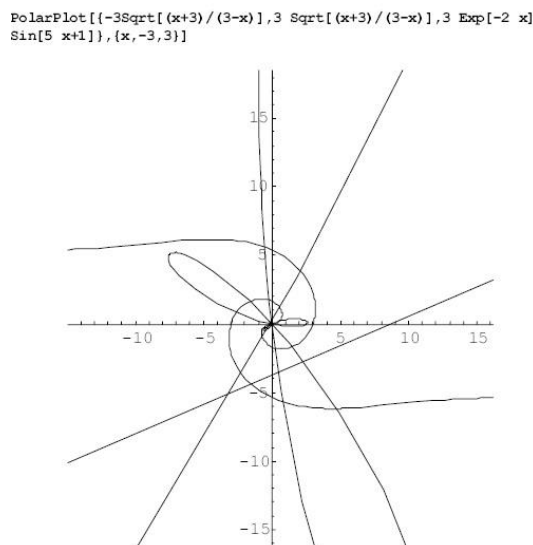


Рис. 3.13. Графік сімейства функцій в полярних координатах.

3.2. Тривимірна графіка

Тривимірна графіка — це графіка функцій двох змінних. Тривимірні графіки можуть поділяють на кілька типів: контурні графіки, графіки поверхонь та графіки фігур [27].

Система комп'ютерної алгебри Mathematica оснащена потужним арсеналом можливостей для створення об'єктів тривимірної графіки. Велика кількість вбудованих графічних функцій і директив до них дозволяють створювати графіки фактично будь-якого вигляду.

Графічні можливості системи такі, що виходять далеко за межі візуалізації обчислень. Загалом графіка системи Mathematica є самодостатнім комплексом, який вимагає глибокого вивчення.

Ми ставимо за мету використовувати потенціал графіки як засобу візуалізації обчислень. Власне, для цього в більшості випадків достатньо двовимірної графіки. Тому не заглиблюватимемось в методологію створення об'єктів тривимірної графіки. Проілюструємо лише на низці прикладів можливості системи щодо створення об'єктів тривимірної графіки. Всесторонньо можливості тривимірної графіки системи Mathematica викладено в [12, 33].

3.2.1. Створення контурних графіків

Контурні графіки дозволяють представляти поверхні та площини. Система Mathematica має понад 20 функцій та опцій побудови контурних графіків. Зокрема, чи не найпоширенішою функцією цього типу є

`ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`, де

f	— функція змінних x, y ;
$x_{\min}, x_{\max}$	— діапазон зміни змінної x ;
$y_{\min}, y_{\max}$	— діапазон зміни змінної y .

Функція `ContourPlot` створює контурний графік функції $f(x, y)$.

`ContourPlot[x Sin[x+y]+Exp[x+y] Cos[x+y] ,{x,-3,1},{y,-3,3}]`

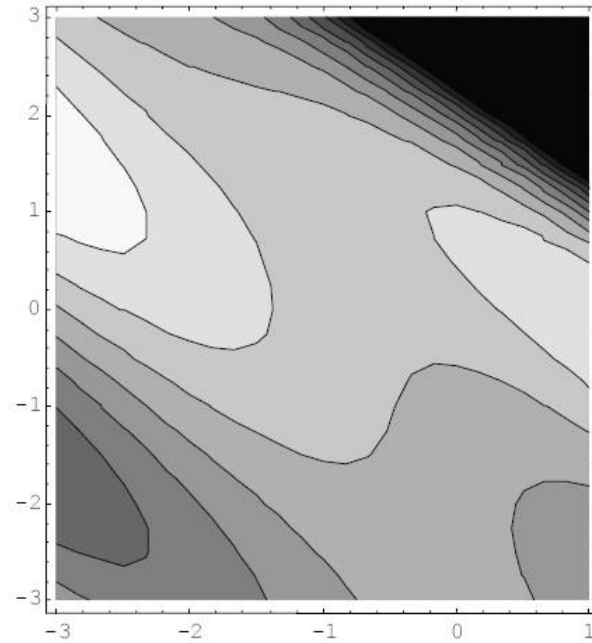


Рис. 3.14. Контурний графік функції $z = x \sin(x + y) + e^{x+y} \cos(x + y)$.

Приклад 3.13. Представити функцію

$$z = x \sin(x + y) + e^{x+y} \cos(x + y).$$

у вигляді контурного графіка в діапазоні зміни x від $x_{\min} = -3$ до $x_{\max} = 1$ та y від $y_{\min} = -3$ до $y_{\max} = 3$.

Розв'язок. В цьому випадку функція `ContourPlot` виглядатиме так

```
ContourPlot[x Sin[x+y]+Exp[x+y] Cos[x+y], {x,-3,1}, {y,-3,3}]
```

Графік наведено на рис. 3.14.

3.2.2. Побудова графіків поверхні

Для побудови графіків поверхні система має графічну функцію `Plot3D`, яка має вигляд

```
Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]
```

Позначення мають такий самий сенс, що й `ContourPlot`.

Функція `Plot3D` будує просторовий графік функції двох змінних $z = f(x, y)$. Для формування видимості об'єму фігури застосовується інструментарій аксонометрії.

```
Plot3D[x Exp[x+y] Sin[x+y]/Cos[x+y], {x,-3,1},{y,-3,3}]
```

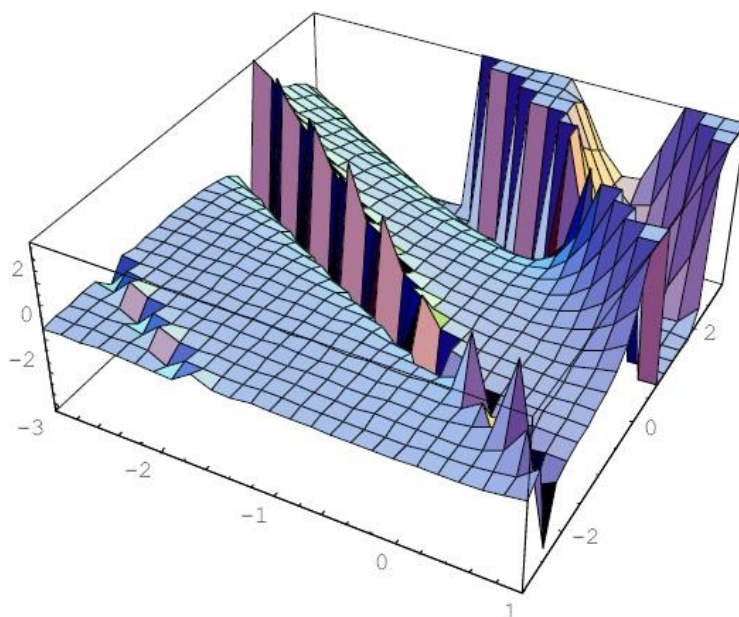


Рис. 3.15. Графік поверхні $z = x e^{x+y} \sin(x+y) / \cos(x+y)$.

Приклад 3.14. Побудувати графік поверхні, яка описується функцією

$$z = x e^{x+y} \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

при зміні x від $x_{\min} = -3$ до $x_{\max} = 1$ та y від $y_{\min} = -3$ до $y_{\max} = 3$.

Розв'язок. В цьому випадку функція ContourPlot виглядатиме так

```
Plot3D[x Exp[x+y] Sin[x+y]/Cos[x+y], {x,-3,1}, {y,-3,3}]
```

Графік наведено на рис. 3.15.

3.2.3. Побудова фігур

Використовуючи графічну функцію ParametricPlot3D, можна отримувати дуже цікаві фігури. Однією з модифікацій функції ParametricPlot3D є

```
ParametricPlot3D[f1, f2, f3, {x, x_min, x_max}, {y, y_min, y_max}], де
```

f_i	— i -та функція, що задає координати точки x_i, y_i ;
$x_{\min}, x_{\max}$	— діапазон зміни змінної x ;
$y_{\min}, y_{\max}$	— діапазон зміни змінної y .

Дана функція будує графік через параметричне задання всіх трьох функцій.

Проілюструємо результати її роботи на прикладах.

```
ParametricPlot3D[{x^2 Cos[x] (5+Cos[x+y]), x^2 Sin[x] (5+Cos[x+y]),  
x^2 Sin[x+y]}, {x, 0, 3 Pi}, {y, 0, 2 Pi}]
```

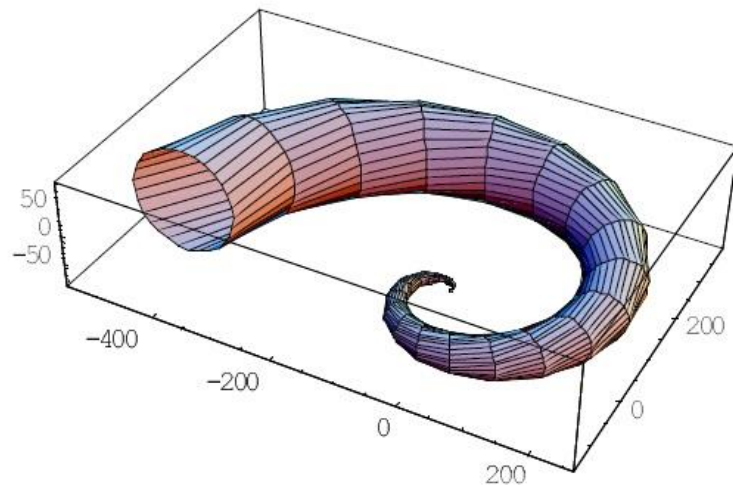


Рис. 3.16. Графік функції $z(f_1, f_2, f_3)$ (приклад 3.15).

Приклад 3.15. Побудувати поверхню, параметричні функції якої є такими

$$f_1 = x^2 \cos x (5 + \cos(x + y)),$$

$$f_2 = x^2 \sin x (5 + \cos(x + y)),$$

$$f_3 = x^2 \sin(x + y).$$

Діапазон зміни x від $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = 3\pi$ та y від $y_{\min} = 0$ до $y_{\max} = 2\pi$.

Розв'язок. В даному випадку функція `ParametricPlot3D` виглядатиме таким способом

```
Plot3D[{x^2 Cos[x] (5+Cos[x+y]), x^2 Sin[x] (5+Cos[x+y],  
x^2 Sin[x+y]}, {x, 0, 3 Pi}, {y, 0, 2 Pi}]
```

Графік наведено на рис. 3.16.

Приклад 3.16. Побудувати поверхню, параметричні функції якого мають вигляд

$$f_1 = \cos x (3 + \cos y),$$

$$f_2 = \sin x (3 + \cos y),$$

$$f_3 = \sin 2y.$$

Діапазон зміни x від $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = 2\pi$ та y від $y_{\min} = 0$ до $y_{\max} = 2\pi$.

Розв'язок. В даному випадку функція `ParametricPlot3D` така

```
Plot3D[{Cos[x] (3+Cos[y]), Sin[x] (3+Cos[y]), Sin[2 y]},  
{x,0,2 Pi}, {y,0,2 Pi}]
```

Графік наведено на рис. 3.17.

```
ParametricPlot3D[{Cos[x] (3+Cos[y]), Sin[x] (3+Cos[y]),  
Sin[2 y]}, {x,0,2 Pi}, {y,0,2 Pi}]
```

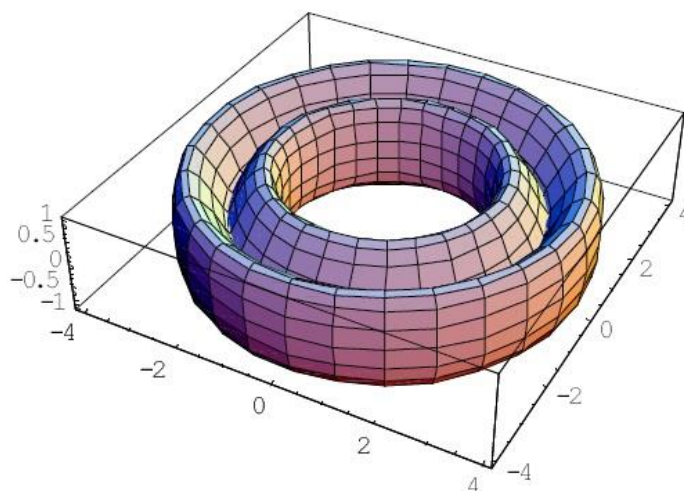


Рис. 3.17. Графік функції $z(f_1, f_2, f_3)$ (приклад 3.16).

Питання, тести для самоконтролю

1. Як представлена двовимірна графіка в системі Mathematica?
2. Охарактеризуйте синтаксис графічної функції Plot.
3. Наведіть приклади застосування функції Plot для побудови графіків.
4. Який інструментарій системи Mathematica використовується для вибору стилів графіків?
5. Як позначити криві на графіках функцій?
6. Які графіки спеціальних типів в системі Mathematica вам відомі?
7. Як представлена тривимірна графіка в системі Mathematica?
8. Як в системі Mathematica створити контурні графіки?
9. Наведіть приклади побудови графіків поверхонь в системі Mathematica.
10. Наведіть приклади побудови фігур в системі Mathematica.

Обов'язкові та додаткові задачі

Для самостійного опрацювання підібрано приклади, що дозволять глибше освоїти роботу з графікою. Користувачу необхідно самостійно вибрати графічну функцію, при цьому головною задачею є отримати зображення, що візуалізує відомі математичні об'єкти. Слід пам'ятати, що в системі Mathematica існує потужний вбудований інструментарій графіки, описаний в [8–11, 12, 27, 37, 42, 45]. Для перевірки навичок побудови графіків важливо показати, що результати вірні і співпадають з відповідними зображеннями в [39].

№ задачі	Функція	Підказка
1.	$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 1, -2 \leq x \leq 2$	
2.	$y = x^3 - \frac{1}{x^2 + 1}, -2 \leq x \leq 2$	
3.	$y = \ln(x^3 + 2x^2 + 1), x \leq 3$	
4.	$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}, -5 \leq x \leq 5$	
5.	$y = \sqrt{x^3 + 2}, -2 \leq x \leq 2$	
6.	$y = \frac{3}{x^2 - 4}, -3 \leq x \leq 3$	
7.	$y = e^{-2x}, -2 \leq x \leq 2$	
8.	$y = e^{x^2} - \ln(2x - 1), \leq x \leq 5$	
9.	$y = \sin 2x, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	
10.	$y = \cos^2 x, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	
11.	$y = \operatorname{tg} \frac{x^2}{2}, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	
12.	$y = \sin 2x + \sin \sqrt{x}, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	
13.	$\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$	[39] (рис. 9,10)
14.	$\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$	[39] (рис. 12,13)
15.	$\Gamma(z)$	[39] (рис. 18)
16.	$J_0(x)$ та $J_1(x)$ (функції Бесселя)	[39] (рис. 106)

17.		$J_\nu(x)$ $\nu = -n - \frac{1}{2}$ (функції Бесселя)	[39] (рис. 108)
18.	*	$J_\nu(x)$ $-4 \leq \nu \leq 10$ (функція Бесселя)	[39] (рис. 98,99)
19.		$N_\nu(x)$ $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$. (функції Неймана)	[39] (рис. 113)
20.		$H_\nu^{(1)}(x) = h_\nu e^{i\eta_\nu}$ $\nu = 0, 1$. (функції Ганкеля)	[39] (рис. 120)
21.		$\Phi(a, -1.5, x)$ (функція Куммера)	[39] (рис. 192)
22.	*	$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (функція Рімана)	[39] (рис. 35)
23.	*	$\operatorname{sn} u$, $k = 0.8$ (функція Якобі)	[39] (рис. 62)
24.	*	$\operatorname{cn} u$, $k = 0.8$ (функція Якобі)	[39] (рис. 63)
25.	*	$\wp u = \frac{d\xi u}{du}$ (функція Вейерштрасса)	[39] (рис. 69)

З метою глибшого засвоєння матеріалів розділу варто додатково розв'язати засобами системи комп'ютерної алгебри Mathematica задачі, що розглядаються в [2–4].

РОЗДІЛ IV. СПЕЦІАЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ

В цьому розділі розглянемо інструментарій системи комп'ютерної алгебри Mathematica для розв'язування задач математичного аналізу. Власне, продемонструємо на прикладах як обчислювати суми, границі, розкласти функції в ряди, диференціювати [27].

4.1. Обчислення сум

Система Mathematica обчислює такі суми

$$S = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \cdots \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f_{i,j,\dots,k}.$$

Підсумовування відбувається за необмеженою кількістю змінних і в довільному діапазоні їх зміни в межах функціональної розрядності системи Mathematica. Обчислення виконується як в аналітичному, так і в чисельному вигляді. При цьому функція v може бути представлена списком чисел, символьних змінних чи функцією необмеженого числа змінних сумування.

4.1.1. Обчислення сум в аналітичному вигляді

Результатами сумування в аналітичному вигляді можуть бути вирази (формули) або точні значення суми, представлені в нормальній формі (з чисельником та знаменником). Сумування в аналітичному вигляді реалізується з використанням таких вбудованих функцій

`Sum[fi, {i, imax}]`

`Sum[fi, {i, imin, imax}]`

`Sum[fi, {i, imin, imax, Δi}]`

`Sum[fi,j,..., {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]`

В функціях прийняті позначення:

f	— елементи сумування;
i	— змінна сумування;
$i_{\min}, i_{\max}$	— мінімальне та максимальне значення індекса i ;

Δ_i	— крок зміни змінної i ;
------------	----------------------------

Вищенаведені функції реалізують символічні обчислення сум, а також чисельні обчислення з видачею результатів у вигляді точного значення суми в нормальній формі представлення числа. Розглянемо детальніше дані функції та приклади їх застосування.

Функція $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\max}\}]$ обчислює суму значень f_i при зміні індексу i від 1 до $i_{\max}$ з кроком, рівним 1.

Приклад 4.1. *Знайти суму чисел від 1 до n , якщо*

$$f = n, \quad f = n^2, \quad f = n^3,$$

$$i_{\max} = 1000; i_{\max} = 100000.$$

Розв'язок. В даному випадку слід скористатись функцією $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\max}\}]$, де $i=n$, $i_{\max}=n$, або $i_{\max}=1000$, або $i_{\max}=100000$.

```
Sum[n, {n, n}]
  1/2 n(1 + n)
Sum[n^2, {n, n}]
  1/6 n(1 + n)(1 + 2n)
Sum[n^3, {n, n}]
  1/4 n^2(1 + n)^2
Sum[n, {n, 1000}]
  500500
Sum[n, {n, 100000}]
  500000500000
```

В перших трьох функціях система Mathematica видала формули обчислення сум натурального ряду чисел, їх квадрату та кубу. Після цього обчислення можна виконати навіть без допомоги комп'ютера. В останніх двох прикладах функція обчислює значення суми чисел від 1 до 1000 та від 1 до 100000.

Функція $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\min}, i_{\max}\}]$ обчислює суму значень f_i при зміні індексу i від значення $i_{\min}$ до $i_{\max}$ з кроком, рівним 1.

Приклад 4.2. Знайти суму чисел функції $f = \frac{x^n}{n!}$ при зміні n від 1 до ∞ ; від 1 до 10 та від 10 до 13. Крім того, знайти значення такої суми

$$\sum_{k=1}^{30} \left(\frac{3^k}{k!} - \frac{2^k}{(k-1)!} \right).$$

Розв'язок. У цьому випадку зазначено діапазон зміни змінної, тому для обчислень необхідно скористатись функцією $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\min}, i_{\max}\}]$.

```
Sum[x^n/n!, {n, 0, ∞}]
e^n
Sum[x^n/n!, {n, 1, 5}]
x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120
Sum[x^n/n!, {n, 10, 13}]
x^10/3628800 + x^11/39916800 + x^12/479001600 + x^13/6227020800
Sum[3^k/k! - 2^k/(k-1)!, {k, 1, 30}]
380852242272853492818892813085603
88417619937397019545436160000000
N[%]
4.30742
```

Приклад 4.2 ілюструє як функція $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\min}, i_{\max}\}]$ знаходить суму нескінченного ряду показникової функції, часткові суми членів ряду із заздалегідь визначеного діапазону та точне значення суми 30-ти членів ряду.

Функція $\text{Sum}[f_i, \{i, i_{\min}, i_{\max}, \Delta_i\}]$ обчислює суму значень f_i при зміні індексу i від 1 до $i_{\max}$ зі сталим кроком Δ_i .

Функція $\text{Sum}[f_{i,j}, \dots, \{i, i_{\min}, i_{\max}\}, \{j, j_{\min}, j_{\max}\}, \dots]$ обчислює суму мультиіндексної змінної функції при відомих діапазонах значень індексних змінних зі сталим кроком, рівним 1.

Приклад 4.3. Обчислити суму функції $f = n!$ при зміні n від 0 до 10 з кроком $\Delta_i = 0.2$. Крім того, обчислити суми

$$\sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{10} (x_i^2 + y_j^2), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^n y^m}{n! m!} \right), \quad \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\frac{x^n y^m}{n! m!} \right),$$

обчисливши останню суму при $x = y = 1$.

Розв'язок. В даному прикладі для обчислення суми $n!$ необхідно використати вбудовану функцію `Sum[fi, {i, imin, imax, Δi}]` та, відповідно, функцію `Sum[fi,j,..., {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]` для обчислення мультиіндексних сум. В результаті отримаємо

```
Sum[n!, {n, 0, 10, 0.2}]
9.81876 × 106
Sum[x^2+y^2, {x, 1, 50}, {y, 1, 10}]
448500
Sum[x^n/n! y^m/m!, {n, 0, ∞}, {m, 0, ∞}]
ex+y
Sum[x^n/n! y^m/m!, {n, 1, 3}, {m, 1, 3}]
xy +  $\frac{x^2y}{2} + \frac{x^3y}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^3y^2}{12} + \frac{xy^3}{6} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^3y^3}{36}$ 
x:=1
y:=1
N[%%]
2.77778
```

4.1.2. Обчислення сум в чисельному вигляді

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica обчислення сум в чисельному варіанті здійснюється за допомогою вбудованих функцій, які мають вигляд аналогічний до функцій символьного сумування. Різняться вони наявністю перед іменем символу 'N', а саме:

```
NSum[fi, {i, imax}]
NSum[fi, {i, imin, imax}]
NSum[fi, {i, imin, imax, Δi}]
NSum[fi,j,..., {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]
```

Технологія обчислення сум в даному випадку така сама як і у випадку символьних змінних. Результатом обчислення є число, представлене в звичайній формі.

Приклад 4.4. Обчислити такі суми:

$$\sum_{z=1}^{100} \frac{z^2}{2}, \quad \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z^3}, \quad \sum_{x=1}^2 x^2 e^{-x}, \quad \sum_{x=1}^{20} \sum_{y=1}^{30} (x+y)^2.$$

Останню суму обчислити при зміні x від $x = 1$ до $x = 2$ $\Delta = 0.1$.

Розв'язок. В даному для обчислення суми $x^2 e^{-x}$ необхідно використати вбудовану функцію `NSum[ $f_i$ , { $i$ ,  $i_{\min}$ ,  $i_{\max}$ ,  $\Delta_i$ }]`, для обчислення суми $(x+y)^2$ — функцію `Sum[ $f_{i,j}, \dots$ , { $i$ ,  $i_{\min}$ ,  $i_{\max}$ }, { $j$ ,  $j_{\min}$ ,  $j_{\max}$ }, ...]`. Перші дві суми обчислюються використовуючи вбудовані функції `NSum[ $f_i$ , { $i$ ,  $i_{\max}$ }]` та `NSum[ $f_i$ , { $i$ ,  $i_{\min}$ ,  $i_{\max}$ }]` відповідно. Отримуємо

```
NSum[z^2/2, {z, 100}]
169175.
NSum[1/z^3, {z, 1, ∞}]
1.20206
Sum[x^2 Exp[-x], {x, 1, 2, 0.1}]
5.31199
Sum[(x+y)^2, {x, 1, 20}, {y, 1, 30}]
470500.
```

4.1.2. Обчислення сум з використанням символу сумування

При розв'язуванні багатьох практичних задач зручно та звично використовувати замість вбудованої функції `Sum` символ сумування

$$\sum_{\oplus}^{\oplus}$$

В цьому випадку технологія сумування ґрунтується на виконанні процедури:

- i. викликати символ сумування панелі інструментів через запит до команд меню **File: File | Pallets | BasicInput**;
- ii. введення функції f_i та меж сумування;

iii.отримання результату сумування натисканням комбінації клавіш
<Shift><Enter>.

Приклад 4.5. Використовуючи символ сумування, обчислити суми:

$$\sum_{n=1}^n n, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \quad \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left(\frac{x^n y^m}{n! m!} \right), \quad \sum_{x=1}^{20} \sum_{y=1}^{30} (x + y)^2.$$

Розв'язок. Реалізувавши описану процедуру виклику символу сумування, одержуємо:

$$\sum_{n=1}^n n$$

$$\frac{1}{2} n(n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i / i !$$

$$e^x$$

$$\sum_{x=1}^{20} \sum_{y=1}^{30} x^n / n! \ y^m / m!$$

$$xy + \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^3 y}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x^3 y^2}{12} + \frac{xy^3}{6} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{x^3 y^3}{36}$$

$$\sum_{x=1}^{20} \sum_{y=1}^{30} (x + y)^2$$

$$470500$$

4.2. Табулювання функції

Табулювання функції — це обчислення значень функції при зміні аргумента від деякого початкового значення до деякого кінцевого значення з певним кроком [27]. Саме так складають таблиці значень функцій, звідси й назва — *табулювання*. Необхідність в табулюванні виникає при розв'язуванні широкого кола задач. Наприклад, при чисельному розв'язуванні нелінійних рівнянь $f(x) = 0$ методом табулювання можна відокремити (локалізувати) корені рівняння, тобто знайти такі відрізки, на

кінцях яких функція має різні знаки. За допомогою табулювання можна знайти мінімум чи максимум функції. Іноді трапляється так, що функція не має аналітичного подання, а її значення отримуються в результаті обчислень, що зазвичай має місце при комп'ютерному моделюванні різних процесів. Якщо така функція буде використовуватися в подальших розрахунках, то часто роблять так: обчислюють значення функції в потрібному інтервалі зміни аргумента, тобто складають таблицю (*табулюють*), а після того за цією таблицею будують яким-небудь способом іншу функцію, задану аналітичним виразом (формулою). Необхідність у табулюванні виникає у таких випадках:

- оцінка області ізоляції кореня рівняння;
- побудова графіків функції;
- визначення похибки інтерполяції;
- обчислення інтегралів спеціального вигляду;
- визначення степеня інтерполяційного полінома за значеннями табличних різниць.

Таблицю можна отримати безпосередніми обчисленнями значень функції $f(x)$ при різних значеннях аргумента. Однак в цьому немає потреби. Система Mathematica з цією метою оснащена такими вбудованими функціями:

`Table[f(x), {n}]`

`Table[f(x), {x, xmax}]`

`Table[f(x), {x, xmin, xmax}]`

`Table[f(x), {x, xmin, xmax, Δx}]`

`Table[f(x, y, ...), {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, ...]`

У вбудованих функціях використовуються такі позначення:

$f(x)$	— функція, що табулюється;
x	— аргумент функції, що табулюється;
n	— число повторів функції $f(x)$;
$x_{\min}, x_{\max}$	— мінімальне та максимальне значення аргумента;

Δx	— крок зміни аргумента;
$f(x, y, \dots)$	— функція багатьох змінних, аргументами якої є $x, y, \dots$.

Нагадаємо, що функцією *відклику* (*зворотного виклику*) називають таку функцію, яку інша функція може викликати пізніше у відповідь на те, що її викликали. Відкликом будь-якої функції `Table` є вектор, або матриця, елементами якої є точні значення функції. При цьому відсутні будь-які обмеження щодо вигляду функції, діапазону зміни її аргумента і кроку таблиці.

Технологія табулювання функції в системі Mathematica проста: вводиться функція `Table` і для отримання відповіді натискається комбінація клавіш `<Shift><Enter>`.

Розглянемо більше детально вбудовані функції `Table` на прикладах. Функція `Table[f(x), {n}]` задає вектор, кожним елементом якого є функція $f(x)$ в аналітичному вигляді. Якщо x — число, а функція $f(x)$ має точне значення, то відкликом є вектор, елементи якого представлені в нормальній формі.

Приклад 4.6. Представити функції $\ln x$ та $\ln 3$ у вигляді вектора з числом елементів $n = 5$, а функції e^{-1} та $\sin 2$ у вигляді матриці з числом елементів $n = 3$.

Розв'язок. Спочатку отримаємо розв'язок в аналітичному вигляді, а після цього, використовуючи команду `N[%]`, знаходимо чисельні розв'язки.

```
Table[Log[x], {5}]
{Log[x], Log[x], Log[x], Log[x], Log[x]}
Table[Log[3], {5}]
{Log[3], Log[3], Log[3], Log[3], Log[3]}
N[%]
{1.09861, 1.09861, 1.09861, 1.09861, 1.09861}
Table[{Exp[-1], Sin[2]}, {3}]
{{1/e, Sin[2]}, {1/e, Sin[2]}, {1/e, Sin[2]}}
N[%]
{{0.367879, 0.909297}, {0.367879, 0.909297},
{0.367879, 0.909297}}
```

Розглянемо функцію $\text{Table}[f(x), \{x, x_{\max}\}]$. Результатом виконання цієї функції є вектор, елементами якого є значення функції $f(x)$ від $x=1$ до $x=x_{\max}$. Розв'язки представляються в аналітичному вигляді.

Приклад 4.7. Протабулювати функції

$$\frac{x^2 + 1}{x}, \quad xe^x, \quad \frac{a^2 + b^2}{2a},$$

а також функції x^2 , e^x , представлені у вигляді матриць. Максимальне значення аргумента $x_{\max} = 5$.

Розв'язок. Отримаємо розв'язок в аналітичному вигляді. Далі, використовуючи команду $\text{N}[\%]$, знаходимо чисельні результати.

```
Table[(x^2+1)/x, {x, 5}]
{2, 5/2, 10/3, 17/4, 26/5}
Table[x Exp[x], {x, 5}]
{e, 2e^2, 3e^3, 4e^4, 5e^5}
N[%]
{2.71828, 14.7781, 60.2566, 218.393, 742.066}
Table[(a^2+b^2)/(2 a), {a, 5}]
{1/2(1+b^2), 4+b^4, 3/2(9+b^2), 2(16+b^2), 5/2(25+b^2)}
Table[{x^2, Exp[x]}, {x, 5}]
{{1,e}, {4,e^2}, {9,e^3}, {16,e^4}, {25,e^5}}
```

Розглянемо функцію $\text{Table}[f(x), \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$. Її відкликом є вектор, елементами якого є значення функції $f(x)$ від $x=x_{\min}$ до $x=x_{\max}$, обчислені з кроком $h = 1$.

Приклад 4.8. Протабулювати функції

$$\frac{x-1}{x+1} \quad \text{при} \quad x_{\min} = 4, x_{\max} = 10;$$

$$\frac{a-1}{b+1} \quad \text{при} \quad b_{\min} = 2, b_{\max} = 6.$$

Виконати табулювання функції x та $\ln x$ в діапазоні $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = 8$, що представлені у вигляді матриць.

Розв'язок. Аналогічно до попереднього випадку отримаємо спочатку розв'язок в аналітичному вигляді і, використовуючи команду `N[%]`, знайдемо чисельні результати.

```
Table[(x-1)/(x+1), {x, 4, 10}]
 $\left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11}\right\}$ 
Table[(a-1)/(b+1), {b, 2, 6}]
 $\left\{\frac{1}{3}, (-1+a), \frac{1}{4}(-1+a), \frac{1}{5}(-1+a), \frac{1}{6}(-1+a), \frac{1}{7}(-1+a)\right\}$ 
Table[{x, Log[x]}, {x, 5, 8}]
{{5, Log[5]}, {6, Log[6]}, {7, Log[7]}, {8, Log[8]}}
N[%]
{{5., 1.60944}, {6., 1.79176}, {7., 1.94591}, {8., 2.07944}}
```

Одним з недоліків табулювання за допомогою функції `Table` є відсутність у результаті значень аргумента, при яких обчислюється функція. Цей недолік ускладнює аналіз результату, якщо таблиця громіздка. Можливість табулювання одночасно декількох функцій дозволяє усунути цей недолік. Для цього достатньо функцію $f(x)$ представити як вектор $\{x, f(x)\}$.

Відкликом функції `Table[f(x), {x, xmin, xmax, Δx}]` є вектор, елементами якого є значення функції $f(x)$ від $x=x_{\min}$ до $x=x_{\max}$, обчислені з кроком $h = \Delta x$.

Приклад 4.9. Протабулювати функції

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ при } x_{\min} = 1, x_{\max} = 5, \Delta x = 0.5,$$

представивши відповідь у вигляді матриці, елементами якої є значення аргументів x та функції $f(x)$.

Розв'язок. Використовуючи функцію `Table[f(x), {x, xmin, xmax, Δx}]` отримуємо:

```
Table[{x, Sqrt[x]}, {x, 1, 5, 0.5}]
{{1, 1}, {1.5, 1.22474}, {2., 1.41421}, {2.5, 1.58114},
 {3., 1.73205}, {3.5, 1.87083}, {4., 2.}, {4.5, 2.12132},
 {5., 2.23607}}
```

Функція `Table[f(x, y, ...), {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, ...]` здійснює табулювання функцій багатьох змінних (загалом, кількість змінних може бути довільною).

Приклад 4.10. Протабулювати функції

$$f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad f(n, m) = n! m!$$

при зміні аргумента a від $a_{\min} = 1$, $a_{\max} = 4$, а всіх інших аргументів в діапазоні від 1 до 5 з кроком 1.

Розв'язок. Результат отримуємо використовуючи функцію

`Table[f(x, y, ...), {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, ...]:`

```
Table[{Sqrt[a^2+b^2]}, {a, 1, 4}, {b, 1, 5}]
{{Sqrt[2], Sqrt[5], Sqrt[10], Sqrt[17], Sqrt[26]}, {Sqrt[5], 2 Sqrt[2], Sqrt[10], 2 Sqrt[5], Sqrt[29]},
 {Sqrt[10], Sqrt[13], 3 Sqrt[2], 5, Sqrt[34]}, {Sqrt[17], 2 Sqrt[5], 5, 4 Sqrt[2], Sqrt[41]}}
Table[{n! m!}, {n, 1, 5}, {m, 1, 5}]
{{1, 2, 6, 24, 120}, {2, 4, 12, 48, 240}, {5, 12, 36, 144, 720},
 {24, 48, 144, 576, 2880}, {120, 240, 720, 2880, 14400}}
```

4.3. Обчислення границь

4.3.1. Технологія обчислення границь в системі Mathematica

Відомо, що існують математичні функції, значення яких при певних значеннях аргумента є невизначеними [27]. Це зустрічається, наприклад, у випадках, коли функція терпить розрив, чи при певних значеннях аргумента вона набуває значень: $\frac{0}{0}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. В таких випадках виникають труднощі в процесі розв'язування математичних задач. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4.11. Протабулювати функцію

$$f(x) = \frac{x - 1}{\ln x}$$

при $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = 5$ з кроком 1.

Розв'язок. Використовуючи функцію Table, отримаємо:

```
Table[{x, (x-1)/Log[x]}, {x, 1, 5}]
{{1, Indeterminate}, {2, 1/Log[2]}, {3, 1/Log[3]}, {4, 1/Log[4]}, {5, 1/Log[5]}, }
N[%]
{{1, Indeterminate}, {2., 1.4427}, {3., 1.82048}, {4., 2.16404},
{5., 2.48534}}
Limit[(x-1)/Log[x], x->1]
1
```

Аналогічних прикладів надзвичайно багато. В кожному з таких випадків користувачу доводиться аналізувати розв'язок, знаходячи границі. Для визначення границі часто використовують правило Лопіталя: границя функції $f(x)$ рівна границі відношення похідної чисельника, поділеної на похідну знаменника. Наприклад:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

Зауважимо, що до появи системи комп'ютерної алгебри обчислення границь за допомогою використання комп'ютерної техніки взагалі не розглядалось, оскільки в той час комп'ютер не міг розв'язувати подібні задачі.

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica границі визначаються за допомогою вбудованої функції Limit, яка має вигляд:

Limit[f(x), x->x₀], де

f(x)	— функція, границю якої потрібно знайти;
x	— аргумент функції f(x);
x ₀	— граничне значення x.

Дана функція дозволяє знаходити границі не лише як число, але й у аналітичному вигляді, що в чергове свідчить про високий інтелектуальний потенціал системи Mathematica.

Розглянемо приклади застосування функції Limit.

Приклад 4.12. Знайти границі:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2t}}{\ln(1 - 3t)}, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - a^n}{1 - e^n}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{1 - e^{-x}}.$$

Розв'язок. Застосовуючи функцію `Limit` отримаємо:

```
Limit[(1-Exp[-2 t])/Log[1-3 t], t->0]
```

$$-\frac{2}{3}$$

```
Limit[(1-a^n)/(1-Exp[n]), a->0]
```

```
Log[a]
```

```
Limit[Tan[x]/x, x->0]
```

$$1$$

```
Limit[Sin[x]/x, x->0]
```

$$1$$

```
Limit[(1+Exp[x])/(1-Exp[-x]), x->0]
```

$$\infty$$

Функція `Limit` має дві опції `Direction` та `Analytic`.

Опція `Direction` вказує напрямок наближення до границі. Опція має вигляд:

```
Direction -> +1
```

```
Direction -> -1
```

Значення `+1` вказує на те, що наближення до точки відбувається зліва, а `-1` — справа. За замовчуванням напрям наближення до границі вибирає система.

Функція `Limit` з опцією `Direction` має вигляд:

```
Limit[f(x), x->x0, Direction -> +1]
```

```
Limit[f(x), x->x0, Direction -> -1]
```

Розглянемо приклади застосування функції `Limit`.

Приклад 4.13. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

при наближенні зліва та справа.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію системи `Limit` з опцією `Direction` отримуємо:

```
Limit[ArcTan[1/x], x->0, Direction -> +1]
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
Limit[ArcTan[1/x], x->0, Direction -> -1]
```

$$\frac{\pi}{2}$$

```
Limit[ArcTan[1/x], x->0]
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Для кращої наочності варто побудувати графік функції $\arctg(1/x)$ рис. 4.1.

```
Plot[ArcTan[1/x], {x, -10, 10}]
```

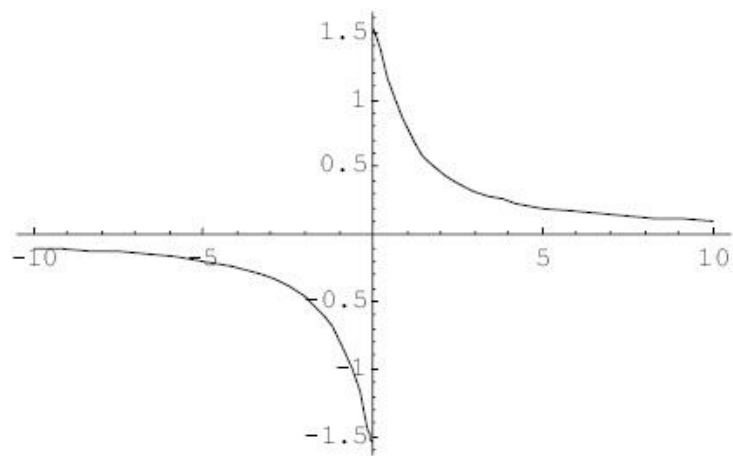


Рис. 4.1. Графік функції $\arctg(1/x)$.

З графіка 4.1. бачимо, що функція $\arctg(1/x)$ терпить розрив в точці 0 і при наближенні до цієї точки зліва (+1) границею буде від'ємне значення функції $(-\pi/2)$, а при наближенні справа (-1) — додатне $(\pi/2)$.

Функція `Limit` має ще одну опцію `Analytic`, яка вказує чи є невідома функція аналітичною. Опція записується так:

```
Limit[f(x), x->x0, Analytic -> True]
```

```
Limit[f(x), x->x0, Analytic -> False]
```

На практиці дана опція застосовується не часто.

4.4. Розклад функції в степеневий ряд

4.3.1. Технологія розкладу функції в ряд Тейлора в системі Mathematica

Розклад функції в степеневий ряд в математиці відіграє одну з ключових ролей [27]. Власне, вона дозволяє:

- спрощувати математичні розрахунки;
- отримувати розв'язки задач в аналітичному вигляді;
- знаходити математичні моделі багатьох різноманітних об'єктів та явищ шляхом поліноміальної інтерполяції.

Ось лише один приклад. Дано функцію

$$f(x) = xe^{-0,5x} + 5x^2$$

Розклавши її в околі точки $x_0 = 0,75$ в ряд Тейлора отримаємо:

$$f(x) = 4,7x^2 + 0,854x + 0,036.$$

Обчислимо тепер визначений інтеграл від обох функцій в межах від $x = -2$ до $x = 5$. Отримаємо:

$$\int_{-2}^5 (xe^{-0,5x} + 5x^2)dx = 220,5; \quad \int_{-2}^5 (4,7x^2 + 0,854x + 0,036)dx = 218,45.$$

Результати майже співпадають. Над отриманим в результаті розкладу в ряд поліномом тепер можна виконувати будь-які математичні операції в діапазоні значень аргумента від $x = -2$ до $x = 5$. Наприклад, похідна вихідної функції має вигляд:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}(2-x)}{2} + 10x$$

а у випадку полінома $f'(x) = 9,4x + 0,85$ — пряма лінія.

Розклад функції в степеневий ряд здійснюється в системі комп'ютерної алгебри Mathematica за допомогою *формули Тейлора*, вигляду:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f^{(2)}(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots, \quad (4.1)$$

де a — значення аргумента x функції $f(x)$, в околі якого відбувається розклад в ряд.

Формула (4.1) справджується для будь-якого дійсного числа a , зокрема й для $a = 0$. При $a = 0$ формула Тейлора набуде вигляду

$$f(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1!} + x^2 \frac{f^{(2)}(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots \quad (4.2)$$

Ряд (4.2) називають *рядом Маклорена*.

Зауважимо, що, використовуючи вбудовану функцію системи Mathematica Series, можна отримати співвідношення (4.1) та (4.2). А саме:

```
Series[f[x], {x, a, 3}]
```

$$f[a] + f'[a](x - a) + \frac{1}{2}f''[a](x - a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[a](x - a)^3 + O[x - a]^4$$

```
Series[f[x], {x, 0, 3}]
```

$$f[0] + f'[0]x + \frac{1}{2}f''[0]x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[0]x^3 + O[x]^4$$

Розклад в ряд в системі комп'ютерної алгебри Mathematica здійснюється за допомогою таких вбудованих функцій:

```
Series[f, {x, x0, n}]
```

```
Series[f(x, y), {x, x0, nx}, {y, y0, ny}]
```

```
Collect[Series[f, {x, x0, n}], x]
```

```
Normal[Series[f, {x, x0, n}]]
```

```
SeriesCoefficient[s, n]
```

В цих вбудованих функціях прийняті такі позначення:

f	— функція, яку розкладаємо в ряд;
$f(x, y)$	— функція двох змінних x та y ;
x	— аргумент функції;
x_0	— окіл точки розкладу в ряд;
n	— степінь многочлена;
s	— ряд степеня n .

Нагадаємо, що функцією *відклику* (зворотного виклику) називають таку функцію, яку інша функція може викликати пізніше у відповідь на те, що її викликали. Відкликом будь-якої функції Table є вектор або матриця,

Технологія розкладу функції в степеневий ряд в системі Mathematica проста: вводиться вбудована функція Series і, натиснувши комбінацію клавіш <Shift><Enter>, отримуємо відповідь.

Функція Series[f, {x, x₀, n}] здійснює розклад функції f в ряд в околі точки x=x₀ з n числом членів ряду.

Приклад 4.14. Розкласти в степеневий ряд функції

$$e^x, \quad \sin x, \quad \arcsin x, \quad \sinh x, \quad \ln x.$$

Розклад має містити $n = 7$ членів ряду.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію Series[f, {x, x₀, n}], отримуємо:

```
Series[Exp[x], {x, 0, 7}]
1 + x +  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$ 
Series[Sin[x], {x, 0, 7}]
x -  $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$ 
Series[ArcSin[x], {x, 0, 7}]
x +  $\frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + O[x]^8$ 
Series[Sinh[x], {x, 0, 7}]
x +  $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$ 
Series[Log[x], {x, 0, 7}]
Log[x] + O[x]^8
Series[Log[x], {x, 1, 5}]
(x - 1) -  $\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 + O[x - 1]^5$ 
```

Звідси помічаємо декілька важливих особливостей розкладу функції в степеневий ряд, а саме:

- в кожній відповіді зазначається порядок похибки;
- степеневі ряди функцій $\sin x$, $\arcsin x$, $\sinh x$ мають лише чотири члени, тоді як функція Series містить $n = 7$ членів. Це

пояснюється тим, що ці функції є непарними і, відповідно, їх парні члени рівні 0;

- функцію $\ln x$ система не розклала в ряд в околі $x_0 = 0$, оскільки $\ln 0$ не існує;
- розв'язки представлені в аналітичному вигляді.

Функція `Series[f(x,y), {x, x0, nx}, {y, y0, ny}]` здійснює розклад функції $f(x,y)$ спочатку за y , а потім за x в ряд в околі x_0, y_0 з числом членів ряду n_x, n_y , відповідно.

Приклад 4.15. Розкласти в степеневий ряд функції

$$e^{(x+y)}, \quad e^{xy}$$

в околі $x_0 = 0$. Розклади мають містити $n_x = 3, n_y = 3$ членів ряду. Для функції $e^{(x+y)}$ знайти, додатково, розклад в ряд з числом членів $n_x = 4, n_y = 2$.

Розв'язок. Шукані розклади в ряд отримаємо, використовуючи вбудовану функцію `Series[f(x,y), {x, x0, nx}, {y, y0, ny}]`, зокрема:

```
Series[Exp[x+y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```

$$\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O[y]^4\right) + \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O[y]^4\right)x + \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{12} + O[y]^4\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{y}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{y^3}{36} + O[y]^4\right)x^3 + O[x]^4$$

```
Series[Exp[x+y], {x, 0, 4}, {y, 0, 2}]
```

$$\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + O[y]^3\right) + \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + O[y]^3\right)x + \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + O[y]^3\right)x^2 + \\ + \left(\frac{1}{6} + \frac{y}{6} + \frac{y^2}{12} + O[y]^3\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{y}{24} + \frac{y^2}{48} + O[y]^3\right)x^4 + O[x]^5$$

```
Series[Exp[x y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```

$$1 + (y + O[y]^4)x + \left(\frac{y^2}{2} + O[y]^4\right)x^2 + \left(\frac{y^3}{6} + O[y]^4\right)x^3 + O[x]^4$$

Функція `Collect[Series[f, {x, x0, n}], x]` здійснює розклад в степеневий ряд з видаленням члена із залишковою похибкою.

Функція `Normal[Series[f, {x, x0, n}]]` також здійснює розклад в степеневий ряд з видаленням члена із залишковою похибкою і відрізняється від попередньої лише формою представлення.

Розглянемо приклади розкладу в ряд з видаленням члена із залишковою похибкою.

Приклад 4.16. Розкласти в степеневий ряд без члена із залишковою похибкою функції

$$\sin x, \quad \sinh x, \quad e^{xy}.$$

Число членів ряду повинно бути $n_x = 5, n_y = 5$.

Розв'язок. Розклади в ряд отримаємо, використовуючи вбудовані функції `Collect[Series[f, {x, x0, n}], x]` та `Normal[Series[f, {x, x0, n}]]`. Відповідно, маємо:

```
Collect[Series[Sin[x], {x, 0, 5}], x]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 5}]]
```

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
Collect[Series[Sinh[x], {x, 0, 5}], x]
```

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
Normal[Series[Sinh[x], {x, 0, 5}], x]
```

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
Collect[Series[Exp[x y], {x, 0, 5}, {y, 0, 5}, {x, y}]]
```

$$1 + xy + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3 y^3}{6} + \frac{x^4 y^4}{24} + \frac{x^5 y^5}{120}$$

```
Normal[Series[Exp[x y], {x, 0, 5}, {y, 0, 5}]]
```

$$1 + xy + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3 y^3}{6} + \frac{x^4 y^4}{24} + \frac{x^5 y^5}{120}$$

В результаті отримали розв'язок в аналітичному вигляді без члена із залишковою похибкою.

При практичному використанні формули Тейлора в користувачів часто виникають запитання:

- які функції допускають розклад в ряд Тейлора?
- яким числом членів ряду можна обмежитись в кожному конкретному випадку?
- як знайти похибку розкладу?

Розкласти в ряд Тейлора в обмеженому діапазоні аргумента можна будь-яку функцію n змінних. При цьому функція та похідні повинні мати чисельні значення при значення аргумента, в околі якого відбувається розклад. Зокрема, наприклад, функцію $\ln x$ не можна розкласти в степеневий ряд в околі точки $x_0 = 0$, оскільки $\ln 0$ не існує. А ось функції $\sin x/x$, $(1 - e^x)/x$, $(1 - e^{-ax})/bx$ в околі $x_0 = 0$ можна розкласти в ряд Тейлора не дивлячись на те, що в цій точці виникає невизначеність $0/0$.

Приклад 4.17. Розкласти в степеневий ряд функції

$$\ln x, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1 - e^x}{x}, \quad \frac{1 - e^{-ax}}{bx}.$$

Число членів ряду повинно бути $n_x = 7$.

Розв'язок. Повторюючи логіку прикладу 4.14, маємо:

```
Series[Log[x], {x, 0, 7}]
Log[x]+O[x]8
Series[Sin[x]/x, {x, 0, 7}]
1 -  $\frac{x^2}{6}$  +  $\frac{x^4}{120}$  -  $\frac{x^6}{5040}$  + O[x]8
Series[(1-Exp[x])/x, {x, 0, 7}]
-1 -  $\frac{x}{2}$  -  $\frac{x^2}{6}$  -  $\frac{x^3}{24}$  -  $\frac{x^4}{120}$  -  $\frac{x^5}{720}$  -  $\frac{x^6}{5040}$  -  $\frac{x^7}{40320}$  + O[x]8
Series[(1-Exp[-a x])/(b x), {x, 0, 7}]
- $\frac{a}{b}$  -  $\frac{a^2x}{2b}$  -  $\frac{a^3x^2}{6b}$  -  $\frac{a^4x^3}{24b}$  -  $\frac{a^5x^4}{120b}$  -  $\frac{a^6x^5}{720b}$  -  $\frac{a^7x^6}{5040b}$  -  $\frac{a^8x^7}{40320b}$  + O[x]8
```

Приклад 4.17 ілюструє, що розклад в ряд Тейлора функції $\ln x$ в околі точки $x_0 = 0$ не існує. В решті випадків система комп'ютерної алгебри

Mathematica, завдячуючи своїй інтелектуальності, розкрила невизначеність $0/0$ та представила розклад в ряд у аналітичному вигляді.

4.3.2. Похибки степеневих рядів Тейлора

В процесі обчислення функцій нескінченний числовий ряд замінюється сумою. В зв'язку з цим корисно знати скільки членів ряду необхідно залишити, щоб обчислити функцію з необхідною точністю. Зазвичай це залежить від вигляду функції та значень аргумента.

Випадок 1. Ряд знакозмінний, члени ряду швидко спадають, $x < 1$

В цьому випадку ряд володіє такими властивостями: сума відкинутих членів ряду за абсолютною величиною не перевищує значення останнього відкинутого члена ряду. Для цього випадку визначити число членів ряду легко. Наприклад, для функції e^{-x} загальний член ряду має вигляд $(-1)^n x^n / n!$. Тоді число n можна знайти з умови $x^n / n! \leq \varepsilon$, де ε — похибка обчислення функції. Якщо, скажімо, $\varepsilon = 0,001$, то $x^n / n! \leq 0,001$. Тоді при $x = 0,1$ достатньо залишити три члени ряду $n = 3$.

Випадок 2. Ряд знакозмінний, $x > 1$

В цьому випадку властивість часткової суми ряду зберігається, однак ряд збігається повільно і необхідне число членів ряду має бути великим. Наприклад, якщо у прикладі, розглянутому у випадку 1 покласти $x = 1$, то умова вибору числа членів ряду буде: $1^n / n! \leq 0,001$ або $n! = 1000$, тобто $n \geq 7$.

Випадок 2. Ряд не знакозмінний

В цьому випадку загальних правил вибору числа членів ряду з умов точності обчислень не існує.

4.3.3. Комп'ютерні технології оцінки похибки рядів

Спосіб 1. Табулювання функції

Суть цього способу така: здійснюється табулювання вихідної функції $f(x)$ і отриманої в результаті розкладу в ряду Тейлора. Початкові та кінцеві значення x вибираються з діапазону розкладу функції в ряд. Порівняння чисельних значень функції дозволяє оцінювати точність розкладу. Більше того, можна встановити область значень x , в якій похибка степеневого ряду буде не більшою за допустиму при вибраному числі членів ряду.

Приклад 4.18. Оцінити похибку ряду, отриманого як результат розкладу функції e^x в області $x \in [0, 2]$ при кількості членів $n = 3, 4, 5$. За початкове значення взяти $x_0 = 0$.

Розв'язок. Використовуючи функцію `Normal[Series[f, {x, x0, n}]]`, отримаємо розклад в ряд функції e^x :

```
Normal[Series[Exp[x], {x, 0, 3}]]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

```
Normal[Series[Exp[x], {x, 0, 4}]]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

```
Normal[Series[Exp[x], {x, 0, 5}]]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Після цього здійснюємо табулювання функції e^x та функції розкладу.

Функція табулювання в даному випадку матиме вигляд:

```
Table[{x, f(x)}, {x, xmin, xmax, h}]
```

Нехай $x_{\min}=0$ $x_{\max}=2$, а крок $h=0.2$. Тоді функція `Table` буде такою:

```
Table[{x, Exp[x], f3, f4, f5}, {x, 0, 2, 0.2}]
```

де f_3 , f_4 , f_5 — функція e^x при $n = 3, 4, 5$. Відтак отримаємо:

```
Table[{x, Exp[x], Out[6], Out[7], Out[8], {x, 0, 2, 0.2}]
{{0, 1, 1, 1, 1}, {0.2, 1.2214, 1.22133, 1.2214, 1.2214}, {0.4, 1.49182, 1.49067,
1.49173, 1.49182}, {0.6, 1.82212, 1.816, 1.8214, 1.82205}, {0.8, 2.22554,
2.20533, 2.2224, 2.22513}, {1., 2.71828, 2.66667, 2.70883, 2.71667},
{1.2, 3.32012, 3.208, 3.2944, 3.31514}, {1.4, 4.0552, 3.83733, 3.9974, 4.04222},
{1.6, 4.95303, 4.56267, 4.83573, 4.92311}, {1.8, 6.04965, 5.392, 5.8294,
5.98686}, {2., 7.38906, 6.33333, 7., 7.26667}}]
```

Позначення `Out[6]`, `Out[7]`, `Out[8]` означають номери рядків, в яких перебуває функція e^x з числом розкладу рівним, відповідно, 3, 4, 5. З розв'язку помічаємо, що похибки рядів при кількості членів $n = 3, 4, 5$ в діапазоні $x \in [0, 2]$ досить великі. Вони зменшуються при збільшенні n . Можна показати, що для обчислення e з точністю до шести знаків необхідно мати ряд Тейлора з числом членів розкладу $n = 9$.

Спосіб 2. Візуалізація розв'язку

Вихідну функція $f(x)$ і відповідний їй степеневий ряд представляють у вигляді графіка. Порівнюючи графіки, отримуємо можливість робити висновки про точність степеневого ряду і допустимий діапазон значень аргумента.

Технологія даного способу така:

- розклад $f(x)$ в ряд Тейлора;
- побудова на одному графіку вихідної функції $f(x)$ і ряду, отриманого в результаті її розкладу;
- порівняння графіків.

За необхідності можна будувати графік різниці функцій, який, власне, характеризуватиме похибку ряду Тейлора.

Приклад 4.19. Побудувати графіки функції e^x та її розкладу в ряд Тейлора з числом членів $n = 5$.

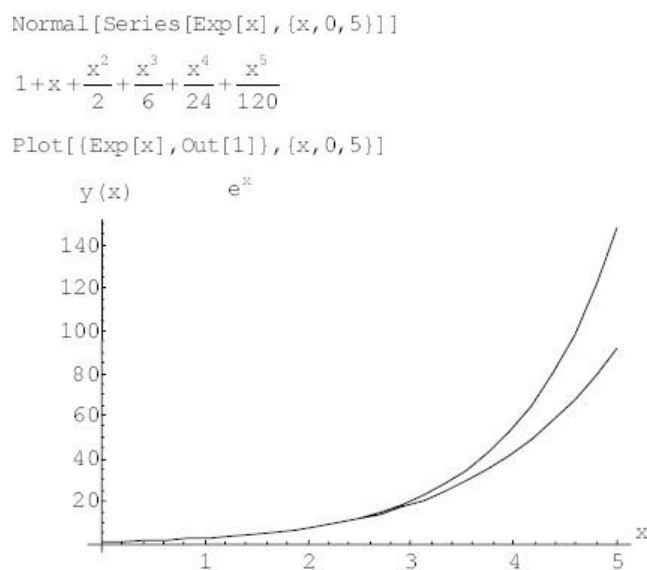


Рис. 4.2. Графік функції e^x і ряд Тейлора при $n = 5$.

Розв'язок. Використовуючи результат прикладу 4.18, отримуємо графіки рис. 4.2. З рисунку бачимо, що похибка степеневої функції зростає з ростом x .

Більше того, зазвичай зручно використовуючи опцію `Series f(x)`. Функціонал системи Mathematica дозволяє виводити графічне представлення розкладу функції $f(x)$ в степеневий ряд, який допомагає візуально оцінити апроксимацію даної функції її степеневим рядом у випадку заданого числа членів ряду (рис. 4.3., 4.4)

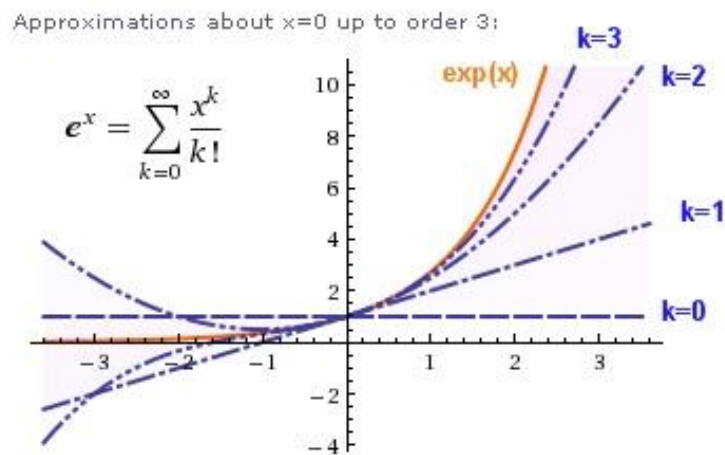


Рис. 4.3. Графічне представлення розкладів в ряд Тейлора функції e^x .

```
teylor = Collect[Series[Sin[x], {x, 2, 5}], x]
- 14 Cos[2] / 15 + 1 / 120 x^5 Cos[2] + x^3 (Cos[2] / 6 - Sin[2] / 3) +
x^4 (-Cos[2] / 12 + Sin[2] / 24) + x^2 (Cos[2] / 3 + Sin[2] / 2) +
x (-Cos[2] / 3 + 2 Sin[2] / 3) - Sin[2] / 3
```

```
Plot[{Sin[x], %}, {x, -6, 6}]
```

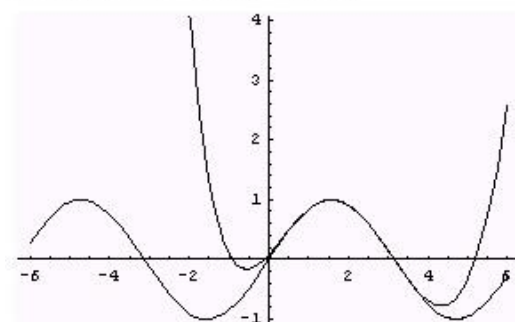


Рис. 4.4. Графічне представлення розкладів в ряд Тейлора функції $\sin x$.

Спосіб 3. Обчислення похибок

Спосіб обчислення похибок степеневі функції визначається згідно з обраним критерієм як то, наприклад, максимальна, абсолютна середньоквадратична, відносна середньоквадратична похибки тощо.

4.5. Обчислення похідних

Система комп'ютерної алгебри Mathematica обчислює похідні в аналітичному та чисельному вигляді [27]. При цьому диференціювати можна як елементарні функції, спеціальні функції так і довільні функції, задані користувачем.

Обчислення похідних здійснюється за допомогою таких вбудованих функцій:

```
D[f, x]
D[f, {x, n}]
D[f, x1, x2, ...]
Dt[f, x]
Dt[f]
Derivative[n1, n2, ...][f]
```

В функціях прийнято такі позначення:

f	— диференційована функція;
x	— аргумент диференційованої функції (змінна диференціювання);
n	— порядок похідної;
$x_1, x_2, \dots$	— змінні диференціювання;
$n_1, n_2, \dots$	— порядок похідної при n –кратному диференціюванні.

Розглянемо приклади застосування вбудованих функцій.

Функція $D[f, x]$ обчислює частинну похідну функції f за змінною x .

Приклад 4.20. Знайти частинну похідну за x таких функцій:

$$ax^3 + bx + c, \quad \ln \frac{ax}{x^2}, \quad \sinh ax, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad x!, \quad (\sin x + \cos x)^2.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію $D[f, x]$, шукатимемо частинні похідні функцій за змінною x . Крім того, зауважимо, що:

- вирази похідних, які видає програма, не спрощуються. Для спрощення результату слід використовувати функцію `Simplify`;
- система дозволяє отримувати розв'язки в складних випадках, коли похідна виражається через спеціальні функції (наприклад, при обчисленні похідної $x!$);
- система здійснює обчислення похідних в аналітичному вигляді при необмеженій кількості символьних змінних.

```

D[a x^3+b x-c, x]
      b + 3ax^2
D[Log[a x/x^2], x]
      1   2Log[ax]
      x^3 -  x^3
D[Sinh[a x], x]
      a Cosh[a x]
D[(x-1)/(x+1), x]
      -1+x      1
      (1+x)^2 + 1+x
Simplify[%]
      2
      (1+x)^2
D[x!, x]
      Gamma[1+x] PolyGamma[0,1+x]
D[(Sin[x]+Cos[x])^2, x]
      2(Cos[x]-Sin[x])(Cos[x]+Sin[x])
Simplify[%]
      2Cos[2x]

```

Функція `D[f, {x, n}]` обчислює частинну похідну n -го порядку функції f за змінною x .

Приклад 4.21. Обчислити похідну третього порядку функцій:

$$ax^3 + bx + c, \quad \ln \frac{ax}{x^2}, \quad \sinh ax, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad x!, \quad (\sin x + \cos x)^2.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію `D[f, {x, n}]`, отримуємо:

```

D[a x^3+b x-c, {x, 3}]
6a
D[Log[a x/x^2], {x, 3}]
26
x^5 - 24Log[ax]
x^5
D[Sinh[a x], {x, 3}]
a^3 Cosh[a x]
D[(x-1)/(x+1), {x, 3}]
-6(-1+x)
(1+x)^4 + 6
(1+x)^3
Simplify[%]
12
(1+x)^4
D[x!, {x, 3}]
Gamma[1+x] PolyGamma[0, 1+x]^3+
3 Gamma[1+x] PolyGamma[0, 1+x] PolyGamma[1, 1+x]+
Gamma[1+x] PolyGamma[2, 1+x]
D[(Sin[x]+Cos[x])^2, {x, 3}]
6(-Cos[x]-Sin[x])(Cos[x]-Sin[x])+
2(-Cos[x]+Sin[x])(Cos[x]+Sin[x])
Simplify[%]
-8Cos[2x]

```

Функція $D[f, x_1, x_2, \dots]$ повертає похідну функції f за параметрами $x_1, x_2, \dots$.

Функція $Dt[f, x]$ є узагальненою похідною функції f за змінною x .

Функція $D[f]$ повертає диференціал функції f .

Приклад 4.22. Знайти похідні за всіма параметрами функцій:

$$a^2 x^2, \quad (\sin ax + \cos ax)^2, \quad a^3 b^3 x^3, \quad a^3 + b^3 + x^3, \quad \frac{\ln a^2 b^2 x^2}{axb}.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію $D[f, x_1, x_2, \dots]$, отримуємо:

```

D[a^2 x^2, a, x]
4ax
D[(Sin[a x]+Cos[a x])^2, a, x]
2 (aCos[ax]-aSin[ax]) (xCos[ax]-xSin[ax]) +
2 (Cos[ax]+Sin[ax]) (Cos[ax]-axCos[ax]-Sin[ax]-axSin[ax])
Simplify[%]
2 (Cos[2ax]-2axSin[2ax])
D[a^3 b^3 x^3, a, b, x]
27a^2b^2x^2
D[a^3+b^3+x^3, a, b, x]
0
D[Log[a^2 b^2 x^2]/(a x b), a, b, x]
-2/a^2 - Log[a^2b^2x^2]/a^2

```

Приклад 4.23. Знайти диференціал функцій $x \sin x$, $\ln 3x/4$ та узагальнену похідну функцій x^x , xe^x , $(x-1)/(x+1)$. Для останньої функції знайти похідну третього порядку.

Розв'язок. Використовуючи відповідні вбудовані функції, отримуємо:

```

Dt[xSin[x]]
xCos[x]Dt[x]+Dt[x]Sin[x]
Dt[Log[(3 x)/4]]
Dt[x]/x
Dt[x^n, x]
x^n (n/x - Dt[n, x]Log[x])
D[x Exp[x], x]
e^x + e^xx
D[(x-1)/(x+1), {x, 3}]
-6(-1+x)/(1+x)^2 + 6/(1+x)^3

```

Питання, тести для самоконтролю

1. Охарактеризуйте інструментарій обчислення сум в системі Mathematica.
2. Які функції в системі Mathematica використовуються для обчислення сум в аналітичному вигляді?
3. Дайте характеристику функцій, які використовуються для обчислення сум в аналітичному вигляді.
4. Які функції в системі Mathematica використовуються для обчислення сум в чисельному вигляді?
5. Дайте характеристику функцій, які використовуються для обчислення сум в чисельному вигляді.
6. Охарактеризуйте використання символу сумування при обчислення сум в системі Mathematica.
7. Наведіть приклади застосування символу сумування при обчислення сум в системі Mathematica.
8. Дайте характеристику технології табулювання функцій в системі Mathematica.
9. Наведіть приклади вбудованих функцій в системі Mathematica, призначених для табулювання функцій.
10. Опишіть технологію обчислення границь системою Mathematica.
11. Наведіть приклади вбудованих функцій в системі Mathematica, призначених для знаходження границь.
12. Охарактеризуйте відомі вам опції функції знаходження границь в системі Mathematica.
13. Опишіть технологію розкладу функцій в ряд в системі Mathematica.
14. Охарактеризуйте вбудовані функції в системі Mathematica для розкладу функції в ряди Тейлора і Маклорена.
15. Як визначити кількість членів ряду, щоб обчислити функцію з необхідною точністю?
16. Які технології комп'ютерної оцінки похибок рядів відомі?

17. Опишіть технологію обчислення похідних в системі Mathematica.
18. Охарактеризуйте функції в системі Mathematica для обчислення похідних.

Обов'язкові та додаткові задачі

Знайти суми нижче наведених сум функцій з використанням системи Mathematica і порівняти їх з відповідями. В разі неспівпадіння, встановити, яка з відповідей невірна. Зазначимо, що приклади корисно розв'язувати як з метою засвоєння технології роботи з цими математичними об'єктами, так і для того, щоб пересвідчитись в інтелектуальності системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

№ задачі	Функція сумування	$i_{\min}$	$i_{\max}$	Відповідь за довідником
1.	$2k - 1$	$k = 1$	n	n^2
2.	$k! k$	$k = 1$	n	$(n - 1)! - 1$
3.	$\frac{k^2 + k - 1}{(k + 2)!}$	$k = 1$	n	$\frac{1}{2} - \frac{n + 1}{(n + 2)!}$
4.	aq^k	$k = 0$	∞	$\frac{a}{1 - q}$
5.	$\frac{1}{(2k - 1)^2}$	$k = 1$	∞	$\frac{\pi^2}{8}$
6.	$\frac{1}{(2k - 1)^4}$	$k = 1$	∞	$\frac{\pi^2}{96}$
7.	$\frac{1}{4k^2 - 1}$	$k = 1$	∞	$\frac{1}{2}$
8.	$\frac{1}{k2^k}$	$k = 1$	∞	$\ln 2$
9.	$\frac{1}{kx^k}$	$k = 1$	∞	$\ln \frac{x}{x - 1}$
10.	$\frac{x^k}{k}$	$k = 1$	∞	$\ln \frac{1}{1 - x}$
11.	kx^k	$k = 1$	∞	$\frac{x}{(1 - x)^2}$
12.	$\frac{\cos kx}{k^2}$	$k = 1$	∞	$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$

13.	$\sin \frac{\pi k}{n}$	$k = 1$	$n - 1$	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$
14.	$\frac{2k}{(2k+1)!}$	$k = 1$	∞	$\frac{1}{e}$
15.	$\frac{1}{(2k+1)!}$	$k = 1$	∞	$\frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$

Зауваження: система Mathematica може видавати розв'язок, який не співпадає з наведеними довідниковими значеннями, водночас є правильним, зокрема, представлений з використанням спеціальних функцій. Для спрощення розв'язування даних задач корисно також застосовувати опції Simplify, FullSimplify, Expand.

Використовуючи вбудовані функції в системі Mathematica, знайдіть нижченаведені границі.

№ задачі	Функція	Граничне значення аргумента	Відповідь
1.	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	∞	n^2
2.	$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$	0	$\sqrt{a}, \sqrt{b}$
3.	$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$	∞	1
4.	$(1-x)^{\frac{1}{1-x}}$	1	∞
5.	$(1-x)^{\frac{1}{1-x}}$	∞	1
6.	$\frac{1-a^n}{an}$	0	$-\frac{\ln a}{a}$
7.	$2a \frac{1-e^{-ax}}{2-e^{-ax}}$	∞	a
8.	$\frac{n^2 - n^x}{x-2}$	2	$-n^2 \ln n$
9.	$\frac{1-e^{-at}}{\ln(1-t)}$	0	$-a$
10.	$\frac{x-a}{\ln(x-a+1)}$	a	1

Використовуючи вбудовані функції в системі Mathematica, розкладіть функції в ряд.

№ задачі	Функція	Розкласти в ряд в точці	Число членів ряду n	Відповідь за довідником
1.	e^{-x^3}	$x_0 = 0$	7	$1 - x^3 + \frac{x^6}{2} + O(x^7)$
2.	$\ln(1 - x^2)$	$x_0 = 0$	7	$-x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + O(x^7)$
3.	$\ln \frac{1}{1 + x^2}$	$x_0 = 0$	7	$-x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + O(x^7)$
4.	$\frac{1}{1 - x^2}$	$x_0 = 0$	5	$1 + x^2 + x^4 + O(x^5)$
5.	$\frac{1}{(2x - 1)^2}$	$x_0 = 0$	3	$1 + 4x + 12x^2 + 32x^3 + O(x^4)$
6.	$e^{\sqrt{x+1}}$	$x_0 = 1$	3	$e^{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}(x-1)e^{\sqrt{2}}}{4} + (x-1)^2 \left(-\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{32} + \frac{e^{\sqrt{2}}}{16} \right) + O((x-1)^3; x \rightarrow 1)$
7.	$\sin x + \cos \sqrt{x}$	$x_0 = 0$	5	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{121x^3}{720} + \frac{x^4}{40320} + O(x^5)$
8.	$\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + 1}$	$x_0 = 0$	5	$x - \frac{4x^3}{3} + O(x^5)$
9.	$\cos^2 x$	$x_0 = 0$	5	$1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^5)$
10.	$\sqrt{\sin 2x}$	$x_0 = 0$	7	$\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{\sqrt{2}x^{\frac{9}{2}}}{90} - \frac{\sqrt{2}x^{\frac{13}{2}}}{378} + O(x^7)$

Примітка: розклади в ряд можна будувати, використовуючи ресурс: <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/ryad/tejlora/>

Для функцій, наведених в таблиці знайти похідну, похідну третього порядку та диференціал. Додатково варто розв'язати засобами системи комп'ютерної алгебри Mathematica задачі, що розглядаються в [2–4].

РОЗДІЛ V. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ СТВОРЕННЯ ВЕКТОРІВ ТА МАТРИЦЬ

5.1. Типи даних

Основними типами даних, якими оперує система комп'ютерної алгебри Mathematica є:

- числові дані — цілочисельні (Integer), раціональні (Rational), дійсні (Real) та комплексні (Complex);
- символічні дані;
- списки.

Числа можуть бути представлені в довільній системі числення [27]. В інформатиці та комп'ютерних науках найчастіше використовуються двійкова, вісімкова, десяткова та шістнадцяткова система числення (CC). Наприклад:

Тип чисел	Integer	Rational	Real	Complex
Десяткова система	179	38/29	45.375	-5.5+2.5i
Двійкова система	10110011	100110/11101	101101.011	-101.1+10.1i
Вісімкова система	263	46/35	55.3	5.4+2.4i
Шістнадцяткова система	b2	26/1D	2d.6	-5.8+2.8i

Переведення чисел з десятикової системи CC в систему з основою n (до 32) в системі Mathematica здійснюється за допомогою функції

BaseForm[N₁₀, N_n], де

N ₁₀	— число, представлене в десятичній формі CC;
N _n	— число в CC з основою n .

Приклад 5.1. Представити числа 625,15 в двійковій, вісімковій та шістнадцятковій формах.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію `BaseForm`, отримуємо:

```
BaseForm[625.15, 2]  
1.0011100010010011012x29  
BaseForm[625.15, 8]  
1161.1158  
BaseForm[625.15, 16]  
271.2616
```

Для переводу чисел з системи числення з основою n в десяткову використовується функція n^{N_n} .

Приклад 5.2. *Перевести в десяткову систему числення такі числа:*

$$N_2 = 1100101,101; \quad N_8 = 372164; \quad N_{16} = 125abe.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію n^{N_n} , отримуємо:

```
21100101.101  
101.625  
8372164  
128116  
16125abe  
1202878
```

Система *Mathematica* належить до класу систем символної математики (комп'ютерної алгебри). Відтак вона виконує математичні операції над цілими числами без похибок і обмежень на розрядність. Арифметичні операції над раціональними числами вона виконує абсолютно точно. Так, наприклад, сумуючи числа $2/3 + 5/7 + 1/3$, вона видає результат $12/7$. Система звела числа до спільного знаменника і виконала операцію скорочення.

5.1.1. Дійсні числа

Дійсне число складається з мантиси та порядку. Мантиса містить цілу та дробову частини, порядок представляється як степінь числа 10. Вони можуть мати різну форму представлення і в теорії інформації часто

називаються числами з плаваючою крапкою (комою). Наприклад, 216.35, $.21635 \cdot 10^3$, $21653 \cdot 10^{-2}$. Ціла частина мантиси від дробової відокремлюється крапкою, мантиса від порядку — пробілом чи знаком множення, перед дробовою мантисою нуль цілих можна опустити, залишивши лише точку, яка відділяє цілу частину від дробової. Наприклад, продемонструємо представлення дійсних чисел при множенні 0.25 на 3, Власне, маємо такі представлення

```
0.25 3
    0.75
.25 3
    0.75
250 10^-3 3
    3
    4
2500*10^-4 3
    3
    4
.0025 10^2 3
    0.75
250. 10^-3 3
    0.75
```

Зверніть увагу на те, що при представленні добутку у вигляді $250 \cdot 10^{-3} \cdot 3$ та $2500 \cdot 10^{-4} \cdot 3$ відповіддю є число, подане в раціональній формі. Це пояснюється тим, що дійсне число $250 \cdot 10^{-3}$ система сприймає як раціональне число.

Будь-яке ціле число, при наявності розділової крапки, сприймається системою як дійсне число (остання стрічка прикладу).

Для представлення виразу у формі дійсного числа в системі є такі функції:

```
N[D],
N[D, n],
```

де

D	— вираз;
n	— число цифр результату.

Наведемо приклад всіх способів представлення дійсного числа:

```
12/7
  12
  7
12./7
  1.71429
N[12/7]
  1.71429
N[12/7,30]
  1.71428571428571428571428571429
N[E^1,20]
  2.7182818284590452354
```

Максимальне та мінімальне числа, якими може оперувати система Mathematica, приймають значення: 1.78769×10^{308} — 1.78769×10^{-308} . Ці числа можна вивести на екран за допомогою команд `$MaxMachineNumber`, `$MinMachineNumber`.

5.1.2. Комплексні числа

Комплексні числа в системі Mathematica задаються в загальноприйнятій формі:

$$z = \text{Re}(z) + I * \text{Im}(z) \quad \text{або} \quad z = \text{Re}(z) + I \text{ Im}(z) .$$

Уявна одиниця відокремлюється від уявної частини комплексного числа знаком множення або пробілом.

Функції `Re(z)` та `Im(z)` дозволяють виділити дійсну та уявну частину комплексного числа, наприклад

```
Re[7-5 I]      Im[7-5 I]
7              -5
```

В системі Mathematica математичні операції з комплексними числами в переважній кількості випадків виконуються так само, як і з дійсними числами.

5.1.3. Символьні змінні

Символьними змінними можуть бути окремі символи ($a, b, c, \dots$), рядки (" $z \ z \ z \ z$ "), вирази ($\text{Sin}[x], (a+b)^2, \text{Log}[x+1]$). При записі математичних операцій над виразами застосовуються такі синтаксичні правила:

- знак множення можна замінювати пробілом;
- аргументи функцій записуються в квадратних дужках;
- вбудовані функції починаються з прописної літери;
- круглі дужки використовуються при виділенні частини математичного виразу $((a+b)/(a-b))$;
- фігурні дужки використовуються при роботі зі списками $(\text{Cos}[\{1, 3, 2, 5, 4\}])$.

5.1.4. Списки і масиви

Списком називають сукупність даних, записаних в фігурних дужках. При цьому даними можуть бути числа, символьні змінні, вирази. Наприклад,

- $\{1, 3, 7, 5, 8\}$ — список чисел;
- $\{a, b, c, d, e\}$ — список символьних змінних;
- $\{\text{Sin}[x], \text{Cos}[2 \ x], \text{Log}[x], \text{Tan}[x^2]\}$ — список функцій;
- $\{a^2+b^2, \text{Sqrt}[x-2], (x-2)/(x+2), x^3+2 \quad x^2+1, x-\text{Exp}[x=2]\}$ — список математичних виразів.

Списки формують дані, які називаються *масивами*. Однорівневим масивом є вектор, дворівневим — матриця.

Розглянемо основні математичні операції над списками, приділивши основну увагу векторам та матрицям.

5.2. Представлення векторів та матриць

Вектор та *матриця* є, відповідно, однорівневим та дворівневим списками. Елементами вектора і матриці можуть бути дійсні та комплексні числа, символьні змінні, функції та навіть математичні вирази. Наведемо приклади векторів та матриць з різних елементів:

```

f1={1,2,3,4,5}
      {1,2,3,4,5}
f2={a,b,c,d,e}
      {a,b,c,d,e}
f3={1+2 i, 2-3 i, 7, 4-i, 9}
      {1+2 i, 2-3 i, 7, 4-i, 9}
f4={{1,3,5},{2,-4,1},{8,-5,3}}
      {{1,3,5},{2,-4,1},{8,-5,3}}
f5={{Cos[x],Log[x],Exp[x+1],3},{2+3 i,4,-7,Tan[x]},
      {2,m,k,Sin[2 x]}}
      {{Cos[x],Log[x],ex+1,3},{2 + 3i,4,-7,Tan[x]},{2, m, k, Sin[2x]}}

```

Представлення векторів і матриць в табличному вигляді можливе за допомогою функцій `TableForm[f]` та `MatrixForm`, які мають вигляд

```

TableForm[f]
Out[n] // MatrixForm

```

де

f	— ім'я вектора чи матриці;
n	— номер рядка, в якому знаходиться вектор чи матриця;
%	— застосовується у випадку, якщо функція <code>% // MatrixForm</code> представлення вектора чи матриці в табличному вигляді розташовується відразу ж за вектором (матрицею).

Вектор чи матрицю можна також створити за допомогою функції `List`:

<code>List[a,b,c,...]</code>	— створює вектор $\{a,b,c,\dots\}$;
<code>List[{a,b,c,...}, {x,y,z,...}, {m,n,k,...}]</code>	— створює матрицю $\{\{a,b,c,\dots\}, \{x,y,z,\dots\}, \{m,n,k,\dots\}\}$.

Таким чином, матриця `f5`, з вище наведеного прикладу, виглядатиме так

```

TableForm[f5]
Cos[x]  Log[x]  ex+1  3
2 + 3i   4      -7    Tan[x]
2        m      k    Sin[2x]
Out[29]//MatrixForm
( Cos[x]  Log[x]  ex+1  3
  2 + 3i   4      -7    Tan[x]
    2        m      k    Sin[2x] )

```

5.2.1. Генерація векторів та матриць за допомогою функції Range

Функція Range застосовується для створення числових списків і представляється в таких виглядах

<code>Range[n_{max}]</code>	– генерує вектор числових елементів вигляду $\{1, 2, \dots, n_{\max}\}$;
<code>Range[n_{min}, n_{max}]</code>	– генерує вектор числових елементів вигляду $\{n_{\min}, n_{\max}\}$;
<code>Range[n_{min}, n_{max}, dn]</code>	– генерує вектор числових елементів від $n_{\min}$ до $n_{\max}$ з кроком dn .

Розглянемо приклад реалізації функції Range.

```
Range[5]
{1, 2, 3, 4, 5}
Range[3, 11]
{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}
Range[2, 5, 0.5]
{2, 2.5, 3., 3.5, 4., 4.5, 5.}
```

5.2.2. Генерація векторів та матриць за допомогою функції Table

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica для створення списків типу вектори та матриці ефективно використовувати функції Table вигляду:

<code>Table[f, {n_{max}}]</code>	– створює $n_{\max}$ примірників виразу f ;
<code>Table[f, {1, n_{max}}]</code>	– створює список функції f при зміні змінної n від 1 до $n_{\max}$;
<code>Table[f, {n, n_{min}, n_{max}}]</code>	– створює список функції f при зміні змінної n від $n_{\min}$ до $n_{\max}$;
<code>Table[f, {n, n_{min}, n_{max}, dn}]</code>	– створює список функції f при зміні змінної n від $n_{\min}$ до $n_{\max}$ з кроком dn .
<code>Table[f, {n1, n1_{min}, n1_{max}}, {n2, n2_{min}, n2_{max}}, ...]</code>	– відкликом є вкладений список за змінною n .

Проілюструємо на прикладах генерацію векторів та матриць використовуючи вбудовану функцію Table.

```

Table[Log[x], 5]
  {Log[x], Log[x], Log[x], Log[x], Log[x]}
Table[Log[x], {x, 5}]
  {0, Log[2], Log[3], Log[4], Log[5]}
Table[Log[x], {x, 5, 10}]
  {Log[5], , Log[6], Log[7], Log[8], Log[9], Log[10]}
Table[Log[x], {x, 1, 3, 0.5}]
  {0, 0.405465, 0.693147, 0.916291, 1.09861}
Table[n+m, {n, 2, 4}, {m, 2, 4}]
  {{4, 5, 6}, {5, 6, 7}, {6, 7, 8}}

```

5.2.3. Виділення та введення елементів векторів та матриць

Система Mathematica оснащена потужним інструментарієм виділення елементів векторів та матриць з візуалізацією їх на екрані монітору. Виділення здійснюється такими способами:

- використовуючи подвійні квадратні дужки;
- застосовуючи функції `Part`;
- застосовуючи функції `Select`.

Розглянемо їх детально.

Використання подвійних квадратних дужок

В цьому випадку вирази, які виділяють елементи вектора чи матриці, представляються у вигляді

```

f[[n]]
f[[n1, n2, ...]]

```

де

f	— ім'я вектора чи матриці;
n	— елемент, який виділяємо;
n _i	— i-й елемент з сукупності елементів, що виділяємо.

Приклад 5.3. *Задано такі вектори та матриця:*

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \{2, 1, 4, 3, 5\} & f_2 &= \{\{1, 2, 3\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\} \\
 f_3 &= \{a, 1, b, 2, 3, c\} & f_4 &= \{2, a, \sin(x + y^2), b, 1\}.
 \end{aligned}$$

Необхідно виділити четвертий елемент вектора f_1 , елемент другого рядка та другого стовпця матриці f_2 , другий і третій елемент вектора f_1 , другий елемент першого рядка і перший елемент третього рядка матриці f_2 .

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції системи, отримуємо:

```
f1={2,1,4,3,5}
      {2,1,4,3,5}
f2={{1,2,3},{3,5,7},{2,4,6}}
      {{1,2,3},{3,5,7},{2,4,6}}
f3={a,1,b,2,3,c}
      {a,1,b,2,3,c}
f4={2,a,Sin[x+y^2],b,1}
      {2,a,Sin[x+y^2],b,1}
f1=[[4]]
      3
f2=[[2,2]]
      5
f1=[[{2,3}]]
      {1,4}
{f2=[[1,2]],f2[[3,1]]}
      {2,2}
```

Виділення елементів вектора і матриці за допомогою функції `Part`

Функція `Part` дозволяє виділяти не лише елемент вектора чи матриці. Вона дає можливість виділити елемент із складного виразу, який є елементом вектора чи матриці.

Функція `Part` представляється у такому вигляді:

```
{Part[f,n1], Part[f,n2],...}
```

де

f	— ім'я вектора;
n_i	— i -й елемент вектора f .

Символ n_i може бути додатнім і від'ємним. Якщо $n_i > 0$, то відлік елементів вектора ведеться від початку вектора, а при $n_i < 0$ — з кінця.

У випадку виділення елементів матриці функція `Part` має вигляд:

`{Part[f, n1, m1] Part[f, n2, m2], ...}`

де

n_i	— i -й елемент рядка матриці;
m_i	— i -й елемент стовпця матриці.

У випадку виділення елементів із складних елементів вектора чи матриці функція `Part` представляється у вигляді:

`Part[f, n, m, l]`

де

f	— ім'я вектора чи матриці;
n	— номер елемента вектора f ;
m	— рівень виразу ($m=1$ у випадку вектора, $m=2$ у випадку матриці);
l	— номер елемент в векторі чи в матриці.

Приклад 5.4. Задано такі вектори та матриця:

$$f_1 = \{a, 1, b, 2, 3, c\} \quad f_2 = \{2, a, \sin(x + y^2), b, 1\}.$$

Необхідно виділити з вектора f_1 , елементи з номерами 2, 5, 6 та $-3, -5, -6$.

З вектора f_2 виділити четвертий елемент, а також x та y^2 .

Розв'язок. Використовуючи функцію `Part`, отримуємо:

```
f1={a, 1, b, 2, 3, c}
  {a, 1, b, 2, 3, c}
f2={2, a, Sin[x+y^2], b, 1}
  {2, a, Sin[x+y^2], b, 1}
{Part[f1, 2], Part[f1, 5], Part[f1, 6]}
  {1, 3, c}
{Part[f1, -2], Part[f1, -5], Part[f1, -6]}
  {2, 1, a}
{Part[f2, 4], Part[f2, 3, 1, 1], Part[f2, 3, 1, 2]}
  {b, x, y^2}
```

Виведення елементів векторів та матриць здійснюється за допомогою функцій `MatrixForm` та `TableForm`.

Функція `MatrixForm` виводить матрицю в матричній формі, функція `TableForm` — у вигляді таблиці. Наприклад:

```
F={{a,2,3},{b,3,1}{c,4,5}}
  {{a,2,3},{b,3,1}{c,4,5}}
MatrixForm[F]

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ b & 3 & 1 \\ c & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

TableForm[F]


|   |   |   |
|---|---|---|
| a | 2 | 3 |
| b | 3 | 1 |
| c | 4 | 5 |


```

Функції `MatrixForm` та `TableForm` оснащені великим числом опцій, що дозволяють розташовувати вектори і матриці на екрані користувацького інтерфейсу в потрібній формі. Щоб отримати перелік опцій та вивести їх на екран, слід набрати функції `Options[MatrixForm]` та `Options[TableForm]`. Проілюструємо як це працює на прикладі опцій `TableAlignments` та `TableSpacing`.

```
F={7,321456,25}
  {7,321456,25}
TableForm{F,TableAlignments->Left}
7
321456
25
TableForm{F,TableAlignments->Center}
7
321456
25
S={{1,2,3},{2,3,1}{3,4,5}}
  {{1,2,3},{2,3,1}{3,4,5}}
TableForm{S,TableSpacing->{1,1}}


|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 4 | 5 |


TableForm{S,TableSpacing->{2,5}}


|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 4 | 5 |


```

Технологія застосування опцій `TableAlignments` та `TableSpacing` зрозуміла і не вимагає додаткових пояснень.

5.3. Робота зі списками. Створення векторів та матриць

Списки є досить складною структурою даних. Система комп'ютерної алгебри *Mathematica* дозволяє здійснювати контроль структури даних, змінювати порядок розташування елементів, видаляти елементи даних, включати нові елементи [27]. Для реалізації цих процедур існує багато вбудованих функцій. Розглянемо ці функції та приклади їх застосування. Ключову увагу зосередимо на списках типу “вектор” та “матриця”.

5.3.1. Виявлення структури вектора чи матриці

Для виявлення структури вектора чи матриці використовуються такі функції:

<code>VectorQ[V]</code>	— перевіряє, чи є V вектором, і видає <code>True</code> , якщо так і <code>False</code> , якщо ні;
<code>MatrixQ[M]</code>	— перевіряє, чи є M матрицею, і видає <code>True</code> , якщо так і <code>False</code> , якщо ні;
<code>Length[V]</code>	— повертає число елементів вектора V ;
<code>Length[M]</code>	— повертає число рядків матриці M ;
<code>MemberQ[V, n]</code>	— перевіряє, чи є у векторі V елемент n ; якщо так, то видає <code>True</code> , якщо ні — <code>False</code> ;
<code>FreeQ[V, n]</code>	— перевіряє, чи є у векторі V елемент n ; якщо так, то видає <code>False</code> , якщо ні — <code>True</code> ;
<code>FreeQ[M, n]</code>	— перевіряє, чи має матриця M елемент n ; якщо так, то видає <code>False</code> , якщо ні — <code>True</code> ;
<code>Dimensions[V]</code>	— повертає число елементів вектора V ;
<code>Dimensions[M]</code>	— повертає розмір матриці (число рядків і число стовпців);
<code>Position[V, n]</code>	— повертає номер позиції елемента n вектора V ;
<code>Count[V, n]</code>	— повертає число елементів в векторі V , які мають значення n ;
<code>TensorRank[V]</code>	— видає ранг вектора V , якщо вектор V є тензором;
<code>TensorRank[M]</code>	— видає ранг матриці M , якщо M є тензором.

Приклад 5.5. Задано вектор V та матрицю M :

$$V = \{1, 3, 4, 5, 7, 2, 4\} \quad M = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Виявити структуру вектора та матриці, скориставшись функціями

Vector, Matrix, Length, Member, Free, Dimensions, Position.

Розв'язок. Використовуючи задані вбудовані функції, отримуємо:

```
V={1,3,4,5,7,2,4}
      {1,3,4,5,7,2,4}
M={{1,3,5},{2,4,6},{1,2,3}}
      {{1,3,5},{2,4,6},{1,2,3}}
VectorQ[V]
      True
MatrixQ[V]
      False
{MatrixQ[V],MatrixQ[M]}
      {False,True}
Length[V]
      7
Length[M]
      3
MemberQ[V,0]
      False
FreeQ[V,3]
      False
FreeQ[M,8]
      True
Dimensions[M]
      {3,3}
Position[V,4]
      {{3},{7}}
```

5.3.2. Перетворення та створення векторів та матриць

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має потужні можливості перетворення і створення векторів та матриць (і списків будь-якого рівня).

Це досягається завдяки виконанню таких операцій:

- видалення елементів;

- додавання елементів;
- зміна порядку розташування елементів;
- комбінування векторів та матриць.

Ці операції виконуються за допомогою великої кількості функцій.

Наведемо основні з них:

<code>Drop[V, n]</code>	— видаляє перші n елементів вектора V ;
<code>Drop[V, -n]</code>	— видаляє останні n елементів вектора V ;
<code>Drop[V, {n}]</code>	— видаляє n -й елемент вектора V ;
<code>Drop[V, {m, n}]</code>	— видаляє елементи від m -го до n -го вектора V ;
<code>Last[f]</code>	— повертає останній елемент вектора (матриці) f ;
<code>Rest[V]</code>	— повертає вектор V з відкинутим першими елементом;
<code>Take[V, n]</code>	— повертає вектор V з першими n елементами;
<code>Take[V, -n]</code>	— повертає вектор V з останніми n елементами;
<code>Take[V, {m, n}]</code>	— повертає вектор V з номерами елементів від m до n ;
<code>Append[V, a]</code>	— додає елемент a в кінець вектора V ;
<code>Prepend[V, -a]</code>	— додає елемент a на початок вектора V ;
<code>Insert[V, a, n]</code>	— розміщає елемент a в позицію n , відраховуючи від початку вектора V ;
<code>Insert[V, a, -n]</code>	— розміщає елемент a в позицію n , відраховуючи від кінця вектора V ;
<code>Delete[V, n]</code>	— видаляє елемент n з вектора V ;
<code>{Delete[f, n₁], Delete[f, n₂], Delete[f, n₃], ...}</code>	— видаляє з вектора (матриці) f елементи n_i і утворює нову матрицю.

Приклад 5.6. Задано вектор V та матрицю M :

$$V = \{1, 3, 4, 5, 7, 2, 4\} \quad M = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Створити нові вектора та матрицю видаляючи та змінюючи їх елементи, скориставшись функціями `Drop`, `Delete`, `Last`, `Rest`, `Take`, `Append`, `Prepend`, `Insert`.

Розв'язок. Використовуючи задані вбудовані функції, отримуємо:

```

V={1,3,4,5,7,2,4}
  {1,3,4,5,7,2,4}
M={{1,3,5},{2,4,6},{1,2,3}}
  {{1,3,5},{2,4,6},{1,2,3}}
Delete[V,6]
  {1,3,4,5,7,4}
{Delete[V,1],Delete[V,-3],Delete[V,7]}
  {{3,4,5,7,2,4},{1,3,4,5,2,4},{1,3,4,5,7,2}}
Delete[M,{2,3}]
  {{1,3,5},{2,4},{1,2,3}}
Last[M]
  {1,2,3}
Rest[V]
  {3,4,5,7,2,4}
{Take[V,4],Take[V,-4],Take[V,{3,6}]}
  {{1,3,4,5},{5,7,2,4},{4,5,7,2}}
Append[V,Sin[x]]
  {1,3,4,5,7,2,Sin[x]}
Prepend[V,Sin[x]]
  {Sin[x],3,4,5,7,2,4}
Insert[V,{3,a,Sin[x]},5]
  {1,3,4,5,{3,a,Sin[x]},7,2,4}

```

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica реалізовано можливість міняти положення елементів вектора та матриці. Для цього в системі є такі функції:

Flatten[M]	— утворює вектор з будь-якого списку, наприклад, матриці;
Flatten[M,n]	— утворює вектор в рядку n матриці M;
Sort[f]	— сортує елементи вектора f в природному порядку;
Reverse[f]	— повертає вектор (матрицю) f в зворотному порядку розташування елементів;
RotateLeft[f]	— повертає елементи вектора (матриці) f після однократного повороту вліво;
RotateLeft[f,n]	— повертає елементи вектора (матриці) f після n-кратного повороту вліво;

RotateRigth[f]	— повертає елементи вектора (матриці) f після однократного повороту вправо;
RotateRigth[f,n]	— повертає елементи вектора (матриці) f після n-кратного повороту вправо;
Transpose[M]	— зміна рядків і стовпців матриці.

Приклад 5.7. *Задано вектор V та матрицю M:*

$$V = \{1, 3, 6, 2, 4, 5\} \quad M = \{\{2, 1, 4\}, \{3, 8, 6\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Створити нові вектора та матрицю змінюючи порядок розташування їх елементів, скориставшись функціями Flatten, Sort, Reverse, RotateLeft, RotateRight, Transpose.

Розв'язок. Використовуючи задані вбудовані функції, отримуємо:

```
V={1, 3, 6, 2, 4, 5}
  {1, 3, 6, 2, 4, 5}
M={{2, 1, 4}, {3, 8, 6}, {1, 2, 3}}
  {{2, 1, 4}, {3, 8, 6}, {1, 2, 3}}
Flatten[M]
  {2, 1, 4, 3, 8, 6, 1, 2, 3}
FlattenAt[M, 2]
  {{2, 1, 4}, {3, 8, 6}, {1, 2, 3}}
Sort[M]
  {{1, 2, 3}, {2, 1, 4}, {3, 8, 6}}
Reverse[V]
  {5, 4, 2, 6, 3, 1}
Reverse[M]
  {{1, 2, 3}, {3, 8, 6}, {2, 1, 4}}
RotateLeft[V, 3]
  {2, 4, 5, 1, 3, 6}
RotateRight[V, 2]
  {4, 5, 1, 3, 6, 2}
RotateLeft[M, 1]
  {{3, 8, 6}, {1, 2, 3}, {2, 1, 4}}
Transpose[M]
  {{2, 3, 1}, {1, 8, 2}, {4, 6, 3}}
```

5.3.3. Комбінування векторів та матриць

Комбінування векторів та матриць дозволяє створювати нові вектори та матриці, тобто створювати структури даних, які виконують операції над множинами.

Комбінування векторів та матриць здійснюється за допомогою таких вбудованих функцій системи:

<code>Union[F]</code>	— повертає новий вектор (чи матрицю), з якого(ї) видалені елементи, які повторюються;
<code>Union[f₁, f₂, ...]</code>	— об'єднує $f_1, f_2, \dots$, видаляючи елементи векторів чи матриць, які повторюються;
<code>Join[f₁, f₂, ...]</code>	— об'єднує $f_1, f_2, \dots$ в єдиний ланцюжок (конкатенація);
<code>Complement[f₁, f₂, ...]</code>	— повертає список f , елементи якого не містяться в $f_1, f_2, \dots$;
<code>Intersection[f₁, f₂, ...]</code>	— повертає впорядкований список елементів, спільних для всіх списків.

Приклад 5.8. Задано вектори V_1, V_2, V_3 та матриці M_1, M_2 :

$$V_1 = \{a, 3, 1, 7, 2, 4, 6\}$$

$$V_2 = \{1, b, 3, 4, 5, 8\}$$

$$V_3 = \{4, 5, c, 7, 8, 1\}$$

$$M_1 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{7, 2, 3\}\}$$

$$M_2 = \{\{a, b, c\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$$

Необхідно виконати комбінування векторів та матриць, використовуючи функції `Union`, `Join`, `Complement`, `Intersection`.

Розв'язок. Використовуючи задані функції, отримуємо:

$$V1 = \{a, 3, 1, 7, 2, 4, 6\}$$

$$\{a, 3, 1, 7, 2, 4, 6\}$$

$$V2 = \{1, b, 3, 4, 5, 8\}$$

$$\{1, b, 3, 4, 5, 8\}$$

$$V3 = \{4, 5, c, 7, 8, 1\}$$

$$\{4, 5, c, 7, 8, 1\}$$

$$M1 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{7, 2, 3\}\}$$

$$\{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{7, 2, 3\}\}$$

$$M2 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{7, 2, 3\}\}$$

$$\{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{7, 2, 3\}\}$$

```

Union[V1,V2,V3,M1,M2]
  {1,2,3,4,5,6,7,8,a,b,c,{1,2,3},{1,2,4},{3,5,8},{4,5,6},
  {7,2,3},{a,b,c}}
Union[1,2,3,1,4,5,2,4,1,7]
  {1,2,3,4,5,7}
Join[V1,V2,V3,M1,M2]
  {a,3,1,7,2,4,6,1,b,3,4,5,8,4,5,c,7,8,1,{1,2,4},{3,5,8},
  {7,2,3},{a,b,c},{1,2,3},{4,5,6}}
Complement[V1,V2,V3]
  {2,6,a}
Intersection[V1,V2,V3]
  {1,4}

```

5.3.4. Створення векторів та матриць

Система комп'ютерної алгебри Mathematica дозволяє створювати масиви даних довільних розмірностей. Створення векторів та матриць здійснюється за допомогою таких функцій:

Array[f,n]	— створює вектор з n елементів f[1], f[2], ..., f[n];
Array[f,n ₁ ,n ₂]	— створює вектор з n ₁ елементів, починаючи з f[n ₂], при цьому n ₂ може бути числом, функцією, виразом;
Array[f,{n ₁ ,n ₂ }]	— створює матрицю n ₁ ×n ₂ з елементів функції f(n ₁ ,n ₂);
Array[f,n ₁ ,n ₂ ,h]	— створює вектор з n ₁ елементів, починаючи з f(n ₂), з рівнем масиву h.

Розглянемо приклади створення векторів за допомогою функцій Array[f,n], Array[f,n₁,n₂], Array[f,{n₁,n₂}], Array[f,n₁,n₂,h]. Зауважимо, що ці функції дозволяють додавати та множити вектори за допомогою функцій Plus та Times.

```

Array[Tan,5]
  {Tan[1],Tan[2],Tan[3],Tan[4],Tan[5]}
Array[Cos,5,3]
  {Cos[3],Cos[4],Cos[5],Cos[6],Cos[7]}
Array[Sin,6,2]
  {Sin[2],Sin[3],Sin[4],Sin[5],Sin[6],Sin[7]}

```

```

Array[Sin, 5, Sqrt[3]]
{Sin[ $\sqrt{3}$ ], Sin[ $1 + \sqrt{3}$ ], Sin[ $2 + \sqrt{3}$ ], Sin[ $3 + \sqrt{3}$ ], Sin[ $4 + \sqrt{3}$ ]}
N[%]
{0.997027, 0.398189, -0.556742, -0.999807, -0.523654}
Array[Sin, 5, Sqrt[3], Plus]
Sin[ $\sqrt{3}$ ] + Sin[ $1 + \sqrt{3}$ ] + Sin[ $2 + \sqrt{3}$ ] + Sin[ $3 + \sqrt{3}$ ] + Sin[ $4 + \sqrt{3}$ ]
N[%]
-0.694987
Array[Sin, 5, Sqrt[3], Times]
Sin[ $\sqrt{3}$ ] Sin[ $1 + \sqrt{3}$ ] Sin[ $2 + \sqrt{3}$ ] Sin[ $3 + \sqrt{3}$ ] Sin[ $4 + \sqrt{3}$ ]
N[%]
-0.11456
Array[Tan, {3, 4}]
{{Tan[1, 1], Tan[1, 2], Tan[1, 3], Tan[1, 4]},
 {Tan[2, 1], Tan[2, 2], Tan[2, 3], Tan[2, 3]},
 {Tan[3, 1], Tan[3, 2], Tan[3, 3], Tan[3, 4]}}
Array[Exp, 5, 3, 2]
2[e3, e4, e5, e6, e7]
N[%]
2[e3, e4, e5, e6, e7]
Array[Exp, 5, a, h]
h[ea, e1+a, e2+a, e3+a, e4+a]

```

5.4. Математичні операції над векторами та матрицями

5.4.1. Арифметичні операції

Математичні операції над векторами та матрицями здійснюються таким самим способом, що й над числами [27]. Результатами цих операцій є вектори та матриці з новими значеннями елементів.

Приклад 5.9. *Задано вектори V_1, V_2 та матриці M_1, M_2 :*

$$V_1 = \{1, 3, 5, 2, 6, 4\}$$

$$V_2 = \{2, 7, 5, 8, 1, 3\}$$

$$M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{6, 5, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$$

$$M_2 = \{\{3, 2, 1\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 3, 1\}\}$$

Необхідно:

- додати, відняти, перемножити та розділити вектор V_1 та матрицю M_1 на число 3;
- піднести в квадрат вектор V_2 та матрицю M_2 ;
- обчислити корінь квадратний з вектора V_1 та матриці M_1 ;
- обчислити $e^{V_1}, \sin V_2, \ln M_1, \cosh M_2$.

Розв'язок. Проведемо відповідні обчислення.

```

V1={1,3,5,2,6,4}
{1,3,5,2,6,4}
V2={2,7,5,8,1,3}
{2,7,5,8,1,3}
M1={{1,2,3},{6,5,4},{1,3,5}}
{{1,2,3},{6,5,4},{1,3,5}}
M2={{3,2,1},{4,5,6},{5,3,1}}
{{3,2,1},{4,5,6},{5,3,1}}
{V1+3,V1-3,V1*3,V1/3}
{
{4,6,8,5,9,7},{-2,0,2,-1,3,1},{3,9,15,6,18,12},{1/3,1,5/3,2/3,2,4/3}}
{M1+3,M1-3,M1*3,M1/3}
{
{{4,5,6},{9,8,7},{4,6,8}},{-2,-1,0},{3,2,1},{-2,0,2}},{
{3,6,9},{18,15,12},{3,9,15}}}
{
{1/3,2/3,1},{2,5/3,4/3},{1/3,1,5/3}}
{V2^2,M2^2,Sqrt[V1],Sqrt[M1]}
{
{4,49,25,64,1,9},{9,4,1},{16,25,36},{25,9,1},{1,Sqrt[3],Sqrt[5],Sqrt[2],Sqrt[6],2}
{
{1,Sqrt[2],Sqrt[3]},{Sqrt[6],Sqrt[5],2},{1,Sqrt[3],Sqrt[5]}}}
{E^V1,Sin[V2],Log[M1],Cosh[M2]}
{
{e,e^3,e^5,e^2,e^6,e^4},{Sin[2],Sin[7],Sin[5],Sin[8],Sin[1],Sin[3]},
{
{0,Log[2],Log[3]},{Log[6],Log[5],Log[4]},{0,Log[3],Log[5]}}
{Cosh[3],Cosh[2],Cosh[1]},{Cosh[4],Cosh[5],Cosh[6]},{Cosh[5],Cosh[3],Cosh[1]}}}
N[%]
{
{2.71828,20.0855,148.413,7.38906,403.429,54.5982},
{0.9092297,0.656987,-0.958924,0.989358,0.841471,0.14112},

```

```
{{0., 0.693147, 1.09861}, {1.79176, 1.60944, 1.38629},  
{0., 1.09861, 1.60944}}, {{10.0677, 3.7622, 1.54308}, {27.3082,  
74.2099, 201.716}, {74.2099, 10.0677, 1.54308}}  
{Sin[2], Sin[3], Sin[4], Sin[5], Sin[6], Sin[7]}
```

5.4.2. Арифметичні операції

Векторні операції множення і піднесення до степеня в системі Mathematica здійснюється за допомогою вбудованих функцій. Зокрема, скалярний добуток реалізується за допомогою функції `Dot[V1, V2]`. Також він реалізується знаком множення у вигляді точки `V1.V2` чи `M1.M2`.

Приклад 5.9. *Задано вектори V_1, V_2 та матриці M_1, M_2 :*

$$V_1 = \{1, 3, 5, 2, 6, 4\}$$

$$V_2 = \{2, 7, 5, 8, 1, 3\}$$

$$M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{6, 5, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$$

$$M_2 = \{\{3, 2, 1\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 3, 1\}\}$$

Необхідно виконати операцію почленного і матричного множення векторів та матриць.

Розв'язок. Проведемо відповідні обчислення.

```
V1={1, 3, 5, 2, 6, 4}  
    {1, 3, 5, 2, 6, 4}  
V2={2, 7, 5, 8, 1, 3}  
    {2, 7, 5, 8, 1, 3}  
M1={{1, 2, 3}, {6, 5, 4} {1, 3, 5}}  
    {{1, 2, 3}, {6, 5, 4} {1, 3, 5}}  
M2={{3, 2, 1}, {4, 5, 6} {5, 3, 1}}  
    {{3, 2, 1}, {4, 5, 6} {5, 3, 1}}  
V1*V2  
    {2, 21, 25, 16, 6, 12}  
V1.V2  
    82  
Dot[V1, V2]  
    82  
Dot[M1, M2]  
    {{26, 21, 16}, {58, 49, 40}, {40, 32, 24}}
```

5.4.3. Математичні операції з векторами та матрицями

Математичні операції з векторами та матрицями (обчислення визначника, перетворення матриць, створення спеціальних матриць тощо) виконується в системі Mathematica за допомогою вбудованих функцій.

Розглянемо основні з них:

Det [M]	— повертає визначник (головний визначник) матриці;
IdentityMatrix[M]	— повертає одиничну матрицю: матрицю з діагональними елементами, рівними 1, і рештою 0;
Transpose[M]	— повертає транспоновану матрицю, в якій рядки замінені стовпцями, а стовпці рядками;
Inverse[M]	— повертає обернену матрицю, тобто таку, яка в добутку з даною дає одиничну матрицю;
Tr [M]	— повертає слід матриці (суму діагональних елементів);
LinearSolve[M,b]	— повертає вектор невідомих матричного рівняння $M \cdot x = b$, де M — матриця елементів, x — вектор невідомих, b — вектор вільних членів;
Eigensystem[M]	— повертає список власних значень і власний вектор квадратної матриці M;
Eigenvalues[M]	— повертає список власних значень квадратної матриці M;
Eigenvectors[M]	— повертає список власних векторів квадратної матриці M;
PseudoInverse[M]	— шукає псевдообернену матрицю для матриці M.

Проілюструємо дані операції на прикладі.

```

M1={{1,2,3},{3,5,4},{7,2,1}}
{{1,2,3},{3,5,4},{7,2,1}}
M2={{4,a,-2},{1,2,b},{3,5,c}}
{{4,a,-2},{1,2,b},{3,5,c}}
{Det[M1],Det[M2]}
{-40,2-20 b+3 a b+8 c-a c}
IdentityMatrix[3]
{{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}
{Transpose[M1],Transpose[M2]}
{{1,3,7},{2,5,2},{3,4,1}}
{{4,1,3},{a,2,5},{-2,b,c}}

```

```
{Inverse[M1], Inverse[M2]}
```

$$\left\{ \left\{ \frac{3}{40}, -\frac{1}{10}, \frac{7}{40} \right\}, \left\{ -\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right\}, \left\{ \frac{29}{40}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{40} \right\} \right\},$$

$$\left\{ \frac{-5b+2c}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{-10-ac}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{4+ab}{2-20b+3ab+8c-ac} \right\},$$

$$\left\{ \frac{3b-c}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{6+4c}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{-2-4b}{2-20b+3ab+8c-ac} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{-20+3a}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{8-a}{2-20b+3ab+8c-ac} \right\} \right\}$$

```
{Tr[M1], Tr[M2]}
```

```
{7, 6+c}
```

```
{LinearSolve[M1, {1, 3, 7}], LinearSolve[M2, {1, 2, 3}]}
```

```
{-40, 2-20 b+3 a b+8 c-a c}
```

```
{{1,0,0},
```

$$\left\{ \frac{-8-5c+3ab+2c-2ac}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{6-9b+7c}{2-20b+3ab+8c-ac}, \frac{-17+3a}{2-20b+3ab+8c-ac} \right\}$$

```
PseudoInverse[M1]
```

$$\left\{ \left\{ \frac{3}{40}, -\frac{1}{10}, \frac{7}{40} \right\}, \left\{ -\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right\}, \left\{ \frac{29}{40}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{40} \right\} \right\}$$

```
Eigenvalues[M1]
```

```
{Root[40-24#1-7#1^2+#1^3&3], Root[40-24#1-7#1^2+#1^3&1],  
Root[40-24#1-7#1^2+#1^3&2]}
```

```
N[%]
```

```
{9.14592, 3.42345, 1.27752}
```

Питання, тести для самоконтролю

1. Які типи даних використовуються в системі Mathematica?
2. Як системі Mathematica представляються дійсні числа?
3. Як системі Mathematica представляються комплексні числа?
4. Що вам відомо про символічні змінні в системі Mathematica?
5. Як в системі працювати зі списками і масивами?

6. Які вбудовані функції системи використовуються для представлення векторів та матриць?
7. Як реалізується генерація векторів та матриць за допомогою функції Range?
8. Як реалізується генерація векторів та матриць за допомогою функції Table?
9. Які вбудовані функції призначені для виділення та введення елементів векторів та матриць?
10. Яка технологія роботи зі списками? Які вбудовані функції призначені для створювання векторів та матриць?
11. Які функції системи Mathematica використовуються для виявлення структури вектора чи матриці?
12. Які функції системи Mathematica призначені для перетворення та створення векторів та матриць?
13. Які функції системи Mathematica призначені для комбінування векторів та матриць?
14. Які функції призначені для створення векторів та матриць в системі Mathematica?
15. Як в системі Mathematica реалізуються арифметичні операції?
16. Як в системі Mathematica реалізуються операції матричного множення?
17. Які функції в системі Mathematica призначені для операцій з векторами та матрицями?

Обов'язкові та додаткові задачі

Використовуючи вбудовані функції системи комп'ютерної алгебри Mathematica виконати операції над векторами та матрицями.

Задано вектори V_1, V_2, V_3 та матриці M_1, M_2 :

$$V_1 = \{2, 4, 5, 3, 7, 1\}$$

$$V_2 = \{6, 9, 7, 4, 1, 3\}$$

$$V_2 = \{3, 6, 4, 5, 2, 8\}$$

$$M_1 = \{\{1, 3, a\}, \{2, 5, 7\}, \{1, 2, 6\}\}$$

$$M_2 = \{\{5, 2, 4\}, \{8, 5, 2\}, \{4, 3, 7\}\}$$

Необхідно:

- a. виділити з вектора V_1 , елементи з номерами 2,5,6 та $-3, -5, -6$. З вектора V_2 виділити четвертий елемент;
- b. виявити структуру вектора та матриці, скориставшись функціями Vector, Matrix, Length, Member, Free, Dimensions, Position;
- c. створити нові вектора та матрицю змінюючи порядок розташування їх елементів, скориставшись функціями Flatten, Sort, Reverse, RotateLeft, RotateRight, Transpose;
- d. додати, відняти, перемножити та розділити вектор V_1 та матрицю M_1 на число 3;
- e. піднести в квадрат вектор V_2 та матрицю M_2 ;
- f. обчислити корінь квадратний з вектора V_1 та матриці M_1 ;
- g. обчислити $e^{V_1}, \cos V_2, \ln M_2, \sinh M_2, \operatorname{ctg} V_3$.
- h. виконати операцію почленного і матричного множення векторів та матриць.

РОЗДІЛ VI. МАТЕМАТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Зазвичай математичні функції класифікують на елементарні та спеціальні функції і функції користувача [27]. Розглянемо ці функції, способи їх представлення і обчислення.

6.1. Елементарні математичні функції

Елементарними є такі функції:

<code>Abs [z]</code>	— обчислює абсолютне значення дійсного числа і модуль комплексного числа z ;
<code>Exp [z]</code>	— обчислює експоненту функції;
<code>Log [z]</code>	— обчислення логарифма числа z ;
<code>Log [b, z]</code>	— обчислення логарифма числа z за основою b ;
<code>Sqrt [z]</code>	— обчислює квадратний корінь числа z ;
<code>Sign [z]</code>	— повертає -1 , якщо z від’ємне, 0 , якщо $z=0$, і 1 , якщо z додатне; якщо z — комплексне число, то повертається відношення $z / \text{Abs}[z]$;
<code>Sin [z]</code>	— повертає синус числа z ;
<code>Sinh [z]</code>	— повертає гіперболічний синус числа z ;
<code>ArcSin [z]</code>	— повертає арксинус числа z ;
<code>ArcSinh [z]</code>	— повертає арксинус гіперболічний числа z ;
<code>Cos [z]</code>	— повертає косинус числа z ;
<code>Cosh [z]</code>	— повертає гіперболічний косинус числа z ;
<code>ArcCos [z]</code>	— повертає арккосинус числа z ;
<code>ArcCosh [z]</code>	— повертає арккосинус гіперболічний числа z ;
<code>Tan [z]</code>	— повертає тангенс числа z ;
<code>Tanh [z]</code>	— повертає гіперболічний тангенс числа z ;
<code>ArcTan [z]</code>	— повертає арктангенс числа z ;
<code>ArcTanh [z]</code>	— повертає арктангенс гіперболічний числа z ;
<code>Cot [z]</code>	— повертає котангенс числа z ;
<code>Coth [z]</code>	— повертає гіперболічний котангенс числа z ;
<code>ArcCot [z]</code>	— повертає арккотангенс числа z ;
<code>ArcCoth [z]</code>	— повертає арккотангенс гіперболічний числа z ;

<code>Sec[z]</code>	— повертає секанс числа z ;
<code>Sech[z]</code>	— повертає гіперболічний секанс числа z ;
<code>ArcSec[z]</code>	— повертає арксеканс числа z ;
<code>ArcSech[z]</code>	— повертає арксеканс гіперболічний числа z ;
<code>Csc[z]</code>	— повертає косеканс числа z ;
<code>Csch[z]</code>	— повертає гіперболічний косеканс числа z ;
<code>ArcCsc[z]</code>	— повертає арккосеканс числа z ;
<code>ArcCsch[z]</code>	— повертає арккосеканс гіперболічний числа z ;

Існує два основних способи обчислення елементарних функцій — безпосереднє обчислення та шляхом присвоювання аргумента числового значення.

6.1.1. Безпосереднє обчислення функцій

При цьому способі обчислень функція вводиться з числовим значенням аргумента z і, натиснувши комбінацію клавіш `<Shift>+<Enter>`, отримуємо результат. Наприклад, нехай необхідно обчислити значення функції $y = e^2$. Процедура безпосереднього обчислення функції має вигляд:

```
Exp[2.]
```

Натиснувши комбінацію клавіш `<Shift>+<Enter>`, отримаємо відповідь:

```
7.38906
```

Слід зазначити, що якщо при даному аргументі є точне значення, то вона буде обчислена без символу “.” (точка) в записі числа. Наприклад, `Exp[0]`, `Cos[Pi/2]`, `Log[Exp[5]]`.

6.1.2. Присвоєння аргументу числового значення

Нехай, наприклад, необхідно обчислити значення функції $y = \ln 2$. Процедура безпосереднього обчислення функції має вигляд:

```
x:=2.
Log[x]
0.693147
```

Розглянемо ще низку прикладів обчислення елементарних функцій:

```

Exp[2.]
7.38906
Log[Exp[5]]
5
x1:=2
Log[x]
0.693147
x2:=Pi/2
Cos[x2]
0

```

Дані способи є універсальними і можуть застосовуватись при обчисленнях будь-яких функцій.

6.2. Спеціальні математичні функції

6.2.1. Ортогональні поліноми

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має вбудовані функції обчислення ортогональних поліномів Чебишева, Лежандра, Ерміта, Лагерра, Гегенбауера, Якобі [27]. Ці функції мають вигляд:

ChebyshevT[n, x]	— обчислює поліном Чебишева першого роду;
ChebyshevU[n, x]	— обчислює поліном Чебишева другого роду;
LegendreP[n, x]	— обчислення поліном Лежандра;
LegendreP[n, m, x]	— обчислення приєднаний поліном Лежандра;
LegendreQ[n, x]	— обчислює функцію Лежандра другого роду;
LegendreQ[n, m, x]	— обчислює приєднану функцію Лежандра другого роду;
HermiteH[n, x]	— обчислює поліном Ерміта;
LaguerreL[n, x]	— обчислює поліном Лагерра;
LaguerreL[n, m, x]	— обчислює узагальнений поліном Лагерра;
GegenbauerC[n, m, x]	— обчислює поліном Гегенбауера;
JacobiP[n, a, b, x]	— обчислює поліном Якобі.

В функціях використовуються позначення:

n	— степінь полінома;
x	— аргумент полінома;
m, a, b	— параметри полінома.

Значення будь-якого полінома обчислюється аналогічно до того, як обчислюються елементарні функції — вводиться функція з числовим значенням степеня, аргумента та її параметрів і, натиснувши комбінацію клавіш <Shift>+<Enter>, отримаємо результат.

Приклад 6.1. Обчислити значення поліномів четвертого степеня Лежандра, Ерміта та Якобі при $x = 1.2$, $a = 1, b = 3$.

Розв’язок. В даному випадку функції матимуть вигляд:

LegendreP[4, 1.2]

HermiteH[4, 1.2]

JacobiP[4, 1, 3, 1.2]

Відтак, одержуємо:

LegendreP[4, 1.2]

4.047

HermiteH[4, 1.2]

-23.9424

JacobiP[4, 1, 3, 1.2]

19.3745

LegendreP[4, 1.2]

$$\frac{3}{8} - \frac{15z^2}{4} + \frac{35z^4}{8}$$

HermiteH[4, 1.2]

$$12 - 48z^2 + 16z^4$$

JacobiP[4, 1, 3, 1.2]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24}(1+a)(2+a)(3+a)(4+a) + \frac{1}{12}(2+a)(3+a)(4+a)(5+a+b)(-1+z) + \\ & \frac{1}{16}(3+a)(4+a)(5+a+b)(6+a+b)(-1+z)^2 + \\ & \frac{1}{48}(4+a)(5+a+b)(6+a+b)(7+a+b)(-1+z)^3 + \\ & \frac{1}{384}(5+a+b)(6+a+b)(7+a+b)(8+a+b)(-1+z)^4 \end{aligned}$$

При необхідності можна отримати вирази полінома n -го степеня. Для цього достатньо ввести функцію із зазначенням степеня полінома n і натиснути комбінацію клавіш <Shift>+<Enter>. Для отримання множини варіантів слід використовувати табулювання функції за параметром n .

Приклад 6.2. *Отримати вирази поліномів Чебишева першого роду, узагальненого поліному Лагерра і полінома Гегенбауера (для $m = 2$). Поліноми отримати при значеннях $n = 1, 2, \dots, 5$.*

Розв'язок. В даному випадку функції матимуть вигляд:

```
Table[ChebyshevT[n, z], {n, 1, 5, 1}]
Table[LaguerreL[n, 2, z], {n, 1, 5, 1}]
Table[GegenbauerC[n, 2, z], {n, 1, 5, 1}]
```

Таким чином, одержуємо:

```
Table[ChebyshevT[n, z], {n, 1, 5, 1}]
{z, -1 + 2z^2, -3z + 4z^3, 1 - 8z^2 + 8z^4, 5z - 20z^3 + 16z^5}
Table[LaguerreL[n, 2, z], {n, 1, 5, 1}]
{3 - z, 1/2(12 - 8z + z^2), 1/6(60 - 60z + 15z^2 - z^3), 1/24(360 - 480z + 180z^2 - 24z^3
+ z^4), 1/120(2500 - 4200z + 2100z^2 - 420z^3 + 35z^4 - z^5)}
Table[GegenbauerC[n, 2, z], {n, 1, 5, 1}]
{4z, -2 + 12z^2, -12z + 32z^3, 3 - 48z^2 + 80z^4, 24z - 160z^3 + 192z^5}
```

Ортогональні многочлени корисно представляти в графічному вигляді. Графіки дають наочне представлення про поліном як про функцію, що залежить від степеня n і значень аргумента. Пересвідчимось в цьому на прикладах.

Приклад 6.3. *Представити в вигляді графіків різних стилів поліноми Чебишева, Лагерра і Лежандра в діапазоні зміни аргумента від $x = -1$ до $x = 2$ при значеннях $n = 1, 3, 5$.*

Розв'язок. В даному випадку графічні функції матимуть вигляд:

```
Plot[{ChebyshevT[1, x], ChebyshevT[3, x], ChebyshevT[5, x]}, {x, -1, 2}, PlotStyle-
>{AbsoluteDashing[{1, 5}], None, Thickness[0.01]}]
```

```
Plot[{LaguerreL[1,x],LaguerreL[3,x],LaguerreL[5,x]}, {x,-1,2},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,5}],None,Thickness[0.01]}]
Plot[{LegendreP[1,x],LegendreP[3,x],LegendreP[5,x]}, {x,-1,2},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,5}],None,Thickness[0.01]}]
```

Таким чином, одержуємо відповідні графіки (рис. 6.1, 6.2, 6.3).

```
Plot[{ChebyshevT[1,x],ChebyshevT[3,x],ChebyshevT[5,x]},
{x,-1,2},PlotStyle -> {AbsoluteDashing[{1,5}],
None,Thickness[0.01]}]
```

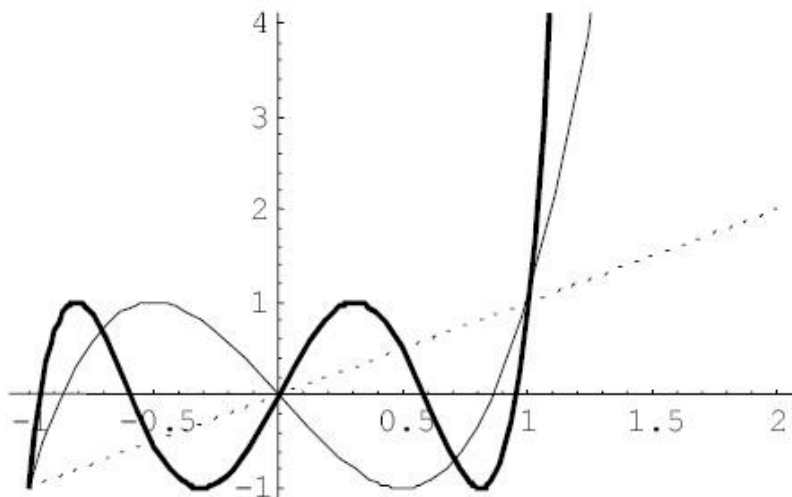


Рис. 6.1. Графічне представлення поліномів Чебишева.

```
Plot[{LaguerreL[1,x],LaguerreL[3,x],LaguerreL[5,x]},
{x,-1,2},PlotStyle -> {AbsoluteDashing[{1,5}],
None,Thickness[0.01]}]
```

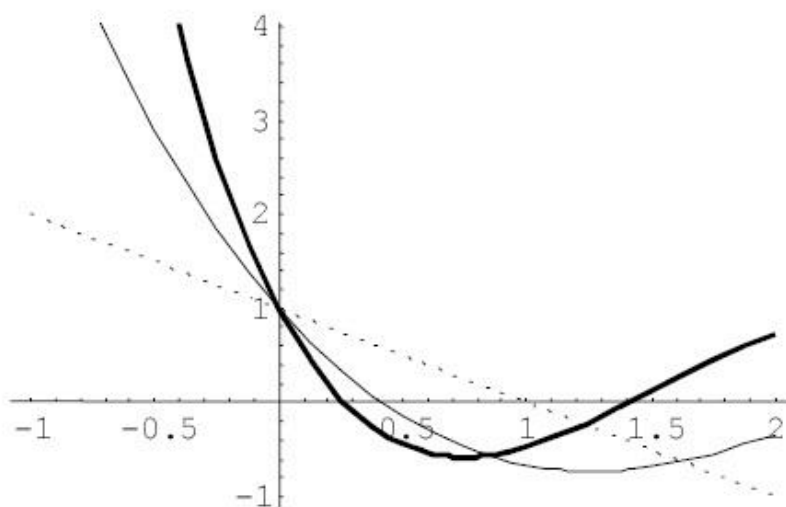


Рис. 6.2. Графічне представлення поліномів Лагерра.

```
Plot[{LegendreP[1,x],LegendreP[3,x],LegendreP[5,x]},
{x,-1,2},PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,5]},
None,Thickness[0.01]}]
```

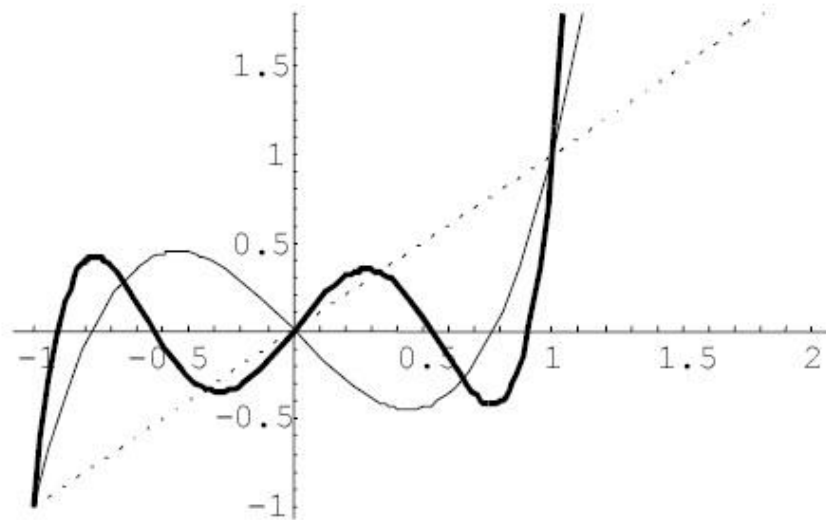


Рис. 6.3. Графічне представлення поліномів Лежандра.

6.2.2. Інтегральні показникові функції

В системі Mathematica інтегральні показникові функції обчислюються за допомогою вбудованих функцій:

- `SinIntegral[x]` — інтегральний синус

$$Si = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = - \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$

- `CosIntegral[x]` — інтегральний косинус

$$Ci = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt;$$

- `SinhIntegral[x]` — інтегральний синус гіперболічний;
- `CoshIntegral[x]` — інтегральний косинус гіперболічний;
- `ExpIntegralEi[x]` — інтегральна показникова функція;
- `ExpIntegralE[n,x]` — інтегральна показникова функція, що обчислюється методом розкладу в ряд при числі членів рівному n

$$Ei(n,x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^t}{t} dt;$$

- `LogIntegral[x]` — інтегральний логарифм

$$Li = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = Ei(\ln x).$$

Технологія обчислень інтегральних функцій аналогічна до технології обчислення елементарних функцій. Розглянемо приклади.

Приклад 6.4. Обчислити всі інтегральні функції в діапазоні зміни аргумента від $x = 1$ до $x = 7$ з кроком рівним 1. Розв'язки отримати в табличній формі.

Розв'язок. Використовуючи вбудовані інтегральні функції, отримуємо:

```
Table[{x, SinIntegral[x], SinhIntegral[x], CosIntegral[x],
CoshIntegral[x]}, {x, 1., 7.}]
```

```
{ {1., 0.946083, 1.05725, 0.337404, 0.837867}, {2., 1.60541,
2.50157, 0.422981, 2.45267}, {3., 1.84865, 4.97344, 0.11963,
4.96039}, {4., 1.7582, 9.81733, -0.140982, 9.81355}, {5., 1.54993,
20.0932, -0.19003, 20.0921}, {6., 1.42469, 42.9951, -
0.0680572, 42.9947}, {7., 1.4546, 95.7524, 0.0766953, 95.7523} }
```

```
TableForm[Out[14]]
```

1.	0.946083	1.05725	0.337404	0.837867
2.	1.60541	2.50157	0.422981	2.45267
3.	1.84865	4.97344	0.11963	4.96039
4.	1.7582	9.81733	-0.140982	9.81355
5.	1.54993	20.0932	-0.19003	20.0921
6.	1.42469	42.9951	-0.0680572	42.9947
7.	1.4546	95.7524	0.0766953	95.7523

```
Table[{x, ExpIntegralEi[x], ExpIntegralE[x], LogIntegral[x],
CoshIntegral[x]}, {x, 1., 7.}]
```

```
{ {1., 1.89512, 0.109692, -∞}, {2., 4.95423, 0.0301334, 1.04516},
{3., 9.93383, 0.00893065, 2.16359}, {4., 19.6309, 0.0027613,
2.96759}, {5., 40.1853, 0.000877801, 3.63459}, {6., 85.9898,
0.000284604, 4.22222}, {7., 191.505, 0.0000936565, 4.75705} }
```

Приклад 6.5. Використовуючи різні стилі, представити всі інтегральні показникові функції у вигляді графіків. Діапазоні зміни аргумента від $x_{\min} =$

0 до $x_{\max} = 6$ для геометричних і гіперболічних функцій та від $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = 1,5$ для решти функцій.

Розв'язок. Використовуючи відповідний функціонал системи, нарисуємо відповідні графіки (рис. 6.4, 6.5).

```
Plot[{SinIntegral[x], CosIntegral[x], SinhIntegral[x],  
CoshIntegral[x]}, {x, 0, 6}, PlotStyle->  
{AbsoluteDashing[{1, 5}], None, Thickness[0.009],  
Thickness[0.012]]}
```

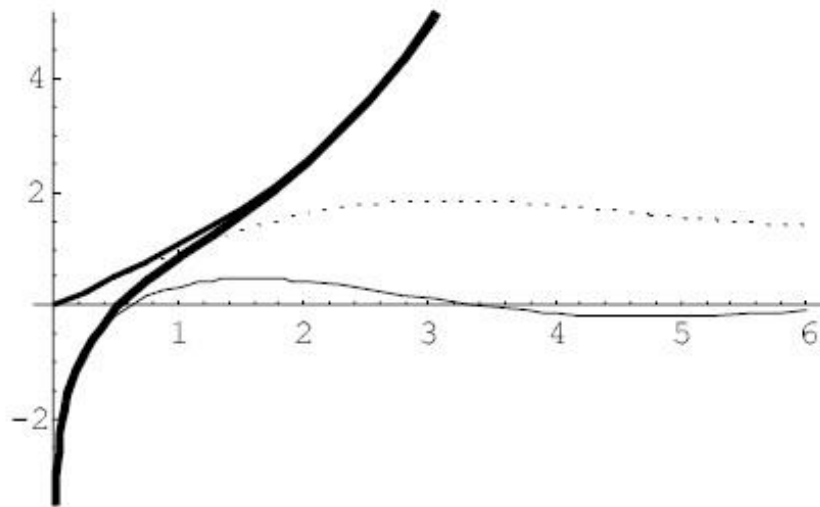


Рис. 6.4. Графічне інтегральних геометричних і гіперболічних функцій.

```
Plot[{ExpIntegralEi[x], ExpIntegralE[1, x], LogIntegral[x]},  
{x, 0, 1.5}, PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1, 5}]},  
Thickness[0.005], Thickness[0.01]]
```

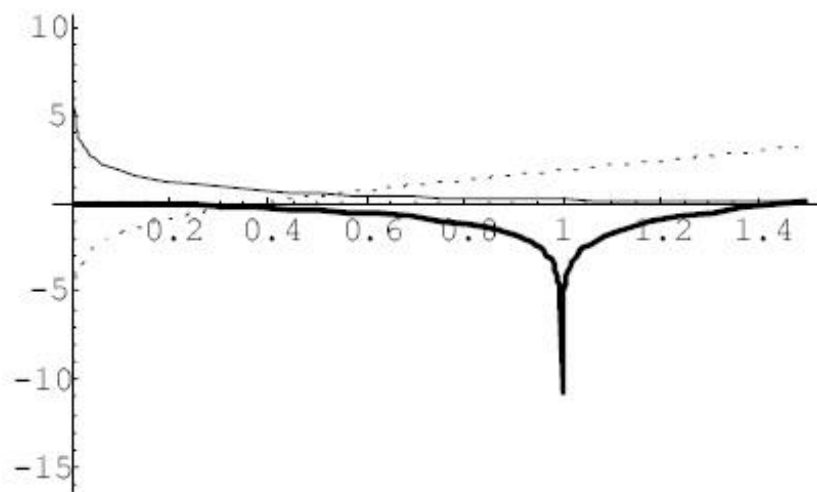


Рис. 6.5. Графічне інтегральних логарифмічної і показникової функцій.

6.2.3. Гамма-функція

Гамма-функція (позначається великою літерою грецького алфавіту — Гамма, Γ) — є одним із способів розширення функції факторіала, до дійсних і комплексних чисел. Даніель Бернуллі вивів цю функцію для n , що є додатнім цілим числом

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Гамма-функція визначена для всіх комплексних чисел, окрім недодатних цілих. Для комплексних чисел із додатною дійсною частиною гамма-функція визначається через збіжний невластний інтеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Це означення було отримане Лежандром з оригінального означення Ейлера

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx.$$

через заміну змінних $x = e^{-t}$ і нині саме означення Лежандра вважається класичним означенням гамма-функції. Інтегруючи частинами легко пересвідчитись, що $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

Для наближених обчислень зручно також використовувати співвідношення отримане з означення Ейлера, використовуючи рівність $\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z$ та заміну змінних $x = y^2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Інтеграл в цій формулі збіжний при $\operatorname{Re}(z) > 1$, хоча вона зазвичай використовується для додатних дійсних значень аргумента. У випадку дійсного аргумента $z > 0$ підінтегральна функція має єдину особливу точку — усувний розрив при $y = 0$, і якщо довизначити її в цій точці

значенням 0, вона стане неперервною на всьому інтервалі $[0,1]$. Таким способом інтеграл є власним, що спрощує чисельне інтегрування.

Існує безпосереднє аналітичне продовження вихідної формули на всю комплексну площину, крім цілих чисел, яке називають інтегралом Рімана–Ханкеля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int_L e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Контур L — будь-який контур на комплексній площині, що обходить точку $t = 0$ проти годинникової стрілки, кінці якого прагнуть до нескінченності вздовж додатного напрямку дійсної осі.

Часто доводиться мати справу з верхньою неповною гамма-функцією і нижньою неповною гамма-функцією. Ці функції є типом спеціальних функцій, які виникають при обчисленні інтегралів певного вигляду. Власне верхня неповна гамма-функція визначається як

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

нижня неповна гамма-функція визначається як

$$\gamma(s, x) = \int_0^x e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Регулярними гамма-функціями називають дві пов'язані гамма-функції вигляду:

$$P(s, x) = \frac{\gamma(s, x)}{\Gamma(s)}, \quad Q(s, x) = \frac{\Gamma(s, x)}{\Gamma(s)} = 1 - P(s, x).$$

В математиці дігамма-функція $\Psi(z)$ є логарифмічною похідною гамма-функції:

$$\Psi(z) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Вона є полігамма-функцією першого порядку, а полігамма-функції вищих порядків (тригамма-функції тощо) отримуються з її диференціюванням.

Гамма-функція також може бути представлена у виглядах

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}$$

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica для обчислення гамма-функції є такі вбудовані функції:

Gamma[n]	— ейлерова гамма-функція;
Gamma[a, x]	— неповна гамма-функція;
Gamma[a, z ₀ , z ₁]	— узагальнена неповна гамма-функція;
GammaRegularized[a, z]	— регулярна неповна гамма-функція;
GammaRegularized[a, z ₀ , z ₁]	— узагальнена неповна гамма-функція;
LogGamma[z]	— логарифм ейлерової гамма-функції;
PolyGamma[z]	— дігамма-функція $\Psi(z)$;
PolyGamma[n, z]	— n-а похідна від дігамма-функції.

Технологія обчислення цих функцій не має особливостей, вона така ж як і для інших функцій.

Приклад 6.6. Обчислити:

- гамма-функцію дійсних чисел $1/2$, $-1/2$, 3 , 5.5 , 10 ;
- гамма-функцію комплексних чисел i , $2+3i$;
- логарифм гамма-функції комплексного числа $2+3i$;
- дігамма-функцію комплексного числа $2+3i$;
- другу похідну дігамма-функції комплексного числа $2+3i$;
- регулярну неповну гамма-функцію комплексного числа $2+3i$ при $a=2$;
- узагальнену неповну гамма-функцію чисел $z_0=2+2i$, $z_1=3+3i$ при $a=1$.

Розв'язок. Застосовуючи відповідні вбудовані функції системи, обчислимо значень заданих функцій.

```
Gamma[{1/2,-1/2,3,5.5,10}]
{sqrt(pi), -2*sqrt(pi)}, 2, 52.3428, 362880
Gamma[1.I]
-0.15495-0.498016 i
```

```

Gamma[2.+3 I]
  -0.0823953+0.0917743 i
LogGamma[2.+3 I]
  -2.09285+2.3024 i
PolyGamma[2.+3 I]
  1.20798+1.10413 i
GammaRegularized[3.,2.+3 I]
  -0.98697-0.119567 i
GammaRegularized[1.,2.+2. I,3.+3. I]
  -0.00703053-0.116034 i
PolyGamma[2,2.+3 I]
  0.0526762+0.0730362 i

```

Звертаємо увагу на низку особливостей гамма-функції. Символ i комплексного числа представляється у вигляді прописної літери I , при цьому між числом i символом I ставиться знак множення (або пробіл). Цілі числа повинні закінчуватись точкою, незалежно від того на якій позиції вони розташовуються в записі комплексного числа.

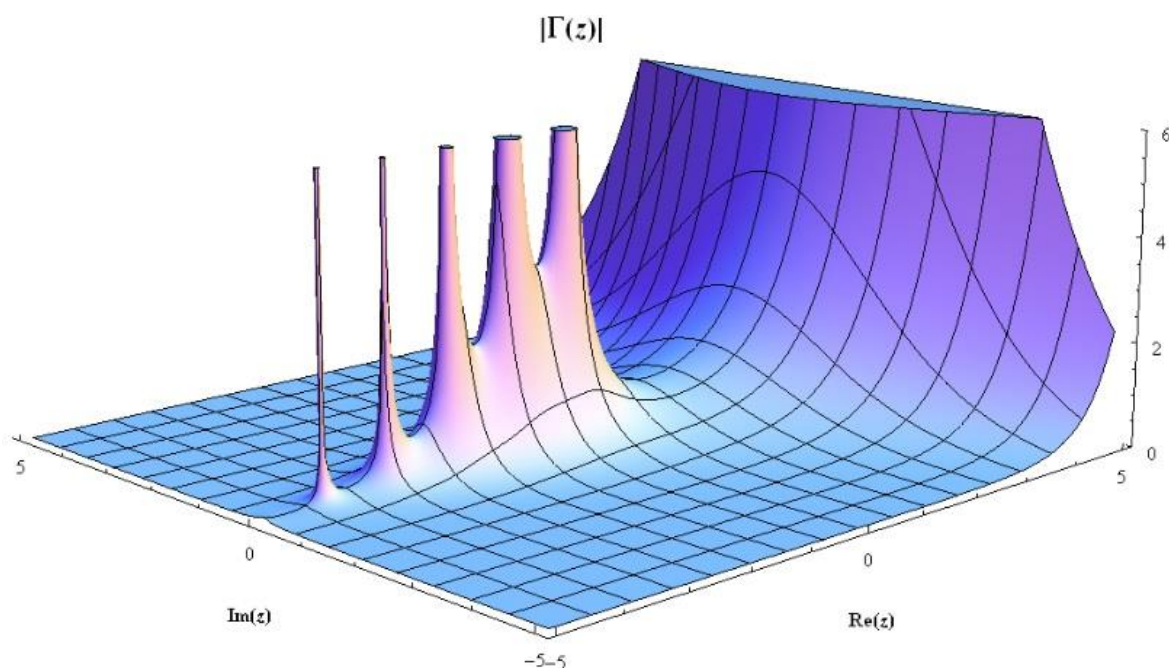


Рис. 6.6. Графік модуля гамма-функції на комплексній площині.

Гамма-функція є досить складною функцією, в чому можна пересвідчитись по її графічному представленні (рис. 6.6).

Приклад 6.7. Використовуючи графічні стилі представити у вигляді графіків функції: $\Gamma[1, x]$, $\Gamma[2, x]$, $\Gamma[x]$.

Розв'язок. В даному випадку, застосовуючи функцію `Plot` з відповідними опціями, отримуємо представлення на рис. 6.7.

```
Plot[{Gamma[1, x], Gamma[2, x], Gamma[x]}, {x, -4, 5},
PlotStyle -> {AbsoluteDashing[{1, 3}], None,
Thickness[0.007]}]
```

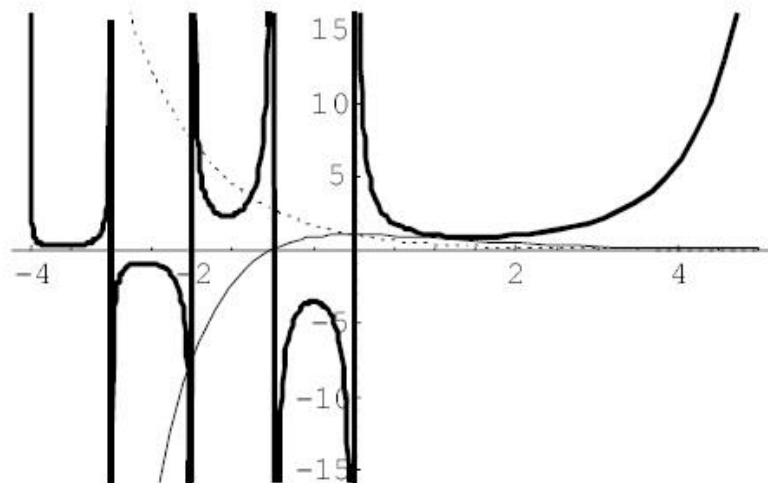


Рис. 6.7. Графіки функцій $\Gamma[1, x]$, $\Gamma[2, x]$, $\Gamma[x]$.

```
ContourPlot[Abs[Gamma[-x+I y]], {x, 1, 2}, {y, -0.5, 0.5}]
```

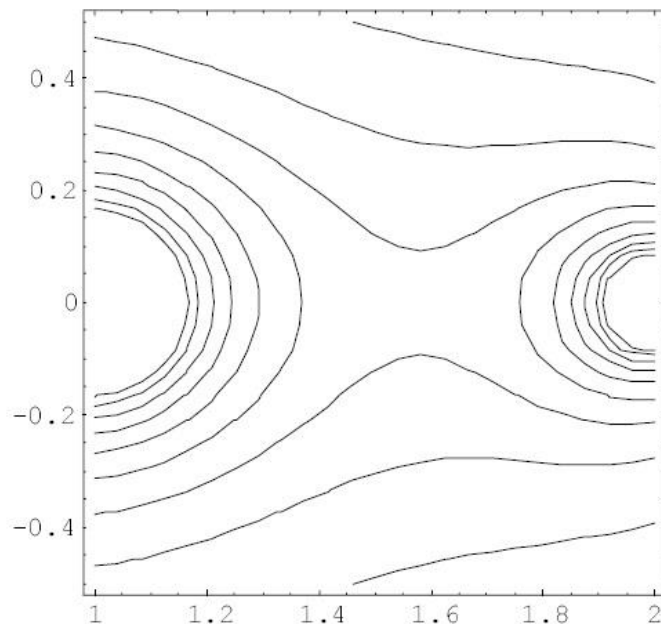


Рис. 6.8. Контурний графік гамма-функції.

Приклад 6.8. Представити гамма-функцію у вигляді графіка на комплексній площині в діапазоні зміни x від 1 до 2, а y від $-0,5$ до $0,5$.

Розв'язок. В даному випадку побудова контурного графіка матиме вигляд (на рис. 6.8.)

```
ContourPlot[Abs[Gamma[-x+I y]], {x, 1, 2}, {y, -0.5, 0.5}]
```

6.2.4. Функції Бесселя

Функції Бесселя — це сімейство функцій, яке є канонічним розв'язком диференціального рівняння Бесселя:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

де α — довільне дійсне число (в загальному випадку комплексне), яке називається *порядком*.

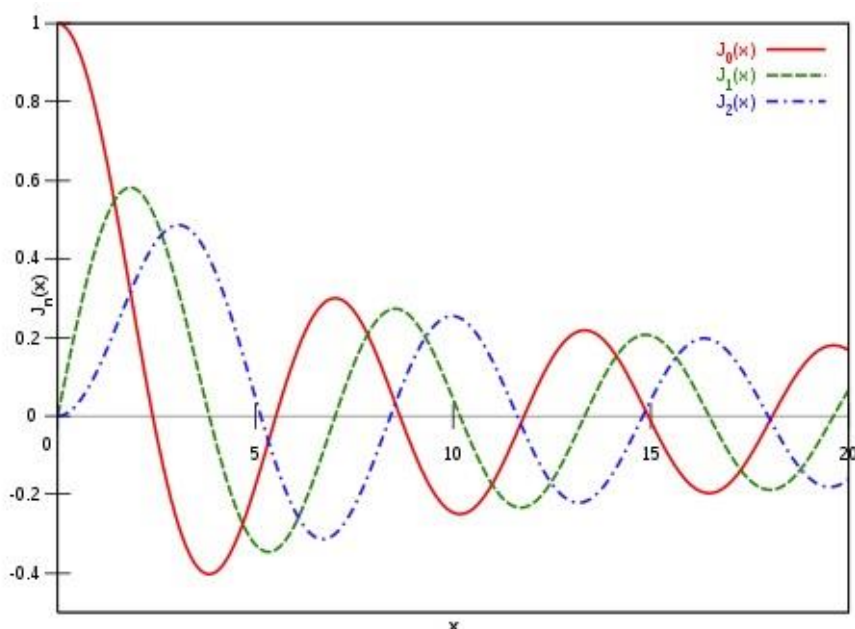


Рис. 6.9. Графіки функцій $J_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$.

Функціями Бесселя першого роду $J_\alpha(x)$ є розв'язки, скінченні в точці $x = 0$ при цілих значеннях α . Дану функцію можна означити за допомогою розкладу в ряд Тейлора в околі нуля (чи в загальному випадку в степеневий ряд при нецілих α):

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Графіки $J_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$ наведено на рис. 6.9.

Якщо α не є цілим числом, функції $J_\alpha(x)$ та $J_{-\alpha}(x)$ лінійно незалежні і, відповідно, є розв'язками рівняння. Але, якщо α ціле, то справедливим є співвідношення

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Це означає, що в цьому випадку функції є лінійно залежними. Тоді другим розв'язком рівняння стане *функція Бесселя другого роду* (функція Неймана).

Функція Неймана — це розв'язки $Y_\alpha(x)$ рівняння Бесселя, нескінченні в точці $x = 0$. Функція Неймана зв'язана з $J_\alpha(x)$ співвідношенням:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi},$$

де у випадку цілого α знаходиться границя по α (наприклад, за допомогою правила Лопіталя). Лінійна комбінація функцій Бесселя першого та другого роду є повним розв'язком рівняння Бесселя:

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x).$$

Графіки $Y_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$ наведено на рис. 6.10.

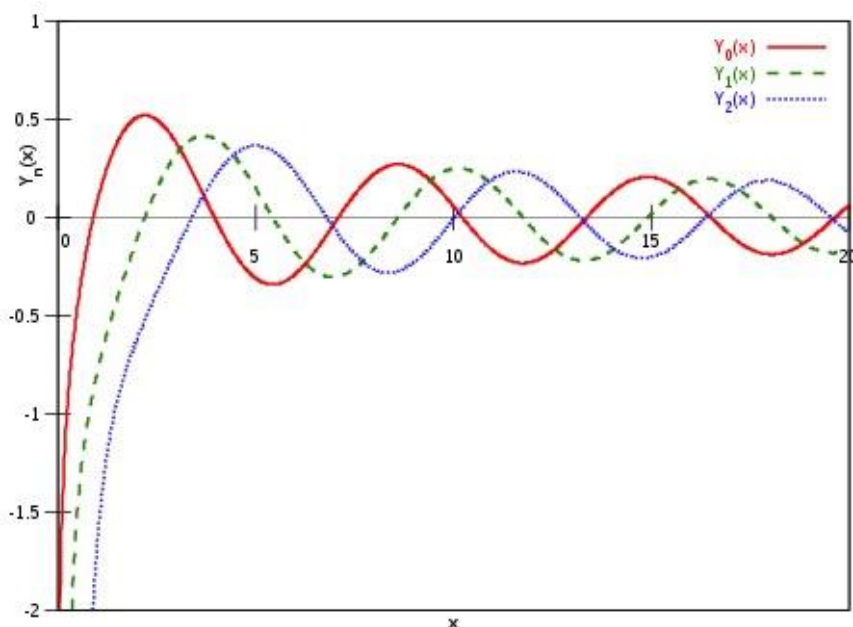


Рис. 6.10. Графіки функцій $Y_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$.

Функції Бесселя можуть бути виражені через гіпергеометричну функцію

$$J_\alpha(x) = \frac{(z/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_0F_1(\alpha + 1; -z^2/4), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким чином, при цілих α функція Бесселя *однозначна аналітична* функція, а при нецілих — *многозначна аналітична*.

Модифіковані функції Бесселя — це функції Бесселя від уявного аргумента.

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica є такі вбудовані функції обчислення функцій Бесселя:

BesselJ[n, z]	— функція Бесселя першого роду;
BesselI[n, z]	— модифікована функцій Бесселя першого роду;
BesselY[n, z]	— функцій Бесселя другого роду;
BesselK[n, z]	— модифікована функцій Бесселя другого роду.

Вбудовані функції обчислюють значення функції Бесселя при заданих n та z . При цьому n є дійсним числом, а z може бути і дійсним і комплексним числом. Технологія обчислення функцій Бесселя очевидна.

Приклад 6.9. Обчислити значення функцій Бесселя першого та другого роду в тому числі модифікованих при $n = 1, 2, \dots, 5$, $z = 1, 2$.

Розв'язок. В даному випадку доцільно не обчислювати п'ять разів функції при різних значення n , а виконати табулювання функції за змінною n . Програма обчислень функцій матиме вигляд:

```
Table[{n, BesselJ[n, 1.2]}, {n, 1, 5}]
Table[{n, BesselI[n, 1.2]}, {n, 1, 5}]
Table[{n, BesselY[n, 1.2]}, {n, 1, 5}]
Table[{n, BesselK[n, 1.2]}, {n, 1, 5}]
```

Для отримання розв'язку в табличній формі скористаємось функцією TableForm[%].

```
Table[{n, BesselJ[n, 1.2]}, {n, 1, 5}]
{{1, 0.498289}, {2, 0.159349}, {3, 0.0328743}, {4, 0.00502267},
{5, 0.000610105}}
TableForm[Out[%]].
1 0.498298
2 0.159349
3 0.0328743
4 0.00502267
5 0.000610105
```

```

Table[{n,BesselI[n,1.2]},{n,1,5}]
{{1,0.714678},{2,0.202596},{3,0.039359},{4,0.00580067},
{5,0.000687895}}

TableForm[%].

1  0.714678
2  0.202596
3  0.039359
4  0.00580067
5  0.000687895

Table[{n,BesselY[n,1.2]},{n,1,5}]
{{1,-0.621136},{2,-1.26331},{3,-3.5899},{4,-16.6862},
{5,-107.651}}

TableForm[%].

1  -0.621136
2  -1.26331
3  -3.5899
4  -16.6862
5  -107.651

Table[{n,BesselK[n,1.2]},{n,1,5}]
{{1,0.434592},{2,1.04283},{3,3.91069},{4,20.5963},
{5,141.219}}

TableForm[%].

1  0.434592
2  1.04283
3  3.91069
4  20.5963
5  141.219

```

Приклад 6.10. Обчислити значення функцій Бесселя при $n = 1, 2, \dots, 5$, $z = 2 + 3i$.

Розв'язок. Повторюючи міркування вправи 6.9, для отримання розв'язку в табличній формі скористаємось функцією TableForm[%].

```

Table[{n,BesselJ[n,2.+3. I]},{n,1,5}]
TableForm[Out[%]].

1  3.78068 - 0.812781 i
2  1.25767 + 2.31877 i
3  -0.866325 + 1.07879 i
4  -0.563654 - 0.123441 i
5  -0.0552951 - 0.190122 i

```

```
Table[{n,BesselI[n,2.+3. I]},{n,1,5}]
```

```
TableForm[%].
```

1	$-1.26098 - 0.780149 i$
2	$-1.22131 + 0.125946 i$
3	$-0.625665 - 0.42719 i$
4	$-0.556997 - 0.348311 i$
5	$0.0859247 - 0.098858 i$

```
Table[{n,BesselY[n,2.+3. I]},{n,1,5}]
```

```
TableForm[%].
```

1	$0.796502 + 3.76489 i$
2	$-2.3443 + 1.27581 i$
3	$-1.06148 - 0.815805 i$
4	$0.234897 - 0.559111 i$
5	$0.318383 - 0.305987 i$

```
Table[{n,BesselK[n,2.+3. I]},{n,1,5}]
```

```
TableForm[%].
```

1	$-0.0865 + 0.0390614 i$
2	$-0.0915555 + 0.0798916 i$
3	$-0.0690958 + 0.172738 i$
4	$0.0838398 + 0.335013 i$
5	$0.652578 + 0.430281 i$

Представимо функції Бесселя першого та другого роду у вигляді графіків при різних значеннях n .

```
Plot[{BesselJ[1,z],BesselJ[3,z],BesselJ[7,z]},{z,0,8}, PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,3}],None,Thickness[0.008]}]
```

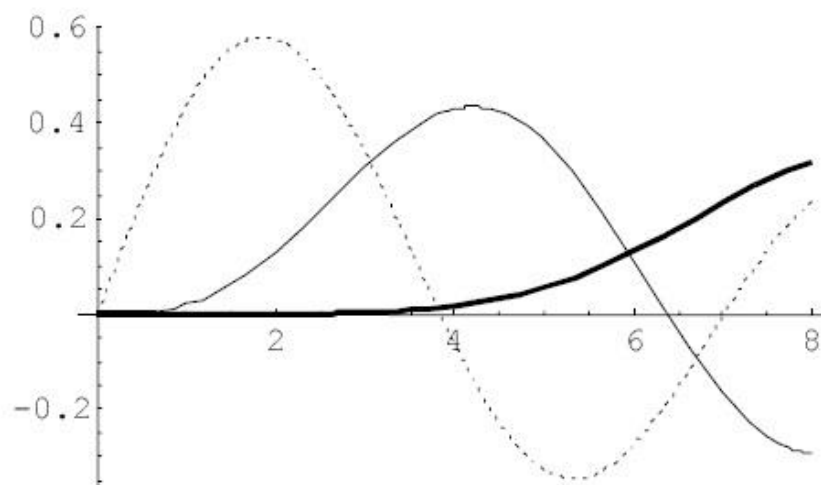


Рис. 6.11. Графіки функцій Бесселя першого роду.

Приклад 6.11. Використовуючи різні стилі кривих представити функцію Бесселя першого та другого роду у вигляді графіка в діапазоні z від 0 до 8 при $n = 1, 3, 7$.

Розв'язок. В даному випадку функція Plot матиме вигляд:

```
Plot[{BesselJ[1, z], BesselJ[3, z], BesselJ[7, z]}, {z, 0, 8},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1, 3}], None, Thickness[0.008]}]
Plot[{BesselI[1, z], BesselI[3, z], BesselI[7, z]}, {z, 0, 8},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1, 3}], None, Thickness[0.008]}]
```

Реалізація функцій продемонстровано на рис. 6.11, 6.12.

```
Plot[{BesselI[1, z], BesselI[3, z], BesselI[7, z]}, {z, 0,
8}, PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1, 3}], None,
Thickness[0.008]}]
```

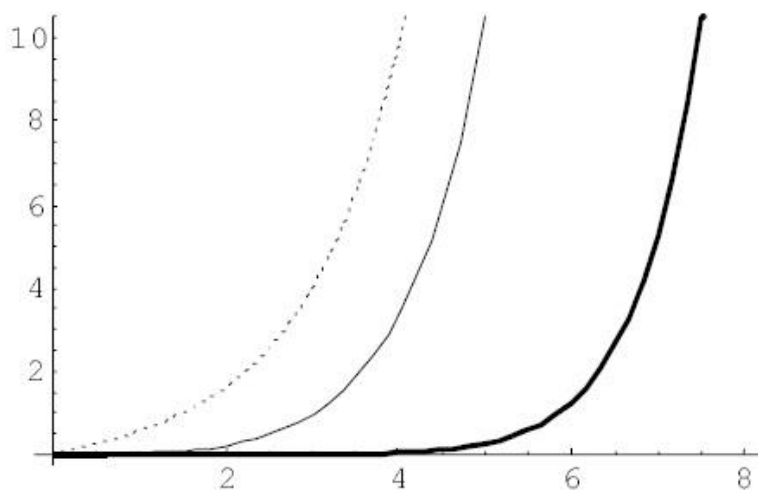


Рис. 6.12. Графіки функцій Бесселя другого роду.

6.2.5. Функції Ейрі

Функції Ейрі є частинним випадком розв'язку диференціального рівняння

$$y'' - xy = 0,$$

яке називають *рівнянням Ейрі*. Це найпростіше диференціальне рівняння, яке має на дійсній осі точку, в якій характер поведінки розв'язку змінюється з коливального на експоненціальний.

Зазвичай термін “функція Ейрі” застосовується до двох спеціальних функцій — функції Ейрі 1-го роду $\text{Ai}(x)$ (яка при $x \rightarrow -\infty$ має коливальну поведінку, а при $x \rightarrow +\infty$ монотонно спадає за експоненціальним законом) та

функції Ейрі 2-го роду $\mathbf{Bi}(x)$ (яка при $x \rightarrow -\infty$ також коливається з поступовим зменшенням амплітуди коливань, а при $x \rightarrow +\infty$ монотонно зростає за експоненціальним законом) (рис. 6.13). Решта частинних розв'язків рівняння Ейрі представляються як лінійна комбінація двох даних функцій.

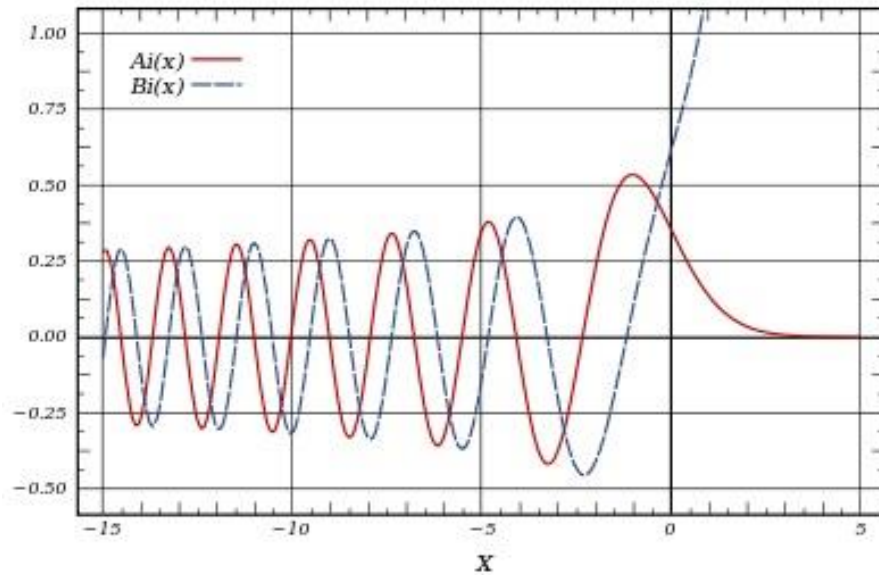


Рис. 6.13. Графіки функцій Ейрі першого та другого роду.

Функція Ейрі є розв'язком рівняння Шредінгера для частинки в трикутній потенціальній ямі.

Для дійсних x функція Ейрі першого роду визначається невласним інтегралом:

$$\mathbf{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Для дійсних x функція Ейрі другого роду визначається інтегралом:

$$\mathbf{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt.$$

Для комплексних z функція Ейрі $\mathbf{Ai}(z)$ означається таким способом:

$$\mathbf{Ai}(z) = \int_{\gamma_1}^{\infty} \exp\left(pz - \frac{p^3}{3}\right) dp,$$

де контур γ_1 представлено на рис. 6.14. Контури γ_2 та γ_3 також дають розв'язок рівняння Ейрі. Незважаючи на наявність трьох контурів інтегрування, лінійно незалежними залишаються два розв'язки рівняння Ейрі, оскільки сума інтегралів по трьох контурах рівна нулю.

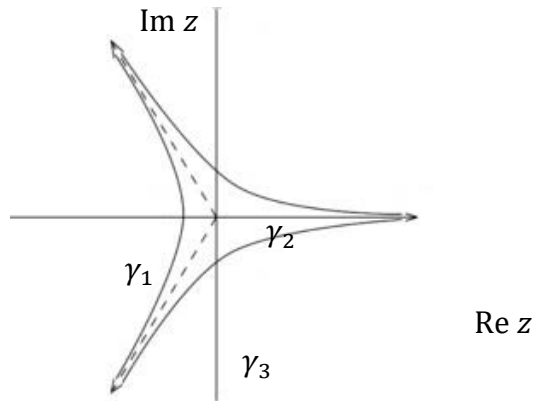


Рис. 6.14. Контуру інтегрування при обчисленні $\text{Ai}(z)$.

Функція $\text{Bi}(z)$ при довільному комплексному z зв'язана з функцією Ейрі першого роду співвідношенням:

$$\text{Bi}(z) = i\omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z) - i\omega \text{Ai}(\omega z), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

В системі Mathematica функції Ейрі повертають такі вбудовані функції:

<code>AiryAi[x]</code>	— обчислює функцію Ейрі першого роду $\text{Ai}(x)$;
<code>AiryBi[x]</code>	— обчислює функцію Ейрі другого роду $\text{Bi}(x)$;
<code>AiryAiPrime[x]</code>	— обчислює похідну функції $\text{Ai}(x)$;
<code>AiryBiPrime[x]</code>	— обчислює похідну функції $\text{Bi}(x)$.

Вони дозволяють обчислювати функції Ейрі та її похідних при дійсних та комплексних значеннях аргумента x .

Приклад 6.12. Обчислити значення функції Ейрі та її похідних при $x = 1, 2, \dots, 5$.

Розв'язок. В даному обчисленні доцільно виконати шляхом табулювання функцій Ейрі та її похідних.

```
Table[{x,AiryAi[x]},{n,1.,5.}]
TableForm[%].
1  0.135292
2  0.0349241
3  0.00659114
4  0.000951564
5  0.000108344
```

```

Table[{x,AiryBi[x]},{n,1,5}]
TableForm[%].
  1  1.20742
  2  3.29809
  3  14.0373
  4  83.8471
  5  657.792
Table[{x,AiryAiPrime[x]},{n,1,5}]
TableForm[%].
  1  -0.159147
  2  -0.0530904
  3  -0.011913
  4  -0.00195864
  5  -0.000247414
Table[{x,AiryBiPrime[x]},{n,1,5}]
TableForm[%].
  1  0.932436
  2  4.10068
  3  22.9222
  4  161.927
  5  1435.82

```

Приклад 6.13. Обчислити значення функції Ейрі при таких значення комплексного аргумента $1 + i$, $1 - 3i$, $3 + 2i$.

Розв'язок. В даному випадку функція Ейрі обчислюється шляхом підстановки комплексних аргументів у вигляді вектора:

```

AiryAi[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
AiryBi[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
AiryAiPrime[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
AiryBiPrime[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]

```

```

AiryAi[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
{0.0604583-0.15189i, -0.483349-0.433065i,
-0.0096772+0.00552469i}
AiryBi[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
{0.0716658+0.619889i, -0.569634+0.498224i,
-7.33735-1.66152i}
AiryAiPrime[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
{-0.130628+0.163068i, 1.13237+0.171739i,
0.0209901-0.00534747i}

```

```
AiryBiPrime[{1.+I,1.-3. I,3.+2. I}]
{0.0756628+0.783701i, -0.00635607-0.959128i,
-11.9181-7.25463i}
```

Приклад 6.14. Використовуючи різні стилі представити функції Ейрі у вигляді графіків в діапазоні x від -8 до 5 .

Розв'язок. Використовуючи функцію `Plot` отримаємо результат представлений на рис. 6.15. та рис. 16.

```
Plot[{AiryAi[x],AiryBi[x]},{x,-8,5},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,5]},Thickness[0.01]}]
```

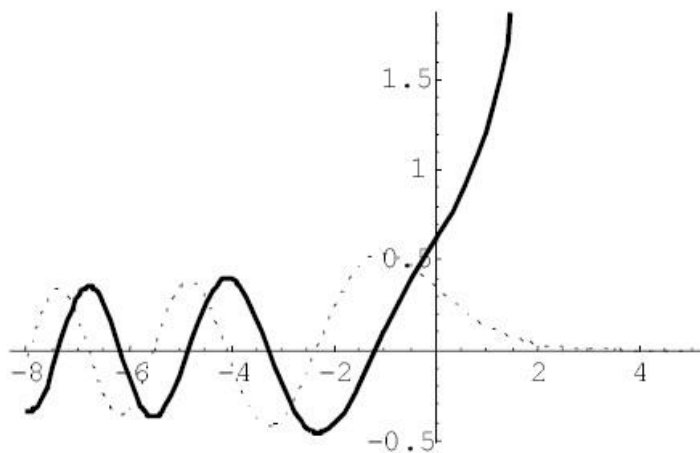


Рис. 6.15. Графік функцій Ейрі.

```
Plot[{AiryAiPrime[x],AiryBiPrime[x]},{x,-8,5},
PlotStyle->{AbsoluteDashing[{1,5]},Thickness[0.01]}]
```

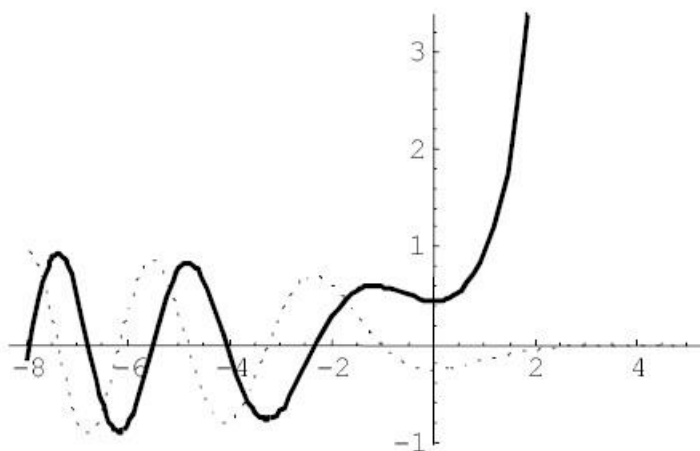


Рис. 6.16. Графік похідних функцій Ейрі.

6.2.6. Бета-функція (ейлерів інтеграл першого роду)

Бета-функцією (В-функцією, бета-функцією Ейлера чи інтегралом Ейлера I роду) називається спеціальна функція від двох змінних вигляду:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Бета-функція симетрична відносно перестановки змінних, тобто

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Бета-функцію можна виразити через гамма-функцію, а саме

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Частинні похідні бета-функції такі:

$$\frac{\partial}{\partial x} B(x, y) = B(x, y) \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right) = B(x, y) (\psi(x) - \psi(x+y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B(x, y) = B(x, y) \left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right) = B(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y)),$$

де $\psi(x)$ та $\psi(y)$ — дігамма-функції.

Подібно до того, як гамма-функція для цілих чисел є узагальненням факторіала, бета-функція є узагальненням біноміальних коефіцієнтів з дещо зміненими параметрами:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1, k+1)}.$$

Бета-функція задовольняє двовимірному різницевому рівнянню:

$$B(x, y) - B(x+1, y) - B(x, y+1) = 0.$$

Неповна бета-функція — це узагальнення бета-функції, яке замінює інтеграл в інтервалі $[0,1]$ на інтеграл із змінною верхньою межею:

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

При $x = 1$ неповна бета-функція співпадає з повною.

Регуляризована неповна бета-функція означається через повну та неповну бета-функції:

$$I_x(a, b) = \frac{B_x(a, b)}{B(a, b)}.$$

$$I_0(a, b) = 0, \quad I_1(a, b) = 1, \quad I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a).$$

Бета функція визначена для дійсних та комплексних аргументів. В системі Mathematica бета-функція і споріднені з нею обчислюються за допомогою таких вбудованих функцій:

Beta[x, y]	— бета-функція;
Beta[z, x, y]	— неповна бета-функція;
Beta[z ₀ , z ₁ , x, y]	— узагальнена неповна бета-функція Beta[z ₁ , x, y] - Beta[z ₀ , x, y];
BetaRegularized[z, x, y]	— регуляризована неповна бета-функція Beta[z, x, y] / Beta[x, y];
BetaRegularized[z ₀ , z ₁ , x, y]	— регуляризована узагальнена бета-функція Beta[z ₁ , x, y] - Beta[z ₀ , x, y].

Технологія обчислення бета-функції та всіх її споріднених функцій абсолютно аналогічна до всіх вище описаних функцій.

Приклад 6.15. Обчислити бета-функції та всі її споріднені функції при таких значеннях змінних:

- для бета-функції $x = \{[1.5, 3], [1, 3], [2 - 3i, 2 + 4i]\}$;
- для всіх споріднених функцій: $x = 2.5, y = 1.25, z = 3, z_0 = 1, z_1 = 2.$

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції, отримаємо:

```
{Beta[1.5, 3.], Beta[1., 3.], Beta[2.-3. I, 2.+4. I]}
{0.152381, 0.333333, 0.00910922+0.000058345 i}
Beta[3., 2.5, 1.25]
4.40672+4.2343 i
Beta[1., 2., 2.5, 1.25]
1.11054+1.11054 i
BetaRegularized[3., 2.5, 1.25]
16.5432+15.5432 i
BetaRegularized[1., 2., 2.5, 1.25]
4.07656+4.07656 i
```

6.2.7. Функції статистичних розподілів та функції помилок

До основних параметрів статистичних розподілів відносяться: середнє значення, дисперсія, медіана, асиметрія даних. Система комп'ютерної алгебри Mathematica оснащена потужним арсеналом вбудованих функцій обчислення параметрів статистичних розподілів. Вони сконцентровані в підпакеті DescriptiveStatistics пакета Statistics. Звернення до цього підпакету має такий вигляд:

```
<<Statistics`DescriptiveStatistics`
```

Основними функціями підпакету DescriptiveStatistics є:

Mean[D]	— обчислює середнє значення даних D;
GeometricMean[D]	— обчислює середнє геометричне значення даних D;
HarmonicMean[D]	— обчислює середнє гармонійне значення даних D;
CentralMean[D, r]	— повертає центральний момент даних D порядку r;
MeanDeviation[D]	— обчислює середнє відхилення даних D;
Median[D]	— обчислює медіану даних D;
MedianDeviation[D]	— обчислює абсолютне відхилення даних D (відхилення від медіани);
StandardDeviation[D]	— обчислює стандартне відхилення даних D;
RootMeanSquare[D]	— обчислює середньоквадратичне значення даних D;
VarianceData[D]	— обчислює середньоквадратичне відхилення даних D;
Srewness[D]	— обчислює коефіцієнт асиметрії даних D;
Quantile[D, q]	— обчислює q-й квантиль даних D.

Означення цих функцій можна отримати, якщо обчислювати їх для випадку символьних змінних.

Вбудовані функції помилок в ядрі системи Mathematica мають вигляд:

Erf[x]	— функція помилок (інтеграл ймовірності);
Erf[x ₀ , x]	— узагальнена функція помилок Erf[x] - Erf[x ₀];
Erfc[x]	— додаткова функція помилок 1 - Erf[x];

Erfi[x]	— уявне значення функції помилок $\text{Erf}[i x]/i$;
InverseErf[x]	— інверсна функція помилок;
InverseErfC[x]	— інверсна додаткова функція помилок.

Приклад 6.16. Нехай дані є символьними змінними, представленими у вигляді вектора $f = \{a, b, c, d, e\}$. Обчислити середнє значення даних, середнє геометричне значення, середнє гармонійне, середньоквадратичне відхилення, стандартне відхилення.

Розв'язок. Застосовуючи відповідні вбудовані функції, отримуємо:

```
<<Statistics` DescriptiveStatistics`
f={a,b,c,d,e}
{a,b,c,d,e}
Mean[f]

$$\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)$$

GeometricMean[f]

$$(a+b+c+d+e)^{\frac{1}{5}}$$

HarmonicMean[f]

$$\frac{5}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}}$$

RootMeanSquare[f]

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}}{\sqrt{5}}$$

StaddardDeviation[f]

$$\frac{1}{2} \left( \left( a - \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \right)^2 + \left( b - \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \right)^2 + \left( c - \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \right)^2 + \left( d - \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \right)^2 + \left( e - \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

```

Приклад 6.17. Обчислити значення функцій помилок $\text{Erf}[x]$, $\text{Erf}[x_0, x]$, $\text{Erfc}[x]$, $\text{InverseErf}[x]$ при значеннях x від 0 до 1 з кроком 0,1. Результат представити у вигляді таблиці.

Розв'язок. Виконуючи табулювання вказаних функцій отримуємо:

```
z1=Erf[x]
z2=Erf[x0,x]
z3=Erfc[x]
z4=InverseErf[x]
Table[{x,z1,z2,z3,z4},{x,0.,1.,0.1}]
TableForm[%]
```

0.	0.	-0.842701	1.	0.
0.1	0.112463	-0.730238	0.887537	0.088856
0.2	0.222703	-0.619998	0.777297	0.179143
0.3	0.328627	-0.514074	0.671373	0.272463
0.4	0.428392	-0.414308	0.571608	0.370807
0.5	0.5205	-0.322201	0.4795	0.476936
0.6	0.603856	-0.238845	0.396144	0.595116
0.7	0.677801	-0.1649	0.322199	0.732869
0.8	0.742101	-0.1006	0.257899	0.906194
0.9	0.796908	-0.0457926	0.203092	1.16309
1.	0.842701	0.	0.157299	∞

Приклад 6.18. Обчислити функції помилок $\text{Erf}[x]$, $\text{Erfc}[x]$, $\text{InverseErf}[x]$ і представити їх у вигляді точкових графіків в діапазоні зміни значень x від 0 до 1 з кроком 0,1. Результат представити на одному графіку.

Розв'язок. Виконуючи вбудовані функції отримуємо рис. 6.17:

```
<<Graphics`MultipleListPlot`
y1=Table[{x,Erf[x]},{x,0.,1.,0.1}]
y2=Table[{x,Erfc[x]},{x,0.,1.,0.1}]
y3=Table[{x,InverseErf[x]},{x,0.,1.,0.1}]
MultipleListPlot[y1,y2,y3]
```

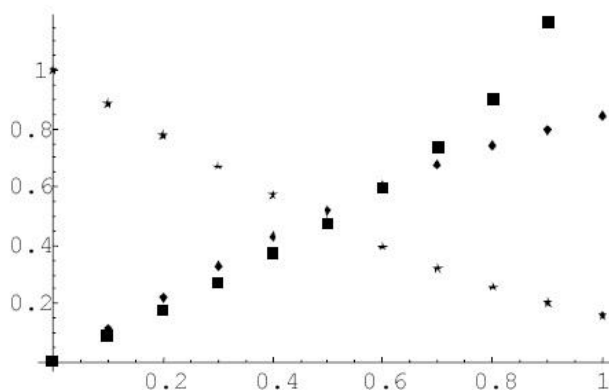


Рис. 6.17. Графічне представлення функції помилок.

6.2.8. Функції генерації випадкових чисел

Генератор випадкових чисел (англ. *Random number generator*) — обчислювальний або фізичний пристрій, спроектований для генерації послідовності номерів чи символів, які не відповідають будь-якому шаблону, тобто є випадковими. Генерація випадкових чисел підпорядковується певному закону розподілу випадкових величин, необхідна при статистичних методах моделювання.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має вбудований генератор випадкових чисел. Звернення до генератора здійснюється за допомогою вбудованих функцій `Random` та `SeedRandom`. Функції мають наступний вигляд та призначення:

<code>Random[]</code>	— генерує псевдовипадкове дійсне число з інтервалу $[0,1]$, розподілене за нормальним законом;
<code>Random[T, x]</code>	— генерує псевдовипадкове число типу <code>T</code> з діапазону <code>x</code> . Типами чисел можуть бути: цілі (<code>Integer</code>), дійсні (<code>Real</code>) та комплексні (<code>Complex</code>). По замовчуванню інтервал генерації $[0,1]$;
<code>Random[T, x_{max}]</code>	— генерує псевдовипадкове дійсне число з діапазону від 0 до <code>x_{max}</code> ;
<code>Random[T, {x_{min}, x_{max}}]</code>	— генерує псевдовипадкове дійсне число з діапазону від <code>x_{min}</code> до <code>x_{max}</code> ;
<code>SeedRandom[n]</code>	— встановлює генератор в початковий стан, приймаючи <code>n</code> за початкове число;
<code>SeedRandom[]</code>	— встановлює генератор в початковий стан, приймаючи за початкове значення поточний час.

За допомогою функції `Random[]` можна генерувати множину нормально розподілених чисел з діапазону $[0,1]$. Для цього необхідно табулювати функцію `Random[]`. При цьому функція `Table` має вигляд

```
Table[{n, Random[]}, {n, 1, xmax}]
```

де `n` — число повторень функції `Random` від 1 до `xmax`.

Приклад 6.19. Отримати 10 випадкових чисел з діапазону $[0,1]$, розподілених згідно нормального розподілу.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функції генерації чисел та функцію `Random[]`, отримуємо:

```
Table[{n, Random[]}, {n, 1, 10}]
TableForm[%]
  1  0.248875
  2  0.946241
  3  0.939069
  4  0.742521
  5  0.48878
  6  0.200137
  7  0.197453
  8  0.831508
  9  0.701402
 10  0.450476
```

Приклад 6.20. Згенерувати 10 випадкових комплексних чисел. Результат представити в формі таблиці.

Розв'язок. Програма генерації випадкових комплексних чисел матиме вигляд

```
Table[{n, Random[Complex]}, {n, 1, 10}]
```

Використовуючи вбудовану функції генерації чисел та функцію `Random[]`, отримуємо:

```
Table[{n, Random[Complex]}, {n, 1, 10}]
TableForm[%]
  1  0.371845 + 0.537291 i
  2  0.383258 + 0.0619815 i
  3  0.353799 + 0.393909 i
  4  0.239523 + 0.278312 i
  5  0.613089 + 0.812574 i
  6  0.462254 + 0.376349 i
  7  0.337558 + 0.711458 i
  8  0.796875 + 0.864902 i
  9  0.67817 + 0.864902 i
 10  0.372894 + 0.794291 i
```

6.2.9. Еліптичні інтеграли і функції

В інтегральному численні *еліптичний інтеграл* з'явився із задачею обчислення довжини дуги еліпса і вперше був досліджений Джуліо Фаніано і Леонардом Ейлером. Еліптичні інтеграли є оберненими функціями до

еліптичних функцій Якобі. З історичної точки зору спочатку були відкриті еліптичні інтеграли.

Еліптичний інтеграл — це деяка функція f над полем дійсних чи комплексних змінних, яка формально може бути представлена у вигляді

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t)) dt,$$

де R — раціональна функція двох аргументів, P — квадратний корінь з многочлену 3-го чи 4-го степеня, що не має кратних коренів, c — деяка константа з поля, де визначена функція. В загальному випадку еліптичний інтеграл не може бути формально виражений в елементарних функціях, за виключенням випадку, коли P має кратні корені чи коли многочлени $R(x, y)$ не містять непартних степенів y . Однак для кожного еліптичного інтеграла існують формули його зведення до суми елементарних функцій і від одного з трьох *нормальних еліптичних інтегралів*, які називають еліптичними інтегралами 1-го, 2-го та 3-го роду.

Еліптичні інтеграли часто представляють у вигляді функцій різних аргументів. Ці різні аргументи повністю еквівалентні (вони дають оді й ті ж інтеграли), але можуть виникати непорозуміння, пов'язана з їх різним походженням. Насамперед означимо аргументи:

α	— модулярний кут;
$k = \sin \alpha$	— модуль еліптичного інтеграла;
$m = k^2 = \sin^2 \alpha$	— параметр.

Слід зазначити, що нормальні еліптичні інтеграли Лежандра, як повні так і неповні, є функціями модуля k (і модулярного кута α) в своїй області визначення $-1 \leq k \leq +1$. Зазначимо також, що вказані величини визначаються одна через другу — визначення однієї з них задає й дві інші.

Еліптичний інтеграл залежить також від іншого параметра, який також можна ввести декількома способами, а саме:

$x = \sin \varphi = \operatorname{sn} u$	— де $\operatorname{sn} u$ — еліптична функція Якобі;
--	---

$\varphi = \arcsin x = \operatorname{am} u$	— амплітуда.
---	--------------

З огляду на те, що визначення одного параметра визначає інші, їх можна використовувати в довільних комбінаціях. Зауважимо, що u залежить також від m . Є низка співвідношень, які зв'язують u з іншими параметрами

$$\cos \varphi = \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} = \operatorname{dn} u = \Delta(\varphi).$$

Власне $\Delta(\varphi)$ називається *дельта амплітуди*.

Нормальний еліптичний інтеграл Лежандра 1-го роду (неповний) визначається

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

або, в формі Якобі

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Нормальний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду (неповний) визначається

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

або, використовуючи підстановку $x = \sin \varphi$

$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} dz.$$

Нормальний еліптичний інтеграл Лежандра 3-го роду (неповний) визначається

$$\Pi(c; \varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + c \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

або

$$\Pi(c; x, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1 + ct^2)(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

У випадку, коли амплітуда нормального еліптичного інтегралу 1-го роду $\varphi = \pi/2$, він називається *повним нормальним еліптичним інтегралом Лежандра 1-го роду*

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K(k),$$

або

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

Повний нормальний еліптичний інтеграл 1-го роду можна записати через гіпергеометричну функцію таким способом

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

Повний нормальний еліптичний інтеграл 1-го роду є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d}{dk} \left(k(1 - k^2) \frac{dK(k)}{dk} \right) = kK(k).$$

Другим розв'язком цього рівняння є функція $K(\sqrt{1 - k^2})$.

У випадку, коли амплітуда нормального еліптичного інтегралу 2-го роду $\varphi = \pi/2$, він називається *повним нормальним еліптичним інтегралом Лежандра 2-го роду*

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(k),$$

або

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Повний нормальний еліптичний інтеграл 1-го роду можна записати через гіпергеометричну функцію таким способом

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

Повний нормальний еліптичний інтеграл 1-го роду є розв'язком диференціального рівняння

$$(k^2 - 1) \frac{d}{dk} \left(k \frac{dE(k)}{dk} \right) = kE(k).$$

Другим розв'язком цього рівняння є функція $E(\sqrt{1-k^2}) - K(\sqrt{1-k^2})$.

У випадку, коли амплітуда нормального еліптичного інтегралу 3-го роду $\varphi = \pi/2$, він називається *повним нормальним еліптичним інтегралом Лежандра 3-го роду*

$$\Pi\left(c; \frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + c \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \Pi(c, k),$$

або

$$\Pi(c, k) = \Pi(c; x, k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 + cx^2)(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

Основною тета-функцією Якобі називається функція двох комплексних змінних вигляду

$$\vartheta(z, \tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}.$$

Даний ряд є збіжним на множині $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$, де $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ є верхньою комплексною на півплощиною. Для всіх $\tau \in \mathbb{H}$ функція $\vartheta(\cdot, \tau)$ є цілою функцією, для всіх $z \in \mathbb{C}$ функція $\vartheta(\cdot, \tau)$ є голоморфною на множині $\mathbb{H}$.

Через основну тета-функцію Якобі можна ввести ще три тета-функції:

$$\vartheta_0(z, \tau) := \vartheta_{0,1}(z, \tau) := \vartheta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z},$$

$$\vartheta_2(z, \tau) := \vartheta_{1,0}(z, \tau) := e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i z} \cdot \vartheta\left(z + \frac{\tau}{2}, \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) z},$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z, \tau) := \vartheta_{1,1}(z, \tau) &:= e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)} \cdot \vartheta\left(z + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) = \\ &= i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) z}. \end{aligned}$$

В цих позначення $\vartheta(z, \tau) := \vartheta_3(z, \tau) = \vartheta_{0,0}(z, \tau)$. Для значення $z = 0$ отримаємо функції визначені на верхній комплексній на півплощині, які також називаються *тета-константами*.

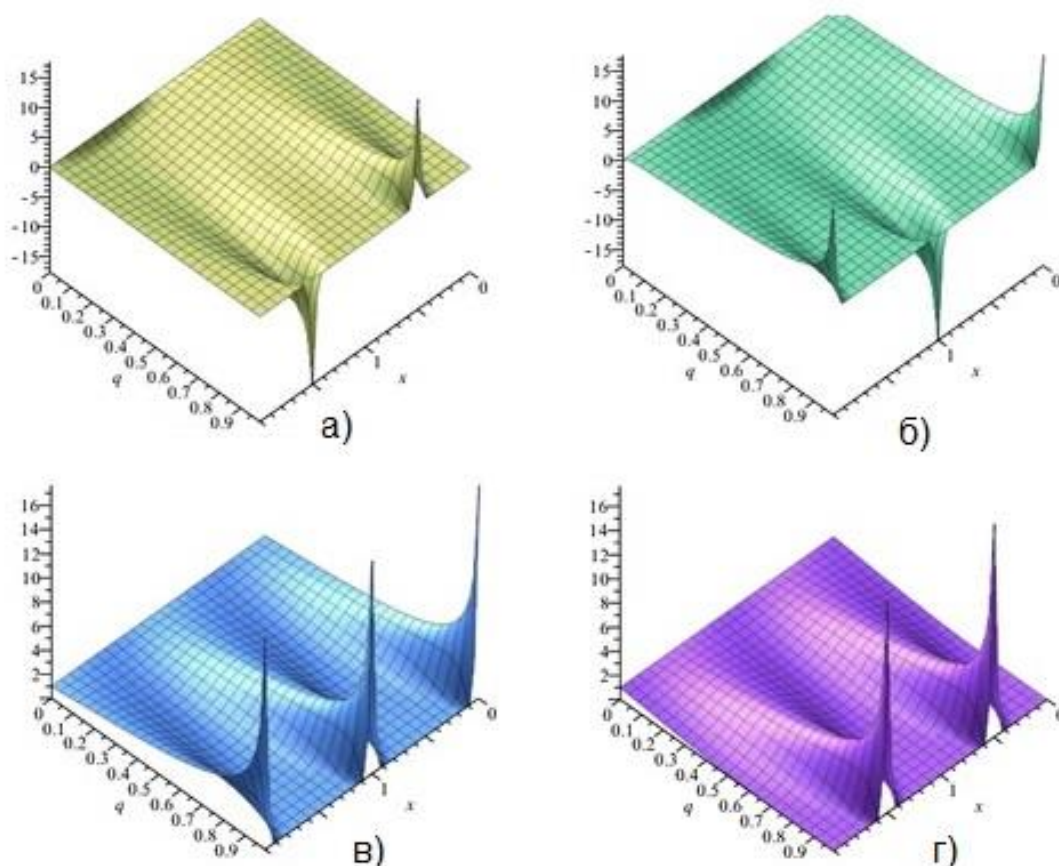


Рис. 6.18. Графік тета-функцій: а) 1 Якобі, б) 2 Якобі, в) 3 Якобі г) 4 Якобі.

Тета-функції Невілла (Neville) визначаються таким чином

$$\begin{aligned}\vartheta_c(z, m) &= \frac{\sqrt{2\pi} q(m)^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}\sqrt{K(m)}} \sum_{k=0}^{\infty} (q(m))^{k(k+1)} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi z}{2K(m)}\right), \\ \vartheta_d(z, m) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{K(m)}} \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (q(m))^{k^2} \cos\left(\frac{\pi z k}{K(m)}\right)\right), \\ \vartheta_n(z, m) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2(1-m)^{\frac{1}{4}}\sqrt{K(m)}} \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (q(m))^{k^2} \cos\left(\frac{\pi z k}{K(m)}\right)\right), \\ \vartheta_s(z, m) &= \frac{\sqrt{2\pi} (m)^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}(1-m)^{\frac{1}{4}}\sqrt{K(m)}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (q(m))^{k(k+1)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi z}{2K(m)}\right),\end{aligned}$$

де $K(m)$ повний еліптичний інтеграл першого роду.

Співвідношення

$$\vartheta\left(0; -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \vartheta(0; \tau)$$

Використовував Ріман для доведення функціонального рівня для *дзета-функції Рімана* $\zeta(s)$ за допомогою *перетворення Мелліна*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\vartheta(0; it) - 1) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$$

і можна показати, що перетворення інваріантне відносно заміни s на $s - 1$.

Тета-функції Якобі використовував для побудови (в спрощеному вигляді) його еліптичних функцій як частинні вищенаведені тета-функції і міг їх використовувати для побудови *еліптичних функцій Вейєрштрасса* $\wp(z; \tau)$, оскільки

$$\wp(z; \tau) = -(\ln \vartheta_{11}(z; \tau))'' + c,$$

де друга похідна береться по z , а константа c визначена так, що ряд Лорана функції $\wp(z)$ в точці $z = 0$ має нульовий доданок нульового степеня (або нульовий сталий доданок).

Еліптичні функції Вейєрштрасса $\wp(z)$ — це клас функцій, залежних від еліптичної кривої $E = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, де Γ — решітка в $\mathbb{C}$. Власне *$\wp$ -функцією*

Вейєрштрасса на цій еліптичній кривій називається мероморфна функція, задана як сума ряду

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Визначена таким способом функція буде Γ – періодичною на $\mathbb{C}$, а відтак є мероморфною функцією на E .

Інтеграли Френеля $S(x)$ та $C(x)$ — це спеціальні функції, які використовуються в оптиці при розрахунку дифракції Френеля і визначаються таким способом

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Параметричний графік $S(x)$ та $C(x)$ дає криву на площині, яку називають *спіраллю Корню*, або *клотоїдою*. Кривизна цієї кривої у будь-якій точці пропорційна довжині дуги, що розміщується між цією точкою та початком координат. Завдяки цій властивості вона використовується в будівництві доріг, оскільки кутове прискорення автомобіля, що рухається по цій кривій з постійною швидкістю, залишатиметься сталим (рис. 6.19).

$$C'(t)^2 + S'(t)^2 = \sin^2(t^2) + \cos^2(t^2) = 1.$$

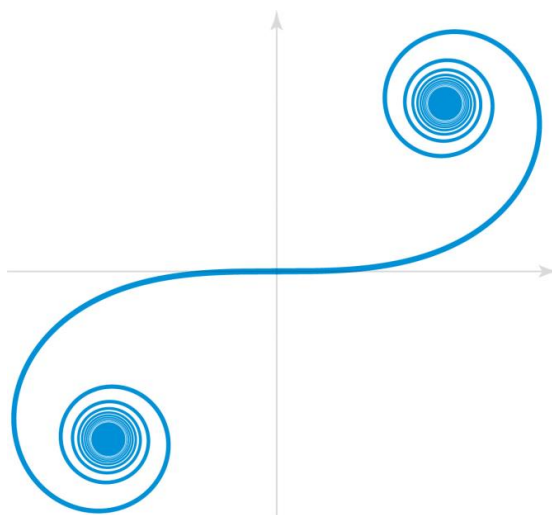


Рис. 6.19. Спіраль Корню $(x, y) = (C(t), S(t))$. Спіраль прямує до центрів отворів при $t \rightarrow \infty$

Система комп'ютерної алгебри Mathematica володіє значним арсеналом вбудованих функцій обчислення еліптичних інтегралів та інтегральних функцій. Наведемо основні з них:

EllipticE[m]	— повний еліптичний інтеграл $E(m)$;
EllipticK[m]	— повний еліптичний інтеграл 1-го роду $K(m)$;
EllipticE[Pi,m]	— повний еліптичний інтеграл 2-го роду;
EllipticPi[n,Pi,m]	— еліптичний інтеграл 3-го роду;
EllipticF[Pi,m]	— еліптичний інтеграл 1-го роду;
EllipticPi[n,m]	— повний еліптичний інтеграл;
EllipticTheta[i,z,q]	— еліптична тета-функція при $i = 1,2,3,4$;
EllipticThetaC[n,m]	— еліптична функція Невілла $G_C(n,m)$;
EllipticThetaD[n,m]	— еліптична функція Невілла $G_D(n,m)$;
EllipticThetaN[n,m]	— еліптична функція Невілла $G_N(n,m)$;
FresnelC(x)	— інтеграл Френеля $C(x)$;
FresnelS(x)	— інтеграл Френеля $S(x)$;
JacobiZeta[Pi,m]	— дзета функція Якобі;
WeierstrassP[u,q1,q2]	— еліптична функція Вейерштрасса.

Технологія обчислення еліптичних інтегралів і інтегральних функцій така ж як для обчислення звичайних функцій.

Приклад 6.21. Обчислити всі еліптичні інтеграли першого, другого та третього роду при $m = 0,2$.

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції, отримуємо:

```
EllipticE[0.2]
1.48904
EllipticK[0.2]
1.65962
EllipticE[Pi,0.2]
2.97807
EllipticPi[5,Pi,0.2]
-0.0703735-1.60319 i
EllipticF[Pi,0.2]
3.31925
EllipticPi[3,0.2]
-0.0599029-1.14971 i
```

Приклад 6.22. Обчислити:

- еліптичну тета-функцію при $i = 1, 2, 3, 4$, $z = 2$, $q = 0.2$;
- інтеграл Френеля $C(x)$ та $S(x)$ при $x = 1, 2, 3, \dots, 7$;
- еліптична функція Вейєрштрасса при $m = 1, 2, 3, \dots, 7$, $q_1 = 3$, $q_2 = 0.2$.

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції, отримуємо:

```
Table[{i, EllipticTheta[I, 2, 0.2]}, {n, 1, 4}]
TableForm[%]
1 1.23107
2 -0.505292
3 0.738078
4 1.26099
Table[{x, FresnelC[x]}, {x, 1., 7.}]
TableForm[Out[145]]
1. 0.779893
2. 0.488253
3. 0.605721
4. 0.498426
5. 0.563631
6. 0.499531
7. 0.545467
Table[{x, FresnelS[x]}, {x, 1., 7.}]
Table[{}]
TableForm[Out[150]]
1. 0.438259
2. 0.343416
3. 0.496313
4. 0.420516
5. 0.499191
6. 0.446961
7. 0.499705
Table[{m, WeiersrrassP[m, 3., 0.2]}, {m, 1, 7}]
TableForm[%]
1 1.16513
2 1.86509
3 16.0294
4 0.924128
5 4.03313
6 4.04301
7 0.923861
```

6.3. Інтегральні перетворення

Інтегральні перетворення знаходять широке застосування при розв'язуванні диференціальних рівнянь, обчисленні граничних значень функції $f(x)$, дослідженні динаміки систем керування, систем масового обслуговування і при дослідженні великої кількості інших прикладних проблем. Найбільш популярними є перетворення Лапласа, Фур'є та Z-перетворення [27].

6.3.1. Перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа — інтегральне перетворення, що пов'язує функцію $F(s)$ комплексної змінної (зображення) з функцією $f(x)$ дійсної змінної (оригінал). За його допомогою досліджують властивості динамічних систем і розв'язують диференціальні та інтегральні рівняння. Однією з особливостей перетворення Лапласа, які обумовили його широке поширення в наукових та інженерних розрахунках, є те, що багатьом співвідношення і операціям над оригіналом відповідають простіші співвідношення між їхніми зображеннями. Зокрема, згортка двох функцій зводиться в просторі зображень до операції множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними.

Перетворення Лапласа функції дійсної змінної $f(x)$, називається функція $F(s)$ комплексної змінної $s = \sigma + i\omega$ така, що

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Права частина цього виразу називається *інтегралом Лапласа*.

Оберненим перетворення Лапласа функції комплексної змінної $F(s)$, називається функція $f(x)$ дійсної змінної така, що

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{-sx} F(s) ds,$$

де σ_1 — деяке дійсне число. Права частина цього виразу називається *інтегралом Бромвіча*.

Наприклад, отримаємо перетворення Лапласа для деяких простих функцій

$$f(t) = a, \quad f(t) = e^{-at}, \quad f(t) = \sin(\omega t)$$

За означенням перетворення Лапласа отримуємо

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = \frac{a}{s},$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s + a},$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Перетворення Лапласа інтеграла має вигляд

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{1}{s} f(s).$$

За допомогою перетворення Лапласа можна суттєво спростити розв'язання низки задач, пов'язаних із знаходженням границь функцій. Для цього використовуються граничні теореми

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s),$$

Розрізняють два класи дискретних перетворень — D -перетворення та Z -перетворення.

Нехай $x_d = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$ — дискретна функція, тобто значення цієї функції визначені тільки в дискретні моменти часу nT , де n — ціле число, а T — період дискретизації. Тоді, застосовуючи перетворення Лапласа, одержуємо

$$\mathcal{D}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-snT}.$$

Якщо використати заміну змінних $z = e^{sT}$, одержимо Z-перетворення

$$\mathcal{Z}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n}.$$

Перетворення Лапласа дозволяє відносно просто отримувати розв'язки задач. Однак вони будуть не в тій області незалежних змінних, яка потрібна користувачеві. Зазначимо, що для отримання розв'язку в потрібній області, наприклад часовій, необхідно, використовуючи обернене перетворення Лапласа, знайти оригінал отриманої функції.

Існують таблиці перетворень Лапласа та обернених перетворень, однак з огляду на розвиненість засобів символічної математики звертатися до них не потрібно. Система комп'ютерної алгебри Mathematica виконає необхідні обчислення. Перетворення Лапласа широко застосовується при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Інтегральні перетворення Лапласа в системі Mathematica реалізується за допомогою таких вбудованих функцій:

<code>LaplaceTransform[f, t, s]</code>	— повертає пряме перетворення Лапласа функції $f(t)$ у вигляді нової функції $f(s)$;
<code>InverseLaplaceTransform[f, t, s]</code>	— повертає перетворення функції $f(s)$ в функцію $f(t)$ (обернене перетворення Лапласа);
<code>LaplaceTransform[f(t₁, t₂, ...), (t₁, t₂, ...), (s₁, s₂, ...)]</code>	— повертає пряме перетворення Лапласа функції $f(t_1, t_2, \dots)$ у вигляді нової функції $f(s_1, s_2, \dots)$;
<code>InverseLaplaceTransform[f(t₁, t₂, ...), (t₁, t₂, ...), (s₁, s₂, ...)]</code>	— повертає обернене перетворення Лапласа функції $f(s_1, s_2, \dots)$ у функцію $f(t_1, t_2, \dots)$.

Змінні s та t можуть позначатися будь-якими іншими символами. Технологія реалізації перетворення Лапласа очевидна. Слід лише пам'ятати, що функції

перетворення Лапласа знаходяться в підпакеті LaplaceTransform пакета Calculus.

Приклад 6.23. Записати перетворення Лапласа функції

$$y_1 = ab^t, \quad y_2 = \sin ax + \cos ax,$$

$$y_3 = \frac{2t+1}{(t-1)(t+1)(2t+3)(2t-3)(t+5)}, \quad y_4 = \left[t \ln t + 1, \frac{1}{t^2}, te^t \right].$$

Перетворення Лапласа функції y_4 представити у вигляді вектора.

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції підпакета LaplaceTransform, отримуємо:

```
LaplaceTransform[a b^t, t, s]
      a
      s - Log[b]
LaplaceTransform[Sin[a t]+Cos[a t], t, s]
      s      sqrt(a^2)Sign[a]
      a^2 + s^2 + a^2 + s^2
LaplaceTransform[Sin[4 t]+Cos[4 t], t, s]
      4      s
      16 + s^2 + 16 + s^2
LaplaceTransform[a b^t, t, s]
      8      e^(-3s/2)Gamma[0, -3s/2] - 1/20 e^(-s)Gamma[0, -s] - 1/40 e^sGamma[0, s]
      + 4/105 e^(3s/2)Gamma[0, 3s/2] - 3/728 e^(5s)Gamma[0, 5s]
LaplaceTransform[{t Log[t]+1, 1/t^2, t Exp[t]}, t, s]
      {1/s - (-1 + EulerGamma + Log[s])/s^2, s(-1 + EulerGamma + Log[s]), 1/(-1 + s)^2}
N[%]
      {1/s - 1.(-0.42278433509846713 + Log[s])/s^2,
      s(-0.42278433509846713 + Log[s]), 1/(1. + s)^2}
```

Таким чином бачимо, що система успішно розв'язала перше та друге завдання. При цьому в другому завданні вона видала умову, за якої завдання може бути розв'язаним. Функція `Sign[a]` повертає $-1, 0$ або 1 , якщо аргумент a , відповідно, від'ємний, рівний нулю чи додатний. Рядком нижче показане перетворення Лапласа при $a=4$.

Також отримали перетворення функції y_4 . Для отриманої відповіді у вигляді дійсних чисел довелось застосовувати функцію $N[\%]$. Нагадаємо, що константа `EulerGamma` — це стала Ейлера, рівна 0,577216

Приклад 6.24. *Отримати обернене перетворення Лапласа функції з прикладу 6.23. Пересвідчитись, що перетворення виконане вірно і відповідає оригіналам.*

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції системи, отримуємо:

```
InverseLaplaceTransform[a/(s-Log[b]),s,t]
ab^t
InverseLaplaceTransform[(4+s)/(16+s^2),s,t]
Cos[4 t] + Sin[4 t]
V=1/s-(-1+EulerGamma+Log[s])/s^2
InverseLaplaceTransform[V,s,t]
1/s - (-1 + EulerGamma + Log[s]) / s^2
1 + t Log[t]
InverseLaplaceTransform[s (-1+EulerGamma+Log[s]),s,t]
Integrate[-DiracDelta'[-s,t]/s,{s,0,t},Assumption->True]-
DiracDelta'[t] + EulerGammaDiracDelta'[t]
InverseLaplaceTransform[1/(-1+s)^2,s,t]
e^t
```

Як бачимо в одному з випадків обернене перетворення Лапласа в явному вигляді не отримано.

Приклад 6.25. *Отримати перетворення Лапласа функцій:*

- $f(t, x) = t \sin x$ з новими змінними s_1, s_2 ;
- $f(t, x, z)$ з новими змінними s_1, s_2, s_3 .

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції системи, отримуємо:

```
LaplaceTransform[t Sin[x],{t,x},{s1,s2}]
1 / (s1^2 (1 + s2^2))
LaplaceTransform[t^2 Cos[x]+x Log[z],{t,x,z},{s1,s2,s3}]
2 s2 / (s1^3 (1 + s2^2) s3) - (EulerGamma + Log[s3]) / (s1 s2^2 s3)
N[%]
2. s2 / (s1^3 (1 + s2^2) s3) - 1. (0.577216 + Log[s3]) / (s1 s2^2 s3)
```

<code>ZTransform[f, n, z]</code>	— повертає Z-перетворення виразу $f(n)$, яке представляє функцію $f(z)$;
<code>InverseZTransform[f, z, n]</code>	— обернене Z-перетворення функції $f(z)$.

Технологія Z-перетворення очевидна і не відрізняється від технологій перетворення Лапласа.

Приклад 6.25. Отримати Z-перетворення функцій:

$$te^t, \quad 3, \quad an, \quad e^{-an}, \quad \sinh an, \quad \sin \omega n$$

Перевірити достовірність результатів шляхом застосування оберненого Z-перетворення та порівняти результати з вихідними функціями.

Розв'язок. Використовуючи функції `ZTransform`, отримуємо:

```
ZTransform[t Exp[t], t, z]

$$\frac{e z}{(e - z)^2}$$

InverseZTransform[%, z, t]

$$e^t t$$

ZTransform[{3, a, n, Exp[-a n], Sing[a n], Sin[w n]}, n, t]

$$\left\{ \frac{3t}{-1+t}, \frac{at}{(-1+t)^2}, \frac{e^{at}}{-1+e^{at}}, \frac{1}{2}t \left( \frac{1}{-e^a+t} + \frac{e^a}{1-e^{at}} \right), \frac{i(-1+e^{2iw})t}{2(t+e^{2iw}t-e^{iw}(1+t^2))} \right\}$$

InverseZTransform[%, z, t]

$$\left\{ 3, a n, e^{a-a(1+n)}, \frac{1}{2}(-e^{-an}+e^{an}), \frac{1}{2}i(e^{-inw}-e^{inw}) \right\}$$

FullSimplify[%]
{3, a n, e^{-an}, Sing[a n], Sin[n w]}
```

Приклад ілюструє, що Z-перетворення функцій отримані вірно. Однак деякі функції оберненого Z-перетворення не збігаються з вихідними. Довелось використовувати спрощення `FullSimplify`, після реалізації якого отримали повний збіг.

6.3.3. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є — інтегральне перетворення однієї комплекснозначної функції дійсної змінної на іншу. Тісно пов'язане з перетворенням Лапласа та аналогічне розкладу у ряд Фур'є для неперіодичних функцій. Це перетворення розкладає дану функцію на

осциляторні функції. Використовується для того, щоб розрахувати спектр частот для сигналів змінних у часі (таких як мова або електрична напруга).

Перетворення Фур'є бере початок із вивчення Рядів Фур'є. При вивченні рядів Фур'є, складні але періодичні функції записуються у формі суми простих хвиль, що математично задаються функціями синусів і косинусів. Перетворення Фур'є є продовженням рядів Фур'є для випадку коли період представленої функції подовжений і може наближатися до нескінченності.

Нехай функція $f(x)$ на будь-якому скінченному відрізку осі Ox задовольняє умови теореми Діріхле та є абсолютно інтегрованою на всій осі. Тоді таку функцію називають можна зобразити *інтегралом Фур'є*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega.$$

Функцію

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$\omega \in (-\infty; +\infty)$, називають *перетворенням (прямим перетворенням) Фур'є функції $f(x)$* . Зауважимо, що інтеграл розуміється в сенсі головного значення. Відтак інтегральна формула Фур'є запишеться у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

При цьому функцію $f(x)$, яка визначається останнім співвідношенням, називають *оберненим (зворотнім) перетворенням Фур'є*.

Якщо $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$, тоді пряме перетворення Фур'є набуває вигляду

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in (0; +\infty),$$

при цьому функцію $F(\omega)$ називають *одностороннім перетворенням Фур'є*.

Для парної функції ($f(-x) = f(x)$) із синус – інтеграла Фур'є одержуємо *косинус-перетворення* Фур'є

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

та обернене *косинус-перетворення* Фур'є

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega.$$

Для непарної функції ($f(-x) = -f(x)$) із синус – інтеграла Фур'є одержуємо *синус-перетворення* Фур'є

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

та обернене *синус-перетворення* Фур'є

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega.$$

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має великий інструментарій спектрального аналізу та синтезу сигналів. Вбудовані функції дозволяють здійснювати

- спектральний аналіз сигналів;
- гармонічний аналіз сигналів;
- фільтрацію сигналів.

Ці функції мають сенс розглядати в тому випадку, якщо читач володіє основами спектрального аналізу. Оскільки його основи тут не викладаються, то ми розглянемо лише функції, яке здійснюють *пряме* та *обернене* перетворення Фур'є.

FourierTransform[F(t), t, w]	— повертає результат прямого перетворення Фур'є функції F(t) представленої через параметр w;
InverseFourierTransform[F(w), w, t]	— повертає результат оберненого перетворення Фур'є виразу F(w), представленого через параметр t;

<code>FourierSinTransform[F(t), t, w]</code>	— повертає результат синус-перетворення Фур'є функції $F(t)$ представленої через параметр w ;
<code>FourierCosTransform[F(t), t, w]</code>	— повертає результат косинус-перетворення Фур'є функції $F(t)$ представленої через параметр w ;
<code>FourierTransform[F, {t1, t2, ...}, {w1, w2, ...}]</code>	— повертає результат прямого перетворення Фур'є функції $F(t_1, t_2, \dots)$ представленої через параметр $w_1, w_2, \dots$;
<code>InverseFourierTransform[F, {w1, w2, ...}, {t1, t2, ...}]</code>	— повертає результат оберненого перетворення Фур'є виразу $F(w_1, w_2, \dots)$, представленого через параметр $t_1, t_2, \dots$.

Приклад 6.26. Отримати пряме та перетворення Фур'є функцій:

$$F(t) = te^{at}, \quad F(t) = t^2 \cos bt, \quad F(t) = t^2 \sin at, \quad F(t_1, t_2) = \cos(t_1, t_2).$$

Слід використати всі функції Фур'є та перевірити правильність результатів.

Розв'язок. Використовуючи функції `FourierTransform`, отримуємо:

```
FourierTransform[t Exp[a t], t, w]
```

$$-i\sqrt{2\pi} \operatorname{DiracDelta}[-ia + w]$$

```
InverseFourierTransform[%, w, t]
```

$$e^{at} t$$

```
FourierSinTransform[{t^2 Cos[b t]}, t, w]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(b-w)^3} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-b+w)^3} - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(b+w)^3}$$

```
FourierCosTransform[{t^2 Sin[a t]}, t, w]
```

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-w)^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a+w)^3} - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(a+w)^3}$$

```
FourierTransform[Cos[t1*t2], {t1, t2}, {w1, w2}]
```

$$\frac{1}{2}(e^{-i w_1 w_2} + e^{i w_1 w_2})$$

```
InverseTransform[%, {w1, w2}, {t1, t2}]
```

$$\frac{1}{2}(e^{-i t_1 t_2} + e^{i t_1 t_2})$$

```
FullSimplify[%]
```

$$\cos[t_1 t_2]$$

Відтак бачимо, що перетворення Фур'є виконані вірно, оскільки обернені перетворення Фур'є збігаються з вихідними функціями. В останньому прикладі для доведення достовірності розв'язку застосована функція спрощення `FullSimplify`.

Питання, тести для самоконтролю

1. Які елементарні функції вбудовано в систему Mathematica?
2. Яка технологія безпосереднього обчислення функцій в системі Mathematica?
3. Наведіть приклади обчислень функцій шляхом присвоювання аргумента числового значення.
4. Які поліноми є вбудованими функціями системи Mathematica?
5. Опишіть технологію обчислення поліномів в системі Mathematica.
6. Дайте означення гамма-функції. Охарактеризуйте її властивості.
7. Які вбудовані функції системи Mathematica призначені для обчислень гамма-функції?
8. Дайте означення функції Бесселя першого роду.
9. Дайте означення функції Бесселя другого роду.
10. Які вбудовані функції системи Mathematica призначені для обчислень функцій Бесселя?
11. Дайте означення функції Ейрі першого роду.
12. Дайте означення функції Ейрі другого роду.
13. Які вбудовані функції системи Mathematica призначені для обчислень функцій Ейрі та їх похідних?
14. Охарактеризуйте функції статистичних розподілів системи Mathematica.
15. Охарактеризуйте вбудовані функції помилок системи Mathematica.
16. Охарактеризуйте функції генерації випадкових чисел системи Mathematica.

17. Дати означення повного еліптичного інтегралу.
18. Дати означення повного еліптичного інтегралу 1–го роду.
19. Дати означення повного еліптичного інтегралу 2–го роду.
20. Дати означення повного еліптичного інтегралу 3–го роду.
21. Дати означення еліптичної тета-функції.
22. Дати означення еліптичних функцій Невілла.
23. Дати означення інтегралам Френеля.
24. Дати означення дзета-функції Якобі.
25. Дати означення еліптичної функції Вейєрштрасса.
26. Які вбудовані функції системи Mathematica призначені для обчислень еліптичних інтегралів та функцій?
27. Охарактеризуйте вбудовані функції системи Mathematica призначені для реалізації прямих та обернених перетворень Лапласа.
28. Які вбудовані функції системи Mathematica призначені для реалізації Z –перетворень?
29. Дати означення прямого та оберненого перетворень Фур'є.
30. Дати означення синус-перетворення Фур'є.
31. Дати означення косинус-перетворення Фур'є.
32. Охарактеризуйте вбудовані функції системи Mathematica призначені для реалізації прямих та обернених перетворень Фур'є.

Обов'язкові та додаткові задачі

Використовуючи вбудовані функції системи Mathematica розв'яжіть задачі за темою розділу.

1. Обчислити значення поліномів четвертого степеню Лежандра, Ерміта та Якобі при $x = 1.4$, $a = 1.5$, $b = 2.5$.

2. Отримати вирази поліномів Чебишева першого роду, узагальненого поліному Лагерра і полінома Гегенбауера (для $m = 2$). Поліноми отримати при значеннях $n = 1, 2, \dots, 7$.

3. Представити в вигляді графіків різних стилів поліноми Чебишева, Лагерра і Лежандра в діапазоні зміни аргумента від $x = -2$ до $x = 3$ при значеннях $n = 1, 3, 5, 7$.

4. Обчислити всі інтегральні функції в діапазоні зміни аргумента від $x = 1$ до $x = 5$ з кроком рівним 0.5. Розв'язки отримати в табличній формі.

5. Використовуючи різні стилі, представити всі інтегральні показникові функції у вигляді графіків. Діапазоні зміни аргумента від $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = 5$ для геометричних і гіперболічних функцій та від $x_{\min} = 0$ до $x_{\max} = 2,5$ для решти функцій.

6. Обчислити:

- гамма-функцію дійсних чисел $1/2, -1/2, 2, 5, 15$;
- гамма-функцію комплексних чисел $i, 1+2i$;
- логарифм гамма-функції комплексного числа $1+2i$;
- дігамма-функцію комплексного числа $1+2i$;
- другу похідну дігамма-функції комплексного числа $1+2i$;
- регулярну неповну гамма-функцію комплексного числа $1+2i$ при $a=2$;
- узагальнену неповну гамма-функцію чисел $z_0=1+2i, z_1=2+i$ при $a=1$.

7. Використовуючи графічні стилі представити у вигляді графіків функції: $\text{Gamma}[3, x], \text{Gamma}[4, x], \text{Gamma}[2, x]$.

8. Представити гамма-функцію у вигляді графіка на комплексній площині в діапазоні зміни x від 0.5 до 2.5, а y від $-1,0$ до 2,5.

9. Обчислити значення функцій Бесселя першого та другого роду в тому числі модифікованих при $n = 1, 2, \dots, 7, z = 1, 3$.

10. Обчислити значення функцій Бесселя при $n = 1, 2, \dots, 7, z = 1 + 2i$.

11. Використовуючи різні стилі кривих представити функцію Бесселя першого та другого роду у вигляді графіка в діапазоні z від 0 до 10 при $n = 1, 3, 5, 7, 9$.

12. Обчислити значення функції Ейрі та її похідних при $x = 1, 2, \dots, 7$.

13. Обчислити значення функції Ейрі та її при таких значення комплексного аргумента $1 - i, 2 + 3i, 2 + 3i$.

14. Використовуючи різні стилі представити функції Ейрі у вигляді графіків в діапазоні x від -10 до 3.

15. Обчислити бета-функції та всі її споріднені функції при таких значеннях змінних:

- для бета-функції $x = \{[1, 3.5], [0.5, 2.5], [1 - 2i, 3 + 4i]\}$;
- для всіх споріднених функцій: $x = 2, y = 1.5, z = 4, z_0 = 1.5, z_1 = 2.5$.

16. Нехай дані є символьними змінними, представленими у вигляді вектора $f = \{k, l, q, p, m\}$. Обчислити середнє значення даних, середнє геометричне значення, середнє гармонійне, середньоквадратичне відхилення, стандартне відхилення.

17. Обчислити функції помилок $\text{Erf}[x]$, $\text{Erfc}[x]$, $\text{InverseErf}[x]$ і представити їх у вигляді точкових графіків в діапазоні зміни значень x від 0 до 2 з кроком 0,15. Результат представити на одному графіку.

18. Обчислити всі еліптичні інтеграли першого, другого та третього роду при $m = 0, 1$.

19. Обчислити:

- еліптичну тета-функцію при $i = 1, 2, 3, 4, z = 1, q = 0.1$;
- інтеграл Френеля $C(x)$ та $S(x)$ при $x = 1, 2, 3, \dots, 9$;
- еліптична функція Вейерштрасса при $m = 1, 2, 3, \dots, 9, q_1 = 2, q_2 = 0.1$.

20. Знайти перетворення Лапласа функції

$$y_1 = ab^{1-2i}, \quad y_2 = \sin \frac{ax}{2} + \cos \frac{ax}{2},$$

$$y_3 = \frac{t-3}{(t-2)(t+2)(3t+4)(3t-4)(t+6)}, \quad y_4 = \left[t^2 \ln t + 2, \frac{1}{t^3}, t^2 e^{\frac{t}{2}} \right].$$

Перетворення Лапласа функції y_4 представити у вигляді вектора.

21. Отримати пряме та перетворення Фур'є функцій:

$$F(t) = t^3 \cos \frac{bt}{2}, \quad F(t) = t^2 \sin \frac{at}{2}, \quad F(t_1, t_2) = \sin(t_1, t_2).$$

22. Отримати пряме та перетворення Фур'є функцій:

$$F(t) = e^{iat}, \quad F(t) = t^2 e^{at}, \quad F(t) = e^{-|t|}.$$

РОЗДІЛ VII. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Розв'язування задач оптимізації одна з найважливіших прикладних областей математичної науки. Значимість задач оптимізації породила велику кількість різноманітних математичних методів.

Можливості системи Mathematica в цій області досить обмежені, відсутні вбудовані функції реалізації більшості методів. Однак, слід мати на увазі, що система Mathematica має великі можливості реалізації будь-яких методів засобами програмування на її мові. Більше того, існує можливість розв'язувати задачі оптимізації в аналітичному вигляді. Можливості системи комп'ютерної алгебри Mathematica розв'язувати задачі оптимізації за допомогою її вбудованих функцій обмежується зазвичай такими випадками

- пошук максимального та мінімального числа з множини чисел, представлених у вигляді векторів або матриць;
- визначення локального мінімуму або максимуму аналітичної функції;
- визначення глобального мінімуму або максимуму аналітичної функції, зокрема, розв'язування оптимізаційних задач лінійного програмування.

Розглянемо ці методи на прикладах.

7.1. Пошук мінімального та максимального числа в сукупності чисел

Задача пошуку мінімального або максимального числа формулюється таким способом: *дані числа, представлені у вигляді вектора або матриці; знайти мінімальне та максимальне числа.*

На перший погляд задача видається надто простою і великого значення не має. Але це лише видається. Звичайно немає сенсу шукати мінімальне та максимальне числа в сукупності чисел $\{1,2,3,5,7,9,15,20,4\}$, оскільки розв'язок очевидний: максимальним числом є 20, а мінімальним — 1. А ось коли задані раціональні числа, наприклад, вигляду $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{15}{20}, \frac{4}{112}, \frac{132}{157}\right\}$ або у

вигляді не обчислених функцій $\{\sin 2.5, \cos 3, e^{-0.5}, 0.75^5, \ln 5\}$. Яке з цих чисел мінімальне, а яке максимальне?

Система Mathematica має такі вбудовані функції визначення мінімально і максимального числа списку

$\text{Max}[x_1, x_2, \dots]$	— повертає максимальне з чисел x_i ;
$\text{Max}[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}]$	— повертає максимальне з чисел матриці чисел;
$\text{Min}[x_1, x_2, \dots]$	— повертає мінімальне з чисел x_i ;
$\text{Min}[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}]$	— повертає мінімальне з чисел матриці чисел.

Числа при цьому можуть бути цілими, раціональними, дійсними. Більше того, елементами списку можуть бути функції з числовими значеннями аргументів. При цьому відкликом в усіх випадках може бути число того ж типу, що й початкові дані. Це в чергове ілюструє високу інтелектуальність системи.

Технологія знаходження шуканих чисел полягає в наступному:

- введення списку чисел чи функцій з присвоюванням йому унікального імені;
- введення функцій пошуку максимуму або мінімуму;
- отримання розв'язку натисканням комбінації <Shift><Enter>.

Приклад 7.1. *Визначити максимальне та мінімальне значення чисел вектора*

$[1, 2.3, -1.7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001]$

та матриці

$\{\{1, 2, 3\}, \{0.5, 2.8, 7\}, \{4, -1, 3.2\}\}$.

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції, знаходимо максимальні та мінімальні значення вектора та матриці

```
f1={1, 2.3, -1.7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001}
Max[f1]
{1, 2.3, -1.7, 3, 4.2, 6.3, 0.25, -1.70001}
6.3
Min[f1]
-1.70001
```

```
f2={{1,2,3},{0.5,2.8,7},{4,-1,3.2}}
Max[f2]
  {{1,2,3},{0.5,2.8,7},{4,-1,3.2}}
  7
Min[f2]
  -1
```

Приклад 7.2. Визначити максимальне та мінімальне значення чисел, представлених у вигляді векторів

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right], \quad [\sin 1, \sin 2, \sin 0.5, \sin 3.14, \sin 8],$$

$$\left[e^{-0.1}, e^{-0.6}, \frac{1}{2.5}, \sin 1, \cos 1, 0.6^5\right].$$

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції, знаходимо максимальні та максимальні значення

```
f3={2/3,3/4,4/5,4/3,3/2,5/4}
Max[f3]
  {2/3,3/4,4/5,4/3,3/2,5/4}
  3/2
Min[f3]
  2/3
f4={Sin[1],Sin[2],Sin[0.5],Sin[3.14],Sin[8]}
Max[f4]
  {Sin[1],Sin[2],0.479426,0.00159265,Sin[8]}
  Sin[8]
Min[f4]
  0.00159265
f5={E^(-0.5),E^(-0.6),1/2.5,Sin[1],Cos[1],0.6^5}
Max[f5]
  0.904837
Min[f5]
  0.07776
N[f5]
  {0.904837,0.548812,0.4,0.841471,0.540302,0.07776}
```

Бачимо, що система видала шукані числа в раціональній формі, в якій вони й були задані у вигляді вектора. У випадку другого вектора система видала максимальне число у вигляді `Sin[8]`. Вона не обчислила значення синуса, оскільки аргумент заданий у вигляді цілого числа, при якому точне значення синуса не існує. Обчислюючи третій вектор, система видала розв'язок в числовому вигляді, оскільки аргументи функції представлені в дійснозначній формі. Однак при цьому елементи вектора, що відповідають отриманим значенням шуканих чисел нам невідомі. Довелось представити елементи вектора у вигляді чисел за допомогою функції `N[f5]`. Тепер видно, що максимальним є елемент $e^{-0.1}$, а мінімальним — 0.6^5 .

7.2. Класичний метод визначення екстремуму аналітичної функції

Відомо, що в *точці екстремуму* похідна функції $y(x)$ рівна нулю. Тоді координату x можна знайти, розв'язавши рівняння $y'(x) = 0$. Підставляючи отримані значення у вихідну функцію, отримуємо координати точки екстремуму (максимуму або мінімуму).

Технологія розв'язання задачі пошуку екстремуму функції цим традиційним методом за допомогою системи Mathematica полягає у виконанні таких процедур:

- i. побудова графіку функції $y(x)$ з метою встановлення наявності точок екстремумів функції $y(x)$ і визначення наближеного значення координат точок екстремуму;
- ii. визначення похідної $y'(x)$ за допомогою вбудованої функції `D[f5]`;
- iii. визначення дійсних коренів рівняння $y'(x) = 0$ за допомогою однієї з вбудованих функцій системи;
- iv. обчислення значень функції $y(x)$ при значеннях аргументів, рівних кореням рівняння.

Методика досить відома. Однак при її практичній реалізації можуть виникнути труднощі з визначенням кореня рівняння $y'(x) = 0$. Тут можливі

випадки, коли система Mathematica розв'язує рівняння і видає всі корені, видає тільки один з декількох коренів або зовсім не розв'язує рівняння. Труднощі виникають в тих випадках, коли рівняння $y'(x) = 0$ є трансцендентним.

Розглянемо приклади використання технології знаходження екстремумів аналітичної функції.

Приклад 7.3. Визначити координати екстремальних точок функції

$$f = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2.$$

Число екстремальних точок визначити по вигляду графіка функції, а корені похідної $f'(x)$ обчислити за допомогою функції `NSolve[f==0, x]`.

Розв'язок. Використовуючи функціонал системи Mathematica, отримуємо

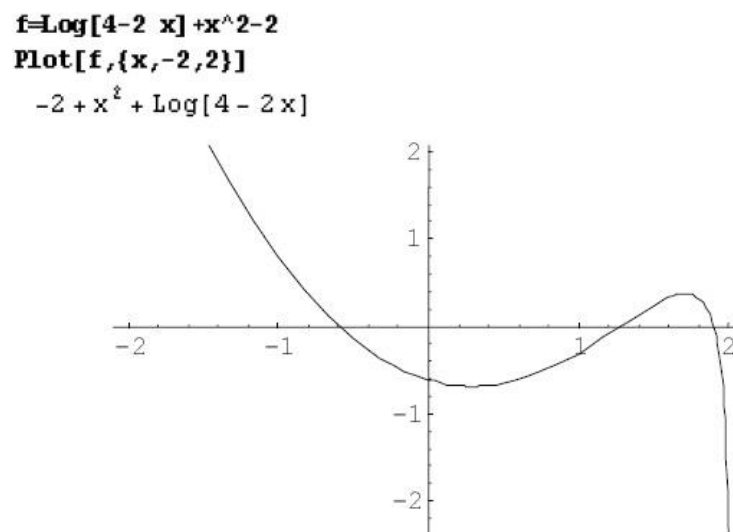


Рис. 7.1. Графік функції $f = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2$.

```
z=D[f,x]
-2/(4-2x)+2x
NSolve[z==0,x]
{{x->1.70711},{x->0.292893}}

f/.x->1.70711
0.379414
f/.x->0.292893
-0.686266
```

З рисунка 7.1 видно, що функція має максимум та мінімум. При цьому система за допомогою функції `NSolve[f==0,x]` знайшла абсциси точок екстремуму, визначивши два корені рівняння $f'(x) = 0$ за однією командою. Обчисливши значення функції методом підстановки, отримали такі координати екстремальних точок: максимуму — $(1.70711, 0.379414)$, мінімуму — $(0.292893, -0.686266)$.

Приклад 7.4. Визначити координати екстремальних точок функції

$$f = x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 29x^2 + 2x - 24.$$

Число екстремальних точок визначити по вигляду графіка функції, а корені похідної $f'(x)$ обчислити за допомогою функції `NSolve[f==0,x]`.

Розв'язок. Використовуючи функціонал системи Mathematica, отримуємо

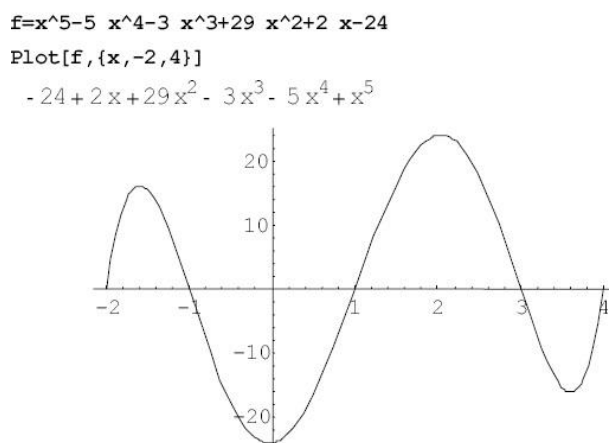


Рис. 7.2. Графік функції $f = x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 29x^2 + 2x - 24$.

```
y=D[f,x]
2+58x-9x^2-20x^3+5x^4
NSolve[z==0,x]
{{x->-1.59426},{x->-0.0343141},{x->2.03431},{x->3.59426}}

f/.x->-1.59426
16.0767
f/.x->-0.0343141
-24.0344
f/.x->2.03431
24.0344
f/.x->3.59426
-16.0767
```

Функція `NSolve[f==0,x]` визначила всі корені рівняння $f'(x) = 0$ однією командою, суттєво полегшивши обчислення координати точок екстремуму. В таких випадках немає необхідності будувати графік вихідної функції $f(x)$. Хіба що для контролю правильності визначення координат екстремальних точок.

В переважній більшості випадків рівняння $f'(x) = 0$ є трансцендентним. В таких випадках функція `NSolve[f==0,x]` не може відразу знайти всі корені рівняння. Доводиться застосовувати інші функції розв'язування рівняння, які вимагають найближчого значення x або навіть області ізоляції кореня.

Приклад 7.5. *Визначити координати екстремальних точок функції*

$$f = (2^x - 4x) \cdot (3^x - 9).$$

Розв'язок. В даному випадку використовуючи функцію `Solve[f,x]` неможливо визначити корені рівняння

$$(3^x - 9x) (-4 + 2 \cdot \log[2]) + (2^x - 4x) (-9 + 3 \cdot \log[3]) = 0$$

```
f=(2^x-4 x) (3^x-9 x)
Plot[f,{x,-1,5}]
```

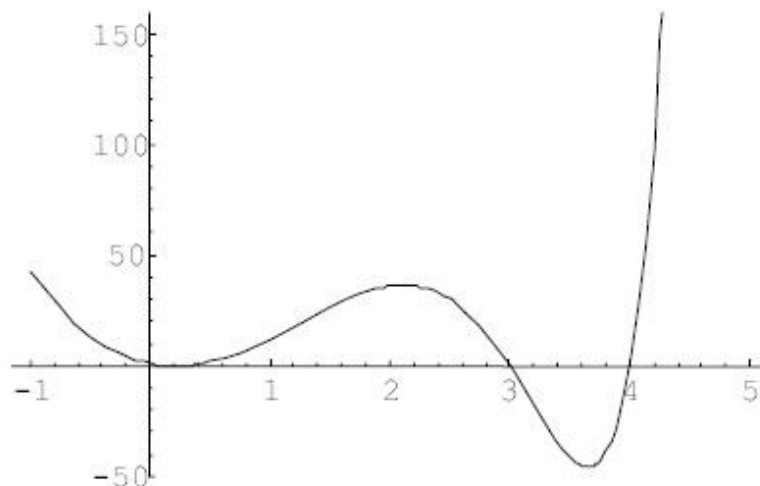


Рис. 7.3. Графік функції $f = (2^x - 4x) \cdot (3^x - 9)$.

В такому випадку доцільно шукати корені використовуючи кратно кількості коренів функцію `FindRoot[z,{x,x0}]`, де x_0 — чисельне значення x поблизу екстремуму.

```

z=D[f,x]
(3^x-9x) (-4+2*Log[2]) + (2^x-4x) (-9+3*Log[3])=0
FindRoot[z,{x,0.1}]
{x->0.218114}
FindRoot[z,{x,2}]
{x->2.11009}
FindRoot[z,{x,3.2}]
{x->3.65157}
f/.x->0.218114
-0.201278
f/.x->2.11009
36.423
f/.x->3.65157
-45.6272

```

7.2.1. Визначення координат точок перегину

До особливих точок аналітичної функції також відносять *точки перегину*. В цих точках друга похідна рівна нулю. Класичний метод визначення екстремальних точок (максимуму і мінімуму) дозволяє також визначити координати точок перегину. Відмінність полягає лише в тому, що доводиться шукати корені не першої, а другою похідної функції $f(x)$. Загалом технологія пошуку точок перегину не відрізняється від технології визначення точок максимуму і мінімуму.

Приклад 7.6. Визначити координати точок перегину функції

$$f = \ln(4 - 2x) + x^2 - 2.$$

Розв'язок. Продовжуючи міркування прикладу 7.3 отримуємо

```

f=Log[4-2 x]+x^2-2
z=D[f,{x,2}]
-2+x^2Log[4-2x]
2-4/(4-2x)^2
NSolve[z,x]
{{x->2.70711},{x->1.29289}}
f/.x->2.70711
5.67502+3.14159 i
f/.x->1.29289
0.0181427

```

7.3. Пошук локального мінімуму аналітичної функції

Система комп'ютерної алгебри Mathematica оснащена функцією для пошуку локального мінімуму аналітичної функції вигляду

`FindMinimum[f(x), {x, x0}]` де

$f(x)$	— аналітична функція аргумента x ;
x_0	— значення аргумента поблизу локального мінімуму.

Функція `FindMinimum[f(x), {x, x0}]` знаходить координати всіх мінімумів функції $f(x)$, повторюючи стільки разів, скільки є локальних мінімумів. При цьому кожний раз змінюється значення x_0 .

Технологія пошуку мінімуму функції не складна і ґрунтується на виконанні таких кроків:

- i. побудова графіка аналітичної функції $f(x)$ з метою визначення числа екстремальних точок і вибору значень x_0 ;
- ii. застосування вбудованої функції `FindMinimum[f(x), {x, x0}]`;
- iii. отримання розв'язку після натискання комбінації клавіш `<Shift><Enter>`.

Якщо аналітична функція має максимум, то технологія залишається такою ж. Необхідно лише змінити знак функції $f(x)$ на обернений, перемноживши її на -1 . Розглянемо застосування даної технології на прикладах.

Приклад 7.7. *Визначити координати точок екстремумів функції*

$$f = x^4 - 13x^3 + 35x^2 + 13x - 36.$$

Розв'язок. Будуємо графік функції f (на рис. 7.4). Далі використовуючи вбудовану функцію `FindMinimum[f(x), {x, x0}]`, отримуємо:

```
FindMinimum[f, {x, -0.5}]  
{-37.1338, {x->-0.169441}}  
FindMinimum[-f, {x, 2}]  
{-51.6363, {x->2.63205}}  
FindMinimum[f, {x, 7}]  
{-293.358, {x->7.28739}}
```

```
f=x^4-13 x^3+35 x^2+13 x-36
Plot[f,{x,-2,10}]
-36+13 x+35 x^2-13 x^3+x^4
```

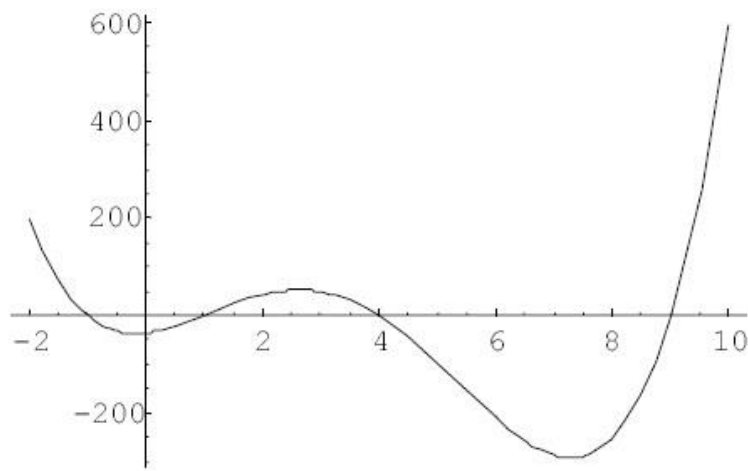


Рис. 7.4. Графік функції $f = x^4 - 13x^3 + 35x^2 + 13x - 36$.

З рисунка 7.4 видно, що координатами точок мінімуму та максимуму є $(-0.17, -37)$, $(2.63, 51.64)$, $(7.29, -293.36)$. Слід мати на увазі, що ординату максимуму необхідно множити на -1 .

В порівнянні з класичним методом даний метод має ту перевагу, що відкликом тут є координата мінімуму (x та y) і обчислення значень y не вимагається. Недоліком даного методу є те, що він не дозволяє обчислити одночасно координати всіх екстремальних точок.

Крім функції `FindMinimum[f(x), {x, x0}` система Mathematica має додаткові чотири функції, які дозволяють знаходити локальний мінімум аналітичної функції

<code>NMaximize[f, x]</code>	— шукає єдиний локальний максимум функції $f(x)$;
<code>NMinimize[f, x]</code>	— шукає єдиний локальний мінімум функції $f(x)$;
<code>NMaximize[{f, Z_{xy}}{x, y, ...}]</code>	— шукає локальний максимум функції $f(x)$, визначений умовою Z_{xy} ;
<code>NMinimize[{f, Z_{xy}}{x, y, ...}]</code>	— шукає локальний мінімум функції $f(x)$, визначений умовою Z_{xy} .

Технологія визначення локального максимуму (мінімуму) за допомогою даних функцій не відрізняється від технології визначення локального мінімуму функцією `FindMinimum[f(x), {x, x0}]`.

Приклад 7.8. *Визначити координати максимуму (мінімуму) аналітичних функцій: $xe^{-x} + 1$, $3^x - 9x + 3$.*

Розв'язок. Побудуємо графік функції і визначимо, чи має функція екстремальну точку і яка вона (максимум чи мінімум). За виглядом графіка виберемо вбудовану функцію. Результат наведено на рис. 7.5 та 7.6 відповідно.

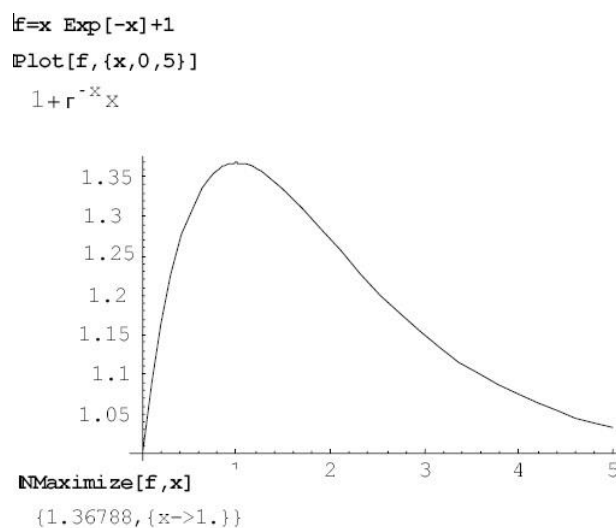


Рис. 7.5. Знаходження локального максимуму аналітичної функції $xe^{-x} + 1$.

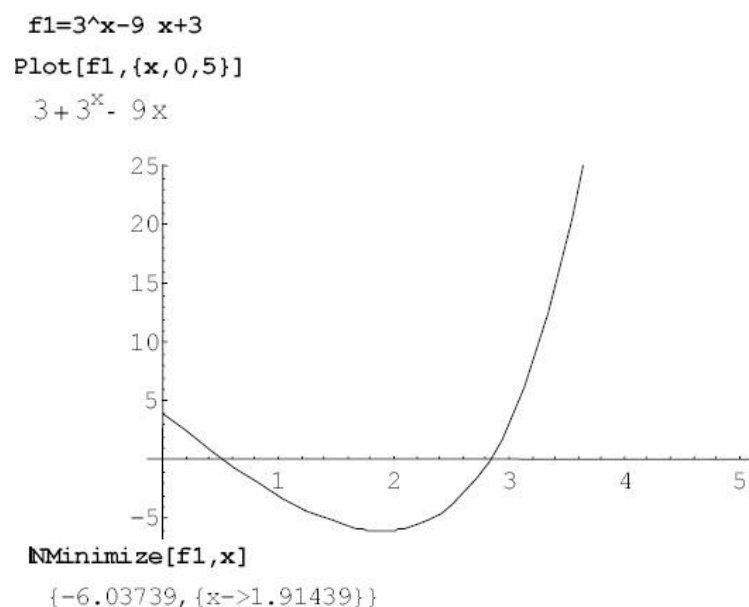


Рис. 7.6. Знаходження локального мінімуму аналітичної функції $3^x - 9x + 3$.

На рисунках 7.5 та 7.6 видно, що в результаті розв'язування отримано координати екстремальних точок, що відповідають графікам. При цьому функції `NMaximize[f,x]` та `NMinimize[f,x]` не вимагають задання аргумента поблизу локального максимуму чи мінімуму, як це було у випадку використання функції `FindMinimum[f(x),{x,x0}]`.

Розглянемо випадок, коли аналітична функція має кілька екстремумів.

Приклад 7.9. *Визначити координати екстремальних точок аналітичних функцій:*

$$\ln(5 - 3x) + x^2 - 3, \quad x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 31x^2 + 2x - 30.$$

Розв'язок. Повторюючи міркування попередньої задачі отримуємо результат рис. 7.7 та 7.8 відповідно.

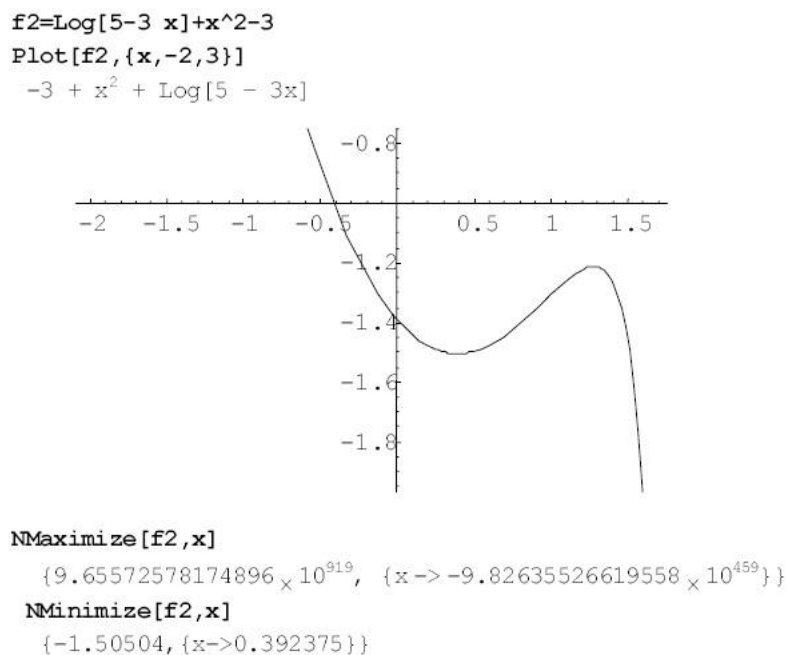


Рис. 7.7. Знаходження координат екстремальних точок аналітичної функції $\ln(5 - 3x) + x^2 - 3$.

Слід зазначити, що при визначенні за допомогою функцій `NMaximize[f,x]` та `NMinimize[f,x]` координат екстремальних точок аналітичних функцій, які мають багато максимумів та мінімумів, виникають певні труднощі.

В даному прикладі функції мають кілька екстремальних точок. Зокрема, перша функція має один максимум та один мінімум, а друга — два максимуми та два мінімуми. Розв'язуючи першу задачу, система визначила

координати мінімуму і не знайшла координати максимуму (розв'язок парадоксальний). В другій функції система знайшла лише оди максимум та один мінімум, які знаходяться в лівій півплощині відносно осі Oy . Визначити координати решта екстремальних точок не вдається. В цьому суттєвий недолік функцій `NMaximize[f,x]` та `NMinimize[f,x]`.

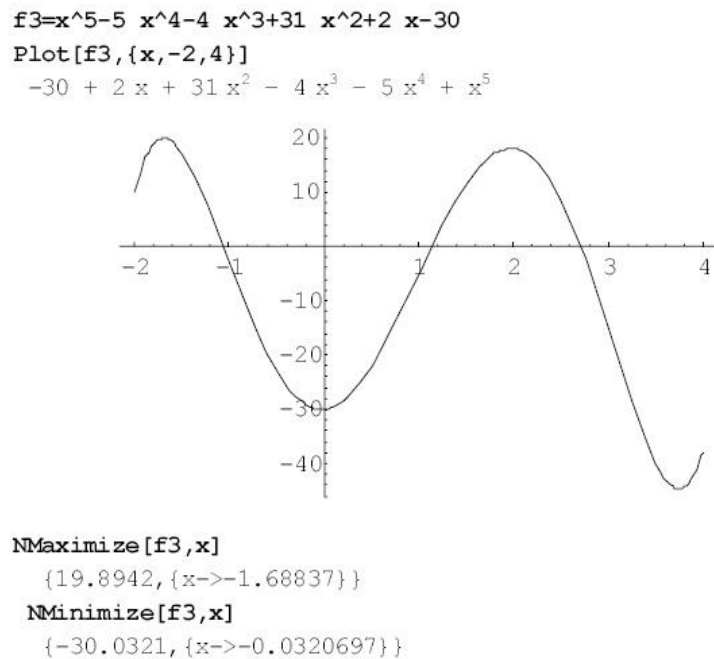


Рис. 7.8. Знаходження координат екстремальних точок аналітичної функції $x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 31x^2 + 2x - 30$.

Існують функції `NMaximize[{f,Zxy}{x,y,...}]` та `NMinimize[{f,Zxy}{x,y,...}]`. Ці функції знаходять координати екстремальних точок аналітичних функцій багатьох аргументів при обмеженнях на Z_{xy} . Розглянемо приклади використання цих функцій.

Приклад 7.10. Визначити координати точок максимуму та мінімуму функцій:

$$\begin{aligned} \sin x - e^{x+y}, & \quad x + y < 1, \\ 2^x - 4(x + y), & \quad x + y < 5, \\ 4(z + y + z) - 2^{x+y}, & \quad x + y + z < 7. \end{aligned}$$

У першій та другій функції визначити координати мінімуму, у третьої — максимуму.

Розв'язок. Використовуючи функції `NMaximize[{f,Zxy}{x,y,...}]` та `NMinimize[{f,Zxy}{x,y,...}]`, отримуємо

```

NMaximize[{Sin[x]-Exp[x+y]},x+y<1,{x,y}]
{-3.71828,{x->-1.5708,y->2.5708}}
NMaximize[{2^x-4 (x+y)},x+y<5,{x,y}]
{-20.,{x->-50.3938,y->55.3938}}
NMaximize[{4 (z+x+y)-2^(x+y),x+y+z<7,{x,y,z}]
{28.,{x->-1.13548,y->-49.229,z->57.3645}}

```

7.4. Пошук глобального максимуму (мінімуму) аналітичної функції

Задача пошуку глобального максимуму (мінімуму) аналітичної функції є задачею математичного програмування. Серед цих задач найчастіше доводиться розв'язувати задачі лінійного програмування [27]. Задача лінійного програмування формулюється таким способом.

Задано лінійну функцію незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

де a_i — числа, які називають коефіцієнтами лінійної функції, $i = 1, 2, \dots, n$. Відомо також декілька рівнянь та нерівностей, незалежними змінними яких є $x_1, x_2, \dots, x_n$. Такими рівняннями (нерівностями) можуть бути

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b),$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

та низка інших.

Серед множини варіантів, що задовольняють умови обмежень, необхідно знайти сукупність змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, при яких лінійна функція набуває максимального (мінімального) значення.

Функція $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ в теорії математичного програмування називається *цільовою функцією*, а сукупність рівностей та нерівностей — *обмеженнями*.

Сформульована задача лінійного програмування зустрічається на практиці дуже часто при розв'язуванні оптимізаційних задач в економіці, управлінні, техніці, інженерії тощо.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica має вбудовані функції розв'язування задач математичного програмування. Ці функції мають вигляд:

`ConstrainedMax[f, {Q}, {x1, x2, ..., xn}]`

`ConstrainedMin[f, {Q}, {x1, x2, ..., xn}]`

`LinearProgramming[c, m, b]`

В цих функціях прийнято позначення

f	— цільова функція;
Q	— вектор обмежень;
x _i	— шукані незалежні змінні;
c	— величина, яка мінімізується;
m	— обмеження;
b	— величина обмежень.

Власне вбудовані функції характеризуються таким способом:

<code>ConstrainedMax[f, {Q}, {x₁, x₂, ..., x_n}]</code>	— шукає глобальний максимум, тобто такі значення x _i , при яких виконуються обмеження Q, а цільова функція має максимальне значення;
<code>ConstrainedMin[f, {Q}, {x₁, x₂, ..., x_n}]</code>	— шукає глобальний мінімум, тобто такі значення x _i , при яких виконуються обмеження Q, а цільова функція має мінімальне значення;
<code>LinearProgramming[c, m, b]</code>	— шукає вектор x. c при умовах m.x ≥ b, x ≥ 0.

Розв'язування такої складної задачі, як знаходження глобального максимуму (мінімуму), в системі Mathematica є простим завданням:

- i. ввести функцію `ConstrainedMax[f, {Q}, {x1, x2, ..., xn}]`;
- ii. отримати розв'язок, натиснувши комбінацію клавіш <Shift><Enter>.

Розглянемо приклади використання даної технології.

Приклад 7.11. *Існує три технології випуску деякої продукції. Для її виготовлення необхідно мати три види сировини. Кожна з технологій вимагає певної кількості сировини даного виду, яка є в наявності в обмежених кількостях. Обсяг випуску продукції залежить від технології*

виготовлення і відомий для кожної технології. Необхідно знайти таку технологію, при якій обсяг випуску продукції буде максимальним. Вихідні дані виробництва наведено в таблиці.

Спосіб виробництва	Потреба в сировині (ум. од.)			Випуск продукції
	Першого виду	Другого виду	Третього виду	
1	2	3	2	30
2	1	2	3	22
3	2	1	1	24

Технологія виробництва допускає зміну способу виробництва на протязі робочого дня.

Розв'язок. Запишемо математичну постановку даної задачі. Позначимо x_1, x_2, x_3 — частку (міру) часу, який витрачається на виробництво заданого обсягу готової продукції при умові забезпеченістю сировиною відповідно при першій, другій та третій технологіях. Обмеженнями при розв'язуванні цієї задачі є:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1;$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2;$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2.$$

Перше обмеження очевидне — частки робочого часу не можуть бути від'ємними. Друге припущення означає, що сумарний час виконання замовлення не може перевищувати повного робочого дня. Третє, четверте та п'яте припущення означають, що розхід сировини не повинен перевищувати ліміту (двійка для кожного виду сировини і технології). При будь-якій технології випущеної продукції

$$30x_1 + 22x_2 + 24x_3 \rightarrow \max$$

є цільовою функцією.

Відтак, в результаті розв'язування задачі необхідно знайти значення x_1, x_2, x_3 і максимальне значення випущеної продукції, тобто визначити оптимальну технологію виробництва.

В даному випадку функція глобального максимуму матиме вигляд:

```
ConstrainedMax[30 x1+22 x2 +24 x3, {x1>=0, x2>=0, x3>=0,
2 x1 +x2+2 x3<=2, 3 x1+2 x2+x3<=2, 2 x1+3
x2+x3<=2}, {x1, x2, x3}]
```

Тоді розв'язок система видасть у такий спосіб:

```
ConstrainedMax[30 x1+22 x2 +24 x3, {x1>=0, x2>=0, x3>=0,
2 x1 +x2+2 x3<=2, 3 x1+2 x2+x3<=2, 2 x1+3 x2+x3<=2}, {x1, x2, x3}]
{27, {x1 -> 1/2, x2 -> 0, x3 -> 1/2}}
```

Отже отримали результат, який свідчить, що підприємство за зміну випустить 27 одиниць продукції за першою і третьою технологією. Випуску продукції за другої технологією не повинно бути.

Питання, тести для самоконтролю

1. Охарактеризуйте вбудовані функції системи Mathematica, призначених для знаходження максимуму та мінімуму зі списку чисел.
2. Опишіть технологію пошуку максимального та мінімального числа зі списку чисел чи числових функцій.
3. Опишіть технологію знаходження екстремумів аналітичних функцій.
4. Опишіть технологію знаходження локального мінімуму аналітичних функцій в системі Mathematica.
5. Які вбудовані функції в системі Mathematica використовуються для знаходження локального мінімуму аналітичних функцій?
6. Опишіть методологію постановки задачі знаходження глобального максимуму.
7. Які вбудовані функції в системі Mathematica використовуються для знаходження глобального максимуму аналітичних функцій?

8. Які вбудовані функції системи Mathematica використовуються при розв'язуванні задач математичного програмування?

Обов'язкові та додаткові задачі

Використовуючи вбудовані функції системи Mathematica розв'яжіть задачі за темою розділу.

1. Визначити максимальне та мінімальне значення чисел:

a. $\left\{\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{37}{121}, \frac{11}{27}, \frac{2}{7}\right\},$

b. $\left\{e^{1.2}, 5 \sin 2, \ln 123, \sinh 1.2, \frac{\cos 1}{\sin 1}, \frac{2}{3}\right\}.$

2. Визначити координати точок екстремумів функції

$$f = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 4.$$

Число екстремальних точок визначити по вигляду графіка функції, а корені похідної $f'(x)$ обчислити за допомогою функції `NSolve[f==0, x]`.

4. Визначити координати точок максимуму (мінімуму) функції

$$f = (3^x - 9x) \cdot (2^x - 4).$$

5. Визначити координати екстремальних точок функцій:

a. $-xe^x - 1,$

b. $5^x - x^2 + 3,$

c. $x^2 - 2|x| - 2,$

d. $x^3 - 2x^2 + 3,$

e. $1.5x^5 + 17x - 21,$

f. $x^4 - 2x^3 - 1,$

g. $2 \sin(\ln x),$

h. $e^{2x}(x + 2) + \frac{6}{x} - 4,$

i. $2^x(3^x - 9x + 1) - 4x3^x + 36x^2 - 4x,$

j. $e^x(x - 3) - 3x^2 + 10.5x - 4.5,$

k. $(x^4 - 2x^3 - 1) \cdot (x - \ln(7 - 4x)),$

l. x^x ,

m. $x^x + x^{-5x}$,

n. $\frac{x^x + x^{2x}}{x+1}$,

o. $x \ln x \cdot (\sin x + \cos x)$,

p. $x \ln x + \sin x$.

РОЗДІЛ VIII. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Серед рівнянь з однією змінною часто вирізняють алгебраїчні і трансцендентні. *Трансцендентними* називається таке рівняння, яке містить трансцендентну (не алгебраїчну) функцію. Наприклад, рівняння $ax^5 - bx + 1 = 0$ є алгебраїчним, а $e^{ax} + 2 \ln x - \sin x + 1 = 0$ — трансцендентним.

Система Mathematica дозволяє розв'язувати такі рівняння в аналітичному та числовому вигляді, визначаючи дійсні та комплексні корені. В системі реалізовано багато чисельних методів. Це дозволяє досліджувати їх переваги та недоліки і вибирати найраціональніший метод для розв'язання даної конкретної задачі. Також є оригінальні способи перевірки достовірності визначення коренів рівняння [27].

8.1. Розв'язування рівнянь в аналітичному вигляді

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica розв'язування рівнянь в аналітичному вигляді здійснюється за допомогою функції `Solve`, що має вигляд

`Solve[f, x]`, де

f	— рівняння, записане в довільній формі ;
x	— шукане невідоме.

Приклади запису рівнянь

$$ax^2+bx-1==0,$$

$$ax^2+bx==1,$$

$$ax^2==-bx+1.$$

Технологія розв'язування рівнянь за допомогою функції `Solve[f, x]` передбачає виконання процедур:

- i. ввести рівняння з присвоєнням йому унікального імені;
- ii. ввести функцію `Solve[f, x]`, де f — ім'я рівняння;
- iii. отримати розв'язок, натиснувши комбінацію клавіш `<Shift><Enter>`.

Рівняння можна не вводити, а записати його в функцію `Solve` замість `f`. Розглянемо на прикладах знаходження коренів рівнянь в аналітичному вигляді.

Приклад 8.1. *Визначити корені таких рівнянь:*

$$x^5 + bx^4 - a^4x - a^4b = 0,$$

$$2^x - 2(a + b) = 0,$$

$$\sin ax + \cos ax = 0,$$

$$2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи функції `Solve`, отримуємо

```
F1:=x^5+b x^4-a^4 x-a^4 b==0
Solve[F1,x]
{{x->-a},{x->-ia},{x->ia},{x->a},{x->-b}}
```

```
F2:=2^x-2*(a+b)==0
Solve[F2,x]
{{x->Log[2(a+b)]/Log[2]}}
```

```
FullSimplify[%]
{{x->1+Log[(a+b)]/Log[2]}}
```

```
F3:=Sin[a x]+Cos[a x]==0
Solve[F3,x]
{{x->-pi/(4a)},{x->-3pi/(4a)}}
```

```
Solve[2 x^2+3 x-1==0,x]
{{x->1/4*(-3-sqrt(17))},{x->1/4*(-3+sqrt(17))}}
```

```
N[%]
{{x->-1.78078},{x->0.280776}}
```

Бачимо, що всі задачі системою розв'язані. В перших трьох задачах отримані корені в аналітичному вигляді. В останньому прикладі значення коренів отримано у вигляді точних чисел, представлених в раціональній формі. Використавши команду `N[%]` отримали розв'язки у вигляді дійсних чисел.

Зауважимо, що при розв'язуванні рівняння $2^x - 2(a + b) = 0$ для оптимізації використано команду `FullSimplify`.

Відзначимо, що функція `Solve` має багато опцій, які можна вивести на екран командою `Option[Solve]`.

```
Option[Solve]
{InverseFunctions->Automatic, MakeRules->False,
Metod->3, Mode->Genari, Sort->True,
VerifySolutions->Automatic, WorkingPrecision->∞}
```

Розглянемо приклади застосування опцій функції `Solve`.

Приклад 8.2. Обчислити трьома методами корені рівняння $\sin ax + \cos ax = 0$. Обчислити корені рівняння $2^x - 4x + 1 = 0$ з числом цифр проміжних обчислень рівним $\infty, 20, 40, 10$.

Розв'язок. Використовуючи опції `Solve Metod->` та `WorkingPrecision->`, відповідно отримуємо

```
F:=Sin[a x]+Cos[a x]==0
Solve[F,x]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{\pi}{4a} \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{3\pi}{4a} \right\} \right\}$$

Solve[F,x,Metod->1]
{{2Cos[ax]2 → 1, Sin[ax] → -Cos[ax], ax → -ArcCos[Cos[ax]]},
{2Cos[ax]2 → 1, Sin[ax] → -Cos[ax], ax → ArcCos[Cos[ax]]}}
Solve[F,x,Metod->2]
{{2Cos[ax]2 → 1, Sin[ax] → -Cos[ax], ax → -ArcCos[Cos[ax]]},
{2Cos[ax]2 → 1, Sin[ax] → -Cos[ax], ax → ArcCos[Cos[ax]]}}
Solve[F,x,Metod->3]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{\pi}{4a} \right\}, \left\{ x \rightarrow -\frac{3\pi}{4a} \right\} \right\}$$

F:=2^x-4 x+1==0
Solve[F,x,WorkingPrecision->Infinity]

$$\left\{ \left( x \rightarrow \frac{\text{Log}[2] - 4 \text{ProductLog}\left[-\frac{\text{Log}[2]}{22^{\frac{3}{4}}}\right]}{4 \text{Log}[2]} \right), \right.$$


$$\left. \left( x \rightarrow \frac{\text{Log}[2] - 4 \text{ProductLog}\left[-1. - \frac{\text{Log}[2]}{22^{3/4}}\right]}{4 \text{Log}[2]} \right) \right\}$$

```

```
Solve[F, x, WorkingPrecision->20]
{{x->0.63942780657650467952}, {x->3.8466563011830440018}}
Solve[F, x, WorkingPrecision->40]
{{x->0.639427806576504679521335334979113949979665294591016`40}
{x->3.8466563011830440018333384267424616525908444516827777`40}}
Solve[F, x, WorkingPrecision->10]
{{x->0.639428}, {x->3.84666}}
```

Власне приклад демонструє дії опції функції `Solve`. Опція `Method` дає можливість розв'язувати рівняння трьома методами. Опції `Method->1` та `Method->2` не дозволили функції `Solve` знайти корені рівняння $\sin ax + \cos ax = 0$. Вони лише представили дане рівняння в іншій формі. Лише опція `Method->3` дозволила визначити корені рівняння в аналітичному вигляді, при цьому цей розв'язок точно такий як і без використання опції.

Опція `WorkingPrecision->n` в становлює число цифр у відповіді, в даному випадку 20, 40, 10. При $n = \infty$ (Infinity) аналітичний розв'язок з використанням спеціальних функцій, а при $n = 10$ видає розв'язок з шістьма цифрами.

Зауважимо, що опції функції `Solve` можна використовувати також при розв'язуванні систем рівнянь. Деякі з них будуть застосовані нижче.

8.1.2. Функція `Roots`

Функція `Roots` призначена для визначення коренів полінома, власне вона має вигляд

`Roots[f, x]`, де

<code>f</code>	— поліном, корені якого потрібно знайти (може бути заданим у вигляді рівняння);
<code>x</code>	— аргумент полінома <code>f</code> .

Відкликом функції `Roots[f, x]` є дійсні та комплексні корені полінома $f(x) = 0$. При цьому розв'язок може бути отримано в аналітичному та числовому вигляді. Розв'язок в аналітичному вигляді в загальному випадку

може бути отриманий для полінома не вище четвертого степеня. Для степенів вище четвертого (п'ятого та вище) в загальному випадку розв'язок рівняння $f(x) = 0$ в аналітичному вигляді не існує. Однак, якщо поліном можна розкласти на множники, то функція `Roots[f, x]` знайде всі корені відповідного рівняння.

Приклад 8.3. Розв'язати рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

$$ax^3 + b = 0,$$

$$ax^5 + bx^4 + cx + d = 0,$$

$$(a + x)(b + x)(x + ac)(x + 1)(x - 1) = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію `Roots`, отримуємо

```
Roots[a x^2+b x+c==0, x]
```

$$x == \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad || \quad x == \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

```
Roots[a x^4+b x^2+c==0, x]
```

$$x == \sqrt{-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad || \quad x == -\sqrt{-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad |$$

$$|x == \sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad || \quad x == -\sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

```
Roots[a x^3+b==0, x]
```

$$x == -\frac{(-1)^{2/3}b^{1/3}}{a^{1/3}} \quad || \quad x == \frac{(-1)^{1/3}b^{1/3}}{a^{1/3}} \quad || \quad x == -\frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}$$

```
Roots[a x^5+b x^4+c x+d==0, x]
```

$$x == \text{Root}[d+c\#1+b\#1^4+a\#1^5\&, 1] \quad || \quad x == \text{Root}[d+c\#1+b\#1^4+a\#1^5\&, 2] \quad |$$

$$|x == \text{Root}[d+c\#1+b\#1^4+a\#1^5\&, 3] \quad || \quad x == \text{Root}[d+c\#1+b\#1^4+a\#1^5\&, 4] \quad |$$

$$|x == \text{Root}[d+c\#1+b\#1^4+a\#1^5\&, 5]$$

$$(a+x)(b+x)(x+ac)(x+1)(x-1)$$

$$(-1+x)(1+x)(a+x)(ac+x)(b+x)$$

```
Expand[Out[23]]
```

$$-aacb-aacx-abx-acbx-ax^2-acx^2-bx^2+aacbx^2-x^3+aacx^3+abx^3+ax^4+bx^4+x^5$$

```
Roots[Out[24]==0, x]
```

$$x == -b \quad || \quad x == -ac \quad || \quad x == -a \quad || \quad x == -1 \quad || \quad x == 1$$

Як бачимо в перших трьох прикладах корені знайдені в аналітичному вигляді. В четвертому прикладі представлено поліном п'ятого степеня, тому його корені не знайдені. В останньому прикладі наведено поліном п'ятого степеня, при цьому розв'язки отримано в аналітичному вигляді. Це пояснюється тим, що многочлен $f(x)$ може бути розкладеним на множники. За допомогою функції `Expand` розкриті дужки многочлена та знайдено його корені за допомогою функції `Roots[Out[24],x]`. Тут `Out[24]` — номер рядка, в якій записано поліном в розкритому вигляді.

Якщо коефіцієнти полінома задані у вигляді чисел, то функція `Roots[F,x]` видає розв'язок у вигляді точного чи наближеного значення коренів. Точне значення коренів представляється в раціональній формі, наближене — в формі дійсних чисел.

Приклад 8.4. Визначити корені рівнянь

$$x^2 + \frac{13}{28}x - \frac{3}{14} = 0,$$

$$2x^7 + 3x^6 - 12x^2 + 7x + 5 = 0,$$

$$x^{10} - 1 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію `Roots`, отримуємо

```
Roots[x^2+13/28 x-3/14==0,x]
x== 2/7 || x== -3/4
Roots[2 x^7+3 x^6-12 x^2+7 x+5==0,x] |
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,1] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,2] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,3] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,4] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,5] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,6] ||
x==Root[5+7#1-12#1^2+3#1^6+2#1^7&,7]
N[%]
x== -0.4173393384413579` ||
x== -1.6147152813957173`-0.7294064649822042`i ||
x== -1.6147152813957173`+0.7294064649822042`i ||
x== 0.1147195547572578`-1.3716602453531235`i ||
```

```

x==0.9586653958591383`-0.2968262106007846`i ||
x==0.9586653958591383`+0.2968262106007846`i
Roots[x^10-1==0,x]
x==1 || x==(-1)^(1/5) || x==(-1)^(2/5) || x==(-1)^(3/5) || x==(-1)^(4/5) ||
x==-1 || x==-(-1)^(1/5) || x==-(-1)^(2/5) || x==-(-1)^(3/5) || x==-(-1)^(4/5)
N[%]
x==1. || x==0.8090169943749475`+0.5877852522924731`i ||
x==0.309016994379474`+0.9510565162951535`i ||
x==-0.309016994379474`+0.9510565162951535`i ||
x==-0.8090169943749475`+0.5877852522924731`i ||
x==-1. || x==-0.8090169943749475`-0.5877852522924731`i ||
x==-0.309016994379474`-0.9510565162951535`i ||
x==0.309016994379474`-0.9510565162951535`i ||
x==0.8090169943749475`-0.5877852522924731`i

```

8.2. Чисельні методи розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь

Існує багато чисельних методів розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь. Алгоритм будь-якого з цих методів є сукупністю умов вибору початкового наближення, розрахункового співвідношення та ознаки обчислювального процесу.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica оснащена низкою вбудованих функцій для розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь: `NSolve`, `NRoots`, `FindRoot`.

8.2.1. Функція `NSolve`

Функція `NSolve` має вигляд:

`NSolve[f, x]`, де

f	— рівняння, яке розв'язується;
x	— шукана невідома.

Відкликом цієї функції є корені рівняння $f(x) = 0$. Коренями можуть бути дійсні та комплексні числа, представлені у нормальній формі. Функція `NSolve[f, x]` може розв'язувати всі рівняння, які розв'язує функція `Solve`.

Різняться вони лише за формою представлення відповідей. Проілюструємо це на прикладах, порівнюючи відповіді з відповідями функції `Solve[f, x]`.

Приклад 8.5. *Визначити корені рівнянь*

$$x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{16} = 0,$$

$$2^x - 4x + 1 = 0,$$

$$e^{-2x} + \frac{3}{x} - 1 = 0,$$

$$ax^3 - 1 = 0,$$

$$2x^5 - 3.2x^3 + 7.3x - 14 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції `NSolve[f, x]` та `Solve[f, x]`, отримуємо

```
Solve[x^3+2.25 x^2-0.75 x+0.3125==0, x]
```

```
{x → -0.5}, {x → 0.25}, {x → 2.5}
```

```
Solve[x^3+9/4 x^2-3/4 x+5/16==0, x]
```

```
{x → -1/2}, {x → 1/4}, {x → 5/2}
```

```
NSolve[x^3+9/4 x^2-3/4 x+5/16==0, x]
```

```
{x → -0.5}, {x → 0.25}, {x → 2.5}
```

```
Solve[2^x-4 x+1==0, x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{\log[2] - 4 \operatorname{ProductLog}\left[-\frac{\log[2]}{22^{3/4}}\right]}{4 \log[2]} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow \frac{\log[2] - 4 \operatorname{ProductLog}\left[-1. - \frac{\log[2]}{22^{3/4}}\right]}{4 \log[2]} \right\} \right\}$$

```
NSolve[2^x-4 x+1==0, x]
```

```
{x → 0.639428}, {x → 3.84666}
```

```
Solve[E^(-2 x)+3/x-1==0, x]
```

```
Solve[-1 + e^{-2x} + 3/x == 0, x]
```

```
NSolve[E^(-2 x)+3/x-1==0, x]
```

```
NSolve[-1 + e^{-2x} + 3/x == 0, x]
```

```
Solve[a x^3-1==0,x]
```

$$\left\{x \rightarrow \frac{1}{a^{1/3}}\right\}, \left\{x \rightarrow -\frac{(-1)^{1/3}}{a^{1/3}}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{(-1)^{1/3}}{a^{1/3}}\right\}$$

```
NSolve[a x^3-1==0,x]
```

$$\left\{x \rightarrow -\frac{0.5 + 0.8660254037844387i}{a^{1/3}}\right\}, \left\{x \rightarrow -\frac{0.5 - 0.8660254037844388i}{a^{1/3}}\right\},$$

$$\left\{x \rightarrow \frac{1.}{a^{1/3}}\right\}$$

```
Solve[2 x^5-3.2 x^3+7.3 x-14==0,x]
```

$$\{x \rightarrow -1.430088700021456 - 0.9042760720039539i\},$$

$$\{x \rightarrow -1.430088700021456 + 0.9042760720039539i\},$$

$$\{x \rightarrow 0.6995754953748784 - 1.0881835477460546i\}$$

$$\{x \rightarrow 0.6995754953748784 + 1.0881835477460546i\}$$

$$\{x \rightarrow 1.4610264092931553\}$$

```
NSolve[2 x^5-3.2 x^3+7.3 x-14==0,x]
```

$$\{x \rightarrow -1.430088700021456 - 0.9042760720039539i\},$$

$$\{x \rightarrow -1.430088700021456 + 0.9042760720039539i\},$$

$$\{x \rightarrow 0.6995754953748784 - 1.0881835477460546i\}$$

$$\{x \rightarrow 0.6995754953748784 + 1.0881835477460546i\}$$

$$\{x \rightarrow 1.4610264092931553\}$$

Перше рівняння розв'язане за допомогою функції `Solve[f,x]` з представленням коренів в нормальній формі. Функція `NSolve[f,x]` їх видала в числовій формі. Відзначимо, що якщо рівняння містить коефіцієнти в нормальній формі, то корені будуть визначені у вигляді чисел, представлених в нормальній формі і не будуть відрізнятися від розв'язку отриманого за допомогою функції `NSolve[f,x]`.

8.2.2. Функція `NRoots`

Функція `NRoots` має вигляд:

`NRoots[f,x]`, де

f	— рівняння, яке розв'язується;
x	— шукана невідома.

Відкликом цієї функції є корені рівняння $f(x) = 0$, представленні у нормальній формі. Розглянемо на прикладах застосування функції `NRoots[f, x]`.

Приклад 8.5. Визначити корені рівнянь

$$x^2 + \frac{13}{28}x - \frac{3}{14} = 0,$$

$$2x^7 + 3x^6 - 12x^2 + 5 = 0,$$

$$x^{10} - 1 = 0,$$

$$2^x - 4x + 1 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи вбудовані функції `NRoots[f, x]`, отримуємо

```
NRoots[x^2+13/28 x-3/14==0, x]
  x == -0.75 || x == 0.285714
NRoots[2 x^7+3 x^6-12 x^2+5==0, x] |
  x== -1.6147152813957173`-0.7294064649822042`i ||
  x== -1.6147152813957173`+0.7294064649822042`i ||
  x== -0.4173393384413579` ||
  x== 0.1147195547572578`-1.3716602453531235`i ||
  x== 0.1147195547572578`+1.3716602453531235`i ||
  x== 0.9586653958591383`-0.2968262106007846`i ||
  x== 0.9586653958591383`+0.2968262106007846`i
NRoots[x^10-1==0, x]
  x== -0.9999999999999999` ||
  x== -0.8090169943749475`-0.5877852522924731`i ||
  x== -0.8090169943749475`+0.5877852522924731`i ||
  x== -0.309016994379474`-0.9510565162951535`i ||
  x== -0.309016994379474`+0.9510565162951535`i ||
  x== 0.309016994379474`-0.9510565162951535`i ||
  x== 0.309016994379474`+0.9510565162951535`i ||
  x== 0.8090169943749475`-0.5877852522924731`i ||
  x== 0.8090169943749475`+0.5877852522924731`i || x==1.
NRoots[2^x-4 x+1==0, x]
  NRoots[1 + 2^x - 4 x == 0, x]
```

8.2.3. Функція FindRoot

Функція `FindRoot` має вигляд:

`FindRoot[f, {x, x0}]`, де

<code>f</code>	— рівняння;
<code>x</code>	— шукана невідома (корінь (корені) рівняння);
<code>x₀</code>	— початкове наближення.

Функція `FindRoot[f, {x, x0}]` знаходить корені рівняння $f(x) = 0$ з області значень x близьких до x_0 .

Технологія визначення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з використанням функції `FindRoot[f, {x, x0}]` така:

- визначення області ізоляції шуканого кореня і вибір значення наближення x_0 ;
- введення рівняння $f(x) = 0$ з присвоєнням унікального імені;
- застосування вбудованої функції `FindRoot[f, {x, x0}]` з вибраним значенням x_0 ;
- отримання розв'язку після натискання комбінації клавіш `<Shift><Enter>`.

Розглянемо приклади.

Приклад 8.6. Визначити корені рівняння

$$3^x - 9x + 1 = 0,$$

вибравши значення наближень з графіка функції $f(x) = 3^x - 9x + 1$.

Розв'язок. З рис. 8.1. бачимо, що рівняння має два корені, областями ізоляції яких можуть бути $x_0 \supset (0,1)$ та $x_0 \supset (2.5,3)$

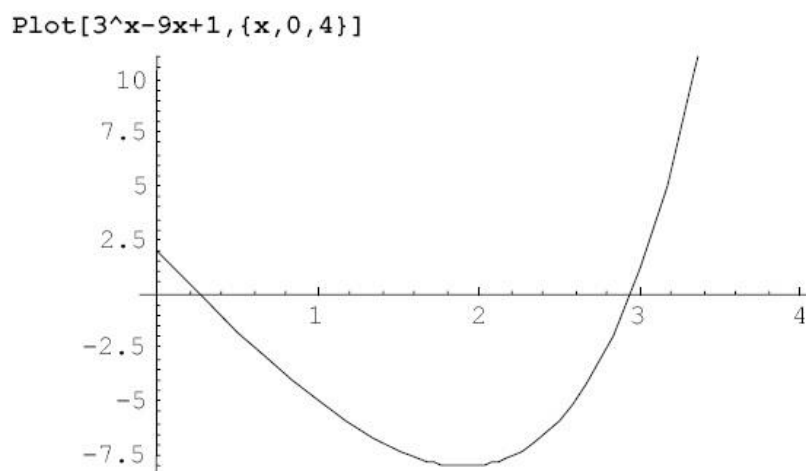


Рис. 8.1. Графік функції $f(x) = 3^x - 9x + 1$.

При виборі початкового наближення потрібно бути уважним, особливо у випадках, коли рівняння має декілька коренів. Може здаватись, що при встановленому користувачем наближенні x_0 буде визначений не той корінь, що очікується. В даному випадку незначна зміна x_0 приводить до іншого розв'язку, зокрема при $x_0 = 1.9$ функція `FindRoot` знаходить корінь $x = 0.258755$, а при $x_0 = 2$ — $x = 2.94964$.

```
F:=3^x-9 x+1==0
FindRoot[F,{x,0}]
{x->0.258755}
FindRoot[F,{x,3}]
{x->2.94964}
FindRoot[F,{x,1.9}]
{x->0.258755}
FindRoot[F,{x,2}]
{x->2.94964}
FindRoot[F,{x,-50}]
{x->0.258755}
FindRoot[F,{x,20}]
{x->6.37646}
```

Зауважимо, що область ізоляції кореня може бути дуже широкою. В даному випадку розв'язок отримано при $x_0 = -50$. Однак при $x_0 = 20$ система видала неіснуючий розв'язок $x = 6.37646$. Щоб унеможливити подібні помилки слід вибирати x_0 з вузької області ізоляції кореня.

8.3. Інтервальні методи розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь

Інтервальними називаються такі методи, які вимагають для своєї реалізації визначення області ізоляції кореня [27]. З цією метою в підпакеті `IntervalRoots` пакету розширення `NumericaiMath` є такі функції

```
IntervalBisection[f,x,int,eps]
IntervalSecand[f,x,int,eps]
IntervalNewton[f,x,int,eps]
```

В функціях прийнято позначення:

f	— рівняння;
x	— шукана невідома;
int	— інтервал ізоляції кореня;
eps	— похибка обчислення кореня.

Розглянемо детально ці функції і приклади їх застосування.

IntervalBisection[f, x, int, eps]	— знаходить корінь рівняння $f(x) = 0$ методом дихотомії (половинного ділення) в інтервалі ізоляції $[x_1, x_2]$ з похибкою, що не перевищує eps;
IntervalSecand[f, x, int, eps]	— знаходить методом хорд (січних) корінь рівняння $f(x) = 0$ в інтервалі ізоляції $[x_1, x_2]$ з похибкою, що не перевищує eps;
IntervalNewton[f, x, int, eps]	— знаходить методом січної (Ньютона) корінь рівняння $f(x) = 0$ в інтервалі ізоляції $[x_1, x_2]$ з похибкою, що не перевищує eps.

Технологія визначення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з використанням функції FindRoot[f, {x, x₀}] така:

- i. визначення числа дійсних коренів та областей їх ізоляції;
- ii. звернення до пакету розширення
`<<NumericalMath`IntervalRoots`;`
- iii. вибір виду функції Interval;
- iv. введення функції Interval;
- v. отримання розв'язку після натискання комбінації клавіш
`<Shift><Enter>`.

Приклад 8.7. Визначити корені рівняння

$$2^x - 4x + 1 = 0,$$

за допомогою всіх функцій інтервальних методів.

Розв'язок. Визначимо число дійсних коренів і областей їх ізоляції методом візуалізації обчислень рис. 8.2. З графіка бачимо, що функція двічі перетинає вісь x , тобто рівняння має два дійсних корені, областями ізоляції яких можуть бути $x_0 \supset (0,1)$ та $x_0 \supset (3,4)$. Аналізуючи розв'язання за

описаною технологією рівняння бачимо, що розв'язок, отримано точний розв'язок в аналітичному вигляді за допомогою функції `Solve`.

`Plot[2^x-4 x+1,{x,-1,5}]`

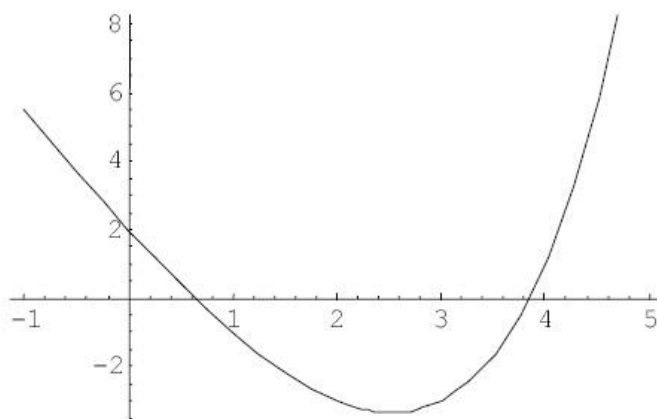


Рис. 8.2. Графік функції $f(x) = 2^x - 4x + 1$.

```
F:=2^x-4 x+1
```

```
Solve[F==, 0, x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{\text{Log}[2] - 4 \text{ProductLog} \left[-\frac{\text{Log}[2]}{2 \cdot 2^{3/4}} \right]}{4 \text{Log}[2]} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{\text{Log}[2] - 4 \text{ProductLog} \left[-1, -\frac{\text{Log}[2]}{2 \cdot 2^{3/4}} \right]}{4 \text{Log}[2]} \right\} \right\}$$

```
N[%]
```

```
{{x->0.639428},{x->3.84666}}
```

```
<<NumericalMath`IntervalRoots`
```

```
IntervalBisection[F,x,Interval[{0.,5.}],.001]
```

```
Interval{0.625,0.664063},{3.78906,3.90625}
```

```
IntervalSecant[F,x,Interval[{0.,5.}],.001]
```

```
Interval{0.639415,0.639433},{3.84665,3.84674}
```

```
IntervalNewton[F,x,Interval[{0.,5.}],.001]
```

```
Interval{0.639302,0.639504},{3.84666,3.84666}
```

Зверніть увагу на те, що при розв'язуванні рівнянь інтервальними методами відповіддю є інтервал значень x в середині якого є точне значення кореня. Чим вужчий цей інтервал, тим точніший розв'язок. Якщо інтервал рівний нулю, то відповідь отримана з наперед заданою точністю. Аналізуючи відповіді бачимо, що корінь з області ізоляції $(0,1)$, точне значення якого 0.639428, отриманий з найбільшою точністю методом хорд, а корінь з області $(3,4)$ — методом дотичних. Метод дотичних видав розв'язок, який співпадає з точним.

Слід мати на увазі, що ці висновки мають приватний характер. При розв'язуванні другої задачі вони можуть бути зовсім іншими, наприклад, метод дихотомії виявиться найкращим.

8.4. Визначення коренів рівнянь із застосуванням інтерполяції

Суть методу полягає в тому, що функція $f(x)$, що відповідає рівнянню $f(x) = 0$, інтерполюється в області ізоляції кореня. Утворюється нова функція $f_1(x)$, корінь якої і є розв'язком. Підвищення точності результату і скорочення часу розв'язку досягається за рахунок зменшення обсягу обчислень.

Метод реалізується вбудованою функцією `InterpolateRoot`, що має вигляд

`InterpolateRoot[f, {x, a, b}]`, де

<code>f</code>	— функція вихідного рівняння $f(x) = 0$;
<code>x</code>	— шукана невідома;
<code>a, b</code>	— область ізоляції кореня.

Технологія визначення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з використанням функції `FindRoot[f, {x, x0}]` така:

- i. звернення до пакету розширення
`<<NumericalMath`InterpolateRoot`;`
- ii. визначення області ізоляції кореня `a, b`;
- iii. введення функції `InterpolateRoot[f, {x, a, b}]`;
- iv. отримання розв'язку після натискання комбінації клавіш `<Shift><Enter>`.

Функція `InterpolateRoot` має такі опції:

`WorkingPrecision->n`

`AccuracyGoal->n`

`ShowProgress->True (False)`

В опціях `n` — число, що визначає точність побудови і обчислення кореня.

Приклад 8.8. Визначити корені рівнянь

$$x + \ln x - 0.5 = 0,$$

$$2^x - 4x + 1 = 0,$$

$$e^{2x} + 3x^3 - 125 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи описану вище технологію, отримуємо

```
F:=x+Log[x]-0.5
FindRoot[F,{x,0.5}]
{x->0.7662249}
<<NumericalMath`InterpolateRoot`
InterpolateRoot[F,{x,0.5,1}]
{x->0.766248608161750245789587}
F1:=2^x-4 x+1
FindRoot[F1,{x,3}]
{x->3.84666}
InterpolateRoot[F,{x,3,4}]
{x->3.846656301183044001833}
F3:=E^(2x)+3 x^3-125
FindRoot[F3,{x,2,4}]
{x->2.25358}
InterpolateRoot[F3,{x,2,4}]
{x->2.253583456322778330991826294}
```

Приклад 8.9. Визначити корені рівняння $3^x - 9x + 2 = 0$ за допомогою функції `InterpolateRoot[f,{x,a,b}]` та її опцій, якщо область ізоляції кореня (2,4).

Розв'язок. Використовуючи функцію `InterpolateRoot`, отримуємо

```
F:=3^x-9 x+2
FindRoot[F,{x,2,3}]
{x->2.89481}
<<NumericalMath`InterpolateRoot`
InterpolateRoot[F,{x,2,3}]
{x->2.89480716495696698997583970}
InterpolateRoot[F,{x,2,3}, WorkingPrecision->100]
{x->2.8948071649569669899758397040568177545590105909663484
8272931780757917185178896439371615562486736592910368}
InterpolateRoot[F,{x,2,3}, AccuracyGoal->100]
{x->2.8948071649569669899758397040568177545590105909663484
8272931780757917185178896439371615562486736592910368127628
258920084572639252}
```

```

InterpolateRoot[F,{x,2,3}, ShowProgress->False]
{x->2.89480716495696698997583970}
InterpolateRoot[F,{x,2,3}] ShowProgress->True
{x->2.777777777777777777777777777778}
{21,0,-0.20541244474373855647}
{1,2.92282971783602406378648624443516912680595}
{21,21,0.0754656401588680053386508133521}
{6,2.894807164725532644987185831168619188141458208540}
{28,21,-2.31136140988381275619094875794x10-10}
{14,2.894807164956966989565635956349036261269223288772307
440352313}
{40,21,-4.10195181001026877235300737598x10-19}
{27,2.894807164956966989975839695261704062977011589194922
968760752}
{x->2.89480716495696698997583970}

```

З порівняння результатів розрахунків видно, що опції дозволяють підвищити точність визначення кореня. Однак при практичних розрахунках всі отримані розв'язки можна вважати рівноцінними. Визначити корінь з точністю 5 знаків після коми, як це отримано для інженерних розрахунків за допомогою функції `FindRoot`.

8.5. Перевірка правильності розв'язку рівняння

Ефективним способом перевірки достовірності розв'язку алгебраїчних та трансцендентних рівнянь є підстановка обчислень значень коренів у вихідне рівняння [27].

В системі Mathematica технологія розв'язання рівняння з перевіркою правильності відповіді базується на операціях:

- i. ввести рівняння, яке розв'язується, присвоївши йому унікальне ім'я;
- ii. вивід на екран рівняння, натиснувши <Shift><Enter>;
- iii. ввести відповідну вбудовану функцію розв'язування рівняння (присвоюючи їй унікальне ім'я або без присвоєння унікального імені);
- iv. розв'язати рівняння, натиснувши комбінацію <Shift><Enter>;
- v. ввести знак перевірки розв'язку `f/.z`, де `z` — ім'я вбудованої функції, або стрічка виводу розв'язку вигляду ;

vi. перевірка розв'язку натисканням комбінації клавіш $\langle \text{Shift} \rangle \langle \text{Enter} \rangle$.

Результат може мати різний вигляд, який залежить від самого розв'язку.

Приклад 8.10. Розв'язати рівняння

$$\begin{aligned} ab^x - c = 0, \quad 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0, \\ x^7 - 1 = 0, \quad 3^x - 9x + 1 = 0, \quad 2^x - 4x + 1 = 0, \end{aligned}$$

та перевірити правильність відповідей.

Розв'язок. Слідуючи описаній технології, отримуємо

```
f1=ab^x-c
ab^x-c
z1=Solve[f1==0,x]

$$\left\{ \left( x \rightarrow \frac{\text{Log}\left[\frac{c}{a}\right]}{\text{Log}[b]} \right) \right\}$$

f1/.z1
{0}
f2=2x^4-3x^3+2x^2-1
-1+2x^2-3x^3+2x^4
z2=Solve[f2==0,x]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{2} \right\}, \{x \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow (-1)^{1/3}\}, \{x \rightarrow -(-1)^{2/3}\} \right\}$$

f2/.z2
{0,0,2-2(-1)^{1/3}+2-2(-1)^{2/3},2-2(-1)^{1/3}+2+2(-1)^{2/3}}
Simplify[%]
{0,0,0,0}
f3=x^7-1
-1+x^7
z3=Solve[f3==0,x]

$$\left\{ \{x \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow -(-1)^{1/7}\}, \{x \rightarrow (-1)^{2/7}\}, \{x \rightarrow (-1)^{4/7}\}, \right.$$


$$\left. \{x \rightarrow -(-1)^{5/7}\}, \{x \rightarrow (-1)^{6/7}\} \right\}$$

f3/.z3
{0,0,0,0,0,0,0}
f4=3^x-9x+1
1+3^x-9x
z4=FindRoot[f4==0,{x,3}]
{x->2.94964}
f4/.z4
1.49321x10^-10
```

```

f5=2^x-4x+1
1+2^x-4x
z1=NSolve[f5==0]
{{x->0.639428},{x->3.84666}}
f5/.z5
{0.,0.}

```

Таким чином бачимо, що розв'язок рівняння за допомогою функції `Solve` та `NSolve` виконано вірно. При підстановці коренів у вихідне рівняння відповіддю є нуль для випадку кожного з коренів. Щоправда, при розв'язанні рівняння $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ для спрощення результату довелося застосувати функцію `Simplify`. Перевірка рівняння $3^x - 9x + 1 = 0$, отриманого за допомогою функції `FindRoot`, не дала позитивної відповіді рівної нулеві. Щоправда, ми можемо вважати відповідь правильною, оскільки відхилення становить близько 1.5×10^{-10} .

Аналіз розв'язків алгебраїчних та трансцендентних рівнянь та перевірки результатів обчислення коренів показує, що перевірка дає завжди вірний результат, якщо розв'язок точний. Зазвичай це має місце при аналітичних методах розв'язування рівнянь. Якщо розв'язок рівняння шукається в чисельному вигляді і є наближеним, то результат перевірки може бути не тривіальним або його не буде зовсім.

Приклад 8.11. Розв'язати рівняння

$$x^5 - ax^3 + 2x^2 - 2a = 0$$

та перевірити його результати.

Розв'язок. Використовуючи функцію `Roots`, отримаємо

```

s1=x^5-a x^3+2 x^2-2 a
-2a+2x^2-ax^3+x^5
r1=Roots[s1==0,x]
x == -(-1)^(2/3)2^(1/3)||x == (-2)^(1/3)||x == -2^(1/3)||x == sqrt(a)||x == -sqrt(a)
s1/.r1
-2a+2x^2-ax^3+x^5/.x == -(-1)^(2/3)2^(1/3)||x == (-2)^(1/3)||x == -2^(1/3)||x == sqrt(a)||
x == -sqrt(a)

```

```

x=Sqrt[a]
 $\sqrt{a}$ 
0
x=-Sqrt[a]
 $-\sqrt{a}$ 
0
x=-2^(1/3)
s1
 $-2^{1/3}$ 
0
x=(-2)^(1/3)
s1
 $(-2)^{1/3}$ 
0
x=(-1)^(2/3)2^(1/3)
s1
 $-(-1)^{2/3}2^{1/3}$ 
0

```

Як бачимо перевірка не дала очікуваного результату, хоча розв'язок вірний, в чому переконуємось, підставляючи кожне значення кореня у вихідне рівняння.

Зустрічаються випадки, коли результат перевірки залежить від вигляду вбудованої функції розв'язування рівняння. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 8.12. Знайти корені рівняння

$$x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи функції `Nsolve` та `NRoots`, отримаємо

```

f=x^5+4 x^4+5 x^3-7 x^2+x+1
1 + x - 7x^2 + 5x^3 + 4x^2 + x^5
z=NSolve[f==0,x]
{{x -> -2.412273378741147` - 1.7628166835194017`i},
 {x -> -2.412273378741147` + 1.7628166835194017`i},
 {x -> -0.29426055789544936`},
 {x -> 0.5594036576888717` - 0.2603215017839416`i},
 {x -> 0.5594036576888717` + 0.2603215017839416`i}}
f/.z
{-5.684341886080802` * ^ - 14 + 2.1316282072803006` * ^ - 14i,
 -5.684341886080802` * ^ - 14 - 2.1316282072803006` * ^ - 14i,

```

```

-6.331740687315346` * ^ - 17,
-6.938893903907228` * ^ - 17 + 3.608224830031759` * ^ - 16i,
-6.938893903907228` * ^ - 17 - 3.608224830031759` * ^ - 16i}
z1=NRoots[f==0,x]
x == -2.412273378741147` - 1.7628166835194017`i|
|x == -2.412273378741147` + 1.7628166835194017`i|
|x == 029426055789544936`|
|x == 0.5594036576888717` - 0.2603215017839416`i|
|x == 0.5594036576888717` + 0.2603215017839416`i
f/.z1
1 + x - 7x^2 + 5x^3 + 4x^2 + x^5 /.x == -2.412273378741147` - 1.7628166835194017`i|
|x == -2.412273378741147` + 1.7628166835194017`i|
|x == 029426055789544936`|
|x == 0.5594036576888717` - 0.2603215017839416`i|
|x == 0.5594036576888717` + 0.2603215017839416`i

```

Таким чином, бачимо, що перевірка розв'язків отриманих за допомогою функції `Nsolve` дала відповіді, що дозволяють вважати розв'язок вірним. Водночас, функція `NRoots` видала ті ж відповіді, однак не вдалось здійснити перевірку стандартним методом.

Питання, тести для самоконтролю

1. Які рівняння називаються трансцендентними?
2. Охарактеризуйте технологію системи Mathematica для розв'язування рівнянь в аналітичному вигляді.
3. Які опції функції `Solve` використовуються при розв'язуванні рівнянь в аналітичному вигляді?
4. Охарактеризуйте використання в системі Mathematica функції `Roots` для знаходження коренів поліномів.
5. Як використовується функція `NSolve` для розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь?
6. Як використовується функція `NRoots` для розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь?

7. Як використовується функція `FindRoot` для розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь?
8. Опишіть технологію визначення коренів рівнянь із застосуванням інтерполяції в системі Mathematica.
9. Як в системі Mathematica здійснюється перевірка правильності розв'язання рівнянь?
10. Чи завжди вдається однозначно перевірити правильність розв'язання рівнянь в системі Mathematica?

Обов'язкові та додаткові задачі

Використовуючи вбудовані функції системи Mathematica розв'яжіть рівняння та перевірте правильність отриманих результатів.

1. $kx^4 + mx^2 + n = 0,$
2. $(k - x)(m - x)(x + mn)(x + 2)(x - 2) = 0.$
3. $2^x + 6x - 2 = 0,$
4. $x^2 + \ln x - 1 = 0,$
5. $2^x - 4x + 1 = 0,$
6. $e^{3x} + 4x^4 - 27 = 0,$
7. $\ln(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1,$
8. $\ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = 1,$
9. $2^x - 4x + 1 = 0,$
10. $|x - a| + |x - b| = c,$
11. $2^x - 4x + 1 = 0,$
12. $\arcsin(2x + 1) = x^2,$
13. $\cos x - x + 5 = 0,$
14. $x^2 + 4 \sin x = 0,$
15. $3 \sin \sqrt{x} + 0,35x - 0,8 = 0.$

наступним способом. Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, в протилежному випадку вона називається *несумісною*. Сумісна система може мати єдиний розв'язок або безліч розв'язків. Якщо система має нескінченне число розв'язків, її називають *невизначеною*. Розглянемо приклади таких систем.

Система рівнянь

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5\end{aligned}$$

має єдиний розв'язок: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, тобто вона є сумісною і визначеною.

Система

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5\end{aligned}$$

має безліч розв'язків, які задовольняють наступним рівностям: $x_1 + 2x_2 = 2$, $2x_2 - 3x_3 = -1$, тобто є сумісною і невизначеною. Визначені лише умови розв'язку. В цій системі перше та друге рівняння ідентичні.

Система

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 3\end{aligned}$$

не має жодного розв'язку, тобто є несумісною. Дійсно, в цій системі буде три однакових рівняння після ділення другого рівняння на 2, а третього на 3.

Існує велика кількість різних методів розв'язування лінійних рівнянь. Всі вони можуть бути розділені на дві групи: точні методи та методи послідовних наближень. Слід при цьому мати на увазі, що точними є лише аналітичні методи. Якщо з їх допомогою розв'язувати систему рівнянь з числовими коефіцієнтами, то точних розв'язків можна не отримати за рахунок помилок обчислень, пов'язаних з обмеженістю пам'яті комп'ютера.

(9.4)

Приймаючи $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ в якості перших наближень і підставляючи їх у вихідне рівняння, отримуємо друге наближення. Повторюючи обчислення, можна отримати значення невідомих на будь-якій v -ій ітерації.

При комп'ютерній реалізації ітераційного методу виникають питання:

- Як вибрати початкові наближення $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$?
- Які умови збіжності ітераційного процесу?
- На якій ітерації закінчити обчислення?

Відповіді на ці запитання разом з розрахунковими співвідношеннями й будуть алгоритмом розв’язування систем лінійних рівнянь методом ітерацій. Дамо відповіді на ці запитання для випадку лінійних систем алгебраїчних рівнянь.

Вибір початкових наближень

Якщо області, в яких знаходяться невідомі змінні x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, відомі, то початкові значення вибираються довільно з цієї області. Якщо такі невідомі, то в якості початкових наближень можна взяти вільні члени

$$\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Умов збіжності ітераційного процесу

Умовою збіжності ітераційного процесу є: *сума абсолютних значень відношень коефіцієнтів в кожному рівнянні системи до діагонального повинна бути меншою одиниці.*

Забезпечити збіжність ітераційного процесу можна шляхом перетворення вихідної системи до еквівалентної. Це перетворення можна виконати шляхом перестановки рівнянь, операцій додавання, і віднімання рівнянь, множення на постійні коефіцієнти.

Розглянемо приклад забезпечення збіжності ітераційного процесу.

Приклад 9.1. Розв'язати методом ітерацій систему рівнянь

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ -7x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 6, \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 &= 12.\end{aligned}$$

Розв'язок. Власне розв'язками системи є $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{11}{2}$, $x_3 = \frac{15}{2}$.

Однак, варто звернути увагу на те, що розв'язувати цю систему методом ітерацій небезпечно, оскільки тут не забезпечені умови збіжності ітерацій.

Дійсно, в першому рівнянні $\left|\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| > 1$, в другому — $\left|\frac{7}{2}\right| + \left|\frac{4}{2}\right| > 1$, в третьому — $\left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| > 1$.

Для забезпечення умов збіжності перетворимо вихідну систему рівнянь.

Друге рівняння поставимо в перший рядок. Тоді $\left|\frac{2}{7}\right| + \left|\frac{4}{7}\right| < 1$. Зазначимо, що перше рівняння можна також замінити третім.

Помножимо перше рівняння на 4 і додамо до другого. Тоді отримаємо $x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 4$. Тепер $\left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{8}{10}\right| < 1$. Це рівняння можна зробити другим.

Для отримання третього рівняння виконаємо такі перетворення: додамо всі рівняння, отримане рівняння помножимо на 2 та додамо до другого. Тоді отримаємо $-x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 44$. Тепер $\left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{2}{8}\right| < 1$, умова збіжності ітерацій виконана. В результаті всіх цих операцій отримано наступну еквівалентну систему рівнянь

$$\begin{aligned}-7x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 6, \\ x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 44.\end{aligned}$$

Тепер умови збіжності ітерацій виконані в повній мірі. Розв'язок системи рівнянь ітераційним методом можливе за початкових умов

$$x_1^{(0)} = -\frac{6}{7}, \quad x_2^{(0)} = 1, \quad x_3^{(0)} = \frac{44}{8} = 5.5.$$

Ознака закінчення обчислень

Ознакою закінчення ітераційного процесу з умов точності можна в першому наближенні вважати умову

$$\left| x_k^{(v+1)} - x_k^{(v)} \right| \leq \varepsilon,$$

де $x_k^{(v+1)}$, $x_k^{(v)}$ — значення k -го невідомого на $(v+1)$ та (v) ітераціях, ε — допустима похибка обчислення невідомих.

Існує два способи розв'язання рівнянь методом ітерацій — метод простої ітерації та метод Зейделя. Користувач не має можливості вибрати метод ітерацій, оскільки функції та команди, які реалізують метод ітерації в системі комп'ютерної алгебри Mathematica не реалізують інших методів.

Алгоритми методу ітерацій

Алгоритм методу простої ітерації складається з сукупності умов вибору початкових наближень, розрахункових співвідношень та ознаки закінчення обчислень.

Умови вибору початкових наближень

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, x_n^{(0)} = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Розрахункові співвідношення

[illegible]

Ознака закінчення обчислень

$$\left| x_k^{(v+1)} - x_k^{(v)} \right| \leq \varepsilon.$$

В алгоритмі простої ітерації всі значення невідомих на кроці $v + 1$ обчислюються за їх значенням на попередньому кроці v . В алгоритмі Зейделя результати обчислення x_1 на кроці $v + 1$ використовуються для обчислень $x_2, x_3, \dots, x_n$ на цьому кроці; результати обчислення x_2 на кроці $v + 1$

Розрахункові співвідношення мають вигляд

$$\begin{aligned} x_1^{(v+1)} &= \varphi_1(x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}), \\ x_2^{(v+1)} &= \varphi_1(x_1^{(v+1)}, x_2^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{(v+1)} &= \varphi_1(x_1^{(v+1)}, x_2^{(v+1)}, \dots, x_n^{(v+1)}). \end{aligned}$$

Очевидно, що алгоритм Зейделя дозволяє отримати розв'язок з більшою точністю, ніж алгоритм простої ітерації при тому ж числі ітерацій.

Порівняльна оцінка точних та ітераційних методів

В методі простої ітерації на одну ітерацію необхідно виконати близько $2n^2$ арифметичних операцій типу додавання та множення, в той час застосування методу Гауса для розв'язання системи n рівнянь необхідно виконати $\frac{2}{3}n^3$ операцій. Тоді очевидно, що метод ітерацій більш ефективний у випадку, коли можна отримати розв'язок задачі не більше ніж за $\frac{1}{3}n$ ітерацій, тобто його доцільно використовувати при розв'язуванні рівнянь великих розмірностей.

Логічна схема ітераційних методів проста, тому комп'ютерні програми менші, ніж в методі Гауса. Ітераційні методи дозволяють розпаралелювати алгоритм, що дає можливість ефективно розв'язувати рівняння на мультипроцесорних комп'ютерах.

Недоліки ітераційних методів в тому, що вони вимагають від користувача перевірки умов збіжності ітерацій і якщо вони не виконуються, то перетворювати вихідні рівняння до вигляду, коли забезпечується збіжність ітераційного процесу. Крім цього, ітераційні методи вимагають вибору початкових наближень. Все це суттєво ускладнює комп'ютерні технології розв'язування рівнянь.

9.1.2. Розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь аналітичними методами можливе лише в рідкісних випадках. Тут загальних методів та алгоритмів не існує. Нелінійні рівняння розв'язуються зазвичай чисельними методами. Найбільш популярними з них є методи Ньютона, ітерацій, найшвидшого спуску.

Усі ці методи є ітераційними, які реалізують метод послідовних наближень. Алгоритмом чисельних методів є сукупність правил вибору початкових наближень, розрахункових співвідношень (формул) та ознаки закінчення обчислень.

Метод Ньютона, ітераційний та метод найшвидшого спуску різняться лише формулами обчислення наближень. В системах символьної математики найпоширенішими є методи Ньютона та ітерацій. Коротко розглянемо їх.

Визначення початкових наближень

Нелінійні алгебраїчні рівняння можуть мати велику кількість розв'язків. Тому вибір початкових наближень, від яких і залежить вигляд розв'язку, має здійснюватись досить ретельно. Діапазон, з якого вибираються наближення, має бути досить вузьким.

Існує два способи вибору початкових наближень: графічний та табличний.

Табличний спосіб

При цьому способі функція $f_1(x_1, x_2)$ представляється у вигляді таблиці. Табличні значення підставляються у $f_2(x_1, x_2) = 0$. Визначаються значення x_1, x_2 , при яких функція $f_2(x_1, x_2)$ змінює знак. Ці значення й приймаються в якості початкових наближень.

Графіки та таблиці легко створюються за допомогою комп'ютерних технологій, зокрема в середовищі системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

Метод Ньютона

Метод Ньютона є ітераційним. На кожному кроці за відомим попереднім наближенням x_{i-1} визначається наступне більш точне значення

$$x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де h_i — уточнення до попереднього розв'язку.

Для визначення уточнення нелінійна система рівнянь замінюється деякою лінійною системою, розв'язки якої є уточненнями h_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким чином, для визначення уточнень необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь стільки разів, скільки вимагається ітерацій для забезпечення необхідної точності визначення невідомих.

Метод Ньютона є найшвидшим по збіжності ітерацій. Часто за декілька кроків можна отримати розв'язок з високою точністю. Однак цей метод найбільш трудомісткий, оскільки він вимагає розв'язування системи лінійних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу. Метод є достатньо критичним до вибору початкових значень невідомих. Якщо початкові значення вибрані невдало, то можна отримати розв'язок не той, що потрібно, або ж зовсім не отримати його (розбіжний процес).

Ітераційні методи

Реалізація ітераційних методів при розв'язуванні нелінійних рівнянь не відрізняється від методів ітерацій для випадку лінійних систем. Тут лише виникають труднощі зведення систем рівнянь до вигляду

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

та особливо до вигляду, що забезпечує збіжність ітерацій.

Як і у випадку лінійних систем, тут використовується метод простої ітерації та метод Зейделя. Перевагою методу є простота алгоритму, що є основною причиною його широкого застосування в системах комп'ютерної алгебри. Недоліком методу є велика трудомісткість забезпечення збіжності ітерацій.

Ознака закінчення ітерацій

В усіх чисельних методах ознакою закінчення ітерацій є умова

$$h_i^{(k)} < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

тобто уточнення всіх невідомих на k -му кроці повинна бути меншою точності, яку вимагається досягти.

Розглянемо технології розв'язування систем лінійних та нелінійних рівнянь в середовищі системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

9.2. Комп'ютерні технології розв'язування рівнянь в системі Mathematica

Система Mathematica оснащена багатим арсеналом розв'язування систем алгебраїчних рівнянь. Вбудовані функції дозволяють розв'язувати системи лінійних і нелінійних рівнянь в аналітичному та чисельному вигляді. Дають можливість досить ефективно та оригінально перевіряти правильність результатів. В процесі функціонування система видає коментарі, які дозволяють користувачу приймати рішення по відношенню до отриманих результатів.

Основними функціями розв'язування систем рівнянь є: `Solve[F,X]`, `Solve[F,X,Y]`, `N[Solve[F,X]]`, `FindRoot[F,X]`.

Розглянемо ці функції, опишемо технологію їх реалізації, наведемо приклади та задачі для самостійного розв'язування.

9.2.1. Функція `Solve[F,X]`

Функція `Solve[F,X]` дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь в аналітичному вигляді. Вона представляється у вигляді

`Solve[{f1, f2, ...}, {x1, x2, ...}]`

де

f_i	— i -те рівняння, записане в довільній формі;
x_i	— i -те невідоме.

Рівняння $f_1, f_2, \dots$ можуть бути представлені через об'єднуючий знак `&&`.

Зокрема, функція `Solve[F,X]` може бути представлена у вигляді

`Solve[{a*x^2+y==b, x+2*y==a+b}, {x,y}]`

`Solve[{a*x^2+y==b&x+2*y==a+b}, {x,y}]`

Вводячи рівняння знак множення (*) можна замінити натисканням клавіші <Пробіл>.

При розв'язуванні практичних задач буває зручно, а іноді й доцільно, вводити рівняння окремо від функції Solve, присвоюючи їм імена, які потім вводити в функцію Solve замість рівнянь. Наприклад

```
f1=a*x^2+y==b; f2=x+2*y==a+b
```

```
Solve[{f1, f2}, {x,y}]
```

або

```
Solve[{f1&&f2}, {x,y}]
```

Таке представлення спрощує перевірку правильності розв'язання системи рівнянь.

З математики відомо, що система лінійних рівнянь будь-якого порядку має розв'язок і до того ж єдиний [27]. Тому в даному випадку функція Solve[F,X] обмежень на порядок рівнянь не має.

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Технологія розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь така:

- i. ввести рівняння з присвоєнням кожному з них, з використанням знаку присвоювання (=), унікального імені;
- ii. ввести функцію `Solve[{f1, f2, ...}, {x1, y, ...}]` або `Solve[{f1&&f2&&...}, {x1, y, ...}]`;
- iii. отримати розв'язок, натиснувши комбінацію клавіш <Shift><Enter>;
- iv. перевірити правильність розв'язку системи рівнянь.

Наведемо приклади розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь в аналітичному вигляді.

Приклад 9.2. Розв'язати системи лінійних рівнянь

$$\begin{array}{ll} x_1 + ax_2 + bx_3 = y_1, & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ (2 + a)x_1 + x_2 + cx_3 = y_2, & x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = y_3, & 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 3, \\ & x_1 + 7x_2 - x_3 = 3.5, \\ & -1.6x_1 + 3.7x_2 = 12, \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7.5. \end{array}$$

Розв'язок. Використовуючи описану вище технологію, отримуємо

$$f1=x1+a*x2+b*x3==y1$$

$$x1 + ax2 + bx3 == y1$$

$$f2=(2+a)*x1+x2+c*x3==y2$$

$$(2+a)x1 + x2 + cx3 == y2$$

$$f3=a*x1+b*x2+c*x3==y3$$

$$ax1 + bx2 + cx3 == y3$$

$$\text{Solve}[\{f1, f2, f3\}, \{x1, x2, x3\}]$$

$$\left\{ \left\{ x1 \rightarrow -\frac{-cy1 + bcy1 - b^2y2 + acy2 + by3 - acy3}{-ab + 2b^2 + ab^2 + c - 2ac - bc}, \right. \right.$$

$$x2 \rightarrow -\frac{2cy1 + aby2 - cy2 - 2by3 - aby3 + cy3}{-ab + 2b^2 + ab^2 + c - 2ac - bc},$$

$$\left. x3 \rightarrow -\frac{ay1 - 2by1 - aby1 - a^2y2 + by2 - y3 + 2ay3 + a^2y3}{-ab + 2b^2 + ab^2 + c - 2ac - bc} \right\}$$

$$f4=3*x1-4*x2+2*x3==1$$

$$3x1 - 4x2 + 2x3 == 1$$

$$f5=x1+7*x2-2*x3==-4$$

$$x1 + 7x2 - 2x3 == -4$$

$$f6=2*x1+7*x2+3*x3==3$$

$$2x1 + 7x2 + 3x3 == 3$$

$$\text{Solve}[f4\&\&f5\&\&f6, \{x1, x2, x3\}]$$

$$\left\{ \left\{ x1 \rightarrow -\frac{87}{119}, x2 \rightarrow -\frac{3}{119}, x3 \rightarrow \frac{184}{119} \right\} \right\}$$

$$\text{Solve}[\{x1+7x2-x3==3.5, -1.6x1+3.7x2==12, x1+2x2+5x3==7.5\},$$

$$\{x1, x2, x3\}]$$

$$\{\{x1 \rightarrow -4.31818, x2 \rightarrow 1.37592, x3 \rightarrow 1.81327\}\}$$

Бачимо, що система розв'язала першу систему рівнянь в аналітичному вигляді, другу — у вигляді точних значень невідомих, представлених в раціональній формі. Третя система рівнянь також розв'язана, однак розв'язок представлено у вигляді дійсних чисел. Це пояснюється тим, що система рівнянь точного розв'язку не має. Таким чином, функція `Solve` може розв'язувати рівняння також і в чисельному вигляді.

Отримати розв'язок в явному вигляді можна за допомогою виразу вигляду $\{x_1, x_2, x_3\} /. ,$ який ставиться перед функцією $\text{Solve}[\{x_1, x_2, x_3\} /. \text{Solve}[\{f_1, f_2, f_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}]]$. Відтак, натиснувши комбінацію клавіш <Shift><Enter>, отримуємо розв'язок в явному вигляді. Тепер x_1, x_2, x_3 можна використовувати за призначенням, в тому числі й для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь.

Приклад 9.3. Розв'язати системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= s_1, & 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1, \\ (2+a)x_1 + x_2 + cx_3 &= s_2, & x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= s_3, & 7x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

та перевірити правильність отриманих розв'язків.

Розв'язок. Використовуючи описану технологію, отримуємо

```
f1=ax1+bx2+x3==s1
ax1 + bx2 + x3 == s1
f2=(2+a)x1+x2+c*x3==s2
(2+a)x1 + x2 + cx3 == s2
f3=x1+x2+x3==s3
x1 + x2 + x3 == s3
z=Solve[{f1, f2, f3}, {x1, x2, x3}]
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} x_1 &\rightarrow -\frac{s_1 - cs_1 + s_2 - bs_2 - s_3 + bcs_3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc}, \\ x_2 &\rightarrow -\frac{-2s_1 - as_1 + cs_1 - s_2 + as_2 + 2s_3 + as_3 - acs_3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc}, \\ x_3 &\rightarrow -\frac{s_1 + as_1 - as_2 + bs_2 + as_3 - 2bs_3 - abs_3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \end{aligned} \right\} \right\}$$

```
{f1, f2, f3} /. z
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} &-\frac{s_1as_1 - as_2 + bs_2 + as_3 - 2bs_3 - abs_3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\ &-\frac{b(-2s_1 - as_1 + cs_1 - s_2 + as_2 + 2s_3 + as_3 - acs_3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\ &-\frac{a(s_1 - cs_1 + s_2 - bs_2 - s_3 + bcs_3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \end{aligned} \right\} == s_1, \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c(s1 - cs1 - as2 + bs2 + as3 - 2bs3 - abs3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\
& - \frac{2s1 - as1 + cs1 - s2 + as2 + 2s3 + as3 - acs3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\
& - \frac{(2 + a)(s1 - cs1 + s2 - bs2 - s3 + bcs3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} == s2, \\
& - \frac{s1 + as1 - as2 + bs2 + as3 - 2bs3 - abs3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\
& - \frac{-2s1 - as1 + cs1 - s2 + as2 + 2s3 + as3 - acs3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\
& - \frac{s1 - cs1 + s2 - bs2 - s3 + bcs3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} == s3 \}
\end{aligned}$$

Simplify[%]

{{True,True,True}}

f1/.z

$$\begin{aligned}
& \left\{ - \frac{s1as1 - as2 + bs2 + as3 - 2bs3 - abs3}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \right. \\
& - \frac{b(-2s1 - as1 + cs1 - s2 + as2 + 2s3 + as3 - acs3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} \\
& \left. - \frac{a(s1 - cs1 + s2 - bs2 - s3 + bcs3)}{-1 - 2a + 2b + ab + ac - bc} == s1 \right\}
\end{aligned}$$

Simplify[%]

{True}

$$f1=2x1-x2+4x3==1$$

$$2x1 - x2 + 4x3 == 1$$

$$f2=x1+7x2-2x3== -4$$

$$x1 + 7x2 - 2x3 == -4$$

$$f3=7x1+x2+x3==3$$

$$7x1 + x2 + x3 == 3$$

$$z=\text{Solve}[f1\&\&f2\&\&f3,\{x1,x2,x3\}]$$

$$\left\{ \left\{ x1 \rightarrow \frac{89}{159}, x2 \rightarrow -\frac{113}{159}, x3 \rightarrow -\frac{11}{53} \right\} \right\}$$

{f1,f2,f3}/.z

{{True,True,True}}

$$f1=2x1-x2+4x3==1$$

$$2x1 - x2 + 4x3 == 1$$

```

f2=x1+7x2-2x3== -4
x1 + 7x2 - 2x3 == -4
f3=7x1+x2+x3==3
7x1 + x2 + x3 == 3
{f1,f2,f3}/.Solve[f1&&f2&&f3,{x1,x2,x3}]

$$\left\{\left\{\frac{89}{159}, -\frac{113}{159}, -\frac{11}{53}\right\}\right\}$$

{f1,f2,f3}
{{True,True,True}}

```

В прикладі 9.3 продемонстровано різні форми представлення функції `Solve` і способи перевірки правильності розв'язків системи рівнянь.

Розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь в символічному вигляді

Технологія розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь в символічному вигляді така ж як для систем лінійних рівнянь.

Приклад 9.4. Розв'язати системи нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} x + ay &= b, & xy &= a, \\ x + by^2 &= a + b, & x^2 + y^2 &= ab, \end{aligned}$$

та перевірити правильність отриманих розв'язків.

Розв'язок. Використовуючи описану технологію, отримуємо

```

f1=x+ay==b
x + ay == b
f2=x+by^2==a+b
x + by^2 == a + b
w=Solve[{f1,f2},{x,y}]

$$\left\{\left\{x1 \rightarrow -\frac{87}{119}, x2 \rightarrow -\frac{3}{119}, x3 \rightarrow \frac{184}{119}\right\}\right\}$$

Solve[{x1+7x2-x3==3.5, -1.6x1+3.7x2==12, x1+2x2+5x3==7.5},
{x1,x2,x3}]

$$\left\{\left\{x \rightarrow \frac{-a^2 + 2b^2 - a^{3/2}\sqrt{a+4b}}{2b}, y \rightarrow \frac{a + \sqrt{a}\sqrt{a+4b}}{2b}\right\}\right\},$$


```

$$\left. \frac{(a + \sqrt{a} \sqrt{a + 4b})^2}{4b} + \frac{-a^2 + 2b^2 - a^{3/2} \sqrt{a + 4b}}{2b} == a + b \right\}$$

$$\left\{ \frac{a(a - \sqrt{a} \sqrt{a + 4b})}{2b} + \frac{-a^2 + 2b^2 + a^{3/2} \sqrt{a + 4b}}{2b} == b, \right.$$

$$\left. \frac{(a - \sqrt{a} \sqrt{a + 4b})^2}{4b} + \frac{-a^2 + 2b^2 + a^{3/2} \sqrt{a + 4b}}{2b} == a + b \right\}$$

Simplify[%]

{{True,True},{True,True}}

f3=xy==a

xy == a

f4=x^2+y^2==ab

x² + y² == ab

r=Solve[{f3,f4},{x,y}]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(-b \sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} - \sqrt{-4 + b^2} \sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right), \right. \right.$$

$$\left. y \rightarrow -\sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(b \sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} + \sqrt{-4 + b^2} \sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right), \right.$$

$$\left. y \rightarrow \sqrt{\frac{ab}{2} - \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(b \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} - \sqrt{-4 + b^2} \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right), \right.$$

$$\left. y \rightarrow \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left(-b \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} + \sqrt{-4 + b^2} \sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right), \right.$$

$$\left. y \rightarrow -\sqrt{\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{-4 + b^2}} \right\}$$

Simplify[{f3,f4}/.r]

{{True,True},{True,True},{True,True},{True,True}}

9.2.2. Функція `Solve[F,X,Y]`

Функція `Solve[F,X,Y]` так само як і функція `Solve[F,X]` дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь в аналітичному вигляді, але з певними обмеженнями — розв'язування здійснюється за змінними x та виключається за змінними y . Наприклад, функція

```
Solve[{x+2*y-a==3, 2*x+y^2+b==7}, {x,y}]
```

визначить всі x та виключить розв'язки y .

Приклад 9.5. Розв'язати системи рівнянь

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy &= 1, & 7a + 3b + c &= 1, \\ xy + c &= 7, & -5a + 12b &= 3, \\ & & a + b + 2c &= -7, \end{aligned}$$

Першу систему розв'язати відносно x , другу — відносно a та відносно a та b . Розв'язки отримати в явному вигляді.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію `Solve[F,X,Y]`, отримуємо

```
f1=ax^2+bxy==1
```

```
ax^2 + bxy == 1
```

```
f2=xy+c==7
```

```
c + xy == 7
```

```
z=Solve[{f1,f2},x,y]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{\sqrt{1-7b+bc}}{\sqrt{a}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{\sqrt{1-7b+bc}}{\sqrt{a}} \right\} \right\}$$

```
x/.z
```

$$\left\{ -\frac{\sqrt{1-7b+bc}}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{1-7b+bc}}{\sqrt{a}} \right\}$$

```
f3=7a+3b+c==1
```

```
7a + 3b + c == 1
```

```
f4=-5a+12b==3
```

```
-5a + 12b == 3
```

```
f5=a+b+2c==-7
```

```
a + b + 2c == -7
```

```
s=Solve[{f3,f4,f5},{a,b,c}]
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{93}{181}, \quad b \rightarrow \frac{84}{181}, \quad c \rightarrow -\frac{722}{181} \right\} \right\}$$

s1=Solve[{f3,f4,f5},a,{b,c}]

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{93}{181} \right\} \right\}$$

a/.s1

$$\left\{ \frac{93}{181} \right\}$$

s2=Solve[{f3,f4,f5},{a,b},c]

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{93}{181}, \quad b \rightarrow \frac{84}{181} \right\} \right\}$$

{a,b}/.s2

$$\left\{ \frac{93}{181}, \frac{84}{181} \right\}$$

9.2.3. Функція NSolve[F,X]

Функція NSolve[F,X] дозволяє розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь в чисельному вигляді. Функція задається таким способом

NSolve[{f₁,f₂,...},{x₁,x₂,...}]

де

f _i	— <i>i</i> -те рівняння, записане в довільній формі;
x _i	— <i>i</i> -те невідоме.

Рівняння f₁, f₂, ... можуть бути представлені через об'єднуючий знак &&.

Технологія розв'язування систем рівнянь за допомогою функції NSolve[F,X] не відрізняється від технології розв'язування за допомогою функції Solve[F,X]. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 9.6. Розв'язати системи рівнянь

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 5, & 2y + 3x^2 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2, & x + 7y^2 &= 7.5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= -7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x_1 - x_2 &= 1.3, \\ \cos x_2 - x_1 &= -0.82. \end{aligned}$$

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію системи Mathematica

`NSolve[F,X,Y]`, отримуємо

```
f1=2x1+7x2-x3==5
2x1 + 7x2 - x3 == 5
f2=x1-2x2+5x3==2
x1 - 2x2 + 5x3 == 2
f3=4x1+x2+3x3== -7
4x1 + x2 + 3x3 == -7
s=NSolve[{f1,f2,f3},{x1,x2,x3}]
{{x1 -> -3.75,    x2 -> 2.06818,    x3 -> 1.97727}}
{f1mf2,f3}/.s
{{True,True,True}}
f4=2y+3x^2==5
3x^2 + 2y == 5
f5=x+7y^2==7.5
x + 7y^2 = 7.5
r=NSolve[{f4,f5},{x,y}]
{{x -> 1.5110628030619`,    y -> -0.9249661921959316`},
 {x -> -0.9661774325244309`,    y -> 1.0997517533207495`},
 {x -> 1.0123543818272729`,    y -> 0.962707908392686`},
 {x -> -1.5572397523647399`,    y -> -1.1374934695175007`}}
{f4,f5}/.r
{{True,True},{True,True},{True,True},{True,True}}
f6=Sin[x1]-x2==1.3
-x2 + Sin[x1] == 1.3
f7=Cos[x2]-x1== -0.82
-x1 + Cos[x2] = -0.82
r1=NSolve[{f6,f7},{x1,x2}]
NSolve[{-x2+Sin[x1]==1.3, -x1+Cos[x2]==-0.82},{x1,x2}]
```

Бачимо, що функція `NSolve[F,X]` не розв'язала останню систему рівнянь. Це пояснюється тим, що система складається з трансцендентних рівнянь. Для її

розв'язання слід застосовувати методи, які не реалізовані у функції `NSolve[F,X]`.

9.2.4. Опції функція `Solve`

Опції вбудованої функції системи комп'ютерної алгебри Mathematica

`Solve` виводяться командою `Option[Solve]`

```
Option[Solve]
{InverseFunctions->Automatic, MakeRules->False, Method->3,
 Mode->Generic, Sort->True, VerifySolutions->Automatic,
 WorkingPrecision->∞}
```

В даному переліку зазначені опції по замовчуванню. В практичних розрахунках опції застосовуються зрідка. Розглянемо приклад.

Приклад 9.7. Використовуючи опцію `Method` розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned}xy + z &= a, \\x + y + z &= b, \\y + z &= c.\end{aligned}$$

Розв'язок. Використовуючи опцію `Method`, отримуємо

```
Solve[{xy+z==a, x+y+z==b, y+z=c}, {x, y, z}, Method->1]
{{{(1 - b - c) y -> -a + c, x -> b - c, z -> c - y}}
Solve[{xy+z==a, x+y+z==b, y+z=c}, {x, y, z}, Method->2]
{{{(1 - b - c) y -> -a + c, x -> b - c, z -> c - y}}
Solve[{xy+z==a, x+y+z==b, y+z=c}, {x, y, z}, Method->3]
{{z -> (a - bc + c^2)/(1 - b + c), x -> b - c, y -> (-a + c)/(1 - b + c)}}
```

Таким чином, лише метод 3 дав розв'язок в явному вигляді.

9.2.5. Функція `FindRoot[F, {X, x0}]`

Функція `FindRoot[F, {X, x0}]` розв'язує системи лінійних та нелінійних рівнянь чисельними методами ітерацій. Для її реалізації необхідно задати початкові наближення невідомих. Функція задається таким способом

```
FindRoot[{f1, f2, ...}, {x1, x10}, {x2, x20}, ...]
```

де

f_i	— i -те рівняння, записане в довільній формі;
x_i	— i -те невідоме;
x_{i0}	— початкове наближення i -того невідомого.

Рівняння $f_1, f_2, \dots$ можуть бути представлені й через об'єднуючий знак $\&\&$.

Технологія розв'язування систем рівнянь за допомогою функції `FindRoot[F, {X, x0}]` суттєво відрізняється від технології розв'язування за допомогою функції `NSolve[F, X]`. Відмінність полягає у необхідності визначати початкові наближення. Методи вибору початкових наближень розглянуті в п. 9.1.

Наведемо приклади розв'язання систем рівнянь функцією `FindRoot[F, {X, x0}]`.

Приклад 9.8. Розв'язати системи рівнянь

$$\begin{aligned} \sin x_1 - x_2 &= 1.3, & \operatorname{tg}(y_1 y_2 + 0.2) &= y_1^2, \\ \cos x_2 - x_1 &= -0.82, & 0.5 y_1^2 + 2 y_2^2 &= 1, \\ x_{10} &= 1.8, & y_{10} &= 0.9, \\ x_{20} &= -0.35, & y_{20} &= 0.5. \end{aligned}$$

Перевірити правильність розв'язків.

Розв'язок. Використовуючи функцію `FindRoot[F, {X, x0}]`, отримуємо

```
f1=Sin[x1]-x2==1.3
-x2 + Sin[x1] == 1.3
f2=Cos[x2]-x1==-0.82
-x1 + Cos[x2] = -0.82
r=FindRoot[{f1,f2},{x1,1.8},{x2,-0.35}]
{x1 -> 1.76935,    x2 -> -0.319646}
{f1,f2}/.r
{False,False}
x1 := 1.76935,    x2 := -0.319646
Sin[x1]-x2
1.3
Cos[x2]-x1
-0.820003
{x1,x2}/.r
{1.76935,    -0.319646}
```

```

f3=Tan[y1y2+0.2]==y1^2
Tan[0.2 + y1y2] == y1^2
f4=0.5y1^2+2y2^2==1
0.5y1^2 + 2y2^2 = 1
z=FindRoot[{f3,f4},{y1,0.9},{y2,0.5}]
      {y1 → 0.910994,    y2 → 0.540854}
{y1,y2}/.z
      {0.910994,    0.540854}
y1:=0.910994; y2:=0.540854
Tan[y1y2 + 0.2]
      0.82991
y1^2
      0.82991
0.5y1^2_2y2^2
      1

```

9.2.6. Функція `Eliminate[F,x]`

Функція `Eliminate[F,x]` призначена для скорочення числа рівнянь системи шляхом виключення заданих змінних x . Функція має вигляд

`Eliminate[{f1,f2,...},x]`

де

f_i	— i -те рівняння, записане в довільній формі;
x	— невідома, яка має бути виключеною.

Рівняння $f_1, f_2, \dots$ можуть бути представлені й через об'єднуючий знак `&&`.

Ця функція здійснює перетворення вихідної системи рівнянь таким способом, щоб число змінних та рівнянь скорочувались. Граничним є одне рівняння з однією невідомою. Наприклад, нехай задано систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Розв'язати дану систему можна методом підстановки. Знаходимо x_2 з другого рівняння і підставляємо в перше. Отримуємо після перетворення

рівняння $x_1 = 2 - 3/4x_1$, яке елементарно розв'язується. Перетворення рівнянь функції `Eliminate[F, x]` може бути не лише методом підстановки, але й іншим відомим в алгебрі методом. Наявність цієї функції — ще один доказ високої інтелектуальності системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

Розглянемо приклад, на якому пояснимо смисл цієї функції.

Приклад 9.9. *Задано систему рівнянь*

$$\begin{aligned}x^2 + ay^2 - z &= 2, \\x + y - bz &= 7, \\2x + 3y + 9z &= 1.\end{aligned}$$

Отримати еквівалентну систему, яка складається з двох рівнянь з двома невідомими, виключивши змінну z і одне рівняння з невідомою x , виключивши y та z .

Розв'язок. Використовуючи функцію `Eliminate[F, x]`, отримуємо

```
f1=x^2+ay^2-z==2
x^2 + ay^2 - z == 2
f2=x+y-bz==7
x + y - bz == 7
f3=2x+3y+9z==1
2x + 3y + 9z == 1
Eliminate[{f1,f2,f3},z]
9ay^2 == 19 - 2x - 9x^2 - 3y && b(-1 + 2x + 3y) == 63 - 9x - 9y
Eliminate[{f1,f2,f3},{y,z}]
b^2(-18 + a - 4ax + 9x^2 + 4ax^2) + b(-48 + 126a - 3x - 270ax + 54x^2 + 36ax^2)
== -18 - 3969a + 9x + 1134ax - 81x^2 - 81ax^2
FullSimplify[Out[5]]
a(9(-7 + x) + b(-1 + 2x))^2 + 3(3 + b)(2 + x(-1 + 9x) + 3b(-2 + x^2)) == 0
```

Як бачимо, при виключенні з системи z програма визначила z з якогось з двох рівнянь та підставила його значення в два інших. Утворилась система з двох рівнянь з двома невідомими x та y . При виключенні двох змінних y та z отримане одне рівняння з невідомим x . З метою спрощення цього виразу ми використали функцію `FullSimplify`.

Правильність розв'язку легко перевірити, порівнюючи результати, отримані за допомогою функції `Eliminate` та іншими методами. Покажемо це на прикладі.

Приклад 9.10. *Задано систему рівнянь*

$$\begin{aligned} 25x^2 + 12y - 7z &= 5, \\ 12x + 25y + 3z &= 7, \\ x + y + 10z^2 &= 14. \end{aligned}$$

Визначити невідомі за допомогою функції `NSolve` та методом підстановок, використовуючи функцію `Eliminate`.

Розв'язок. Використовуючи відповідні вбудовані функції, отримуємо

```
f1=25x^2+12y-7z==5
25x^2 + 12y - 7z == 5
f2=12x+25y+3z==7
12x + 25y + 3z == 7
f3=x+y+10z^2==14
x + y + 10z^2 == 14
w=NSolve[{f1,f2,f3},{x,y,z}]
{{x -> -0.382156401766938`,y -> 0.6022236130606954` z -> 0.8396816060020971`},
{x -> 0.5265369748220278`,y -> -0.17169375052956706` z -> -0.018470765712354995`},
{x -> -0.8674761977115225`,y -> -0.7885509839907304` z -> 0.6214660045731777`},
{x -> 0.3730955246564325`,y -> 0.268021121459602` z -> 0.24232315513708044`}}
Eliminate[{f1,f2,f3},{y,z}]
-422x - 4770x^2 + 2800x^3 + 8000x^4 == -521
NRoots[Out[18],x]
x== -0.867476 || x== -0.382156 || x== 0.373096 || x== 0.526537
Eliminate[{f1,f2,f3},{x,z}]
37170y - 538850y^2 + 90000y^3 + 1000000y^4 == -21853
NRoots[Out[23],y]
y== -0.788551 || y== -0.171694 || y== 0.268021 || y== 0.602224
Eliminate[{f1,f2,f3},{x,y}]
-7057520z + 54044100z^2 - 107840000z^3 + 64000000z^4 == 149483
NRoots[Out[26],z]
z== -0.0184708 || z== 0.242323 || z== 0.621466 || z== 0.839682
```

9.2.7. Матричні методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна представити у вигляді

$$A * X = B,$$

де A — матриця коефіцієнтів, X — вектор невідомих, B — вектор вільних членів (правих частин) системи рівнянь.

Технологія розв'язування рівнянь в системі комп'ютерної алгебри Mathematica така

- i. ввести матриці коефіцієнтів з присвоєнням їй імені, наприклад A ;
- ii. ввести вектор невідомих з іменем X ;
- iii. ввести вектор вільних членів з іменем B ;
- iv. утворити вираз $z=A.X==B$;
- v. ввести функцію `Solve[z,x]`;
- vi. отримати розв'язок, натиснувши комбінацію клавіш `<Shift><Enter>`.

Введення даних можна спростити, якщо замість утворення виразу $A.X==B$ представити його у вигляді добутку матриці A на вектор x та прирівняти до вектора B .

Матричні методи дозволяють розв'язувати системи лінійних рівнянь з дійсними та комплексними змінними.

Продемонструємо технологію розв'язування системи лінійних рівнянь матричним методом на прикладах.

Приклад 9.11. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 1, \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7.5, \\ 5x_1 + 3x_3 &= 2.5.\end{aligned}$$

Розв'язок. Використовуючи технологію розв'язування системи лінійних рівнянь матричним методом, отримуємо

```
A={{2,3,-7},{-3,1,5},{5,0,3}}
{{2,3,-7},{-3,1,5},{5,0,3}}
X={x1,x2,x3}
{x1,x2,x3}
```

```

B={1,7.5,2.5}
{1,7.5,2.5}
Z=A.X==B
{2x1 + 3x2 - 7x3, -3x1 + x2 + 5x3, 5x1 + 3x3} == {1,7.5,2.5}
Solve[%]
{{x1 -> 0.0664336, x2 -> 2.58042, x3 -> 0.944056}}
{{2,3,-7},{-3,1,5},{5,0,3}}.{x1,x2,x3} == {1,7.5,2.5}
{2x1 + 3x2 - 7x3, -3x1 + x2 + 5x3, 5x1 + 3x3} == {1,7.5,2.5}
Solve[%]
{{x1 -> 0.0664336, x2 -> 2.58042, x3 -> 0.944056}}

```

Матричний метод дозволяє розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь в аналітичному вигляді. Продемонструємо на прикладі цю можливість.

Приклад 9.12. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 &= b_1, \\
 b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= b_2, \\
 c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= b_3.
 \end{aligned}$$

Розв'язок. Використовуючи технологію розв'язування системи лінійних рівнянь матричним методом, отримуємо розв'язок в аналітичному вигляді

```

A={{a1,a2,a3},{b1,b2,b3},{c1,c2,c3}}
{{a1,a2,a3},{b1,b2,b3},{c1,c2,c3}}
X={x1,x2,x3}
{x1,x2,x3}
B={b1,b2,b3}
{b1,b2,b3}
Z=A.X==B
{a1x1 + a2x2 - a3x3, b1x1 + b2x2 - b3x3, c1x1 + c2x2 - c3x3} == {b1,b2,b3}
Solve[Z,{x1,x2,x3}]

```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned}
 x_1 &\rightarrow -\frac{-a_3b_2b_3 + a_2b_3^2 + a_3b_2c_2 - b_1b_3c_2 - a_2b_2c_3 + b_1b_2c_3}{a_3b_2c_1 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_1b_2c_3}, \\
 x_2 &\rightarrow -\frac{-a_3b_1b_3 - a_1b_3^2 - a_3b_2c_1 + b_1b_3c_1 - b_1^2c_3 + a_1b_2c_3}{a_3b_2c_1 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_1b_2c_3}, \\
 x_3 &\rightarrow -\frac{-a_2b_1b_3 + a_1b_2b_3 + a_2b_2c_1 - b_1b_2c_1 + b_1^2c_2 - a_1b_2c_2}{a_3b_2c_1 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_1b_2c_3} \end{aligned} \right. \right\}$$

Зауважимо, що крім наведеного в системі комп'ютерної алгебри Mathematica існують ще два способи розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Спосіб 1. Визначення вектора невідомих X за формулою $X = A^{-1}B$.

При цьому операція множення записується функцією `Dot`, а операція інвертування матриці A — функцією `Inverse`. Тоді розв'язок запишеться у вигляді

```
X:=Dot[Inverse[A],B]
```

Спосіб 2. Застосування функції `LinearSolve`.

Функція `LinearSolve` записується у вигляді

```
X:=LinearSolve[A,B]
```

Наведемо приклади розв'язування системи лінійних рівнянь описаними двома способами.

Приклад 9.13. Розв'язати двома матричними методами систему рівнянь

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 - 3x_3 &= b_1, \\ -7x_1 + cx_2 + x_3 &= b_2, \\ x_1 + x_2 + dx_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Розв'язок. Використовуючи технологію розв'язування системи лінійних

```
A={{a,2,-3},{-7,c,1},{1,1,d}}
```

```
{{a,2,-3},{-7,c,1},{1,1,d}}
```

```
B={b1,b2,b3}
```

```
{b1,b2,b3}
```

```
X=Dot[Inverse[A],B]
```

$$\left\{ \frac{b_3(2+3c)}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_2(-3-2d)}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_1(-1+cd)}{23-a+3c+14d+acd}, \right. \\ \frac{(21-a)b_3}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_1(1+7d)}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_2(3+ad)}{23-a+3c+14d+acd} \\ \left. \frac{(2-a)b_2}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_1(-7-d)}{23-a+3c+14d+acd} + \frac{b_3(14+cd)}{23-a+3c+14d+acd} \right\}$$

```
Simplify[%]
```

$$\left\{ \frac{b_3(2+3c) - b_2(3+2d) + b_1(-1+cd)}{23+3c+14d+a(-1+cd)}, \frac{b_1+3b_2+21b_3-ab_3+7b_1d+ab_2d}{23+3c+14d+a(-1+cd)}, \right. \\ \left. \frac{-(-2+a)b_2 - b_1(7+c) + b_3(14+ac)}{23+3c+14d+a(-1+cd)} \right\}$$

`X=LinearSolve[A,B]`

$$\left\{ \frac{-b_1 - 3b_2 + 2b_3 + 3b_3c - 2b_2d + b_1cd}{23 - a + 3c + 14d + acd}, \frac{b_1 + 3b_2 + 21b_3 - ab_3 + 7b_1d + ab_2d}{23 - a + 3c + 14d + acd}, \frac{-b_1 + 2b_2 - ab_2 + 14b_3 - b_1c + ab_3c}{23 - a + 3c + 14d + acd} \right\}$$

Питання, тести для самоконтролю

1. Які системи алгебраїчних рівнянь називають сумісними?
2. Які системи алгебраїчних рівнянь є невизначеними?
3. Які системи алгебраїчних рівнянь є погано обумовленими?
4. Сформулюйте теорему Крамера.
5. В чому суть методу ітерацій?
6. Як вибрати початкові наближення для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
7. Сформулюйте умову збіжності ітераційного процесу при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
8. Запишіть ознаку закінчення обчислень ітераційного процесу при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
9. Охарактеризуйте алгоритми методів ітерації при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
10. Вкажіть найпоширеніші способи вибору початкових наближень при розв'язуванні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.
11. В чому суть методу Ньютона при розв'язуванні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь?
12. В чому особливість застосування ітераційного методу для розв'язування систем лінійних і нелінійних рівнянь?
13. Сформулюйте ознаку закінчення обчислень ітераційного процесу при розв'язуванні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.
14. Опишіть технологію розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в системі Mathematica, використовуючи функцію `Solve[F,X]`.

15. Опишіть технологію розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в системі Mathematica, використовуючи функцію `Solve[F, X, Y]`.
16. Опишіть технологію розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в системі Mathematica, використовуючи функцію `NSolve[F, X]`.
17. Назвіть відомі опції функції `Solve`.
18. Охарактеризуйте використання в системі Mathematica функції `Eliminate[F, x]`.
19. Опишіть технологію розв'язування в системі комп'ютерної алгебри Mathematica систем лінійних рівнянь матричним методом.
20. Опишіть технологію розв'язування в системі комп'ютерної алгебри Mathematica систем лінійних рівнянь двома матричними методами.

Обов'язкові та додаткові задачі

Для закріплення та більш глибокого засвоєння матеріалу розділу розв'яжіть системи рівняння та перевірте правильність отриманих результатів.

Розв'яжіть системи лінійних рівнянь матричним та іншими методами. Порівняйте результати цих методів, зазначивши їх переваги та недоліки.

№ п/п	Система рівнянь	№ п/п	Система рівнянь
1	$1.5x_1 - 0.8x_2 + 4.25x_3 = 5.1$ $1.2x_1 + 7.18x_2 - 3.2x_3 = 4.2$ $0.5x_1 - 1.5x_2 + 7.1x_3 = -1.2$	2	$6.7x_1 - 0.6x_2 + 0.83x_3 = 6.8$ $0.8x_1 + 1.1x_2 + 7.2x_3 = 5.2$ $1.2x_1 + 5.4x_2 - 0.54x_3 = -3.2$
3	$-1.32x_1 + 2.15x_2 + 7.6x_3 = -1.4$ $2.62x_1 + 6.1x_2 - 4.12x_3 = 5.6$ $8.3x_1 - 2.84x_2 - 1.5x_3 = -6.5$	4	$0.51x_1 - 10x_2 - 3.62x_3 = -2.05$ $3.09x_1 + 1.23x_2 - 4.64x_3 = -5.6$ $3.2x_1 - 2.31x_2 - 8.4x_3 = 6.1$
5	$9.21x_1 - 1.84x_2 + 0.7x_3 = -3.2$ $-6.17x_1 + 8.5x_2 - 2.87x_3 = -3.75$ $0.7x_1 + 0.87x_2 - 8.7x_3 = 2.64$	6	$4.3x_1 - 1.2x_2 + 10.3x_3 = 4.2$ $0.21x_1 + 6.2x_2 + 3.54x_3 = 5.1$ $-0.31x_1 - 0.52x_2 + 3.6x_3 = -1.1$

7	$6.9x_1 + 2.3x_2 + 1.21x_3 = 3.1$ $x_1 + 2.3x_2 - 3.4x_3 = -2.3$ $0.21x_1 - 0.43x_2 + 6.3x_3 = 3.6$	8	$12.4x_1 - 0.56x_2 + 4.2x_3 = 6.3$ $-0.65x_1 + 4.4x_2 + 1.5x_3 = 1.5$ $1.5x_1 + 2.1x_2 - 2.8x_3 = 1.7$
9	$1.2x_1 - 1.06x_2 - 6.7x_3 = 2.12$ $4.2x_1 - 6.3x_2 - 0.9x_3 = -1.1$ $0.6x_1 + 6.8x_2 + 0.82x_3 = 0.83$	10	$9.7x_1 + 0.35x_2 - 1.84x_3 = 2.15$ $4.64x_1 - 7.1x_2 - 4.3x_3 = 1.5$ $0.32x_1 + 0.34x_2 - 3.3x_3 = -3.1$
11	$6.5x_1 - 2.34x_2 + 1.4x_3 = 2.8$ $0.5x_1 + 7.3x_2 - 2.4x_3 = -3.8$ $8.6x_1 + 0.34x_2 - 6.4x_3 = 0.64$	12	$2.8x_1 + 4.3x_2 - 3.7x_3 = 5.1$ $-0.45x_1 - 8.24x_2 + 4.8x_3 = 5.4$ $0.54x_1 + 2.3x_2 + 3.7x_3 = 1.54$

Розв'яжіть системи нелінійних рівнянь. При необхідності самостійно визначте початкові наближення (зокрема, графічним способом).

№ п/п	Система рівнянь	Початкове наближення	№ п/п	Система рівнянь
1	$\sin(x_1 + x_2) - 1.2x_1 = 0.1$ $x_1^2 + x_2^2 = 1$	$x_1 = 0.74$ $x_2 = 0.67$	2	$\sin(x_2 + 1) - x_1 = 1.2$ $2x_2 + \cos x_1 = 2$
3	$\operatorname{tg}(x_1x_2 + 0.2) = x_1^2$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 = 1$	$x_1 = 0.88$ $x_2 = 0.52$	4	$\cos(x_2 + 1) + x_1 = 0.5$ $x_2 - \cos x_1 = 3$
5	$\sin x_1 + 2 \sin x_2 = 1$ $2 \sin 3x_1 + 3 \sin 3x_2 = 0.3$	$x_1 = 1.08$ $x_2 = 0.06$	6	$x_1^2x_2 - x_2 - 9 = 0$ $x_1x_2 - x_1^2 + 10 = 0$
7	$\operatorname{tg}(x_1 - x_2) - 4x_1 = 0$ $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$	$x_1 = -0.5$ $x_2 = 0.6$	8	$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0$ $\sin(x_1 + x_2) - 2.4x_1 + 3.2 = 0$
9	$x_1^4 + x_2^4 - 3 = 0$ $x_1^3 + x_2^3 - 4 = 0$	$x_1 = 0.95$ $x_2 = 1.4$	10	$2x_1x_2^2 - 4x_2 - 7.5 = 0$ $x_1^2 - 3x_1x_2 + 4.5 = 0$
11	$\sin x_1 - x_2 = 1.3$ $\cos x_2 - x_1 = -0.82$	$x_1 = 1.8$ $x_2 = -0.357$	12	$\sin x_1 + 2 \cos x_2 - 0.8 = 0$ $x_1x_2^2 + 3x_1 - 4.5 = 0$

З метою глибшого засвоєння матеріалів розділу варто додатково розв'язати засобами системи комп'ютерної алгебри Mathematica задачі, що розглядаються в [2–4].

РОЗДІЛ X. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В даному розділі розглянемо технології розв'язування диференціальних рівнянь в середовищі системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

Насамперед зазначимо, що перед вивченням комп'ютерних технологій корисно пригадати методи та алгоритми розв'язування диференціальних рівнянь, зокрема:

i. аналітичні:

- метод послідовного диференціювання;
- метод невизначених коефіцієнтів;
- метод послідовних наближень;

ii. чисельні:

- метод Ейлера;
- вдосконалений метод Ейлера;
- метод Ейлера–Коші з ітераційною обробкою результатів;
- метод Рунге–Кутти.

Ці методи детально викладені в [11, 13, 27, 28, 34–36, 40]

10.1. Розв'язування диференціальних рівнянь в середовищі Mathematica

Система комп'ютерної алгебри Mathematica дозволяє розв'язувати в аналітичному та чисельному вигляді лінійні та нелінійні диференціальні рівняння та системи. Їх розв'язки можна отримати в загальному та частинному випадках [27].

Розв'язування диференціальних рівнянь та систем здійснюється за допомогою вбудованих функцій. Система Mathematica має також зовнішню функцію `RungeKutta` з пакету розширення `startup`, яка реалізує один з найефективніших методів — метод Рунге – Кутти.

Розглянемо нижче вбудовані функції, технології їх реалізації та приклади розв'язування диференціальних рівнянь та систем різних видів.

10.1.1. Аналітичні методи

Аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь в системі комп'ютерної алгебри Mathematica реалізуються за допомогою двох вбудованих функцій вигляду

```
DSolve[f, y[x], x]
```

```
DSolve[{f1, f2, ...}, {y[x1], y[x2] ...}, {x1, x2, ...}]
```

Розглянемо детально ці функції та приклади їх застосування.

Функція `DSolve[f, y[x], x]` призначена для розв'язання диференціального рівняння f відносно функції $y(x)$ з аргументом x . Функція дає загальний розв'язок рівняння з константами інтегрування, які позначають $C[i]$.

Диференціальне рівняння задається в довільній формі, наприклад, $y' == 2x^2 - 1$, $y' - 2x^2 == -1$, чи то $y' - 2x^2 + 1 == 0$. Функція `DSolve[f, y[x], x]` дозволяє розв'язувати диференціальні рівняння довільного порядку.

Комп'ютерна технологія розв'язування диференціального рівняння така:

1. Вводимо рівняння f з присвоюванням йому унікального імені, наприклад F .
2. Вводимо вбудовану функцію `DSolve[f, y[x], x]`.
3. Отримуємо розв'язок, натиснувши комбінацію `<Shift>+<Enter>`.

Зауважимо, що рівняння f окремо можна не вводити, а вписати його у функцію `DSolve`.

Приклад 10.1. Дано диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}y' &= 2x^2 + 3x - 1, \\y' &= 2 \ln x + x - 2, \\y' &= 3e^{-2x} - x^2 + x - 1.\end{aligned}$$

Визначити $f(x)$.

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію `DSolve`, отримаємо:

```

F=y'[x]==2x^2+3x-1
y'[x]==-1+3x=2x2
DSolve[F,y[x],x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -x + \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + C[1] \right\} \right\}$$

DSolve[y'[x]==2Log[x]+x-2,y[x],x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -4x + \frac{x^2}{2} + C[1] + 2\text{Log}[x] \right\} \right\}$$

DSolve[y'[x]-3E^(-2x)+x^2-x+1==0,y[x],x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{3}{2}e^{-2x} - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C[1] \right\} \right\}$$


```

Звертаємо увагу на те, що при розв'язуванні першого рівняння йому було присвоєне ім'я `F` і введене саме рівняння поза функцією `DSolve`. Розв'язуючи друге рівняння його введено безпосередньо у функцію `DSolve`. При розв'язанні третього рівняння використано ще один спосіб запису, відмінний від двох попередніх.

З приклада помітно, що програма знайшла загальний розв'язок з довільними сталими, а саме розв'язування зведено до простого інтегрування правої частини рівняння.

Функція `DSolve` дозволяє розв'язувати й диференціальні рівняння високого порядку.

Приклад 10.2. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$y'''(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

$$y'''(x) = y'(x) - 5y(x) + x^2 - 1.$$

Розв'язок. Використовуючи вбудовану функцію `DSolve`, отримаємо:

```

DSolve[y'''[x]==3x^2-2x+1,y[x],x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + C[1] + xC[2] + x^2C[3] \right\} \right\}$$

F1=y'''[x]==y'[x]-5y[x]+x^2-1
y^(3)==-1+x^2-5y[x]+y'[x]

```

```
DSolve[F1, y[x], x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{1}{125} (-23 + 10x + 25x^2) + e^{\text{Root}[5 - \#1 + \#1^3 1.1]} C[1] + e^{\text{Root}[5 - \#1 + \#1^3 1.2]} C[2] + e^{\text{Root}[5 - \#1 + \#1^3 1.3]} C[3] \right\} \right\}$$

```
N[%]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow 0.008 (-23. + 10. x + 25. x^2) + 2.718281828459045^{-1.9041608591349206 i} C[1] + 2.718281828459045^{0.9520804295674603 i - 1.3112480440771224 i} C[2] + 2.718281828459045^{0.9520804295674603 i + 1.3112480440771224 i} C[3] \right\} \right\}$$

Приклад ілюструє, що програма легко знайшла розв'язок у випадку, коли невідомою є функція, що входить в рівняння першою та третьою змінною. При цьому розв'язок знайдено в явному вигляді. Для його перетворення в явний використана функція `N[%]`.

Частинний розв'язок диференціального рівняння

При розв'язуванні практичних задач задаються початкові умови. В такому випадку константи інтегрування обчислюються програмою і розв'язок не містить коефіцієнтів `C[i]`. Для отримання частинного розв'язку використовується функція `DSolve`, яка тепер представляється в такому вигляді:

```
DSolve[f(x, x0), y[x], x]
```

де

<code>f(x, x0)</code>	— диференціальне рівняння разом з початковими умовами;
<code>y[x]</code>	— шукана функція;
<code>x</code>	— незалежна змінна.

Наприклад, якщо диференціальне рівняння має вигляд $y''[x] = xy'(x) + 2.5y(x) - 3.5$, а початковими умовами є $y(0)=1$, $y'(0)=0$, то $f(x, x0) = \{y''[x] == x*y'(x) + 2.5*y(x) - 3.5, y[0] == 1, y'[0] == 0\}$.

Розглянемо приклади знаходження частинних розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою функції `DSolve`.

Приклад 10.3. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$y'(x) = 2 \ln x + x - 2 \text{ з початковою умовою: } y(0) = 1;$$

$$y''(x) = 3y(x) - e^{2x} + x - 1 \text{ при } y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$y'''(x) = -5y(x) - 1 \text{ при } y(1) = y'(1) = y''(1) = 0.$$

Розв'язок. Використовуючи функцію DSolve, отримаємо:

```
DSolve[{y'[x]==2 Log[x]+x-2,y[0]==1},y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{1}{2} (2 - 8x + x^2 + 4x \log[x]) \right\} \right\}$$

```
DSolve[{y''[x]==3 y[x]-E^(2 x)+x-1,y[0]==1,y'[0]==0},y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{e^{-\sqrt{3}x} (15 - 7\sqrt{3} + 6e^{\sqrt{3}x} + 15e^{2\sqrt{3}x} + 7\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} - 18e^{2x+\sqrt{3}x} - 6e^{\sqrt{3}xx})}{18(-2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \right\} \right\}$$

```
Simplify[%]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{1}{18} e^{-\sqrt{3}x} (15 - 7\sqrt{3} + (15 + 7\sqrt{3})e^{2\sqrt{3}x} - 18e^{(2+\sqrt{3})x} - 6e^{\sqrt{3}x}(-1 + x)) \right\} \right\}$$

```
DSolve[{y'''[x]==-5 y[x]-1,y[1]==0,y'[1]==0,y''[1]==0},y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \left(e^{-\frac{5^{1/3}}{2} - 5^{1/3}x} \left(e^{\frac{35^{1/3}}{2}} \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 - 3e^{\frac{5^{1/3}}{2} + 5^{1/3}x} \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. 2e^{\frac{3}{2} 5^{1/3}x} \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right] \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right] + e^{\frac{3}{2} 5^{1/3}x} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 3e^{\frac{5^{1/3}}{2} + 5^{1/3}x} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2e^{\frac{3}{2} 5^{1/3}x} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right] \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right] \right) \right) \right. \\ \left. \left. / \left(15 \left(\cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 + \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} 5^{1/3} \right]^2 \right) \right) \right) \right\} \right\}$$

Розв'язування систем диференціальних рівнянь в аналітичному вигляді

Системи диференціальних рівнянь в аналітичному вигляді також розв'язуються за допомогою вбудованої функції DSolve, яка в даному випадку має вигляд:

```
DSolve[{f1,f2,...},{y1[x],y2[x],...},x]
```

де

f_i	— i -те рівняння системи;
-------	-----------------------------

$y_i[x]$	— i -та шукана невідома;
x	— незалежна змінна.

Наведемо приклад запису функції `DSolve` для випадку розв'язування системи диференціальних рівнянь. Нехай необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) + z(t) - 1, \\ y'(t) &= 2x(t) - 3z(t) + 2, \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + z(t).\end{aligned}$$

Тоді функція `DSolve` матиме вигляд:

```
DSolve[x'[t]==y[t]+z[t]-1, y'[t]==2 x[t]-3 z[t]+2,
z'[t]==x[t]+y[t]+z[t]], {x[t], y[t], z[t]}, t]
```

Технологія розв'язування систем диференціальних рівнянь не відрізняється від технології розв'язування звичайних рівнянь.

Розглянемо приклади розв'язування системи рівнянь за цією технологією.

Приклад 10.4. *Розв'язати систему диференціальних рівнянь:*

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) + z(t), \\ y'(t) &= x(t) + 3z(t), \\ z'(t) &= x(t) + y(t).\end{aligned}$$

Розв'язок. Для того, щоб не повторюватись в подальшому при побудові частинного розв'язку вектору рівнянь присвоїмо ім'я F .

```
F={x'[t]==y[t]+z[t], y'[t]==x[t]+3 z[t], z'[t]==x[t]+y[t]}
{x'[t]==y[t]+z[t], y'[t]==x[t]+3 z[t], z'[t]==x[t]+y[t]}
DSolve[F, {x[t], y[x], z[t]}, t]
{{x[t] -> 1/3 e^{-t} (2 + e^{3t}) C[1] + 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[2] + 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[3],
y[t] -> 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[1] + 1/3 e^{-t} (2 + e^{3t}) C[2] + 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[3],
z[t] -> 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[1] + 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}) C[2] + 1/3 e^{-t} (2 + e^{3t}) C[3]}}
```

Оскільки початкові умови не задано, то розв'язок знайдено в загальному вигляді. Отримаємо частинний розв'язок за таких початкових умов: $x(0) =$

1, $y(0) = z(0) = 0$. В цьому випадку, функція `DSolve` представляється таким способом:

```
DSolve[x'[t]==y[t]+z[t], y'[t]==x[t]-3 z[t],
z'[t]==x[t]+y[t], x[0]==1, y[0]==z[0]==0}, {x[t], y[t],
z[t]}, t]
```

Розв'язок системи за таких початкових умов має вигляд:

```
DSolve[{F, x[0]==1, y[0]==0, z[0]==0}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
{{x[t] -> 1/3 e^{-t} (2 + e^{3t}), y[t] -> 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t}), z[t] -> 1/3 e^{-t} (-1 + e^{3t})}}
```

Правильність розв'язку легко перевірити методом підстановки отриманих значень $x(t), y(t), z(t)$ у початкову систему.

Розв'яжемо тепер практичну задачу.

Нехай система масового обслуговування (СМО) є об'єктом з одним обслуговуючим органом. Це може бути залізнична каса, банкомат, продовольчий магазин тощо. Потік заявок на обслуговування (пасажирів, одержувачів ренти, покупців продуктів харчування) характеризується інтенсивністю потоку λ , а обслуговування — інтенсивністю μ . Інтенсивності λ та μ мають розмірність 1/год.

Час надходження заявки на обслуговування є випадковою величиною. Необхідно визначити ймовірності стану системи $p_0(t)$ — ймовірність того, що в момент часу t заявок на обслуговування системи немає, $p_0(t)$ — ймовірність того, що в момент часу t СМО зайнята обслуговуванням заявки. Практична значимість задачі очевидна.

З теорії масового обслуговування відомо, що в даному випадку функціонування СМО можна описати системою диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - \mu p_1(t).\end{aligned}$$

Розв'язуватимемо цю систему диференціальних рівнянь за таких початкових умов: $p_0(0) = 1, p_1(0) = 0$.

Функція DSolve в такому випадку має вигляд:

```
DSolve[p0'[t]==-λp0[t]+μp1[t], p1'[t]==λp0[t]-μp1[t],  
p0[0]==1, p1[0]==0}, {p0[t], p1[t]}, t]
```

Для зручності вводу та читання позначимо λ, μ та t відповідно a, m та x . Знайдемо загальний та частковий розв'язок при встановлених нами початкових умовах, перевіримо правильність отриманого розв'язку та проведемо невеликий аналіз результатів.

```
DSolve[p0'[x]==-ap0[x]+mp1[x], p1[x]==ap0[x]-mp1[x]}, {p0[x],  
p1[x]}, x]
```

$$\left\{ \left\{ p0[x] \rightarrow \frac{(ae^{(-a-m)x} + m)C[1]}{a + m} - \frac{(-1 + e^{(-a-m)x})mC[2]}{a + m}, \right. \right. \\ \left. \left. p1[x] \rightarrow -\frac{a(-1 + e^{(-a-m)x})C[1]}{a + m} + \frac{(a + e^{(-a-m)x}m)C[2]}{a + m} \right\} \right\}$$

```
DSolve[p0'[x]==-ap0[x]+mp1[x], p1[x]==ap0[x]-mp1[x], p0[0]==1,  
p1[0]==0}, {p0[x], p1[x]}, x]
```

$$\left\{ \left\{ p0[x] \rightarrow \frac{ae^{(-a-m)x} + m}{a + m}, \quad p1[x] \rightarrow -\frac{a(-1 + e^{(-a-m)x})}{a + m} \right\} \right\}$$

```
x:=0
```

```
Out[44]
```

$$\{\{p0[x] \rightarrow 1, \quad p1[x] \rightarrow 0\}\}$$

```
x:=Infinity
```

```
Out[44]
```

$$\left\{ \left\{ p0[\infty] \rightarrow \frac{ae^{(-a-m)\infty} + m}{a + m}, \quad p1[\infty] \rightarrow -\frac{a(-1 + e^{(-a-m)\infty})}{a + m} \right\} \right\}$$

```
a:=2; m:=5; x:=Infinity
```

```
Out[55]
```

$$\left\{ \left\{ p0[\infty] \rightarrow \frac{5}{7}, \quad p1[\infty] \rightarrow \frac{2}{7} \right\} \right\}$$

```
Limit[Out[55]]
```

$$\left\{ \left\{ \text{Limit} \left[p0[\infty] \rightarrow \frac{5}{7} \right], \quad \text{Limit} \left[p1[\infty] \rightarrow \frac{2}{7} \right] \right\} \right\}$$

Бачимо, що вирази для ймовірностей отримані в аналітичному вигляді, що дозволяє отримати їх чисельні значення для будь-якого t при довільних значеннях інтенсивності потоку заявок та інтенсивності обслуговування.

Додатково обчислені значення p_0 та p_1 при $x = 0$ та $x = \infty$. З розв'язку бачимо, що при $x = 0$ (присвоєння $x := 0$) $p_0(0) = 1$ та $p_1(0) = 0$. Підстановка здійснена в аналітичний вираз, який знаходиться в рядку Out[44] у вигляді відповіді. Встановивши значення $p_0(\infty)$ та $p_1(\infty)$ таким способом отримати не вдалось. Це пояснюється тим, що значення символічних змінних a та m системі невідомі, а при $a+m < 0$ розв'язок не існує ($p_0(\infty) = p_1(\infty) = \infty$). При $a > 0$ та $m > 0$ розв'язок існує. Якщо, наприклад, $a=2$, $m=5$, то при $t = \infty$ розв'язок буде отримано як шляхом підстановки, так і шляхом обчислення границь виразів $p_0(t)$, $p_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Опції функції DSolve

Функція DSolve має дві опції:

MaxSteps	— максимальна кількість кроків інтегрування;
DSolveConstants	— Визначає сталі інтегрування;

При практичному розв'язанні диференціальних рівнянь цими опціями в переважній більшості випадків користуватись не доводиться.

10.1.2. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь в системі Mathematica реалізуються за допомогою двох вбудованих функцій:

```
NDSolve[f, y[x], {x, x_min, x_max}]
```

```
NDSolve[{f1, f2, ...}, {y[x1], y[x2] ...}, {x, x_min, x_max}]
```

де

f	— диференціальне рівняння і початкові умови;
f_i	— i -те рівняння системи диференціальних рівнянь;
$y[x]$	— шукана функція;
$y_i[x]$	— i -та шукана функція системи диференціальних рівнянь;

$y_i[x_0]$	— i -та початкова умова;
$x_{\min}, x_{\max}$	— мінімальне та максимальне значення незалежної змінної;
x	— аргумент шуканої функції.

Функції чисельного розв'язку диференціальних рівнянь і систем мають опцію `StartingStepSize`, яка визначає величину початкового кроку інтегрування.

Чисельні методи зазвичай використовуються в тих випадках, коли рівняння в аналітичному вигляді системою Mathematica не розв'язуються чи зовсім не мають аналітичного розв'язку. Таким є більшість нелінійних рівнянь.

Нижче детально описуються вбудовані функції, способи їх реалізації та наводяться приклади.

Функція `NDSolve[f, y[x], {x, xmin, xmax}]`

Ця функція розв'язує диференціальне рівняння n -го порядку, обчислюючи шукану функцію $y[x]$ в діапазоні незалежної змінної x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Розв'язок можна отримати у вигляді таблиці чи графіка.

Технологію розв'язування задачі проілюструємо на прикладі.

Приклад 10.5. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y'(x) - xy(x) - 1 = 0$$

за початкових умов $y(0) = 1$. Розв'язок отримати в табличній та графічній формі в діапазоні x від 0 до 5 з кроком 0.5.

Технологія розв'язання диференціального рівняння за допомогою функції `NDSolve` ґрунтується на виконанні наступних операцій:

1. Ввести функцію `NDSolve`, яка в прикладі 10.5 має вигляд:
`NDSolve[{y'[x]==x y[x]+1, y[0]==1}, y[x], {x,0,5}]`
2. Отримання розв'язку після натискання комбінації клавіш `<Shift>+<Enter>`. Розв'язок буде отримано у вигляді повідомлення без виводу самого розв'язку на екран.
3. Ввести функцію `Table` для отримання розв'язку в табличній формі. В даному прикладі функція матиме вигляд:

```
Table[{x, y[x]/.Out[8]}, {x, 0, 5, 0.5}]
```

Тут Out[8] — це 8-й рядок, в якому знаходиться розв'язок рівняння.

Відкликом буде вектор, представлений у вигляді рядка.

4. Введення функції TableForm[%] для отримання розв'язку у формі таблиці. Відкликом буде функція $y(x)$, представлена у вигляді таблиці.

5. Введення функції Plot[y[x]/.Out[8], {x, 0, 5}]. Відкликом буде розв'язок у вигляді графіка.

Відтак знайдемо спочатку розв'язок рівняння у аналітичному вигляді.

Дещо відмінною буде поведінка функції NDSolve.

```
DSolve[{y'[x]==x y[x]+1,y[0]==1},y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{1}{3} e^{\frac{x^2}{2}} \left(2 + \sqrt{2\pi} \operatorname{Erf} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right) \right\} \right\}$$

```
NDSolve[{y'[x]==x y[x]+1,y[0]==1},y[x],{x,0,5}]
```

```
{{y[x]->InterpolatingFunction[{{0.,5.}},<>][x]}}
```

```
Table[{x,y[x]/.Out[8]},{x,0,5,0.5}]
```

```
{{0,{1.}}, {0.5,{2.29744}}, {1.,{4.43656}}, {1.5,{7.96337}},  
{2.,{13.7781}}, {2.5,{23.365}}, {3.,{39.171}}, {3.5,{65.2308}},  
{4.,{108.196}}, {4.5,{179.034}}, {5.,{295.826}}}
```

```
TableForm[%]
```

0	1.
0.5	2.29744
1.	4.43656
1.5	7.96337
2.	13.7781
2.5	23.365
3.	39.171
3.5	65.2308
4.	108.196
4.5	179.034
5.	295.826

Розв'язок рівняння прикладу 10.5 у вигляді графіка наведено на рис. 10.1.

Приклад 10.6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'''(x) - 3x^2 y''(x) - 2xy'(x) - y(x) = 1$$

за початкових умов $y(1) = 1$, $y'(1) = y''(1) = 0$. Розв'язок отримати в діапазоні x від 0 до 3 з кроком 0.5 при представленні розв'язку в табличному вигляді та в діапазоні від 0 до 2 — в графічному.

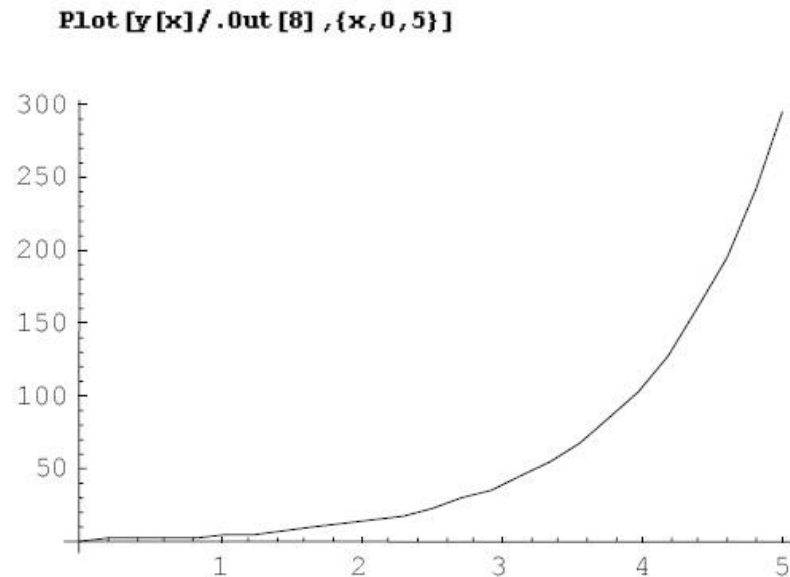


Рис. 10.1. Розв'язок рівняння прикладу 10.5.

Розв'язок. Використовуючи описану вище технологію, отримуємо:

```
NDSolve[{y'''[x]==3 x^2 y''[x]+2 x y'[x] +y[x]+1, y[1]==1,
y'[1]==y''[1]==0}, y[x],{x,0,5}]
{{y[x]->InterpolatingFunction[{{0.,5.}},<>][x]}}
Table[{x,y[x] /. Out[1]}, {x,0,3,0.5}]
{{0,{0.7363584435178943`}}, {0.5,{0.9662626674117316`}},
{1.,{1.`}}, {1.5,{1.0834912468759925`}},
{2.,{6.94346300495399`}}, {2.5,{5233.080815734498`}},
{3.,{2.368089715606595`*^8}}}
```

TableForm[%]	
0	0.736358
0.5	0.966263
1.	1.
1.5	1.08349
2.	6.94346
2.5	5233.08
3.	2.36809 × 10 ⁸

Розв'язок рівняння прикладу 10.6 у вигляді графіка наведено на рис.

10.2.

Функція `NDSolve[{f1, f2, ..., y1(x0), y2(x0), ...}, {y1[x], y2[x], ...}, {x, xmin, xmax}]`

Ця функція розв'язує систему диференціальних рівнянь n -го порядку, обчислюючи шукані функції $y_1(x), y_2(x), \dots$ в діапазоні незалежної змінної x від $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Розв'язок можна отримати у вигляді таблиці чи графіків.

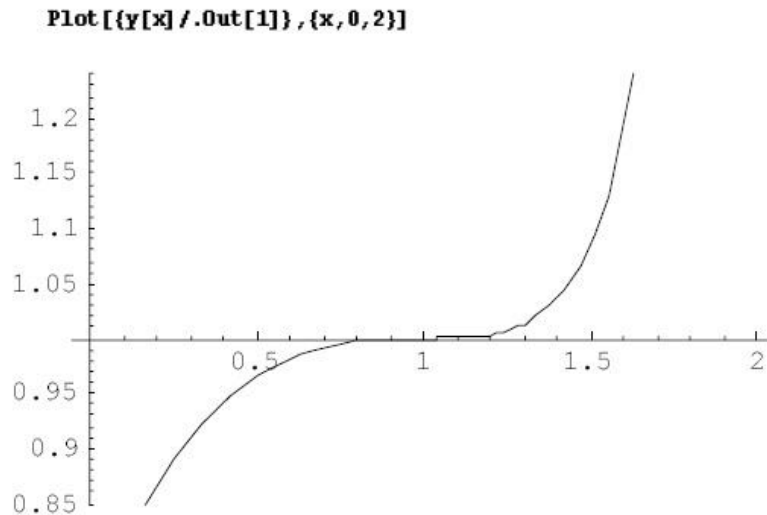


Рис. 10.2. Розв'язок рівняння прикладу 10.6.

Технологію розв'язування задачі проілюструємо на прикладах.

Приклад 10.7. Функціонування двоканальної системи масового обслуговування з відмовами описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -0.9p_0(t) + 2p_1(t), \\ p'_1(t) &= 0.9p_0(t) - 2.9p_1(t) + 4p_2(t), \\ p'_2(t) &= 0.9p_0(t) - 4p_1(t). \end{aligned}$$

Визначити ймовірності стану системи $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ на протязі 100 годин її функціонування за таких початкових умов її роботи $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = 0$. Розв'язок отримати у вигляді таблиць та графіків.

Розв'язок. В даному випадку функція `NDSolve` матиме вигляд:

```
NDSolve[{p0'[t]==-0.9 p0[t]+2 p1[t], p1'[t]==0.9 p0[t]-2.9
p1[t]+4 p2[t], p2'[t]==0.9 p0[t]-4 p1[t], p0[0]==1, p1[0]==
p2[0]==0}, {p0[0], p1[0], p2[0]}, {t, 0, 100}]
```

```
NDSolve[{p0'[t]==-0.9 p0[t]+2 p1[t], p1'[t]==0.9 p0[t]-2.9
p1[t]+4 p2[t], p2'[t]==0.9 p0[t]-4 p1[t], p0[0]==1, p1[0]==
p2[0]==0}, {p0[0], p1[0], p2[0]}, {t, 0, 100}]
{{p0[t]->InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>][t]
```

```

p1[t]->InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>][t]
p2[t]->InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>][t]]]
Table[{t, {p0[0],p1[0],p2[0]}/.Out[2]},{t,0,1,0.1}]
{{0,{{1.,-2.38559x10-21,-6.03826x10-26,}}},
{0.1,{{0.921667,0.0751894,0.00314313}}},
{0.2,{{0.862132,0.127986,0.00988277}}},
{0.3,{{0.81629,0.166013,0.0176963}}},
{0.4,{{0.780636,0.194028,0.0253356}}},
{0.5,{{0.752693,0.215063,0.0322435}}},
{0.6,{{0.730668,0.231105,0.038227}}},
{0.7,{{0.713235,0.243489,0.0432764}}},
{0.8,{{0.699393,0.253141,0.0474669}}},
{0.9,{{0.688377,0.260716,0.0509062}}},
{1.,{{0.679598,0.266694,0.053708}}},
TableForm[%]

```

0	1.	-2.3859×10^{-21}	-6.03826×10^{-26}
0.1		0.921667	0.0751894
0.2		0.862132	0.127986
0.3		0.81629	0.166013
0.4		0.780636	0.194028
0.5		0.752693	0.215063
0.6		0.730668	0.231105
0.7		0.713235	0.243489
0.8		0.699393	0.253141
0.9		0.688377	0.260716
1.		0.679598	0.266694

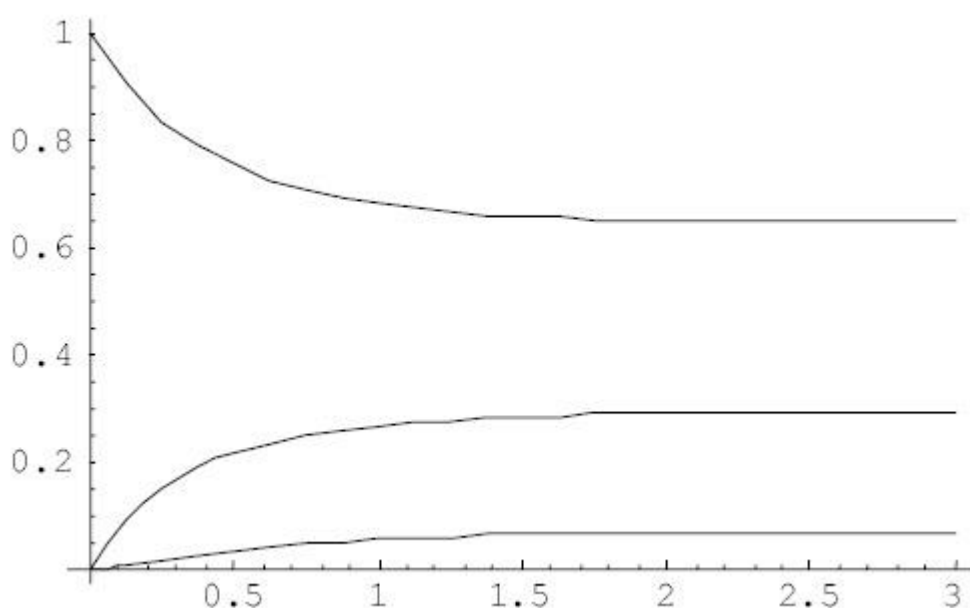


Рис. 10.3. Розв'язок рівняння прикладу 10.7.

Таблиця представлена в діапазоні t від 0 до 1 з кроком 0.1, а графік — в діапазоні t від 0 до 3.

Відкликом функції `NDSolve[{f1, f2, ..., y1(x0), y2(x0), ...}, {y1[x], y2[x], ...}, {x, xmin, xmax}]` в табличному та графічному вигляді може бути довільна комбінація функцій $y_i[x]$. Наведемо приклад.

Приклад 10.8. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t)z(t) + 1, \\y'(t) &= x(t)z(t) - 1, \\z'(t) &= x(t)y(t) + 1.\end{aligned}$$

за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$. Розв'язок представити для функції $x(t)$ і сукупності функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ у вигляді таблиці в діапазоні t від 0 до 10 з кроком 1 і у вигляді графіка в діапазоні t від 0 до 4.

Розв'язок. Застосовуючи описану вище технологію отримуємо:

```
NDSolve[{x'[t]==y[t] z[t]+1,y'[t]==x[t] z[t]-1,z'[t]==x[t]
y[t]+1, x[0]==1, y[0]==z[0]==0}, {x[t],y[x],z[t]},{t,0,10}]
```

```
{{x[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t],
  y[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t],
  z[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t]}}
```

```
Table[{t,x[t]/.Out[1]},{t,0,10,1}]
{{0,{1.}},{1,{1.87415}},{2,{2.64865}},{3,{3.51418}},
{4,{4.44004}},{5,{5.3943}},{6,{6.3633}},{7,{7.34092}},
{8,{8.32399}},{9,{9.31074}},{10,{10.3001}}}
```

```
TableForm[%]
```

0	1.
1	1.87415
2	2.64865
3	3.51418
4	4.44004
5	5.3943
6	6.3633
7	7.34092
8	8.32399
9	9.31074
10	10.3001

```
Table[{t, {x[t]/.Out[1]}, {y[t]/.Out[1]}, {z[t]/.Out[1]}],
{t, 0, 10, 1}]
{{0, {1.}`}, {-1.9190590211230242`*^-21}},
{1.9190590211230242`*^-21}}, {1, {{1.8741514974656315`}},
{{-0.49068522651298985`}}, {{0.49068522651298985`}}},
{2, {{2.6486484555017222`}}, {{-0.42547939415814945`}},
{{0.42547939415814945`}}}, {3, {{3.514178182379078`}},
{{-0.3110725739861868`}}, {{0.3110725739861868}}},
{4, {{4.440044147411033`}}, {{-0.2379557654813793`}},
{{0.2379557654813793`}}}, {5, {{5.394299483307163`}},
{{-0.19223107394893138`}}, {{0.19223107394893138`}}},
{6, {{6.363304792409019`}}, {{-0.16123653543792826`}},
{{0.16123653543792826`}}}, {7, {{7.340917281618858}},
{{-0.13884899977940118`}}, {{0.13884899977940118`}}},
{8, {{8.323988759679063`}}, {{-0.12192046649117368`}},
{{0.12192046649117368`}}}, {9, {{9.31073951868693`}},
{{-0.10867122095330521`}}, {{0.10867122095330521`}}},
{10, {{10.30008763937424`}}, {{-0.09801933978192177`}},
{{0.09801933978192177`}}}]
TableForm[%]
```

0	1.	-1.91906×10^{21}	1.91906×10^{21}
1	1.87415	-0.490685	0.490685
2	2.64865	-0.425479	0.425479
3	3.51418	-0.311073	0.311073
4	4.44004	-0.237956	0.237956
5	5.3943	-0.192231	0.192231
6	6.3633	-0.161237	0.161237
7	7.34092	-0.138849	0.138849
8	8.32399	-0.12192	0.12192
9	9.31074	-0.108671	0.108671
10	10.3001	-0.0980193	0.0980193

Розв'язок рівняння прикладу 10.8 у вигляді графіка наведено на рис. 10.4.

Зазвичай на практиці ми маємо справу з ситуацією, коли нелінійні рівняння високого порядку не розв'язуються. В таких випадках іноді вдається отримати відповідь, якщо перетворити рівняння високого порядку в систему рівнянь та спробувати її розв'язати. Ці перетворення можна здійснити методом введення нових змінних. Проілюструємо на прикладі.

`Plot[{x[t]/.Out[1]}, {y[t]/.Out[1]}, {z[t]/.Out[1]}, {t, 0, 4}]`

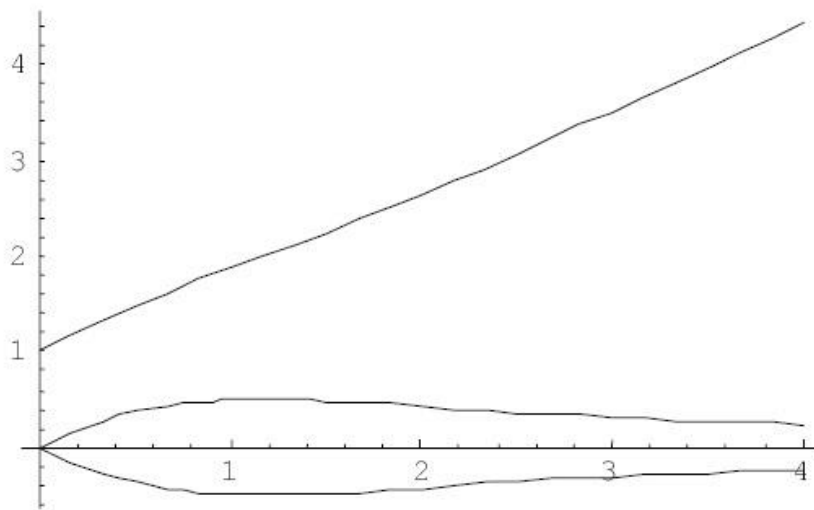


Рис. 10.4. Розв'язок рівняння прикладу 10.8.

Приклад 10.9. Розв'язати рівняння:

$$y'''(t) = y''(t) + 3y'(t) + 3y(t) + 1$$

за початкових умов $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$. Розв'язок рівняння отримати в діапазоні t від 0 до 10. Відповідь вивести в табличній формі в діапазоні t від 0 до 2 з кроком 0.4. Графік $y(t)$ представити в діапазоні t від 0 до 2.

Розв'язок. Перетворимо рівняння в систему рівнянь методом введення змінних. Позначимо: $y'(t) = z(t)$, $z'(t) = w(t)$. Тоді система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned} y'(t) &= z(t), \\ z'(t) &= w(t), \\ w'(t) &= w(t) + 3z(t) + 3y(t) + 1. \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи вбудовані функції системи Mathematica отримуємо:

```
NDSolve[{y'''[t]==y''[t]+3 y'[t]+3 y[t]+1, y[0]==1,
y'[0]==y''[0]==0}, y[t], {t,0,10}]
{{y[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t]}}
Table[{t,y[t]/.Out[17]}, {t,0,2,0.4}]

{{0,{{1.}}},{0.4,{1.04856}},{0.8,{1.47345}},{1.2,{3.10894}},
{1.6,{8.18663}},{2,{22.947}}}
```

```

TableForm[%]
0      1.
0.4    1.04856
0.8    1.47345
1.2    3.10894
1.6    8.18663
2.     22.947
NDSolve[{y'[t]==z[t],z'[t]==w[t],w'[t]==w[t]+3 z[t]+3 y[t]+1,
y[0]==1,z[0]==w[0]==0},{y[t],z[t],w[t]},{t,0,10}]
{{y[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t],
z[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t],
w[t]->InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t]}}
Table[{t,y[t]/.Out[20]},{t,0,2,0.4}]
{{0,{{1.}}},{0.4,{1.04856}},{0.8,{1.47345}},{1.2,{3.10894}}},
{1.6,{8.18663}},{2.{{22.947}}}
TableForm[%]
0      1.
0.4    1.04856
0.8    1.47345
1.2    3.10894
1.6    8.18663
2.     22.947

```

Plot [y[t]/.Out[20] , {t ,0 ,2}]

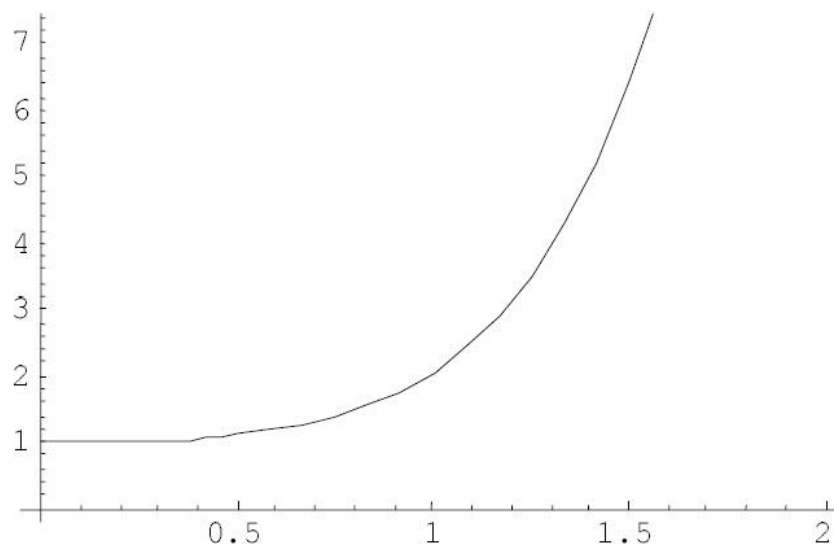


Рис. 10.5. Розв'язок рівняння прикладу 10.9.

Таким способом бачимо, що даному випадку розв'язок рівняння існує і він співпадає з розв'язком еквівалентної системи рівнянь. Треба мати на

увазі, що представлення рівняння високого порядку у вигляді системи рівнянь дозволяє отримати в табличному і графічному вигляді функції $z(t)$ та $w(t)$, тобто похідні $y'(t)$, $y''(t)$.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica, як будь-яка система комп'ютерної алгебри, не є ідеальним середовищем для розв'язування диференціальних рівнянь. Розв'язки, які ми отримуємо, рідко співпадають з відповідями, які містяться в математичних довідниках. Не рідко зустрічаються випадки, коли вбудована функція не дає розв'язку чи він хибний, хоча й саме рівняння є досить простим. Розглянемо такі приклади.

Приклад 10.10. *Розв'язати рівняння:*

$$y''(x) = -y(x) + \operatorname{tg} x;$$

$$y''(x) = -y(x) + 4x \sin x;$$

$$x'(t) + y'(t) - tx(t) = t,$$

$$x'(t) + y'(t) + y(t) = t(t + 2);$$

$$3z^2(x)z'(x) - 2x = 0.$$

Систему рівнянь розв'язати в аналітичному та чисельним методами за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ в діапазоні x від -1 до 1 .

Розв'язок. Використовуючи описані вище технології отримуємо:

```
DSolve[y''[x]+y[x]==Tan[x],y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -2 \operatorname{ArcTanh} \left[\operatorname{Tan} \left[\frac{x}{2} \right] \right] \cos[x] + C[1] \cos[x] + C[2] \sin[x] \right\} \right\}$$

```
DSolve[y''[x]+y[x]==4 x Sin[x],y[x],x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow C[1] \cos[x] + C[2] \sin[x] + \frac{1}{2} (-2x^2 \cos[x] + \cos[x] \cos[2x] - 2x \cos[x] \sin[2x] + \sin[x] \sin[2x]) \right\} \right\}$$

```
Simplify[%]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \left(\frac{1}{2} - x^2 + C[1] \right) \cos[x] + (x + C[2]) \sin[x] \right\} \right\}$$

```

DSolve[x'[t]+y'[t]-t x[t]==t, x'[t]+y'[t]+y[x]==t (t+2),
x[0]==1, y[0]==0}, {x[t],y[t]},t]
DSolve[-t x[t]+x'[t]+y'[t]==t, y[x]+x'[t]+y'[t]==t (t+2),
x[0]==1, y[0]==0}, {x[t],y[t]},t]

NDSolve[x'[t]+y'[t]-t x[t]==t, x'[t]+y'[t]+y[x]==t (t+2),
x[0]==1, y[0]==0}, {x[t],y[t]},{t,-1,1}]
NDSolve[-t x[t]+x'[t]+y'[t]==t, y[x]+x'[t]+y'[t]==t (t+2),
x[0]==1, y[0]==0}, {x[t],y[t]},{t,-1,1}]

DSolve[3 z[x]^2 z'[x]-2 x==0,z[x],x]

$$\left\{ \left\{ z[x] \rightarrow (x^2 + 3C[1])^{1/3}, \quad \left\{ z[x] \rightarrow -(-1)^{1/3}(x^2 + 3C[1])^{1/3}, \right. \right. \right.$$


$$\left. \left. \left\{ z[x] \rightarrow (-1)^{2/3}(x^2 + 3C[1])^{1/3}, \right\} \right\} \right.$$


```

Прокоментуємо отримані розв'язки. Розв'язки першого та другого рівняння є вірними, але не співпадають з довідниковими еталонами, які мають вигляд:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right),$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x(\sin x - x \cos x).$$

Отримані розв'язки можна суттєво спростити за допомогою функції `Simplify[%]`.

Розв'язок системи рівнянь не отримано ні аналітичним, ні чисельним методами, хоча розв'язок існує.

Цікавим є відповідь розв'язку третього рівняння — три рівноцінні результати.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь чисельними методами можуть виникати неприпустимо значні помилки за рахунок методичних помилок та помилок вибору кроку інтегрування. Завжди необхідно пам'ятати, що при комп'ютерних технологіях розв'язування диференціальних рівнянь необхідна перевірка істинності отриманих

результатів. Розглянемо нижче детально основні методи розв'язування диференціальних рівнянь.

10.2. Чисельні розв'язки диференціальних рівнянь

Розв'язуємо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \quad (10.1)$$

1)

на відрізьку $x_0 = [a, b]$.

Розіб'ємо інтервал точками $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, які розташовані з кроком $h = (b - a)/n$. Чисельним розв'язком задачі Коші (10.1) є таблична функція $y = \{(x_i, y_i)\}$, для якої відома оцінка похибки $|y_i - y(x_i)|$, де $y(x)$ *аналітичний розв'язок* задачі (10.1). Оцінка похибки дозволяє робити висновки на скільки знайдений числовий розв'язок задовольняє вимогам практичної задачі [22].

10.2.1. Метод Ейлера

Застосовуючи ряд Тейлора функції $y(x)$ в точці x_i , можна записати

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + ch^2$$

де ch^2 — залишковий член в формі Лагранжа. Перепишемо цю рівність з врахуванням (10.1):

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + ch^2. \quad (10.2)$$

При $i = 0$ з (10.2) та початкової умови (10.1) отримаємо

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + ch^2 = \\ &= y_0 + hf(x_0, y_0) + ch^2. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Позначимо через

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (10.4)$$

та назвемо y_1 *другим значенням табличної функції* — чисельним розв'язком задачі Коші, власне, перше значення — y_0 . Із (10.3) та (10.4) отримаємо похибку наближеного значення y_1 :

$$y(x_1) - y_1 = ch^2. \quad (10.5)$$

При $i = 1$ з (10.2) та (10.5) отримаємо

$$\begin{aligned} y(x_2) &= y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)) + c_1 h^2 = \\ &= y_1 + ch^2 + hf(x_1, y_1 + ch^2) + c_1 h^2. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу Тейлора, запишемо

$$y(x_2) = y_1 + ch^2 + h[f(x_1, y_1) + f'_y(x_1, y_1)ch^2 + \tilde{c}h^4] + o(h^2)$$

чи, нехтуючи досить малими доданками з h^3 та h^5 , отримуємо

$$\begin{aligned} y(x_2) &= y_1 + hf(x_1, y_1) + ch^2 + c_1 h^2 = \\ &= y_1 + hf(x_1, y_1) + 2c_2 h^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

де $c_2 = (c + c_1)/2$. Позначимо через

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \quad (10.7)$$

та назвемо y_2 *третьім значенням табличної функції* — чисельним розв'язком задачі Коші. Із (10.6) та (10.7) отримаємо похибку наближеного значення y_2 :

$$y(x_2) - y_2 = 2c_2 h^2. \quad (10.8)$$

Продовжуючи цей процес далі, всі чисельні розв'язки задачі Коші будемо обчислювати за формулою

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (10.9)$$

при $i = 0, 1, \dots, n - 1$. При цьому глобальна похибка побудованого числового розв'язку

$$y(x_n) - y_n = nc_n h^2 = \frac{b-a}{h} c_n h^2 = (b-a)c_n h.$$

Таким чином, метод Ейлера має глобальну похибку порядку h й тому практично не застосовується. Можна збільшити число членів ряду Тейлора у вище викладених міркуваннях, тим самим підвищивши точність методу.

Однак, в цьому випадку виникає необхідність обчислювати похідні функції $f(x, y)$. Наступний сильний метод дозволяє уникнути таких труднощів й має досить високу точність.

Відзначимо, що даний метод є k -кроковим, якщо при визначенні наближеного значення y_{i+1} потрібно k попередніх значень $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$. В цьому сенсі метод Ейлера є однокроковим методом, з формули (10.9) видно, що для визначення наближеного значення y_{i+1} необхідне лише одне попереднє значення.

Приклад 10.11. Розглянемо приклад чисельного розв'язку задачі Коші методом Ейлера.

Розв'язок. Про всяк випадок очистимо змінні

```
x= .  
y= .
```

і визначимо праву частину рівняння (10.1) у вигляді

```
f [x_, y_] = y^2 - 5x^2  
y^2 - 5x^2
```

Диференціальне рівняння (10.1) з такою правою частиною є *рівнянням типу Рікатті*, воно не має розв'язку в елементарних функціях.

Введемо крок дослідження вузлів і початкові умови.

```
h=0.1;  
x0=-1;  
y0=-1;
```

Для порівняння отриманого розв'язку скористаємось вбудованою функцією `NDSolve` й отримаємо чисельний розв'язок задачі Коші (зауважимо, що метод розв'язку вбудованої функції невідомий).

Будемо шукати розв'язок на відрізку $[x_0, x_0 + \Delta]$. Задамо правий кінець інтервалу

```
 $\Delta=1$ 
```

Відповідно $[x_0, x_0 + \Delta] = [-1, 0]$.

```
Clear[y];
```

```
eq=NDSolve[{y'[x]==f[x,y[x]],y[x0]==y0} y[x], {x,x0,x0+Δ}][[1]]
{y[x] → InterpolatingFunction[(-1,0),<>][x]}
```

Розв'язок отримано в стандартному для програми Mathematica вигляді через інтерполяційну функцію. В круглих дужках зазначено інтервал, на якому отримано розв'язок. Він співпадає з тими інтервалами, що вказані в команді. Якщо спів падання немає, то з'явиться повідомлення про неможливість розв'язання рівняння на вказаному інтервалі й буде наведено допустимий інтервал. Тоді потрібно скоректувати задачу — змінити початковий інтервал (змінити Δ) у відповідності з зазначеним в функції `Out[5]`.

```
y[x_]=y[x]/.eq
InterpolatingFunction[(-1,0),<>][x]
```

Тепер з такою функцією можна працювати як звичайно, наприклад, побудувати її графік

```
gr=Plot[y[x],{x,x0,x0+Δ}, PlotStyle→
{Thickness[0.01],Hue[0.7]}];
```

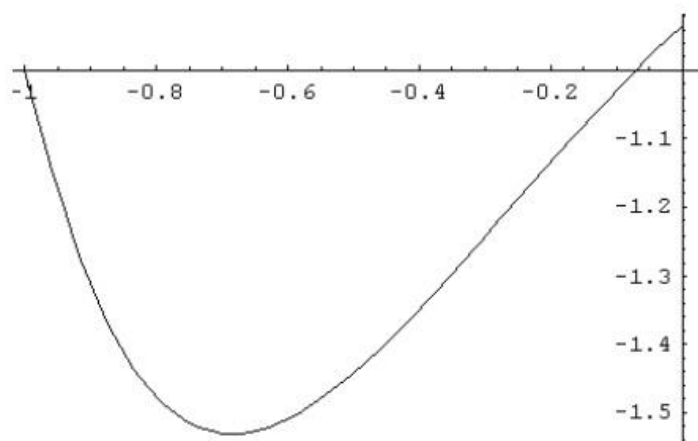


Рис. 10.6. Розв'язок рівняння прикладу 10.11.

Звернемося тепер до методу Ейлера. Введемо число вузлів без одного вузла

```
n= Δ/h
```

Складемо список, що містить номер точки i , починаючи з другої точки, саму точку x_i , значення числового розв'язку y_i в даній точці x_i , знайдене в співвідношенні (10.9) і значення функції $y(x_i)$ в даній точці:

```
P=Table[i, x_i=x_{i-1}+h, y_i=y_{i-1}+hf[x_i, y_i], y[x_i], {i, 1, n}];
```

Введемо заголовок попереднього списку

```
q={"i", "x_i", "y_i", "y[x_i]"}
```

і додамо до списку початкові умови, значення функції $y[x]$ в початковій точці і надрукуємо список

```
p=Prepend[p, {0, x_0, y_0, y[x_0]}];
```

```
(p=Prepend[p, q])//TableForm
```

i	x_i	y_i	$y[x_i]$
0	-1	-1	-1
1	-0.9	-1.4	-1.31375
2	-0.8	-1.609	-1.47738
3	-0.7	-1.67011	-1.53055
4	-0.6	-1.63618	-1.50966
5	-0.5	-1.54847	-1.44254
6	-0.4	-1.4337	-1.34889
7	-0.3	-1.30815	-1.24243
8	-0.2	-1.18202	-1.13296
9	-0.1	-1.06231	-1.02793
10	0	-0.954456	-0.933559

Останні два стовпці таблиці показують відмінність отриманого розв'язку від розв'язку, отриманого за допомогою вбудованої функції DSolve.

Відповіддю даної задачі вважається список вигляду (x_i, y_i) :

```
p1=Table[{x_i, y_i}, {i, 0, n}]
```

```
{{-1, -1}, {-0.9, -1.4}, {-0.8, -1.609}, {-0.7, -1.67011}, {-0.6, -1.63618},
{-0.5, -1.54847}, {-0.4, -1.4337}, {-0.3, -1.30815}, {-0.2, -1.18202}
{-0.1, -1.06231}, {0, -0.954456}}
```

Побудуємо точки списку p1:

```
gr1=ListPlot[p1, PlotStely->{Hue[0.1], PointSize[0.02]}]
```

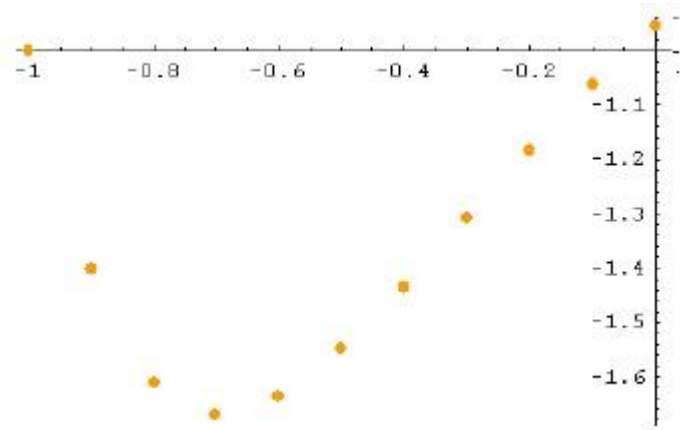


Рис. 10.7. Точки списку p1.

та виведемо їх на загальний графік

```
Show[gr, gr1];
```

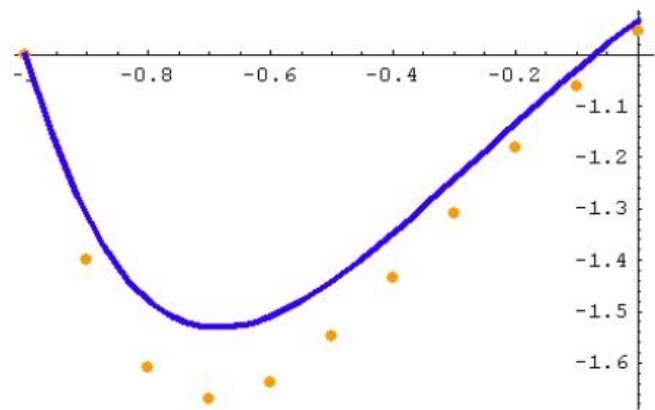


Рис. 10.8. Графік розв'язку рівняння прикладу 10.11 та точки списку p1.

10.2.2. Метод Рунге–Кутти

Будемо шукати розв'язок задачі Коші за допомогою рекурентного співвідношення вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \quad (10.10)$$

де права частина в (10.10) є наближенням відрізка ряду Тейлора функції $y(x)$ в точці x_i до p -го порядку і не містить її похідних. Розглянемо найпростіші випадки.

При $p = 1$, співвідношення (10.9) представляє метод Рунге–Кутти першого порядку — права частина (10.9) не містить похідних і наближає відрізок ряду Тейлора функції $y(x)$ в точці x_i до першої похідної.

Бачимо, що в цьому випадку метод Рунге–Кутти першого порядку співпадає з методом Ейлера.

Нехай $p = 2$. Будемо шукати функцію (10.10) у вигляді

$$\varphi(x, y_i, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)).$$

Відтак співвідношення (10.10) у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h[c_1 f(x_i, y_i) + c_2 f(x_i + \alpha h, y_i + \beta h f(x_i, y_i))], \quad (10.11)$$

Для визначення параметрів c_1, c_2, α, β перетворимо рівність (10.11).

Застосовуючи формулу Тейлора, запишемо

$$\begin{aligned} f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y)) \\ = f(x, y) + f'_x(x, y)\alpha h + f'_y(x, y)\beta h f(x, y) + o(h^2) \end{aligned}$$

Тоді рівність (10.11) набере вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + h \Big[(c_1 + c_2) f(x_i, y_i) \\ + h \left(c_2 \alpha f'_x(x_i, y_i) + c_2 \beta f'_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i) \right) \Big] + \\ + o(h^3), \end{aligned} \quad (10.12)$$

Застосовуючи тепер ряд Тейлора для функції $y(x)$ в точці x_i до других похідних, запишемо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{h^2}{2} y''(x_i)h^2 + o(h^3). \quad (10.13)$$

По (10.1) $y'(x) = f(x, y(x))$, тоді

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) = \\ &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Тому (10.13) набере вигляду

$$\begin{aligned}
y(x_{i+1}) = y(x_i) \\
+ h \left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2} f'_x(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2} f'_y(x_i, y(x_i)) f(x_i, y(x_i)) \right] \\
+ o(h^3).
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Порівнюючи праві частини рівностей (10.12) та (10.14), бачимо, що вони співпадають з точністю до нескінченно малих порядку h^3 й заміни $y(x_i) \rightarrow y_i$, якщо

$$c_1 + c_2 = 1, \quad 2c_2\alpha = 1, \quad 2c_2\beta = 1.$$

Нехай $c_2 = \lambda$, тоді $c_1 = 1 - \lambda$, $\alpha = \frac{1}{2\lambda}$, $\beta = \frac{1}{2\lambda}$. Підставимо знайдені значення параметрів в (10.11) та отримаємо сімейство співвідношень Рунге–Кутти другого порядку

$$y_{i+1} = y_i + h \left[(1 - \lambda)f(x_i, y_i) + \lambda f \left(x_i + \frac{1}{2\lambda}h, y_i + \frac{1}{2\lambda}hf(x_i, y_i) \right) \right].$$

Зокрема при $\lambda = \frac{1}{2}$ отримуємо *метод Хойна*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))],$$

а при $\lambda = 1$ — *метод середньої точки*

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) \right).$$

Метод Рунге–Кутти четвертого порядку.

Зазвичай, на практиці застосовується метод Рунге–Кутти четвертого порядку. За методом Рунге–Кутти четвертого порядку наближені значення невідомої функції y_i в точках x_i визначаються послідовно з рівностей

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

де

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_i, y_i), \\k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right),\end{aligned}$$

$i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Можна довести, що глобальна похибка методу Рунге–Кутти p -го порядку рівна $o(h^p)$, тобто $|y_i - y(x_i)| < Ch^p$, де C не залежить від h .

Метод Рунге–Кутти є однокроковим методом.

Приклад 10.12. Розв'язати задачу Коші прикладу 10.11 методом Рунге–Кутти четвертого порядку.

Розв'язок. Очистимо змінні

```
Clear[x, y, f, k1, k2, k3, k4]
```

Введемо функцію з прикладу 10.11 у вигляді

```
f[x_, y_] = y^2 - 5x^2
```

Функція визначена на тому ж інтервалі, інтервал розбитий тими ж точками, що слідує з кроком $h = 0.1$.

Введемо початкові умови, крок слідування точок, визначимо правий кінець інтервалу і число вузлів без одного вузла

```
x0=-1;
y0=-1;
h=0.1;
Δ=1;
n=Δ/h;
```

Введемо заголовок таблиці з розв'язками

```
q={"i", "x_i", "y_i", "y[x_i]"}
```

і побудуємо цикл, в якому послідовно обчислюються величини k_i , значення табличної функції — розв'язки в точці x_i і складається рядок таблиці відповіді у вигляді списку $e[i]$. Цикл пропрацює n разів, тим самим розглянемо всі точки відрізка $[x_0, x_0 + \Delta]$:

```

Do[k1=f[xi,yi];
k2=f[xi+h/2,yi+h/2*k1];
k3=f[xi+h/2,yi+h/2*k2];
k4=f[xi+h/2,yi+h/2*k3];
yi+1=yi+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
e[i]={i,xi,yi,y[xi]};
xi+1=xi+h,{i,0,n}]

```

Складемо таблицю та додамо для неї заголовок

```

q2=Table[e[i],{i,0,n}];
N[Join[{q},q2],6]//TableForm

```

i	x_i	y_i	$y[x_i]$
0	-1	-1	-1
1	-0.9	-1.31375	-1.31375
2	-0.8	-1.47727	-1.47738
3	-0.7	-1.53043	-1.53055
4	-0.6	-1.50955	-1.50966
5	-0.5	-1.44245	-1.44254
6	-0.4	-1.34882	-1.34889
7	-0.3	-1.24238	-1.24243
8	-0.2	-1.13291	-1.13296
9	-0.1	-1.0279	-1.02793
10	0	-0.993533	-0.933559

З двох останніх стовпців видно, що розв'язок, знайдений методом Рунге–Кутти досить прийнятно співпадає з розв'язком отриманим за допомогою вбудованої команди системи Mathematica DSolve.

Зазначимо, що для даної задачі відповіддю є й список

```

pr=Table[{xi,yi},{i,0,n}]

```

```

{{-1,-1},{-0.9,-1.31375},{-0.8,-1.47727},{-0.7,-1.53043},
{-0.6,-1.50955},{-0.5,-1.44245},{-0.4,-1.34882},{-0.3,-1.24238},
{-0.2,-1.13291},{-0.1,-1.0279},{0,-0.933533}}

```

Побудуємо координати зі списку pr та графік.

```

gr2=ListPlot[pr,PlotStyle->{Heu[0.1]PointSize[0.02]}]

```

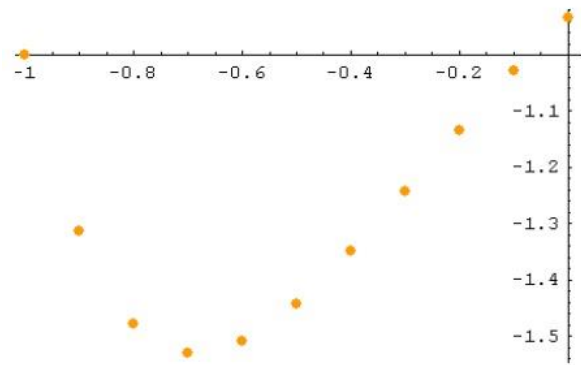


Рис. 10.9. Точки списку `pr` прикладу 10.12.

```
Show[gr,gr2];
```

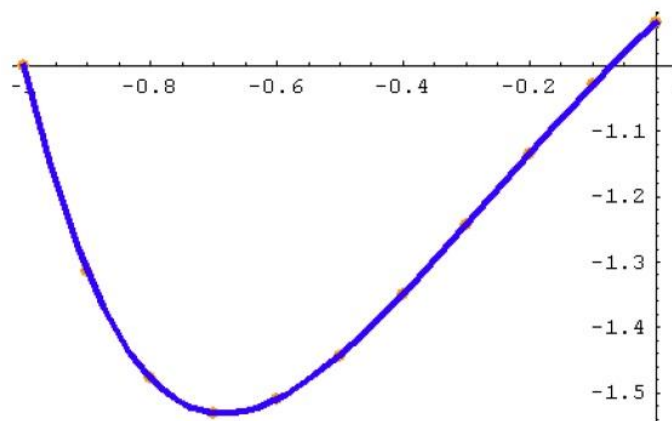


Рис. 10.10. Графік прикладу 10.12.

На завершення приведемо загальний графік, який містить розв'язки двох методів та розв'язок даного диференціального рівняння вбудованою функцією.

```
Show[gr,gr1,gr2];
```

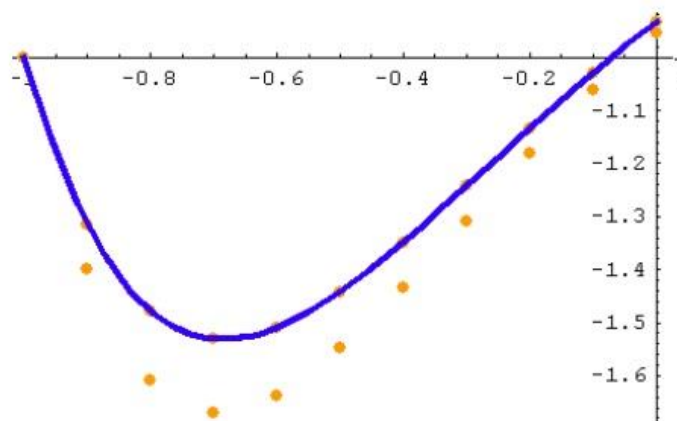


Рис. 10.11. Загальний графік розв'язку прикладу 10.12.

За методом Рунге–Кутти четвертого порядку доводиться чотири рази обчислювати значення функції на кожному кроці, що може викликати труднощі, якщо функція досить складна.

Наступний метод Адамса вимагає знання значення функції лише в одній точці, починаючи з певного кроку [22].

10.2.3. Метод Адамса

Метод Адамса є багатокроковим методом, що також розв’язує задачу Коші (10.1). Розглянемо ідею цього методу. Розіб’ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n відрізків довжини $n = (b - a)/h$ та проінтегруємо від x_k до x_{k+1} :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (10.15)$$

Припустимо, що наближені значення розв’язку задачі Коші y_i вже знайдено для перших $k + 1 \leq n$ точок, $i = 0, 1, \dots, k$. Цю частину розв’язку можна знайти за допомогою методу Ейлера чи Рунге–Кутти. Позначимо через $f_i = f(x_i, y_i)$. За табличною функцією (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, k$ побудуємо многочлен Лагранжа k -го порядку $L_k(x)$. Многочлен Лагранжа буде апроксимувати підінтегральну функцію (10.1) на інтервалі $[x_0, x_k]$. Замінімо в (10.1) підінтегральну функцію многочлена Лагранжа, а точні значення $y(x_i)$ на наближені значення при y_i :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x) dx. \quad (10.16)$$

Отримуємо наближені розв’язки y_{k+1} . Для визначення y_{k+2} за табличною функцією (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, k$ побудуємо другий многочлен Лагранжа k -го порядку та скористаємось співвідношенням (10.16), зробивши заміну $k \rightarrow k + 1$ і так далі. Число k фіксоване на кожному кроці і є степенем многочлена Лагранжа.

Нехай $m \geq k$. Візьмемо многочлен Лагранжа $L_k(x)$ побудований за табличною функцією (x_i, f_i) , $i = m - k, m - k + 1, \dots, m$,

$$L_k(x) = \sum_{j=m-k}^m f_j \prod_{\substack{i=m-k \\ i \neq j}}^m \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_k(x) dx &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\sum_{j=m-k}^m f_j \prod_{\substack{i=m-k \\ i \neq j}}^m \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) dx = \\ &= \sum_{j=m-k}^m f_j \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{\substack{i=m-k \\ i \neq j}}^m \frac{x - x_i}{x_j - x_i} dx = h \sum_{j=m-k}^m f_j c(k, m, j), \end{aligned}$$

де

$$c(k, m, j) = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \prod_{\substack{i=m-k \\ i \neq j}}^m \frac{x - x_i}{x_j - x_i} dx. \quad (10.17)$$

Тому (10.16) можна переписати у вигляді

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{j=m-k}^m f_j c(k, m, j), \quad (10.18)$$

$m = k, k + 1, \dots, n - 1$. При $k = 3$, наприклад, співвідношення (10.18) набуде вигляду (10.19).

Доведено, що якщо функція $f(x, y)$ $n + 1$ раз неперервно диференційовна, то для наближення значень $y_0, y_1, \dots, y_n$, отриманих за формулою (10.5), справедлива оцінка

$$|y(x_i) - y_i| \leq Ch^{k+1},$$

$i = 0, 1, \dots, n$, де $y(x_m)$ – аналітичний розв’язок задачі Коші (10.1).

Порівнюючи методи Рунге–Кутти четвертого порядку точності й метод Адамса при $k = 3$ також четвертого порядку точності, бачимо, що на кожному кроці метод Адамса вимагає обчислення одного значення функції $f(x, y)$, а метод Рунге–Кутти — чотирьох обчислень значень функції. Проте, метод Рунге–Кутти не вимагає знати декількох початкових значень і дозволяє змінювати крок слідування точок в будь-який момент обчислення.

Приклад 10.13. Розв’язати задачу Коші прикладу 10.11 методом Адамса.

Розв'язок. Введемо функцію

$$f[x_, y_] = y^2 - 5x^2$$

Функція визначена на тому ж інтервалі, інтервал розбитий тими ж точками, що слідує з кроком $h = 0.1$.

Введемо початкові умови, крок слідування точок, визначимо правий кінець інтервалу і число вузлів без одного вузла

```
x0=-1;  
y0=-1;  
h=0.1;  
Δ=1;  
n=Δ/h;
```

Введемо вузли

Покладемо $k = 3$. Методом Рунге–Кутти знайдемо наближені значення розв'язку задачі Коші в перших чотирьох точках:

```
Do[k1=f[xi,yi];  
k2=f[xi+h/2,yi+h/2*k1];  
k3=f[xi+h/2,yi+h/2*k2];  
k4=f[xi+h/2,yi+h/2*k3];  
yi+1=yi+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);  
e[i]={i,xi,yi};  
xi+1=xi+h,{i,0,k}]
```

Складемо таблицю та додамо для неї заголовки

```
q=Table[e[i],{i,0,k}];  
N[Join["i","xi","yi"],q]//TableForm  


|   |      |          |
|---|------|----------|
| i | xi   | yi       |
| 0 | -1   | -1       |
| 1 | -0.9 | -1.31375 |
| 2 | -0.8 | -1.47727 |
| 3 | -0.8 | -1.53043 |


```

Введемо функцію (10.17)

$$c(k_, m_, j_) = \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\prod_{i=m-k}^m \text{If}\left[i == j, 1, \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right] \right) dx$$

Зазначимо, що функція $c(k, m, j)$ залежить від k, j , але не залежить від m . Дійсно, візьмемо, наприклад, два значення $m = 3$ та $m = 6$ і запишемо всі значення функції, приймаючи, що $k = 3$.

```
m=3;k=3;Table[c[k,m,j],{j,m-k,m}]
```

$$\left\{-\frac{3}{8}, \frac{37}{24}, -\frac{59}{24}, \frac{55}{24}\right\}$$

```
m=6;k=3;Table[c[k,m,j],{j,m-k,m}]
```

$$\left\{-\frac{3}{8}, \frac{37}{24}, -\frac{59}{24}, \frac{55}{24}\right\}$$

Тому співвідношення (10.18) при $k = 3$ можна записати в такому вигляді

$$y_{m+1} = y_m + h \left(-\frac{3}{8} f_{m-3} + \frac{37}{24} f_{m-2} - \frac{59}{24} f_{m-1} + \frac{55}{24} f_m \right). \quad (10.19)$$

Тепер можна знайти решту значень наближеного розв'язку $y_4, \dots, y_{10}$.

Враховуючи, що $f_i = f(x_i, y_i)$, Задамо цикл

```
Do[y_{m+1} = y_m + h (-3/8 f[x_{m-3}, y_{m-3}] + 37/24 f[x_{m-2}, y_{m-2}] - 59/24 f[x_{m-1}, y_{m-1}] + 55/24 f[x_m, y_m]), {m, 3, 9}]
```

Таким чином, отримали наступні розв'язки задачі Коші методом Адамса:

```
p=Table[{x_i, y_i}, {i, 0, 10}]/N];
```

Введемо заголовок списку

```
q={"x_i", "y_i" }
```

і додамо заголовок до списку p

```
Prepend[p, q]//TableForm
```

x_i	y_i
-1.	-1.
-0.9	-1.31368
-0.8	-1.47727
-0.7	-1.53043
-0.6	-1.51328
-0.5	-1.44422
-0.4	-1.3516
-0.3	-1.24216
-0.2	-1.13365
-0.1	-1.02669
0	-0.93336

Побудуємо графік табличної функції p-розв'язку задачі Коші

```
gr1=ListPlot[p,PlotStyle→{Heu[0.1]PointSize[0.02]}]
```

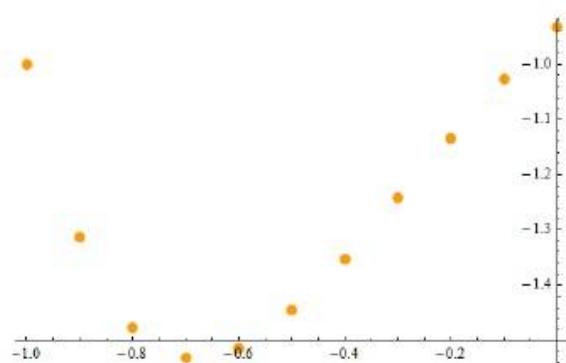


Рис. 10.12. Графік табличної функції p –розв’язку задачі Коші прикладу 10.13.

Сумістимо його з графіком gr розв’язку задачі Коші за допомогою функції

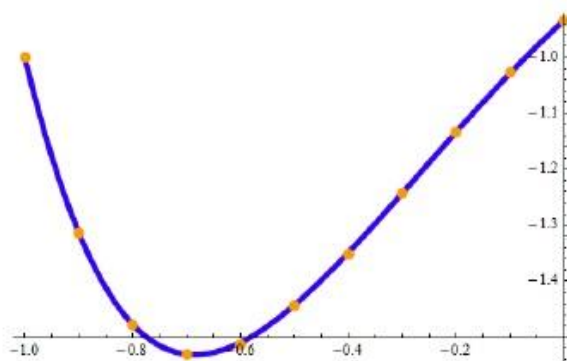


Рис. 10.13. Графік табличної функції gr розв’язку задачі Коші прикладу 10.13.

10. 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійне диференціальне рівняння – звичайне диференціальне рівняння, в яке невідома функція та її похідні входять лінійно, тобто рівняння вигляду

$$y^{(n)}(x) + g_{(n-1)}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x)y(x) = f(x),$$

де $g_i(x)$ та $f(x)$ – функції, що залежать тільки від аргументу x .

Важливий підклас лінійних диференціальних рівнянь складають лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, для яких $g_i(x) = c_i$.

Рівняння

$$y^{(n)}(x) + g_{(n-1)}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x)y(x) = 0$$

називається *однорідним лінійним диференціальним рівнянням*.

Однорідне диференціальне рівняння n -го порядку має n лінійно незалежних розв'язків.

Якщо відомий хоча б один частковий розв'язок лінійного диференціального рівняння, то його загальний розв'язок є сумою часткового розв'язку та лінійної комбінації n розв'язків однорідного диференціального рівняння.

Приклад 10.14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = y + x.$$

Розв'язок.

```
de1=y'[x]-y[x]==x;  
sol1=Dsolve[de1,y[x],x]  
{y[x] → -1 - x + exC[1]}
```

Це правило підстановки дійсне лише для $y[x]$, але не для довільних величин, таких як $y[0]$ чи $y'[x]$, тому що, очевидно, неможна отримати очікуваний результат.

```
y[x]-y'[x]+y[0]+1/.sol1  
{-x + exC[1] + y[0] - y'[x]}
```

Однак, якщо записати розв'язок y без явного зазначення аргументу x , то тоді функція `Dsolve` повертає правило заміни для y в термінах чистої чи анонімної функції.

```
sol1n=Dsolve[de1,y,x]  
{y → Function[{x}, -1 - x + exC[1]]}
```

Тепер, отримавши в зазначеному вище виразі даний результат, ми отримуємо вірний розв'язок

```
y[x] - y'[x] + y[0] + 1/.sol1n
```

Приклад 10.15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + xy = x^3.$$

Знайти значення отриманого розв'язку при $x = 3$ й обчислити похідну від знайденого загального розв'язку.

Розв'язок. В загальному випадку команда `Dsolve` генерує розв'язок у вигляді правил заміни невідомих функцій $y[x]$. В цьому представленні розв'язки непросто обробляти. Якщо поставити завдання про пошук значень, наприклад, для $y[2]$ чи $y'[x]$ для диференціального рівняння нижче

```
de2=y'[x]+xy[x]==x^3;
sol2=Dsolve[de2,y[x],x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -2 + x^2 + e^{-\frac{x^2}{2}} C[1] \right\} \right\}$$

```

після цього розв'язок застосовується як правило підстановки до виразу $y[x]$

```
y0=y[x]/.sol2[1]

$$-2 + x^2 + e^{-\frac{x^2}{2}} C[1]$$

```

значення функції для $x=2$ буде отримано як команда

```
y0=/.x→2

$$2 + \frac{C[1]}{e^2}$$

```

перша похідна $y'(x)$ запишеться у вигляді

```
∂xsol2

$$\left\{ \left\{ y'[x] \rightarrow 2x - e^{-\frac{x^2}{2}} x C[1] \right\} \right\}$$

```

В якості альтернативи можна поставити величину y замість $y[x]$ та отримати результат як чисту функцію замість (звичайної) функції зі змінною x . Очевидно, що вище описані перетворення простіше виконувати з чистою функцією.

```
Clear[x,y,sol2];
sol2=Dsolve[de2,y,x]

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \text{Function} \left[ \{x\}, -2 + x^2 - e^{-\frac{x^2}{2}} C[1] \right] \right\} \right\}$$

y'[x]+y[0]/.sol2

$$\left\{ -2 + 2x + C[1] - e^{-\frac{x^2}{2}} x C[1] \right\}$$

y1=y/.sol2[1]

$$\text{Function} \left[ \{x\}, -2 + x^2 - e^{-\frac{x^2}{2}} C[1] \right]$$

```

```
{y1'[x], y1[2]}
```

Приклад 10.16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' + y = 1.$$

Знайти значення отриманого розв'язку при $x = 3$ й обчислити похідну від знайденого загального розв'язку.

Розв'язок. В загальному випадку команда `Dsolve` генерує розв'язок у вигляді правил заміни невідомих функцій $y[x]$. В такому представленні розв'язки обробляти складно. Якщо поставити завдання про пошук значень, наприклад, для $y[2]$ чи $y'[x]$ для диференціального рівняння нижче

```
de3={xy'[x]+y[x]==1, y[1]==2};  
sol3=Dsolve[de3,y[x],x]  
 $\left\{\left\{y[x] \rightarrow \frac{1+x}{x}\right\}\right\}$ 
```

Результат представлено як правило підстановки, може бути перетвореним в звичайне рівняння, якщо ця форма більш прийнятна.

```
Flatten[sol3/.Rule->Equal][1]  
 $y[x] == \frac{1+x}{x}$ 
```

Приклад 10.17. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1 + x^2)y' + xy = -x.$$

Виділити інтегральні криві, що відповідають значенням $C[1]$ рівним $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ та нарисувати їх на відріжку $[-3, 3]$.

Розв'язок.

```
de4=(1 + x^2) y'[x]+xy[x]==-x^3;  
sol4=DSolve[de4,y[x],x]  
 $\left\{\left\{y[x] \rightarrow \frac{1}{3}(2 - x^2) + \frac{C[1]}{\sqrt{1+x^2}}\right\}\right\}$ 
```

Визначимо множину значень сталої $C[1]$ та побудуємо таблицю розв'язків `ynum`.

```
num = {-3,-2,-1, 0,1,2,3};
```

```
ynum = Table[sol4[[1,1,2]] /. [1] → n, {n, -3, 3, 1}];
```

Після чого, визначивши колір, товщину ліній та назву графіка, побудуємо графік розв'язків.

```
Plot[ynum//Evaluate, {x, -3, 3}, Frame → True,
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 1], Thickness[0.01]}},
PlotLabel → "Solution of ODE (1+x^2)y'+xy=-x^3"]
```

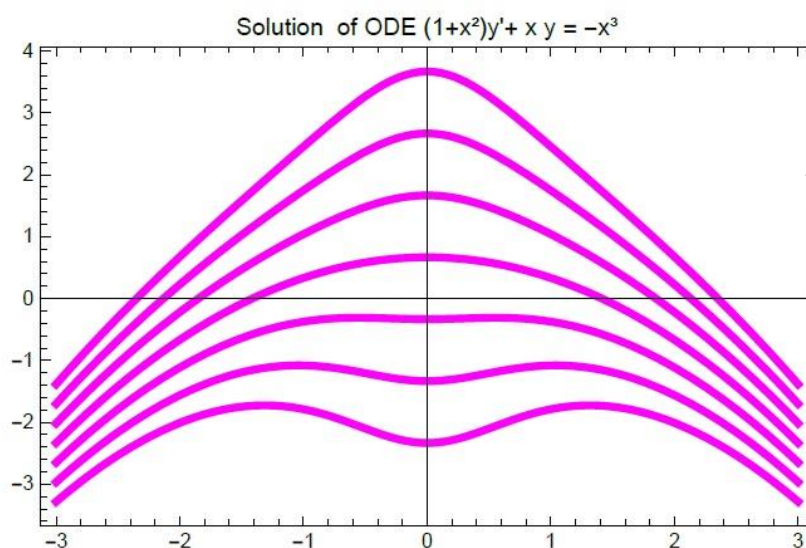


Рис. 10.14. Графік розв'язків прикладу 10.17.

Приклад 10.18. *Методом послідовних наближень знайти розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язок. Не складно показати, що дане диференціальне рівняння еквівалентне інтегральному рівнянню

$$y(x) = y(0) + \int_0^x (x^2 + y(x)) dx,$$

яке можна розв'язати методом послідовних наближень, використовуючи рекурентну формулу

$$y_{n(x)} = 1 + \int_0^x (\theta^2 + y_{n-1}(\theta)) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_0(x) = 1.$$

Далі підставляючи в дане співвідношення послідовно значення $n = 0, 1, 2$ і т.д. отримуємо

```
Clear["Global`*"];
y0[x_]=1;
yt = Table[y_n[x_] = 1 + ∫_0^x (2θ - θ^2 + y_{n-1}(θ))dθ, {n, 1, 5}];
Print[yt//ColumnForm]

1 + x + x^2 - x^3/3
1 + x + 3x^2/2 - x^4/12
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 - x^5/60
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 - x^6/360
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 - x^7/2520
```

Аналізуючи отримані вирази, помічаємо, що $y_n(x)$ можна представити у вигляді

```
z_n[x_] := x^2 + ∑_{k=0}^{n+1} x^k/k! - x^{n+2}/(n+2)!;
Table[z_n[x], {n, 1, 5}]/ColumnForm

1 + x + 3x^2/2 - x^3/6
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 - x^4/24
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 - x^5/120
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 - x^6/720
1 + x + 3x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 - x^7/5040
```

В границі $n \rightarrow \infty$ отримуємо розв'язок вихідного диференціального рівняння

```
Limit[z_n[x], n -> ∞]
e^x + x^2
```

Це самий розв'язок отримуємо й при використанні функції DSolve.

```
DSolve[{y'[x]==y[x]-x^2+2x,y[0]==1},y[x],x]
{{y[x] -> e^x + x^2}}
```

10. 4. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Відомо, що до системи диференціальних рівнянь першого порядку зводиться будь-яке диференціальне рівняння чи система рівнянь [28]. Зокрема, наприклад, розв'язок диференціального рівняння

$$y'''(x) + (x^2 + 1)y''(x) - y'(x) + xy(x) - x^3 = 0,$$

введенням нових невідомих функцій $u(x)$, $v(x)$ таких, що $y'(x) = u(x)$, $u'(x) = v(x)$, зводиться до розв'язку системи трьох рівнянь першого порядку відносно трьох невідомих функцій.

$$\begin{cases} y'(x) = u(x), \\ u'(x) = v(x), \\ v'(x) = -(x^2 + 1)v(x) + u(x) + xy(x) - x^3. \end{cases}$$

Проілюструємо два методи чисельного розв'язку диференціальних задач, які містять такі системи.

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку. Потрібно знайти функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$, визначені на відрізку $[a = x_0, b]$, що задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \end{cases} \quad (10.20)$$

і початковим умовам

$$y_1(x) = y_1^0, \dots, y_n(x) = y_n^0. \quad (10.21)$$

21)

Запишемо систему (10.20) у векторному вигляді. Введемо вектори

$$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)), Y_0(x) = (y_1^0(x), \dots, y_n^0(x)),$$

$$Y'(x) = (y_1'(x), \dots, y_n'(x)).$$

Функцію $f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ коротко запишемо таким способом $f_i(x, Y(x))$, $i = 1, 2, \dots, n$, а вектор, що складається з функцій, які стоять в правих частинах рівності (10.20), у вигляді $F(x, Y(x)) = (f_1(x, Y(x)), \dots, f_n(x, Y(x)))$.

Тепер задача Коші (10.20), (10.21) допускає компактний векторний запис вигляду

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \quad Y(x_0) = Y_0. \quad (10.22)$$

Для чисельного розв'язку задачі Коші (10.20), (10.21) чи (10.22) потрібно задати натуральне число n , розбити відрізок $[a, b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частин довжини $h = (b - a)/n$ та знайти табличну вектор-функцію (x_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ таку, що вектор $Y_i \approx Y(x_i)$, де $Y(x)$ – вектор аналітичного розв'язку задачі Коші, який, взагалі кажучи, невідомий.

На багатовимірний випадок узагальнюються розв'язку одновимірної задачі Коші, наприклад, такі, як метод Ейлера чи Рунге–Кутти.

За методом Ейлера розв'язок задачі Коші (10.22) визначається за співвідношенням

$$Y_{i+1}(x) = Y_i + hF(x_i, Y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (10.23)$$

За методом Рунге–Кутти розв'язок задачі Коші (10.22) визначається за формулою

$$Y_{i+1}(x) = Y_i + h \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (10.24)$$

де

$$k_1 = (f_1(x_i, Y_i), \dots, f_n(x_i, Y_i)) = F(x_i, Y_i),$$

$$k_2 = \left(f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_1}\right), \dots, f_n\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_1}\right) \right) = F\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_1}\right),$$

$$k_3 = \left(f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_2}\right), \dots, f_n\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_2}\right) \right) = F\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2k_2}\right),$$

$$k_4 = (f_1(x_i + h, Y_i + hk_3), \dots, f_n(x_i + h, Y_i + hk_3)) = F(x_i + h, Y_i + hk_3).$$

Приклад 10.19. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \frac{x^2}{6} y_2(x) - 3(x + y_3(x)) y_4(x) + 6x, \\ y_3'(x) = y_1(x) + (x^2 - 3y_1(x)) y_2(x) + y_4(x), \\ y_4'(x) = y_3(x) + x, \end{cases}$$

на проміжку $[1, 2]$ з кроком $h = 0.1$ та початковими умовами $y_1(1) = y_3(1) = y_4(1) = 1, y_2(1) = 3$.

Розв'язок. Перейдемо до векторного запису. Введемо функцію в правій частині (10.22). При цьому на будемо писати аргументи і приберемо індекси – програма не допускає при визначенні функції змінні з індексами.

$$F[x_ , \{y1_ , y2_ , y3_ , y4_ \}] = \{y2, \frac{1}{6}x^2 y2 - 3(x + y3) y4 + 6x, y1 + (x^2 - 3y1) y2 + y4, y3 + x\}$$

Зауважимо, що фігурні дужки у визначенні функції дозволяє підставляти замість 4 аргументів окремо один 4-х вимірний вектор.

Введемо крок та початкові умови:

$$h=0.1; \quad x_0=1; \quad Y_0=\{1, 3, 1, 1\};$$

Метод Ейлера. У відповідності з формулою (10.4), складемо цикл.

```
Do[Yi+1= Yi+hF[xi, Yi];
  e[i]={i, xi, Yi}//Flatten;
  xi+1=xi+h,
  {i, 0, 10}];
```

Розв'язок надрукуємо у вигляді таблиці.

```
qz={"i", "xi", "Y1,i", "Y2,i", "Y3,i", "Y4,i"};
q1=Table[e[i], {i, 0, 10}], qz];
```

```
Prepend[q1,qz]//TableForm;
```

i	x_i	$y_{1,i}$	$y_{2,i}$	$y_{3,i}$	$y_{4,i}$
0	1	1	3	1	1
1	1.1	1.3	3.05	0.6	1.2
2	1.2	1.605	3.15951	0.02955	1.37
3	1.3	1.92095	3.44999	-0.739284	1.49296
4	1.4	2.26595	4.07603	-1.80302	1.54903
5	1.5	2.67355	5.23647	-3.39345	1.50872
6	1.6	3.1972	7.18984	-5.99701	1.31938
7	1.7	3.91618	10.197	-10.601	0.879679
8	1.8	4.93588	14.0572	-19.1544	-0.0104173
9	1.9	6.3416	15.842	-34.9227	-1.74586
10	2.	7.9258	0.639235	-58.8833	-5.04813

Побудуємо графік k -ої табличної функції $\{(x_i, y_{k,i})\}$, $i = 0, 1, \dots, 10$, тут $y_{k,i} \in i$ -ті елементи k -ого стовпця таблиці. Наступна команда складає список такий, що кожний елемент списку є матрицею в якій перший стовпець складається з координат вузлів, а другий стовпець є k -ий елемент таблиці $q1$, $k = 3, \dots, 6$, тобто є попередньою таблицею без заголовку.

```
w=Table[q1[[1;;,{2,k}]]{k,3,6}];
```

Побудуємо графіки чотирьох табличних функцій $(x_i, y_{k,i})$, $k = 1, 2, 3, 4$, $i = 0, 1, \dots, 10$.

```
tp1=ListPlot[w,PlotRange->All,]
```

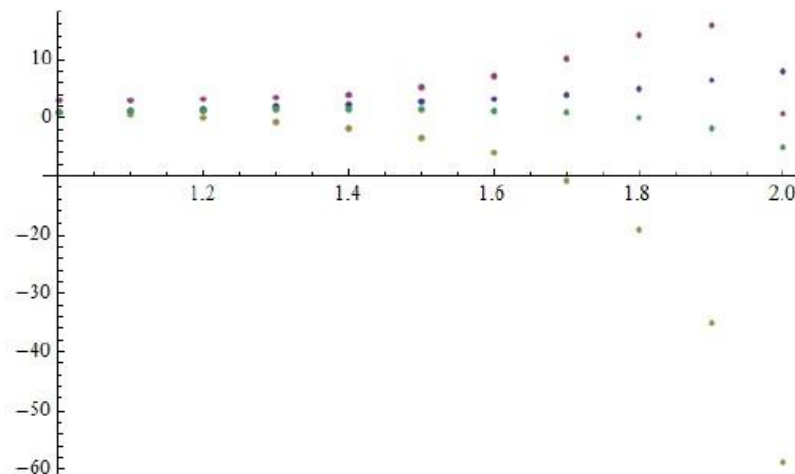


Рис. 10.15. Графіки табличної функції розв'язку задачі Коші прикладу 10.19.

Для перевірки знайденого розв'язку звіriamo його з розв'язком задачі Коші вбудованою командою системи Mathematica.

```
Clear[y1,y2,y3,y4]{y1[x_],y2[x_],y3[x_],y4[x_]}=
```

```
{y1[x], y2[x], y3[x], y4[x]}/.
NDSolve[{
y1'[x]==y2[x], y2'[x]== $\frac{1}{6}x^2y2[x]-3y4[x](y3[x]+x)+6x$ ,
y3'[x]==y1[x]+y2[x](x^2-3y1[x])+y4[x],
y4'[x]==y3[x]+x, y1[1]==y3[1]==y4[1]==1, y2[1]==3,
{y1[x], y2[x], y3[x], y4[x]}, {x, 1, 2}}][[1]]
{InterpolatingFunction[(1.&2.), <>][x], InterpolatingFunction[(1.&2.), <>][x],
InterpolatingFunction[(1.&2.), <>][x], InterpolatingFunction[(1.&2.), <>][x],}
```

Побудуємо отримані розв'язки.

```
tp=Plot[{y1[x], y2[x], y3[x], y4[x]}, {x, 1, 2},
PlotRange→All, AxesOrigin→{1, -10}]
```

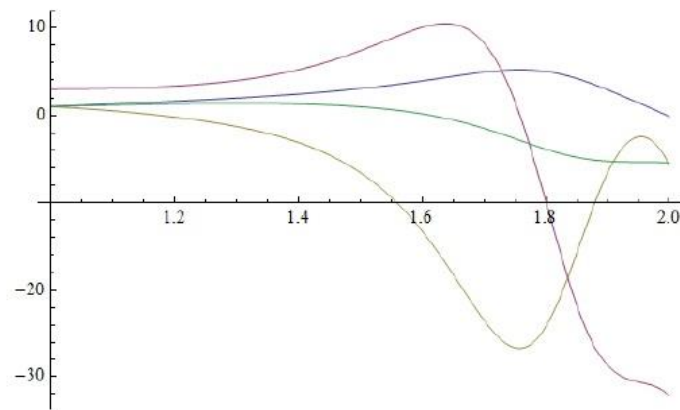


Рис. 10.16. Розв'язки задачі Коші прикладу 10.19.

Сумістимо тепер графіків розв'язку системи методом Ейлера і вбудованою командою.

```
Show[tp, tp1, AxesOrigin→{1, -10}]
```

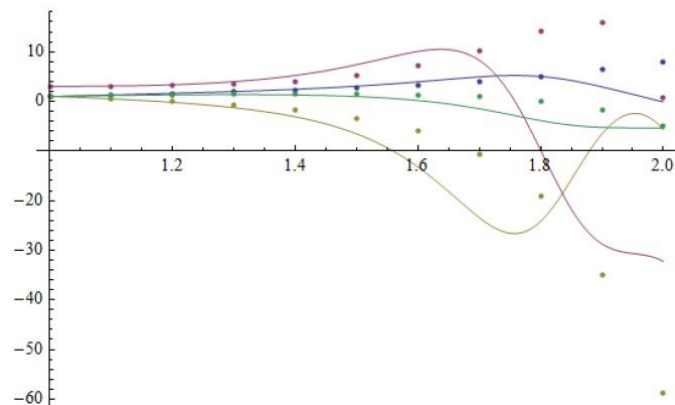


Рис. 10.17. Суміщені графіки розв'язку системи прикладу 10.19.

Розходження отриманих розв'язків підкреслює значну похибку методу Ейлера.

Метод Рунге–Кутти. У відповідності з формулою (10.5), складемо цикл.

```
Do [
  k1=F[xi,Yi];
  k2=F[xi+h/2,Yi+hk1/2];
  k3=F[xi+h/2,Yi+hk2/2];
  k4=F[xi+h,Yi+hk3];
  Yi+1=Yi+h(k1+2k2+2k3+k4)/6;
  e[i]={i,xi,Yi}//Flatten;
  xi+1=xi+h,
{i,0,10}];
qz={"i","xi","y1,i","y2,i","y3,i","y4,i"};
q2=Table[e[i],{i,0,10}],qz];
Prepend[q2,qz]//TableForm;
```

i	x_i	$y_{1,i}$	$y_{2,i}$	$y_{3,i}$	$y_{4,i}$
0	1	1	3	1	1
1	1.1	1.30364	3.08984	0.51049	1.18208
2	1.2	1.62364	3.35285	-0.19915	1.31493
3	1.3	1.98599	3.97421	-1.27837	1.37031
4	1.4	2.43918	5.22176	-3.10287	1.29526
5	1.5	3.06163	7.38994	-6.53573	0.977888
6	1.6	3.93933	10.0452	-13.2258	0.180714
7	1.7	4.94075	8.20882	-23.4547	-1.4833
8	1.8	4.98188	-9.78427	-23.9672	-3.86305
9	1.9	2.91813	-28.3882	-6.63621	-5.20933
10	2.	-0.104494	-32.2498	-5.64809	-5.40955

Складемо список табличних функцій, тобто список розв'язків.

```
w=Table[q2[[1;;,{2,i}]]{i,3,6}];
```

Побудуємо всі графіки.

```
tp2=ListPlot[w,PlotRange→All,]
```

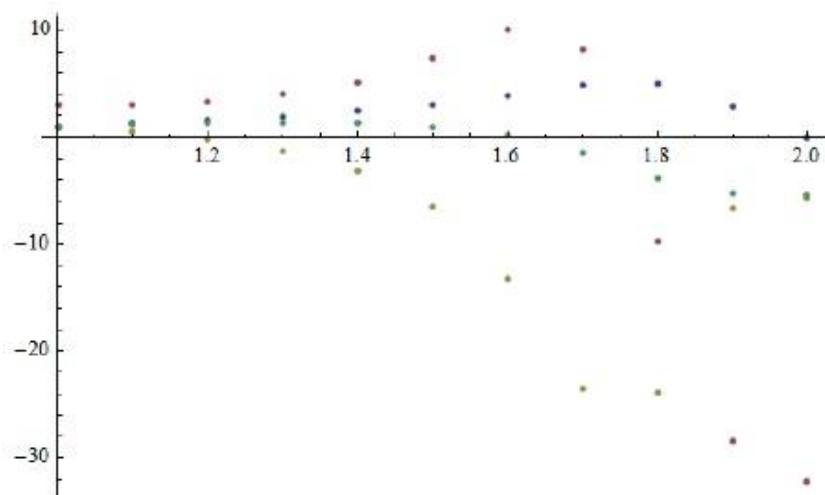


Рис. 10.18. Графіки табличної функції розв'язку задачі Коші прикладу 10.19 методом Рунге–Кутти.

Сумістимо графіки даних розв'язків задачі методом Рунге–Кутти і вбудованою командою системи Mathematica.

```
Show[tp, tp2]
```

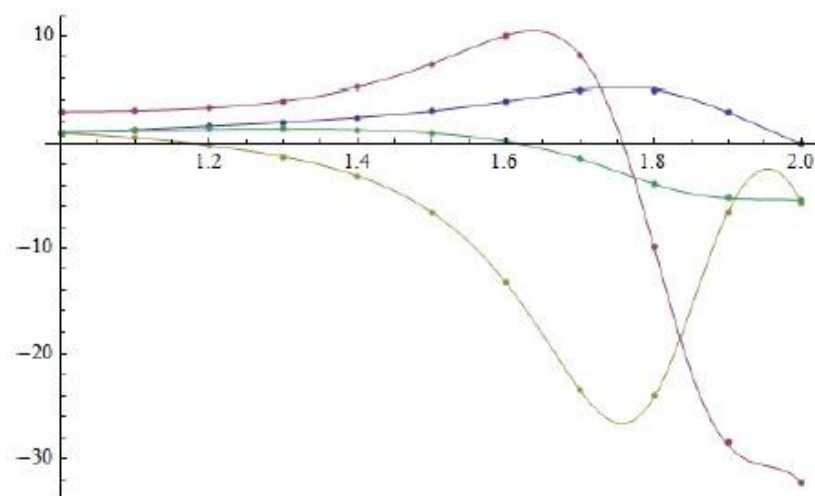


Рис. 10.19. Суміщені графіки розв'язку задачі Коші прикладу 10.19 методом Рунге–Кутти.

Приклад 10.20. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 2x + 2y - 3z. \end{cases}$$

Знайти загальний розв'язок. Побудувати траєкторії і поле напрямків в області $\mathcal{D}: \{-3 < x < 3, -3 < y < 3, -3 < z < 3\}$.

Розв'язок. Запишемо дану систему у матричній формі [40]

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{X}(t)$$

де $\vec{X}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ – вектор невідомої функції, що залежний від змінної t . Аналітичний розв'язок системи знаходимо за допомогою функції DSolve.

```
Clear={x,y,z,t,sdeqn,sol};
sys:={x'[t]==y[t]-z[t],
      y'[t]==x[t]-z[t],
      z'[t]==2 x[t]+2 y[t]-3 z[t]};
sol=DSolve[sys,{x[t],y[t],z[t]},t][[1]] /. {C[i_]→c[i]}//Simplify;
```

Розв'язок отримуємо у вигляді sol [[i,2]], де i=1,2,3:

```
sol//ColumnForm
x[t]→e-t((1+t)c[1]+t(c[2]-c[3]))
y[t]→e-t(c[2]+t(c[1]+c[2]-c[3]))
z[t]→e-t(2t(c[1]+c[2]-c[3])+c[3])
{xs[t_],ys[t_],zs[t_]}={sol[[1,2]],sol[[2,2]],sol[[3,2]]};
```

За допомогою команди Table утворимо список частинних розв'язків, який визначається заданими значеннями сталої інтегрування c_i . Отримане сімейство містить 24 розв'язки.

```
trajectory=Table[{xs[t],ys[t],zs[t]}/.{c[1]→i,c[2]→j,c[3]→k},
                 {i,-2,2,2},{j,-1,2},{k,-2,2,3}]/Simplify//Flatten[#,2]&
Short[trajectory,3]
{{e-t(2+t),-e-t(1+t),-2e-t(1+t)},<<22>>,{e-t(2+3t),e-t(2+3t),e-t(1+6t)}}
```

Зобразимо відповідні траєкторії разом з полем напрямків в тривимірному просторі $Oxyz$.

```
ξηζ={sol[[1,2]],sol[[2,2]],sol[[3,2]]}/.{x[t]→ξ,y[t]→η,z[t]→ζ}
{-ζ+η,-ζ+ξ,-3ζ+2η+2ξ}
gr1=ParametricPlot3D[trajectory,{t,-2,2},
PlotRange→{{-3,3},{-3,3},{-3,3}},AxesLabel→
{"x(t)","y(t)","z(t)"},
PlotStyle→{Thickness[0.006],GrayLevel[0.5]}];
```

```
gr2=VectorPlot3D[ξηζ, {ξ, -3, 3}, {η, -3, 3}, {ζ, -3, 3},
VectorScale→{0.2, Scaled[0.35]}, VectorPoints→6,
PlotLabel→"Trajectories and Directional Field\n";
Show[gr1, gr2]
```

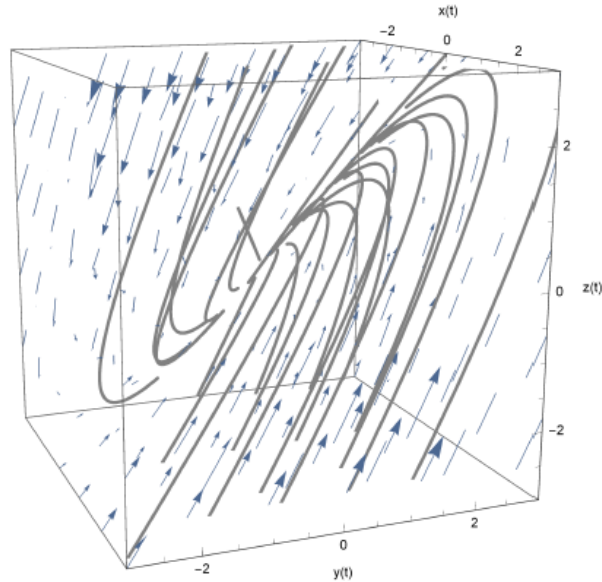


Рис. 10.20. Траєкторії розв'язків разом з полем напрямків в просторі $Oxyz$ прикладу 10.20.

10. 5. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

де x — невідома змінна, а y та y' , y'' — відповідно шукана функція та її похідні, називається *диференціальним рівнянням другого порядку*.

Якщо вищевказане рівняння можна розв'язати відносно старшої похідної y'' , то його записують так:

$$y'' = f(x, y, y').$$

де f — деяка функція від трьох незалежних змінних, визначена в області $D \subset \mathbb{R}^3$.

Розв'язком диференціального рівняння другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0$ або $y'' = f(x, y, y')$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння в тотожність.

Початковими умовами або граничними умовами називаються додаткові умови, що накладаються на функцію при розв'язку конкретної задачі, що приводить до диференціального рівняння. За цих умов розв'язок може виявитись єдиним. Розв'язок рівняння, що залежить від довільних сталих, кількість яких дорівнює порядку рівняння і які можуть бути підібраними так, щоб задовольнити будь-яким початковим та граничним умовам, що допускають єдиний розв'язок, називається загальним розв'язком.

Справедлива теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння другого порядку.

Теорема. *Нехай функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_x і f'_y неперервні в деякій області D простору змінних (x, y, y') . Тоді в деякому околі довільної внутрішньої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ цієї області існує єдиний розв'язок даного рівняння $y'' = f(x, y, y')$, який задовольняє початкові умови*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Задача відшукування розв'язку рівняння $y'' = f(x, y, y')$ за заданими початковими умовами називається задачею Коші.

Загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' = f(x, y, y')$ називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка є розв'язком даного рівняння при довільних значеннях сталих C_1, C_2 , які можуть бути визначені єдиним способом за заданих початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Будь-який розв'язок, який можна одержати із загального розв'язку $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, при певних значеннях сталих C_1^0, C_2^0 , називається частинним розв'язком.

Загальний розв'язок диференціального рівняння, записаний у неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

називається загальним інтегралом рівняння.

Приклад 10.21. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння*

$$y'' + 2y' - 3y = 3.$$

Розв'язок.

```
de1=y''[x]+2y'[x]-3y[x]==3;  
sol1=DSolve[de1,y[x],x]  
{y[x] → -1 + e-3xC[1] + exC[2]}
```

Коли не вказано початкові чи граничні умови, загальний розв'язок диференціального рівняння містить дві довільні сталі.

Доступ до розв'язку DSolve

Щоб використовувати розв'язок, отриманий за допомогою DSolve, в якості правила заміни, введемо $z[x]=res$ `[[1,1,2]]`. Для кращого розуміння конструкції проілюструємо цю процедуру покроково.

```
sol1  
{y[x] → -1 + e-3xC[1] + exC[2]}
```

`sol1` є списком `{...}`, котрий містить лише один елемент

```
sol1 [[1]]  
y[x] → -1 + e-3xC[1] + exC[2]
```

Розв'язок $y[x] \rightarrow \text{expression}$ позбавлене фігурних дужок

```
sol1 [[1,1]]  
y[x] → -1 + e-3xC[1] + exC[2]
```

`sol1 [[1,1]]` містить ліву частину “ $y[x]$ ” і праву частину $-1 + e^{3x}C[1] + e^xC[2]$.

Ліва частина отримана як `sol1 [[1,1,1]]`, в той час як права частина визначається виразом `sol1 [[1,1,2]]` й може бути визначена як функція $z[x_]:=...$

```
z[x_]:=sol1 [[1,1,2]] ;  
z[x]  
-1 + e-3xC[1] + exC[2]
```

Тепер з функцією $z[x]$, отриманою з розв'язку, можна маніпулювати, як з будь-якою іншою функцією.

Наприклад, друга похідна має вигляд

```
 $\partial_{\{x,2\}} z[x]$ 
```

$$9e^{-3x}C[1] + e^xC[2]$$

Підставимо $z[x]$ в задане диференціальне рівняння $y'' + 2y' - 3y = 3$ і перевіримо, чи є вона розв'язком

```
(D[{x,2} z[x] + 2D[{x,1} z[x] - 3 z[x] == 3]) //Simplify
True
```

Команда DSolve дозволяє також розв'язувати лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 10.22. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язок.

```
de2=y''[x]+2xy'[x]+2y[x]==0;
sol2=DSolve[de2,y[x],x]//FullSimplify
{{y[x] -> 2xC[1] + e^{x^2} C[2] - \sqrt{\pi} x C[2] Erfi[x]}}
```

бачимо, що загальний розв'язок містить спеціальну функцію помилок $\text{erf}(x)$.

Деякі рівняння з коефіцієнтами, що не є сталими, також інтегруються в елементарних функціях. Наприклад, рівняння Ейлера.

Приклад 10.23. Проінтегрувати рівняння Ейлера

$$x^2y'' + 4xy' + y = 1.$$

Розв'язок.

```
de3=x^2y''[x]+4xy'[x]+y[x]==1;
sol3=DSolve[de3,y[x],x]
{{y[x] -> 1 + x^{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} C[1] + x^{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} C[2]}}
```

Багато спеціальних функцій були введені як частинні розв'язки лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Приклад 10.24. Проінтегрувати рівняння Ейлера

$$y'' + y = -2x$$

та нарисувати інтегральні криві, які відповідають значення довільних сталих $C_1 = 0$, $C_2 = -4, -3, \dots, 3, 4$.

Розв'язок.

```
de3=y''[x]+y[x]==-2x;
sol4=DSolve[de4,y[x],x]
{{y[x] → -2x + C[1]Cos[x] + C[2]Sin[x]}}
tb1=Table[sol4[[1,1,2]]/.{C[1] → 0, C[2] → i}, {i,-4,4}]
{-2x - 4Sin[x], -2x - 3Sin[x], -2x - 2Sin[x], -2x - Sin[x], -2x, -2x + Sin[x], -2x + 2Sin[x], -2x + 3Sin[x], -2x + 4Sin[x]}
Plot[tb1, {x,-2π, 2π},
PlotLabel→"Інтегральні криві ДР y''+y = -2x для c1=0, -4≤c2≤4",
AxesLabel → {x,y}]
```

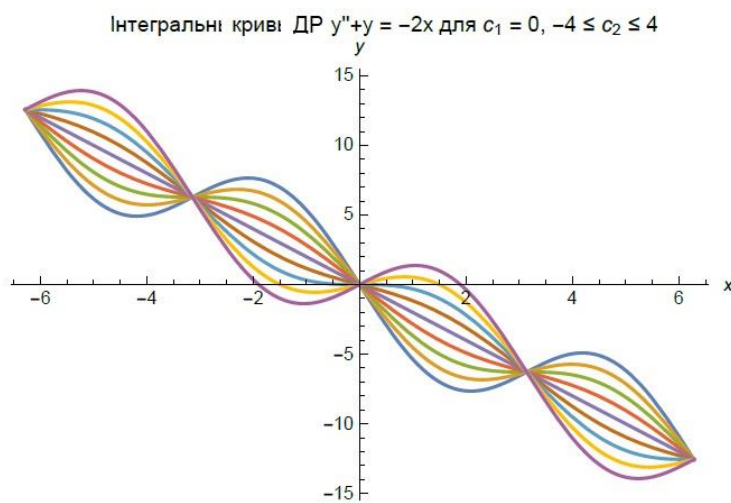


Рис. 10.21. Інтегральні криві ДР $y'' + y = -2x$ для $C_1 = 0$, $-4 \leq C_2 \leq 4$.

Приклад 10.25. Знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$x^2 y'' + 7xy' + (x^2 - 9)y = 0.$$

Розв'язок. Дане рівняння є рівнянням Бесселя.

```
de5=x^2 y''[x]+7 x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0;
sol5=DSolve[de5,y[x],x]
{{y[x] → \frac{BesselJ[3\sqrt{2},x]C[1]}{x^3} + \frac{BesselY[3\sqrt{2},x]C[2]}{x^3}}}
```

Загальний розв'язок знайдено за допомогою функцій Бесселя першого роду $J_n(x)$ та другого роду $Y_n(x)$ ($n = 3\sqrt{2}$). Розв'язки лінійно незалежні, оскільки їх відношення не є константою.

```
sol5n=sol5/.{C[1] → 1, C[2] → 1};
```

```
sol5n[[1,1,2,1]] // FullSimplify  
sol5n[[1,1,2,2]]
```

```
BesseJ[3√2,x]  
BesseY[3√2,x]
```

Приклад 10.26. *Заміною змінних $x = \psi(t)$ позбутися члена з першою похідною в рівнянні*

$$x^2(1-x^2)y'' + 2(x-x^3)y' - 2y = 0.$$

Розв'язок. Визначимо рівняння й потім перетворимо його за допомогою правил заміни вигляду

$$x \rightarrow \psi(t), \quad y(x) \rightarrow y(t), \quad \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}$$

```
Clear["Global`*"];
```

```
eq=x^2(1-x^2)y''[x]+2(x-x^3)y'[x]-2y[x]==0;
```

```
rul=D[y[x],{x,n_}]:>Nest[(D[#t]&)/ψ'[t],y[t],n];
```

```
eq1=eq/.y[x] → y[t]/.rul/.x → ψ[t]//Simplify
```

$$\frac{1}{\psi'[t]^3} \psi[t](-1 + \psi[t]^2)(-\psi[t]\psi'[t]y''[t] + y'[t](-2\psi'[t]^2 + \psi[t]\psi''[t])) = 2y[t]$$

В отриманому рівнянні виділимо коефіцієнти при $y'[t]$

```
eq2=Coefficient[eq[[1]],y'[t]]//Together
```

$$\frac{1}{\psi'[t]^3} \psi[t](-1 + \psi[t]^2)(-2\psi'[t]^2 + \psi[t]\psi''[t])$$

Щоб коефіцієнти при $y'[t]$ перетворились в нуль, функція $\psi[t]$ повинна задовольняти наступне рівняння

```
eq3=Numerator[eq2]==0
```

$$\psi[t](-1 + \psi[t]^2)(-2\psi'[t]^2 + \psi[t]\psi''[t]) == 0$$

Оскільки в рівнянні eq3 не міститься явно незалежна змінна t , для його розв'язання введемо заміну

$$\psi' \rightarrow p(\psi), \quad \psi'' \rightarrow p'(\psi)p(\psi).$$

```
eq4=eq3/.{ψ[t] → ψ, ψ'[t] → p[ψ], ψ''[t] → p'(ψ)p(ψ)};
```

```
Solve[eq4, p'(ψ)]
```

$$\left\{ \left\{ p'(\psi) \rightarrow \frac{2p(\psi)}{\psi} \right\} \right\}$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними й легко інтегрується

```
sol4 = DSolve[eq4, p[ψ], ψ]//Flatten
{p(ψ) → 0, p(ψ) → ψ²C[1]}
```

Тоді рівняння для функції $\psi(t)$ має вигляд

```
eq5=ψ'[t] == ( p(ψ)/.sol4[[2]]/.C[1] →1/.ψ → ψ[t])
ψ'[t] == ψ[t]²
```

Це рівняння також легко інтегрується

```
sol5 = DSolve[eq5, ψ[t], t]//Flatten
{ψ(t) →  $\frac{1}{-t-C[1]}$ }
```

В результаті знаходимо функцію $\psi(t)$, при якій заміна незалежної змінної $x = \psi(t)$ приводить до зникнення у вихідному рівнянні члена з першою похідною.

Дійсно підставляючи в eq1 отриманий для $\psi(t)$ вираз отримуємо

```
ψ[t_]=ψ[t]/.sol5;
eq1=eq/.{y[x]→ y[t],rul, x→ ψ[t]}/.C[1] →0//Simplify
2y[t] == (-1 + t²)y''[t]
```

Зрозуміло, що отримане в результаті заміни незалежних змінних рівняння eq1 залишається лінійним. Знайдемо його загальний розв'язок

```
DSolve[eq1, y[t], t]//Simplify
{ {y[t] →  $(-1 + t^2)C[1] - \frac{1}{4}C[2](2t + (-1 + t^2)\text{Log}[1 - t] - (-1 + t^2)\text{Log}[1 + t])$  } }
```

чи, скориставшись заміною $x = \psi(t)$, знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння

```
y[x]==%[[1,1,2]]/.Solve[x==(ψ[t]/.sol5),t]//Simplify
{y[t] ==  $\frac{1}{4x^2}(-4C[1](x^2 - (1 + xC[1])^2) + C[2](2x(1 + xC[1]) - (x^2 - (1 + xC[1])^2)\text{Log}\left[1 - \frac{1}{x} - C[1]\right] + (x^2 - (1 + xC[1])^2)\text{Log}\left[1 + \frac{1}{x} + C[1]\right])$  }
```

де $C[1]$, $C[2]$ – довільні сталі.

Для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь є вбудована функція системи Mathematica `DifferentialRoot` [24]. Цю математичну функцію зручно застосовувати як для символьних перетворень, так і для чисельних обчислень й називається *голономною* чи *D-фінитною функцією* (нагадаємо, що голономними називають системи, в яких всі зв'язки можуть бути виражені рівняннями зі скінченними членами).

Голономна функція $h(x)$, яка визначається через функцію `DifferentialRoot`, задовольняє голономному диференціальному рівнянню

$$p_n(x)h^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)h^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)h(x) = 0$$

з поліноміальними коефіцієнтами $p_i(x)$ та початковими умовами

$$h^{(n-1)}(0) = h_{n-1}, \quad \dots, \quad h'(0) = h_1, \quad h(0) = h_0.$$

Команда `DifferentialRoot[lde][x]` визначає голономну функцію $h(x)$, яка є розв'язком лінійного диференціального рівняння `lde[h, x]`. `DifferentialRoot[lde]` є чистою функцією h .

Функція `DifferentialRoot` може використовуватись аналогічно будь-якій математичній функції. Команда `FunctionExpand` намагається представити, якщо це можливо, цю функцію у вигляді спеціальних функцій.

Команда `DifferentialRootReduce` може конвертувати більшість спеціальних функцій в функцію `DifferentialRoot`. Функція `DifferentialRoot` автоматично генерується такими функціями, як `Integrate`, `DSolve` та `GeneratingFunction` і може бути застосована до списків. Значення функції `DifferentialRoot` можуть бути обчислені з довільною заданою точністю.

Команда `DifferentialRoot[lde, pred]` знаходить обмежений на комплексній z -площині розв'язок, який визначається за допомогою умови `pred[z]`, де опція `pred[z]` може містити рівняння та нерівності.

Приклад 10.27. Визначити функцію $f = \sin(3x)$ за допомогою функції

`DifferentialRoot` та знайти її значення в точці $x = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язок. Скористаємося відомим результатом про те, що функція $\sin(3x)$ може бути визначена як розв'язок задачі Коші

```
f=DifferentialRoot[Function[{y,x}, {y'[x]+9y[x]==0, y[0]==0,
y'[0]==3}]]
DifferentialRoot[Function[{y,x}, {9y[x] + y''[x] == 0,y[0] = 0,y'[0] = 3}]]
```

Нарисуємо графік побудованої функції f .

```
Plot[f[x],{x,-π/2,π/2}, AxesLabel → {x,y},
AxesStyle → Directive[14], PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

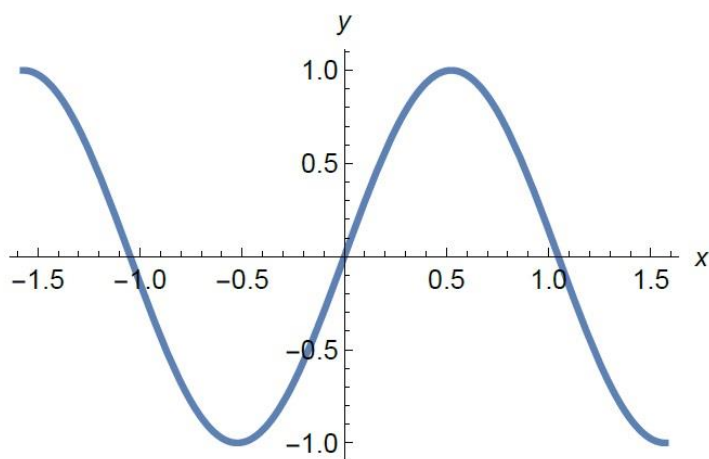


Рис. 10.22. Графік функції f прикладу 10.27.

Знайдемо точне значення побудованої функції f при $x = \frac{\pi}{6}$.

Функція `DifferentialRoot` може бути розкладена в ряд. Розкладемо функцію f з прикладу 10.24 в ряд й наведемо перші 10 коефіцієнтів розкладу.

```
SeriesCoefficient[f[x],{x,0,n}]
Table[%,{n,0,10}]
{DifferentialRoot[Function[{y,n},{9y[n] + (1 + n)(2 + n)y[2 + n] == 0,y[0] == 0,y[1] == 3}]] [n]  n ≥ 0
0 True
{0,3,0,-9/2,0,81/40,0,-243/560,0,243/4480,0}
```

Приклад 10.28. Знайти розв'язок для лінійного звичайного диференціального рівняння з дробово-раціональними коефіцієнтами

$$\frac{1}{x^2} y'' + \frac{x}{x+1} y' + y = 0,$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ у вигляді функції DifferentialRoot. Побудувати графік частинного розв'язку та знайти його похідну.

Розв'язок.

```
y1=DSolve[{x^-2 y''[x] + (x/(1+x)) y'[x] + y[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 3}, y[x], x] //
Flatten
{y[x] -> DifferentialRoot[Function[{y, x}, {(x^2 + x^3) y[x] + x^3 y'[x] + (1 + x) y''[x] ==
0, y[0] == 1, y'[0] == 3}]] [x]}
```

Знайдемо похідну частинного розв'язку $y_1(x)$.

```
y2=D[y1[[1,2]], x]
DifferentialRoot[Function[{y, x}, {x^3 (2 + 2x + x^2) y[x] + (1 + x) (-2 - 2x + x^4) y'[x]
+ x (1 + x)^2 y''[x] == 0, y[0] == 3, y'[0] == 0}]] [x]
```

Побудуємо графік функції

```
Plot[{y1[[1,2]]}, {x, -2, 5}, AxesStyle -> Directive[14],
PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```

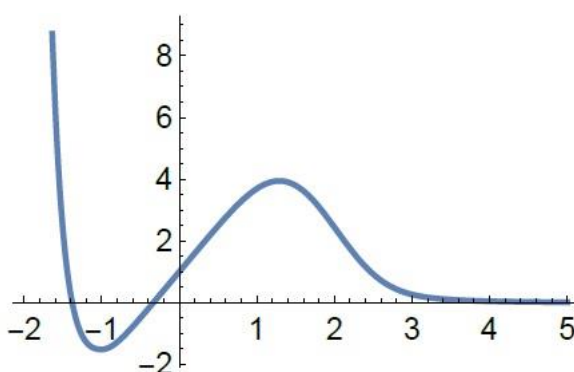


Рис. 10.23. Графік функції прикладу 10.28.

Приклад 10.29. Знайти розв'язок задачі Коші для неоднорідного лінійного звичайного диференціального рівняння

$$y'' - x^2 y' - y = -\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

у вигляді функції DifferentialRoot та обчислити його значення при x рівних $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ з точністю до 10 знаків.

Розв'язок.

```
sol=DSolve[y'''[x]-x^2y'[x]-y[x]+Cos[x]==0 && y[0]==0 &&
y'[0]==1, y, x]
{{y[x] -> DifferentialRoot[Function[{y, x}, {-y[x] + (-2 - x^2)y'[x] - 4xy''[x] -
x^2y^(3)[x] + y^(4)[x] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 1, y''[x] == -1, y^(3)[0] == 1}]]]}
```

Функція y задана у вигляді DifferentialRoot для однорідного лінійного диференціального рівняння 4-го порядку з чотирма початковими умовами. Обчислимо значення цієї функції при x рівних $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$.

```
N[Table[y[x] /. sol[[1]], {x, 1/3, 2, 1/3}], 10]
{0.2848354737, 0.5067097458, 0.7319713222, 1.076611562,
1.847944698, 4.248486102}
```

10. 6. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку називається рівняння, яке пов'язує невідому функцію y , незалежну змінну x і похідні функції y по x до n -го порядку включно:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Обмежимося вивченням рівнянь n -го порядку, які можуть бути розв'язаними відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ називається загальним розв'язком диференціального рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, якщо вона задовольняє рівнянню за будь-яких значень довільних констант $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Якщо невідома функція у аргументу x задана неявно рівністю $\psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, то така функція називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Частинним розв'язком (частинним інтегралом) диференціального рівняння називається розв'язок $y = \psi(x)$ ($\psi(x, y) = 0$), який може бути отриманий із загального при певних значеннях довільних констант $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Для знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння необхідно знайти числові значення довільних констант $C_1, C_2, \dots, C_n$. Для цього необхідно розв'язати задачу Коші.

Для рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ задача Коші ставиться таким чином: серед розв'язків рівняння треба знайти частинний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Розглянемо на прикладах лінійні диференціальні рівняння третього порядку зі змінними коефіцієнтами, що інтегруються в спеціальних функціях.

Приклад 10.30. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + xy = 0.$$

Розв'язок.

```
Clear[x, y, deqn, res];
deq=y(3)[x]+xy[x]==0;
DSolve[deq, y[x], x] [[1, 1]]
%//TraditionalForm
y[x] → C[1]HypergeometricPFQ[{}, {1/2, 3/4}, -x4/64] +
1/(2√2)xC[2]HypergeometricPFQ[{}, {3/4, 5/4}, -x4/64] +
1/8x2C[3]HypergeometricPFQ[{}, {5/4, 3/2}, -x4/64]
y[x] → (c2x {}F2(3/4, 5/4; -x4/64))/(2√2) + c1 {}F2(1/2, 3/4; -x4/64) + 1/8c3x2 {}F2(5/4, 3/2; -x4/64)
```

В системі комп'ютерної алгебри Mathematica функція ${}_0F_2$ називається узагальненою гіпергеометричною функцією та позначається HypergeometricPFQ та визначається наступним чином

HypergeometricPFQ	– узагальнена гіпергеометрична функція
$[\{a_1, \dots, a_p\}, \{b_1, \dots, b_q\}, z]$	${}_pF_q(a; b; z)$.

Приклад 10.31. Знайти визначник Вронського наступних систем функцій

a. $x \ln x, x^2 \ln x, x^3 \ln x, x^4 \ln x$;

b. $8, \cos^2(x^4), \sin^2(x^4)$.

Зробити висновок про лінійну залежність цих функцій в областях **I**, де вони визначені.

Розв'язок. Обчислимо визначник Вронського $W(x)$ для кожної з систем функцій.

Випадок а).

```
Clear["Global`*"];
f[i_][x_]=xi Log[x];
W=Array[w,{4,4}]/.w[i_,j_]->D[f[j][x], {x,i-1}];
Det[W]//Simplify
12x4Log[x]4
```

Оскільки $W(x) = 12x^4 \text{Log}[x]^4 \neq 0$ на будь-якому інтервалі $\mathbf{I} = (\alpha, \beta)$ ($\beta > \alpha > 0$), то функції $f_i(x) = x_i \ln x$ ($i = 1, 2, 3, 4$) лінійно незалежні на **I**.

Випадок б).

```
g[1][x_]=8; g[2][x_]=Cos[x4]2; g[3][x_]=Sin[x4]2;
W=Array[w,{3,3}]/.w[i_,j_] -> D[g[j][x], {x,i-1}];
Det[W]//Simplify
0
```

Оскільки $W(x) = 0$ на будь-якому $\mathbf{I} = (\alpha, \beta)$, то для встановлення лінійної залежності функцій $g_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) необхідно продовжити дослідження.

Легко показати, що вираз

$$8n_1 + n_2 \cos^2(x^4) + n_3 \cos^2(x^4)$$

при $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 8$ тотожно рівний нулю. Тому задані функції $g_i(x)$ лінійно залежні на I .

Приклад 10.32. Знайти узагальнений розв'язок рівняння Ейлера 4-го порядку

$$16x^4 y^{(iv)} + 32x^3 y''' - 24x^2 y'' + 24xy' - 15y = 0.$$

Розв'язок.

```
Clear[x, y, deqn, res]
deqn=16x^4y^(4)[x]+32x^3y^(3)[x]-24x^2y''[x]+24xy'[x]-15y[x]==0;
res=DSolve[deqn, y[x], x]
{ {y[x] -> C[1]/Sqrt[x] + Sqrt[x]C[2] + x^(3/2)C[3] + x^(5/2)C[4]} }
```

На прикладі лінійного диференціального рівняння 4-го порядку зі сталими коефіцієнтами покажемо як інтегрувати лінійні диференціальні рівняння n -го порядку за допомогою підстановки Ейлера.

Приклад 10.33. Знайти узагальнений розв'язок рівняння

$$y^{(iv)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 9y = 0.$$

Розв'язок. Означимо рівняння та зробимо підстановку $y \rightarrow e^{\lambda x}$. В результаті отримуємо характеристичне рівняння

```
Clear["Global`*"];
deq=y''''[x]+4y'''[x]+10y''[x]+12y'[x]+9y[x]==0;
eq1=deq/.y -> (Exp[l#]&)/.x -> 0
9 + 12l + 10l^2 + 4l^3 + l^4 == 0
```

Знайдемо корені рівняння eq1

```
sol l=Solve[eq1, l];
ltab=Table[sol l[[i, 1, 2]], {i, Length[sol l]}]
{-1 - I Sqrt[2], -1 - I Sqrt[2], -1 + I Sqrt[2], -1 + I Sqrt[2]}
```

Для отримання кратності розв'язку до списку застосуємо процедуру кодування довжин списку ltab.

```
multiplicity[m_List]:=
```

```
{(#1,1)&)/@m//.{u____,{v_,t_},{v_,s_},w____} → {u,{v,t+s},w}
```

Обчислюємо кількість разів входження й отримуємо список $\mu list$, який складається з пар, де друге число завжди враховує кратність розв'язку.

```
 $\mu list = \text{multiplicity}[\lambda tab // \text{Sort}]$ 
```

```
 $\{-1 - i\sqrt{2}, 2\}, \{-1 + i\sqrt{2}, 2\}$ 
```

Приймаючи до уваги вигляд отриманого списку, побудуємо фундаментальну систему розв'язків

```
 $g[1][x] = e^{\lambda tab \text{ [1,1]} x} \text{Cos}[\lambda tab \text{ [1,2,2]} x];$ 
```

```
 $g[2][x] = e^{\lambda tab \text{ [1,1]} x} \text{Sin}[\lambda tab \text{ [1,2,2]} x];$ 
```

```
 $g[3][x] = xg[1][x];$ 
```

```
 $g[4][x] = xg[2][x];$ 
```

Знайдемо Вронскіан розв'язків

```
 $W = \text{Array}[w, \{2, 2\}] /. w[i_, j_] \rightarrow D[g[j][x], \{x, i-1\}];$ 
```

```
 $\text{Det}[W] // \text{Simplify}$ 
```

```
 $\sqrt{2}e^{-2x}$ 
```

Очевидно, що Вронскіан не рівний нулю ні для жодних дійсних x .

Кратним комплексним кореням λtab характеристичного рівняння відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $g[i][x]$ ($i = 1, 4$). Тому загальний розв'язок має вигляд:

```
 $\text{DSolve}[\text{deq}, y[x], x] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal} // \text{Flatten} // \text{TraditionalForm}$ 
```

```
 $\{y(x) = c_1 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x) + c_2 e^{-x} x \sin(\sqrt{2}x) + c_3 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + c_4 e^{-x} x \cos(\sqrt{2}x)\}$ 
```

Система комп'ютерної алгебри Mathematica знаходить розв'язки цілої низки лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з числом початкових умов, меншим ніж порядок рівняння.

Приклад 10.34. Знайти узагальнений розв'язок рівняння

$$y^{(iv)} - 2y''' + 3y'' - 2y' + y = 0,$$

який задовольняє початковим умовам

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язок. Означаємо рівняння і за допомогою функції Join додаємо дві початкові умови. Після цього використовуємо функцію DSolve

```
deq=y''''[x]-2y'''[x]+3y''[x]-2y'[x]+y[x]==0;
DSolve[Join[{deq}, {y[0]==1, y'[0]==0}], y[x], x]//Simplify/.
Rule -> Equal//Flatten
{y[x] -> 1/3 e^(x/2) (3(1 + x C[2]) Cos((sqrt(3)x)/2) - (sqrt(3) + 2 sqrt(3) C[2] - 3 x C[4]) Sin((sqrt(3)x)/2))}
```

В результаті знайдено двопараметричне сімейство розв'язків, де C[2], C[4] – довільні сталі.

Приклад 10.35. [41] Показати, що загальний розв'язок рівняння

$$y^{(iv)} - p(x)y''' + q(x)y'' - r(x)y' + s(x)y = 0, \tag{1}$$

коефіцієнти якого задовольняють системі

$$p' = \frac{2}{3}q - \frac{1}{4}p^2, \quad q' = \frac{3}{2}r - \frac{1}{4}pq, \quad r' = 4s - \frac{1}{4}pr,$$

має вигляд

$$y = (c_4 x^3 + c_3 x^2 + c_2 x + c_1) e^{-\frac{1}{4} \int p dx}.$$

Побудувати диференціальне рівняння (1), де $p(x) = Ai(x)$ і вказати його загальний розв'язок.

Розв'язок. Означимо рівняння (1).

```
deq=y''''[x]+p[x]y'''[x]+q[x]y''[x]+r[x]y'[x]+s[x]y[x]==0;
```

Означимо загальний розв'язок та правило заміни для коефіцієнтів рівняння

```
y[x_] := Sum[c[i+1] x^i e^(-1/4 Integrate[p(x), x]), {i, 0, 3}] // Factor
rho = {p'[x] -> 2/3 q[x] - 1/4 p[x]^2, q'[x] -> 3/2 r[x] - 1/4 p[x] q[x],
       r'[x] -> 4 s[x] - 1/4 p[x] r[x]};
```

Зробимо перевірку

```
deq/.D[rho, {x, 2}]/. D[rho, x]/.rho//Simplify
True
```

Отримали систему для знаходження коефіцієнтів при $p(x) = Ai(x)$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= p[x] \rightarrow \text{AiryAi}[x]; \\ \text{sys} &= \rho /. \text{D}[\rho_1, x] /. \rho_1 /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal} \\ \left\{ \begin{aligned} \text{AiryAiPrime}[x] &== -\frac{1}{4} \text{AiryAi}[x]^2 + \frac{2q[x]}{3}, \\ -\frac{1}{4} \text{AiryAi}[x]q[x] + \frac{2r[x]}{3} &== -\frac{1}{4} \text{AiryAi}[x]q[x] + \frac{3r[x]}{2}, \\ r'[x] &== -\frac{1}{4} \text{AiryAi}[x]r[x] + 4s[x] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Знайдемо розв'язок системи sys

$$\begin{aligned} \text{sol} &= \text{Solve}[\text{sys}, \{q[x], r[x], s[x]\}] // \text{Flatten} // \text{FullSimplify} \\ \left\{ \begin{aligned} q[x] &\rightarrow \frac{3}{8} (\text{AiryAi}[x]^2 + 4 \text{AiryAiPrime}[x]), & r[x] &\rightarrow 0, & s[x] &\rightarrow \frac{r'[x]}{4} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Представимо вигляд коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \text{coef} &= \text{Join}[\{\rho_1\}, \text{sol} /. \text{D}[\text{sol}, x]] \\ \left\{ \begin{aligned} p[x] &\rightarrow \text{AiryAi}[x], & q[x] &\rightarrow \frac{3}{8} (\text{AiryAi}[x]^2 + 4 \text{AiryAiPrime}[x]), & r[x] &\rightarrow 0, \\ s[x] &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння deq з коефіцієнтами coef приймає вигляд

$$\begin{aligned} &y[x] /. \rho_1 // \text{FullSimplify} \\ &\text{Exp} \left[-\frac{x \text{HypergeometricPFQ} \left[\left\{ \frac{1}{3} \right\}, \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\}, \frac{x^3}{9} \right]}{4 \times 3^{\frac{2}{3}} \text{Gamma} \left[\frac{2}{3} \right]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{3^{\frac{1}{6}}} x^2 \text{Gamma} \left[\frac{2}{3} \right] \text{HypergeometricPFQ} \left[\left\{ \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \frac{x^3}{9} \right]}{16\pi} \right] \\ &\quad \times (c_1 + x(c_2 + x(c_3 + xc_4))) \end{aligned}$$

де c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – довільні сталі.

10. 7. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь вигляду

[illegible]

де a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ — сталі величини, називається *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*. У матричному вигляді вона записується

$$\dot{x} = Ax.$$

Приклад 10.36. Знайти матричним методом загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = -16x. \end{cases}$$

Розв'язок.

```
Clear[x,y,t,sdeqn,sol];
sdeqn={x'[t]==-4y[t],y'[t]==-16x[t]};
sol=DSolve[sdeqn,{x[t],y[t]},t][[1]] /. {C[i_] -> 2c_i} // ColumnForm
```

$$\begin{matrix} x[t] \rightarrow e^{-8t}(1 + e^{16t}) c_1 - \frac{1}{2} e^{-8t}(-1 + e^{16t}) c_2 \\ y[t] \rightarrow -2e^{-8t}(-1 + e^{16t}) c_1 + e^{-8t}(-1 + e^{16t}) c_2 \end{matrix}$$

Означуємо коефіцієнти a_{ij} системи у вигляді матриці $A \equiv \|a_{ij}\|$ і систему диференціальних рівнянь.

```
X[t_]={x[t],y[t]};
A={{0,-4},{-16,0}};
eq=D[X[t],t]==A.X[t]//Thread
{x'[t]==-4y[t], y'[t]==-16x[t]}
```

Після цього знаходимо корені характеристичного рівняння.

```
s=Solve[CharacteristicPolynomial[A, λ]==0, λ]
{{λ → -8}, {λ → 8}}
```

Так як характеристичне рівняння має два простих корені, фундаментальна система розв'язків даної системи має вигляд

$$y_1^{(j)} = C_{j1} e^{\lambda_j x}, \quad y_2^{(j)} = C_{j2} e^{\lambda_j x}, \quad (j = 1, 2),$$

де константи C_{jk} ($j, k = 1, 2$) є розв'язками системи при $\lambda = \lambda_j$. Для визначення констант C_{jk} ($j, k = 1, 2$) підставляємо ці розв'язки в систему eq і, скорочуючи на $e^{\lambda t}$, отримуємо

```
eq1=eq/.{x ->(C11Exp[# λ]&), y ->(C12Exp[# λ]&)} /.s[[1]]/.t ->0;
sol1=Solve[eq1,C11]//Flatten
{C11 -> C12/2}
eq2=eq/.{x ->(C21Exp[# λ]&), y ->(C22Exp[# λ]&)} /.s[[2]]/.t ->0;
sol2=Solve[eq1,C21]//Flatten
{C21 -> C22/2}
```

Константи C_{12} і C_{22} вибираються довільним чином. Покладаючи $C_{12} = 2$ та $C_{22} = 2$, отримуємо два лінійно незалежних розв'язки системи eq.

```
X1={C11,C12}Exp[λ t] /.sol1/.C12 ->2/.s[[1]]
X2={C21,C22}Exp[λ t] /.sol2/.C22 ->2/.s[[2]]
{e-8t, 2e-8t}
{-e8t, 2e8t}
```

Тоді загальний розв'язок $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ системи має вигляд

```
X[t_]=C[1]X1+C[2]X2
{e-8tC[1] - e8tC[2], 2e-8tC[1] + 2e8tC[2]}
```

Порівняння знайденого розв'язку з розв'язком sol, який отримано за допомогою функції DSolve, показує їх ідентичність (з точністю до визначення довільних сталих $C[1] = c_1 + \frac{1}{2}c_2$ та $C[2] = c_1 - \frac{1}{2}c_2$).

Приклад 10.37. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Знайти частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Розв'язок. Означуємо вектор-функцію $Y(x, y) = (x(t), y(t))$, матрицю $A \equiv \|a_{ij}\|$ і систему диференціальних рівнянь.

```
Clear["Global`*"];
```

```

Y[t_]={x[t], y[t]};
A={{2,1},{-3,-1}};
eq=D[Y[t],t]==A.Y[t]//Thread
{x'[t]=2x[t]+y[t], y'[t]==-3x[t]-y[t]}

```

Знайдемо власні значення й власні вектори матриці A , використовуючи функцію Eigensystem.

```

s = Eigensystem[A]
{{1/2(1+i√3), 1/2(1-i√3)}, {{1/6(-3-i√3), 1}, {1/6(-3+i√3), 1}}}

```

Матриця A має два комплексно спряжені власні значення $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, яким відповідають власні вектори $\mu^{(1)} = \left(\frac{1}{6}(-3 - i\sqrt{3}), 1\right)$, $\mu^{(2)} = \left(\frac{1}{6}(-3 + i\sqrt{3}), 1\right)$. Згідно відомого результату, описаного Філіповим А.Ф. [32], загальний розв'язок заданої системи має вигляд

```

sol=Y[t]→∑i=12 C[i]s[[2,i]]Exp[t s[[1,i]]]//Thread
{x[t]→1/6(-3-i√3)e1/2(1+i√3)tC[1]+1/6(-3+i√3)e1/2(1-i√3)tC[2],
y[t]→e1/2(1+i√3)tC[1]+e1/2(1-i√3)tC[2]}

```

Виділимо тепер із загального розв'язку частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

```

Y0={1,0};
eq1=(Y[t]/.sol/.t→0)==Y0//Thread;
sol1=Solve[eq1, {C[1],C[2]}]
{{C[1]→i√3, C[2]→-i√3}}

```

Знайдений частинний розв'язок має вигляд:

```

sol2=Y[t]→(Y[t]/.sol/.sol1[[1]])//Thread//FullSimplify
{x[t]→et/2(Cos[√3t/2]+√3 Sin[√3t/2]), y[t]→-2√3 et/2 Sin[√3t/2]}

```

Цей розв'язок можна знайти безпосередньо за допомогою функції DSolve, доповнюючи систему диференціальних рівнянь рівняннями, які виражають початкові умови.

```
DSolve[Join[eq, (Y[0]==Y0//Thread)], Y[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \left[\frac{\sqrt{3}t}{2} \right] + \sqrt{3} \sin \left[\frac{\sqrt{3}t}{2} \right] \right), \quad y[t] \rightarrow -2\sqrt{3} e^{\frac{t}{2}} \sin \left[\frac{\sqrt{3}t}{2} \right] \right\} \right\}$$

Основна ідея *методу інтегрованих комбінацій*, який використовується для розв'язання лінійних систем, полягає в наступному: домножуючи рівняння системи на деякі числа і додаючи їх між собою, отримати диференціальне рівняння, яке може бути легко проінтегрованим.

Приклад 10.38. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases}$$

який задовольняє початковим умовам $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

Розв'язок. Означимо систему диференціальних рівнянь

```
Clear["Global`*"];
eq={x'[t]==2x[t]+y[t], y'[t]==x[t]+2y[t]};
```

Домножуючи перше рівняння системи на деяке число a і додавши до другого рівняння, отримуємо

```
eq1=Thread[Thread[a eq[[1]],Equal]+eq[[2]],Equal]//Simplify
(1+2a)x[t]+(2+a)y[t]==ax'[t]+y'[t]
```

Знайдемо таке значення a , при якому рівняння eq1 можна буде представити у вигляді

$$ax'(t) + y'(t) = k((1 + 2a)x(t) + (a + 2)y(t)),$$

де k – деяке число. Прирівнюючи коефіцієнти при $x(t)$ та $y(t)$ в правій частині рівняння eq1 до (ak) та k відповідно, отримуємо систему

```
eqp=eq1[[1]]-eq1[[2]];
(1+2a)x[t]+(2+a)y[t]-ax'[t]-y'[t]
eq2={k Coefficient[exp,x[t]]==-Coefficient[exp,x'[t]],
k Coefficient[exp,y[t]]==-Coefficient[exp,y'[t]]}
{(1+2a)k==a, (2+a)k==1}
```

Розв'язуючи систему eq2, знаходимо значення k та a .

```
sol2=Solve[eq2,{a,k}]
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow 1, k \rightarrow \frac{1}{3} \right\}, \left\{ a \rightarrow -1, k \rightarrow 1 \right\} \right\}$$

Підставляючи в рівняння eq1 друге з двох знайдених значень a , отримуємо рівняння

```
eq3=eq1/.sol2[[2]]//Simplify
```

$$x[t] + y'[t] == y[t] + x'[t]$$

Ввівши позначення $z(t) = -x(t) + y(t)$, отримуємо відносно $z(t)$ диференціальне рівняння з відокремленими змінними, яке легко інтегрується.

```
eq4=eq3/. y->(z[#]-a x[#]&)/.sol2[[2]]//Simplify
```

$$z[t] = z'[t]$$

```
sol4=DSolve[eq4,z[t],t][[1]]
```

$$\{z[t] \rightarrow e^t C[1]\}$$

Виконуючи в першому рівнянні вихідної системи підстановку $y(t) \rightarrow z(t) - x(t)$, з врахуванням знайденого розв'язку sol4, отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, яке також легко інтегрується.

```
eq5=eq[[1]]/. y->(z[#]+x[#]&)/.sol4//Simplify
```

$$e^t C[1] + 3x[t] == x'[t]$$

```
sol5=DSolve[eq5,x[t],t][[1]]
```

$$\left\{ x[t] \rightarrow -\frac{1}{2} e^t C[1] + e^{3t} C[2] \right\}$$

Використовуючи знайдені функції $z(t)$ та $x(t)$, отримуємо для $y(t)$ наступні вирази:

```
sol6=y[t]->((z[t]+x[t]))/.sol4/.sol5//Simplify
```

$$y[t] \rightarrow \frac{1}{2} e^t C[1] + e^{3t} C[2]$$

Власне, бачимо ілюстрацію того, що функція DSolve, яка застосовується до вихідної системи, дає аналогічний розв'язок.

```
sol=DSolve[eq,{x[t],y[t],t}/.{C[1]->c1, C[2]->c2}//Simplify
```

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \frac{1}{2} e^t ((1 + e^{2t}) c_1 + (-1 + e^{2t}) c_2), y[t] \rightarrow \frac{1}{2} e^t ((-1 + e^{2t}) c_1 + (1 + e^{2t}) c_2) \right\} \right\}$$

Щоб знайти частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам, складаємо систему з двох алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи систему, визначаємо значення сталих $C[1]$ та $C[2]$.

```
eq7={ (x[t]/.sol5/.t→0)==2, (y[t]/.sol6/.t→0)==3};
sol7=Solve[eq7,{C[1],C[2]}]
{{C[1]→1, C[2]→ $\frac{5}{2}$ }}
```

Частинний розв'язок має вигляд

```
sol8={sol5,sol6}/.sol7//Flatten
{x[t]→ $-\frac{e^t}{2} + \frac{5e^{3t}}{2}$ , y[t]→ $\frac{e^t}{2} + \frac{5e^{3t}}{2}$ }
eq/.D[sol51,t]/.sol5/.D[sol61,t]/.sol6/.sol7//Simplify
{{{True,True}}}
```

Якщо в список рівнянь системи включити початкові умови, то функція DSolve знаходить аналогічний частинний розв'язок

```
DSolve[Join[eq,{x[0]==2,y[0]==3}],{x[t],y[t]},t]//Simplify
{{x[t]→ $\frac{1}{2}e^t(-1+5e^{2t})$ , y[t]→ $\frac{1}{2}e^t(1+5e^{2t})$ }}
```

Відтак помічаємо, що отримані розв'язки співпадають.

```
%/.Rule→Equal/.sol8//Simplify
{{{True,True}}}
```

Приклад 10.39. Побудувати фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases}$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = a$, $y(0) = 0$.

Розв'язок. Розв'язуємо відповідну задачу Коші

```
Clear["Global`*"];
eq={x'[t]==2x[t]+4y[t], y'[t]==-2x[t]-y[t], x[0]==a, y[0]==0};
sol=DSolve[eq,{x[t],y[t]},t][[1]]//Simplify
{x[t]→ $\frac{1}{23}a e^{\frac{t}{2}} \left( 23 \cos\left[\frac{\sqrt{23}t}{2}\right] + 3\sqrt{23} \sin\left[\frac{\sqrt{23}t}{2}\right] \right)$ , y[t]→ $-\frac{4a e^{\frac{t}{2}} \sin\left[\frac{\sqrt{23}t}{2}\right]}{\sqrt{23}}$ }
```

Розв'язок, який отримується за допомогою функції `DSolve`, не виводитимемо, так як він досить громіздкий. Очевидно, різні значення параметра a визначають різні траєкторії. Для отримання фазового портрета побудуємо траєкторії для значень $a = -1, -0.8, \dots, 0.8, 1$ на інтервалі $t \in [-2, 3]$.

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{x[t], y[t]}/.sol,
{a, -1, 1, 0.2}]], {t, -2, 3}]
```

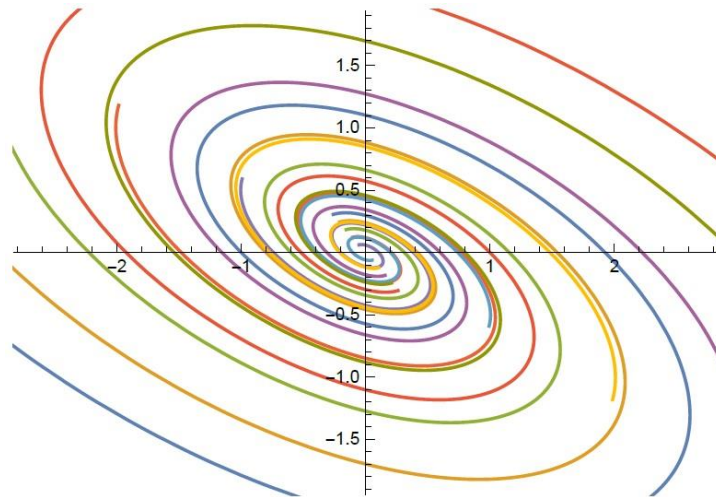


Рис. 10.23. Фазовий портрет системи прикладу 10.38.

Положення рівноваги $(0,0)$ є нестійкий фокус, оскільки показник степеню експоненти є додатним числом $(1/2)$.

Приклад 10.40. Побудувати фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y - z, \end{cases}$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 2$. Побудувати графік відповідної траєкторії на проміжку $[-3, 3]$.

Розв'язок. Означуємо відповідну систему диференціальних рівнянь разом з початковими умовами та знаходимо її розв'язок, використовуючи функцію `DSolve`.

```
Clear["Global`*"];
```

```
eq={x'[t]==-3x[t]+y[t]+z[t], y'[t]==-2x[t]-y[t]+z[t],
z'[t]==-4x[t]+y[t]-z[t] x[0]==1, y[0]==0, z[0]==2};
sol=DSolve[eq,{x[t],y[t],z[t]},t][[1]]
{x[t]→ $\frac{1}{15}e^{-\frac{3t}{2}}\left(15\cos\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]+\sqrt{15}\sin\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]\right)$ ,
y[t]→ $\frac{1}{15}e^{-2t}\left(-15+15e^{\frac{t}{2}}\cos\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]-\sqrt{15}e^{\frac{t}{2}}\sin\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]\right)$ 
z[t]→ $\frac{1}{3}e^{-2t}\left(3+3e^{\frac{t}{2}}\cos\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]-\sqrt{15}e^{\frac{t}{2}}\sin\left[\frac{\sqrt{15}t}{2}\right]\right)}$ }
```

Знайдені функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ визначають траєкторію, що проходить через точку $(1,0,2)$. Оскільки траєкторія задана в параметричній формі, для її візуалізації можна використовувати функцію `ParametricPlot3D`. Вибираючи інтервал зміни незалежної змінної $t \in [-3,3]$, отримуємо відповідну траєкторію у вигляді

```
ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]}/.sol//Evaluate,
{t,-3,3}, AxesLabel→{"x", "y", "z"},
PlotRange→{{-15,5}, {-120,2}, {0,45}}]
```

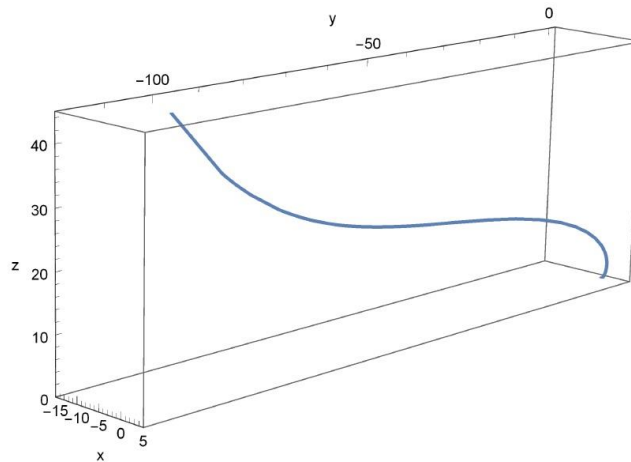


Рис. 10.24. Графік траєкторії прикладу 10.39.

Приклад 10.41. Для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y}, \\ \frac{dy}{dt} + x = 0 \end{cases}$$

перевірити чи є співвідношення $\varphi = C$ першим інтегралом системи

$$\begin{cases} \varphi_1 = t^2 + 2xy, \\ \varphi_2 = t^2 - ty. \end{cases}$$

Розв'язок. Із заданої системи знайдемо $x'(t)$ та $y'(t)$.

```
Clear["Global`*"];
sys={x'[t]==x[t]y[t], y'[t]==x[t]^2+y[t]^2};
sol=Solve[sys, {x'[t], y'[t]}]//Flatten
{x'[t] -> x[t]y[t], y'[t] -> x[t]^2 + y[t]^2}
```

Для перевірки чи є співвідношення $\varphi_1 = C$ першим інтегралом системи скористаємося формулою $\frac{d}{dt}(\varphi_1) \equiv 0$.

```
 $\varphi_1 = \frac{y[t]^2}{x[t]^2} - 2\text{Log}[x[t]];$ 
exp=Dt[ $\varphi_1$ , t]/.sol//Simplify
0
```

Перевіряємо чи є співвідношення $\varphi_2 = C$ першим інтегралом системи

```
 $\varphi_2 = 2x[t]\text{Log}[y[t]] - x[t]^2y[t];$ 
exp=Dt[ $\varphi_2$ , t]/.sol//Simplify
x[t] (-x[t]^3 +  $\frac{2x[t]^2}{y[t]} + 2(1 + \text{Log}[y[t]])y[t] - 3x[t]y[t]^2)$ 
```

Таким чином, співвідношення $\varphi_1 = C$ є першим інтегралом системи, а співвідношення $\varphi_2 = C$ – ні.

Приклад 10.42. Побудувати загальний інтеграл системи

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

Розв'язок. Із заданої системи, використовуючи перше та третє співвідношення, знайдемо $x'(z)$:

```
Clear["Global`*"];
sys={x'[t]==-x[t]^2, y'[t]==x[t]y[t]-2 z[t]^2, z'[t]==x[t]z[t]}
eq1=x'[z]==-x[z]/z;
sol1=DSolve[eq1, x[z], z]//Flatten
{x'[t] == -x[t]^2, y'[t] == x[t]y[t] - 2z[t]^2, z'[t] == x[t]z[t]}
{x[z] ->  $\frac{C[1]}{z}$ }
```

Для перевірки чи є співвідношення $xz = C$ першим інтегралом системи скористаємось формулою $\frac{d}{dt}(xz) \equiv 0$

```
 $\varphi_1 = x[t]z[t];$ 
exp=Dt[ $\varphi_1$ , t]/.(sys/.Equal->Rule)//Simplify
```

0

В рівняння $\frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$ підставимо значення функції x з `sol1`, а потім проінтегруємо рівняння, яке утворилось

```
eq2=y'[t]==sys[[2,2]]/.{z[t]→z}/.t→z/.sol1//Simplify
sol2=DSolve[eq2,y[z],z]//Flatten
 $\frac{2z^2}{C[1]} + y'[z] == \frac{y[z]}{z}$ 
 $\{y[z] \rightarrow -\frac{z^3}{C[1]} + zC[2]\}$ 
```

Виразимо з `sol2` значення `C[2]` і підставимо в отримане рівняння `C[1]`

```
eq3=Solve[sol2/.Rule→Equal,C[2]/.Solve[sol1/.Rule→Equal,C[1]/.
{z→z}]/Simplify//Flatten
 $\{C[2] \rightarrow \frac{z}{x[z]} + \frac{y[z]}{z}\}$ 
```

Перевіримо чи є співвідношення $\varphi_2 = C[2]$ першим інтегралом системи

```
 $\varphi_2 = \frac{z[t]}{x[t]} + \frac{y[t]}{z[t]}$ ;
exp=Dt[ $\varphi_2$ ,t]/.(sys/.Equal→Rule)//Simplify
0
```

Таким чином, співвідношення $\varphi_1 = C[1]$ та $\varphi_2 = C[2]$ є першими інтегралами системи. Покажемо, що вони незалежні.

```
 $\rho = \{x[t] \rightarrow x, y[t] \rightarrow y, z[t] \rightarrow z\}$ ;
 $\varphi_1 = \varphi_1/. \rho$ ;  $\varphi_2 = \varphi_2/. \rho$ ;
Det[{{D[ $\varphi_1$ ,x],D[ $\varphi_1$ ,y]},{D[ $\varphi_2$ ,x],D[ $\varphi_2$ ,y]}}]
1
```

Оскільки якобіан функцій φ_1, φ_2 не перетворюється в нуль, то інтеграли незалежні і, відповідно, утворюють загальний інтеграл системи.

Приклад 10.43. Побудувати загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{zxy - 2x^2}.$$

Розв'язок. Перепишемо задану систему у вигляді `sys1`

```
Clear["Global`*"];
sys1={y'[x]== $\frac{y[x]^2}{xy[x]}$ , z'[x]== $\frac{xz[x]y[x]-2x^2}{xy[x]}$ }/Simplify
{y'[x]== $\frac{y[x]}{x}$ ,  $\frac{2x}{y[x]}+z'[x]==z[x]$ }
```

Проінтегруємо перше рівняння системи

```
sol1=DSolve[sys1[[1]],y[x],x]/Flatten
{y[x]→xC[1]}
```

Підставимо отримане значення $y(x)$ в друге рівняння системи та проінтегруємо отримане рівняння

```
eq1=sys1[[2]]/.sol1
sol2=DSolve[eq1,z[x],x]/Flatten/Simplify
 $\frac{2}{C[1]}+z'[x]==z[x]$ 
{z[x]→ $\frac{2}{C[1]}+e^xC[2]$ }
```

Запишемо два перших інтеграла системи

```
 $\rho$ =Rule→Equal;
sys2=Solve[{sol1,sol2}/. $\rho$ ]/Flatten,{C[1],C[2]}]
{{C[1]→ $\frac{y[x]}{x}$ , C[2]→ $\frac{e^{-x}(-2x+y[x]z[x])}{y[x]}$ }}
```

Систему sys1 можна розв'язати безпосередньо використовуючи команду DSolve. Після чого запишемо два перших інтеграла.

```
sol3=DSolve[sys1,{z[x],y[x]},x]/Simplify/Flatten;
Solve[sol3/. $\rho$ ]/Flatten,{C[1],C[2]}]
{{C[1]→ $\frac{y[x]}{x}$ , C[2]→ $\frac{e^{-x}(-2x+y[x]z[x])}{y[x]}$ }}
```

Бачимо, що отримані перші інтеграли співпадають з першими інтегралами з sys2. Очевидно, що отримані інтеграли незалежні.

Приклад 10.44. Знайти загальний інтеграл системи рівнянь

$$\frac{tdt}{y^2-2xy-x^2} = \frac{dx}{x+y} = \frac{dz}{x-y}.$$

Розв'язок. Означуємо систему диференціальних рівнянь

```
Clear["Global`*"];
sys3={ $\frac{tDt[t]}{y^2-2xy-x^2}==\frac{Dt[x]}{x+y}==\frac{Dt[y]}{x-y}$ };
```

Скористаємось властивістю рівних відношень:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_nb_n}.$$

Множники k_i підберемо так, щоб знаменник був рівний нулю, а чисельник — диференціал тієї комбінації змінних, якою виражається знаменник.

```
nm=Numerator;
dn=Denominator;
eq1=Thread[Thread[sys3[[1,1]]//dn,Equal]+
      k1 dn[sys3[[1,2]]]+k2 dn[sys3[[1,3]]],Equal]//Simplify
eq2=Thread[Thread[sys3[[1,1]]//nm,Equal]+k1 nm[sys3[[1,2]]]+
      k2 nm[sys3[[1,3]]],Equal]//Simplify
 $-x^2 - 2xy + y^2 + (x+y)k_1 + (x-y)k_2$ 
Dt[t] + Dt[x]k1 + Dt[y]k2
```

Щоб знайти значення k_1 та k_2 побудуємо систему sys. Розв'язуючи останню отримаємо:

```
sys={0==eq1/.{y->x}},0==eq1/.{x->-y}}
{0 == -2x2 + 2xk1, 0 == 2y2 - 2yk2}
sol1=Solve[sys,{k1,k2}]//Simplify
{k1 -> x, k2 -> y}
```

Підставляючи знайдені значення a та b у вираз eq2, отримуємо:

```
exp1=eq1/.sol1[[1]]//Simplify
Dt[t]+xDt[x]+yDt[y]
exp2= $\frac{1}{2}$ Dt[t2+x2+y2];
exp2==exp1//Simplify
True
```

Таким чином, прирівнюючи до довільної сталої вираз, що стоїть під диференціалом в exp2, знаходимо перший інтеграл

```
int1=c1=t2+x2+y2;
```

Щоб знайти другий перший інтеграл з останніх двох співвідношень системи sys3 утворюємо рівняння

```
eq3=Solve[sys3[[1,2]]==sys3[[1,3]]/.{y->y[x]},y'[x]]/.
Rule->Equal//Flatten//Simplify
{y'[x] ==  $\frac{x-y[x]}{x+y[x]}$ }
```

Отримане рівняння є однорідним. Розв'язуючи рівняння eq3, знаходимо другий перший інтеграл

```
sol2=DSolve[eq3,y[x],x]/.C[1]->Log[Sqrt[c2]]//Flatten
int2=Solve[sol2[[1,1]]==sol2[[1,2]],c2/.y[x]->y
{y[x] -> -x - Sqrt[2x2 + c2], y[x] -> -x + Sqrt[2x2 + c2], }
{{c2 -> -x2 + 2xy + y2}}
```

Відтак перші інтеграли int1 та int2 утворюють загальний інтеграл системи.

10. 8. Нелінійних диференціальні рівняння першого порядку

Геометрична інтерпретація розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку вигляду $dy/dx = f(x, y)$ важлива для базового розуміння задач цього типу.

Припустимо, що розв'язком цього рівняння є функція $y = \psi(x)$, а її графік є інтегральною кривою. Якщо (x, y) – координати точки на цьому графіку, то нахил дотичної визначається як $f(x, y)$. Набір коротких лінійних сегментів, які є набором дотичних до інтегральних кривих можна побудувати для великої кількості точок. Цю сукупність відрізків означається як поле напрямків диференціального рівняння, яке дає розуміння про поведінку сімейства розв'язків.

Це пов'язано з тим, що, визначаючи нахил дотичної для великої кількості точок на площині, ми можемо уявити вид графіків розв'язків фактично не маючи формули для них. Поле напрямків для диференціального рівняння дає геометричну інтерпретацію поведінки розв'язків рівняння. Поля напрямків створюються за допомогою команди `VectorPlot`, яка записується в такий спосіб

```
VectorPlot[{vx, v, y}],  
{x, Subscript[x, min], Subscript[x, max]},  
{y, Subscript[y, min], Subscript[y, max]}}
```

Власне, нелінійні диференціальні рівняння становлять великий інтерес у дослідників. Для роботи з ними в системі комп'ютерної алгебри Mathematica вбудовано спеціальний інструментарій.

Приклад 10.44. Побудувати поле напрямків диференціального рівняння

$$y' = x^4 - y$$

і нарисувати інтегральні криві, які проходять через точки $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$.

Розв'язок. Означимо праву частину диференціального рівняння

```
Clear["Global`*"];  
f[x_, y_] = x4 - y;
```

Для побудови ізоклін $f(x, y) = k$, де $k = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ використовуємо функцію `ContourPlot`. Відповідний графік назвемо `gr1`, при цьому не рисуватимемо його.

```
gr1=ContourPlot[f[x,y],{x,1.5,1.5},{y,-3.5,2.1},  
Contour→{-3,-2,-1,0,1,2,3},ContourStyle→Dashing[{0.05,0.05}],  
ContourShading→False,Frame→False,Axes→True,AxesOrigin→{0,0}];
```

Далі побудуємо поле напрямків, поміщаючи на кожному ізокліну стрілки, тангенс кута нахилу до осі Ox рівний значенню y' .

```
ym=2;  
arr={};  
Do[{xmax=(ym+k)1/4; dx=xmax/(4+k);  
Do[arr=Append[arr,Arrow[{{-xmax+i dx, (-xmax+i dx)4-k},  
{-xmax+i dx+0.25, (-xmax+i dx)4-0.85k}}]],{i,7+2k}]],  
{k,-2,3}];  
gr2=Graphics[arr];  
Show[gr1,gr2,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```

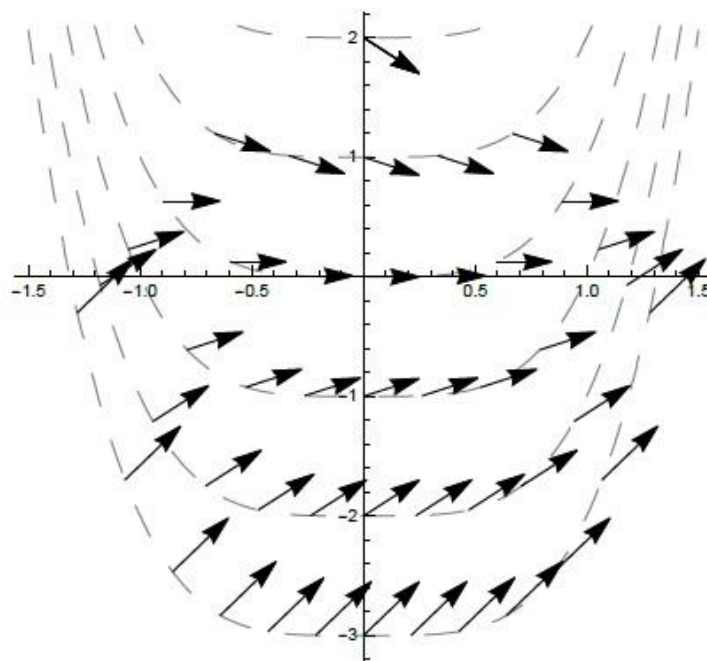


Рис. 10.25. Поле напрямків прикладу 10.44.

За допомогою функції DSolve знайдемо інтегральні криві диференціального рівняння $y' = x^4 - y$, які проходять через точки $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ й накладемо їх з на поле напрямків.

```
sol1=DSolve[{y'[x]==f[x,y[x]],y[0]==-1},y[x],x]//Flatten;
sol2=DSolve[{y'[x]==f[x,y[x]],y[0]==0},y[x],x]//Flatten;
sol3=DSolve[{y'[x]==f[x,y[x]],y[0]==1},y[x],x]//Flatten;
gr3=Plot[{(y[x]/.sol1),(y[x]/.sol2),(y[x]/.sol3)},{x,-2,2},
PlotRange->{-3,3},PlotStyle->Thickness[0.01],
DisplayFunction->Identity];
Show[gr1,gr2,gr3,PlotRange->{{-1.5,1.5},{-3,2.6}}]
```

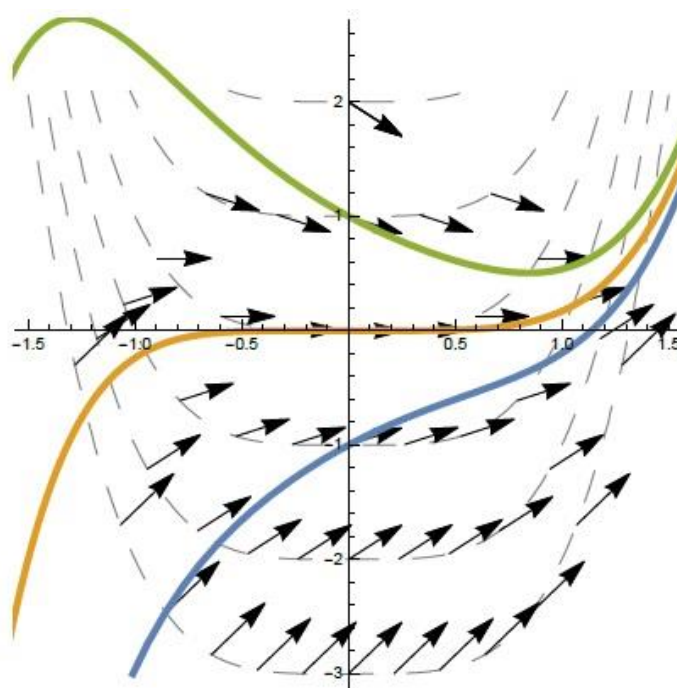


Рис. 10.26. Інтегральні криві ДР $y' = x^4 - y$, накладені на поле напрямків прикладу 10.44.

Як бачимо на рис. 10.26, всі інтегральні криві, які перетинають будь-яку ізокліну, мають в точках перетину однаковий нахил до осі Ox , що співпадає з нахилом відповідної стрілки.

Приклад 10.45. Побудувати поле напрямків диференціального рівняння

$$y' = e^{-2x} + y$$

і малювати інтегральні криві, які проходять через точки $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$.

Розв'язок. Означимо праву частину диференціального рівняння та потім використовуючи функцію `VectorPlot` намалюємо поле напрямків.

```
gr4=VectorPlot[{1, e-x/2+y}, {x, -1/2, 2}, {y, -2, 2}, Axes→True,
Frame→False]
```

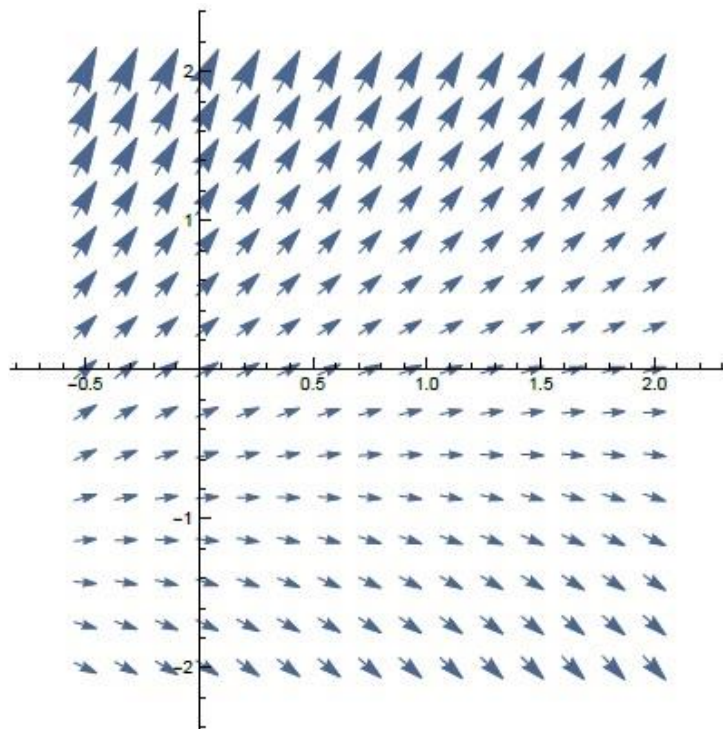


Рис. 10.27. Поле напрямків прикладу 10.45.

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

```
gsol=DSolve[y'[x]==e-x/2+y[x], y[x], x]
{{y[x] → -2/3 e-x/2 + exC[1]}}
```

Виділимо праву частину знайденого загального розв'язку

```
gsol[[1, 1, 2]]
-2/3 e-x/2 + exC[1]
```

та визначимо декілька частинних розв'язків, задаючи значення довільної сталої `C[1]`

```
sol4=Table[%/.C[1]→k, {k, -3, 3, 0.5}];
```

Нарисуємо графік побудованих частинних розв'язків

```
gr5=Plot[sol4,{x,-1/2,2}, PlotRange→{-2,2},  
PlotStyle→{Red,Thickness[0.01]}]
```

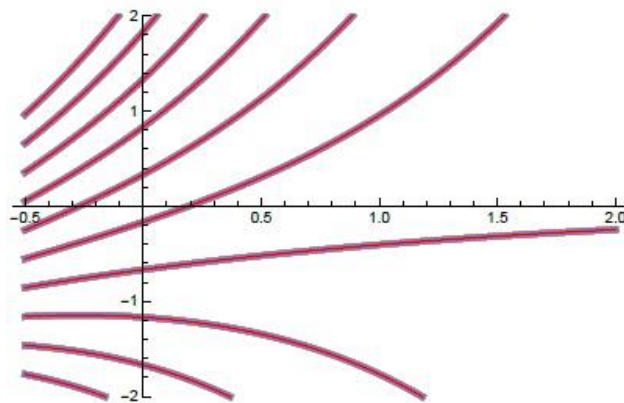


Рис. 10.28. Графік частинних розв'язків ДР прикладу 10.45.

Накладемо отриманий графік на графік поля напрямків.

```
Show[gr4,gr5, PlotRange→{-2,2},  
DisplayFunction→$DisplayFunction]
```

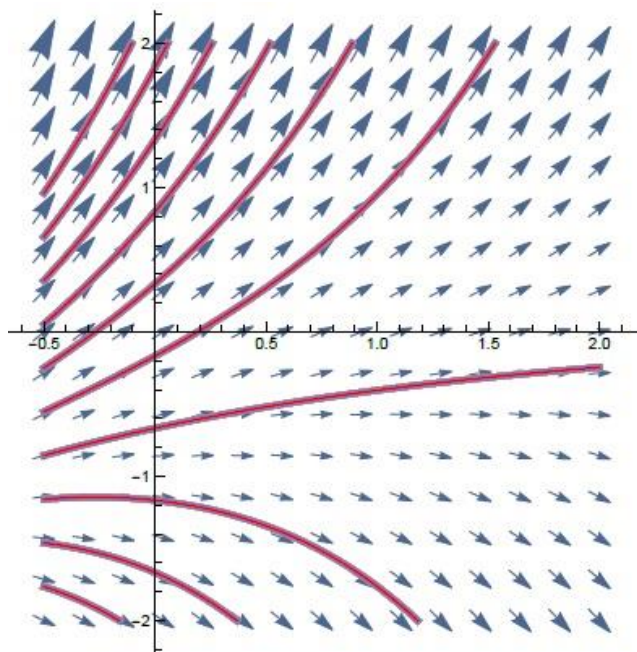


Рис. 10.29. Графік частинних розв'язків ДР прикладу 10.45 накладений на графік поля напрямків.

Приклад 10.46. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3.$$

Знайти розв'язок $y(x)$, який обмежений при $x \rightarrow \infty$.

Розв'язок. За допомогою функції DSolve знайдемо три гілки розв'язку

```
eq=3y[x]^2y'[x]+16x==2xy[x]^3;
sol=DSolve[eq,y[x]]//Flatten
{y[x] -> (8 + e^{x^2+3C[1]})^{1/3}, y[x] -> -(-1)^{1/3}(8 + e^{x^2+3C[1]})^{1/3},
y[x] -> (-1)^{2/3}(8 + e^{x^2+3C[1]})^{1/3}}
```

Поклавши $C[1] = \ln c$, отримаємо

```
sol1=sol/.C[1]->Log[c]//Simplify
{y[x] -> (8 + c^3e^{x^2})^{1/3}, y[x] -> -(-1)^{1/3}(8 + c^3e^{x^2})^{1/3}, y[x] -> (-1)^{2/3}(8 + c^3e^{x^2})^{1/3}}
```

Перша вітка дає дійсний розв'язок, так як

```
{-(-1)^{1/3}, (-1)^{2/3}}//N
{-0.5 - 0.866025 i, -0.5 + 0.866025 i}
```

Знайдемо границю відповідної функції

```
Limit[sol1[[1,2]],x->Infinity]
Infinity
```

Для виконання умови обмеженості підставимо $c = 0$.

```
sol1[[1]]/.c->0
y[x] -> 2
```

Таким способом, отримуємо обмежений розв'язок $y = 2$.

Приклад 10.47. Показати, що задача Коші

$$xy' - y = \frac{1}{4}x^3 \cos(2x), \quad y(0) = 0$$

має нескінченно багато розв'язків.

Розв'язок. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{4y + x^3 \cos(2x)}{4x}.$$

Оскільки права частина цього рівняння не задовольняє теорему існування та єдиності розв'язку на інтервалі, який містить точку $x = 0$, то, відповідно, для поставленої задачі Коші, не гарантується єдиності розв'язку.

```
Clear["Global`*"];
eq=xy'[x]-y[x] ==  $\frac{1}{4} x^3 \text{Cos}[2x]$ ;
sol=DSolve[{eq,y[0]==0},y[x],x]//Simplify//Flatten
```

DSolve: For some branches of the general solution, the given boundary conditions do not restrict the existing freedom in the general solution.

DSolve: Unable to resolve some of the arbitrary constants in the general solution using the given boundary conditions. It is possible that some of the conditions have been specified at a singular point for the equation.

$$\left\{y[x] \rightarrow \frac{1}{16}x(16C[1] + \text{Cos}[2x] + 2x \text{Sin}[2x])\right\}$$

В результаті отримали розв'язок задачі Коші, який містить довільну сталу $C[1]$, що означає наявність нескінченної множини розв'язків, які задовольняють заданій початковій умові. Разом з розв'язком система комп'ютерної алгебри Mathematica видає відповідний коментар.

Знайдемо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння

```
DSolve[eq,y[x],x]//Simplify//Flatten
```

$$\left\{y[x] \rightarrow \frac{1}{16}x(16C[1] + \text{Cos}[2x] + 2x \text{Sin}[2x])\right\}$$

Він співпадає із знайденим розв'язком задачі Коші. Підставимо в нього значення $x = 0$

```
(%/x->0) [[1]] /.Rule -> Equal
```

$$y[0] = 0$$

Бачимо, що з отриманої умови не вдається знайти значення $C[1]$.

Підставимо замість $C[1]$ з sol значення $\{-8, -7, \dots, 7, 8\}$ і нарисуємо відповідні графіки отриманих функцій

```
soln=Table[Evaluate[sol[[1,2]]/.C[1] -> i],{i,-8,8,2}];
Plot[soln,{x,-10,10}, PlotRange -> {-30,30}]
```

На рис. 10.30 проілюстровано, що точка $x = 0$ – особлива і що через неї проходять 9 нарисованих кривих.

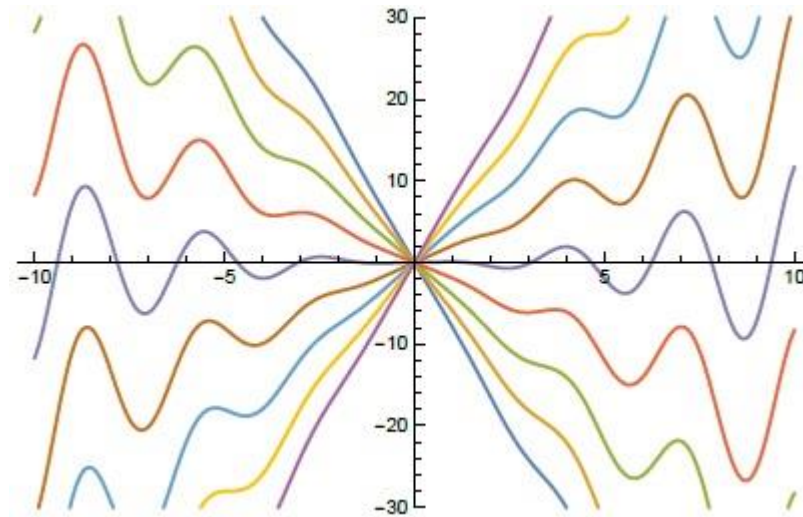


Рис. 10.30. Графіки розв'язків прикладу 10.47 для значень $C[1] \{-8, -7, \dots, 7, 8\}$.

Приклад 10.48. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x + xy^3)dx + (y - x^2y)dy = 0.$$

Розв'язок. Знаходимо загальний інтеграл диференціального рівняння

```
Clear["Global`*"];
```

```
eq=(xy[x]^3+x)+(y[x]-x^2y[x])y'[x]==0;
```

```
sol=DSolve[eq,y[x],x]//Simplify//Flatten
```

$$\left\{ y[x] \rightarrow \text{InverseFunction} \left[\frac{\text{ArcTan} \left[\frac{-1 + 2\#1}{\sqrt{3}} \right]}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \text{Log}[1 + \#1] + \frac{1}{6} \text{Log}[1 - \#1 + \#1^2] \& \right] \left[C[1] + \frac{1}{2} \text{Log}[-1 + x^2] \right] \right\}$$

За допомогою `DSolve` отримуємо загальний інтеграл, записаний в формі оберненої функції. Дійсно, рівняння `eq` є рівнянням з відокремленими змінними. Запишемо його у вигляді рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{y}{y^3 + 1} dy.$$

Проінтегруємо це рівняння

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx + \ln c = \int \frac{y}{y^3 + 1} dy.$$

$$lp = \int \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$rp = \int \frac{y}{y^3+1} dx$$

$$\frac{1}{2} \text{Log}[-1 + x^2]$$

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2y}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \text{Log}[1 + y] + \frac{1}{6} \text{Log}[1 - y + y^2]$$

Відповідно, загальний розв'язок має вигляд sol1

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2y}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \text{Log}[1 + y] + \frac{1}{6} \text{Log}[1 - y + y^2] = \frac{1}{2} \text{Log}[-1 + x^2] + c.$$

Зробимо перевірку

```
int=(rp/.y -> y[x])==lp;
soln=Solve[D[int,x],y'[x]] [[1]] //Simplify
eq/.soln//Simplify
{y[x] -> x(1+y[x]^3)/(-1+x^2)y[x]}
True
```

Нарисуємо кілька інтегральних кривих за допомогою функції Contour

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2y}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \text{Log}[1 + y] + \frac{1}{6} \text{Log}[1 - y + y^2] = \frac{1}{2} \text{Log}[-1 + x^2] + c.$$

```
ContourPlot[lp-rp,{x,1,10},{y,-1,10},
Contours -> 20, ContourShading -> False, ContourStyle -> Thick]
```

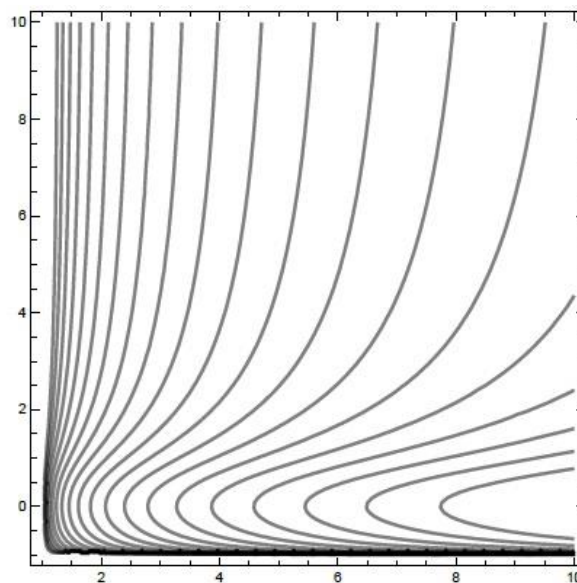


Рис. 10.31. Графіки інтегральних кривих прикладу 10.48 для різних значень C .

Приклад 10.49. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$x \frac{dy}{dx} = y(1 + \ln y + \ln x).$$

Розв'язок. Очевидно, що дане рівняння є однорідним. Тому для його розв'язування зручно скористатись заміною $y \rightarrow xz$.

```
Clear["Global`*"];  
eq=xy'[x]==y[x](1+Log[y[x]]-Log[x]);  
eq1=eq/.y -> (#z[#]&)  
x(z[x]+xz'[x])==x(1-Log[x]+Log[xz[x]])z[x]
```

Розв'язуючи отримане рівняння відносно $z'(x)$, бачимо, що отримали рівняння з відокремленими змінними.

```
Solve[eq1,z'[x]][[1]]  
{z'[x] -> (-Log[x]z[x]+Log[xz[x]])z[x]/x}
```

Це рівняння легко інтегрується за допомогою функції DSolve

```
sol1=DSolve[eq1,z[x],x]/.e^{C1}->C1  
{z[x]->e^{x C1x}}
```

Таким способом, розв'язок вихідного рівняння має вигляд

```
y[x] -> (xz[x]/.sol1)//Thread  
{y[x]->e^{x C1x}}
```

Застосування функції DSolve до вихідного рівняння приводить до наступного результату

```
sol=DSolve[eq,y[x],x]/.e^{C1}->C1//Flatten  
{y[x]->e^{x C1x}}
```

Відтак, отримані двома способами розв'язки співпадають.

Приклад 10.50. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

Розв'язок. Дане рівняння зводиться до однорідного, використовуючи заміну змінних:

$$x = t - 1, \quad y = z - 2.$$

```
Clear["Global`*"];
eq=y'[x]== $\frac{y[x]+2}{x+1}$ +Tan $\left[\frac{y[x]-2x}{x+1}\right]$ ;
ρ1={x → t-1, y[x] → z[t]-2};
eq1=(eq/.y'[x] → z'[t])/ρ1//Simplify
Tan $\left[2-\frac{z[t]}{t}\right]$ +z'[t]== $\frac{z[t]}{t}$ 
```

Рівняння eq1 є однорідним. Тому для його розв'язування зручно використовувати заміну $z \rightarrow xu$.

```
eq2=eq1/.z → (#u[#]&)//Simplify
Tan[2-u[t]]+t u'[t]==0
```

Розв'язуючи отримане рівняння відносно $u'(x)$, бачимо, що отримали рівняння з відокремленими змінними.

```
Solve[eq2,u'[t]] [[1]]
 $\left\{u'[t] \rightarrow -\frac{\text{Tan}[2-u[t]]}{t}\right\}$ 
```

Це рівняння легко інтегрується за допомогою функції DSolve

```
sol1=DSolve[eq2,u[t],t]/.e-C[1] → C1
```

 **Solve:** Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

```
{u[t] → 2-ArcSin[t C1]}
sol2=Solve[ρ1[[2]]/.Rule → Equal,y[x]] [[1]]
sol3=Solve[ρ1[[1]]/.Rule → Equal,t] [[1]]
{y[x] → -2+z[t]}
{t → 1+x}
```

Таким способом, розв'язок вихідного рівняння має вигляд:

```
sol2/.z[t] → (t u[t]/.sol1)/.sol3//Thread//Simplify
{y[x] → 2x-(1+x)ArcSin[(1+x)C1]}
```

Застосування функції DSolve до вихідного рівняння приводить до такого ж результату:

```
sol=DSolve[eq, y[x], x] /. e-C[1] → C1 // Flatten // Simplify
```

 **Solve:** Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

```
{y[x] → 2x + (1 + x)ArcSin[(1 + x) C1]}
```

Приклад 10.51. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^3 \sin x - x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Побудувати інтегральні криві, що задовольняють умови

$$y(1) = n\pi, \quad (n = -5, -4, \dots, 4, 5).$$

Розв'язок. Нескладно показати, що дане рівняння зводиться до рівняння Бернуллі, якщо розділити обидва доданки на $y'(x)$ й прийняти x за функцію від y . При цьому легко бачити, що $y = 0$ є розв'язком, що задовольняє умову $y(1) = 0$.

```
Clear["Global`*"];
eq=(x3Sin[y[x]]-x)y'[x]==-2y[x];
eq1=Solve[eq, y'[x]];
eq2=x'[y]==(1/eq1[[1,1,2]]/.y[x] → y/.x → x[y])
x'[y]==- $\frac{x[y](-1+\text{Sin}[y]x[y]^2)}{2y}$ 
```

Введемо заміну $z(y) = \frac{1}{x^2}$.

```
eq3=eq2/.x → (1/√z[#]&);
eq4=Solve[eq3, z'[y]] [[1]] /. Rule → Equal // Simplify
 $\left\{z'[y] == \frac{\text{Sin}[y] - z[y]}{y}\right\}$ 
```

В результаті отримуємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $z(y)$. Інтегруючи рівняння eq4, отримуємо

```
sol1=DSolve[eq4, z[y], y] [[1]] // Simplify
 $\left\{z[y] \rightarrow \frac{C[1] - \text{Cos}[y]}{y}\right\}$ 
```

загальний розв'язок $z = (C_1 - \cos(y))/y$. Повертаючись до зворотної заміни, отримуємо загальний розв'язок в неявній формі

```
sol2=sol1/.z[y]→x[y]^-2//Simplify
```

$$\left\{ \frac{1}{x[y]^2} \rightarrow \frac{C[1] - \cos[y]}{y} \right\}$$

Диференціальне рівняння eq легко інтегрується за допомогою функції DSolve. В результаті отримуємо загальний інтеграл

```
sol3=DSolve[eq,y[x],x] [[1]]
```

$$-\cos[y[x]] - \frac{y[x]}{x^2} == C[1]$$

Нарисуємо інтегральні криві tab, що задовольняють умови

```
f=sol3 [[1,1]] /. y[x] → y;
```

```
tab=Table[f==(f/. x → 1/. y → nπ/4), {n,-4,4,1}]
```

$$\left\{ -\frac{y}{x^2} - \cos[y] == 1 + \pi, \quad -\frac{y}{x^2} - \cos[y] == \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4}, \right.$$

$$-\frac{y}{x^2} - \cos[y] == \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{y}{x^2} - \cos[y] == -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{y}{x^2} - \cos[y] == -1, \quad -\frac{y}{x^2} - \cos[y] == -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{y}{x^2} - \cos[y] == -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{y}{x^2} - \cos[y] == \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{4},$$

$$-\frac{y}{x^2} - \cos[y] == 1 - \pi \left. \right\}$$

```
gr1=ContourPlot[tab//Evaluate, {x,-4,4}, {y,-8,8},
```

```
Frame → False, ContourShading → False, Axes → Automatic,
```

```
AxesLabel → {x,y}, ContourStyle → {Thick}, PlotPoints → 200]
```

Зазначимо, що точка (0,0) є особливою. Координати точок відповідають початковим умовам.

```
tab1=Table[{x,y}/. x → 1/. y → nπ/4, {n,-4,4,1}];
```

```
gr2=ListPlot[tab1, PlotStyle → Black];
```

```
Show[gr1,gr2]
```

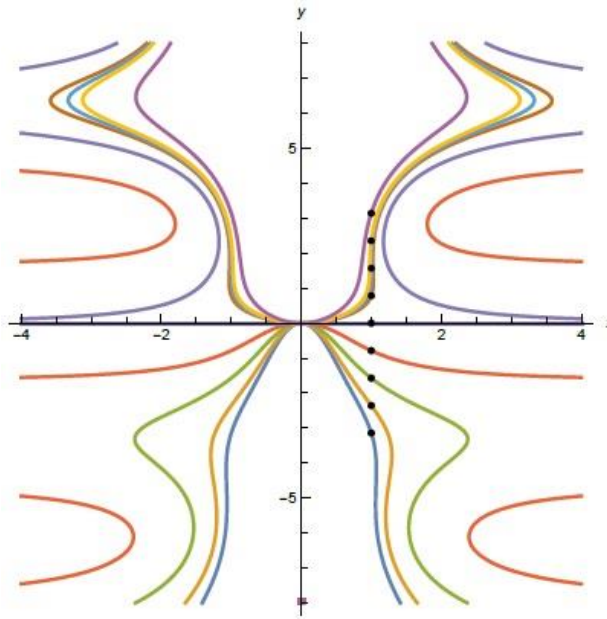


Рис. 10.32. Інтегральні криві прикладу 10.51.

Приклад 10.52. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Розв'язок. Позначимо

$$p(x, y) = x(x + 2y), \quad q(x, y) = x^2 - y^2$$

і перевіримо виконання співвідношення $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ для диференціального рівняння

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0.$$

```
Clear["Global`*"];
p[x_, y_]=x(x+2y); q[x_, y_]=x^2-y^2;
eq=D[p[x, y], y]==D[q[x, y], x]
True
```

Таким способом, дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Інтегруючи $p(x, y)$, знаходимо функцію $U(x, y)$ у вигляді

$$U[x, y] = \int p[x, y]dx + C1[y]$$

$$\frac{x^3}{3} + x^2y + C1[y]$$

Диференціюючи $U(x, y)$ по y та прирівнюючи результат до $q(x, y)$, знаходимо $C1[y]$.

```
eq1=D[U[x,y],y]==q[x,y];
sol1=DSolve[eq1,C1[y],y]//Flatten
{C1[y] -> -y^3/3 + C[1]}
```

В результаті отримуємо загальний інтеграл у вигляді

```
(Solve[(U[x,y]/.sol1/.C[1] -> C)==0,C]//Flatten)/.Rule -> Equal
{C == 1/3(-x^3 - 3x^2y + y^3)}
```

Приклад 10.53. Розв'язати диференціальне рівняння [29]

$$-ydx + (x + \alpha x^2 y^2)dy = 0, \quad \alpha - const.$$

Розв'язок. Тут

$$p(x, y) = -y, \quad N(x, y) = x + \alpha x^2 y^2.$$

Запишемо рівняння

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

і знайдемо інтегральний множник.

```
Clear["Global`*"];
p[x_, y_]=-y; q[x_, y_]=x+alpha x^2 y^2;
eq1=D[mu[x,x]]==D[p[x,y],y]-D[q[x,y],x]//Simplify
mu'[x]==-2/x
```

Розв'язком останнього рівняння є функція

```
sol1=DSolve[eq1,mu[x],x]//Flatten
{mu[x] -> C[1]/x^2}
```

Дальше, інтегруючи співвідношення

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu p(x, y),$$

знайдемо функцію $U(x, y)$, диференціалом якої є ліва частина

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

після множення на $\mu(x)$.

$$U[x, y] = \int (p[x, y]\mu[x] /. sol1 /. C[1] \rightarrow 1) dx + C1[y]$$

$$\frac{y}{x} + C1[y]$$

Невідому функцію $C1[y]$ знайдемо з рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mu q(x, y).$$

```
eq2=D[U[x,y],y]==(q[x,y]μ[x] /. sol1 /. C[1] → 1) // Simplify;
```

```
sol2=DSolve[eq2, C1[y], y] // Flatten
```

$$\left\{ C1[x] \rightarrow \frac{y^3 \alpha}{3} + C[1] \right\}$$

Тоді загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд

```
eq3=(U[x,y] /. sol2)==0
```

$$\frac{y}{x} + \frac{y^3 \alpha}{3} + C[1] == 0$$

Для перевірки знайденого розв'язку продиференціюємо рівняння $eq3$ та з отриманого рівняння і $eq3$ виключимо сталу $C[1]$.

```
eq4=eq3/.y → y[x];
```

```
eq5=D[eq4[[1]],x]==D[eq4[[2]],x];
```

```
Eliminate[{eq4,eq5},C[1]];
```

```
Solve[%[[1]], y'[x]] [[1]]
```

$$\left\{ y'[x] \rightarrow \frac{y[x]}{x(1 + x \alpha y[x]^2)} \right\}$$

Як бачимо, отримане рівняння співпадає з вихідним рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1 + \alpha xy^2)}.$$

Приклад 10.54. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x.$$

Розв'язок. Не складно показати, що функція $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком даного рівняння.

```
Clear["Global`*"];
eq=y'[x]+2y[x]e^x-y[x]^2==e^2x+e^x;
eq/.y->(e^#&)//Simplify
True
```

Тому загальний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = e^x + z.$$

```
eq1=eq/.y -> (e^#&+z[#]&)//Simplify
z[x]^2 == z'[x]
```

Отримане рівняння легко інтегрується

```
sol1=DSolve[eq1,z[x],x]//Flatten
{z[x] -> 1/(-x-C[1])}
```

Відтак, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

```
sol=y[x] -> (x+z[x]/.sol1)
y[x] -> x + 1/(-x-C[1])
```

Приклад 10.55. Проінтегруємо диференціальне рівняння Абеля першого роду (AbelODE) з нульовим інваріантом Ліувілля.

Розв'язок.

```
AbelODE = y'[x] == a0y[x]^3 + a1y[x]^2 + a2y[x] + a3;
```

Відомо [37], що якщо інваріант Ліувілля рівний нулю, то рівняння Абеля інтегрується в квадратурах.

```
Invariant = a3a0^2 + 1/3*(2a1^3/9 - a0a1a2 - a1*partial_x a0 + a0*partial_x a1);
```

Визначимо коефіцієнти для наступного рівняння Абеля

```
a0 = x^3; a1 = 3x^2; a2 = -x^-1; a3 = -2; AbelODE
y'[x] -> -2 - y[x]/x + 3x^2y[x]^2 + x^3y[x]^3
```

Його інваріант рівний нулю.

```
Invariant//Factor  
0
```

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд.

```
sol=DSolve[AbelODE,y,x]//Simplify  

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \text{Function}\left[\{x\}, -\frac{1}{x} - \frac{e^{-\frac{3x^2}{2}}}{x\sqrt{\frac{1}{3}e^{-3x^2} + C[1]}}\right] \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow \text{Function}\left[\{x\}, -\frac{1}{x} + \frac{e^{-\frac{3x^2}{2}}}{x\sqrt{\frac{1}{3}e^{-3x^2} + C[1]}}\right] \right\} \right\}$$

```

Зробимо перевірку знайденого розв'язку.

```
AbelODE/.sol//Simplify  
{True,True}
```

Диференціальні рівняння не розв'язні відносно похідної, що не містять одну із змінних x чи y .

Розглянемо рівняння $F(x, y') = 0$, яке не містить явно шукану функцію y . Якщо воно може бути розв'язане відносно x , тобто представлене у вигляді $x = \varphi(y')$, то розв'язок вихідного рівняння може бути знайдено в параметричній формі. Ввівши заміну $y' \rightarrow p$, будемо розглядати p в якості параметра. Тоді

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p \varphi'(p) dp + C.$$

Приклад 10.56. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$$

і нарисувати інтегральну криву, яка проходить через точку.

Розв'язок. Розв'язуючи рівняння відносно x та проводячи заміну $y' \rightarrow p$, отримуємо

```
Clear["Global`*"];  
eq=x-y'[x]Sqrt[y'[x]^2+1]==0;
```

```
sol=Solve[eq/.y'[x]→p,x]//Flatten
x→p√[1+p²]
```

Далі знаходимо залежності $y(p)$

```
eq1=y→∫ p D[(x/.sol),p]dp + C[1];
y→1/3√[1+p²](-1+2p²) + C[1]
```

Таким способом, загальний розв'язок має вигляд

$$x = p \sqrt{1 + p^2}, \quad y = \frac{1}{3} \sqrt{1 + p^2} (-1 + 2p^2) + C[1]$$

Знайдемо частинний розв'язок. Для цього підставимо початкову умову в загальний розв'язок та розв'яжемо систему відносно параметра p і довільної сталої $C[1]$

```
sys={sol[[1]] /.x→√2,eq1 /.y→√2/3} /.Rule→Equal;
Solve[sys,{p,C[1]}]
{{p→1,C[1]→0},{p→-i√2,C[1]→1/3(5i+√2)}}
```

Вибираємо перший (дійсний) набір розв'язків та будуємо криву, що відповідає значенню $C[1] = 0$.

```
ParametricPlot[{sol[[1,2]],eq1[[2]]}/.%,{p,-2,2}]
```

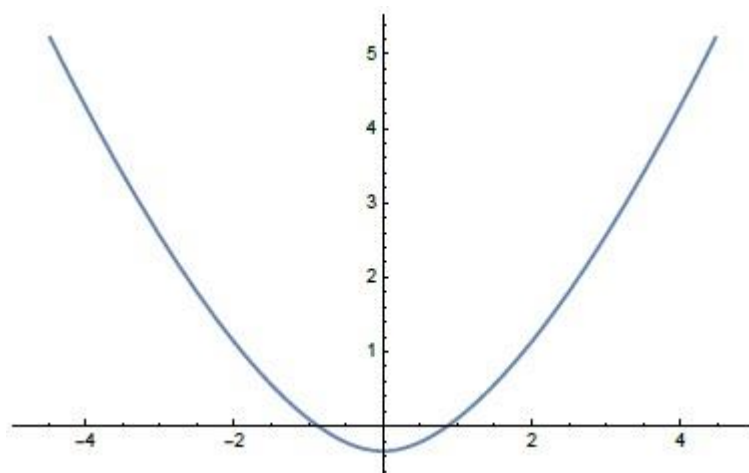


Рис. 10.33. Інтегральна крива прикладу 10.56.

Розв'язок рівняння вигляду $y = \varphi(y')$, що не містить явно незалежну змінну, також знаходиться в параметричній формі, якщо вважати y незалежною змінною, а x – функцією. Вводячи заміну $y' \rightarrow p$, отримуємо: $y = \varphi(p)$. Враховуючи співвідношення

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{p'}$$

знаходимо:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C.$$

Приклад 10.57. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y = (y' - 1)e^{y'}.$$

Розв'язок. Вводячи заміну $y' \rightarrow p$, отримуємо $y(p)$

```
Clear["Global`*"];
eq=y[x]==(y'[x]-1)Exp[y'[x]];
sol=Solve[(eq/.{y[x]->y,y'[x]->p}),y]//Flatten
{y -> e^p(-1 + p)}
```

Далі знаходимо $x(p)$

```
eq1 = x -> (Integrate[D[(y/.sol),p],p] + C[1]//Simplify)
x -> e^p + C[1]
```

Отримали загальний розв'язок в параметричній формі. Виключимо параметр p та знайдемо загальний розв'язок в явному вигляді

```
sys={sol[[1]], eq1} /. Rule -> Equal
Eliminate[sys,p];
Solve[%,y] [[1]] //Simplify
{y == e^p(-1 + p), x == e^p + C[1]}
{y -> (x - C[1])(-1 + Log[x - C[1]])}
```

Диференціальні рівняння розв'язні відносно змінних x чи y .

Якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ розв'язне відносно y чи x , то для його розв'язання зручно використовувати заміну $y' = p$, де p є допоміжним параметром. Тоді при диференціюванні вихідного рівняння отримується більш просте рівняння.

Приклад 10.58. Розв'язати рівняння

$$5y + y'^2 = x(x + y').$$

Розв'язок. Розв'яжемо дане рівняння відносно y .

```
Clear["Global`*"];
eq=5y[x]+y'[x]^2==x(x+y'[x]);
sol=Solve[(eq,y[x])]/Flatten
{y[x] -> 1/5 (x^2 + xy'[x] - y'[x]^2)}
```

Вводячи параметр $p = y'$, отримуємо наступне рівняння

```
eq1 = y[x] == (y[x]/.sol/.y'[x] -> p[x])
y[x] = 1/5 (x^2 + xp[x] - p[x]^2)
```

Далі обчислюємо похідну y' і, враховуючи співвідношення $y' = p$, отримуємо рівняння відносно p та x .

```
eq2=D[eq1[[2]],x]-p[x]==0//Simplify
(x-2p[x])(2+p'[x]) == 0
```

Розкладаючи ліву частину рівняння eq2 на множники, перепишемо його у вигляді

```
eq3=Factor[eq2[[1]]]==0
(x-2p[x])(2+p'[x]) == 0
```

Тоді маємо два розв'язки

```
sol3=Solve[eq3[[1,1]]==0,p[x]]//Flatten
sol4=DSolve[eq3[[1,2]]==0,p[x],x]//Flatten
{p[x] -> x/2}
{p[x] -> -2x + C[1]}
```

Підставляючи знайдені розв'язки в рівняння eq1, отримуємо два розв'язки вихідного рівняння

```
sol5=Solve[eq1/.sol3,y[x]]//Flatten
sol6=Solve[eq1/.sol4[[1]],y[x]]//Simplify//Flatten
{y[x] -> x^2/4}
{y[x] -> -x^2 + xC[1] - C[1]^2/5}
```

Щоб дослідити чи є серед отриманих розв'язків вихідного рівняння особливі розв'язки запишемо систему рівнянь, що визначають дискримінанту криву.

$$\text{eq7} = \{\text{eq}, D[\text{eq}[[1]] - \text{eq}[[2]], y'[x]] == 0\}$$

$$\{5y[x] + y'[x]^2 == x(x + y'[x]), -x + 2y'[x] == 0\}$$

Виключаючи з цих рівнянь y' , отримуємо

$$\text{eq8} = \text{Reduce}[\text{Eliminate}[\text{eq7}, y'[x]], y[x]]$$

$$y[x] == \frac{x^2}{4}$$

Таким способом, отримали дискримінанту криву: $y = \frac{x^2}{4}$. Нескладно переконатись в тому, що функція $y = \frac{x^2}{4}$ є розв'язком вихідного рівняння.

$$\text{eq}/.y \rightarrow \left(\frac{x^2}{4} \&\right)$$

True

Перевіримо чи дотикаються інтегральні криві кривої $y = \frac{x^2}{4}$ в кожній її точці. Для цього визначимо умови дотичності

$$\text{eq9} = \left\{ (y[x]/.\text{sol6}) == \frac{x^2}{4}, D[(y[x]/.\text{sol6}), x] == D\left[\frac{x^2}{4}, x\right] \right\}$$

$$\left\{ -x^2 + xC[1] - \frac{C[1]^2}{5} == \frac{x^2}{4}, -2x + C[1] == \frac{x}{2} \right\}$$

Спрощуючи отриману систему, знаходимо

$$\text{Reduce}[\text{eq9}, C[1]]$$

$$C[1] == \frac{5x}{2}$$

Таким чином, умову дотичності задовольняють пари чисел $(x, C[1])$, зв'язані співвідношенням $C[1] = \frac{5}{2}x$. Це означає, що в будь-якій точці (x_0, y_0) кривої $y = \frac{x^2}{4}$ до неї дотикається одна з кривих сімейства

$$y = -x^2 + xC[1] - \frac{C[1]^2}{5},$$

для якої $C[1] = \frac{5}{2}x_0$. Таким способом, пряма $y = \frac{x^2}{4}$ складається з точок неєдиності і є особливою інтегральною кривою (рис. 10.34).

```
tab=Table[sol6[[1,2]]/.C[1] → i,{i,-14,14,2}];
gr1=Plot[tab,{x,-6,6}, PlotRange→{-10,8}, AxesLabel→{x,y}];
gr2=Plot[x^2/4,{x,-6,6} PlotStyle→{Black,Dashed,Thickness[0.01]},
PlotLabel → "y=x^2"];
Show[gr1,gr2]
```

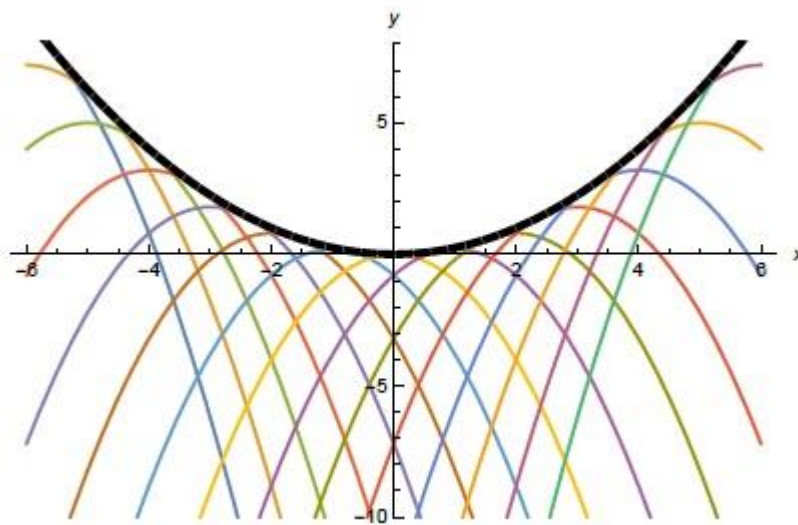


Рис. 10.34. Графіки розв'язків прикладу 10.58.

Приклад 10.59. Розв'язати рівняння

$$y'y = y^3x - 1.$$

Розв'язок. Розв'язуючи дане рівняння відносно y , отримуємо *рівняння Клеро*.

$$y = xy' + g(y').$$

```
Clear["Global`*"];
eq=y[x]==xy'[x]-Log[y'[x]];
sol=Solve[(eq,y'[x]→C[1],y[x]]//Flatten
{y[x] → xC[1] - Log[C[1]]}
```

Щоб знайти огинаючу отриманого сімейства прямих, диференціюємо рівняння eq, в якому y' заміна на $C[1]$, по $C[1]$ і розв'язуємо отримане рівняння відносно $C[1]$.

```
eq1=D[eq/.y'[x] → C[1],C[1]]
sol1=Solve[eq1,C[1]]//Flatten
0 == x -  $\frac{1}{C[1]}$ 
 $\{C[1] \rightarrow \frac{1}{x}\}$ 
```

Підставляючи знайдене значення $C[1]$ в розв'язок `sol`, знаходимо рівняння огинаючої

```
y[x_]=y[x]/.sol/.sol1
1 - Log $\left[\frac{1}{x}\right]$ 
```

Очевидно, що це огинаюча сімейства прямих

$$y = xC[1] - \ln C[1]$$

і тому особливий розв'язок рівняння `eq`. Відтак, інтегральними кривими вихідного рівняння є парабола $y = 1 + \ln x$ і різноманітні дотичні до неї. Крім того, інтегральною кривою буде всяка крива, "склеєна" з дуги параболи АВ і дотичних до неї.

```
x1=1; x2=7/3; (* абсциси x точок A та B*)
y1[x_]=y[x]/.sol/.C[1] → 1/x1 (* дотична в точці A*)
x
y2[x_]=y[x]/.sol/.C[1] → 1/x2 (* дотична в точці B*)
 $\frac{3x}{7} + \text{Log}\left[\frac{7}{3}\right]$ 

Plot[{y[x],y1[x],y2[x]}, {x,-1,4},
PlotStyle → {{Thickness[0.01],GrayLevel[0.65]}}, {Black,Dashed},
{Black,Dashed}},
Ticks→None, AxesLabel→{"x","y"}, LabelStyle→Directive[14],
PlotRange → {-2,3.5}, Epilog → {Text[Style["A",Italic,16],
{x1,y1[x1]-0.4}],
Text[Style["B",Italic,16], {x2,y2[x2]-0.4}]}];
Graphics[{PointSize[Medium], Point[{x1,y1[x1]}],
Point[{x2,y2[x2]}]}];
Show[%%, %]
```

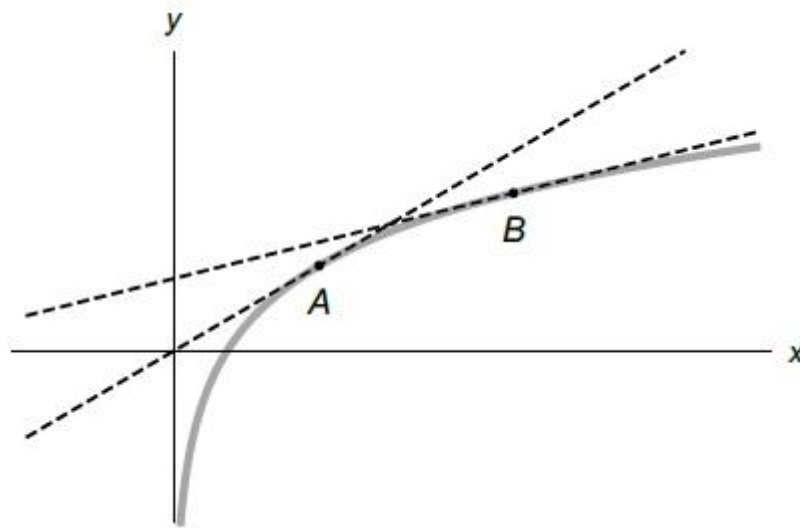


Рис. 10.35. Графіки інтегральної кривої прикладу 10.59.

Приклад 10.60. Розв'язати рівняння

$$2y'^2(y - xy'^2) = 1.$$

Розв'язок. Розв'язуючи дане рівняння відносно y , отримуємо *рівняння Лагранжа*.

$$y = f(y')x + g(y') \quad (f(y') \not\equiv y').$$

Це рівняння також розв'язується методом введення параметра $p = y'$. При цьому побудова його загального розв'язку в параметричній формі $x = x(p)$, $y = y(p)$ зводиться до інтегрування деякого лінійного рівняння.

```
Clear["Global`*"];
eq1=2y'[x]^2(y[x]-xy'[x]^2)==1;
sol1=Solve[(eq1,y[x]]//Flatten;
eq2=y[x]==(y[x]/.sol1//Apart)
y[x]==1/(2y'[x]^2)+xy'[x]^2
```

Робимо заміну $y' \rightarrow p$, $x \rightarrow x(p)$ і диференціюємо рівняння eq2.

```
eq3=D[(eq2[[1]]/.x -> x[p]),p]==D[(eq2[[2]]/.y'[x] -> p /.
x -> x[p]), p]
x'[p]y'[x[p]]== -1/p^3+2p x[p]+p^2x'[p]
```

Виконуючи в лівій частині eq3 заміну $y' \rightarrow p$, отримуємо лінійне відносно x рівняння, яке легко інтегрується

$$\text{eq4} = \text{eq3} /. y'[x[p]] \rightarrow p // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{p^3} + p x^{[p]} == p (2 x[p] + p x'[p])$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$\text{sol4} = \text{DSolve}[\text{eq4}, x[p], p] // \text{Flatten} // \text{Simplify}$$

$$\left\{ x[p] \rightarrow \frac{2 - 3p + 6p^3 C[1]}{6(-1 + p)^2 p^3} \right\}$$

Підставляючи знайдену функцію $x(p)$ в рівняння eq2, з врахуванням $y' \rightarrow p$, отримаємо

$$\text{sol5} = \text{Solve}[\text{eq2} /. y'[x] \rightarrow p /. y[x] \rightarrow y[p] /. x \rightarrow x[p] /. \text{sol4}, y[p]]$$

$$[[1]]$$

$$\left\{ y[p] \rightarrow \frac{3 - 4p + 6p^4 C[1]}{6(-1 + p)^2 p^3} \right\}$$

В результаті отримали загальний розв'язок вихідного рівняння в параметричній формі sol4, sol5.

Зробимо перевірку

$$\text{eq1} /. \{y'[x] \rightarrow p, y[x] \rightarrow y[p], x \rightarrow x[p]\} /. \text{sol4} /. \text{sol5} // \text{Simplify}$$

$$\text{True}$$

10.9. Нелінійних диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо низку прикладів нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, які інтегруються в квадратурах.

Приклад 10.61. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y'')^2 + xy'' - x^3 = 0.$$

Розв'язок. Розв'язавши рівняння відносно $y''(x)$, отримаємо

$$\text{Clear}["\text{Global`*}"];$$

$$\text{eq} = y''[x]^2 + x y'' - x^3 == 0;$$

$$\text{sol} = \text{Solve}[\text{eq}, y''[x]]$$

$$\left\{ \left\{ y''[x] \rightarrow \frac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 - 4x^3}) \right\}, \quad \left\{ y''[x] \rightarrow \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 - 4x^3}) \right\} \right\}$$

Оскільки рівняння має вигляд $y'' = f(x)$, то його розв'язок знаходимо завдяки двом послідовним інтегруванням. Виконаємо цю операцію для першої вітки

```
y[2][x_]=y'[x]/.Solve[eq,D[y[x],{x,2}]][[1]];
yy=Table[y[i][x_]=∫y[i+1][x]dx+C[i+1],{I,1,0,-1}];
y[0][x]//Simplify

$$-\frac{x^3}{12} - \frac{(1-4x)^2\sqrt{x^2-4x^3}}{480x} - \frac{(-1+4x)^3\sqrt{x^2-4x^3}}{1120x} + C[1] + xC[2]$$

```

Функція DSolve також легко знаходить розв'язок диференціального рівняння даного виду у вигляді двох функцій.

```
sol1=DSolve[eq,y[x],x]//Simplify

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{x^3}{12} - \frac{(1-4x)^2(1+3x)\sqrt{x^2-4x^3}}{840x} + C[1] + xC[2] \right\} \right\}$$


$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{x^3}{12} + \frac{(1-4x)^2(1+3x)\sqrt{x^2-4x^3}}{840x} + C[1] + xC[2] \right\} \right\}$$

```

Виконаємо перевірку (для першої вітки) знайденого розв'язку за допомогою DSolve та $y[0][x]$.

```
y[0][x]-sol1[1,1,2]//Simplify
```

Аналогічно можна побудувати функцію $y[0][x]$ для другої вітки розв'язку та показати, що вона співпадає з $sol1[[2]]$.

Приклад 10.62. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' + e^{y''} = 0.$$

Розв'язок. Оскільки дане рівняння містить лише похідні від функції $y(x)$, понизимо порядок диференціального рівняння ввівши таку заміну

$$y''(x) \rightarrow z[x], \quad y'''(x) \rightarrow z'[x].$$

В результаті отримуємо рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$.

```
Clear["Global`*"];
eq=y''''[x]+Exp[y''[x]]==0;
```

```

r1={y''[x]→z[x],y'''[x]→z'[x]};
eq1=eq/.r1
ez[x]+z'[x]==0

```

Загальний розв'язок цього рівняння легко знайти.

```

sol1=DSolve[eq1,z[x],x]//Flatten
{z[x]→-Log[x-C[1]]}

```

Після цього, замінюючи z на y'' , отримаємо диференціальне рівняння другого порядку вигляду

```

eq2=y''[x]==(z[x]/.sol1[[1]])
{y''[x]==-Log[x-C[1]]}

```

Оскільки праві частини рівняння $eq2$ залежать лише від змінної x , розв'язок цього рівняння зводиться до двократному інтегруванню виразу $-\text{Log}[x - C[1]]$. В результаті отримуємо загальний розв'язок рівняння

```

sol2=DSolve[eq2,y[x],x]//Flatten//Simplify
{y[x]→C[2]+xC[3]+ $\frac{1}{4}(3x^2-2xC[1]-3C[1]^2-2(x-C[1])^2\text{Log}[x-C[1]])$ }

```

Приклад 10.63. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y''')^2 + (y'')^2 - 1 = 0.$$

Розв'язок. Визначивши підстановку

$$y''(x) \rightarrow z[x], \quad y'''(x) \rightarrow z'[x],$$

отримуємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$.

```

Clear["Global`*"];
eq=y'''[x]^2+y''[x]^2-a^2==0;
eq1=eq/.{y''[x]→z[x],y'''[x]→z'[x]}
-a^2+z[x]^2+z'[x]^2==0

```

Перетворимо отримане рівняння, розділивши його ліву та праву частини на $\sqrt{1+z[x]^2}$.

$$eq2 = \frac{eq1[[1]]}{eq1[[2]]} == 1$$

$$\frac{z[x]z'[x]}{\sqrt{1+z[x]^2}} == 1$$

Тепер очевидно, що ліва частина останнього рівняння є точною похідною від функції $\sqrt{1 + z[x]^2}$. Дійсно,

$$\frac{\int \text{eq2}[[1]]dx}{\sqrt{1+z[x]^2}}$$

Тому функцію $z(x)$ можна легко знайти.

$$\left\{ \begin{array}{l} z[x] \rightarrow -\frac{a \tan [x - C[1]]}{\sqrt{\sec [x - C[1]]^2}}, \quad z[x] \rightarrow \frac{a \tan [x - C[1]]}{\sqrt{\sec [x - C[1]]^2}}, \quad z[x] \rightarrow -\frac{a \tan [x + C[1]]}{\sqrt{\sec [x + C[1]]^2}}, \\ z[x] \rightarrow \frac{a \tan [x + C[1]]}{\sqrt{\sec [x + C[1]]^2}} \end{array} \right\}$$

Тоді для вихідної функції $y(x)$ маємо два рівняння

$$y''[x] == -\frac{a \tan[x - C[1]]}{\sqrt{\sec[x - C[1]]^2}} \quad y''[x] == \frac{a \tan[x - C[1]]}{\sqrt{\sec[x - C[1]]^2}}$$

Відтак отримані в результаті рівняння eq3 та eq4 легко інтегруються.

Знайдемо, наприклад, розв'язок рівняння eq3.

$$\left\{ y[x] \rightarrow C[2] + xC[3] + \frac{a \tan [x - C[1]]}{\sqrt{\sec [x - C[1]]^2}} \right\}$$

Приклад 10.64. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y'')^2 + (y')^2 - (y')^4 = 0.$$

Розв'язок. Ввівши параметричне представлення $y' \rightarrow \operatorname{ch} \tau$, знаходимо залежність $x(t)$, й по тому і залежність $y(t)$.

```
Clear["Global`*"];
eq=y''[x]^2+y'[x]^2-y'[x]^4==0;
```

```
eq1=eq/.y'[x]→Cosh[τ];
sol1=Solve[eq1, y'[x]]//Flatten//FullSimplify[#, Sinh[τ]>0]&//
TrigReduce
{y''[x]→-1/2 Sinh[2τ], y''[x]→1/2 Sinh[2τ]}
```

Так як $d(y') = y''dx$, то отримуємо

$$d(\operatorname{ch} \tau) = \pm \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\tau) dx$$

чи

```
eq2 = x == c1 + ∫ D[Cosh[τ], τ] / sol1[[2]] dτ // Simplify
x == 2 ArcTan[Tanh[τ/2]] + c1
```

Похідна правої частини останнього рівняння має вигляд

```
D[eq2[[2]], τ] // Simplify;
% // TraditionalForm
sech(τ)
```

Так як $dx = \operatorname{sech}(\tau) d\tau$ та $d(y) = y'dx$, то отримуємо $d(y) = \operatorname{ch} \tau \operatorname{sech}(\tau) d\tau$

чи

```
eq3 = y == c2 + ∫ Cosh[τ] D[eq2[[2]], τ] dτ // FullSimplify
y == τ + c2
```

Таким способом, рівняння eq2 та eq3 дають параметричні рівняння загального розв'язку.

Зауваження. Якщо ввести підстановку $y' = -\operatorname{ch} \tau$, то в результаті знову ж отримаємо вираз sol1.

Приклад 10.65. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y'')^2 + a^2 y' y'' - b^2 = 0.$$

Розв'язок. Вводимо заміну $y'' \rightarrow p$ і розв'яжемо рівняння відносно y' .

```
Clear["Global`*"];
eq=y''[x]^2+a^2 y'[x] y''[x]-b^2==0;
sol1=Solve[eq1, y'[x]→p, y'[x]]//Flatten
```

$$\left\{y'[x] \rightarrow \frac{b^2 - p^2}{a^2 p}\right\}$$

Таким чином, маємо параметричне представлення

$$y' \rightarrow \frac{b^2 - p^2}{a^2 p}, \quad y'' \rightarrow p.$$

У відповідності з формулою $d(y') = y''dx$, отримуємо

$$\begin{aligned} \text{eq1} = x &== \int \frac{D[y'[x]/.sol]}{p} dp + C[1]; \\ \text{sol1} &= \text{Solve}[\text{eq1}, x] // \text{Flatten} \\ \left\{x \rightarrow \frac{b^2 + 2a^2 p^2 C[1] - 2p^2 \text{Log}[p]}{2a^2 p^2}\right\} \end{aligned}$$

Відповідна залежність $y(p)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \text{eq2} = y &== \int \frac{1}{p} (y'[x]/.sol) D[y'[x]/.sol, p] dp + C[2]; \\ \text{sol2} &= \text{Solve}[\text{eq2}, y] // \text{Flatten} \\ \left\{y \rightarrow \frac{b^4 + 3p^4 + 3a^4 p^3 C[2]}{3a^4 p^3}\right\} \end{aligned}$$

Приклад 10.66. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y'')^2 - 4xy'' + 4y' = 0.$$

Розв'язок. Вводимо заміну $y'' \rightarrow p$ і розв'яжемо рівняння відносно y' .

$$\begin{aligned} &\text{Clear}["\text{Global`*}"]; \\ &\text{eq} = y''^2 [x] - 4xy'' [x] + 4y' [x] == 0; \\ &\text{sol} = \text{Solve}[\text{eq1}/.y'' [x] \rightarrow p, y' [x]] // \text{Flatten} \\ &\left\{y' [x] \rightarrow \frac{1}{4}(-p^2 + 4px)\right\} \end{aligned}$$

У відповідності з формулою $d(y') = y''dx$, отримуємо

$$\begin{aligned} \text{eq1} &= \text{Dt}[\text{sol}[[1, 2]]] == p \text{Dt}[x] // \text{Simplify} \\ p \text{Dt}[p] &== 2x \text{Dt}[p] \end{aligned}$$

Розв'язуючи отримане рівняння, знаходимо

$$\begin{aligned} &\text{sol1} = \text{DSolve}[\text{eq1}/. \text{Dt}[p] \rightarrow p] \\ &\left\{\{q \rightarrow 0\}, \quad \left\{x \rightarrow \frac{p}{2}\right\}\right\} \end{aligned}$$

З першого розв'язку, знаходимо $dp = 0$ чи $p = c_1 - \text{const}$

$$\begin{aligned} \rho1 &= p \rightarrow c_1; \\ \text{eq2} &= y'[x] == \text{sol}[[1, 2]] /. \rho1 \\ y'[x] &\rightarrow \frac{1}{4}(4xc_1 - c_1^2) \end{aligned}$$

З цього рівняння знаходимо функцію y

$$\begin{aligned} \text{sol2} &= \text{DSolve}[\text{eq2}, y[x], x] /. C[1] \rightarrow c_2 // \text{Flatten} \\ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{x^2 c_1}{2} - \frac{x c_1^2}{4} + c_2 \right\} \end{aligned}$$

З другого розв'язку знаходимо $x = p/2$ та

$$\begin{aligned} \text{sol3} &= y'[x] \rightarrow (\text{sol}[[1, 2]] /. \text{sol1}[[2]]) // \text{Simplify} \\ y'[x] &\rightarrow \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

Звідси $dy = y' dx$ чи

$$dy = \left(\frac{p}{2}\right)^2 dx = \frac{p^2}{4} d\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{8} dp$$

чи

$$\begin{aligned} \rho2 = y[x] &\rightarrow \int \frac{p^2}{8} dp + c \\ y[x] &\rightarrow c + \frac{p^3}{24} \end{aligned}$$

Знаходимо з другого значення sol1 величину p і підставляємо в $\rho2$

$$\begin{aligned} \text{Solve}[\text{sol1}[[2]] /. \text{Rule} \rightarrow \text{Equal}, p] &[[1]] \\ \rho3 &= \rho2 /. \% \\ \{p \rightarrow 2x\} \\ y[x] &\rightarrow \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Таким способом, всі розв'язки рівняння eq , описуються формулами sol2 та sol3 . Застосовуючи безпосередньо функцію DSolve , знаходимо

$$\begin{aligned} &\text{DSolve}[\text{eq}, y[x], x] /. \{e^{C[1]} \rightarrow c_3, e^{2C[1]} \rightarrow c_3^2, C[2] \rightarrow c_2\} // \\ &\text{Simplify}[\#, c_1 \in \text{Reals}] \& \\ &\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow c_2 - \frac{1}{1+x} x \left(1 + x^2 - (1+x)c_3^2 + 2\sqrt{-(1+x)^2 c_3^2} + x \left(2 + \sqrt{-(1+x)^2 c_3^2} \right) \right) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

$$\left\{ y[x] \rightarrow c_2 + \frac{1}{1+x} x \left(-1 - x^2 + (1+x)c_3^2 + 2\sqrt{-(1+x)^2 c_3^2} + x \left(-2 + \sqrt{-(1+x)^2 c_3^2} \right) \right) \right\},$$

$$\{y[x] \rightarrow c_2 + x(1+x-c_3)(-1+c_3)\}, \quad \{y[x] \rightarrow c_2 - x(1+c_3)(1+x+c_3)\}$$

тобто ми отримали загальний розв'язок sol2, що легко показати, якщо ввести заміну $c_3 \rightarrow 1 + \frac{c_1}{2}$.

Приклад 10.67. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') - 4xyy' = 0.$$

Розв'язок. Дане рівняння є однорідним відносно y , y' та y'' з порядком однорідності $m = 2$. Тому для його розв'язання використовуємо підстановку $y \rightarrow e^{\int z(x)dx}$, де $z(x)$ – нова невідома функція.

```
Clear["Global`*"];
eq=(x^2+1)*(y'[x]^2-yy''[x])-4xyy'[x]==0;
eq1=eq1/.y->(Exp[Integrate[z[#],#]&])/Flatten
e^2 Integrate[z[x],x](xz[x]+(1+x^2)z'[x]) == 0
```

Скорочуючи на відмінний від нуля експоненціальний множник, отримуємо відносно $z(x)$ диференціальне рівняння першого порядку.

```
eq2=(eq1[[1,2]])==0
xz[x]+(1+x^2)z'[x]==0
```

Розв'язок останнього рівняння знаходимо таким способом

```
sol2=DSolve[eq2,z[x],x]/Flatten
{z[x] -> C[1]/Sqrt[1+x^2]}
```

Тоді відносно шуканої функції $y(x)$ отримуємо рівняння

```
eq3=y'[x]==y[x]z[x]/.sol2
y'[x]==C[1]y[x]/Sqrt[1+x^2]
```

Проінтегрувавши дане рівняння отримуємо

```
sol3=DSolve[eq3,y[x],x]/Flatten/FullSimplify
{y[x] -> e^ArcSinh[x]C[1]C[2]}
```

Очевидно, розв'язок $y(x) = C = \text{const}$ відповідає випадку $C[1] = 0$. Так що при скорочення експоненціального множника в eq1 втрати розв'язку не відбулось.

Приклад 10.68. Розв'язати диференціальне рівняння

$$yy' + xyu'' - xy'^2 - x^3 = 0.$$

Розв'язок. Щоб перевірити, що дане рівняння є узагальнено-однорідним, проведемо в ньому заміну

$$x \rightarrow \lambda x, \quad y \rightarrow \lambda^k y, \quad y^{(n)} \rightarrow \lambda^{k-n} y^{(n)}.$$

Для цього введем правила заміни $r1$, $r2$ та $r3$ [28] і підставимо їх в дане рівняння

```
Clear["Global`*"];
eq=y[x]y'[x]+xyu''[x]-xy'[x]^2-x^3==0;
(* заміна x → λx *)
r1 = a_.x^n. ↦ a(xλ)^n;
(* обернена заміна λx → x в аргументах функції *)
r2 = f_[xλ]^m. ↦ f[x]^m;;
(* заміна функцій і її похідних *)
r3 = {y[x] → λ^k y[x], D[y[x], {x, n_}] ↦ λ^{k-n} D[y[x], {x, n}]};
eq1=eq/.r1/.r2/.r3
-λ^3 λ^3 + λ^{-1+2k} y[x] y'[x] - x λ^{-1+2k} y'[x]^2 + x λ^{-1+2k} y[x] y''[x] == 0
```

Очевидно, рівняння eq є узагальнено-однорідним, причому $k = 2$, $m = 3$. Дійсно, підставляючи в ліву частину eq1 значення $k = 2$ і розкладаючи її на множники, отримуємо

```
eq1[[1]]/.k → 2//Factor
-λ^3 (x^3 - y[x]y'[x] + xy'[x]^2 - xy[x]y''[x])
```

Для пониження порядку узагальнено-однорідного рівняння eq використовуємо заміну $x \rightarrow e^t$, $y \rightarrow u(t)e^{kt}$ при $k = 2$, де t – нова незалежна змінна, а $u(t)$ – нова шукана функція.

```
r4 = {y[x] → u[t]Exp[2t], D[y[x], {x, n_}]:> Next[D[#, t]/Exp[t]&, u[t]Exp[2t], n]};
r5 = a_.x^m. ↦ aE^{mt};
```

```
eq2=(eq1/.r4/.r5//Factor)==0
e3t(-1-u'[t]2+u[t]u''[t]) == 0
```

Після скорочення на e^{3t} , отримаємо рівняння вигляду $F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, яке не містить явно незалежну змінну t і розв'яжемо відносно старшої похідної $u''(t)$.

```
eq3=eq2[[1,2]]==0;
sol3=Solve[eq3,u''[t]]//Flatten;
eq4=u''[t]==(u''[t]/.sol3)
u''[t]==(1+u'[t]2)/u[t]
sol4=(DSolve[eq4,u[t],t]//Flatten)/.{C[1]→Log[c1],
C[2]→Log[c2]}//FullSimplify[#,c2>0]&
{u[t]→(e-tc1(e2(t+Log[c2])c1+c12)c2-c1)/2c12, u[t]→(1/2)(e-tc1c2-c1/c12+etc1c2c1)}
```

Відтак, загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд $x = e^t$, sol4. Знайдемо t з рівняння $x = e^t$ і підставимо в рівняння $y = u(t)e^{2t}$. В результаті знайдемо загальний розв'язок у вигляді

```
eq5=y[x]==e2tu[t]/.sol4[[1]]/.t→Log[x]//FullSimplify[#,x>0]&
y[x]==(1/2)x2(xc2)-c1(1+(xc2)2c1/c12)
eq6=y[x]==e2tu[t]/.sol4[[2]]/.t→Log[x]//FullSimplify[#,x>0]&
y[x]==(1/2)((xc2)-c1/c12+(xc2)c1)
```

Приклад 10.69. Розв'язати диференціальне рівняння

$$yy'' - y'^2 = y'.$$

Розв'язок. Це автономне диференціальне рівняння другого порядку, яке можна звести до рівняння в точних похідних.

```
eq=y[x]y' '[x]-y'[x]2==y'[x]
```

Дійсно, домножуючи отримане рівняння на інтегруючий множник $\frac{1}{y[x]^2}$, отримуємо рівняння в точних похідних.

$$\text{eq1} = \frac{1}{y[x]^2} \text{eq}[[1]] == \frac{1}{y[x]^2} \text{eq}[[2]]$$

$$\frac{-y'[x]^2 + y[x]y''[x]}{y[x]^2} == \frac{y'[x]}{y[x]^2}$$

Загальний інтеграл рівняння eq2 має вигляд

$$\text{eq2} = \int \text{eq1}[[1]] dx == \int \text{eq1}[[2]] dx + c_1$$

$$\frac{y'[x]}{y[x]} == c_1 - \frac{1}{y[x]}$$

Рівняння eq2 є лінійним рівнянням першого порядку. Проінтегруймо його.

```
sol1=Solve[eq2,y'[x]]//Flatten
{y'[x] -> -1 + c1 y[x]}
sol1=DSolve[sol1/.Rule->Equal,y[x],x]/.C[1]->c2//Flatten
{y[x] -> 1/c1 + e^{xc1} c2}
```

Отримали загальний розв'язок рівняння eq.

10. 10. Різницевий метод. Апроксимація, стійкість, збіжність

Розглянемо крайову задачу: потрібно знайти на відрізку $[0,1]$ функцію $u(x)$ таку, що

$$\begin{aligned} u''(x) + p(x)u'(x) - q(x)u(x) &= f(x), \\ u(0) &= \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1, \end{aligned} \quad (10.25)$$

$x \in [0,1]$, функції $p(x)$, $q(x) > 0$, $f(x)$ задані на $[0,1]$; γ_0 , γ_1 – задані значення. Відомо, що така крайова задача має розв'язки [22].

Для чисельного розв'язку крайової задачі (10.24), задамо натуральне число n і розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на n рівних відрізків точками (вузлами) $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. Довжина кожного відрізка рівна $h = (1 - 0)/n$. Така множина точок називається *сіткою* (одновимірною сіткою) на даному інтервалі. Вузли сітки x_0 та x_n називаються *граничними вузлами*, решта вузлів називаються *внутрішніми*.

Функція, визначена на відрізку, називається *сітковою функцією*. Для функції $\varphi(x)$, визначеної на відрізку $[0,1]$, через $\tilde{\varphi}$ позначимо *звуження* функції $\varphi(x)$ на множину вузлів й отримаємо сіткову функцію $\{\varphi(x_0)$,

$\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$, при цьому вузли не вказуємо і сіткова функція записується як вектор.

Введемо норму сіткової функції, як мінімальне за модулем значення сіткової функції.

Під *числовим розв'язком* крайової задачі (10.25) будемо розуміти сіткову функцію $y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$, таку, що y_i близькі $u(x_i)$ для всіх i , де $u(x)$ – аналітичний розв'язок крайової задачі (10.25), зазвичай, невідомий. Покажемо, як знайти такий розв'язок задачі (10.25) та пояснимо ті вимоги, які приводять до потрібного числового розв'язку задачі (10.25).

Розв'язуємо задачу (10.25) різницевим методом. Запишемо рівняння (10.25) для кожного внутрішнього вузла сітки і граничні умови:

$$\begin{aligned} u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) - q(x_i)u(x_i) &= f(x_i), \\ u(0) &= \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1, \end{aligned} \quad (10.26)$$

де $i = 1, 2, \dots, n-1$. Отримали систему рівнянь відносно $u(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, однак невідомо як таку систему розв'язувати, оскільки в системі є значення похідних невідомої функції. Перетворимо систему (10.26).

Виразимо похідні функції $u(x)$ у внутрішніх вузлах через значення функції $u(x)$ у вузлах за наступними формулами:

$$\begin{aligned} u'(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} - A_i h^2, \\ u''(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - B_i h^2, \end{aligned}$$

константи A_i, B_i містять похідні функції $u(x)$ в деяких проміжних точках (див. залишковий член ряду Тейлора в формі Лагранжа). Замінімо похідні в (10.26) за цими формулами, отримаємо

$$\begin{aligned} m_i &\equiv \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + p_i \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} - \\ & q_i u(x_i) + Q_i h^2 = f_i, \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$u(0) = \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1, \quad (10.27')$$

де $Q_i = -(A_i + B_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Система (10.26) (10.27') називається *різницевою диференціальною задачею*.

Розглянемо дві сіткові функції, визначені на внутрішніх вузлах: для розв'язку $u(x)$ крайової задачі позначимо через $L\tilde{u}$ сіткову функцію $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$, а через f сіткову функцію $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})) = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$. Через $l\tilde{u}$ позначимо сіткову функцію на граничних вузлах $(u(0), u(1))$. Іншими словами, оператор l ставить у відповідність сітковій функції її значення на граничних вузлах. Нехай вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$. Тоді різницева диференціальна задача може бути записана у вигляді

$$L\tilde{u} = f, \quad l\tilde{u} = \gamma. \quad (10.27^*)$$

Дійсно, такі рівності векторів записані по координатно приводять до системи (10.27'), (10.27*).

Розглянемо ще одну систему (по аналогії з (10.27), (10.27')):

$$t_i \equiv \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = f_i, \quad (10.28)$$

$$y_0 = \gamma_0, \quad y_n = \gamma_1, \quad (10.28')$$

з $i = 1, 2, \dots, n-1$. Це лінійна система, що складається з $n+1$ рівняння відносно $n+1$ невідомого $y_0, y_1, \dots, y_n$. Система (10.28), (10.28'), називається *різницевою схемою диференціальною задачею* (10.27), (10.27').

Нехай $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ сіткова функція розв'язку системи (10.28'), (10.28*). Через $L_h y$ позначимо сіткову функцію на внутрішніх вузлах, що складається з лівих частин (10.28): $(t_0, t_1, \dots, t_n)$. Через $l_h y$ позначимо сіткову функцію на граничних вузлах (y_0, y_n) . Цей оператор співпадає з $l: l = l_h$. Тоді різницева схема (10.28'), (10.28*) може бути записана у вигляді

$$L_h \tilde{u} = f, \quad l_h \tilde{u} = \gamma. \quad (10.28^*)$$

Не дивлячись на те, що рівняння систем (10.27), (10.27') та (10.28), (10.28') відрізняються на малу величину порядку h^2 близькості розв'язків цих систем потрібно доводити. Лише після цього розв'язок $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ приймається в якості чисельного розв'язку крайової задачі (10.25).

Спочатку покажемо, що система (10.28), (10.28') має розв'язок. Перепишемо систему (10.28), (10.28') в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} y_0 &= \gamma_0, \\ y_{i-1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \right) - y_i \left(\frac{2}{h^2} - q_i \right) + y_{i+1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \right) &= f_i, \\ y_n &= \gamma_1, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$. Оскільки матриця системи трьох діагональна, то розв'язуватимемо систему методом прогонки. Спочатку перевіримо виконання умови теореми про коректності прогонки – чи є матриця системи матрицею з перевагою діагональних елементів, тобто чи справджується наступна нерівність для всіх i :

$$\left| \frac{2}{h^2} + q_i \right| > \left| \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \right| + \left| \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} \right|.$$

Перепишемо нерівність у вигляді:

$$|2 + h^2 q_i| > \left| 1 - h \frac{p_i}{2} \right| + \left| 1 + h \frac{p_i}{2} \right|.$$

Таким чином система (10.28), (10.28') має розв'язок.

Дослідимо отриманий розв'язок $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.

Апроксимація. Будемо говорити, що різницева схема (10.28*) апроксимує диференціальну задачу (10.27*) з k -им порядком відносно h , якщо на розв'язку $u(x)$ задачі (10.25) виконується

$$\|L\tilde{u} - L_h\tilde{u}\| \leq D h^k,$$

де D – стала.

Позначимо через Q сіткову функцію $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$, визначену на внутрішніх вузлах. Тоді на розв'язку $u(x)$ для лівих частин систем (10.27*), (10.28*) виконується рівність

$$L\tilde{u} = L_h\tilde{u} + Qh^2. \quad (10.29)$$

Звідси отримуємо, що

$$\|L\tilde{u} - L_h\tilde{u}\| = \|Qh^2\| \leq D h^k,$$

де $D = \|Q\|$.

Відтак різницева схема (10.28*) апроксимує диференціальну задачу (10.27*) з 2-им порядком відносно h .

Стійкість. Різницева схема (10.28*) стійка, якщо для всіх досить малих h і довільних сіткових функцій ξ та η різницева схема

$$L_h z = \xi, \quad l_h z = \eta \quad (10.30)$$

має єдиний розв'язок z й справедлива оцінка

$$\|z\| \leq C_1 \|\xi\| + C_2 \|\eta\|, \quad (10.31)$$

де C_1, C_2 – сталі, що не залежать від ξ та η .

Стійкість означає, що малі зміни вільних членів системи призводять до малих змін розв'язку і ця властивість не залежить від розмірності системи (тобто h). Дійсно, нехай є два розв'язки цієї системи отримані в результаті зміни вільних членів (заокруглення): $L_h z_1 = \xi_1, l_h z_1 = \eta_1, L_h z_2 = \xi_2, l_h z_2 = \eta_2$. Звідси, відніманням частин рівностей, отримаємо

$$L_h(z_1 - z_2) = \xi_1 - \xi_2, \quad l_h(z_1 - z_2) = \eta_1 - \eta_2.$$

Тут ми вважаємо лінійність операторів. Застосуємо (10.31) до такої системи:

$$\|z_1 - z_2\| \leq C_1 \|\xi_1 - \xi_2\| + C_2 \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

Звідси отримуємо, що якщо ξ_1 та ξ_2, η_1 та η_2 близькі, то й z_1 та z_2 також близькі.

Можна довести, що різницева (10.28*) схема стійка.

Збіжність. Розв'язок різницевої схеми $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ збігаються до розв'язку $u(x)$ диференціальної крайової задачі при $h \rightarrow 0$ з k -им порядком відносно h , якщо

$$\|y - \tilde{u}\| < D_1 h^k,$$

D_1 – стала.

Різницева схема (10.28*) володіє властивістю збіжності. Доведемо цю властивість. Різницева схема (10.28*) апроксимує диференціальну задачу з 2-им порядком відносно h , точніше для різницевої схеми виконується рівність (10.29). Тому диференціальну різницеву задачу (10.27*) на розв'язок задачі (10.25) можна записати в такому вигляді

$$L_h \tilde{u} + Qh^2 = f, \quad l_h \tilde{u} = \gamma.$$

Для розв'язку у різницевої схеми виконуються рівності (10.28*):

$$L_h y = f, \quad l_h y = \gamma.$$

Оскільки $l = l_h$, то віднімаючи ліві та праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$L_h(\tilde{u} - y) = -Qh^2, \quad l_h(\tilde{u} - y) = 0.$$

Так як різницева схема (10.28*) стійка, то звідси отримуємо, що

$$\|\tilde{u} - y\| \leq C_1 \| -Qh^2 \| + C_2 \| 0 \| \leq D_1 h^2,$$

де $D_1 = C_1 \|Q\|$. Відповідно розв'язок різницевої схеми $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ збігається до розв'язку $u(x)$ диференціальної задачі при $h \rightarrow 0$ з 2-им порядком відносно h .

Різницевий метод розв'язання диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) + f(x) = 0, \quad (10.32)$$

де $p(x), q(x), r(x), f(x)$ – функції визначені на відрізку $[a, b]$.

При побудові аналітичного розв'язку зазвичай розглядають дві задачі:

- *задача Коші*. Знайти розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (10.32) за умови, що $y(x_0) = t_0, y'(x_0) = t_1$ де $x_0 = a, t_0, t_1$ — задані числа;
- *крайова задача*. Знайти розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (10.32) за умови, що $y(a) = m_0, y'(b) = m_1$ де m_0, m_1 — задані числа [22].

Для чисельного розв'язку кожної задачі перейдемо від диференціальної задачі до різницевої схеми даної диференціальної задачі (див. п. 10.4.). Для цього задамо натуральне число n і розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками (вузлами) $x_i = a + ih$, де $h = (b - a)/n, i = 0, 1, \dots, n$. Будемо шукати сіткову функцію $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, визначену на даних вузлах, яка є розв'язком різницевої схеми даної диференціальної задачі. Для цього замінимо в (10.25) першу та другу похідні центральною першою та другою

різницевою похідними, тобто $(y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$ та $(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$ відповідно, а всі решта функцій замінімо їх значеннями у вузлах. Тут $y_0, y_1, \dots, y_n$ поки невідомі значення шуканої функції сіткової функції. Отримаємо різницеве рівняння для кожного внутрішнього вузла:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + q(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r(x_i)y_i + f(x_i) = 0, \quad (10.33)$$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Тепер можна сформулювати чисельні задачі аналогічні двом наведеним диференціальним задачам.

Чисельна задача Коші. Знайти сіткову функцію $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, визначену на сітці $\{x_0, \dots, x_n\}$ таку, що задовольняє системі рівнянь (10.33) й початковим умовам $y_0 = t_0$, $(y_0 - y_1)/h = t_1$, де t_0, t_1 – задані числа. Тут $(y_0 - y_1)/h$ є правою різницевою похідною табличної функції y в початковому вузлі x_0 . Дати оцінку абсолютної похибки $|y_i - u(x_i)|$.

Чисельна крайова задача. Знайти сіткову функцію $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, визначену на сітці $\{x_0, \dots, x_n\}$ таку, що задовольняє системі рівнянь (10.33) й початковим умовам $y_0 = m_0$, $y_n = m_1$, де m_0, m_1 – задані числа. Дати оцінку абсолютної похибки $|y_i - u(x_i)|$.

Система (10.33), доповнена початковими та граничними умовами, власне є різницевою схемою наведеної диференціальної задачі.

При розв’язуванні чисельної задачі Коші можна розв’язати рівняння (10.33) відносно y_{i+1} , тим самим виразивши y_{i+1} через y_{i-1} та y_i . Оскільки y_0 визначено першою початковою умовою, а y_1 можна знайти з другої початкової умови, то з формули (10.33) можна знайти y_2 , знаючи y_1 та y_2 за формулою (10.33) можна знайти y_3 і т. д. В результаті отримаємо табличну функцію $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, що й буде розв’язком даної задачі Коші.

При розв’язуванні чисельної крайової задачі, додамо до рівняння (10.33) ще два рівняння $y_0 = m_0$, $y_n = m_1$ і отриману систему розв’яжемо відносно y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Зазначимо, що й задачу Коші можна розв’язати таким

самим способом, додавши до різницевих рівнянь (10.33) початкові умови $y_0 = t_0, (y_0 - y_1)/h = t_1$.

Якщо коефіцієнт при $y(x)$ в наведеному диференціальному рівнянні (10.25) буде від'ємним при всіх $x \in [a, b]$, то розв'язок різницевої схеми існує і збігається до аналітичного розв'язку відповідної диференціальної задачі (див. п. 10.4.) з другим порядком відносно кроку h : $|y_i - u(x_i)| \leq Ch^2$, де C – константа, що не залежить від $h, i = 1, 2, \dots, n$.

Нижче в наступних підпунктах наведемо розв'язок конкретної задачі.

Приклад 10.70. Знайти чисельний розв'язок диференціального рівняння

$$y''(x) - \frac{y'(x)}{x} - 3\frac{y(x)}{x^2} - 6x = 0 \quad (10.34)$$

на проміжку $[1, 2]$

- i. з початковими умовами $y(1) = 1, y'(1) = 3$ (задача Коші);
- ii. з початковими умовами $y(1) = 1, y'(2) = 3$ (крайова задача);

i. Чисельна задача Коші прикладу 10.70

Сформулюємо чисельну задачу Коші для рівняння (10.33). Нехай $n = 10$. Розіб'ємо відрізок Нехай $[1, 2]$ на $n = 10$ інтервалів точками $x_i = 1 + 0.1i$ з кроком $h = 0.1, i = 0, 1, 2, \dots, 10$. Рівняння (10.33) для даного диференціального рівняння (10.34) набере вигляду:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2hx_i} - 3\frac{y_i}{x_i^2} + 6x_i = 0, \quad (10.35)$$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$, а початкові умови

$$y_0 = 1, \quad \frac{y_1 - y_0}{0.1} = 3. \quad (10.36)$$

З другої початкової умови знаходимо $y_1 = 3 \cdot 0.1 + 1 = 1.3$.

Рівняння (10.35), (10.36) і є різницевою схемою даної диференціальної задачі Коші для прикладу 10.15, а її розв'язки й будуть відповіддю. Як вже зазначалось, можна розв'язати систему, яка складається з рівнянь (10.35), (10.36). Проте, можна отримати більш просту рекурентну формулу. Для

цього виразимо y_{i+1} через y_{i-1} та y_i з рівняння (10.35). Доручимо це обчислення і всі решту системі комп'ютерної алгебри Mathematica.

Введемо наступні дві команди для можливості повторно виконувати програму. Перша команда очищає змінну y , значенням якої буде аналітичний розв'язок задачі. Він наводиться лише для порівняння з чисельним розв'язком. Друга команда очищує попередній чисельний розв'язок задачі. Для першого разу необхідно задати значення таким змінним і відразу ж здійснити очистку цим змінним – особливість індексованих змінних в Mathematica або виконати команду `Remove[y]`.

```
Clear[y]
Do[yi=1; yi=.,{i,0,10}]
```

Вводимо крок та лівий кінець інтервалу.

```
h=0.1;
a=1;
```

Здійснивши підстановку, перейдемо до різницьових рівнянь:

```
eq=(y''[x]-y'[x]/x-3 y[x]/x^2-6x)/.{y''[x]→
(yi-1-2yi+yi+1)/h^2, y'[x]→(yi-1-yi+1)/(2h),
y[x]→yi,x→a+ih} //FullSimplify
```

$$-6(0.1i + 1) + 100.(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{5.(y_{i+1} - y_{i-1})}{0.1i + 1} - \frac{3y_i}{(0.1i + 1)^2}$$

Розв'яжемо рівняння $eq=0$ відносно y_{i+1} . Зазвичай команди 3 та 4 роблять вручну, проте Mathematica дозволяє автоматизувати такі операції.

```
v=Solve[eq==0,yi+1][[1,1]] //FullSimplify
```

$$\frac{0.006(i + 9.99994)(i(i + 20.0001) + 100.001) - 1.(i + 1)(i + 10.5)y_{i-1} + (i(2.i + 40) + 203.)y_i}{(i + 9.5)(i + 10.)}$$

Таким способом, знайдено вираз y_{i+1} через y_i та y_{i-1} , яке буде використане в наступному циклі.

Запишемо початкові умови. Відзначимо, що початкові умови з похідною $y'(1) = 3$ потрібно переписати, замінивши похідну правої різницевої похідної в точці $x_0 = 1$ і з отриманого рівняння знайти y_1 :

```
y0=1;
```

```
x0=1;
y1= 3h+y0;
```

Здійснюємо рекурентні обчислення табличної функції – розв’язку задачі, використовуючи вираз y_{i+1} через y_i та y_{i-1} :

```
Do[yi+1=(0.006 (i+10) (i (i+20)+100.001) - (i+10) (i+10.5) yi+1 + (i (2
i+40)+203) yi) / ((i+9.5) (i+10)); xi=1+i h, {i, 1, 10}];
```

Для порівняння, розв’яжемо дану задачу за допомогою вбудованої функції DSolve системи Mathematica. В результаті отримаємо розв’язок в елементарних функціях. Зазвичай таких розв’язків задача не допускає.

```
eqd=DSolve[{y' '[x]-y' [x]/x-3y[x]/x2-6x==0,
y[1]==1, y' [1]==3}, y[x], x][[1]];
```

Визначимо функцію – розв’язок диференціальної задачі.

```
y[x_]=y[x]/.end//FullSimplify
(12 log(x) x4 + 5x4 + 3)/(8x)
```

Введемо рядок – заголовок таблиці відповіді:

```
p={"i", "xi", "yi", "y[x]"};
```

Складемо таблицю, що містить відповідь й значення аналітичного розв’язку у вузлах

```
p1=Table[{i, xi, yi, y[xi]}, {i, 0, 10}];
```

та об’єднаємо її з заголовком

```
Join[{p}, p1]//TableForm
```

i	x_i	y_i	$y[x_i]$
0	1	1	1
1	1.1	1.3	1.36307
2	1.2	1.73148	1.86508
3	1.3	2.31325	2.52621
4	1.4	3.0654	3.36778
5	1.5	4.00902	4.41204
6	1.6	5.16612	5.68208
7	1.7	6.55947	7.20168
8	1.8	8.2125	8.99529
9	1.9	10.1493	11.088
10	2.	12.3945	13.5053

Нижченаведений список, власне, і є відповіддю задачі Коші:

```
g=Table[{xi, yi}, {i, 0, 10}]
{{1,1},{1.1, 1.3},{1.2, 1.73148},{1.3, 2.31325},{1.4, 3.0654},{1.5, 4.00902},
```

```
{1.6, 5.16612}, {1.7, 6.55947}, {1.8, 8.2125}, {1.9, 10.1493}, {2., 12.3945}}
```

Побудуємо точки з координатами, вказаними в списку g:

```
s=ListPlot[g, PlotStyle→{PointSize[.02], Hue[.7]}];
```

Побудуємо аналітичний розв'язок даної задачі Коші

```
s1=Plot[y[x], {x, 1, 2}, PlotStyle→{Thickness[0.007]}];
```

і сумістимо для порівняння побудовані графіки:

```
Show[s1, s]
```

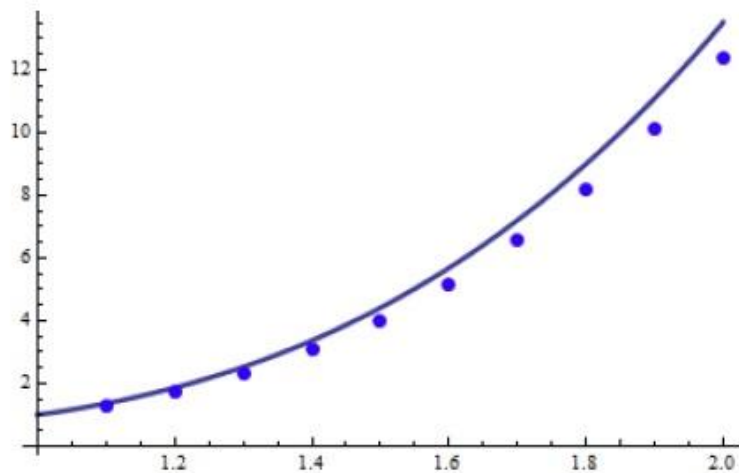


Рис. 10.36. Суміщені графіки розв'язку задачі Коші прикладу 10.70.

ii. Чисельна крайова задача прикладу 10.70

Сформулюємо чисельну крайову задачу для рівняння (10.33). Для цього додамо до рівнянь (10.35) граничні умови у вигляді

$$y_0 = 1, \quad y_{10} = 3.$$

Отримуємо систему $n + 1$ рівнянь відносно $n + 1$ невідомого $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Розв'язок даної системи буде й розв'язком даної чисельної крайової задачі.

Введемо команди для повторного виконання програми

```
Clear[y]  
Do[yi=1; yi=., {i, 0, 10}]
```

Задамо крок слідування вузлів і лівий кінець інтервалу:

```
h=0.1; a=1;
```

Повторимо команду (10.34) в дещо іншому вигляді

```
eqi=(y''[x]-y'[x]/x-3 y[x]/x^2-6x==0)/.{y''[x]→
(yi-1-2yi+yi+1)/h2, y'[x]→(yi-1-yi+1)/(2h),
y[x]→yi, x→a+ih} //FullSimplify
```

і отримаємо різницеві рівняння

```
1/(i+2)((i+2.)3-1.3333(i+2.5)yi-1(i+2.)+2.6666(i+0.7752)
(i+3.2247)yi-1.3333(i+1.5)(i+1.9999)yi+1)==0
```

Складемо список з різницевих рівнянь для внутрішніх вузлів:

```
eq=Table[eqi,{i,0,9}]/FullSimplify
{y0+0.913043y2==0.0631304+1.93676y1,
y1+0.92y3==0.06912+1.94y2,
y2+0.925926y4==0.0751111+1.94302y3,
y3+0.931034y5==0.0811034+1.94581y4,
y4+0.935484y6==0.0870968+1.94839y5,
y5+0.939394y7==0.0930909+1.95076y6,
y6+0.942857y8==0.0990857+1.95294y7,
y7+0.945946y9==0.105081+1.95495y8,
y8+0.948718y10==0.111077+1.95682y1}
```

Добавимо до списку різницевих рівнянь граничні умови, записані як рівняння:

```
eq=Join[eq,{y0==1,y10==3}]
{y0+0.913043y2==0.0631304+1.93676y1,
y1+0.92y3==0.06912+1.94y2,
y2+0.925926y4==0.0751111+1.94302y3,
y3+0.931034y5==0.0811034+1.94581y4,
y4+0.935484y6==0.0870968+1.94839y5,
y5+0.939394y7==0.0930909+1.95076y6,
y6+0.942857y8==0.0990857+1.95294y7,
y7+0.945946y9==0.105081+1.95495y8,
y8+0.948718y10==0.111077+1.95682y1,
y0==1,y10==3}
```

Складемо список з невідомих y_i системи рівнянь eq

```
per=Table[yi,{i,0,10}]
{y0,y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,y9,y10}
```

Розв'яжемо систему рівнянь eq відносно змінних per:

```
sv=Solve[eq,per]
{{y0 -> 1., y1 -> 0.772274, y2 -> 0.612061, y3 -> 0.526353,
y4 -> 0.524626, y5 -> 0.61821, y6 -> 0.819877, y7 -> 1.14357,
y8 -> 1.6042, y9 -> 2.21752, y10 -> 3}}
```

Для порівняння, застосовуючи вбудовану функцію DSolve, знайдемо аналітичні розв'язки крайової задачі

```
eqd=DSolve[{y'[x]-y'[x]/x-3y[x]/x^2-6x==0,
y[1]==1, y'[1]==3}, y[x], x][[1]]//Simplify
y[x_]=y[x]/.eqd
(20 + x^4(10 - 48Log[2]) + 48Log[2] + 45x^4Log[x])/(30x)
```

Введемо вузли решітки

```
Do[xi=1+ih, {i, 0, 10}];
```

заголовок таблиці

```
p={"i", "xi", "yi", "y[x]"};
```

Складемо таблицю, яка складається з вузлів, розв'язку y_i системи рівнянь sv і значень аналітичного розв'язку у вузлах решітки:

```
p1=(Table[{i, xi, yi, y[x]}, {i, 0, 10}]/.sv)[[1]];
```

Добавимо заголовок до таблиці p1:

```
Join[{p}, p1]//TableForm
```

i	x_i	y_i	$y[x_i]$
0	1	1	1
1	1.1	0.772274	0.772102
2	1.2	0.612061	0.611916
3	1.3	0.526353	0.526329
4	1.4	0.524626	0.524752
5	1.5	0.61821	0.618474
6	1.6	0.819877	0.82024
7	1.7	1.14357	1.14397
8	1.8	1.6042	1.60456
9	1.9	2.21752	2.21775
10	2.	3.	3.

Складемо список – відповідь задачі

```
gr=(Table[{xi, yi}, {i, 0, 10}]/.sv)[[1]]
{{1,1},{1.1, 0.772274},{1.2, 0.612061},{1.3, 0.526353},{1.4, 0.524626},
{1.5, 0.61821},{1.6, 0.819877},{1.7, 1.14357},{1.8, 1.6042},{1.9, 2.21752}}
```

```
{2,3}}
```

Побудуємо точки з координатами в списку `gr`

```
s=ListPlot[gr,PlotStyle→{PointSize[.02],Hue[1]}];
```

Графік аналітичного розв'язку

```
s1=Plot[y[x],{x,1,2},PlotStyle→{Thickness[0.007]}];
```

і виведемо обидва графіки:

```
Show[s1,s]
```

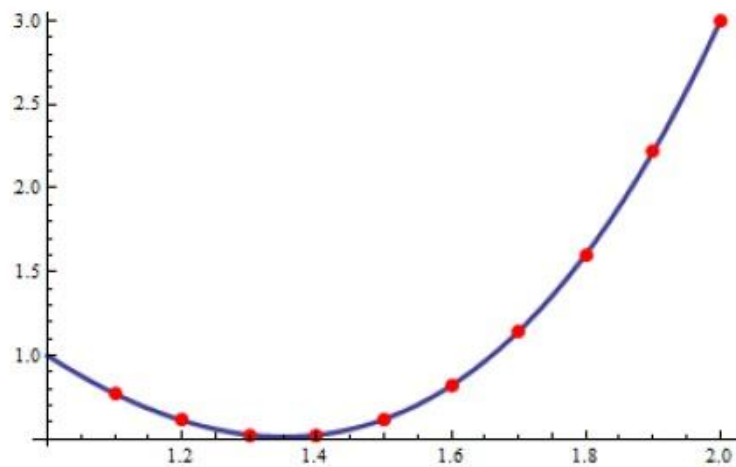


Рис. 10.37. Суміщені графіки розв'язку крайової задачі прикладу 10.70.

Для розвитку навичок використання потенціалу системи комп'ютерної алгебри Mathematica для розв'язування диференціальних рівнянь варто додатково ознайомитись з джерелами [16, 22, 27, 28, 33 – 36, 41, 48–53].

10. 11. Система Лоренца та глобальний аттрактор

У 1972 році професор метеорології з Массачусетського технологічного інституту Едвард Лоренц збирався виступити на конференції, але в запалі роботи не встиг відправити тему своєї лекції. Організатор, який поспішав розіслати запрошення, вибрав заголовок за нього: “Передбачуваність: чи може помах крила метелика в Бразилії викликати торнадо в Техасі?” Так і з'явився термін “ефект метелика”, відомий сьогодні всьому світу [24].

Едвард Лоренц народився в 1917 році в невеликому містечку в штаті Коннектикут. Вивчати атмосферні явища він вирішив ще в дитинстві під

враженням від того, з якою легкістю сонячна погода змінюється буревієм з громом і блискавками. Шлях до виконання мрії вийшов довгим: магістратура в Гарварді, робота метеорологом в авіаційному підрозділі Армії США, захист дисертації в повоєнний період, зрештою, посада наукового співробітника і, пізніше, професора в МІТ.

У своєму виступі Лоренц виділив кілька ключових ідей:

- якщо помах крила метелика може викликати торнадо, то точно так само на це здатні всі попередні і майбутні помаху, так само як і помаху інших мільйонів метеликів, не кажучи вже про активність всієї популяції нашої планети;
- якщо помах крила метелика здатний викликати торнадо, то так само цей помах може йому запобігти.

Помах крила метелика в даному контексті має сприйматися як маленька зміна початкових умов системи, що здатна як викликати торнадо, так і змінити його траєкторію, або взагалі стати причиною його загасання. На відміну від ефекту доміно, де конкретне (зазвичай незначне) збурення призводить до конкретного (зазвичай значного) результату, причому відбувається це однозначно, наприклад, помах крила метелика може не мати жодного впливу на поведінку торнадо.

Лоренц вивчав конвекцію (теплообмін, що виникає завдяки руху молекул рідини або газу) в атмосфері Землі. Для опису подібних фізичних процесів часто користуються моделлю, яка включає в себе рівняння Нав'є–Стокса, що описує рух в'язкої ньютонівської рідини. За винятком окремих випадків, його розв'язки в загальному вигляді на даний момент невідомі. Модель містить такі складові:

- рівняння Нав'є–Стокса;
- рівняння теплопровідності, що описує розподіл температури в просторі з плином часу;
- рівняння неперервності, яке, за своєю суттю, описує принцип

збереження маси.

Лоренцу вдалося побудувати спрощення цієї моделі у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (10.37)$$

σ, r, b — додатні параметри, $\sigma > b + 1$ (наприклад, $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$).

Система (*) була запропонована Лоренцом в 1963 р. як модель для прогнозу погоди. Система (*) є трирежимним наближенням Галеркіна (один за швидкістю і два за температурою) рівнянь Буссінеска для конвекції рідини в двовимірній шаруватій голові знизу в $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ невідома функція

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, T$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} v + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} v - v \cdot \Delta v = e \cdot (T - T_1), \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} - k \cdot \Delta T = 0. \end{cases}$$

e одиничний вектор.

В (*) x відповідає за інтенсивність конвекції, y відображає різницю між температурами висхідних і низхідних потоків, z характеризує відхилення вертикального температурного профілю від лінійної залежності, $\sigma > 1$ — число Прандтля (критерій подібності теплових процесів в рідинах і газах), $\rho > 0$ — число Релея (відображає поведінку рідини під впливом градієнта температури), $\beta > 0$ — число, що описує геометрію конвективної комірки (впорядкованості у вигляді конвективних комірок у формі циліндричних валів, або правильних шестигранних структур, яка виникає при конвективних потоках).

За допомогою цієї системи рівнянь можна розрахувати, як буде вести себе плинне середовище, яке рівномірно розігрівають знизу і охолоджують зверху. З огляду на те, що це відбувається з повітряними потоками в

атмосфері. Зокрема, дана система дозволяє зрозуміти, до якого результату призведе навіть невелика зміна вихідних параметрів.

Перед тим як перейти до безпосереднього аналізу отриманої системи, розглянемо деякі комбінації траєкторій. Для наочності, скористаємося тими ж значеннями параметрів, що і сам Лоренц: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

Зобразимо рух двох точок $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (0,1,1.01)$, відстань між якими спочатку невелика. Досить цікавий результат! Спочатку траєкторії майже неможливо розрізнити, потім вони відхиляються зовсім ненабагато, після чого різниця стає вже значною (рис. 10.38) [64].

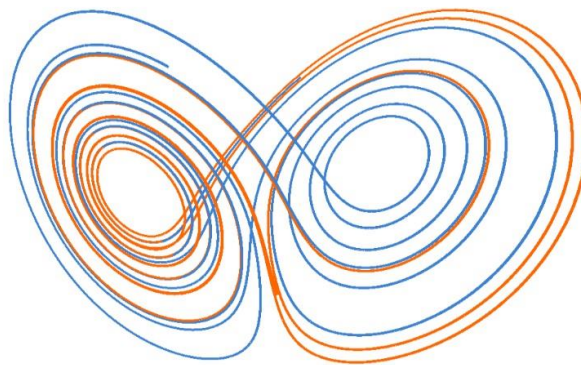


Рис. 10.38. Траєкторії системи Лоренца для точок $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (0,1,1.01)$.

Візьмемо точки $P_0 = (-25,20,-15)$, $P_1 = (-15,40,15)$ на значній відстані одна від одної (рис. 1.29). Навіть незважаючи на таку різницю початкових умов, траєкторії потрапляють на фігуру, яку з плином часу не покидають. Спостерігається дивний ефект, їх ніби щось притягує Ця фігура так і називається — дивним атрактором Лоренца (від англійського *attract* — “притягувати”).

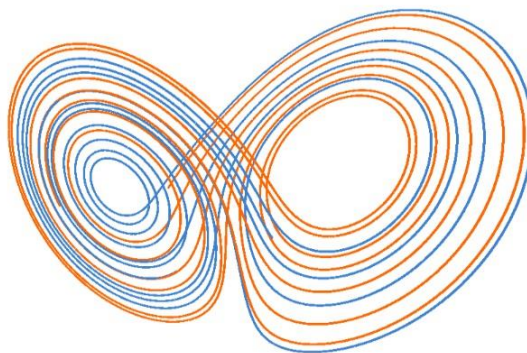


Рис. 10.39. Траєкторії системи Лоренца для точок $P_0 = (-25,20,-15)$, $P_1 = (-15,40,15)$.

Формальне означення звучить так: *атрактор* — така підмножина фазового простору, що всі траєкторії, які стартують не надто далеко від неї, прямують до неї з плином часу. Слово ж “дивний” тут виступає в такому ключі: *атрактор* як множина не може бути представленим у вигляді кривої або поверхні, він має більш складну, фрактальну структуру. Траєкторії атрактора замикаються, а малі відхилення постійно накопичуються, причому експоненціально.

Сказане вище можна проілюструвати так: *дві траєкторії, випущені з близьких точок, з часом розбігаються досить далеко*. Причому, щоб віддалити момент розбігання, наприклад, на одну секунду, потрібно зменшити відстань між початковими точками, скажімо, удвічі. А щоб на дві секунди — вчетверо. А на три — у вісім разів, і так далі. Це означає, що навіть використовуючи потужний комп’ютер, ми не можемо розрахувати траєкторію, яка проходить поблизу атрактора, з розумною точністю протягом тривалого проміжку часу. На кожному кроці обчислень неминуче вносяться помилки (через округлення чисел і похибок чисельних методів), які швидко накопичуються і призводять до того, що знайдена траєкторія сильно відрізняється від справжньої.

Таке спотворення неможливо виправити, просто збільшуючи потужність комп’ютера. Подібне явище називається “*динамічним хаосом*”.

Система комп’ютерної алгебри Mathematica має вбудований інструментарій для побудови атрактора Лоренца. За допомогою команди Manipulate можна візуалізувати чутливість рівнянь Лоренца по відношенню до параметрів системи.

```
{σ,b}={10.,8./3};
LorenzSys[r_]:= {x'[t]==σ (y[t]-x[t]),
                  y'[t]==x[t] (r-z[t])-y[t],
                  z'[t]==x[t] y[t]-b z[t],
                  x[0]==z[0]==0, y[0]==1};
sol=ParallelTable[NDSolve[LorenzSys[ρ],{x,y,z},{t,0,220},
                          MaxSteps→∞],
                  {ρ,5,200,5}];

sol[[1]]
```

Використовуючи функцію `InterpolatingFunction` система комп'ютерної алгебри `Mathematica` дозволяє отримувати зображення з потрібній наочній формі.

```

{{x → InterpolatingFunction[
  Domain: {{0., 220.}}
  Output: scalar
],
y → InterpolatingFunction[
  Domain: {{0., 220.}}
  Output: scalar
],
z → InterpolatingFunction[
  Domain: {{0., 220.}}
  Output: scalar
]
}}

```

Рис. 10.40. Використання функції `InterpolatingFunction` в СКМ `Mathematica`.

```

r=Table[ρ,{ρ,5,200,5}];
Manipulate[Grid[{"ρ("<>ToString[i]<>")="<>ToString[r[[i]]},
  {ParametricPlot3D[
    ({x[t],y[t],z[t]}/.sol[[i] )//Evaluate,{t,0,200},
    PlotPoints→7×102,
    Axes→None,PlotStyle→AbsoluteThickness[0.9],
    PlotRange→All,ImageSize→{350,350},
    ColorFunction→(Hue[#]&),BoxRatios→{1,1,1}}]],
  {{i,5,"Parameter variation ρ(i)"},1,Length[sol],1},
  FrameLabel→"Lorenz Attractor"]

```

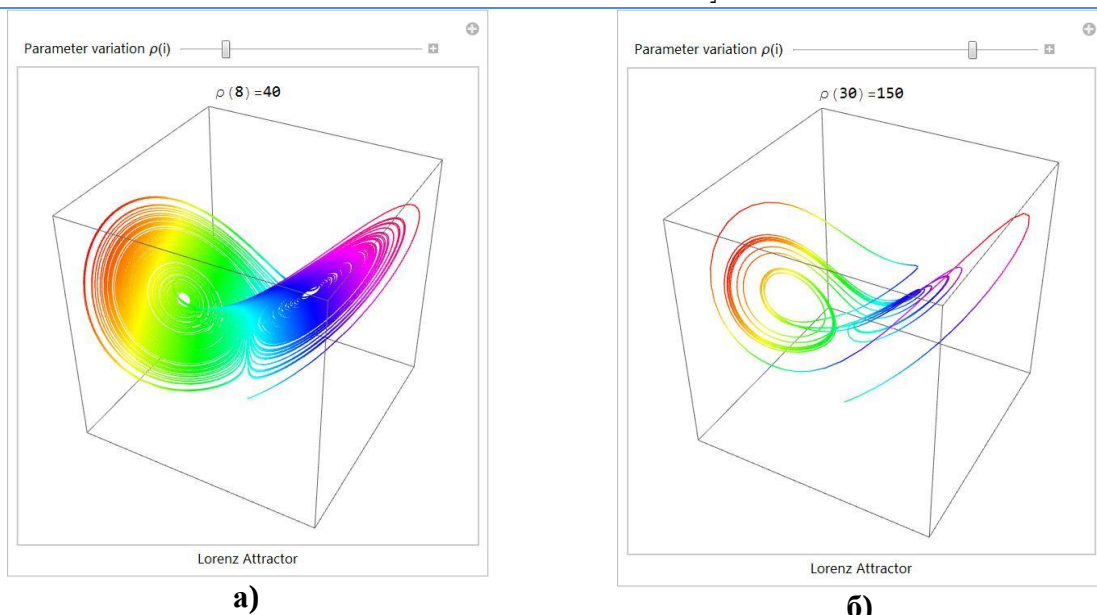


Рис. 10.41. Атрактор Лоренца при $\rho = 8$ а) та $\rho = 30$ б).

Рисунок 10.41 ілюструє суттєву відмінність вигляду атрактора при різних значеннях параметра ρ . Система комп'ютерної алгебри Mathematica дозволяє детально вивчати поведінку таких складних топологічних об'єктів як атрактори, спостерігаючи їх еволюцію від виродження до простої лінії до цілком хаотичної структури.

10. 12. Диференціальні рівняння в частинних похідних

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називається рівняння виду

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}, \dots\right) = 0,$$

де F — задана дійсна функція точки $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ області D евклідового простору і дійсних змінних

$$u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}^{(k)} = \frac{\partial^k u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

($u(x)$ — невідома функція) з невід'ємними цілочисловими індексами

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

і принаймні одна з похідних функції F по змінній, що відповідає найвищому порядку часткових похідних, відмінна від нуля; натуральне число m називається *порядком рівняння*. Визначена у області D заданим рівнянням функція $u(x)$, неперервна разом з своїми частинними похідними, що входять в це рівняння, і що обертає його в тотожність, називається *регулярним розв'язком*. Разом з регулярними розв'язками в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними важливе значення мають розв'язки, що перестають бути регулярними поблизу ізольованих точок або многовидів особливого вигляду: до них належать зокрема, елементарні (фундаментальні) розв'язки. Вони дозволяють будувати широкі класи регулярних розв'язків (так званих потенціалів) і встановлювати їх структурні і якісні властивості.

Розглянемо приклади диференціальних рівнянь в частинних похідних, які вдається проінтегрувати в системі комп'ютерної алгебри Mathematica, використовуючи функцію DSolve.

10.12.1. Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і всіх її частинних похідних, тобто функція F лінійна відносно аргументів $u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}^{(k)}$.

Приклад 10.71. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$(x + 2y) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

з двома незалежними змінними x та y .

Розв'язок. Диференціальне рівняння з частинними похідними розв'язується безпосередньо за допомогою функції DSolve

```
Clear[x, y, pdeq, u, sol]
pde1 = (x + 2 y) D[u[x, y], x] - y D[u[x, y], y] == 0
sol1 = DSolve[pde1, u[x, y], {x, y}] [[1, 1]] /. {C[i_] -> c[i]} // Simplify
-y u(0,1)[x, y] + (x + 2 y) u(1,0)[x, y] == 0
u[x, y] -> c[1] [Log[y(x + y)]]
```

Тут $c[1]$ — довільна гладка функція. Результат одержується у вигляді сіткової функції, якщо в DSolve в другий параметр замість $u[x, y]$ підставимо u .

```
sol = DSolve[pde1, u, {x, y}] [[1, 1]] /. {C[i_] -> c[i]}
u -> Function[{x, y}, c[1] [Log[1/4 (4xy + 4y2)]]]
```

Приклад 10.72. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = \frac{a}{xy}, \quad a = \text{const.}$$

Розв'язок. Диференціальне рівняння з частинними похідними розв'язується безпосередньо за допомогою функції DSolve. Означимо команду для заміни виразу C[i] на c_i.

```
coeff[X_] := {X[i_] -> ToExpression[ToLowerCase[ToString[X]]][i]}
pde2 = ∂xu[x, y] + ∂yu[x, y] ==  $\frac{a}{xy}$ 
sol2 = DSolve[pde2, u[x, y], {x, y}] [[1, 1]] /. coeff[C] // Simplify
u(0,1)[x, y] + u(1,0)[x, y] ==  $\frac{a}{xy}$ 
u[x, y] →  $\frac{a(-\text{Log}[x] + \text{Log}[y])}{x-y} + c_1[-x + y]$ 
```

Той самий результат отримуємо у вигляді так званої *чистої* (анонімної) функції, якщо другий параметр u[x, y] підставимо u у DSolve.

```
DSolve[pde2, u, {x, y}] [[1, 1]] /. coeff[C]
u → Function[{x, y},  $\frac{-a\text{Log}[x] + a\text{Log}[y] + xc_1[-x+y] - yc_1[-x+y]}{x-y}$ ]
```

Приклад 10.73. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$x\partial_x w(x, y, z) + y\partial_y w(x, y, z) + z\partial_z w(x, y, z) - xyz = 0.$$

Розв'язок. Це лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними 1-го порядку з трьома незалежними змінними, для якого існує загальний розв'язок в замкнутій формі [42]

```
pde3 = x ∂xw(x, y, z) + y ∂yw(x, y, z) + z ∂zw(x, y, z) == xyz
sol3 = DSolve[pde3, w[x, y, z], {x, y, z}] [[1, 1]] /. coeff[C] // Simplify
zw(0,0,1)[x, y, z] + yw(0,1,0)[x, y, z] + xw(1,0,0)[x, y, z] == xyz
w[x, y, z] →  $\frac{xyz}{3} + c_1\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right]$ 
```

Зверніть увагу, що цього разу довільна функція $c_1\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right]$ в розв'язку має два аргументи.

Розглянемо приклад інтегрування квазілінійного рівняння в частинних похідних.

Приклад 10.74. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$x^2 \left(\partial_x u(x, y) - \partial_y u(x, y) \right) - (u(x, y) - x - y)^2 = 0.$$

Розв'язок. Це квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку, яке квазілінійне по одній залежній змінній і двом незалежним змінних $\{x, y\}$ [42].

```
pde4=x^2 (∂xu(x,y) - ∂yu(x,y)) - (u(x,y) - x - y)^2 == 0
sol4=DSolve[pde4,u[x,y],{x,y}] [[1,1]] /.coeff[C]//Simplify
u[x,y] → x + y +  $\frac{x}{1-xc_1[x+y]}$ 
```

Функція $c_1[x + y]$ в розв'язку є довільною функцією від $(x + y)$.

Приклад 10.75. Знайти загальний розв'язок нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$(\partial_x u(x, y))^3 - (\partial_y u(x, y))^2 = 0.$$

Розв'язок. Це нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку типу Гамільтона–Якобі [42].

```
pde5=(∂xu(x,y))^3 - (∂yu(x,y))^2 == 0
-u(0,1)[x,y]^2 + u(1,0)[x,y]^3 == 0
```

Якщо загальний розв'язок недоступний, то функція DSolve замість цього намагається знайти повний інтеграл.

```
sol5=DSolve[pde5,u[x,y],{x,y}]//FullSimplify
{{u[x,y] → C[1] + xC[2]2/3 + yC[2]}, {u[x,y] → C[1] - (-1)1/3xC[2]2/3 + yC[2]},
{u[x,y] → C[1] + (-1)2/3xC[2]2/3 + yC[2]}}
```

Тут $C[1]$, $C[2]$ – довільні сталі. З трьох можливих значень повного інтеграла вибрано перший розв'язок, тому, що він єдиний, який має дійсні коефіцієнти.

```
U=(u[x,y]/.sol5) [[1]]
C[1] + xC[2]2/3 + yC[2]
```

Це двопараметричний розв'язок вихідного рівняння pde5 і тому не може бути загальним розв'язком.

10.12.2. Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку

Лінійне рівняння другого порядку має вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_{x_i} + C(x)u = f(x),$$

де A_{ij} , B_i , C , f – задані в області D дійсні функції точки x .

Для лінійного рівняння другого порядку характеристична форма є квадратичною:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{i,j=1}^m A_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

$$Q = \sum_{i=1}^m A_i \sigma_i^2, \text{ де}$$

Коли всі $A_i = 1$ або всі $A_i = -1$ тобто коли форма Q відповідно додатно або від'ємно визначена (дефінітна), рівняння називається *еліптичним* в точці x . Якщо один з коефіцієнтів A_i від'ємний, а всі інші додатні (або навпаки), то рівняння називається *гіперболічним* в точці x . У випадку коли l , $1 < l < n$ – l коефіцієнтів A_i – додатні, а решта $n - l$ від'ємні, рівняння називається *ультрагіперболічним*. Якщо ж хоча би один з цих коефіцієнтів (але не всі) рівний нулю то рівняння називається *параболічним* в точці x . Кажуть, що у області визначення D рівняння є рівнянням *еліптичного*, *гіперболічного* або *параболічного* типу, якщо воно відповідно еліптичне, гіперболічне або параболічне у кожній точці цієї області. Еліптичне в області D рівняння називається *рівномірно еліптичним*, якщо існують дійсні числа k_0 і k_1 однакового знаку такі, що

$$k_0 \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \leq k_1 \sum_{i=1}^m \lambda_i^2$$

для всіх λ_i . Коли в різних частинах області D рівняння належить до різних типів, то воно називається рівнянням змішаного типу в цій області. У

випадку лінійного рівняння від двох змінних тип рівняння в точці визначити досить просто. Лінійне рівняння другого порядку, залежне від двох змінних має вигляд:

де A, B, C – коефіцієнти, залежні від змінних x і y , а крапки позначають члени, залежні від x, y, u і частинних похідних першого порядку: $\partial u / \partial x$ та $\partial u / \partial y$.

Приклад 10.76. Знайти розв’язок одновимірного хвильового рівняння

$$c^2 \partial_{x,x} u(x, t) - \partial_{t,t} u(x, t) = 0.$$

Розв’язок. Одновимірне хвильове рівняння вимагає дві похідні по x та t .

```
Clear["Global`*"];
pde6 = (c^2 \partial_{x,x} # - \partial_{t,t} #) & [u[x, t]] == 0
sol6 = (DSolve[pde6, u[x, t], {x, t}] [[1, 1]] // Simplify[#, c > 0]) /.
{t + \frac{x}{c} \to x + ct, t - \frac{x}{c} \to x - ct}
-u^{(0,2)}[x, t] + c^2 u^{(2,0)}[x, t] == 0
u[x, t] \to C[1][-ct + x] + C[2][ct + x]
```

Розв’язок цього рівняння в частинних похідних другого порядку включає дві довільні функції: $c_1(t + x/c)$ та $c_2(t + x/c)$.

Приклад 10.77. Знайти розв’язок хвильового рівняння

$$u_{t,t} = c^2 u_{x,x},$$

($c = 2$), що задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^4}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0.$$

Зробити анімацію отриманого розв’язку.

Розв’язок. В даному випадку $f(x, t) = \frac{1}{1+x^4}$. Перепишемо розв’язок sol6 з прикладу 10.76 у вигляді:

```
sol7=sol6/.{C[1] \to f1, C[2] \to g1}/.c\to 2;
sol7//TraditionalForm
u(x, t) \to f1(x - 2t) + g1(2t + x)
```

Скористаємось розв’язком Д’Аламбера (випадок нескінченної струни) [29]

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + f(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\zeta) d\zeta \right). \quad (10.38)$$

З початкових умов $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^4}$, $u_t(x, 0) = 0$ складемо алгебраїчно-диференціальну систему:

```
init={u[x,0] -> 1/(1+x^4), u^(0,1)[x,0] -> 0};
eq1=sol7/.t->0/.init/.Rule->Equal
eq2=D[sol7,t]/.t->0/.init/.Rule->Equal
1/(1+x^4) == f1[x] + g1[x]
0 == -2f1'[x] + 2g1'[x]
```

Розв'язуючи дану систему, отримаємо:

```
sol=DSolve[{eq1,eq2},{f1,g1},x]//Flatten
{f1 -> Function[{x}, 1/(2(1+x^4)) + c[1]/2], g1 -> Function[{x}, 1/(2(1+x^4)) - c[1]/2]}
```

В результаті шуканий розв'язок набере вигляду:

```
u[x_,t_]=sol7[[2]]/.sol//Simplify
1/2*(1/(1+(-2t+x)^4) + 1/(1+(2t+x)^4))
```

Це самий розв'язок одержуємо, якщо підставимо безпосередньо в формулу (***) початкові умови:

```
f[x_]:=u[x,0]/.init;
g[x_]:=u^(0,1)[x,0]/.init;
1/2*(f[x+ct]+f[x-ct]+1/c*Integrate[g[ξ], {ξ, x-ct, x+ct}])/c -> 2//Simplify
1/2*(1/(1+(-2t+x)^4) + 1/(1+(2t+x)^4))
```

Для анімації розв'язку $u(x, t)$ відносно змінної t , скористаємось командою `Animate`.

```
Animate[Plot[u[x,t],{x,-32,32},PlotStyle->{{Thick,Red}},
PlotRange->{0,1},ImageSize->350,AxesLabel->{x,u},
Ticks->{-30,-20,-10, 0,10,20,30},{0,1/2,1}],
{t,0,15}]
```

`PrintScreen` анімації розв'язку хвильового рівняння даного прикладу зображено на рис. 10.42.

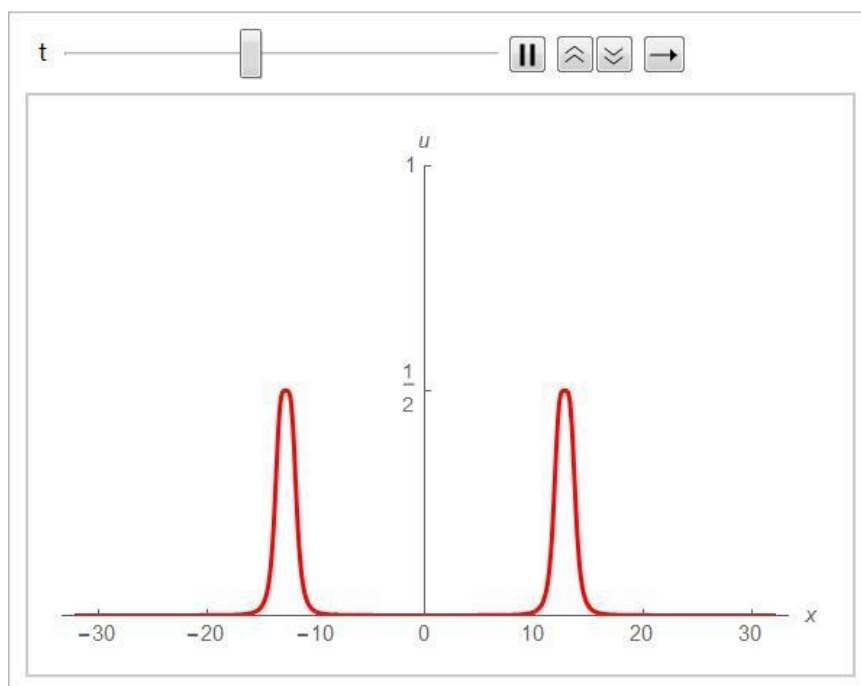


Рис. 10.42. PrintScreen анімації розв'язку хвильового рівняння.

Приклад 10.78. Знайти розв'язок хвильового рівняння

$$u_{t,t} = c^2 u_{x,x},$$

($c = 2$), що задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

і граничні умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

де

а) $f(x) = x(5 - x), \quad g(x) = 0, \quad L = 5;$

б) $f(x) = \sin(2\pi x), \quad g(x) = 2x + 1, \quad L = 1.$

Зробити анімацію отриманого розв'язку.

Розв'язок. Розв'язок згідно з [29] записується у вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (\text{A})$$

де

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad (\text{B})$$

$n = 1, 2, \dots$

а) Формули (B) при $n \in \mathbb{N}$ в цьому випадку мають вигляд

$$a_n = \frac{2}{5} \int_0^5 x(5-x) \sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right) dx = \frac{100}{(n\pi)^3} (1 - (-1)^n).$$

Тоді

$$a_n = \frac{2}{5} \int_0^5 x(5-x) \sin\left[\frac{n\pi}{5}x\right] dx // \text{Simplify}[\#, \text{Element}[n, \text{Integer}]] \& \\ \frac{100(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$$

Оскільки $g(x) = 0$, то коефіцієнти $b_n = 0$ для всіх n . Приймаючи до уваги, що для $n = 2k$ (парних) всі коефіцієнти $a_n = 0$, перевіримо цю умову для a_n ($n = 2, 4, \dots, 10$). Зауважимо, що ми використовуємо тип змінних `Integer` для спрощення процедури побудови розв'язку.

```
Table[a_n, {2, 10, 2}],  
{0, 0, 0, 0, 0}
```

Запишемо відрізок ряду Фур'є у вигляді

$$u_k[x, t] := 25 \sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} \right)^3 \cos\left[\frac{2n-1}{5} 2\pi t\right] \sin\left[\frac{2n-1}{5} 2\pi t\right] // \text{Simplify}$$

Запишемо відрізок ряду Фур'є, вибравши $k = 8$.

$$u_8[x, t] \\ 25 \left(\frac{8 \cos\left[\frac{2\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{\pi^3} + \frac{8 \cos\left[\frac{6\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{6\pi t}{5}\right]}{27\pi^3} + \frac{8 \cos[2\pi t] \sin[\pi t]}{125\pi^3} + \frac{8 \cos\left[\frac{14\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{7\pi t}{5}\right]}{343\pi^3} \right. \\ \left. + \frac{8 \cos\left[\frac{18\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{9\pi t}{5}\right]}{729\pi^3} + \frac{8 \cos\left[\frac{22\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{11\pi t}{5}\right]}{1331\pi^3} + \frac{8 \cos\left[\frac{26\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{13\pi t}{5}\right]}{2197\pi^3} \right. \\ \left. + \frac{8 \cos[6\pi t] \sin[3\pi t]}{3375\pi^3} \right)$$

Щоб візуалізувати рух вібруючої струни відповідно до знайденого розв'язку $u_8(x, t)$ використовується функція `Animate`.

```
Animate[Plot[u_8[x, t], {x, 0, 5}, PlotStyle -> {{Thick, Red}},  
ImageSize -> 300, PlotRange -> {-7, 7}, AxesLabel -> {x, u},  
Ticks -> {{0, 1, 2, 3, 4, 5}, {-6, -4, -2, 2, 4, 6}}],  
{t, 0, 2}]
```

`PrintScreen` анімації розв'язку хвильового рівняння даного прикладу зображено на рис. 10.43.

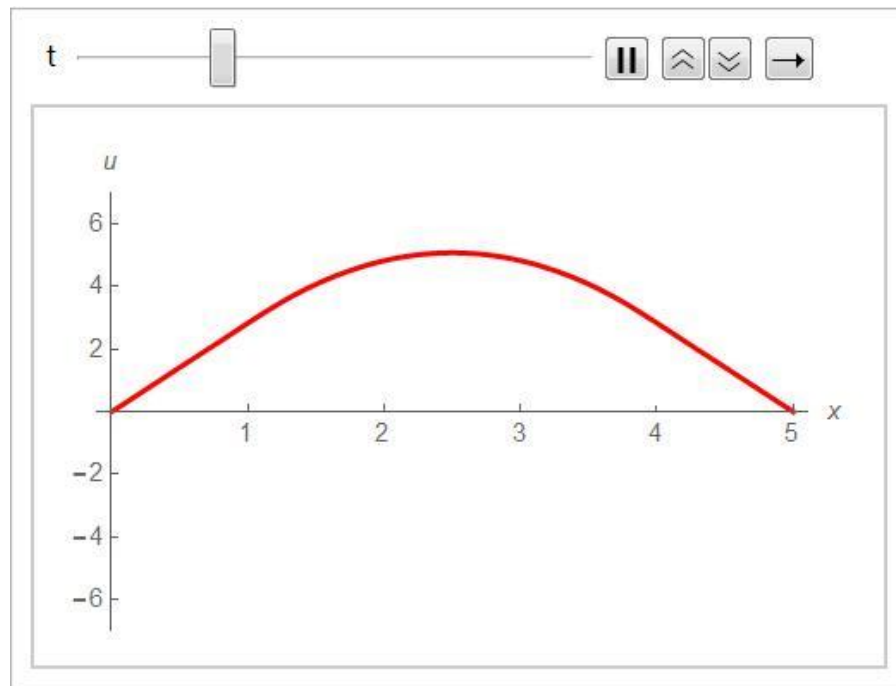


Рис. 10.43. PrintScreen анімації розв'язку $u_8(x, t)$ хвильового рівняння.

б) Визначимо початкові умови

$$f[x_] := \sin\left[\frac{1}{2}\pi x\right]; \quad g[x_] := x+1$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є a_n та b_n .

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= 2 \int_0^1 f[x] \sin[\pi x] dx \\ a_{n_} &= 2 \int_0^1 f[x] \sin[n\pi x] dx, \quad b_{n_} = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 g[x] \sin[n\pi x] dx // \text{Simplify} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{8}{3\pi} \left\{ \frac{8n \cos[n\pi]}{\pi - 4n^2\pi}, \frac{2(n\pi - 2n\pi \cos[n\pi] + \sin[n\pi])}{n^3\pi^3} \right\}$$

Перші 10 значень коефіцієнтів a_n та b_n дано в таблиці.

```
Text@Grid[Prepend[tab1, {"n", "an", "N[an]", "bn", "N[bn"]}],
Background→{None, {Lighter[Yellow, .9],
{White, Lighter[Blend[{Blue, Green}], .8]}}},
Dividers→{{Darker[Gray, .4], {Lighter[Gray, .5]}, Darker[Gray, .6]},
{Darker[Gray, .6], Darker[Gray, .6], {False}, Darker[Gray, .6]}},
Alignment→{{Center, Center, {Center}}}, ItemSize→{{5, 8, 8, 8}},
Frame→Darker[Gray, .6], ItemStyle→14, Spacings→{Automatic, .8}]
```

n	a_n	$N[a_n]$	b_n	$N[b_n]$
1	$\frac{8}{3\pi}$	0.848826	$\frac{6}{\pi^2}$	0.607927
2	$-\frac{16}{15\pi}$	-0.339531	$-\frac{1}{2\pi^2}$	-0.0506606
3	$\frac{24}{35\pi}$	0.21827	$\frac{2}{3\pi^2}$	0.0675475
4	$-\frac{32}{63\pi}$	-0.161681	$-\frac{1}{8\pi^2}$	-0.0126651
5	$\frac{40}{99\pi}$	0.12861	$\frac{6}{25\pi^2}$	0.0243171
6	$-\frac{48}{143\pi}$	-0.106845	$-\frac{1}{18\pi^2}$	-0.00562895
7	$\frac{56}{195\pi}$	0.0914121	$\frac{6}{49\pi^2}$	0.0124067
8	$-\frac{64}{255\pi}$	-0.0798895	$-\frac{1}{32\pi^2}$	-0.00316629
9	$\frac{72}{323\pi}$	0.0709545	$\frac{2}{27\pi^2}$	0.00750527
10	$-\frac{80}{399\pi}$	-0.0638215	$-\frac{1}{50\pi^2}$	-0.00202642

Clear[u];

Функція $u(x, t)$, яка обчислює n -й член розкладу ряду має вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_k[x, t] &:= \sum_{n=1}^k (a_n \cos[n\pi 2t] + b_n \sin[n\pi 2t]) \sin[n\pi x] // \text{Simplify} \\
 u_{10}[x, t] &= \frac{2(4\pi \cos[2\pi t] + 9\sin[2\pi t])\sin[\pi x]}{3\pi^2} - \frac{(32\pi \cos[4\pi t] + 15\sin[4\pi t])\sin[2\pi x]}{30\pi^2} \\
 &+ \frac{2(36\pi \cos[6\pi t] + 35\sin[6\pi t])\sin[3\pi x]}{105\pi^2} \\
 &- \frac{(256\pi \cos[8\pi t] + 63\sin[8\pi t])\sin[4\pi x]}{504\pi^2} \\
 &+ \frac{2(500\pi \cos[10\pi t] + 297\sin[10\pi t])\sin[5\pi x]}{2475\pi^2} \\
 &- \frac{(864\pi \cos[12\pi t] + 143\sin[12\pi t])\sin[6\pi x]}{2574\pi^2} \\
 &+ \frac{2(1372\pi \cos[14\pi t] + 585\sin[14\pi t])\sin[7\pi x]}{9555\pi^2} \\
 &- \frac{(2048\pi \cos[16\pi t] + 255\sin[16\pi t])\sin[8\pi x]}{8160\pi^2} \\
 &+ \frac{2(972\pi \cos[18\pi t] + 323\sin[18\pi t])\sin[9\pi x]}{8721\pi^2} \\
 &- \frac{(4000\pi \cos[20\pi t] + 399\sin[20\pi t])\sin[10\pi x]}{19950\pi^2}
 \end{aligned}$$

Анімацію розв'язку $u_{10}(x, t)$ при зміні часу $0 < t < 2$ отримуємо, використовуючи функцію `Animate`.

```

Animate[Plot[u10[x, t], {x, 0, 1}, PlotStyle -> {{Thick, Red}},
PlotPoints -> 30, PlotRange -> {-3/2, 3/2}, Ticks -> {{0, 1/2, 1}, {-1, 1}},
ImageSize -> 300],

```

{t, 0, 2}

PrintScreen анімації зображено на рис. 10.44.

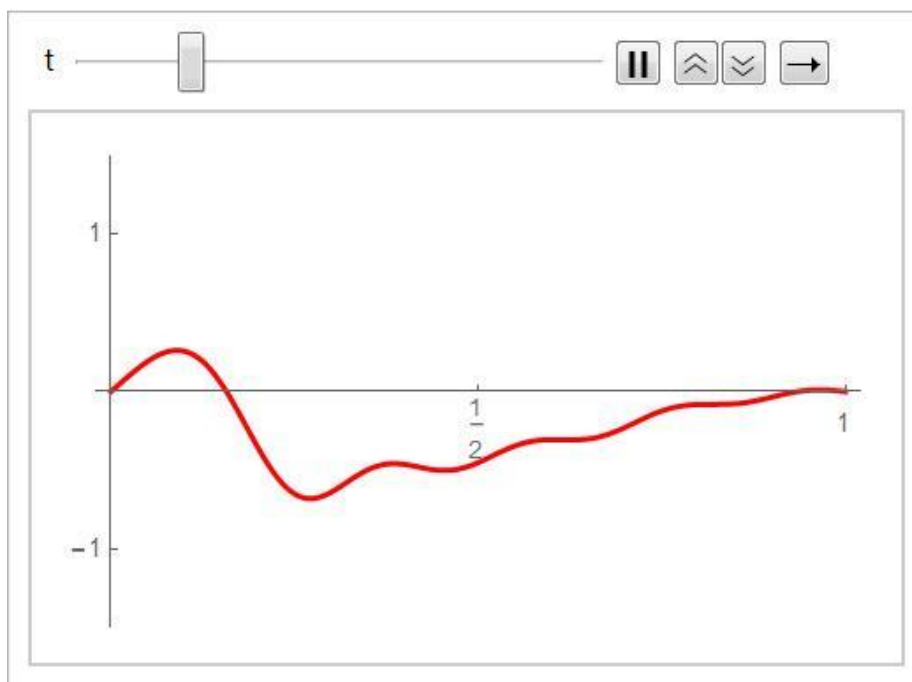


Рис. 10.44. PrintScreen анімації розв'язку $u_{10}(x, t)$ хвильового рівняння.

Приклад 10.79. Знайти розв'язок хвильового рівняння

$$4u_{x,x} + u_{y,y} = 0.$$

Навести приклади конкретних функцій, які є розв'язками даного рівняння.

Розв'язок. Дане рівняння – це двовимірне рівняння Лапласа еліптичного типу.

```
pde7=4 ∂x,xu[x,y] + ∂y,yu[x,y] == 0
DSolve[pde7, u[x,y] {x,y}] [[1,1]] /.coeff[C]
u(0,2)[x,y] + u(2,0)[x,y] == 0
u[x,y] → c1[ix + y] + c2[-ix + y]
```

Розв'язками рівняння є довільні функції з аргументами $(\pm ix + y)$. Функція, яка задовольняє рівняння Лапласа, наприклад, $e^y \cos(x)$, завдяки використанню команди `TrigToExp`, яка представляє тригонометричну форму запису функції в експоненціальній, – виявляється лінійною комбінацією функцій $e^{\pm ix + y}$.

```
u[x_, y_] = e^y Cos[x] // TrigToExp
(∂x,x# + ∂y,y# == 0) & @ u[x,y]
1/2 e-ix+y + 1/2 eix+y
```

```
True
```

Покажемо, що функція $y - x$ також є розв'язком.

```
Clear[u]
u[x_, y_] := y - x
(D[u[x, y], x] + D[u[x, y], y] == 0) & @ u[x, y]
True
```

Система комп'ютерної алгебри Mathematica дозволяє знаходити деякі важливі розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Наприклад, *солітонні розв'язки*. Загальноприйнятим визначенням солітона, є визначення дане Дразінім та Джонсоном. Згідно з цим визначенням *солітоном* називають хвильове збудження в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним трьома вимогам:

- воно розповсюджується з постійною швидкістю, не змінюючи при цьому своєї форми;
- воно локалізоване у просторі;
- воно не змінюється після зіткнення з іншим таким же збудженням (окрім можливого зсуву фаз).

Однією з найпростіших і найвідоміших моделей, що припускають існування солітонів у розв'язку, є рівняння Кортевега–де Фріза [51].

Приклад 10.80. *Знайти розв'язок нелінійного рівняння в частинних похідних третього порядку за змінними x, t*

$$\partial_t u = 6u \partial_x u - \partial_{x,x,x} u.$$

Розв'язок. Це рівняння Кортевега–де Фріза. Побудуємо його розв'язок.

```
Clear[u]
eqKdV = D[u[x, t], t] - 6u[x, t] D[u[x, t], x] - D[u[x, t], {x, 3}] == 0;
sol = DSolve[eqKdV, u, {x, t}];
soln = u[x, t] /. sol
{
  -8C[1]^3 + C[2] + 12C[1]^3 Tanh[xC[1] + tC[2] + C[3]]^2
  / 6C[1]
}
```

Рівняння Кортевега–де Фріза дає наближений опис поширення хвиль на мілкій воді, які рухаються в напрямку $+x$, де величина $-u(x, t)$ – це відхилення хвилі відносно рівня води у водоймі.

Перший солітонний розв'язок $u_1(x, t)$ рівняння Кортевега–де Фріза описує усамітнену хвилю (яку, власне, й називають солітоном), яка рухається в напрямку $+x$ зі швидкістю $v = 4$.

```
u1[x_, t_] := soln /. {C[1] → 2, C[2] → -4, C[3] → 0} // FullSimplify
u1[x, t]

$$\left\{ \frac{7}{3} - 8 \operatorname{Sech}[4t - 2x]^2 \right\}$$

```

Підставляючи розв'язок, можна переконатись, що цей односолітонний розв'язок в точності задовольняє рівняння Кортевега–де Фріза.

```
eqKdV /. sol // Simplify
{True}
```

Нарисуємо графік отриманого розв'язку.

```
gr = Plot3D[u1[x, t], {x, -5, 5}, {t, -5, 5}, Background → LightBlue,
PlotRange → All, ViewPoint → {2, 1, 1}, PlotPoints → 200,
AxesLabel → {x, t, u1}, PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]},
AbsoluteThickness[2]}]]
```

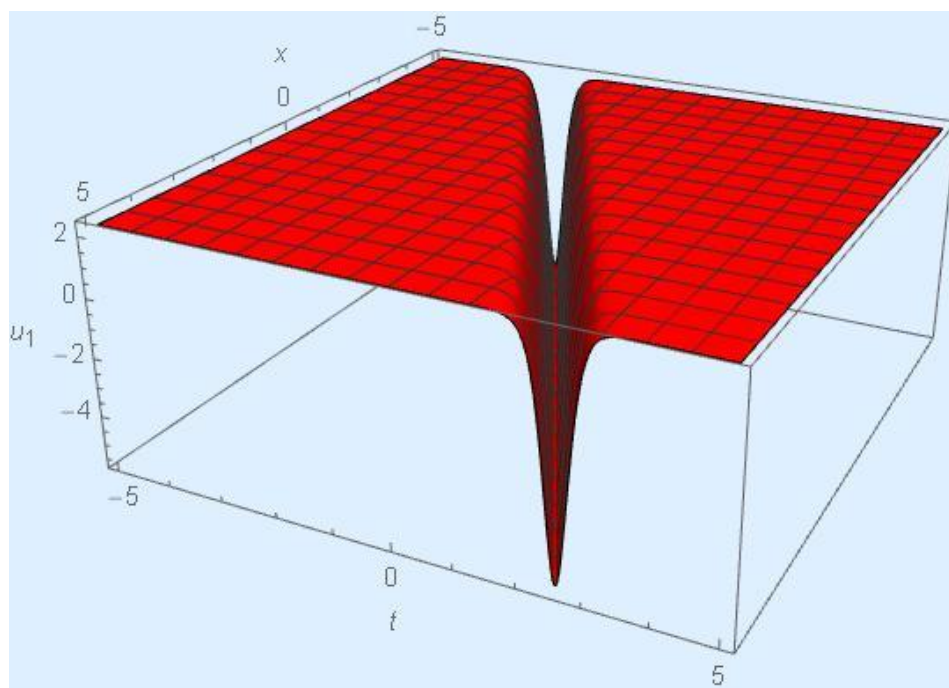


Рис. 10.45. Односолітонний розв'язок рівняння Кортевега–де Фріза.

Ми проілюстрували, що система комп'ютерної алгебри Mathematica є одним з найбільш зручних програмних засобів, що дозволяє досить ефективно виконувати як чисельні, так і символічні обчислення, має розвинену двовимірну і тривимірну графіку, а також вбудовану мову програмування високого рівня.

Прикладний пакет Mathematica дозволяє знаходити розв'язки диференціальних рівнянь або їх системи, як в символьному, так і в чисельному вигляді. Крім того, є можливість візуалізації отриманих результатів. Природним чином будь-яка поставлена математична задача попередньо досліджується класичними математичними методами, такими як аналіз і синтез, індукція і дедукція, а потім відбувається її формалізація і алгоритмічна реалізація. Наявність мови програмування в Mathematica дозволяє складати програми для широкого класу задач, в яких вхідні дані можна вільно варіювати і проводити масштабні експерименти, підтверджуючи або спростовуючи висунуті гіпотези, що дає можливість досліджувати реальні фізичні процеси з самих різноманітних сторін.

Питання, тести для самоконтролю

1. Охарактеризуйте технологію розв'язування диференціальних рівнянь в системі комп'ютерної алгебри Mathematica.
2. Як знайти частинний розв'язок диференціального рівняння в системі Mathematica?
3. Які особливості розв'язування систем диференціальних рівнянь в системі Mathematica?
4. Охарактеризуйте чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь в системі комп'ютерної алгебри Mathematica.
5. Опишіть яким чином використовується в системі Mathematica метод введення нових змінних при розв'язуванні нелінійних диференціальних рівнянь високих порядків?
6. Чи завжди вбудовані функції системи Mathematica дозволяють отримувати розв'язки диференціальних рівнянь?
7. Охарактеризуйте метод Ейлера побудови чисельних розв'язків диференціальних рівнянь.

8. Охарактеризуйте метод Рунге–Кутти побудови чисельних розв’язків диференціальних рівнянь.
9. Який зв’язок між методу Рунге–Кутти з методами Хойна та середньої точки?
10. Які переваги та труднощі при використанні методу Рунге–Кутти четвертого порядку для знаходженні розв’язків диференціальних рівнянь?
11. Охарактеризуйте метод Адамса побудови чисельних розв’язків задачі Коші для диференціальних рівнянь.
12. Опишіть застосування методу Ейлера для розв’язування систем диференціальних рівнянь.
13. Опишіть застосування методу Рунге–Кутти для розв’язування систем диференціальних рівнянь.
14. Яка функція називається сітковою?
15. Які вузли називають граничними? внутрішніми?
16. Охарактеризуйте суть різницевого методу.
17. Запишіть постановку чисельної задачі Коші.
18. Запишіть постановку чисельної крайової задачі.
19. Як в системі Mathematica побудувати аттрактор Лоренца?
20. Який інструментарій системи Mathematica використовується для розв’язування диференціальних рівнянь в частинних похідних?

Обов’язкові та додаткові задачі

Для закріплення та більш глибокого засвоєння матеріалу розділу розв’яжіть диференціальні рівняння та перевірте правильність отриманих результатів.

Знайти загальний розв’язок однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

№ задачі	Рівняння	№ задачі	Рівняння
1	$y'' - 4y' + 3y = 0,$	9	$y'' + 6y' + 25y = 0,$
2	$y'' - 2y' - 8y = 0,$	10	$y'' + 9y = 0,$
3	$y'' + 3y' + 2y = 0,$	11	$y'' - 16y = 0,$
4	$y'' - 4y' = 0,$	12	$y'' - y' + y = 0,$
5	$y'' - 2y' + y = 0,$	13	$y'' - 4y' + 3y = 0,$
6	$y'' - 4y' + 3y = 0,$	14	$y'' + 4y' + 4y = 0,$
7	$y'' + 8y' + 16y = 0,$	15	$y'' - 8y' = 0,$
8	$y'' - 4y' + 13y = 0,$	16	$y'' + 9y = 0.$

Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку

№ задачі	Рівняння	Початкові умови
1	$2y'' + 2y' + y = 0,$	$y(0) = 2, y'(0) = -1.$
2	$y'' + 4y = 0,$	$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$
3	$y'' - 6y' = 0,$	$y(0) = 1, y'(0) = 6.$
4	$y'' - 2y' + 10y = 0,$	$y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{9}.$
5	$y'' - 12y' + 37y = 0,$	$y(2\pi) = 1, y'(2\pi) = 6.$

Додаткові відомості та задачі для кращого опанування матеріалів розділу детально викладені в [1, 5–7, 11, 18–20, 23, 24, 29, 32, 33, 39, 40].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1.] Абрамович М. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, Физматлит, 1979. 830 с.
- [2.] Барабаш О.В., Онищенко В.В. Лабораторний практикум з вищої математики. Ч. 1. Навчальний посібник. Київ: ДУТ, 2013. 117 с.
- [3.] Барабаш О.В., Онищенко В.В. Лабораторний практикум з вищої математики. Ч. 2. Навчальний посібник. Київ: ДУТ, 2015. 113 с.
- [4.] Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. Частина 1. Київ: ДУТ, 2019. 224 с.
- [5.] Гаращенко Ф.Г. Пічкур В.В. Прикладні задачі теорії стійкості: навч. посіб. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка.— Київ: Київський університет, 2014. 142 с.
- [6.] Боярчук А.К., Головач Г.П. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Справочное пособие по высшей математике. Т.5, М: Эдиториал УРСС, 2001. 384 с.
- [7.] Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Из-во “Лань”, 2008. 288 с.
- [8.] Доля П.Г. Mathematica для математиков. Часть 1. Харьков: Харьковский Национальный Университет, 2015. 38 с.
- [9.] Доля П.Г. Mathematica для математиков. Часть 2. Харьков: Харьковский Национальный Университет, 2015. 105 с.
- [10.] Доля П.Г. Mathematica для математиков. Часть 3. Харьков: Харьковский Национальный Университет, 2015. 178 с.
- [11.] Доля П.Г. Mathematica для математиков. Часть 4. Харьков: Харьковский Национальный Университет, 2015. 84 с.
- [12.] Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математических исследованиях. СПб.: Питер, 2001. 624 с.
- [13.] Дьяконов В.П. Mathematica 4. Учебный курс. СПб.: Питер, 2001. 592 с.
- [14.] Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001. 1296 с.

- [15.]Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.: Солон, 2006. 720 с.
- [16.]Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М.: ДМК Пресс, 2010. 624 с.
- [17.]Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. К.: РННЦ "Дініт", 2003. 324 с.
- [18.]Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
- [19.]Кампе де Ферье Ж., Кеимбелл Р., Петьо Г. Функции математической физики. Справочное руководство. М.: Наука, 1963. 102 с.
- [20.]Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
- [21.]Львов М. Алгебра з комп'ютером. К.:Шк. світ, 2007. 128 с.
- [22.]Мостовской А.П. Численные методы в системе Mathematica: Учебное пособие. Мурманск: 2009. 249 с.
- [23.]Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. 2-ое издание. М.: Наука, 1984. 342 с.
- [24.]Пічкур В.В., Капустян О.В., Собчук В.В. Теорія динамічних систем. Луцьк: Вежа-Друк, 2020. 348 с.
- [25.]Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студента. СПб. БХВ-Петербург, 2005.
- [26.]Половко А.М., Бутусов П.Н. Mathcad для студента. СПб. БХВ-Петербург, 2006.
- [27.]Половко А.М. Mathematica для студента. СПб. БХВ-П-бург, 2007. 368 с.
- [28.]Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Мн. : БГУ, 1999. 265 с.
- [29.]Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Высшая школа. 1989. 383 с.

- [30.] Співаковський О.В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей. Херсон: Айлант, 2003. 224 с.
- [31.] Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання: Монографія. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 400 с.
- [32.] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1985. 176 с.
- [33.] Эдвардс Генри, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling. 3-е изд. М.: «Вильямс», 2007. 1104 с.
- [34.] Чичурин А.В., Лукашевич Н.А. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Мн.: БГУ, 1999. – 210 с.
- [35.] Чичурин, А.В., Швычкина Е.Н. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)». В 3 ч. Ч. 1. Минск : БГУ, 2016. – 62 с.
- [36.] Чичурин, А. В. Применение системы *Mathematica* при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)». В 3 ч. Ч. 2. – Минск : БГУ, 2017. – 60 с.
- [37.] Таранчук, В.Б. Основы программирования на языке Wolfram. Мн.: БГУ, 2015. 50с.
- [38.] Таранчук, В.Б. Введение в графику системы Mathematica: учеб. материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. – Минск: БГУ, 2017. 53 с.
- [39.] Янке Е., Эмде Д., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1964. 344 с.

- [40.]Abell, M. L. Differential Equations with Mathematica / M. L. Abell, J. P. Braselton, 4rd ed. Elsevier Academic press, 2016. 880 p.
- [41.]Chichurin A, Stepaniuk G. General solution to the fourth order linear differential equation with coefficients satisfying the system of three the first order differential equations // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. 2014. Випуск 1(31). С. 7 – 10.
- [42.]Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig, 1977.
- [43.]Heikki, R.Mathematica Navigator: Mathematics, Statistics and Graphics. 3rd Ed. Burlington : Elsevier, 2009. 1135 p.
- [44.]Mangano, S. O'Reilly Mathematica Cookbook. 2010. 832 p.
- [45.]Trott. M. The Mathematica Guide Book for Programming. Springer, 2004.
- [46.]Trott. M. The Mathematica Guide Book for Graphics. Springer-Verlag, 2004.
- [47.]Trott. M. The Mathematica Guide Book for Symbolics. Springer-Verlag, 2006.
- [48.]Trott. M. The Mathematica Guide Book for Numerics. Springer-Verlag, 2006.
- [49.]Robert Dr. Kragler Mathematica Tutorial Course. University Centre Publication No. 2000-8 Affiliation: University Centre at JINR, Dubna / Russia, 2000, 158 p.
- [50.]R. Kragler "Method of Inverse Differential Operators for the Solution of PDEs" published inComputer Algebra Systems in Teaching and Research, 6th Internat. Workshop, CASTR 2011,Siedlce, Feb. 2- 6, 2011. Proceedings (vol. Differential Equations, Dynamical Systems andCelestial Mechanics). L. Gadowski et al. (Eds.). Siedlce (2011) 79-95.
- [51.]R. Kragler The tanh-coth-method (TaCoM) Part 1 : Implementation of the Tanh-Coth Method to obtain symbolic solutions for Burgers-, KdV-and K(n,n)-families of nonlinear PDEs (2020): <https://www.researchgate.net/publication/339816525>.

[52.]D. Vvedensky “Partial Differential Equations with Mathematica”, Addison-Wesley Publ. 1993.

[53.]Wagon, S. Mathematica in action: problem solving through visualization and computation 3rd ed. New York : Springer, 2010.578 p.

Навчальне видання

Собчук Валентин Володимирович

Чичурін Олександр В'ячеславович

Кальчук Інна Володимирівна,

Жигалло Тетяна Василівна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АНАЛІЗУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В СИСТЕМІ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ МАТНЕМАТІСА

Підручник

Підписано до друку 10.06.2021. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний
Умовно-друковані арк. 26,5. Обліково-видавничі арк. 24,6
Наклад 300 прим. Замовлення № 48

Видавництво «МІЛЕНІУМ» (Київ)
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 535 від 19.07.2001 р.



Видавництво «МІЛЕНІУМ»
м. Київ, вул. Кирилівська, 60
тел.: +38 (067) 849-34-60
факс: +38 (044) 222-74-35
e-mail: milenium_ofis@ukr.net