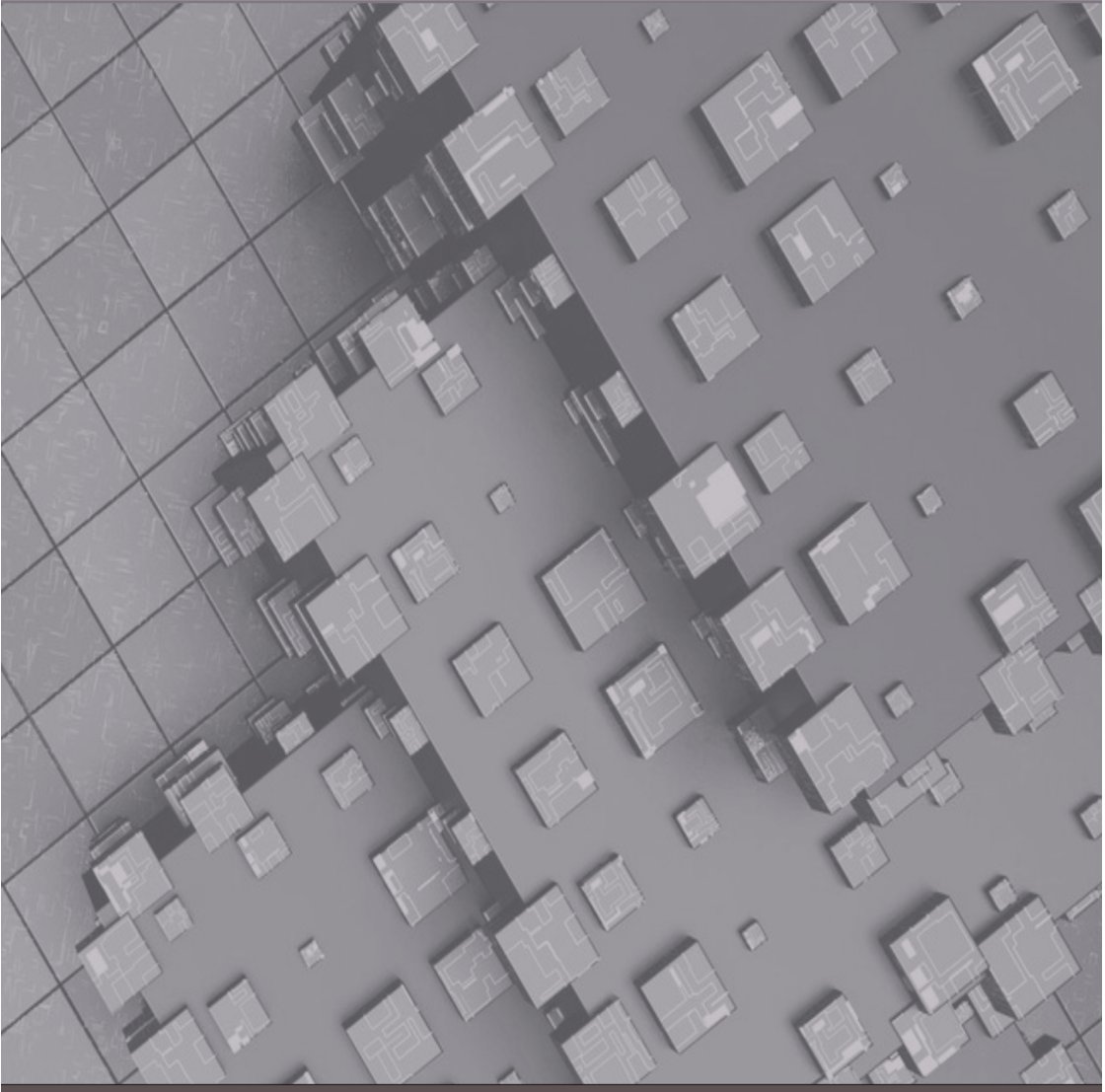


МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Укладачі: М.А. Руснак, М.П. Коцур

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 519.852
М 34

Друкується за ухвалою вченої ради Навчально-наукового інституту
фізико-технічних та комп'ютерних наук
(протокол № 1 від 24 січня 2025 року)

Укладачі: Руснак М.А., Коцур М.П.

М 34 **Математичне** програмування : навч. посіб. / уклад.: М.А.Руснак, М.П. Коцур. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. 200 с.

ISBN 978-966-423-935-3

Розглянуто питання як теоретичного обґрунтування, так і практичного використання методів пошуку розв'язків задач лінійного програмування та задач, що зводяться до них. Матеріал, викладений у посібнику, відповідає освітній програмі "Алгоритмічне та програмне забезпечення обчислювальних систем" спеціальності 122 "Комп'ютерні науки".

УДК 519.852

ISBN 978-966-423-935-3

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2025
Укладачі:
© М.А. Руснак, 2025
© М.П. Коцур, 2025

Зміст

Вступ 4
Розділ І. Лінійне програмування (ЛП) та теорія двоїстості 5
1. Загальна задача ЛП. Основні означення. Геометрична інтерпретація 5
2. Геометричні властивості допустимої множини ЗЛП 10
3. Алгебраїчні властивості ЗЗЛП 17
4. Канонічна форма задачі лінійного програмування 23
5. Симплекс-метод розв'язування КЗЛП 33
6. Проблема „зациклення" симплекс-методу …….....39
7. Пошук початкового базисного вектору 45
8. М–метод …….....50
9. Двоїсті задачі лінійного програмування …….....54
10. Теореми двоїстості …….....58
11. Двоїстий симплекс-метод 63
Розділ 2. Спеціальні задачі дослідження операцій 69
1. Транспортна та її двоїста задачі …….....69
2. Побудова базисного плану та його інтерпретація 74
3. Метод потенціалів …….....80
4. Транспортні задачі з обмеженнями 85
5. Задача про призначення …….....91
6. Цілочислове та дискретне програмування ….....96
7. Теорія матричних ігор …….....106
8. Оптимізаційні задачі на мережах …….....122
Розділ 3. Задачі нелінійного та стохастичного програмування ……132
Завдання для самоконтролю до розділу 1 ……152
Завдання для самоконтролю до розділу 2 ……167
Список літератури ….....195

Вступ

В загальному випадку задачу прийняття рішень формулюють як задачу вибору найкращого, в деякому сенсі, рішення з множини допустимих рішень. На практиці розв'язання задачі прийняття рішень є досить складним, що обумовлено невизначеністю ситуації, в якій приймається рішення. Для оцінки наслідків від прийняття рішення використовуються втрати, які може понести особа, яка приймає рішення, через відсутність повної інформації про ситуацію прийняття рішення.

В залежності від ситуації виділяють детерміновані задачі з повною інформацією про систему та множину рішень, задачі прийняття рішень в умовах невизначеності, коли про прийняття рішень невідомо нічого, крім можливої множини станів, і задачі прийняття рішень в умовах ризику, в яких відомі ймовірнісні характеристики впливів на об'єкт керування.

У цьому посібнику ми розглянемо найпростіші з них – так звані задачі лінійного програмування та задачі, які зводяться до них. У цих задачах математичні моделі та множини допустимих рішень записуються у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь та, так званих, природних обмежень на змінні. Для оцінки якості прийнятого рішення також використовується лінійна функція.

Розділ І. Лінійне програмування (ЛП) та теорія двоїстості

1. Загальна задача ЛП. Основні означення. Геометрична інтерпретація

Розглянемо декілька математичних моделей задач планування та управління, які зводяться до задач ЛП.

Задача А (про складання раціону). У розпорядженні фермера є n – різних кормів (сіно, силос, зерно, ...), кількості яких є відомими й постійними. Для ефективного відгодовування тварин необхідно забезпечити в їх раціоні присутність m – корисних речовин (жири, білки, вуглеводи, ...) у відомих кількостях. Нехай нам відомо вміст корисних речовин у кожному виді корму, що використовується, та ціна одиниці кожного корму. Необхідно скласти раціон (вказати набір та кількість кормів) так, щоб кожна корисна речовина містилася в ньому в необхідній кількості й сумарна вартість раціону була мінімальною.

Введемо умовні позначення:

$a_{i,j}$ – кількість i–ї корисної речовини в одиниці j–го корму;

b_i – мінімальна потреба тварин у i–й корисній речовині;

c_j – вартість одиниці j–го корму;

x_j – кількість одиниць j–го корму, що використовується у раціоні.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Задача полягає у пошуку такого набору чисел $x_j, j = \overline{1,n}$, для якого співвідношення (1-3) виконуються.

Задача В (про оптимальний план). Підприємство може виробляти n – найменувань продукції, використовуючи для цього m – видів сировини, запаси яких є відомими та сталими. Відомо також затрати кожного виду сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду, мінімальні та максимальні потреби в продукції кожного найменування та прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції кожного виду. Необхідно скласти такий план виробництва, який максимізує прибуток підприємства.

Введемо умовні позначення:

$a_{i,j}$ – затрати i –ї сировини на виробництво одиниці продукції j –го найменування;

b_i – запаси i –ї сировини;

d_j та D_j – мінімальні та максимальні потреби у продукції j –го найменування;

c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j –го найменування;

x_j – кількість одиниць продукції j –го найменування у плані.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$d_j \le x_j \le D_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Задача полягає у пошуку такого набору чисел $x_j,\ j = \overline{1,n}$, для якого співвідношення (4-6) виконуються.

Відзначимо спільні риси задач (1-3) та (4-6):

- досліджується на екстремум (1,4) лінійна функція;
- обмеження (2,5) є лінійними нерівностями типу $\le, \ge, =$;
- обмеження (3,6) накладаються безпосередньо на кожне невідоме.

Такого роду задачі називають задачами лінійного програмування.

Приведемо тепер загальну форму запису задачі лінійного програмування (ЗЗЛП): знайти вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$, який мінімізує (максимізує) лінійну функцію

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

та задовольняє системі лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,k},\ k \le n. \tag{9}$$

Функцію $L(x)$ називають функцією мети або цільовою функцією. Співвідношення (8) називають основними обмеженнями, а (9) – прямими (природними) обмеженнями.

Означення 1. Допустимою множиною ЗЗЛП (7-9) назвемо сукупність векторів $x \in R^n$ які задовольняють умовам (8,9). Вектор із допустимої множини назвемо допустимим вектором.

Означення 2. Допустимий вектор, на якому функція мети досягає свого мінімального (максимального) значення назвемо розв'язком ЗЗЛП.

Приведемо тепер геометричну інтерпретацію ЗЗЛП (7-9) за умови $k = n$. Графічно на площині можна розв'язати ЗЗЛП з двома змінними та ЗЗЛП, що зводяться до задач з двома змінними. У першому випадку потрібно побудувати на площині допустиму множину (врахувавши основні та природні обмеження ЗЗЛП) та лінію рівня цільової функції $L(x) = const$ при деякому фіксованому значенні $const$. Рухаючи далі лінію рівня в напрямку градієнта функції $L(x)$ (в ЗЗЛП на максимум), чи в напрямку антиградієнта (в ЗЗЛП на мінімум), знаходимо її останній перетин із допустимою множиною. Координати цієї точки знаходимо як розв'язок системи відповідних рівнянь, які отримуються з обмежень ЗЗЛП. Значення цільової функції підраховуємо підстановкою цих координат в $L(x)$.

Другий випадок має місце, якщо основні обмеження ЗЗЛП задано у вигляді рівностей та ранг r матриці основних обмежень ЗЗЛП рівний $n-2$ (очевидно, що $m \geq n-2$). Тоді базисних змінних в основних обмеженнях буде $n-2$, небазисних – 2. Виражаючи базисні змінні через небазисні та врахувавши природні обмеження, отримаємо систему

нерівностей, які задають проекцію допустимої множини на площину небазисних змінних. Підставивши вирази для базисних змінних в цільову функцію, знайдемо її екстремальне значення на проекції допустимої множини та координати розв'язку.

Приклад. Розв'язати графічно ЗЗЛП

$$L(x) = 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 \to extr,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 20, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ extr \in \{\min, \max\}.$$

В цьому випадку $n = 4,\ m = 2,\ r = 2$. Отже, задачу можна звести до задачі з двома змінними. За базисні змінні виберемо x_3 та x_4, небазисними будуть змінні x_1 та x_2. Визначимо $\begin{cases} x_3 = -6 - 2x_1 + 3x_2, \\ x_4 = 20 - 5x_1 - 4x_2, \end{cases}$ та запишемо допоміжну задачу

$$\overline{L}(x) = 5x_1 + 4x_2 - 32 \to extr,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Цю допоміжну задачу можна розв'язати графічно. Для допоміжної задачі на мінімум знаходимо $x_1^* = 0,\ x_2^* = 2,\ \overline{L}(x_1^*, x_2^*) = -24$. Відповідно, для вихідної задачі на мінімум одержуємо $x^* = (0,2,0,12),\ L(x^*) = -24$. Для допоміжної задачі на максимум $\overline{L}(x_1^*, x_2^*) = -12$, де (x_1^*, x_2^*) – довільна точка з відрізка $[B, C]$, $B = (\frac{36}{23}, \frac{70}{23})$, $C = (0,5)$. У параметричній формі рівняння цього відрізка має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{36}{23}\theta, \\ x_2 = \dfrac{70}{23}\theta + 5(1-\theta), \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Отже, для вихідної задачі на максимум маємо $L(x^*) = -12$. Це значення досягається у кожній точці виду $x^* = (\frac{36}{23}\theta, 5 - \frac{45}{23}\theta, 9 - \frac{207}{23}\theta, 0)^T$ при $0 \le \theta \le 1$.

2. Геометричні властивості допустимої множини ЗЛП

Геометрична інтерпретація ЗЗЛП, проведена на попередній лекції, дозволяє зробити такі висновки:

- допустима множина ЗЗЛП може бути порожньою, складатися із одного вектора, бути не порожньою й обмеженою або не порожньою й необмеженою;
- розв'язку ЗЗЛП може не існувати, він може бути єдиним або їх може бути багато;
- розв'язок ЗЗЛП, якщо він існує, знаходиться на границі допустимої множини.

Отже, визначальну роль у відшуканні розв'язку ЗЗЛП відіграє допустима множина та її властивості.

Означення 3. Нехай $x^1, x^2 \ldots x^r \in R^n$, $r \ge 2$. Опуклою лінійною оболонкою (ОЛО) точок $x^1, x^2 \ldots x^r$ назвемо множину точок $x \in R^n$ таких, що $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$, де $\alpha_i \in [0, \infty)$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$

У випадку $r = 2$ ОЛО називають відрізком у просторі R^n і вживають позначення $[x^1, x^2]$.

Означення 4. Не порожню множину $M \subseteq R^n$ назвемо опуклою множиною, якщо вона разом із будь-якими своїми точками x^1 та x^2 містить відрізок $[x^1, x^2]$, тобто $\forall x^1, x^2 \in M \Rightarrow [x^1, x^2] \subseteq M$.

Порожня множина та множина, яка складається із однієї точки, теж вважаються опуклими.

Означення 5. Півпростором простору R^n назвемо множину всіх точок із простору R^n таких, що $a^T x \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b$, де $a^T \in R^n$ і $b \in R^1$ задані величини ($a \neq 0$). Гіперплощиною в просторі R^n назвемо множину всіх точок із простору R^n таких, що $a^T x = b$, $a \neq 0$.

Лема 1. Перетин довільного числа опуклих множин є множина опукла.

Доведення. Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ опуклі множини і $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ – їх перетин. Відкидаючи тривіальні випадки вважаємо, що в множині M знайдеться хоча-б дві точки x^1 та x^2. Тоді

$x^1, x^2 \in M \Rightarrow x^1, x^2 \in M_i, \forall i \Rightarrow [x^1, x^2] \in M_i \Rightarrow [x^1, x^2] \in M$,

тобто, множина M – опукла. •

Лема 2. Півпростір опукла множина.

Доведення. Розглянемо, наприклад, півпростір $a^T x \leq b$, де $a^T \in R^n$ і $b \in R^1$ задані величини. Нехай x^1 та x^2 деякі точки з цього півпростору. Покажемо, що відрізок $[x^1, x^2]$ належить півпростору. Дійсно,

$\forall x \in [x^1, x^2] \Rightarrow \exists \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 : \; x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$.

Тоді

$$a^T x = \alpha_1 a^T x^1 + \alpha_2 a^T x^2 \leq \alpha_1 b + \alpha_2 b = b,$$

що й потрібно було довести. •

Лема 3. Гіперплощина опукла множина.

Доведення. Розглянемо гіперплощину $a^T x = b$ як перетин двох півпросторів $a^T x \leq b$ та $a^T x \geq b$. Застосовуючи послідовно результати *Леми 2* та *Леми 1* отримуємо потрібне твердження. •

Теорема 1. Допустима множина ЗЗЛП є опуклою множиною.

Доведення. Допустима множина ЗЗЛП утворюється перетином півпросторів та гіперплощин, що задаються співвідношеннями (8) та (9), а отже, згідно *Лем 1 – 3*, є опуклою множиною. •

Іноді допустиму множину ЗЗЛП називають опуклим багатогранником. Обмежений опуклий багатогранник називають опуклим багатокутником.

Теорема 2. Множина розв'язків ЗЗЛП є опуклою множиною.

Доведення. Відкидаючи тривіальні випадки, коли розв'язку ЗЗЛП не існує або він єдиний, розглянемо два розв'язки x^1 та x^2. Тоді, згідно (7) та *Означення 2*, отримуємо $L(x^1) = L(x^2) = \ell^*$, де ℓ^* – стала. Для кожної точки відрізка $[x^1, x^2]$:

$$\exists \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \;, x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 .$$

Тоді

$$L(x) = L(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) = \alpha_1 L(x^1) + \alpha_2 L(x^2) = \alpha_1 \ell^* + \alpha_2 \ell^* = \ell^*$$

Зауваження. Множина розв'язків ЗЗЛП не може бути скінченою множиною, якщо тільки вона не складається з однієї точки.

Теорема 3. Нехай $M \subset R^n$ опукла замкнена множина і $x^0 \notin M$. Тоді існує гіперплощина $a^T x + b = 0, a \neq 0$ така, що $a^T x^0 + b > 0$ і $a^T y + b < 0, \forall y \in M$.

Доведення. Оскільки множина M замкнена і $x^0 \notin M$, то $\exists x^* \in M$ така, що

$$\left\| x^0 - x^* \right\| = \inf_{y \in M} \left\| x^0 - y \right\| = d > 0.$$

Розглянемо функцію $l(x) = (x^0 - x^*)^T (x - x^*)$. Очевидно, що

$$l(x) = (x^0 - x^*)^T (x - x^*) = \left\| x^0 - x^* \right\|^2 = d^2 > 0.$$

Доведемо, що $l(y) \leq 0$ для $\forall y \in M$. Доведення проведемо від супротивного: нехай $\exists y \in M$ така, що $l(y) > 0$. Візьмемо довільне число $\alpha \in [0,1]$ і побудуємо точку $x(\alpha) = \alpha y + (1-\alpha) x^*$. Множина M опукла, тому $x(\alpha) \in M$. Тоді

$$\left\| x^0 - x(\alpha) \right\|^2 = \left\| x^0 - \alpha y - (1-\alpha) x^* \right\|^2 =$$

$$\left\| (x^0 - x^*) - \alpha (y - x^*) \right\|^2 = \left\| x^0 - x^* \right\|^2 -$$

$$2\alpha (x^0 - x^*)^T (y - x^*) +$$

$$+\alpha^2\left\|y-x^*\right\|^2 = d^2 + \alpha^2\left\|y-x^*\right\|^2 - 2\alpha l(y).$$

Оскільки, за припущенням $l(y)>0$, то якщо взяти $0<\alpha<\dfrac{2l(y)}{\left\|y-x^*\right\|^2}$,

отримаємо $\left\|x^0-x(\alpha)\right\|^2 < d^2$, що суперечить вибору точки x^*. Отже $l(y)\le 0$ для $\forall\, y\in M$. Побудуємо гіперплощину $l(x)-c=0$ де $0<c<d^2$. Тоді $l(x^0)-c=d^2-c>0$ і $l(y)-c\le -c<0$, тобто гіперплощина існує і $a=x^0-x^*$, $b=-c-(x^*)^T(x^0-x^*)$. •

Зауваження. Не складно перевірити, що гіперплощина $l(x)=0$ дотикається до множини M в точці x^*, тобто $l(x^*)=0$.

Означення 6. Гіперплощина $a^Tx+b=0, a\neq 0$ називається опорною до множини M в точці $p\in M$, якщо $\forall\, x\in M$ виконуються умови $a^Tx+b\le 0$ і $a^Tp+b=0$.

Приклад. У доведенні *Теореми 3* гіперплощина $l(x)=0$ є *опорною* до множини M в точці x^*. Гіперплощина $l(x)-c=0$ *відокремлює* множину M від точки x^*.

Означення 7. Кутовою точкою або вершиною опуклого багатогранника D назвемо таку його точку x для якої не існує інших точок $x^1, x^2\in D$, $x^1\neq x^2$, таких, що $x=\alpha_1x^1+\alpha_2x^2$ при $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Лема 4. Опуклий багатокутник є опуклою лінійною оболонкою своїх вершин.

Доведення. Легко переконатися, що кожна точка x опуклого багатокутника D є опуклою лінійною комбінацією деяких його крайніх точок. Дійсно, нехай $s \in R^n$ – довільний вектор. Розглянемо пряму $l(x) = x + \lambda s$, де $-\infty < \lambda < \infty$. Оскільки D – обмежена опукла множина, то пряма $l(x)$ перетинає його границю в двох точках x^1 та x^2 (можливо ці точки співпадають). Тоді точка x належить відрізку $[x^1, x^2]$ і, відповідно, є опуклою лінійною комбінацією граничних точок множини D. Залишилось довести, що кожна гранична точка є опуклою лінійною комбінацією деякої кількості своїх вершин. Для цього нагадаємо, що перетин гіперплощини $a^T x = b$, $a \neq 0$ з множиною $D \subseteq R^n$ має розмірність не більшу ніж $n-1$. Далі доведення проведемо методом індукції. Очевидно, що при $n = 1$ перетин являє собою множину розмірності 0 (точку) і твердження леми є тривіальним. Нехай для множин розмірності меншої n твердження доведено. Доведемо його для множин розмірності n. Нехай $y \in D$ довільна гранична точка множини D. Тоді, за теоремою 3, існує опорна гіперплощина $a^T x = a^T y$ до множини D в точці y і $a^T x \le a^T y$ для всіх $x \in D$. Перетин D_y множини D та цієї гіперплощини є множина опукла обмежена і не порожня ($y \in D_y$), його розмірність менша n. Отже, згідно індуктивного припущення, множина D_y є опуклою лінійною оболонкою своїх вершин. Крім того, кожна вершина z множини D_y є одночасно вершиною множини D. Дійсно, якщо це не так, то $z = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$ при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ і $x^1, x^2 \in D$, $x^1 \neq x^2$. Оскільки, точка z належить гіперплощині $a^T x = a^T y$, то

$$0 = a^T(z-y) = \alpha_1 a^T(x^1-y) + \alpha_2 a^T(x^2-y).$$

Оскільки, $x^1 - y \in D$ та $x^2 - y \in D$, то $a^T(x^1-y) \le 0$ і $a^T(x^2-y) \le 0$. Отже, $a^T(x^1-y) = 0$ і $a^T(x^2-y) = 0$, тобто $x^1 - y \in D_y$ та $x^2 - y \in D_y$. Звідси отримуємо, що $x^1, x^2 \in D_y$ і $x^1 = x^2$, що суперечить означенню вершини z. Отже, ми довели, що кожна гранична точка множини D є опуклою лінійною комбінацією своїх вершин. •

Зауваження. Подібне твердження можна довести і для опуклих багатогранників [6, с. 57].

Теорема 4. Якщо ЗЗЛП має розв'язок x^*, то існує вершина x^0 допустимої множини D така, що $L(x^0) = L(x^*)$.

Доведення. Розглянемо, наприклад, задачу мінімізації $L(x) = c^T x \to \min, x \in D$ і нехай x^* її розв'язок. Тоді $\forall x \in D$ маємо $c^T x^* \le c^T x$. Якщо x^* вершина множини D, то $x^0 = x^*$ і теорему доведено.

Нехай x^* не вершина множини D. За *Лемою 4*, її можна представити у вигляді опуклої лінійної комбінації деяких його вершин: якщо $x^1, x^2, \ldots, x^r$ – вершини множини D, то $x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$, де $\alpha_i \ge 0, i = \overline{1,r}$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Тоді

$$L(x^*) = c^T x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i c^T x^i \ge c^T x^0 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = c^T x^0 = L(x^0),$$

де $c^T x^0 = \min\limits_{i=1,r}(c^T x^i)$. Таким чином, x^0 – вершина допустимої множини й виконуються нерівності $c^T x^* \le c^T x$, $\forall x \in D$ та $c^T x^* \ge c^T x^0$. Звідси отримуємо $c^T x^* = c^T x^0$. •

Зауваження. Якщо мінімальне (максимальне) значення цільової функції досягається в декількох точках множини D, то таке ж значення цільової функції досягається в кожній точці опуклої лінійної оболонки цих точок.

З отриманих в цій лекції результатів зробимо *висновок*: щоб знайти розв'язок ЗЗЛП треба відшукати всі вершини допустимої множини та порівняти значення цільової функції у вершинах. Ті з вершин, в яких значення цільової функції мінімальне (максимальне) і будуть розв'язками ЗЗЛП.

Цей висновок можна було б взяти за основу для побудови алгоритму знаходження розв'язку ЗЗЛП. Однак :

- кількість вершин допустимої множини може бути досить великою;
- задача відшукання всіх вершин допустимої множини є досить складною.

Звідси випливає необхідність більш глибокого дослідження властивостей ЗЗЛП.

3. Алгебраїчні властивості ЗЗЛП

Введемо, для зручності, нові форми запису ЗЗЛП, відомі під загальною назвою *стандартної задачі лінійного програмування* (СЗЛП):

у координатній формі

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{12}$$

у матрично-векторній формі

$$L(x) = c^T x \to \min, \tag{13}$$

$$Ax = b, \tag{14}$$

$$x \geq 0, \tag{15}$$

де $x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$

Зауважимо, що операції відношення в (14) та (15) визначені покомпонентно. Матрицю $A \in R^m \times R^n$ називають матрицею основних умов СЗЛП. Якщо розглядати матрицю A як сукупність з n векторів $A_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{m,j})^T$, то умову (14) можна переписати в еквівалентному вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b. \tag{16}$$

Задача (13), (16), (15) – це СЗЛП *у векторній формі*.

Аналогічно ЗЗЛП, у СЗЛП вирішальну роль для відшукання розв'язків відіграють структура та властивості допустимої множини. Нагадаємо властивості системи лінійних алгебраїчних рівнянь (14). Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається *сумісною*, якщо існує хоча б один її розв'язок, і *несумісною* – в протилежному випадку. Сумісна система

називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною* – в протилежному випадку. Умови сумісності системи задаються у відомій теоремі *Кронекера-Капеллі*. Якщо ранг r сумісної системи рівнянь менший числа невідомих n, то система має нескінченно багато розв'язків. При цьому r невідомих (головних, базисних) лінійно виражаються через $n-r$ інших (вільних, небазисних) невідомих. Загальний розв'язок системи рівнянь є сумою будь-якого її частинного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи. Загальний розв'язок однорідної системи є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи розв'язків однорідної системи з довільними дійсними коефіцієнтами.

Для СЗЛП випадок несумісної системи (14) є тривіальним – задача розв'язку не має. Якщо система (14) визначена, то допустима множина може містити тільки одну точку. Відшукання розв'язку в цьому випадку теж доволі просте. Найбільш цікавим для досліджень є випадок невизначеної системи (14). В цьому випадку допустима множина може бути порожньою, містити тільки одну точку або містити нескінчену кількість точок. Надалі вважатимемо, що система лінійних рівнянь (14) (і відповідно (11) та (16)) невизначена, тобто, має місце співвідношення

$$rang(A) = rang(\overline{A}) \le m < n\,, \qquad \text{(R)}$$

де $\overline{A} = (A \vdots b)$ – розширена матриця системи (14).

Відмітимо основні відмінності СЗЛП від ЗЗЛП :

- задача полягає у відшуканні мінімуму лінійної функції $L(x)$;
- основні обмеження задано у вигляді рівностей;
- природні обмеження накладено на всі невідомі.

Приведемо сукупність правил, які дозволяють звести кожну ЗЗЛП до СЗЛП:

1. Задачу пошуку максимуму цільової функції $L(x)$ замінюємо задачею пошуку мінімуму функції $-L(x)$;
2. Обмеження, записані у вигляді нерівностей, зводимо до рівностей шляхом додавання (віднімання) до їх лівих частин додаткових невід'ємних змінних;
3. Якщо для деякої змінної x_i не вказано обмеження на знак, то робимо заміну змінних $x_i = x_i^+ - x_i^-$, де $x_i^+ \geq 0$ та $x_i^- \geq 0$.

У побудованої таким чином СЗЛП може зрости кількість невідомих n, але співвідношення (R) не порушиться.

Означення 8. Допустимий вектор $x \in D$ називається базисним вектором задачі (13 – 15), якщо відповідні його ненульовим компонентам стовпці матриці A є лінійно-незалежними.

Зауважимо, що в силу умови (R), кількість ненульових компонент базисного вектору не перевищує m. Базисний вектор називають *невиродженим*, якщо кількість його ненульових компонент дорівнює m, і *виродженим,* в інших випадках. Базисом базисного вектору називається впорядкований набір вектор-стовпців матриці A, що відповідають його ненульовим компонентам.

Приклад. Нехай обмеження СЗЛП мають вигляд

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Легко переконатися, що умова (R) виконується а матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x^1 = (0,2,0,1)^T$ невироджений базисний вектор з базисом $\{A_2, A_4\}$. Вектор $x^2 = (1,0,0,0)^T$ вироджений базисний вектор з базисом утвореним вектором A_1 та будь-яким іншим вектором A_2, A_3 або A_4. Вектор $x^3 = (0.5,1,0,0.5)^T$ допустимий вектор, але небазисний (кількість ненульових компонент більша двох). Вектор $x^4 = (0,3.5,–0.5,0)^T$ недопустимий (і небазисний).

Не зменшуючи загальності можна вважати, що ненульові компоненти вектору згруповані та вирівняні по лівому краю його представлення $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$, $r \le m$. Цього завжди можна досягнути шляхом зміни нумерації змінних.

Теорема 5. Нехай допустима множина D СЗЛП не порожня. Вектор $x \in D$ буде вершиною допустимої множини D тоді і тільки тоді, коли x базисний вектор СЗЛП.

Доведення. Необхідність. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$ вершина допустимої множини. Оскільки $x \in D$, то згідно (16) маємо $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$. Покажемо, що x базисний вектор, тобто, що система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно незалежна і $r \le m$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно залежна або $r > m$. Це означає, що існує нетривіальний розв'язок

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ однорідної системи $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = 0$. Побудуємо вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)^T \in R^n$, виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і розглянемо два вектори $x^1 = x + \varepsilon\alpha$ та $x^2 = x - \varepsilon\alpha$. Вибором ε (наприклад, $0 < \varepsilon < \min_{j:\alpha_j \neq 0} \frac{x_j}{|\alpha_j|}$) зробимо компоненти цих векторів невід'ємними $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$. Оскільки $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^1 A_j = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j = b \text{ і } \sum_{j=1}^{n} x_j^2 A_j = b,$$

тобто, це допустимі вектори $x^1 \in D$ і $x^2 \in D$. Очевидна рівність $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ суперечить тому, що x вершина допустимої множини. Отже, зроблене припущення невірне і, за означенням, x базисний вектор.

Достатність. Нехай x базисний вектор СЗЛП, покажемо, що x вершина допустимої множини. З означення базисного вектору маємо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$, система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно незалежна і $r \leq m$. Крім того, x допустимий вектор, тому $\sum_{j=1}^{r} x_j A_j = b$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що x не вершина множини D. Тоді

$$\exists x^1, x^2 \in D, x^1 \neq x^2 : x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Звідси робимо висновок про структуру цих векторів:

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_r^1, 0, \ldots, 0)^T \text{ та } x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_r^2, 0, \ldots, 0)^T.$$

Ці вектори допустимі, тому $\sum_{j=1}^{r} x_j^1 A_j = b$ та $\sum_{j=1}^{r} x_j^2 A_j = b$. Віднімаючи з першого співвідношення друге отримуємо $\sum_{j=1}^{r} (x_j^1 - x_j^2) A_j = 0$. Оскільки $x^1 \neq x^2$, то ця рівність може виконуватись тільки в тому випадку, коли система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно залежна, що суперечить означенню базисного вектору.

Отже, x вершина множини D. •

Доведена теорема дозволяє стверджувати: якщо СЗЛП має розв'язок x^*, то знайдеться базисний вектор СЗЛП $x^0 \in D$ такий, що $L(x^*) = L(x^0)$. Інакше кажучи, серед розв'язків СЗЛП є базисний вектор. Можна запропонувати такий алгоритм відшукання розв'язку СЗЛП: починаючи з деякого базисного вектору перейти до іншого базисного вектору такого, на якому значення цільової функції менше від попереднього. Однак, при цьому виникає кілька запитань, кожне із яких вимагає додаткових досліджень:

- як знайти хоча б один (початковий) базисний вектор;
- як здійснити перехід до іншого базисного вектору;
- чи можна забезпечити зменшення значення цільової функції при цьому переході;
- доки слід продовжувати пошуки нових базисних векторів.

4. Канонічна форма задачі лінійного програмування

Розпочнемо з прикладу, що дозволить намітити відповіді на поставлені в минулій лекції запитання.

Приклад 1. Розглянемо СЗЛП

$$L(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 \to \min,$$
$$x_1 + x_4 + x_5 = 2,$$
$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$$
$$x_3 - x_4 - 3x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5},$$

та спробуємо знайти її розв'язок.

Розв'язування. Очевидно, що $rangA = rang\overline{A} = 3 < 5$ та до базису найліпше взяти змінні x_1, x_2, x_3, так як складена з відповідних векторів A_j матриця одинична, а отже не вироджена. Змінні x_4, x_5 – небазисні. Виразимо з основних обмежень базисні змінні через небазисні

$$x_1 = 2 - x_4 - x_5,$$
$$x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5,$$
$$x_3 = 2 + x_4 + 3x_5.$$

Підставимо отримані вирази в цільову функцію та побудуємо базисний вектор x^1 при $x_4 = 0, x_5 = 0.$ Отримаємо $L(x) = 3 - x_4 + x_5$, $x^1 = (2,7,2,0,0)^T$ та $L(x^1) = 3$. Спробуємо зменшити значення цільової функції збільшуючи значення небазисних змінних. Очевидно, що збільшення змінної x_5 призведе до зростання значення $L(x)$, а збільшення змінної x_4 призведе до його зменшення. Доки можна збільшувати змінну x_4? Врахувавши природні обмеження задачі при $x_5 = 0$ отримуємо систему умов: $x_4 \leq 2, x_4 \leq 3\frac{1}{2}$. Отже, максимальне значення $x_4 = 2$. Обчислимо компоненти нового вектору $x^2 = (0,3,4,2,0)^T$ при цьому $L(x^2) = 1$. Легко

переконатися, що x^2 базисний вектор із базисом x_2, x_3, x_4. Будемо говорити, що змінну x_1 вивели з базису, а змінну x_2 ввели до базису. Виразимо базисні змінні через небазисні та підставимо отримані вирази в цільову функцію

$x_4 = 2 - x_1 - x_5$, $x_2 = 3 + 2x_1 - x_5$, $x_3 = 4 - x_1 + 2x_5$, $L(x) = 1 + x_1 + 2x_5$. Оскільки коефіцієнти при небазисних змінних в цільовій функції додатні, зменшити її значення збільшенням значень цих змінних неможливо. Отже, можна припустити, що розв'язок задачі $x^* = (0,3,4,2,0)^T$ і $L(x^*) = 1$. (Це справді стає очевидним, якщо розв'язати цю задачу графічним методом.)

Аналіз етапів розв'язування цього прикладу підказує декілька корисних ідей:

1. Бажано розв'язувати задачу, в якій легко знайти початковий базисний вектор;
2. При виконанні умови (R) можна так організувати перехід до нового базисного вектору, що значення цільової функції зменшується;
3. Якщо коефіцієнти при небазисних змінних в цільовій функції невід'ємні, зменшити значення цільової функції неможливо.

Припустимо, надалі, що нам відомо початковий базисний вектор в СЗЛП (13-15). При виконанні умови (R), з векторів, що утворюють базис базисного вектору можна скласти базисну матрицю B розміру $(m \times m)$, причому $\det B \neq 0$. Вважатимемо, що матриця B складена з перших m стовпчиків матриці A. Змінні $x_1, x_2, \cdots, x_m$ – називатимемо базисними, а змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ – небазисними.

Помножимо обмеження (14) на матрицю B^{-1} зліва і одержимо еквівалентні обмеження

$$\left[E \mid \alpha\right] \; x = \beta \,, \tag{17}$$

де E - одинична матриця розміру $(m \times m)$, α - матриця розміру $(m \times (n-m))$, $\beta = B^{-1}b$ – вектор розміру m. Якщо при цьому елементи вектору $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)^T$ невід'ємні, тобто

$$\beta_i \geq 0, i = \overline{1, m} \,, \tag{18}$$

то задачу (13), (17), (15),(18) називають *канонічною задачею лінійного програмування* (КЗЛП). Зауважимо, що КЗЛП можна записувати у координатній, векторній або матричній формах. Отже, якщо відомо деякий базисний вектор задачі (13-15), то можна перейти від СЗЛП до КЗЛП у формі (13,17,15.18). Якщо ж ні, то процес знаходження базисної матриці зводиться до перебору всіх можливих комбінацій вектор-стовпців матриці A. Кількість цих комбінацій не перевищує C_n^m. Якщо після перебору всіх варіантів потрібної матриці не знайдено, то канонічної форми СЗЛП не існує, тобто ЗЗЛП має порожню допустиму множину.

Дослідимо тепер процедуру переходу від одного базисного вектора до іншого, причому, особливу увагу звернемо на необхідність зменшення значення цільової функції.

Розглянемо КЗЛП у координатній формі

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min, \tag{19}$$

$$x_1 + \alpha_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,k} x_k + \ldots + \alpha_{1,n} x_n = \beta_1 ,$$

$$\dots$$

$$x_l + \alpha_{l,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{l,k}x_k + \dots + \alpha_{l,n}x_n = \beta_l, \qquad (20)$$

$$\dots$$

$$x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{m,k}x_k + \dots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \beta_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \qquad (21)$$

Припустимо, що всі базисні вектори цієї задачі не вироджені. Тут змінні $x_1, x_2, \cdots, x_l, \dots, x_m$ – базисні, а змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_k, \dots, x_n$ – небазисні. Початковий базисний вектор $x = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)^T$. Перехід до нового базисного вектору полягає у виведенні з числа базисних змінних змінної x_l та введенні до базису змінної x_k. Для цього скористаємося методом Жордано–Гауса. Від кожного рівняння системи (20), крім l–того, віднімемо l–те рівняння помножене на $\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}$ (очевидно, при цьому $\alpha_{l,k} \neq 0$), а l–те рівняння поділимо на $\alpha_{l,k}$. Отримаємо систему

$$x_1 + \alpha'_{1,l}x_l + \alpha'_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha'_{1,k}x_k + \dots + \alpha'_{1,n}x_n = \beta'_1,$$

$$\dots$$

$$\alpha'_{l,l}x_l + \alpha'_{l,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha'_{l,k}x_k + \dots + \alpha'_{l,n}x_n = \beta'_l, \qquad (22)$$

$$\dots$$

$$\alpha'_{m,l}x_l + x_m + \alpha'_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha'_{m,k}x_k + \dots + \alpha'_{m,n}x_n = \beta'_m,$$

коефіцієнти якої знаходимо за формулами

$$\alpha'_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{l,k}}, \ при \ \ i = l, \\ \alpha_{i,j} - \alpha_{l,j} \dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, при\, i \neq l, \end{cases} \tag{23}$$

$$\beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{l,k}}, \quad при \ \ i = l, \\ \beta_i - \beta_l \dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, \ при \ i \neq l. \end{cases} \tag{24}$$

Розглянемо детальніше стовпчик з номером k. Безпосередньо підраховуємо $\alpha'_{i,k} = \begin{cases} 1, \ при \ i = l, \\ 0, \ при \ i \neq l, \end{cases}$ тобто, змінна стала базисною.

Перевіримо, чи побудований за співвідношеннями (24) вектор буде базисним вектором КЗЛП. Згідно означення, цей вектор має бути допустимим та система векторів, які відповідають його ненульовим компонентам, має бути лінійно незалежною. Оскільки, $\beta_i > 0, i = \overline{1,m}$ (вектор x – не вироджений) і $\alpha_{l,k} \neq 0$ (за припущенням), то з нерівності $\beta'_l = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} > 0$ випливає, що $\alpha_{l,k} > 0$. Тобто, щоб змінну x_k можна було ввести до базису, в стовпчику k мають бути додатні числа. Якщо таке число одне, то номер l (змінної, яка виводиться з базису) заданий однозначно. Якщо ж таких чисел кілька, то номер l слід вибирати з умови $\dfrac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} = \min\limits_{i:\alpha_{i,k}>0} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,k}}$. Позначимо $\theta_k = \dfrac{\beta_l}{\alpha_{l,k}}$, де номери l та k

вибрано за описаними правилами, $\theta_k > 0$. Тоді співвідношення (24) задають новий базисний вектор

$$x' = (\beta_1 - \theta_k \alpha_{1,k}, ..., \beta_{l-1} - \theta_k \alpha_{l-1,k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k \alpha_{l+1,k}, ..., \beta_m - \theta_k \alpha_{m,k}, 0, ..., \quad , 0, \theta_k, 0, ..., 0)^T .$$

Додатних компонент у цьому векторі рівно m, їм (за перетворенням) відповідають одиничні вектори, які є лінійно незалежними. Отже, x' – базисний вектор КЗЛП. З'ясуємо тепер, чи можна зменшити значення цільової функції на новому базисному векторі. На початковому базисному векторі $x = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$ $L(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j$. На новому базисному векторі x', врахувавши, що $\beta_l' = \beta_l - \theta_k \alpha_{l,k} = 0$, маємо

$$L(x') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j' + c_k \theta_k = \sum_{j=1}^{m} c_j (\beta_j - \theta_k \alpha_{j,k}) + c_k \theta_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j + \theta_k (c_k - \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{j,k}) = L(x) + \theta_k \Delta_k ,$$

де введено позначення

$$\Delta_k = c_k - z_k , \;\; z_k = \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{j,k} . \qquad (25)$$

Величину $\Delta_j = c_j - z_j$ називають відносною оцінкою змінної x_j, $j = \overline{1,n}$.

Зауваження. Для знаходження відносних оцінок змінних у загальному випадку (коли змінні не згруповані спочатку), використовують співвідношення (25) при $z_j = c_{баз}^T \alpha_j$, де $c_{баз}$ – вектор, складений із коефіцієнтів при базисних

змінних у цільовій функції, α_j – вектор умов, що відповідає змінній x_j. Очевидно, що для кожної базисної змінної x_j маємо $\Delta_j = 0$.

Отже, на новому базисному векторі $L(x') = L(x) + \theta_k \Delta_k$ і $\theta_k > 0$. Для зменшення значення слід вибирати номер k (змінної, яка вводиться до базису) так, щоб $\Delta_k < 0$. Якщо така відносна оцінка єдина, то вибір однозначний. В противному випадку рекомендують знаходити мінімальну відносну оцінку.

Визначимо тепер умови закінчення процесу зміни базисних векторів.

Лема 5. Якщо з цільової функції виключити базисні змінні, то коефіцієнти при небазисних змінних співпадають з їх відносними оцінками, а вільний член є значенням цільової функції на цьому базисному векторі.

Доведення. Розглянемо КЗЛП (19 – 21) та виразимо з основних обмежень базисні змінні через небазисні $x_i = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_{i,j}, i = \overline{1,m}$. Підставимо отримані значення в цільову функцію:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i (\beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}) x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}) x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j.$$

Аналізуючи цей вираз отримуємо твердження леми. •

Теорема 6. Нехай x^* – базисний вектор КЗЛП (19 – 21). Якщо $\Delta_j \geq 0,\ j=\overline{1,n},$ то x^* – розв'язок цієї задачі.

Доведення. Згідно припущень, базисний вектор має структуру $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)^T$. Позначимо вектор-стовпчики матриці $[E \mid \alpha]$ в (17) символами $\alpha_j, j=\overline{1,n}$. Перші m цих векторів є лінійно незалежними та утворюють базис векторе x^*. Із (25) та умови теореми отримуємо, що $c_j \geq z_j, j=\overline{1,n}$. Нехай $y \in D$ довільний вектор, відмінний від векторе x^*. Якщо такого векторе не існує, то x^* – розв'язок КЗЛП. Покажемо, що $c^T y \geq c^T x^*$. Дійсно, легко отримати нерівність

$$c^T y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \geq \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j. \quad (26)$$

Доведемо, що $x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. Оскільки, вектор $y \in D$, то $[E \mid \alpha]\ y = \beta$, або у векторній формі $\sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \beta$. Цю рівність можна розглядати як розклад вектору β по системі векторів $\alpha_j, j=\overline{1,n}$. Розкладемо тепер кожен із векторів $\alpha_j, j=\overline{1,n}$ по системі лінійно незалежних векторів $\alpha_j, j=\overline{1,m}$. Отримаємо $\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \alpha_i, j=\overline{1,n}$. Тепер $\beta = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. З іншого боку, вектор $x^* \in D$ і в силу його структури маємо у векторній

формі $\beta = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \alpha_i$. Оскільки, розклад вектору β по системі лінійно незалежних векторів $\alpha_j, j = \overline{1,m}$ єдиний, отримуємо $x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. Повертаючись до нерівності (27) з урахуванням доведеного маємо $\forall\ y \in D$ виконується нерівність $c^T y \geq c^T x^*$ •

Залишилося розглянути випадок, коли серед відносних оцінок небазисних змінних є від'ємні (тобто, є змінна, яку потрібно ввести до базису), але у відповідному стовпчику матриці основних обмежень немає додатного числа (неможливо вибрати змінну, яку потрібно вивести з базису).

Теорема 7. Якщо для якого-небудь базисного вектору x КЗЛП існує хоча б одна від'ємна відносна оцінка $\Delta_k < 0$, а вектор-стовпчик α_k не має додатних компонент, то цільова функція КЗЛП необмежена знизу на допустимій множині.

Доведення. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ – такий базисний вектор для якого $\exists k : \Delta_k < 0\ ma\ \alpha_{i,k} \leq 0, i = \overline{1,m}$. Візьмемо число $\delta > 0$ та побудуємо вектор

$$y = (x_1 - \delta\alpha_{1,k}, x_2 - \delta\alpha_{2,k}, \ldots, x_m - \delta\alpha_{m,k}, 0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)^T,$$

де δ знаходиться на місці з номером k . Очевидно, що природні умови виконуються. Перевіримо виконання основних умов у векторній формі

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \alpha_i + \delta\alpha_k = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \delta\alpha_{i,k})\alpha_i + \delta\alpha_k = \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i -$$

$$- \delta \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k}\alpha_i + \delta\alpha_k = \beta,$$

оскільки $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k}\alpha_i = \alpha_k$. Отже, $y \in D$. На цьому векторі цільова функція приймає значення

$$L(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i + \delta c_k = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - \delta\alpha_{i,k}) + \delta c_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i +$$

$$+ \delta(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,k}) = L(x) + \delta\Delta_k.$$

За умовою теореми $\Delta_k < 0$, тому при $\delta \to \infty$ маємо $L(y) \to -\infty$, що і потрібно було довести. •

5. Симплекс-метод розв'язування КЗЛП

Отримані в попередній лекції результати дозволяють описати алгоритм відшукання розв'язку КЗЛП, відомий під назвою симплекс-методу. Нагадаємо зроблені припущення: розглядаємо КЗЛП

$$L(x) = c^T x \to \min,$$

$$\left[E \mid \alpha\right] \; x = \beta,$$

$$x \geq 0, \; \beta > 0,$$

основні обмеження якої задовольняють умові (R) і всі базисні вектори задачі не вироджені.

1. Виписуємо початковий базисний вектор

$$x = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T. \quad (27)$$

2. Обчислюємо відносні оцінки всіх небазисних змінних

$$\Delta_j = c_j - z_j, \;\; z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}. \quad (28)$$

3. Аналізуємо відносні оцінки небазисних змінних:
   a) Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то базисний вектор x розв'язок КЗЛП;
   b) Якщо $\exists k : \Delta_k < 0$ *та* $\alpha_{i,k} \leq 0, \; i = \overline{1,m}$, то цільова функція КЗЛП необмежена знизу на допустимій множині;
   c) Вибираємо номери k та l за правилами:

$$k : \Delta_k = \min_{j:\Delta_j < 0} \Delta_j, \quad (29)$$

$$l : \theta_k = \frac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} = \min_{i:\alpha_{i,k} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i,k}}, \quad (30)$$

виводимо з базису змінну x_l та вводимо в базис змінну x_k. Розраховуємо коефіцієнти $\alpha'_{i,j}$ та β'_i за формулами

$$\alpha'_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{l,k}}, \;\; при \;\; i = l, \\ \alpha_{i,j} - \alpha_{l,j} \dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, при\, i \neq l, \end{cases} \quad (31)$$

$$\beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{l,k}}, \;\; при \;\; i = l, \\ \beta_i - \beta_l \dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, \;\; при \; i \neq l \end{cases} \quad (32)$$

та виписуємо новий базисний вектор

$$x' = (\beta_1 - \theta_k\alpha_{1,k},\ldots,\beta_{l-1} - \theta_k\alpha_{l-1,k},0,\beta_{l+1} - \theta_k\alpha_{l+1,k},\ldots,$$
$$\beta_m - \theta_k\alpha_{m,k},0,\ldots,,0,\theta_k,0,\ldots,0)^T,$$

При цьому значення цільової функції зменшиться так

$$L(x') = L(x) + \theta_k\Delta_k . \qquad (33)$$

Відновлюємо попередні позначення та переходимо до п. 2. •

Зауваження. Скінчена кількість вершин множини D [6, с. 67] разом із вказаним (30) способом вибору θ_k забезпечує скінченність симплекс-методу: за певну кількість кроків або знайдемо розв'язок КЗЛП, або встановимо необмеженість знизу цільової функції на множині D.

Хід розв'язування зручно записувати в симплекс-таблицях такої структури:

$x_{баз}$	A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_n	β_i	θ_l
x_1	1	0	…	0	$\alpha_{1\,m+1}$	…	$\alpha_{1\,n}$	β_1	θ_1
x_2	0	1	…	0	$\alpha_{2\,m+1}$	…	$\alpha_{2\,n}$	β_2	θ_2
…	…	…		…	…		…	…	…
x_m	0	0	…	1	$\alpha_{m\,m+1}$	…	$\alpha_{m\,n}$	β_m	θ_m
Δ_j	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n		

Іноді, у першому рядку симплекс-таблиці замість стовпчиків A_j використовують змінні x_j. Елемент $\alpha_{l,k}$, який знаходиться на перетині l-го рядка та k-го стовпця називають провідним елементом симплекс-таблиці й виділяють рамкою. Наголосимо, що алгоритм суттєво використовує представлення (27).

Приклад. Розв'язати ЗЗЛП

$$L(x) = 7x_1 + x_2 \to \max \tag{34}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 6x_2 \ge 8, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 27, \end{cases} \tag{35}$$

$$x_2 \ge 0. \tag{36}$$

Розв'язування. На x_1 не накладено умови невід'ємності, тому зробимо заміну $x_1 = x_1 - x_3$, де $x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$. Уведемо в розгляд невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6 так, щоб у (35) всі нерівності перетворилися в рівності. Одержимо СЗЛП

$$L(x) = -7x_1 - x_2 + 7x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10, \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 - x_5 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_6 = 27, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Із вигляду основних обмежень запишемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $rang(A) = rang(\overline{A}) = 3$, то базисних змінних повинно бути також 3. Змінні x_1, x_3, x_4 не можна вибрати за базисні, бо матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ вироджена. Змінні x_2, x_5, x_6 також не можна вибрати за базисні,

незважаючи на те, що матриця $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ невироджена та має обернену $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, оскільки вектор $\beta = B^{-1}b = (10{,}52{,}-3)^T$ містить від'ємну компоненту.

Якщо ж за базисні взяти змінні x_2, x_4, x_5, то легко переконатися, що , $\det(B) = -3$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 46 \end{pmatrix}$. Перейдемо від СЗЛП до КЗЛП. Обчислимо

$\alpha = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -5/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 1 & 0 & -1/3 \\ 11 & 0 & -11 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, виразимо в цільовій функції базисні змінні через небазисні та зведемо подібні члени

$$L(x) = -9 - \frac{16}{3}x_1 + \frac{16}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 + x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 = 9, \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 - \frac{1}{3}x_6 = 1, \\ 11x_1 - 11x_3 + x_5 + 2x_6 = 46, \end{cases} \qquad (37)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Знайдемо відносні оцінки небазисних змінних $\Delta_1 = -\frac{16}{3}$, $\Delta_3 = \frac{16}{3}$, $\Delta_6 = \frac{1}{3}$.

Серед відносних оцінок є від'ємна (Δ_1) , тому змінну x_1 потрібно ввести до базису, причому $k = 1$.

Будуємо симплекс-таблицю

$x_{баз}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	β_i	θ_l
x_2	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{27}{5}$
x_4	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	3
x_5	11	0	–11	0	1	2	46	$\frac{46}{11}$
Δ_j	$-\frac{16}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$		

Оскільки, $\min\limits_i \theta_i = 3$,то вивести з базису потрібно змінну x_4, причому $l = 2$ (див. представлення (27)). Провідний елемент $\alpha_{l,k} = \frac{1}{3}$, виділяємо його в таблиці та пере розраховуємо її елементи за правилом прямокутника. Отримаємо наступну симплекс-таблицю

$x_{баз}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	β_i	θ_l
x_2	0	1	0	-5	0	2	4	2
x_1	1	0	–1	3	0	–1	3	–
x_5	0	0	0	–33	1	13	13	1
Δ_j	0	0	0	16	0	–5		

Провідний елемент $\alpha_{l,k} = 13$, виділяємо його в таблиці та перерозраховуємо її елементи. Отримаємо наступну і останню симплекс-таблицю

$x_{баз}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	β_i	θ_l
x_2	0	1				0	2	
x_1	1	0				0	4	
x_6	0	0				1	1	
Δ_j	0	0	0	43/13	5/13	0		

Усі відносні оцінки невід'ємні. Отже, розв'язком КЗЛП є вектор $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)^T = (4,2,0,0,0,1)^T$. Враховуючи заміну, будуємо розв'язок ЗЗЛП: $x^* = (4,2)^T$, причому $L(x^*) = 30.$

6. Проблема „зациклення" симплекс-методу

Спробуємо відмовитися від припущення, що всі базисні вектори КЗЛП не вироджені, тобто розглянемо задачу

$$L(x) = c^T x \to \min,$$

$$\left[E \mid \alpha\right] \; x = \beta \,,$$

$$x \geq 0, \; \beta \geq 0.$$

Оскільки деякі з чисел β_i можуть бути нулями, то при обчисленні чисел β'_i за формулою (32) деякі з них можуть стати нулями. Тоді, з співвідношення (30) випливає, що число θ_k може стати нулем, а отже, згідно (33), значення

цільової функції на новому базисному векторі не зміниться. Крім того, із (30) слідує також $\beta' = \beta$, хоча набори базисних векторів будуть різними. Можна продовжувати виконання алгоритму сподіваючись, на черговому кроці значення цільової функції зменшиться. Але в такому випадку можливе наступне ускладнення: обчисливши кілька векторів $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^q$, які співпадають між собою і відрізняються тільки вибором базису, на наступній ітерації можемо отримати в якості нового базисного вектору початковий вектор β^0 з початковим набором базисних векторів. В цьому випадку говорять, що алгоритм симплекс-методу зациклився: хоча розв'язок задачі існує і вектор x, побудований з елементів вектору β, не її розв'язок, алгоритм симплекс-методу обчислює той самий вектор, перебираючи до нескінченості той самий набір базисних векторів. Незважаючи на те, що ймовірність виникнення зациклення мала, розроблено кілька модифікацій алгоритму, які дозволяють гарантовано його уникнути [6, с. 178]. Перша з цих модифікацій базується на збуренні вектору β малим параметром ε, наступному розв'язуванні збуреної задачі та граничному переході $\varepsilon \to 0$ в розв'язку. Другий з відомих методів базується на понятті лексикографічної упорядкованості в просторі R^n. Для практичного використання можна рекомендувати таку процедуру: при виявленні зациклення симплекс-методу слід перервати виконання алгоритму, в основних обмеженнях поміняти місцями будь-які два обмеження і розпочати виконання алгоритму спочатку.

Проілюструємо ці міркування прикладом, запропонованим у [7]. Оскільки, явище за циклювання досить рідкісне, розв'яжемо задачу повністю:

$$L(x) = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \to \max,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 \le 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 \le 0,$$
$$x_1 \le 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Зведемо цю задачу до СЗЛП, яка одночасно буде і КЗЛП. Після відомих перетворень отримаємо задачу

$$L(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_7 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Застосуємо до цієї задачі симплекс-метод. Домовимося вводити в базис змінну з найменшим $\Delta_j < 0$, якщо більше ніж одна змінна може бути виведена з базису, будемо виводити змінну з найменшим індексом. Перейдемо до задачі на мінімум та виберемо за базисні змінні x_5, x_6, x_7. Початковий базисний вектор $x = (0,0,0,0,0,0,1)^T$. Зауважимо, що цей базисний вектор вироджений. Побудуємо симплекс-таблицю

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

З базису виводиться змінна x_5, вводиться змінна x_1.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0	--
x_6	0	4	2	-8	1	1	0	0	0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	1	$\frac{1}{11}$
Δ_j	0	-53	-41	204	20	0	0		

З базису виводиться змінна x_6, вводиться змінна x_2.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
x_7	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{53}{4}$	1	1	--
Δ_j	0	0	$-\frac{57}{4}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0		

З базису виводиться змінна x_1, вводиться змінна x_3.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_3	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	--
x_2	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	29	0	0	-18	-15	93	0		

З базису виводиться змінна x_2, вводиться змінна x_4.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_3	-2	4	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	20	9	0	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{141}{2}$	0		

З базису виводиться змінна x_3, вводиться змінна x_5.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	--
x_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	-22	93	21	0	0	-24	0		

З базису виводиться змінна x_4, вводиться змінна x_6. Наступна таблиця співпадає з початковою:

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

Для уникнення зациклення поміняємо місцями, наприклад, перші два обмеження та зведемо задачу до КЗЛП. Отримаємо задачу

$$L(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_7 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Застосуємо симплекс-метод:

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

З базису виводиться змінна x_5, вводиться змінна x_1.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	-3	-1	2	2	0	0	0	--
x_6	0	-4	-2	8	-1	1	0	0	--
x_7	0	3	1	-2	-2	0	1	1	1
Δ_j	0	27	-1	44	20	0	0		

З базису виводиться змінна x_7, вводиться змінна x_3.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1	--
x_6	0	2	0	4	-5	1	2	2	--

x_3	0	3	1	-2	-2	0	1	1	--
Δ_j	0	30	0	42	18	0	1		

Всі відносні оцінки невід'ємні. Розв'язком задачі є вектор $x^* = (1,0,1,0)^T$ і $L(x^*) = 1$.

Зауваження. Практика розв'язування ЗЛП показує високу ефективність симплекс-методу. Так, для знаходження розв'язку задачі з m обмеженнями та n невідомими, як правило, достатньо m ітерацій. Кількість елементарних арифметичних операцій при цьому не перевищує числа $n^2 m$. Однак, теоретичні дослідження доводять, що складність цього алгоритму є експоненціальною. Тому тривають пошуки більш швидких алгоритмів.

7. Пошук початкового базисного вектору

Алгоритм симплекс-методу дозволяє знайти розв'язок КЗЛП або встановити необмеженість знизу цільової функції на допустимій множині. Однак, перехід від СЗЛП до КЗЛП вимагає використання хоча-б одного базисного вектору. Щоб знайти початковий базисний вектор потрібно вибрати базисні змінні, скласти базисну матрицю, знайти обернену та помножити її на вектор правих частин основних обмежень. Якщо отриманий вектор має невід'ємні координати, то базисний вектор знайдено. В противному випадку, коли оберненої матриці не існує або в отриманому векторі є від'ємні координати, процедуру повторюють з новим набором базисних змінних. Складність цього підходу та невизначеність кінцевого результату стимулює подальші дослідження.

Розглянемо ЗЗЛП (7–9) при $k = n$. Припустимо, що $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$ – при необхідності цього можна досягти множенням відповідного обмеження на -1. Розіб'ємо основні обмеження (8) на три групи (зберігаючи в кожній з них звичні позначення): до першої віднесемо всі обмеження типу $\leq$, до другої – типу $\geq$, до третьої – типу =. Спробуємо звести до канонічного виду кожну групу обмежень окремо.

1. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax \leq b, x \geq 0, b \geq 0$.

Перехід до канонічної форми очевидний – додамо до кожного обмеження невід'ємну змінну $y_i, i = \overline{1,m}$. Отримаємо обмеження $Ax + Iy = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ b \geq 0$, де $I(m \times m)$ – одинична матриця. Візьмемо за базисні змінні $y_i, i = \overline{1,m}$. Тоді базисний вектор має розмірність $n + m$ і структуру $(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots b_m)^T$.

2. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax \geq b, x \geq 0, b \geq 0$.

Віднімемо від кожного обмеження невід'ємну змінну $y_i, i = \overline{1,m}$. Отримаємо обмеження
$Ax - Iy = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ b \geq 0$, де $I(m \times m)$ – одинична матриця. Знайдемо індекс k такий, що $b_k = \max\limits_{i=\overline{1,m}} b_i$. Віднімемо від k-го рівняння i-те ($i \neq k$) та замінимо різницею i-те рівняння. Кожне таке рівняння (їх є $m-1$) має структуру

$$(a_{k,1} - a_{i,1})x_1 + \ldots + (a_{k,n} - a_{i,n})x_n - y_k + y_i = b_k - b_i.$$

Оскільки, праві частини цих рівнянь невід'ємні, вибір базисних змінних очевидний – це змінні $y_i,\ i = \overline{1,m},\ i \neq k$. Рівняння з номером k віднесемо до третьої групи обмежень.

3. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax = b, x \geq 0, b \geq 0$, можливо сюди входить одне обмеження з другої групи.

Розглянемо допоміжну задачу

$$L_S(x, y) = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$

$$Ax + Iy = b, \qquad (38)$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ b \geq 0.$$

Очевидно, що це КЗЛП, причому цільова функція обмежена знизу на допустимій множині. Застосовуючи до (38) симплекс-метод знайдемо її розв'язок (x^S, y^S). З вигляду цільової функції $L_S(x, y)$ робимо висновок, що на розв'язку може мати місце один із двох випадків:

$L_S(x^S, y^S) = 0$ або $L_S(x^S, y^S) > 0$.

В першому випадку, враховуючи умову $y \geq 0$ отримуємо $y_i = 0, i = \overline{1,m}$. Тому розв'язок задачі (38) має структуру $(x_1^S, x_2^S, \ldots, x_n^S, 0, \ldots, 0)^T$, причому $x^S{}_i \geq 0, i = \overline{1,n}$. Оскільки виконується умова (R), то серед чисел x_i^S є не більше m додатних, причому їм відповідає система лінійно-незалежних вектор-стовпчиків матриці A. Звідси робимо висновок: вектор x^S є вершиною багатогранника, заданого обмеженнями $Ax = b,\ x \geq 0,\ b \geq 0$, тобто x^S базисний вектор.

В другому випадку хоча б одне з чисел $y_k > 0$. Розглянемо довільний вектор $x \in \{x : Ax = b,\ x \geq 0,\ b \geq 0\}$ та вектор y складений із m нулів. Тоді нескладно перевірити, що

вектор (x, y) є допустимим для задачі (38) і $L_S(x, y) = 0$, що неможливо. Звідси робимо висновок: множина $\{x : Ax = b,\ x \geq 0,\ b \geq 0\}$ – порожня.

Отже, кожну з трьох груп обмежень (7–9) ми звели до канонічної форми. На цих перетвореннях побудовано метод відшукання початкового базисного вектора СЗЛП (нагадаємо, що кожну ЗЗЛП можна звести до СЗЛП) – *метод штучної бази.*

Розглянемо СЗЛП

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0, b \geq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Нехай в матриці A є лише $0 \leq k < m$ стовпців одиничної матриці. Припустимо, що вони відповідають змінним $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Введемо в розгляд штучні змінні $y_1, y_2, \cdots, y_{m-k}$ такі, що $y_j \geq 0, j = \overline{1, m-k}$. Матрицю A доповнимо $m-k$ одиничними стовпцями так, щоб результуюча матриця містила повний набір стовпців одиничної матриці порядку m. Позначимо нову матрицю $\overline{A}$. Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m-k} y_j \to \min, \\ &\overline{A}\ \overline{x} = b, \\ &\overline{x} \geq 0, b \geq 0. \end{aligned}$$

Тут $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k})^T \in R^{n+m-k}$.

За побудовою це КЗЛП з базисними змінними $\{x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k}\}$ і її можна розв'язати симплекс-методом. Оскільки цільова функція допоміжної задачі обмежена знизу на допустимій множині, то її розв'язок існує. Нехай $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$ – знайдений розв'язок. Якщо серед штучних змінних є додатні, то допустима множина початкової задачі порожня. Якщо ж всі штучні змінні нульові, то вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ є базисним для початкової задачі. Далі обчислення проводять за загальною схемою симплекс-методу.

Приклад. Знайти базисний розв'язок СЗЛП

$$4x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Одиничний вектор $(0,0,1)^T$ відповідає лише одній змінній x_4. Вводимо штучні змінні $y_1 \geq 0$ та $y_2 \geq 0$ і будуємо нову задачу

$$y_1 + y_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Застосувавши симплекс-метод, одержимо розв'язок цієї задачі $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, y_1^*, y_2^*)^T = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1, 0, 0)^T$. Отже, за

початковий базисний вектор вихідної задачі можна взяти $(\frac{3}{5},\frac{6}{5},0,1)^T$ і при цьому базисними будуть змінні x_1, x_2, x_4.

8. М–метод

Метод штучної бази дозволяє на першому етапі знайти початковий базисний вектор СЗЛП або показати, що допустима множина задачі порожня. На другому етапі, для знаходження розв'язку задачі, потрібно перейти до КЗЛП та знову застосувати симплекс-метод. Виникає питання, чи не можна сумістити ці етапи розв'язування початкової задачі.

Розглянемо СЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0, b \geq 0. \end{aligned} \qquad (40)$$

Візьмемо досить велике додатне число M, яке вважатимемо більшим за всі числа, з якими воно буде порівнюватися в ході обчислень. Побудуємо $M-$*задачу* в канонічній формі

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m-k} y_i \to \min, \\ &\overline{A}\,\overline{x} = b, \\ &\overline{x} \geq 0, b \geq 0, \end{aligned}$$

де матриця $\overline{A}$ та вектор $\overline{x}$ мають такі самі властивості, що і в методі штучної бази.

При розв'язуванні $M-$*задачі* симплекс-методом можливі випадки:

1. *M-задача* має розв'язок $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$, причому $y_i^* = 0,\ i = \overline{1, m-k}$;

2. *M-задача* має розв'язок $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$, причому серед чисел y_i^* є хоча б одне додатне;

3. Цільова функція $M-$ *задачі* не обмежена знизу на допустимій множині $M-$ *задачі*.

Для спрощення припустимо, що $k = 0$, тобто штучні змінні вводяться в кожне з основних обмежень задачі (40).

У першому випадку розв'язком задачі (40) буде вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$. Дійсно, якщо $y_i^* = 0,\ i = \overline{1, m}$, то $Ax^* + Iy^* = Ax^* = b$, тобто x^* допустимий вектор (40). Нехай x довільний допустимий вектор задачі (40). Тоді вектор $x_M = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)^T$ допустимий для *M-задачі*. З нерівності $c^T x^* \le c_M^T x^* \le c_M^T x_M \le c^T x$, де $c_M = (c_1, c_2, ..., c_n, M, .., M)^T$ випливає потрібне твердження.

У другому випадку $c_M^T x_M^* = c^T x^* + M\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ і $\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$.

Припустимо від супротивного, що допустима множина задачі (40) не порожня і нехай x довільний допустимий вектор задачі (40). Побудуємо вектор $x_M = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)^T$ очевидно що він допустимий для $M-$ *задачі* і $c_M^T x_M = c^T x$. Тоді має виконуватися нерівність

$c^T x^* + M\sum_{i=1}^{m} y_i^* = c_M^T x_M^* \le c_M^T x_M = c^T x$, що неможливо в силу визначення числа M. Отже, допустима множина задачі (40) порожня.

У третьому випадку можна довести, що цільова функція задачі (40) не обмежена знизу на допустимій множині, якщо вона не порожня [3, с. 88].

Зауваження. Якщо допустима множина задачі (40) порожня, то, можливо, цільова функція M *– задачі* не обмежена знизу на допустимій множині M *– задачі* .

Розглянемо, наприклад, задачу
$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 \to \min, \\ &-x_1 = 1, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

та побудуємо M *– задачу*
$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 + My \to \min, \\ &-x_1 + y = 1, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що допустима множина початкової задачі порожня. Допустима множина M *– задачі* містить підмножину векторів, які допускають представлення $x_M = (0, \varepsilon, 1)^T$, $\forall \varepsilon > 0$. Обчислимо значення цільової функції M *– задачі* на таких векторах: $L(x_M) = -\varepsilon + M \to -\infty$ при $\varepsilon \to \infty$, оскільки число M – постійна.

Приклад. Розв'язати задачу
$$\begin{aligned} &-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min, \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases} \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Розв'язування. Побудуємо M *– задачу*

$$-3x_1+2x_2-x_3-4x_4+M(y_1+y_2)\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+y_1=2,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4+y_2=1,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4},\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0.$$

Базисними є змінні y_1 та y_2. Виразимо базисні змінні через небазисні і підставимо значення в цільову функцію. Групуючи доданки отримаємо

$$(-3M-3)x_1+2x_2+(-2M-1)x_3-4x_4+3M\to\min.$$

Застосуємо до *M – задачі* симплекс-метод.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β_i	θ_l
y_1	1	1	1	1	1	0	2	2
y_2	2	-1	1	-1	0	1	1	$\frac{1}{2}$
Δ_j	$-3M-3$	2	$-2M-1$	-4	0	0		

На цій ітерації змінна y_1 виводиться з базису, змінна x_1 вводиться в базис. Після кількох ітерацій, одержимо останню симплекс-таблицю

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β_i	θ_l
x_4	0			1			1	
x_1	1			0			1	
Δ_j	0	6	$\frac{14}{6}$	0	$M+\frac{11}{3}$	$M-\frac{1}{3}$		

Всі відносні оцінки невід'ємні, отже вектор $(1,0,0,1,0,0)^T$ розв'язок *M – задачі*, а вектор $(1,0,0,1)^T$ – розв'язок початкової задачі.

9. Двоїсті задачі лінійного програмування

Ми навчилися розв'язувати ЗЛП, в яких кількість невідомих і ранг матриці основних обмежень зв'язані співвідношенням

$$rang(A) = rang(\overline{A}) \le m < n\,. \qquad \text{(R)}$$

Що ж робити коли ця умова не виконується? Відповідь на це питання і дає теорія двоїстості – метод дослідження і розв'язування ЗЛП, який ґрунтується на побудові за чітко визначеними правилами іншої (двоїстої) задачі, її наступному розв'язуванні і побудові за знайденим розв'язком розв'язку початкової задачі.

Визначимо правила побудови двоїстої задачі. Спочатку розглянемо СЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax = b, \\ &x \ge 0. \end{aligned} \qquad (41)$$

Проведемо перетворення:

$$Ax = b \Rightarrow b - Ax = 0 \Rightarrow \forall\, u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T \in R^m : c^T x = c^T x +$$

$$+ u^T (b - Ax) = c^T x + u^T b - u^T Ax = (c^T - u^T A)x + u^T b\,.$$

Виберемо $u \in R^m$ так, щоб $c^T - u^T A \ge 0$. Тоді виконується нерівність

$c^T x \ge u^T b$, при умові $A^T u \le c$. Побудуємо задачу

$$\begin{aligned} &W(u) = b^T u \to \max, \\ &A^T u \le c. \end{aligned} \qquad (42)$$

Задачу (42) будемо називати несиметричною двоїстою задачею до задачі (41), пару задач (41)–(42) будемо називати несиметричною парою двоїстих задач. Термін *несиметрична* вживається тому, що в одній задачі є природні обмеження, а в другій немає.

Лема 6. Для довільних допустимих векторів x та u задач (41)–(42) відповідно виконується нерівність $c^T x \geq b^T u$. Якщо для деяких допустимих векторів x^* та u^* виконується рівність $c^T x^* = b^T u^*$, то ці вектори є розв'язками задач (41)–(42) відповідно.

Доведення. Виконання нерівності $c^T x \geq b^T u$ для довільних допустимих векторів x та u задач (41)–(42) відповідно, безпосередньо випливає з побудови несиметричної двоїстої задачі. Доведемо другу частину леми. Нехай, для деяких допустимих векторів x^* та u^* виконується рівність $c^T x^* = b^T u^*$ але:

– x^* не є розв'язком (41) $\Rightarrow \exists x \in D_L : c^T x < c^T x^* = b^T u$, що суперечить першій частині леми;

– u^* не є розв'язком (42) $\Rightarrow \exists u \in D_W : b^T u > b^T u^* = c^T x^*$, що суперечить першій частині леми;

– x^* не є розв'язком (41) і u^* не є розв'язком (42) $\Rightarrow \exists x \in D_L$ і $\exists u \in D_W : b^T u > b^T u^* = c^T x^* > c^T x$, що суперечить першій частині леми. •

Розглянемо тепер ЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax \geq b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \qquad (43)$$

Очевидно, що кожна задача (7) – (9) може бути зведена до задачі (43). Приведемо її до стандартної форми

$$L(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x} \to \min,$$
$$(A \vdots -I)\bar{x} = b,$$
$$\bar{x} \geq 0,$$

де $I(m \times m)$ одинична матриця, $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)^T \in R^{n+m}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T \in R^{n+m}$ та запишемо двоїсту задачу

$$W(u) = b^T u \to \max,$$
$$u^T (A \vdots -I) \leq \bar{c}^T,$$

$$\Rightarrow \qquad W(u) = b^T u \to \max,$$
$$u^T A \leq c^T,$$
$$-u^T I \leq 0^T,$$

$$\Rightarrow$$

$$W(u) = b^T u \to \max,$$
$$A^T u \leq c, \qquad (44)$$
$$u \geq 0.$$

Задачу (44) будемо називати симетричною двоїстою задачею до задачі (43), пару задач (43)–(44) будемо називати симетричною парою двоїстих задач.

Зауваження. В силу побудови задачі (44), твердження *Леми 6* виконуються для симетричної пари двоїстих задач (43) – (44).

Зауваження. Іноді одну з пари двоїстих задач називають прямою задачею, а іншу – двоїстою (спряженою) задачею. Легко впевнитись, що двоїста до двоїстої задачі співпадає з прямою задачею.

Підкреслимо *характерні особливості пари двоїстих задач*:

1. кількість змінних в одній із задач двоїстої пари рівна кількості основних обмежень у іншій задачі, і навпаки;
2. вектор, складений із правих частин основних обмежень однієї із задач двоїстої пари, є вектором коефіцієнтів цільової функції в іншій задачі, і навпаки;
3. матриця, складена з коефіцієнтів основних обмежень однієї із задач двоїстої пари, є транспонованою до матриці, складеної із коефіцієнтів основних обмежень іншої задачі, і навпаки;
4. якщо основне обмеження однієї із задач двоїстої пари виконується як рівність, то відповідна йому (за номером) змінна іншої задачі не має природного обмеження (обмеження на знак).

Приклад. Побудувати двоїсту задачу до заданої ЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min, \\ &x_1 + x_2 - 4x_3 \le 4, \\ &x_1 - x_2 = 2, \\ &x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язування. Основних обмежень два, тому двоїстих змінних теж повинно бути дві – u_1 та u_2, змінних в прямій задачі три, тому обмежень у двоїстій задачі повинно бути три. Приведемо пряму задачу до виду (43) та запишемо двоїсту до неї у формі (44)

$$\begin{aligned} &L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min, \\ &-x_1 - x_2 + 4x_3 \ge -4, \\ &x_1 - x_2 = 2, \\ &x_1 \ge 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &W(u) = -4u_1 + 2u_2 \to \max, \\ &-u_1 + u_2 \le 1, \\ &-u_1 - u_2 \le -2, \\ &4u_1 \le 3, \\ &u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Використаємо тепер четверту особливість пари двоїстих задач і отримаємо відповідь

$$W(u) = -4u_1 + 2u_2 \to \max,$$
$$-u_1 + u_2 \le 1,$$
$$-u_1 - u_2 = -2,$$
$$4u_1 = 3,$$
$$u_1 \ge 0.$$

Повертаючись до мети цієї лекції, зауважимо, що якщо умова (R) не виконується в одній із задач двоїстої пари, то вона обов'язково виконується в іншій задачі. Тобто, одну (пряму чи двоїсту) із задач двоїстої пари, завжди можна розв'язати симплекс-методом. З'ясуємо тепер, як знаючи розв'язок однієї задачі знайти розв'язок іншої.

10. Теореми двоїстості

Сформулюємо та доведемо [1,4] кілька надзвичайно важливих теорем, які мають застосування в різних розділах математичного програмування і не тільки.

Розпочнемо з *першої теореми двоїстості*.

Теорема 8. а) Якщо одна із задач двоїстої пари має розв'язок, то інша задача теж має розв'язок, причому, значення цільових функцій на цих розв'язках співпадають;

б) якщо одна із задач двоїстої пари має необмежену на допустимій множині цільову функцію, то допустима множина іншої задачі порожня.

Доведення. Не зменшуючи загальності, проведемо доведення для несиметричної пари двоїстих задач (41) – (42) і нехай умова (R) виконується для задачі (41).

Доведемо твердження а). Нехай задача (41) має розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ і базисними є змінні $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. З відповідних їм вектор-стовпчиків умов $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ побудуємо базисну матрицю B та обчислимо її обернену B^{-1}. Перейдемо від задачі (41) до КЗЛП використавши матрицю B^{-1}. Отримаємо

$$L(x) = c^T x \to \min,$$
$$\alpha x = \beta,$$
$$x \geq 0,\ \beta \geq 0,$$

де $\alpha = B^{-1}A$ і $\beta = B^{-1}b$.

При зроблених припущеннях розв'язок задачі x^* має структуру $x^* = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$. З алгоритму симплекс-методу випливає, що всі відносні оцінки змінних повинні бути невід'ємними, тобто $\Delta_k \geq 0,\ k = \overline{1,n}.$ З означення відносних оцінок маємо

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,k} = c_k - c_{баз}^T \alpha_k \geq 0.$$

Враховуючи, що $c_{баз} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ і $\alpha_k = B^{-1}A_k$, запишемо останню нерівність у векторній формі $c^T - c_{баз}^T B^{-1} A \geq 0$. Виберемо

$$(u^*)^T = c_{баз}^T B^{-1}, \qquad (45)$$

тоді $c^T - (u^*)^T A \geq 0$ або $A^T u^* \leq c$. Тобто, вектор заданий (45) є допустимим вектором задачі (42). Підрахуємо значення цільової функції задачі (42) на цьому векторі

$$b^T u^* = (u^*)^T b = c_{баз}^T B^{-1} b = c_{баз}^T \beta = c^T x^*.$$

Згідно *Леми 6* це означає, що задача (42) має розв'язок u^* заданий формулою (45).

Доведемо твердження б). Нехай цільова функція задачі (41) необмежена знизу на допустимій множині D_L, тобто $\min\limits_{x\in D_L} c^T x = -\infty$. Припустимо від супротивного, що допустима множина D_W задачі (42) не порожня. Візьмемо деяке фіксоване $u \in D_W$. Тоді величина $b^T u$ скінчена. З другого боку, згідно *Леми 6*, має виконуватись нерівність $b^T u \le c^T x$ для всіх допустимих векторів, що неможливо. Отже, допустима множина D_W задачі (42) порожня. •

Зауваження. Якщо допустима множина однієї з пари двоїстих задач порожня, то і інша задача може мати порожню допустиму множину. Підтвердимо це наступною парою двоїстих задач:

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 \to \min,\\ &-x_1 + x_2 = -1,\\ &x_1 - x_2 = -1,\\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{aligned} \qquad \text{і} \qquad \begin{aligned} &-u_1 - u_2 \to \max,\\ &-u_1 + u_2 \le -2,\\ &u_1 - u_2 \le 1. \end{aligned}$$

Зауваження. Перша теорема двоїстості дає відповідь на питання існування розв'язків пари двоїстих задач, але зовсім не вказує шляхів їх відшукання. Для цього використовують *другу теорему двоїстості*, яку ще називають двоїстим критерієм оптимальності.

Теорема 9. Допустимий вектор x^* задачі (41) буде її розв'язком тоді, і тільки тоді, коли існує вектор $u \in R^m$ такий, що

$$\begin{cases} u^T A_j = c_j, \text{ для таких } j, \text{ що } x_j^* \geq 0 \text{ (базисна змінна)}, \\ u^T A_j \leq c_j, \text{ для таких } j, \text{ що } x_j^* = 0 \text{ (небазисна змінна)}. \end{cases} \quad (46)$$

Доведення. Необхідність. Нехай x^* розв'язок задачі (41), покажемо, що існує вектор $u \in R^m$ такий, що умови (46) виконуються. З твердження а) *Теореми 8* випливає, що двоїста до задачі (41) задача (42) має розв'язок u^* і при цьому $c^T x^* = b^T u^*$. Тоді

$$0 = c^T x^* - b^T u^* = c^T x^* - b^T u^* + (b - Ax^*)^T u^* = c^T x^* - (Ax^*)^T u^* =$$

$$= c^T x^* - (u^*)^T Ax^* = (c - A^T u^*)^T x^* = \sum_{j=1}^{n} (c_j - (u^*)^T A_j) x_j^*.$$

Згідно припущення та обмежень задачі (42) доданки в останній сумі невід'ємні. А оскільки їх сума нульова, то кожен із доданків рівний нулю. Звідси випливає, що умови (46) виконуються при $u = u^*$.

Достатність. Нехай x допустимий вектор задачі (41) та існує вектор $u \in R^m$ такий, що умови (46) виконуються. Покажемо, що x розв'язок задачі (41). У векторній формі умови (46) можна записати у вигляді $c^T - u^T A \geq 0$ або $(c^T - u^T A)x = 0$. З нерівності випливає, що вектор u задовольняє обмеження задачі (42), а отже є допустимим вектором цієї задачі. З рівності отримуємо $c^T x = u^T Ax = u^T b$. Згідно *Леми 6* це означає, що вектори x та u є розв'язками задач (41) та (42) відповідно. •

Наслідок 1. Для того, щоб допустимі вектори x та u пари двоїстих задач (41) та (42) відповідно були їх розв'язками необхідно і досить виконання умов (46).

Наслідок 2. Якщо j –та компонента розв'язку однієї з пари двоїстих задач додатна, то відповідне (за номером) обмеження двоїстої задачі на її розв'язку перетворюється в рівність.

Приклад. Визначити, чи є вектор $x = (1,1,0)^T$ розв'язком задачі

$$L(x) = -x_1 - 8x_2 - 10x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язування. Легко впевнитись, що заданий вектор є допустимим. Припустимо, що він є розв'язком заданої задачі. Тоді, згідно *Леми 6*, двоїста задача

$$W(u) = 2u_1 \to \max,$$
$$u_1 + u_2 \leq -1,$$
$$u_1 - u_2 \leq -8,$$
$$4u_1 + 2u_2 \leq -10,$$

теж має розв'язок. Позначимо його $u^* = (u_1^*, u_2^*)^T$. Згідно *Наслідку 2* до *Теореми 9*, основні обмеження двоїстої задачі на її розв'язку мають вигляд

$$u_1^* + u_2^* = -1,$$
$$u_1^* - u_2^* = -8,$$
$$4u_1^* + 2u_2^* \leq -10.$$

Розв'язком перших двох рівнянь є вектор $u^* = (-4.5, 3.5)^T$. Легко впевнитись, що цей вектор є допустимим для двоїстої задачі і, крім того, $L(x) = W(u^*) = -9$.

Відмовимося тепер від зроблених припущень та розглянемо два вектори $x = (1,1,0)^T$ і $u = (-4.5,3.5)^T$. Ці вектори є допустимими для заданої та двоїстої до неї задач і, крім того, $L(x) = W(u) = -9$. Тоді, згідно *Леми 6*, ці вектори є розв'язками відповідної пари двоїстих задач. А отже, вектор $x = (1,1,0)^T$ є розв'язком заданої задачі.

Використовуючи методи зведення ЗЗЛП до СЗЛП, можна довести відповідні теореми двоїстості для симетричної пари двоїстих задач (43)–(44). Приведемо без доведення формулювання другої теореми двоїстості для задач (43)–(44).

Теорема 10. Для того, щоб допустимі вектори x та u пари двоїстих задач (43) та (44) відповідно були їх розв'язками необхідно і досить виконання умов

$$\begin{cases} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i) u_i = 0, \; i = \overline{1,m}, \\ (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} u_i - c_j) x_j = 0, \; j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{47}$$

11. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо метод розв'язування пари двоїстих задач, який своїм походженням завдячує теорії двоїстості [5]. Приведемо, спочатку, деякі геометричні міркування. Розглянемо СЗЛП (41), але відмовимося від природних обмежень

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax = b. \end{aligned} \tag{48}$$

Припустимо, що допустима множина цієї задачі обмежена і не порожня. Тоді розв'язок задачі (він існує!) буде вершиною (або гранню) багатокутника, що визначається основними обмеженнями. Відносні оцінки небазисних змінних цього розв'язку будуть невід'ємними. Якщо при цьому всі його координати також невід'ємні, то розв'язок задачі (48) є одночасно розв'язком задачі (41). Якщо ж серед них є від'ємні, то відповідна вершина не лежить у додатній частині простору. Для направленого переходу до іншої вершини можна використати симплекс–метод, однак при цьому слід зберігати відносні оцінки небазисних змінних невід'ємними. Цього можна досягнути переходом до двоїстої задачі. Очевидним є критерій завершення – попадання чергової вершини в додатну частину простору. Описані перетворення лежать в основі *двоїстого симплекс–методу* (ДСМ).

Наведемо обґрунтування ДСМ для пари двоїстих задач (41) – (42). В задачі (41) виберемо лінійно–незалежні вектор-стовпчики умов $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, побудуємо базисну матрицю B та обчислимо обернену матрицю B^{-1}. Помножимо основні обмеження задачі (41) на B^{-1} зліва. Отримаємо

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &\alpha x = \beta, \\ &x \geq 0, \end{aligned} \qquad (49)$$

де $\alpha = B^{-1}A$ і $\beta = B^{-1}b$. Підкреслимо, що в матрицю α входить одинична матриця розміру $(m \times m)$. Якщо при цьому $\beta \geq 0$, то одержана задача є КЗЛП, якщо ж серед них є від'ємні, то, звичайно, ні.

Означення 9. Задача (49) називається майже канонічною задачею лінійного програмування (МКЗЛП), якщо в матрицю A входить одинична матриця розміру $(m \times m)$ ..

Означення 10. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ називається майже допустимим базисним вектором (МДБВ), якщо він задовольняє основним (але не обов'язково природним) обмеженням задачі (49) і його ненульовим компонентам відповідають лінійно–незалежні вектор–стовпчики умов.

Зробимо припущення, що вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ є МДБВ задачі (49), причому $\Delta_j = 0,\ j = \overline{1,m}$ і $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{m+1,n}$. Врахувавши означення відносних оцінок отримаємо у векторній формі $c^T - c_{баз}^T B^{-1} A \geq 0$, де $c_{баз} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$. Тобто, вектор $u^T = c_{баз}^T B^{-1}$ є допустимим вектором двоїстої задачі (42).

Розглянемо МКЗЛП у координатній формі

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{50}$$

Використовуючи результати *Леми 5,* виключимо з цільової функції базисні змінні нехтуючи можливими постійними. Отримаємо

$$\begin{aligned} &L(x) = \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \to \min, \\ &x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{51}$$

Помножимо основні обмеження (51) на -1 та запишемо двоїсту до неї задачу

$$W(u)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i \to \min,$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}u_i \le \Delta_j,\ j=\overline{m+1,n}, \qquad (52)$$

$$u_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Задачу (52) приведемо до канонічної форми шляхом уведення додаткових невід'ємних змінних до лівих частин основних обмежень. Отримаємо КЗЛП

$$W(u)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i \to \min,$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}u_i + u_j = \Delta_j,\ j=\overline{m+1,n}, \qquad (53)$$

$$u_i \ge 0,\ i=\overline{1,n},$$

яку можна розв'язати звичайним СМ. Зауважимо, що при цьому величини $\Delta_j,\ j=\overline{1,n}$ залишаються невід'ємними, значення цільової функції зменшується (не зростає), а критерієм оптимальності є невід'ємність чисел $\beta_i,\ i=\overline{1,m}$.

Все це дає можливість сформулювати *алгоритм двоїстого симплекс–методу*:

1. зводимо початкову ЗЛП до МКЗЛП і знаходимо її МДБВ, для якого відносні оцінки небазисних змінних невід'ємні;
2. якщо $\beta_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$, то розв'язок знайдено. Алгоритм закінчено;

3. якщо для деякого $i:\beta_i<0$ та $\alpha_{i,j}\geq 0$, $j=\overline{1,n}$, то початкова ЗЛП розв'язку не має, її допустима множина порожня. Алгоритм закінчено;
4. знаходимо провідний елемент $\alpha_{l,k}$ із співвідношень $\beta_l=\min\limits_{i:\beta_i<0}\beta_i$, $\dfrac{\Delta_k}{-\alpha_{l,k}}=\min\limits_{j:-\alpha_{l,j}>0}\dfrac{\Delta_j}{-\alpha_{l,j}}$. Змінна x_l – виводиться з базису, змінна x_k – вводиться в базис;
5. проводимо симплекс–перетворення таблиці з провідним елементом $\alpha_{l,k}$, відновлюємо попередні позначення та переходимо до пункту 1 алгоритму.

Приклад. Розв'язати ЗЛП та її двоїсту задачу

$$L(x)=x_3+x_4+2x_5\to\min,$$
$$x_1-x_3+x_4-x_5=-2,$$
$$x_2-x_3-x_4+x_5=1,$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5}.$$

Розв'язування. Задана ЗЛП є МКЗЛП, початковий базис (A_1,A_2), початковий МДБВ $\beta=(-2,1,0,0,0)^T$. Розрахунки в ДСМ зручно проводити в таблицях, які мало чим відрізняються від звичайних.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_1	1	0	-1	1	-1	-2
x_2	0	1	-1	-1	1	1
Δ_j	0	0	1	1	2	
$\frac{\Delta_j}{-\alpha_{l,j}}$			1		2	

Наступна (і остання) таблиця матиме вигляд

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_3						2
x_2						3
Δ_j	1	0				

Заповнювати її непотрібно, оскільки виконується критерій оптимальності. Підрахуємо тільки значення відносних оцінок, які відповідають початковому базису. Отже, розв'язком ЗЛП є вектор $x^* = (0,3,2,0,0)^T$ і $L(x^*) = 2$.

Запишемо двоїсту до заданої ЗЛП

$$W(u) = -2u_1 + u_2 \to \max,$$
$$u_1 \le 0,$$
$$u_2 \le 0,$$
$$-u_1 - u_2 \le 1,$$
$$u_1 - u_2 \le 1,$$
$$-u_1 + u_2 \le 2,$$

та розв'яжемо її. За теоремою двоїстості легко знаходимо $u^* = (-1,0)^T$ та $W(u^*) = 2$.

Зауважимо, що для несиметричної пари двоїстих задач компоненти розв'язку співпадають із значеннями відносних оцінок змінних, які відповідають початковому базису, взятих із протилежним знаком; для симетричної пари двоїстих задач міняти знак непотрібно.

Підкреслимо, наостанок, що застосування ДСМ особливо зручне для розв'язування ЗЛП із зростаючою кількістю основних обмежень.

Розділ 2. Спеціальні задачі дослідження операцій

1. Транспортна та її двоїста задачі

Розглянуті раніше методи розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП) універсальні. Однак існує цілий ряд ЗЛП, для яких унаслідок їх специфіки застосування загальних методів спрощується. Одною з таких задач є транспортна задача. Прийнято поділяти такі задачі на два класи - транспортні задачі без обмежень на пропускні здатності комунікацій (ТЗБО) і транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО).

Розпочнемо з вивчення ТЗБО: у кожному з пунктів виробництва $P_i, i=\overline{1,m}$ $(m>1)$ виробляється a_i одиниць однорідної продукції, а у кожному з пунктів споживання $Q_j, j=\overline{1,n}$ $(n>1)$ споживається b_j одиниць цієї продукції. Пункти виробництва $P_i, i=\overline{1,m}$ зв'язані транспортними комунікаціями P_iQ_j з пунктами споживання $Q_j, j=\overline{1,n}$. Для кожної комунікації P_iQ_j задано величину $c_{i,j}$ – вартість перевезення одиниці продукції з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j. Задача полягає у побудові такого плану перевезень, який би максимально завантажував можливості виробників, максимально задовольняв потреби споживачів і мав при цьому мінімальну вартість перевезень.

Якщо через $x_{i,j}$ позначити кількість одиниць продукції, що планується до перевезення з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j, то математичну модель ТЗБО можна записати у вигляді:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \min\,, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1,m} \ , \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \ \ j = \overline{1,n} \ , \qquad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0 \ , \ x_{i,j} - цілі \ , \ i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n} \, . \qquad (4)$$

Розв'язати задачу (1) – (4) означає знайти такий план перевезень $\{x_{i,j}\}$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, який задовольняє умови (2) – (4) і має мінімальну вартість.

Будемо вважати, що $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{i,j} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, а одиниці виміру в задачі (1) – (4) узгоджені.

Припустимо також, що задача (1) – (4) збалансована, тобто виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d \, , \qquad (5)$$

де d – деяке число. Якщо умова (5) не виконується, задача (1) – (4) називається незбалансованою. Надалі будемо розглядати тільки збалансовані задачі.

Відмовимося тимчасово від цілочислових вимог у природних умовах (4) та введемо такі позначення:

$x = (x_{1,1},\ldots,x_{1,n},x_{2,1},\ldots,x_{2,n},\ldots,x_{m,1},\ldots,x_{m,n})^T$ - вектор (план) перевезень;

$b = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)^T$ - вектор виробництва-споживання;

$A_{i,j} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ - вектор комунікації $P_i Q_j$ (його розмірність дорівнює $m + n$, перша 1 стоїть на i - му місці, друга - на $m + j$ - му);

$c = (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,n}, \ldots, c_{m,1}, \ldots, c_{m,n})^T$ - вектор транспортних витрат;

$A = \{A_{1,1} | \ldots | A_{1,n} | A_{2,1} | \ldots | A_{2,n} | \ldots | A_{m,1} | \ldots | A_{m,n}\}$ - матриця умов.

Тоді ТЗБО (1) – (4) набуде вигляду

$$L(x) = c^T x \to \min, \quad Ax = b, \; x \geq 0. \qquad (6)$$

Це – СЗЛП, її можна розв'язати симплекс-методом. Однак матриця A має велику розмірність– $(m + n) \times (m * n)$, що робить використання СМ незручним навіть при невеликих m і n. Окрім того, елементами матриці A є лише нулі та одиниці, причому нулів – більшість, що дозволяє спростити розв'язування.

Дослідимо спочатку властивості ТЗБО (1) – (4) або, що те саме, СЗЛП (6).

Властивість 1. Збалансована ТЗБО завжди має розв'язок (можливо, не єдиний).

Доведення. Треба показати, що допустима множина СЗЛП (6) непорожня й обмежена. Побудуємо вектор x із чисел $x_{i,j} = \dfrac{a_i b_j}{d}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, де d – відоме число з (5). За припущенням, $a_i > 0$, , $b_j > 0$, тому $x \geq 0$. Перевіримо, наприклад, виконання умов (2). Маємо

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i \ , \ i = \overline{1,m} \ .$$

Аналогічно перевіряємо виконання умов (3). Тому побудований вектор x – допустимий, а допустима множина (6) – непорожня. Далі зауважимо, що $0 \le x_{i,j} \le a_i$, для всіх $i = \overline{1,m}$ і $0 \le x_{i,j} \le b_j$, для всіх $j = \overline{1,n}$. Візьмемо $h = \max\limits_{i,j}(a_i, b_j)$ і отримаємо $0 \le x_{i,j} \le h$ для всіх $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Звідси і випливає обмеженість допустимої множини СЗЛП (6). •

Властивість 2. Ранг матриці A в (6) дорівнює $m + n - 1$.

Доведення. Легко побачити, що, при зроблених припущеннях, виконується нерівність $m + n \le m * n$, а тому $rangA \le m + n$. Оскільки вектор, отриманий як сума перших m рядків матриці, дорівнює вектору, отриманому як сума останніх n рядків, то $rangA < m + n$. Побудуємо підматрицю матриці A так $\{A_{1,n} \mid A_{2,n} \mid \ldots \mid A_{m,n} \mid A_{1,1} \mid A_{1,2} \mid \ldots \mid A_{1,n-1}\}$. Розмірність цієї підматриці – $((m+n) \times (m+n-1))$. Якщо викреслити з неї $m + n$-й рядок, то отримаємо мінор розміру $m + n - 1$ із ненульовим визначником. •

Властивість 3. Якщо у збалансованій ТЗБО числа a_i, $i = \overline{1,m}$ та b_j, $j = \overline{1,n}$ цілі, то серед розв'язків знайдеться цілочисловий.

Доведення наразі відкладемо – його отримаємо як наслідок із методу відшукання розв'язку ТЗБО. Зауважимо,

що ця властивість виправдовує відмову від цілочислових вимог у (4).

При розв'язуванні транспортних задач, як і при розв'язуванні СЗЛП, вирішальну роль відіграє множина допустимих векторів (планів) і множина базисних векторів (планів). Унаслідок властивостей СЗЛП і *Властивості 2*, можна стверджувати, що *не вироджений базисний план* має рівно $m+n-1$ додатну компоненту (перевезення), яким відповідає система лінійно незалежних векторів $A_{i,j}$ (комунікацій P_iQ_j). У *виродженого базисного плану* їх менше.

Надалі будемо розглядати задачі, у яких усі базисні плани не вироджені.

Запишемо двоїсту задачу до (6)

$$W(u) = b^T u \to \max,\ u^T A \le c^T, \tag{7}$$

де u – вектор двоїстих змінних, $u \in R^{m+n}$. Оскільки обмежень на знак у двоїстих змінних немає, визначимо їх так: $u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n)$. За побудовою, група двоїстих змінних $\{-u_i\}$, $i = \overline{1,m}$ відповідає обмеженням (2), а група двоїстих змінних $\{v_j\}$, $j = \overline{1,n}$ – обмеженням (3). Тому першу групу називають *потенціалами пунктів виробництва*, другу – *потенціалами пунктів споживання*.

У координатній формі задача (7) має вигляд

$$W(u) = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max,$$

$$v_j - u_i \le c_{i,j},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Пара задач (6) і (8) утворює несиметричну пару двоїстих задач. За другою теоремою двоїстості, для того, щоб допустимий (у тому числі і базисний) план x був розв'язком задачі (1) – (4), необхідно і досить існування допустимого для задачі (8) вектору u, такого, що

$$\begin{cases} v_j - u_i = c_{i,j}, \text{ якщо } x_{i,j} > 0, \\ v_j - u_i \le c_{i,j}, \text{ якщо } x_{i,j} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Умови (9) іноді називають *критерієм оптимальності базисного плану* задачі (1) – (4).

2. Побудова базисного плану та його інтерпретація

Початкові дані ТЗБО та результати проміжних обчислень, пов'язаних з її розв'язанням, зручно заносити до транспортної таблиці такої структури:

	Q_1	…	Q_n	Запаси
P_1				a_1
P_2				a_2
…		c_{ij} x_{ij}		…
P_m				a_m
Потреби	b_1	…	b_n	d

Транспортні витрати $c_{i,j}$ записуються у верхньому правому куті відповідної клітинки транспортної таблиці. Як правило, компоненти $x_{i,j}$ вектору перевезень заносяться до транспортної таблиці лише тоді, коли $x_{i,j} > 0$. У цьому

випадку відповідна клітинка транспортної таблиці називається заповненою, інакше – вільною. Нагадаємо, що будемо розглядати тільки *не вироджені* ТЗБО – задачі, в яких усі базисні плани *не вироджені*. Зауважимо, що у транспортних таблицях таких задач буде рівно $m+n-1$ заповнена клітинка. Клітинку, яка знаходиться на перетині рядка P_i і стовпчика Q_j, будемо позначати (i, j).

Унаслідок специфіки ТЗБО, пошук початкового базисного плану значно спрощується у порівнянні з пошуком базисного вектору СЗЛП. Розглянемо два найбільш уживаних методи.

Метод північно-західного кута

Вибирається клітинка (1,1) транспортної таблиці (її *північно-західний кут*) і завантажується максимально можливим перевезенням. При цьому можливі такі випадки:

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = a_1,$$

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = b_1,$$

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = a_1 = b_1.$$

У першому випадку з подальшого розгляду виключається перший рядок транспортної таблиці і $b_1 = b_1 - x_{1,1}$. У другому випадку виключається перший стовпець і $a_1 = a_1 - x_{1,1}$. У третьому випадку з подальшого розгляду виключаються як перший стовпець, так і перший рядок. У зменшеній у такий спосіб транспортній таблиці знаходиться її верхня ліва клітинка (*північно-західний кут*), завантажується максимально можливим чином і т. д.

Зрозуміло, що побудований таким способом план перевезень є допустимим планом ТЗБО, причому його елементи цілі числа. Крім того, можна довести, що цей план є базисним. Зауважимо, що при побудові початкового базисного розв'язку за методом *північно-західного кута* зовсім не враховуються вартості перевезень $c_{i,j}$. Тому, як правило, такий план далекий від оптимального.

Метод мінімального елемента

Ідея методу полягає у тому, щоб максимально завантажити перевезеннями комунікації з мінімальною вартістю перевезень. Фактично ж цей метод відрізняється від методу *північно-західного кута* лише тим, що на кожному кроці побудови початкового базисного розв'язку для завантаження вибирається клітинка з мінімальним значенням $c_{i,j}$.

На першому кроці вибираємо клітинку (l,k) транспортної таблиці, в якій значення $c_{l,k}$ – найменше (якщо таких клітинок кілька, то вибираємо одну з них). Завантажуємо максимально можливим перевезенням обрану клітинку. При цьому можливі такі випадки: $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = a_l$, $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = b_k$, $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = a_l = b_k$. *У першому випадку* з подальшого розгляду виключається l-й рядок транспортної таблиці і $b_k = b_k - x_{l,k}$. *У другому випадку* виключається k-й стовпець і $a_l = a_l - x_{l,k}$. *У третьому випадку* з подальшого розгляду виключаються як l-й рядок, так і k-й стовпці. У зменшеній таким способом транспортній таблиці знаходиться клітинка з найменшим $c_{l,k}$, завантажується максимально можливим чином і т. д. Можна довести, що побудований за методом мінімального елемента

план є базисним планом ТЗБО, причому його елементи цілі числа.

Наведемо далі без доведення кілька важливих для подальшого тверджень та означень [36].

Означення 1. Набір різних комунікацій $P_{i1}Q_{j1}$, $P_{i2}Q_{j1}$, $P_{i2}Q_{j2}$, …, $P_{is}Q_{js-1}$, $P_{is}Q_{js}$ будемо називати *маршрутом,* що з'єднує пункти P_{i1} і Q_{js}.

Означення 2. Маршрут, до якого додано комунікацію $P_{i1}Q_{js}$, будемо називати замкненим маршрутом або *циклом*.

Означення 3. Комунікацію P_iQ_j будемо називати *основною* комунікацією допустимого плану x ТЗБО, якщо $x_{i,j} > 0$.

Твердження 1. Допустимий план ТЗБО буде базисним тоді і тільки тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.

Твердження 2. Система векторів $\{A_{i,j}\}$ задачі (6) лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли з відповідних комунікацій неможливо утворити цикл.

Твердження 3. ТЗБО буде невиродженою тоді і тільки тоді, коли для довільних наборів індексів $i1, i2, \ldots, it$, $t < m$ та $j1, j2, \ldots, js$, $s < n$ виконується нерівність $\sum_{l=1}^{t} a_{il} \neq \sum_{k=1}^{s} b_{jk}$.

Приклад. Меблева фірма має на трьох складах запас столів у кількостях 15, 25, 20. Фірма отримала замовлення від п'яти магазинів на постачання столів у кількостях 20, 12, 5, 8, 15. Вартість перевезення одного ліжка зі складу до магазину задана таблицею

1	3	3	4	2
4	1	2	3	3
5	8	1	4	3

Потрібно побудувати плани перевезень за методами північно-західного кута і мінімального елемента, дослідити їх та порівняти сумарні вартості перевезень.

Розв'язування. Приймаючи склади за виробників і магазини за споживачів, побудуємо транспортну таблицю

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1	3	3	4	2	15
P_2	4	1	2	3	3	25
P_3	5	8	1	4	3	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d = 60$

Задача збалансована. Побудуємо початковий план методом північно-західного кута:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1 15	3	3	4	2	15
P_2	4 5	1 12	2 5	3 3	3	25
P_3	5	8	1	4 5	3 15	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d = 60$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix},\ L(x^1) = 131,$$

та методом мінімального елемента:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1 15	3	3	4	2	15
P_2	4	1 12	2	3 8	3 5	25
P_3	5 5	8	1 5	4	3 10	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d = 60$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 8 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix},\ L(x^2) = 126.$$

Крім того, зауважимо, що базисний план x^1 має $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ ненульових компонент, тому це не вироджений базисний план. Базисний план x^2 теж є не виродженим базисним планом. Чи можна стверджувати, що розглянута ТЗБО – не вироджена? Ні, оскільки $a_1 + a_3 = b_1 + b_5$ і *Твердження 3* указує на виродженість цієї задачі. Це підтверджує вироджений план

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 5 & 8 & 0 \\ 20 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Метод потенціалів

Нагадаємо, що ми розглядаємо збалансовані, не вироджені ТЗБО, уміємо будувати початковий базисний план перевезень і знаємо критерій оптимальності базисного плану (9). Хочемо навчитися переходити від одного базисного плану до іншого так, щоб значення цільової функції зменшувалося. Цей перехід і є змістом методу потенціалів розв'язування ТЗБО.

Нехай x – деякий (початковий) базисний план ТЗБО.

Означення 4. Клітинку (i, j) транспортної таблиці називатимемо базисною, якщо $x_{i,j} > 0$, решта клітинок - небазисні.

Означення 5. Величину $\Delta_{i,j} = c_{i,j} - (v_j - u_i)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ називатимемо відносною оцінкою змінної (клітинки) $x_{i,j}$.

Відповідно до двоїстого критерію оптимальності, базисний план x буде розв'язком ТЗБО тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення: $\Delta_{i,j} = 0$ для базисних клітинок і $\Delta_{i,j} \geq 0$ для небазисних клітинок.

Для знаходження $m+n$ потенціалів маємо $m+n-1$ рівняння вигляду $v_j - u_i = c_{i,j}$ для тих i та j, для яких $x_{i,j} > 0$. Припустимо, що $u_1 = 0$, тоді інші потенціали знайдемо з відповідних рівнянь. Базисний план буде розв'язком ТЗБО, якщо виконуються умови (9), інакше – план перевезень можна поліпшити.

Перехід до нового базисного плану здійснимо за правилами:

- визначимо пару індексів (i_0, j_0) таку, що $x_{i_0,j_0} = 0$, але

$\Delta_{i_0,j_0} < 0$. Якщо таких пар кілька, виберемо одну з найменшим Δ_{i_0,j_0}. Змінну x_{i_0,j_0} введемо до базису;

- будуємо замкнений цикл $(i_0, j_0) - (i_1, j_0) - (i_1, j_1) - (i_2, j_1) - \ldots - (i_k, j_k) - (i_0, j_k) - (i_0, j_0)$ з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним;

- позначимо $I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\}$ і $I_- = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$ та знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in I_-} x_{i,j}$. Відповідна θ змінна виводиться з базису;

- компоненти нового базисного плану $x^{'}$ знайдемо зі співвідношень

$$\begin{aligned} x^{'}_{i,j} &= x_{i,j},\ якщо (i,j) \notin I_+ \bigcup I_-, \\ x^{'}_{i,j} &= x_{i,j} + \theta,\ якщо (i,j) \in I_+, \\ x^{'}_{i,j} &= x_{i,j} - \theta,\ якщо (i,j) \in I_-. \end{aligned} \qquad (10)$$

Очевидно, що при цьому кількість базисних змінних не зміниться і на новому базисному плані $L(x^{'}) = L(x) + \theta\Delta_{i_0,j_0}$. Унаслідок визначення θ і вибору Δ_{i_0,j_0} значення цільової функції зменшиться.

Зауваження 1. Оскільки $L(x^{'}) < L(x)$ на кожному кроці і $L(x)$ - обмежена знизу, то за *скінченну кількість кроків* розв'язок буде знайдено.

Зауваження 2. Унаслідок визначення θ та правил побудови плану $x^{'}$, робимо висновок, що компоненти плану - цілі числа. Цим завершується доведення *Властивості 3* ТЗБО.

Відмовимося від припущення, що ТЗБО невироджена.

Тоді можуть існувати вироджені базисні плани й безпосереднє застосування методу потенціалів ускладнюється. Рекомендується побудувати та розв'язати *"збурену" задачу*, побудовану за правилами:

- запаси кожного постачальника збільшуємо на величину $\varepsilon > 0$, вважаючи її досить малою;

- потреби одного зі споживачів, як правило n-го, збільшуємо на величину $m\varepsilon$. Збалансованість задачі при цьому не порушується;

- розв'язуємо "збурену" задачу методом потенціалів і вважаємо у розв'язку $\varepsilon = 0$. Отриманий план є розв'язком ТЗБО.

Відмовимося від припущення, що ТЗБО збалансована. Тоді умова (5) може набути вигляду $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ або $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. У першому випадку задовольнити потреби всіх споживачів неможливо, але розподілити існуючі запаси так, щоб план перевезень мав мінімальну вартість, можна. Для цього введемо до розгляду додаткового виробника P_{m+1} із можливістю виробництва $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ одиниць продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з цього пункту виробництва до кожного з пунктів споживання вважатимемо рівною нулю. Побудована задача збалансована і її можна розв'язати методом потенціалів. Викреслимо зі знайденого розв'язку стрічку $(m+1)$ і отримаємо

”розв’язок” початкової задачі. Значення $x_{m+1,j} > 0$ вказують величину незадоволених потреб у пункті споживання Q_j.

Цілком аналогічні міркування можливі й у другому випадку – розподілити всі запаси неможливо, але задовольнити потреби споживачів так, щоб план перевезень мав мінімальну вартість, можна. Для цього введемо до розгляду додаткового споживача Q_{n+1} із потребами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць продукції. Вартість перевезення одиниці продукції до цього пункту споживання з кожного пункту виробництва вважатимемо нулем. Побудована задача збалансована і її можна розв’язати методом потенціалів. Викреслимо зі знайденого розв’язку стовпчик $(n+1)$ і отримаємо ”розв’язок” початкової задачі. Значення $x_{i,n+1} > 0$ вказують величину невивезених запасів у пункті виробництва P_i.

Такий підхід до незбалансованих ТЗБО можливий, якщо нам все одно, який із споживачів недоотримає продукції, або у якого виробника залишиться невивезена продукція. Якщо ж це не так, слід увести поняття ”штрафу” за недопоставлену (невивезену) продукцію. Розглянемо, наприклад, випадок $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто запасів продукції недостатньо для задоволення потреб усіх споживачів. Нехай втрати, до яких призводить недоотримання одиниці продукції в пункті споживання Q_j, оцінюються в r_j одиниць (у тих же одиницях, що й $c_{i,j}$). Тоді задачу слід переформулювати так:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} r_j y_j \to \min,$$

де y_j – об'єм незабезпеченого споживання в Q_j при деякому реалізованому плані x, тобто $y_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$. Обмеження задачі набудуть вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} + y_j = b_j \ \ j = \overline{1,n} \ ,$$

$$x_{i,j} \geq 0 \ , \ y_j \geq 0 \, , \ i = \overline{1,m} \, , \ j = \overline{1,n} \, .$$

Для того, щоб звести цю задачу до збалансованої ТЗБО, введемо додаткового виробника P_{m+1} із можливістю виробництва $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ одиниць продукції, вважатимемо, що $c_{m+1,j} = r_j$, $x_{m+1,j} = y_j$, $j = \overline{1,n}$. Проведемо перетворення $x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$, $j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

та врахуємо їх у задачі.

Отримаємо ТЗБО

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min \, ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1, m+1} \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{i,j} = b_j \ \ j = \overline{1,n} \, ,$$

$$x_{i,j} \geq 0 \ , \ i = \overline{1, m+1} , \ j = \overline{1, n} ,$$

яку вже можна розв'язати.

Аналогічні міркування можливі й у другому випадку.

4. Транспортні задачі з обмеженнями

Обмежимося розглядом збалансованих транспортних задач з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО). Математична модель ТЗО має вигляд

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min , \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1, m} \ , \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \ \ j = \overline{1, n} \ , \tag{13}$$

$$0 \leq x_{i,j} \leq r_{i,j} \ , \ x_{i,j} - \textit{цілі} \ , \ i = \overline{1, m} \ , \ j = \overline{1, n} \ , \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d \ . \tag{15}$$

Як і раніше, будемо вважати, що $a_i > 0, \quad b_j > 0$, $c_{i,j} \geq 0, \quad r_{i,j} \geq 0$, $i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$, а одиниці виміру в задачі (11) – (14) узгоджені.

Твердження 4. Якщо числа a_i, b_j, $r_{i,j}$, $i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$ - цілі й розв'язки задачі (11) – (15) існують, то серед них знайдеться цілочисловий розв'язок.

Доведення цього твердження наразі відкладемо (його отримаємо як наслідок методу відшукання розв'язку).

Зауважимо, що це твердження дає змогу відмовитися від вимоги цілочисельності в (14).

Відповідно до змін у постановці задачі, треба змінити поняття базисного плану.

Означення 6. Допустимий план $x = \{x_{i,j}\}$ ТЗО будемо називати *базисним*, якщо перевезенням $x_{i,j}$, таким, що $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$, відповідає система лінійно незалежних векторів комунікацій $A_{i,j}$. Якщо кількість таких перевезень дорівнює $m + n - 1$, то базисний план називається *невиродженим*, якщо ж менша - *виродженим*.

Означення 7. Комунікацію $P_i Q_j$ будемо називати *основною* комунікацією допустимого плану x ТЗО, якщо $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$.

Твердження 5. Допустимий план ТЗО буде базисним тоді і тільки тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.

Надалі будемо розглядати не вироджені ТЗО, усі базисні плани яких не вироджені. Можна довести, що як і для ТЗБО, розв'язок знаходиться направленим перебором базисних планів. Як критерій оптимальності можна використовувати аналог другої теореми двоїстості – базисний план ТЗО буде її розв'язком тоді і тільки тоді, коли знайдуться потенціали пунктів виробництва $-u_i$, $i = \overline{1,m}$ і пунктів споживання v_j, $j = \overline{1,n}$, такі, що відносні оцінки змінних

$$\Delta_{i,j} = c_{i,j} - (v_j - u_i), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

задовольняють умовам

$$\Delta_{i,j} = 0, \text{ якщо } 0 < x_{i,j} < r_{i,j},$$

$$\Delta_{i,j} \geq 0, \textit{ якщо } x_{i,j} = 0, \qquad (16)$$
$$\Delta_{i,j} \leq 0, \textit{ якщо } x_{i,j} = r_{i,j}.$$

Комунікації, в яких $x_{i,j} = 0$ називають *вільними*, а комунікації, в яких $x_{i,j} = r_{i,j}$ називають *насиченими*.

Для розв'язування ТЗО розроблено метод, подібний до методу потенціалів. Правила визначення потенціалів залишаються без змін – слід розв'язати $m+n-1$ лінійне рівняння з $m+n$ невідомими. Умови оптимальності можуть порушуватися двома способами:

- для вільної небазисної комунікації (i_0, j_0) маємо $x_{i_0,j_0} = 0$, але $\Delta_{i_0,j_0} < 0$;

- для насиченої небазисної комунікації (i_0, j_0) маємо $x_{i_0,j_0} = r_{i_0,j_0}$, але $\Delta_{i_0,j_0} > 0$.

У першому випадку будуємо замкнений цикл (i_0, j_0) - (i_1, j_0) - (i_1, j_1) - (i_2, j_1) - … - (i_k, j_k) - (i_0, j_k) - (i_0, j_0) з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначаємо

$$I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\},$$
$$I_- = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$$

та знаходимо

$$\theta_1 = \min_{(i,j)\in I_-} x_{i,j}, \ \theta_2 = \min_{(i,j)\in I_+} \{r_{i,j} - x_{i,j})\}, \ \theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}. \qquad (17)$$

Відповідну θ змінну виводимо з базису, змінну з індексами (i_0, j_0) уводимо в базис. Компоненти нового базисного плану x' знаходимо зі співвідношень

$$x'_{i,j} = x_{i,j}, \textit{якщо} (i,j) \notin I_+ \cup I_-,$$
$$x'_{i,j} = x_{i,j} + \theta, \textit{якщо} (i,j) \in I_+, \qquad (18)$$

$$x'_{i,j} = x_{i,j} - \theta, якщо (i,j) \in I_-.$$

У другому випадку будуємо замкнений цикл (i_0, j_0) - (i_1, j_0) - (i_1, j_1) - (i_2, j_1) - … - (i_k, j_k) - (i_0, j_k) - (i_0, j_0) з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначаємо

$$I_- = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\},$$

$$I_+ = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$$

та знаходимо

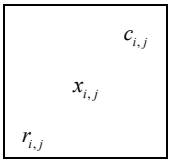
$$\theta_1 = \min_{(i,j)\in I_-} x_{i,j},\ \theta_2 = \min_{(i,j)\in I_+} \{r_{i,j} - x_{i,j})\},\ \theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}. \quad (19)$$

Відповідну θ змінну виводимо з базису, змінна з індексами (i_0, j_0) уводимо в базис. Компоненти нового базисного плану x' знаходимо зі співвідношень

$$\begin{aligned} x'_{i,j} &= x_{i,j}, якщо (i,j) \notin I_+ \bigcup I_-, \\ x'_{i,j} &= x_{i,j} + \theta, якщо (i,j) \in I_+, \\ x'_{i,j} &= x_{i,j} - \theta, якщо (i,j) \in I_-. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, що в обох випадках $L(x') = L(x) - \theta\,|\,\Delta_{i_0 j_0}\,|$. Для нового базисного плану знову обчислюють потенціали та перевіряють критерій оптимальності і т.д. Виконання критерію (16) означає кінець алгоритму. Зауважимо, що у виродженому випадку такий вибір θ може не приводити до нового базисного плану, наприклад при $\theta = 0$. У цьому випадку рекомендується змінити набір базисних змінних. Умови задачі та хід її розв'язування зручно записувати в таблицях.

Структура внутрішньої клітинки таблиці буде такою:



Розглянемо далі питання побудови початкового базисного плану.

На початку зауважимо, що ТЗО може взагалі не мати розв'язків. Наприклад, якщо при деякому i виконується нерівність $\sum_{j=1}^{n} r_{i,j} < a_i$, то з пункту виробництва P_i неможливо вивезти всю продукцію. Відзначимо далі, що умови (14) при використанні відомих методів (північно-західного кута чи мінімального елемента) можуть привести до недопустимого плану – якась кількість запасів може виявитись невичерпаною, а деякі потреби залишаться незадоволеними.

Побудувати початковий базисний план ТЗО можна за допомогою такої двохкрокової процедури.

1. Попередній етап

Знаходимо в транспортній таблиці клітинку (k,l) з найменшою вартістю перевезень $c_{k,l}$, якщо їх кілька – вибираємо будь-яку з них.

Покладемо $x_{k,l} = \min(a_k, b_l, r_{k,l})$. Маємо три можливості:

а) $x_{k,l} = a_k$. У такому випадку приймемо $x_{k,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq l$ та викреслимо з таблиці рядок із номером k.

б) $x_{k,l} = b_l$. У такому випадку приймемо $x_{i,l} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $i \neq k$ та викреслимо з таблиці стовпчик із номером l.

в) $x_{k,l} = r_{k,l}$. У такому випадку обчислимо $a_k = a_k - x_{k,l}$, $b_l = b_l - x_{k,l}$ та викреслимо з таблиці клітинку (k,l).

Ці дії повторюємо допоки це можливо.

Коли таблиця заповнена, то обов'язково виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le a_i \ , \ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \le b_j \ , \ 0 \le x_{i,j} \le r_{i,j} \ , \ i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n} \ .$$

Уведемо допоміжні змінні

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \ , \ i = \overline{1,m} \ \text{ та } \ x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ , \ j = \overline{1,n} \ .$$

Просумуємо допоміжні змінні за відповідними індексами і, врахувавши збалансованість задачі, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \omega \ . \qquad (21)$$

Тут ω – сумарна кількість невичерпаних запасів (незадоволених потреб). Якщо $\omega = 0$, то побудований план допустимий для ТЗО. Якщо ж $\omega \ne 0$, то переходимо до етапу 2.

2. Побудова і розв'язування розширеної ТЗО

Уведемо до розгляду додатковий пункт постачання P_{m+1} із запасами ω та додатковий пункт споживання Q_{n+1} із потребами ω. При цьому вважаємо, що

$$r_{m+1,j} = r_{i,n+1} = \infty \ , \ i = \overline{1,m+1}, \ j = \overline{1,n+1} \ ,$$

$$c_{m+1,j} = c_{i,n+1} = M \ , \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \ , \ c_{m+1,n+1} = 0 \ . \qquad (22)$$

Тут $M > 0$ досить велике додатне число, більше за всі числа, з якими воно порівнюється в процесі розв'язування задачі. Застосуємо для розв'язування допоміжної задачі метод потенціалів. Нехай $x^* = \{x^*_{i,j}\}$, $i = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, n+1}$ - знайдений розв'язок. У випадку $x^*_{m+1,n+1} = \omega$ початковий базисний план ТЗО будується так: $x = \{x^*_{i,j}\}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. У випадку $x^*_{m+1,n+1} < \omega$ початкова ТЗО не має допустимих планів. Зауважимо, що рівність $x_{m+1,n+1} = \omega$ можна використовувати як критерій закінчення розв'язування допоміжної задачі.

Щоб отримати розв'язок початкової ТЗО, викреслюємо з останньої таблиці $m+1$-й рядок та $n+1$-й стовпчик і знову застосовуємо метод потенціалів.

Зауваження 1. Повертаючись до доведення твердження 7, бачимо, що при зроблених припущеннях допустимий план, побудований за описаною вище процедурою, буде складатися з цілих чисел. Запропоновані для поліпшення плану формули (17) - (18) або (19) - (20) залишають його цілочисловим.

Зауваження 2. У випадку виродженої ТЗО можуть існувати вироджені базисні плани. Рекомендують, насамперед, до базисних змінних (клітинок) відносити ті, в яких $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$. При необхідності, збільшувати кількість базисних змінних можна за рахунок вільних ($x_{i,j} = 0$) або насичених ($x_{i,j} = r_{i,j}$) клітинок, але так, щоб із відповідних базисним клітинкам комунікацій неможливо було б утворити цикл.

5. Задача про призначення

Задача про призначення [1-8, 25] (або задача про оптимальний розподіл механізмів на роботи) є важливим

випадком раніше розглянутих ТЗБО, з одного боку, та однією з найпростіших задач цілочислового програмування – з іншого. *Постановка задачі:* нехай потрібно виконати n різних робіт і є n різних механізмів для їх виконання, причому кожен механізм може бути використаним для виконання кожної з робіт. Продуктивність роботи механізму залежить від тієї роботи, на виконання якої він призначений. Задача полягає в такому розподілі механізмів по роботах, при якому їх сумарна продуктивність буде максимальною. Позначимо величиною $c_{i,j}$ продуктивність i-го механізму при виконанні j-ї роботи. Сукупність цих величин утворює матрицю $C = \{c_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, яку назвемо матрицею продуктивності. Розглянемо матрицю $X = \{x_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ як один із можливих варіантів розподілу механізмів на роботи, де $x_{i,j} = 1$, якщо i-й механізм призначено на j-ту роботу, та $x_{i,j} = 0$ – в іншому випадку. В цих позначеннях математична модель задачі про призначення має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \max, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

$$x_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}. \tag{26}$$

Присутність умови (26) не дозволяє віднести цю задачу до класу ТЗБО або СЗЛП – це задачі з бульовими змінними. Однак, якщо (26) замінити умовою

$x_{i,j} \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$, то отримаємо ТЗБО, в якій $a_i = b_j = 1$. Оскільки ця ТЗБО завжди має цілочисловий розв'язок, то сумісне виконання умов (24) і (25) гарантує виконання умови (26). Отже, розв'язок задачі (23) - (26) існує.

Дослідимо питання відшукання хоча-б одного розв'язку цієї задачі.

Означення 8. Дві матриці C і D однакового розміру $(n \times n)$ будемо називати еквівалентними ($C \sim D$), якщо одна з них отримується з іншої шляхом додавання до елементів кожного рядка одного числа (можливо, для різних рядків ці числа теж різні) та шляхом додавання до елементів кожного стовпчика одного числа (можливо, для різних стовпчиків ці числа теж різні). Тобто

$$(C \sim D) \Leftrightarrow \exists e_i, f_j \in R^1 : d_{i,j} = c_{i,j} + e_i + f_j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\ .$$

Приклад. Матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є еквівалентними. До рядків додаються числа $(0,0,1,-1)$, до стовпчиків – $(2,3,4,1)$.

Теорема 1. Множини розв'язків двох задач про призначення з еквівалентними матрицями збігаються.

Доведення. Нехай ($C \sim D$) і нехай $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, …, (n, j_n) - розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності C (перший механізм на роботу j_1 і т.д.). Припустимо,

від супротивного, що для задачі з матрицею D цей розподіл не буде розв'язком. Тоді повинен існувати інший розподіл $(1, j_1')$, $(2, j_2')$, …, (n, j_n') - розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності D. Оскільки маємо задачу відшукання максимуму цільової функції, то для задачі з матрицею D запишемо нерівність

$$d_{1,j_1'} + d_{2,j_2'} + \ldots + d_{n,j_n'} > d_{1,j_1} + d_{1,j_2} + \ldots + d_{n,j_n}.$$

Із *Означення 8* маємо $d_{i,j} = c_{i,j} + e_i + f_j$, тому

$$c_{1,j_1'} + e_1 + f_{j_1'} + c_{2,j_2'} + e_2 + f_{j_1'} + \ldots + c_{n,j_n'} + e_n + f_{j_n'} >$$

$$> c_{1,j_1} + e_1 + f_{j_1} + c_{1,j_2} + e_2 + f_{j_2} + \ldots + c_{n,j_n} + e_n + f_{j_n}.$$

Очевидно, що $\sum_{k=1}^{n} f_{j_k'} = \sum_{k=1}^{n} f_{j_k}$, оскільки це суми одних і тих же чисел, тільки, можливо, у різному порядку. Звідси отримуємо нерівність

$$c_{1,j_1'} + c_{2,j_2'} + \ldots + c_{n,j_n'} > c_{1,j_1} + c_{1,j_2} + \ldots + c_{n,j_n},$$

яка суперечить припущенню, що розподіл $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, …, (n, j_n) – розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності C. •

Ця теорема дозволяє переходити в задачі про призначення від однієї матриці продуктивності до іншої, їй еквівалентної.

Перейдемо, спочатку, до еквівалентної задачі на мінімум із матрицею продуктивності D за допомогою *попередніх перетворень*

$$C = \{c_{i,j}\} \Rightarrow C' = \{c'_{i,j} = \max_i c_{i,j} - c_{i,j}\} \Rightarrow D = \{d_{i,j} = c'_{i,j} - \min_j c'_{i,j}\} \cdot$$

У результаті отримаємо матрицю з невід'ємних елементів, у кожному рядку та в кожному стовпчику якої є хоча б один нуль. Початкова задача звелась до вибору в матриці D (або в еквівалентній їй матриці) n -нулів по одному в кожному рядку та кожному стовпчику. Розглянемо один із можливих способів такого вибору, відомий як *угорський метод*.

Алгоритм.

1. Позначимо, наприклад *, який-небудь нуль у першому стовпчику матриці D, далі позначимо нуль у другому стовпчику так, щоб він не лежав у тому ж рядку, що й раніше позначений, потім у третьому і т.д., поки не розглянемо всі стовпчики.
2. Якщо кількість нулів із * дорівнює числу n, то алгоритм закінчено. У розв'язку на місці нулів із * стоять 1, решта елементів розв'язку - 0.
3. Якщо нулів із * менше n, то позначимо знаком + ті стовпчики матриці, в яких є нуль із *, ці стовпчики вважаємо зайнятими. В алгоритмі будуть з'являтися зайняті рядки. Елементи матриці, які знаходяться на перетині незайнятого рядка та незайнятого стовпчика, вважаємо незайнятими, всі інші – зайняті.
4. Якщо в матриці немає незайнятих нулів, то переходимо до п. 8.
5. Якщо незайняті нулі є, то вибираємо перший із них, проглядаючи почергово рядки матриці зліва направо. Позначимо його штрихом (’). Якщо в його рядку немає нуля із *, то переходимо до п. 7.
6. Якщо нуль із * є, то звільняємо (знімаємо знак +) стовпчик, в якому він знаходиться, та займаємо (позначимо знаком +) цей рядок. Переходимо до п.4.
7. Починаючи зі щойно позначеного штрихом нуля, будуємо ланцюжок із нулів: від нуля із штрихом по

стовпчику до нуля із *, від нього по рядку до нуля із штрихом і т.д., доки це можливо. Колись (на якомусь нулі зі штрихом) ланцюжок обірветься. Знімаємо всі * в нулів із ланцюжка та змінюємо всі штрихи на * в ланцюжку. Новий набір нулів із * містить на один нуль із * більше, ніж попередній. Знімаємо всі позначки, крім *, та переходимо до п. 2.

8. Шукаємо мінімальний елемент серед незайнятих елементів матриці й віднімаємо його від елементів усіх незайнятих рядків та додаємо до елементів усіх зайнятих стовпчиків. Отримуємо еквівалентну матрицю, в якій є незайняті нулі. Переходимо до п. 5.

Зауважимо, що цей алгоритм скінченний.

6. Цілочислове та дискретне програмування

Деякі постановки задач, які містять цілочислові вимоги на змінні, розглядалися нами раніше – ТЗБО, ТЗО, задача про призначення. При дослідженні цих задач нам удавалося застосувати такий прийом – ми відмовлялися від цілочислових вимог, у новій задачі доводили існування розв'язків та будували метод їх відшукання, показували, що при виконанні певних припущень серед розв'язків можна знайти цілочисловий. Але що робити, коли застосувати цей прийом з тих чи інших причин неможливо?

Далі розглянемо постановки задач цілочислового та дискретного програмування, опишемо та обґрунтуємо методи їх розв'язування в цілісному вигляді. При цьому будемо розрізняти:

– задачі комбінаторного типу, допустима множина яких має скінченну кількість точок;

– задачі цілочислового програмування, де змінні набувають цілочислових значень;

– задачі дискретного програмування, в яких змінні набувають дискретних значень.

Типовими задачами комбінаторного типу є задача про призначення і задача комівояжера. Першу з них нами досліджено, друга віднесена до самостійної роботи – студентам пропонується здійснити постановку задачі комівояжера і засвоїти метод оцінок та розгалужень для її розв'язування.

Задачею цілочислового лінійного програмування у стандартній формі назвемо задачу

$$\begin{aligned} & L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}, \\ & x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \\ & x_j - \textit{цілі},\ j = \overline{1,k},\ \ k \leq n. \end{aligned} \tag{27}$$

Якщо в останній умові (27) виконується $k = n$, то маємо повністю цілочислову задачу лінійного програмування (ПЦЗЛП), інакше – частково цілочислову задачу лінійного програмування (ЧЦЗЛП). Якщо ж замість неї розглянути умову

$$x_j \in X_j = \{0, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\},$$

де x_{j,k_j} - задані (не обов'язково цілі) відповідно упорядковані числа, $j = \overline{1,l}$, $l \leq n$, числа k_j – скінченні, то отримаємо задачі повністю дискретного ($l = n$) та частково

дискретного лінійного програмування (ПДЗЛП і ЧДЗЛП відповідно).

Одразу відмітимо, що ідея розв'язування ЗЛП із подальшим заокругленням розв'язку може приводити до недопустимих векторів і тому неконструктивна.

Приклад. Розглянемо ПЦЗЛП

$$L(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 4,$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 2,$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3,$$
$$x_j - \textit{цілі},\ j = 1,2,3\ .$$

Розв'язком ПЦЗЛП буде вектор $x^* = (2,2,5)^T$. Якщо розв'язати задачу без останньої вимоги, отримаємо розв'язок ЗЛП $x = (0.5,0,4.5)^T$, з якого ніякими способами заокруглення не отримати x^*.

В основі алгоритмів розв'язування таких задач лежать так звані методи відтину (відтинання) [26-34]. Зміст цих методів пояснимо на прикладі ПЦЗЛП.

Розглянемо задачу (27) та введемо позначення:

D - багатокутник;

$D^{Ц}$ - множина цілочислових векторів із D;

G - опукла лінійна оболонка $D^{Ц}$;

$G^{Ц}$ - цілочисловий багатокутник із G;

D^* - множина базисних векторів задачі (27).

Нехай тепер D – допустима множина задачі (27) без цілочислових вимог, таку задачу будемо називати (L, D)-

задачею. Тоді власне задачу (27) будемо називати $(L, D^{Ц})$-задачею.

Теорема 4. Нехай у $(L, D^{Ц})$-задачі (27) множини D і $D^{Ц}$ – непорожні. Тоді:

1) $G = G^{Ц}$;

2) $G^{Ц} = D^{Ц}$;

3) $D^{*} \subseteq G^{Ц}$.

Приймемо цю теорему без доведення [26,27].

Наслідок. Множина розв'язків (L, G)-задачі збігається із множиною розв'язків $(L, D^{Ц})$-задачі.

Теорема 4 і *наслідок* до неї демонструють принципову можливість розв'язування $(L, D^{Ц})$-задачі шляхом розв'язування допоміжної (L, G)-задачі. Однак задача побудови опуклої лінійної оболонки цілочислових векторів із $D^{Ц}$ залишається складною для вирішення. У 1954 році Дж. Данціг запропонував здійснювати побудову опуклої лінійної оболонки цілочислових векторів із $D^{Ц}$ поетапно, розв'язуючи на кожному етапі деякі допоміжні задачі. Р. Гоморі запропонував спосіб побудови додаткових обмежень для допоміжних задач і дослідив питання скінченності процесу.

Загальна схема алгоритмів Р. Гоморі така:

1) розв'язуємо (L, D)-задачу;

2) якщо (L, D)-задача немає розв'язку, то і $(L, D^{Ц})$-задача немає розв'язку;

3) якщо (L,D)-задача має цілочисловий розв'язок, то він буде розв'язком $(L,D^{Ц})$-задачі;

4) якщо (L,D)-задача має розв'язок і він не цілочисловий, то будуємо додаткове лінійне обмеження так, щоб воно «відтинало» частину допустимої множини D, разом зі знайденим розв'язком (L,D)-задачі, але не втрачало жодного вектора з множини $D^{Ц}$. Переходимо до 1).

Побудоване на етапі 4) обмеження називають *правильним відтином* - йому не задовольняє розв'язок (L,D)-задачі, але задовольняють усі вектори із $D^{Ц}$.

На основі загальної схеми розроблено:

– перший алгоритм Р. Гоморі - для розв'язування ПЦЗЛП;

– другий алгоритм Р. Гоморі - для розв'язування ЧЦЗЛП, у тому числі й ПЦЗЛП;

– алгоритм Дальтона–Ллевеліна - для розв'язування ЧДЗЛП, у тому числі й ПДЗЛП.

Зауважимо, що для опису цих алгоритмів достатньо вказати спосіб визначення правильного відтину.

Нехай розв'язується (L,D)-задача і на *останній ітерації* симплекс-методу основні обмеження набули вигляду

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,\ i = \overline{1,m},$$

і, як завжди, $[z]$ та $\{z\}$ – ціла та дробова частини числа z відповідно.

Теорема 5. Нехай для ПЦЗЛП (2.36) розв'язок (L,D)-задачі має вигляд $\bar{x} = (\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0)^T$ та існує номер l такий, що β_l – дробове.

Тоді обмеження

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{l,j}\} x_j \le 0 \qquad (28)$$

задає правильний відтин.

Доведення. Прямою підстановкою впевнимося, що знайдений розв'язок (L,D) - задачі не задовольняє (28). Покажемо, що кожен допустимий вектор ПЦЗЛП (36) задовольняє (28). Нехай $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in D^{Ц}$. З основних обмежень на *останній ітерації* симплекс-методу отримуємо:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{i,j}] x_j - [\beta_i] = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{i,j}\} x_j,\ i = \overline{1,m}. \qquad (29)$$

Ліва частини отриманих виразів цілочислові, тому і їх праві частини – цілочислові. Припустимо, від супротивного, що $\exists l : \{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{l,j}\} x_j > 0$. Оскільки, за визначенням $0 \le \{z\} < 1$ і $x \in D^{Ц}$, то $\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{l,j}\} x_j < 1$, а це суперечить тому, що праві частини (38) – цілочислові. •

Побудоване обмеження (29) перетворимо у рівність шляхом уведення до розгляду нової цілої змінної $x_{n+1} \ge 0$ так, що

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{l,j}\} x_j = -\{\beta_l\}. \qquad (30)$$

Допишемо цю рівність до основних обмежень $(L, D^{Ц})$-задачі і знову розв'яжемо (L, D)-задачу. Так продовжуємо доти, поки не буде знайдено розв'язок $(L, D^{Ц})$-задачі або не буде встановлено її нерозв'язність. Очевидно, що при застосуванні першого алгоритму Р. Гоморі, розмірність задачі буде зростати. Гоморі запропонував метод обмеження зростання розмірності задачі величиною $(n+2)(m+1)$.

Перший алгоритм Р. Гоморі

1. Будуємо та розв'язуємо (L, D)-задачу. Нехай до базису розв'язку цієї задачі увійшли вектори $(A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_m})$. Позначимо $N = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ множину утворену з індексів базисних змінних, M – множину утворену з індексів небазисних змінних. Якщо (L, D)-задача немає розв'язку, то і $(L, D^{Ц})$-задача розв'язку немає. Алгоритм закінчено.

Якщо числа $\beta_i, i \in N$ - цілі, то розв'язок (L, D)-задачі є одночасно розв'язком $(L, D^{Ц})$-задачі. Алгоритм закінчено.

Якщо серед чисел $\beta_i, i \in N$ є дробові, то фіксуємо номер l одного з них та переходимо до п. 2.

2. Нехай β_l – дробове. Будуємо правильний відтин – уведемо до розгляду нову змінну x_{n+1} за формулою

$$x_{n+1} - \sum_{j \in M} \{\alpha_{l,j}\} x_j = -\{\beta_l\},\ x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+1} \text{ - ціле.} \qquad (31)$$

3. Розширимо останню симплекс-таблицю за рахунок (31) і отримаємо нову (L, D)-задачу. Відновимо звичні позначення та переходимо до п. 1.

Зауваження. Оскільки розв'язок (L, D)-задачі – це вершина допустимої множини D, то з нього можна розпочинати розв'язок нової (L, D)-задачі. Оскільки в останній симплекс-таблиці відносні оцінки небазисних змінних невід'ємні, а $-\{\beta_l\} < 0$, то слід застосувати двоїстий симплекс-метод. При цьому нова змінна буде виведена з базису, а на її місце уведено іншу.

Приклад. Розв'язати ПЦЗЛП

$$L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 11,$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13$$
$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі},\ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язування.

Побудуємо (L, D)-задачу

$$L(x) = -4x_1 - 5x_2 - x_3 \to \min,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,$$
$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 11$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13,$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6}.$$

Це - КЗЛП, розв'яжемо її звичайним симплекс-методом. Остання симплекс-таблиця буде такою

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	β_i
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$

x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	

Розв'язок (L, D)-задачі: $x = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\right)^T$.

Всі компоненти цього розв'язку дробові числа. Виберемо для побудови відтину змінну з номером $l = 3$ (довільно). Проведемо необхідні підрахунки:

$$x_7 - \sum_{j \in \{4,5,6\}} \{\alpha_{3,j}\} x_j = -\{\beta_3\}, \{\beta_3\} = \left\{\frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10},$$

$$\{\alpha_{3,4}\} = \left\{-\frac{9}{10}\right\} = -\frac{9}{10} - (-1) = -\frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10},$$

$$\{\alpha_{3,5}\} = \left\{-\frac{3}{10}\right\} = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10}, \ \{\alpha_{3,6}\} = \{1\} = 0.$$

Побудуємо правильний відтин

$$-\frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5 + x_7 = -\frac{7}{10}, \ x_7 \geq 0, \ x_7 \text{ - ціле.}$$

Розширимо останню симплекс-таблицю за рахунок побудованого відтину

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	β_i
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{23}{10}$

x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	$\frac{7}{10}$
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{10}$	0	1	$-\frac{7}{10}$
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	
$-\frac{\Delta_j}{\alpha_{ij}}$				2	$\frac{4}{7}$			

та застосуємо двоїстий симплекс-метод.

Отримаємо наступну й останню таблицю

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	β_i
x_1								2
x_2								2
x_3								1
x_5								1
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{4}{7}$	

Звідки маємо розв'язок (L, D)-задачі $x^* = (2, 2, 1)^T$. Усі компоненти цього розв'язку – цілі, а отже, нами знайдено розв'язок $(L, D^{Ц})$-задачі. •

Повернемося до розгляду ЧЦЗЛП (27) і нехай при розв'язуванні (L, D)-задачі на *останній ітерації* симплекс-методу основні обмеження набули вигляду

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i ,\ i = \overline{1,m} .$$

Теорема 6. Нехай для ЧЦЗЛП (27) розв'язок (L, D)-задачі має вигляд $\bar{x} = (\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0)^T$ та існує номер l такий, що $1 \le l \le k$ і β_l - дробове. Тоді обмеження

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\gamma_{l,j}\} x_j \le 0 \quad , \tag{32}$$

де

$$\gamma_{l,j} = \begin{cases} \{\alpha_{l,j}\}, & якщо\ j \le k,\ \{\alpha_{l,j}\} \le \{\beta_l\}, \\ \{\beta_l\}(1-\{\alpha_{l,j}\})/(1-\{\beta_l\}), & якщо\ j \le k,\ \{\alpha_{l,j}\} > \{\beta_l\}, \\ \alpha_{l,j}, & якщо\ j > k,\ \alpha_{l,j} > 0, \\ \{\beta_l\}(-\{\alpha_{l,j}\})/(1-\{\beta_l\}), & якщо\ j > k,\ \alpha_{l,j} < 0, \end{cases}$$

задає правильний відтин.

Зауваження. Нерівність (32) перед використанням слід перетворити до такого вигляду

$$x_{n+1} - \sum_{j \in M} \{\gamma_{l,j}\} x_j = -\{\beta_l\} ,\ x_{n+1} \ge 0 . \tag{33}$$

Познайомитися із методами розв'язування дискретних задач можна в підручнику [34].

7. Теорія матричних ігор

Терміном *гра* будемо називати взаємодію декількох гравців за відомими й постійними правилами, які визначають вид даної гри, та відомих і постійних станів цієї взаємодії, які визначають величини платежів між гравцями. Для позначення можливої реалізації цих станів вживатимемо термін *партія.* Терміном *хід* будемо називати момент партії,

коли гравці (один чи кілька) вибирають рішення з деякої множини рішень. Правила гри передбачають, що в кінці гри між гравцями відбуваються взаєморозрахунки. Якщо сума всіх платежів у партії дорівнює нулю, гру називають *грою із нульовою сумою*. Надалі розглядатимемо ігри, в яких беруть участь тільки два гравці, в кожного з яких є по одному ходу в партії, причому вибір ходів скінченний. Платежі гравців у таких іграх зручно задавати у вигляді матриці, звідси походить назва таких ігор - *матричні ігри двох гравців із нульовою сумою*.

Нехай у грі беруть участь два гравці – I_1 та I_2. Перший із них вибирає ціле число i, $i = \overline{1,m}$, другий – ціле число j, $j = \overline{1,n}$. Вибір гравцями цих чисел здійснюється незалежно та одночасно. При проведенні взаєморозрахунку перший гравець платить другому суму $c_{i,j}$, яку у випадку $c_{i,j} \geq 0$ будемо називати виграшем, а у випадку $c_{i,j} \leq 0$ відповідно програшем гравця I_2. Очевидно, що виграш гравця I_2 є водночас програшем гравця I_1 і навпаки. Матрицю $C = \{c_{i,j}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, побудовану за такими правилами, будемо називати *платіжною матрицею гри з точки зору другого гравця*.

Приклад. Розглянемо гру: два гравці одночасно обирають та називають одну із сторін монети. Якщо обрано різні сторони монети - гравець I_1 платить гравцю I_2 одиницю виграшу, якщо обрано однакові сторони – гравець I_2 платить гравцю I_1 одиницю виграшу. Побудувати платіжні матриці гри з точки зору кожного гравця.

Розв'язування. За вказаних умов платіжна матриця гри з точки зору гравця I_2 має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а з точки зору гравця I_1 - $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Надалі будемо розглядати матричні ігри тільки з точки зору гравця I_2. Отже, партію в матричній грі можна уявляти як вибір рядка (гравцем I_1) та стовпчика (гравцем I_2) у платіжній матриці, перетин яких визначає величину платежу. Сукупність усіх партій у грі, як правило, нескінченна. Метою гравців є визначення своєї оптимальної стратегії (поведінки) для всієї гри, яка гарантувала б досягнення максимального виграшу або мінімального програшу кожного з них відповідно.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ назвемо *змішаною стратегією* гравця I_1, вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ – *змішаною стратегією* гравця I_2. Компоненти цих векторів будемо трактувати як ймовірності, з якими гравці впродовж гри обирають рядки чи стовпчики в платіжній матриці. Якщо протягом усієї гри гравець I_1 постійно обирає тільки один ($k-$ й) рядок у платіжній матриці, то така стратегія $x = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ називається *чистою стратегією* гравця I_1. Аналогічно вводиться поняття чистої стратегії гравця I_2. Розглянемо питання про *знаходження оптимальних чистих стратегій* у матричній грі.

Якщо гравець I_2 при своєму ході вибере стовпчик з номером j, $1 \le j \le n$, то гравець I_1 (мінімізуючи свій програш) може обрати рядок із номером i так, щоб виграш гравця I_2 був $\min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$. Тому гравець I_2 при своєму ході *повинен* вибирати стовпчик із номером j, $1 \le j \le n$ так, щоб досягнути максимального виграшу величиною

$$\max\limits_{j=\overline{1,n}} \min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \underline{v}. \qquad (34)$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що гравець I_1 при своєму ході *повинен* вибирати рядок із номером i, $1 \le i \le m$ так, щоб домогтися мінімального програшу величиною

$$\min\limits_{i=\overline{1,m}} \max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \overline{v}. \qquad (35)$$

Величина $\underline{v}$ називається нижньою ціною гри (або гарантованим виграшем другого гравця), величина $\overline{v}$ – верхня ціна гри (гарантований програш першого гравця). Якщо має місце рівність $\underline{v} = \overline{v} = v$ або рівність

$$\max\limits_{j=\overline{1,n}} \min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = v^*, \qquad (36)$$

то говорять, що матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях, а величину v^* називають *ціною гри*. Номери i^* та j^*, на яких виконується (36), дозволяють побудувати *оптимальні чисті стратегії* гравців

$$x^* = \{x_{i^*} = 1,\ x_i = 0,\ i \ne i^*\},\ y^* = \{y_{j^*} = 1,\ y_j = 0,\ j \ne j^*\}. \qquad (37)$$

Зауважимо, що не кожна матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях - наприклад, розглянута раніше гра з монетами.

Оптимальні чисті стратегії

Будемо говорити, що матриця C має сідлову точку (i^*, j^*) якщо виконується нерівність $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$ для всіх $i = \overline{1,m}$ і $j = \overline{1,n}$.

Теорема 7. Матрична гра двох гравців має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). При цьому ціна гри $v = c_{i^*,j^*}$, а оптимальні чисті стратегії визначаються формулами (37).

Доведення. Легко переконатися, що для будь-якої матриці C справедлива нерівність

$$\min_{i=1,m} \max_{j=1,n} c_{i,j} \ge \max_{j=1,n} \min_{i=1,m} c_{i,j}. \qquad (38)$$

Покажемо, що існування сідлової точки матриці C необхідно і досить для перетворення нерівності (38) у рівність і при цьому

$$c_{i^*,j^*} = \min_{i=1,m} \max_{j=1,n} c_{i,j} = \max_{j=1,n} \min_{i=1,m} c_{i,j} \qquad (39)$$

Необхідність. Нехай виконується (39), покажемо, що платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Виберемо індекси (i^*, j^*) із умов $\max_{j=1,n} c_{i^*,j} = \min_{i=1,m} \max_{j=1,n} c_{i,j}$ та $\min_{i=1,m} c_{i,j^*} = \max_{j=1,n} \min_{i=i,m} c_{i,j}$. Згідно з (39), маємо $\max_{j=1,n} c_{i^*,j} = \min_{i=1,m} c_{i,j^*}$. Врахувавши означення мінімуму, отримаємо $\max_{j=1,n} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, а з урахуванням означення максимуму, маємо $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, $j = \overline{1,n}$. Цілком аналогічно

отримаємо нерівність $c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$, $i = \overline{1,m}$, що і вказує на існування сідлової точки.

Достатність. Нехай тепер платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Покажемо, що виконується (39). Дійсно, з означення сідлової точки легко отримати нерівність

$$\max_{j=1,n} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le \min_{i=1,m} c_{i,j^*},$$

з якої випливає нерівність

$$\min_{i=1,m} \max_{j=1,n} c_{i,j} \le \max_{j=1,n} \min_{i=1,m} c_{i,j},$$

що, з урахуванням (38), і завершує доведення. •

Приклад. Дослідити гру з платіжною матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 27 & 64 \\ 50 & 5 & 90 \\ 18 & 9 & 12 \\ 25 & 95 & 20 \end{pmatrix}$$

заданою з точки зору *гравця* I_2. У випадку існування розв'язку в чистих стратегіях – відшукати його.

Розв'язування. Безпосередніми підрахунками вияснимо, що умова (39) виконується при $i^* = 3$ і $j^* = 1$. За *теоремою 7*, гра має розв'язок у чистих стратегіях, $v^* = 18$, $x^* = (0,0,1,0)$, $y^* = (1,0,0)^T$.

Зауважимо, що відхилення від оптимальної чистої стратегії приводить до зменшення виграшу або до збільшення програшу гравця.

У загальному випадку, коли розв'язку в чистих стратегіях немає, його слід шукати у класі змішаних стратегій.

Оптимальні змішані стратегії

Розглянемо матричну гру двох гравців із платіжною матрицею C без сідлової точки. Очевидно, що гравцям не вигідно постійно обирати одну з чистих стратегій. Уведемо поняття *оптимальної* стратегії у класі змішаних стратегій. Нагадаємо, що вектор

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

називаємо *змішаною стратегією* гравця I_1, а вектор

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,\ y_j \geq 0, j = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

змішаною стратегією гравця I_2. Сукупність усіх можливих стратегій утворює клас змішаних стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 можна задати так

$$F(x, y) = x^T C y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j . \qquad (40)$$

Як і у випадку чистих стратегій, гравець I_1 може забезпечити собі середній програш не більше

$$\min_x G(x) = \min_x [\max_y F(x, y)], \qquad (41)$$

а гравець I_2 може забезпечити собі середній виграш не менше

$$\max_y H(y) = \max_y [\min_x F(x, y)]. \qquad (42)$$

Співвідношення (41) і (42) – це задачі відшукання гарантованих змішаних стратегій гравців I_1 та I_2, які є

задачами *нелінійного програмування*. Якщо для деяких змішаних стратегій x^* та y^* виконується нерівність

$$F(x^*, y) \le F(x^*, y^*) \le F(x, y^*), \ \forall x, \forall y, \qquad (43)$$

то функція $F(x, y)$ має сідлову точку і, аналогічно *теоремі 7*, можна показати, що має місце рівність

$$F(x^*, y^*) = \min_x \max_y F(x, y) = \max_y \min_x F(x, y). \qquad (44)$$

Уведені в такий спосіб стратегії x^* та y^* будемо називати *оптимальними змішаними стратегіями*, а число $v^* = x^{*T} C y^*$ *– ціною гри*.

Покажемо, що кожна матрична гра має розв'язок у класі змішаних стратегій або, що рівносильне, функція, задана (40), має сідлову точку в класі стратегій.

Теорема 8. Задачі (41) і (42) відшукання гарантованих стратегій гравців I_1 та I_2 еквівалентні парі двоїстих ЗЛП

$$\begin{aligned}
&x_{m+1} \longrightarrow \min, \\
&\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1}, \ j = \overline{1,n}, \qquad (45) \\
&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \\
&y_{n+1} \longrightarrow \max, \\
&\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j \ge y_{n+1}, \ i = \overline{1,m}, \qquad (46) \\
&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Доведення. Покажемо, наприклад, що (41) еквівалентно (45). Перепишемо (41) так:

$$G(x) = \max_y F(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \to \min_x,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Зауважимо далі, що задача

$$\max_y F(x,y) \to \min_x,\ (x,y) \in D$$

стає [21] еквівалентною задачі

$$z \to \min,\ F(x,y) \le z,\ (x,y) \in D,$$

як тільки множина D – замкнена, а функція $F(x,y)$ – обмежена на D. З урахуванням цього та в позначеннях $x_{m+1} = z$ отримаємо

$$\begin{aligned} & x_{m+1} \to \min, \\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \le x_{m+1}, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{aligned} \qquad (47)$$

Покажемо тепер, що множини допустимих векторів задач (45) і (47) збігаються. Дійсно, нехай вектор x задовольняє умовам задачі (47). Тоді цей же вектор x задовольняє

умови задачі (45), наприклад, при $y=(1,0,\ldots,0)^T$. Навпаки, нехай вектор x задовольняє умови задачі (45). Візьмемо будь-який вектор $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$, $y_j\ge 0, j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j=1$. Помножимо нерівності $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j}x_i \le x_{m+1}$, $j=\overline{1,n}$ на відповідні $y_j\ge 0, j=\overline{1,n}$ та підсумуємо добутки за індексом j. Отримаємо $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_i y_j \le x_{m+1}$, що й завершує доведення. •

Зауваження. Задачі (45) і (46) є парою двоїстих ЗЛП.

Тепер можна сформулювати та довести *основну теорему матричних ігор*.

Теорема 9. Кожна матрична гра має розв'язок.

Доведення. Покажемо, наприклад, що задача (45) завжди має розв'язок.

Дійсно, допустима множина цієї задачі непорожня, оскільки при $x_{m+1}=\max\limits_{j=\overline{1,n}}\left|c_{1,j}\right|$ вектор $x=(1,0,\ldots,0)$ є, очевидно, допустимим. З обмеженості зверху величин $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j}x_i$, $j=\overline{1,n}$ у класі стратегій випливає обмеженість знизу величини x_{m+1}, яка задає цільову функцію, тому розв'язок (45) існує. Із *першої теореми двоїстості* випливає існування розв'язку задачі (46), а із *теореми 8* – існування розв'язків задач (41) і (42). Позначимо ці розв'язки x^* та y^*. Тоді очевидна рівність

$$F(x^*,y^*)=\min_x\max_y F(x,y)=\max_y\min_x F(x,y),$$

а отже, й існування сідлової точки у функції $F(x,y)$. •

Зауваження. Якщо $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*, x_{m+1}^*)^T$ - розв'язок задачі (45), а $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots y_n^*, y_{n+1}^*)^T$ - розв'язок задачі (46), то оптимальна змішана стратегія гравця I_1 – $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*)^T$, оптимальна змішана стратегія гравця I_2 – $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots y_n^*)^T$, а ціна гри $v^* = x_{m+1}^* = y_{n+1}^*$.

Приклад. Розв'язати матричну гру задану платіжною матрицею $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Легко переконатися, що розв'язку в чистих стратегіях не існує. Нехай вектори $x = (x_1, x_2)^T$ і $y = (y_1, y_2)^T$ належать класу стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 задається формулою

$$F(x, y) = xCy = y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2).$$

Задачі (41) і (42) мають вигляд

$$\max_y [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \min_x,$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$\min_x [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \max_y,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Відповідні задачі (45) і (46) мають вигляд

$$\begin{aligned} & x_3 \to \min, \\ & -x_1 + x_2 \leq x_3, \\ & x_1 - x_2 \leq x_3, \\ & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, \end{aligned} \qquad \text{і} \qquad \begin{aligned} & y_3 \to \max, \\ & -y_1 + y_2 \geq y_3, \\ & y_1 - y_2 \geq y_3, \\ & y_1 + y_2 = 1, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи їх, наприклад M -методом, знаходимо:

$$x^* = (0.5,0.5),\ y^* = (0.5,0.5)^T,\ v^* = 0.$$

Активні стратегії

У випадку існування оптимальних чистих стратегій результат відхилення від них для кожного із гравців очевидний, а у випадку змішаних стратегій це не так. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)^T$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_1, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)^T$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_2. *Чисту стратегію* $x^k = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ гравця I_1 назвемо *активною*, якщо $x_k^* > 0$. Аналогічно вводиться поняття активних стратегій гравця I_2.

Теорема 10. Якщо гравець I_2 дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії y^*, то його середній виграш $F(x, y^*)$ залишається незмінним і дорівнює ціні гри $v^* = F(x^*, y^*)$ незалежно від стратегії гравця I_1, якщо тільки гравець I_1 не виходить за рамки своїх активних стратегій (застосовує їх у чистому вигляді чи змішує в довільних пропорціях).

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що всі чисті стратегії гравця I_1 активні, тобто, $x_i^* > 0$, $i = \overline{1,m}$. Оскільки (x^*, y^*) – сідлова точка функції $F(x, y)$, то з (43) випливає $v^* = F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*)$, або $v^* = x^* C y^* \leq x C y^*$ для всіх стратегій x. Візьмемо $x = x^i$, де x^i – i-та чиста стратегія і отримаємо

$$v^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^*,\ i = \overline{1,m}. \qquad (48)$$

Покажемо, що в нерівності (48) насправді виконується рівність при кожному $i = \overline{1,m}$. Доведення проведемо

від супротивного. Нехай для деяких значень індексу i нерівність (48) виконується строго, таких значень індексів є k штук і вони згруповані в такий спосіб, що

$$v^* < \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* ,\ i = \overline{1,k} ,$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* ,\ i = \overline{k+1,m} .$$

Помножимо кожне з цих відношень на відповідне $x_i^* > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо протиріччя

$$v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i^* < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i^* y_j^* = v^* .$$

Отже,

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* ,\ i = \overline{1,m} . \qquad (49)$$

Візьмемо тепер $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i > 0,\ i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ - довільну змішану стратегію гравця I_1. Помножимо кожну з рівностей (49) на відповідне $x_i > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо $v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j^* = x^T C y^*$, що і завершує доведення. •

Зауваження. Подібне доведеному твердження виконується і для гравця I_1.

Ця теорема дозволяє в ряді випадків відшукати оптимальні змішані стратегії та знайти ціну гри.

Приклад. Нехай $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і, як уже відомо, усі стратегії гравців активні. Знайти розв'язок гри.

Розв'язування. Якщо p - це ймовірність, з якою гравець I_1 обирає перший рядок матриці C, його оптимальна змішана стратегія повинна мати вигляд $x^* = (p,\ 1-p)^T$ і при цьому $\sum_{i=1}^{2} c_{i,j} x_i^* = v^*,\ j = \overline{1,2}$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -p + (1-p) = v^* \\ p - (1-p) = v^* \end{cases}$, знаходимо $p = 0.5,\ v^* = 0$. Тобто оптимальною для гравця I_1 є стратегія $x^* = (0.5,0.5)^T$. Цілком аналогічно при $y^* = (q, 1-q)^T$ із співвідношень $\sum_{j=1}^{2} c_{i,j} y_j^* = v^*,\ i = \overline{1,2}$ знаходимо оптимальну змішану стратегію гравця I_2 – $y^* = (0.5,0.5)^T$ і $v^* = 0$.

Для знаходження активних стратегій використовують поняття домінуючих стовпців та підпорядкованих рядків у платіжній матриці. Назвемо стовпчик k *домінуючим* над стовпчиком l, якщо виконується нерівність $c_{i,k} \geq c_{i,l},\ i = \overline{1,m}$, при цьому стовпчик l буде *підпорядкованим* стовпчику k. Аналогічні визначення введемо і для рядків платіжної матриці. Аналізуючи співвідношення (34) та (35), можна зробити висновок: якщо існує стовпчик l, підпорядкований стовпчику k, то відповідна йому l–та чиста стратегія гравця I_2 неактивна; якщо існує рядок k, домінуючий над рядком l, то відповідна йому k–та чиста стратегія гравця I_1 неактивна.

Використання цього твердження дозволяє в ряді випадків значно зменшити розмірність платіжної матриці за рахунок вилучення неактивних стратегій обох гравців.

Особливий інтерес викликають ігри з розміром платіжної матриці $2\times n$ та $m\times 2$. Для них розроблено *графічний метод* розв'язування. Для гри будується її графічне зображення. У випадку гри $2\times n$ виділяється верхня (44) границя виграшів та визначається точка з найменшою ординатою, а у випадку гри $m\times 2$ – нижня (43) границя виграшів та визначається точка з найбільшою ординатою. Знайдена ордината буде дорівнювати ціні гри, а пара прямих, перетин яких визначає знайдену точку, відповідає активними стратегіями відповідного гравця. Якщо в точці перетинається більше двох прямих, вибираємо тільки дві з них. Далі розв'язуємо гру 2×2 та знаходимо оптимальні змішані стратегії гравців.

Можна рекомендувати таку послідовність розв'язування матричної гри двох гравців із нульовою сумою:

1. Досліджуємо платіжну матрицю на наявність сідлової точки: якщо вона є – виписуємо оптимальні чисті стратегії та ціну гри.

2. Виділяємо активні стратегії гравців, використовуючи поняття домінування та підпорядкованості. Стовпчики та рядки матриці, що відповідають неактивним стратегіям, викреслюємо.

3. Якщо отримана після спрощення матриця має розмірність 2×2, розв'язуємо її за допомогою прикладу до *теореми 10*. Якщо отримана матриця має розмірність $2\times n$ або $m\times 2$, знаходимо розв'язок гри графічно.

4. У інших випадках зводимо гру до пари двоїстих ЗЛП і знаходимо її розв'язок.

Якщо розмір платіжної матриці після спрощення залишається великим, то застосування симплекс-методу вимагає значних обчислень. Для розв'язування матричних ігор у таких випадках, розроблено наближені методи.

Одним із таких методів є метод Брауна–Робінсон [36]. Приведемо схему застосування цього алгоритму.

Разом із початковою грою з платіжною матрицею C, розглянемо фіктивну гру, в якій гравці ходять почергово і використовують тільки чисті стратегії. Розпочинає гравець I_1 із довільної чистої стратегії i_1. Нехай проведено деяку кількість партій і після s-го ходу гравця I_1 побудовано вектор $x^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_m^s)$, де x_i^s – частота вибору i-ї чистої стратегії. Гравець I_2 буде вибирати свою чисту стратегію j_s так, щоб максимізувати свій виграш з умови $j_s \in \arg\max\limits_{j=1,n} \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i^s$. Аналогічно, після s-го ходу гравця I_2 побудовано вектор $y^s = (y_1^s, y_2^s, \ldots, y_n^s)$, де y_j^s – частота вибору j-ї чистої стратегії.

Гравець I_1 буде вибирати свою чисту стратегію i_s так, щоб мінімізувати свій програш із умови $i_s \in \arg\min\limits_{i=1,m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^s$. Якщо гравці робитимуть ходи за описаними правилами, то

$$x^{s+1} = (\frac{s}{s+1})x^s + (\frac{1}{s+1})x^{i_s} \text{ і } y^{s+1} = (\frac{s}{s+1})y^s + (\frac{1}{s+1})y^{j_s},$$

де x^{i_s} та y^{j_s} – відповідні чисті стратегії гравців.

Теорема 11. В описаній ітераційній процедурі існують границі

$$\lim_{s\to\infty} x^s = x^*, \ \lim_{s\to\infty} y^s = y^*,$$

де x^* і y^* – оптимальні стратегії, і при цьому

$$\lim_{s\to\infty} \min_i Cy^s = \lim_{s\to\infty} \max_j x^{sT} C = v^*,$$

де v^* – ціна гри. Цю теорему приймемо без доведення.

8. Оптимізаційні задачі на мережах

Розглянемо орієнтований граф (I,U), де $I = \{1,2,...,n\}$ – множина вершин графа, $U = \{(i,j) \mid i \in I, j \in I, i \neq j\}$ – множина дуг (упорядкованих пар вершин) графа. Кожній вершині i поставимо у відповідність дійсне число d_i, кожній дузі (i,j) – два невід'ємних числа $c_{i,j}$ та $r_{i,j}$. Такий граф будемо називати мережею. Число d_i називатимемо інтенсивністю вершини i. Якщо $d_i > 0$, вершину назвемо джерелом, якщо $d_i < 0$ - стоком, якщо $d_i = 0$ – нейтральною. Відповідне дузі (i,j) число $c_{i,j}$ характеризує її з якісного боку (довжина дуги, вартість використання дуги), число $r_{i,j}$ задає внутрішні обмеження дуги (пропускна здатність).

Означення 9. Мережа *допускає* однорідний потік $x = \{x_{ij}, (i,j) \in U\}$, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = d_i,\ i \in I, \tag{50}$$

$$0 \le x_{i,j} \le r_{i,j},\ (i,j) \in U. \tag{51}$$

Зауважимо, що потік x - це множина, елементами якої є значення $x_{i,j}$ потоку на дугах. Співвідношення (50) називають умовами неперервності потоку або рівняннями збереження.

Нехай $C \subseteq I$. Позначимо $d(C) = \sum_{i\in C} d_i$, $r(C) = \sum_{i\in C,\ j\in I\setminus C,\ (i,j)\in U} r_{i,j}$.

Означення 10. Множину дуг $U_C = \{(i, j) \in U : i \in C, j \in I \setminus C\}$ назвемо перерізом мережі, число $r(C)$ – пропускною здатністю перерізу.

Очевидно, що переріз можна задавати як за допомогою множини C, так і множиною U_C.

Теорема 12. Для того, щоб мережа допускала потік необхідно й досить виконання умов:

1) $d(I) = 0$;

2) $d(C) \le r(C)$ для всіх підмножин $C \subseteq I$.

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження. У позначеннях, які використовувалися при вивченні транспортних задач із обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО) [10,23,34], задамо

$$I = \{P_i\}_{i=\overline{1,m}} \bigcup \{Q_j\}_{j=\overline{1,n}},\ d_k = \begin{cases} a_k,\ k \in \{P_i\}_{i=\overline{1,m}}, \\ -b_k,\ k \in \{Q_j\}_{j=\overline{1,n}}, \end{cases}$$

$$U = \{P_i Q_j\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$$

і збережемо за $c_{i,j}$ та $r_{i,j}$ звичний зміст (вартість перевезення одиниці продукції та обмеження на пропускну здатність комунікації).

Тоді *перша* з умов *теореми 12* – це не що інше, як умова збалансованості ТЗО, а *друга* – об'єднує основні обмеження ТЗО та необхідні й достатні умови існування допустимих планів перевезень.

Вважатимемо надалі, що умови *теореми 12* виконуються. Тоді множина допустимих потоків D непорожня.

Основною *оптимізаційною задачею* на мережі є задача знаходження такого допустимого потоку на заданій мережі (I,U), на якому досягає мінімуму функція вартості

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min . \qquad (52)$$

Розв'язок цієї задачі $x^* = \{x^*_{i,j},\ (i,j) \in U\}$ називатимемо *оптимальним потоком* на мережі.

Прикладами оптимізаційних задач на мережі можуть бути розглянуті раніше ТЗБО та ТЗО. Іншими важливими випадками задачі (50), (51), (52) є задача про *найкоротший шлях* та задача *про максимальний потік і мінімальний переріз*.

Задача про найкоротший шлях

Розглянемо цю задачу в припущенні, що мережа має одне джерело (вершина 1) та один стік (вершина n).

Нехай $d_1 = 1$, $d_n = -1$, а решта вершин нейтральні. Умову (51) замінимо умовою $x_{i,j} \in \{0,1\}$. Отримаємо задачу

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min , \qquad (53)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(1,j)\in U} x_{1,j} = 1, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = 0,\ i = \overline{2,n-1}, \\ -\sum\limits_{k:(k,n)\in U} x_{k,n} = -1, \end{cases} \qquad (54)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\},\ (i,j) \in U . \qquad (55)$$

Умови неперервності (54) забезпечують існування шляху від джерела до стоку, а умова (55) дає змогу знайти

розв'язок задачі перебором не більше 2^{n-1} варіантів. Зауважимо, що задача (53) – (55) допускає різноманітні трактування. Зокрема, якщо $c_{i,j}$ – це довжина дуги (i, j), маємо задачу про найкоротший шлях від джерела до стоку. Якщо $c_{i,j}$ – це показник затрат на проходження дуги (i, j), маємо задачу про найефективніший шлях. Іноді, особливо в задачах календарного планування, величину $c_{i,j}$ трактують як час переходу $t_{i,j}$ від вершини i до вершини j, маємо задачу про визначення критичного часу.

Для розв'язування задачі про найкоротший шлях найчастіше використовують метод Мінті. Знайдений розв'язок (оптимальний потік) $x^* = \{x^*_{i,j},\ (i,j) \in U\}$ містить тільки 1 і 0. Дуги (i, j), яким відповідає $x^*_{i,j} = 1$, і утворюють найкоротший шлях. Цим методом можна знайти найкоротші шляхи від джерела до кожної з вершин мережі. Зазначимо, що до деяких нейтральних вершин шляху може й не існувати.

Алгоритм методу Мінті

Крок 1. Вершині 1 (джерелу) ставимо у відповідність позначку $h_1 = 0$.

Крок r. Нехай на кроці r маємо множину позначених вершин $I = \{i_1, i_2, ..., i_k, ...\}$ з позначками $(h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_k}, ...)$ відповідно та множину непозначених вершин мережі $J = \{..., i_l, ...\}$.

Крок $r+1$. Розглянемо множину дуг $(i_k, i_l) \in U$, $i_k \in I$, $i_l \in J$, $I \cap J = \phi$. Для кожної такої дуги обчислюємо величину $h_{i_l} = h_{i_k} + c_{i_k, i_l}$ і виділяємо ті дуги, для

яких ця величина мінімальна. Із кількох дуг, які закінчуються в одній вершині, виділяємо *одну (будь-яку)*. Вершині, в якій закінчується виділена дуга, приписуємо позначку h_{i_l} та заносимо цю вершину до множини I ("розширюємо" цією вершиною множину I).

Процес, описаний у Кроці $r+1$, повторюємо доти, допоки можна "*розширювати*" множину I. •

За побудовою множини виділених дуг, у кожну з позначених вершин (окрім вершини 1) заходить єдина виділена дуга. Початок кожної виділеної дуги позначається раніше її кінця. Тому рух від довільної позначеної вершини i_k до вершини 1 по виділених дугах у напрямку, протилежному їх орієнтації, здійснюється однозначно. Послідовність таких виділених дуг складає деякий шлях L(1, i_k) із вершини 1 у вершину i_k.

Теорема 13. (про оптимальність шляху). Для довільної позначеної вершини

$i_k \in I$, де I – множина позначених вершин, побудована методом Мінті, шлях L(1, i_k) є найкоротшим. При цьому довжина шляху L(1, i_k) дорівнює позначці h_{i_k} вершини i_k.

Цю теорему також приймемо без доведення.

Зауваження 1. Якщо по закінченні алгоритму деяка вершина залишилась непозначеною, то шляху від джерела до цієї вершини не існує.

Зауваження 2. Насправді, метод Мінті розв'язує більш загальну задачу – знаходить найкоротший шлях від джерела до кожної з позначених вершин, позначка вершини дорівнює довжині шляху до неї.

Зауваження 3. Якщо в пункті 2 алгоритму виділяти *всі* дуги, для яких величина $h_{i_l} = h_{i_k} + c_{i_k,i_l}$ мінімальна, то по закінченні алгоритму отримаємо *всі* найкоротші шляхи.

Застосування методу Мінті зручно супроводжувати рисунками.

Задача про максимальний потік і мінімальний переріз

Нехай $C \subset I$ – деяка множина вершин мережі, яка містить джерело ($s \in C$) та не містить стоку ($t \notin C$). Далі будемо розглядати тільки перерізи мережі, що відокремлюють джерело від стоку – множину дуг $U_C = \{(i,j) : i \in C, j \notin C, (i,j) \in U\}$. Відомо, що переріз мережі однозначно задається множиною C. Пропускна здатність перерізу U_C дорівнює числу $r(C) = \sum_{(i,j) \in U_C} r_{i,j}$.

Задача про *мінімальний переріз,* що відокремлює джерело від стоку, полягає в знаходженні такої множини $C^* \subset I$ і відповідного їй перерізу U_{C^*}, що $r(C^*) = \min_{U_C \subset U} r(C)$. При цьому переріз U_{C^*} називають мінімальним перерізом, що відокремлює джерело від стоку, а число $r(C^*)$ - пропускною здатністю цього мінімального перерізу.

З цією задачею тісно пов'язана задача знаходження такого максимального числа $d > 0$, що мережа з інтенсивністю вершин $d_s = d$, $d_t = -d$, $d_i = 0, i \in I, i \neq s, i \neq t$ і пропускними здатностями дуг r_{ij} допускає потік. Тобто йдеться про визначення максимального числа $d > 0$, для якого існує потік $x = \{x_{ij}, (i,j) \in U\}$, який задовольняє умови

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(s,j)\in U} x_{s,j} = d, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = 0, i \in I,\ i \neq s,\ i \neq t, \\ -\sum\limits_{k:(k,t)\in U} x_{i,t} = -d, \end{cases} \qquad (56)$$

$$0 \le x_{i,j} \le r_{i,j},\ (i,j) \in U\ .$$

Якщо d^* – розв'язок цієї задачі, а $x^* = \{x^*_{i,j}, (i,j) \in U\}$ – відповідний потік, то x^* називають *максимальним потоком* у мережі, а число d^* – *величиною* максимального потоку. Задачу знаходження d^* і x^* називають задачею про *максимальний потік*.

Зв'язок між цими задачами полягає в тому, що з *умови 2)* теореми 2 випливає нерівність $\max\limits_{C\subset I} d(C) \le \min\limits_{U_C \subset U} r(C)$, яка відповідає нерівності між значеннями цільових функцій пари двоїстих ЗЛП. Природно очікувати, що на розв'язках цих задач нерівність перетвориться в рівність. Оскільки $\max\limits_{C\subset I} d(C) = d(C^*) = d^*$, бо множина допустимих потоків непорожня, то має виконуватись рівність $d^* = r(C^*)$. Підсумовує ці міркування наступна теорема.

Теорема 14 (Форда–Фалкерсона). У мережі з єдиним джерелом $s \in I$ і єдиним стоком $t \in I$ величина максимального потоку дорівнює пропускній здатності мінімального перерізу, що відділяє джерело від стоку.

Доведення. Нехай $x^* = \{x^*_{i,j}, (i,j) \in U\}$ – максимальний потік у мережі, а число d^* – величина максимального потоку. Нехай $U_C = \{(i,j) : i \in C, j \notin C, (i,j) \in U\}$ – довільний переріз

мережі, що відокремлює джерело від стоку, $r(C)$ – його пропускна здатність. Необхідно довести існування такої множини $C^* \subset I$, $s \in C^*$, $t \notin C^*$ і відповідного їй перерізу U_{C^*}, що $r(C^*) = \min\limits_{U_C \subset U} r(C)$ і $d^* = r(C^*)$. Побудуємо множину C^* за такими правилами

$$\begin{aligned} &s \in C^*, \\ &\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{i,j} < r_{i,j}, \text{ то } j \in C^*, \\ &\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{k,i} > 0, \text{ то } k \in C^*. \end{aligned} \qquad (57)$$

Зрозуміло, що за побудовою $t \notin C^*$. Дійсно, якщо припустити $t \in C^*$, то існуватиме шлях із s до t. Збільшуючи значення потоку на дугах із цього шляху, отримаємо більшу від d^* величину потоку, що неможливо.

Визначимо значення $r(C^*)$. Із (57) випливає, що

$$\begin{aligned} &\text{якщо } i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U, \text{ то } x^*_{i,j} = r_{i,j}, \\ &\text{якщо } i \in C^*, k \notin C^*, (k,i) \in U, \text{ то } x^*_{k,i} = 0. \end{aligned} \qquad (58)$$

Із (56) маємо: $\forall i \in C^*, (i \neq t)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x^*_{i,j} = d^*, \; i = s, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x^*_{k,i} = 0, \; i \neq s. \end{cases}$$

Підсумовуючи ці співвідношення за $i \in C^*$, отримаємо:

$$\sum_{(i,j):i\in C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum_{(k,i):i\in C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} = d^*.$$

Розглядаючи випадки $j,k \in C^*$ та $j,k \notin C^*$, розпишемо останню рівність

$$\sum_{(i,j):i\in C^*,j\in C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} + \sum_{(i,j):i\in C^*,j\notin C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum_{(k,i):i\in C^*,k\in C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} - \sum_{(k,i):i\in C^*k\notin C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} = d^*$$

Очевидно, що доданки перший і третій скорочуються. Із (58) отримуємо, що перший доданок дорівнює $r(C^*)$ а четвертий – 0. Тому $d^* = r(C^*)$.•

На основі співвідношення (57) побудовано *метод Форда–Фалкерсона*, який дає можливість знайти мінімальний переріз мережі, максимальний потік та його величину. Кожній вершині мережі ставлять у відповідність певну позначку. Позначка вершини i складається з пари чисел (N_i, θ_i) і має такий зміст: деяким шляхом, останньою дугою якого є дуга $(|N_i|, i)$, з джерела до i-ї вершини можна додатково перевезти $\theta_i > 0$ вантажу. Іншими словами, за заданим потоком $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ можна побудувати новий потік $\{x'_{i,j}, (i,j) \in U\}$ такий, що $x'_{N_i,j} = x_{N_i,j} + \theta_i$.

Алгоритм методу Форда–Фалкерсона

На першому кроці задають деякий початковий допустимий потік, зазвичай $\{x^0_{i,j} = 0, (i,j) \in U\}$, величина якого $d^0 = 0$. Вершині $s = 1$ (джерелу) ставимо у відповідність мітку $(N_1 = 0, \theta_1 = \infty)$. Нехай на r-му кроці алгоритму маємо потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ та множину позначених вершин $I_r = \{1, \cdots, i_k, \cdots\}$ з мітками (N_1, θ_1), (N_2, θ_2), … , (N_{i_k}, θ_{i_k}) відповідно. Нехай $I_{r1} = \{\cdots, i_l, \cdots\}$ - множина непозначених вершин, таких, що $(i_k, i_l) \in U$, $i_k \in I_r$, $i_l \notin I_r$, а $I_{r2} = \{\cdots, i_m, \cdots\}$ – множина непозначених вершин, таких, що $(i_m, i_k) \in U$, $i_m \notin I_r$, $i_k \in I_r$. Позначками (N_{i_l}, θ_{i_l}), $N_{i_l} = i_k$, $\theta_{i_l} = \min\{\theta_{i_k}, r_{i_k,i_l} - x_{i_k,i_l}\}$ позначимо ті вершини із I_{r1}, для

яких $r_{i_k,i_l} - x_{i_k,i_l} > 0$. Позначками (N_{i_m}, θ_{i_m}), $N_{i_m} = -i_k$, $\theta_{i_m} = \min\{\theta_{i_k}, x_{i_m,i_k}\}$ позначимо ті вершини із I_{r2}, для яких $x_{i_m,i_k} > 0$. Доповнимо множину I_r щойно позначеними вершинами. Отримаємо нову множину вершин I_{r+1}. Процес "розширення" цієї множини продовжуємо доти, поки це можливо. Нехай, I^* – множина позначених вершин, яку неможливо "розширити". Можливі випадки:

1) вершина $t = n$ (витік) не належить множині I^*;

2) вершина $t = n$ (витік) належить множині I^*.

У першому випадку потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ максимальний, а переріз $C^* = I^*$, $U_{C^*} = \{(i,j) : i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U\}$ мінімальний. Алгоритм закінчено.

У другому випадку потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ можна поліпшити. Дійсно, за позначками вершин легко побудувати послідовність дуг (ланцюг), який з'єднує джерело та витік, позначимо його L_{1n}.

Побудуємо новий допустимий потік $\{x'_{i,j}, (i,j) \in U\}$ за правилами:

$$x'_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j}, (i,j) \notin L_{1n}, (i,j) \in U, \\ x_{i,j} + \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j > 0, \\ x_{i,j} - \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що при цьому величина нового потоку $d' = d + \theta_n$. Забираємо всі позначки з вершин та переходимо до наступного $r+1$-го кроку.

Зауважимо, що при невеликій кількості вершин розв'язування задачі можна проводити за допомогою графічного зображення мережі (у вигляді орієнтованого графа).

Розділ 3. Задачі нелінійного та стохастичного програмування

Ми уже зустрічалися з задачами нелінійного програмування (ЗНП) (див., наприклад, задачі(41) та (42)).

У загальному випадку ЗНП має вигляд

$$f_0(x) \to min,$$
$$f_i(x) = 0, i = \overline{1,m},$$
$$x \in X \subset R^n,$$

де хоча б одна з функцій є нелінійною. Метою таких задач є відшукання такого вектора $x^* \in X$, який мінімізує цільову функцію та перетворює на тотожності всі обмеження.

Одразу зауважимо, що наразі загального методу розв'язування ЗНП не існує. У залежності від властивостей функцій $f_i(x), i = \overline{0,m}$ виділяють такі групи методів розв'язування ЗНП:

- градієнтні методи, такі як метод градієнтного спуску (для задач без обмежень) та метод Ньютона (для задач з гладкими функціями);
- методи з використанням множників Лагранжа, такі як метод штрафів (або штрафних функцій) та метод бар'єрних функцій (внутрішніх або зовнішніх);
- чисельні методи, такі як алгоритм SQP (послідовного квадратичного програмування) та метод внутрішньої точки;
- евристичні методи, такі як генетичні алгоритми та алгоритми рою частинок.

Задачі стохастичного програмування (ЗСтП) виникають у ситуаціях, коли частина параметрів моделі є випадковими і відома лише їх імовірнісна характеристика. Метою

таких задач є пошук оптимального рішення, яке враховує невизначеність у вихідних даних.

Загальна форма задачі стохастичного програмування:

$$\min_{x \in X} \mathrm{E}_{\xi} [f(x, \xi)]$$

де X–допустима множина (область визначення) задається детермінованими обмеженнями, $f(x, \xi)$– цільова функція, яка залежить від випадкового параметра ξ, $\mathrm{E}_{\xi}[]$–математичне сподівання щодо випадкового параметра ξ.

Серед підходів до розв'язування ЗСтП виділяють:

- задачі двоетапного стохастичного програмування;
- мультиетапне стохастичне програмування;
- стохастичне програмування з обмеженнями на ризик.

Серед методів розв'язування ЗСтП відмітимо:

- методи сценаріїв, у яких випадковий параметр ξ заміняють скінченою кількістю сценаріїв із відповідними ймовірностями;
- метод Монте-Карло, у якому використовують імовірнісне моделювання для оцінки математичного сподівання;
- стохастичні градієнтні методи;
- методи на основі розкладу Бендера.

Приведемо тепер, згідно із [41], декілька алгоритмів розв'язування ЗНП та ЗСтП.

Методи проекції градієнта.

Задача 1.

Знайти $\arg\min_{x \in X} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^n \to R^1$ і заданої множини $X \subset R^n$.

Припущення 1.

$(\boldsymbol{i})$ – функція f_0 опукла вниз і неперервно диференційована на множині X;

$(\boldsymbol{ii})$ – X – опукла замкнута множина;

$(\boldsymbol{iii})$ – $\left\|\nabla f_0(x)-\nabla f_0(y)\right\| \le \gamma \left\|x-y\right\|,\ \ 0<\gamma<\infty,\ \ \forall x,\ y \in X.$

Алгоритм 1

Початок.

I. Вибрати початкове наближення $x^0 \in X$.

II. Покласти $k=0$.

Основний цикл.

III. Обчислити $\nabla f_0\left(x^k\right)$.

IV. Вибрати множник β_k, який задовольняє одну з заздалегідь вибраних умов

$$0<\beta' \le \beta_k \le \beta'' < +\infty; \tag{59}$$

$$0<\beta' \le \beta_k \le \beta'' < 2/\gamma. \tag{60}$$

V. Обчислити точку $y^k \in R^n$ за формулою

$$y^k = x^k - \beta_k \nabla f_0\left(x^k\right).$$

VI. Обчислити точку y_X^k – проекцію точки y^k на опуклу замкнену множину X.

VII. Якщо β_k вибирається у відповідності із нерівністю (60), то вибрати множник ρ_k, який задовольняє нерівності

$$0<\hat{\rho}<\rho_k \le 1 \tag{61}$$

і перейти на крок VIII; якщо β_k вибирається згідно (59), то обчислити множник ρ_k за однією із формул

$$f_0\left(x^k-\rho_k\left(x^k-y_X^k\right)\right)=\min_{0\le\rho\le 1} f_0\left(x^k-\rho\left(x^k-y_X^k\right)\right), \quad (62)$$

або

$$\rho_k=\min\left\{1,\ \nu_k\frac{\left(\nabla f_0\left(x^k\right),\ x^k-y_X^k\right)}{\left\|x^k-y_X^k\right\|^2}\right\}, \quad (63)$$

де $0<\varepsilon_1<\nu_k\le\dfrac{2-\varepsilon_2}{\gamma}$; $\varepsilon_2>0$, і перейти на крок VIII.

VIII. Покласти $x^{k+1}=x^k-\rho_k\left(x^k-y_X^k\right)$, $k=k+1$ і перейти на крок III.

Зауваження. Вважається, що ρ_k на кожній ітерації обчислюється за однією і тією ж формулою.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення 1 і множина

$$X_0\underline{\Delta}\left\{f_0\left(x\right)\le f_0\left(x^0\right),\ x\in X\right\}$$

обмежена;

$$\left\|\nabla f_0\left(x\right)\right\|\le\tau<+\infty \text{ для всіх } x\in X_0.$$

Тоді алгоритм 1 породжує послідовність $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ таку, що

$$f_0\left(x^k\right)-\min_{x\in X} f_0\left(x\right)\le\alpha/k,\quad k=1,2,...;\quad \alpha>0.$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Метод проекції градієнта для мінімізації функції при лінійних обмеженнях.

Задача 2.

Знайти $\arg\min\limits_{x\in X} f_0(x)$ для заданої функції $f_0: R^n\to R^1$ і заданої множини

$$X=\left\{x\left|\left(a^j,x\right)-b_j\le 0,\ j=1,...,m,\ x\in R^n\right.\right\},$$

де $a^j\in R^n$; $b_j\in R^1$; $j=1,...,m$.

Припущення 2.

Функція f_0 опукла вниз і неперервно диференційована.

Нагадаємо:

1. Довільна підмножина множини $\{1,...,m\}$, яка містить m' елементів, позначимо через $\mathfrak{J}$.

2. Матрицю розмірності $n \times m'$, стовпцями якої є вектори a^j, $j \in \mathfrak{J}$, розміщені в порядку зростання j, позначимо через $A_{\mathfrak{J}}$.

3. Матрицю проектування R^n на підпростір $L_{\mathfrak{J}}$, породжений векторами a^j, $j \in \mathfrak{J}$, позначимо через $P_{\mathfrak{J}}$.

4. Якщо вектори a^j, $j \in \mathfrak{J}$, які визначають простір $L_{\mathfrak{J}}$, лінійно незалежні, то матриця, яка проектує R^n на підпростір $L_{\mathfrak{J}}$, обчислюється за формулою

$$P_{\mathfrak{J}} = A_{\mathfrak{J}} \left(A_{\mathfrak{J}}^T A_{\mathfrak{J}} \right)^{-1} A_{\mathfrak{J}}^T . \qquad (64)$$

Якщо вектори a^j, $j \in \mathfrak{J}$ лінійно залежні, то необхідно знайти підмножину $\mathfrak{J}'$ таку, що вектори a^j, $j \in \mathfrak{J}'$ будуть лінійно незалежні і породжують $L_{\mathfrak{J}}$, а проєктуюча матриця $P_{\mathfrak{J}} = P_{\mathfrak{J}'}$ буде визначатися згідно (64) при $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$.

5. Матрицю проектування R^n на ортогональне доповнення до $L_{\mathfrak{J}}$ позначимо через

$$P_{\mathfrak{J}}^{\perp} = I - P_{\mathfrak{J}},$$

де I – одинична $n \times n$-матриця.

6. Позначимо через $\Im_\varepsilon(x)$ ε-активну множину індексів, яка визначається за формулою

$$\Im_\varepsilon(x)=\left\{j\left|\left(a^j,x\right)-b^j+\varepsilon\geq 0,\ \ j=1,...,m,\ \ x\in X\right.\right\},$$

де $\varepsilon\geq 0$.

Твердження. Точка $\hat{x}\in X$ оптимальна в задачі 2 тоді і тільки тоді, коли

$$\nabla f_0(\hat{x})=A_{\Im_0(\hat{x})}y^0(\hat{x}),\ \ \text{тобто}\ \ P^{\perp}_{\Im_0(\hat{x})}\nabla f_0(\hat{x})=0;$$

$$y^0(\hat{x})\leq 0,$$

де $y^0(\hat{x})$ обчислюється за наступною формулою (при $\varepsilon=0$ і $x=\hat{x}$):

$$y^\varepsilon(x)=\left(A^T_{\Im_\varepsilon(x)}A_{\Im_\varepsilon(x)}\right)^{-1}A^T_{\Im_\varepsilon(x)}\nabla f_0(x). \qquad (65)$$

Відмітимо, що матриця $P_{\Im_\varepsilon(x)}$, яка проектує R^n на підпростір $L_{\Im_\varepsilon(x)}$, натягнутий на вектори a^j, $j\in\Im_\varepsilon(x)$, обчислюється за формулою

$$P_{\Im_\varepsilon(x)}=A_{\Im_\varepsilon(x)}\left(A^T_{\Im_\varepsilon(x)}A_{\Im_\varepsilon(x)}\right)^{-1}A^T_{\Im_\varepsilon(x)},$$

якщо виконується умова: існує таке число $\varepsilon'>0$, що для будь-якої точки $x\in X$ і будь-якого числа $\varepsilon\in[0,\varepsilon']$ вектори a^j, $j\in\Im_\varepsilon(x)$ лінійно незалежні.

Алгоритм 2.

П о ч а т о к .

I. Обчислити $x^0\in X$; вибрати $\beta\in(0,1)$ (зазвичай покладають $\beta=1/2$), $\bar{\varepsilon}\in(0,\varepsilon')$ і $\varepsilon''\in(0,\bar{\varepsilon})$; покласти $k=0$.

Основний цикл.

II. Покласти $x = x^k$.

III. Покласти $\varepsilon_0 = \overline{\varepsilon}$, $j = 0$.

IV. Обчислити множину індексів $\Im_{\varepsilon_j}(x)$ і покласти $\Im = \Im_{\varepsilon_j}(x)$.

V. Обчислити матрицю $P_{\Im}^{\perp}$, яка проектує R^n на ортогональне доповнення до $L_{\Im}$,

$$P_{\Im}^{\perp} = I - A_{\Im}\left(A_{\Im}^T A_{\Im}\right)^{-1} A_{\Im}^T. \qquad (66)$$

VI. Обчислити вектор

$$h^{\varepsilon_j}(x) = P_{\Im}^{\perp} \nabla f_0(x). \qquad (67)$$

VII. Якщо $\left\|h^{\varepsilon_j}(x)\right\|^2 > \varepsilon_j$, то покласти $h(x) = -h^{\varepsilon_j}(x)$ і перейти на крок XVII; інакше перейти на крок VIII.

VIII. Якщо $\varepsilon_j \le \varepsilon''$, то обчислити множину індексів $\Im_0(x)$ і перейти на крок IX; інакше перейти на крок XII.

IX. Обчислити вектор

$$h^0(x) = P_{\Im_0}^{\perp} \nabla f_0(x), \qquad (68)$$

де $P_{\Im_0}^{\perp}$ – матриця, яка визначається за (66) при $\Im = \Im_0$.

X. Обчислити вектор $y^0(x)$ за (65) при $\varepsilon = 0$.

XI. Якщо $\left\|h^0(x)\right\|^2 = 0$ і $y^0(x) \le 0$, то покласти $x^* = x$ і припинити обчислення; інакше перейти на крок XII.

XII. Обчислити вектор $y^{\varepsilon_j}(x)$ за формулою (65) при $\varepsilon = \varepsilon_j$ і покласти $y = y^{\varepsilon_j}(x)$.

XIII. Якщо $y \le 0$, то покласти $\varepsilon_{j+1} = \beta\varepsilon_j$, $j = j+1$ і перейти на крок IV; інакше перейти на крок XIV.

XIV. Припускаючи, що $\Im = \{i_1, i_2, ..., i_{m'}\}$ та $i_1 < i_2 < ... < i_{m'}$, покласти $\mu_{i_\alpha}(x) = y_\alpha$, $\alpha = 1,...,m'$.

XV. Знайти найменше число i серед чисел $i \in \Im$, для яких вектор

$$\overline{h}^{\varepsilon_i}(x) \underline{\underline{\Delta}} P^{\perp}_{\Im - i} \nabla f_0(x) \tag{69}$$

задовольняє умові

$$\left\| \overline{h}^{\varepsilon_i}(x) \right\| = \max \left\{ \| P^{\perp}_{\Im - l} \nabla f_0(x) \| \,\middle|\, l \in \Im,\ \mu_l(x) > 0 \right\}, \tag{70}$$

(тут і далі $\Im - i \underline{\underline{\Delta}} \{ j \,|\, j \in \Im,\ j \ne i \}$) і покласти $h(x) = -\overline{h}^{\varepsilon_i}(x)$.

XVI. Якщо $\|h(x)\|^2 \le \varepsilon_j$, то покласти $\varepsilon_{j+1} = \beta\varepsilon_j$, $j = j+1$ і перейти на крок IV; інакше перейти на крок XVII.

XVII. Обчислити найменше з чисел $\rho(x) > 0$, яке задовольняє умові

$$\begin{gathered} f_0(x + \rho(x)h(x)) = \\ = \min \left\{ f_0(x + \rho h(x)) \,\middle|\, \rho \ge 0,\ x + \rho h(x) \in X \right\}. \end{gathered} \tag{71}$$

XVIII. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = x + \rho(x)h(x).$$

XIX. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок II.

Теорема 2. Якщо виконано припущення 2 і множина

$$X'\left(x^0\right)\underline{\Delta}\left\{x\middle|f_0\left(x\right)\le f_0\left(x^0\right),\ \left(a^j,x\right)-b_j\le 0,\ j=1,...,m\right\}$$

компактна, то послідовність x^k, $k=0,1,...,$ яка побудована алгоритмом 2, або скінчена і її останній елемент оптимальний для задачі 2, або нескінчена і кожна її гранична точка оптимальна для задачі 2.

Методи зовнішніх штрафних функцій.

Задача 3.

Знайти $\arg\min\limits_{x\in X} f_0(x)$ для заданої функції $f_0: R^n \to R^1$ і заданої множини

$$X=\left\{x\mid f_j\left(x\right)\le 0;\ j=1,2,...,m,\ x\in R^n\right\}. \qquad (72)$$

Припущення 3.

(***i***) – функція f_0 неперервно диференційована;

(***ii***) – функції f_j, $j=1,2,...,m$ неперервні;

(***iii***) – існує така точка $x'\in X$, що множина $X'=\left\{x\mid f_0\left(x\right)\le f_0\left(x'\right)\right\}$ компактна.

Ідея методу зовнішніх штрафних функцій основана на зведенні задачі з обмеженнями до розв'язування послідовності задач на безумовний мінімум. При цьому необхідно будувати послідовність зовнішніх штрафних функцій для множини X, яка визначається наступним чином.

Означення. Послідовність неперервних функцій $p_k\left(x\right)$, $k=0,1,2,...,$ називається послідовністю *зовнішніх штрафних функцій* для множини X, якщо:

$$
\begin{aligned}
p_k(x) &= 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in X, \quad k = 0,1,2,...; \\
p_k(x) &> 0 \quad \text{для всіх} \quad x \notin X, \quad k = 0,1,2,...; \\
p_k(x) &\to \infty \quad \text{для всіх} \quad x \notin X, \quad k \to \infty; \\
p_{k+1}(x) &> p_k(x) \quad \text{для всіх} \quad x \notin X, \quad k = 0,1,2,....
\end{aligned}
$$

Далі, використовуючи відомі алгоритми, при кожному $k = 0,1,2,...$ знаходимо $\tilde{x}^k$ – розв'язок задачі на безумовний мінімум

$$f_0(x) + p_k(x) \to \min_{x \in R^n}. \tag{73}$$

Граничні точки послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ є оптимальним розв'язком задачі 1. Методи зовнішніх штрафних функцій забезпечують наближений розв'язок задачі 1 поза допустимою областю.

Наведемо приклад послідовності зовнішніх штрафних функцій для множини X, означеної згідно (72):

$$p_k(x) = \alpha_k \sum_{j=1}^{m} \left(\max\left\{0, f_j(x)\right\} \right)^{\beta}, \quad k = 0,1,2,... \tag{74}$$

де $\beta \geq 1$, $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність додатних чисел, що прямує до нескінченності при $k \to \infty$.

Алгоритм 3.

I. Побудувати $p_k(x)$, $k = 0,1,2,...$ – послідовність зовнішніх штрафних функцій для множини X, означеної згідно (72); (для цього можна використати (74)).

II. При кожному $k = 0,1,2,...$ знайти $\tilde{x}^k$ – розв'язок задачі на безумовний мінімум

$$f_0(x) + p_k(x) \to \min_{x \in R^n} \tag{75}$$

III. Знайти граничні точки послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 3. Нехай виконується припущення 3. Тоді довільна гранична точка послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, породженої алгоритмом 3, є оптимальним розв'язком задачі 3.

Теорема 3'. Нехай виконується припущення 3 і, крім того:

а) функції $f_j,\ j=0,1,...,m$ – неперервно диференційовані;

б) множина

$$X_\lambda=\{x\mid f_0(x)+p_k(x)\le\lambda\},\quad \lambda<\infty,\quad k=0,1,... \qquad (76)$$

компактна;

в) задача 3 має єдиний розв'язок x^*;

г) мінімум в (75) при великих k досягається в єдиній точці $\tilde{x}^k$;

д) в розв'язку x^* задачі 1 градієнти $\nabla f_i(x^*),\ i\in\Im(x^*)$, лінійно незалежні, де множина $\Im(x^*)$ визначена за правилом

$$\Im(x^*)=\{j\mid f_j(x^*)=0,\ j=1,...,m\}.$$

Тоді для точок $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, породжених алгоритмом 3, (в якому $p_k(x),\ k=0,1,2,...$, визначається згідно (75) при $\beta=2$), мають місце граничні рівності

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{x}^k=x^*;$$

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k\left(\max\{0,f_j(\tilde{x}^k)\}\right)=\frac{1}{2}u_j,\ j=1,...,m,$$

де $u_j,\ j=1,...,m,$ – множники Лагранжа задачі 1.

У випадку опуклого програмування оцінки наближення $\tilde{x}^k$ до шуканого x^* можуть бути зроблені більш точними.

Теорема 3''. Нехай функції f_j, $j = 0,1,...,m$, опуклі вниз і множина X_λ, яка визначається згідно (76), компактна. Нехай, крім того, в точці $x*$, що є розв'язком задачі 3, виконуються необхідні умови в формі теореми Куна-Таккера, тобто існують такі числа $u_j \geq 0$, $j = 1,...,m$, що

$$f_0(x*) \leq \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x) + f_0(x), \quad \forall x;$$

$$u_j f_j(x*) = 0, \quad j = 1,...,m.$$

Тоді

$$f_j(\tilde{x}^k) \leq \frac{\tilde{u}}{\alpha_k}, \quad \text{якщо} \quad f_j(\tilde{x}^k) \geq 0;$$

$$f_0(\tilde{x}^k) \geq f_0(x*) - \frac{5}{4}\frac{\overline{u}^2}{\alpha_k}, \qquad \text{де } \overline{u} = \left(\sum_{j=1}^{m} (u_j)^2\right)^{1/2}.$$

Методи внутрішніх штрафних функцій.

Задача 4.

Знайти $\arg\min_{x \in X} f_0(x)$ для заданої функції $f_0 : R^n \to R^1$ і для заданої множини

$$X = \{x \mid f_j(x) \leq 0, \quad j = 1,2,...,m, \quad x \in R^n\}.$$

Припущення 4.

(***i***) – функція f_0, неперервно диференційована;

(***ii***) – функції f_j, $j = 1,2,...m$, – неперервні;

(***iii***) – існує така точка $x' \in X$, що множина $X' = \{x \mid f_0(x) \leq f_0(x')\}$ компактна; множина X має внутрішні точки і замикання її внутрішності X^0 співпадає з X.

Ідея методу полягає у зведенні розв'язування задачі з обмеженнями до розв'язування послідовності задач на безумовний мінімум. При цьому необхідно будувати послідовність внутрішніх штрафних функцій для множини X, яка визначається наступним чином.

Означення. Послідовність неперервних функцій p'_k: $X^0 \to R^1$, $k = 0,1,2...$, називається послідовністю внутрішніх штрафних функцій для множини X^0, якщо:

$$0 < p'_{k+1}(x) < p'_k(x) \text{ для всіх } x \in X^0,\ k = 0,1,2...;$$

$$p'_k(x) \to 0 \text{ для всіх } x \in X^0,\ k \to \infty;$$

$p'_k(x^j) \to \infty$ при $j \to \infty$ для будь-якої послідовності $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$, що належить X^0, для якої $x^j \to x \in \partial X$ при $j \to \infty$, $k = 0,1,2...$ (де ∂X означає границю множини X).

Далі при кожному $k = 0,1,2...$, використовуючи алгоритми розділів 3 та 4, знаходять $\tilde{x}^k$ розв'язок задачі

$$f_0(x) + p'_k(x) \to \min_{x \in X^0}. \tag{77}$$

Граничні точки послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ – оптимальні розв'язки задачі 4.

Нижче наведені приклади послідовностей внутрішніх штрафних функцій для множини X:

$$p'_k(x) = -\alpha_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{f_j(x)},\ k = 0,1,2,...,\ x \in X^0, \tag{78}$$

де функції f_j, $j = 1,2,...m$, задовольняють припущенню 1 і $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність додатних чисел, що строго спадає наближаючись до нуля при $k \to \infty$;

$$p'_k(x) = -\alpha_k \sum_{j=1}^{m} \log(-f_j(x)) =$$

$$= -\alpha_k \log\left((-1)^m f_1(x) f_2(x) ... f_m(x)\right), \quad x \in X^0, \ k = 0,1..., \tag{79}$$

де функції f_j, $j = 1,2,...m$, і послідовність $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ такі, як в (78) і , крім того, виконується

$$\mu = \max_j(-\min_{x \in X} f_j(x)) < \infty.$$

Методи внутрішніх штрафних функцій забезпечують наближений розв'язок, який в границі наближається до розв'язку задачі 4.

Алгоритм 4.

I. Побудувати $p'_k(x)$, $k = 0,1,2,...$ – послідовність внутрішніх штрафних функцій до множини X (можна використовувати (78) і (79)).

II. При кожному $k = 0,1,2,...$, знайти $\tilde{x}^k$ – розв'язок задачі мінімізації функції $f_0(x) + p'_k(x)$ на множині X^0.

III. Знайти граничні точки послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 4. Нехай виконується припущення 4. Тоді будь-яка гранична точка послідовності $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$, *яка породжена алгоритмом 4, являється оптимальним розв'язком задачі 4.*

Зауваження. Перевагою методів внутрішніх штрафних функцій (у порівнянні з методами зовнішніх штрафних функцій) являється те, що вони породжують послідовності тільки допустимих точок, і, отже, можуть бути використані в реальному масштабі часу, мають в основному похідні достатньо високого порядку і допускають управління обчислювальним процесом „всередині" множини X.

Перерахуємо тепер їх деякі недоліки. Методи внутрішніх функцій можна використовувати лише для обмеженого класу множин X (для множин X, що мають внутрішні точки). Процес повинен починатися тільки з внутрішньої точки множини X. Якщо множина X має вигляд

$$X = \{x \,|\, f_j(x) \le 0,\ \ j = 1,...,m\},$$

то всі члени штрафних функцій типу (78) і (79) завжди дають ненульовий вклад в величину градієнта штрафної функції. Це значно збільшує об'єм обчислень при пошуку напрямку спуску (градієнта внутрішньої штрафної функції). В цьому розумінні методи зовнішніх штрафних функцій більш привабливі.

Прямий метод розв'язування задач стохастичного програмування.

Задача 5.

Знайти $\arg\min\limits_{x \in X} E_\omega f_0(x, \omega)$ для заданої функції $f_0 : X \times \Omega \to R^1$ і заданої множини

$$X = \left\{x \,|\, E_\omega f_i(x, \omega) \le 0,\ \ i = 1,...,m,\ \ \ x \in X^1\right\},$$

де X^1 – деяка множина простору R^n.

Припущення 5.

$(\boldsymbol{i}) - X^1 -$ опукла, замкнута і обмежена множина;

$(\boldsymbol{ii}) -\ E_\omega f_i(x, \omega),\ i = 0,1,...,m$ – неперервні, опуклі вниз функції.

Алгоритм 5.

П о ч а т о к .

I. Вибрати довільне початкове наближення $x^0 \in R^n$; довільні числа $z_i^0,\ i = 1,...,m;$ достатньо велику константу $\delta > 0.$

II. Покласти $k = 0$.

Основний цикл.

III. Знайти кроковий множник ρ_k і множник α_k, які задовольняють умови теореми 5.

IV. Якщо виконується нерівність

$$\max_{1 \le i \le m} z_i^k \le 0,$$

то покласти $j = 0$ і перейти на крок VI; інакше перейти на крок V.

V. Знайти індекс $j \in [1:m]$, який задовольняє умову

$$z_j^k = \max_{1 \le i \le m} z_i^k .$$

VI. Обчислити реалізацію ξ^k випадкового вектора $\overline{\xi}^k$, для якого

$$E_\omega \left(\overline{\xi}^k \middle/ x^0, z^0, ..., x^k, z^k \right) = \hat{\nabla} \varphi_j \left(x^k \right),$$

де $\hat{\nabla} \varphi_j \left(x^k \right)$ – узагальнений градієнт функції $\varphi_j(x) \underline{\underline{\Delta}} E_\omega f_j(x, \omega)$ в точці $x = x^k$.

VII. Обчислити наступне наближення

$$x^{k+1} = \pi_{X^1} \left(x^k - \rho_k \xi^k \right).$$

VIII. Знайти випадкові величини θ_i^k, $i = 1, ..., m,$ для яких

$$E_\omega \left(\theta_i^k \middle/ x^0, z^0, ..., x^k, z^k \right) = E_\omega f_i \left(x^k, \omega \right), \quad i = 1, ..., m.$$

IX. Покласти $i = 1$.

X. Якщо виконується нерівність

$$\left| z_i^k + \alpha_k \left(\theta_i^k - z_i^k \right) \right| \le \delta,$$

то покласти

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \alpha_k \left(\theta_i^k - z_i^k \right)$$

і перейти на крок XI; інакше покласти

$$z_i^{k+1} = \left(\delta z_i^k + \delta \alpha_k \left(\theta_i^k - z_i^k \right) \right) \Big/ \left| z_i^k + \alpha_k \left(\theta_i^k - z_i^k \right) \right|$$

і перейти на крок XI.

XI. Якщо $i < m$, то покласти $i = i + 1$ і перейти на крок X; інакше перейти на крок XII.

XII. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок III.

Теорема 5. Якщо виконуються припущення 5, і крім того:

(***iii***) – область Y, яка визначена обмеженнями $E_\omega f_i(x, \omega) \le 0, \ \ i = 1, ..., m$, задовольняє умову Слейтера;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} {\rho_k}^2 < \infty \ \ \rho_k / \alpha_k \to 0 \ \text{ при } k \to \infty;$$

$$E\left| \theta_i^k \right| \le \delta < \infty, \ i = 1, ..., m \ \text{ при } \ k = 0,1,...;$$

$$E \, || \, \overline{\xi}^k \, ||^2 \le \delta < \infty, \ \text{при } \ k = 0,1,...;$$

то з ймовірністю 1, одна з граничних точок послідовності $\left\{ x^k \right\}_{k=0}^{\infty}$, яка породжена алгоритмом 5, належить множині розв'язків задачі 5. Якщо $Ef_0(x, \omega)$ – строго опукла вниз функція, то з ймовірністю 1

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*,$$

де x^* – розв'язок задачі 5.

Зауваження. Якщо функції $f_i(x,\omega),\ i=0,1,...,m,$ при кожному ω опуклі вниз, то на кроці VI алгоритму 5 можна взяти

$$\xi^k = \hat{\nabla} f_j\left(x^k,\omega^k\right),$$

а на кроці VIII –

$$\theta_i^k = f_i\left(x^k,\omega^k\right),\ \ i=1,...,m,$$

де $\hat{\nabla} f_j\left(x^k,\omega^k\right)$ – узагальнений градієнт функції $f_j(x,\omega)$ по x; ω^k – незалежні спостереження випадкової величини.

Методи розв'язування задач квадратичного програмування.

Задачею квадратичного програмування називають задачу мінімізації квадратичної функції при лінійних обмеженнях.

Метод спряжених градієнтів для мінімізації квадратичної функції.

Задача 6.

Знайти $\arg\min\limits_{x\in X}\left[\frac{1}{2}(Cx,x)+(d,x)\right]$, де $X=\{x\,|\,(a^i,\ x)-b_i=0,\ \ i\in\Im\}$; $C-$ симетрична додатновизначена матриця розмірності $n\times n;\ d\in R^n,\ a^i\in R^n,\ i=\Im,\ \Im-$ скінчена множина індексів; $b_i\in R^1,\ i\in\Im.$

Припущення 6.

$(\boldsymbol{i})-$ $C-$ симетрична додатно-визначена матриця розмірності $n\times n$, тобто $(Cx,x)>0$ для всіх ненульових $x\in R^n$; $(\boldsymbol{ii})-$ вектори $a^i,\ i\in\Im,-$ лінійно-незалежні.

Алгоритм 6.

Початок.

I. Знайти початкове наближення $x^0\in X$.

II. Обчислити $n\times n$-матрицю H за формулою

$$H=A^T(AA^T)^{-1}A,$$

де A – матриця, рядками якої виступають n-вимірні вектори-рядки $(a^i)^T,\ i\in\Im$.

III. Обчислити градієнт функції, яка мінімізується

$$f_0(x)\underline{\Delta}\frac{1}{2}(Cx,x)+(d,x)$$

в точці $x=x^0$ за формулою

$$\nabla f_0(x^0)=Cx^0+d.$$

IV. Обчислити n-вимірний вектор

$$h^1=-(I-H)\nabla f_0(x^0),$$

де $I-$ одинична $n\times n$-матриця.

Якщо $h^1=0,$ то зупинити обчислення, інакше перейти на крок V.

V. Обчислити кроковий множник

$$\rho_1=-(\nabla f_0(x^0),h_1)/(h_1,Ch^1).$$

VI. Покласти $x^1=x^0+\rho_1h^1$.

VII. Покласти $k=1,\ g^0=h^1$.

Основний цикл.

VIII. Обчислити n-вимірний вектор

$$g^k=(I-H)\nabla f_0(x^k),$$

де $\nabla f_0(x^k)=Cx^k+d$.

Якщо $g^k = 0,$ зупинити обчислення; інакше перейти на крок IX.

IX. Обчислити *n*-вимірний вектор

$$h^{k+1} = -g^k + \frac{\left\| g^k \right\|^2}{\left\| g^{k-1} \right\|^2} h^k.$$

X. Обчислити кроковий множник

$$\rho_{k+1} = -(\nabla f_0(x^k),\ h^{k+1}) / (h^{k+1},\ Ch^{k+1}).$$

XI. Покласти $x^{k+1} = x^k + \rho_{k+1} h^{k+1}.$

XII. Покласти $k = k+1$ і перейти на крок VIII.

Теорема 6. Якщо виконуються припущення 6, то алгоритм 6 розв'язує задачу 6 за скінчену кількість ітерацій, що не перевищує *n*. При цьому, якщо мінімізуюча функція $f_0(x) \underline{\Delta} \frac{1}{2}(Cx, x) + (d, x)$ має на множині X скінчений мінімум, то послідовність $\{x^k\}$, яка породжена алгоритмом 6, збігається до точки мінімуму x^* задачі 6 за скінчену кількість ітерацій $k \le n.$ Якщо функція $f_0(x)$ необмежена (знизу) на множині $X,$ то при деякому $k \le n$ буде виконуватися рівність

$$(h^{k+1}, Ch^{k+1}) = 0,$$

з чого випливає $\rho_{k+1} = -\infty.$

Завдання для самоконтролю до розділу 1.

Індивідуальне завдання 1: Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Мета роботи: Засвоїти та вміти застосовувати графічний метод розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП).

Теоретичні відомості: Сторінки 5-10.

***Завдання*:** Розв'язати графічно ЗЛП, записати її розв'язок та обчислити значення цільової функції.

Варіанти завдань.

1. $L(x) = x_1 - x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 1 \le x_1 + x_2 \le 2, \\ 2 \le x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 1 \le 2x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $L(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

3. $L(x) = x_1 + x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 0 \le x_1 + x_2 \le 3, \\ -1 \le x_1 - x_2 \le 0, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 2. \end{cases}$

4. $L(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$
$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

5. $L(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \min,$
$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 5x_1 - x_2 \le 45, \\ x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $L(x) = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$

7. $L(x) = x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \ge -3, \\ 6x_1 + x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

8. $L(x) = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$

9. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -1 \le -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

10. $L(x) = x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

11. $L(x) = x_1 + 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_6 \ge 0.$

12. $L(x) = x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_6 \ge 0.$

13. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

14. $L(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

15.
$$L(x) = x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 0.5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

16.
$$L(x) = 0.5x_1 + 0.2x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 30x_1 + 5x_2 - x_4 = 4, \\ 10x_1 + 60x_2 - x_5 = 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

17.
$$L(x) = 2x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

18.
$$L(x) = 5x_1 - 10x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

19.
$$L(x) = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

20.
$$L(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

21.
$$L(x) = x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

22.
$$L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -1 \le -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

23. $L(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

24. $L(x) = -4x_1 - 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

25. $L(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

26. $L(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \cdots, x_5 \ge 0.$

27. $L(x) = 5x_1 - 10x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

28. $L(x) = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_7 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_7 \ge 0.$

29. $L(x) = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \cdots, x_5 \ge 0.$

30. $L(x) = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_6 \ge 0.$

Додаткові запитання.

1. Рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$. Запишіть нормальний вектор прямої.
2. У яких випадках ЗЛП може не мати розв'язку?
3. Скільки розв'язків може мати ЗЛП?
4. Приведіть приклад допустимої множини, на якій цільова функція $L(x) = x_1 - 2x_2$ необмежена знизу.

Індивідуальне завдання 2: Симплекс-метод розв'язування ЗЛП.

Мета роботи: Вміти застосовувати симплекс-метод до розв'язування ЗЛП.

Теоретичні відомості: Сторінки 10-45.

Завдання: Розв'язати симплекс-методом ЗЗЛП.

Варіанти завдань.

1. $L(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

2. $L(x) = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \cdots, x_6 \ge 0.$

3. $L(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, ..., x_6 \ge 0.$

4. $L(x) = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, ..., x_6 \ge 0.$

5. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, ..., x_6 \ge 0.$

6. $L(x) = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \cdots, x_6 \ge 0.$

7. $L(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

8. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 + 6x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

9. $L(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

10. $L(x) = -3x_1 + 3x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

11. $L(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

12. $L(x) = -3x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 = 3, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

14. $L(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \ge 7, \\ 7x_1 - 5x_2 \ge 35, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

15. $L(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

16. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

17. $L(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

18. $L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

19.
$$L(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

20.
$$L(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,..., x_6 \ge 0.$$

21.
$$L(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

22.
$$L(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

23.
$$L(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ -6x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

24.
$$L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 = 6, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0.$$

25.
$$L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0.$$

26.
$$L(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

27.
$$L(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 80, \\ 3x_2 + 3x_3 - 1.5x_4 \ge 36, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

28.
$$L(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 27, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0.$$

29. $L(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \end{cases}$
$x_1 \ge 0.$

30. $L(x) = x_1 - x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

Додаткові запитання

1. Дайте означення базисного вектора (плану) СЗЛП.
2. Як потрібно вибирати провідний елемент в симплекс-методі?
3. Сформулюйте критерій закінчення обчислень в симплекс-методі.
4. Охарактеризуйте проблему “зациклення” симплекс-методу.

Індивідуальне завдання 3: *Метод штучної бази та М-метод розв’язування ЗЛП.*

Мета роботи: Засвоїти методи розв’язування ЗЛП в стандартній формі.

Теоретичні відомості: Сторінки 45-54.

Завдання: ***Парні варіанти***: методом штучної бази відшукати початковий базисний вектор ЗЗЛП, звести ЗЗЛП до КЗЛП та розв’язати її..

Непарні варіанти: розв’язати М-методом ЗЗЛП.

Варіанти завдань.

1. $L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 \le -14, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 \ge 9, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \le -8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

2. $L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 \le -8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

3. $L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le -3, \\ x_1 + 5x_3 - 3x_4 \ge 4, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \le -6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

4. $L(x) = x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 \le 4, \\ x_1 - 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 10x_2 + 3x_3 + x_4 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

5. $L(x) = x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le -4, \\ 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + 10x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

6. $L(x) = 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le -4, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + x_4 \le -8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

7. $L(x) = 18x_1 + 9x_2 + 10x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

8. $L(x) = 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

9. $L(x) = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

10. $L(x) = 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \geq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

11. $L(x) = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

12. $L(x) = 18x_1 + 7x_2 + 30x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

13. $L(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

14. $L(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

15. $L(x) = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

16. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6, \\ -x_1 + x_3 \leq 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

17. $L(x) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

18. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

19. $L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

20. $L(x) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \ge 9, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 10, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

21. $L(x) = -x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

22. $L(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + x_3 \ge 1, \\ x_2 + 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

23. $L(x) = 12x_1 + 8x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

24. $L(x) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4, \\ x_3 - x_4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

25. $L(x) = 6x_1 + 223x_2 - 42x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 13x_2 + 3x_3 \le -1, \\ 2x_1 + 17x_2 - 7x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

26. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

27. $L(x) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

28. $L(x) = 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 12, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 14, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

29. $L(x) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$
$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

30. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \leq 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

Індивідуальне завдання 4: *Двоїстий симплекс-метод, теореми двоїстості.*

Мета роботи: Засвоїти алгоритм двоїстого симплекс-методу, навчитися

застосовувати теореми двоїстості для знаходження розв'язків пари двоїстих задач.

***Теоретичні відомості*:** Сторінки 54-69.

Завдання: Побудувати двоїсту задачу до заданої.

Парні варіанти: розв'язати одну із задач двоїстої пари і за цим розв'язком, використовуючи теореми двоїстості, знайти розв'язок іншої задачі.

Непарні варіанти: привести задану ЗЛП до "майже канонічного" виду і розв'язати її за допомогою двоїстого симплекс-методу. Записати двоїсту задачу до розв'язуваної та її розв'язок.

Варіанти завдань.

1. $L(x) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \leq 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. $L(x) = 6x_1 + 223x_2 - 42x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 13x_2 + 3x_3 \leq -1, \\ 2x_1 + 17x_2 - 7x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

4. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

5. $L(x) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

6. $L(x) = 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

7. $L(x) = 12x_1 + 8x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $L(x) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \geq 4, \\ x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

9. $L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

10. $L(x) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 10, \\ x_1 - 2x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

11. $L(x) = -x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

12. $L(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + x_3 \ge 1, \\ x_2 + 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

13. $L(x) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

14. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

15. $L(x) = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

16. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + x_3 \le 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

17. $L(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

18. $L(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

19. $L(x) = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

20. $L(x) = 18x_1 + 7x_2 + 30x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

21. $L(x) = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

22. $L(x) = 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \geq -2, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

23. $L(x) = 18x_1 + 9x_2 + 10x_3 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

24. $L(x) = 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \to \min,$
$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

25. $L(x) = x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -4, \\ 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 8, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

26. $L(x) = 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -4, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + x_4 \leq -8, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

27. $L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -3, \\ x_1 + 5x_3 - 3x_4 \geq 4, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq -6, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

28. $L(x) = x_3 + 2x_4 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 \leq 4, \\ x_1 - 5x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ 10x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 8, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

29. $L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 \leq -14, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 \geq 9, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \leq -8, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

30. $L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -8, \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

Додаткові запитання.

1. У яких випадках двоїста задача не має розв’язку? Приведіть приклади.

2. У яких випадках зручно користуватись двоїстим симплекс-методом і чому?

Завдання для самоконтролю до розділу 2.

Індивідуальне завдання 1. Транспортні задачі без обмежень на пропускні здатності (ТЗБО).

***Мета роботи*:** навчитися будувати початковий план перевезень та розв'язувати транспортні задачі без обмежень.

***Теоретичні відомості*:** Сторінки 69-85.

Завдання. Розв'язати методом потенціалів транспортну задачу без обмежень.

Варіанти завдань

1.

16	30	17	10	16	4
30	27	26	9	23	6
13	4	22	3	1	10
3	1	5	4	24	10
7	7	7	7	2	

2.

15	1	22	19	1	20
21	18	11	4	3	20
26	29	23	26	24	20
21	10	3	19	27	20
19	19	19	19	4	

3.

17	20	29	26	25	15
3	4	5	15	24	15
19	2	22	4	13	15
20	27	1	17	19	15
11	11	11	11	16	

4.

20	26	24	26	29	13
15	20	29	26	23	17
4	10	27	30	7	17
9	16	29	30	3	13
12	12	12	12	12	

5.

21	34	43	32	2	10
11	54	29	18	3	10
4	14	25	36	12	15
11	3	5	12	34	10
8	7	10	10	10	

6.

1	54	32	87	43	10
4	2	3	23	12	12
17	14	26	12	43	10
4	15	24	32	21	10
8	10	4	10	10	

7.

8	1	19	1	5	18
8	27	30	7	7	23
10	20	19	26	20	17
18	28	25	7	22	22
21	21	9	9	20	

8.

30	20	27	15	26	33
25	6	28	20	5	33
19	24	11	29	23	33
1	4	6	6	8	11
22	22	22	22	22	

9.

29	53	39	29	22	33
15	33	16	3	3	18
16	27	16	3	5	32
35	50	39	20	23	17
20	20	20	20	20	

10.

12	6	29	19	21	13
14	3	30	10	10	27
15	27	28	11	24	16
1	23	25	15	13	14
14	14	14	14	14	

11.

29	4	7	6	16	14
21	13	25	21	7	14
20	10	12	6	2	14
17	7	4	6	19	18
12	12	12	12	12	

12.

20	5	27	10	26	15
7	17	18	21	28	25
27	21	9	23	26	5
1	13	17	23	7	15
7	8	13	12	20	

13.

14	5	27	29	23	18
17	7	16	19	2	14
20	12	15	29	5	16
14	24	18	7	13	12
8	11	11	9	21	

14.

30	17	26	14	3	24
18	14	27	6	20	8
8	24	17	17	26	12
1	18	21	16	12	16
11	11	11	11	16	

15.

19	9	14	17	9	17
4	21	27	8	29	17
22	30	4	1	24	16
10	22	8	5	27	10
9	9	9	9	24	

16.

25	16	26	43	23	38
30	23	28	48	27	13
37	23	25	49	28	9
22	1	4	25	10	20
13	13	13	13	28	

17.

10	15	14	28	1	14
16	7	30	8	29	14
1	21	22	19	12	12
8	25	28	5	19	16
11	11	11	8	15	

18.

17	16	15	29	9	25
6	27	20	25	20	13
6	15	12	8	14	15
10	24	23	5	22	15
16	16	16	16	16	

19.

24	23	6	29	3	34
20	8	13	2	27	35
30	17	10	23	28	21
4	7	23	27	26	10
20	20	15	15	30	

20.

3	25	11	22	12	23
9	15	4	26	12	25
13	22	15	12	27	12
6	19	8	11	8	30
18	18	18	18	18	

21.

30	9	29	6	13	17
23	13	3	28	7	17
4	3	11	6	9	17
3	10	11	10	28	17
13	13	13	13	16	

22.

21	17	12	24	30	19
6	1	9	5	9	19
7	5	24	6	13	19
29	22	21	5	7	19
15	15	16	15	15	

23.

25	18	14	3	16	24
29	15	27	16	17	7
21	2	29	2	22	16
5	13	1	5	17	13
11	16	11	11	11	

24.

8	28	17	19	11	23
27	5	10	6	19	24
29	11	3	7	8	21
25	16	19	24	13	15
19	16	16	16	16	

25.

13	7	19	18	27	15
1	21	8	20	12	19
5	17	14	23	21	15
7	4	29	18	22	11
12	18	10	10	10	

26.

39	28	37	27	46	33
21	4	20	3	14	17
25	27	25	24	29	15
12	26	10	5	22	15
13	13	13	21	20	

27.

29	4	8	11	5	15
10	19	26	1	27	16
16	7	4	29	23	15
9	10	24	25	17	16
11	12	13	14	12	

28.

14	27	6	16	8	21
2	4	19	4	27	22
26	23	1	20	3	22
24	5	12	30	5	20
18	20	19	19	9	

29.

14	27	5	18	19	24
17	20	1	24	3	21
11	7	28	23	9	21
8	26	19	2	24	24
19	25	20	13	13	

30.

14	6	1	12	19	31
28	13	22	18	4	16
21	27	30	10	14	20
2	5	6	25	7	14
15	15	18	17	16	

Додаткові запитання

1. Опишіть метод мінімального елемента знаходження початкового плану перевезень.

2. Запишіть непрямі обмеження для незбалансованої ТЗ.

3. Як методом потенціалів можна розв'язати незбалансовану ТЗ?

Індивідуальне завдання 2. Транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО)

***Мета роботи*:** навчитися будувати початковий план перевезень та розв'язувати транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності.

***Теоретичні відомості*:** Сторінки 85-91.

Завдання. Методом потенціалів знайти початковий план та розв'язати транспортну задача з обмеженнями на пропускні здатності.

Варіанти завдань

1.

14	10	2	5	10	50
11	5	4	11	3	20
9	8	12	1	18	30
1	4	9	17	18	40
15	30	65	20	10	

15	35	14	10	5
8	4	20	12	18
10	7	32	20	14
8	4	16	20	17

2.

16	1	10	16	12	10
12	13	7	10	14	70
1	19	14	13	3	60
13	8	15	8	19	30
40	40	60	25	5	

3	5	6	4	8
29	12	15	16	16
12	20	21	10	2
1	6	21	4	3

3.

5	3	20	7	25	10
8	12	6	12	5	48
3	1	12	2	19	27
6	3	3	1	18	46
17	33	38	21	22	

9	1	16	5	11
20	19	17	3	6
10	14	30	18	7
18	16	11	13	17

4.

7	19	7	12	18	80
17	11	7	13	11	12
1	13	19	18	12	38
18	4	11	3	11	45
75	10	20	40	30	

20	6	15	22	25
2	5	2	3	4
20	1	3	15	8
40	5	6	2	10

5.

10	16	3	8	15	14
3	14	12	9	1	25
2	20	4	11	5	56
7	17	13	8	15	45
40	40	20	10	30	

8	2	3	2	2
15	3	3	4	5
10	20	15	5	10
11	20	7	4	21

6.

16	12	3	9	10	15
4	16	1	11	10	17
19	10	18	20	19	23
12	4	11	18	19	75
30	27	16	33	24	

5	3	5	4	10
7	5	5	10	4
12	7	6	4	3
10	17	15	35	20

7.

10	9	12	7	1	30
16	4	9	19	10	70
20	17	11	1	12	50
13	14	15	7	8	20
35	30	35	45	25	

10	4	15	8	10
20	21	23	16	15
5	10	8	25	12
4	5	6	7	10

8.

5	19	12	5	9	50
17	20	11	10	9	20
2	15	12	13	6	10
18	3	8	5	14	30
5	15	35	15	40	

2	6	18	5	25
3	4	1	7	8
9	5	3	3	7
15	7	21	22	6

9.

5	4	20	5	14	60
19	20	2	4	5	50
9	6	8	19	1	40
7	15	20	6	11	20
10	50	40	50	20	

5	20	14	25	13
19	22	15	4	12
6	8	15	5	10
14	7	2	23	20

10.

17	18	7	20	2	10
5	16	3	9	19	13
15	14	17	7	5	28
11	15	9	8	16	17
11	10	14	16	17	

7	10	4	5	8
5	4	6	5	9
11	6	12	8	7
3	2	1	6	10

11.

14	13	6	12	1	20
18	20	4	2	3	30
17	5	15	10	8	70
4	12	18	13	16	71
37	26	91	24	13	

7	6	5	5	3
10	8	11	2	4
20	15	28	9	7
11	13	41	20	14

12.

3	17	6	19	2	20
1	15	7	6	1	40
5	13	8	11	17	52
18	13	17	1	8	73
45	38	40	28	34	

5	7	6	5	4
20	3	20	4	2
24	13	7	11	8
9	21	16	13	25

13.

14	20	7	17	8	29
18	4	14	9	7	39
17	15	16	12	20	28
25	13	66	15	25	24
30	30	10	20	30	

15	14	20	7	3
12	8	16	15	4
3	5	17	4	20
1	3	1	4	27

14.

5	8	13	14	9	62
11	20	18	19	17	26
10	30	15	25	5	27
9	16	15	11	17	65
30	50	13	70	17	

20	25	10	20	2
4	7	6	10	15
10	2	8	3	15
10	30	15	25	5

15.

2	8	17	13	11	71
5	2	3	16	1	69
5	9	7	14	18	58
4	11	2	14	15	32
50	30	25	80	45	

30	11	10	25	10
4	19	20	20	17
15	13	10	20	25
10	11	2	20	12

16.

17	1	3	5	2	33
4	7	20	19	13	44
8	18	3	11	12	24
15	17	16	11	10	55
20	36	50	40	10	

7	13	12	7	7
12	10	14	10	4
6	19	10	1	3
10	8	22	24	5

17.

1	3	18	7	2	53
9	4	15	20	8	45
19	17	12	8	16	38
4	3	20	2	11	15
21	30	75	10	15	

10	26	23	8	9
6	18	30	5	5
4	2	25	3	10
5	4	11	2	1

18.

9	1	8	7	8	26
8	1	6	9	5	38
20	8	15	14	19	39
12	6	10	10	12	75
3	46	25	49	55	

14	10	15	20	18
17	8	15	18	13
11	23	18	30	16
9	10	11	24	32

19.

10	18	12	8	12	11
17	2	18	13	7	19
4	3	1	6	12	35
12	16	8	14	15	75
55	45	18	12	10	

6	5	7	3	2
20	4	10	30	4
8	15	2	41	22
32	12	10	3	23

20.

5	13	10	5	19	15
1	10	16	15	7	40
13	17	20	16	9	14
16	10	5	6	16	76
55	30	11	30	19	

5	5	4	6	7
20	10	9	13	8
4	12	4	11	3
30	15	8	13	19

21.

18	12	7	15	12	19
14	17	11	2	7	52
19	6	11	12	6	34
10	8	20	1	13	15
20	40	17	10	33	

10	9	10	6	8
4	31	5	5	17
11	3	8	15	16
5	10	3	6	4

22.

5	16	3	7	10	50
6	4	20	1	11	42
19	6	12	19	7	17
15	10	18	17	8	36
19	20	66	18	22	

10	10	16	17	9
5	11	30	7	4
5	2	10	3	2
10	5	16	1	11

23.

16	9	2	17	27	27
12	4	19	10	5	35
6	12	11	13	2	49
5	19	10	4	1	94
55	30	77	20	23	

7	12	10	4	17
3	25	10	10	5
10	3	27	4	11
30	14	30	10	12

24.

18	14	6	8	7	72
8	19	9	16	17	29
18	10	14	7	19	26
1	6	10	5	13	68
65	24	50	30	26	

12	20	3	20	10
20	4	3	2	8
13	10	30	10	15
23	5	6	4	6

25.

11	12	17	15	13	13
1	4	6	2	5	44
7	11	9	16	19	77
2	10	5	18	6	62
36	40	50	35	35	

11	12	17	12	15
4	13	17	13	6
15	27	13	41	22
20	3	25	20	12

26.

14	19	17	12	20	35
16	1	4	7	5	61
11	3	9	7	19	72
12	16	11	5	13	27
67	30	35	23	40	

27	17	4	8	10
20	5	12	11	20
20	20	12	22	4
7	20	7	5	10

27.

14	8	10	6	11	29
17	4	19	6	17	66
12	11	15	8	16	17
10	1	5	14	17	82
44	50	40	23	37	

14	15	9	10	6
4	20	15	4	32
10	4	3	7	10
24	35	20	5	7

28.

6	1	19	20	3	77
10	12	19	4	17	24
3	2	20	19	6	69
18	17	9	12	4	16
56	30	40	15	45	

16	30	21	9	30
8	4	5	10	11
30	4	29	5	15
14	6	3	7	2

29.

5	16	10	3	7	78
6	14	17	2	4	37
18	8	3	7	4	53
19	10	17	18	5	69
37	60	30	40	70	

17	20	7	21	27
5	6	7	8	32
5	20	25	10	10
27	20	3	19	10

30.

8	18	11	17	7	33
16	14	18	15	4	42
2	8	3	12	16	99
1	17	12	18	4	24
68	40	30	30	30	

13	18	10	7	8
10	5	15	12	10
45	20	21	19	20
8	20	12	4	1

Додаткові запитання

1. Чи всяка ТЗО має допустимі плани?

2. Який допустимий план ТЗО називається базисним?

3.Які Ви знаєте методи побудови початкового плану ТЗО?

4.Сформулюйте критерій оптимальності базисного плану ТЗО?

Індивідуальне завдання 3. Цілочислове програмування: угорський алгоритм

***Мета роботи*:** навчитися розв’язувати задачу про призначення.

***Теоретичні відомості*: Сторінки 91-96.**

Завдання. Задано таблицю, елементами якої є продуктивність (парні номери варіантів) чи затрати часу (непарні номери варіантів) механізму i на роботі j. Знайти оптимальний розподіл механізмів на роботи.

Варіанти завдань

1.

5	2	9	6	9	5	6
7	2	8	4	4	8	7
6	3	5	5	10	1	5
1	4	4	2	10	2	7
7	2	3	6	10	3	1
7	11	8	11	11	9	2
11	2	10	2	2	4	5

2.

5	8	4	8	8	6	7
5	2	1	6	9	9	0
1	4	10	1	7	1	7
10	4	1	2	5	2	7
1	3	10	10	10	1	4
4	6	11	3	7	3	0
1	1	5	9	8	11	1

3.

3	10	5	9	11	8	11
6	8	11	8	18	18	20
7	13	10	3	4	14	18
9	5	6	21	12	17	22
5	4	11	6	13	14	11
17	7	12	13	19	17	5
13	0	8	8	10	12	17

4.

5	13	6	10	13	8	9
10	6	7	11	8	12	11
11	5	8	12	4	18	4
12	6	9	8	5	8	5
9	4	4	5	6	6	7
11	8	7	4	7	2	3
6	5	8	11	4	5	9

5.

6	5	9	10	7	12	8
9	7	11	6	8	11	10
8	10	7	8	10	7	4
5	6	10	5	6	11	2
4	9	8	9	4	1	2
5	6	10	11	10	12	5
4	11	5	4	5	12	3

6.

4	5	9	5	6	14	6
8	12	4	13	16	15	16
2	15	8	10	17	7	9
14	8	9	4	5	6	7
3	5	4	11	10	12	6
10	9	11	5	6	12	8
7	13	8	12	8	11	10

7.

7	10	8	11	7	11	12
1	2	5	6	10	18	4
8	11	9	2	16	3	6
5	2	5	14	3	10	5
8	7	6	7	13	8	14
15	18	5	9	12	6	10
7	15	5	9	2	6	10

8.

8	4	5	6	10	2	7
9	5	7	2	4	8	4
1	10	5	6	12	9	6
2	4	7	13	10	8	5
12	3	11	9	12	10	10
5	13	8	2	3	5	6
7	6	4	12	5	6	7

9.

18	4	6	7	8	11	5
13	5	12	13	5	6	8
10	13	14	13	17	4	2
6	5	6	5	4	15	3
12	13	1	13	12	7	1
11	21	1	21	1	21	1
4	1	2	2	4	10	9

10.

13	4	5	12	3	6	14
7	1	9	4	11	2	10
12	4	7	6	1	8	7
8	9	9	7	10	3	5
7	1	1	4	4	5	4
7	7	7	7	1	41	1
15	3	3	13	5	6	7

11.

1	17	1	4	5	17	2
21	5	6	7	21	5	6
1	15	1	4	5	15	2
14	2	3	13	6	7	14
21	17	6	7	5	17	2
14	2	5	10	7	6	10
3	10	4	12	12	20	4

12.

12	12	14	12	2	5	5
1	2	6	7	6	7	5
12	12	13	12	3	4	4
4	5	15	20	6	7	5
12	12	14	12	3	5	5
4	5	10	10	5	5	5
8	9	11	12	14	14	15

13.

1	4	5	8	9	4	5
5	6	7	5	6	7	1
1	6	7	8	9	4	5
5	4	5	8	6	4	1
9	10	8	9	5	13	9
6	8	11	12	7	8	9
9	10	11	5	5	7	1

14.

1	5	7	10	2	3	4
8	2	5	4	7	10	1
1	2	5	4	2	3	1
5	6	7	10	1	3	7
4	8	12	5	4	5	6
10	10	1	2	5	6	9
1	3	2	4	5	1	4

15.

5	1	4	2	10	6	7
4	5	10	4	5	8	9
10	10	10	4	5	8	9
5	1	4	2	7	6	7
4	5	10	4	5	1	1
7	8	4	3	5	6	7
9	10	5	8	11	4	3

16.

3	5	10	7	8	10	12
4	6	7	4	5	6	7
10	5	10	5	10	6	12
3	6	4	4	5	10	7
4	4	7	7	5	4	7
1	3	12	1	4	5	6
4	10	11	12	13	15	6

17.

5	4	3	2	1	2	5
11	2	4	7	10	7	9
13	2	5	6	4	2	8
11	2	3	2	1	2	5
13	4	5	7	10	7	9
7	2	3	5	6	1	6
5	4	4	4	10	1	5

18.

3	2	4	7	5	5	8
7	8	4	5	6	6	9
1	2	5	7	9	4	6
1	2	2	1	9	9	9
3	2	4	7	5	5	5
7	8	5	7	8	5	5
1	7	2	1	5	4	5

19.

4	8	12	4	8	10	12
5	4	10	11	12	4	5
6	7	8	8	7	6	10
6	7	6	7	7	4	5
4	4	6	4	8	4	5
4	5	4	5	4	5	4
8	5	2	4	6	9	7

20.

5	6	7	8	9	10	11
8	9	8	12	4	1	2
4	5	4	5	4	8	2
4	6	4	5	4	1	2
5	5	7	8	9	1	11
5	4	5	4	5	1	2
8	9	8	9	4	8	2

21.

2	4	6	8	7	5	4
4	5	6	7	5	2	1
3	7	5	9	4	8	6
4	5	7	9	1	2	8
3	7	5	4	8	4	6
2	4	8	7	9	4	6
5	9	7	6	1	4	8

22.

10	11	15	14	18	7	6
1	8	4	10	11	10	5
4	11	4	14	11	7	6
11	2	4	5	8	6	9
4	8	7	3	1	9	5
10	8	5	4	8	5	9
4	6	7	9	8	2	4

23.

5	7	9	1	3	4	6
4	8	6	2	4	7	8
3	7	9	1	4	6	8
7	3	9	4	8	6	4
4	9	7	6	2	7	9
5	6	4	7	9	7	8
6	8	7	9	7	8	7

24.

1	9	7	3	4	6	8
4	8	6	2	5	7	9
4	8	6	2	5	7	9
5	8	2	4	6	9	7
4	8	6	6	5	4	7
8	6	4	5	7	9	8
8	7	9	4	8	7	5

25.

1	5	9	7	5	3	4
4	5	6	8	7	9	5
9	5	8	4	7	6	8
4	9	7	6	5	8	6
3	4	9	7	6	1	4
3	6	8	7	4	9	5
4	6	7	9	8	5	4

26.

4	5	6	8	7	9	2
2	6	4	7	9	8	7
3	6	5	8	9	4	7
6	4	8	5	7	9	5
2	6	8	7	4	5	6
4	5	7	4	4	5	7
2	6	8	4	3	9	7

27.

7	9	4	6	1	3	8
2	4	6	5	7	8	5
2	8	4	6	7	8	5
6	2	3	8	4	9	7
4	5	6	9	8	7	5
4	8	6	5	7	9	8
6	8	5	4	7	9	5

28.

4	6	5	4	7	9	6
3	6	9	8	7	5	4
1	5	9	3	5	7	4
2	5	8	9	6	3	7
6	3	9	8	7	4	6
1	5	9	7	5	3	4
6	9	7	4	5	8	5

29.

5	5	7	5	8	4	6
2	8	4	6	9	7	8
4	9	7	6	5	8	5
6	8	7	9	4	6	8
6	8	4	7	9	5	8
6	8	7	2	9	4	6
3	7	5	9	4	6	8

30.

6	8	7	9	5	6	7
3	6	4	8	9	6	5
3	3	9	8	6	7	4
5	8	7	6	4	8	4
4	4	8	6	7	9	5
5	7	9	6	4	8	2
4	6	8	7	5	8	8

Додаткові запитання

1. Чи може задача про призначення не мати розв'язків?

2. Скільки розв'язків може мати задача про призначення?

3. Обґрунтуйте твердження про еквівалентність множин розв'язків ТЗБО та задачі про призначення.

4. Наведіть приклад еквівалентних матриць.

Індивідуальне завдання 4. Цілочислове програмування: перший алгоритм Р. Гоморі

***Мета роботи*:** навчитися розв'язувати задачі цілочислового програмування за допомогою першого алгоритму Р. Гоморі.

***Теоретичні відомості*:** Сторінки 96-106.

Завдання. За допомогою першого алгоритму Р.Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

Варіанти завдань

1. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 81, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2,3.$

2. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2.$

3. $L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2,3.$

4. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 3, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2.$

5. $L(x) = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36, \\ x_2 \leq 13, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2.$

6. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2.$

7. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2.$

8. $L(x) = x_1 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2,3,4.$

9. $L(x) = x_1 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = 1,2,3,4,5.$

10. $L(x) = 2x_1 - 3x_4 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$
$x_i \geq 0, x_i - цілі, j = \overline{1,5}.$

11. $L(x) = x_1 - x_2 - x_4 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3,4.$

12. $L(x) = x_1 + x_5 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = \overline{1,5}.$

13. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3,4.$

14. $L(x) = -3x_1 + 16x_2 \to \max,$
$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 5x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

15. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

16. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

17. $L(x) = 5x_1 + 6x_3 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

18. $L(x) = 6x_2 + 6x_3 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

19. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + x_2 \geq 10, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

20. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 13, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \end{cases}$
$x_j \geq 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

21. $L(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

22. $L(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 4, \\ 5x_1 - x_3 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3.$

23. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

24. $L(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

25. $L(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4.$

26. $L(x) = 3x_1 + 3x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4.$

27. $L(x) = 3x_1 - x_3 \to \min,$
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 5, \\ 5x_1 - x_2 \le 11, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3.$

28. $L(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_3 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 0, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3.$

29. $L(x) = 2x_1 - 2x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

30. $L(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,$
$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 13x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$
$x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

Додаткові запитання

1. Як побудувати додаткове обмеження?
2. Чому додаткову змінну вводять у базис?
3. Наведіть приклад цілочислової задачі, яка не має розв'язку.
4. Якими будуть Ваші дії у випадку, коли після ітерації двоїстого СМ відносна оцінка змінної стане від'ємною?
5. Як боротися зі зростанням розмірності в алгоритмі Р. Гоморі?

Індивідуальне завдання 5. Метод розгалужень та оцінок в задачі комівояжера

***Мета роботи*:** засвоїти комбінаторний підхід до розв'язування задач цілочислового програмування.

***Теоретичні відомості*:** Сторінки 106-132.

Завдання. Методом розгалужень та оцінок розв'язати задачу.

Варіанти завдань

1.

∞	31	15	19	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞

2.

∞	19	25	11	2	35
37	∞	26	58	21	43
10	50	∞	39	22	3
38	39	24	∞	38	45
27	9	32	9	∞	2
33	48	60	53	1	∞

3.

∞	39	45	2	51	33
30	∞	20	33	40	53
54	16	∞	55	22	56
19	36	25	∞	18	43
29	8	8	12	∞	25
16	47	31	14	8	∞

4.

∞	41	27	54	46	5
42	∞	11	32	58	21
36	5	∞	33	22	33
46	24	59	∞	49	59
48	58	11	44	∞	47
26	50	35	19	27	∞

5.

∞	6	56	35	48	29
34	∞	46	46	55	26
29	31	∞	32	13	42
26	34	12	∞	17	7
38	35	40	13	∞	47
60	25	59	36	31	∞

6.

∞	22	26	56	38	60
34	∞	12	51	37	27
45	33	∞	44	47	37
39	7	16	∞	57	8
35	56	40	58	∞	27
9	20	36	31	18	∞

7.

∞	14	40	33	16	51
48	∞	34	4	11	24
57	35	∞	24	38	52
30	50	44	∞	9	31
18	42	24	31	∞	30
1	38	31	19	32	∞

8.

∞	56	48	39	3	40
47	∞	50	4	10	49
48	50	∞	42	19	16
24	44	47	∞	23	33
38	17	6	51	∞	26
29	59	55	34	18	∞

9.

∞	58	28	18	2	50
11	∞	18	47	14	49
49	3	∞	24	35	51
1	46	50	∞	45	15
54	40	14	12	∞	6
8	58	34	27	47	∞

10.

∞	14	17	25	54	37
57	∞	43	2	13	34
7	24	∞	8	9	7
13	28	30	∞	56	18
26	44	4	52	∞	52
18	5	49	14	12	∞

11.

∞	15	43	38	10	45
44	∞	18	6	49	40
41	42	∞	19	1	48
33	44	20	∞	20	21
40	17	16	26	∞	15
3	4	37	54	36	∞

12.

∞	58	56	13	21	54
21	∞	58	43	56	14
4	46	∞	38	7	22
4	46	38	∞	7	22
3	34	36	11	∞	17
59	47	40	60	13	∞

13.

∞	21	34	48	58	35
9	∞	14	30	4	12
6	7	∞	35	11	34
26	37	17	∞	36	52
59	15	7	32	∞	47
3	17	6	44	59	∞

14.

∞	23	38	44	18	32
51	∞	17	35	56	47
28	37	∞	24	16	21
26	49	60	∞	7	46
56	6	40	34	∞	31
33	20	50	51	30	∞

15.

∞	36	51	24	11	46
28	∞	17	46	10	20
7	41	∞	58	2	35
25	60	45	∞	55	59
48	20	33	26	∞	38
50	27	19	14	52	∞

16.

∞	16	15	32	53	55
27	∞	34	50	2	31
33	39	∞	42	36	39
45	22	59	∞	28	26
55	49	14	18	∞	12
28	14	8	48	35	∞

17.

∞	33	41	46	11	21
10	∞	26	28	39	43
1	57	∞	20	60	28
50	25	35	∞	42	7
43	44	51	19	∞	34
55	22	30	50	53	∞

18.

∞	60	39	40	24	34
3	∞	57	55	41	51
7	49	∞	46	7	4
57	47	22	∞	5	59
59	29	8	56	∞	6
21	55	26	45	60	∞

19.

∞	30	57	64	24	44
14	∞	9	14	30	17
32	21	∞	53	21	23
25	39	28	∞	48	21
42	5	29	56	∞	55
16	17	37	5	30	∞

20.

∞	14	32	53	8	44
53	∞	2	14	30	39
50	53	∞	52	2	17
1	58	54	∞	52	51
18	13	4	58	∞	15
39	48	46	9	2	∞

21.

∞	1	29	2	8	10
8	∞	31	57	20	44
12	55	∞	56	9	23
10	60	35	∞	4	43
17	52	41	52	∞	29
36	16	12	56	11	∞

22.

∞	10	26	44	21	17
14	∞	23	22	54	58
33	4	∞	5	49	57
42	55	29	∞	14	35
20	53	38	40	∞	33
52	17	45	41	50	∞

23.

∞	37	7	46	57	20
26	∞	34	10	42	16
42	1	∞	26	21	13
30	20	60	∞	50	10
43	47	28	38	∞	36
16	17	53	36	2	∞

24.

∞	44	6	49	28	53
40	∞	4	30	42	51
3	47	∞	55	20	24
1	26	30	∞	33	47
18	24	13	33	∞	46
56	25	11	22	40	∞

25.

∞	19	40	30	15	9
56	∞	14	57	12	8
42	4	∞	28	33	24
1	12	5	∞	21	16
21	16	38	52	∞	59
51	1	17	22	29	∞

26.

∞	20	53	31	40	45
19	∞	43	14	41	17
7	49	∞	26	23	20
1	26	2	∞	4	11
10	55	33	21	∞	21
47	11	34	22	27	∞

27.

∞	52	8	50	4	16
38	∞	39	51	13	44
55	51	∞	1	27	27
18	39	5	∞	28	21
4	3	44	17	∞	29
57	28	52	21	53	∞

28.

∞	34	39	3	1	11
56	∞	18	21	11	17
25	41	∞	27	13	7
42	30	14	∞	10	35
27	46	43	58	∞	5
43	55	51	33	29	∞

29.

∞	12	41	57	45	17
49	∞	48	42	40	53
22	5	∞	23	51	2
23	8	19	∞	46	26
49	44	3	22	∞	21
22	56	54	16	54	∞

30.

∞	16	2	11	10	11
3	∞	29	29	5	37
43	25	∞	31	35	36
50	40	9	∞	4	2
46	39	15	14	∞	59
52	37	45	27	60	∞

Додаткові запитання

1. Наведіть постановку задачі комівояжера і поясніть зміст уведених позначень.

2. Яким чином математична модель задачі враховує вимогу замкненості маршруту комівояжера?

3. Чи завжди задача комівояжера має розв’язок? Обґрунтуйте відповідь.

4. Яким чином математична модель задачі враховує вимоги відвідати кожне місто тільки один раз і повернутися до першого?

5. Які інші методи розв’язування задачі комівояжера Вам відомі?

Список літератури

1. Carter M.W., Price C.C., Rabadi G. Operations research: a practical approach. Boca Raton: CRC Press, 2019. 471 p.
2. Eisner H. Operations Research and Systems Engineering: Growth and Transformation Commentaries on the Profession. Boca Raton: CRC Press, 2022. 127 p. ISBN 9781032307497.
3. Friedler F., Orosz A., Losada J.P. P-graphs for Process Systems Engineering. New York: Springer, 2022. 263 p.
4. Grassmann W., Tavakoli J. Numerical Methods for Solving Discrete Event Systems: With Applications to Queueing Systems. Cham: Springer, 2022. 370 p.
5. Gupta N., Ali I. Optimization with LINGO-18: Problems and Applications. Boca Ratpn: CRC Press, 2021. 253 p.
6. Grassmann W., Tavakoli J. Numerical Methods for Solving Discrete Event Systems: With Applications to Queueing Systems. Cham: Springer, 2022. 370 p.
7. Hillier F., Lieberman G. Introduction to Operations Research. 11th Edition, International Student Edition. McGraw-Hill, 2021. 1345 p. ISBN 978-1-260-57587-3.
8. Ittmann H.W., Pato M.V., Belien J., Laumanns M., Teixeira A.P., de Miranda J.L. (Eds.) Advances in Operations Research Education: European Studies. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. 165 p. (Lecture Notes in Logistics) ISBN: 3319741039.
9. Mazumder Sanat Kumar. A First Course on Operations Research and Information Theory. NCBA, 2020. 465 p. ISBN 9788173818844.
10. Salhi Said., Boylan John (eds.) The Palgrave Handbook of Operations Research. Palgrave Macmillan, 2022. 923 p. ISBN 978-3-030-96934-9.
11. Singla Vikas. Operations Research Using Excel: A Case Study Approach. CRC Press, 2022. 409 p. ISBN 9781032081076.
12. Weber G.-W., Farnoudkia H., Purutcuoglu V. (eds.) Operations Research: New Paradigms and Emerging Applications. Boca Raton: CRC Press, 2022. 277 p.

13. White L., Kunc M., Burger K., Malpass J. Behavioral Operational Research: A Capabilities Approach. Palgrave Macmillan, 2020. 392 p. ISBN: 3030254046, 9783030254049, 9783030254056.
14. Xi Chen, Stefanus Jasin, Cong Shi. The Elements of Joint Learning and Optimization in Operations Management. Cham: Springer, 2022. 444 p.
15. Anand A., Agarwal M., Aggrawal D. Multiple Criteria Decision-Making Methods: Applications for Managerial Discretion. Berlin: de Gruyter, 2022. 162 p.
16. Azad M., Chikalov I. Decision Trees with Hypotheses. Springer, 2022. 148 p.
17. Zgurovsky M.Z., Pavlov A.A. Combinatorial Optimization Problems in Planning and Decision Making. New York: Springer, 2019. 523 p. (Studies in Systems, Decision and Control, 173). ISBN: 978-3-319-98977-8.
18. Panik M. Linear Programming and Resource Allocation Modeling. Wiley, 2019. 449 p. ISBN: 978-1-119-50946-2.
19. Vanderbei R.J. Linear Programming. Foundations and Extensions. 5th ed. Springer, 2020. 477 p. (International Series in Operations Research & Management Science). ISBN: 9783030394141, EISBN 9783030394158.
20. Velta D.C. Invitation to Linear Programming and Game Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. — 543 p.
21. Cassady C.R., Nachlas J.A. Probability Models in Operations Research. CRC Press, 2010. 224 p. ISBN: 9781420054903, 9781420054897
22. Cochran J.J., Cox L.A.Jr., Keskinocak P., Kharoufeh J.P., Smith J.C. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. Hoboken: Wiley, 2015. 6270 p.
23. Daras Nicholas J., Rassias Themistocles M. (eds.) Operations Research, Engineering, and Cyber Security: Trends in Applied Mathematics and Technology. Springer, 2017. 424 p. (Springer Optimization and Its Applications). ISBN10: 3319514989. ISBN13: 978-3319514987.
24. Evans G.W. Multiple criteria decision analysis for industrial engineering: methodology and applications. Boca Raton: CRC Press, 2016. 468 p.

25. Hastings K.J. Introduction to the Mathematics of Operations Research with Mathematica. CRC Press, 2006. — 567 p. — (Pure and applied mathematics, 279). — ISBN: 978-1-57444-612-8.
26. Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка (ЛНУ), 2007. 168 с. ISBN: 966-613-496-9.
27. Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Частина 2. Алгоритми оптимізації на графах. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка (ЛНУ), 2007. 120 с. ISBN: 966-613-496-9; 978-966-613-533-2.
28. Дзюбан І.Ю., Жиров О.Л., Охріменко М.Г. Методи дослідження операцій. К.: Політехніка, 2005. 108 с.: іл.
29. Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Збірник задач. Навчальний посібник. Киев: Слово, 2007. 472 с. ISBN 9668407652.
30. Лисенко О.І., Алєксєєва І.В. Дослідження операцій. Конспект лекцій. К: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» (НТУУ «КПІ»), 2016. 196 с.
31. Шебаніна О.В., Домаскіна М.А., Хилько І.І та ін. Дослідження операцій. Курс лекцій. Миколаїв: Миколаївський національний аграрний університет (МНАУ), 2015. 248 с. ISBN: 978-966-8205-99-6.
Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. Навчальний посібник. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка (КНУ), 2006. 336 с.
32. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2-ге вид., перероб. та допов. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка (КНУ), 2010. 336 с. ISBN: 978-966-439-267-6.
33. Моклячук М.П., Ямненко Р.Є. Лекції з теорії вибору та прийняття рішень. Навчальний посібник. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка (КНУ), 2007. 258 с.
34. Попов Ю.Д. Лінійне і нелінійне програмування. К. : УМК ВО, 1988. 190 с.
35. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. Сьоме видання, перероблене та доповнене. К. : Видавничий Дім «Слово», 2006. 816 с.

36. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей “Прикладна математика”, “Інформатика”, “Соціальна інформатика”. - Київ: Електронне видання. Ел. бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003. – 215 с.
37. Vasek Chavtal. Linear Programming. W. H.Freeman and Company, New York/San Francisco, 1983. 263p.
38. C. A. Floudas, P. M. Pardalos (Eds.) Encyclopedia of Optimization. Second Edition. Springer Science+Business Media LLC, 2009. 4626 p.
39. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник. К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. 304 с.
40. Згуровский М. З., Панкротова Н. Д. Системний аналіз: Проблеми, методологія, застосування. К. : Наук. думка, 2005. 743 с.
41. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2011. 624 с.

Навчальне видання

Математичне програмування

Навчальний посібник

Укладачі: Микола Андрійович **Руснак,**
Максим Петрович **Коцур**

Відповідальний за випуск *Малик І.В.*
Літературний редактор *О.В. Лупул*

Підписано до друку 06.02.2025. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 11,0.
Обл.-вид. арк. 11,8. Зам. Н-011.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету
58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.