Київський національний торговельно-економічний університет

В. В. Рязанцева

ЕКОНОМЕТРІЯ.

МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Київ 2018

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу КНТЕУ заборонено

УДК 310.43
Р 99

Автор В. В. Рязанцева, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти: Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;
С.І. Пирожков, академік НАН України, д-р екон. наук, віце-президент НАН України, професор;
В.В. Сопко, д-р екон. наук, професор кафедри бухгалтерського обліку Київського національного торговельно-економічного університету

Рекомендовано до друку вченою радою Київського національного торговельно-економічного університету
(протокол № 11 від 30 березня 2017 р.)

Рязанцева В.В.
Р 99 Економетрія. Моделювання макроекономічних процесів : навч. посіб. / В.В. Рязанцева. – Київ : Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. – 388 с.
ISBN 978-966-629-880-8
DOI: 10.31617/np.knute.2018-493

У навчальному посібнику на основі системного підходу розглянуто конкретні приклади виконання наскрізного завдання аналізу економічних процесів за допомогою регресійних рівнянь та системи симультативних рівнянь.
Призначено для студентів економічних спеціальностей, магістрів та аспірантів.

УДК 310.43

ISBN 978-966-629-880-8

© Рязанцева В.В., 2018
© Київський національний торговельно-економічний університет, 2018

ЗМІСТ

Вступ..... 7

Розділ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ..... 10
1.1. Основні положення методології моделювання економічних систем 10
1.2. Методологія конструювання економіко-математичної моделі 13
1.2.1. Поняття про економетричну модель та її складові елементи 13
1.2.2. Класифікація моделей 16
1.2.3. Статистична база економетричних досліджень 18
1.3. Вибір та модифікація методів економетричного аналізу..... 20
Питання для самоконтролю 23

Розділ 2. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ..... 24
2.1. Засоби аналізу даних на персональних комп'ютерах..... 24
2.2. Постановка задачі. Економічний аналіз причинно-наслідкових зв'язків досліджуваних процесів 37
2.3. Дослідження динамічних та кореляційних властивостей факторів 40
2.4. Загальне поняття про лінійну регресію, МНК-оцінки її параметрів..... 53
2.5. Парна лінійна регресійна модель: побудова та дослідження..... 55
2.6. Обчислення зон надійності, побудова довірчих інтервалів для коефіцієнтів регресії, точковий та інтервальний прогнози 63
Питання для самоконтролю 71

Розділ 3. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ..... 72
3.1. Множинна регресійна модель. Основні припущення..... 72
3.2. Перевірка факторів моделі на мультиколінеарність..... ……78
3.3. Оцінка параметрів множинної регресійної моделі 84
3.4. Дослідження моделі та перевірка її на адекватність 88
3.5. Особливі випадки поведінки залишків моделі: перевірки наявності гетероскедастичності та автокореляції 95
3.6. Прогнозування за побудованою моделлю..... 109
3.7. Нелінійна регресійна модель..... 114
Питання для самоконтролю 115

Розділ 4. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ..... 118
4.1. Економетрична модель на основі системи симультативних рівнянь 118
4.2. Передумови побудови економетричної моделі. Постановка задачі..... 125
4.3. Алгоритм вирішення задачі та її формалізація.... 131
4.4. Оцінювання параметрів економетричної моделі ... 137
4.5. Прогнозна форма економетричної моделі. Економіко-логіко-теоретична інтерпретація одержаних на моделях (структурної та прогнозної) результатів моделювання..... 157
Питання для самоконтролю 175

Контрольні завдання для детермінованих статистичних даних 177

Приклади моделювання на основі регресійних рівнянь 180

Приклади моделювання на сонові систем симультативних рівнянь 185

Перелік контрольних питань 207

Тестові завдання 218

ДОДАТКИ 255

Додаток 1. Статистична база дослідження державного боргу України 255

Додаток 2. Покроковий алгоритм побудови та дослідження однофакторної (парної) лінійної регресійної моделі 257

Додаток 3. Покроковий алгоритм побудови та дослідження множинної регресійної моделі 266

Додаток 4. Алгоритм Феррара-Глобера 276

Додаток 5. Алгоритм перевірки на гетероскедастичність 280

Додаток 6. Алгоритм перевірки на автокореляцію 287

Додаток 7. Алгоритм ітеративного методу Кочрена-Оркатта 293

Додаток 8. Алгоритм покрокової регресії для оцінки параметрів моделі 294

Додаток 9. Покроковий алгоритм двокрокового методу найменших квадратів (2-МНК) 297

Додаток 10. Алгоритм методу головних компонентів для оцінки параметрів моделі 302

Додаток 11. Алгоритм наближеного пошуку оцінки параметрів моделі, які мінімізують суму квадратів 305

Додаток 12. Проблеми, що пов’язані з прийняттям науково обґрунтованих управлінських рішень щодо управління економічними системами 307

Додаток 13. Економетрична модель УКР-1 312

Додаток 14. Короткий огляд теорії матриць і визначників 314

Додаток 15. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вектори 331

Додаток 16. Функції однієї змінної та кількох змінних 342

Додаток 17. Наближені формули для обчислення значень законів розподілу 351
Додаток 18. Елементи математичної статистика 358
Додаток 19. Таблиця стандартизованого нормального закону розподілу 365
Додаток 20. Таблиця χ^2-розподілу 366
Додаток 21. Таблиця *t*-розподілу Стьюдента 367
Додаток 22. Таблиці *F*-розподілу Фішера 368
Додаток 23. Таблиці *d*-статистики [*DW*-критерію (Дарбіна-Уотсона)] 373
Додаток 24. Таблиці критичних значень для відношення фон Неймана 382

Список рекомендованої літератури 384

ВСТУП

Вагоме значення при здобутті вищої економічної освіти студентами має дослідницька позиція закладу освіти в предметній галузі економіки. Якщо показник дослідницької спеціалізації не є критичним на рівні бакалавра, то, починаючи з рівня магістра та вище (при отриманні дослідницького ступеня) йому надається більш суттєве, якщо не вирішальне, значення. Для прийняття обґрунтованих бізнес-рішень у сучасному динамічному та невизначеному глобальному бізнес-середовищі необхідно вміти застосовувати економетричний і статистичний інструментарій, досліджувати та прогнозувати розвиток економічних процесів, явищ, систем на основі реальної статистичної інформації. Тому найбільше визнання в європейських університетах економічного профілю мають дослідження за напрямами Economics та Econometrics.

Діяльність у будь-якій галузі економіки, побудова систем прийняття рішень щодо ефективного та науково обґрунтованого управління та визначення стратегічних напрямів розвитку потребує від фахівця застосування кількісних методів для аналізу великих інформаційних масивів, конструювання моделей, які описують економічні процеси.

Сучасна економічна наука є великим міждисциплінарним утворенням, яке акумулює результати знань у багатьох галузях та дисциплінах, таких як економічна теорія, макро- та мікроекономіка, статистика та теорія ймовірностей, інформатика та комп’ютерна техніка. Економічна наука розвивається швидкими темпами, з’являються нові дисципліни, виникають нові напрями дослідження, одним з яких є бізнес-економетрика.

Моделювання макроекономічних процесів є прикладним дослідженням, застосуванням економетричних методів у бізнесі та економіці для оцінки стану, комерційних можливостей та перспектив розвитку економічних систем. Економетрія являє

собою методологію моделювання економічних систем будь-якої складності, рівня організації та управління.

Прикладні економетричні дослідження допомагають глибше засвоїти теоретичні знання та формують практичні навички із застосування економетричних та математико-статистичних методів аналізу стану, тенденцій та закономірностей розвитку конкретних соціально-економічних явищ і процесів, визначення бізнес-прогнозів на основі побудови та дослідження достовірно апроксимуючих реальні явища моделей, розробці конкретних пропозицій, рекомендацій та шляхів їх застосування.

Призначення навчального посібника в тому, щоб запропонувати студенту покроковий алгоритм вирішення наскрізної задачі побудови та дослідження економетричної моделі на основі реальної статистичної інформації. Починаючи від групування вихідних статистичних даних, їх зведення до зручного вигляду, виявлення тенденцій розвитку досліджуваних процесів за моделями динаміки, перейти до аналізу парних регресійних залежностей, специфікувати багатофакторну модель, повністю дослідити її, включаючи особливі випадки в поведінці стохастичної складової, та обчислити всі можливі типи прогнозів. Завершити задачу побудовою та дослідженням моделі на основі системи симультативних рівнянь, прогнозом розвитку реальної ситуації на основі проведених досліджень. На кожному етапі вирішення такої наскрізної задачі обґрунтовується (або стає очевидним) необхідність наступного узагальнення специфікації моделі економічного процесу. Залежно від прийнятого на кожному етапі рішення, вибирається наступний крок наукового дослідження.

Основний акцент робиться на застосуванні студентами вивченого математичного, статистичного, економетричного інструментарію та ефективне володіння ІТ-ресурсами для прийняття ділових рішень. Проведення економетричного дослідження передбачає знання певних розділів математики, зокрема основ лінійної алгебри, теорії матриць, теорії ймо-

вірностей та математичної статистики, основ економіки, використання сучасних програмних продуктів та персональних комп'ютерів (наприклад текстових процесорів та процесорів електронних таблиць).

Економетрія формує цілісний погляд на конструювання та дослідження економетричних моделей, дозволяє оволодіти прикладними знаннями та побудувати надійний, науково обґрунтований прогноз для визначення пріоритетних та стратегічних напрямів розвитку досліджуваних об'єктів, та покладений в основу власного наукового дослідження, сприяє формуванню у студентів нового економічного мислення, спрямованого на підготовку конкурентоспроможних фахівців на ринку робочої сили.

Розділ 1

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1. Основні положення методології моделювання економічних систем[1]

Основною метою моделювання економічних явищ, процесів та систем є, в кінцевому підсумку, одержання такого їх модельного уявлення, що буде описувати їх реальну поведінку (хоча й деякою мірою спрощену, оскільки модель завжди є спрощеним уявленням реальної дійсності).

Моделювання економічної системи передбачає здійснення таких процедур: постановка задачі мовою економіко-логіко-теоретичного уявлення; розробка моделі системи; аналіз моделі; розробка варіантів рішень (параметричний синтез раціональної системи, синтез раціонального управління) на основі економіко-логіко-теоретичної інтерпретації одержаних результатів.

Реалізація методів статистичного та економетричного аналізу економічної системи, що функціонує в умовах невизначеності, конфлікту і жорстких ресурсних обмежень, – це багатоетапна евристична ітераційна процедура, яка закінчується отриманням прийнятного рішення.

В економіко-математичному аналізі інформація формується, як правило, в результаті спостереження за об’єктом дослідження. При отриманні, оцінці та використанні цієї інформації слід мати на увазі важливі специфічні риси самого джерела даних.

Суттєве значення тут мають стохастичні (випадкові) фактори, які проявляються у впливі на економіку як з боку природи та суспільства, так і у внутрішньоекономічних зв’яз-

[1] У п. 1.1 та 1.2 цього розділу використані результати розробок, що наведені у навчальному посібнику: Курс лекцій з економетрії / В.В. Жебко, І.І. Юрій, О.О. Юнакова та ін. – Київ : Транспорт України, 2007.– С. 5–8.

ках. Складність та динамічність техніко-економічних, особливо соціально-економічних процесів, приводить до того, що попередній розрахунок економічних показників є можливим тільки з певним рівнем надійності.

Разом з тим, величезні масштаби економічної системи, розгалуженість зв'язків між її елементами та відома інерційність значною мірою обумовлюють майбутній її стан попереднім розвитком. Тому розвиток системи може бути передбаченим з великою мірою впевненості.

В означеній ситуації найбільш прийнятними методами дослідження є методи математичної статистики, адаптовані до економічних явищ. Саме ці методи дають змогу будувати економічні моделі та оцінювати їх параметри, перевіряти гіпотези стосовно властивостей економічних показників та форм зв'язку між ними. Однак особливість економетричного підходу до моделювання економічних об'єктів полягає не у використанні економічної термінології, а, насамперед, у детальному дослідженні відповідності вибраної моделі тому явищу, що вивчається, а також аналізу якості статистичної інформації, що є основою параметризації (оцінювання параметрів) моделей.

Економічний аналіз реальних економічних залежностей на різних рівнях економічної діяльності передбачає застосування різноманітних економетричних моделей. Насамперед, вирізняють моделі за кінцевим прикладним призначенням (аналіз, прогноз, імітація), за рівнем ієрархії (мікро-, мезо- та макрорівень) та за профілем моделювання (різні напрями економічної діяльності).

Моделі можуть бути призначені для аналізу економічних та соціально-економічних показників, що характеризують відповідну економічну систему, прогнозу їх подальшого змінювання або для імітації можливих сценаріїв соціально-економічного розвитку досліджуваної системи, за умови, що деякі показники можна змінювати цілеспрямовано.

За рівнем ієрархії виділяють: макрорівень (для країни в цілому), мезорівень (регіони, галузі, корпорації) та мікрорівень (компанії, підприємства, фірми).

Серед профілів економетричного моделювання виріз-няють: проблеми ринку, інвестицій, фінансової чи соціальної політики, ціноутворення, розподільчих відносин, попиту та пропозиції та ін.

Особливого значення набувають економетричні дослідження в макроекономіці, де взаємозв'язки величин часто неочевидні та мінливі. Не виключені ситуації, коли модель раптом перестає «працювати» у зв'язку з появою або активізацією якогось фактору. Саме такі ситуації дають поштовх розвиток макроекономічної теорії. Також економетричний аналіз дозволяє обґрунтувати та уточнити форму залежностей у макроекономічних моделях, краще зрозуміти механізми взаємозв'язку макроекономічних показників.

У прикладних дослідженнях економічних процесів і явищ використовуються різни типи моделей, які відріз-няються цільовим призначенням, характером задачі, ступенем адекватності, математичним апаратом тощо. Побудова єдиної математичної моделі функціонування будь-якої економічної системи або її складових практично є неможливою без роз-робки допоміжних моделей, тобто певного комплексу моделей. Вид і характер економіко-математичних моделей визна-чається взаємозв'язками та взаємозалежностями економічних систем. Взаємозв'язки одних систем можна описати на основі лінійних рівнянь і нерівностей, інших – на основі рівнянь і нерівностей більш високих порядків тощо.

Таким чином, поєднуючи в собі економічну теорію та математико-статистичні методи, економетричне моделювання широко застосовується при прийнятті практичних рішень в економічній діяльності: в бізнесі, банківській справі, прогнозуванні, а також є потужною базою для набуття нових знань з економіки.

1.2. Побудова економіко-математичної моделі

1.2.1. Поняття про економетричну модель та її складові елементи

Економетрична модель – це деякий логічний (звичайно математичний) опис того, що економічна теорія вважає особливо важливим при дослідженні даної проблеми.

Як правило, модель має форму рівняння чи системи рівнянь, що характеризують виділені дослідником взаємозалежності між економічними показниками. Економетрична модель, що пояснює поведінку одного показника, складається з одного рівняння, а модель, що характеризує змінювання декількох, зі стількох же рівнянь. У моделі можуть бути присутніми також тотожності, що відображають функціональні зв'язки в певній економічній системі. Оскільки така модель поєднує не тільки теоретичний, якісний аналіз взаємозв'язків, але й емпіричну інформацію, то в ній, на відміну від просто економічної моделі, завжди присутні стохастичні залишки. Саме ймовірнісні характеристики залишків моделі зумовлюють якість тієї чи іншої аналітичної форми моделі.

Таким чином, сформулюємо означення економетричної моделі:

Означення 1. Економетрична модель – це функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками, причому, залежно від причинних зв'язків між ними, один чи кілька з цих показників розглядаються як залежні змінні, а інші – як незалежні змінні.

У загальному випадку рівняння в економетричній моделі має вигляд:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_m, u),$$

де Y – результат, або залежна змінна, змінювання якої описує дане рівняння, $x_1, x_2, ..., x_m$ – фактори, або незалежні змінні, що визначають поведінку Y. Змінна u містить ту частину руху Y, що не пояснюється змінними $x_1, x_2, ..., x_m$, та має випадковий характер. Символ функції f відображає аналітичний вид зв'язку між досліджуваними змінними.

Означення 2. Формальний опис явища чи процесу, тобто вибір аналітичної форми моделі називається специфікацією моделі. Іншими словами, *специфікація моделі* – це аналітична форма залежності між економічними показниками.

Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_m$, що задані наперед чи за межами моделі, називаються по-іншому пояснюючими або екзогенними змінними, або регресорами. Залежна змінна Y, що визначається як розв'язок рівняння, називається пояснюваною чи ендогенною змінною або регресандом. Функція f у кожному конкретному випадку, крім змінних $x_1, x_2, ..., x_m$ та u містить ще, щонайменше, деякі коефіцієнти, що поєднують змінні у певних співвідношеннях і визначають структуру рівняння. Ці коефіцієнти називаються параметрами моделі.

Означення 3. Визначення значень коефіцієнтів (параметрів) обраної форми статистичного зв'язку змінних на підставі відповідних статистичних даних, називається *параметризацією* рівняння регресії, або *оцінюванням параметрів.*

Зауваження. Випадкова складова рівняння, як будь-яка випадкова величина, своєю чергою, характеризується певними параметрами розподілу ймовірностей. Вони називаються параметрами стохастичної структури моделі. Саме стохастичні характеристики залишків моделі визначають якість моделі, тобто її відповідність явищу, що вивчається.

Існує відмінність між змінними та параметрами моделі. Змінні – це економічні величини, що можуть набувати певних значень з деякої множини допустимих величин. Параметри – це сталі коефіцієнти. Хоча вони не завжди відомі, та все ж у будь-якій ситуації вони мають фіксоване значення. Параметри можна назвати «незмінними» (інколи відомими, інколи невідомими), що пов'язують змінні у рівняннях. Ці рівняння, а, відповідно, і параметри визначають структуру моделі: вони вказують на характер припустимих співвідношень між змінними.

Параметри чимось подібні до незалежних (заданих ззовні) змінних, та все ж між ними є важливі відмінності. Припускається, що параметри залишаються незмінними впродовж всього періоду спостереження, а екзогенні змінні, безумовно, мають змінюватися з часом. Саме змінювання екзогенних змінних приводить модель у рух, спонукає перехід системи до нового стану.

Зауважимо, що в багатьох економетричних моделях є такі екзогенні змінні, що можуть бути змінені керівними органами (державним регулюванням чи керівництвом компанії). Ці керовані змінні, наприклад, державні витрати та податки є політичними інструментами. Якщо відома структура економічного процесу, то державні органи, змінюючи значення таких змінних, могли б робити заданими ендогенні змінні, тобто впливати на подальший розвиток процесу.

Економетричні моделі можуть бути статичними та динамічними. У статичних моделях зв'язки розглядаються у фіксований момент часу і часові зміни в них ролі не відіграють. У динамічній моделі, навпаки, взаємозв'язки вивчаються у розвитку і час є необхідним фактором змін.

Моделі розрізняють також за рівнем агрегування змінних (мікро- чи макроекономічні показники), за способом відображення змінних (в постійних чи поточних цінах, в абсолютних значеннях чи приростах показників), за кількістю змінних (одно- чи багатофакторні моделі), за кількістю рівнянь

(одне чи декілька), за часом спостережень (річні, квартальні, місячні дані).

Класифікують моделі також за призначенням та метою використання (аналітичні, імітаційні, прогностичні). Приклади, які ілюструють моделі реальних економічних процесів, наведені в окремих розділах навчального посібника.

1.2.2. Класифікація моделей

Математичні моделі, що застосовуються в економіці, можна поділити на класи за рядом ознак. Залежно від особливостей об'єкта моделювання та застосованого математичного інструментарію виділяють моделі: макро- та мікроекономічні, теоретичні та прикладні, статичні та динамічні, детерміновані та стохастичні, оптимізаційні та моделі рівноваги та ін.

Макроекономічні моделі описують економіку в цілому, пов'язуючи між собою узагальнені матеріальні та фінансові показники: ВНП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей та ін. Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки або поведінку окремої складової в ринковому середовищі. Внаслідок різноманіття типів економічних елементів та форм їх взаємодії на ринку, мікроекономічне моделювання займає основну частину економіко-математичної теорії. Найбільш суттєві теоретичні результати в мікроекономічному моделювання останніми роками отримано в дослідженні стратегічної поведінки фірм в умовах олігополії.

Теоретичні моделі дозволяють вивчати загальні властивості економіки, її характерні елементи та отримувати нові результати на підставі формальних припущень. Прикладні моделі дають змогу оцінити певні економічні показники, надати їм конкретних значень, виходячи з відповідної статистичної інформації.

У ***статичних моделях*** описується стан економічного об'єкта в певний момент чи період часу, а динамічні моделі

вивчають взаємозв'язки економічних змінних у часі. Причому ті змінні, що вивчаються в динаміці, у статичних моделях мають фіксоване значення. Але, своєю чергою, динамічна модель не зводиться до простої суми статичних моделей, а описує взаємодію сил, що рухають економіку.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі, а стохастичні – припускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники.

Причинно-наслідковими називаються ***моделі***, в яких між результативними і факторними змінними існує причинно-наслідкова залежність. У цих моделях досліджувана змінна є наслідком, а факторні змінні – причиною її змін.

Симптоматичні моделі характеризуються тим, що змінні моделі неможливо інтерпретувати у категоріях причин і наслідків. Пояснювальними змінними у таких моделях є ті, що найсильніше корелюють з результативною змінною.

В ***авторегресійних моделях*** у ролі пояснювальних змінних виступають значення результативної змінної, зміщені за часом, тобто визначені у попередні часові періоди чи моменти часу.

Моделями тенденції розвитку називаються моделі, які описують розвиток явища у часі. У моделях такого типу результативна змінна є функцією лише однієї змінної – змінної часу *t*. Причому змінна *t* набуває значень з натурального ряду чисел – послідовних номерів досліджуваних інтервалів часу.

Предметом економетричного дослідження є прикладні стохастичні економічні моделі, тобто загальні економічні моделі, в яких модельні коефіцієнти набувають конкретних числових значень залежно від використаної статистичної інформації.

Етапи проведення економетричного аналізу:

1) початковий аналіз економічного процесу, що вивчається, його теоретичний (якісний) опис;

2) визначення мети дослідження, для досягнення якої потрібне застосування моделі;

3) вибір найсуттєвіших факторів, що впливають на досягнення мети (специфікація змінних);

4) вибір математичної моделі з фіксованою формою всіх структурних рівнянь (специфікація моделі);

5) збирання і попередній аналіз статистичних даних – спостережень змінних, що увійшли до моделі;

6) вибір методу оцінювання невідомих параметрів моделі з урахуванням припущень щодо ймовірнісних характеристик випадкових відхилень;

7) реалізація процедури оцінювання параметрів, яка забезпечує найкраще наближення модельних значень результативної змінної до її спостережених значень;

8) перевірка якості моделі загалом та її окремих параметрів;

9) інтерпретація отриманих результатів і встановлення їх відповідності поставленим цілям;

10) аналіз неузгодженості і коригування моделі;

11) прийняття рішень щодо подальших досліджень з урахуванням альтернативних можливостей;

12) застосування моделі згідно з поставленою метою її побудови.

1.2.3. Статистична база економетричних досліджень

Будь-яке економетричне дослідження завжди поєднує теорію (математичні моделі) та практику (статистичні дані). Моделі застосовують для опису та пояснення процесів, що вивчаються, а статистичні дані – для побудови та обґрунтування моделей. Без конкретних кількісних даних, що характеризують функціонування економічного об’єкта, не завжди можливо визначити практичну значущість певної моделі.

Економічні дані звичайно поділяють на два види: перехресні або просторові дані та часові ряди. Перехресні дані – це дані за якимось економічним показником, що отримані для різних однотипних об’єктів (фірм, регіонів).

Причому такі, що виміряні в один і той самий момент часу або часова приналежність є несуттєвою. Часові ряди, навпаки, характеризують один і той самий об'єкт, але в різні моменти часу. Наприклад, дані про доходи населення різних областей або регіонів у певний момент часу є перехресними даними, а динаміка рівня інфляції за певний період відображається часовими рядами. Послідовні значення часових рядів можуть бути пов'язані між собою певними залежностями: спостерігаються деякі закономірності у відхиленнях від загальної тенденції розвитку чи виявляються затримки показників (часові лаги). Тому методи обробки таких даних дещо відрізняються від тих методів, що застосовуються для обробки перехресних даних.

Метою збору статистичних даних є побудова інформаційної бази для прийняття рішень. Природно, що аналіз даних та прийняття рішень проводиться на підставі деякої інтуїтивної (неявної) або кількісної (явної) економічної моделі. Тому збирають саме ті дані, що стосуються певної моделі. Дані можна отримати шляхом опитування, анкетування, інтерв'ювання або із джерел офіційної статистичної звітності. Кожний показник, отриманий одним із вказаних способів, називається спостереженням.

Будь-які економічні дані є кількісними характеристиками економічних об'єктів. Вони формуються під дією багатьох факторів, які не завжди можуть бути проконтрольовані ззовні. Неконтрольовані фактори можуть набувати випадкових значень з деякої множини допустимих значень і тим самим обумовлювати випадковість даних. Стохастична природа економічних даних вимагає застосування спеціальних адекватних їм статистичних методів для їх аналізу та обробки.

При підготовці статистичних даних для роботи з певною моделлю необхідно забезпечити відповідність цих даних моделі та спільну методичну базу їх оцінки. Дані мають утворювати взаємно узгоджений набір. Тобто, якщо вимірювання проводиться в грошових одиницях, то це мають бути поточні

або фіксовані (того самого року) ціни. Реальним об'ємним показникам (тобто у фіксованих цінах) мають відповідати реальні відносні показники (наприклад, процентні ставки слід скорегувати відносно темпу інфляції). Залежно від поставлених задач вибирають узагальнені показники: валовий внутрішній чи національний продукт, валові внутрішні чи національні збереження та ін. Відсутні статистичні дані в багатьох випадках можуть бути розраховані за іншими показниками, якщо між ними існує певна функціональна залежність. Наприклад, інфляція розраховується за даними про дефлятор і навпаки.

Таким чином, формуючи сукупність спостережень, слід забезпечити порівнянність даних у просторі та часі. Це означає, що дані вхідної сукупності повинні мати:

- однаковий ступінь агрегування;
- однорідну структуру одиниць сукупності;
- однакові методи розрахунку показників у часі чи просторі;
- однакову періодичність обліку окремих змінних;
- порівнянні ціни та однакові інші зовнішні економічні умови.

Висновки, які можна зробити в результаті економетричного моделювання цілком зумовлені якістю вхідних даних – їх повнотою та достовірністю.

Приклад формування статистичної бази економетричних досліджень наведено у п. 2.2 навчального посібника.

1.3. Вибір та модифікація методів економетричного аналізу

Побудова систем прийняття рішень щодо ефективного та науково-обґрунтованого управління та визначення стратегічних напрямів розвитку потребує від сучасного економіста нових знань і підходів.

Оскільки перебіг соціально-економічних процесів та явищ залежать від великої кількості факторів, економісту-професіоналу необхідно не тільки мати чітке уявлення про основні напрями розвитку економіки, але й вміти враховувати складну взаємозалежну різноманітність факторів, що здійснюють суттєвий вплив на досліджуваний процес.

У процесі побудови економетричної моделі дослідник стикається з цілою низкою проблем, вирішення яких залежить від локальних питань, які визначають фокус дослідження та є найбільш важливими в кожному конкретному випадку. Не існує єдиного підходу до прикладних економетричних досліджень. Спільними є лише методи (інструменти) моделювання й економетричного аналізу, водночас, шлях власного дослідження вибирається самостійно, його розгалуження є єдиними та неповторними.

Відомо, що в основу методів прикладних економетричних досліджень покладені статистичні інструменти, які вибудовані на фундаменті понять теорії ймовірностей та математичної статистики. Різниця полягає в тому, що теорія ймовірностей та математична статистика побудовані для емпіричних даних. В основу теорії ймовірностей покладено поняття ймовірнісного простору, в якому визначається клас подій (у поведінці яких спостерігаються певні закономірності), для якого будується вся подальша теорія. Статистичні дані, з якими необхідно працювати в прикладних економетричних дослідженнях, не є результатом контрольованого експерименту, вони не експериментальні. Звідси випливають суттєві наслідки, виникають проблеми для прикладних економетричних досліджень. Оскільки традиційні методи теорії оцінювання параметрів та перевірки статистичних гіпотез розраховані на емпіричні науки, вони не можуть бути просто перенесені на економіку. Більше того, застосовуючи економетричні методи в бізнесі та економіці, досліднику необхідно розв’язувати наскрізну задачу побудови та дослідження

економетричної моделі на основі реальної статистичної інформації. У такому випадку виникає необхідність одночасно оцінювати параметри і перевіряти статистичні гіпотези, на відміну від традиційних задач математичної статистики, для яких перевірка гіпотез оцінювання є різними темами. Отже, необхідна деяка модифікація статистичних методів для проведення прикладних економетричних досліджень, їх пристосування до кожної конкретної задачі.

Таким чином, вибір та модифікація методів аналізу визначають оригінальний шлях кожного прикладного економетричного дослідження. На цьому шляху дослідник не завжди просувається вперед до поставленої мети. Інколи необхідно перевірити всі можливі варіанти подальшого розвитку подій, повертатися на попередні етапи дослідження (наприклад, змінювати специфікацію моделі або переоцінювати її параметри іншим методом) для того, щоб вибрати єдине правильне рішення. Зрозуміло, що для цього потрібна велика кропітка робота щодо проведення власного прикладного дослідження. Таку роботу супроводжує велика кількість розрахунків, які потребують не лише володіння методами статистичного та економетричного аналізу, а й передбачають також досконале використання ІТ-ресурсів, в ідеалі розробку свого оригінального програмного продукту, що обслуговують кожне дослідження.

Отже, оволодіння дисципліною «Бізнес-економетрика» не лише забезпечує прикладний характер отриманих економічних знань студентів, а й навчає проводити власне наукове дослідження, що забезпечує дослідницьку позицію навчального закладу.

Питання для самоконтролю

1. Що таке економетрична модель?
2. Назвіть типи економетричних моделей та відмінності між ними.
3. До якого типу математичних моделей належить економетрична модель?
4. Що таке специфікація моделі?
5. Поясніть сутність кореляційних зв'язків між економічними показниками.
6. Що таке параметризація рівняння регресії?
7. З яких елементів складається економетрична модель?
8. Визначте основні класи моделей за різними ознаками.
9. Сформулюйте етапи проведення економетричного аналізу.
10. Які вимоги висуваються до статистичної бази економетричних досліджень?
11. Які проблеми виникають при проведенні економетричних досліджень?

Розділ 2

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

2.1. Засоби спеціалізованого статистичного аналізу даних

На світовому ринку пакетів статистичного аналізу даних у середовищі DOS, OS/2 чи Windows існує більш ніж 1000 поширених прикладних статистичних продуктів, які поділяються на універсальні (загального призначення), напівспеціалізовані, спеціалізовані пакети й статистичні експертні системи.

1. *Універсальні пакети.* У таких пакетах відсутня зазвичай пряма орієнтація на специфічну предметну галузь. Однак їх універсальність особливо корисна. Із західних універсальних пакетів найбільш відомі й добре відпрацьовані комп'ютерні системи SAS, SPSS, STATISTIKA, STATGRAPHICS (STSC), STADIA, Quattro Pro, Lotus 1-2-3 та ін. Однак потрібно пам'ятати, що користуються цими пакетами *дуже обережно* через їх універсальність.

До статистичних пакетів загального призначення висуваються певні вимоги, а саме: щоб пакет містив досить повний набір статистичних методів; був зручним для швидкого освоєння і використання; відповідав вимогам до введення, перетворення та організації збереження даних як у самому пакеті, так і обміну з поширеними базами даних (dBase, Lotus 1-2-3 та ін.); мав широкий набір засобів графічного представлення даних і результатів обробки (рисунки, графіки часом відбивають суть справи краще, ніж будь-які статистичні показники); надавав зручні можливості для включення до звітів таблиць вихідних даних, графіків, проміжних і остаточних результатів обробки даних; мав докладну документацію,

добре продуману з урахуванням інтересів як користувача-початківця, так і фахівця-статистика та економетриста.

2. *Напівспеціалізовані пакети*. Такими вважають російські пакети STADI, ОЛІМП, білоруський пакет РОСТАН та американські пакети ODA, WinSTAT, Statit, UNISTAT, Multivariance 7, JMP, SOLO, STATlab.

3. *Спеціалізовані пакети*. Такі пакети містять зазвичай методи з одного – двох розділів статистики або методи, що використовуються у конкретній предметній галузі. Найбільш поширені пакети для аналізу часових рядів (МЕЗОЗАВР або TREND), регресійного аналізу, кластерного аналізу, багатовимірного шкалювання та ін. До спеціалізованих пакетів з класифікації та зниження розмірності належать російські пакети КЛАС-МАЙСТЕР, КВАЗАР, PALMODA, Stat-Media, STARC. Досить відомими є спеціалізовані пакети, що вирішують суміжні з класифікацією задачі. Це американські системи BMDP/W, SigmaStat, Statistix, TURBO Spring-Stat-Win, MVSP. Крім того, на ринку програмного забезпечення представлені статистичні експертні системи, зокрема, СТАТЭКС, Statistical Navigator Pro.

4. *Статистичні експертні системи* відрізняються наявністю бази знань (БЗ) і механізмом логічного виведення нових знань на підставі БЗ. Головна відмінність пакета «СТАТЭКС» полягає в тому, що він містить ознаки експертної системи, тобто орієнтований не на методи, а на мету аналізу даних. Користувач пакета «СТАТЭКС» може зовсім не знатися на механізмі оброблення даних, але має чітко розуміти зміст його даних і загальну мету аналізу. Результати аналізу видаються у вигляді контекстно-орієнтованих екранів, які містять коментарі, що дає змогу розглядати їх як готові рішення. Пакет має базу знань, становить собою набір правил, пов’язаних із властивостями та особливостями застосування статистичних методів, і базу даних, яка уможливлює зберігання інформації у вигляді «куба»: таблиці «об’єкт-ознака» і «час». У пакеті реалізовано режим «Why?», призначений для пояснення мотивів прийнятого «СТАТЭКС» рішення. У пакеті реалі-

зовано такі методи: розрахунок стандартних статистичних характеристик; класифікація об'єктів (комбінаційне угруповання, кластерний аналіз); виявлення та аналіз статистичних залежностей ознак (кореляція, угруповання ознак, головні компоненти і візуалізація); установлення залежностей (регресійний аналіз, індексний аналіз і розпізнавання образів); прогнозування (економетричні моделі). Органи державної статистики використовують статистичні пакети для аналізу статистичних даних типу SAS, SPSS.

Нижче наведені деякі головні характеристики програмних пакетів, що використовувалися на сучасному ринку статистичних програмних продуктів для розв'язання статистичних та економетричних задач.

1. BMDP (*Statistical Software*):
- багатофакторна лінійна регресія;
- ступенева регресія;
- усі можливі підмножини регресій;
- поліноміальна регресія;
- ступенева логістична регресія;
- дисперсійний та коваріаційний аналіз.

2. STATGRAPHICS (*Statistical Graphics System*):
- проста регресія;
- аналіз часових рядів;
- багатофакторна лінійна та нелінійна регресія;
- поліноміальна регресія;
- авторегресійні моделі.

Пакет STATGRAPHICS реалізує такі статистичні функції: параметричні та інші непараметричні тести; категоріальний, дисперсійний, однофакторний, двофакторний, багатофакторний аналіз, коваріаційний аналіз; контроль якості; регресійний аналіз; аналіз часових рядів, багатомірні методи. Пакет має широкі графічні можливості. Доступ до графічних процедур

здійснюється в процесі статистичного оброблення даних. Пакет призначений в основному для тих користувачів, що вже мають певний досвід у статистиці. Пакет надає можливості взаємодії з електронними таблицями та СКБД (типу dBASE та її «нащадків»). Обмін з електронними таблицями у Windows-версії виконується через стандартний буфер обміну (Windows clipboard). Щодо класифікації та суміжних з нею задач пакет містить такі розділи, як дескриптивна статистика, розвідувальний аналіз, багатомірний аналіз. Крім того, STSC має ще вісім великих розділів, які стосуються методів математичної статистики. Незначними недоліками STSC+/W є нечіткість довідкової системи та видача результатів розрахунків з точністю до 4–5 значущих цифр.

3. SAS (*Statistical Analysis System*):
- лінійна регресія;
- нелінійна регресія;
- RSQUARE-регресія;
- ступенева регресія;
- дисперсійний аналіз.

Система SAS існує і розвивається з 1976 р. Сьогодні – це потужний комплекс з більш як двадцятьма різними програмними продуктами, об’єднаними один з одним «засобами доставки інформації» (Information Delivery System, IDS, іноді весь пакет позначається як SAS/IDS). SAS відрізняє неперевершена потужність щодо набору статистичних алгоритмів. Система надає користувачеві можливість приєднання його оригінальних алгоритмів. Основними користувачами системи є підприємства ВПК, великі банки, біржі, торгові фірми, деякі атомні станції, найбільші медичні та геофізичні центри, великі державні структури.

4. SPSS (*Statistical Package for the Sicial Sciences*):
- багатофакторний регресійний аналіз;
- процедура LOGLINEAR для «фіктивних» змінних;

- дисперсійний аналіз;
- ступенева регресія;
- дисперсійний аналіз;
- двовимірні графіки та діаграми розсіювання.

SPSS має додаткові програмні засоби, які працюють на декількох платформах і дають змогу розширювати можливості базового модуля. Поряд з розширенням статистичних процедур базового модуля змінено зміст модулів Professional Statistics, Advanced Statistics.

Модуль SPSS Professional Statistics містить методи регресійного аналізу, зокрема зважений, двоетапний метод найменших квадратів, логічну регресію і нелінійну регресію, а також багатомірне шкалування та аналіз надійності.

Модуль SPSS Advanced Statistics дає змогу провести аналіз з допомогою складних статистичних методів, таких як загальне лінійне моделювання, аналіз компонент дисперсії, логлінійний, а також аналіз виживання.

Модуль SPSS Tables є інструментом для створення різноманітних високоякісних таблиць, включаючи таблиці, вкладені одна в одну й таблиці для подання багатоваріантних відповідей. Модуль SPSS Trends виконує будь-які види прогнозування та аналізу часових рядів з допомогою моделей добору кривих, моделей згладжування і методів оцінювання авторегресійних функцій.

Модуль SPSS Categories здійснює сумісний аналіз і процедури оптимального шкалування, в тому числі й аналіз відповідностей. Модуль SPSS CHAID спрощує і прискорює аналіз дискретних даних, розробляє прогностичні моделі, відфільтровує зайві фактори і будує нескладні деревоподібні діаграми, які поділяють вибірку на підгрупи, що мають схожі характеристики.

Neural Connektion з допомогою потужної нейронної мережі та через свою надзвичайну гнучкість вносить творчий елемент у функції прогнозування, класифікації, аналізу часових рядів, а також сегментації даних.

Mapln fo створює тематичні карти для візуалізації даних і картографічні файли.

Allclear є повною графічною програмою, яка дає змогу створювати причинно-наслідкові діаграми, динамічні блок-схеми, мережі, дерева прийняття рішень, організаційні схеми.

Пакет SPSS є одним з лідерів ринку у сфері комерційних статистичних продуктів, призначених для проведення прикладних досліджень у соціальних науках. Відрізняється гнучкістю, потужністю, застосовується для всіх видів статистичних розрахунків.

5. E.Views (*Econometric Views*):
- проста лінійна регресія;
- багатофакторна регресія;
- нелінійна регресія;
- симультативні моделі;
- ARIMA-моделі.

6. RATS:
- метод найменших квадратів;
- ймовірнісні та логістичні моделі;
- двокроковий метод найменших квадратів;
- зважений метод найменших квадратів;
- інструментальні змінні;
- критерій Кочрена-Оркатта;
- поліноміальні розподілені лаги.

7. Micro TSP:
- проста регресія;
- регресія часових рядів;
- прогнозування;
- авторегресійні моделі та моделі ковзного середнього;
- одночасні (симультативні) та імітаційні моделі;
- використання електронних таблиць у поєднанні з Micro TSP;
- логістичні та ймовірнісні моделі.

8. Minitab:

- проста регресія;
- регресія часових рядів;
- прогнозування;
- моделі ковзного середнього;
- імітаційні моделі.

9. STADIA:

- ділова графіка;
- параметричні тести (критерії Стьюдента, Фішера, гістограми, розподіли, згода частот, послідовний аналіз);
- непараметричні тести (χ-квадрат Вілкоксона, Колмогорова-Смирнова, Ван-дер-Вардена, Клотца, Анасрі-Бредлі, кореляція Кендалла, кореляція Спірмана);
- категоріальний аналіз (кростабуляція, χ-квадрат оцінка, коефіцієнти згоди);
- дисперсійний аналіз (одно-, дво-, багатофакторний, коваріаційний);
- контроль якості (гістограма якості, діаграма Парето, контрольні карти);
- регресійний аналіз (проста регресія, множинна регресія, покрокова регресія, нелінійна регресія);
- аналіз часових рядів (згладжування, фільтрація, автокореляція, кроскореляція, спектральний, крос-спектральний аналіз, ARIMA-моделі);
- багатовимірні методи (кореляція (коваріація), дискримінантний аналіз, кластерний аналіз, факторний аналіз).

10. SYSTAT:

- ділова графіка;
- параметричні тести (критерії Стьюдента, Фішера, гістограма);
- непараметричні тести (χ-квадрат, серій, Вілкоксона, Колмогорова-Смирнова, кореляція Спірмана);

- категоріальний аналіз (кростабуляція, χ-квадрат оцінка, коефіцієнт згоди);
- дисперсійний аналіз (одно-, дво-, багатофакторний);
- регресійний аналіз (проста регресія, множинна регресія, покрокова регресія, нелінійна регресія);
- аналіз часових рядів (згладжування, фільтрація, автокореляція, кроскореляція, спектральний, ARIMA-моделі);
- багатовимірні методи (кореляція (коваріація), кластерний та факторний аналіз).

11. МЕЗОЗАВР:

- ділова графіка;
- параметричні тести (описова статистика);
- непараметричні тести (χ-квадрат, біноміальний, знаків, кореляція Кендалла, кореляція Спірмана);
- регресійиий аналіз (проста регресія, множинна регресія, покрокова регресія, робаста регресія, нелінійна регресія); аналіз часових рядів (згладжування, фільтрація, автокореляція, кроскореляція, спектральний, крос-спектральний, ARIMA-моделі). У формі тимчасових рядів можуть бути найрізноманітніші дані з економіки, демографії, техніки, медицини тощо. У програмі реалізовано різні алгоритми згладжування часових рядів, виділення в ряді сезонних коливань, виконання спектрального аналізу і частотної фільтрації. Крім того, є різноманітні моделі та методи: лінійні та нелінійні моделі тренда, авторегресійні моделі, множинна лінійна регресія, модель Бокса-Дженкінса (ARIMA) з експертної підтримки. Програма імпортує/експортує дані ASCII, dBASE, Lotus 1-2-3, САНИ.

12. ЕВРИСТА:

- ділова графіка;
- параметричні тести (описова статистика, гістограма);
- непараметричні тести (χ-квадрат, Колмогорова-Смирнова);

- регресійний аналіз (проста регресія, множинна регресія);
- аналіз часових рядів (згладжування, фільтрація, авто-кореляція, крос-кореляція, спектральний, крос-спектральний, моделі інтервенцій, фазовий простір, гармонічні моделі, ARIMA-моделі);
- багатовимірні методи (факторний аналіз).

Останнім часом на ринку статистичних програм з'являються нові версії вже відомих програмних продуктів і нові більш потужні математичні та статистичні пакети. Найбільшою популярністю серед них користується нова колекція від компанії **PETROSOFT**:

13. MathCAD (*версія* **PRO** – *англійська, версія* 8.01 – *російська*) – потужний пакет для математичних розрахунків, розв'язування рівнянь, побудови графіків тощо.

14. MathLab 5.21 (*російська версія*) – професійний пакет розв'язування математичних задач різної складності, моделювання, розв'язування рівнянь, побудова графіків тощо.

15. Maple 6.0 – новий пакет для математичних і статистичних розрахунків під **Win 9x/2000**, який має більші можливості, ніж **MathCAD** і **MathLab**.

16. NCSS and PASS 2000 – статистичний аналіз та побудова графіків за будь-якими даними.

17. SPSS 10.0.5 *upgrade* (нова версія **SPSS**) – найпотужніша програма для статистичного аналізу даних у бізнесі та науково-дослідній роботі.

18. Stata 6.0 – потужний пакет для обробки статистичних і графічних даних.

19. STATISTICA 5.5A та **6.0** – інтегрований пакет для статистичного аналізу.

Основними компонентами системи STATISTIKA є: електронні таблиці для введення вхідних даних, а також спеціальні таблиці виведення числових результатів аналізу; потужна графічна система для візуалізації даних і результатів статистичного аналізу; набір спеціалізованих статистичних модулів, у яких зібрано групи логічно пов'язаних між собою статистичних процедур; спеціальний інструментарій для підготовки звітів; убудовані мови програмування SCL (STATISTICA Command Language) і STATISTICA BASIC, які дають змогу користувачеві розширити стандартні можливості системи. STATISTICA працює з чотирма різними типами документів, які відповідають основним структурним компонентам системи. Це: електронна таблиця, яка призначена для введення вхідних даних і їх перетворення; електронна таблиця для виведення числових і текстових результатів аналізу; графік-документ у спеціальному графічному форматі для візуалізації та графічного подання числової інформації; звіт-документ у розширеному текстовому форматі для виведення текстової та графічної інформації. Відповідно до стандартів середовища Windows кожний тип документа виводиться у своєму власному вікні в робочій області системи STATISTICA.

20. Unistat Statistical Package 5.001 – програма для аналізу статистичних даних та результатів наукових експериментів.

21. **GRAND-96** (*версія* 1.1) – програмний продукт, який містить вперше на сучасному рівні для персонального комп'ютера методику вирішення задач, в яких необхідно якнайкраще провести параметричний синтез і (або) оптимізацію засобів застосування складної системи, об'єкта або процесу за багатьма критеріями якості з урахуванням протидії та невизначеності умов їх функціонування.

Метод рівневої селекції систем, який реалізований у продукті, дає змогу:

- кількісно оцінити та зіставити альтернативні структури складних систем, об'єктів або процесів;
- вирішити задачу параметричного синтезу статичних характеристик, оптимізувати конструкцію та (або) засіб застосування системи, об'єкта або процесу;
- розрахувати найкращу стратегію конкурентної боротьби;
- врахувати і звести до мінімуму ризик прийняття рішень в умовах невизначеності.

GRAND-96 забезпечує близьке до парето-оптимального вирішення багатокритеріальних задач лінійного і нелінійного програмування і наближене – систем лінійних і нелінійних нерівностей.

22. ІДЕНТА (*версія* 2.1) – програмний продукт для вирішення задач ідентифікації і прогнозування характеристик складних систем. Під ідентифікацією розуміється синтез багатовимірної аналітичної моделі складної системи або процесу за результатами експерименту, проведеного на реальній системі або на її імітаційній моделі, яка задається у вигляді таблиці.

23. ПСИХЕЯ (*версія* 1.1) – програмний продукт для вирішення однокритеріальних статичних задач оптимізації методом псі-перетворення, який дає змогу одержувати екстремальні значення для широкого класу багатопараметричних функцій (які не диференціюються, лінійних, нелінійних, неопуклих, багатоекстремальних).

24. HUSTLE (*версія* 2.1) і **VERSION** (*версія* 1.1) – програмні продукти, які дають змогу класифікувати альтернативні складні системи й об'єкти, генерувати алгоритмічні вирішальні правила класифікації, необхідні для подальшої роботи з вибраним класом систем (при цьому системи можуть бути описані як метричними, так і якісними характеристиками).

25. ДИЛЕМА, *версія* 1.0 (**ВЕРДИКТ,** *версія* 1.0) – програмний продукт для порівняння варіантів складних систем (класів складних систем) і вибору найкращого з альтернативних на основі обробки експертної інформації, а також класифікації систем методами кластерного аналізу.

26. СПЕКТРУМ (*версія* 1.4) – програмний продукт, який дає змогу створювати періодичні, неперіодичні та випадкові цифрові сигнали, реалізувати різні способи їх частотного і часового аналізу, засновані на алгоритмі швидкого перетворення Фур'є.

27. КЛАС-МАЙСТЕР – програмний продукт призначений для розв'язання задач кластерного аналізу. Пакет імпортує/експортує дані стандартного формату ASCII чи DBF і подає їх у вигляді таблиці «об'єкт-ознака». Крім того, пакет охоплює методи описової статистики, прогнозування, конструювання (створення нових ознак). Недоліки пакета: усі результати обчислень видаються або у вигляді набору цифр (у текстовому режимі), зрозумілого без документації лише людині зі спеціальною статистичною підготовкою, або у графічному вигляді, інтуїтивно зрозумілому навіть неспеціалістові.

28. STARC – програмний продукт, що має як DOS, так і Windows версію. Він складається з модулів для розв'язання задач: класифікації «з учителем» – дає змогу будувати класифікатори, порівнянні з якістю з класифікаторами, одержуваними в нейромережах лінійного типу, що використовують прямі зв'язки нейронів (feed forward); кластерного аналізу і стискання даних; статистичних обчислень і графіки, перетворення ознак. У сервісних модулях можна вводити і редагувати різні бази даних, перевіряти формат даних, активізувати ті чи інші підмножини даних, формулювати завдання командною мовою пакета, генерувати по Монте-Карло ті чи інші тестові дані та формувати звіт за результатами роботи користувача з конкретними даними.

29. КВАЗАР – комплекс обчислювальних алгоритмів для задач розпізнавання, призначений для розв'язання задач класифікації. У пакеті для ПЕВМ реалізовано підхід до розпізнавання образів, що ґрунтується на застосуванні теорії лінійних нерівностей і так званого методу комітетів для системи лінійних нерівностей (оригінальні алгоритми розробників). Крім того, у пакеті використовуються і деякі інші алгоритми (метод головних компонентів, елементи розвідувального аналізу даних тощо).

30. PolyAnalyst – програмний продукт, що працює під керуванням OS/2 Warp фірми IBM, спроможної автоматично виявляти знання, сховані в базах даних. Науковий напрям, до якого належить програма, називається Data Mining and Khowledge Discovery («видобування даних і виявлення знань»). Програма працює з даними довільного типу: дійсними чи цілими, логічними чи якісними. Вона вміє знаходити багатофакторні залежності в даних у вигляді аналітичних формул, структурних правил та алгоритмів, виводити за навчальними прикладами правила для класифікації нових даних. Програма Poly Analyst належить до відносно нового напряму штучного інтелекту, що називається «символічні методи витягування знань».

31. MVSP (Multi-Variate Statistics Program) – програма виконує аналіз головних компонентів, аналіз відповідностей, кластерний аналіз за одним з підходів до угрупування. Використовується у фінансовій сфері.

Вибір статистичного пакета для аналізу даних, зрозуміло, залежить від характеру задачі, яка вирішується, обсягу даних, які обробляються, наявного обчислювального середовища та кваліфікації користувача. Оскільки пакет електронних таблиць Excel є стандартним та використовується практично в усіх навчальних закладах, то і подальші дослідження будуть наведені саме у середовищі цього пакета.

2.2. Постановка задачі. Економічний аналіз причинно-наслідкових зв'язків досліджуваних процесів

Економіка України на сьогодні переживає складний період та потребує ефективних перетворень. Сучасна економічна ситуація в країні демонструє, що одним із найвпливовіших чинників, який відчутно гальмує розвиток країни, є значне зростання боргового навантаження. Надмірне залучення коштів на недосить вигідних умовах поряд з ірраціональністю їх використання перешкоджають довгостроковому економічному зростанню та негативно впливає на стан фінансової безпеки. Тому вдосконалення управління державним боргом та його обслуговування є актуальною проблемою, оскільки тільки ефективна боргова політика може підвищити рівень боргової безпеки, дозволить зменшити розмір дефіциту державного бюджету та сприятиме економічній стабільності країни.

Постановка задачі. На основі статистичних даних дослідити зміну обсягів державного боргу України залежно від основних чинників, що здійснюють вплив на нього, спрогнозувати обсяги державного боргу на наступні періоди та на їх основі розробити цілісну систему рішень.

Вирішення цієї задачі передбачає:

- вивчення конкретних економічних ситуацій та аналіз причинно-наслідкових зв'язків між змінними;
- дослідження часових трендів, обґрунтування вибору конкретної форми моделі;
- вивчення різноманітних методів оцінки невідомих параметрів моделі;
- проведення аналізу моделі, перевірку гіпотез, статистичні висновки;
- вивчення особливих випадків у багатофакторному аналізі;
- побудову та дослідження економетричних моделей на основі систем симультативних рівнянь.

Предметом є методи регресійного та економетричного аналізу та їх застосування для дослідження взаємозв'язку державного боргу та макроекономічних процесів у країні, їх залежність та закономірності взаємовпливу.

Відповідно ***об'єктом*** дослідження є державний борг України та пов'язані з ним макроекономічні процеси.

Мета дослідження полягає у моделюванні взаємозалежності державного боргу від факторів, які на нього впливають на основі класичної багатофакторної регресійної моделі, обчисленні точкового та інтервального прогнозів та визначення основних напрямів зменшення державного боргу в Україні.

При цьому ***основним завданням регресійного аналізу*** є встановлення виду функції, яка найкраще описувала б усереднене масове протікання економічного процесу. До ***етапів*** його вирішення належать:

І етап: проведення ґрунтовного якісного економічного аналізу досліджуваного процесу;

ІІ етап: на основі проведеного аналізу формулювання гіпотези про вид функції, яка описує цей процес;

ІІІ етап: прийняття гіпотези або відмова від неї шляхом статистичної перевірки по емпіричних даних;

IV етап: визначення кінцевої функції регресії, оцінка невідомих значень залежної змінної, одержання теоретично обґрунтованих і статистично надійних різноманітних прогнозів щодо поведінки досліджуваного процесу.

Конкретизуємо кожний з етапів:

1) *постановка конкретного завдання (проблеми)* з урахуванням цілей дослідження у термінах опису системи (процесів), які їй (їм) притаманні, вибір методології дослідження;

2) *формалізація завдання (проблеми)* – побудова математичної моделі задачі (системи, процесу);

3) *перевірка та коригування моделі*, визначення ступеня адекватності моделі реальному об'єкту (процесу);

4) *знаходження оптимального вирішення завдання (проблеми)* на основі уточненої моделі за допомогою того чи

іншого чисельного методу оптимізації, побудова алгоритму вирішення цього завдання (проблеми); реалізація зазначеного алгоритму на ЕОМ і виконання розрахунків з метою отримання сукупності даних для опису поведінки об'єкта;

5) *аналіз отриманих даних*. Надання їм необхідної змістовної форми та *практичне їх використання*.

Для виконання поставленого вище завдання необхідно вирішити такі задачі:

1) збір та первісна обробка статистичної інформації;
2) дослідження динаміки факторів моделі з метою отримання їх прогнозних значень;
3) дослідження окремого впливу факторів на показник (побудова парних регресій);
4) перевірка факторів на мультиколінеарність;
5) побудова та дослідження множинної регресійної моделі;
6) дослідження особливих випадків поведінки залишків моделі (гетероскедастичність, автокореляція);
7) обчислення прогнозних значень і знаходження меж надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і меж надійних інтервалів для математичного сподівання (точковий та інтервальний прогнози).

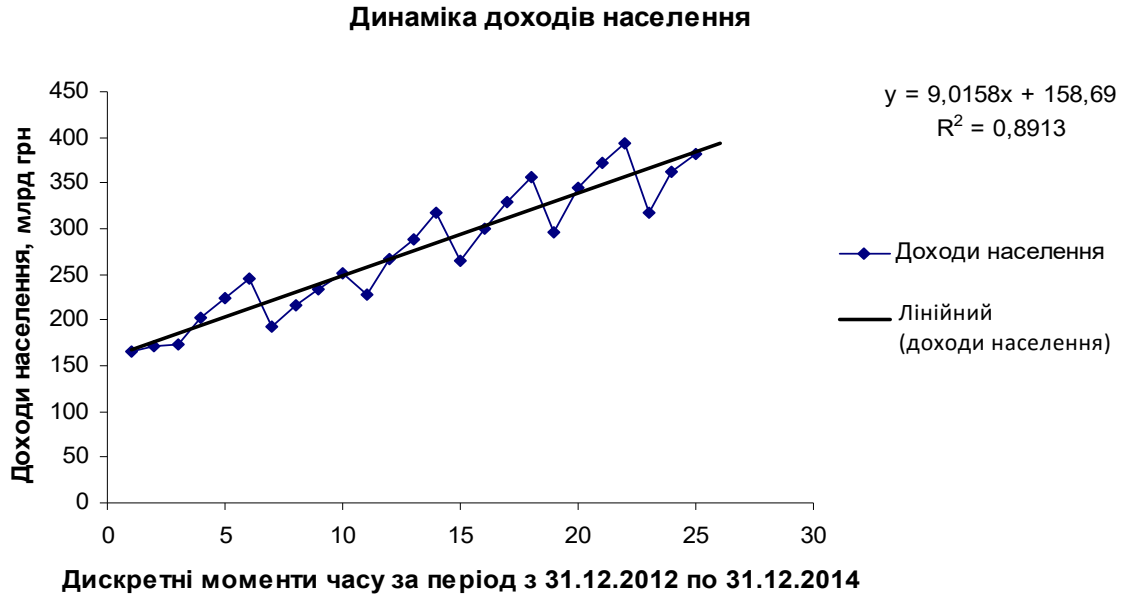
Провівши попереднє дослідження вихідної статистичної інформації та відібравши макроекономічні показники, які впливають на зміну державного боргу України, встановимо залежність обсягу державного боргу (Y, млрд грн) від доходів населення (X_1, тис. грн), кількості населення (X_2, млрд чол.), валового внутрішнього продукту (X_3, млрд грн), середнього розміру допомоги безробітним (X_4, тис. грн), кредитів Національного банку (X_5, млрд грн), кінцевих споживчих витрат (X_6, млрд грн) та заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками, (X_7, тис. грн). Згруповану статистичну інформацію за період з грудня 2012 р. по грудень 2014 р. з посиланнями на її джерела наведено у дод. 1.

Оскільки для обчислення прогнозів обсягу державного боргу Y за класичною багатофакторною моделлю необхідно задавати прогнозні значення факторів X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, проведемо дослідження поведінки динаміки факторів моделі з метою виявлення тенденцій їх розвитку та отримання прогнозних значень у майбутні періоди.

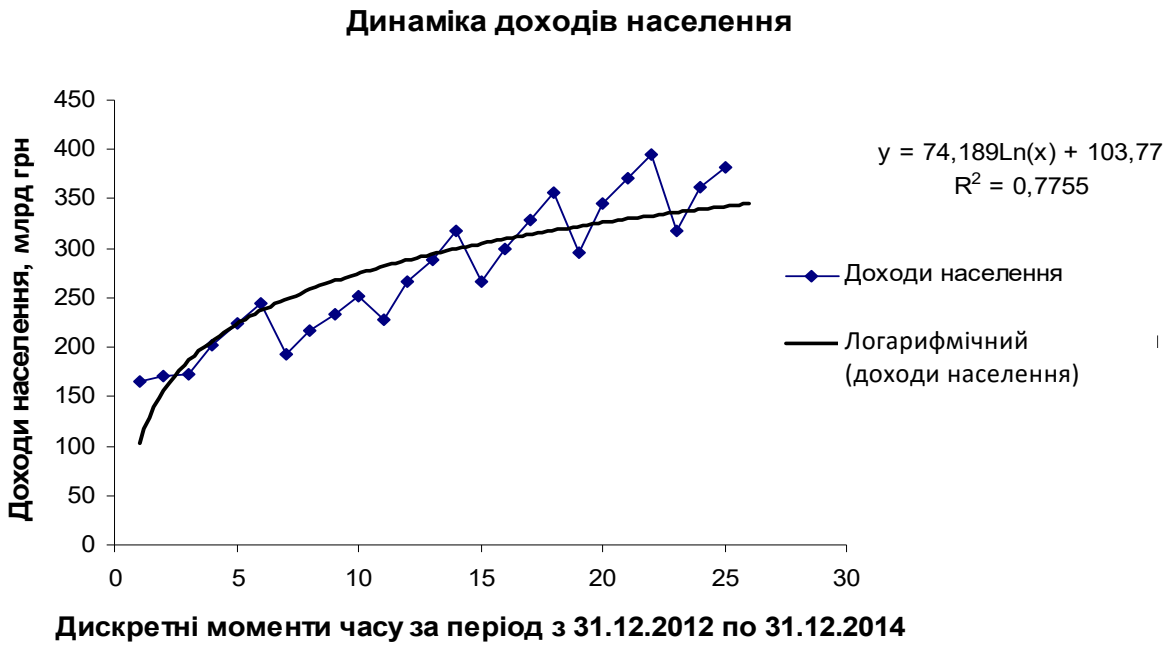
2.3. Дослідження динамічних та кореляційних властивостей факторів

Проаналізуємо залежність кожного фактора моделі від дискретних моментів часу за допомогою графічних засобів Excel. Спочатку розглянемо динамічні властивості доходів населення $X1$. За наведеними у дод. 1 даними будуємо графіки залежності доходів населення від дискретних моментів часу.

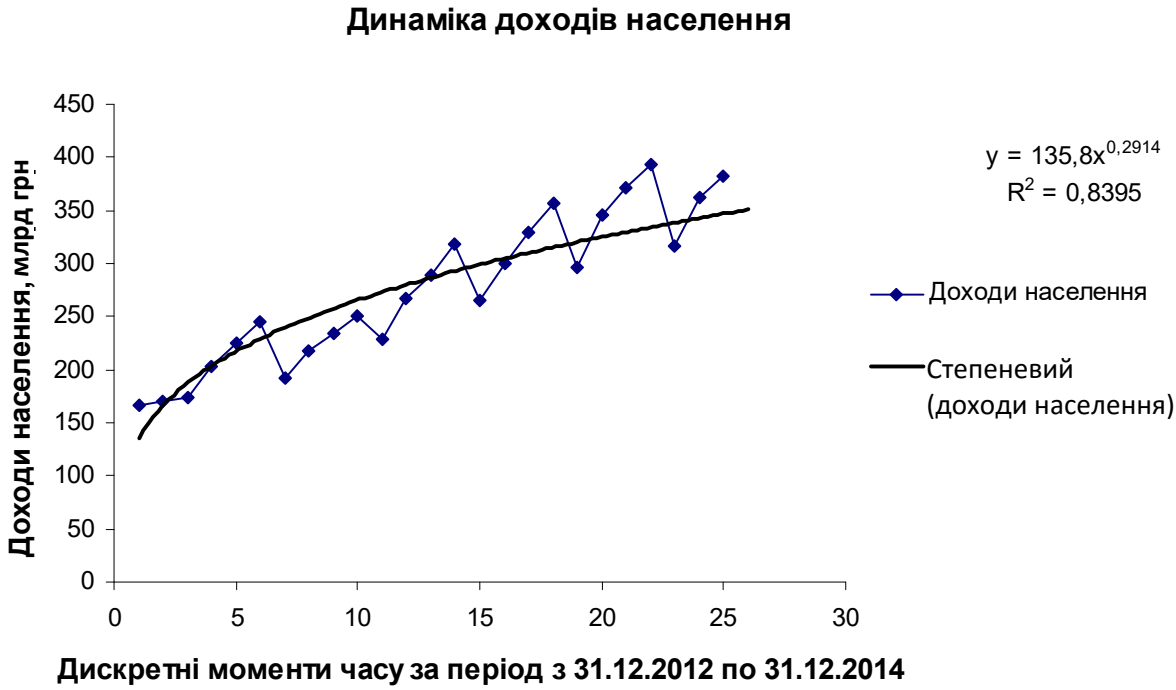
За допомогою лінійного тренду апроксимуємо статистичну ламану доходів населення лінійною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації R^2 =0,8913.



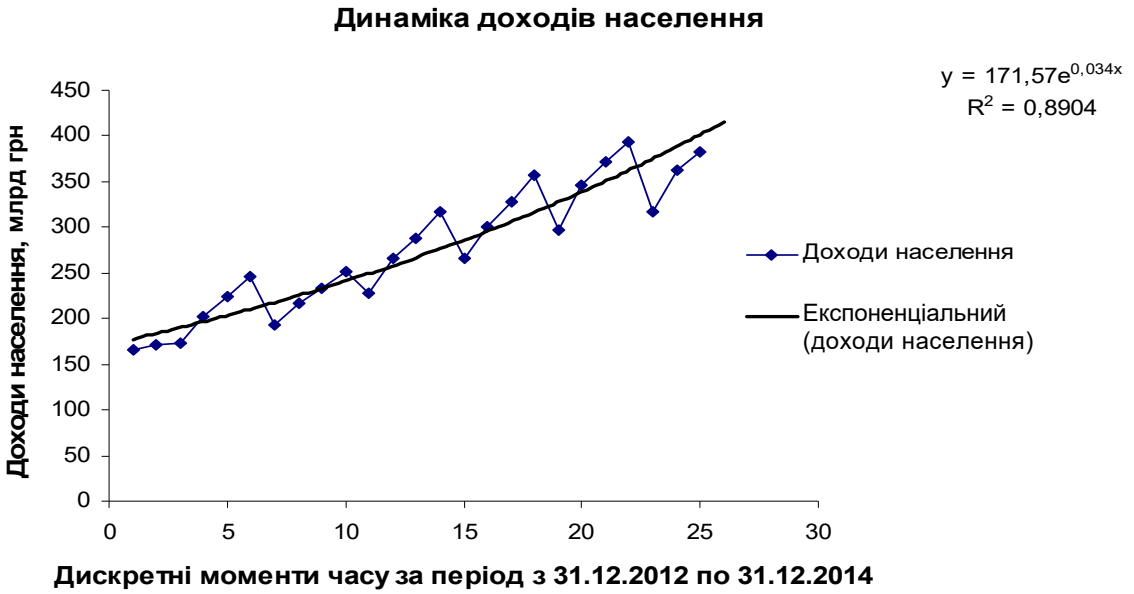
За допомогою логарифмічного тренду апроксимуємо статистичну ламану доходів населення логарифмічною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації R^2 = 0,7755.



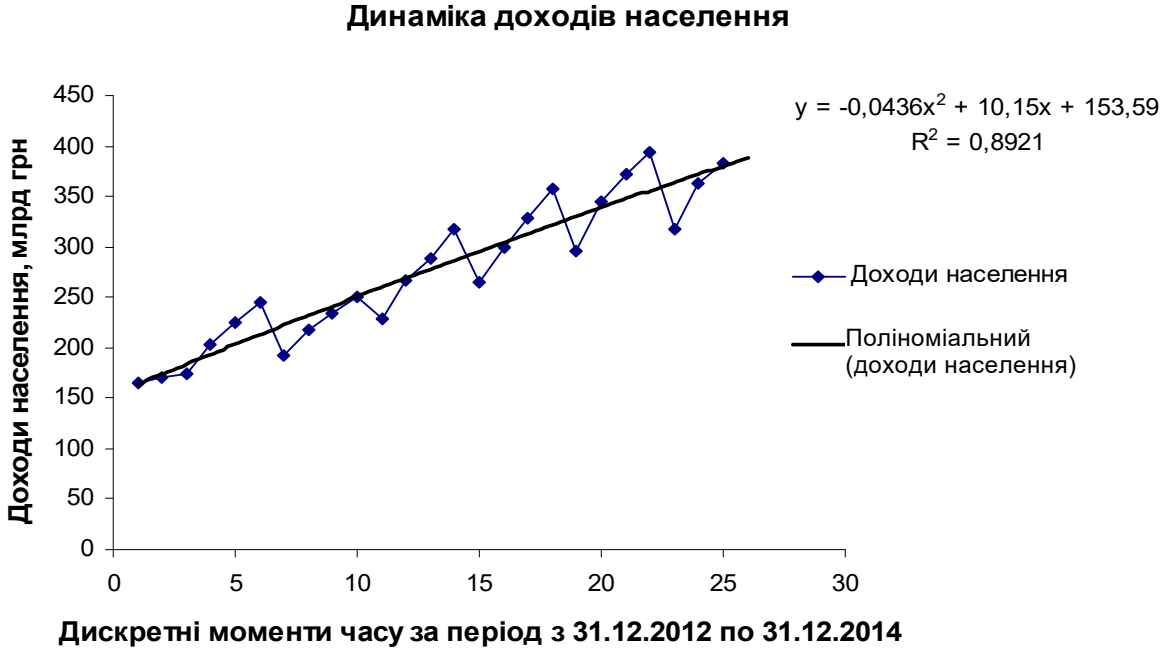
За допомогою степеневого тренду апроксимуємо статистичну ламану доходів населення степеневою функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}8395$.



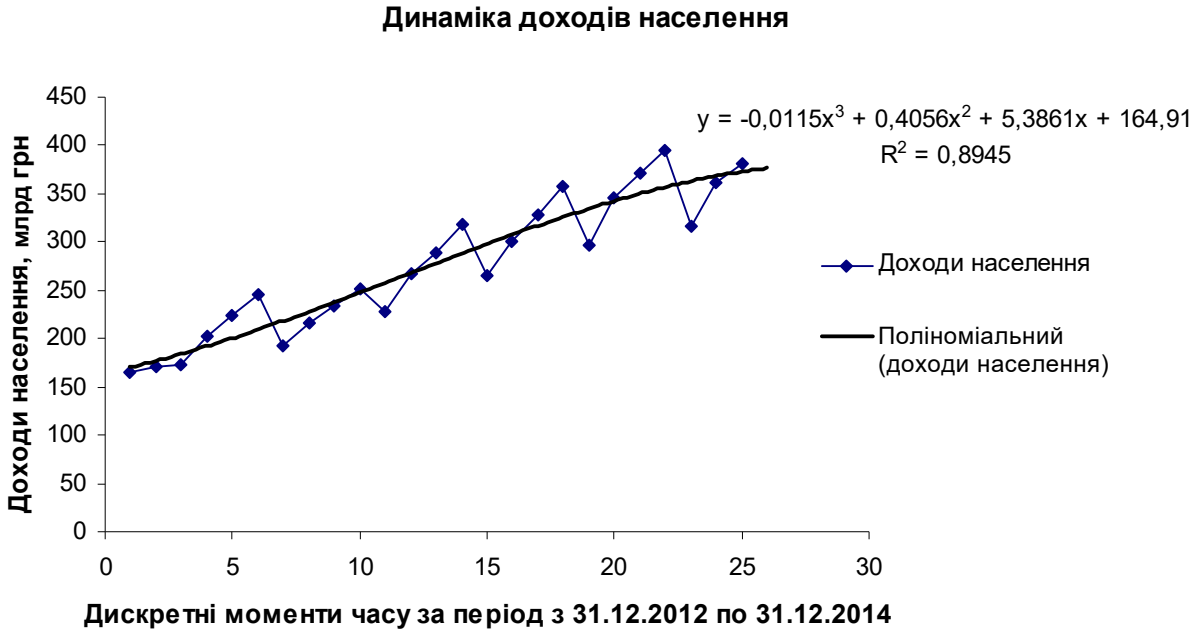
За допомогою експоненціального тренду апроксимуємо статистичну ламану доходів населення експоненціальною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}8904$.



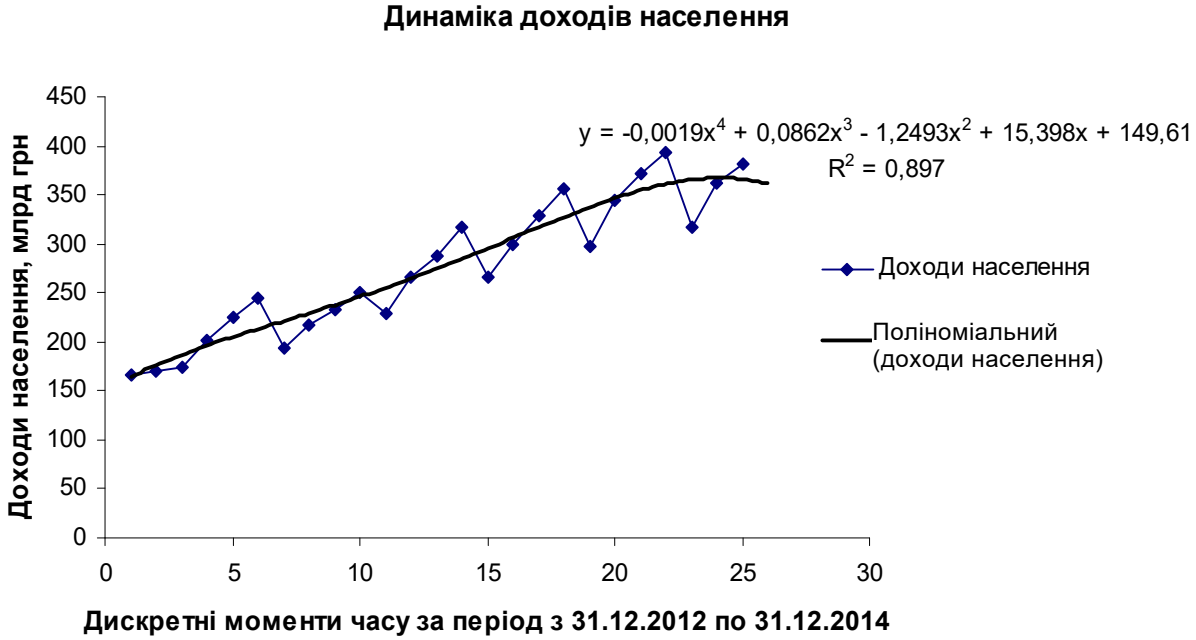
За допомогою поліноміального тренду 2-го степеня апроксимуємо статистичну ламану доходів населення поліномом 2-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}8921$.



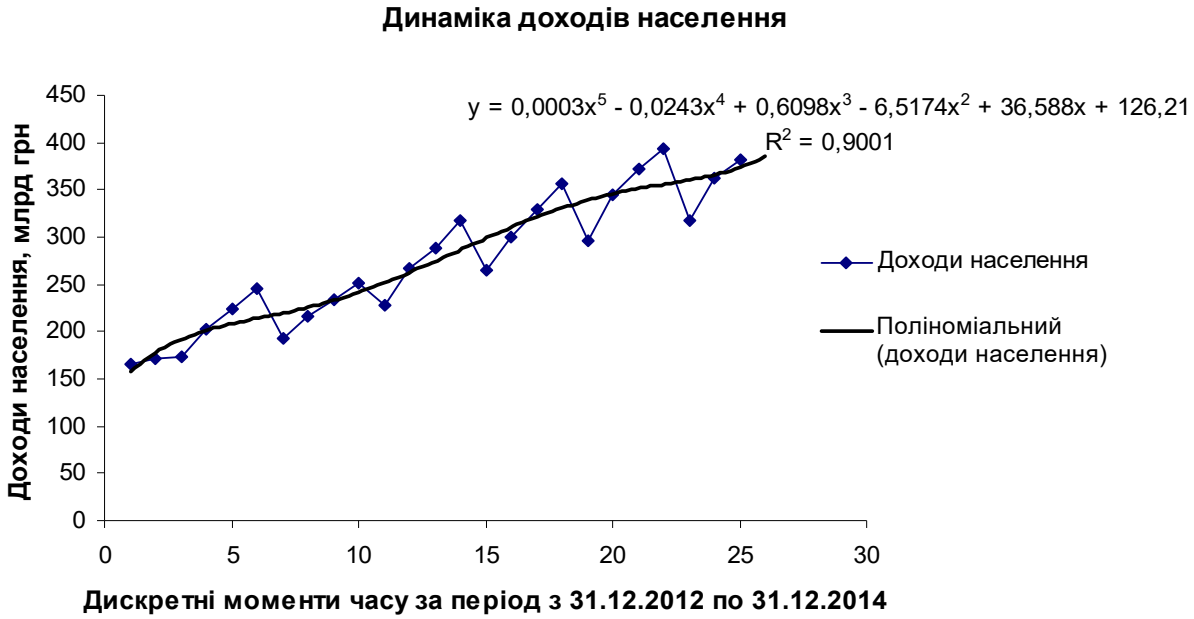
За допомогою поліноміального тренду 3-го степеня апроксимуємо статистичну ламану доходів населення поліномом 3-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}89453$.



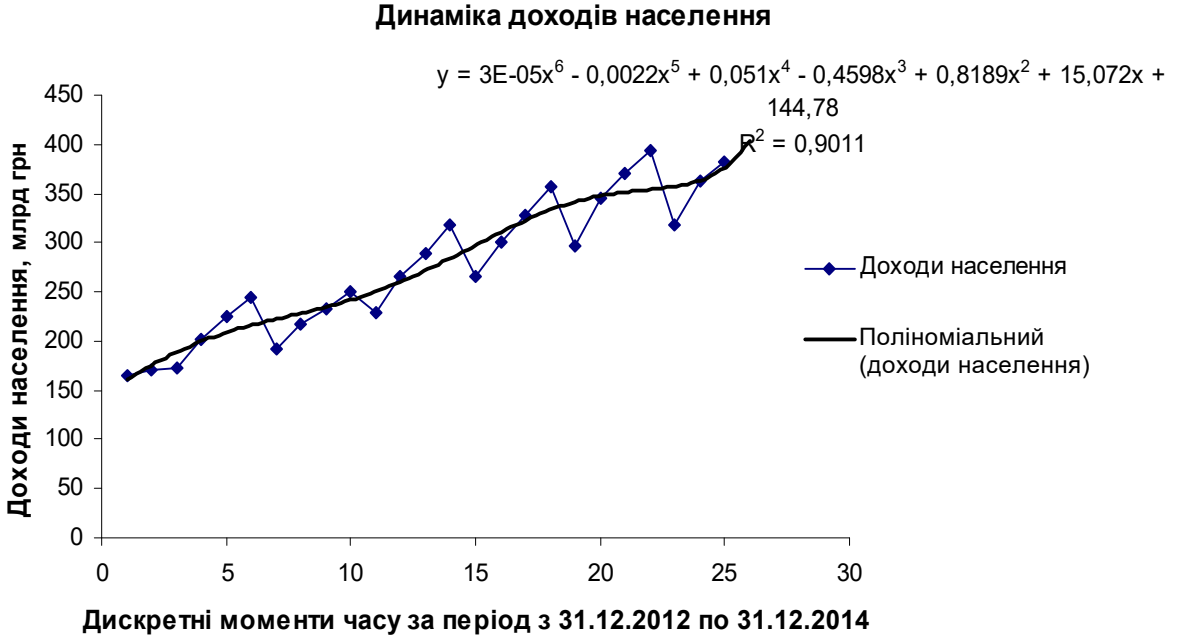
За допомогою поліноміального тренду 4-го степеня апроксимуємо статистичну ламану доходів населення поліномом 4-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}897$.



За допомогою поліноміального тренду 5-го степеня апроксимуємо статистичну ламану доходів населення поліномом 5-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}9001$.



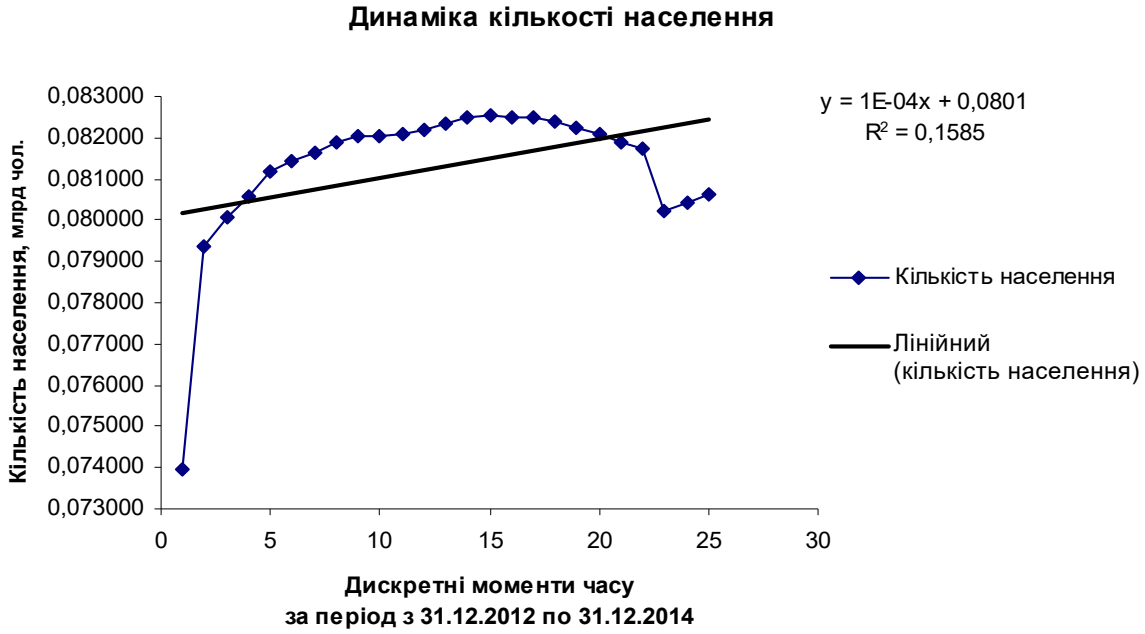
За допомогою поліноміального тренду 6-го степеня апроксимуємо статистичну ламану доходів населення поліномом 6-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}9011$.



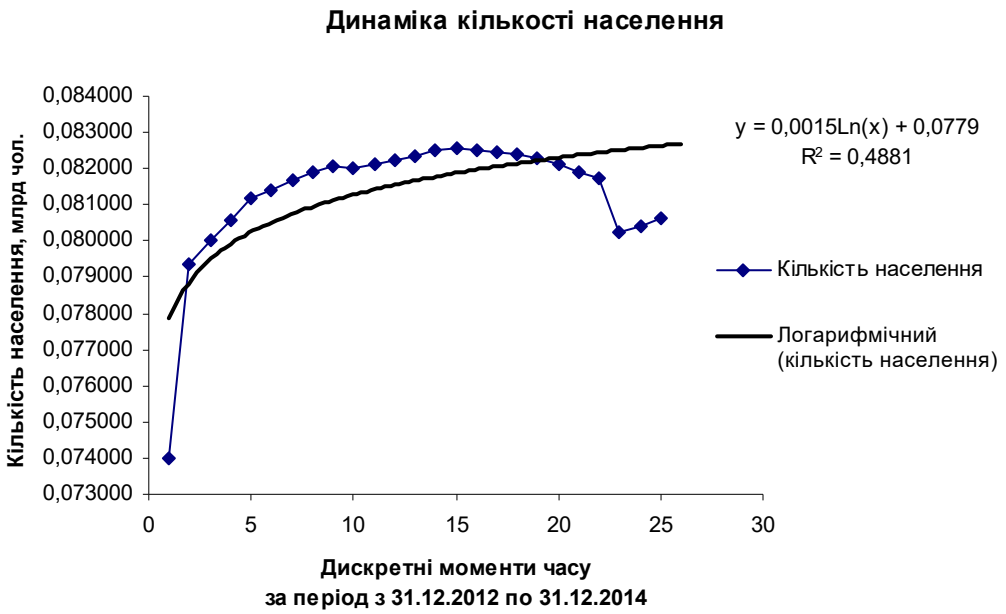
Проаналізувавши дані, робимо висновок, що величина достовірності апроксимації досить висока для всіх типів трендів, а найбільша для поліноміального тренду 6-го степеня і становить $R^2 = 0{,}9011$. Таким чином, для отримання достовірного прогнозу доходів населення за моделлю динаміки виберемо апроксімацію поліномом 2-го ступеня з $R^2 = 0{,}8921$ та зробимо висновок, що доходи населення змінюються у часі як поліномом 2-го степеня, а прогнозне значення доходів населення у наступному місяці приблизно становить $X_{1pr} = 388{,}0164$ млрд грн.

Розглянемо динамічні властивості кількості населення X_2. За наведеними у дод. 1 даними будуємо графіки залежності кількості населення від дискретних моментів часу.

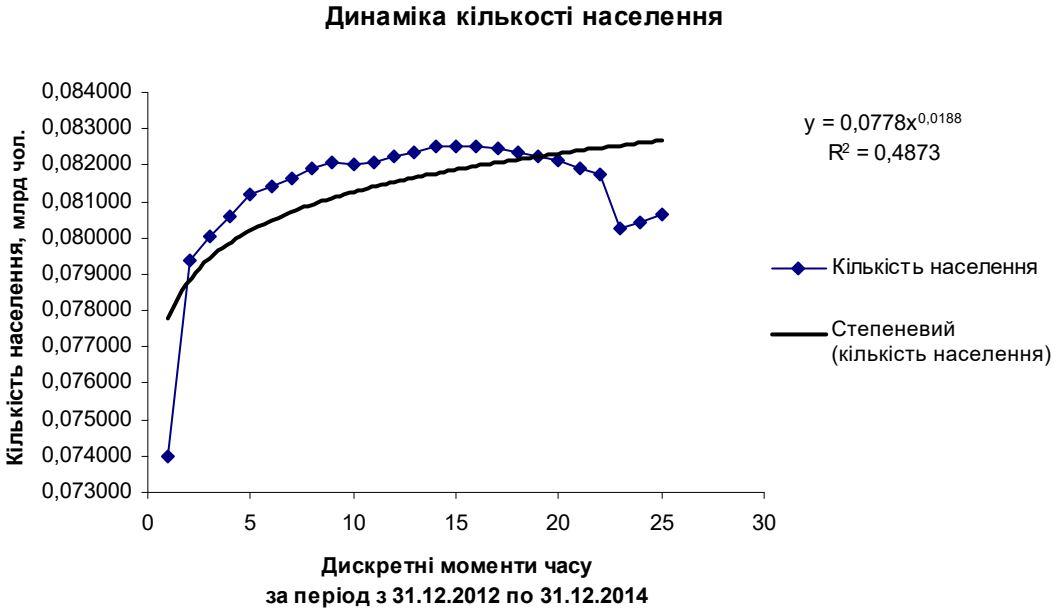
За допомогою лінійного тренду апроксимуємо статистичну ламану кількості населення лінійною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}1585$.



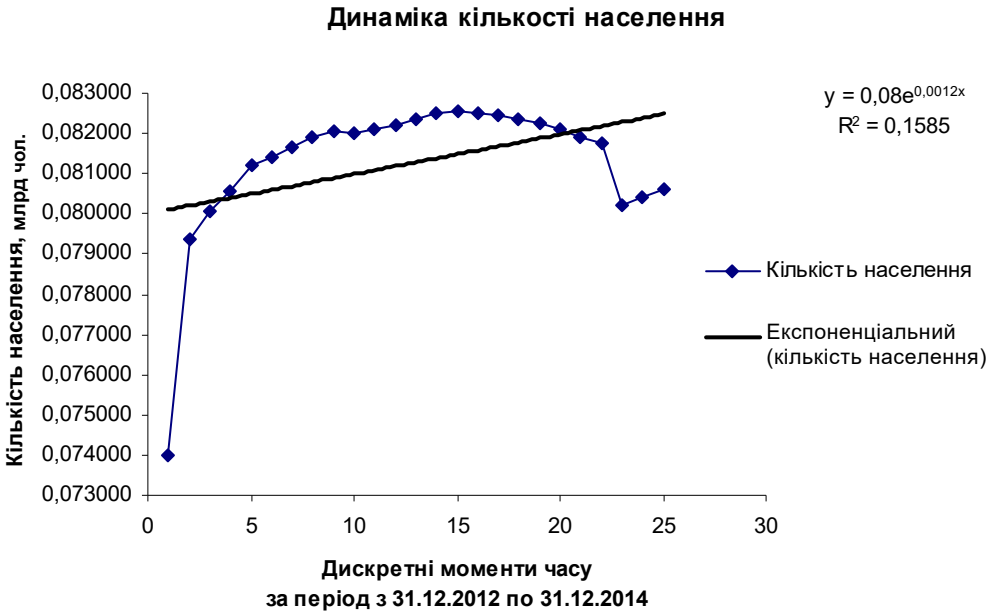
За допомогою логарифмічного тренду апроксимуємо статистичну ламану кількості населення логарифмічною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}4881$.



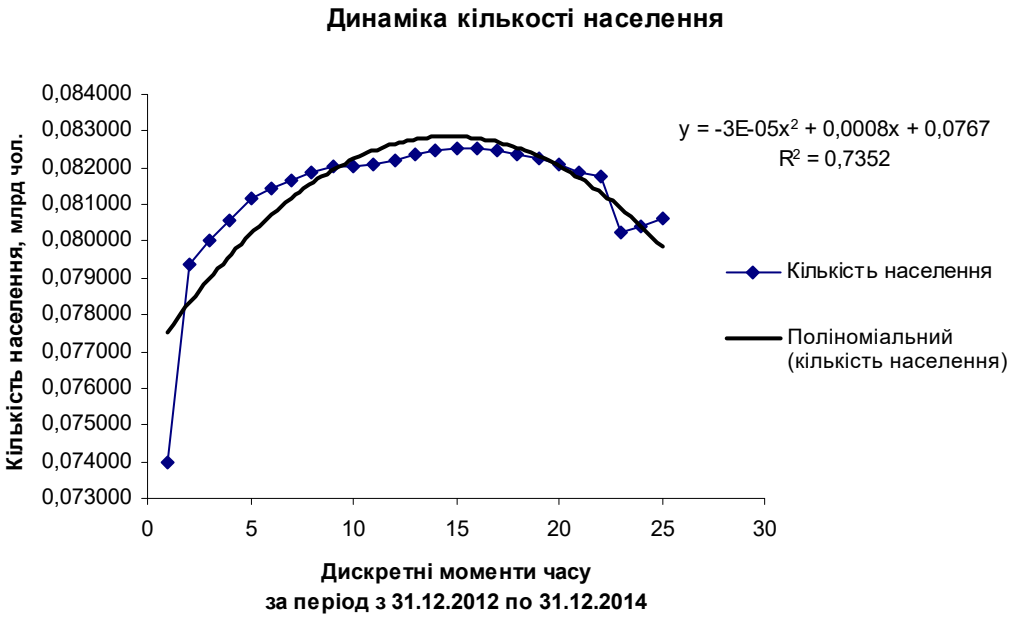
За допомогою степеневого тренду апроксимуємо статистичну ламану кількості населення степеневою функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}4873$.



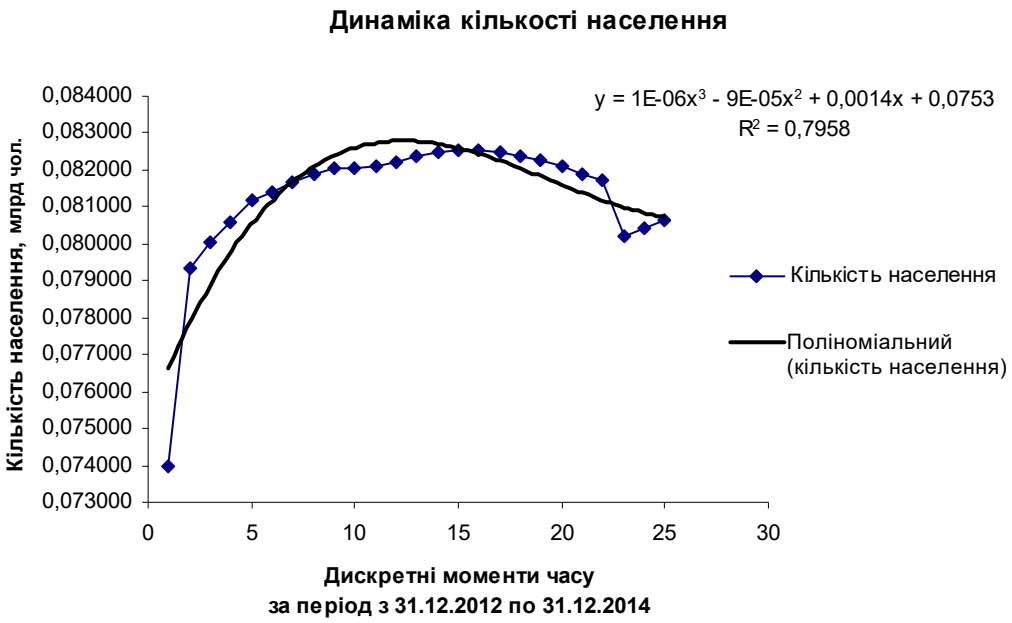
За допомогою експоненціального тренду апроксимуємо статистичну ламану кількості населення експоненціальною функцією і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}1585$.



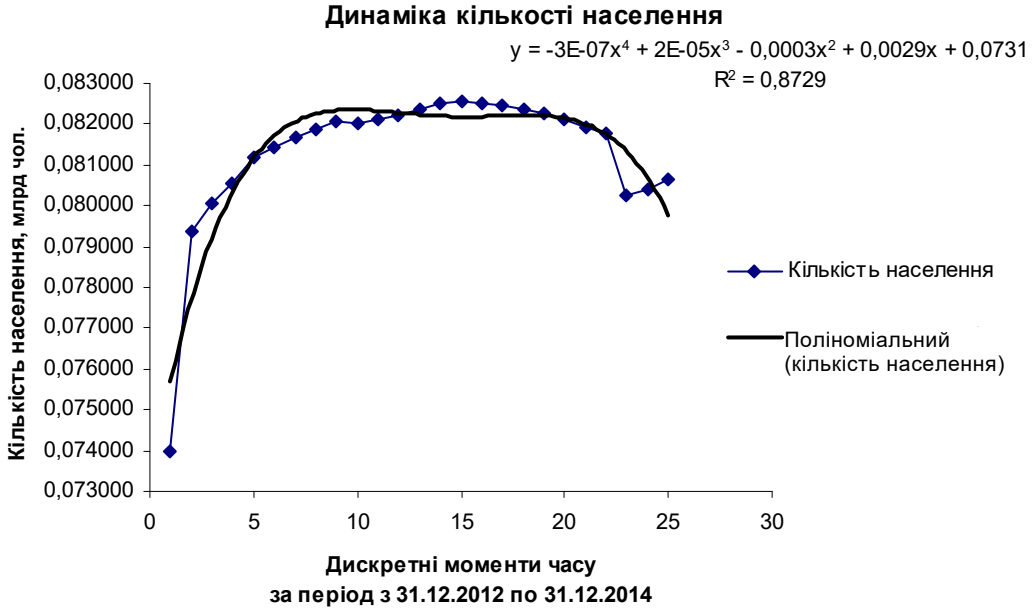
За допомогою поліноміального тренду 2-го степеня апроксимуємо статистичну ламану кількості населення поліномом 2-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}7352$.



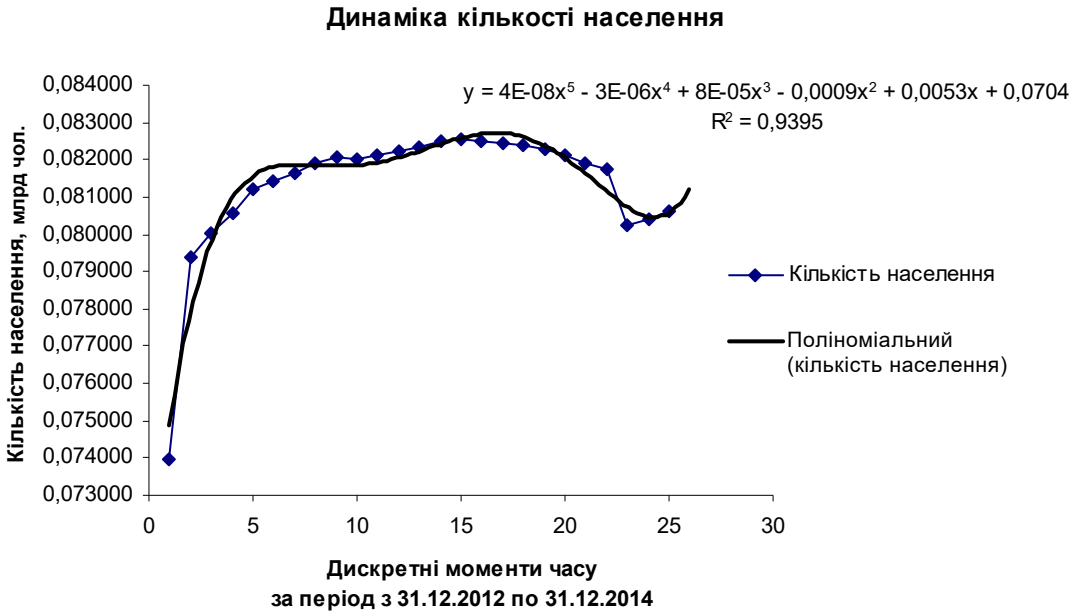
За допомогою поліноміального тренду 3-го степеня апроксимуємо статистичну ламану кількості населення поліномом 3-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}7958$.



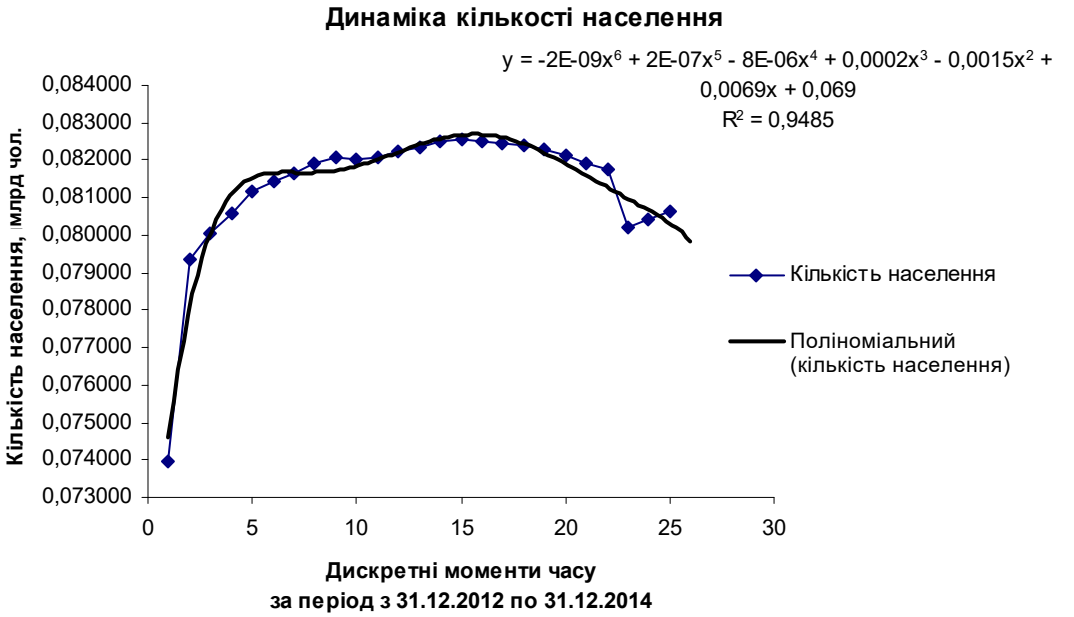
За допомогою поліноміального тренду 4-го степеня апроксимуємо статистичну ламану кількості населення поліномом 4-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}8729$.



За допомогою поліноміального тренду 5-го степеня апроксимуємо статистичну ламану кількості населення поліномом 5-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}9395$.



За допомогою поліноміального тренду 6-го степеня апроксимуємо статистичну ламану кількості населення поліномом 6-го степеня і визначаємо коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}9485$.



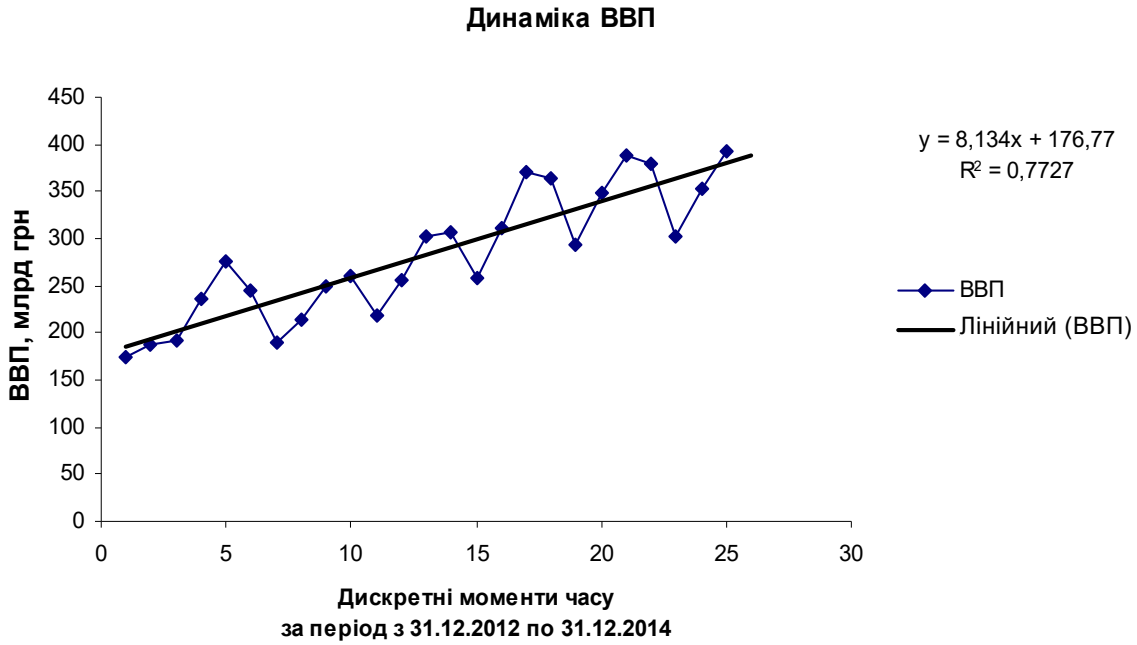
Проаналізувавши статистичні дані, робимо висновок, що величина достовірності апроксимації найбільша для поліноміального тренду 6-го степеня і становить $R^2 = 0{,}9485$ та досить висока для поліноміального тренду 5-го степеня і становить

$R^2 = 0{,}9395$. Таким чином, можна стверджувати, що кількість населення змінюється у часі як поліномом 5-го степеня, а прогнозне значення кількості населення у наступному місяці приблизно становить $X2pr = 0{,}082787$ млрд чол.

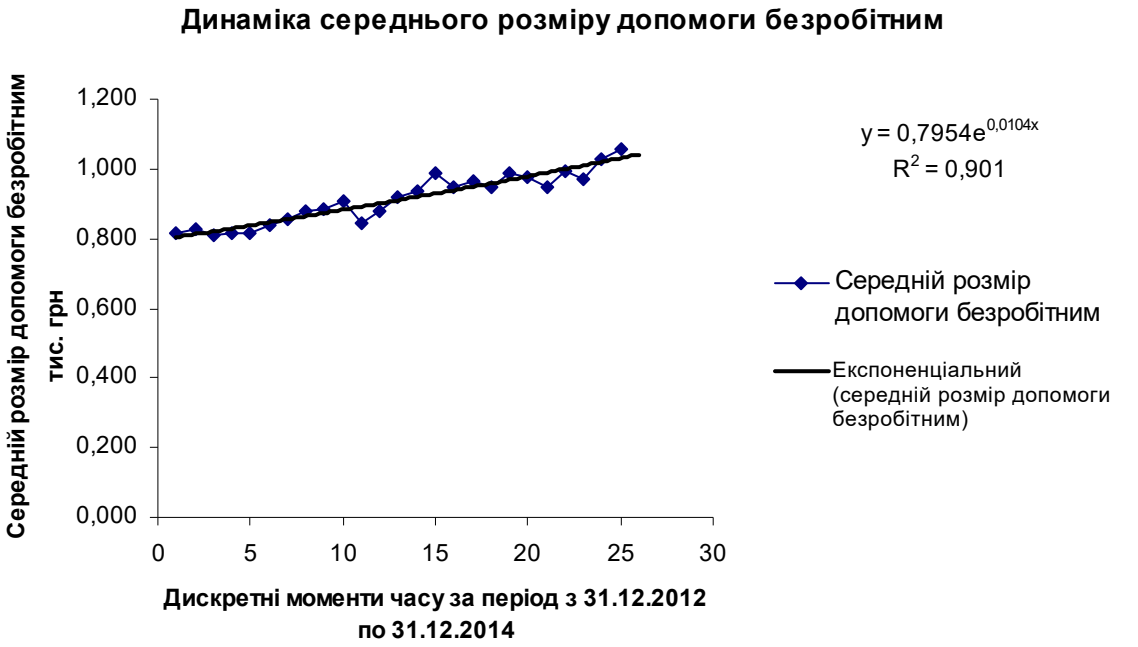
Аналогічно за допомогою графічних засобів Excel дослідимо динаміку валового внутрішнього продукту (X_3), середнього розміру допомоги безробітним (X_4), кредитів Національного банку (X_5), кінцевих споживчих витрат (X_6) та заборгованості за позиками, наданими іноземними комерційними банками (X_7).

У результаті, за величиною коефіцієнта детермінації та, враховуючи економічну інтерпретацію досліджуваних показників, зробимо наступні висновки.

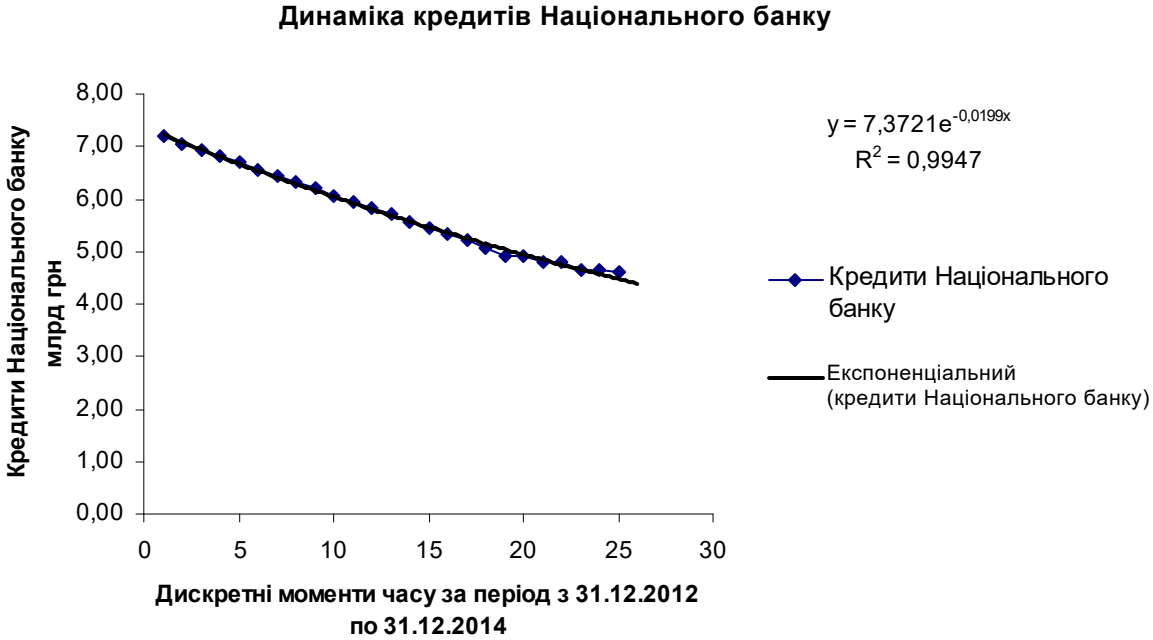
Валовий внутрішній продукт змінюється у часі як лінійна функція з $R^2 = 0{,}7727$, а прогнозоване значення ВВП у наступному місяці приблизно становить $X3_{pr} = 388{,}254$ млрд грн.



Середній розмір допомоги безробітним змінюється у часі як експоненціальна функція з $R^2 = 0{,}901$, а прогнозоване значення середнього розміру допомоги безробітним у наступному місяці приблизно становить $X4_{pr} = 1{,}042$ тис. грн.



Кредити Національного банку змінюються у часі як експоненціальна функція з $R^2 = 0{,}9947$, а прогнозоване значення кредитів Національного банку у наступному місяці приблизно становить $X5_{pr} = 4{,}383$ млрд грн.



Кінцеві споживчі витрати змінюються у часі як лінійна функція з $R^2 = 0{,}9234$, а прогнозоване значення кінцевих споживчих витрат у наступному місяці приблизно становить $X6_{pr} = 354{,}27$ млрд грн.

Заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками змінюються у часі як експоненціальна функція з $R^2 = 0{,}8366$, а її прогнозоване значення у наступному місяці приблизно становить $X7_{pr} = 953{,}87$ тис. грн.



Таким чином, вектор прогнозних значень факторів має вигляд $X_{pr}' = (1;\ 388{,}0164;\ 0{,}082787;\ 388{,}254;\ 1{,}042;\ 4{,}383;\ 354{,}27;\ 953{,}87)$.

Наступна задача полягає у дослідженні окремого впливу доходів населення, кількості населення, валового внутрішнього продукту, середнього розміру допомоги безробітним, кредитів Національного банку, кінцевих споживчих витрат та заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками на обсяги державного боргу (побудова парних регресій). Задачу буде розглянуто в п. 2.5.

2.4. Загальне поняття про лінійну регресію, МНК-оцінки її параметрів

Однією з найпростіших моделей є модель парної регресії. Хоча у чистому вигляді парна залежність лише двох показників зустрічається рідко, однак використання цієї моделі дає змогу зрозуміти сутність багатьох процесів і дослідити їх.

Зауваження. Парну модель застосовують у тому випадку, коли з усіх факторів, які впливають на результат, можна виділити один такий, що має найсуттєвіший вплив (факторна змінна).

Якщо точки спостережень гуртуються навколо деякої прямої лінії, то залежність між змінними можна описати лінійним рівнянням

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u,$$

де β_o, β_1 – параметри регресії, які потрібно оцінити;

u – випадкова складова.

Якщо прямої лінії не існує, то відповідну форму залежності потрібно шукати серед нелінійних функцій. Найчастіше використовують такі нелінійні функції:

- гіперболічна: $Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X}$;
- степенева: $Y = \beta_0 X^{\beta_1}$;
- логарифмічна: $Y = \beta_0 + \beta_1 \log X$;
- поліноміальна: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + ... + \beta_k X^k$.

Зауваження. Перелічені залежності нескладними перетвореннями можуть бути зведені до лінійного відносно структурних параметрів моделі вигляду.

У всіх інших випадках заміна змінних дає змогу отримати лінійну функцію не лише за структурними параметрами моделі, але й за змінними.

Зауваження. Для оцінювання параметрів парної лінійної моделі застосовується метод найменших квадратів (МНК) Гауса.

Ідея методу найменших квадратів полягає в тому, щоб підібрати такі значення параметрів моделі, при яких сума квадратів відхилень між заданими y_i і розрахунковими $\hat{y}_i$ значеннями результативної змінної буде найменшою, тобто

$$u = \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \to \min$$

МНК-оцінки параметрів парної лінійної моделі:

$$b_1 = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}; \quad b_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2};$$

або

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x}; \quad b_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}.$$

де:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2$$

$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i$ – середні арифметичні значення;

$S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$; $S_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$ – вибіркові дисперсії.

Зауваження (інтерпретація МНК-оцінок параметрів):

Оцінка b_0 є відрізком, який регресійна пряма відсікає на осі ординат.

Оцінка b_1 є тангенсом кута нахилу регресійної прямої до осі абсцис.

Властивості простої лінійної регресії

1. Регресійна пряма $y = b_0 + ab_1x$ проходить через середню точку $(\bar{x}, \bar{y})$.

2. Залишки моделі $u_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = \overline{1,n.}$ не корелюють зі спостереженими значеннями фактора та оціненими значеннями показника: $K(u,x) = 0$; $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$.

3. Сума квадратів залишків є функцією від кута нахилу.

4. Оцінки параметрів моделі $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ мають такі властивості: незміщеність; спроможність (обґрунтованість); ефективність; інваріантність.

2.5. Парна лінійна регресійна модель: побудова та дослідження

Спочатку за величиною коефіцієнта кореляції визначимо чинники, які найтісніше пов'язані з державним боргом. Такими чинниками є доходи населення з $R = 0{,}87$; валовий внутрішній продукт з $R = 0{,}83$; середній розмір допомоги безробітним з $R = 0{,}83$*;* кредити Національного банку з $R = -0{,}89$*;* кінцеві споживчі витрати з $R = 0{,}95$ та заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками з $R = 0{,}96$. У цьому розділі будемо вивчати залежність обсягу державного боргу від кінцевих споживчих витрати. Перейдемо до етапу ідентифікації та специфікації моделі.

Специфікація моделі – це її аналітична форма. Вона складається з певного виду функції чи функцій і також має ймовірнісні характеристики, які притаманні стохастичним залишкам моделі. З наведеного у розд. 1 алгоритму побудови та дослідження регресійної моделі випливає, що можна кілька разів повертатися до етапу специфікації моделі, уточнюючи перелік незалежних змінних та вид функції, що застосовується.

Припустімо, що між державним боргом і кінцевими споживчими витратами існує лінійний зв'язок.

Запишемо рівняння регресії у вигляді

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u, \quad (2.1)$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x, \quad (2.2)$$

де $y, \hat{y}$ – відповідно фактичні та розрахункові значення державного боргу; x – кінцеві споживчі витрати; β_0, β_1 та b_0, b_1 – параметри моделі, які потрібно оцінити та їх оцінки; u – стохастична складова.

Побудову та дослідження регресійної моделі (2.1) проведемо згідно з відповідним покроковим алгоритмом (дод. 2).

1-й крок.

Побудуємо діаграму розсіяння за експериментальними даними та вважатимемо, що модель має лінійний вигляд (1):

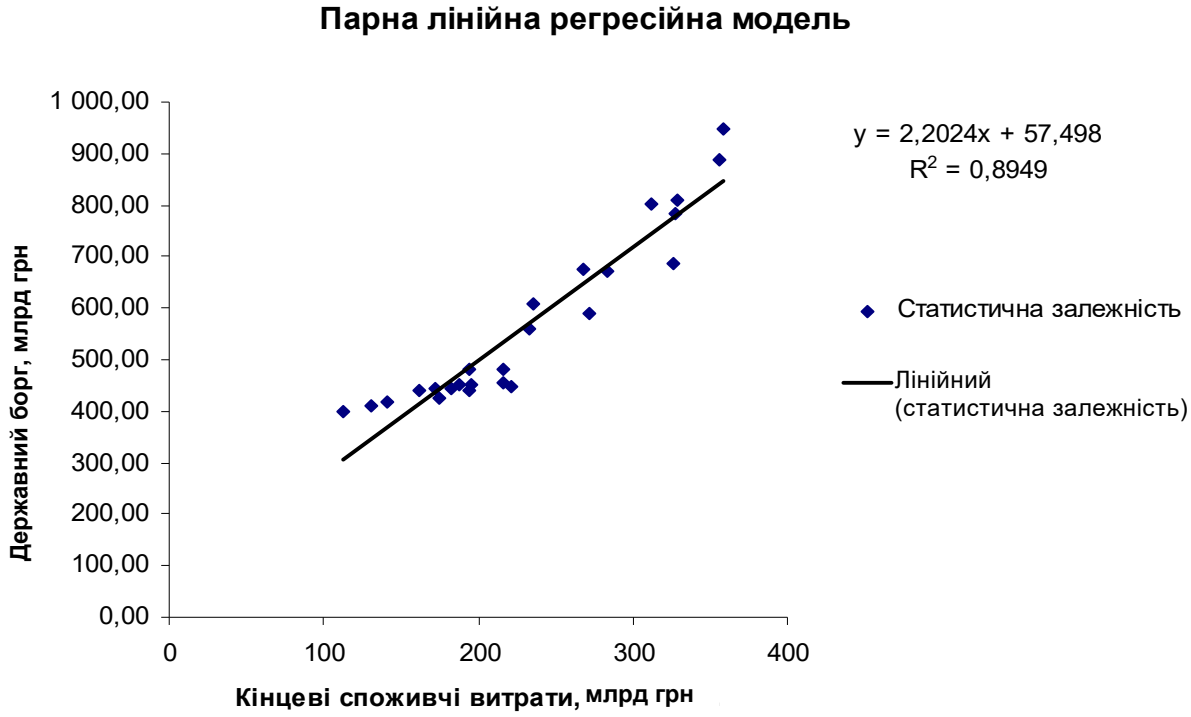


Рис. 1. Діаграма розсіяння державного боргу

2-й крок.

2.1) визначимо параметри моделі методом найменших квадратів (МНК) (МНК дозволяє знайти такі значення вихідних параметрів моделі, при яких

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \to \min,$$

де u_i – збурювальна змінна, $u_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1,n.}$) за формулами

$$b_1 = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2},$$

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

Визначимо МНК-оцінки параметрів моделі (1):

$$b_0 = 57{,}498; \qquad b_1 = 2{,}2024;$$

Зауваження: у середовищі пакета Exel МНК-оцінки параметрів можуть бути обчислені за допомогою вбудованих функцій ОТРЕЗОК (оцінка b_0) та НАКЛОН (оцінка b_1) або за допомогою вбудованої функції ЛИНЕЙН (оцінка b_0 та оцінка b_1).

2.2) обчислимо значення $\hat{y}_i$ для кожного значення x_i;

$$\hat{y}_i = \begin{pmatrix} 305{,}2498 \\ 344{,}3438 \\ 367{,}887 \\ 442{,}7055 \\ 413{,}3217 \\ 458{,}666 \\ 485{,}3322 \\ 544{,}0449 \\ 437{,}2415 \\ 471{,}6313 \\ 489{,}3229 \\ 533{,}8347 \\ 485{,}8806 \\ 533{,}2665 \\ 569{,}3191 \\ 654{,}9864 \\ 576{,}3116 \\ 646{,}3444 \\ 681{,}2253 \\ 777{,}3517 \\ 778{,}3075 \\ 744{,}3053 \\ 780{,}2522 \\ 842{,}874 \\ 847{,}1841 \end{pmatrix}$$

2.3) побудуємо графік регресійної функції $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.
У нашому випадку це пряма $\hat{y} = 57{,}498 + 2{,}2024x$ (рис. 1).

3-й крок.

3.1) обчислимо відносну похибку розрахункових значень регресії за формулою

$$\delta_i = \frac{\hat{u}_i}{y_i} \cdot 100\%,$$

$$\delta_i = \begin{pmatrix} 23{,}54\% \\ 16{,}21\% \\ 12{,}23\% \\ -3{,}83\% \\ 6{,}30\% \\ -3{,}67\% \\ -10{,}49\% \\ -21{,}68\% \\ 1{,}75\% \\ -4{,}59\% \\ -8{,}61\% \\ -17{,}69\% \\ -1{,}18\% \\ -11{,}06\% \\ -1{,}85\% \\ -10{,}97\% \\ 5{,}36\% \\ 4{,}37\% \\ -1{,}36\% \\ -13{,}17\% \\ 0{,}66\% \\ 7{,}36\% \\ 3{,}64\% \\ 5{,}15\% \\ 10{,}52\% \end{pmatrix}$$

та середнє значення відносної похибки, як

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n},$$

$\overline{\delta}$ = -0,52%;

3.2) обчислимо залишкову дисперсію за формулою

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-2}},$$

$S = 55{,}53595$ (S – стандартна помилка, і чим вона менша, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним), $m = 1$;

3.3) (перевірка тісноти загального впливу незалежної змінної на залежну змінну): обчислимо коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2},$$

$R^2 = 0{,}894908$.

Висновок: коефіцієнт детермінації досить великий, отже варіація кінцевих споживчих витрат визначає 89% варіації державного боргу (існує тісний лінійний зв'язок між залежною та незалежною змінними);

3.4) обчислимо F-статистику за формулою

$$F = \frac{(n-2)R^2}{1-R^2},$$

$F = 195{,}8551$;

3.5) обчислене значення F-критерію порівняємо з табличним (дод. 5) $F_{\text{табл.}}(k_1,k_2,\alpha)$, при степенях вільності $k_1 = 1$ і $k_2 = n - 2 = 23$ і вибраному рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ (рівень помилки), або $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ (рівень довіри): $F_{\text{табл.}}(1;23;0{,}05) = 4{,}279344$, оскільки $F > F_{\text{табл.}}(1;14;0{,}05)$, то гіпотезу H_0: $b_1 = 0$ про істотність зв'язку між залежною і незалежною змінною моделі приймаємо з ризиком $\alpha = 0{,}05$, тобто модель адекватна статистичним даним (коефіцієнт b_1 –значущий).

Перевірку на значущість коефіцієнтів регресії можна здійснити також і за t-тестом;

3.6) обчислимо t-статистику за формулою

$$t_i = \frac{b_i}{\sigma_{b_i}} \ (i = 0,1),$$

де $\sigma_{b_0} = S \cdot \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$, $\sigma_{b_1} = S \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$;

$\sigma_{b_0} = 57{,}49766;$ $\sigma_{b_1} = 2{,}202358;$

$t_0 = 1{,}50667;$ $t_1 = 13{,}99483;$

3.7) за таблицями t-статистики (дод. 21) знаходимо критичне значення $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0,025;23} = 2{,}397875$ і порівнюємо його з обчисленою t-статистикою: оскільки $|t_0| < t_{0,025;23}$, то коефіцієнт b_0 незначущий, тобто гіпотезу H_0: $b_0 = 0$ приймаємо; так як $|t_1| > t_{0,025;23}$, то коефіцієнт b_1 значущий, тобто гіпотезу H_0: $b_1 = 0$ відхиляємо.

4-й крок (перевірка на значущість вибіркового коефіцієнта кореляції r_{yx}):

4.1) обчислимо $R = r_{y,\hat{y}} = \sqrt{R^2}$ – коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку незалежної змінної x із залежною змінною y): R = 0,9459955;

4.2) обчислимо t-статистику за формулою

$$t = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

t = 13,994825;

4.3) порівняємо t-статистику з $t_{\text{табл.}(\alpha/2,n-2)} = t_{(0,025;23)} =$ = 2,397875: оскільки $|t| > t_{\text{табл.}(\alpha/2,n-2)}$, то робимо висновок, що коефіцієнт кореляції є значущим;

4.4) для вибраного рівня значущості $\alpha = 0,05$ і відповідного степеня вільності $k = n - 2 = 23$ запишемо межі надійності для R:

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R),$$

де ΔR обчислимо за формулою

$$\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}},$$

ΔR = 0,025899;

отже $(R - \Delta R;\ R + \Delta R)$ = (0,920096; 0,9718947).

5-й крок.

5.1) обчислимо коефіцієнт еластичності витрат на одиницю продукції залежно від витрат на рекламу, скориставшись формулою

$$\delta_1 = b_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \text{ де } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};$$

α_1 = 0,898851 (коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни частки ***x*** на ***y*** у припущенні, що вплив інших факторів відсутній: тобто можна стверджувати, що *при збільшенні кінцевих споживчих витрат на 1%, обсяг державного боргу збільшиться на 0,89%*).

2.6. Обчислення зон надійності, побудова довірчих інтервалів для коефіцієнтів регресії, точковий та інтервальний прогнози

6-й крок (знайдемо надійні інтервали для регресії):

6.1) знайдемо коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha/2,k}$, де $\alpha = 1 - p$ = = 0,05; $k = n - 2$ =23; $t_{(0,025;23)}$= 2,397875;

6.2) обчислимо дисперсію

$$\sigma^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n};$$

$\sigma^2(x)$= 4981,583403;

6.3) обчислимо:

$$\Delta\hat{y}_i = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2(x)}};$$

$$\Delta\hat{y}_i = \begin{pmatrix} 52{,}37397 \\ 48{,}82021 \\ 26{,}76076 \\ 26{,}68188 \\ 26{,}70421 \\ 26{,}66762 \\ 26{,}65232 \\ 26{,}63519 \\ 26{,}67605 \\ 26{,}65566 \\ 26{,}64762 \\ 26{,}63618 \\ 26{,}64724 \\ 26{,}63598 \\ 26{,}63365 \\ 26{,}64592 \\ 26{,}63375 \\ 26{,}64213 \\ 26{,}64988 \\ 26{,}68399 \\ 26{,}67901 \\ 26{,}66172 \\ 26{,}66902 \\ 26{,}68423 \\ 26{,}6773 \end{pmatrix}$$

6.4) з'єднаємо неперервною лінією на графіку всі значення $(\hat{y}_i - \Delta\hat{y}_i)$ і $(\hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i)$. Отримаємо зону надійності:

$$\left(\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2(x)}}; \hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2(x)}} \right).$$

$$(\hat{y}_i - \Delta\hat{y}_i) = \begin{pmatrix} 357,6237 \\ 393,164 \\ 394,6478 \\ 469,3874 \\ 440,0259 \\ 485,3337 \\ 511,9845 \\ 570,68 \\ 463,9175 \\ 498,287 \\ 515,9705 \\ 560,4709 \\ 512,5278 \\ 559,9025 \\ 595,9528 \\ 681,6324 \\ 602,9454 \\ 672,9865 \\ 707,8752 \\ 804,0357 \\ 804,9865 \\ 770,967 \\ 806,9212 \\ 869,5583 \\ 873,8614 \end{pmatrix} \quad (\hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i) = \begin{pmatrix} 252,8758 \\ 295,5236 \\ 341,1263 \\ 416,0237 \\ 386,6175 \\ 431,9984 \\ 458,6799 \\ 517,4097 \\ 410,5654 \\ 444,9757 \\ 462,6752 \\ 507,1985 \\ 459,2333 \\ 506,6305 \\ 542,6855 \\ 628,3405 \\ 549,6779 \\ 619,7023 \\ 654,5755 \\ 750,6677 \\ 751,6285 \\ 717,6436 \\ 753,5832 \\ 816,1898 \\ 820,5068 \end{pmatrix}$$

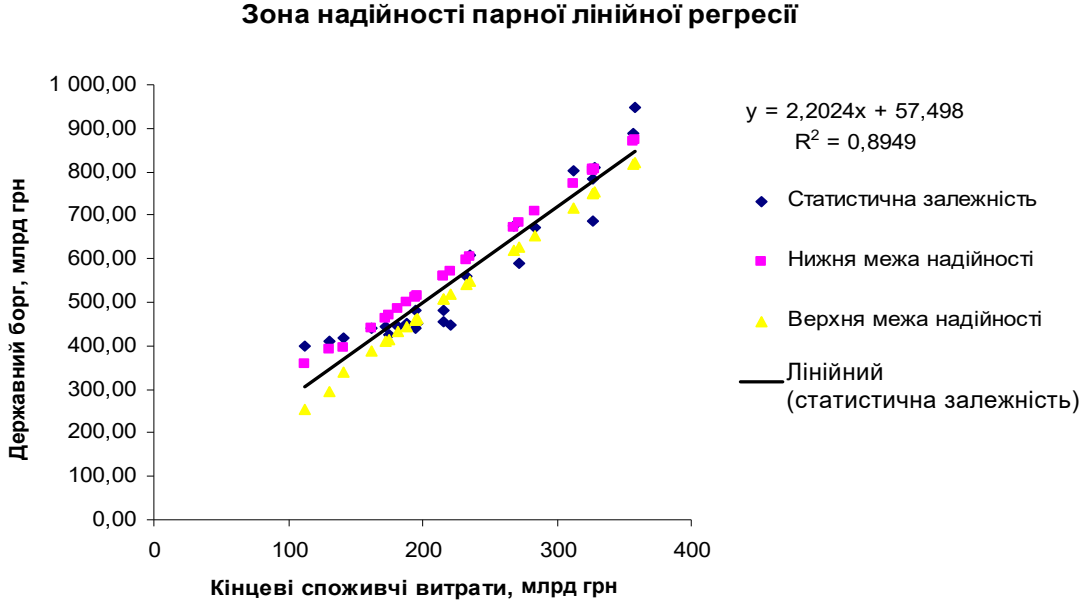


Рис. 4. Надійні інтервали обсягів державного боргу

7-й крок (перевірка на значущість і побудова інтервалів довіри для параметрів регресії b_0, b_1):

7.1) обчислимо стандартизовану помилку S_{b_j} – оцінки параметра b_j регресійної моделі (j = 0,1) за формулою

$$S_{b_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{b_j}} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}},$$

де $\sigma_u = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$, $c_{00} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$, $c_{11} = \sqrt{\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$;

σ_u = 55,53595; S_{b_0} = 38,16207; S_{b_1} = 0,157369;

7.2) обчислимо відношення

$$X_1, X_2, ..., X_m;$$

$$\delta_{b_0} = 66{,}37\%; \quad \delta_{b_1} = 7{,}15\%.$$

Наведене відношення характеризує відсоток стандартної помилки оцінки параметра від абсолютного значення цієї оцінки, що свідчить про незміщеність даної оцінки, якщо відношення досить мале і, відповідно про зміщеність даної оцінки, якщо відношення велике.

У нашому випадку *стандартна помилка параметра b_0 становить 66% абсолютного значення даної оцінки параметра моделі, а стандартна помилка параметра b_1 становить 7% абсолютного значення даної оцінки параметра моделі. Це означає, що оцінка параметра b_0 зміщена, а оцінка параметра b_1 незміщена.*

7.3) обчислимо інтервал довіри для параметра регресії b_1:

$$\left(b_1 - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}; b_1 + t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} \right),$$

(1,825006;2,579711);

7.4) обчислимо інтервал довіри для параметра регресії b_0:

$$\left(b_0 - t_{\alpha/2,k} s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}; \right) b_0 + t_{\alpha/2,k} s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}},$$

(-34,0102; 149,0055).

8-й крок (обчислення прогнозних значень і знаходження меж надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і меж надійних інтервалів для математичного сподівання – точковий та інтервальний прогнози):

8.1) для обчислення прогнозного значення обсягу державного боргу y_{pi} у рівняння $\hat{y} = 57,498 + 2,2024 \cdot x$ підставимо спрогнозоване за моделлю динаміки значення кінцевих споживчих витрат $x_{pi} = 354,27$, яке лежить за межами базового періоду (точковий прогноз):

$$y_{pi} = 837,73;$$

8.2) знайдемо межі надійного інтервалу індивідуального прогнозного значення y_{pi} за формулою ($k = n - 2 = 23$ – степінь вільності, $\alpha = 0{,}05$ – вибраний рівень значущості):

$$\Delta\hat{y}_{pi} = t_{\alpha/2,k} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pi} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}},,$$

$\Delta y_{pi} = 143{,}429;$

8.3) запишемо межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень:

$$\left(\hat{y}_{pi} - \Delta\hat{y}_{pi}; \hat{y}_{pi} + \Delta\hat{y}_{pi}\right) = \left(694{,}30; 981{,}16\right);$$

8.4) знайдемо межі надійних інтервалів для математичного сподівання значення $M(y_{pi})$ ($k = n - 2 = 23$ – степінь вільності). Для цього обчислимо:

$$\Delta M\left(\hat{y}_{pi}\right) = t_{\alpha/2,k} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pi} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} = 53{,}27384;$$

8.5) запишимо межі надійних інтервалів для математичного сподівання

$$\left(\hat{y}_{pi} - \Delta M\left(\hat{y}_{pi}\right); \hat{y}_{pi} + \Delta M\left(\hat{y}_{pi}\right)\right) = \left(784{,}45; 891{,}00\right).$$

Отже, прогнозоване значення обсягу державного боргу у січні 2015 року становитиме приблизно 837,73 млрд грн, а дійсне значення буде знаходитися в межах від 694,3 млрд грн до 981,16 млрд грн, в середньому потраплятиме у більш

вузький інтервал від 784,45 до 891,00 млрд грн з ризиком помилитись у 5% випадків**.**

9-й крок.

9.1) обчислимо збурювальну змінну як:

$$u_i = y_i - \hat{y}_i, i = 1,2,\ldots,25$$

$$u_i = \begin{pmatrix} 93,96 \\ 66,63 \\ 51,28 \\ -16,32 \\ 27,81 \\ -16,26 \\ -46,09 \\ -96,94 \\ 7,80 \\ -20,68 \\ -38,78 \\ -80,25 \\ -5,67 \\ -53,10 \\ -10,36 \\ -64,77 \\ 32,65 \\ 29,54 \\ -9,12 \\ -90,49 \\ 5,13 \\ 59,17 \\ 29,46 \\ 45,78 \\ 99,63 \end{pmatrix}$$

9.2) обчислимо *d*-статистику за формулою

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}\left(u_i - u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2},$$

d = 1,17655;

9.3) знайдемо критичні значення *d*-статистики (**критерій Дарбіна–Уотсона** – дод. 23) d_0 = 1,29 і d_u = 1,45;

9.4) зробимо висновок про автокореляцію:

оскільки $0 < d < 4 - d_0$ – відхилення від'ємно автокорельовані.

Побудова і дослідження парної лінійної регресійної моделі залежності державного боргу від кінцевих споживчих витрат є лише попереднім дослідженням, проведеним з метою відпрацювання методів регресійного аналізу у найпростішому випадку. Звісно обсяг державного боргу змінюється під одночасним впливом усіх зазначених вище факторів. Тому наступним кроком дослідження є вивчення загального впливу доходів населення, кількості населення, валового внутрішнього продукту, середнього розміру допомоги безробітним, кредитів Національного банку, кінцевих споживчих витрат та заборгованості за позиками, наданими іноземними комерційними банками на обсяги державного боргу (побудова класичної багатофакторної регресійної моделі).

Питання для самоперевірки

1. Що таке парна регресія?
2. Які види нелінійних функцій найчастіше застосовують в економетричних дослідженнях? Як їх перетворити до лінійного вигляду?
3. У чому суть методу найменших квадратів (МНК)?
4. Наведіть формули розрахунку коефіцієнтів рівняння парної лінійної регресії за МНК.
5. Як пов'язані коефіцієнти лінійної регресії з вибірковим коефіцієнтом кореляції між змінними рівняння регресії?
6. Які висновки можна зробити про МНК-оцінки коефіцієнтів регресії і випадкового відхилення?
7. Інтерпретуйте коефіцієнти емпіричного парного лінійного рівняння регресії.
8. Назвіть показники якості моделі, за якими вибираються кращі моделі.
9. Від чого залежить якість прогнозу за лінійною моделлю?

Розділ 3

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

3.1. Множинна регресійна модель. Основні припущення

У багатьох дослідженнях виявляється, що деяка результативна ознака змінюється під дією не одного, а декількох факторів. Зокрема, при аналізі економічної діяльності підприємства та прогнозуванні його розвитку досліджують такі функції.

1. Виробничу функцію, що визначає залежність між обсягом виробленої продукції та витраченими для цього ресурсами, наприклад, основним капіталом та працею.
2. Функцію ціни, що дозволяє дослідити, як зміниться ціна товару, якщо зміниться обсяг поставок та ціни конкуруючих товарів.
3. Функцію попиту, що дозволяє встановити, як зміниться попит на продукцію, якщо будуть змінюватися ціна самого товару, ціни товарів-конкурентів та доходи споживачів.
4. Функцію витрат, яка описує залежність середніх витрат на виробництві від ціни та кількості виробничих ресурсів.
5. Функцію чутливості ринку, яка визначає залежність обсягу збуту продукції від витрат на рекламу та індексу «чистоти» виробленої продукції («екологічного індикатора»).
6. Рівняння стратегії підприємства, в якому відображається як залежить рентабельність підприємства від частки на ринку товарів, подібних до тих, що виробляє підприємство, а також від якості товарів, витрат на маркетинг та наукові дослідження, від інвестиційних витрат тощо.

У процесі побудови багатофакторної регресійної моделі потрібно розв’язувати проблему не лише вибору форми залежності між змінними, але й відбору факторів, що мають увійти до моделі.

Фактори мають бути кількісно виміряними. Якщо до моделі потрібно включити якісний фактор, який не має кількісної міри, то йому потрібно надати кількісної визначеності (наприклад, задати якість у вигляді балів, проранжувати дані або визначати наявність чи відсутність якісної ознаки за допомогою бінарних змінних, тобто змінних, що набувають двох значень: 0 і 1).

Відбираючи фактори, що здійснюють вплив на показник, необхідно врахувати такі **властивості**:

- висока варіабельність;
- сильна корельованість з результативною змінною;
- слабка корельованість між собою;
- сильна корельованість зі змінними, які не використовуються у моделі як пояснювальні змінні, але пов'язані з показником.

Процедура вибору факторних (незалежних) змінних складається з кроків:

- на підставі накопичених знань складається множина так званих потенційних пояснювальних змінних (первісних змінних), до якої включаються всі найважливіші показники, що впливають на результативну змінну. Позначимо їх $X_1, X_2, ..., X_m$;
- збирається статистична інформація про реалізацію результативної і факторних змінних. Формується вектор спостережень залежної змінної Y і матриця спостережень незалежних змінних $X_1, X_2, ..., X_m$;
- змінні, що мають низький рівень варіабельності (змінюваності), виключаються з розгляду як такі, що несуть мінімальну інформацію;
- обчислюються коефіцієнти кореляції між усіма змінними, що розглядаються.

Аналітична форма класичної лінійної багатофакторної моделі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m + u,$$

де $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ – параметри моделі, які підлягають оцінюванню.

Матрична форма класичної лінійної багатофакторної моделі:

$$Y = XB + u,$$

де Y – вектор спостережень за показником моделі розмірності $(n \times 1)$;

X – матриця спостережень за факторами моделі, доповнена стовпчиком одиниць розмірності $(n \times (m+1))$;

u – вектор стохастичної складової моделі розмірності $(n \times 1)$.

Основні припущення методу найменших квадратів

1) кожне значення випадкової складової $u_i, i = 1, 2, ..., n$ повинно бути випадковою величиною і математичне сподівання залишків u_i повинно дорівнювати нулю:

$$M(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = 0;$$

2) компоненти вектора залишків некорельовані (лінійно незалежні) між собою;

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0;$$

3) компоненти вектора залишків мають сталу дисперсію (гомоскедастичність залишків);

$$\sigma^2(u_i) = 0;$$

4) матриця $\boldsymbol{X}$ розмірності $(n \times (m+1))$ не стохастична.

Наслідок. Кореляційний момент між компонентами вектора стохастичної складової та кожним фактором моделі дорівнює нулю:

$$K(u_i, x_j) = 0;$$

5) відсутність мультиколінеарності між факторами моделі.

Наслідок. За умови існування лінійного зв'язку між незалежними змінними моделі, неможливо знайти (точно оцінити) окремий вплив кожної з них на показник.

Наслідок. У матричній формі відсутність мультиколінеарності означає, що стовпці матриці X лінійно незалежні;

6) вектор стохастичної складової u має нормальний закон розподілу:

$$u \approx N(0, \sigma^2 I).$$

Зауваження. Це припущення забезпечує нормальний розподіл коефіцієнтів регресії та дозволяє використовувати відомі критерії для перевірки статистичних гіпотез відносно отриманих оцінок, а також визначати довірчі інтервали.

Вектор МНК-оцінок параметрів множинної лінійної моделі:

$$\beta = (X^T X)^{-1}(X^T y).$$

Властивості загальної лінійної регресії та МНК-оцінок її параметрів

Властивість 1. Багатофакторна регресійна модель правильна для середніх точок (точка з координатами $(\overline{y}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m)$ належить регресійній площині, отже $\beta_0 = \overline{y} - \beta_1 \overline{x}_1 - \beta_2 \overline{x}_2 - ... - \beta_m \overline{x}_m$.

Властивість 2. Середнє значення оцінки показника дорівнює середньому значенню його фактичних даних $\overline{\hat{y}} = \overline{y}$.

Властивість 3. Сума помилок дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

Властивість 4. Помилки u_i некорельовані з факторами моделі $x_{1i}, x_{2i}, ...x_{mi}$, тобто $\sum_{i=1}^{n} u_i x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} u_i x_{2i} = ... = \sum_{i=1}^{n} u_i x_{mi} = 0$.

Властивість 5. Помилки u_i некорельовані з оціненим значенням показника $\hat{y}_i$, тобто $\sum_{i=1}^{n} u_i \hat{y}_i = 0$.

Властивість 6. Якщо виконуються зазначені раніше передумови методу найменших квадратів, то МНК-оцінки параметрів класичної лінійної багатофакторної моделі мають такі властивості: незміщеність; спроможність (обґрунтованість); ефективність; інваріантність.

Дисперсійно-коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі

Означення. Дисперсійно-коваріаційною матрицею оцінок параметрів моделі називається матриця, діагональні елементи якої задаються дисперсіями оцінок параметрів, а всі інші – коваріаціями оцінок параметрів.

$$\text{var} - \text{cov}(\beta) = M((\beta - M(\beta)(\beta - M(\beta)^T) =$$

$$= \begin{bmatrix} D(\beta_0) & \text{cov}(\beta_0, \beta_1) & ... & \text{cov}(\beta_0, \beta_m) \\ \text{cov}(\beta_1, \beta_0) & D(\beta_1) & ... & \text{cov}(\beta_1, \beta_m) \\ ... & ... & ... & ... \\ \text{cov}(\beta_m, \beta_0) & \text{cov}(\beta_m, \beta_1) & ... & D(\beta_m) \end{bmatrix}.$$

Зауваження. Дисперсійно-коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі може бути оцінена як

$$\text{var} - \text{cov}(\beta) = \sigma^2 (X^T X)^{-1},$$

де $\sigma^2 = D(u)$

Висновки

1. Множинна регресія є однією з найпоширеніших моделей в економетриці. Головна мета її застосування – побудова моделі з великою кількістю факторів і визначення впливу кожного з них окремо, а також їх спільного впливу на результативну змінну.

2. Фактори, що вводяться до моделі, мають бути кількісно виміряними і щільно пов'язаними з результатом.

3. Параметри рівняння множинної регресії оцінюють за допомогою методу найменших квадратів. Кожен з параметрів показує, на скільки зміниться значення результативної змінної, якщо відповідний фактор зміниться на одиницю, за умови, що всі інші фактори змінюватися не будуть.

Продовжимо дослідження зміни обсягів державного боргу України від основних чинників, що впливають на нього та були визначені в п. 2.2.

Припустімо, що між економічним показником *Y* (обсяги державного боргу) та факторами *X*1, *X*2, *X*3, *X*4, *X*5, *X*6, *X*7 існує лінійний зв'язок.

Запишемо рівняння регресії у вигляді

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_7 x_7 + u, \qquad (3.1)$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + b_7 x_7, \qquad (3.2)$$

де $y, \hat{y}$ – відповідно фактичні та розрахункові значення державного боргу;

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ – відповідно доходи населення, кількість населення, валовий внутрішній продукт, середній розмір допомоги безробітним, кредити Національного банку, кінцеві споживчі витрати та заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками;

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ та $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ – параметри моделі, які потрібно оцінити та їх оцінки;

u – стохастична складова.

3.2. Перевірка факторів моделі на мультиколінеарність

В економетричних дослідженнях дуже важливо з'ясувати, чи існують між факторами моделі взаємозв'язки, які називають мультиколінеарністю.

Мультиколінеарність означає існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції між двома або більше пояснювальними змінними (факторами) моделі.

Від наявності чи, навпаки, відсутності мультиколінеарності залежить необхідність перетворення чи уточнення переліку пояснювальних змінних, специфікація моделі та, нарешті, вибір методу оцінки параметрів моделі.

Перевіримо модель на мультиколінеарність за допомогою алгоритму Феррара-Глоубера (дод. 4).

1-й крок:

нормалізуємо незалежні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 моделі, для чого обчислимо:

$$x_{ij}^{*} = \frac{(x_{ij} - \overline{x}_j)}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

де $n = 25$ – число спостережень, $(i = 1,2,...,n)$;

$m = 7$ – число незалежних змінних, $(j = 1, m)$;

$\overline{x}_j$ – середня арифметична j-ї незалежної змінної:

$\overline{x}_1 = 275,8968$; $\overline{x}_2 = 0,0813023$; $\overline{x}_3 = 282,5132$;

$\overline{x}_4 = 0,91296$; $\overline{x}_5 = 5,748007$; $\overline{x}_6 = 232,0013$;

$\overline{x}_7 = 675,7484$;

σ_{xj}^2 – дисперсія j-ї незалежної змінної:

$\sigma_{x1}^2 = 4742,45799$; $\sigma_{x2}^2 = 0,0000030039$; $\sigma_{x3}^2 = 4452,409$;

$\sigma_{x4}^2 = 0,005167$; $\sigma_{x5}^2 = 0,686175$; $\sigma_{x6}^2 = 4981,583$;

$\sigma_{x7}^2 = 24794,49$.

2-й крок:

побудуємо нову матрицю X^*– матрицю, елементами якої є нормалізовані незалежні змінні x_{ij}^*

$$X^* = \begin{pmatrix}
-0{,}32044141 & -0{,}84450097 & -0{,}3229 & -0{,}27534 & 0{,}347725 & -0{,}33864 & -0{,}17399 \\
-0{,}30560089 & -0{,}22355659 & -0{,}28633 & -0{,}24195 & 0{,}317803 & -0{,}28834 & -0{,}15541 \\
-0{,}29746038 & -0{,}14501826 & -0{,}27292 & -0{,}28647 & 0{,}287882 & -0{,}25805 & -0{,}17847 \\
-0{,}21341831 & -0{,}08450475 & -0{,}13932 & -0{,}27256 & 0{,}25796 & -0{,}16179 & -0{,}19362 \\
-0{,}14884026 & -0{,}01330559 & -0{,}01817 & -0{,}26699 & 0{,}228038 & -0{,}19959 & -0{,}17763 \\
-0{,}08941138 & 0{,}01381241 & -0{,}1151 & -0{,}20856 & 0{,}198116 & -0{,}14125 & -0{,}1864 \\
-0{,}24103736 & 0{,}04139198 & -0{,}2802 & -0{,}16405 & 0{,}168194 & -0{,}10694 & -0{,}18225 \\
-0{,}17087742 & 0{,}06850998 & -0{,}20505 & -0{,}09727 & 0{,}138272 & -0{,}0314 & -0{,}16876 \\
-0{,}12384371 & 0{,}08755027 & -0{,}09654 & -0{,}07779 & 0{,}10835 & -0{,}16882 & -0{,}16969 \\
-0{,}07209647 & 0{,}08328063 & -0{,}06775 & -0{,}01936 & 0{,}078428 & -0{,}12457 & -0{,}15266 \\
-0{,}13736572 & 0{,}0921661 & -0{,}19551 & -0{,}18909 & 0{,}048506 & -0{,}10181 & -0{,}13741 \\
-0{,}02727287 & 0{,}10509042 & -0{,}07721 & -0{,}09449 & 0{,}018585 & -0{,}04453 & -0{,}16827 \\
0{,}03627709 & 0{,}12089964 & 0{,}056163 & 0{,}011241 & -0{,}01134 & -0{,}10623 & -0{,}14125 \\
0{,}12135597 & 0{,}13693964 & 0{,}074228 & 0{,}05854 & -0{,}04126 & -0{,}04527 & -0{,}1537 \\
-0{,}03011319 & 0{,}14294022 & -0{,}07443 & 0{,}211568 & -0{,}07118 & 0{,}001121 & 0{,}027323 \\
0{,}06987591 & 0{,}14017072 & 0{,}08545 & 0{,}091928 & -0{,}1011 & 0{,}111345 & 0{,}120526 \\
0{,}15265756 & 0{,}13474712 & 0{,}26168 & 0{,}144792 & -0{,}13102 & 0{,}010118 & 0{,}165425 \\
0{,}2357122 & 0{,}12401532 & 0{,}242914 & 0{,}089146 & -0{,}16578 & 0{,}100225 & 0{,}182598 \\
0{,}06003644 & 0{,}11132179 & 0{,}03291 & 0{,}208785 & -0{,}20053 & 0{,}145105 & 0{,}186408 \\
0{,}20154705 & 0{,}09320466 & 0{,}199917 & 0{,}17818 & -0{,}19792 & 0{,}268785 & 0{,}194499 \\
0{,}27690844 & 0{,}06908696 & 0{,}315038 & 0{,}097493 & -0{,}23267 & 0{,}270015 & 0{,}306081 \\
0{,}34325515 & 0{,}0517776 & 0{,}287895 & 0{,}222697 & -0{,}23267 & 0{,}226266 & 0{,}209779 \\
0{,}12010135 & -0{,}12339311 & 0{,}057203 & 0{,}161486 & -0{,}27003 & 0{,}272517 & 0{,}201243 \\
0{,}25154596 & -0{,}10423742 & 0{,}207962 & 0{,}320078 & -0{,}27003 & 0{,}353089 & 0{,}354918 \\
0{,}30850626 & -0{,}07838877 & 0{,}330055 & 0{,}397983 & -0{,}27235 & 0{,}358635 & 0{,}390711
\end{pmatrix}$$

Обчислимо кореляційну матрицю (матрицю моментів нормалізованої системи нормальних рівнянь):

$$R = X^{*tr} X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

де X^{*tr} – транспонована матриця до матриці X^* (елементи матриці R характеризують тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою $\left(r_{ij} = r_{x_i x_j}\right)$ – парні коефіцієнти кореляції.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}420237 & 0{,}969058 & 0{,}884938 & -0{,}94131 & 0{,}897563 & 0{,}862272 \\ 0{,}420237 & 1 & 0{,}408868 & 0{,}359322 & -0{,}44533 & 0{,}339996 & 0{,}152733 \\ 0{,}96905 & 0{,}408868 & 1 & 0{,}823298 & -0{,}87644 & 0{,}832441 & 0{,}845982 \\ 0{,}884937 & 0{,}359321 & 0{,}823298 & 1 & -0{,}94023 & 0{,}895058 & 0{,}878294 \\ -0{,}941312 & -0{,}445325 & -0{,}87644 & -0{,}94023 & 1 & -0{,}94564 & -0{,}89341 \\ 0{,}897563 & 0{,}339996 & 0{,}832441 & 0{,}895058 & -0{,}94564 & 1 & 0{,}921938 \\ 0{,}862272 & 0{,}152733 & 0{,}845982 & 0{,}878294 & -0{,}89341 & 0{,}921938 & 1 \end{pmatrix}$$

Однак, на основі цієї залежності не можна стверджувати, що отриманий зв'язок є явищем мультиколінеарності. Якщо діагональні елементи матриці R не дорівнюють одиниці (зв'язок будь-якої незалежної змінної самої до себе повинен бути повним), то на діагоналі цієї матриці ми ставимо одиниці, а до інших елементів додаємо різницю між одиницею і значенням діагонального елемента.

Зауваження: у середовищі пакета Exel під час виконання будь-яких дій з матрицями необхідно:

1) виділити область, в яку буде занесено результат;

2) для отримання результату після виконання дії натиснути комбінацію клавіш *Ctrl / Shift / Enter*.

3-й крок:

3.1) визначимо $|R|$ – визначник кореляційної матриці R:

$|R| = 0{,}0000026437$;

3.2) визначимо значення критерію χ^2 як

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \ln|R|,$$

$\chi^2 = 267{,}569395$;

3.3) порівняємо значення χ^2 з табличним при $\frac{1}{2}m(m-1) = 21$ степенях свободи та рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ (дод. 20):

$$\chi^2_{\text{табл.}} = 32{,}67057.$$

Оскільки $\chi^2 > \chi^2_{\text{табл.}}$, то у масиві незалежних змінних існує мультиколінеарність у сукупності.

4-й крок:

визначити матрицю *C*-помилок

$$C = R^{-1} = \left(X^{*tr} X^* \right)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{11} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}..$$

$C = R^{-1} =$

58,4256847	4,88538474	-41,3153	-2,94511	22,96792	-11,6376	17,66259
4,88538474	2,60671361	-4,49426	-0,15722	4,352204	-1,6015	4,694272
-41,3153109	-4,49425765	34,59362	2,722089	-13,1094	9,910593	-16,1939
-2,94511186	-0,15722199	2,722089	9,531284	7,332671	1,810946	-3,22912
22,9679227	4,35220428	-13,1094	7,332671	31,75659	4,748836	8,174224
-11,6376217	-1,60150496	9,910593	1,810946	4,748836	16,11301	-10,3079
17,6625949	4,69427162	-16,1939	-3,22912	8,174224	-10,3079	18,39507

5-й крок:

5.1) розрахуємо *F*-критерії:

$$F_k = \frac{\left(c_{kk} - 1\right) \cdot \left(n - m\right)}{\left(m - 1\right)}, k = 1,\ldots 7 ,$$

де c_{kk} – діагональні елементи матриці *C*:

$F_1 = 172{,}277054$
$F_2 = 4{,}82014084$
$F_3 = 100{,}780852$
$F_4 = 25{,}5938525$
$F_5 = 92{,}2697664$
$F_6 = 45{,}3390255$
$F_7 = 52{,}1852164$

5.2) значення критеріїв F_k порівняємо з табличним при $(n-m) = 18$ і $(m-1) = 6$ степенях вільності та рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ (дод. 22):

$$F_{\text{табл.}} = 3{,}895709.$$

Оскільки $F_1 > F_{\text{табл.}}$, $F_2 > F_{\text{табл.}}$, $F_3 > F_{\text{табл.}}$, $F_4 > F_{\text{табл.}}$, $F_5 > F_{\text{табл.}}$, $F_6 > F_{\text{табл.}}$, $F_7 > F_{\text{табл.}}$, то робимо **висновок**, що *існує мультиколінеарність між кожними незалежними змінними та іншими факторами моделі;*

5.3) розрахуємо коефіцієнти детермінації для кожної змінної:

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{c_{kk}}.$$

$R_1^2 = 0{,}982884$; $R_2^2 = 0{,}616375$; $R_3^2 = 0{,}971093$; $R_4^2 = 0{,}895082$; $R_5^2 = 0{,}96851$; $R_6^2 = 0{,}937938$; $R_7^2 = 0{,}945638$.

6-й крок:

знайдемо часткові коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між двома змінними за умови, що всі інші змінні $x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{lm}$ не впливають на цей зв'язок (існування парної мультиколінеарності) за формулою

$$r_{k\,j} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} c_{jj}}},$$

де c_{kj} – елементи матриці C, що знаходиться у k-му рядку та j-му стовпці, $k = 1,2,..,m$; $j = 1,2,...,m$, c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці C

$r_{12} = 0{,}3958$; $r_{13} = 0{,}9189$; $r_{14} = 0{,}1248$; $r_{15} = -0{,}5332$; $r_{16} = 0{,}3792$; $r_{17} = -0{,}5387$; $r_{23} = 0{,}4732$; $r_{24} = 0{,}0315$; $r_{25} = -0{,}478$; $r_{26} = 0{,}2471$; $r_{27} = -0{,}6779$; $r_{34} = -0{,}1499$; $r_{35} = 0{,}3955$; $r_{36} = -0{,}4197$; $r_{37} = 0{,}2438$; $r_{45} = -0{,}4214$; $r_{46} = -0{,}1461$; $r_{47} = 0{,}2438$; $r_{56} = -0{,}2099$; $r_{57} = -0{,}3382$; $r_{67} = 0{,}5987$.

Однак, якщо порівняти абсолютні значення часткових та парних коефіцієнтів, то можна побачити, що перші значно менші за останні. Тому на основі знання парних коефіцієнтів кореляції висновок про мультиколінеарність робити неможливо. Для цього необхідно ще виконати сьомий крок.

7-й крок:

7.1) розрахуємо *t*-критерії

$$t_{kj} = \left|r_{kj}\right| \frac{\sqrt{n-m}}{1-r_{kj}^2};;$$

$t_{12} = 1{,}6721$; $t_{13} = 3{,}8063$; $t_{14} = 0{,}5292$; $t_{15} = 2{,}2443$; $t_{16} = 1{,}6027$; $t_{17} = 2{,}2672$; $t_{23} = 1{,}9954$; $t_{24} = 0{,}1338$; $t_{25} = 2{,}0165$; $t_{26} = 1{,}0466$; $t_{27} = 2{,}8391$; $t_{34} = 0{,}6356$; $t_{35} = 1{,}6707$; $t_{36} = 1{,}7722$; $t_{37} = 2{,}6922$; $t_{45} = 1{,}7793$; $t_{46} = 0{,}6196$; $t_{47} = 1{,}0329$; $t_{56} = 0{,}8895$; $t_{57} = 1{,}4303$; $t_{67} = 2{,}5147$;

7.2) значення критеріїв t_{kj} порівняємо з табличними при *(n-m)*=18 степенях свободи та рівні значущості α=0,05 (дод. 21):

$$t_{\text{табл.}} = 2{,}10092204.$$

Оскільки $t_{13} > t_{\text{табл.}}$, $t_{15} > t_{\text{табл.}}$, $t_{17} > t_{\text{табл.}}$, $t_{27} > t_{\text{табл.}}$, $t_{37} > t_{\text{табл.}}$, $t_{67} > t_{\text{табл.}}$, то *між відповідними парами незалежних змінних існує мультиколінеарність, а саме пов'язані між собою* доходи населення і валовий внутрішній продукт, доходи населення і кредит Національного банку, доходи населення і заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками, кількість населення і заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками, валовий внутрішній продукт і заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками, кінцеві споживчі витрати і заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками .

Висновок. Якщо між незалежними змінними існує мультиколінеарність, необхідно вирішувати питання про її

вилучення. Наприклад, інколи доцільно виключити одну зі змінних мультиколінеарної пари з моделі (якщо це не суперечить логіці економічних зв'язків). Позбутися мультиколінеарності можна також шляхом перетворень певним чином пояснювальних змінних моделі. Якщо жодний спосіб не дає змоги позбутися мультиколінеарності, то параметри моделі слід оцінювати за методом головних компонент.

Виконаємо перетворення: введемо нову змінну *z*-заборгованості за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення, тобто $z=x_7-x_1$.

Повторно дослідивши на мультиколінеарність нову систему факторів за алгоритмом Феррара-Глоубера, встановимо, що мультиколінеарні зв'язки послабшали.

Хоча $\chi^2 = 162{,}27892445$; $\chi^2_{\text{табл.}} = 24{,}99579$ та $\chi^2 > \chi^2_{\text{табл.}}$, але за *t*-критерієм Стьюдента серед перетворених факторів виявлено лише три пари мультиколінеарних змінних. Тому було прийнято рішення моделювати залежність обсягу державного боргу (*Y*, млрд грн) від заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення, (*Z*, тис. грн), кількості населення (X_2, млрд чол.), валового внутрішнього продукту (X_3, млрд грн), середнього розміру допомоги безробітним (X_4, тис. грн), кредитів Національного банку (X_5, млрд грн) та кінцевих споживчих витрат (X_6, млрд грн). Перегруповану статистичну інформацію за період з грудня 2012 року по грудень 2014 року наведено у дод. 1.

3.3. Оцінка параметрів множинної регресійної моделі

Продовжимо дослідження отриманої моделі, а саме: знайдемо МНК-оцінки параметрів, користуючись покроковим алгоритмом побудови та дослідження множинної регресійної моделі (дод. 3, 1-й крок).

1-й крок:

1.1) запишемо рівняння регресії у вигляді:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Z + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + u,$$

де $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ – параметри моделі, які потрібно оцінити;

1.2) матричним методом розв'яжемо отриману систему і знайдемо шукані оцінки параметрів моделі $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$. Для цього складемо вектор-стовпець Y і матрицю X вигляду:

$$Y = \begin{pmatrix} 399{,}21 \\ 410{,}97 \\ 419{,}17 \\ 426{,}39 \\ 441{,}13 \\ 442{,}41 \\ 439{,}24 \\ 447{,}10 \\ 445{,}04 \\ 450{,}95 \\ 450{,}54 \\ 453{,}58 \\ 480{,}21 \\ 480{,}17 \\ 558{,}96 \\ 590{,}22 \\ 608{,}96 \\ 675{,}88 \\ 672{,}11 \\ 686{,}86 \\ 783{,}44 \\ 803{,}48 \\ 809{,}71 \\ 888{,}65 \\ 946{,}81 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 704{,}32 & 0{,}073 & 174{,}78 & 0{,}814 & 7{,}19 \\ 1 & 724{,}06 & 0{,}079 & 186{,}98 & 0{,}826 & 7{,}06 \\ 1 & 708{,}71 & 0{,}080 & 191{,}45 & 0{,}810 & 6{,}94 \\ 1 & 725{,}72 & 0{,}080 & 236{,}03 & 0{,}815 & 6{,}82 \\ 1 & 760{,}54 & 0{,}081 & 276{,}45 & 0{,}817 & 6{,}69 \\ 1 & 774{,}10 & 0{,}081 & 244{,}11 & 0{,}838 & 6{,}57 \\ 1 & 725{,}16 & 0{,}081 & 189{,}02 & 0{,}854 & 6{,}44 \\ 1 & 759{,}93 & 0{,}081 & 214{,}10 & 0{,}878 & 6{,}32 \\ 1 & 775{,}40 & 0{,}082 & 250{,}30 & 0{,}885 & 6{,}20 \\ 1 & 806{,}63 & 0{,}082 & 259{,}90 & 0{,}906 & 6{,}07 \\ 1 & 796{,}15 & 0{,}082 & 217{,}28 & 0{,}845 & 5{,}95 \\ 1 & 809{,}77 & 0{,}082 & 256{,}75 & 0{,}879 & 5{,}82 \\ 1 & 852{,}92 & 0{,}082 & 301{,}25 & 0{,}917 & 5{,}70 \\ 1 & 872{,}42 & 0{,}082 & 307{,}27 & 0{,}934 & 5{,}58 \\ 1 & 962{,}78 & 0{,}082 & 257{,}68 & 0{,}989 & 5{,}45 \\ 1 & 1070{,}59 & 0{,}082 & 311{,}02 & 0{,}946 & 5{,}33 \\ 1 & 1134{,}45 & 0{,}082 & 369{,}81 & 0{,}965 & 5{,}21 \\ 1 & 1176{,}56 & 0{,}082 & 363{,}55 & 0{,}945 & 5{,}06 \\ 1 & 1119{,}07 & 0{,}082 & 293{,}49 & 0{,}988 & 4{,}92 \\ 1 & 1174{,}17 & 0{,}082 & 349{,}21 & 0{,}977 & 4{,}93 \\ 1 & 1287{,}97 & 0{,}081 & 387{,}62 & 0{,}948 & 4{,}78 \\ 1 & 1234{,}99 & 0{,}081 & 378{,}56 & 0{,}993 & 4{,}78 \\ 1 & 1151{,}44 & 0{,}080 & 301{,}59 & 0{,}971 & 4{,}63 \\ 1 & 1317{,}69 & 0{,}080 & 351{,}89 & 1{,}028 & 4{,}63 \\ 1 & 1365{,}48 & 0{,}080 & 392{,}63 & 1{,}056 & 4{,}62 \end{pmatrix}$$

– обчислимо шукані оцінки регресійних коефіцієнтів за формулою

$$B = \left(X'X\right)^{-1} X'Y,$$

де X' – транспонована матриця до матриці X:

$$X' = \begin{pmatrix} 25 & 23791,13 & 2,032 & 7062,83 & 22,82 & 143,70 & 5800,03 \\ 23791,13 & 23846651,43 & 1936,56 & 7054848,9 & 22078,39 & 132495,83 & 5884793,94 \\ 2,032 & 1936,56 & 0,16 & 575,40 & 1,85 & 11,66 & 472,59 \\ 7062,83 & 7054848,92 & 575,40 & 2106652,9 & 6546,80 & 39386,10 & 1736596,62 \\ 22,82 & 22078,39 & 1,85 & 6546,80 & 20,96 & 129,79 & 5408,72 \\ 143,70 & 132495,83 & 11,66 & 39386,10 & 129,79 & 843,14 & 31956,43 \\ 5800,03 & 5884793,93 & 472,59 & 1736596,6 & 5408,72 & 31956,43 & 1470154,43 \end{pmatrix}$$

$$(X'*X)^{-1} = \begin{pmatrix} 532,0286 & -0,0549 & -3373,5237 & 0,0507 & -92,9649 & -22,6819 & -0,0196 \\ -0,0549 & 0,0000 & 0,6022 & 0,0000 & -0,0103 & 0,0013 & 0,0000 \\ -3373,523 & 0,6022 & 32413,848 & -0,8332 & -20,4978 & 88,3435 & -0,3817 \\ 0,0507 & 0,0000 & -0,8332 & 0,0001 & 0,0133 & 0,0008 & 0,0000 \\ -92,9649 & -0,0103 & -20,4978 & 0,0133 & 73,3935 & 5,3554 & 0,0124 \\ -22,6819 & 0,0013 & 88,3435 & 0,0008 & 5,3554 & 1,3797 & 0,0053 \\ -0,0196 & 0,0000 & -0,3817 & 0,0000 & 0,0124 & 0,0053 & 0,0001 \end{pmatrix}$$

$$X'*Y = \begin{pmatrix} 14211,19 \\ 14397080,84 \\ 1156,35 \\ 4243545,78 \\ 13233,69 \\ 78641,57 \\ 3571295,06 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 606,338 \\ 0,466 \\ -13136,952 \\ -0,056 \\ 179,681 \\ 29,658 \\ 1,154 \end{pmatrix};$$

1.3) запишемо шукану функцію регресії з урахуванням знайдених оцінок коефіцієнтів моделі

$$\hat{y} = 606,338 + 0,466z - 13136,952x_2 - 0,0565x_3 + 179,681x_4 + \\ +29,658x_5 + 1,154x_6;$$

(3.3)

1.4) обчислимо значення $\hat{y}_i$ за формулою $\hat{Y} = XB$;

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 442,2931 \\ 399,0944 \\ 388,5381 \\ 423,5283 \\ 410,6904 \\ 439,5837 \\ 429,8733 \\ 473,0082 \\ 417,6425 \\ 450,2715 \\ 441,3869 \\ 469,8266 \\ 463,6848 \\ 494,8237 \\ 564,1281 \\ 645,2226 \\ 630,838 \\ 680,8821 \\ 681,1681 \\ 754,5322 \\ 799,2081 \\ 767,2544 \\ 762,8285 \\ 878,4051 \\ 902,4774 \end{pmatrix}.$$

Отже, побудувано загальну лінійну модель (3.3) залежності обсягу державного боргу від заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення, кількості населення, валового внутрішнього продукту, середнього розміру допомоги безробітним, кредитів Національного банку та кінцевих споживчих витрат. Наступним кроком досліджень є проведення дисперсійно-кореляційного аналізу та аналіз поведінки залишків моделі.

3.4. Дослідження моделі та перевірка її на адекватність

Цей підрозділ по суті реалізує **III етап** алгоритму виконання наскрізного завдання побудови та дослідження регресійної моделі (дод. 3, 2-й та 3-й кроки, дод. 4).

2-й крок:

2.1) обчислимо відносну похибку розрахункових значень регресії за формулою

$$\delta_i = \frac{\hat{u}_i}{y_i} \cdot 100\%;$$

$$\delta_i = \begin{pmatrix} -10{,}7921 \\ 2{,}88964 \\ 7{,}30776 \\ 0{,}67115 \\ 6{,}90037 \\ 0{,}63883 \\ 2{,}13247 \\ -5{,}79472 \\ 6{,}15619 \\ 0{,}15047 \\ 2{,}03159 \\ -3{,}58187 \\ 3{,}44124 \\ -3{,}05176 \\ -0{,}9246 \\ -9{,}319 \\ -3{,}59269 \\ -0{,}74009 \\ -1{,}34771 \\ -9{,}8524 \\ -2{,}01267 \\ 4{,}50859 \\ 5{,}78991 \\ 1{,}15286 \\ 4{,}68230 \end{pmatrix};$$

2.2) обчислимо значення відносної похибки за формулою:

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} = 0{,}10225;;$$

2.3) обчислимо середньоквадратичне відхилення залишків моделі:

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-m-1}} = 33{,}5577645$$

(S – стандартна помилка і чим менша вона, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним);

2.4) перевіримо тісноту загального впливу незалежних змінних на залежну змінну: обчислити коефіцієнт детермінації за формулою:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}, \text{ або } R^2 = 1 - \frac{Y'Y - B'X'Y}{Y'Y - n\bar{y}^2} = \frac{B'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2},$$

$R^2 = 0{,}969970133$.

Висновок. Оскільки коефіцієнт детермінації досить великий, то варіація залежної змінної Y значною мірою визначається варіацією незалежних змінних;

2.5) перевіримо на значущість вибірковий коефіцієнт кореляції: обчислимо $R = \sqrt{R^2}$ – коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку всіх незалежних факторів x_i із залежною змінною y) $R = 0{,}984870617$.

Коефіцієнт кореляції досить великий, тому *існує тісний лінійний зв'язок усіх незалежних факторів z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 із залежною змінною y*;

2.6) обчислимо *t*-статистику за формулою:

$$t = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}}; \qquad t = 24{,}11230493.$$

Знайдемо $t_{\text{табл.}(\alpha/2,n-m-1)}$ – відповідне табличне значення *t*-розподілу з $(n-m-1) = 18$ степенями свободи і рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ (дод. 4): $t_{\text{табл.}(0{,}025,12)} = 2{,}445005614$.

Оскільки $|t| > t_{\text{табл.}(0{,}025,11)}$, то можна зробити висновок про достовірність коефіцієнта кореляції, який характеризує тісноту зв'язку між залежною та незалежними змінними моделі;

2.7) для вибраного рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і відповідного степеня вільності $k = n - m - 1 = 18$ запишемо межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції *R*

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R),$$

де $\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}}$;

$\Delta R = 2{,}445 \cdot (1 - 0{,}984870617)/5 = 0{,}0185$

і відповідно межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції *R*

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R) = (0{,}966;\ 1);$$

2.8) обчислимо *F*-статистику за формулою (спрощений варіант) для перевірки нульової гіпотези: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m},$$

$F = 96{,}9005415$.

Знайдемо табличне значення *F*-статистики $F(m, n-m-1, \alpha)$ (дод. 22):

F(6, 18, 0,05) = 2,79046 і порівняємо з обчисленою *F*-статистикою:

оскільки $F > F(6, 182, 0{,}05)$, то *нульова гіпотеза відхиляється, коефіцієнти регресії є значущими.*

Перевірку на значущість коефіцієнтів регресії можна здійснити також і за *t*-тестом, а саме:

2.9) обчислимо *t*-статистику за формулою

$$t_j = \frac{b_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{b_j}{S_{b_j}} \cdot (j = 0,1,\ldots,m),$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$;

S_{b_j} – стандартизована помилка оцінки параметра моделі:

t_0 = 0,783347716; t_1 = 2,70015155; t_2 = -2,17438419;
t_3 = -0,1807149; t_4 = 0,6250018; t_5 = 0,7524219;
t_6 = 3,13192459.

Значення t_j-критерію порівнюється з табличними при $k = m - n - 1$ степенях свободи та рівні значущості α = 0,05 : : $t_{\text{табл.}(0{,}025,18)}$= 2,445005614;

Оскільки $|t_0| < t_{\alpha/2,k.}$, $|t_2| < t_{\alpha/2,k.}$, $|t_3| < t_{\alpha/2,k.}$, $|t_4| < t_{\alpha/2,k.}$, $|t_5| < t_{\alpha/2,k.}$, $|t_6| < t_{\alpha/2,k.}$, то відповідно *оцінки* $b_0, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ *не є значущими, а оцінка* b_1 *є значущою;*

2.10) обчислимо відношення:

$$\delta_{b_j} = \frac{S_{b_j}}{|b_j|} \cdot 100\%,$$

δ_{b_0} = 128%; δ_{b_1} = 37%; δ_{b_2} = 46%; δ_{b_3} = 553%;
δ_{b_4} = 160%; δ_{b_5} = 133%; δ_{b_6} = 32%

(характеризує той факт, що *оцінки* $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – *зміщені);*

2.11) обчислимо значення граничного вкладу *j*-го регресора в коефіцієнт детермінації (тобто, на яку величину зменшиться частковий коефіцієнт детермінації, якщо *j*-й регресор буде виключений із рівняння):

$$\Delta R_j^2 = \frac{\left(1 - R^2\right) t_j^2}{n - m - 1},$$

де $t_j = \frac{b_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{b_j}{S_{b_j}}$,

n – період вибірки (будемо вважати, що *n* = 25):

$\Delta R_0^2 = 0{,}001$; $\Delta R_1^2 = 0{,}012$; $\Delta R_2^2 = 0{,}00788$;
$\Delta R_3^2 = 0{,}00005448$; $\Delta R_4^2 = 0{,}00065$; $\Delta R_5^2 = 0{,}000944549$;
$\Delta R_6^2 = 0{,}016364$;

2.12) обчислимо скоригований коефіцієнт за Тейлом:

$$\overline{R}_T^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1} = 0{,}959960177;$$

2.13) обчислимо скоректований коефіцієнт детермінації за Амемією:

$$\overline{R}_A^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n + m = +1}{n - m - 1};$$

$$\overline{R}_A^2 = 0{,}944945243.$$

Висновок: оскільки з виключенням змінної із рівняння зникає один степінь вільності, то з двох варіантів рівнянь, які відрізняються величиною скоригованого коефіцієнта детермінації, але мають однаково гарні інші критерії якості, перевага надається рівнянню з більшим значенням скоригованого

коефіцієнта детермінації ($\overline{R}_T^2$ відображає втрату степеня вільності при включенні додаткового регресора більш чітко, ніж $\overline{R}_A^2$, тобто у цьому випадку $\overline{R}_T^2 > \overline{R}_A^2$);

2.14) визначимо вплив на знайдену регресію з m незалежними змінними, k $(m > k)$ незалежних змінних як групу, що впливає на регресант, за допомогою F-критерію Фішера за формулою ($m = 6$, $k = 1$)

$$F = \frac{\varepsilon'\varepsilon - u'u}{u'u} \cdot \frac{n-m-1}{k} = -5{,}128,,$$

де u_i – відхилення для регресії, в яку включені всі $(m + 1)$ регресори;

ε_i – відхилення для регресії, у яку не включені k регресорів, тобто для регресії з $(m – k – 1)$ регресорами.

Для заданого рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і степенів вільності $k_1 = k = 1$ і $k_2 = n – m – 1 = 18$ знайдемо табличне значення F-критерію – $F_{\text{табл.}}(k_1, k_2, \alpha) = F(1, 18, 0{,}05) = 4{,}4138734$. Порівнюючи табличне та обчислене значення F-критеріїв, робимо висновок: оскільки $F_{\text{табл.}}(k_1, k_2, \alpha) > F$, то при вибраному рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, або з надійністю $p = 1 – \alpha = 0{,}95$ можна вважати, що виключена з моделі $k = 1$ змінна не впливає суттєво на модель.

3-й крок:

обчислимо коефіцієнти еластичності за формулою

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \cdot \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}},$$

$\alpha_1 = 0{,}7803955$; $\alpha_2 = -1{,}8789145$; $\alpha_3 = -0{,}0276803$;
$\alpha_4 = 0{,}2885787$; $\alpha_5 = 0{,}2998973$; $\alpha_6 = 0{,}4710663$.

Коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни частки x_i на y у припущенні, що вплив інших факторів відсутній: у нашому прикладі він показує, *що обсяг державного боргу збільшиться на 0,78%, якщо заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення зросте на 1%; обсяг державного боргу зменшиться на 1,881%, якщо кількість населення зросте на 1%; обсяг державного боргу зменшиться на 0,027%, якщо валовий внутрішній продукт зросте на 1%, обсяг державного боргу збільшиться на 0,29%, якщо середній розмір допомоги безробітним зросте на 1%, обсяг державного боргу збільшиться на 0,299%, якщо кредити Національного банку зростуть на 1%, обсяг державного боргу збільшиться на 0,47%, якщо кінцеві споживчі витрати зростуть на 1%.*

Загальна еластичність Y від усіх факторів x_i дорівнює:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i ,$$

α = -0,066656692.

Загальна еластичність показує, що *на 0,07% зменшиться обсяг державного боргу, якщо одночасно збільшити на один відсоток всі фактори: заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення, кількість населення, валовий внутрішній продукт, середній розмір допомоги безробітним, кредити Національного банку та кінцеві споживчі витрати.*

3.5. Особливі випадки поведінки залишків моделі: перевірки наявності гетероскедастичності та автокореляції

Почнемо з перевірки гетероскедастичності за допомогою параметричного тесту Гольдфельда-Квандта (дод. 5).

Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень, то це явище називається гетероскедастичністю.

Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, то ця її властивість називається гомоскедастичністю.

Гетероскедастичність призводить до того, що МНК-оцінки параметрів моделі будуть незміщеними, спроможними (обґрунтованими), але неефективними.

Параметричний тест Гольдфельда-Квандта

Якщо сукупність спостережень невелика, то застосування μ критерію не дає бажаних результатів. У цьому випадку розглядається випадок, коли $M(uu^{tr}) = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних заданої моделі.

Тестування на гетероскедастичність за допомогою параметричного тесту Гольдфельда-Квандта проводиться за фактором, який найсильніше впливає на зміну дисперсії залишків моделі. Якщо складно апріорі визначити такий фактор, то необхідно тестувати залишки за кожною незалежною змінною окремо і в кожному випадку застосовувати тест Гольдфельда-Квандта.

Припустімо, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор Z (заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками без урахування доходів населення) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спаду) значень відповідно до величини елементів вибраного нами вектора *Z*;

2-й крок:

відкинемо *c* спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7,$$

де $n = 25$ – кількість елементів вектора *Z*;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де $m = 6$ – кількість змінних:

$y_1 = 48{,}4487 + 0{,}515867z$ та $y_2 = -567{,}363 + 1{,}093078z$;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій та другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно:

$S_1 = 9{,}867123$ $S_2 = 60{,}29668$;

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, ($F = 6{,}110867$), який при виконанні гіпотези про гомокседастичність буде відповідати

F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію F = 6,110867 порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри α = 0,05 і відповідних степенях вільності (дод. 22):
$F_{\text{табл}} = F_{(0,05;\ 3;\ 3)}$ = 9,276628.

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор Z не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Припустімо тепер, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор X_2 (кількість населення) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спаду) значення відповідно до величини елементів вибраного нами вектора X_2;

2-й крок:

відкинемо c спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7.$$

У нашому випадку n=25 – кількість елементів вектора X_2;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \ge m$ де m = 6 – кількість змінних,

y_1 = -1665,34 + 28102,1x та y_2 = 12510,09 – 144852x;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій та другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно;

S_1 = 238,8799 S_2 = 94,58768

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \dfrac{S_2}{S_1}$, (F =0,395963), який при виконанні гіпотези про гомокседастичність буде відповідати F-розподілу з $\gamma_1 = \dfrac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \dfrac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію F = 0,395963 порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри α = 0,05 і відповідних степенях вільності (дод. 22):

$$F_{\text{табл}} = F_{(0,05;\ 3;\ 3)} = 9,276628.$$

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор X_2 не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Припустімо, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор X_3 (валовий внутрішній продукт) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спадання) значення відповідно до величини елементів вибраного вектора X_3;

2-й крок:

відкинемо ***c*** спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7.$$

У нашому випадку n = 25 – кількість елементів вектора X_3;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де m = 6 – кількість змінних;

y_1 = 338,0542 + 0,439884x та y_2 = -576,307 + 3,627863x;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій і другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно:

S_1 = 14,31827 , S_2 = 107,6979;

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, (F = 7,521712), який при виконанні гіпотези про гомокседастичність буде відповідати F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію $F = 7{,}521712$ порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри $\alpha = 0{,}05$ і відповідних степенях вільності (дод. 22):

$$F_{\text{табл}} = F_{(0{,}05;\ 3;\ 3)} = 9{,}276628.$$

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор X_3 також не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Припустімо, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор X_4 (середній розмір допомоги безробітним) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спадання) значення відповідно до величини елементів вибраного нами вектора X_4;

2-й крок:

відкинемо c спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7.$$

У нашому випадку $n = 25$ – кількість елементів вектора X_4;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \ge m$ де $m = 6$ – кількість змінних;

$y_1 = 4{,}302345 + 511{,}8633x$ та $y_2 = -1582{,}74 + 2355{,}986x$;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій і другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно:

$S_1 = 14{,}2702$, $S_2 = 109{,}2024$;

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, (F = 7,652481), який при виконанні гіпотези про гомоскедастичність буде відповідати F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію F = 7,652481 порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри α = 0,05 і відповідних степенях вільності (дод. 22):

$$F_{\text{табл}} = F_{(0{,}05;\ 3;\ 3)} = 9{,}276628.$$

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор X_4 також не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Припустімо, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор X_5 (кредити Національного банку) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спадання) значення відповідно до величини елементів вибраного нами вектора X_5;

2-й крок:

відкинемо ***c*** спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7.$$

У нашому випадку $n = 25$ – кількість елементів вектора X_5;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де $m = 6$ – кількість змінних;

y_1=3179,991 – 499,169x та y_2=743,169 – 46,7831x;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій і другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно:

S_1 = 45,68768, S_2 = 6,605404;

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, (F = 0,144577), який при виконанні гіпотези про гомоскедастичність буде відповідати F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію $F = 0{,}144577$ порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри $\alpha = 0{,}05$ і відповідних степенях вільності (дод. 22):

$$F_{\text{табл}} = F_{(0{,}05;\ 3;\ 3)} = 9{,}276628.$$

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор X_5 також не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Припустімо, нарешті, що зміну дисперсії залишків може викликати вектор X_6 (кінцеві споживчі витрати) і проведемо тестування за цим фактором.

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) ранжуємо у порядку зростання (або спадання) значення відповідно до величини елементів вибраного нами вектора X_6;

2-й крок:

відкинемо c спостережень, які знаходяться всередині векторів вихідних даних, де

$$c = \frac{4n}{15} = 7.$$

У нашому випадку n=25 – кількість елементів вектора X_3;

3-й крок:

побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень розмірністю $\frac{n-c}{2} = 9$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \ge m$, де $m = 6$ – кількість змінних;

$y_1 = 339{,}1636 + 0{,}564188x$ та $y_2 = -174{,}474 + 2{,}976609x$;

4-й крок:

знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій і другій моделях:

$$S_1 = u_1^{tr} u_1,\ S_2 = u_2^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по першій та другій моделях відповідно:

$S_1 = 8{,}107705$, $S_2 = 57{,}29116$;

5-й крок:

5.1) розрахуємо критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, (F = 7,066261), який при виконанні гіпотези про гомоскедастичність буде відповідати F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2} = 3$ степенями вільності;

5.2) значення критерію F = 7,066261 порівняємо з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри α = 0,05 і відповідних степенях вільності (дод. 22):

$$F_{\text{табл}} = F_{(0{,}05;\ 3;\ 3)} = 9{,}276628.$$

Оскільки $F \le F_{\text{табл.}}$, то *гетероскедастичність відсутня.*

Отже, фактор X_6 також не викликає гетероскедастичність залишків моделі.

Залишки моделі гомоскедастичні за всіма факторами і тому нас задовольняють оцінки параметрів, отримані на основі 1МНК.

Продовжимо аналіз залишків, дослідивши їх на наявність автокореляції. Застосуємо для цього тест Дарбіна-Уотсона (дод. 23, 7-й крок);

7-й крок:

7.1) обчислимо d-статистику за формулою (d-статистика приймає значення з проміжку [0,4]):

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{T}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{T} u_i^2} = 1{,}415610416.$$

Виберемо α=0,05 – *рівень значущості* та за таблицею (дод. 23) знайдемо $DW_1=d_u(\alpha)$=1,68 – нижнє значення і $DW_2=d_0(\alpha)$=1,78 – верхнє значення показника d.



Рис. Зони автокореляційного зв'язку за критерієм Дарбіна-Уотсона

Оскільки $d < DW_1$, то приймається гіпотеза про *наявність додатної (позитивної) автокореляції*.

На наступному етапі дослідження переоцінимо параметри багатофакторної моделі узагальненим методом найменших квадратів з метою урахування автокореляції залишків, тобто обчислимо УМНК-оцінки (теорема Ейткена, дод. 6).

Запишемо рівняння регресії у вигляді:

$$Y = \beta_0^* + \beta_1^* Z + \beta_2^* X_2 + \beta_3^* X_3 + \beta_4^* X_4 + \beta_5^* X_5 + \beta_6^* X_6 + u,,$$

де $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*, \beta_5^*, \beta_6^*$ – параметри моделі, які потрібно оцінити узагальненим методом найменших квадратів;

$\hat{B}^* = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$ – УМНК-оцінки параметрів моделі,

де Ω^{-1} – матриця, обернена до дисперсійно-коваріаційної матриці залишків Ω, а матриця Ω має вигляд:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

де параметр ρ характеризує коваріацію кожного наступного значення залишків із попереднім.

Тобто, якщо для залишків записати авторегресійну модель першого порядку:

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + v_t,$$

то ρ характеризує силу зв'язку величин залишків у період t з величинами залишків у період $t - 1$.

Оскільки в Ω коваріація залишків $\rho^s \to 0$, при $s > 2$, то матриця Ω^{-1} матиме вигляд:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

На практиці для розрахунку ρ використовується співвідношення:

$$\rho \approx r \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \quad \text{або} \quad \rho \approx r' \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \cdot \frac{n-m-1}{n-1}.$$

Обчислимо параметр ρ за другим співвідношенням, $\rho = 0{,}626779$.

Таким чином:

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}647046 & -1{,}03233 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1{,}03233 & 2{,}294091 & -1{,}03233 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1{,}03233 & 2{,}294091 & -1{,}03233 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1{,}647046 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо шукані УМНК-оцінки регресійних коефіцієнтів:

$X'\Omega^1 X =$

6,506154	6255,706	0,525884	1838,994	5,956842	37,51771	1512,155
6255,706	6477849	507,0745	1916721	5851,464	34722,69	1580500
0,525884	507,0745	0,042577	149,4341	0,482124	3,024345	122,8655
1838,994	1916721	149,4341	599672,5	1719,014	10212,24	459491,2
5,956842	5851,464	0,482124	1719,014	5,519716	33,89628	1421,949
37,51771	34722,69	3,024345	10212,24	33,89628	221,9112	8256,329
1512,155	1580500	122,8655	459491,2	1421,949	8256,329	406760,6

$(X'\Omega^1 X)^{-1} =$

300,5745	-0,02999	-1940,1	0,027621	-38,899	-14,2013	-0,0218
-0,02999	1,82E-05	0,228208	-1,9E-05	-0,00649	0,001569	-1,6E-05
-1940,1	0,228208	20254,26	-0,31464	-56,9323	45,25103	-0,15632
0,027621	-1,9E-05	-0,31464	4,01E-05	0,004574	-0,00053	1,7E-05
-38,899	-0,00649	-56,9323	0,004574	37,31959	2,225291	0,006224
-14,2013	0,001569	45,25103	-0,00053	2,225291	1,086742	0,003797
-0,0218	-1,6E-05	-0,15632	1,7E-05	0,006224	0,003797	7,34E-05

$X'\Omega^1 Y =$

3778,981
3954261
306,16
1155706
3554,038
20781,2
974620,7

$B^* =$

588,3216
0,619402
-6103,87
-0,30087
142,2624
-34,3245
0,185199

– УМНК-оцінки

Запишемо шукану функцію регресії з урахуванням знайдених УМНК-оцінок коефіцієнтів моделі

$$\hat{y}^* = 588,3216 + 0,619402z - 6103,87x_2 - 0,30087x_3 + \\ +142,2624x_4 - 34,3242x_5 + 0,185199x_6 \quad . \quad (3.4)$$

Дослідження моделі з УМНК-оцінками та перевірка її на адекватність проводиться аналогічно дослідженню моделі з класичними МНК-оцінками та приводить до статистичних висновків, які не відрізняються від отриманих раніше.

Порівняємо УМНК-оцінки з класичними МНК-оцінками:

$$B = \begin{pmatrix} 606,338 \\ 0,466 \\ -13136,952 \\ -0,056 \\ 179,681 \\ 29,658 \\ 1,154 \end{pmatrix} .$$

Запишемо знайдену вище функцію регресії (3.3) з урахуванням класичних МНК-оцінок коефіцієнтів моделі

$$\hat{y} = 606,338 + 0,466z - 13136,952x_2 - \\ -0,0565x_3 + 179,681x_4 + 29,658x_5 + 1,154x_6 \quad (3.3)$$

Зауважимо, що оцінки, отримані різними методами, схожі між собою за винятком оцінок β_5 і β_5^*, які відрізняються навіть знаком.

Оскільки з економічних міркувань між змінними Y (обсяг державного боргу) та X_5 (кредитів Національного банку) існує пряма залежність, то для обчислення прогнозів оберемо модель з УМНК-оцінками параметрів, а саме

$$\hat{y}^* = 588,3216 + 0,619402z - 6103,87x_2 - \\ - 0,30087x_3 + 142,2624x_4 - 34,3242x_5 + 0,185199x_6. \quad (3.4)$$

3.6. Прогнозування за побудованою моделлю

Цей підрозділ по суті реалізує **IV етап** алгоритму виконання наскрізного завдання побудови та дослідження регресійної моделі (дод. 3, з 4-го по 6-й кроки).

Використаємо модель (3.4) для знаходження точкового та інтервального прогнозу витрат на споживання, який відповідатиме вектору прогнозних значень факторів

$$X_{pr}'=(1;\ 1367,43;\ 0,082787;\ 388,254;\ 1,0346;\ 4,382865;\ 354,2704).$$

4-й крок (знаходження надійного інтервалу для регресії):

4.1) обчислимо надійні зони регресії (довірчий інтервал для математичного сподівання) як:

$$\left(\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k}\cdot\hat{\sigma}_u\cdot\sqrt{X_i'(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_i}\,;\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k}\cdot\hat{\sigma}_u\cdot\sqrt{X_i'(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_i}\right),$$

де $\hat{\sigma}_u$ – незміщена оцінка дисперсії залишків:

$$\hat{\sigma}_u = 33,5577645;$$

$t_{\text{табл.}(\alpha/2,k)}$ – відповідне табличне значення t-розподілу з $k = n - m - 1 = 18$ степенями вільності та рівнем значущості $\alpha = 0,05$ (дод. 21):

$$t_{\text{табл.}(0,025,12)} = 2,445005614.$$

Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо:

$$\hat{y}_i^* = \begin{pmatrix} 410{,}3054 \\ 395{,}2653 \\ 384{,}216 \\ 389{,}3955 \\ 397{,}1074 \\ 424{,}8519 \\ 418{,}4262 \\ 443{,}5943 \\ 437{,}5421 \\ 464{,}3549 \\ 467{,}2847 \\ 475{,}995 \\ 494{,}1265 \\ 514{,}197 \\ 599{,}884 \\ 656{,}0994 \\ 678{,}5884 \\ 715{,}112 \\ 715{,}2453 \\ 739{,}7131 \\ 800{,}8153 \\ 775{,}1853 \\ 761{,}0565 \\ 861{,}2605 \\ 881{,}9161 \end{pmatrix};$$

Відповідно надійні зони регресії мають вигляд:

$$\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \hat{\sigma}_u \sqrt{X_i' \left(X' \Omega^{-1} X \right)^{-1} X_i} = \begin{pmatrix} 343{,}1143 \\ 342{,}2566 \\ 336{,}3982 \\ 342{,}2108 \\ 350{,}779 \\ 383{,}7028 \\ 375{,}9346 \\ 398{,}8959 \\ 399{,}0495 \\ 426{,}9798 \\ 424{,}0359 \\ 435{,}0594 \\ 448{,}7822 \\ 467{,}6849 \\ 556{,}835 \\ 623{,}819 \\ 635{,}1797 \\ 672{,}7752 \\ 673{,}1007 \\ 700{,}0576 \\ 751{,}4797 \\ 734{,}0636 \\ 707{,}3361 \\ 810{,}0021 \\ 827{,}4406 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \hat{\sigma}_u \sqrt{X_i' \left(X' \Omega^{-1} X \right)^{-1} X_i} = \begin{pmatrix} 477{,}4966 \\ 448{,}274 \\ 432{,}0339 \\ 436{,}5803 \\ 443{,}4359 \\ 466{,}0009 \\ 460{,}9178 \\ 488{,}2927 \\ 476{,}0347 \\ 501{,}7299 \\ 510{,}5334 \\ 516{,}9306 \\ 539{,}4707 \\ 560{,}709 \\ 642{,}933 \\ 688{,}3798 \\ 721{,}997 \\ 757{,}4488 \\ 757{,}3898 \\ 779{,}3686 \\ 850{,}1509 \\ 816{,}3069 \\ 814{,}777 \\ 912{,}5188 \\ 936{,}3916 \end{pmatrix}.$$

5-й крок (побудова інтервалів довіри для параметрів регресії):

5.1) довірчі інтервали для параметра β_i обчислюються як:

$$\left(b_i - t_{\alpha/2,k} \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{ii}}; b_i + t_{\alpha/2,k} \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{ii}} \right),$$

де c_{ii} – діагональний елемент матриці $\left(X'X \right)^{-1}$;

$\hat{\sigma}_u = 33{,}5577645;$ $t_{\text{табл.}(0{,}025,12)} = 2{,}560027.$

Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо:

$\beta_0 \in \left(-0{,}02086; 6{,}42785 \right),$ $\beta_1 \in \left(-0{,}16222; 0{,}24995 \right),$
$\beta_2 \in \left(-0{,}062; 0{,}4374 \right),$ $\beta_3 \in \left(-0{,}08599; 0{,}33482 \right).$

6-й крок (обчислення прогнозних значень і знаходження меж надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і меж надійних інтервалів для математичного сподівання – точковий та інтервальний прогнози: $\hat{Y}_{pr}^{*}$

6.1) для обчислення прогнозних значень y_{pr} у рівняння (3.4)

$$\hat{y}^{*} = 588,3216x_2 + 0,619402z - 6103,87 - 0,30087x_3 + \\ +142,2624x_4 - 34,3242x_5 + 0,185199x_6$$

підставити задані значення вектора прогнозних значень факторів, які знаходяться за межами базового періоду (точковий прогноз) та були отримані за моделями динаміки:

$$X'_{pr} = (1;\ 1367,43;\ 0,082787;\ 388,254;\ 1,0346;\ 4,382865;\ 354,2704).$$

У результаті $y_{pr} = \hat{y}_{pr}^{*} = 875,5284$;

6.2) знайдемо межі інтервального прогнозу індивідуального значення за формулою ($k = n - m - 1$ – степінь вільності, α – вибраний рівень значущості):

$$\hat{Y}_{pr}^{*} - t_{\alpha/2,k}\hat{\sigma}_u\sqrt{1 + X_{pr}^{'}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_{pr}} \le Y_{pr} \le Y_{pr}^{*} + \\ + t_{\alpha/2,k}\hat{\sigma}_u\sqrt{1 + X_{pr}^{'}(X\Omega^{-1}X)^{-1}X_{pr}}.$$

Зауважимо, що $\hat{Y}_{pr} = X_{pr}\hat{B}^{*}$ можна розглядати як точкову оцінку математичного сподівання прогнозного значення Y_{pr}, а також як індивідуальне значення Y_{pr} для вектора незалежних змінних X_{pr}, що лежать за межами базового періоду:

$$\hat{Y}_{pr}=875{,}524;$$

$$\hat{\sigma}_{u}=33{,}5577645;$$

$$t_{\alpha/2}=t_{\text{табл.}(0{,}025,18)}=2{,}445005614;$$

$$t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{u}\sqrt{1+X_0^{'}(X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X_0}=102{,}2735$$

(773,2548; 977,8019) – *інтервальний прогноз індивідуального значення.*

Обчислимо межі надійних інтервалів для математичного сподівання значення y_{pr} за формулою

$$\hat{Y}_{pr}-t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{u}\sqrt{X_{pr}^{'}(X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X_{pr}}\le M(Y_{pr})\le\hat{Y}_{pr}+$$

$$+t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{u}\sqrt{X_{pr}^{'}(X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X_{pr}}$$

$$t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{u}\sqrt{X_{pr}^{'}(X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X_{pr}}=61{,}05612$$

Отримаємо:

(814,47222; 936,5845) – *інтервальний прогноз математичного сподівання індивідуального значення.*

У результаті проведеного дослідження обчислені різні види теоретично обґрунтованих і статистично надійних прогнозів обсягу державного боргу на основі класичної багатофакторної регресійної моделі його залежності від доходів населення, кількості населення, валового внутрішнього продукту, середнього розміру допомоги безробітним, кредитів Національного банку, кінцевих споживчих витрат та заборгованістю за позиками, наданими іноземними комерційними банками.

3.7. Нелінійна регресійна модель

Повернемося до питання про специфікацію моделі. Припустімо, що обсяг державного боргу y пов'язаний деякою нелінійною функціональною залежністю з визначеними вище факторами:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \qquad (3.5)$$

Припустімо, *f*-степенева (мультиплікативна) функція, тобто

$$y = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} x_4^{\beta_4} x_5^{\beta_5} x_6^{\beta_6}. \qquad (3.6)$$

***Зауваження*:** прикладом використання степеневої функції може бути виробнича функція Кобба-Дугласа, яка описує кількісну залежність причинно-наслідкових відносин між результатом економічного процесу й умовами його одержання.

Приведемо регресійну модель (3.6) до лінійного вигляду. Для цього прологарифмуємо рівняння (3.6):

$$\ln y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \beta_3 \ln x_3 + \beta_4 \ln x_4 + \beta_6 \ln x_6 + u \qquad (3.7)$$

і введемо нові змінні

$$y' = \ln y;\ \beta_0' = \ln \beta_0;\ x_1' = \ln x_1;\ x_2' = \ln x_2;\ x_3' = \ln x_3;\qquad x_4' = \ln x_4$$
$$;\qquad x_5' = \ln x_5;\qquad x_6' = \ln x_6$$

отримаємо таку лінійну регресійну модель та відповідну оцінку:

$$y' = \beta_0' + \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' + \beta_4 x_4' + \beta_5 x_5' + \beta_6 x_6' + u, \qquad (3.8)$$

$$\hat{y}' = b_0 + b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3' + b_4 x_4' + b_5 x_5' + b_6 x_6' \qquad (3.9)$$

Зауваження. Таблицю значень нових змінних отримаємо, прологарифмувавши відповідні значення первинних змінних.

Зауваження. МНК-оцінки параметрів $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ моделі (3.9) знаходимо за покроковим алгоритмом побудови та дослідження множинної регресійної моделі (дод. 3). Після цього повертаємося до початкових змінних шляхом експоненціювання $(b_i^{'} = \exp(b_i),\ i = 1,...,6)$ та записуємо рівняння моделі для первинних змінних у вигляді:

$$y = b_0^{'} x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4} x_5^{b_5} x_6^{b_6} e^{u}.$$

Зауваження. Дослідження моделі проводиться аналогічно тому, як це було виконано у п. 3.3.

Питання для самоконтролю

1. Навести приклади застосування багатофакторного регресійного аналізу.
2. Які властивості повинні мати незалежні змінні багатофакторної регресійної моделі?
3. Як здійснюється процедура вибору факторних (незалежних) змінних моделі?
4. Дати визначення лінійної багатофакторної регресійної моделі.
5. Навести матричну форму класичної лінійної багатофакторної моделі.
6. При яких основних припущеннях досліджується ця модель?
7. Прокоментуйте основні етапи побудови лінійної багатофакторної регресійної моделі.

8. Як розраховуються невідомі параметри лінійної моделі багатофакторної регресії за методом МНК?
9. Які основні властивості МНК–оцінок параметрів багатофакторної лінійної регресії?
10. Як обчислити відносну похибку і стандартну помилку моделі та зробити висновки?
11. Як визначити коефіцієнти множинної кореляції та детермінації у багатофакторній регресійній моделі?
12. Як визначити оцінений коефіцієнт детермінації? Зазначити його основні властивості.
13. Сформулюйте *F*-критерій Фішера перевірки багатофакторної моделі на адекватність.
14. Сформулюйте *t*-критерій Стьюдента перевірки значущості оцінок параметрів.
15. Сформулюйте означення коефіцієнта еластичності та висновок за його значенням.
16. Як побудувати довірчі інтервали параметрів лінійної регресії?
17. Як обчислити зони надійності регресії?
18. Як будується інтервальний прогноз значень залежної змінної в моделі багатофакторної регресії?
19. Як будуються межі надійних інтервалів для математичного сподівання прогнозного значення показника багатофакторної регресії?
20. Що означає мультиколінеарність змінних?
21. До яких наслідків призводить мультиколінеарність?
22. Як впливає наявність мультиколінеарності на оцінку параметрів моделі?
23. Які статистичні критерії містить алгоритм Фаррара-Глобера?
24. Охарактеризуйте алгоритм Фаррара-Глобера.
25. Які висновки можна зробити, дослідивши мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара-Глобера?
26. Що характеризують елементи кореляційної матриці *R*?

27. Як позбутися мультиколінеарності? Наведіть методи її вилучення.
28. Яким методом можуть бути оцінені параметри моделі з мультиколінеарними змінними?
29. Як пов'язані розподіли хі-квадрат, Стьюдента та Фішера з нормальним законом розподілу? Що таке ступені свободи для них?
30. Яке явище називається гомоскедастичністю?
31. У чому полягає суть гетероскедастичності?
32. Яку форму може мати гетероскедастичність?
33. До яких наслідків призводить порушення припущення про гомоскедастичність?
34. Як з'ясувати наявність гетероскедастичності?
35. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.
36. За яких умов застосовується параметричний тест Гольдфельда-Квандта?
37. У чому суть трансформації моделі?
38. Які властивості мають оцінки параметрів трансформованої моделі?
39. У чому суть узагальненого методу найменших квадратів?
40. Що означає автокореляція залишків і коли вона виникає?
41. До яких наслідків призводять автокореляції залишків?
42. Назвіть найпоширеніші методи тестування автокореляції.
43. У чому сутність критерію Дарбіна-Уотсона?
44. Охарактеризуйте алгоритм критерія фон Неймана.
45. На основі яких методів можна виконати оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками?

Розділ 4

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

4.1. Економетрична модель на основі системи симультативних рівнянь

При побудові моделей складних економічних систем, моделюванні об'єктів на макрорівні виникає необхідність специфікації моделі на основі декількох взаємопов'язаних рівнянь. Прикладами таких залежностей є модель попиту на товар; Кейнсіанська модель споживання; модель грошового ринку України; модель залежності обсягів національного доходу від виробничих ресурсів; модель темпів зниження собівартості продукції на підприємстві залежно від темпу зростання продуктивності праці і підвищення заробітної плати.

У загальному вигляді така модель є сукупністю рівнянь та тотожностей. Співвідношення між економічними показниками можуть мати стохастичний та детермінований характер. Стохастичні зв'язки між змінними описуються, як звичайно, регресійними рівняннями, а детерміновані визначаються тотожностями і не містять невідомих параметрів.

У системах рівнянь через наявність прямих та обернених зв'язків залежна змінна одного рівняння в інших рівняннях може бути незалежною змінною. Ті змінні, що стоять в лівій частині рівнянь, називаються ендогенними змінними, причому число їх не перевищує загальної кількості всіх рівнянь. Всі інші змінні, що входять до моделі, називаються екзогенними змінними.

Приклад. (повна кейнсіанська модель доходу) складається з двох співвідношень:

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + Z_t,$$

де C_t – витрати на споживання, Y_t – дохід, Z_t – неспоживчі витрати (інвестиції).

Перше співвідношення – це регресійна функція споживання, де a_0, a_1 – невідомі параметри, u_t – залишки моделі, а друге – тотожність доходу. Величина доходу Y_t для першого рівняння є незалежною змінною, а для другого – залежною, величина C_t – навпаки: у першому рівнянні є залежною змінною, у другому – незалежною. Для системи в цілому змінні Y_t та C_t є ендогенними змінними, а Z_t – екзогенною.

Означення системи, що описують взаємну залежність між змінними називаються **системами одночасних або симультативних рівнянь**.

Означення. Для систем одночасних рівнянь всі змінні, що можуть бути визначені з системи рівнянь, називаються **ендогенними** (залежними) змінними, причому їх кількість не перевищує загальної кількості рівнянь.

Означення. Для систем одночасних рівнянь всі змінні, що задаються за межами моделі або заздалегідь відомі, називаються відповідно **екзогенними**, або предетермінованими змінними.

У розглянутій кейнсіанській моделі доходу змінні C_t та Y_t є ендогенними змінними, що визначаються всередині моделі. Змінна Z_t задається (визначається) поза моделлю. Отже, вона є екзогенною змінною.

Із першого співвідношення цієї моделі видно, що змінна C_t залежить від доходу Y_t та від залишків u_t, а із другого співвідношення очевидна залежність доходу Y_t від споживчих C_t та неспоживчих витрат Z_t. Неважко помітити, що обидві змінні C_t та Y_t можуть бути виражені через Z_t та залишки u_t.

Кожне рівняння економетричної моделі описує одно- та багатосторонні стохастичні причинні співвідношення між економічними величинами в їх безпосередньому вигляді. Ці рівняння містять всю суттєву інформацію про залежності між

економічними явищами та процесами і називаються структурними рівняннями. Структурні рівняння описують окремо економічні явища з урахуванням економічних, технологічних, демографічних, соціологічних та інших факторів, що викликають змінювання залежних змінних. Характерною особливістю є їх певна автономність по відношенню до визначених змінних, оскільки змінювання останніх в одному структурному рівнянні не обов'язково змінює залежні змінні в інших рівняннях.

Для адекватного відображення реальної дійсності та повного охоплення економічних показників одночасними співвідношеннями в системах застосовують також тотожності – детерміновані залежності економічних величин. Тотожності не містять випадкових складових, а параметри їх наперед відомі (найчастіше вони дорівнюють одиниці), тому вони не підлягають оцінюванню.

Означення. Економетрична модель, що складається зі структурних рівнянь і тотожностей і відображає структуру зв'язків між змінними, називається структурною формою моделі.

У загальному випадку структурна форма моделі має вигляд:

$$Ay_t = Bx_t + u_t,$$

де x_t – вектор незалежних (екзогенних) змінних, y_t – вектор залежних змінних, u_t – вектор залишків, $t = 1,2,\ldots,T$.

Означення. Економетрична модель називається **повною**, якщо вона:

а) охоплює ті змінні, що мають суттєвий вплив на спільно залежні (ендогенні) змінні, тобто на змінні, що є залежними для системи загалом, а вектор залишків для кожного рівняння має випадковий характер;

б) містить стільки рівнянь, скільки в ній є спільно залежних змінних (кожна залежна змінна пояснюється окремим рівнянням);

в) крім того, система рівнянь має однозначний розв'язок відносно спільно залежних змінних, тобто матриця A – невироджена (має відмінний від нуля визначник): $\det A \neq 0$.

Повна модель застосовується у випадках, коли необхідно кількісно описати економічне явище чи процес.

Якщо економетрична модель застосовується не для аналізу системи, а для передбачення її розвитку чи оцінювання параметрів, структурна форма моделі стає неприйнятною. Засобами алгебраїчних перетворень систему структурних рівнянь зводять до такої форми, де кожне рівняння містить тільки одну ендогенну змінну, яка є функцією від екзогенних змінних. Така форма рівнянь називається **зведеною**.

Зведена форма рівнянь, на відміну від структурної форми, не має ні безпосередньої, ні будь-якої економічної інтерпретації. Рівняння у зведеній формі дозволяють передбачити, як зміниться значення тієї чи іншої ендогенної змінної, якщо будуть змінюватися значення екзогенних змінних, але на підставі цих рівнянь неможливо пояснити, як і чому це відбувається. Саме через це зведену форму рівнянь називають також **прогнозною** формою.

Якщо економетрична модель є повною, то залежні змінні такої моделі можна представити в явному вигляді як функції від спільно незалежних змінних, розв'язавши її відносно вектора залежних змінних y_t.

$$y_t = A^{-1}Bx_t + A^{-1}u_t$$

За таких перетворень параметри зведеної форми стають функціями від параметрів вихідних структурних рівнянь і залишки такої моделі, очевидно, є лінійною комбінацією залишків **структурної моделі**.

Ввівши позначення $v_t = A^{-1}u_t$, $R = A^{-1}B$, отримаємо спрощений вигляд моделі:

$$y_t = Rx_t + v_t.$$

В одержаній таким чином системі кожна залежна змінна визначається через незалежні змінні моделі, тобто ця система є **зведеною формою економетричної моделі**.

Означення. Економетрична модель, задана системою одночасних рівнянь, називається **точно (строго) ідентифікованою** (ототожненою), якщо однозначно можна отримати оцінки її параметрів на основі оцінених параметрів зведеної моделі.

Означення. **Надідентифікованою (переототожненою)** називається така модель, що для деяких її параметрів можна отримати кілька кількісних оцінок на підставі параметрів зведеної форми.

Означення. Модель може бути **неідентифікованою (неототожненою).** Це трапляється у тому разі, коли кількість невідомих параметрів значно більша ніж кількість рівнянь, через які їх потрібно оцінити.

Таким чином, перехід від структурної до зведеної форми системи рівнянь хоча і дозволяє усунути проблему корельованості пояснюючої змінної і випадкового відхилення, але приводить до іншої, не менш серйозної проблеми – ***проблеми ідентифікації***.

Для швидкого формального визначення ідентифікованості структурних рівнянь застосовуються такі необхідні і достатні умови. Нехай система одночасних рівнянь містить N рівнянь відносно N ендогенних змінних і має M екзогенних або заздалегідь визначених змінних. Нехай для деякого рівняння кількість ендогенних та екзогенних змінних дорівнює n і m відповідно. Змінні, що не входять у дане рівняння, але входять в інші рівняння системи, назвемо *виключеними змінними* (з даного рівняння). Їх кількість дорівнює відповідно $N-n$ ендогенних і $M-m$ екзогенних змінних.

Перша необхідна умова ідентифікованості

Рівняння ідентифіковане, якщо воно виключає, принаймні, $N-1$ змінну (ендогенну чи екзогенну) з тих, що є в моделі, тобто виконується нерівність:

$$(N-n)+(M-m)\geq N-1.$$

Друга необхідна умова ідентифікованості

Рівняння ідентифіковане, якщо кількість виключених з рівняння екзогенних змінних не менше кількості ендогенних змінних у цьому рівнянні, зменшеної на одиницю:

$$M-m\geq n-1.$$

Зауваження. Знаки рівності в обох необхідних умовах відповідають точній ідентифікованості рівняння.

Необхідна і достатня умова ідентифікованості

У моделі, що містить N рівнянь відносно N ендогенних змінних, умова ідентифікованості виконується тоді і тільки тоді, коли ранг матриці, складеної з виключених з даних рівнянь змінних, але таких, що входять до інших рівнянь системи, дорівнює $N-1$.

Методи оцінювання параметрів системи рівнянь

Залежно від результату перевірки умови ідентифікованості кожного рівняння системи застосовують такі методи:

1) якщо кожне рівняння системи є точно ідентифікованим, то для оцінки параметрів зведеної моделі застосовують **непрямий метод найменших квадратів (НМНК)**; ідея методу полягає в тому, щоб від структурної форми перейти до зведеної, звичайним МНК оцінити параметри останньої, і оберненим перетворенням одержати оцінки параметрів структурної форми;

2) позбутися кореляції між змінними та залишками моделі дозволяє також **метод інструментальних змінних**, ідея якого полягає в тому, щоб змінні, що корелюють із залишками, замінити іншими – інструментальними, які тісно пов'язані з незалежними змінними моделі, але зовсім не пов'язані з її залишками;

3) якщо рівняння структурної форми моделі надідентифіковані, то для оцінки параметрів моделі застосовують **двокроковий метод найменших квадратів (2МНК)**, за яким оцінювання виконується у два етапи: на першому – ендогенні змінні «звільняються» від стохастичних залишків; на другому –

оцінені рівняння підставляються у структурну систему рівнянь, до яких потім застосовують звичайний;

4) **трикроковий метод найменших квадратів** для одночасного оцінювання всіх рівнянь системи за певних обставин є більш ефективним порівняно з непрямим та двокроковим МНК.

Прогноз і загальні довірчі інтервали

Точковий прогноз залежних змінних визначається на підставі зведеної (прогнозної) форми економетричної моделі, заданої системою одночасних рівнянь.

Визначення довірчих інтервалів для цього прогнозу залежить від способу, яким було отримано зведену форму моделі.

У загальному випадку **довірчі інтервали** для кожної ендогенної змінної задаються співвідношенням

$$\left(\hat{Y}_i - t_{\varepsilon/2}\sqrt{S^2_{ii,}},\ \ \hat{Y}_i + t_{\varepsilon/2}\sqrt{S^2_{ii}},\right), i = 1,2,\ldots,r,$$

де S^2_{ii} – дисперсія залишків i-го рівняння моделі, $t^2_{\alpha/2} = F_\alpha$ – табличне значення критерію Фішера з рівнем значущості α при $(r, n-k-r+1)$ ступенях свободи, де r – кількість рівнянь системи, n – загальна кількість спостережень, k – кількість екзогенних змінних i-го рівняння системи.

Довірчі інтервали для всіх ендогенних змінних визначають за формулами:

$$\left(\begin{array}{l} \hat{Y}_i - \sqrt{\dfrac{\left[1 + X^{/}_j \left(X^{/} X\right)^{-1}\right](n-k)r}{n-k-r+1}} \cdot S^2_{ii}, \\ \hat{Y}_i + \sqrt{\dfrac{\left[1 + X^{/}_j \left(X^{/} X\right)^{-1}\right](n-k)r}{n-k-r+1}} \cdot S^2_{ii} \end{array}\right),$$

де X_j – матриця спостережень k екзогенних змінних, що ввійшли в i-те рівняння системи, розмірності $n \times k$, X – загальна матриця спостережень, розмірності $n \times r$, r – загальна кількість рівнянь системи.

4.2. Передумови побудови економетричної моделі. Постановка задачі

На наступному етапі спробуємо узагальнити проведене дослідження, а саме: поставимо завдання розробити економетричну модель держави з урахуванням впливу основних макроекономічних показників. При цьому суттєвим обмеженням є те, що така модель повинна описувати відкриту економічну систему господарства з можливістю економічного втручання з боку держави. Припустімо, необхідно враховувати такі економічні показники: індивідуальне споживання, приватні чисті інвестиції та основний капітал (без резерву інвестицій), імпорт, національний дохід.

Наведеним вище вимогам відповідає класична економетрична модель, запропонована Людеке. Її загальна структурно-функціональна схема має такий вигляд (рис. 4.1):

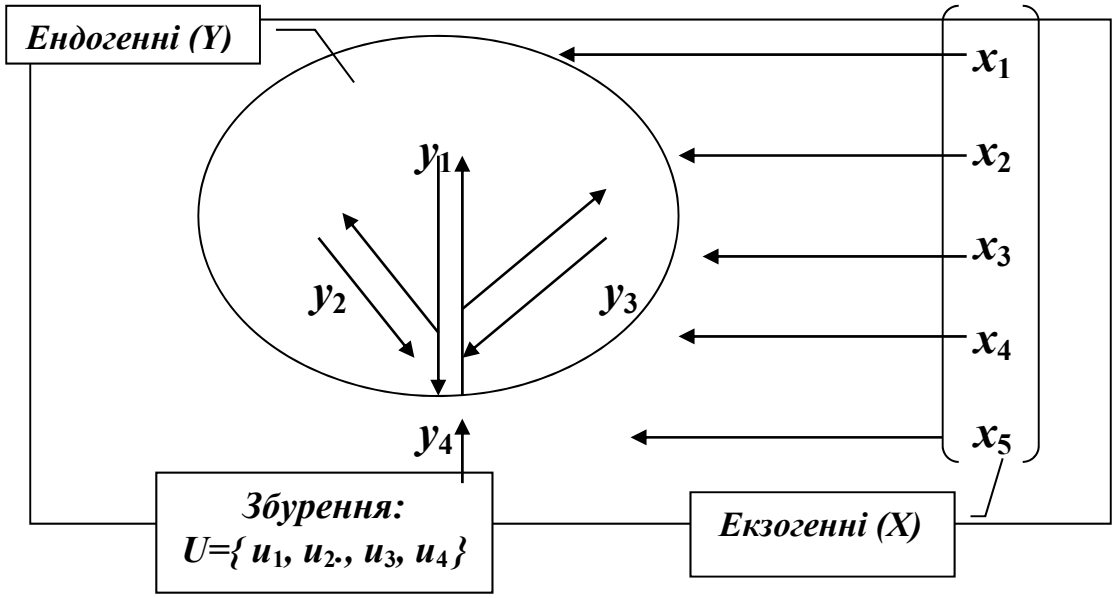


Рис. 4.1. Структурно-функціональна схема відкритої економічної системи [21]

Позначення на рис. 4.1 мають такий економічний зміст:

Ідентифікатор	Зміст ідентифікатора
Ендогенні змінні[2]	
$y_{t1} = C_t$	індивідуальне споживання у незмінних цінах
$y_{t2}=I_t$	приватні чисті інвестиції й основний капітал (без резерву інвестицій) у незмінних цінах
$y_{t3}=Im_t$	імпорт у незмінних цінах
$y_{t4}=Y_t$	національний дохід у незмінних цінах
Наперед визначені змінні[3]	
$x_{t1}\equiv 1$	допоміжна (фіктивна) змінна[4]
$x_{t2}=C_{t-1}$	індивідуальне споживання за попередній період часу;
$x_{t3}=U_{t-1}$	доходи населення, що одержані від підприємницької діяльності, дивіденди та нерозподілений прибуток підприємств до обкладання податком за попередній період часу
$x_{t4}=Im_{t-1}$	імпорт за попередній період часу
$x_{t5}=G_t$	(державні витрати)+(державні чисті інвестиції та основний капітал)+(зміни у тов запасах)+(експорт)+(субсидії)-(непрямі податки)

[2] *Внутрішньосистемні змінні*, які пояснюються даною моделлю при побудові причинно-наслідкових відносин. Їх значення є результатом одночасної взаємодії змінних, які входять до моделі. Вони залежать від екзогенних та збурюваних змінних. Ендогенні змінні є залежними змінними. Ендогенні змінні, які пояснюються економетричною моделлю у момент часу *t* (*звичайні ендогенні змінні*), називаються спільно залежними змінними. Ці змінні спільно залежні, оскільки між ними існують багатосторонні зв'язки, і визначаються не одним рівнянням, а одночасними рівняннями моделі. У зв'язку з цим економетричну модель можна розглядати як систему рівнянь, у якій визначені спільно залежні змінні через наперед визначені змінні і збурення.

[3] Запізнюючі ендогенні та незапізнюючі та значення яких відстають на один чи декілька періодів часу екзогенні змінні. Екзогенні (позасистемні) – такі вхідні змінні при побудові причинно-наслідкових відносин, які не пояснюються у рамках даної моделі. Таким чином, екзогенні змінні – це змінні, значення яких у кожний період часу *t* визначаються поза моделлю. Екзогенні змінні визначають ендогенні змінні, але самі не знаходяться під їх впливом. Наперед визначені змінні, значення яких відстають на один чи декілька періодів називаються запізнюючими чи лаговими змінними. Незапізнюючі змінні, які завчасно наперед визначені та пояснюються не економетричною моделлю, а факторами поза нею, називаються звичайними екзогенними змінними. Змінні, які завчасно наперед визначені і їх значення належать попереднім періодам часу та пояснюються поза моделлю, називаються лаговими екзогенними змінними. Змінні, наперед визначеність яких випливає із попереднього пояснення економетричної моделі, називаються лаговими ендогенними змінними. Економічні величини, які не входять до рівняння економетричних моделей, але впливають на спільно залежні змінні, називаються *збурюваними* (латентними) змінними.

Латентні змінні формуються завдяки випадковим впливам різноманітного характеру та різних помилок, які пов'язані, наприклад, з вимірюванням самих величин.

[4] Фіктивна змінна – змінна, яка завжди дорівнює одиниці.

Така модель, виходячи з економіко-логіко-теоретичних міркувань, може бути представлена у вигляді системи структурних рівнянь[5]:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 U_{t-1} + u_{t2} \\ \mathrm{Im}_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2\, \mathrm{Im}_{t-1} + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t - \mathrm{Im}_t + G_t \end{cases}. \qquad (4.1)$$

Зазначимо, що структурна форма економетричної моделі (4.1) відображає зв'язки між пояснюючими змінними (що були обрані для дослідження), тобто зв'язки, які описуються вербально теорією економіки.

При цьому при конструюванні моделі (4.1) виходили із загальних принципів складання рівнянь, які входять до моделі, а саме:

1) вибирають цільові функції, які становлять особливий інтерес для дослідника;

2) для кожної цільової функції складається рівняння, в якому її зміни пояснюються за допомогою інших змінних;

3) для пояснення змінних, своєю чергою, складаються власні рівняння і цей процес відбувається доти, поки непоясновальними залишаться тільки ті змінні, які неможливо або неприпустимо пояснити у рамках даної моделі.

Крім того, спільно зі структурними рівняннями до економетричної моделі включено і так зване *визначальне* (*четверте*) *рівняння – тотожність*. Воно було необхідне для адекватного відображення реальної дійсності і повного охоплення змінних, що досліджуються, одночасними співвідношеннями. Як видно, це рівняння не вміщує збурених

[5] Грубер Й. Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії : у 2 т. – Київ : Нічлава, 1998. – Т. І. – С. 244–246.; Иванова В.М. Экономическая теория. Основы бизнеса. – Ч. IY: Эконометрика / ред. совет: А.Д. Смирнов, В.Ф. Максимова и др. – М. : СОМИНТЭК, 1991. – 158 с.

змінних і їх параметри відомі (у загальному випадку дорівнюють одиниці). Тому вони не підлягають оцінці та під час проведення процедури оцінювання параметрів моделі можуть бути завчасно вилучені.

Після того, коли було складено структурну форму моделі, постала проблема визначення її структурних параметрів на основі спостереження над спільно залежними змінними та визначеними змінними – проблема ідентифікації моделі. Ця проблема виникає завжди при конструюванні систем одночасних рівнянь, які описують взаємозв'язки, що досліджуються. При цьому, при виконанні ряду припущень щодо збурення та закону їх розподілу проблема ідентифікації розв'язується позитивно. Оскільки економетрична модель ідентифікується, якщо ідентифікуються структурні рівняння, то під час розв'язання проблеми ідентифікації кожне структурне рівняння повинно бути перевірено на ідентифікованість, але при цьому потрібно пам'ятати, що ідентифікація окремого рівняння залежить не стільки від самого рівняння, скільки від виду всіх структурних рівнянь. Таким чином, виходячи з вищевикладеного, можна зробити висновок, що ідентифікованість структурних рівнянь означає таке. Шляхом лінійної комбінації деяких або всіх рівнянь моделі неможливо отримати жодного з рівнянь, яке було б у протиріччі з самою моделлю та параметри якого відрізнялися б від параметрів структурних рівнянь, що підлягають оцінці. Якщо модель не ідентифікована, то її параметри оцінити неможливо. У цьому випадку потрібно починати не з нового збору первинних даних, а з нового конструювання всієї моделі або її окремих рівнянь.

Для ідентифікації економетричної моделі обрано критерій правила рахунку[6], який формулюється таким чином: необхідною, але недостатньою умовою ідентифікації моделі є: кількість наперед визначених змінних, які містяться у моделі, але виключені зі структурного рівняння, що розглядаються у

[6] Иванова В.М. Экономическая теория. Основы бизнеса: Ч. IY: Эконометрика / ред. совет : А.Д. Смирнов, В.Ф. Максимова и др. – М. : СОМИНТЭК, 1991. – 158 с.

крайньому разі, повинна дорівнювати кількості спільно залежних змінних у структурному рівнянні, що розглядається, мінус одиниця, тобто:

$$m_i^* \geq g_i - 1, \qquad (4.2)$$

де m_i^* – кількість наперед визначених змінних, виключених з i-го структурного рівняння (m – загальна кількість наперед-визначених змінних моделі); g_i – кількість спільно залежних змінних, які містяться в i-му структурному рівнянні.

Критерій (4.2) визначає, чи достатньо введено обмежень (наприклад, нульових) на параметри моделі в окремих структурних рівняннях, щоб їх можна було ідентифікувати, а саме:

а) якщо $m_i^* = g_i - 1$, то кількість обмежень достатня, щоб однозначно визначити параметри структурних рівнянь за їх наведеною формою – *точна ідентифікація;*

б) якщо $m_i^* > g_i - 1$, то структурне рівняння ідентифікується і в цьому випадку обмежень більше, ніж це необхідно для ідентифікації – *надідентифікація*;

в) якщо $m_i^* < g_i - 1$, то *структурне рівняння не ідентифікується*, бо число обмежень недостатнє і тому відповідне рівняння статистично не відрізняються від інших рівнянь.

Отже, при $m_i^* = g_i - 1$ можливо застосовувати МНК у прогнозній формі, якщо виконуються передумови відносно збурень.

Якщо $m_i^* > g_i - 1$, то в цьому випадку потрібно скористатися іншими методами, наприклад, двокроковим МНК або методом максимальної правдоподібності.

Якщо $m_i^* < g_i - 1$, то оцінку параметрів структурних рівнянь визначити неможливо.

Альтернативою правила рахунку є умова: кількість виключених з рівняння наперед визначених змінних повинна бути не меншою ніж кількість ендогенних змінних, що беруть у ньому участь, зменшеного на одиницю.

Нагадаємо, що *другим критерієм,* який відображає необхідну та достатню умову ідентифікованості є *правило порядку*. Воно дає змогу точно встановити наявність або відсутність ідентифікованості. При його застосуванні до уваги беруться ті змінні, які виключені з рівняння, що досліджується. По коефіцієнтах при цих змінних в інших рівняннях моделі будується матриця, ранг якої повинен бути не менше за $g - 1$, де g – загальна кількість спільно залежних змінних.

Але, *до недоліків правила порядку* належать ті, що для його застосування потрібно, щоб параметри моделі були відомими. При невеликій кількості рівнянь можливо на основі методу експертних оцінок або логіко-теоретичних міркувань припустити, які параметри відмінні від нуля. При великій кількості рівнянь і змінних таке припущення не завжди може бути виправданим. Тому *на практиці частіше використовують правило рахунку*, яке дає прийнятні результати.

Нижче наведені розрахунки щодо перевірки на ідентифікованість кожного зі структурних рівнянь економетричної моделі (4.1).

Для першого рівняння $C_t = a_0 x_1 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1}$:

$m = 5$ ($x_{t1} \equiv 1$, $C_{t\text{-}1}$, $U_{t\text{-}1}$, $Im_{t\text{-}1}$, G_t); $g = 4$ (C_t, I_t, Im_t, Y_t); $g_1 = 2$ (C_t, Y_t); $m_1 = 2$ ($x_{t1} \equiv 1$, $C_{t\text{-}1}$,); $m_1^* = m - m_1 = 5 - 2 = 3 > g_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ [структурне рівняння – *надідентифіковане* і для оцінки параметрів рівняння потрібно скористатися двокроковим методом найменших квадратів (МНК)].

Для другого рівняння $I_t = b_0 x_1 + b_1 Y_t + b_2 U_{t-1} + u_{t2}$:

$m = 5$ ($x_{t1} \equiv 1$, $C_{t\text{-}1}$, $U_{t\text{-}1}$, $Im_{t\text{-}1}$, G_t); $g = 4$ (C_t, I_t, Im_t, Y_t); $g_2 = 2$ (I_t, Y_t); $m_2 = 2$ ($x_{t1} \equiv 1$, $U_{t\text{-}1}$,); $m_2^* = m - m_2 = 5 - 2 = 3 > g_2 - 1 = 2 - 1 = 1$ [структурне рівняння – *надідентифіковане* і для оцінки параметрів рівняння потрібно скористатися двокроковим методом найменших квадратів (МНК)].

Для третього рівняння $\mathrm{Im}_t = c_0 x_1 + c_1 Y_t + c_2 \mathrm{Im}_{t-1} + u_{t3}$:

$m = 5$ ($x_{t1} \equiv 1$, C_{t-1}, U_{t-1}, Im_{t-1}, G_t); $g = 4$ (C_t, I_t, Im_t, Y_t); $g_3 = 2$ (I_t, Y_t); $m_3 = 2$ ($x_{t1} \equiv 1$, Im_{t-1},); $m_3^* = m - m_3 = 5 - 2 = 3 > g_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ [структурне рівняння – *надідентифіковане* та для оцінки параметрів рівняння потрібно скористатися двокроковим методом найменших квадратів (МНК)].

Таким чином структурні параметри кожного структурного рівняння можна оцінити двокроковим методом найменших квадратів.

4.3. Алгоритм вирішення задачі та її формалізація

Для вирішення задачі скористаємося таким алгоритмом.

Крок 1. Постановка задачі, виходячи з економіко-логіко-теоретичних міркувань (виконано у підрозділі 4.1).

Крок 2. Побудова структурної форми економетричної моделі (виконано у п. 4.1).

Крок 3. Перевірка кожного рівняння структурної форми економетричної моделі на ідентифікованість за критерієм рахунку (виконано у п. 4.1).

Крок 4. Збір і попередня обробка статистичної інформації, що відображає реальний стан системи, що досліджується (*по-перше* – це наявність у розпорядженні дослідника такої інформації, *по-друге* – наскільки ця інформація відповідає дійсності, *по-третє* – наскільки вона узгоджена у часі).

Крок 5. Формалізація структурної та побудова динамічної системи[7] рівнянь структурної моделі. Представлення її

[7] Система рівнянь структурної моделі називається динамічною, якщо хоча б одна ендогенна змінна цієї системи є запізнілою (тобто містить лагову ендогенну змінну). Порядком p системи рівнянь структурної моделі називається найбільше запізнювання ендогенної змінної. На практиці при побудові економетричних моделей часто обмежуються динамічною системою першого порядку, коли $p = 1$. Екзогенні змінні можуть бути звичайними і запізнюваними на один період. Така система звичайно буває достатньою для пояснення економічних взаємозв'язків.

в наочному вигляді за допомогою *діаграм причинно-наслідкових зв'язків* або/і *хрестоподібної діаграми*.

Крок 6. Оцінювання на основі двокрокового МНК (у випадку надідентифікованості) параметрів структурних рівнянь економетричної моделі.

Крок 7. Перевірка моделі на адекватність (за допомогою статистичних гіпотез) реальній економічній системі, що досліджується.

Крок 8. Побудова прогнозної (приведеної) форми економетричної моделі.

Крок 9. Економіко-логіко-теоретична інтерпретація одержаних на моделях (*структурної та прогнозної)* результатів моделювання *(загальний та частинний ефекти прогнозних форм та економічну інтерпретацію коефіцієнтів, ефект і загальний ефект із використанням статичних і динамічних мультиплікаторів, аналіз мультиплікаторів, враховуючи лаги (імпульсні з нульовим лагом, динамічні з лагом більшим чи таким, що дорівнює одиниці), характеристика матриці мультиплікаторів в її економіко-теоретичному змісті тощо*).

Крок 10. Використання сконструйованих моделей у системі підтримки прийняття управлінських рішень.

Відповідно до розробленого алгоритму представимо статистичну базу, що відповідає дійсному стану досліджуваної системи, є повною і не потребує відновлення вихідної інформації, відображає всі змінні (ендогенні та наперед визначені) та згрупуємо дані у вигляді табл. 4.1.

Таблиця 4.1

№ (t)	Період	$y_{t1} = C_t$	$y_{t2} = I_t$	$y_{t3} = Im_t$	$y_{t4} = Y_t$	$x_{t3} = U_t$	$x_{t5} = G_t$
1	1кв. 2011	220,50	2,13	164,82	261,78	2,74	201,12
2	2кв. 2011	248,73	1,11	177,04	307,37	3,03	138,89
3	3кв. 2011	266,38	3,13	189,70	370,91	4,54	84,82
4	4кв. 2011	288,73	6,96	201,97	357,78	3,61	101,67
5	1кв. 2012	257,04	4,20	174,72	293,91	2,49	187,75
6	2кв. 2012	289,71	3,62	202,44	349,35	2,91	121,26
7	3кв. 2012	306,52	4,36	206,10	377,02	4,71	83,41
8	4кв. 2012	327,84	6,85	208,59	376,47	3,63	125,36
9	1кв. 2013	271,60	3,83	172,93	299,62	2,80	186,77
10	2кв. 2013	316,55	2,44	173,94	348,66	3,13	84,47

Закінчення табл. 4.1

№ (t)	Період	$y_{t1} = C_t$	$y_{t2} = I_t$	$y_{t3} = Im_t$	$y_{t4} = Y_t$	$x_{t3} = U_t$	$x_{t5} = G_t$
11	3кв. 2013	325,12	4,46	212,80	385,91	4,79	75,13
12	4кв. 2013	349,77	7,02	205,06	398,91	3,80	115,78
13	1кв. 2014	288,33	4,89	164,54	311,49	3,43	181,93
14	2кв. 2014	330,55	4,80	212,75	370,06	3,82	78,30
15	3кв. 2014	322,74	5,37	218,91	427,98	5,53	74,65
16	4кв. 2014	377,65	6,30	237,94	439,64	4,36	123,53
17	1кв. 2015	317,42	5,09	259,75	375,99	3,98	182,16
18	2кв. 2015	362,95	5,45	247,78	400,64	4,36	93,16
19	3кв. 2015	391,16	7,03	269,67	421,25	6,85	97,78
20	4кв. 2015	410,26	7,03	254,78	440,05	5,48	160,35

Зауваження 1. Статистичні дані наведені у *млрд грн.*

Зауваження 2. Джерелом статистичної інформації є офіційні сайти:

1. «Індивідуальне споживання»
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2015/vvp/kvznr/arh_kvznr_2015_u.htm
або http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2015/gdn/dvn/dvn_u/dvn0115_u.htm
або
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2007/gdn/dvn_ric/dvn_ric_u/arh_dvn_kv_u.htm
2. «Приватні чисті інвестиції й основний капітал (без резерву інвестицій)»
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2014/ibd/kindj/infin_u/infin03_10-13u_bez.htm
3. «Імпорт»
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2012/vvp/vvp_kv/vvp_kv_u/vvpf_kv2012_u_n.htm
4. «Національний дохід»
https://ukrstat.org/uk/express/expr2012/expres_2012.html
або http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2014/vvp/vnd/vnd_14_u.html
5. «Доходи населення, що одержані від підприємницької діяльності,
дивіденди та нерозподілений прибуток підприємств до обкладання податком»
http://www.ukrstat.gov.ua/druk/publicat/Arhiv_u/17/Arch_vrd_bl.
htm ст. 63 «Структура грошових доходів і сукупних ресурсів домогосподарств»
http://www.ukrstat.gov.ua/druk/publicat/Arhiv_u/17/Arch_vrd_bl.htm ст.63
«Структура грошових доходів і сукупних ресурсів домогосподарств»
6. «Державні витрати»
http://www.ac-rada.gov.ua/control/main/uk/publish/article/602600?cat_id=34761 ;
http://www.treasury.gov.ua/main/uk/doccatalog/list?currDir=146477
7. «Державні чисті інвестиції та основний капітал»
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2014/ibd/kindj/infin_u/infin03_10-13u_bez.htm
8. «Зміни у товарних запасах»
http://www.ukrstat.gov.ua-публікації-внутрішня торгівля-
«Продаж і запаси товарів (продукції) в оптовій торгівлі». – С. 20
«Товарна структура запасів на підприємствах»
9. «Експорт»
стат інф/рег стат/обсяги експорту-імпорту послуг/обсяги експорту-імпорту послуг
за регіонами (щоквартальна інформація)
10. «Субсидії»
http://www.ukrstat.gov.ua/express/expr2016/01/8xl.zip
11. «Непрямі податки»
http://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2015/vvp/vvp_kv/vvp_kv_u/vvpf_kv2015_u_n.htm

Перейдемо до п'ятого кроку алгоритму – формалізації задачі.

Для цього систему (4.1) запишемо у такому вигляді (відповідно до тих позначень, що були введені у п. 4.1):

$$\begin{cases} y_{t1} = \beta_{11}x_{t1} + \gamma_{41}y_{t4} + \beta_{21}x_{t2} + u_{t1} \\ y_{t2} = \beta_{12}x_{t1} + \gamma_{42}y_{t4} + \beta_{31}x_{t3} + u_{t2} \\ y_{t3} = \beta_{13}x_{t1} + \gamma_{43}y_{t4} + \beta_{43}x_{t4} + u_{t3} \\ y_{t4} = y_{t1} + y_{t2} - y_{t3} + x_{t5} \end{cases}. \qquad (4.2)$$

Для того, щоб записати систему (4.2) у матричному вигляді, перепишемо останню у такому вигляді (до неї у кожному рівнянні введені всі змінні, але якщо якої-небудь змінної у будь-якому рівнянні системи немає, вводимо цю змінну, помножуючи її на нуль):

$$\begin{cases} -1\cdot y_{t1} + 0\cdot y_{t2} + 0\cdot y_{t3} + \gamma_{41}y_{t4} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{21}x_{t2} + 0\cdot x_{t3} + 0\cdot x_{t4} + 0\cdot x_{t5} + u_{t1} = 0 \\ 0\cdot y_{t1} - 1\cdot y_{t2} + 0\cdot y_{t3} + \gamma_{42}y_{t4} + \beta_{12}x_{t1} + 0\cdot x_{t2} + \beta_{31}x_{t3} + 0\cdot x_{t4} + 0\cdot x_{t5} + u_{t2} = 0 \\ 0\cdot y_{t1} + +0\cdot y_{t2} - 1\cdot y_{t3} + \gamma_{43}y_{t4} + \beta_{13}x_{t1} + 0\cdot x_{t2} + 0\cdot x_{t3} + \beta_{43}x_{t4} + 0\cdot x_{t5} + u_{t3} = 0 \\ 1\cdot y_{t1} + 1\cdot y_{t2} - 1\cdot y_{t3} - 1\cdot y_{t4} + 0\cdot x_{t1} + 0\cdot x_{t2} + 0\cdot x_{t3} + 0\cdot x_{t4} + 1\cdot x_{t5} + 0\cdot u_{t4} = 0. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Введемо такі позначення матриць:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & -1 \end{array}\right) \end{array} \left| \begin{array}{l} y_{t1} = C_t \\ y_{t2} = I_t \\ y_{t3} = \mathrm{Im}_t \\ y_{t4} = Y_t \end{array} \right. \Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (4.4)$$

$$B_1 = \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix}$$
$$\left.\begin{pmatrix} \beta_{(1)11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{(1)33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} y_{t-1,1} = C_{t-1} \\ y_{t-1,2} = I_{t-1} \\ y_{t-1,3} = \mathrm{Im}_{t-1} \\ y_{t-1,4} = Y_{t-1} \end{matrix} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$D_0 = \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix}$$
$$\left.\begin{pmatrix} \delta_{(0)11} & \delta_{(0)12} & \delta_{(0)13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{(0)34} \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} w_{t,1} = x_t \\ w_{t,2} = U_t \\ w_{t,3} = G_t \end{matrix} \Rightarrow D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$D_1 = \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix}$$
$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{(0)12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} w_{t-1,1} = x_t \\ w_{t-1,2} = U_{t-1} \\ w_{t-1,3} = G_{t-1} \end{matrix} \Rightarrow D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} Y = (y_{t1}, y_{t2}, y_{t3}, y_{t4}) = (C_t, I_t, \mathrm{Im}_t, Y_t), \\ Y_{-1} = (y_{t-1,1}, y_{t-1,2}, y_{t-1,3}, y_{t-1,4}) = (C_{t-1,}, I_{t-1}, \mathrm{Im}_{t-1}, Y_{t-1}) \\ W_0 = (w_{t1}, w_{t2}, w_{t3}) = (1, U_t, G_t) \\ W_{-1} = (w_{t-1,1}, w_{t-1,2}, w_{t-1,3}) = (1, U_{t-1}, G_{t-1}). \end{cases} \quad (4.8)$$

Тепер можемо записати динамічну форму економетричної моделі (4.1), яка буде мати такий вигляд:

$$YГ + Y_{-1}B_1 + W_0D_0 + W_{-1}D_1 + U = 0. \quad (4.9)$$

Усе викладене вище для прикладу можна записати у вигляді хрестоподібної та стрілкової діаграм, які наведені на рис. 4.2 та 4.3 відповідно.

C_t	I_t	Im_t	Y_t	Пояснюючі змінні	
1	●	●	×	C_t	Відображає матрицю Г
●	1	●	×	I_t	
●	●	1	×	Im_t	
×	×	×	1	Y_t	
×	●	●	●	C_{t-1}	Відображає матрицю B_1
●	●	●	●	I_{t-1}	
●	●	×	●	Im_{t-1}	
●	●	●	●	Y_{t-1}	
×	×	×	●	x_{t1}	Відображає матрицю D_0
●	●	●	●	U_t	
●	●	●	×	G_t	
●	●	●	●	$x_{t-1,1} = x_{t1} = 1$	Відображає матрицю D_1
●	×	●	●	U_{t-1}	
●	●	●	●	G_{t-1}	

Рис. 4.2. Хрестоподібна діаграма

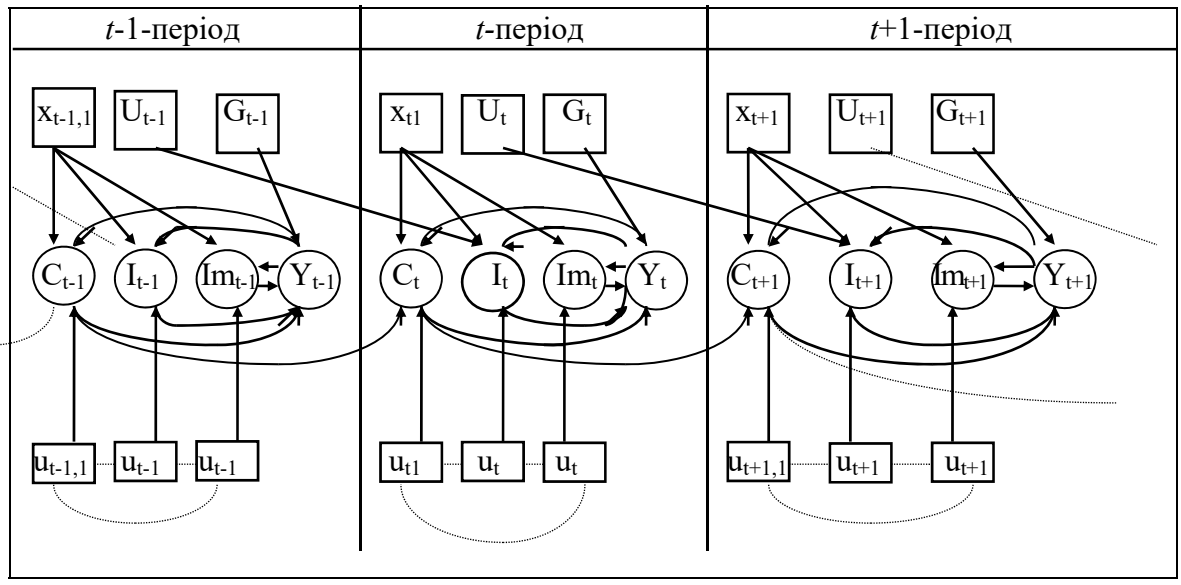


Рис. 4.3. Стрілкова діаграма

У п. 4.3 розглянуті питання щодо виконання наступного кроку алгоритму, а саме: вирішення задачі оцінювання параметрів економетричної моделі, що описує економічну систему країни.

4.4. Оцінювання параметрів економетричної моделі

Перед тим, як розпочати виконання шостого кроку алгоритму, перепишемо табл. 4.1 у такому вигляді (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

№	Період	$y_{t1} = C_t$	$y_{t2} = I_t$	$y_{t3} = Im_t$	$y_{t4} = Y_t$	$x_{t1} = 1$	$x_{12} = C_{t-1}$	$x_{t3} = U_{t-1}$	$x_{t4} = Im_{t-1}$	$x_{t5} = G_t$
1	1кв. 2011	220,50	2,13	164,82	261,78	1,0				201,12
2	2кв. 2011	248,73	1,11	177,04	307,37	1,0	220,50	2,74	164,82	138,89
3	3кв. 2011	266,38	3,13	189,70	370,91	1,0	248,73	3,03	177,04	84,82
4	4кв. 2011	288,73	6,96	201,97	357,78	1,0	266,38	4,54	189,70	101,67
5	1кв. 2012	257,04	4,20	174,72	293,91	1,0	288,73	3,61	201,97	187,75
6	2кв. 2012	289,71	3,62	202,44	349,35	1,0	257,04	2,49	174,72	121,26
7	3кв. 2012	306,52	4,36	206,10	377,02	1,0	289,71	2,91	202,44	83,41
8	4кв. 2012	327,84	6,85	208,59	376,47	1,0	306,52	4,71	206,10	125,36
9	1кв. 2013	271,60	3,83	172,93	299,62	1,0	327,84	3,63	208,59	186,77
10	2кв. 2013	316,55	2,44	173,94	348,66	1,0	271,60	2,80	172,93	84,47
11	3кв. 2013	325,12	4,46	212,80	385,91	1,0	316,55	3,13	173,94	75,13
12	4кв. 2013	349,77	7,02	205,06	398,91	1,0	325,12	4,79	212,80	115,78
13	1кв. 2014	288,33	4,89	164,54	311,49	1,0	349,77	3,80	205,06	181,93
14	2кв. 2014	330,55	4,80	212,75	370,06	1,0	288,33	3,43	164,54	78,30
15	3кв. 2014	322,74	5,37	218,91	427,98	1,0	330,55	3,82	212,75	74,65
16	4кв. 2014	377,65	6,30	237,94	439,64	1,0	322,74	5,53	218,91	123,53
17	1кв. 2015	317,42	5,09	259,75	375,99	1,0	377,65	4,36	237,94	182,16
18	2кв. 2015	362,95	5,45	247,78	400,64	1,0	317,42	3,98	259,75	93,16
19	3кв. 2015	391,16	7,03	269,67	421,25	1,0	362,95	4,36	247,78	97,78
20	4кв. 2015	410,26	7,03	254,78	440,05	1,0	391,16	6,85	269,67	160,35
							410,26	5,48	254,78	

Після вилучення першого та останнього рядків із табл. 4.2, одержимо таку таблицю (табл. 4.3, перший стовпчик перенумеровано):

Таблиця 4.3

№	Період	$y_{t1} = C_t$	$y_{t2} = I_t$	$y_{t3} = Im_t$	$y_{t4} = Y_t$	$x_{t1} = 1$	$x_{t2} = C_{t-1}$	$x_{t3} = U_{t-1}$	$x_{t4} = Im_{t-1}$	$x_{t5} = G_t$
1	2кв. 2011	248,73	1,11	177,04	307,37	1,0	220,50	2,74	164,82	138,89
2	3кв. 2011	266,38	3,13	189,70	370,91	1,0	248,73	3,03	177,04	84,82
3	4кв. 2011	288,73	6,96	201,97	357,78	1,0	266,38	4,54	189,70	101,67
4	1кв. 2012	257,04	4,20	174,72	293,91	1,0	288,73	3,61	201,97	187,75
5	2кв. 2012	289,71	3,62	202,44	349,35	1,0	257,04	2,49	174,72	121,26
6	3кв. 2012	306,52	4,36	206,10	377,02	1,0	289,71	2,91	202,44	83,41
7	4кв. 2012	327,84	6,85	208,59	376,47	1,0	306,52	4,71	206,10	125,36
8	1кв. 2013	271,60	3,83	172,93	299,62	1,0	327,84	3,63	208,59	186,77
9	2кв. 2013	316,55	2,44	173,94	348,66	1,0	271,60	2,80	172,93	84,47
10	3кв. 2013	325,12	4,46	212,80	385,91	1,0	316,55	3,13	173,94	75,13
11	4кв. 2013	349,77	7,02	205,06	398,91	1,0	325,12	4,79	212,80	115,78
12	1кв. 2014	288,33	4,89	164,54	311,49	1,0	349,77	3,80	205,06	181,93
13	2кв. 2014	330,55	4,80	212,75	370,06	1,0	288,33	3,43	164,54	78,30
14	3кв. 2014	322,74	5,37	218,91	427,98	1,0	330,55	3,82	212,75	74,65
15	4кв. 2014	377,65	6,30	237,94	439,64	1,0	322,74	5,53	218,91	123,53
16	1кв. 2015	317,42	5,09	259,75	375,99	1,0	377,65	4,36	237,94	182,16
17	2кв. 2015	362,95	5,45	247,78	400,64	1,0	317,42	3,98	259,75	93,16
18	3кв. 2015	391,16	7,03	269,67	421,25	1,0	362,95	4,36	247,78	97,78
19	4кв. 2015	410,26	7,03	254,78	440,05	1,0	391,16	6,85	269,67	160,35

Перейдемо до складання відповідних матриць:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{t1}=C_t & y_{t2}=I_t & y_{t3}=Im_t & y_{t4}=Y_t \\ 248,73 & 1,11 & 177,04 & 307,37 \\ 266,38 & 3,13 & 189,70 & 370,91 \\ 288,73 & 6,96 & 201,97 & 357,78 \\ 257,04 & 4,20 & 174,72 & 293,91 \\ 289,71 & 3,62 & 202,44 & 349,35 \\ 306,52 & 4,36 & 206,10 & 377,02 \\ 327,84 & 6,85 & 208,59 & 376,47 \\ 271,60 & 3,83 & 172,93 & 299,62 \\ 316,55 & 2,44 & 173,94 & 348,66 \\ 325,12 & 4,46 & 212,80 & 385,91 \\ 349,77 & 7,02 & 205,06 & 398,91 \\ 288,33 & 4,89 & 164,54 & 311,49 \\ 330,55 & 4,80 & 212,75 & 370,06 \\ 322,74 & 5,37 & 218,91 & 427,98 \\ 377,65 & 6,30 & 237,94 & 439,64 \\ 317,42 & 5,09 & 259,75 & 375,99 \\ 362,95 & 5,45 & 247,78 & 400,64 \\ 391,16 & 7,03 & 269,67 & 421,25 \\ 410,26 & 7,03 & 254,78 & 440,05 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{t1}=1 & x_{t2}=C_{t-1} & x_{t3}=U_{t-1} & x_{t4}=Im_{t-1} & x_{t5}=G_t \\ 1,0 & 220,50 & 2,74 & 164,82 & 138,89 \\ 1,0 & 248,73 & 3,03 & 177,04 & 84,82 \\ 1,0 & 266,38 & 4,54 & 189,70 & 101,67 \\ 1,0 & 288,73 & 3,61 & 201,97 & 187,75 \\ 1,0 & 257,04 & 2,49 & 174,72 & 121,26 \\ 1,0 & 289,71 & 2,91 & 202,44 & 83,41 \\ 1,0 & 306,52 & 4,71 & 206,10 & 125,36 \\ 1,0 & 327,84 & 3,63 & 208,59 & 186,77 \\ 1,0 & 271,60 & 2,80 & 172,93 & 84,47 \\ 1,0 & 316,55 & 3,13 & 173,94 & 75,13 \\ 1,0 & 325,12 & 4,79 & 212,80 & 115,78 \\ 1,0 & 349,77 & 3,80 & 205,06 & 181,93 \\ 1,0 & 288,33 & 3,43 & 164,54 & 78,30 \\ 1,0 & 330,55 & 3,82 & 212,75 & 74,65 \\ 1,0 & 322,74 & 5,53 & 218,91 & 123,53 \\ 1,0 & 377,65 & 4,36 & 237,94 & 182,16 \\ 1,0 & 317,42 & 3,98 & 259,75 & 93,16 \\ 1,0 & 362,95 & 4,36 & 247,78 & 97,78 \\ 1,0 & 391,16 & 6,85 & 269,67 & 160,35 \end{pmatrix}$$

$U=$

u_1	u_2	u_3	$u_4=0$
u_{11}	u_{12}	u_{13}	$u_{14}=0$
u_{21}	u_{22}	u_{23}	$u_{34}=0$
u_{31}	u_{12}	u_{33}	$u_{34}=0$
u_{41}	u_{42}	u_{43}	$u_{44}=0$
u_{51}	u_{52}	u_{53}	$u_{54}=0$
u_{61}	u_{62}	u_{63}	$u_{64}=0$
u_{71}	u_{72}	u_{73}	$u_{74}=0$
u_{81}	u_{82}	u_{83}	$u_{84}=0$
u_{91}	u_{92}	u_{93}	$u_{94}=0$
$u_{10,1}$	$u_{10,2}$	$u_{10,3}$	$u_{10,4}=0$
$u_{11,1}$	$u_{11,2}$	$u_{11,3}$	$u_{11,4}=0$
$u_{12,1}$	$u_{12,2}$	$u_{12,3}$	$u_{12,4}=0$
$u_{13,1}$	$u_{13,2}$	$u_{13,3}$	$u_{13,4}=0$
$u_{14,1}$	$u_{14,2}$	$u_{14,3}$	$u_{14,4}=0$
$u_{15,1}$	$u_{15,2}$	$u_{15,3}$	$u_{15,4}=0$
$u_{16,1}$	$u_{16,2}$	$u_{16,3}$	$u_{16,4}=0$
$u_{17,1}$	$u_{17,2}$	$u_{17,3}$	$u_{17,4}=0$
$u_{18,1}$	$u_{18,2}$	$u_{18,3}$	$u_{18,4}=0$
$u_{19,1}$	$u_{19,2}$	$u_{19,3}$	$u_{19,4}=0$

$0=$

y_1	y_2	y_3	y_4	*Період*
0	0	0	0	2кв. 2011
0	0	0	0	3кв. 2011
0	0	0	0	4кв. 2011
0	0	0	0	1кв. 2012
0	0	0	0	2кв. 2012
0	0	0	0	3кв. 2012
0	0	0	0	4кв. 2012
0	0	0	0	1кв. 2013
0	0	0	0	2кв. 2013
0	0	0	0	3кв. 2013
0	0	0	0	4кв. 2013
0	0	0	0	1кв. 2014
0	0	0	0	2кв. 2014
0	0	0	0	3кв. 2014
0	0	0	0	4кв. 2014
0	0	0	0	1кв. 2015
0	0	0	0	2кв. 2015
0	0	0	0	3кв. 2015
0	0	0	0	4кв. 2015

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & -1 \end{matrix}\right) \end{array} \left| \begin{array}{l} y_{t1} = C_t \\ y_{t2} = I_t \\ y_{t3} = \mathrm{Im}_t \\ y_{t4} = Y_t \end{array} \right. \Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} & y_{t4} \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array} \left| \begin{array}{l} x_{t1} \\ x_{t2} \\ x_{t3} \\ x_{t4} \\ x_{t5} \end{array} \right. \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Все підготовлено для того, щоб записати саму економетричну модель у такому вигляді:

$$YГ + XB + U = 0. \qquad (4.10)$$

Перевіримо (4.10) на вимірність:
Y – вимірність матриці – (19×4);
$Г$ – вимірність матриці – (4×4);
$YГ$ – вимірність добутку матриці – (19×4)·(4×4)=(19×4);
X – вимірність матриці – (19×5);
B – вимірність матриці – (5×4);
XB – вимірність добутку матриці – (19×5)·(5×4)=(19×4);
U – вимірність матриці – (19×4);
0 – вимірність матриці – (19×4).

Як бачимо, усі матриці узгоджені як відносно добутків, так і додатків. Тому вимірність системи (4.10) дорівнює (19×4).

Оцінки параметрів економетричної моделі знайдемо за допомогою двокрокового методу найменших квадратів (2-МНК). Щоб більш докладно зрозуміти його сутність, оцінимо параметри моделі двома способами: 1) користуючись логіко-теоретичними міркуваннями; 2) формальним 2-МНК алгоритмом, що наведений у дод. 14.

Перший спосіб[8]. Ідея, яка закладена у двокроковому МНК, полягає у заміні вектора-стовпця Y у правій частині кожного з рівнянь системи (4.1) на вектор-стовпець його оцінок $\hat{Y}$ (вектор-стовпець значень регресій). Завдяки такій заміні, змінні у правій частині системи (4.1) набувають характеру наперед визначених змінних, і вже застосування МНК дає задовільні результати. Розглянемо ці міркування більш докладно на прикладі першого рівняння системи:

[8] Грубер Й. Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії : у 2 т. – Київ : Нічлава, 1998. – Т. 1. – С. 244–246.

$$C_t = a_t + a_t Y_t + a_2 C_{t\text{-}1} + u_{t1}.$$

Використовуючи звичайний МНК, можна знайти оцінки відповідних параметрів цього рівняння. Але до рівняння входить ендогенна змінна Y_t, на яку впливають збурювальні змінні u_{t1}, u_{t2} і u_{t3} і тому оцінки, які одержимо, якщо застосуємо звичайний МНК, будуть необґрунтованими, оскільки у цьому випадку неможливо додержатися обмежень, які необхідно встановити на регресію, для того, щоб запрацював звичайний МНК (незрозуміло, яка збурювальна змінна – u_{t1}, u_{t2} або u_{t3} впливає на C_t через Y_t).

Тому складаємо нову (вважаємо, що вона є лінійною) функцію від усіх наперед визначених (запізнюючих ендогенних [$C_{t\text{-}1}$, $Im_{t\text{-}1}$] і екзогенних [$U_{t\text{-}1}$] та незапізнюючих екзогених [x_{t1}, G_t]) змінних (усіх рівнянь моделі), яка у загальному випадку буде мати такий вигляд:

$$y_{t4} = \pi_{14} x_{t1} + \pi_{24} C_{t-1} + \pi_{34} \mathrm{Im}_{t-1} + \pi_{44} U_{t-1} + \pi_{54} G_t + v_{t4}$$

(тут маємо [для четвертого рівняння Y] рівняння прогнозної форми).

Оцінюючи параметри цього рівняння за допомогою звичайного МНК, одержимо таке регресійне рівняння:

$$\hat{y}_{t4} = \hat{\pi}_{14} x_{t1} + \hat{\pi}_{24} C_{t-1} + \hat{\pi}_{34} U_{t-1} + \hat{\pi}_{44} \mathrm{Im}_{t-1} + \hat{\pi}_{54} G_t .$$

Підставимо замість Y_t у рівнянні споживання C_t перетворене значення $\hat{y}_{t4} = \hat{Y}_t$ (при цьому $\hat{Y}_t$ вже не має (асимптотично) властивостей незапізнюючої ендогенної змінної). Тоді будемо мати таке рівняння споживання:

$$C_t = a_t + a_t \hat{Y}_t + a_2 C_{t\text{-}1} + u^*_{t1}.$$

Для цього рівняння також можна застосувати звичайний МНК.

Якби у рівняння для розглянутого прикладу входила б більше ніж одна ендогенна змінна, то проводять аналогічну процедуру для кожної такої змінної. Таким чином, 2-МНК застосовують для кожного рівняння економетричної моделі окремо.

Для першого–третього рівняння системи (4.1) відповідні розрахунки наведені нижче.

Вихідну статистичну базу даних наведено у табл. 4.4.

Таблиця 4.4

(t)	Період	$y_{t4} = Y_t$	$x_{t1} = 1$	$x_{t2} = C_{t-1}$	$x_{t3} = U_{t-1}$	$x_{t4} = Im_{t-1}$	$x_{t5} = G_t$
1	2кв. 2011	307,37	1,0	220,50	2,74	164,82	138,89
2	3кв. 2011	370,91	1,0	248,73	3,03	177,04	84,82
3	4кв. 2011	357,78	1,0	266,38	4,54	189,70	101,67
4	1кв. 2012	293,91	1,0	288,73	3,61	201,97	187,75
5	2кв. 2012	349,35	1,0	257,04	2,49	174,72	121,26
6	3кв. 2012	377,02	1,0	289,71	2,91	202,44	83,41
7	4кв. 2012	376,47	1,0	306,52	4,71	206,10	125,36
8	1кв. 2013	299,62	1,0	327,84	3,63	208,59	186,77
9	2кв. 2013	348,66	1,0	271,60	2,80	172,93	84,47
10	3кв. 2013	385,91	1,0	316,55	3,13	173,94	75,13
11	4кв. 2013	398,91	1,0	325,12	4,79	212,80	115,78
12	1кв. 2014	311,49	1,0	349,77	3,80	205,06	181,93
13	2кв. 2014	370,06	1,0	288,33	3,43	164,54	78,30
14	3кв. 2014	427,98	1,0	330,55	3,82	212,75	74,65
15	4кв. 2014	439,64	1,0	322,74	5,53	218,91	123,53
16	1кв. 2015	375,99	1,0	377,65	4,36	237,94	182,16
17	2кв. 2015	400,64	1,0	317,42	3,98	259,75	93,16
18	3кв. 2015	421,25	1,0	362,95	4,36	247,78	97,78
19	4кв. 2015	440,05	1,0	391,16	6,85	269,67	160,35

Розрахунки відповідних параметрів регресійної моделі наведені у табл. 4.5 (розрахунки здійснені в середовищі MS Excel):

Таблиця 4.5

	π_{54}	π_{44}	π_{34}	π_{24}	π_{14}
	-0,84688	0,297601	20,738084	0,2428877	256,263809
	0,10896	0,246969	5,8524125	0,1639507	31,672926
R^2=	0,881843	17,66951	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
	26,12157	14	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
	32621,84	4370,963	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Як бачимо, коефіцієнт детермінації є дуже високим – $R^2 = 0{,}881843$.

Відповідні оцінені значення регресії $\hat{y}_{t4} = \hat{Y}_t$ наведені у стовпчику 7 табл. 4.6. У стовпчику 8 наведені залишки $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = \overline{1,\ 19}$. У стовпчику 9 обчислені відносні похибки розрахункових значень регресії за формулою

$$\delta_i = \frac{\hat{u}_i}{y_i} \cdot 100\%,$$

а в стовпчику 10 обчислене середнє значення відносної похибки, як:

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}.$$

Таблиця 4.6

$y_{t4} = Y_t$	$x_{t1} = 1$	$x_{t2} = C_{t-1}$	$x_{t3} = U_{t-1}$	$x_{t4} = Im_{t-1}$	$x_{t5} = G_t$	$\hat{Y}$	$u = Y - \hat{Y}$	$\delta(i)$, %	$\delta(cp)$	u^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
307,37	1,0	220,50	2,74	164,82	138,89	298,0707	9,299325	3%	-0,17%	86,47744
370,91	1,0	248,73	3,03	177,04	84,82	360,3688	10,54123	3%		111,1174
357,78	1,0	266,38	4,54	189,70	101,67	385,468	-27,688	-8%		766,625
293,91	1,0	288,73	3,61	201,97	187,75	302,3625	-8,45248	-3%		71,44444
349,35	1,0	257,04	2,49	174,72	121,26	319,638	29,71204	9%		882,8051
377,02	1,0	289,71	2,91	202,44	83,41	376,5869	0,433102	0%		0,187577
376,47	1,0	306,52	4,71	206,10	125,36	383,5611	-7,09111	-2%		50,28384
299,62	1,0	327,84	3,63	208,59	186,77	315,0766	-15,4566	-5%		238,9076
348,66	1,0	271,60	2,80	172,93	84,47	360,2271	-11,5671	-3%		133,7983
385,91	1,0	316,55	3,13	173,94	75,13	386,1989	-0,2889	0%		0,083465
398,91	1,0	325,12	4,79	212,80	115,78	399,8449	-0,93488	0%		0,873995
311,49	1,0	349,77	3,80	205,06	181,93	326,977	-15,487	-5%		239,847
370,06	1,0	288,33	3,43	164,54	78,30	380,084	-10,024	-3%		100,4804
427,98	1,0	330,55	3,82	212,75	74,65	415,865	12,115	3%		146,7733
439,64	1,0	322,74	5,53	218,91	123,53	409,868	29,77197	7%		886,3703
375,99	1,0	377,65	4,36	237,94	182,16	354,9524	21,03764	6%		442,5822
400,64	1,0	317,42	3,98	259,75	93,16	414,3055	-13,6655	-3%		186,7463
421,25	1,0	362,95	4,36	247,78	97,78	425,7698	-4,51981	-1%		20,42867
440,05	1,0	391,16	6,85	269,67	160,35	437,7849	2,265129	1%		5,130809
Сума							0,0	-3%		4370,963

При цьому середньоквадратична помилка дисперсії збурень дорівнює (стовпчик 11 табл. 4.6):

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2}}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{4370,963}{19-4-1}} =$$

$$= \sqrt{312,216} = 17,66951$$

(S – стандартна помилка: чим вона менша, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним. У нашому випадку вона є малою).

Перевірку тісноти загального зв'язку незалежних змінних на залежну змінну за допомогою коефіцієнта детермінації, який обчислюється за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2},$$

було здійснено раніше ($R^2 = 0,881843$).

Обчислимо F-статистику за формулою (спрощений варіант для перевірки нульової гіпотези: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$):

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,8818}{1-0,8818} \times \frac{19-4-1}{4} = 26,12157.$$

Табличне значення

$$F(k1 = m, k2 = n-m-1; \alpha = 0,05) = F(4;14;0,05) = 3,11225.$$

Оскільки $F = 26,12157 > F(m, T-m-1, \alpha) = 3,11225$, то гіпотезу про одночасну рівність нулю коефіцієнтів параметрів моделі відхиляємо.

Тепер можемо здійснити розрахунок структурних коефіцієнтів моделі (4.1).

Для першого рівняння $C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1}$ системи (4.1) маємо:

№	Період	$y_{t1} = C_t$	$x_{t1}=1$	Y^	$x_{t2} = C_{t-1}$
1	2кв. 2011	248,73	1,0	298,0707	220,50
2	3кв. 2011	266,38	1,0	360,3688	248,73
3	4кв. 2011	288,73	1,0	385,468	266,38
4	1кв. 2012	257,04	1,0	302,3625	288,73
5	2кв. 2012	289,71	1,0	319,638	257,04
6	3кв. 2012	306,52	1,0	376,5869	289,71
7	4кв. 2012	327,84	1,0	383,5611	306,52
8	1кв. 2013	271,60	1,0	315,0766	327,84
9	2кв. 2013	316,55	1,0	360,2271	271,60
10	3кв. 2013	325,12	1,0	386,1989	316,55
11	4кв. 2013	349,77	1,0	399,8449	325,12
12	1кв. 2014	288,33	1,0	326,977	349,77
13	2кв. 2014	330,55	1,0	380,084	288,33
14	3кв. 2014	322,74	1,0	415,865	330,55
15	4кв. 2014	377,65	1,0	409,868	322,74
16	1кв. 2015	317,42	1,0	354,9524	377,65
17	2кв. 2015	362,95	1,0	414,3055	317,42
18	3кв. 2015	391,16	1,0	425,7698	362,95
19	4кв. 2015	410,26	1,0	437,7849	391,16

	a_2	a_1	a_0
	0,301163	0,775444	-62,3562
	0,11577	0,121651	41,00492
$R^2=$	0,845062	18,87248	#Н/Д
	43,63365	16	#Н/Д
	31082,03	5698,727	#Н/Д

Для другого рівняння $I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 U_{t-1} + u_{t2}$ системи (4.1) маємо:

№	Період	$y_{t2}=I_t$	$x_{t1}=1$	Y^	$x_{t3}=U_{t-1}$
1	2кв. 2011	1,11	1,0	298,0707	2,74
2	3кв. 2011	3,13	1,0	360,3688	3,03
3	4кв. 2011	6,96	1,0	385,468	4,54
4	1кв. 2012	4,20	1,0	302,3625	3,61
5	2кв. 2012	3,62	1,0	319,638	2,49
6	3кв. 2012	4,36	1,0	376,5869	2,91
7	4кв. 2012	6,85	1,0	383,5611	4,71
8	1кв. 2013	3,83	1,0	315,0766	3,63
9	2кв. 2013	2,44	1,0	360,2271	2,80
10	3кв. 2013	4,46	1,0	386,1989	3,13
11	4кв. 2013	7,02	1,0	399,8449	4,79
12	1кв. 2014	4,89	1,0	326,977	3,80
13	2кв. 2014	4,80	1,0	380,084	3,43
14	3кв. 2014	5,37	1,0	415,865	3,82
15	4кв. 2014	6,30	1,0	409,868	5,53
16	1кв. 2015	5,09	1,0	354,9524	4,36
17	2кв. 2015	5,45	1,0	414,3055	3,98
18	3кв. 2015	7,03	1,0	425,7698	4,36
19	4кв. 2015	7,03	1,0	437,7849	6,85

	b_2	b_1	b_0
	0,874571	0,015378	-4,19379
	0,26066	0,006599	1,985535
$R^2=$	0,732618	0,926928	#Н/Д
	21,91978	16	#Н/Д
	37,66674	13,74712	#Н/Д

Для третього рівняння $\mathrm{Im}_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2\,\mathrm{Im}_{t-1} + u_{t3}$ системи (4.1) маємо:

№	Період	$y_{t3}=Im_t$	$x_{t1}=1$	Y^	$x_{t4}=Im_{t-1}$
1	2кв. 2011	177,04	1,0	298,0707	164,82
2	3кв. 2011	189,70	1,0	360,3688	177,04
3	4кв. 2011	201,97	1,0	385,468	189,70
4	1кв. 2012	174,72	1,0	302,3625	201,97
5	2кв. 2012	202,44	1,0	319,638	174,72
6	3кв. 2012	206,10	1,0	376,5869	202,44
7	4кв. 2012	208,59	1,0	383,5611	206,10
8	1кв. 2013	172,93	1,0	315,0766	208,59
9	2кв. 2013	173,94	1,0	360,2271	172,93
10	3кв. 2013	212,80	1,0	386,1989	173,94
11	4кв. 2013	205,06	1,0	399,8449	212,80
12	1кв. 2014	164,54	1,0	326,977	205,06
13	2кв. 2014	212,75	1,0	380,084	164,54
14	3кв. 2014	218,91	1,0	415,865	212,75
15	4кв. 2014	237,94	1,0	409,868	218,91
16	1кв. 2015	259,75	1,0	354,9524	237,94
17	2кв. 2015	247,78	1,0	414,3055	259,75
18	3кв. 2015	269,67	1,0	425,7698	247,78
19	4кв. 2015	254,78	1,0	437,7849	269,67

	c_2	c_1	c_0
	0,429713	0,378938	-18,8289
	0,171652	0,126133	39,60221
R^2=	0,688932	18,7023	#Н/Д
	17,71782	16	#Н/Д
	12394,54	5596,419	#Н/Д

Для першого – третього рівнянь самостійно розрахуйте відповідно: 1) відносні похибки розрахункових значень регресії; 2) середньоквадратичну помилку; 3) F-статистику. Зробіть висновки.

Четверте рівняння $Y_t = C_t + I_t - \mathrm{Im}_t + G_t$ системи (4.1) є рівнянням тотожності та не потребує обчислення структурних коефіцієнтів – всі вони дорівнюють одиниці.

Запишемо систему (4.1) з урахуванням розрахованих для неї структурних коефіцієнтів:

$$\begin{cases} C_t = -62,36 + 0,78Y_t + 0,3C_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = -4,19 + 0,02Y_t + 0,87U_{t-1} + u_{t2} \\ \mathrm{Im}_t = -18,83 + 0,38Y_t + 0,43\,\mathrm{Im}_{t-1} + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t - \mathrm{Im}_t + G_t. \end{cases} \qquad (4.11)$$

(значення коефіцієнтів параметрів моделі наближені до другого знака після коми).

Другий спосіб. Розрахуємо коефіцієнти, наприклад, для першого рівняння системи, за допомогою алгоритму двокрокового методу найменших квадратів (2-МНК) і порівняємо їх із розрахунками, виконаними першим способом. Такий алгоритм наведений у дод. 9 у вигляді покрокового виконання відповідних операцій.

Перед тим, як безпосередньо перейти до виконання алгоритму, зробимо декілька зауважень та позначень.

2-МНК є узагальненням звичайного МНК і являє собою звичайний МНК для оцінювання параметрів структурного рівняння у два етапи. За вихідне структурне рівняння береться рівняння вигляду

$$y_i = Y_i a_i + X_i b_i + \hat{u}_i, \qquad (4.12)$$

де y_i – вектор спостережень над спільно залежною змінною, яка підлягає визначенню за допомогою *i*-го структурного рівняння;

Y_i – матриця спостережень над спільно залежними змінними, що містяться, крім того, в *i*-му структурному рівнянні;

$a_i = \hat{\gamma}_i$ – вектор оцінок параметрів залежних змінних, що містяться у матриці Y_i;

X_i – матриця спостережень над напередвизначеними змінними, які містяться в *i*-му структурному рівнянні;

$b_i = \beta_i$ – вектор оцінок параметрів цих напередвизначених змінних;

$\hat{u}_i$ – вектор залишків *i*-го структурного рівняння для всіх періодів спостережень.

До недоліків методу належать ті, що в оцінках містяться не самі залишки *i*-го структурного рівняння – $\hat{u}_i$, а залишки рівняння, які отримані на другому етапі – $w_i = \hat{u}_i + \hat{v}_i a_i$.

Крім того, оскільки для виконання асимптотичних властивостей потрібні ряди вибірки, принаймні «великі», то для коротких вибірок спостережень застосування ДМНК не дає оцінок, які є незміщеними.

Зараз все підготовлено для того, щоб почати виконання алгоритму:

1) запишемо перше структурне надідентифіковане рівняння $C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1}$

у вигляді

$$y_1 = Y_1 a_1 + X_1 b_1 + u_1, \qquad (*)$$

де $y_1 = C_t$ – вектор спостережень над спільно залежною змінною розмірності (19×1) (див. табл. 4.3);

Y_1 – вектор поточних спостережень над спільно залежними змінними вимірності (19×1), що міститься у 1-му структурному рівнянні справа;

$a_1 = \hat{\gamma}_1$ – оцінка параметра залежної змінної при Y_1;

X_1 – матриця спостережень над екзогенними змінними, які містяться в 1-му структурному рівнянні вимірності (19×2);

$b_1 = \hat{\beta}_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix}$ – вектор оцінок параметрів цих екзогенних змінних вимірності (2×1).

Рівняння для обчислення його оцінок у матричному вигляді запишемо так:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1' X \left(X' X \right)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1' X \left(X' X \right)^{-1} X' y_1 \\ X' y_1 \end{pmatrix}. \qquad (4.13)$$

Запишемо відповідні матриці:

– матриця X вимірності (19×5):

$$X=\begin{pmatrix} x_{t1}=1 & x_{t2}=C_{t-1} & x_{t3}=U_{t-1} & x_{t4}=Im_{t-1} & x_{t5}=G_t \\ 1,0 & 220,50 & 2,74 & 164,82 & 138,89 \\ 1,0 & 248,73 & 3,03 & 177,04 & 84,82 \\ 1,0 & 266,38 & 4,54 & 189,70 & 101,67 \\ 1,0 & 288,73 & 3,61 & 201,97 & 187,75 \\ 1,0 & 257,04 & 2,49 & 174,72 & 121,26 \\ 1,0 & 289,71 & 2,91 & 202,44 & 83,41 \\ 1,0 & 306,52 & 4,71 & 206,10 & 125,36 \\ 1,0 & 327,84 & 3,63 & 208,59 & 186,77 \\ 1,0 & 271,60 & 2,80 & 172,93 & 84,47 \\ 1,0 & 316,55 & 3,13 & 173,94 & 75,13 \\ 1,0 & 325,12 & 4,79 & 212,80 & 115,78 \\ 1,0 & 349,77 & 3,80 & 205,06 & 181,93 \\ 1,0 & 288,33 & 3,43 & 164,54 & 78,30 \\ 1,0 & 330,55 & 3,82 & 212,75 & 74,65 \\ 1,0 & 322,74 & 5,53 & 218,91 & 123,53 \\ 1,0 & 377,65 & 4,36 & 237,94 & 182,16 \\ 1,0 & 317,42 & 3,98 & 259,75 & 93,16 \\ 1,0 & 362,95 & 4,36 & 247,78 & 97,78 \\ 1,0 & 391,16 & 6,85 & 269,67 & 160,35 \end{pmatrix}; \quad (4.14)$$

– $y_1 = C_t$ – вектор вимірності (19 × 1), Y_1 – вектор вимірності (19 × 1), X_1 – матриця вимірності 19 × (2):

$$y_1=\begin{pmatrix} y_{t1}=C_t \\ 248,73 \\ 266,38 \\ 288,73 \\ 257,04 \\ 289,71 \\ 306,52 \\ 327,84 \\ 271,60 \\ 316,55 \\ 325,12 \\ 349,77 \\ 288,33 \\ 330,55 \\ 322,74 \\ 377,65 \\ 317,42 \\ 362,95 \\ 391,16 \\ 410,26 \end{pmatrix} \quad Y_t=\begin{pmatrix} y_{t4}=Y_t \\ 307,37 \\ 370,91 \\ 357,78 \\ 293,91 \\ 349,35 \\ 377,02 \\ 376,47 \\ 299,62 \\ 348,66 \\ 385,91 \\ 398,91 \\ 311,49 \\ 370,06 \\ 427,98 \\ 439,64 \\ 375,99 \\ 400,64 \\ 421,25 \\ 440,05 \end{pmatrix} \quad X_1=\begin{pmatrix} x_{t1}=1 & x_{t2}=C_{t-1} \\ 1,0 & 220,50 \\ 1,0 & 248,73 \\ 1,0 & 266,38 \\ 1,0 & 288,73 \\ 1,0 & 257,04 \\ 1,0 & 289,71 \\ 1,0 & 306,52 \\ 1,0 & 327,84 \\ 1,0 & 271,60 \\ 1,0 & 316,55 \\ 1,0 & 325,12 \\ 1,0 & 349,77 \\ 1,0 & 288,33 \\ 1,0 & 330,55 \\ 1,0 & 322,74 \\ 1,0 & 377,65 \\ 1,0 & 317,42 \\ 1,0 & 362,95 \\ 1,0 & 391,16 \end{pmatrix}$$

– транспонована матриця X вимірності (5 × 19):

$$X'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 220,5 & 248,7 & 266,3 & 288,7 & 257,0 & 289,7 & 306,5 & 327,8 & 271,6 & 316,5 & 325,1 & 349,7 & 288,3 & 330,5 & 322,7 & 377,6 & 317,4 & 362,9 & 391,1 \\ 2,74 & 3,03 & 4,54 & 3,61 & 2,49 & 2,91 & 4,71 & 3,63 & 2,8 & 3,13 & 4,79 & 3,8 & 3,43 & 3,82 & 5,53 & 4,36 & 3,98 & 4,36 & 6,85 \\ 164,8 & 177,0 & 189,7 & 201,9 & 174,7 & 202,4 & 206,1 & 208,5 & 172,9 & 173,9 & 212,8 & 205,0 & 164,5 & 212,7 & 218,9 & 237,9 & 259,7 & 247,7 & 269,6 \\ 138,89 & 84,82 & 101,6 & 187,7 & 121,2 & 83,41 & 125,36 & 186,7 & 84,47 & 75,13 & 115,7 & 181,9 & 78,3 & 74,65 & 123,5 & 182,1 & 93,16 & 97,78 & 160,3 \end{pmatrix}$$

– результати добутку матриць X' та X та його обернена матриця

$$X'X=\begin{pmatrix} 19 & 5859,29 & 74,51 & 3901,45 & 2297,17 \\ 5859,29 & 1842930,158 & 23572,31 & 1223421 & 719699,5 \\ 74,51 & 23572,3075 & 313,1027 & 15744,06 & 9234,162 \\ 3901,45 & 1223420,858 & 15744,06 & 818736,1 & 478420,4 \\ 2297,17 & 719699,5413 & 9234,162 & 478420,4 & 307711,6 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix} 3,213122 & -0,00664103 & 0,192811 & -0,00846 & -0,00108661 \\ -0,00664 & 8,60949E-05 & -0,00068 & -7,8E-05 & -9,7622E-06 \\ 0,192811 & -0,00068231 & 0,109704 & -0,00193 & -0,00013623 \\ -0,00846 & -7,8179E-05 & -0,00193 & 0,000195 & 1,64918E-07 \\ -0,00109 & -9,7622E-06 & -0,00014 & 1,65E-07 & 3,80261E-05 \end{pmatrix}$$

– добуток матриць $Y_1^{'}$ та X

$$Y_1^{'}X = \quad (7053,01 \quad 2192587 \quad 28178,0333 \quad 1461949 \quad 836770,9\ )$$

– добуток матриць $Y_1^{'}X$ та $(X'X)^{-1}$

$$Y_1^{'}X\left(X'X\right)^{-1} = \quad (256,2638089 \quad 0,24288820,73808428 \quad 0,297601 \quad -0,84688\ )$$

– добуток матриць X' та Y_1

$$X'Y_1 = \begin{pmatrix} 7053,01 \\ 2192587,357 \\ 28178,0333 \\ 1461949,128 \\ 836770,8679 \end{pmatrix}$$

– добуток матриць $Y_1^{'}X\cdot(X'X)^{-1}$ та $X'Y_1$

$$Y_1^{'}X\cdot(X'X)^{-1}X'Y_1 = 2650777,107$$

Таким чином, обчислено перший елемент першого рядка матриці (4.13).

Перший елемент $X_1'Y_1$ другого рядка матриці (4.13) дорівнює:

$$X_1'Y_1 = \begin{pmatrix} 7053,01 \\ 2192587,357 \end{pmatrix}.$$

Перший елемент $Y_1'X_1$ другого стовпця матриці (4.13) дорівнює

$$Y_1'X_1 = \begin{pmatrix} 7053,01 & 2192587,357 \end{pmatrix}$$

Другий елемент $X_1'X_1$ другого рядка матриці (4.13) дорівнює

$$X_1'X_1 = \begin{pmatrix} 19 & 5859,29 \\ 5859,29 & 1842930 \end{pmatrix}$$

Тепер можемо записати блокову матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} Y_1'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2650777,107 & 7053,01 & 2192587,357 \\ 7053,01 & 19 & 5859,29 \\ 2192587,357 & 5859,29 & 1842930 \end{pmatrix}.$$

Обернена до неї матриця має такий вигляд:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,000041551 & -0,009179545 & -0,000020249 \\ -0,009179545 & 4,720783155 & -0,004087775 \\ -0,000020249 & -0,004087775 & 0,000037630 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо тепер елементи матриці:

$$\begin{pmatrix} Y_1' X \left(X' X \right)^{-1} X' y_1 \\ X_1' y_1 \end{pmatrix}.$$

Для цього обчислимо $X'y_1$

$$X'y_1 = \begin{pmatrix} 6049{,}05 \\ 1889888{,}695 \\ 24345{,}0922 \\ 1259663{,}932 \\ 723686{,}3897 \end{pmatrix}.$$

Добуток $E = Y_1' X \left(X' X \right)^{-1} X' y_1$ відповідних матриць дорівнює:

$$E = \ 2276057{,}298 \ .$$

Обчислимо $X_1' y_1$:

$$X_1' y_1 = \begin{pmatrix} 6049{,}05 \\ 1889888{,}695 \end{pmatrix}.$$

Тому (дані наведені з точністю до другого знака після коми)

$$\begin{pmatrix} Y_1' X \left(X' X \right)^{-1} X' y_1 \\ X_1' y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2276057{,}298 \\ 6049{,}05 \\ 1889888{,}695 \end{pmatrix}.$$

Тепер все підготовлено для обчислення параметрів першого рівняння моделі (4.1):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \times \begin{pmatrix} E \\ X_1' y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}00004155\ 1 & -0{,}00917954\ 5 & -0{,}00002024\ 9 \\ -0{,}00917954\ 5 & 4{,}72078315\ 5 & -0{,}00408777\ 5 \\ -0{,}00002024\ 9 & -0{,}00408777\ 5 & 0{,}00003763\ 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} 2276057{,}29\ 8 \\ 6049{,}05 \\ 1889888{,}69\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0{,}77544435 \\ -62{,}3561899 \\ 0{,}3011629 \end{pmatrix}.$$

Якщо порівняти знайдені оцінки параметрів моделі з одержаними оцінками за першим способом, то можна побачити, що вони збігаються (при округленні одержаних оцінок за другим способом до другого знака після коми).

Обчислимо і визначимо ступінь узгодженості розрахункових значень побудованого нами першого рівняння регресії та реальних значень змінних $y_1 = C_t$ (для перевірки на адекватність за допомогою статистичних гіпотез):

а) перевіримо тісноту загального зв'язку незалежних змінних та залежної змінної C_t за допомогою коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{u}_1' \hat{u}_1}{\sum (y_{t1} - \overline{y_1})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_{t1} - \overline{y_1})^2} = 0{,}845062.$$

Оскільки, значення коефіцієнта детермінації є досить високим, то це свідчить, що варіація змінної C_t, що ідентифікує індивідуальне споживання, визначається варіацією змінних, які знаходяться у правій частині рівняння (є тісний зв'язок між залежною та незалежними змінними);

б) перевіримо на значущість вибірковий коефіцієнт кореляції. Для цього обчислимо $R = \sqrt{R^2} =$ 0,919273. Він також є дуже високим (наближеним до одиниці) і тому існує тісний лінійний зв'язок всіх незалежних факторів x_i із залежною змінною C_t.

Обчислимо *t*-статистику за формулою

$$t = \frac{R\sqrt{n - n_1 - 1}}{\sqrt{1 - R^2}} = \frac{0{,}919273\sqrt{19 - 2 - 1}}{\sqrt{0{,}1549377}} = 9{,}341697.$$

Табличне значення *t*-розподілу з ($k = n - n_1 - 1 = 16$) степенями вільності та рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ дорівнює: $t_{\text{табл.}(\alpha/2,k)} = 2{,}472878$. Оскільки $|t| = 9{,}341697 > t_{\text{табл.}(\alpha/2,k)} = 2{,}472878$, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і незалежними змінними моделі.

Для вибраного рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і відповідного степеня вільності $k = 16$ запишемо межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції *R*:

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R),$$

де $\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \dfrac{1-R}{\sqrt{n}} = 0{,}045798$:

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R) = (0{,}873457;\ 0{,}965071);$$

в) обчислимо відносні похибки розрахункових значень регресії $\left(\delta_i = \dfrac{\hat{u}_i}{y_i} \cdot 100\%\right)$ і середнє значення $\left(\bar{\delta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}\right)$ відносної похибки (розрахунки наведені у табл. 4.7);

г) обчислимо дисперсію залишків 1-го рівняння (середньоквадратичну помилку дисперсії збурень):

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n - n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{5698{,}726238}{19 - 2 - 1}} = \sqrt{356{,}1703899} =$$

$$= 18{,}87247705$$

($n_1 = r_1 + k_1 = 1 + 1 = 2$; S – стандартна помилка: чим менша вона, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним. У нашому випадку вона є малою);

Таблиця 4.7

(t)	Рік	$y_{t1} = C_t$	$x_{t1} = 1$	Y^	$x_{t1} = C_{t-1}$	$\hat{y}_{t1}$	$\hat{u}_{t1} = y_{t1} - \hat{y}_{t1}$	$\hat{u}^2_{t1}$	δ_i
1	2кв. 2011	248,73	1	298,0707	220,5	235,187453	13,54254627	183,40055	5%
2	3кв. 2011	266,38	1	360,3688	248,73	291,997991	-25,617991	656,28150	-10%
3	4кв. 2011	288,73	1	385,468	266,38	316,776565	-28,046565	786,60980	-10%
4	1кв. 2012	257,04	1	302,3625	288,73	259,063856	-2,02385611	4,0959935	-1%
5	2кв. 2012	289,71	1	319,638	257,04	262,916178	26,79382132	717,90886	9%
6	3кв. 2012	306,52	1	376,5869	289,71	316,915900	-10,3959009	108,07475	-3%
7	4кв. 2012	327,84	1	383,5611	306,52	327,386562	0,453437912	0,2056059	0%
8	1кв. 2013	271,6	1	315,0766	327,84	280,701457	-9,10145767	82,836531	-3%
9	2кв. 2013	316,55	1	360,2271	271,6	298,775745	17,77425467	315,92412	6%
10	3кв. 2013	325,12	1	386,1989	316,55	332,452687	-7,3326875	53,768306	-2%
11	4кв. 2013	349,77	1	399,8449	325,12	345,615347	4,154652545	17,261137	1%
12	1кв. 2014	288,33	1	326,977	349,77	296,534024	-8,20402412	67,306011	-3%
13	2кв. 2014	330,55	1	380,084	288,33	319,212095	11,33790485	128,54808	3%
14	3кв. 2014	322,74	1	415,865	330,55	359,673373	-36,9333738	1364,0740	-11%
15	4кв. 2014	377,65	1	409,868	322,74	352,670976	24,97902369	623,95162	7%
16	1кв. 2015	317,42	1	354,9524	377,65	326,623787	-9,20378773	84,709708	-3%
17	2кв. 2015	362,95	1	414,3055	317,42	354,509813	8,440186085	71,236741	2%
18	3кв. 2015	391,16	1	425,7698	362,95	377,111682	14,04831769	197,35522	4%
19	4кв. 2015	410,26	1	298,0707	391,16	394,924500	15,33549956	235,17754	4%
	Сума						**0,00000000**	**5698,7262**	**-5%**

д) обчислимо F-статистику за формулою (спрощений варіант для перевірки нульової гіпотези: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$)

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n - n_1 - 1}{n_1} = \frac{0,845}{1-0,845} \cdot \frac{19-2-1}{2} = \frac{0,845 \cdot 16}{0,15 \cdot 2} = \frac{13,52}{0,3} = 45.$$

Табличне значення

$$F(k1 = n_1 = 2, k2 = n - n_1 - 1 = 16; \alpha = 0,05) =$$
$$= F(2,16; \alpha = 0,05) = 3,633723 \quad .$$

Оскільки $F = 45 > F(tabl) = 3{,}633723$, то гіпотезу про одночасну рівність нулю коефіцієнтів параметрів моделі відхиляємо;

е) обчислимо асимптотичну коваріаційну матрицю для нашого рівняння, як

$$\Sigma_{\hat{d}_1} = asy\,\mathrm{var}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_0\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} = \sigma^2_{u_1}(\hat{Z}_i'\hat{Z}_i)^{-1} = \sigma^2_{u_1}\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1\\ X_1'Y_1 & X_1'X_1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Sigma_{\hat{d}_1} = asy\,\mathrm{var}\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_0\\ \hat{a}_2\end{pmatrix} = 18{,}87247705 \times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0{,}000041551 & -0{,}009179545 & -0{,}000020249\\ -0{,}009179545 & 4{,}720783155 & -0{,}004087775\\ -0{,}000020249 & -0{,}004087775 & 0{,}000037630\text{-}62{,}35618998\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 00{,}000784 & -0{,}17324075 & -0{,}00038215\\ -0{,}17324 & 89{,}09287174 & -0{,}07714644\\ -0{,}00038 & -0{,}077146436 & 0{,}000710168\end{pmatrix};$$

г) стандартна помилка:

$$S_i = \sqrt{\sigma^2_{u_i}(\hat{Z}_i'\hat{Z}_i)^{-1}}\,.$$

Отже, $S_1 = 0{,}028003$, $S_0 = 9{,}438902$, $S_2 = 0{,}026649$;

ж) знайдемо довірчі інтервали у вигляді

$$\left(\hat{a}_i - t_{\alpha/2,k}\cdot S_i;\hat{a}_i + t_{\alpha/2,k}\cdot S_i\right),\ i = 0,1,2.$$

Отже, $\hat{a}_1 \in (0{,}706196652,\ 0{,}844692056)$

$\hat{a}_0 \in (-85{,}6974461,\ -39{,}0149339)$

$\hat{a}_2 \in (0{,}235263216,\ 0{,}367062604).$

Завдання для самоконтролю: проведіть аналогічні дослідження, які були виконані для другого і третього рівнянь системи (4.1).

4.5. Прогнозна форма економетричної моделі[9]. Економіко-логіко-теоретична інтерпретація одержаних на моделях (структурної та прогнозної) результатів моделювання

Прогнозна форма використовується для знаходження прогнозних абсолютних значень (значень рівноваги) спільно залежних змінних, *якщо задані* значення всіх наперед-визначених змінних і всіх параметрів структурної форми. Це так звані *умовні прогнози* спільно залежних змінних.

Прогнозна форма використовується для економіко-теоретичного і статистично обґрунтованого прогнозу *загального ефекту* дії окремих екзогенних змінних або окремих структурних параметрів на ендогенні змінні. Це дає можливість оцінити вплив певних економіко-політичних засобів на економічні показники.

У статиці прогнозна форма лінійної економетричної моделі одержується з системи структурних рівнянь шляхом їх вирішення відносно спільно залежних змінних. При цьому структурні рівняння перетворюють так, щоб матриця структурних коефіцієнтів звичайних ендогенних змінних звелась

[9] Економетрична модель, що складається з декількох рівнянь, називається прогнозною (статичною або динамічною), якщо в жодному її рівнянні звичайні ендогенні змінні цієї моделі не виступають у ролі пояснюючих, тобто економетрична модель із декількох рівнянь знаходиться у прогнозній формі, якщо в усіх рівняннях моделі тільки наперед-визначені змінні цієї моделі є пояснюючими.

до одиничної матриці. Коефіцієнти і збурення у прогнозних рівняннях побудовані зі структурних коефіцієнтів і збурюваних змінних моделі у структурній формі.

У лінійній економетричній статичній прогнозній моделі разом із коефіцієнтами, які в економіко-теоретичному розумінні не є мультиплікаторами, містяться тільки статичні мультиплікатори (мультиплікатори з нульовим лагом або імпульсні мультиплікатори).

На відміну від статичної *динамічна прогнозна форма* поряд із коефіцієнтами, які не є мультиплікаторами в економіко-теоретичному розумінні, містить як статичні, так і динамічні мультиплікатори, вказуючи загальний ефект дії екзогенних змінних на ендогенні змінні без запізнення (статичні мультиплікатори) і з запізненням (динамічні мультиплікатори).

Для знаходження прогнозної форми у нашому випадку скористуємося таким співвідношенням:

$$Y = X\pi + V, \tag{4.13}$$

де $\pi = -B\Gamma^{-1}$, $V = -U\Gamma^{-1}$,

$$\Gamma = \begin{matrix} y_{t1} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t2} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t3} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t4} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & -1 \end{matrix} \right) \left| \begin{matrix} y_{t1} = C_t \\ y_{t2} = I_t \\ y_{t3} = \mathrm{Im}_t \\ y_{t4} = Y_t \end{matrix} \right. \Rightarrow \Gamma = \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -1 \end{matrix} \right) \tag{4.4}$$

$$B = \begin{matrix} y_{t1} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t2} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t3} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_{t4} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \left| \begin{matrix} x_{t1} = 1 \\ x_{t2} = C_{t-1} \\ x_{t3} = I_{t-1} \\ x_{t4} = \mathrm{Im}_{t-1} \\ x_{t5} = G_t \end{matrix} \right. \Rightarrow B = \left(\begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right), \tag{4.5}$$

a_2	a_1	a_0
0,301163	0,775444	-62,3562
b_2	b_1	b_0
0,874571	0,015378	-4,19379
c_2	c_1	c_0
0,429713	0,378938	-18,8289

Враховуючи співвідношення (4.13), одержимо:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0{,}775444 & 0{,}015378 & 0{,}378938 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -2{,}31852 & -0{,}0261479 & -0{,}64432527 & -1{,}70034483 \\ -1{,}31852 & -1{,}0261479 & -0{,}64432527 & -1{,}70034483 \\ 1{,}318522 & 0{,}02614790 & -0{,}35567473 & 1{,}70034483 \\ -1{,}31852 & -0{,}0261479 & -0{,}64432527 & -1{,}70034483 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -62{,}3562 & -4{,}19379 & -18{,}8289 & 0 \\ 0{,}301163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}874571 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}429713 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = -B\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -125{,}278 & -5{,}441596423 & -49{,}5768042 & -81{,}1423087 \\ 0{,}698253 & 0{,}007874781 & 0{,}194046931 & 0{,}51208095 \\ 1{,}153141 & 0{,}897439197 & 0{,}563508195 & 1{,}487072278 \\ -0{,}56659 & -0{,}011236094 & 0{,}152838056 & -0{,}73066028 \\ 1{,}318522 & 0{,}026147903 & 0{,}644325269 & 1{,}70034483 \end{pmatrix},$$

де матриця π для задачі у загальному випадку має такий вигляд:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{31} & \pi_{41} \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \pi_{32} & \pi_{42} \\ \pi_{13} & \pi_{23} & \pi_{33} & \pi_{43} \\ \pi_{14} & \pi_{24} & \pi_{34} & \pi_{44} \\ \pi_{15} & \pi_{25} & \pi_{35} & \pi_{45} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи викладене, прогнозна форма економетричної моделі (4.1) набуває такого вигляду (зверніть увагу, що у прогнозній формі у правій частині відсутні ендогенні змінні):

$$\begin{cases} C_t = -125{,}278 + 0{,}698253 C_{t-1} + 1{,}153141 U_{t-1} - 0{,}56659 \mathrm{Im}_{t-1} + 1{,}318522 G_t + \hat{v}_{t1} \\ I_i = -5{,}4415964 + 0{,}0078747 C_{t-1} + 0{,}8974391 U_{t-1} - 0{,}011236 \mathrm{Im}_{t-1} + 0{,}0261479 G_t + \hat{v}_{t2} \\ \mathrm{Im}_i = -49{,}576804 + 0{,}194046 C_{t-1} + 0{,}5635081 U_{t-1} + 0{,}152838 \mathrm{Im}_{t-1} + 0{,}644325 G_t + \hat{v}_{t3} \\ Y_i = -81{,}142308 + 0{,}512080 C_{t-1} + 1{,}48707227 U_{t-1} - 0{,}73066 \mathrm{Im}_{t-1} + 1{,}7003448 G_t + \hat{v}_{t4} \end{cases}$$

Оскільки матриця U має вигляд:

$U=$

$u_{t1} = C_t - C_t\hat{}$	$u_{t2} = I_i - I_i\hat{}$	$u_{t3} = \mathrm{Im}_i - \mathrm{Im}_i\hat{}$	u_{t4}
13,54254	-1,6761201	12,09321541	0
-25,618	-0,8677348	-4,10500395	0
-28,0466	1,25570036	-6,78621771	0
-2,02386	0,5870061	-7,81696279	0
26,7938	0,72087131	25,06638193	0
-10,3959	0,21781981	-4,76537916	0
0,453449	1,02634669	-6,49092001	0
-9,10142	0,00400359	-17,2695219	0
17,77428	-1,3544045	-18,0451865	0
-7,33268	-0,0223942	10,53909919	0
4,154637	0,87597687	-19,0705514	0
-8,20402	0,73232815	-28,6521483	0
11,3379	0,14926636	16,84557331	0
-36,9334	-0,1720386	-11,2696915	0
24,97905	-0,6453357	7,385765709	0
-9,20381	0,01237677	41,82793186	0
8,4402	-0,2079887	-2,00526611	0
14,04832	0,86338211	20,68414321	0
15,33548	-1,4990612	-8,16526134	0
0,00	**0,00**	**0,00**	**0,00**

Сума

,

збурення у прогнозній формі для всіх відповідних T років приймуть такі значення:

$$W=-UI^{-1}=-\begin{pmatrix} 13,54254 & -1,6761201 & 12,0932154 & 0 \\ -25,618 & -0,8677348 & -4,1050039 & 0 \\ -28,0466 & 1,25570036 & -6,7862177 & 0 \\ -2,02386 & 0,5870061 & -7,8169627 & 0 \\ 26,7938 & 0,72087131 & 25,0663819 & 0 \\ -10,3959 & 0,21781981 & -4,7653791 & 0 \\ 0,453449 & 1,02634669 & -6,4909200 & 0 \\ -9,10142 & 0,00400359 & -17,269521 & 0 \\ 17,77428 & -1,3544045 & -18,045186 & 0 \\ -7,33268 & -0,0223942 & 10,5390991 & 0 \\ 4,154637 & 0,87597687 & -19,070551 & 0 \\ -8,20402 & 0,73232815 & -28,652148 & 0 \\ 11,3379 & 0,14926636 & 16,8455733 & 0 \\ -36,9334 & -0,1720386 & -11,269691 & 0 \\ 24,97905 & -0,6453357 & 7,38576570 & 0 \\ -9,20381 & 0,01237677 & 41,8279318 & 0 \\ 8,4402 & -0,2079887 & -2,0052661 & 0 \\ 14,04832 & 0,86338211 & 20,6841432 & 0 \\ 15,33548 & -1,4990612 & -8,1652613 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2,31852 & -0,026147 & -0,6443252 & -1,700344 \\ -1,31852 & -1,026147 & -0,6443252 & -1,700344 \\ 1,318522 & 0,026147 & -0,3556747 & 1,7003448 \\ -1,31852 & -0,026147 & -0,6443252 & -1,700344 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{v}_{t1} & \hat{v}_{t2} & \hat{v}_{t3} & \hat{v}_{t4} \\ 13,2434954 & -1,6820505 & 11,94708263 & -0,3856377 \\ -55,127506 & -1,4529441 & -18,5254788 & -38,054971 \\ -54,4231400 & 0,73262075 & -19,6757184 & -34,014801 \\ 6,388450400 & 0,75383251 & -3,70609873 & 10,8483816 \\ 30,02192540 & 0,78488896 & 26,643877084 & 4,16293732 \\ -17,532662 & 0,07628908 & -8,25291806 & -9,2034551 \\ 10,96301391 & 1,23476418 & -1,35518663 & 13,5529648 \\ 1,673679030 & 0,21768697 & -12,004028713 & 13,8953947 \\ 63,2172237 & -0,4532155 & 4,161522345 & 8,6024859 \\ -30,926550 & -0,4902894 & -0,9905706 & -30,426269 \\ 35,93255781 & 1,50617179 & -3,541561740 & 40,9802913 \\ 19,72287521 & 1,28615259 & -15,005046836 & 0,0140747 \\ 4,272721330 & 0,00915525 & 13,39301627 & -9,1111396 \\ -70,998347 & -0,8475885 & -27,9163000 & -43,929636 \\ 47,3252907 & -0,2021824 & 18,305755682 & 8,8173526 \\ -76,473981 & -1,3216726 & 8,954864018 & -86,750518 \\ 21,93854040 & 0,05969984 & 4,590999067 & 17,4072412 \\ 6,437239420 & 0,71244501 & 16,96481664 & -9,8151322 \\ 44,34517610 & -0,9237635 & 6,010975029 & 37,4104375 \\ \textbf{Сума} & \textbf{0,00} & \textbf{0,00} & \textbf{0,00} & \textbf{0,00} \end{pmatrix}$$

Якщо тепер розглянути дані за відповідні роки (2 квартал 2014–4 квартал 2015), по яких побудовано модель, та на них розрахувати прогнозні значення і порівняти із

відповідними даними, що задані, можна побачити, що вони не дуже відрізняються від розрахункових (табл. 4.8).

Якщо умовно задати відповідні значення напередвизначених змінних на 1 квартал 2016 р., то відповідні розрахункові значення для ендогенних змінних приймуть вигляд:

	$xt2 = Ct - 1$	$xt3 = Ut - 1$	$xt4 = Imt - 1$	$xt5 = Gt$	$Y(pr) = C$	$Y(pr) = I$	$Y(pr) = Im$	$Y(pr) = Y$
Prog 1 кв. 2016	477,35	6,07	270,87	258,75	402,7296	7,4871353	254,5904	414,37634

Таблиця 4.8

Період	$yt1 = Ct$	$yt2 = It$	$yt3 = Imt$	$yt4 = Yt$	$Y(pr) = C$	$Y(pr) = I$	$Y(pr) = Im$	$Y(pr) = Y$
2 кв. 2011	248,73	1,11	177,04	307,37	235,187464	2,786120186	164,9467846	211,69
3 кв. 2011	266,38	3,13	189,7	370,91	291,998006	3,997734821	193,8050039	164,63
4 кв. 2011	288,73	6,96	201,97	357,78	316,776566	5,704299637	208,7562177	195,39
1 кв. 2012	257,04	4,2	174,72	293,91	259,063862	3,6129939	182,5369628	274,27
2 кв. 2012	289,71	3,62	202,44	349,35	262,916199	2,899128684	177,3736181	212,15
3 кв. 2012	306,52	4,36	206,1	377,02	316,915898	4,142180186	210,8653792	188,19
4 кв. 2012	327,84	6,85	208,59	376,47	327,386551	5,823653308	215,08092	251,46
1кв. 2013	271,6	3,83	172,93	299,62	280,701421	3,825996405	190,1995219	289,27
2 кв. 2013	316,55	2,44	173,94	348,66	298,775722	3,794404557	191,9851865	229,52
3 кв. 2013	325,12	4,46	212,8	385,91	332,452682	4,482394294	202,2609008	191,91
4 кв. 2013	349,77	7,02	205,06	398,91	345,615363	6,144023124	224,1305514	267,51
1 кв. 2014	288,33	4,89	164,54	311,49	296,534022	4,15767185	193,1921483	310,61
2 кв. 2014	330,55	4,8	212,75	370,06	319,212100	4,650733637	195,9044267	200,9
3кв. 2014	322,74	5,37	218,91	427,98	359,673374	5,542038605	230,1796915	183,85
4 кв. 2014	377,65	6,3	237,94	439,64	352,670952	6,945335714	230,5542343	269,54
1 кв. 2015	317,42	5,09	259,75	375,99	326,623812	5,077623222	217,9220681	244,92
2 кв. 2015	362,95	5,45	247,78	400,64	354,509800	5,657988712	249,7852661	213,78
3 кв. 2015	391,16	7,03	269,67	421,25	377,111675	6,166617886	248,9858568	226,3
4 кв. 2015	410,26	7,03	254,78	440,05	394,924523	8,529061272	262,9452613	322,86

Відповідні відносні похибки по кожній із ендогенних змінних набувають таких значень:

Відносні похибки			
0,05324446	-1,515360831	0,067482392	-0,00125463
-0,2069506	-0,464199418	-0,097656715	-0,10259893
-0,18849146	0,105261602	-0,097419015	-0,09507183
0,02485391	0,179483932	-0,021211646	0,036910556
0,10362750	0,216820157	0,131613698	0,011916237
-0,05719908	0,017497495	-0,040043271	-0,02441105
0,03344013	0,180257545	-0,006496892	0,036000119
0,00616229	0,056837331	-0,069415537	0,046376726
0,19970691	-0,185744069	0,023925045	0,168079177
-0,09512349	-0,109930374	-0,004654937	-0,07884291
0,10273196	0,214554387	-0,017270856	0,102730669
0,06840382	0,26301689	-0,091193916	0,115618719
0,01292609	0,001907345	0,062951898	-0,02462070
-0,21998620	-0,157837719	-0,127524097	-0,10264413
0,12531521	-0,032092455	0,076934335	0,065547613
-0,24092363	-0,259660646	0,034474934	-0,23072559
0,06044507	0,0109541	0,01852853	0,043448585
0,01645679	0,101343529	0,062909544	-0,02330001
0,10809042	-0,131403067	0,023592806	0,085014061

Або у відсотках:

Відносні похибки, %			
5%	-152%	7%	0%
-21%	-46%	-10%	-10%
-19%	11%	-10%	-10%
2%	18%	-2%	4%
10%	22%	13%	1%
-6%	2%	-4%	-2%
3%	18%	-1%	4%
1%	6%	-7%	5%
20%	-19%	2%	17%
-10%	-11%	0%	-8%
10%	21%	-2%	10%
7%	26%	-9%	12%
1%	0%	6%	-2%
-22%	-16%	-13%	-10%
13%	-3%	8%	7%
-24%	-26%	3%	-23%
6%	1%	2%	4%
2%	10%	6%	-2%
11%	-13%	2%	9%

Тепер перейдемо до кроку 9 нашого алгоритму (див. п. 4.2). Нагадаємо, що він включає такі дослідження: економіко-логіко-теоретичну інтерпретацію одержаних на моделях (структурної та прогнозної) результатів моделювання (загальний та частковий ефекти прогнозних форм та економічну інтерпретацію коефіцієнтів, ефект і загальний ефект із використанням статичних і динамічних мультиплікаторів, аналіз мультиплікаторів, враховуючи лаги (імпульсні з нульовим лагом, динамічні з лагом більшим, чи таким, що дорівнює одиниці), характеристика матриці мультиплікаторів в її економіко-теоретичному змісті тощо).

Зазначимо, що рівняння системи (4.1) описують тільки структуру моделі. Вона відображає лише багатосторонні стохастичні причинно-наслідкові відношення між економічними величинами в їх безпосередньому вигляді та містить всю суттєву інформацію про залежності між економічними явищами та процесами.

Кожне структурне рівняння моделі описує окремі економічні явища та процеси. Воно відображає також окремий вплив на ендогенну змінну зміни наперед визначених змінних, які вміщуються у ньому. У кожному структурному рівнянні є одна спільно залежна змінна (Y). Воно включає невідомі, які підлягають оцінці, структурні параметри, а також збурювану змінну. Характерною особливістю структурних рівнянь є певна автономність їх по відношенню до наперед визначених змінних, оскільки зміна цих змінних та їх параметрів в одному структурному рівнянні необов'язково спричиняє зміни в інших структурних рівняннях.

Рівняння у прогнозній формі через складність представлення їх коефіцієнтів ($\pi = -B\Gamma^{-1}$) втрачають по відношенню до наперед визначених змінних свою автономність, яка характерна для структурних рівнянь. Але кожне рівняння у прогнозній формі характеризується певною автономністю відносно спільно залежних змінних, оскільки кожне з цих рівнянь містить поточне значення тільки однієї ендогенної змінної, яке виражається як функція всіх наперед визначених

змінних. Очевидно, що взаємозв'язки спільно залежних змінних при переході від структурної форми до прогнозної, поширюються на напередвизначені змінні, а також на збурення ($V = -U\Gamma^{-1}$).

Коефіцієнти рівнянь у прогнозній формі відображають безпосередній та другорядний вплив напередвизначених змінних на спільно залежні змінні. Тут йдеться про *загальний ефект.* Структурні коефіцієнти виражають тільки безпосередній вплив напередвизначених змінних, тобто йдеться про *частковий ефект*. Таким чином, модель у прогнозній формі побудована немов би з урахуванням передумови, що інші пояснюючі змінні не змінюються, оскільки у цій моделі кожна спільно залежна змінна y_i пояснюється тільки напередвизначеними змінними. Але наведена форма, як видно, є дуже складним «конгломератом» структурної економетричної моделі.

Кожне рівняння у прогнозній формі являє собою множинну регресію.

Якщо оцінки коефіцієнтів наведеної форми і значення напередвизначених змінних припадають на період часу прогнозу, то за моделлю знаходять прогнозні значення спільно залежних змінних. І, навпаки, структурна форма для прогнозу непридатна, тому що у кожному структурному рівнянні міститься декілька спільно залежних змінних, для яких не можуть бути вказані значення на прогнозований період часу, оскільки вони ще тільки підлягають оцінці.

До недоліків прогнозної форми належить те, що у кількісно оціненої моделі у прогнозній формі не в усіх випадках можна побудувати знову структурну форму моделі. Тобто наведена форма у загальному випадку не є оберненою до структурної та навпаки, за заданою у числовому вигляді структурною формою можна завжди визначити наведену форму.

Наголосимо також, що структурні коефіцієнти інтердедендентної моделі вказують тільки часткові ефекти окремих пояснюючих змінних на спільно залежні змінні та їх інтерпретація тим більш нереалістична, чим найчисленніший

і тісніший взаємозв'язок між спільно залежними змінними. У прогнозній формі моделі її причинна структура так трансформується, що коефіцієнти звичайних екзогенних змінних відображають загальний спільний ефект впливу цих екзогенних змінних на спільно залежні змінні. Ці коефіцієнти прогнозної форми називають *мультиплікаторами*[10]. Під час прийняття управлінських рішень з керування досліджуваним процесом (системою) вони відіграють більшу роль, ніж структурні коефіцієнти.

Прогнозна форма використовується для знаходження прогнозних абсолютних значень (значень рівноваги) спільно залежних змінних, *якщо задані* значення всіх напередвизначених змінних і всіх параметрів структурної форми. Це так звані *умовні прогнози* спільно залежних змінних.

Прогнозна форма використовується для економіко-теоретичного і статистично обґрунтованого прогнозу *загального ефекту* дії окремих екзогенних змінних або окремих структурних параметрів на ендогенні змінні. Це дає можливість оцінити вплив певних економіко-політичних засобів на економічні показники.

У лінійній економетричній статичній прогнозній моделі разом із коефіцієнтами, які в економіко-теоретичному розумінні не є мультиплікаторами, містяться тільки статичні мультиплікатори (мультиплікатори з нульовим лагом або імпульсні мультиплікатори).

На відміну від статичної *динамічна прогнозна форма* поряд із коефіцієнтами, які не є мультиплікаторами в економіко-теоретичному розумінні, містить як статичні, так і динамічні мультиплікатори, вказуючи загальний ефект дії екзогенних змінних на ендогенні змінні без запізнення (статичні мультиплікатори) і з запізненням (динамічні мультиплікатори).

---

[10] Мультиплікатор $g_{(\lambda)j,i}$ вказує, на скільки одиниць за інших рівних умов змінюється i-та залежна змінна у період часу $t + \lambda$ (або у період часу t) із урахуванням усіх взаємозв'язків, якщо i-та екзогенна змінна у період часу t і тільки у цей період (або у період часу $t - \lambda$) зміниться на одиницю.

Нагадаємо, що частинну похідну від *i*-го рівняння економетричної моделі, представленої у динамічній прогнозній формі із залежною змінною $y_{t+\lambda,i}$ (або $y_{t,i}$) по *j*-й екзогенній змінній $x_{t,j}$ (або по $x_{t-\lambda,j}$), *називають мультиплікатором* $g_{(\lambda)j,i}$ *у загальному вигляді.* При цьому, якщо $\lambda = 0$, отримаємо *статичний (з нульовим лагом, чи імпульсний) мультиплікатор*, а при $\lambda \geq 1$ – *динамічний (із запізненням) мультиплікатор*.

У випадку лінійної моделі мультиплікатором $g_{(\lambda)j,i}$ є коефіцієнт при *j*-й екзогенній змінній $x_{t,j}$ (або $x_{t-\lambda,j}$) в *i*-му прогнозному рівнянні з залежною змінною $y_{t+\lambda,i}$ (або $y_{t,i}$).

Зазначимо, що мультиплікатори показують реакцію у поточному періоді кожної ендогенної змінної на зміну поточного значення будь-якої екзогенної змінної. *Для лінійної моделі ефект* від одночасної зміни декількох екзогенних змінних *дорівнює сумі часткових ефектів.* Але, слід пам'ятати, що економіко-теоретичний зміст мають тільки мультиплікатори, що показують зв'язки між екзогенними й ендогенними змінними; елементи π_1-матриці коефіцієнтів лагових ендогенних змінних, не є мультиплікаторами. Крім того, коефіцієнти екзогенних змінних, які запізнюються на один період і створюють деяку матрицю вимірності $S \times g$ у статичній прогнозній формі, не є мультиплікаторами з лагом 1, бо на елементах матриці π_1 позначається не загальний ефект від запізнення, а тільки частковий.

Перейдемо безпосередньо до прогнозної моделі.

Дамо економічно-теоретичну інтерпретацію імпульсним (статичним, з нульовим лагом) мультиплікаторам для побудованої прогнозної економетричної моделі (для змінної $G_{t,}$ – (державні витрати) + (державні чисті інвестиції та основний капітал) + (зміна у товарних запасах) + (експорт) + (субсидії) – (непрямі податки). Надалі називатимемо цю змінну скорочено – державні витрати):

– мультиплікатор для G_t відносно особистого споживання C_t ($q_{(0)ji}$ – мультиплікатор із нульовим лагом ($\lambda = 0$) для

j-ї змінної в *i*-му рівнянні) $\alpha_{C_t} = q_{(0)51} = \frac{\partial C_t}{\partial G_t} = 1{,}318522$ свідчить, що особисте споживання у момент часу *t* (за умови, що інші фактори незмінні) збільшиться на 1,318522, якщо державні витрати збільшаться на одиницю;

– мультиплікатор для G_t відносно інвестицій I_t

$$\alpha_{I_t} = q_{(0)52} = \frac{\partial I_t}{\partial G_t} = 0{,}026147903$$

свідчить, що інвестиції у момент часу *t* (за умови, що інші фактори незмінні) збільшаться на 0,026147903, якщо державні витрати збільшаться на одиницю;

– мультиплікатор для G_t відносно імпорту Im_t

$$\alpha_{\mathrm{Im}_t} = q_{(0)53} = \frac{\partial \mathrm{Im}_t}{\partial G_t} = 0{,}644325269$$

свідчить, що імпорт у момент часу *t* (за умови, що інші фактори незмінні) збільшиться на 0,644325269, якщо державні витрати збільшаться на одиницю;

– мультиплікатор для G_t відносно імпорту Y_t

$$\alpha_{Y_t} = q_{(0)54} = \frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = 1{,}70034483$$

свідчить, що національний дохід у момент часу *t* (за умови, що інші фактори незмінні) збільшиться на 1,70034483, якщо державні витрати збільшаться на одиницю.

Зрозуміло, що для обчислення приросту ΔY_t національного доходу виконується співвідношення:

$$\alpha_{Y_t} = \Delta Y_t = \Delta C_t + \Delta I_t - \Delta Im_t + 1 = \alpha_{C_t} + \alpha_{I_t} - \alpha_{\mathrm{Im}_t} + 1 =$$
$$= 1{,}318522 + 0{,}026147903 - 0{,}644325269 + 1 = 1{,}700344634.$$

Зауважимо, що можна вирішити і обернену задачу, а саме: на скільки потрібно змінити державні витрати G_t, щоб імпорт, наприклад, змінився на $\Delta Im_t = 5{,}2$ млрд грн. Для цього скористуємося таким співвідношенням:

$$\Delta Im_t = q_{(0)53}\Delta \mathrm{G}_t \Leftrightarrow \Delta G_t = \frac{\partial \mathrm{Im}_t}{q_{(0)53}} = \frac{5{,}2}{0{,}644325269} = 8{,}070458.$$

Таким чином можна зробити висновок: державні витрати у момент часу t зростуть на 8,070458 млрд грн, якщо у цей самий період часу t змінити імпорт на 5,2 млрд грн.

Запишемо статичну прогнозну форму (виходячи з динамічної системи (4.9) першого порядку:

$$Y\Gamma + Y_{-1}B_1 + W_0D_0 + W_{-1}D_1 + U = 0),$$

$$Y = Y_{-1}\pi_{1*} + W_0\pi_0 + W_{-1}\pi_1 + V,$$

де $\pi_{1*} = -B_1\Gamma^{-1}$, $\pi_0 = -D_0\,\Gamma^{-1}$, $\pi_1 = -D_1\,\Gamma^{-1}$.

Для нашого випадку маємо:

$$\pi_{1*} = -B_1\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \\ 0{,}698253 & 0{,}007874781 & 0{,}194046931 & 0{,}51208095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}56659 & -0{,}011236094 & 0{,}152838056 & -0{,}73066028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_{t-1,1} = C_{t-1} \\ y_{t-1,2} = I_{t-1} \\ y_{t-1,3} = Im_{t-1} \\ y_{t-1,4} = Y_{t-1} \end{matrix}$$

$$\pi_0 = -D_0\,\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} -125{,}278 & -5{,}441596423 & -49{,}5768042 & -81{,}1423087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}318522 & 0{,}026147903 & 0{,}644325269 & 1{,}70034483 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_{t1} = 1 \\ w_{t2} = U_t \\ w_{t3} = G_t \end{matrix}$$

$$\pi_1 = -D_1\,\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}153141 & 0{,}897439197 & 0{,}563508195 & 1{,}487072278 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} w_{t-1,1} = 1 \\ w_{t-1,2} = U_{t-1} \\ w_{t-1,3} = G_{t-1} \end{matrix}$$

Матриця $Q(\lambda)$ мультиплікаторів з лагом $\lambda = 0$ має такий вигляд:

$$Q(0)' = \pi_0' = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_{t1}=1 & w_{t2}=U_t & w_{t3}=G_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -125{,}278 & 0 & 1{,}318522 \\ -5{,}441596423 & 0 & 0{,}026147903 \\ -49{,}5768042 & 0 & 0{,}644325269 \\ -81{,}1423087 & 0 & 1{,}70034483 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} y_{t1}=C_t \\ y_{t2}=I_t \\ y_{t3}=Im_t \\ y_{t4}=Y_t \end{matrix}$$

Матрицю $Q(\lambda)$ мультиплікаторів з лагом $\lambda = 1$ обчислимо за співвідношенням:

$$Q(1)' = \pi_{1*}\pi_0' + \pi_1'.$$

Відповідні транспоновані матриці мають такий вигляд:

$$\pi_{1*}' = \begin{pmatrix} 0{,}698253 & 0 & -0{,}56659 & 0 \\ 0{,}007874781 & 0 & -0{,}011236094 & 0 \\ 0{,}194046931 & 0 & 0{,}152838056 & 0 \\ 0{,}51208095 & 0 & -0{,}73066028 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}153141 & 0 \\ 0 & 0{,}897439197 & 0 \\ 0 & 0{,}563508195 & 0 \\ 0 & 1{,}487072278 & 0 \end{pmatrix}$$

Тому, оскільки

$$\pi_{1*}\pi_0' = \begin{pmatrix} -138{,}6902479 & 0 & 1{,}916611388 \\ 0 & 0 & 0 \\ 122{,}7526439 & 0 & -1{,}89125218 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

одержимо

$$Q(1)' = \pi_{1*}\pi_0' + \pi_1' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -138{,}6902479 & 1{,}153141 & 1{,}916611388 \\ 0 & 0{,}897439197 & 0 \\ 122{,}7526439 & 0{,}563508195 & -1{,}891252188 \\ 0 & 1{,}487072278 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} y_{t1}=C_{t+1} \\ y_{t2}=I_{t+1} \\ y_{t3}=Im_{t+1} \\ y_{t4}=Y_{t+1} \end{matrix}$$

Матрицю $Q(\lambda)$ мультиплікаторів із лагом $\lambda = 2$ обчислимо за співвідношенням

$$Q(2)' = \pi^{*}_{1*}\, Q(1)' = \begin{pmatrix} -166{,}3913022 & 0{,}485906054 & 2{,}409844229 \\ -2{,}471415575 & 0{,}002749102 & 0{,}036343182 \\ -8{,}151141506 & 0{,}309888969 & 0{,}08285725 \\ -160{,}7111151 & 0{,}178768483 & 2{,}363323034 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_{t1} = C_{t+2} \\ y_{t2} = I_{t+2} \\ y_{t3} = Im_{t+2} \\ y_{t4} = Y_{t+2} \end{matrix}$$

Наведемо одержані результати у вигляді матриць $Q_j=(q_{(\lambda)ji})$ для кожної екзогенної змінної x_{t1}, U_t, G_t (такі матриці складаються із відповідних одержаних лаг-мультиплікаторних матриць $Q(\lambda)$ звичайною заміною стовпчиків рядками для кожного лага λ):

1) для x_{t1}

$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -125{,}278 & -5{,}441596423 & -49{,}5768042 & -81{,}1423087 \\ -138{,}6902479 & 0 & 122{,}7526439 & 0 \\ -166{,}3913022 & -2{,}471415575 & -8{,}151141506 & -160{,}7111151 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 5 \end{matrix}$$

2) для U_t

$$Q_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}153141 & 0{,}897439197 & 0{,}563508195 & 1{,}487072278 \\ 0{,}485906054 & 0{,}002749102 & 0{,}309888969 & 0{,}178768483 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 5 \end{matrix}$$

3) для G_t

$$Q_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1{,}318522 & 0{,}026147903 & 0{,}644325269 & 1{,}70034483 \\ 1{,}916611388 & 0 & -1{,}891252188 & 0 \\ 2{,}409844229 & 0{,}036343182 & 0{,}08285725 & 2{,}363323034 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 5 \end{matrix}$$

Пропонуємо самостійно знайти динамічні мультиплікатори $q_{(\lambda)ji}$ для λ =3, 4, 5. При цьому скористуйтеся такими співвідношеннями[11]:

$$Q(\lambda)' = \pi_{1*}^{(\lambda-1)'}[\pi_{1*}'\pi_0' + \pi_1'] \ (\lambda=1, 2, 3, 4)$$

або

$$Q(\lambda)' = \pi_{1*}'Q(\lambda-1)' \ (\lambda=2, 3, 4).$$

Матриці Q_1, Q_2, Q_3 вміщують інформацію про всі лагові мультиплікатори, що відносяться до кожної із екзогенних змінних. Це можна трактувати таким чином: як впливає кожна з екзогенних змінних у часі на відповідні ендогенні змінні.

Розглянемо це питання більш докладніше. При цьому скористаємося таким співвідношенням:

$$\Delta y_{t+\lambda,i} = q_{(\lambda)ji}\Delta w_{tj}.$$

Тому відповідно до визначення мультиплікатора, якщо вільні члени ($w_{t1} = x_{t1} = 1$) прогнозної форми для всіх рівнянь у момент часу t збільшити на одиницю, тобто $\Delta w_{tj} = 2$ (не змінюючи інші), то розглядаючи цю змінну як автономну, одержимо:

– автономне споживання зменшується з 125,278 до 2·125,278= -250,556 млрд грн;

– автономні інвестиції зменшуються з 5,441596423 до 2·5,441596423=10,883 млрд грн;

– автономний імпорт зменшується з 49,5768042 до 2·49,5768042 =99,1536 млрд грн;

– автономний національний дохід зменшиться з 81,1423087 до 2·81,1423087 =162,285 млрд грн

Така одночасна зміна автономних змінних для всіх рівнянь прогнозної форми призведе до того, що:

[11] Й. Грубер. Эконометрия: Эконометрические прогнозные и оптимизационные модели. Т2. – Київ : Нічлава, 1999. – С. 127–133.

1) особисте споживання (див. перший стовпець матриці Q_1) у момент часу: (t + 1) зменшиться на 138,6902479 млрд грн; (t + 2) зменшиться на 166,3913022 млрд грн;

2) автономні інвестиції (див. другий стовпець матриці Q_1) у момент часу: (t + 1) не зміняться; (t + 2) зменшаться на 2,471415575 млрд грн;

3) автономний імпорт (див. третій стовпець матриці Q_1) у момент часу: (t + 1) збільшиться на 122,7526439 млрд грн; (t + 2) зменшиться на 8,151141506 млрд грн;

4) автономний національний дохід (див. четвертий стовпець матриці Q_1) у момент часу: (t + 1) не зміниться; (t + 2) зменшиться на -160,7111151 млрд грн.

Аналогічно інтерпретуються елементи матриць Q_2, Q_3 (пропонуємо зробити це самостійно після того, як ви заповните відповідні матриці для λ =3, 4, 5).

Для визначення загального ефекту за декількома періодами часу (сумарного (кумулятивного, накопичувального, складового) мультиплікатора) до відповідної екзогенної змінної x_{ti} необхідно додати відповідні елементи стовпця матриці Q_i для цієї змінної. Наприклад, якщо обчислюємо загальний ефект (кумулятивний мультиплікатор) впливу екзогенної змінної $x_{t2} = U_t$ на національний дохід $y_{t4} = Y_t$, то потрібно додати між собою елементи четвертого стовпчика матриці Q_2:

$$q_{24}^{(6)} = \sum_{\lambda=0}^{6} q_{(\lambda)24} = 0 + 1{,}487072278 + 0{,}178768483 + ? + ? + ? =$$

$$= 1{,}6658408 + (? + ? + ?).$$

Для перших трьох $\lambda = 0, 1, 2$ маємо загальну суму 1,6658408. Це означає: якщо у момент часу t змінна $x_{t2} = U_t$ збільшиться на одиницю і для всіх інших $\lambda = 1, 2$ прийме те саме значення, то при всіх інших рівних умовах загальний вплив такої імпульсної зміни на ендогенну змінну національного доходу $y_{t4} = Y_t$ у сукупності у цьому ($\lambda = 0$) та наступних двох періодах ($\lambda = 1, 2$) збільшиться на 1,6658408.

Розрахуємо матрицю Q рівноважних (повних, довгострокових) мультиплікаторів. Нагадаємо, що рівноважним мультиплікатором q_{ji} називається сума всіх лагових мультиплікаторів j-ї екзогенної змінної відносно i-ї ендогенної змінної, тобто:

$$q_{ji} = \sum_{\lambda=0}^{\tau} q_{(\lambda)ji}, \quad \tau \to \infty.$$

Він показує, наскільки зміниться рівнозважене (стале) значення залежної змінної y_{ti}, якщо при всіх рівних умовах j-та екзогенна змінна зміниться на одиницю в (умовно) нескінченному періоді часу, та така їх зміна буде зберігатися для всіх подальших періодів часу.

Скористуємося для знаходження відповідної матриці співвідношенням [6]:

$$Q = [\Pi_0 + \Pi_1](\mathrm{I} - \Pi_{1*})^{-1}.$$

Виконаємо відповідні розрахунки (для цього використаємо вже розраховані матриці):

$$\Pi_{1*} = \begin{pmatrix} 0{,}698253 & 0{,}007874781 & 0{,}194046931 & 0{,}51208095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}56659 & -0{,}011236094 & 0{,}152838056 & -0{,}73066028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} -125{,}278 & -5{,}441596423 & -49{,}5768042 & -81{,}1423087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}318522 & 0{,}026147903 & 0{,}644325269 & 1{,}70034483 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}153141 & 0{,}897439197 & 0{,}563508195 & 1{,}487072278 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1)

$$\Pi_0 + \Pi_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -125{,}278 & -5{,}44159642 & -49{,}5768042 & -81{,}1423087 \\ 1{,}153141 & 0{,}897439197 & 0{,}563508195 & 1{,}487072278 \\ 1{,}318522 & 0{,}026147903 & 0{,}644325269 & 1{,}70034483 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} w_{t1} = 1 \\ w_{t\text{-}1,2} = U_{t\text{-}1} \\ w_{t3} = G_t \end{matrix}$$

2)

$$I - \Pi_{1*} = \begin{pmatrix} 0{,}301747 & -0{,}00787478 & -0{,}194046931 & -0{,}51208095 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}56659 & 0{,}011236094 & 0{,}847161944 & 0{,}73066028 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$(I - \Pi_*)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}31734973 & 0{,}012284489 & 0{,}530801232 & 0{,}798835276 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1{,}5498656 & -0{,}0214792 & 0{,}825406919 & -1{,}39674872 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $Q = [\Pi_0 + \Pi_1](I - \Pi_{1*})^{-1}$:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_{t1} = C_t & y_{t2} = I_t & y_{t3} = Im_t & y_{t4} = Y_t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -213{,}4755 & -5{,}91570244 & -107{,}418754 & -111{,}972457 \\ 1{,}798869 & 0{,}899501239 & 1{,}077212271{,}621162638 \\ 2{,}056859 & 0{,}028505679 & 1{,}231703637 & 1{,}853666222 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} w_{t1} = 1 \\ w_{t\text{-}1,2} = U_{t\text{-}1} \\ w_{t3} = G_t \end{matrix}$$

Питання для самоконтролю

1. Які основні причини використання систем одночасних рівнянь?
2. Сформулюйте означення системи симультативних рівнянь.
3. Які змінні називаються ендогенними?
4. Які змінні називаються екзогенними?
5. Який вигляд має структурна форма моделі?

6. Який вигляд має зведена форма моделі?
7. Сформулюйте означення точно (строго) ідентифікованої моделі.
8. Сформулюйте означення надідентифікованої моделі.
9. Яка модель називається неідентифікованою?
10. У чому полягає основна розбіжність між структурними рівняннями системи і рівняннями у зведеній формі?
11. Чому звичайний МНК практично не використовується для оцінки систем одночасних рівнянь?
12. У чому сутність непрямого методу найменших квадратів (НМНК)?
13. Яка проблема часто виникає при чисельній оцінці параметрів структурних рівнянь за оцінками коефіцієнтів зведених рівнянь?
14. Назвіть причини неідентифікованості і надідентифікованості систем структурних рівнянь.
15. Наведіть необхідні і достатні умови ідентифікованості систем.
16. Для оцінювання параметрів яких систем можливе використання звичайного МНК?
17. У чому сутність двохкрокового методу найменших квадратів (2МНК)?

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

Кожен студент виконує завдання за варіантом (*N*), номер якого визначається за номером студента у списках групи або за двома останніми цифрами залікової книжки. Статистичні дані для кожного варіанта коригуються згідно з формулами у заголовках таблиць.

Задача 1

На базі статистичних даних (економічного показника *X* за 12 місяців):

1) побудувати графік тренда змінної *x(t),* вибрати форму лінійної моделі;

2) оцінити всі її параметри;

3) визначити зони надійності при рівні значущості *alfa*=α.=0,05;

4) перевірити показник *X* на автокореляцію;

5) оцінити прогноз для наступних трьох місяців (*x*(13), *x*(14), *x*(15)):

T	*x(t)* + *N*/10
1	5,93
2	6,17
3	7,15
4	6,87
5	7,71
6	8,20
7	7,77
8	7,36
9	9,45
10	9,57
11	10,24
12	10,70

Задача 2

На базі *n* статистичних даних певного регіону:

1) визначити параметри лінійної моделі залежності витрат на споживання *(C)* від рівня доходів *(D)*, збережень *(S)* та заробітної плати *(L)*;

2) оцінити коефіцієнт детермінації;

3) перевірити наявність автокореляції залишків та, якщо вона існує, знайти оцінки параметрів моделі методом Ейткена;

4) перевірити залишки на гомоскедастичність та, якщо вона порушується, знайти оцінки параметрів моделі на основі узагальненого методу найменших квадратів;

5) дослідити мультиколінеарність між факторами.

i	*C(i)* + *N*/10	*D(i)* + *N*/10	*S(I)* + *N*/10	*L(i)* + *N*/10
1	5,25	9,11	7,05	16,05
2	11,24	13,57	8,68	18,68
3	16,27	14,01	9,57	20,06
4	18,75	17,29	10,11	29,67
5	21,78	19,58	11,55	31,55
6	24,58	21,07	13,31	34,01
7	27,09	22,47	15,37	35,34
8	31,76	24,68	17,01	36,01
9	35,94	25,75	19,67	38,54
10	38,57	27,05	21,92	41,92
11	41,47	30,87	25,08	43,27

Задача 3

За статистичними показниками *Y*, *K* та *L* за *n* років проаналізувати класичну модель виробничої функції Кобба-Дугласа, що описує залежність між продуктивністю праці $y = Y / L$ та фондоозброєністю $x = K / L$ із урахуванням впливу технічного прогресу у виробництві регіону:

1) оцінити параметри нелінійної моделі;

2) оцінити коефіцієнт детермінації;

3) перевірити наявність автокореляції залишків.

t	*Y(i)* + *N*/10	*K(i)* + *N*/10	*L(i)* + *N*/10
1	65,04	4,03	7,45
2	54,27	5,25	8,68
3	78,22	7,57	9,55
4	82,06	7,99	10,67
5	79,14	8,91	11,68
6	90,48	10,67	13,31
7	85,69	11,51	14,27
8	76,26	10,23	13,01
9	82,05	10,84	15,05

Задача 4

На основі статистики за *n* років визначити параметри найпростішої мультиплікативної моделі споживання Кейнса для певного регіону:

$$C(t) = a0 + a1\ Y(t) + u(t),$$

$$Y(t) = C(t) + I(t),$$

де *C(t)* – споживання;
Y(t) – національний дохід;
I(t) – інвестиції;
u(t) – стохастичне відхилення, похибка.

t	*C(t)* + *N*/10	*Y(t)* + *N*/10	*I(t)* + *N*/10
1	15,25	11,11	22,05
2	15,84	13,25	24,68
3	16,27	14,57	27,28
4	16,75	15,29	29,67
5	17,14	16,21	31,55
6	17,68	17,67	33,31
7	18,58	18,47	35,74
8	19,26	19,23	37,01
9	20,24	20,61	40,25
10	21,57	21,05	41,92

ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ РЕГРЕСІЙНИМХ РІВНЯНЬ

1. ДОХОДИ ТА ВИТРАТИ ДЕРЖАВИ

Оскільки ВВП визначається обсягом виробництва, характеризує сукупну ринкову вартість кінцевих товарів та послуг, вироблених підприємствами, організаціями та установами у поточному періоді на території країни, важливим завданням є виявлення та врахування тенденцій зміни окремих складових ВВП під впливом різноманітних факторів. Пропонується дослідити залежність реального ВВП від: 1) обсягів промислової продукції, 2) чисельності промислово-виробничого персоналу, 3) безробітних, 4) вакансій, 5) заробітної плати робітників та службовців, 6) пенсій, допомог, стипендій.

2. АНАЛІЗ ДОХОДІВ ЗВЕДЕНОГО БЮДЖЕТУ

Дослідити залежність доходів зведеного бюджету від таких факторів: податок на додану вартість, податок на прибуток, акцизний збір, фонд Чорнобиля, податки з населення, Пенсійний фонд.

3. ГРОШОВІ ДОХОДИ ТА ВИТРАТИ НАСЕЛЕННЯ

Дослідити залежність частки заробітної плати населення України у загальних доходах від: 1) оплати праці та доходів від підприємницької діяльності, 2) заробітної плати робітників та службовців, 3) пенсій, соціальних допомог, стипендій та інших доходів, 4) реальних доходів, 5) грошових доходів на душу населення, 6) частки пенсій та інших доходів у загальних доходах.

4. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОЇ ТОРГІВЛІ УКРАЇНИ

Стан економіки конкретної країни характеризується розвитком її зовнішньої торгівлі, важливим об'єктом під час дослідження якої є баланс товарів та послуг (рахунок поточних операцій, що дозволяє виявити величини чистих потоків реальних ресурсів, здійснюваних у процесі зовнішньоекономічних зв'язків національного господарства з закордонними країнами). Пропонується дослідити зміни балансу товарів та послуг під впливом таких факторів: 1) рахунок поточних операцій (розділ платіжного балансу країни, у якому фіксуються обсяги її експорту й імпорту товарів і послуг, її чистого доходу від інвестицій і чистого обсягу трансферних платежів); 2) іноземні інвестиції (довгострокові вкладення капіталу закордонними власниками у промисловість, сільське господарство, транспорт й інші галузі економіки, реалізація вивозу підприємницького капіталу в інші країни); 3) портфельні інвестиції (вкладення засобів в акції, облігації й інші папери довгострокового характеру з метою одержання прибутків); 4) зростання резервних активів (динаміка зростання або скорочення валютних активів держав (банків, транснаціональних корпорацій), що являють собою резерви міжнародних платіжних засобів); 5) обсяг зовнішнього боргу (заборгованість держави по непогашених зовнішніх позиках і невиплачених по них відсотках).

5. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО БОРГУ УКРАЇНИ

На сучасному етапі розвитку економіка України перебуває у стані виходу з кризи: іноземні інвестиції є нестабільними, резервні активи та портфельні інвестиції здебільшого мають від'ємні показники зростання, як наслідок цього, відбувається зростання обсягу зовнішнього боргу. З метою виправлення ситуації у державі та розробки відповідних управлінських рішень, пропонується дослідити залежність обсягу зовнішнього

боргу від таких факторів: 1) баланс товарів і послуг; 2) рахунок поточних операцій; 3) іноземні інвестиції; 4) портфельні інвестиції; 5) зростання резервних активів; 6) обсяг зовнішнього боргу у відсотках до ВВП; 7) обслуговування довгострокового зовнішнього боргу у відсотках до експорту.

6. ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО СПОЖИВАННЯ ДОМОГОСПОДАРСТВ

Домогосподарства відіграють подвійну роль в економіці кожної країни: вони є постачальниками економічних ресурсів та одночасно основною групою споживачів у народному господарстві. Реальне споживання домогосподарств є чи не найважливішим макроекономічним показником. Саме воно характеризує стан економічної та соціальної сфер, значною мірою визначає сукупний попит у країні. Вважається, що чим вище цей показник, тим краще і стабільніше становище в економіці, менше напруження у соціальній сфері, а динаміка його вказує на напрям зрушень в економіці.

Для чіткого розуміння практичної цінності цього дослідження доцільно визначити основні економічні об’єкти моделі:

1. Реальне споживання домогосподарств – це завершальна фаза суспільного матеріального виробництва, яка полягає у використанні створених продуктів для задоволення особистих і суспільних потреб.

2. Обсяг виробництва – ВВП, що виражається у гривнях за поточними цінами (номінальний ВВП).

3. Обмінний курс у середньому за період – співвідношення курсу національної валюти та валюти США (USD).

4. Зростання грошової бази – зростання обсягу готівки у сфері обігу.

5. Заробітна плата – це грошова сума, яку отримує працівник за продаж своєї робочої сили.

6. Пенсії, допомоги, стипендії – засоби соціальної підтримки населення.

7. Експорт товарів та послуг (млрд дол. США) – обсяг вивозу товарів та послуг за кордон, виражений у валюті США;

8. Чисельність виробничого персоналу – кількість працівників, що працюють у сфері виробництва (у тис. чол.).

Пропонується дослідити залежність рівня реального споживання домогосподарств від названих вище факторів.

7. ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ІНДЕКСУ ІНФЛЯЦІЇ В УКРАЇНІ

На економічне зростання в Україні суттєвий вплив має інфляція. Інфляція – це знецінення грошей внаслідок переповнення каналів обігу грошовою масою. Вона виявляється у загальному тривалому і неперервному зростанні цін, а при централізованому ціноутворенні – і у загальному зростанні товарного дефіциту.

Інфляція призводить до розбалансування економічної рівноваги, відпливу капіталу з виробництва, знижуючи реальні доходи широких верств населення, посилює тіньову економіку, призводить до кризи державних фінансів, спричиняє натуралізацію обміну, послаблює зовнішньоекономічні позиції країни тощо.

У задачі пропонується дослідити вплив у 2000–2016 рр. на індекс інфляції таких факторів: 1) облікової ставки Національного банку України (НБУ); 2) офіційного курсу національної валюти гривні щодо долара США; 3) мінімальної зарплати; 4) сальдо торговельного балансу товарів та послуг (різниці між експортом та імпортом товарів та послуг в Україні); 5) рівня безробіття; 6) номінального валового внутрішнього продукту (ВВП).

8. АНАЛІЗ РОЗДРІБНОГО ТОВАРООБОРОТУ КРАЇНИ

Одним із факторів, який впливає на розвиток економіки, є товарообіг країни. Залежно від форм власності товарообіг можна поділити на: державний, колективний та приватний. Також можемо зазначимо, що товарообіг має тісний зв'язок із розвитком та функціонуванням різних ланок господарства країни. Розглядаючи товарообіг, можна визначити, наприклад, яка кількість продовольчих та непродовольчих товарів припадала на душу населення у певний період часу.

У задачі пропонується дослідити вплив на роздрібний товарообіг таких факторів: 1) державної форми власності; 2) роздрібної торгівлі; 3) товарообороту на душу населення; 4) товарної структури роздрібного товарообороту; 5) торгової площі магазинів.

9. АНАЛІЗ ГРОШОВОГО ОБІГУ КРАЇНИ

Дослідіть залежність готівкового обігу країни від названих нижче факторів та спрогнозуйте його подальші зміни: грошових агрегатів М0, М1, М2, М3, грошової бази, реального ВВП та індексу інфляції.

ПРИКЛАДИ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ СИСТЕМ СИМУЛЬТАТИВНИХ РІВНЯНЬ

Усі статистичні дані, які необхідні для вирішення наведених нижче задач, вміщено у статистичних збірниках Держкомстату України чи в інших періодичних офіційних виданнях.

Задачі (далі індивідуальні роботи) захищаються студентами на навчальному семінарі та **є базовими** *під час визначення їхніх знань з курсу «Економетрія».*

Теоретичні відомості та довідки про необхідні формули, визначення й алгоритми для розв'язання задач вміщено у додатках до навчального посібника. Додаткові відомості можна знайти у списку рекомендованих джерел.

Вирішення деяких із запропонованих задач, ситуацій і проблем має неоднозначний характер і тому може відбуватися у вигляді дискусій.

Основна спрямованість задач – допомога у формуванні **нового економічного мислення** у студентів-економістів, із урахуванням сучасних об'єктивних умов і вимог, що **зумовлені процесами розвитку економіки України.**

Оформлення індивідуальних робіт повинно включати:

1. Вступ:

– актуальність обраної теми;

– цілі та завдання дослідження;

– предмет та об'єкт дослідження;

– методологічні та методичні принципи, які покладено в основу роботи для вирішення задачі;

– зв'язок роботи з реальними економічними умовами та її практичне використання;

– наукова новизна роботи;

– якщо студент вже працює на виробництві (у банку, фірмі тощо) і виконує конкретну роботу за його матеріалами, чи застосовувались результати його розробок;

– якщо студент доповідав про результати своєї роботи, то зазначити: тему семінару, конференції тощо, де відбувалися і коли; тему доповіді;

– якщо є публікації з цієї теми, навести їх список.

2. **І частина:** *дослідження трендів розглянутих економічних показників.*

3. **ІІ частина:** *дослідження залежності між розглянутими економічними показниками кореляційно-регресійними методами.*

4. **ІІІ частина:** *дослідження поставленої задачі економетричними методами.*

5. **Висновки з роботи** (*що зроблено і де можна застосувати*).

6. Список використаних джерел.

7. **Додаток** *(графіки, рисунки, алгоритми тощо).*

Наведені нижче задачі пропонується вирішувати у такій послідовності:

Крок 1. *Вирішіть задачу специфікації* моделі за алгоритмом, наведеним на блок-схемі (рис. А) *та ідентифікації* для даної проблеми (виходячи з економіко-логіко-теоретичних міркувань; виберіть ті змінні, які, як Ви вважаєте, повинні ввійти в економетричну модель. Поясніть свій вибір). Зверніть при цьому особливу увагу на можливість отримання статистичної інформації для обраних змінних та на її вірогідність.

Крок 2. *Вирішіть цю задачу, застосовуючи класичний кореляційно-регресійний метод* (для випадків, коли вибрана модель має лінійний, поліноміальний, логарифмічний та експоненціальний характер, і виберіть найкращу форму моделі). Поясніть, чому застосування лише кореляційно-регресійних методів не дає бажаних результатів.

Крок 3. *За складеною структурною формою* економетричної моделі для дослідження Вашої задачі (цей крок виконати відповідно до алгоритму, наведеному у п. 4.2):

– побудуйте статичну форму;

– побудуйте динамічну форму першого порядку;

– побудуйте прогнозну форму;

– складіть хрестоподібну та стрілкову діаграми (для чотирьох періодів часу);

– побудуйте матрицю мультиплікаторів та дайте економічну інтерпретацію її елементів;

– дайте економіко-логіко-теоретичну інтерпретацію всім одержаним результатам;

– покажіть, як «монтуються» сконструйовані Вами економетричні моделі у систему підтримки прийняття рішень з управління економічною системою, що описує об'єкт Вашого дослідження.

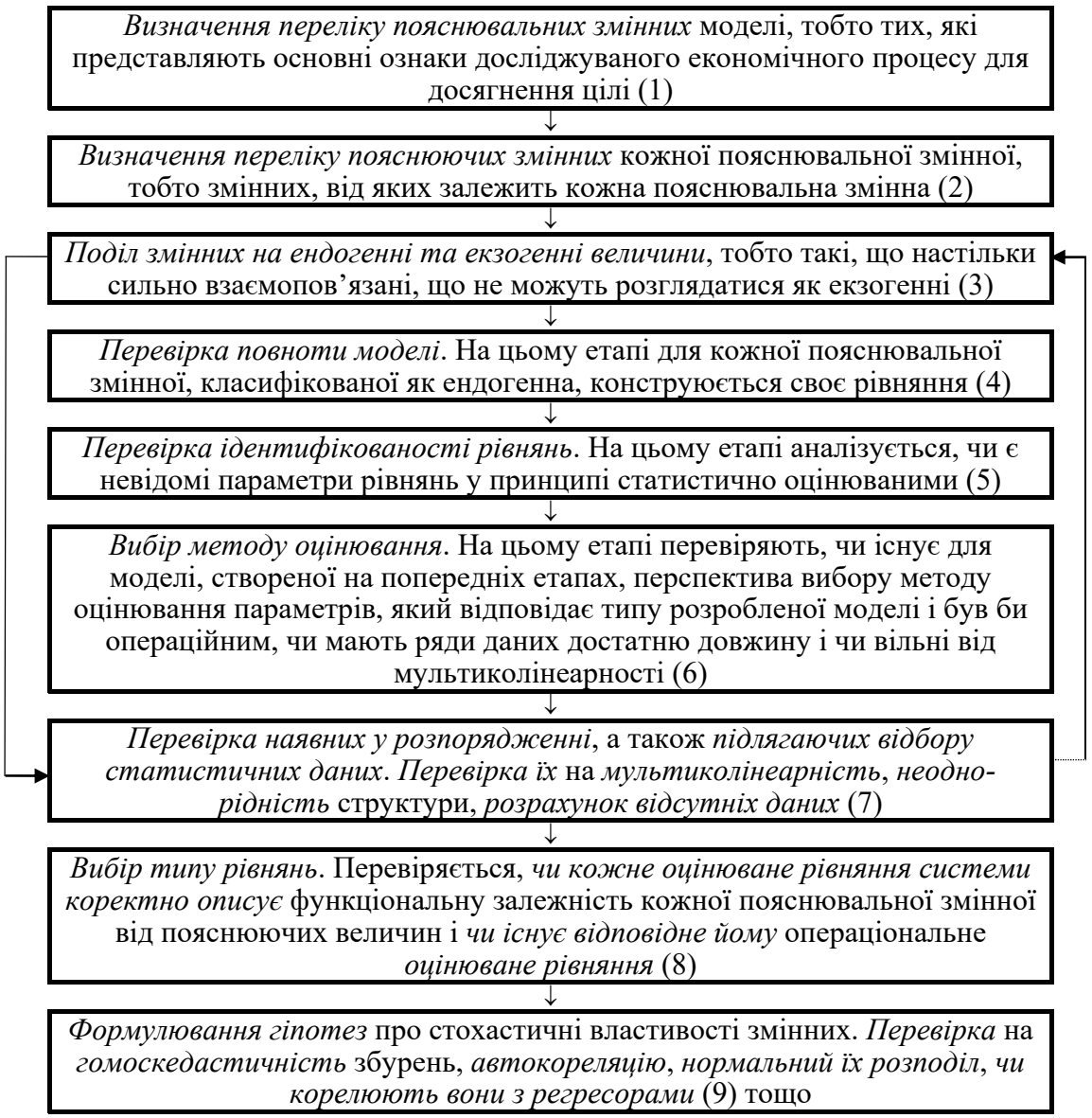


Рис. А. Специфікація моделі (укрупнена блок-схема)

ЗАДАЧІ ТА СИТУАЦІЙНІ ЗАВДАННЯ для індивідуального та колективного вирішення (деякі з них наведені з коментарями)

1. ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ ВЗАЄМНОЇ ЗАБОРГОВАНОСТІ ПІДПРИЄМСТВ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

В усіх країнах Східної Європи, які здійснюють економічні реформи, до початку стабілізаційного етапу *виникає проблема зростаючої взаємної заборгованості підприємств* (**ВЗП**). Підприємства долають труднощі, які пов'язані зі збутом продукції, шляхом неплатежів, зберігаючи договори про поставки, при цьому не зважають на можливість банкрутства через надмірну заборгованість**.** *Така сама проблема існує і в Україні. Висока ВЗП має для економіки такі негативні наслідки:*

1. Посилює інфляцію, оскільки у кредит надходять товари, ціна яких завищена і вміщує суму кредитного процента.

2. Висока **ВЗП** супроводжується у більшості випадків несплатою податків, що призводить до додаткових навантажень на бюджет.

3. Висока **ВЗП** збільшує для підприємства ризик неплатоспроможності і посилює вже існуючу в економіці нестабільність і т. ін.

Задача. Дослідіть проблему взаємної заборгованості підприємств для реальних умов трансформованої економіки України кореляційно-регресійними та економетричними методами.

Для цього:

як змінні, що входять в економетричну модель, можна взяти:

а) взаємну заборгованість підприємств України (**ВЗП**); б) банківські кредити; в) рівень інфляції; г) середній показник

платоспроможності підприємств; д) **ВЗП** за попередній період; е) внески підприємств за попередній період; є) рівень інфляції за попередній період; ж) недостачі (реальна заборгованість, термін якої вийшов) і т. ін.

2. МОНІТОРИНГ ПРИБУТКУ ПРОМИСЛОВИХ ПІДПРИЄМСТВ УКРАЇНИ

Дослідження закономірностей сумарного прибутку підприємств має велике макроекономічне значення для України, тому що необхідно радикально змінити державну політику у сфері фінансів, податкової системи (фіскальну політику) та маніпулювання бюджетом. Податки та платежі з прибутку підприємств – основне джерело доходів бюджету, тому аналіз цього показника – одна із проблем, яка постає перед державними інститутами.

Задача. Дослідіть проблему моніторингу[12] прибутку промислових підприємств України кореляційно-регресійними та економетричними методами.

Для цього як змінні, що входять в економетричну модель, можна взяти: а) чистий прибуток промислових підприємств; б) валовий дохід (виручку); в) ціну; г) прибуток за попередній період часу; д) постійні витрати; е) змінні витрати; є) податок на прибуток; ж) земельний податок; з) процент за довгостроковий кредит; и) проценти по короткострокових кредитах; й) фонд оплати праці плюс соціальні відрахування; к) податок на майно; л) чистий прибуток; м) податки (НДВ, акциз тощо); н) доходи робітників; о) кількість акцій; п) прибуток на одну акцію та ін.

[12] Моніторинг – це спостереження, оцінка та прогноз стану навколишнього середовища у зв'язку з господарською діяльністю людини.

3. ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ОБСЯГУ ПРЯМИХ ІНОЗЕМНИХ ІНВЕСТИЦІЙ У РЕГІОНИ УКРАЇНИ

Інвестиційні перспективи галузі промисловості та інші сфери матеріального виробництва можна поділити на три групи:

– життєво важливі галузі, за підтримку і розвиток яких у сучасних умовах відповідальність повинна нести держава: енергетика, транспортне та важке машинобудування і т.д.;

– галузі економіки, які по відношенню до витрат та результатів на існуючій технологічній та організаційній основі здатні «вижити» при реальній лібералізації зовнішньо-економічної діяльності та усуненні основних диспропорцій у структурі внутрішніх цін – чорна та кольорова металургія, хімічна промисловість, ВПК;

– галузі, збиткові при існуючих технологіях, продукція яких неконкурентоспроможна на світовому ринку – машинобудування, легка та харчова промисловість, сільське господарство, виробництво пластмаси та хімічних волокон, вугільна промисловість.

Задача. Зробіть дослідження проблеми обсягу прямих іноземних інвестицій у регіони України кореляційно-регресійними та економетричними методами.

Пропонуємо, крім вибраних рівнянь, які сконструйовані Вами і входять у модель, взяти ще чотири, кожне з яких відповідало б таким цілям.

1. *Перше рівняння* системи має відображати залежність технологічних змін від інвестицій, які вкладаються на вдосконалення технологій та технологічних змін минулого періоду.

2. *Друге рівняння* системи має відображати залежність наявного основного капіталу від обсягу прямих інвестицій та наявного основного капіталу минулого періоду.

3. *Третє рівняння* системи має відображати залежність очікуваного прибутку від вкладених іноземних інвестицій і прогнозу майбутніх продажів та майбутньої рентабельності продукції.

4. *Четверте рівняння* має відображати залежність обсягу прямих іноземних інвестицій від технологічних змін, наявного основного капіталу, очікуваного прибутку та податкової ставки.

4. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ОСНОВНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НА БЮДЖЕТ УКРАЇНИ

Дефіцит бюджету – це перевищення видатків бюджету над його доходами (різниця між сукупними витратами та сукупними доходами). Відносна величина бюджету вимірюється як відношення його до обсягу ВВП. Багато держав тією чи іншою мірою стикаються з дефіцитом бюджету. Але його якість може бути різною:

– дефіцит бюджету (**ДБ**) може бути пов'язаний з необхідністю здійснення великих державних вкладень в економіку. У цьому випадку він не відображає кризового протікання суспільних процесів, а державне регулювання економічної кон'юнктури;

– **ДБ** виникає внаслідок надзвичайних обставин;

– відображає кризові явища в економіці, її занепад, неефективність фінансово-кредитних зв'язків, нездатність уряду тримати під контролем фінансову ситуацію в країні. У цьому випадку це надзвичайно тривожне явище вимагає негайних економіко-політичних заходів.

Задача. Дослідіть проблеми впливу основних макроекономічних показників на бюджет України кореляційно-регресійними та економетричними методами.

Пропонуємо крім вибраних рівнянь, які сконструйовані Вами і входять у модель, взяти ще чотири, кожне з яких відповідало б таким цілям.

1. *Перше рівняння* системи має відображати залежність дефіциту бюджету від розміру цього показника у минулому

періоді та від змін реального обсягу виробництва промислової продукції.

2. *Друге рівняння* системи має відображати залежність змін зовнішньоторговельного балансу України від змін реального обсягу промислової продукції та від чисельності безробітних у минулому періоді.

3. *Третє рівняння* системи має відображати залежність реальних грошових доходів населення від цього показника у минулому періоді та від змін реального обсягу виробництва в Україні.

4. *Четверте рівняння* має відображати залежність змін реального обсягу виробництва від розмірів дефіциту бюджету, реальних доходів населення у минулому періоді, кількості готівки грошової маси в Україні та розміру зовнішньоторговельного сальдо.

5. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІНИ ЦІНИ НА ЖИТЛО У КИЄВІ

Нерухомість є одним із потужних макроекономічних факторів, які часто слугують об'єктом інвестиційних потоків, ділових угод, товаром. Крім того населення отримало житло у приватну власність, а отже, і право вільного розпоряджання ним: купувати, продавати, дарувати і т.ін. Таким чином, нерухомість перетворилася на потужний фінансовий інструмент, який використовується у державній, діловій, банківській, податковій та бюджетних сферах, приватному секторі.

Задача. Дослідити зміну ціни на житло у Києві (або у будь-якому іншому місці), застосовуючи кореляційно-регресійні та економетричні методи аналізу.

Змінними, які входять в економетричну модель, можна взяти: інвестиції в будівництво у поточному періоді; доплату за місцезнаходження квартири у поточному періоді; ціну оренди квартири у поточному періоді; ціну квартири у поточному періоді; інвестиції в будівництво у минулому періоді;

доплату за зручне транспортне сполучення (у грошовому виразі); доходи населення у поточному періоді.

6. МОНІТОРИНГ У ТОРГІВЛІ

Задача. Провести моніторинг у сфері торгівлі кореляційно-регресійними та економетричними методами.

За змінні, які входять в економетричну модель, можна взяти:

а) роздрібний та оптовий товарообіг на душу населення за теперішній і попередній періоди часу; б) загальний товарообіг на душу населення за теперішній і попередній періоди часу; в) експортний товарообіг на душу населення; г) податкову ставку на експорт; д) імпортний товарообіг на душу населення та ін.

7. ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ІНФЛЯЦІЇ В УКРАЇНІ

8. РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ВВП УКРАЇНИ ВІД ЇЇ ОСНОВНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

Модель, яка досліджується, повинна бути придатна для прогнозування зростання ВВП і для визначення різного ступеня впливів макроекономічних показників на валовий внутрішній продукт.

9. ПРОГНОЗУВАННЯ ОСНОВНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ У СФЕРІ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

У моделі врахувати основні показники діяльності банків: прибуток, капітал, баланс, статутний фонд, депозити, кредити.

10. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ОСНОВНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НА ОБСЯГ КАПІТАЛЬНИХ ВКЛАДЕНЬ

Збільшення капітальних вкладень є одним із елементів оздоровлення економіки. Рівень інвестицій має суттєвий вплив на обсяг національного доходу суспільства, що дає можливість для інтенсивного розвитку виробництва. Розроблена модель повинна показати, як впливають капіталовкладення, спрямовані у промисловість, на поведінку основних макроекономічних показників України.

11. ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ НАСЕЛЕННЯ У СФЕРІ СПОЖИВАННЯ

Під час переходу до ринкової економіки, де все підпорядковано законам попиту та пропозицій, та всі процеси спрямовані на задоволення потреб людини, власне споживання є одним із найбільш важливих і стійких елементів кінцевого попиту. Модель, що розробляється, повинна стати експериментальним полігоном для вивчення відгуку населення на ті чи інші варіанти загальних умов його діяльності.

Фактори, які входять до економетричної моделі, такі: доходи (заробітна плата, виплати і допомоги); рівень інфляції; ставка по вкладах громадян; споживання продовольчих і непродовольчих товарів; курс долара; рівень збережень; купівля цінних паперів; купівля валюти; комунальні платежі; загальний рівень витрат населення України тощо.

12. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРОШОВОЇ ПРОПОЗИЦІЇ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Знаючи механізм пропозиції грошової маси та закономірності функціонування ринку товарів та послуг, можна спрогнозувати найрізноманітніші показники господарської діяльності, здійснювати керування грошовою пропозицією,

яка сприяє повній зайнятості населення, стабільності економіки і т.ін.

Проблема вимірювання кількості грошей полягає у тому, що різні види активів одноразово тією чи іншою мірою виконують усі три функції грошей (засобу обертання, міри вартості, засобу нагромадження).

Економетрична модель повинна враховувати особливості поділу сукупної грошової маси за ступенем її ліквідності.

13. ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ОСНОВНИХ ПОКАЗНИКІВ ПРОМИСЛОВОСТІ УКРАЇНИ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

У розроблюваній Вами моделі обрані показники повинні характеризувати промисловість з точки зору результатів виробництва і необхідних для нього ресурсів. Значною мірою вона повинна також відображати технологічний процес виробництва.

Фактори, які входять до економетричної моделі, можуть бути такі: товарна продукція; обсяг виробничих фондів, які вводяться у дію; сума капітальних вкладень; довгострокові та короткострокові кредити; чисельність працюючих; обсяг оборотних коштів; прибуток; процентна ставка; інфляція; фонд оплати праці; середньомісячна заробітна плата та ін.

14. ДОСЛІДЖЕННЯ ВИКОНАННЯ КОНСОЛІДОВАНОГО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ ТА ЙОГО ДИНАМІКИ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

15. ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ОСНОВНИХ ВИДІВ ДОХОДУ ДЕРЖАВНОГО БЮДЖЕТУ

16. ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ РОЗДРІБНОГО ТОВАРООБІГУ ВІД ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ

Роздрібний товарообіг виражає економічні відносини, які виникають на кінцевій стадії руху матеріальних благ, стадії переходу із сфери обертання у власне споживання шляхом обміну на грошові доходи населення. За допомогою роздрібного товарообігу набуває суспільного визнання вартість і споживна вартість частини суспільного продукту. У ньому безпосередньо виражається ступінь об'ємної і структурної збалансованості попиту і пропозиції. Показники роздрібного товарообігу у системі планування безпосередньо пов'язують внутрішній ринок з іншими сферами ринкової економіки. Тому поряд із доходами, цінами та іншими показниками роздрібний товарообіг використовується як інструмент державного впливу на внутрішній ринок предметів споживання. Одним із економічних показників, у якому він виявляється – активний його вплив на грошовий обіг у країні та стійкість грошової одиниці.

Товарообіг залежить від багатьох факторів, найбільш важливі з яких – національний дохід, середня заробітна плата, величина імпорту, експорту та ін.

17. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ДИНАМІКИ ВВП УКРАЇНИ ТА ЙОГО СКЛАДОВИХ ВІД СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ФАКТОРІВ

18. МОДЕЛЮВАННЯ ОБЛІКОВОЇ СТАВКИ НБУ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

Актуальність теми полягає у тому, що облікова ставка НБУ – один із найважливіших макроекономічних показників, який впливає на фінансово-кредитну сферу. Безпосередньо це стосується таких показників, як обсяги кредитування і кількість грошової маси в обігу. Загальний від'ємний ефект

неправильного регулювання облікової ставки виявляється у скороченні темпів зростання промислового виробництва і подальшого їх зниження, у розвитку інфляційних процесів, що у кінцевому результаті призводить до зниження життєвого рівня населення.

Облікова ставка впливає на ставку банківського процента за кредит, а вона, своєю чергою, на обсяг попиту та пропозицій на гроші, на їх вартість, і як наслідок, – на розмір прибутку підприємств, а отже і на можливість відтворення для підприємств, що, своєю чергою, визначає темпи економічного зростання в цілому.

19. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ КУРСУ ДОЛАРА І ЗОВНІШНЬОТОРГОВЕЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

При побудові моделі врахувати ту обставину, що згідно з теорією валютних курсів на курс національної валюти відносно імпортної валюти впливають такі фактори.

1. Платіжний баланс країни (торговельний баланс (співвідношення імпорту та експорту); баланс по поточних операціях і баланс руху капіталів, який включає чисті доходи від інвестицій, переливання капіталу за кордон і т. ін.).
2. Відносні зміни у доходах населення і розміри економічного зростання.
3. Відносні зміни цін.
4. Відносні реальні процентні ставки.
5. Очікування розвитку економічної ситуації.
6. Обсяг проданої валюти УМВБ, який дає змогу деякою мірою врахувати вплив зміни попиту та пропозицій та політику НБУ на валютний курс.
7. Дії уряду (зміна законів і т. ін.).

20. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАЛЬНОЇ ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ В УКРАЇНІ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

21. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГРОШОВО-КРЕДИТНОЇ ПОЛІТИКИ НА ГРОШОВІ ДОХОДИ НАСЕЛЕННЯ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

22. МОНІТОРИНГ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ УКРАЇНИ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

За фактори, які входять до економетричної моделі, можна взяти такі: вклади юридичних і фізичних осіб за теперішній і попередній періоди часу; рівень інфляції за минулий період часу; процентну ставку НБУ; власні кошти банку та ін.

23. ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ПРИВАБЛИВОСТІ УКРАЇНИ (ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ)

24. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІН ІНДЕКСУ ОПТОВИХ ЦІН ВІД ОСНОВНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ УКРАЇНИ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

ДОДАТКОВІ ТЕМИ, ЯКІ МОЖНА ЗАПРОПОНУВАТИ ДЛЯ КУРСОВИХ ТА ДИПЛОМНИХ РОБІТ

25. РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ ВЕЛИКИХ ТОРГОВЕЛЬНИХ ОБ'ЄДНАНЬ

Викладач або студент вибирає об'єкт дослідження. Розробляється система економетричних моделей по видах діяльності функціонування торговельного об'єднання, яка є стрижнем системи підтримки прийняття управлінських рішень і забезпечує визначення основних показників функціонування цього об'єднання.

26. ДОСЛІДЖЕННЯ Й ОЦІНКА ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ БАНКУ ЕКОНОМЕТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Під час дослідження розробляється система економетричних моделей, яка характеризує функціонування банку на відповідному проміжку часу. За цією моделлю вже визначаються основні показники ефективності функціонування банку, а саме: загальний прибуток, ліквідність, статутний фонд, баланс, власний капітал банку, депозити і кредити, прибуток, одержаний від валютних операцій, прибуток за надані кредити, процент по депозитах, різноманітні ризики тощо.

27. ПОБУДОВА ПРОГНОЗНИХ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У СИСТЕМІ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЩОДО КЕРУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИМ ОБ'ЄКТОМ

Викладач або студент вибирають економічний об'єкт дослідження. Для цього будуються прогнозні моделі, здійснюється їх дослідження на адекватність та стійкість. На основі прогнозів розробляються різні сценарії щодо управління об'єктом, який досліджується, з урахуванням зовнішнього середовища, у якому цей об'єкт функціонує; надаються різні науково обґрунтовані рекомендації керівництву досліджуваного об'єкта. Тут повинні враховуватись чинні закони у державі та ті, що можуть бути прийняті.

Вирішення наведених задач може сприяти створенню у навчальному закладі ситуаційного центру, де студенти відпрацьовуватимуть різні штатні та екстремальні ситуації, з якими вони можуть зіткнутися у майбутньому у своїй професійній діяльності.

ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВІДПРАЦЮВАННЯ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

(нижче наведені класичні економетричні моделі[13], які можуть бути корисними під час виконання *індивідуальних робіт*)

Вирішити задачі для наведених нижче економетричних моделей відповідно до алгоритму, що описаний у п. 4.2. Для виконання цих завдань можна використати *статистичні дані,* наприклад, зі статистичних збірників Держкомстату України чи з інших періодичних офіційних видань.

1. Версія модифікованої моделі Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{t2} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – витрати на споживання; I_t – інвестиції; Y_t, Y_{t-1} – дохід; G_t – державні витрати.

2. Модель Менгеса:

$$\begin{cases} Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 I_t + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Q_t + u_{t2} \\ C_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 C_{t-1} + c_3 P_t + u_{t3} \\ Q_t = d_0 + d_1 Q_{t-1} + d_2 R_t + u_{t4} \end{cases},$$

де Y_t, Y_{t-1} – національний дохід; C_t – витрати на особисте споживання; I_t – чисті інвестиції; Q_t – валовий прибуток в економіці; P_t – індекс вартості життя; R_t – обсяг продукції промисловості.

[13] Эконометрия / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др. – М. : Финансы и статистика, 2003. – С. 122–136.

3. Модель протекціонізму Сальватора (*спрощена версія*):

$$\begin{cases} M_t = a_0 + a_1 N_t + a_2 S_t + a_3 E_{t-1} + a_4 M_{t-1} + u_{t1} \\ N_t = b_0 + b_1 M_t + b_2 S_t + b_3 Y_t + u_{t2} \\ S_t = c_0 + c_1 M_t + c_2 N_t + c_3 X_t + u_{t3} \end{cases},$$

де M_t – частка імпорту у ВВП; N_t – загальна кількість заявок про звільнення від митного податку; S_t – кількість заявок, що задоволені, про звільнення від митного мита; E_t – фіктивна змінна, що дорівнює одиниці для тих часів t, в яких курс долара на міжнародних валютних ринках був штучно завищеним та дорівнює нулю, для всіх інших часів t; Y_t – реальний ВВП; X_t – реальний обсяг чистого експорту.

4. Версія модифікованої моделі Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 Y_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + u_{t2} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – споживання; I_t – валові інвестиції; Y_t, $Y_{t\text{-}1}$ – ВВП; G_t – державні витрати.

5. Спрощена версія макроекономічної моделі Клейна:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 T_t + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 K_t + u_{t2} \\ Y_t = C_t + I_t \end{cases},$$

де C_t – споживання; I_t – інвестиції; Y_t – дохід; T_t – податок; K_t – запас капіталу.

6. Версія модифікованої моделі Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{t2} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – витрати на споживання; I_t – інвестиції; Y_t – дохід; G_t – державні витрати.

7. Модель попиту та пропозицій кейнсіанського типу:

$$\begin{cases} Q_t^s = a_0 + a_1 P_t + a_2 P_{t-1} + u_{t1} \\ Q_t^d = b_0 + b_1 P_t + b_2 Y_t + u_{t2} \\ Q_t^s = Q_t^d \end{cases},$$

де Q_t^d – попит на товар; Q_t^s – пропозиція товару; P_t, $P_{t\text{-}1}$ – ціна товару; Y_t – дохід.

8. Модель попиту та пропозицій на гроші:

$$\begin{cases} R_t = a_0 + a_1 M_t + a_2 Y_t + u_{t1} \\ Y_t = b_0 + b_1 R_t + u_{t2} \end{cases},$$

де R_t – процентні ставки; Y_t – ВВП; M_t – грошова маса.

9. Модель грошового рину:

$$\begin{cases} R_t = a_0 + a_1 M_t + a_2 Y_t + u_{t1} \\ Y_t = b_0 + b_1 R_t + b_2 I_t + u_{t2} \end{cases},$$

де R_t – процентні ставки; Y_t – ВВП; M_t – грошова маса; I_t – внутрішні інвестиції.

10. Модель мультиплікатора-акселератора:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 R_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 (R_t - R_{t-1}) + u_{t2} \\ R_t = C_t + I_t \end{cases},$$

де C_t – витрати на споживання; R_t – дохід; I_t – інвестиції.

11. Кон'юнктурна модель:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 r_t + b_2 I_{t-1} + u_{t2} \\ r_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 M_t + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – витрати на споживання; Y_t – ВВП; I_t – інвестиції; r_t – процентна ставка; M_t – грошова маса; G_t – державні витрати.

12. Версія макроекономічної моделі економіки США:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 r_t + u_{t2} \\ r_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 M_t + c_3 r_{t-1} + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – споживання; I_t – інвестиції; Y_t – ВВП; r_t – процентна ставка; M_t – грошова маса; G_t – державні витрати.

13. Модель грошового та товарного ринків:

$$\begin{cases} R_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 M_t + u_{t1} \\ Y_t = b_0 + b_1 R_t + b_2 I_t + b_3 G_t + u_{t2} \\ I_t = c_0 + c_1 R_t + u_{t3} \end{cases},$$

де Y_t – реальний ВВП; R_t – процентні ставки; M_t – грошова маса; I_t – внутрішні інвестиції; G_t – реальні державні витрати.

14. Модель загальної економічної ситуації у регіоні:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_{t1} \\ Q_t = b_0 + b_1 Y_t + u_{t2} \\ I_t = c_0 + c_1 (Y_{t-1} - K_{t-1}) + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t \end{cases},$$

де C_t – витрати на споживання; Y_t – ВДС регіону; I_t – інвестиції; Q_t – реалізована продукція; K_t – запас капіталу.

15. Версія загальної макроекономічної моделі:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 D_t + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_{t2} \\ Y_t = D_t + T_t \\ D_t = C_t + I_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – кінцеве споживання; Y_t – чистий національний продукт; D_t – чистий національний дохід; I_t – інвестиції; T_t – непрямі податки; G_t – державні витрати.

16. Версія моделі домогосподарства:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 S_t + a_2 P_t + u_{t1} \\ S_t = b_0 + b_1 R_t + b_2 R_{t-1} + b_3 t + u_{t2} \\ R_t = S_t + P_t \end{cases},$$

де C_t – особисте споживання; S_t – зарплата; C_t – прибуток; R_t, R_{t-1} – загальний дохід.

17. Гіпотетична модель економіки:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 J_t + u_{t1} \\ J_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + u_{t2} \\ T_t = c_0 + c_1 Y_t + u_{t3} \\ Y_t = C_t + J_t + G_t \end{cases},$$

де C_t – сукупне споживання; Y_t – сукупний дохід; I_t – інвестиції; T_t – податки; G_t – державні витрати.

18. Модель грошового ринку:

$$\begin{cases} R_t = a_0 + a_1 M_t + a_2 Y_t + + u_{t1} \\ Y_t = b_0 + b_1 R_t + b_2 I_t + u_{t2} \\ I_t = c_0 + c_1 R_t + u_{t3} \end{cases},$$

де R_t – процентна ставка; Y_t – ВВП; M_t – грошова маса; I_t – внутрішні інвестиції.

19. Версія загальної макроекономічної моделі:

$$\begin{cases} S_t = a_0 + a_1 D_t + a_2 M_t + a_3 Un_t + u_{t1} \\ C_t = b_0 + b_1 D_t + b_2 S_t + b_3 Un_{t-1} + u_{t2} \\ D_t = c_0 + c_1 S_t + c_2 C_{t-1} + c_3 I_t + u_{t3} \end{cases},$$

де S_t – заробітна плата; D_t – чистий національний дохід; M_t – грошова маса; C_t, $C_{t\text{-}1}$ – витрати на споживання; Un_t, $Un_{t\text{-}1}$ – рівень безробіття; I_t – інвестиції.

20. Модель, що пов'язує дохідність звичайних акцій та інфляцію:

$$\begin{cases} Rb_t = a_0 + a_1 Rs_t + a_2 Rb_{t-1} + a_3 L_t + a_4 Y_t + a_5 N_t + a_6 I_t + u_{t1} \\ Rs_t = b_0 + b_1 Rb_t + b_2 Rb_{t-1} + b_3 L_t + b_4 Y_t + b_5 N_t + b_6 E_t + u_{t2} \end{cases},$$

де Rb_t – дохідність облігацій; Rs_t – дохідність звичайних акцій; L_t – дохід у грошовій формі на душу населення; Y_t – дохід від усіх джерел на душу населення; N_t – змінна, що характеризує нові випуски цінних паперів; E_t – очікувана дохідність акцій на кінець періоду t; I_t – очікуваний рівень інфляції.

21. Спрощена версія макроекономічної моделі Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 T_t + u_{t1} \\ I_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + u_{t2} \\ T_t = c_0 + c_1 Y_t + u_{t3} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}.$$

де C_t – сукупне споживання; Y_t, $Y_{t\text{-}1}$ – сукупний дохід; I_t – інвестиції; T_t – податки; G_t – державні витрати.

ПЕРЕЛІК КОНТРОЛЬНИХ ПИТАНЬ

1. Питання для модульного та тестового контролю

1.1. До теми. Методологічні основи моделювання складних економічних процесів та систем

Кожному з наведених нижче термінів дайте відповідне визначення:

(**1**). Предмет теоретичної економіки – ...
(**2**). Нормативна економіка – ...
(**3**). Позитивна економіка – ...
(**4**). Макроекономіка – ...
(**5**). Мікроекономіка – ...
(**6**). Економічне мислення – ...
(**7**). Економічні проблеми – ...
(**8**). Змішана економіка – ...
(**9**). Ринкова економіка – ...
(**10**). Економічна кібернетика – ...
(**11**). Математична економіка – ...
(**12**). Економетрія – ...
(**13**). Індукція – ...
(**14**). Дедукція – ...
(**15**). Гіпотеза – ...
(**16**). Принципи (закони) – ...
(**17**). Логічні помилкові побудови «post hoc, ergo propter hoc» – ...
(**18**). Допущення «за однакових інших умов» – ...
(**19**). Кореляція – ...
(**20**). Стохастичний процес – ...
(**21**). Агрегування – ...
(**22**). Теорія адаптивних очікувань – ...
(**23**). Система – ...
(**24**). Функція системи – ...
(**25**). Структура системи – ...
(**26**). Модель системи – ...
(**27**). Складна система – ...

(**28**). Вербальні моделі – ...
(**29**). Детерміновані системи – ...
(**30**). Ймовірні (стохастичні системи) – ...
(**31**). Системний аналіз – ...
(**32**). Системний підхід – ...
(**33**). Система керованих плаваючих курсів – ...
(**34**). Проблема ідентифікації – ...
(**35**). Проблема аналізу – ...
(**36**). Проблема синтезу – ...
(**37**). Індетерміновані системи – ...
(**38**). Принцип причинності полягає – ...
(**39**). Класифікація – ...
(**40**). Властивість унікальності системи – ...
(**41**). Властивість слабкозавбачуваності системи – ...
(**42**). Властивість негентропійності або цілеспрямованості системи – ...
(**43**). Негентропія – ...
(**44**). Цілеспрямованість – ...
(**45**). Економічний експеримент – ...
(**46**). Основна властивість економічного експерименту – ...
(**47**). Постулат автономності – ...
(**48**). Принцип модельованості – ...
(**49**). Принцип фізичності – ...
(**50**). Постулат невизначеності – ...
(**51**). Постулат вибору – ...
(**52**). Командна економіка – ...

1.2. До теми. Причинно-наслідкові відношення, що задані на класі економетричних моделей. Причинний аналіз

Кожному з наведених нижче термінів дайте відповідне визначення:

(**1**). Процес –...
(**2**). Причина –...
(**3**). Наслідок –...
(**4**). Основна мета процесного аналізу –...
(**5**). Причинний аналіз має за мету –...

(**6**). Подія –...
(**7**). Причинний зв'язок –...
(**8**). Оператор –...
(**9**). Каузація –...
(**10**). Абревіатура –...
(**11**). Безпосереднє причинове відношення –...
(**12**). Стійка система –...
(**13**). Ендогенна змінна –...
(**14**). Екзогенна змінна – ...
(**15**). Правило редукції – ...
(**16**). Петля –...
(**17**). Гніздо петель –...
(**18**). Ефект зворотного зв'язку –...
(**19**). Відкритий шлях – ...
(**20**). Ефект відкритого шляху –...
(**21**). Дотичні шляхи – ...
(**22**). Зведена форма системи – ...
(**23**). Парето-оптимальний стан економіки – ...
(**24**). Аналіз загальної рівноваги –...
(**25**). Економічний цикл – ...
(**26**). Сезонні коливання –...
(**27**). Віковий тренд –...
(**28**). Рецесійний (дефляційний) розрив –...
(**29**). Інфляційний розрив –...
(**30**). Відкрита економіка –...
(**31**). Закрита економіка –...

1.3. До теми. Регресійний аналіз. Його особливості. Метод найменших квадратів. Його сильні та слабкі сторони. Узагальнений МНК

Кожному з наведених нижче термінів дайте відповідне визначення:

(**1**). Вибіркова сукупність (вибірка) – ...
(**2**). Генеральна сукупність – ...
(**3**). Простий випадковий вибір – ...
(**4**). Типовий вибір – ...
(**5**). Механічний вибір – ...

(**6**). Серійний вибір – ...
(**7**). Повторна вибірка – ...
(**8**). Безповторна вибірка – ...
(**9**). Репрезентативна вибірка – ...
(**10**). Регресія – ...
(**11**). Нонсенс регресія – ...
(**12**). Проста (парна) регресія – ...
(**13**). Множинна регресія – ...
(**14**). Збуджуюча змінна – ...
(**15**). Латентна змінна (залишки) – ...
(**16**). Головне завдання регресійного аналізу – ...
(**17**). Лінійна регресія – ...
(**18**). Нелінійна регресія – ...
(**19**). Виробнича функція – ...
(**20**). Клас лінійно-гомотетичних функцій – ...
(**21**). Діаграма розсіювання – ...
(**22**). Поле кореляції – ...
(**23**). Процес знаходження функції регресії – ...
(**24**). Постійна регресії – ...
(**25**). Коефіцієнт регресії – ...
(**26**). Фіктивна змінна – ...
(**27**). Економічна ефективність – ...
(**28**). Економічне зростання – ...
(**29**). Технологія – ...
(**30**). Альтернативні витрати – ...
(**31**). Ізокванта – ...
(**32**). Ізокоста – ...
(**33**). Степенева регресія – ...
(**34**). Показникова регресія – ...
(**35**)**.** Логістична регресія – ...
(**36**). Функція Коба-Дугласа – ...
(**37**). Функція Коба-Дугласа-Тінбергена – ...
(**38**). Функції (**CES**) та (**VES**).
(**39**)**.** Варіаційний ряд – ...
(**40**). Закон великих чисел – ...
(**41**). Асимптотичний (граничний) розподіл – ...
(**42**). Квантифікація – ...

(**43**). Гетероскедастичність – ...
(**44**). Діагональна матриця – ...
(**45**). Одинична матриця – ...
(**46**). Нульова матриця – ...
(**47**). Симетрична матриця – ...
(**48**). Позитивно визначена матриця – ...
(**49**). Невироджена матриця – ...
(**50**). Межа переускладнення моделей – ...
(**51**). Критерій – ...
(**52**). Критерії згоди – ...
(**53**). Площина ортогональної регресії – ...
(**54**). Принцип акселератора – ...
(**55**). Багатовимірний статистичний аналіз – ...
(**56**). Середнє геометричне «*a*» і «*b*» – ...
(**57**). Кейнсіанська економічна теорія – ...
(**58**). Ротаційна вибірка – ...
(**59**). Інтерполяція – ...
(**60**). Механізм мультиплікатора-акселератора – ...
(**61**). Ймовірність апостеріорна – ...
(**62**). Ефект мультиплікатора – ...
(**63**). Емпірична формула – ...
(**64**). Ймовірність апріорна – ...
(**65**). Специфікація моделі – ...
(**66**). Варіація – ...
(**67**). Апроксимація – ...
(**68**). Прогнозування – ...
(**69**). Гомоскедастичність – ...

1.4. До теми. Дослідження регресійних моделей (*перевірка моделі на адекватність; проблема прогнозування; мультиколінеарність; гомо- і гетероскедастичність; автокореляція*)

Кожному з наведених нижче термінів дайте відповідне визначення:

(**1**). Адекватність – ...
(**2**). Варіація загальна – ...

(**3**). Варіація помилок – ...
(**4**). Варіація, що пояснює регресію – ...
(**5**). Скоригований коефіцієнт детермінації за Тейлом – ...
(**6**). Скоригований коефіцієнт детермінації за Амемією – ...
(**7**). Частковий коефіцієнт детермінації – ...
(**8**). Альтернативна (конкуруюча) гіпотеза – ...
(**9**). Помилка першого роду – ...
(**10**). Статистичний критерій – ...
(**11**). Критична область – ...
(**12**). Область прийняття гіпотези – ...
(**13**). Критична точка – ...
(**14**). Потужність критерію – ...
(**15**). Кількість степенів вільності – ...
(**16**). *t*-критерії для перевірки на значущість коефіцієнта кореляції – ...
(**17**). Мультиколінеарність – ...
(**18**). Умова гомоскедастичності – ...
(**19**). Умова гетероскедастичності – ...
(**20**). Обґрунтованість оцінки означає – ...
(**21**). Автокореляція – ...
(**22**). Критерій Дарбіна–Уотсона – ...
(**23**). Критерій фон Неймана – ...
(**24**). Нециклічний коефіцієнт автокореляції – ...
(**25**). Циклічний коефіцієнт автокореляції – ....

1.5. До теми. Економетричні моделі як системи одночасних рівнянь (*класифікація змінних в економетричних моделях; класифікація економетричних моделей; аналіз економетричних моделей; оцінювання параметрів економетричних моделей, які складаються з одночасних рівнянь*)

Кожному з наведених нижче термінів дайте відповідне визначення:

(**1**). Класифікація – ...
(**2**). Сингулярні формули – ...

(**3**). Екзогенні (позасистемні) змінні – ...
(**4**). Ендогенні (внутрісистемні) змінні – ...
(**5**). Лагові змінні – ...
(**6**). Звичайні лагові екзогенні змінні – ...
(**7**). Спільно залежні змінні – ...
(**8**). Латентні змінні – ...
(**9**). Лінійна економетрична модель – ...
(**10**). Податок – ...
(**11**). Визначальне рівняння – ...
(**12**). Структурна форма моделі – ...
(**13**). Прогнозна (приведена) форма моделі – ...
(**14**). Спільний ефект (для економетричної моделі) – ...
(**15**). Частковий ефект (для економетричної моделі) – ...
(**16**). Інтердепедентна модель – ...
(**17**). Блоково-рекурсивна економетрична модель – ...
(**18**). Інвестиції – ...
(**19**). Експорт – ...
(**20**). Імпорт – ...
(**21**). Заробітна плата – ...
(**22**). Ціна – ...
(**23**). Наперед визначені змінні – ...
(**24**). Грошовий ринок – ...
(**25**). Економетрична модель системи незалежних рівнянь – ...
(**26**). Тезаурус (від грецьк. «скарб») – ...
(**27**). Самовідображення системи – ...
(**28**). Квантифікатори – ...
(**29**). Ентропія – ...
(**30**). Речове агрегування – ...
(**31**). Ієрархічне агрегування – ...
(**32**). Інтерполювання – ...
(**33**). Багатовимірний статистичний аналіз – ...
(**34**). Багатовимірний дискримінантний аналіз – ...
(**35**). Багатовимірний кластерний аналіз – ...
(**36**). Багатовимірний лінійний дискримінантний аналіз – ...
(**37**). Багатовимірний факторний аналіз – ...
(**38**). Методи авторегресії та ковзного середнього – ...
(**39**). Методи згладжування і фільтрації – ...

(**40**). Методи кореляційного аналізу – ...
(**41**). Методи спектрального аналізу – ...
(**42**). Структурна форма економетричної моделі – ...
(**43**). Асимптотичне очікування – ...
(**44**). Динамічна система рівнянь – ...
(**45**). Динамічна система першого порядку – ...
(**46**). *Г*-верхня блочно-трикутна матриця – ...
(**47**). *Г*-узагальнена матриця – ...
(**48**). Гомоскедастичні випадкові величини – ...
(**48**). Гетероскедастичні випадкові величини – ...
(**50**). y_{ti} та y_{tj} є інтердепедентні – ...
(**51**). Нелінійні рівняння y_{tj} та y_{tj} є інтердепедентні – ...
(**52**). Економетричну модель представлено у прогнозній формі – …
(**53**). Мультиплікатор $g_{(\lambda)j,i}$ – у загальному вигляді – ...
(**54**). Статистичний мультиплікатор – ...
(**55**). Динамічний мультиплікатор – ...
(**56**). Матриця мультиплікаторів із лагом λ – ...
(**57**). Блоково-рекурсивна економетрична модель **–** ...
(**58**). Вікова тенденція (тренд, або еволюторний рівень) – ...
(**59**). Ваги спостереження (статистичні ваги) **–** ...
(**60**). Гармонійний аналіз – ...
(**61**). Гістограма – ...
(**62**). Марковський процес (ланцюг Маркова) – ...
(**63**). Квазіперіодичні коливання (хвилі Слуцького) – ...
(**64**). Графічне вирівнювання – ...
(**65**). Крива концентрації (Лоренца) – ...
(**66**). Одиниця виміру економічної величини – ...
(**67**). Кумулятивна крива (крива сум – кумулята) – ...
(**68**). Проблема ідентифікації економетричної моделі – ...
(**69**). Критерії лічильного правила – ...
(**70**). Повна ідентифікація – ...
(**71**). Надідентифікація – ...
(**72**). Правило порядку – ...
(**73**). Непрямий МНК (НМНК) – ...
(**74**). Емпіричні регресійні коефіцієнти – ...
(**75**). Вектор прогнозів регресанда – ...

(**76**). Вектор помилок – ...
(**77**). Дисперсія збурень – ...
(**78**). Система економічних знань – ...
(**79**). Децилі та перцентилі – ...
(**80**). Попередня статистична інформація –...
(**81**). Специфікація помилки –...
(**82**). Оцінена коваріаційна матриця – ...
(**83**). Принцип В. Парето – ...
(**84**). Модель Леонтьєва – ...
(**85**). Система симультативних рівнянь – ...
(**86**). Оцінювач авторегресійного параметра ρ – ...
(**87**). Логіко-алгебраїчні методи аналізу даних – ...
(**88**). Оцінена дисперсія помилки прогнозу математичного сподівання регресанда – ...
(**89**). Оцінена дисперсія помилки прогнозу індивідуального значення регресанда – ...
(**90**). Оцінені межі прогнозного інтервалу математичного сподівання – ...
(**91**). Оцінені межі прогнозного інтервалу індивідуального значення регресанда – ...
(**92**). Перехресний аналіз дієвості моделі – ...
(**93**). Оцінювач для авторегресійного параметра – ...
(**94**). Природна система одиниць – ...
(**95**). Порядкові статистики – ...
(**96**). Рівняння поведінки (реакції) – ...
(**97**). Рівняння поведінки у вузькому розумінні – ...
(**98**). Технічні рівняння – ...
(**99**). Інституціональні рівняння – ...
(**100**). Визначені рівняння – ...
(**101**). Рекурсивний зв’язок між двома змінними – ...
(**102**). Рекурсивна система – ...
(**103**). Помилка специфікації – ...

2. Питання для підсумкового контролю

1. Визначення предмета «Бізнес-економетрика», її зв'язок з математико-статистичними методами.
2. Етапи проведення економетричного аналізу. Розробка моделі.
3. Згладжування експериментальних залежностей. Суть МНК.
4. Оцінка параметрів лінійної регресії за допомогою МНК.
5. Властивості простої вибіркової лінійної регресії.
6. Коефіцієнт кореляції, його властивості, перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції.
7. Коефіцієнт детермінації, його властивості. Зв'язок між коефіцієнтом кореляції і коефіцієнтом детермінації для простої лінійної регресії.
8. F-критерій Фішера перевірки простої регресійної моделі на адекватність.
9. Коефіцієнт еластичності.
10. Довірчі інтервали базисних даних та прогнозних значень лінійної регресійної моделі.
11. Нелінійна регресійна модель. Поняття про криві зростання.
12. Парна квазілінійна регресія. Найпростіші перетворення нелінійних моделей у лінійні.
13. Оцінка адекватності нелінійної регресії.
14. Прогноз і довірчі інтервали для парної квазілінійної регресії.
15. Класична лінійна багатофакторна модель. Матричний підхід до лінійної багатофакторної регресії.
16. Основні припущення класичної лінійної багатофакторної регресії.
17. Оцінювання параметрів лінійної багатофакторної регресії за МНК. Властивості оцінок параметрів.
18. Дисперсійно-коваріаційна матриця параметрів багатофакторної регресії. Оцінка дисперсії стохастичної складової моделі.
19. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації.

20. Перевірка багатофакторної регресійної моделі на адекватність за F-критерієм Фішера.
21. Прогнозування за багатофакторною регресійною моделлю.
22. Визначення мультиколінеарності та її природа. Практичні наслідки мультиколінеарності.
23. Тестування наявності мультиколінеарності. Алгоритм Фаррара-Глобера.
24. Визначення гетероскедастичності та її природа. Наслідки порушення припущення про гомоскедастичність.
25. Тестування наявності гетероскедастичності. Параметричний тест Гольдфелда-Квандта.
26. Вилучення гетероскедастичності за допомогою трансформування початкової моделі.
27. УМНК. Теорема Ейткена.
28. Основні висновки щодо наявності гетероскедастичності.
29. Природа автокореляції. Основні поняття та означення.
30. Тестування автокореляції. Критерій Дарбіна-Уотса.
31. Побудова моделі з автокорельованими залишками.
32. Природа авторегресивних моделей. Приклади використання в економіці.
33. Метод інструментальних змінних.
34. Способи визначення інструментальних змінних.
35. Дистрибутивно-лагові моделі, їх природа. Причини лагів.
36. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей. Підхід Койка до дистрибутивно-лагових моделей.
37. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей. Підхід Ширлі-Альмона до дистрибутивно-лагових моделей.
38. Поняття про системи одночасних регресійних рівнянь. Структурна на зведена форма системи одночасних рівнянь. Ідентифікація системи одночасних рівнянь.
39. Непрямий метод найменших квадратів оцінювання параметрів строго ідентифікованої системи рівнянь.
40. Двокроковий метод найменших квадратів оцінювання параметрів надідентифікованої системи рівнянь.
41. Поняття про рекурсивні регресійні моделі.
42. Приклади реальних економетричних моделей.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Тема. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД НАУКОВОГО ПІЗНАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ

Основні етапи економетричного аналізу. Економічні задачі, які розв'язують за допомогою економетричних методів. Причинність у соціально-економічних явищах і процесах. Необхідність формалізації причинно-наслідкових відношень у вивченні економічних процесів. Поняття математичної моделі. Класифікація моделей. Статистична база економетричних досліджень. Основні проблеми математичного моделювання економічних систем. Регресивний аналіз, його особливості та різновиди.

Література: [1–9; 11; 12; 16; 17; 20–25].

1. Економетричними методами **вперше** почали займатись у:
   а) Англії;
   б) Німеччині;
   в) Франції;
   г) Італії.

2. **Можливо чи ні** методами економетрії дослідити якісні характеристики економічних систем:
   а) можливо прямо;
   б) ні;
   в) можливо опосередковано;
   г) можливо прямо або опосередковано.

3. Методами економетрії **вивчаються**:
   а) моделі зростання;
   б) моделі оптимального планування;
   в) складні соціально-економічні системи;
   г) моделі рівноваги.

4. Економетрія **вивчає**:
   а) економічні явища та процеси;
   б) соціальні явища та процеси;
   в) фізичні явища та процеси;
   г) економічні явища та процеси і соціальні явища та процеси.

5. **Головними методами** дослідження економічних моделей є:
   а) математичний аналіз;
   б) теорія ймовірностей і математична статистика;
   в) аналіз прийняття рішень;
   г) причиновий та регресійний аналіз.

6. **Чи є** економетрія:
   а) частиною теоретичної економіки;
   б) частиною математичної економіки;
   в) частиною макроекономіки;
   г) самостійною дисципліною.

7. **Можливо чи ні** методами економетрії дослідити кількісні характеристики економічних систем:
   а) можливо прямо;
   б) ні;
   в) можливо опосередковано;
   г) сказати нічого неможливо.

8. **У побудові** економетричних моделей **виділяють етапи**:
   а) постановки конкретної економічної задачі; формалізації задачі;
   б) перевірки та коректування моделі, реалізації процедури оцінки;
   в) постановки конкретної економічної задачі; формалізації задачі; перевірки та коректування моделі, реалізації процедури оцінки;
   г) а) і реалізації процедури оцінки.

9. **Основними методами** дослідження систем є:
   а) реальний економічний дослід;
   б) фізичне моделювання;
   в) математичне моделювання;
   г) статистичний аналіз.

10. Системний підхід **пропонує вивчення:**
   а) явищ і фактів;
   б) з'ясування зв'язку з іншими фактами;
   в) явищ, фактів і з'ясування зв'язку з іншими фактами;
   г) не пропонує вивчення явищ і фактів та не з'ясовує зв'язок з іншими фактами.

11. **Як Ви вважаєте** (виходячи із визначення предмету економетрії), чи може вона допомогти у вирішенні проблеми:
   а) аналізу складних економічних систем;
   б) синтезу складних економічних систем;
   в) аналізу і синтезу;
   г) не може.

12. **Основними ознаками** процесу **є** (у вузькому розумінні):
   а) послідовна зміна і однобічний рух;
   б) перехід з одного явища в інше;
   в) зміна стану об'єктів чи зміна однієї системи на іншу;
   г) послідовна зміна і однобічний рух, перехід з одного явища в інше і зміна стану об'єктів чи зміна однієї системи на іншу.

13. **Основними ознаками** процесу **є** (у широкому розумінні):
   а) різність процесу і руху;
   б) двобічність процесу;
   в) зміст кількісно-якісного переходу;
   г) момент переходу від одного процесу до іншого та його зміна (невизначеність та невизначена зміна);
   д) всі відповіді правильні.

14. Головними **вимогами**, властивими причиновому висновку, **є:**

а) одна подія не є безпосередньою причиною іншої, якщо немає ніякого діючого оператора, який міг би слугувати основою цього зв'язку;
б) подія не може бути причиною іншої події, якщо перша подія не погоджується з існуючими операторами;
в) причинами події не є інші події, які відбуваються після неї;
г) якщо подія **А** відбувається без подальшого здійснення події **В**, то **А** не є причиною події **В** за даних обставин;
д) всі відповіді правильні.

15. **Якщо** досліджується економіка як цілісна система, **то це є** аналіз:

а) мікроекономічний;
б) макроекономічний;
в) позитивний;
г) нормативний.

16. **Якщо** стверджується, що дві економічні цілі є взаємовиключні, **то це** означає:

а) неможливість одночасного досягнення обох цілей;
б) заперечення їх як цілі, які повинні бути реалізовані в Україні;
в) що реалізація однієї розглядається як результат досягнення іншої;
г) що цілі мають кількісне вираження.

17. **Якщо** економічні узагальнення базуються на фактах, **то** такий метод аналізу **є**:

а) описовим;
б) гіпотетичним;
в) дедуктивним;
г) індуктивним.

18. Економічна модель **не є**:
    а) ідеальним типом економіки чи політики;
    б) інструментом для економічних прогнозів;
    в) комплексом економічних принципів;
    г) поясненням, як функціонує економіка та її окремі сектори.

19. **Використання припущень** в економічному аналізі:
    а) змінює внутрішню логіку теорії чи моделі;
    б) полегшує вирішення проблеми;
    в) робить модель більш реалістичною;
    г) збільшує кількість питань, які повинні бути включені в аналіз.

20. **Економічна теорія**:
    а) займається винятково прогностичними характеристиками розвитку економічних систем;
    б) містить положення, які завжди приймаються всіма економістами;
    в) не є наукою;
    г) не може передбачити майбутнє, але може пояснити наслідки деяких явищ у розвитку економіки.

21. **Яка офіційна дата народження економетрії як науки?**
    а) 1930;
    б) 1920;
    в) 1950;
    г) 1900.

22. **Основоположником економетрії є**
    а) норвезький економіст Рагнар Фріш;
    б) американський математик Фішер;
    в) англійський математик Госсет (Стьюдент);
    г) німецький математик Гаусс.

Тема. МОДЕЛІ ПАРНОЇ РЕГРЕСІЇ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

Приклади парних зв'язків в економіці. Криві зростання. Лінійна модель з двома змінними. Оцінювання параметрів моделі методом найменших квадратів (МНК). Властивості оцінок параметрів. Коефіцієнти кореляції та детермінації. Аналіз дисперсій. Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера. Інтервали довіри для функції регресії і параметрів регресії. Прогноз.

Література: [9; 11; 12; 16; 17; 18; 20–25, 30, 31].

23. **Усунення** невизначеності є:
   а) головною перешкодою системного підходу до вивчення економічних процесів;
   б) першочерговою задачею у вивченні реальних економічних процесів;
   в) важливим кроком використання математичного апарату теорії ймовірностей;
   г) головною перешкодою системного підходу до вивчення економічних процесів першочерговою задачею у вивченні реальних економічних процесів.

24. **Під час** статистичного **вивчення** економічних систем:
   а) використовують випадкову вибірку з множини всіх випадкових величин;
   б) використовують усю генеральну сукупність випадкових величин;
   в) використовують для відбору методи теоретичної економіки;
   г) використовують для відбору методи позитивної економіки.

25. **Під час вивчення** економічної системи (процесу) для відбору випадкових факторів використовують:
   а) простий випадковий безповторний відбір;
   б) простий випадковий повторний відбір;
   в) типовий відбір;
   г) механічний відбір;
   д) серійний відбір.

26. **Лінійна регресія** – це:
   а) лінія, що відображає зв'язок між незалежними і залежними змінними;
   б) лінія, яка завжди має нахил рівний 0;
   в) лінія, яка завжди має нахил рівний 1;
   г) графік значень незалежних і залежних змінних

27. Якщо, використовуючи регресійний аналіз, потрібно виміряти зв'язок між досвідом роботи і заробітною платою, то:
   а) незалежною змінною має бути заробітна плата;
   б) незалежною змінною має бути досвід роботи;
   в) залежною змінною має бути заробітна плата;
   г) незалежною змінною має бути досвід роботи і залежною змінною має бути заробітна плата.

28. **Для оцінки параметрів парної лінійної регресії** застосовують:
   а) НМНК;
   б) УМНК;
   в) МНК;
   г) 2МНК.

29. **Властивостями МНК-оцінок параметрів парної лінійної регресії є:**
   а) незміщеність;
   б) спроможність;
   в) ефективність;
   г) усі відповіді правильні.

30. У регресії: $\boldsymbol{y = 0{,}5 + 1{,}4\,x}$ нахил дорівнює:
   а) x;
   б) y;
   в) 0,5;
   г) 1,4

31. У регресії $y = 0,5 + 1,4\,x$ перетин дорівнює:
    а) x;
    б) y;
    в) 0,5;
    г) 1,4.

32. $\hat{y}$ **називається змінною**:
    а) залежною;
    б) результативною;
    в) яка підлягає роз'яснюванню;
    г) пояснювальною.

33. x **називається**:
    а) незалежною змінною;
    б) пояснювальною або провіщувальною змінною;
    в) регресором або факторною ознакою;
    г) усі відповіді правильні.

34. Знаходження залежностей вигляду регресії **робиться за:**
    а) теоретично розрахованими значеннями пояснювальних змінних;
    б) емпіричними даними, отриманими під час вивчення реальної економічної системи;
    в) теоретично розрахованими значеннями пояснювальних змінних і емпіричними даними, отриманими під час вивчення реальної економічної системи;
    г) правильної відповіді немає.

35. Під час повторення досліду, **отримані** емпіричним шляхом **дані:**
    а) збігаються завжди;
    б) не збігаються ніколи;
    в) можуть збігатися;
    г) збігаються через певний період часу.

36. **Функція** регресії **оцінює** усереднену залежність між досліджуваними змінними:
а) кількісно;
б) якісно;
в) кількісно і якісно;
г) емпірично.

37. **Значення** збурювальної змінної:
а) змінюються від спостереження до спостереження;
б) незмінні у часі;
в) змінюються періодично від спостереження до спостереження;
г) сказати будь-що неможливо.

38. З урахуванням співвідношення $y = 12{,}2 + 550\,x$ між заробітною платою (в грн) – y і освітою (в роках) – x особа, яка навчалась додатково один рік, може очікувати на таку додаткову оплату:
а) 12,2;
б) 550;
в) 24,4;
г) 1100.

39. З урахуванням співвідношення $y = 12{,}2 + 550\,x$ між заробітною платою (в грн) – y і освітою (в роках) – x особа, яка навчалась додатково нуль років, може очікувати на таку додаткову оплату:
а) 12,2;
б) 550;
в) 24,4;
г) 1100.

40. **Стандартна похибка** парної регресії S**:**
а) завжди більша ніж 0;
б) завжди менша ніж 0;
в) приймає значення від 0 до 1;
г) приймає значення від -1 до 1.

41. **Коефіцієнт детермінації** парної регресії $\boldsymbol{R^2}$:
   а) приймає значення від 0 до 1;
   б) приймає значення від -1 до 1;
   в) завжди менша ніж 0;
   г) приймає значення від 0 до 10.

42. Якщо регресія має $\boldsymbol{R^2 = 0{,}8}$, то регресійна лінія:
   а) пояснює 80% варіації змінної x;
   б) пояснює 80% варіації змінної y;
   в) матиме нахил 0,8;
   г) не пояснює зв'язку між x і y.

43. Якщо $\boldsymbol{r_{xy} = 0}$, то між величинами $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$:
   а) сильний зв'язок;
   б) слабкий зв'язок;
   в) відсутній зв'язок;
   г) сказати нічого неможливо.

44. При перевірці **значущості коефіцієнта кореляції** нульова гіпотеза представлена:
   а) $H_o : r_{xy} = 1$;
   б) $H_o : r_{xy} = -1$;
   в) $H_o : r_{xy} = 0$;
   г) $H_o : r_{xy} \neq 0$.

45. При перевірці **значущості коефіцієнта кореляції** використовуємо:
   а) F-критерій Фішера;
   б) χ^2-критерій Пірсона;
   в) t-тест Стьюдента;
   г) нормальний розподіл.

46. У регресії завжди має бути:
   а) $r_x > 0$;
   б) $r_x < 0$;
   в) $t > 0$;
   г) $t < 0$;
   д) $\hat{\sigma}_\xi \geq 0$.

47. Якщо коефіцієнт **еластичності** $E_{y/x} = \mathbf{0,5}$, то:
а) змінна *y* не залежить від змінної *x*;
б) змінна *y* зростає при зростанні змінної *x*;
в) змінна *x* зміниться на 0,5%, якщо *y* зміниться на 1%;
г) змінна *y* зміниться на 0,5 %, якщо *x* зміниться на 1%.

48. **Довірчий інтервал** для дійсного значення ***y*** залежить від:
а) с.к.в: σ_x;
б) с.к.в: σ_y;
в) с.к.в. помилки σ_ζ;
г) оцінки с.к.в. помилки $\hat{\sigma}_\zeta$.

49. **Довірчий інтервал** для базисних даних є інтервальною оцінкою для:
а) Mx_i;
б) My_i;
в) с.к.в. σ_{x_i};
г) с.к.в. σ_{y_i}.

50. Регресійна модель вважається **лінійною**, коли вона:
а) лінійна за змінами;
б) лінійна за параметрами;
в) лінійна за змінами та параметрами;
г) немає правильної відповіді.

51. Припустімо, що для опису одного економічного процесу придатні дві моделі. Обидві адекватні за *F*-критерієм Фішера. Перевагу надають тій, у якої:
а) більший коефіцієнт детермінації;
б) менший коефіцієнт детермінації;
в) більше значення *F*-критерію Фішера;
г) менше значення *F*-критерію Фішера.

52. Припустімо, що для опису одного економічного процесу придатні дві моделі. Обидві адекватні за *F*-критерієм Фішера. Перевагу надають тій, у якої:

а) більша сума квадратів помилок;
б) менша сума квадратів помилок;
в) більше значення *F*-критерію Фішера;
г) менше значення *F*-критерію Фішера.

53. Припустімо, що залежність витрат від доходу описується функцією: $\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x.}$ Середнє значення $\bar{\boldsymbol{y}} = \mathbf{2}$; середнє значення $\bar{\boldsymbol{x}} = 6$; $\boldsymbol{a}_1 = 3$. Тоді коефіцієнт еластичності витрат від доходів дорівнює:

а) 8;
б) 1;
в) 9;
г) 4.

Тема. ЗАГАЛЬНА ЛІНІЙНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

Приклади багатофакторних економетричних моделей. Загальна лінійна модель множинної регресії. Нелінійні моделі та їх лінеаризація. Метод найменших квадратів, основні припущення. МНК-оцінки параметрів лінійної регресії та їх основні властивості. Оцінювання якості лінійної регресії. Стандартна похибка рівняння; коефіцієнт детермінації; коефіцієнт множинної кореляції. Перевірка простої регресивної моделі на адекватність. F-критерій Фішера та інші критерії якості лінійної регресії. Аналіз дисперсій. Довірчі інтервали функції регресії і параметрів регресії. Точковий та інтервальний прогнози. Побудова математичних моделей на основі покрокової регресії. Виробнича функція і її призначення. Емпірична виробнича функція: етапи і загальний спосіб побудови. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Побудова

лінійно-логарифмічних виробничих функцій. Економетричний аналіз і економічна інтерпретація виробничих функцій.

Література: [6; 11; 12; 16; 17; 19; 20–23, 27; 28; 30, 31].

54. У **багатофакторній** регресії:

а) більш ніж одна залежна змінна і тільки одна незалежна змінна;
б) більш ніж одна незалежна змінна і тільки одна залежна змінна;
в) більш ніж одна залежна змінна і більш ніж одна незалежна змінна;
г) тільки одна залежна змінна і тільки одна незалежна змінна.

55. При геометричній інтерпретації регресійної моделі з двома незалежними змінними **будуємо**:

а) пряму лінію;
б) трикутник;
в) площину;
г) коло.

56. У **множинній** регресії кожен параметр показує:

а) загальний вплив усіх незалежних змінних на залежну змінну;
б) вплив незалежної змінної на залежну за умови, що всі інші незалежні змінні залишатимуться незмінними;
в) де площина регресії перетинає вісь y;
г) як частковий, так і загальний вплив незалежних змінних.

57. Регресія **вигляду** $\hat{y} = b_0 + b_1F_1(x) + b_2F_2(x) + ... + b_mF_m(x)$**:**

а) лінійна;
б) квазілінійна;
в) суттєво нелінійна;
г) про вигляд функції сказати нічого неможливо.

58. **Для оцінки** параметрів суттєво нелінійних регресій **використовують:**

а) ітераційні методи;
б) методи апроксимації;
в) методи зведення до лінійного вигляду;
г) усі відповіді правильні.

59. По хмарі розсіяння дослідницьких точок **можливо** судити про:

а) ступінь тісноти зв'язків між змінними;
б) позитивності регресії;
в) негативності регресії;
г) усі відповіді правильні.

60. **До недоліків** діаграм розсіювання належать:

а) неможливість точного відкладання крапок на них;
б) суб'єктивність відкладання крапок і як наслідок – не зовсім точне відображення характеру зміни емпіричних даних;
в) геометрична неможливість її побудови при кількості змінних, більшій за три;
г) суб'єктивність відкладання крапок і як наслідок – не зовсім точне відображення характеру зміни емпіричних даних і геометрична неможливість її побудови при кількості змінних, більшій за три.

61. **Чим меншою** є абсолютна величина збурювальної змінної:

а) тим краще вибрано вигляд функції регресії;
б) тим гірше вибрано вигляд функції регресії;
в) тим більший є розмір хмари;
г) тим точніше визначено пояснюючі змінні.

62. Припустімо, що Ви знайшли рівняння регресії. Крива, яка описує цю функцію, є кривою сукупного попиту. Про що свідчить крива, якщо вона зростає:

а) падає рівень цін;

б) зростає рівень цін;
в) зростають надмірні виробничі потужності;
г) понижується валютний курс національної грошової одиниці.

63. Якщо рівняння регресії показує, що незабаром відбудеться різке падіння реальної вартості акцій, незалежно від інших цін, **то це може бути результатом:**
а) ефекту імпортних закупівель;
б) ефекту реальних касових залишків;
в) зміни у добробуті споживачів;
г) зміни у споживчій заборгованості;
д) усі попередні відповіді є неправильні.

64. Метод регресивного аналізу **розроблено**:
а) Гаусом і Лейбніцем;
б) Лейбніцем і Вейерштрасом;
в) Лежандром і Гаусом;
г) Нейгебауером і Лежандром.

65. Збурення **містять:**
а) періодично змінювані змінні величини;
б) вплив неврахованих факторів;
в) випадкові перешкоди;
г) помилки спостережень.

66. МНК **дає змогу** визначити в $\hat{y}=b_0 + b_1x + b_2x^2$:
а) коефіцієнти b_1 і b_2;
б) b_0 і b_1 і за ними оцінити b_2;
в) b_0, b_1 і b_2;
г) b_0, b_1 і b_2 визначити як їх середнє арифметичне.

67. Оцінки, отримані узагальненим МНК, **називаються** оцінками:
а) Гауса;
б) Лапласа;
в) Ейткена;
г) Леонтьєва.

68. Оригінальна робаста програма опрацювання даних **розрахована для:**

а) виключення абсурдних вирішень;
б) прискорення опрацювання великих масивів інформації;
в) розроблена незалежно від умов а) і б) і є ще одним ефективним засобом опрацювання даних;
г) правильної відповіді немає.

69. **Головним недоліком** МНК є його несиметричність стосовно аргументу та функції. **Цей недолік може усунути:**

а) оригінальна робаста програма;
б) програма, заснована на методі ортогональної регресії;
в) програма самоадаптованого робастого алгоритму;
г) усунути цей недолік ніяк неможливо, тому що змінні є нерівноправні між собою.

70. Економічний цикл **пов'язаний з**:

а) дією тільки зовнішніх факторів;
б) дією тільки внутрішніх факторів;
в) факторами, що переважно впливають на динаміку сукупного попиту;
г) факторами, що переважно впливають на динаміку сукупної пропозиції.

71. За умови виконання основних припущень для **оцінки параметрів багатофакторної регресії** застосовують:

а) НМНК;
б) УМНК;
в) МНК;
г) 2МНК.

72. **Властивості МНК-оцінок параметрів багатофакторної лінійної регресії:**

а) ефективність;
б) незміщеність;
в) спроможність;
г) усі відповіді правильні.

73. Коефіцієнт кореляції показує:
   а) середнє значення результуючоъ змінної при нульовому значенні факторної ознаки;
   б) частку варіації результуючої змінної, яку пояснює модель;
   в) тісноту зв'язку між результуючою змінною та факторною ознакою.

74. Лінійна кореляційна залежність між показником та факторами стає **тіснішою**, якщо абсолютне значення коефіцієнта кореляції:
   а) є постійним;
   б) зменшується;
   в) дорівнює нулю;
   г) зростає.

75. Що розуміють під **специфікацією моделі**?
   а) існування лінійної залежності між факторною ознакою та результуючою змінною;
   б) вибір залежності між результуючою змінною і факторною ознакою та врахування всіх значущих факторних ознак;
   в) визначення стандартної похибки моделі;
   г) визначення тісноти зв'язку між змінними.

76. Перевірку нульової гіпотези стосовно статистичної значущості коефіцієнта регресії здійснюють за допомогою:
   а) χ^2-критерію;
   б) *t*-критерію Ст'юдента;
   в) алгоритма Феррара-Глоубера;
   г) *F*-критерію Фішера.

77. Для чого в економетрії використовують ***F***-критерій Фішера?
   а) для оцінки тісноти зв'язку між змінними;

б) для перевірки моделей на наявність автокореляції;
в) для оцінки невідомих параметрів моделей;
г) для перевірки адекватності економетричної моделі.

78. Стандартна похибка багатофакторної регресії S:
а) завжди менша ніж 0;
б) приймає значення від 0 до 1;
в) завжди більша ніж 0;
г) приймає значення від -1 до 1.

79. Знак коефіцієнта детермінації:
а) завжди додатний;
б) збігається зі знаком коефіцієнта регресії;
в) протилежний до знаку першого коефіцієнта регресії;
г) завжди від'ємний.

80. Якщо коефіцієнт детермінації і R^2=0,67, то модель:
а) пояснює 67% варіації факторів;
б) пояснює 67% варіації показника;
в) неадекватна;
г) не пояснює зв'язку між показником та факторами.

81. Коефіцієнт кореляції багатофакторної регресії R:
а) приймає значення від 0 до 10;
б) завжди менший ніж 0;
в) приймає значення від 0 до 1;
г) приймає значення від -1 до 1.

82. Коефіцієнт детермінації приймає значення:
а) від 0 до 4;
б) завжди менший ніж 0;
в) від 0 до 1;
г) від -1 до 1.

83. Для перевірки адекватності моделі використовують:
а) χ^2-критерій;

б) *t*-критерій Ст'юдента;
в) алгоритм Феррара-Глоубера;
г) *F*-критерій Фішера.

84. Рівень значущості – це:
а) ймовірність відхилити істинну гіпотезу;
б) ймовірність прийняти істинну гіпотезу;
в) довірча ймовірність;
г) ймовірність відкинути хибну гіпотезу.

85. **Якщо виконуються** передумови, які властиві регресійному аналізу, **то оцінки** параметрів системи незалежних рівнянь будуть:
а) незміщеними;
б) спроможними;
в) ефективними;
г) усі відповіді правильні.

86. **Якщо коефіцієнт еластичності** багатофакторної моделі $\boldsymbol{E = 0,7}$, то:
а) змінна у зменшиться на 0,7%, якщо всі фактори збільшаться на 1%;
б) змінна у збільшиться на 0,7%, якщо всі фактори збільшаться на 1%;
в) змінна у не залежить від зміни факторів;
г) змінна у зростає при зростанні всіх факторів.

87. **Якщо коефіцієнт еластичності** багатофакторної моделі $\boldsymbol{E = -0,7}$, то:
а) змінна у зменшиться на 0,7%, якщо всі фактори збільшаться на 1%;
б) змінна у збільшиться на 0,7%, якщо всі фактори збільшаться на 1%;
в) змінна у не залежить від зміни факторів;
г) змінна у зростає при зростанні всіх факторів.

Тема. МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

Поняття про мультиколінеарність і її вплив на оцінювання параметрів моделі. Метод визначення наявності мультиколінеарності та способи її усунення. Алгоритм Феррара-Глобера. Метод головних компонент. Приклади економічних задач на мультиколінеарність.

Література: [11; 12; 13; 17; 19; 20, 27; 28; 30].

88. **Мультиколінеарність** виникає тоді, коли:
а) помилка не має нульового середнього значення;
б) помилка залежить від незалежної змінної;
в) дві помилки корелюють між собою;
г) незалежні змінні корелюють між собою.

89. **Помилка специфікації** виникає тоді, коли:
а) незалежна змінна має помилку вимірювання;
б) дисперсія помилок не є сталою;
в) будують неправильну версію істинної моделі;
г) незалежні змінні корелюють між собою.

90. За інших рівних умов, якщо збільшуємо кількість незалежних змінних у регресії:
а) R^2 збільшується;
б) R^2 зменшується;
в) R^2 може або збільшуватись або зменшуватись;
г) немає ніякого ефекту на R^2.

91. Як впливає мультиколінеарність на оцінки параметрів моделі?
а) оцінки мають велику стандартну похибку;
б) збільшується точність оцінок;
в) збільшується ефективність оцінок;
г) не впливає взагалі.

92. Якщо в багатофакторній моделі два фактори пов'язані досить тісною лінійною залежністю, то говорять, що має місце:

а) гомоскедастичність;
б) автокореляція;
в) гетероскедастичність;
г) мультиколінеарність.

93. Методами визначення мультиколінеарності є:

а) алгоритм Феррара-Глоубера;
б) тест Гольдфельда-Квандта;
в) критерій Дарбіна-Уотсона;
г) метод Ейткена.

94. Яким методом можуть бути оцінені параметри моделі з мультиколінеарними факторами:

а) 2МНК;
б) МНК;
в) УМНК;
г) методом головних компонент.

95. Які статистичні критерії включає алгоритм Феррара-Глоубера:

а) *t*-критерій Ст'юдента;
б) χ^2-критерій;
в) *F*-критерій Фішера;
г) усі відповіді правильні.

96. Методами вилучення мультиколінеарності є:

а) об'єднання вихідної інформації;
б) перетворення даних;
в) збільшення кількості;
г) усі відповіді правильні.

97. Що характеризують елементи кореляційної матриці ***R***:
а) дисперсію факторів;
б) середні значення факторів;
в) тісноту зв'язків між факторами;
г) коваріацію факторів.

98. Метод головних компонентів для оцінки параметрів моделі доцільно застосовувати за наявності:
а) мультиколінеарності між факторами;
б) гетероскедастичності залишків моделі;
в) гомоскедастичності залишків моделі;
г) автокореляції між залишками моделі.

Тема. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

Поняття про гомо- та гетероскедастичність. Вплив гетероскедастичності залишків моделі на властивості оцінок її параметрів. Методи визначення гетероскедастичності. Перевірка гетероскедастичності на основі μ-критерію. Параметричний та непараметричний тести Гольдфельда-Квандта, тест Глейсера. Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена) оцінювання параметрів лінійної моделі з гетероскедастичними залишками.

Література: [11; 12; 13; 17; 19; 21, 27; 28; 30].

99. **Гомоскедастичність** означає, що:
а) незалежна змінна має помилку вимірювання;
б) дисперсія помилок є сталою;
в) модель має неправильну специфікацію;
г) незалежні змінні корелюють між собою.

100. **Гетероскедастичність** виникає тоді, коли:
а) незалежна змінна має помилку вимірювання;
б) дисперсія помилок не є сталою;

в) модель має неправильну специфікацію;
г) незалежні змінні корелюють між собою.

101. **Гетероскедастичність може існувати за рахунок:**
а) кореляції між факторами;
б) похибки вимірювання показника;
в) похибки вимірювання факторів;
г) неврахованих факторів.

102. Яку форму може мати гетероскедастичність:
а) зростаючу;
б) спадаючу;
в) складну;
г) усі відповіді правильні.

103. Для оцінки параметрів моделі з гетероскедастичними залишками застосовують:
а) МНК;
б) НМНК;
в) УМНК;
г) 2МНК.

104. Методами визначення гетероскедастичності є:
а) алгоритм Феррара-Глоубера;
б) тест Гольдфельда-Квандта;
в) критерійи Дарбіна-Уотсона;
г) метод Ейткена.

105. На якому припущенні базується параметричний тест Гольдфельда-Квандта:
а) про нормальний розподіл стохастичної складової;
б) про незалежність факторів;
в) про сталість дисперсії залишків;
г) про відсутність кореляції між залишками.

106. Яким методом можуть бути оцінені параметри моделі з гетероскедастичними залишками:
а) МНК;
б) НМНК;
в) УМНК;
г) 2МНК.

107. Застосовувати узагальнений метод найменших квадратів (УМНК) для оцінки параметрів моделі доцільно за наявності:
а) мультиколінеарності між факторами;
б) гетероскедастичності залишків моделі;
в) гомоскедастичності залишків моделі;
г) автокореляції між залишками моделі.

108. Умовою застосування узагальненого методу найменших квадратів (УМНК) для оцінки параметрів моделі з гетероскедастичними залишками є оцінка:
а) коваріаційної матриці залишків $\boldsymbol{S}$;
б) середнього значення залишків;
в) середнього значення факторів;
г) дисперсії факторів.

109. Як впливає гетероскедастичність залишків на оцінки параметрів моделі:
а) не впливає взагалі;
б) оцінки мають велику стандартну похибку;
в) збільшується точність оцінок;
г) оцінки стають неефективними.

110. Наслідками гетероскедастичності є:
а) неможливість побудувати довірчий інтервал прогнозного значення показника;
б) неможливість обчислити с.к.в. параметрів моделі;
в) неефективність оцінок параметрів ;
г) усі відповіді правильні.

111. Як позбутися гетероскедастичності:
а) шляхом збільшення обсягу спостережень;

б) шляхом зменшення обсягу спостережень;
в) шляхом трансформації початкової моделі;
г) позбутися взагалі неможливо.

112. Властивості оцінок параметрів трансформованої моделі:
а) є зміщеними;
б) є ефективнішими;
в) є неспроможними;
г) не є ефективними.

Тема. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ В МОДЕЛЯХ ДИНАМІКИ

Лінійні економетричні моделі динаміки. Природа автокореляції та її наслідки. Тестування автокореляції. Критерії Дарбіна-Уотсона і фон Неймана. Циклічний та нециклічний коефіцієнти автокореляції. Оцінювання параметрів регресійної моделі за наявності автокореляції. Методи Ейткена, Кочрена-Оркатта, Дарбіна; метод перетворення вихідної інформації.

Література: [11; 12; 13; 17; 19; 21, 27; 28; 30].

113. **Автокореляція** виникає коли:
а) незалежна змінна має помилку вимірювання;
б) дисперсія помилок не є сталою;
в) модель має неправильну специфікацію;
г) наступні та попередні значення залишків корелюють між собою.

114. Однією з проблем, що може виникнути у багатофакторній регресії і ніколи не буває в простій регресії є:
а) кореляція між причинами помилок;
б) неправильна дисперсія помилок;
в) кореляція між помилками та незалежними змінними;
г) кореляція між незалежними змінними**.**

115. Для перевірки гіпотези, яка полягає у тому, що збурення у рівнянні є неавтокорельовані, застосовуємо ***d***-тест Дарбіна-Уотсона. **У випадку** з тестом із альтернативною гіпотезою $H_A:\rho\neq0$ (двобічний тест, нормальний випадок) **гіпотеза відхиляється,** якщо:

а) $H_A:\rho = 0$ $[d < d_u(\alpha/2)$ *или* $d > 4-d_u(\alpha/2)]$;

б) $H_A:\rho = 0$ $[d_0(\alpha/2) < d < 4-d_0(\alpha/2)]$;

в) $4-d_0(\alpha/2)\leq<d\leq4-d_u(\alpha/2)$, $d_u(\alpha/2)<d<4-d_0(\alpha/2$;

г) немає правильної відповіді.

116. Для оцінки параметрів моделі з автокорельованими залишками застосовують:

а) МНК;

б) НМНК;

в) УМНК;

г) 2МНК.

117. Для тестування наявності автокореляції використовують:

а) критерій Фішера;

б) коефіцієнт детермінації;

в) критерій Дарбіна-Уотсона;

г) коефіцієнт кореляції.

118. Якщо значення *d*-статистики знаходиться в інтервалі [4-di, 4], то:

а) відсутня автокореляція;

б) наявна додатна автокореляція;

в) наявна від'ємна автокореляція;

г) неможливо зробити висновок про наявність чи відсутність автокореляції.

119. Для обчислення ***d***-статистики Дарбіна-Уотсона використовують:

а) випадкові відхилення;

б) значення факторної ознаки;

в) коефіцієнт кореляції;

г) коефіцієнт детермінації.

120. Автокореляція наявна і додатна, якщо ***d***-статистика Дарбіна-Уотсона близька до:
а) 2;
б) -2
в) 4;
г) 0.

121. Якщо ***d***-статистика Дарбіна-Уотсона близька до 4, то:
а) зв'язок між змінними тісний;
б) автокореяція існує і вона від'ємна;
в) автокореляція відсутня;
г) автокореляція існує і вона додатна.

122. Автокореляція відсутня, якщо ***d***-статистика Дарбіна-Уотсона близька до:
а) 4;
б) 0;
в) 2;
г) -2.

123. ***d***-статистика Дарбіна-Уотсона лежить у межах:
а) від 0 до 4;
б) від -1 до 1;
в) від 0 до 2;
г) від 0 до 1.

124. Застосування МНК до моделі з автокорельованими збуджувальними змінними призводить до того, що:
а) вибіркові дисперсії оцінок параметрів моделі можуть виявитися невиправдано великими порівняно з дисперсіями, що отримуються при застосуванні декількох змінених методів оцінювання;
б) критерії, що використовуються для оцінки значущості параметрів, можуть у цьому випадку виявитися неефективними;
в) виявляються неефективними прогнози;
г) усі відповіді правильні.

125. Методами визначення автокореляції є:
а) алгоритм Феррара-Глоубера;
б) критерій Дарбіна-Уотсона;
в) тест Гольдфельда-Квандта;
г) метод Ейткена.

126. Яким методом можуть бути оцінені параметри моделі з автокорельованими залишками:
а) МНК;
б) НМНК;
в) УМНК;
г) методом головних компонент.

127. Застосовувати узагальнений метод найменших квадратів (УМНК) для оцінки параметрів моделі доцільно за наявності:
а) мультиколінеарності між факторами;
б) гомоскедастичності залишків моделі;
в) автокореляції між залишками моделі;
г) гетероскедастичності залишків моделі.

128. Як впливає автокореляція залишків на оцінки параметрів моделі:
а) оцінки стають неефективними;
б) збільшується точність оцінок;
в) оцінки мають велику стандартну похибку;
г) не впливає взагалі.

129. Умовою застосування узагальненого методу найменших квадратів (УМНК) для оцінки параметрів моделі завтокорельованими залишками є оцінка:
а) середнього значення залишків;
б) середнього значення факторів;
в) дисперсії факторів;
г) дисперсійно-коваріаційної матриці залишків Ω.

Тема. МОДЕЛІ РОЗПОДІЛЕНОГО ЛАГУ

Поняття лагу і лагових змінних. Причини лагів. Приклади використання лагових моделей в економіці. Моделі розподіленого лагу. Коефіцієнти і структура лагу. Взаємна кореляційна функція і визначення величини лагу. Загальна модель нескінченного розподіленого лагу. Оцінювання параметрів у лагових моделях.

Література: [11; 12; 13; 16; 30; 31; 32].

130. Яке явище в економіці називається лагом:
а) кореляція між факторами;
б) проміжок часу, в який спостерігається запізнення;
в) кореляція між залишками;
г) кореляція між факторами та залишками.

131. Основними причинами виникнення лагів є:
а) психологічні;
б) технологічні;
в) інституціональні;
г) усі відповіді правильні.

132. Дистрибутивно-лагові моделі описують залежність показника від:
а) поточних і запізнених (лагових) значень факторів;
б) поточних значень факторів і запізнених (лагових) значень показника;
в) лише поточних значень факторів;
г) лише лагових значень факторів.

133. Якими методами оцінюють параметри дистрибутивно-лагових моделей:
а) МНК;
б) методами послідовного та апріорного оцінювання параметрів;
в) УМНК;
г) НМНК.

134. Недоліками методу послідовних оцінок дистрибутивно-лагових моделей є:

а) невідома максимальна тривалість лагу;
б) зменшення ступенів вільності;
в) проблема мультиколінеарності;
г) усі відповіді правильні.

Тема. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМ СИМУЛЬТАТИВНИХ РІВНЯНЬ

Системи одночасних (симультативних) регресійних рівнянь. Приклади систем одночасних регресійних рівнянь. Структурна та зведена (прогнозна) форма системи рівнянь. Проблема оцінки параметрів та загальна характеристика методів. Поняття ідентифікації (ототожнення) системи. Критерії ідентифікації. Методи оцінювання параметрів одночасних структурних рівнянь. Застосування МНК до економетричних моделей. Непрямий метод найменших квадратів оцінки параметрів точно ідентифікованих систем. Двокроковий метод найменших квадратів (2МНК-оцінка) параметрів надідентифікованих систем. Трикроковий метод найменших квадратів. Рекурсивні моделі та їх характеристики.

Література: [6; 9; 11; 12; 13; 16; 17; 19; 21, 24; 27; 28; 29; 30].

135. Економетричні моделі – **це:**

а) підсистеми в окремих секторах економіки;
б) система взаємопов’язаних рівнянь регресії;
в) система сингулярних рівнянь;
г) ієрархічна централізована система.

136. **Проблема** специфікації моделі в економетриці **вирішується:**

а) використанням засобів матричної алгебри;
б) виходячи з економічних логіко-теоретичних міркувань;

в) використанням МНК;
г) правильної відповіді немає.

137. **Виберіть правильне** структурне рівняння, яке описує економетричну модель:
а) $y_t + x_t = 0$;
б) $y_t \Gamma + x_t = 0$;
в) $y_t \Gamma + x_t B + u_t = 0$;
г) $y_t \Gamma + x_t B_t = 0$.

138. Економетричну модель **можна назвати** повною, якщо:
а) вона охоплює ті змінні, які істотно впливають на спільнозалежні змінні, а збурні змінні мають випадковий характер;
б) вона має стільки рівнянь, скільки в ній міститься спільнозалежних змінних, оскільки кожна спільнозалежна змінна може бути об'явлена за допомогою відповідного рівняння;
в) система рівнянь має однозначне вирішення відносно спільнозалежних змінних ($det\Gamma \neq 0$);
г) усі відповіді правильні.

139. **Кожне** структурне **рівняння** моделі:
а) описує окремо економічні явища і процеси з урахуванням економічних, технологічних, соціальних і т.д. умов;
б) відображає окремі впливи зміни змінних, які містяться у ньому;
в) описує весь процес;
г) а), і б).

140. Для економетричної рекурсивної моделі є **справедливим:**
а) матриця структурних коефіцієнтів Г є трикутною;
б) матриця дисперсій і коваріацій збурних змінних є діагональною;
в) збурні змінні рівнянь є неавтокорельовані;
г) усі відповіді правильні.

141. **Якщо** декілька економетричних моделєй об'єднуються в одну, **то така модель є:**

а) блочно-рекурсивною;
б) рекурсивною;
в) моделлю з системи незалежних змінних;
г) приведеною моделлю.

142. **Кількість** збурних змінних економетричної моделі:

а) дорівнює кількості рівнянь;
б) менша за кількість рівнянь;
в) більша за кількість рівнянь;
г) може зовсім не містити збурних змінних.

143. Система рівнянь, що описує економетричну модель, обов'язково **повинна містити:**

а) тільки випадкову збурну змінну;
б) тільки детерміновану змінну;
в) не повинна містити ні випадкову, ні детерміновану величини;
г) вектор збурних випадкових величин.

144. До **головних особливостей**, які властиві структурній формі економетричної моделі, **належать**:

а) структурна форма відображує зв'язки між пояснюючими змінними кожного рівняння та пояснюваними змінними у формі, яка пропонується економічною теорією або близькою до неї;
б) у ній проводиться статистичне оцінювання апріорно не встановлених параметрів;
в) вона описує механізм економічного явища вербально;
г) структурна форма відображує зв'язки між пояснюючими змінними кожного рівняння та пояснюваними змінними у формі, яка пропонується економічною теорією або близькою до неї і у ній проводиться статистичне оцінювання апріорно не встановлених параметрів.

145. **Оцінити** параметри економетричної моделі **неможливо**, якщо:

а) вони не підлягають вимірюванню;
б) їх кількість є дуже великою;
в) якщо є невідомим економічний механізм, структурне рівняння, яке його описує;
г) вони не підлягають вимірюванню і їх кількість є дуже великою.

146. Від реальної моделі **більш відрізняється**:

а) структурна форма;
б) прогнозна форма;
в) вони є однаково наближені до реальних моделей;
г) усе залежить від конкретної ситуації.

147). У записі структурної форми матриця збурних змінних **позначається через**:

а) *X*;
б) *У*;
в) *U*;
г) *Г*.

148). На етапі досліджень економічного явища або процесу **концентрується увага**:

а) на структурній формі моделі, за якою прогнозують ефект від зміни структури досліджуваної економічної системи або ефект від економіко-соціальних наслідків;
б) на прогнозній формі моделі для рішення тих самих задач;
в) на вербальній економічній моделі, яка описує досліджуваний економічний процес для вирішення тих самих задач;
г) правильної відповіді немає.

149. У структурному **рівнянні**:
а) усі структурні коефіцієнти дорівнюють нулеві;
б) повинен існувати хоч один відмінний від нуля структурний коефіцієнт;
в) не може дорівнювати нулеві жоден зі структурних коефіцієнтів;
г) усі відповіді правильні.

150. Структурну форму економетричної моделі для ***t***-го періоду часу або для ***t***-го елемента **при поперечному** перерізі ряду **можна відобразити у вигляді**:
а) $y(t)'\Gamma + x(t)B + u(t)=0$;
б) $y(t)'\Gamma + x(t)'B + u(t)'=0'$;
в) $Y=Y\Gamma^0 + XB + U$;
г) усі відповіді правильні.

151. **Вид якої** матриці Γ **є ознакою** рекурсивної економетричної моделі:
а) діагональної;
б) блочно-діагональної;
в) трикутної;
г) верхня блочно-трикутної.

152. **Форма** матриці U є **важливою**:
а) з економічної точки зору;
б) зі статистичної точки зору;
в) з математичної точки зору;
г) немає правильної відповіді.

153. **Застосування** МНК до моделі з автокорельованими збуджувальними змінними **призводить до того, що**:
а) вибіркові дисперсії оцінок параметрів моделі можуть виявитися невиправдано великими порівняно з дис-

персіями, що отримуються при застосуванні декількох змінених методів оцінювання;
б) критерії, що використовуються для оцінки значущості параметрів, можуть у цьому випадку виявитися неефективними;
в) виявляються неефективними прогнози;
г) усі відповіді правильні.

154. **У побудові** діаграми причинно-наслідкових зв'язків в економетриці **звичайно** кружечком або еліпсом **позначають** змінну:
а) екзогенну;
б) ендогенну;
в) збуджувальну;
г) фіктивну.

155. Для лінійної моделі ефект від одночасної зміни декількох екзогенних змінних дорівнює:
а) добутку окремих ефектів;
б) сумі окремих ефектів;
в) середньому арифметичному окремих ефектів.
г) нулю.

156. Прогнозна форма є **завжди ідентифікована, якщо**:
а) збурювальні змінні є нормально розподілені і незалежні від екзогенних змінних;
б) є відсутньою автокореляція збурювальних змінних і фукціональна мультиколінеарність;
в) їй не властивий взаємозв'язок між спільнозалежними змінними в окремих рівняннях;
г) усі відповіді правильні.

157. **У випадку** системи **незалежних** рівнянь:
а) кожне рівняння можна оцінити, використовуючи МНК, незалежно від будь-яких припущень;

б) кожне рівняння можна оцінити, якщо дотримується певна послідовність обчислювальної процедури;
в) кожне рівняння можна оцінити, якщо виконуються передумови регресійному аналізу.
г) кожне рівняння можна оцінити використовуючи МНК, незалежно від будь-яких припущень і кожне рівняння можна оцінити, якщо виконуються передумови регресійного аналізу.

158. **Якщо виконуються** передумови, які властиві регресійному аналізу, **то оцінки** параметрів системи незалежних рівнянь будуть:
а) незміщеними;
б) спроможними;
в) ефективними;
г) усі відповіді правильні.

159. Модель Людеке **включає:**
а) три рівняння;
б) чотири рівняння, одне з яких є визначене;
в) чотири рівняння, два з яких є визначені;
г) чотири рівняння, одне з яких є визначене і одне – технічне;
д) одне інституціональне, два технічних та одне рівняння поведінки.

160. Етапи моделювання складних економічних систем містять:
а) постановку задачі;
б) формалізацію задачі;
в) постановку і формалізацію задачі, перевірку і коригування моделі, знаходження оптимального рішення та аналіз результатів;
г) постановку і формалізацію задачі, перевірку і коригування моделі, пошук оптимального рішення.

КЛЮЧІ ДО ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

1 – б;	**2** – в;	**3** – в;	**4** – г;	**5** – г;	**6** – г;
7 – а;	**8** – в;	**9** – в;	**10** – в;	**11** – в;	**12** – г;
13 – д;	**14** – д;	**15** – б;	**16** – а;	**17**– г;	**18** – а;
19 – б;	**20** – г;	**21** – а;	**22** – а;	**23** – г;	**24** – б;
25 – в;	**26** – а;	**27** – г;	**28** – в;	**29** – г;	**30** – г;
31 – в;	**32** – б;	**33** – г;	**34** – б;	**35** – в;	**36** – а;
37 – а;	**38** – б;	**39** – а;	**40** – а;	**41** – а;	**42** – а;
43 – в;	**44** – в;	**45** – в;	**46** – д;	**47** – г;	**48** – г;
49 – б;	**50** – в;	**51** – а;	**52** – б;	**53** – в;	**54** – б;
55 – в;	**56** – б;	**57** – б;	**58** – г;	**59** – г;	**60** – г;
61 – а;	**62** – г;	**63** – б;	**64** – в;	**65** – в;	**66** – в;
67 – в;	**68** – а;	**69** – б;	**70** – в;	**71** – в;	**72** – г;
73 – в;	**74** – г;	**75** – б;	**76** – б;	**77** – г;	**78** – в;
79 – а;	**80** – б;	**81** – г;	**82** – в;	**83** – г;	**84** – а;
85 – г;	**86** – б;	**87** – а;	**88** – г;	**89** – в;	**90** – а;
91 – а;	**92** – г;	**93** – а;	**94** – г;	**95** – г;	**96** – г;
97 – в;	**98** – а;	**99** – б;	**100** – б;	**101** – г;	**102** – г;
103 – в;	**104** – б;	**105** – а;	**106** – в;	**107** – б;	**108** – а;
109 – г;	**110** – г;	**111** – в;	**112** – б;	**113** – г;	**114** – г;
115 – а;	**116** – в;	**117** – в;	**118** – б;	**119** – а;	**120** – г;
121 – б;	**122** – в;	**123** – а;	**124** – г;	**125** – б;	**126** – в;
127 – в;	**128** – а;	**129** – г;	**130** – б;	**131** – г;	**132** – а;
133 – б;	**134** – г;	**135** – б;	**136** – б;	**137** – в;	**138** – г;
139 – г;	**140** – г;	**141** – а;	**142** – а;	**143** – г;	**144** – г;
145 – г;	**146** – б;	**147** – в;	**148** – а;	**149** – б;	**150** – г;
151 – в;	**152** – б;	**153** – г;	**154** – б;	**155** – б;	**156** – г;
157 – г;	**158** – г;	**159** – б;	**160** – в.		

ДОДАТКИ

Додаток 1

Дата	Державний борг, млрд грн	Доходи населення, тис. грн	Кількість населення, млрд чол.	Валовий внутрішній продукт, млрд грн	Середній розмір допомоги безробітним, тис. грн	Кредити національного банку, млрд грн	Кінцеві споживчі витрати, млрд грн	Заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками, тис. грн
	PD	*IP*	*NP*	*GDP*	*AU*	*CNB*	*FCC*	*DL*
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
31.12.2012	399,21	165,56	0,073984	174,784	0,814	7,19	112,494	538,76
31.01.2013	410,97	170,67	0,079365	186,984	0,826	7,06	130,245	553,39
28.02.2013	419,17	173,47	0,080046	191,459	0,810	6,94	140,935	535,24
31.03.2013	426,39	202,41	0,080570	236,033	0,815	6,82	174,907	523,31
30.04.2013	441,13	224,65	0,081187	276,451	0,817	6,69	161,565	535,9
31.05.2013	442,41	245,11	0,081422	244,113	0,838	6,57	182,154	528,99
30.06.2013	439,24	192,90	0,081661	189,028	0,854	6,44	194,262	532,26
31.07.2013	447,10	217,06	0,081896	214,103	0,878	6,32	220,921	542,88
31.08.2013	445,04	233,25	0,082061	250,306	0,885	6,20	172,426	542,15
30.09.2013	450,95	251,07	0,082024	259,908	0,906	6,07	188,041	555,56
31.10.2013	450,54	228,60	0,082101	217,286	0,845	5,95	196,074	567,56
30.11.2013	453,58	266,51	0,082213	256,754	0,879	5,82	216,285	543,27
31.12.2013	480,21	288,39	0,082350	301,251	0,917	5,70	194,511	564,54
31.01.2014	480,17	317,68	0,082489	307,278	0,934	5,58	216,027	554,74
28.02.2014	558,96	265,53	0,082541	257,682	0,989	5,45	232,397	697,26
31.03.2014	590,22	299,96	0,082517	311,022	0,946	5,33	271,295	770,64

Закінчення дод. 1

Дата	Державний борг, млрд грн	Доходи населення, тис. грн	Кількість населення, млрд чол.	Валовий внутрішній продукт, млрд грн	Середній розмір допомоги безробітним, тис. грн	Кредити національного банку, млрд грн	Кінцеві споживчі витрати, млрд грн	Заборгованість за позиками, наданими іноземними комерційними банками, тис. грн
	PD	*IP*	*NP*	*GDP*	*AU*	*CNB*	*FCC*	*DL*
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
30.04.2014	608,96	328,46	0,082470	369,818	0,965	5,21	235,572	805,99
31.05.2014	675,88	357,06	0,082377	363,557	0,945	5,06	267,371	819,51
30.06.2014	672,11	296,57	0,082267	293,493	0,988	4,92	283,209	822,51
31.07.2014	686,86	345,30	0,082110	349,212	0,977	4,93	326,856	828,88
31.08.2014	783,44	371,24	0,081901	387,620	0,948	4,78	327,290	916,73
30.09.2014	803,48	394,09	0,081751	378,564	0,993	4,78	311,851	840,91
31.10.2014	809,71	317,25	0,080233	301,598	0,971	4,63	328,173	834,19
30.11.2014	888,65	362,51	0,080399	351,896	1,028	4,63	356,607	955,18
31.12.2014	946,81	382,12	0,080623	392,630	1,056	4,62	358,564	983,36

Джерела
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?&cat_id=392721&stind=1
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?cat_id=37210
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?cat_id=289710
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?cat_id=255473
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?cat_id=224493
http://www.minfin.gov.ua/control/uk/publish/archive/main?cat_id=36047

Додаток 2

ПОКРОКОВИЙ АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОФАКТОРНОЇ (ПАРНОЇ) ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

Задача: нехай задана таблиця СЕД – статистичних експериментальних даних *x(t), y(t)*. За таблицею СЕД:

1. Побудувати хмару розсіяння (діаграму розсіяння, поле кореляції) по експериментальних даних і по ній вибрати форму криволінійної моделі (вважати, що форма криволінійної моделі має лінійний вигляд).

2. Оцінити параметри моделі, яка Вами вибрана.

3. Обчислити відносне і середнє значення відносної похибки. Визначити ступінь узгодженості розрахункових значень регресії та значень змінних *y* (для перевірки регресійної моделі на адекватність), що спостерігаються (залишкову дисперсію, коефіцієнт детермінації, *F*-критерій, провести аналіз щодо значущості оцінок параметрів моделі – *t*-критерій для перевірки гіпотез відносно істотності кожного з параметрів регресійної моделі).

4. Дослідити питання, які пов'язані з визначенням значущості вибіркового коефіцієнта кореляції.

5. Обчислити коефіцієнти еластичності.

6. Визначити зони надійності регресії при рівні значущості *alfa*=α.

7. Перевірити на значущість і побудувати інтервали довіри для параметрів регресії b_0, b_1.

8 Обчислити прогнозні значення і знайти межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень (знайти точковий та інтервальний прогнози).

9. Перевірити залишки на автокореляцію.

1-й крок

1.1) взяти декартову систему координат на площині;

1.2) відкласти на ній точки $(x_i, y_i), \quad i = \overline{1,n}$;

1.3) обвести всі відкладені точки замкнутою кривою – отримати хмару (еліпс) розсіяння експериментальних даних;

1.4) провести криву, яка відповідає усередненим значенням (за умовою задачі – пряма лінія виду $y = b_0 + b_1 x$, де b_0, b_1 – параметри моделі).

2-й крок

2.1) визначити параметри моделі методом найменших квадратів (МНК) (МНК дає змогу знайти такі значення вихідних параметрів моделі, при яких

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \to \min,$$

де $\boldsymbol{u_i}$ – збурювана змінна, $u_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = \overline{1,n.}$) по формулах:

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2},$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2};$$

2.2) обчислити значення $\hat{y}_i$ для кожного значення x_i;

2.3) побудувати графік регресійної функції $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

3-й крок

3.1) обчислити відносну похибку розрахункових значень регресії за формулою

$$\delta_i = \frac{\hat{u}_i}{y_i} \cdot 100\%,$$

а середнє значення відносної похибки, як:

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n};$$

3.2) обчислити залишкову дисперсію за формулою

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - 2}}$$

(*S* – стандартна помилка, і чим вона менша, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним), $m = 1$;

(більш докладне дослідження адекватності моделі реальним даним):

3.3) (перевірка тісноти загального зв'язку незалежної змінної на залежну змінну): обчислити коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2}.$$

Висновок: чим ближчий R^2 до одиниці, тим більше варіація залежної змінної *y* визначається варіацією незалежної змінної *x* (є тісний зв'язок між залежною та незалежними змінними);

3.4) обчислити *F*-статистику за формулою

$$F = \frac{(n-2)R^2}{1-R^2};$$

3.5) обчислене значення *F*-критерію порівняти з табличним (дод. 5) $F_{табл.}(k_1,k_2,\alpha)$, при степенях вільності $k_1 = 1$ і $k_2 = n-2$ і вибраному рівні значущості α (рівень помилки), або $p = 1-\alpha$ (рівень довіри): якщо $F(1,\ n-2) > F_{табл.}(1,n-2,\alpha)$, то гіпотезу H_0: $b_1 = 0$ про неістотність зв'язку між залежною і незалежною змінною моделі не приймаємо з ризиком α, тобто коефіцієнт b_1 – значущий; інакше – приймаємо, тобто коефіцієнт $b_1 = 0$ – незначущий.

(перевірку на значущість коефіцієнтів регресії можна здійснити також і за *t*-тестом, а саме:

3.6) обчислити *t*-статистику за формулою

$$t = \frac{b_i}{\sigma_{b_i}}\ (i = 0,1),$$

де

$$\sigma_{b_0} = S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}},\ \sigma_{b_1} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}};$$

3.7) за таблицями *t*-статистики (дод. 4) знаходимо критичне значення $t_{\alpha/2,n-2}$ і порівнюємо його з обчисленою *t*-статистикою: якщо $|t| > t_{\alpha/2,n-2}$, то приймаємо, що коефіцієнт b_i – значущий, тобто гіпотезу H_0 : $b_i = 0$ відкидаємо; інакше ця гіпотеза приймається, тобто коефіцієнт b_i незначущий).

4-й крок (перевірка на значущість вибіркового коефіцієнта кореляції r_{yx}):

4.1) обчислити $R = r_{y,\hat{y}} = \sqrt{R^2}$ – коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку незалежної змінної x із залежною змінною y);

4.2) обчислити t-статистику за формулою

$$t = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}};$$

4.3) порівняти t-статистику з $t_{табл.(\alpha/2,n-2)}$: якщо $|t| > t_{табл.(\alpha/2,n-2)}$, то робимо висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною Y і незалежною X змінними; інакше коефіцієнт кореляції не є значущим;

4.4) для вибраного рівня значущості α і відповідного степеня вільності $k = n - 2$ записати межі надійності для R:

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R),$$

де ΔR обчислити за формулою

$$\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}}.$$

5-й крок:

5.1) обчислити коефіцієнти еластичності за формулою

$$\alpha_i = b_i \frac{\overline{x}}{\overline{y}}, \text{ де } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

(коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни частки x на y у припущенні, що вплив інших факторів відсутній: показує, що регресанд y зміниться на α%, якщо фактор x зміниться на один процент).

6-й крок (знайдемо надійні інтервали для регресії):

6.1) знайти коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha/2,k}$, де $\alpha = 1 - p$, $k = n - 2$;

6.2) обчислити дисперсію: $\sigma^2(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$;

6.3) обчислити $\Delta\hat{y}_i$ за формулою

$$\Delta\hat{y}_i = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2(x)}};$$

6.4) з'єднати неперервною лінією на графіку всі значення $(\hat{y}_i - \Delta\hat{y}_i)$ і $(\hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i)$. Отримати надійну зону

$$\left(\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2(x)}};\ \hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2(x)}} \right).$$

7-й крок (перевірка на значущість і побудова інтервалів довіри для параметрів регресії b_0, b_1):

7.1) обчислити стандартизовану помилку S_{b_j} – оцінки параметра b_j регресійної моделі ($j = 0,1$), яка обчислюється як $S_{b_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{b_j}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_u c_{jj}}$, де

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}},\ c_{00} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},\ c_{11} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}};$$

7.2) обчислити відношення

$$\delta_{b_j} = \frac{S_{b_j}}{|b_j|} \cdot 100\%$$

(δ_{b_j} характеризує той факт, наскільки добре обчислена відповідна оцінка параметра моделі: якщо вона мала, то це свідчить про її незміщеність, якщо велика, то – про зміщеність);

7.3) обчислити інтервал довіри для параметра регресії b_1:

$$\left(b_1 - t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}};\quad b_1 + t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} \right);$$

7.4) обчислити інтервал довіри для параметра регресії b_0

$$\left(b_0 - t_{\alpha/2,k} S \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}};\quad b_0 + t_{\alpha/2,k} S \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} \right).$$

8-й крок (обчислити прогнозні значення і знаходження меж надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і меж надійних інтервалів для математичного сподівання – точковий та інтервальний прогнози):

8.1) для обчислення прогнозних значень y_{pi} у рівняння $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ підставити задані значення x_{pi}, які знаходяться за межами базового періоду (точковий прогноз);

8.2) знайти межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень за формулою ($k = n - 2$ – степінь вільності, α – вибраний рівень значущості)

$$\Delta\hat{y}_{pi} = t_{\alpha/2,k} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pi} - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}};$$

8.3) записати межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень – $\left(\hat{y}_{pi} - \Delta\hat{y}_{pi}\right)$; $\left(\hat{y}_{pi} + \Delta\hat{y}_{pi}\right)$;

8.4) знайти межі надійних інтервалів для математичного сподівання значення y_{pi} за формулою ($k = n - 2$ – степінь вільності). Для цього обчислити:

$$\Delta\hat{y}_{pi} = t_{\alpha/2,k} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pi} - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}};$$

8.5) записати межі надійних інтервалів для математичного сподівання:

$$\left(\hat{y}_{pi} - \Delta\hat{y}_{pi};\quad \hat{y}_{pi} + \Delta\hat{y}_{pi}\right).$$

9-й крок

9.1) обчислити збурювальну змінну за формулою $u_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (дані завести до таблиці СЕД окремим стовпцем);

9.2) обчислити (визначити) *d*-статистику за формулою:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(u_i - u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2};$$

9.3) знайти верхню (d_0) і нижню (d_u) межу *d*-статистики (дод. 6);

9.4) зробити висновок про автокореляцію (якщо $0 < d < d_u$ – ряд додатно автокорельований; якщо $d_0 < d < 4 - d_0$ – ряд не містить автокореляцію; якщо $4 - d_u < d < 4$ – ряд відхилень від'ємно автокорельований; якщо $d_u < d < d_0$ або $4 - d_0 < d < 4 - d_u$ – необхідні подальші дослідження (необхідно збільшити кількість спостережень); за відсутності автокореляції *d* зазвичай наближене до 2.

Додаток 3

ПОКРОКОВИЙ АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

Нехай задана таблиця СЕД – статистичних експериментальних даних $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ і $\vec{y}$ (довжина спостережень ряду дорівнює $n = T$). За таблицею СЕД:

1. За допомогою алгоритму, що наведений у дод. 9 перевірити вихідний масив даних $x_1, x_2, ..., x_m$ на мультиколінеарність (лінійну залежність або кореляцію між двома і більше незалежними змінними), та якщо вона існує – вирішити питання про її усунення. Перейти до кроку 2 дійсного алгоритму. Якщо пп. 2–4 алгоритму 9 не приводять до необхідної цілі, тобто ми не позбавились мультиколінеарності, і оцінку параметрів моделі слід отримувати за допомогою іншого методу, наприклад, методу головних компонентів, що наведений у дод. 16 (або одного з його модифікацій). Перейти до кроку 3 дійсного алгоритму.

2. Оцінити параметри моделі, яка має вигляд

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m + u$$

($\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ – параметри моделі, які підлягають оцінюванню).

3. Обчислити і визначити ступінь узгодженості розрахункових значень регресії і значень змінних ***y*** (для перевірки регресійної моделі на адекватність), що спостерігаються:

– відносне і середнє значення відносної похибки;
– залишкову дисперсію;
– коефіцієнт детермінації;
– вибірковий коефіцієнт множинної кореляції та перевірити його на значущість;
– *F*-критерій (для нульової гіпотези):

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0;$$

– *t*-критерій для перевірки гіпотез відносно істотності кожного з параметрів регресійної моделі (аналіз щодо значущості оцінок параметрів моделі);
– частковий ΔR_k^2 (для оцінки впливу *k*-го регресора на якість моделі), за Тейлом, та за Амемією коефіцієнти детермінації та дати їм відповідну інтерпретацію;
– вплив на знайдену регресію з *m* регресорами, *k* (*m*>*k*) регресорів, як групу, впливаючу на регресанд, за допомогою *F*-критерію Фішера.

4. Обчислити коефіцієнти еластичності.

5. Визначити зони надійності регресії при рівні значущості *alfa*=α.

6. Перевірити на значущість і побудувати інтервали довіри для параметрів регресії.

7. Обчислити прогнозні значення y_{pi} за x_{pi}, які лежать за межами базового періоду, і знайти межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і межі надійних інтервалів для математичного сподівання (точковий та інтервальний прогнози).

8. Перевірити нульову гіпотезу на умову неавтокорельованості збурень у рівнянні регресії.

9. Перевірити модель на гетероскедастичність.

2-й крок

2.1) записати рівняння регресії у вигляді

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m,$$

де $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ – параметри моделі, які потрібно оцінити;

2.2) матричним методом розв'язати отриману систему і знайти шукані оцінки $b_0, b_1, b_2, ..., b_m$ параметрів моделі $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$; для цього:

– скласти вектор стовпців і матриці виду

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\ \hat{Y}=\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \dots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \dots \\ \hat{\beta}_m \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{T1} & \dots & x_{Tm} \end{pmatrix},$$

$U'=(u_1,u_2,...,u_n)$;

– обчислити шукані оцінки регресійних коефіцієнтів за формулою $B=(X'X)^{-1}X'Y$, де ***X'*** – транспонована матриця матриці ***X***;

2.3) записати шукану функцію регресії з урахуванням знайдених оцінок коефіцієнтів моделі

$$\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2+...+b_mx_m;$$

2.4) обчислити значення $\hat{y}_i$ за заданими $(1, \vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \dots, \vec{x}_{im})$ $(i=1,2,...,n)$ і завести отримані значення до таблиці: ці значення обчислити за формулою $\hat{Y}=XB$;

2.5) обчислити залишки і занести отримані значення у додатковий стовпець таблиці СЕД $(\hat{u}_i=y_i-\hat{y}_i,\ i=\overline{1,n})$: обчислення здійснити за формулою: $U=Y-\hat{Y}$.

3-й крок

3.1) обчислити відносну похибку розрахункових значень регресії за формулою

$$\delta_i=\frac{\hat{u}_i}{y_i}\cdot 100\%;$$

3.2) обчислити середнє значення відносної похибки за формулою

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n};$$

3.3) обчислити середньоквадратичну помилку дисперсії збурень

$$S = \sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-m-1}}$$

(***S*** – стандартна помилка: чим вона менша, тим краще підібрана функція регресії відповідає дослідним даним);

3.4) (перевірка тісноти загального зв'язку незалежних змінних на залежну змінну): обчислити коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}, \text{ або}$$

$$R^2 = 1 - \frac{Y'Y - B'X'Y}{Y'Y - n\overline{y}^2} = \frac{B'X'Y - n\overline{y}^2}{Y'Y - n\overline{y}^2}.$$

Висновок: чим ближчий R^2 до одиниці, тим більша варіація залежної змінної ***y*** визначається варіацією незалежної змінної x (є тісний зв'язок між залежною та незалежними змінними);

3.5) (перевірка на значущість вибіркового коефіцієнта кореляції): обчислити $R=\sqrt{R^2}$ – коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку всіх незалежних факторів x_i із залежною змінною y);

3.6) обчислити *t*-статистику за формулою

$$t = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}}.$$

Якщо $|t| > t_{\text{табл.}(\alpha/2,n-m-1)}$, де $t_{\text{табл.}(\alpha/2,n-m-1)}$ – відповідне табличне значення *t*-розподілу з $(n-m-1)$ степенями вільності, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і незалежними змінними моделі;

3.7) для вибраного рівня значущості α і відповідного степеня вільності $k = n-m-1$ записати межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції *R*:

$$(R - \Delta R;\ R + \Delta R),$$

де $\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}}$;

3.8) обчислити *F*-статистику за формулою (спрощений варіант для перевірки нульової гіпотези: $H_0 : \beta_1 = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$):

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m};$$

– знайти табличне значення (дод. 5) $F\left(m, T-m-1, \alpha\right)$ і порівняти його з обчисленою *F*-статистикою: якщо $F > F\left(m, T-m-1, \alpha\right)$, то гіпотеза відхиляється, інакше – приймається;

– перевірку на значущість коефіцієнтів регресії можна здійснити також і за *t*-тестом, а саме:

3.9) обчислити *t*-статистику за формулою:

$$t_j = \frac{b_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{b_j}{S_{b_j}} \ \left(j = 0,1,\ldots,m\right),$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці $\left(X_1' X_1\right)^{-1}$, S_{b_j} – стандартизована помилка оцінки параметра моделі.

Значення t_j-критерію порівнюється з табличними при $k = n - m - 1$ степенях вільності та рівні значущості α: якщо $|t_j| > t_{\alpha/2,k.}$, то відповідно оцінка параметра регресійної моделі є значуща; інакше гіпотезу про рівність b_j нулю приймаємо;

3.10) обчислимо відношення

$$\delta_{b_j} = \frac{S_{b_j}}{|b_j|} \cdot 100\%,$$

(характеризує, наскільки добре обчислена відповідна оцінка параметра моделі; якщо вона мала, то це свідчить про її незміщеність, якщо велика, то – про її зміщеність);

3.11) обчислити значення граничного вкладу j-го регресора у коефіцієнт детермінації (тобто, на яку величину зменшиться частковий коефіцієнт детермінації, якщо j-й регресор буде виключений з рівняння)

$$\Delta R_j^2 = \frac{\left(1 - R^2\right) t_j^2}{n - m - 1}, \text{ де } t_j = \frac{b_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{b_j}{S_{b_j}};$$

3.12) обчислити скоригований коефіцієнт за Тейлом:

$$\overline{R}_T^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-m-1};$$

3.13) обчислити скоригований коефіцієнт детермінації за Амемією:

$$\overline{R}_A^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n + m = +1}{n-m-1};$$

Зробити висновок: оскільки із виключенням змінної із рівняння зникає один степінь вільності, то з двох варіантів

рівнянь, які відрізняються величиною скоригованого коефіцієнта детермінації, але мають однаково добрі інші критерії якості, перевага віддається рівнянню з більшим значенням скоригованого коефіцієнта детермінації ($\overline{R}_A^2$ відображає втрату степеня вільності при включенні додаткового регресора більш чітко, ніж $\overline{R}_T^2$, тобто у цьому випадку $\overline{R}_A^2 > \overline{R}_T^2$);

3.14) визначити вплив на знайдену регресію з m регресорами, k ($m>k$) регресорів, як групу, що впливає на регресанд, за допомогою F-критерію Фішера за формулою

$$F = \frac{\varepsilon'\varepsilon - u'u}{u'u} \cdot \frac{n-m-1}{k},$$

де u_i – відхилення для регресії, до якої включені всі (m + 1) регресорів; ε_i – відхилення для регресії, до якої не включені k регресорів, тобто для регресії з ($m – k – 1$) регресорами.

Для заданого рівня значущості α і степенів вільності $k_1 = k$ і $k_2 = n – m – 1$ знайдемо табличне значення F-критерію – $F_{\text{табл.}}(k_1,k_2,\alpha)$. Порівнюючи табличне та обчислене значення F-критеріїв, робимо висновок: якщо $F_{\text{табл.}}(k_1,k_2,\alpha) < F$, то при вибраному рівні значущості α, або з надійністю $p = 1 – \alpha$ можна вважати, що виключені з моделі k регресорів суттєво впливають на модель і їх не можна виключати з розгляду; інакше, тобто якщо $F_{\text{табл.}}(k_1,k_2,\alpha) > F$, то виключені з моделі фактори з заданою надійністю не суттєво впливають на модель.

4-й крок: обчислити коефіцієнти еластичності за формулою

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \cdot \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}}.$$

(коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни частки x_i на y у припущенні, що вплив інших факторів відсутній: показує, що регресанд y зміниться на α%, якщо фактор x зміниться на

один процент; загальна еластичність Y від усіх факторів x_i дорівнює:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i .$$

Цей показник свідчить, що на α процентів зміниться y, якщо одночасно збільшити на один процент всі фактори x_i.

5-й крок (знайдемо надійні інтервали для регресії):

5.1) обчислити надійні зони регресії:

$$\left(\hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot S \cdot \sqrt{X_i^{'}(X'X)^{-1} X_i} \, ; \hat{y}_i - t_{\alpha/2,k} \cdot S \cdot \sqrt{X_i^{'}(X'X)^{-1} X_i} \right).$$

6-й крок (побудова інтервалів довіри для параметрів регресії):

6.1) обчислити довірчі інтервали для параметра b_j за формулою

$$\left(b_j - t_{\alpha/2,k} \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}} ; \; b_j + t_{\alpha/2,k} \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}} \right),$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці.

Довірчим інтервалом при рівні надійності $(1 - \alpha)$ є інтервал із випадково залежними межами і «накриває» істинне значення коефіцієнта регресії b_j з рівнем довіри $(1 - \alpha)$;

7-й крок (обчислення прогнозних значень і знаходження меж надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень і меж надійних інтервалів для математичного сподівання (точковий та інтервальний прогнози):

7.1) для обчислення прогнозних значень y_{pi} у рівняння

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m$$

підставити задані значення x_{pi} $(i = 0,1,2,\ldots,m)$, які лежать за межами базового періоду (точковий прогноз);

7.2) знайти межі надійних інтервалів індивідуальних прогнозованих значень за формулою ($k = n - m - 1$– степінь вільності, α – вибраний рівень значущості):

$$\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{1+X_0^{'}\left(X'X\right)^{-1}X_0} \le Y_0 \le \hat{Y}_0 + \\ + t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{1+X_0^{'}\left(X'X\right)^{-1}X_0} \quad .$$

Зауважимо, що $\hat{Y}_0 = X_0 B$ можна розглядати як точкову оцінку математичного сподівання прогнозного значення Y_0, а також як індивідуальне значення Y_0 для вектора незалежних змінних X_0, що лежать за межами базового періоду;

7.3) знайти межі надійних інтервалів для математичного сподівання значення y_{pi} за формулою. Для цього обчислити:

$$\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{X_0^{'}\left(X'X\right)^{-1}X_0} \le M\left(Y_0\left(X_0\right)\right) \le \hat{Y}_0 + \\ + t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{X_0^{'}\left(X'X\right)^{-1}X_0} \quad ;$$

8-й крок

8.1) зробити висновок про автокореляцію (для цього обчислити (визначити) *d*-статистику (тест Дарбіна-Уотсона) за формулою)

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{T}\left(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{T}u_i^2};$$

8.2) **у випадку** з тестом із альтернативною гіпотезою $H_A : \rho \neq 0$ (двобічний тест, нормальний випадок) **гіпотеза:**

а) відхиляється, якщо: $H_A : \rho = 0 \quad [d < d_u(\alpha/2) \quad або \quad d > 4 - d_u(\alpha/2)]$;

б) приймається, якщо: $H_A : \rho = 0 \quad [d_0(\alpha/2) < d < 4 - d_0(\alpha/2)]$;

в) невизначена (сказати, будь-що з цього приводу неможливо), якщо:

$4 - d_0(\alpha/2) \le\!< d \le 4 - d_u(\alpha/2),\ d_u(\alpha/2) < d < d_0(\alpha/2)$;

8.3) **у випадку** з тестом із альтернативною гіпотезою $H_A : \rho < 0$ (односторонній тест) гіпотеза:

а) відхиляється: $H_0 : \rho = 0$ $[d > 4 - d_u(\alpha)]$;

б) приймається: $H_0 : \rho = 0$ $[d < 4 - d_0(\alpha)]$;

в) невизначена (область невизначених рішень):

$$4 - d_0(\alpha) \le d \le 4 - d_u(\alpha);$$

8.4) у випадку з тестом із альтернативною гіпотезою $H_A : \rho > 0$ (односторонній тест) **гіпотеза:**

а) відхиляється: $H_0 : \rho = 0$ $[d < d_u(\alpha)]$;

б) приймається: $H_0 : \rho = 0$ $[d > d_0(\alpha)]$;

в) невизначена: $d_u(\alpha) \le d \le d_0(\alpha)$,

(у 8.2–8.4 α **–** рівень значущості, $d_u(\alpha)$ – нижнє значення і $d_0(\alpha)$ – верхнє значення показника d, які знаходяться з таблиць)**.**

Якщо автокореляція присутня, то оцінити параметри моделі за одним із методів, що наведений у лекції 8. Порівняти одержану модель з моделлю, що сконструйована у п. 2 дійсного алгоритму, виконуючи кроки 3 і 4. Зробити висновок.

9-й крок (перевірка моделі на гетероскедастичність):

Перевірити модель на гетероскедастичність, тобто чи змінюється дисперсія залишків для кожного спостереження чи групи спостережень за допомогою μ критерію та параметричного тесту Гольфельда-Квандта, що наведені у дод. 10. Якщо вона присутня, то обчислити параметри моделі, використовуючи узагальнений метод Ейткена. Порівняти одержану модель із моделлю, що сконструйована у п. 2 дійсного алгоритму, виконуючи кроки 3 і 4. Зробити висновок.

Додаток 4

Алгоритм Феррара-Глобера

(для дослідження *мультиколінеарності* – лінійної залежності або кореляції між двома і більше незалежними змінними)

Цей алгоритм включає три види статистичних критеріїв, на основі яких перевіряється мультиколінеарність:

– усього масиву незалежних змінних (критерій χ^2);

– кожної незалежної змінної з усіма іншими (*F*-критерій);

– кожної пари незалежних змінних (*t*-критерій).

Складемо **покроковий алгоритм Феррара-Глобера**.

1-й крок:

нормалізувати змінні $x_1, x_2, \ldots x_m$ економетричної моделі, для цього обчислити

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

де n – кількість спостережень, ($i = 1,2,\ldots,n$);

m – кількість незалежних змінних, ($j = 1, m$);

$\overline{x}_j$ – середня арифметична j-ї незалежної змінної;

σ_{xj}^2 – дисперсія j-ї незалежної змінної.

2-й крок:

побудувати нову матрицю X^* – матрицю, елементами якої є нормалізовані незалежні змінні x_{ij}^{*} та обчислити кореляційну матрицю (матрицю моментів нормалізованої системи нормальних рівнянь)

$$R = X^{*tr} X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де X^{*tr} – транспонована матриця до матриці X^* (елементи матриці R характеризують тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою $\left(r_{ij} = r_{x_i x_j}\right)$ – парні коефіцієнти кореляції.

Однак, на основі цієї залежності не можна стверджувати, що отриманий зв'язок є явищем мультиколінеарності. Якщо діагональні елементи матриці R не дорівнюють одиниці (зв'язок будь-якої незалежної змінної самої до себе повинен бути повним), то на діагоналі цієї матриці ставимо одиниці, а до решти елементів додаємо різницю між одиницею і значенням діагонального елемента.

3-й крок:

3.1) визначити $|R|$ – визначник кореляційної матриці R;

3.2) визначити критерій χ^2 як

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right] \cdot \ln|R|;$$

3.3) порівняти значення χ^2 з табличним при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α (якщо $\chi^2 > \chi^2_{\text{табл.}}$, то у масиві незалежних змінних існує мультиколінеарність).

4-й крок:

визначити матрицю C-помилок:

$$C = R^{-1} = (X^{*tr} X^{*})^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

5-й крок:

5.1) розрахувати *F*-критерії:

$$F_k = \frac{(c_{kk} - 1) \cdot (n - m)}{(m - 1)},$$

де c_{kk} – діагональні елементи матриці *C*;

5.2) значення критеріїв F_k порівняти з табличним при $(n - m)$ та $(m - 1)$ степенях вільності та рівні значущості α (якщо $F_k > F_{\text{табл.}}$, то відповідна *k*-та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими);

5.3) розрахувати коефіцієнти детермінації для кожної змінної:

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{c_{kk}}.$$

6-й крок:

знайти часткові коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між двома змінними x_k та x_j за умови, що всі інші змінні x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lm} не впливають на цей зв'язок (існування парної мультиколінеарності):

$$r_{k_j \cdot l_1, l_2, \dots, l_m} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} c_{jj}}},$$

де c_{kj} – елементи матриці *C*, що знаходиться в *k*-му рядку та *j*-му стовпці, $k=1,2,\dots, m$; $j=1,2,\dots,m$, c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці *C*.

Однак, якщо порівняти конкретні числові значення часткових та парних коефіцієнтів, то можна побачити, що перші значно менші за останні. Тому на основі парних коефіцієнтів кореляції висновок про мультиколінеарність робити неможливо. Для цього необхідно ще виконати сьомий крок.

7-й крок:

7.1) розрахувати *t*-критерії

$$t_{kj} = \left| r_{k_j \cdot l_1, l_2, \ldots, l_m} \right| \frac{\sqrt{n-m}}{1 - r^2_{k_j \cdot l_1, l_2, \ldots, l_m}};$$

7.2) значення критеріїв t_{kj} порівняти з табличними при $(n-m)$ степенях вільності та рівні значущості α; якщо $t_{kj} > t_{\text{табл.}}$, то між незалежними змінними x_k і x_j існує мультиколінеарність.

***Висновок*:**

1. Між незалежними змінними може існувати лінійна залежність, але вона може не бути явищем мультиколінеарності змінних і тому не буде негативно впливати на кількісні параметри моделі, які розраховані за допомогою звичайного МНК.

2. Якщо $F_k > F_{\text{табл}}$, то x_k залежить або від усіх інших незалежних змінних, або від деяких із них і потрібно вирішити питання про її виключення з переліку змінних.

3. Якщо $t_{kj} > t_{\text{табл}}$, то x_k і x_j тісно пов'язані між собою.

4. Аналізуючи *F* і *t* критерії, робиться висновок, яку із змінних необхідно виключити з розгляду в будованій моделі (зрозуміло, що потрібно при цьому виходити з економіко-логіко-теоретичних міркувань).

5. Якщо мультиколінеарності не позбавилися (пп. 2–4), то оцінку параметрів моделі слід отримувати за допомогою іншого методу, наприклад, методу головних компонентів (або одного з його модифікацій).

Додаток 5

АЛГОРИТМИ ПЕРЕВІРКИ НА ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

(**Гетероскедастичність –** *дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень* та призводить до того, що оцінки параметрів моделі МКН будуть незміщеними, обґрунтованими, але неефективними).

Для перевірки наявності гетероскедастичності використовуються чотири методи [22]:

1) критерій μ;
2) параметричний тест Гольдфельда-Квандта;
3) непараметричний тест Гольдфельда-Квандта;
4) тест Глейсера.

1. Алгоритм для критерію μ

(критерій зазвичай застосовується, коли вихідна сукупність даних досить велика)

1-й крок:

поділити вихідні дані вектора-стовпця Y на k груп ($r = \overline{1, k}$) відповідно до зміни рівня величини Y.

2-й крок:

розрахувати по кожній групі спостережень суму квадратів відхилень

$$S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \left(Y_{ir} - \overline{Y}_r \right)^2,$$

де n_r – кількість спостережень у r-й групі;

3-й крок:

знайти суму квадратів відхилень по всій сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{n_r} \left(Y_{ir} - \overline{Y}_r \right)^2 .$$

4-й крок:

обчислити параметр a за формулою

$$a = \prod_{r=1}^{k} \frac{\left(\frac{S_r}{n_r} \right)^{n_r/2}}{\left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n} \right)^{n/2}},$$

де n – кількість спостережень у цілому,

n_r – кількість спостережень у r-й групі.

5-й крок:

5.1) розрахувати критерій $\mu = -2 \cdot \ln \alpha$, який наближено буде відповідати розподілу χ^2 при степені вільності $k - 1$, коли дисперсія всіх спостережень однорідна;

5.2) якщо значення $\mu < \chi^2$ при вибраному рівні довіри α і степені вільності $k - 1$, то явище гетероскедастичності відсутнє (явище гомоскедастичності).

2. Параметричний тест Гольдфельда-Квандта

(коли сукупність спостережень невелика, то застосування μ критерію не дає бажаних результатів. У цьому випадку розглядається випадок, коли $M(uu^{tr}) = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто

дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних заданої моделі).

1-й крок:

спостереження (вихідні дані) впорядкувати відповідно до величини елементів вектора X_i, який може спричинити зміну дисперсії залишків;

2-й крок:

відкинути c спостереження, які знаходяться всередині векторів вихідних даних,

де $c = \frac{4n}{15}$,

n – кількість елементів вектора x_i.

3-й крок:

побудувати дві моделі на основі звичайного МНК по двох створених сукупностях спостережень $\frac{n-c}{2}$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де m – кількість змінних.

4-й крок:

знайти суму квадратів залишків S_1 і S_2 по першій і другій моделях:

$$S_1 = u_1{}^{tr} u_1,\ S_2 = u_2{}^{tr} u_2,$$

де u_1 і u_2 – залишки по моделях (1) і (2) відповідно.

5-й крок:

5.1) розрахувати критерій $F = \frac{S_2}{S_1}$, який при виконанні гіпотези про гомоскедастичність буде відповідати

F-розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2}$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2}$ степенями вільності;

5.2) значення критерію F порівняти з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні довіри α і відповідних степенях вільності; якщо $F \le F_{\text{табл.}}$, то гетероскедастичність відсутня.

3. Непараметричний тест Гольдфельда-Квандта

Цей тест базується на кількості піків величини залишків після упорядкування спостережень по X_{ij}. Якщо для всіх значень змінної X_{ij} залишки розподіляються приблизно однаково, то дисперсія їх є однорідною та гетероскедастичність відсутня. Якщо вона змінюється, то гетероскедастичність існує.

Зазначимо, що цей тест не є цілком надійним для перевірки на гетероскедастичність. Але він є дуже простий і часто використовується для першої оцінки для виявлення на гетероскедастичність множини спостережень.

4. Тест Глейсера

Перевірка на гетероскедастичність базується на побудові регресивної функції, що характеризує залежність величини залишків за модулем від пояснюючої змінної X_j, яка може спричинити зміну дисперсії залишків.

Аналітична форма регресивних функцій може мати вигляд

$$|u| = b_0 + b_1 x_j,$$
$$|u| = b_0 + b_1 x_j^{-1}$$
$$|u| = b_0 + b_1 x_j^{1/2} \text{ і т.п.}$$

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на основі значущості коефіцієнтів b_0 і b_1. Перевага цього методу визначається можливістю розрізняти

випадок чистої ($b_0 = 0,\ b_1 \neq 0$) і змішаної ($b_0 \neq 0,\ b_1 \neq 0$) гетероскедастичності. Залежно від цього потрібно користуватись різними матрицями *S*.

Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця *S* у співвідношенні $M(uu') = \sigma_u^2 S$ повинна бути додатно визначеною та діагональною.

За наявності гетероскедастичності для оцінки параметрів моделі доцільно застосувати узагальнений метод найменших квадратів (оцінки Ейткена), вектор оцінювання якого має вигляд:

$$B = \left(X' S^{-1} X\right)^{-1} X' S^{-1} Y .$$

Вектор *B* у цьому випадку містить незміщену лінійну оцінку параметрів моделі, яка має найменшу дисперсію і матрицю варіацій:

$$\sigma^2(B) = \sigma_u^2 \left(X' S^{-1}\right)^{-1} .$$

Визначення матриці S

Щоб оцінити параметри моделі, коли дисперсії залишків визначаються $M(uu') = \sigma_u^2 S$, потрібно визначити матрицю *S*.

Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане лише з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця *S* має бути діагональною, а саме:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Щоб пояснити, чому саме такий вигляд має ця матриця, потрібно ще раз наголосити: за наявності гетероскедастичності для певних вихідних даних одна (або кілька) пояснювальних змінних можуть різко змінюватися від одного спостереження до іншого, тоді як залежна змінна має такі самі коливання, як і для попередніх спостережень (це дуже важливо для перехідних економік при прийнятті відповідних управлінських рішень, коли надходить дезінформація).

Це означає, що дисперсія залишків, яка змінюється від одного спостереження до іншого (чи для групи спостережень), може бути пропорційною для величини пояснювальної змінної X (або її квадрата), яка зумовлює гетероскедастичність, або пропорційною до квадрата залишків.

Звідси у матриці S значення λ_i, $i = 1,2,...,n$, можна обчислити, користуючись гіпотезами:

1) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}$, тобто дисперсія залишків пропорційна до змін пояснювальної змінної x_{ij} ;

2) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто зміна дисперсії пропорційна до зміни квадрата пояснювальної змінної x_{ij}^2;

3) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij} \{|u|\}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрата залишків за модулем.

Для першої гіпотези: $\lambda_i = \dfrac{1}{x_{ij}}$.

Для другої гіпотези: $\lambda_i = \dfrac{1}{x_{ij}^2}$.

Для третьої гіпотези: $\lambda_i = \{|u|\}^2$, або $\lambda_i = \left(a_0 - a_1 x_{ij}\right)^2$, або $\lambda_i = \left(a_0 - a_1 x_{ij}^{-1}\right)^2$.

Оскільки матриця S – симетрична і додатно визначена, то при $S = P'P$ матриця P має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Додаток 6

АЛГОРИТМИ ПЕРЕВІРКИ НА АВТОКОРЕЛЯЦІЮ

(**автокореляція –** *порушення припущення про незалежність залишків моделі (випадкових величин u_i, $i = 1...n$)*:

$$cov(u_i, u_j) \neq 0, i \neq j,$$

що призводить до того, що оцінки параметрів моделі МКН будуть незміщеними, але неефективними).

Для перевірки наявності автокореляції залишків використовують чотири методи [17, 30]:

1) *d*-тест Дарбіна–Уотсона;
2) критерій фон Неймана;
3) нециклічний коефіцієнт автокореляції;
5) циклічний коефіцієнт автокореляції.

2. Критерій Дарбіна–Уотсона

Обчислюється значення *d*–статистики за формулою:

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}.$$

Доведено, що значення *d*–статистики Дарбіна–Уотсона знаходиться в межах: $0 \leq DW \leq 4$ і містить проміжки невизначенності.

За таблицею Дарбіна–Уотсона при заданому рівні значущості α, кількості факторів m та кількості спостережень n, знаходимо два значення DW_1 та DW_2.

– Якщо $0 < DW < DW_1$, то наявна додатна автокореляція.
– Якщо $DW_1 \le DW \le DW_2$ або $4 - DW_2 \le DW \le 4 - \mathrm{DW}_1$, то не можна зробити висновки ні про наявність, ні про відсутність автокореляції (DW потрапляє в зону невизначеності).
– Якщо $4 - DW_1 < DW < 4$, то маємо від'ємну автокореляцію.
– Якщо $DW_2 < DW < 4 - DW_2$, то автокореляція відсутня.



Рис. 1. Зони автокореляційного зв'язку за критерієм Дарбіна-Уотсона

Критерій фон Неймана

Розраховується

$$Q = Q_{\text{факт.}} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Звідси $Q = DW \cdot \frac{n}{n-1}$. Отже при $n \to \infty$, $Q = DW$.

Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α і заданому числі спостережень: $Q_{\text{табл}} = Q_{(\alpha,n)}$.

Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція.

Циклічний та нециклічний коефіцієнти автокореляції

Крім статистик Дарбіна–Уотсона та Неймана для перевірки автокореляції застосовують також нециклічний коефіцієнт автокореляції r^*, який відображає ступінь взаємозв'язку рядів $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ та $u_2, u_3, \ldots, u_n$ і обчислюється за формулою

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1} - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n} u_t\right)\left(\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}\right)}{\left[\sum_{t=2}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n} u_t\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Коефіцієнт r^* може набувати значень з інтервалу (-1,1). Від'ємні його значення свідчать про від'ємну автокореляцію залишків, а додатні – про додатну автокореляцію. Значення, що лежать у деякій критичній області біля нуля підтверджують нульову гіпотезу про відсутність автокореляції в залишках. Ймовірнісний розподіл r^* встановити складно, тому на практиці замість r^* обчислюють циклічний коефіцієнт автокореляції r^0. А саме, якщо часовий ряд має циклічний характер, тобто припускається, що після значення u_τ загальний характер зміни членів ряду повторюється, то автокореляцію вимірюють за допомогою коефіцієнта r^0, який запровадив Андерсон.

У цьому разі автокореляція визначається між послідовностями, зсунутими на період τ: $u_1, u_2, \ldots, u_\tau$ та $u_{\tau+1}, u_{\tau+2}, \ldots, u_{2\tau}$.

Якщо період $\tau = 1$, то маємо коефіцієнт циклічної автокореляції першого порядку, який відображає інтенсивність взаємозв'язку між послідовностями $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$ та $u_2, u_3, \ldots, u_n, u_1$

Для досить довгих рядів вплив циклічних членів стає незначним, тому ймовірнісний розподіл коефіцієнта r^* наближується до ймовірнісного розподілу коефіцієнта циклічної автокореляції r^0, який обчислюється за формулою:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} u_t u_{t-1} + u_n u_t - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2}.$$

Якщо останній член ряду дорівнює першому, тобто $u_1 = u_n$, то нециклічний коефіцієнт автокореляції дорівнює циклічному. Очевидно, якщо залишки не містять тренду, то припущення про рівність $u_1 = u_n$ недалеке від дійсності і циклічний коефіцієнт автокореляції близький до нециклічного. Крім того, якщо середня залишків дорівнює нулю, то можна припустити, що

$$\sum_{t=2}^{n} u_t \approx \sum_{t=2}^{n} u_{t-1} \approx 0.$$

У результаті отримаємо приблизну формулу для обчислення циклічного коефіцієнта автокореляції:

$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}.$$

Побудова моделі з автокорельованими залишками

Зазначимо, що оцінку параметрів моделі з автокорельованими залишками можна виконати на основі чотирьох методів:

1) Ейткена (УМНК);
2) перетворення вихідної інформації;
3) Кочрена-Оркатта;
4) Дарбіна.

(третій і четвертий методи є ітеративними).

Перші два методи доцільно застосовувати тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку:

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + v_t .$$

Ітеративні методи Кочрена-Оркатта і Дарбіна можна застосовувати для оцінки параметрів економетричної моделі і тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю більш високого порядку:

$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + v_t,$$
$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + \rho_3 \cdot u_{t-3} + v_t.$$

Метод Ейткена

Як було викладено вище, оператор оцінювання УМНК має вигляд:

$$\hat{A} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y ,$$

де Ω^{-1} – матриця, обернена до дисперсійно-коваріаційної матриці залишків Ω ;

S^{-1} – матриця, обернена до матриці $S = \sigma_u^2 \cdot \Omega$.

Оскільки в Ω коваріація залишків $\rho^s \to 0$, при $s > 2$, то матриця Ω^{-1} матиме вигляд:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

На практиці для розрахунку ρ використовується співвідношення:

$$\rho \approx r \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$$

або

$$\rho \approx r' \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Додаток 7

АЛГОРИТМ ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ КОЧРЕНА-ОРКАТТА

(для оцінки параметрів моделі з автокорельованими залишками)

Крок 1. Довільно вибрати значення параметра ρ, наприклад, $\rho = r_1$. Підставити його у

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[\left(y_t - \rho y_{t-1} \right) - a_0 \left(1 - \rho \right) - a_1 \left(x_t - \rho x_{t-1} \right) \right]^2, \qquad (1)$$

обчислити $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Покласти $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$ та підставивши їх у рівняння (1), обчислити $\rho = r_1$.

Крок 3. Підставити у рівняння (1) значення $\rho = r_2$, знайти $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використати $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків (1) за невідомим параметром $\rho = r_3$. Процедуру повторювати доти, поки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ не будуть відрізнятися менш як на задану величину.

Наведений метод завжди забезпечує: а) знаходження глобального оптимуму; б) порівняно добру збіжність.

Додаток 8

АЛГОРИТМ ПОКРОКОВОЇ РЕГРЕСІЇ ДЛЯ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ

(альтернативний метод МНК-1 для оцінювання параметрів моделі, який базується на дисперсійному аналізі) [16, 17]

Алгоритм включає десять кроків:

1-й крок:

нормалізувати змінні x_1, x_2, ... x_m, у регресійній моделі, для цього обчислити

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \quad y^{*} = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y},$$

де n – число спостережень ($i = 1, n$);

m – число незалежних змінних у моделі ($j = 1, m$);

$\bar{x}_j$ – середня арифметична j-ї незалежної змінної;

$\bar{y}$ – середня арифметична залежної змінної y;

σ_{xj} – середньоквадратичне відхилення j-ї незалежної змінної;

σ_y – середньоквадратичне відхилення y;

$$(\bar{x}_j^{*} = 0, \quad \bar{y}^{*} = 0, \quad \sigma^2(x_j^{*}) = 1, \quad \sigma^2(y^{*}) = 1);$$

2-й крок:

обчислити кореляційну матрицю:

$$r = \begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & \dots & r_{yx_m} \\ r_{x_1 y} & r_{x_1 x_1} & \dots & r_{x_1 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_m y} & r_{x_m x_1} & \dots & r_{x_m x_m} \end{pmatrix},$$

де $r_{y^* x_i^*} = \frac{1}{n}\left(y^* x_i^*\right)$, $r_{x_l^* x_i^*} = \frac{1}{n}\left(x_l^* x_i^*\right)$ – парні коефіцієнти кореляції між відповідними змінними;

3-й крок:

знайти $k = \max\{|\, r_{y^* x_i^*} \,|\}$ і на основі використання МНК-1 знайти оцінку параметра при змінній x_k^* як змінній, оj найтісніше пов'язана зі змінною $\boldsymbol{y}$ $\left(\hat{y}^* = b_1^* x_k^*\right)$;

4-й крок:

повторити крок 3-й, але вже без урахування змінної x_k^* і в рівняння регресії ввести нову отриману змінну $\left(\hat{y}^* = b_1^* x_k^* + b_2^* x_q^*\right)$; таку процедуру повторювати доти, поки не будуть враховані всі змінні;

5-й крок:

скласти суму квадратів $Q = \sum_{i=1}^{n} u_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i^* - \hat{Y}_i^*\right)^2 \to \min$;

6-й крок:

взяти (як і у випадку для МНК-1) часткові похідні по всіх знайдених коефіцієнтах b_i^* регресійної моделі (у подальшому будемо вважати, що номери знайдених коефіцієнтів відповідають відповідним номерам змінних) і отримати систему рівнянь:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = b_1^* + b_2^* r_{x_2x_1} + b_3^* r_{x_3x_1} + \ldots + b_m^* r_{x_mx_1} \\ r_{yx_2} = b_1^* r_{x_1x_2} + b_2^* + b_3^* r_{x_3x_2} + \ldots + b_m^* r_{x_mx_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{yx_m} = b_1^* r_{x_1x_m} + b_2^* r_{x_2x_m} + b_3^* r_{x_3x_m} + \ldots + b_m^* \end{cases};$$

7-й крок:

записати отриману систему у матричному вигляді $rb^* = r_{yx}$;

8-й крок:

знайти оператор оцінювання $b^* = r_{yx}^{-1}$;

9-й крок:

знайти оцінки параметрів для шуканої регресійної моделі (у нас оцінки знайдені для стандартизованих змінних):

$$b_i = b_i^* \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}},\ i = 1,2,\ldots,m;\ b_0 = \overline{y} - \sum_{k=1}^{m} b_k^* \overline{x}_k;$$

10-й крок:

записати регресійну модель з урахуванням знайдених оцінок.

Додаток 9

ПОКРОКОВИЙ АЛГОРИТМ ДВОКРОКОВОГО МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (2-МНК)

(метод оцінювання параметрів надідентифікованих одночасних рівнянь економетричної моделі, яка враховує багатосторонні зв'язки спільно залежних змінних) [14]

Етап І:

1) записати *i*-е структурне надідентифіковане рівняння у вигляді

$$y_i = Y_i a_i + X_i b_i + u_i, \qquad (*)$$

де y_i – вектор спостережень над спільно залежною змінною розміром $T \times 1$, яка підлягає визначенню за допомогою *i*-го структурного рівняння;

Y_i – матриця поточних спостережень над спільно залежними змінними розміром $T \times r$, що містяться, крім того, в *i*-му структурному рівнянні;

$a_i = \hat{\gamma}_i$ – вектор оцінок параметрів залежних змінних розміром $r_i \times 1$, що містяться у матриці Y_i;

X_i – матриця спостережень над наперед визначеними змінними, які містяться в *i*-му структурному рівнянні $T \times (k_i + 1)$ (одиниця додається за рахунок вільного члена рівняння);

$b_i = \hat{\beta}_i$ – вектор оцінок параметрів цих наперед визначених змінних розміром $(k + 1) \times 1$;

$u_i = \hat{u}_i$ – вектор оцінок залишків *i*-го структурного рівняння для всіх періодів спостережень розміром $r \times 1$;

2) задати всі наперед визначені змінні X (запізнюючі ендогенні, екзогенні та незапізнюючі екзогенні) моделі;

3) визначити прогнозну форму спільно залежних змінних матриці Y_i:

$$Y_i = X\pi_i + \hat{V}_i;$$

4) скласти матрицю значень регресій $\hat{Y}_i$ за формулою

$$\hat{Y}_i = Y_i - \hat{V}_i = X\pi_i;$$

Примітка 1. Зазначимо, що значення регресій $\hat{Y}_i$ матриці Y_i незалежні від збурюючих змінних прогнозної та структурної моделей, оскільки вони є лінійними функціями тільки від наперед визначених змінних. Тому, окремі рівняння моделі являють собою множинну регресію, для якої виконується передумова, що пояснюючі змінні не повинні корелювати зі збурюваною змінною *u,* тобто

$$M(x_{i,k},u_i) = 0, \text{ або } [M(x,u) = 0].$$

Тому МНК може застосовуватисz для оцінювання параметрів матриці π_i;

5) обчислити

$$\pi_i = (X'X)^{-1}X'Y_i;$$

6) обчислити

$$\hat{Y}_i = X\pi_i = X(X'X)^{-1}X'Y_i.$$

Етап II:

7) а) замінити у рівнянні (*) матрицю Y_i на матрицю $\hat{Y}_i$, враховуючи, що $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{V}_i$;

б) записати рівняння (*) у вигляді:

$$y_i = (\hat{Y}_i + \hat{V}_i)a_i + X b_i + \hat{u}_i = \hat{Y}a_i + X b_i + \hat{u}_i + \hat{V}a_i;$$

8) припустити, що

$$\hat{w}_i = \hat{u}_i + \hat{V}_i a_i;$$

9) записати y_i у вигляді:

$$y_i = \hat{Y}_i a_i + X_i b_i + \hat{w}_i.$$

Примітка 2. Зазначимо, що у рівнянні, яке ми одержали у п. 8, у правій частині знаходяться тільки напередвизначені змінні, оскільки матриця X_i містить тільки напередвизначені змінні, а елементи матриці $\hat{Y}_i$ «напередвизначені» (п. 5). При цьому значенні регресії $\hat{Y}_i$ уже не корелюють із залишками $\hat{w}_i$. Таким чином, (п. 8) – це рівняння множинної регресії, для якої виконується передумова $M(x,u) = 0$. Тому невідомі параметри регресії a_i і b_i можуть бути оцінені за допомогою відомого нам МНК. При цьому потрібно враховувати, що залишки $\hat{w}_i$ (у п. 8) вже не є залишками i-го структурного рівняння.

Дворазове застосування МНК можливо представити у вигляді однієї формули. Для цього створюють систему нормальних рівнянь для п. 8.

I) покласти

$$Z_i = \left(\hat{Y}_i X_i\right); \qquad (**)$$

II) покласти

$$d_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}; \qquad (***)$$

III) записати рівняння $y_i = \hat{Y}_i a_i + X_i b_i + \hat{w}_i$ у вигляді

$$y_i = Z_i d_i + \hat{w}_i;$$

IV) отримати систему нормальних рівнянь (із урахуванням того, що $X'Xb = X'y$):

$$Z_i^{'} Z_i d_i = Z_i^{'} y_i;$$

V) із урахуванням (**) і (***) записати

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_i^{'}\hat{Y}_i & \hat{Y}_i^{'}X_i \\ X_i^{'}\hat{Y}_i & X_i^{'}X_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_i^{'} y_i \\ \hat{X}_i^{'} y_i \end{pmatrix};$$

VI) із урахуванням того, що

$$Y_i = \hat{Y}_i + V_i;\ \ \hat{Y}_i V_i = 0;\ \ X_i V_i = 0;$$
$$\hat{Y}_i^{'}\hat{Y}_i = \hat{Y}_i^{'}\left(Y_i - V_i\right) = \hat{Y}_i^{'} Y_i = \hat{Y}_i^{'} X\left(X'X\right)^{-1} X'Y_i;$$
$$\hat{Y}_i^{'} X = \left(Y_i - V_i\right)' X_i = \hat{Y}_i^{'} X_i;$$
$$X_i \hat{Y}_i^{'} = X_i^{'}\left(Y_i - V_i\right) = X_i^{'} Y_i$$

записати рівняння для обчислення його оцінок

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i^{'} X\left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'}Y_i & Y_i^{'}X_i \\ X_i^{'}Y_i & X_i^{'}X_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_i^{'} X\left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'} y_i \\ X_i^{'} y_i \end{pmatrix};$$

VII) наприкінці обчислити праву частину останнього виразу (результат застосування двокрокового МНК до *i*-го структурного рівняння) та записати рівняння регресії з урахуванням отриманих оцінок a_i і b_i.

Примітка 3. Знаходження статистичних характеристик моделі:

а) дисперсія залишків *i*-го рівняння: $\sigma_{u_i}^2 = \dfrac{\hat{u}_i'\hat{u}_i}{T - n_i}$ ($n_i = r_i + k_i + 1$);

б) асимптотична коваріаційна матриця для кожного рівняння моделі:

$$\Sigma_{\hat{d}_1} = asy\,\mathrm{var}\begin{pmatrix}\hat{a}_i\\ \hat{b}_i\end{pmatrix} = \sigma_{u_i}^2\left(\hat{Z}_i'\hat{Z}_i\right)^{-1} = \sigma_{u_1}^2\begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X_i\\ X_i'Y_i & X_i'X_i\end{pmatrix}^{-1};$$

в) коефіцієнт детермінації (який може бути і від'ємним, якщо чисельник більший за знаменник):

$$R_i^2 = 1 - \frac{\hat{u}_i'\hat{u}_i}{\sum(y_{ti} - \overline{y_i})^2} \le 1;$$

г) стандартна помилка:

$$S_i = \sqrt{\sigma_{u_i}^2\left(\hat{Z}_i'\hat{Z}_i\right)^{-1}};$$

д) довірчі інтервали:

$$\left(\hat{a}_i - t_{\alpha/2,k}\cdot S_i;\ \hat{a}_i + t_{\alpha/2,k}\cdot S_i\right),$$

$$\left(\hat{b}_i - t_{\alpha/2,k}\cdot S_i;\ \hat{b}_i + t_{\alpha/2,k}\cdot S_i\right).$$

Додаток 10

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ГОЛОВНИХ КОМПОНЕНТІВ ДЛЯ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ

(для оцінювання моделі, яка має велику вимірність, або фактори, які входять до цієї моделі, мультиколінеарні й іншими відомими засобами позбавитись її неможливо) [30]

Алгоритм включає дев'ять кроків:

1-й крок:

нормалізувати змінні x_1, x_2, ... x_m регресійної моделі, для цього обчислити

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sigma_{xj}},$$

де n – кількість спостережень, (i = 1, n);
m – кількість пояснюючих змінних у моделі, (j = 1, m);
$\overline{x}_j$ – середня арифметична j-ї незалежної змінної;
σ_{xj} – середньоквадратичне відхилення j-ї незалежної змінної;

2-й крок:

побудувати нову матрицю ***X**** – матрицю, елементами якої є нормалізовані незалежні змінні;

3-й крок:

обчислити кореляційну матрицю (матрицю моментів нормалізованої системи нормальних рівнянь) за формулою

$$r = \frac{1}{n}\left(X^{*tr} \; X^{*} \right),$$

де X^{*tr} – транспонована матриця до матриці X*:

$$R = X^{*tr}\ X^{*} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(елемент матриці R характеризує тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою $\left(r_{ij} = r_{x_i x_j}\right)$ – парні коефіцієнти кореляції;

4-й крок:

знайти характеристичні числа матриці r з рівняння:

$$|r - \lambda E| = 0,$$

де E – одинична матриця вимірності $m \times m$;

λ – характеристичні числа;

5-й крок:

ранжувати власні значення λ_i, $i=1,2,...,m$ за абсолютним рівнем вкладу кожного головного компонента до загальної дисперсії;

6-й крок:

розв'язати систему рівнянь:

$$|R - \lambda E|\vec{a} = 0$$

та обчислити власні вектори a_i $i=1,2,...,m$ за умови, що вони відповідають таким співвідношенням

$$a_i' a_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j; \end{cases}$$

7-й крок:
знайти головні компоненти – векторів

$$z_i = xa_i,\ i=1,2,...,m,$$

які задовольняють умові

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 0,$$

$$\frac{1}{n} z_i' z_i = \lambda_i,\ \ i = 1,2,...,m,$$

$$z_i' z_j = 0,\ \ i \neq j\ , j=1,2,...,m;$$

8-й крок:
визначити параметри моделі $\widehat{Y} = Z\widehat{P}$:

$$\widehat{P} = Z^{-1}Y\ ;$$

9-й крок:
знайти параметри моделі $\widehat{Y} = XB$:

$$B = \vec{a}\widehat{P}\ .$$

Додаток 11

АЛГОРИТМ НАБЛИЖЕНОГО ПОШУКУ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ, ЯКІ МІНІМІЗУЮТЬ СУМУ КВАДРАТІВ

(альтернативний підхід до використання ітеративного методу Кочрена–Оркатта [30])

1-й крок. Прийняти гіпотезу про r_1 та мінімізувати на основі 1-МНК вираз

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_0^{(1)}x_i\right)^2.$$

Отже, так само обчислюються параметри для моделі

$$y_t = a_0 + a_1x_t + u_t,\ t = 1,2,...,n;$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t.\ |\rho| < 1;$$

2-й крок. Знайти залишки і на основі критерію Дарбіна–Уотсона перевірити нульову гіпотезу стосовно автокореляції залишків. Якщо гіпотеза відхиляється, то перейти до кроку 3;

3-й крок. Мінімізувати суму квадратів відхилень

$$\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n}\left[\left(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)}x_t\right) - r\left(y_{t-1} - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)}x_{t-1}\right)\right]^2,$$

де $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$ – оцінки параметрів, знайдені на першому кроці 1-МНК. У результаті параметр r_2 визначається як коефіцієнт регресії залишків, знайдених 1-МНК, на їх лагові змінні, які стосуються минулого періоду;

4-й крок. Використовуючи значення оцінки параметра r_2, визначити оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$ на основі 1-МНК, який застосовується до перетворених даних $(y_t - r_2 y_{t-1})$ і $(x_t - r_2 x_{t-1})$;

5-й крок. Визначити залишки і перевірити на наявність автокореляції. Якщо гіпотеза про наявність автокореляції відхиляється, то ітеративний процес припиняється. Інакше перейти до кроку 3, де використовувати знайдені оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Коли ітеративний процес припиняється, то виконується перевірка значущості параметрів за допомогою останньої моделі. У такому разі звичайні формули дадуть обґрунтовані оцінки дисперсії залишків.

Додаток 12

ПРОБЛЕМИ, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З ПРИЙНЯТТЯМ НАУКОВО ОБҐРУНТОВАНИХ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ ЩОДО УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Проблема прийняття рішень, або проблема вибору альтернатив – це найбільш різноманітний і розповсюджений клас задач, з якими стикаються кожного дня керівники різних рангів. Довільні ситуації, які потребують прийняття рішень, містять, як правило, велику кількість невизначеностей, які умовно можна поділити на три класи:

1) невизначеності природи – фактори, які нам просто невідомі;

2) невизначеність протидіючої сторони (процесу);

3) невизначеність бажань особи, яка приймає рішення.

Задачі, в яких враховуються такі невизначеності, неможливо звести до точно поставлених математичних задач – можна сформулювати лише гіпотези. Але формулювання гіпотез – це прерогатива змістовного аналізу, це – формалізація неформальних ситуацій. Саме тому необхідні експерти. Після того, як гіпотезу сформульовано, без використання математичних методів обійтись неможливо.

Наприклад, італійський вчений-економіст В. Парето у 1904 р. сформулював важливий методологічний принцип у галузі теорії прийняття рішень, названий на його честь «принцип Парето». Згідно з ним можливі вирішення багатокритеріальних задач необхідно шукати лише серед неполіпшуваних альтернатив (створюючих так звану «множину Парето»), тобто альтернатив, поліпшення яких за одним критерієм призводить до їх погіршення за іншими критеріями. Цей принцип дає змогу, по-перше, скоротити множину альтернативних рішень, по-друге, він демонструє ті витрати, яких може зазнати оперуюча сторона за тими чи іншими

показниками, намагаючись поліпшити якийсь певний показник.

Вдала праця з множиною Парето дає змогу зробити наочною більшість особливостей багатокритеріальної задачі, що вирішується. Наприклад, з позицій концепції Парето, ефективне розподілення суспільних благ припускає, що надалі не може бути прийнято жодного кроку, який поліпшить економічну ситуацію. Рівень державного втручання для збереження ефективності за Парето залежить від низки факторів. І справді, мета однієї з фундаментальних теорем економічної теорії добробуту полягає в окресленні кола ситуацій, за яких Парето-ефективність досягається за допомогою конкурентної економіки.

Ця теорема є основою для характеристики обставин, за яких дії влади будуть одностайно підтримані. Більше того, можуть бути наведені доводи на користь Парето – «поліпшуючого» перерозподілу, який ґрунтується на взаємозв'язках функцій корисності вздовж ліній моделі Хокмана та Роджерса в її варіанті, де перерозподіл не обов'язково буде добровільним.

У розв'язанні проблем прийняття рішень у випадку нечіткої вихідної інформації перспективним підходом може виявитися вибір рішень на основі використання нечіткого опису, запропонованого Л. Заде. Це пов'язано з тим, що дуже важливе місце у проблемах прийняття рішень посідає аналіз ситуацій, в яких визначаючими є не кількісні, а якісні характеристики (наприклад, банк може бути охарактеризовано як «поганий», «не дуже стійкий», «дуже добрий», «дуже поганий» і т. д.). У цьому випадку будується також деяка гіпотеза, як і в інших методах, тільки тепер вона формулюється у термінах «суб'єктивної» належності, та результат також отримується у нечіткій формі – формі функції належності деякій множині. Тому, подібно до принципу Парето або до принципу максимального гарантованого результату, техніка Л. Заде дає можливість стиснути множину можливих альтернатив.

Після того, як отримано множину різних альтернативних рішень, виникає проблема вибору з цієї множини обмеженої кількості рішень або тільки одного. Залежно від того, якими засобами прийняття рішень володіє особа, яка приймає рішення, її дія буде тією або іншою мірою правильною або ні, наближеною до правильної чи, навпаки, може призвести до непередбачуваних результатів.

Розглянемо основні методи та принципи прийняття рішень, які використовуються для прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень у різних сферах економіки[14].

1. **Організаційне рішення** – вибір, який повинен зробити керівник, щоб виконати обов'язки, обумовлені посадою, яку він обіймає. Мета – забезпечити просування до поставлених цілей.

2. **Запрограмоване рішення** – результат реалізації певної послідовності кроків або дій, відомих заздалегідь.

3. **Програмоване рішення** – рішення, за яким вибір альтернативних рішень є обмежений та повинен бути зроблений у межах напрямів, заданих організацією.

4. **Незапрограмоване рішення –** рішення, де виникають ситуації, які певною мірою є новими, внутрішньо не структурованими або сполученими з невідомими факторами.

5. **Компроміс** – рішення, що задовольняє всіх учасників, які зацікавлені у прийнятті такого рішення, яке задовольняє кожного з них.

Підходи до прийняття рішень:

1) *інтуїтивні рішення* – рішення, які не мають явного зв'язку;

2) *рішення, які базуються на міркуваннях* – це вибір, що обумовлений знаннями або накопиченим досвідом особи, яка приймає рішення;

3) *раціональні рішення* – не залежать від минулого досвіду й обґрунтовуються за допомогою об'єктивного аналітичного процесу.

[14] Мескон М.Х. Основы менеджмента / М.Х. Мескон, М. Альберт, Ф. Хедоури : пер. с англ. – М. : Дело, 1992. – 702 с

Етапи вироблення раціонального розв'язання проблеми:

1) діагностика проблеми;

2) формулювання обмежень та критеріїв прийняття рішень;

3) визначення альтернатив;

4) оцінка альтернатив;

5) вибір альтернатив: реалізація; зворотний зв'язок.

Фактори, що впливають на процес прийняття рішень:

1) особисті оцінки керівника;

2) середовище прийняття рішень: визначеність; невизначеність; ризик; час та середовище, що змінюються;

3) інформаційні обмеження;

4) поведінкові обмеження;

5) негативні наслідки;

6) взаємозалежність рішень.

На сьогодні розроблено доволі багато різних методів, які присвячені питанням прийняття рішень. Прийняття рішень – це доволі складне та трудомістке завдання. Люди можуть відрізнятися у рекомендаціях щодо прийняття того чи іншого рішення, оскільки у них різні цілі або вони мають відмінні погляди на те, як економістам потрібно обговорювати питання у фінансово-кредитній сфері. Разом з тим можна аналізувати визначення природи цілей та їх взаємовідносин із запропонованими напрямами економічної політики з цих питань. Насправді: 1) багато феноменологічно викладених цілей нечітко визначені, щоб їх можна було змістовно застосовувати. У цьому випадку важливим стає чітке уточнення того, що буде далі;

2) деякі цілі у різних сферах економіки «висуваються» тому, що вважається, що їх досягнення допоможе забезпечити вирішення більш фундаментальної задачі. Насправді, вони є проміжними задачами. У цьому випадку аналіз може допомогти прояснити взаємозв'язок із дійсною, фундаментальною ціллю;

3) існують цілі, природу яких неможливо оцінити без повного виявлення їх наслідків. Способом аналізу наслідків (інколи у гіпотетичній ситуації) можна допомогти оцінити те, якою мірою вони, вірогідніше за все, дадуть можливість прийняти те чи інше правильне, науково обґрунтоване рішення. Якщо виявиться, що деякий окремий принцип послідовно призводить до неприйнятних висновків, то це може зумовити перегляд цілей.

Наприклад, теорія державного фінансування, що розроблена західними економістами, останніми роками виявилася важливим «випробувальним полігоном» для перевірки принципів економічної справедливості. Підтвердженням цього є проведені дослідження застосування роулсіанського принципу відмінності щодо питань податкової політики, які дали змогу прояснити природу цього принципу та ступінь його застосування за основу політики перерозподілу[15]. Це також може бути застосовано для опису утилітарної цілі у раціональних категоріях. Конфронтація цих принципів із суперечливостями конкретної фінансової політики прояснила, наприклад, їх взаємозв'язок із егалітаризмом. Аналогічно було висвітлено стан вертикальної та горизонтальної справедливості.

[15] Аткинсон Э.Б. Лекции по экономической теории государственного сектора / Э.Б. Аткинсон, Дж.Э. Стиглиц. – М. : Аспект Пресс, 1995. – 832 с.

Додаток 13

ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ УКР-1

(модель для розрахунку зведених показників розвитку народного господарства України[16])

Ця модель дає можливість розраховувати 15 макроекономічних показників і має такий вигляд (збережені авторські позначення):

$$
\begin{cases}
V_t = \alpha_0 + \alpha_1 A_t + \alpha_2 K_t + E_{Vt} \\
K_t = K_{t-1} + \chi \Delta K_t + E_{Kt} \\
P_t = \beta_0 + \beta_1 V_t + E_{Pt} \\
Y_t = V_t - P_t + E_{Yt} \\
Y_t^1 = \dfrac{Y_t}{1 + \Psi_0 e^{-\Psi_1 t}} + E_{Y_t^1} \\
C_t = Y_t^1 - S_t + E_{Ct} \\
S_t = \upsilon_0 + \upsilon_1 Y_t^1 + E_{St} \\
I_t = \lambda_0 + \lambda_1 S_t + \lambda_2 D_t + E_{It} \\
D_t = \mu_0 + \mu_1 K_t + E_{Dt} \\
\Delta K_t = \eta_0 + \eta_1 I_t + \mu_2 I_{t-1} - \mu_3 I_{t-2} + E_{\Delta Kt} \\
L_t = \chi_0 + \chi_1 \sqrt{t + \chi_2} + E_{Lt} \\
A_t = \phi_0 + \phi_1 L_t + E_{At} \\
\dfrac{B_t}{L_t} = \delta_0 + \delta_1 \dfrac{C_t}{L_t} + E_{\frac{Bt}{Lt}} \\
\dfrac{N_t}{M_t} = \Theta_0 + \Theta_1 \dfrac{Y_t^1}{L_t} + E_{\frac{Nt}{Mt}}
\end{cases},
$$

[16] Емельянов А.С. Общественное производство: Динамика, тенденции, модели / А.С. Емельянов. – Київ : Наук. думка, 1980. – С. 347–409.

де параметри структурних рівнянь і тотожностей:

$\alpha_0, \beta_0, \psi_0, \nu_0, \lambda_0, \mu_0, \chi_0, \varphi_0, \delta_0, \Theta_0$ – умовно-постійні частини залежних змінних;

$\alpha_1, \alpha_2, \chi, \beta_1, \psi_1, \nu_1, \lambda_1, \lambda_2 \mu_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \chi_1, \chi_2, \varphi_1, \delta_1, \Theta_1$ – коефіцієнти структурних рівнянь;

$E_{Vt}, E_{Kt}, E_{Pt}, E_{Yt}, E_{Y_t^1}, E_{Ct}, E_{St}, E_{It}, E_{Dt}, E_{\Delta Kt}, E_{Lt}, E_{At}, E_{\frac{Bt}{Lt}}, E_{\frac{Nt}{Mt}}$ – збурення;

V_t – сукупний суспільний продукт;

P_t – матеріальні витрати;

Y_t – вироблений національний дохід;

Y_t^1 – національний дохід УРСР;

S_t – фонд нагромадження;

C_t – фонд споживання;

$K_{t\text{-}1}, K_t$ – середньорічний обсяг основних виробничих фондів у $(t-1)$-му і t-му роках;

$I_{t\ 2}, I_{t\ 1}, I_t$ – обсяги капіталовкладень на побудову об'єктів виробничого призначення у відповідні роки;

D_t – обсяг амортизаційних відрахувань, які пов'язані з основними виробничими фондами;

L_t – загальна чисельність населення;

A_t – чисельність робітників і службовців, які зайняті у галузях матеріального виробництва;

M_t – чисельність міського населення;

B_t – обсяг споживання матеріальних благ та послуг;

N_t – житловий фонд у містах.

Додаток 14

КОРОТКИЙ ОГЛЯД ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ І ВИЗНАЧНИКІВ [17]

1. МАТРИЦІ

1.1. Види матриць

1.1.1. Матрицею A розміром (порядку) $n \times m$ називається сукупність $n \times m$ упорядкованих дійсних чисел a_{ij} (елементів матриці), $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$, розміщених у вигляді таблиці, яка складається із n рядків і m стовпців, тобто

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}}.$$

1.1.2. Якщо $n = 1$, то одержимо матрицю-рядок (вектор-рядок) – матрицю розмірності $1 \times m$ $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$.

1.1.3. Якщо $m = 1$, то одержимо матрицю-стовпець (вектор-стовпець) – матрицю розмірності $n \times 1$

$$B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1.1.4. Квадратною називається матриця, якщо $n = m$.
Типи квадратних матриць:
а) діагональна

$$D_{n\times n} = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix};$$

б) одинична

$$E_n = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n=m};$$

в) верхня трикутна ($n = m$)

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nm} \end{pmatrix};$$

г) нижня трикутна ($n = m$)

$$B_{n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{pmatrix};$$

1.1.5. Симетрична матриця – квадратна матриця, елементи якої симетричні відносно головної діагоналі $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ і рівні між собою, тобто $\forall (i,j=1,2,...,n,\ a_{ij}=a_{ji})$.

1.1.6. Нульова матриця – матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю

$$O_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.7. Блокова матриця – матриця, елементами якої є матриці (блоки) меншої розмірності

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & ... & a_{1p} & a_{1p+1} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & ... & a_{2p} & a_{2p+1} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kp} & a_{kp+1} & ... & a_{km} \\ --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ a_{k+11} & ... & a_{k+1p} & a_{k+1p+1} & ... & a_{k+1m} \\ a_{k+21} & ... & a_{k+2p} & a_{k+2p+1} & ... & a_{k+2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{np} & a_{np+1} & ... & a_{nm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ -- & -- \\ M & N \end{array}\right)$$

1.2. Операції над матрицями

1.2.1. Дві матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ і $B = \left(b_{ij}\right)$ рівні, якщо вони однієї розмірності та елементи, які стоять на одних місцях, рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$.

1.2.2. Сума матриць A і B визначена, якщо число рядків і стовпців матриці A дорівнює числу рядків і стовпців матриці B (матриці A і B погоджені за операцією суми):

$$C = (c_{ij}) = A_{n\times m} + B_{n\times m} = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2m}+b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Добуток матриці на число:

$$C = \lambda \times A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \left(c_{ij}\right) = \left(\lambda a_{ij}\right).$$

1.2.4. Властивості лінійних операцій:

а) $A + B = B + A$ (комутативність, перестановка);
б) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативність, сполучність);

в) $A + O = A$;
г) $A + (-1)A = O$;
д) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
е) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
є) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$;
ж) $A \cdot E = E \cdot A = A$,
з) A, B, C, O – матриці однакової розмірності; $\lambda, \mu \in R$.

1.2.5. Добутком матриці-рядка розміру $1 \times n$ на матрицю-стовпець розміру $n \times 1$ називається число, яке дорівнює сумі добутків елементів A і B із однаковими номерами, тобто

$$A \cdot B = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 a_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n ..$$

1.2.6. Добутком матриці $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$ на матрицю $B = (b_{jk})_{m \times p}$, $j = 1,2,...,m$, $k = 1,2,...,p$ називається матриця $C = AB$, де $C = (c_{ik})_{n \times p}$, $i = 1,2,...,n$, $k = 1,2,...,p$ і

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{ik} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}.$$

Добуток матриць AB визначений, якщо число стовпців A дорівнює числу рядків матриці B (матриці A і B погоджені за операцією множення).

1.2.7. Властивості операції множення погоджених матриць A, B, C, D, E, O:

а) $AB \neq BA$ (некомутативність у загальному випадку);
б) $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивність, розподільність);

в) $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивність, розподільність);
г) $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність, сполучність);
д) $AO = O$;
е) $OB = O$;
є) $AE = EA = A$.

1.2.8. Степені матриць.
Для квадратної матриці $\boldsymbol{A}$:

а) $A^n = A \times A \times ... \times A$ (n-разів);
б) $A^0 = E$, якщо A – невироджена;
в) $A^p \times A^q = A^{p+q}$;
г) $(A^p)^q = A^{pq}$.

1.2.9. Транспонування – операція перетворення матриці A розмірності $n \times m$ на матрицю A' (A^{tr}, A^T) розмірності $m \times n$ і полягає у заміні рядків матриці A її стовпцями при збереженні їх нумерації, тобто

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m} \Rightarrow A' = \left(a_{ij}\right)_{m\times n},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...,m.$$

Наприклад, якщо транспонувати вектор-рядок, то одержимо відповідний вектор-стовпець.

Якщо A симетрична матриця, то $A' = A$ ($A^{tr} = A$, $A^T = A$). Для симетричної матриці A виконується таке твердження $A'A = AA'$. Цей добуток також є симетричною матрицею.

1.2.10. Властивості операції транспонування:

а) $(\lambda A)' = \lambda A'$, $\lambda \in R$;
б) $(A + B)' = A' + B'$;
в) $(A')' = A$;
г) $(AB)' = B'A'$;
д) якщо A – симетрична, то $A = A'$;
е) $\forall\ A \Rightarrow A'A$ и AA' – симетричні матриці;
є) якщо x – n-вимірний вектор-стовпець розмірністю $n \times 1$, то

$$x'x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2,$$

$$xx' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \times \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & ... & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & ... & x_2x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_nx_1 & x_nx_2 & ... & x_n^2 \end{pmatrix}.$$

1.2.11. Вектори A і B, для яких виконується співвідношення $B'A = O$, $A'B = O$ і $A'A \neq O$, $B'B \neq O$, називаються *взаємно ортогональними*.

1.2.12. Квадратна матриця A, для якої виконується умова $A^2 = A$, називається *ідемпотентною*.

1.2.13. Операції із блоковими матрицями виконуються за тими правилами, що і зі звичайними матрицями, де елементами виступають блоки (під час виконання операцій блоки повинні бути погоджені по розмірностях для відповідних дій):

а) $$\lambda \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \lambda B \\ \hline \lambda C & \lambda D \end{array}\right);$$

б) $$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A+K & B+L \\ \hline C+M & D+N \end{array}\right);$$

в) $\begin{pmatrix} A & | & B \\ -- & + & -- \\ C & | & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & | & L \\ -- & + & -- \\ M & | & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AK+BM & | & AL+BN \\ -- & + & -- \\ CK+DM & | & CL+DN \end{pmatrix}.$

1.2.14. Диференціювання матриць. Визначимо скаляр Y як $Y=A'X$, де A і X являють собою $n \times 1$ вектори. Тоді:

а) вектор часткових похідних відносно X має вигляд

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \left[\frac{\partial Y}{\partial X_1}, \frac{\partial Y}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial Y}{\partial X_n}\right]';$$

б) якщо Y стала при всіх значеннях X, то $\frac{\partial Y}{\partial X} = O$, де O є $(n \times 1)$-вектор;

в) якщо Y не стала при всіх значеннях X, то $\frac{\partial Y}{\partial X} = A$;

г) вектор часткових похідних квадратичної форми $z = X'AX$ задається як $\frac{\partial z}{\partial X} = 2AX$;

д) якщо $A = E$, то $z=X'X$ і $\frac{\partial z}{\partial X} = 2X$.

1.3. Скалярні характеристики матриць

1.3.1. До скалярних характеристик матриць належать: а) *ранг;* б) *слід,* та *визначник (детермінант) матриці* (**2**):

а) *ранг матриці A* (*rgA*) – максимальна кількість лінійно незалежних векторів-стовпців або рядків матриці (ранг стовпців збігається з рангом стовпців). У загальному випадку $rgA \le \min(n,m)$. Якщо $rgA = \min(n,m)$, то говорять, що матриця A має повний ранг. У цьому випадку матриця називається невиродженою (несингулярною). Інакше – виродженою.

Властивості рангу:

– $rgA = rgA'$;
– $rgA'A = rgA'$;
– $rgAB \le \min(rgA, rgB)$;
– нехай A будь-яка матриця, P і Q – будь-які погоджені до матриці A відносно множення квадратні невироджені матриці, тоді $rg(PAQ) = rgA$.

Якщо для двох матриць A і B виконується рівність $rgA = rgB$, то матриці називають еквівалентними (рівносильними);

б) *слід матриці A* порядку n (trA) – це

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Властивості сліду:
– $trA = trA'$;
– $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha trA + \beta trB,\ \alpha, \beta \in R$;
– $trAB = trBA$;
– $tr(AA') = tr(A'A) = trA^2$ (A – симетрична матриця);
– $trE_n = n$.

2. ВИЗНАЧНИК (ДЕТЕРМІНАНТ) МАТРИЦІ

2.1. Визначником n-го порядку квадратичної матриці A називається число Δ_A ($\det(A)$, $|A|$), яке ставиться їй у відповідність за правилом:

$$\Delta_A \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$

де a_{1k} – елементи першого рядка, M_{1k} – визначники (мінори) порядку $(n-1)$, які отримані із A викреслюванням першого рядка і k-го стовпця ($k = 1,2,...,n$).

2.2. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}, отриманий із вихідного визначника |A| викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Ранг матриці A – це найвища розмірність відмінного від нуля мінора A.

2.3. $\Delta_A = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$.

Властивості визначників

2.4. $\det A = \Delta_A = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$.

2.5. $\det A = \det A'$.

2.6. При перестановці місцями двох стовпців (рядків), визначник змінює знак на протилежний.

2.7. Визначник із двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю.

2.8. Визначник із нульовим рядком (стовпцем) дорівнює нулю.

2.9. Загальний множник будь-якого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{1k} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \lambda a_{2k} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \lambda a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1k} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots a_{2k} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}..$$

2.10.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots(\lambda c_{1k} + \mu d_{1k}) & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots(\lambda c_{2k} + \mu d_{2k}) & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots(\lambda c_{nk} + \mu d_{nk}) & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots c_{1k} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots c_{2k} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots c_{nk} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots d_{1k} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots d_{2k} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots d_{nk} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

2.11. Необхідна та достатня умова рівності нулю визначника – лінійна залежність його стовпців (рядків), тобто, хоча б один із стовпців (рядків) – лінійна комбінація інших стовпців (рядків) цього визначника.

2.12. Величина визначника не зміниться, якщо до будь-якого його стовпця (рядка) додати лінійну комбінацію інших стовпців (рядків) цього визначника (правило перетворення визначника для спрощення обчислень).

2.13.

а) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \begin{cases} \Delta_A, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases};$

б) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \begin{cases} \Delta_A, k = p, \\ 0, k \neq p \end{cases}..$

2.14. $\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$.

2.15. Визначники трикутних матриць:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{11} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nm}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{vmatrix} = b_{11} b_{22} \dots b_{nm} .$$

2.16. Якщо A – квазідіагональна матриця (блокова), яка складається із квадратних матриць A_1, A_2,...,A_n та нульових матриць відповідних розмірностей, то

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_n \end{vmatrix} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_n .$$

3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

3.1. Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою для квадратичної матриці A, якщо $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

3.2. Матриця A називається невиродженою (неособливою, оберненою), якщо для неї існує A^{-1}.

3.3. Матриця A – невироджена тоді та тільки тоді, коли $\det A \neq 0$.

3.4. Алгоритм обчислення (інвертування) A^{-1}:

а) обчислюємо $\det A$ (якщо $\det A \neq 0$, то A^{-1} – існує);

б) обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij} для всіх a_{ij} матриці A і формуємо матриці алгебраїчних доповнень із їх транспонуванням:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

в) обчислюємо A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A';$$

г) перевіряємо правильність обчислень:

$$A^{-1}A = E:$$
$$AA^{-1} = E.$$

3.5. Властивості оберненої матриці:

а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

б) $(A^{-1})^{-1} = A$;

в) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

г) $E^{-1} = E$;

д) $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$;

е) $\det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A = \det E;$

є) якщо

$$D=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix},\ \text{то}\ \ D^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{vmatrix}.$$

3.6. Обернення блокових матриць (формула Фробеніуса). Якщо $\boldsymbol{M}$ – квадратична блокова матриця, яка складається із блоків $\boldsymbol{A, B, C, D}$, тобто

$$M=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ -- & -- \\ C & D \end{array}\right),\ \text{то}$$

а) $$M^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} A^{-1}+BQCA^{-1} & -A^{-1}BQ \\ --------- & ----- \\ QCA^{-1} & Q \end{array}\right),$$

де $Q = (D - CA^{-1}B)^{-1}$;

б) якщо $\exists D^{-1}$, то

$$M^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} R & -RBD^{-1} \\ -------- & ------- \\ -D^{-1}CR & D^{-1}CRBD^{-1} \end{array}\right),$$

де $R = (A - BD^{-1}C)^{-1}$.

3.7. Для невиродженої блоково-діагональної матриці M

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

відповідна до неї обернена матриця має вигляд:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.8. Визначник (детермінант) квадратичної блокової матриці A визначається як

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det\left(D - CA^{-1}B\right) =$$

$$= \det D \cdot \det\left(A - BD^{-1}C\right).$$

3.9. Для блоково-діагональної матриці M

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

відповідний до неї визначник має вигляд

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

4. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ (ВЛАСНІ) КОРЕНІ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

4.1. Характеристичним рівнянням матриці A (для системи рівнянь $AX = \lambda X$ або $(A - E\lambda)X = O$) називається рівняння вигляду

$$\det\left(A - E\lambda\right) = 0.$$

Корені λ_k цього рівняння називають *характеристичними* числами (коренями), або *власними* значеннями матриці A.

4.2. Підставляючи відповідні характеристичні числа λ_k у рівняння $(A - E\lambda_k)X = O$, знайдемо нетривіальний розв'язок цієї системи відносно X. Вектор розв'язків X_k називається характеристичним, або власним вектором матриці A, яка відповідає характеристичному (власному) кореню λ_k.

Характеристичні вектори визначаються з точністю до множення на скаляр, що не завжди зручно. Тому іноді розглядають нормовані характеристичні вектори, саме для яких $X_i'X_i=1$.

4.3. Якщо матриця A симетрична та її власні вектори розміщені у вигляді стовпців матриці X, то добуток матриць $X'AX$ перетворює матрицю A на діагональну матрицю, на головній діагоналі якої знаходяться характеристичні корені λ_k.

5. КРОНЕКЕРІВ (ПРЯМИЙ) ДОБУТОК МАТРИЦЬ

5.1. Нехай матриця A має порядок $m \times n$, а матриця B має порядок $p \times q$. Кронекеровим (прямим) добутком (позначається символом $\otimes$) називається матриця вигляду

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \otimes B_{p\times q} = \begin{vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{vmatrix}_{mp\times nq}.$$

5.2. Якщо матриці A і B квадратні, невироджені та мають один і той самий розмір, то виконується така властивість для кронекерового добутку відносно оберненої для нього матриці:

$$\left(A \otimes B\right)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Додаток 15

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ВЕКТОРИ [30]

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.1. Систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь, де $a_{ij},\ b_i\ \left(i = \overline{1,\ m},\ \ j = \overline{1,\ n}\right)$ – коефіцієнти при змінних і вільні члени, які є відомими числами; $x_i\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ – невідомі. Скорочений запис:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ \ i = \overline{1,m}.$$

1.2. Розв'язком системи називають сукупність чисел $x_i = k_i,\ i = \overline{1,n},$ при підстановці яких у систему рівнянь замість відповідно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кожне рівняння перетворюється на правильну рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i,\ \ i = \overline{1,m}.$$

1.3. Кожній системі рівнянь відповідають такі матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де матрицю A називають матрицею системи, B-матрицею-стовпцем системи, а X – матрицею-стовпцем невідомих. Якщо до A приєднати матрицю-стовпець B, то одержану матриця $\left(A\middle|B\right)$ називають розширеною.

1.4. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у матричній формі:

$$AX=B.$$

1.5. Система лінійних алгебраїчних рівнянь може не мати розв'язків (тоді її називають несумісною), може мати лише один розв'язок, або багато розв'язків (тоді її називають сумісною).

Питання про сумісність системи рівнянь розглядається в теоремі Кронекера-Капеллі.

1.6. Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці $r\left(A\right)=r\left(A\middle|B\right)$.

Для сумісних систем справедливі твердження.

1. Якщо ранг матриці сумісної системи збігається з кількістю невідомих $\left(r\left(A\right)=n\right)$, то система рівнянь має єдиний розв'язок.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менший за кількість невідомих $\left(r\left(A\right)<n\right)$, то система рівнянь має безліч розв'язків. При цьому r змінних $x_1, x_2, \ldots, x_r$ називаються основними (або базисними), якщо визначник матриці з коефіцієнтів при них (базисний мінор) відмінний від нуля. Решта $n-r$ змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ називаються неосновними (або вільними).

1.7. Система лінійних рівнянь, у якої кількість невідомих однакова $(m=n)$ має єдиний розв'язок, тоді і тільки тоді, коли її матриця невироджа ($\left|A\neq 0\right|$).

1.8. Основні методи розв'язування системи рівнянь.

1.8.1. Метод оберненої матриці

Якщо матриця системи невироджена, то її розв'язок задається формулою

$$A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B..$$

1.8.2. Формули Крамера

Позначимо $\Delta=\left|A\right|$ – основний визначник системи. Обчислимо допоміжні визначники Δ_j, які відповідають матрицям, одержаним заміною *j*-го стовпця даної матриці на стовпець B. Тоді розв'язок системи рівнянь можна представити рівностями:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\ j=\overline{1,n}\,.$$

1.8.3. Метод Гауса

Метод Гауса є найбільш поширеним методом розв'язування та дослідження системи лінійних рівнянь. Це метод послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень розширена матриця системи приводиться

до сходинкового (трикутного) вигляду (прямий хід методу Гауса):

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1r} & a_{1r+1} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2r}^{(1)} & a_{2r+1}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & ... & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_{r+1}^{(r-1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_m^{(r-1)} \end{array}\right),$$

якій відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2r+1}^{(1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r+1r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + ... + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases}$$

Якщо хоча б одне із чисел $b_{r+1}^{(r-1)},...,b_m^{(r-1)}$ відмінне від нуля, то система рівнянь буде несумісною. У противному разі (якщо $b_{r+1}^{(r-1)} = ... = b_m^{(r-1)} = 0$), то система буде сумісною.

Якщо $r = n$, то матриця системи трикутна. Останнє рівняння буде містити лише одну невідому x_n. Знайшовши її та вилучивши з усіх попередніх із передостаннього рівняння, знаходимо невідому x_{n-1} і т.д. І нарешті, із першого рівняння знаходимо x_1.

Якщо $r < n$, то кількість рівнянь менша за кількість невідомих. Перші r змінних $x_1, x_2, ..., x_r$, що називають основними (або базисними), будуть виражатись через решту $n - r$ змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, які називають неосновними (або вільними) за тією самою схемою, що й у першому випадку. З останнього

рівняння виразимо змінну x_r через змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, з передостаннього – змінну x_{r-1} через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ і т.д., а з першого – змінну x_1 через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. У результаті дістаємо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 = c_{10} + c_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{20} + c_{2\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_{r0} + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{r\,n}x_n. \end{cases}$$

2. Вектори

2.1. Означення вектора. Дії над векторами

2.1.1. Вектором називають скінченну упорядковану сукупність елементів.

$$a = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_1 \end{matrix}.$$

Елементи називають координатами. Кількість координат вектора визначає розмірність вектора. По суті вектор є матрицею-стовпцем. Вектор-рядок є транспонований вектор стовпець: $a^T = (a_1, a_2, \ldots a_n)$.

2.1.2. Дії над векторами

2.1.3. Два вектори називають рівними, якщо вони мають одну і ту саму розмірність та відповідні координати у них рівні

$$a = b \Leftrightarrow a_i = b_i, \ i = \overline{1,n}.$$

2.1.4. Щоб додати два вектори однакової розмірності, потрібно додати відповідні їх координати:

$$c = a + b \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i,\ i = \overline{1,n}.$$

2.1.5. Щоб помножити вектор на число, потрібно кожний його елемент помножити на це число:

$$c = \lambda a \Leftrightarrow c_i = \lambda a_i,\ i = \overline{1,n}.$$

2.1.6. Два вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні.

$$a = \lambda b \text{ або } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

2.2. Скалярний добуток. Базис

2.2.1. Скалярним добутком двох векторів a і b називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними (позначають $a^T b$ або (a,b)):

$$a^T b = |a||b|\cos\varphi.$$

2.2.2. Якщо вектори a і b задаються своїми координатами, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:

$$a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

2.2.3. Довжина (модуль, норма) вектора $|a|$ визначається за формулою

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

2.2.4. З двох останніх формул випливає формула для визначення косинуса кута між двома векторами

$$\cos\varphi = \frac{a^T b}{|a||b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}..$$

де φ – кут між векторами a і b.

2.2.5. Властивості скалярного добутку:

1. $a^T b = b^T a.$
2. $\left(\lambda a\right)^T b = a^T \left(\lambda b\right) = \lambda a^T b.$
3. $\left(a + b\right)^T c = a^T c + b^T c.$
4. $a^T a = |a|^2.$
5. $a^T b = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a \perp b.$

2.2.6. Якщо вектор $a = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ утворює кути α, β, γ з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, то косинуси цих кутів називають напрямними і визначають за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

звідки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda = 1.$$

2.2.7. Систему векторів $\left(a_1, a_2, \ldots a_n\right)$ називають лінійно незалежною, якщо рівність

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $k_i = 0$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо ця рівність виконується при хоча б одному значенні $k_j \neq 0$, то систему векторів називають лінійно залежною. У цьому випадку вектор a_j лінійно виражається через інші вектори системи:

$$a_j = \frac{k_1}{k_j} a_1 + \ldots + \frac{k_{j-1}}{k_j} a_{j-1} + \frac{k_{j+1}}{k_j} a_{j+1} + \ldots + \frac{k_n}{k_j} a_n .$$

2.2.8. Два колінеарних вектори a і b лінійно залежні і один із них виражається через інший, наприклад: $b = \lambda a, \lambda \neq 0$. Два неколінеарні вектори лінійно незалежні.

2.2.9. Вектори називають компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельних площинах. Три компланарні вектори a, b і c лінійно залежні, а три некомпланарні – лінійно незалежні.

2.2.10. Базисом системи векторів $a_1, a_2, \ldots a_n$ називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

2.2.11. У просторі V_2 базисом є два неколінеарних вектори e_1 і e_2. Довільний вектор $\bar{a}$, компланарний цим векторам, лінійно виражається через них: $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$, де числа a_1, a_2 називаються координатами вектора $\bar{a}$ в базисі $\bar{e}_1\ \bar{e}_2$.

2.2.12. У просторі V_3 базисом є три некомпланарних вектори e_1, e_2 і e_3. Довільний вектор простору a лінійно виражається через них: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, де числа a_1, a_2 і a_3 називають координатами вектора a в базисі e_1, e_2 і e_3.

2.2.13. Базис називають ортонормованим, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У просторі V_3 їх позначають векторами: *i, j, k,* а на площині V_3 – *i, j*.

2.2.14. Сукупність n векторів однакової розмірності n $a_1=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1})$, $a_2=(a_{12},a_{22},\ldots,a_{n2})$ ... $a_n=(a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{nn})$ лінійно незалежні, якщо визначник, складений з координат цих векторів, відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В іншому випадку вектори лінійно залежні.

2.2.15. Будь-який вектор $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ однозначно розкладається по базису $a_1=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1})$, $a_2=(a_{12},a_{22},\ldots,a_{n2})$ ... $a_n=(a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{nn})$:

$$b=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n.$$

Коефіцієнти розкладання визначають із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n=b_1, \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\ldots+a_{nn}k_n=b_n. \end{cases}$$

2.3. Власні числа. Власні вектори

2.3.1. Власним числом називають число λ, яке задовольняє рівнянню

$$(Ax, x) = \lambda(x, x).$$

Власним вектором називають вектор x, який задовольняє цьому самому рівнянню при конкретному власному числі λ.

2.3.2. Можна одержати іншу рівність для знаходження власного числа:

$$A - \lambda E = 0,$$

яку називають характеристичним рівнянням.

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^3 \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_4 = 0.$$

2.3.3. Знаходження власного числа зведено до знаходження коренів многочлена у цьому випадку третього степеня. У загальному випадку характеристичне рівняння для власних чисел матриці є многочленом степеня n.

2.3.4. Проблема обчислення власних чисел для матриці зводиться до:

а) побудови характеристичного многочлена по елементах матриці;

б) знаходження коренів цього многочлена.

2.3.5. Матриця розмірності $n \times n$ має n власних чисел із врахуванням кратності коренів многочлена та комплексності.

2.3.6. Можна говорити ще так: власні числа – це такі числа, при яких однорідна система рівнянь

$$\left(A \quad \lambda E\right)x = 0$$

має ненульові розв’язки. Для власного вектора вибирається будь-який частинний ненульовий розв’язок. Якщо корінь многочлена кратний, кратності k, то йому відповідає k лінійно незалежних власних векторів.

2.3.7. Сукупність усіх власних векторів матриці є системою лінійно незалежних векторів.

Додаток 16

ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА КІЛЬКОХ ЗМІННИХ [20]

1. Функція однієї змінної

1.1. ***Означення, область визначення, область зміни.***

Нехай маємо множину X елементів x та множину Y елементів y. Якщо кожному значенню $x \in X$ відповідає за деяким правилом або законом f єдине значення $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f(x)$.

1.2. Множину X, в якій визначена функція, називають областю визначення. Якщо ця множина конкретно не вказана, то під областю визначення розуміють ту множину, для кожного елемента якої правило f має зміст. Її ще називають областю допустимих значень аргументу.

1.3. Сукупність усіх тих значень y, які може приймати функція $y=f(x)$ при зміні аргументу x в області визначення X називають областю зміни функції.

1.4. Функцію називають обмеженою зверху на відрізку $[a,b]$, якщо для всіх значень $x\in[a,b]$ існує така константа M, що $f(x) \le M$; обмеженою знизу, якщо $\exists M \in R$, що для $x\in[a,b]$ виконується нерівність $f(x) \ge M$; обмеженою на відрізку $[a,b]$, якщо для всіх значень $x\in[a,b]$ існує така константа $M > 0$, що $|f(x)| \le M$.

1.5. Функцію $y = f(x)$ називають монотонно зростаючою на проміжку (a, b), якщо для довільних $x_1 \in (a, b)$ і $x_2 \in (a, b)$, для яких виконується нерівність $x_1 > x_2$, слідує

нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ і монотонно спадною, якщо для тих самих значень x_1, x_2 слідує нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

1.6. Графіком функції є сукупність усіх точок $(x; y)$, $y = f(x)$ на площині.

1.7. Способи задання функції: 1) аналітичний, 2) табличний, 3) графічний.

1.8. Класифікація функцій. До найпростіших елементарних функцій належать такі:

постійні $y = C = \text{const}$;

степеневі $y = x^{\alpha}$;

показникові $y = a^{x}$;

логарифмічні $y = \log_a x$;

тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}x \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $y = \text{ctg}x \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

обернені тригонометричні $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}\, x$, $y = \text{arcctg}\, x$.

1.9. Функцію називають складною, якщо її аргументом є інша функція $y = f(\varphi(x))$, функцію $y = f(u)$ називають зовнішньою, $u = \varphi(x)$ – внутрішньою. Наприклад: $y = \sin(e^x)$. Тут функція $y = \sin u$ – зовнішня, $u = e^x$ – внутрішня.

1.10. Елементарними функціями називають такі функції, які одержуються із простіших елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій (додавання, віднімання, множення і ділення) та суперпозиції кількох функцій.

1.11. Якщо кожному значенню $y \in Y$ відповідає за деяким правилом або законом g таке єдине значення $x \in X$, що $y = f(x)$, то функцію $x = g(y)$ називають оберненою до $y = f(x)$ і позначають $y = f^{-1}(x)$.

1.12. Обернена функція існує тільки для неперервних і строго монотонних функцій.

1.2. *Похідна функції*

1.2.1. Приростом функції $y = f(x)$ будемо називати різницю

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

де Δx – приріст аргументу x.

1.2.2. Розглянемо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо існує скінченна границя, коли приріст аргументу Δx довільним чином прямує до нуля, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 та позначають так:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1.2.3. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, то її називають диференційованою в цій точці. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою у цьому проміжку.

1.2.4. Геометричний зміст похідної. Із рис. 1 видно, що $\operatorname{tg}\beta\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, де кут β є кутом нахилу січної M. Якщо $\Delta x \to 0$, то точка M прямує до точки M_0, січна NM прямує до дотичної N_0M_0, а відношення приростів функції і аргументу – до похідної функції в точці x_0. Отже похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в тій же точці.

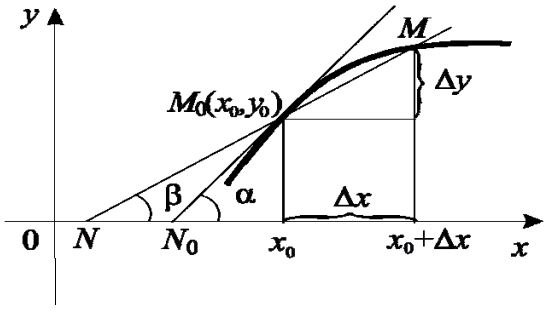


Рис. 1.

1.2.5. Фізичний зміст похідної. Якщо функція $y = f(x)$ визначає шлях, пройдений точкою за час x, то відношення приросту функції до приросту аргументу $\Delta y/\Delta x$ є середньою швидкістю руху точки за час Δx, а при $\Delta x \to 0$ ця швидкість прямує до миттєвої швидкості в точці x_0 –

$$v(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

1.2.6. Економічний зміст похідної. Якщо функції $V(x)$, $D(x)$, $P(x)$ визначають відповідно витрати, дохід та прибуток, а змінна x – об'єм продукції, то відношення приросту цих функцій до приросту аргументу характеризує приріст відповідних функцій на одиницю продукцію. Границя цих відношень при $\Delta x \to 0$ стає маргінальною або граничною. Отже маємо:

маргінальну вартість

$$V'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}.$$

маргінальний дохід

$$D'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x_0 + \Delta x) - D(x_0)}{\Delta x}.$$

маргінальний прибуток

$$P'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x}.$$

1.2.7. Геометричний зміст похідної дає змогу записати рівняння прямої, що визначає дотичну до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку $(x_0;\ f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x\ \ x_0),$$

оскільки $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.

1.2.8. Правила диференціювання.

Нехай $y = f(x)$ та $g = g(x)$ – деякі диференційовані функції. Тоді справедливі такі правила диференціювання:

$$(f \pm g)' = f' \pm g';\ (cf)' = cf';$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2},\ (g \neq 0);$$

1.2.9. Похідна складної функцій. Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$ – складна функція, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

1.2.10. Похідна оберненої функції. Якщо функція $x = g(y)$ є оберненою функцією до $y = f(x)$, тобто $f(g(y)) = y$, то має місце така рівність:

$$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)},\ y_0 = f(x_0).$$

1.2.11. Похідна неявної функції. Якщо функція задана неявно $F(x,y)=0$, то похідну функції $y'(x)$ шукають за формулою:

$$\left[F\left(x,y(x)\right)\right]' = F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\,y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

1.2.12. Ознака монотонності. Якщо $f'(x)>0,\ x\in(a,b)$, то функція $f(x)$ зростає на (a,b). Якщо $f'(x)<0,\ x\in(a,b)$, то функція $f(x)$ спадає на (a,b).

1.2.13. Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $y=f(x)$ досягає екстремуму в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або не існує.

1.2.14. Достатні умови екстремуму. Назвемо точку x_0 критичною для $y=f(x)$, якщо в ній існує похідна та $f'(x_0)=0$.

Перша достатня умова. Функція $y=f(x)$ досягає максимуму в критичній точці, якщо похідна функції змінює свій знак при переході через точку x_0 з «+» на «-», та мінімуму, якщо похідна змінює свій знак з «-» на «+».

Друга достатня умова. Якщо функція двічі диференційована та в критичній точці $f''(x)<0$, то в цій точці функція досягає мінімуму, а якщо $f''(x)>0$, то – максимуму.

2. Функція кількох змінних

2.1. Означення, область визначення.

2.1.1. Сукупність усіх можливих упорядкованих наборів (точок) $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, відстань між якими визначається за формулою

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...+(y_n-x_n)^2}$$

називають *n*-мірним евклідовим простором.

2.1.2. Функцією багатьох дійсних змінних називають закон, який кожній точці $X=\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)$ множини $E\subset R_n$ ставить у відповідність єдине дійсне число *y*. При цьому записують: $y=f(X),\ X\in E,$ або $y=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),$ $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in E$. Множину E називають областю визначення функції багатьох змінних.

Якщо явно не вказано область визначення, то під областю визначення розуміють множину всіх тих точок $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in R_n$, при яких закон має сенс.

2.1.3. Надалі розглядатимемо функції двох змінних.

За традицією, аргументи позначають літерами *x* та *y*, а функцію – літерою *z*: $z=f\left(x,y\right).$

2.1.4. Лінією рівня називають лінію, яка визначається рівністю $f\left(x,y\right)=C,\ C=\text{const},$ тобто лінію, яку одержуємо при перетині графіка функції $z=f\left(x,y\right)$ площиною $Z=C$.

2.2. *Частинні похідні, похідна за напрямком, диференціал.*

2.2.1. Частинною похідною функції $z=f\left(x,y\right)$ по змінній *x* називають границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x;y_0\right)-f\left(x_0;y_0\right)}{\Delta x},$ якщо ця границя існує. Символічно цю похідну позначають одним із способів:

$$f_x^{'}\left(x_0,y_0\right)\ \text{або}\ \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x},\ \text{або}\ z_x^{'}\left(x_{0,}y_0\right). \qquad (4.1)$$

Аналогічно позначається частинна похідна функції $z = f\left(x, y\right)$ по змінній y, як границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0; y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0; y_0\right)}{\Delta y},$$

якщо вона існує, і позначається

$$f_y^{'}\left(x_0, y_0\right) \text{ або } \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}, \text{ або } z_y^{'}\left(x_{0,} y_0\right).$$

2.2.2. Похідна $z_{\bar{l}}^{'}$ за напрямком, що визначається вектором $\bar{l} = \left(l_x, l_y\right)$, виражається через частинні похідні за формулою

$$z_{\bar{e}}^{/} = z_x^{/} \cos\alpha + z_y^{/} \cos\beta, \qquad (4.3)$$

де $\cos\alpha = \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$ і $\cos\beta = \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$ напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

2.2.3. Градієнтом функції $z = f\left(x, y\right)$ називають вектор з координатами $(z_x^{/}; z_y^{/})$ і позначають $\nabla z = \overrightarrow{grad\, z} = (z_x^{/}; z_y^{/})$. Градієнт ∇z функції $z = f(x, y)$ в точці $\left(x_0; y_0\right)$ вказує напрям найшвидшої зміни функції у цій точці.

2.2.4. Диференціалом функції $z = f(x, y)$ називають суму добутків частинних похідних цієї функції на прирости відповідних незалежних змінних.

$$dz = z_x^{/} \Delta x + z_y^{/} \Delta y, \text{ або } dz = z_x^{/} dx + z_y^{/} dy, \qquad (4.4)$$

оскільки $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

2.3. ***Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних у замкнутій області.***

2.3.1. Точку $M_0(x_0;y_0)$ називають точкою локального мінімуму функції $z=f(x,y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх точок $(x;y)$ з цього околу виконується умова $f(x,\,y)>f(x_0,\,y_0)$.

2.3.2. Точку $M_0(x_0;y_0)$ називають точкою локального максимуму функції $z=f(x,y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх точок $(x;y)$ з цього околу виконується умова $f(x,\,y)<f(x_0,\,y_0)$.

2.3.3. Точку, в якій всі частинні похідні перетворюються на нуль, називають стаціонарною або критичною.

2.3.4. Необхідна умова екстремуму. Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – точка екстремуму диференційовної функції $z=f(x;y)$, то в цій точці виконуються умови :

$$f_x^{'}\left(x_0,y_0\right)=0,$$

$$f_y^{'}\left(x_0,y_0\right)=0.$$

2.3.5. Достатня умова екстремуму. Нехай $M_0(x_0;y_0)$ – стаціонарна точка функції $z=f(x;y)$, причому в околі точки M_0 існують неперервні частинні похідні другого порядку цієї функції і

$$f_{xx}^{''}\left(x_0;y_0\right)=A;\;\; f_{xy}^{''}\left(x_0;y_0\right)=f_{yx}^{''}\left(x_0;y_0\right)=B;\;\; f_{yy}^{''}\left(x_0;y_0\right)=C.$$

Тоді, якщо

I. $\Delta=AC-B^2>0$, то функція $z=f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ має екстремум:

а) при $A>0$, M_0 – точка мінімуму,

б) при $A<0$, M_0 – точка максимуму;

II. $\Delta<0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ не є точкою екстремуму функції $z=f(x;y)$;

III. $\Delta=0$, то потрібне додаткове дослідження.

Додаток 17

НАБЛИЖЕНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ [17]

1. *Нормальний розподіл*

1.1. *Інтеграл ймовірностей* $\Phi(x)$ визначається як

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

– представлення $\tilde{\Phi}(x)$ у вигляді суми степеневого ряду для $x \le 4$:

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \sum_{i=0}^{N} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!(2i+1)};$$

– представлення $\tilde{\Phi}(x)$ у вигляді суми степеневого ряду для $x \ge 4$:

$$\tilde{\Phi}(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i-1)!!}{\left(-x^2\right)^i};$$

– обчислення $\tilde{\Phi}(x)$ за формулою:

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi}x^2}};$$

– обчислення $\tilde{\Phi}(x)$ за формулою:

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - \frac{e^{-x^2\left(\frac{2}{\pi}-k\right)}}{1+kx^2}}, \qquad k = 0{,}1523;$$

1.2. *Функція, обернена інтегралу ймовірностей.*

Позначимо $x(z) = z^{-1}$, де $z = \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$;

– обчислення $\tilde{x}(z)$ за формулою

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{-\pi \ln \sqrt{1 - z^2}} ;$$

– обчислення $\tilde{x}(z)$ за формулою

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{-\frac{\pi}{2}} \left[-\ln\left(1 - z^k\right) \right]^{\frac{1}{k}} \qquad k = 1{,}898;$$

– обчислення $\tilde{x}(z)$ за формулою

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{\pi \left\{ \frac{1}{41} \left[-\ln\left(1 - z^4\right) \right]^{3/2} - \ln \sqrt{1 - z^2} \right\}} ;$$

– обчислення $\tilde{x}(z)$ для $z \cong 1$:

$$\tilde{x}(1 - q) = \sqrt{\pi \left\{ \frac{1}{23} \left[-\ln(5q) \right]^{5/4} - \ln \sqrt{2q} \right\}},$$

де $q = 1 - z$ – доповнення z до 1.

2. χ^2-розподіл

2.1. *Щільність ймовірності* χ^2-розподілу визначається зі співвідношення:

$$\varphi_b(x) = \frac{x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (x > 0).$$

2.2. *Інтегральний закон* χ^2-розподілу визначається співвідношенням:

$$F_m(x) = \int_0^x \varphi_m(t)dt = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt;$$

– обчислення $F_m(x)$ для парних m $(m \geq 2)$:

$$F_m(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{i!};$$

– обчислення $F_m(x)$ для непарних m $(m \geq 3)$:

$$F_m(x) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{x^i}{(2i+1)!!},$$

де $\Phi\left(\sqrt{x}\right)$ – інтеграл ймовірності, який наближено може бути представлений у вигляді:

$$\Phi\left(\sqrt{x}\right) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong \sqrt{1 - \frac{e^{-x\left(2/\pi - k\right)}}{1+kx}}, \quad k = 0{,}145.$$

3. *Розподіл Стьюдента*

Розподіл Стьюдента з n степенями вільності визначається як розподіл випадкової величини вигляду

$t_n = \dfrac{z_0}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}}$, де z_i $(i = 0,1,...,n)$ розподілені нормально з $M(z_i) = 0$ і однаковими дисперсіями σ_z^2. При цьому t_n не залежить від величини дисперсії σ_z^2.

3.1. *Щільність ймовірності* розподілу Стьюдента з n степенями вільності для $n \geq 1$ визначається як

$$p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} ..$$

3.2. *Інтегральний закон* розподілу Стьюдента визначається співвідношенням:

$$S_n(t) = \int_{-t}^{t} p_n(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n=1}{2}} dx.$$

Позначивши $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, запишемо $S_n(t)$ у вигляді:

$$S_n(t) = \sin\varphi \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos^{2i}\varphi \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+\frac{1}{2}}{j+1}, \text{ якщо } n \text{ – парне,}$$

$$S_n(t) = \frac{2}{\pi}\left\{\varphi + \operatorname{tg}\varphi \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos^{2i}\varphi \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j}{j+\frac{1}{2}}\right\}, \text{ якщо } n \text{ – непарне.}$$

4. *F-розподіл*

F-розподіл визначається як розподіл відношення двох випадкових величин, що мають χ^2-розподіл відповідно з m і n степенями вільності.

Оскільки сума квадратів нормально розподілених випадкових величин має χ^2-розподіл, то випадкова величина z, що має *F*-розподіл, визначається через нормально розподілені випадкові величини x та y у вигляді:

$$z = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

4.1. *Щільність ймовірності F*-розподілу запишемо із застосуванням бета-функції:

$$p_F\left(m,n,z\right) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} B^{-1}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right) z^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}};$$

4.2. *Інтегральний закон F*-розподілу представлено у вигляді:

$$p_F\left(m,n,z\right) = \int_0^z p_F\left(m,n,x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} B^{-1}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}dx.$$

Наведений інтеграл обчислюється в елементарних функціях, але одержаний у загальному випадку вираз складний.

Нижче наведемо наближені формули обчислення *F(m,n,z)* – для парного *n*, для парного *m* та для випадку, коли *m* і *n* одночасно непарні.

n – парне:

$$F\left(m,n,z\right)=\frac{n}{\left(1+\dfrac{n}{mz}\right)^{m/2}}\left(\prod_{i=1}^{n/2}\frac{m+2i-2}{2i}\right)X_{n/2},$$

де $X_{n/2}$ визначається за допомогою рекурентного співвідношення:

$$X_{n/2}=\frac{2\left(i-1\right)X_{i-1}+\left(1+\dfrac{mz}{n}\right)^{1-i}}{2i+m-2},\quad i=1,2,\ldots,\frac{n}{2};$$

m – парне:

$$F\left(m,n,z\right)=m\left\{\prod_{i=1}^{m/2}\frac{n+2i-2}{2i}\right\}Y_{n/2},$$

де $Y_{m/2}$ визначається за допомогою рекурентного співвідношення:

$$Y_j=\frac{2\left(j-1\right)Y_{j-1}}{2j-m-2}+\frac{1-\cos^{m+n-2}\varphi}{m+n-2j},\quad j=2,3,\ldots,\frac{m}{2};$$

$$Y_1=\frac{1-\cos^{m+n-1}\varphi}{m+n-2},\quad \varphi=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{mz}{n}}}\right);$$

m і n – непарні:

$$F(m,n,z) = A_{m-1,n-1}\frac{2}{\pi}\left[\prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{m+n-2i}{m-2i}\right]\left[\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-2j+1}{n-2j}\right],$$

де $A_{m-1,n-1}$ визначається за допомогою рекурентного співвідношення:

$$A_{i,n-1} = \frac{\sin^{i-1}\varphi\ \cos^{n}\varphi}{n+i-1} + \frac{i-1}{n+i-1}A_{i-2,n-1},\ \ i = 2,4,\ldots,m-1,$$

$A_{0,n-1}$ – за допомогою рекурентного співвідношення:

$$A_{0,j} = \frac{\sin\varphi\ \cos^{j-1}\varphi}{j} + \frac{j-1}{j}A_{0,j-2},\ \ j = 2,4,\ldots,n-1,$$

для $A_{0,0} = \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{mz}{n}}$.

Додаток 18

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ [20]

1. Генеральна і вибіркова сукупності

1.1. Вибіркову сукупність, або просто вибіркою називають сукупність випадково вибраних об'єктів.

1.2. Генеральною сукупністю називають сукупність, яку досліджують, з якої проводиться вибірка. Генеральна сукупність як правило має великий об'єм.

1.3. Об'ємом сукупності називають число об'єктів цієї сукупності.

1.4. Якщо з генеральної сукупності проведена вибірка і величина x_1 спостерігалась n_1 разів, x_2 – n_2 разів, x_k – n_k разів та $\sum n_i = n$ – об'єм вибірки, то значення x_i називають варіантами, відповідні їм числа спостережень n_i – частотами, а їх відношення до об'єму вибірки $W_i = \frac{n_i}{n}$ – відносними частотами. Варіанти, що записані у порядку зростання називають варіаційним рядом.

2. Статистичний розподіл вибірки. Числові характеристики

2.1. Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

2.2. Генеральною середньою величиною $\overline{x}_Г$ називають середнє арифметичне значення ознаки генеральної сукупності. Якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то

$$\overline{x}_{Г} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N}.$$

Якщо значення ознаки генеральної сукупності $x_1, x_2, ..., x_n$ мають відповідні частоти $N_1, N_2, ..., N_k$, де $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то $\overline{x}_{Г} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + ... + N_k x_k}{N}$, тобто генеральна середня є середньозважена величина значень ознаки з відповідними частотами.

2.3. Вибірковою середньою величиною $\overline{x}_{в}$ називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності, яка дорівнює $\overline{x}_{в} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки вибіркової сукупності об'єму n різні, та $\overline{x}_{Г} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n}$, якщо значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки вибіркової сукупності зустрічаються з відповідними частотами $n_1, n_2, ..., n_k$, де $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

2.4. Генеральною дисперсією $D_{Г}$ називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення:

$$D_{Г} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x}_{Г}\right)^2}{N} \text{ або } D_{Г} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(x_i - \overline{x}_{Г}\right)^2}{N}.$$

Генеральним середнім квадратичним відхиленням називають:

$$\sigma_{Г} = \sqrt{D_{Г}}.$$

2.5. Так само вводиться вибіркова дисперсія та вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n} \text{ або } D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n} \text{ та } \sigma_в = \sqrt{D_в}\,.$$

2.6. Властивість дисперсії:

$$D = \overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i x_i}{n}\right)^2.$$

2.7. Груповим середнім значенням називають середнє арифметичне значення ознаки, що належить групі.

Знаючи групові середні та об'єми групи, можна знайти загальне середнє значення, яке дорівнює середньому арифметичному, зваженому за об'ємами груп:

$$\overline{x}_{заг} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + \ldots + n_k\overline{x}_k}{n},$$

де n_i – об'єми i-ї групи, $\overline{x}_i$ – групове середнє i-ї групи, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ – об'єм усіх груп.

2.8. Груповою дисперсією називають дисперсію значень ознаки, що належить групі, відносно групового середнього значення:

$$D_{j\,гр} = \frac{\sum n_i\left(x_i - \overline{x}_j\right)}{N_j},$$

де j – номер групи, n_i – частота значень x_i, $\overline{x}_j$ – групове середнє значення групи j, $N_j = \sum n_i$ – об'єм групи j.

3. Статистичні оцінки параметрів розподілу

3.1. Незміщеною називають оцінку, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру. Зміщеною називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюваному параметру.

3.2. Ефективною називають статистичну оцінку, яка при заданому об'ємі вибірки має найменшу можливу дисперсію.

3.3. Обґрунтованою називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до оцінюваного параметра.

3.4. Вибіркова дисперсія $D_в$ є зміщеною і дає занижені значення для генеральної дисперсії D: $M\left(D_в\right) = \dfrac{n-1}{n} D$.

3.5. Виправленою вибірковою дисперсією називають дисперсію

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x}_i\right)}{n-1}.$$

3.6. Точковими оцінками параметрів розподілу генеральної сукупності називають такі оцінки, які визначаються одним числом.

3.7. Інтервальною оцінкою називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

3.8. Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра θ за θ^* називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$:

$$\gamma = P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right).$$

3.9. Інтервал $(\theta^*-\delta, \theta^*+\delta)$ називають довірчим, якщо він містить у собі невідомий параметр θ із заданою надійністю γ.

3.10. Якщо ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом з відомим середньоквадратичним відхиленням σ, то довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання a за вибірковим середнім значенням $\overline{x}$ із заданою надійністю γ має вигляд:

$$\left(\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

де параметр t шукається із рівності $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, $\Phi(t)$ – функція Лапласа, точність оцінки $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3.11. Якщо ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом з невідомим середньоквадратичним відхиленням σ, то довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання a за вибірковим середнім значенням $\overline{x}$ із заданою надійністю γ має вигляд:

$$\left(\overline{x} - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

де параметр t_γ знаходиться із рівності $F(t) = \frac{\gamma}{2}$, $F(t)$ – функція розподілу Стьюдента, s – виправлене середньоквадратичне відхилення, точність оцінки $\delta = t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}$.

4. Статистична перевірка гіпотез

4.1. Основною (нульовою) називають висунуту гіпотезу і позначають H_0.

4.2. Альтернативною (конкуруючою) називають гіпотезу H_1, яка суперечить основній.

4.3. Похибка першого роду полягає у тому, що буде відхилена правильна гіпотеза.

4.4. Похибка другого роду полягає у тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

4.5. Ймовірність здійснити похибку першого роду позначають α і називають рівнем значущості.

4.6. Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези (критерієм) називають випадкову величину *K*, розподіл якої відомий і **яку застосовують для перевірки основної гіпотези.**

4.7. Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.

4.8. Областю прийняття гіпотези називають множину значень критерію, при яких гіпотезу приймають.

4.9. Критичними точками критерію *K* називають точки $k_{кр}$, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

4.10. Правосторонньою називають критичну область, що визначається нерівністю $K > k_{кр} > 0$.

4.11. Лівосторонньою називають критичну область, що визначається нерівністю $K < k_{кр} < 0$.

4.12. Двосторонньою називають критичну область, що визначається нерівностями $K < k_{кр1} < 0$ та $K > k_{кр2} > 0$. Зокрема,

якщо критичні точки симетричні відносно початку координат $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$, то двостороння критична область визначається нерівностями $|K| > k_{кр} > 0$.

4.13. Щоб знайти однобічну критичну область, потрібно знайти критичну точку $k_{кр}$. Для цього задають достатньо малий рівень значущості α, а потім шукають $k_{кр}$ з рівності $P(K > k_{кр}) = \alpha$ для правосторонньої критичної області; $P(K < k_{кр}) = \alpha$ для лівосторонньої критичної області; $P(K < k_{кр1}) + P(K > k_{кр2}) = \alpha$ для двосторонньої критичної області.

4.14. Потужністю критерію називають ймовірність належності критерію критичній області за умови, що правильна альтернативна гіпотеза.

Якщо рівень значущості α вже обрано, то критичну область доцільно будувати таким чином, щоб потужність критерію була максимальною.

4.15. Алгоритм перевірки статистичних гіпотез.

1. Визначають альтернативну гіпотезу H_1 до основної гіпотези H_0.

2. Обирають статистичну характеристику перевірки.

3. Визначають допустиму ймовірність похибки першого роду, рівень значущості α.

4. За певними таблицями знаходять критичні точки і критичну область для обраної статистичної характеристики.

5. Визначають, чи потрапила обрана характеристика в критичну область. Якщо так, то основну гіпотезу відхиляють. Якщо ні, обрана характеристика потрапила в область прийняття гіпотези та основна гіпотеза приймається.

Додаток 19

ТАБЛИЦЯ СТАНДАРТИЗОВАНОГО НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

A(z)

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5703	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0 6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	06844	0,6879
0,5	06915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	07324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0 8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	08389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0 8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,6849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9533
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
23	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,991 1	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0 9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987									

Джерело: Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти : пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – XIV. – С. 367.

A(z) – це інтеграл щільності ймовірності стандартизованого нормального розподілу від -∞ до *z* (площа під кривою зліва від *z*) і є ймовірність того, що величина нормально розподіленої випадкової змінної не перевищує середнє значення більше, ніж на *z* стандартних відхилень.

Приклад: $p(z \leq 2{,}15)=0{,}9842$; $p(z>2{,}15)=1-(z \leq 2{,}15)=1-0{,}9842=0{,}0158$.

Додаток 20

ТАБЛИЦЯ χ^2 – РОЗПОДІЛУ
[критичні значення χ^2 для рівня значущості α та k степенів вільності]

k	Рівень значущості α, %						
	0,1	**1**	**2,5**	**5**	**9,5**	**97,5**	**99**
1	10,8	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.001	0.0002
2	13,86	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.02
3	16,2	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	18,5	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	20,5	15.1	128	11.1	1.15	0.831	0.554
6	22,5	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	24,3	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.2
8	26,1	20.1	17.5	155	2.73	2.18	1.7
9	27,9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.1
10	29,6	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.6
11	31,3	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.1
12	32,9	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.6
13	34,5	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.1
14	36,1	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.7
15	37,7	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.2
16	39,3	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.8
17	40,8	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.4
18	42,3	34.8	31.5	289	9.39	8.23	7.0
19	43,8	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.6
20	45,3	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.3
21	46,8	38.9	35.5	32.4	11.6	10.3	8.9
22	48,3	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	95
23	49,7	41 6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	51,2	43.0	394	36.4	13.8	12.4	10.9
25	52,6	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	54,1	45.6	41 9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	55,5	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	56,9	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	58,3	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	59,7	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Джерела: Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти : пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – XIV. – С. 371.

Толбатов Ю.А. Економетрика : підруч. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. / Ю.А. Толбатов. – Київ : Четверта хвиля, 1997. – С. 301.

Додаток 21

ТАБЛИЦЯ *t*-РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА [критичні значення $t(\alpha,k)$]

Тести	Рівень значущості α, %							
Двосторонній	**50**	**20**	**10**	**5**	**2**	**1**	**0,2**	**0,1**
Односторонній	**25**	**10**	**5**	**2,5**	**1**	**0,5**	**0,1**	**0,05**
k								
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∝	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Джерела: Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти: пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – XIV. – С. 368.

Лук'яненко І.Г. Економетрика : підручник / І.Г. Лук'яненко, Л.І. Краснікова. – Київ : Знання, КОО, 1998. – С. 484.

Додаток 22

ТАБЛИЦЯ $F(k_1,k_2,\alpha)$ розподілу Фішера для рівня значущості α=0,05 (5%)

	k_1												
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,20	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,,68	4,66
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26
9	5,12	4,26	3,68	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20
23	4,48	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	224	2,20	2,16	2,14
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	1,09
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	212	2,08	2,04	2,00	1,97
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86	1,83
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80
140	3,91	3,06	2,67	2,44	2,28	2,16	2,08	2,01	1,95	1,90	1,86	1,82	1,79

Продовження дод. 22

	k_1												
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
160	3,90	3,05	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,81	1,78
180	3,89	3,05	2,65	2,42	2,26	2,15	2,06	1,99	1,93	1,88	1,84	1,81	1,77
200	3,88	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,77
∝	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72

Таблиця $F(k_1,k_2,\alpha)$ розподілу Фішера для рівня значущості α=0,05 (5%)

k_2	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**	**200**	∝
1	245	246	246	247	247	248	248	250	251	252	253	254	254
2	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66	8,,62	8,60	8,58	8,55	8,54	8,53
4	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80	5,75	5,72	5,70	5,66	5,65	5,63
5	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56	4,50	4,46	4,44	4,41	4,39	4,37
6	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44	3,38	3,34	3,32	3,27	3,25	3,23
8	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15	3,08	3,04	3,02	2,97	2,95	2,93
9	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,70	2,66	2,64	2,59	2,56	2,54
11	2,74	2,72	2,70	2,68	2,67	2,66	2,65	2,57	2,53	2,51	2,46	2,43	2,40
12	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54	2,47	2,43	2,40	2,36	2,32	2,30
13	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46	2,38	2,34	2,31	2,26	2,23	2,21
14	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
15	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33	2,25	2,20	2,18	2,12	2,10	2,07
16	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28	2,19	2,15	2,12	2,07	2,04	2,01
17	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23	2,15	2,10	2,08	2,02	1,99	1,96
18	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19	2,11	2,10	2,08	1,98	1,95	1,92
19	2,26	2,23	2,21	2,00	2,18	2,17	2,16	2,07	2,03	2,00	1,94	1,91	1,88
20	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12	2,04	1,99	1,97	1,91	1,88	1,84
21	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,10	2,01	1,96	1,94	1,88	1,84	1,81
22	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	1,98	1,94	1,91	1,85	1,82	1,78
23	2,15	2,13	2,11	2,09	1,08	2,06	2,05	1,96	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76
24	2,13	2,11	1,09	2,07	2,05	2,04	2,03	1,94	1,89	1,86	1,80	1,77	1,73
25	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,92	1,87	1,84	1,78	1,50	1,71
26	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,00	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,73	1,69
27	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,88	1,84	1,81	1,74	1,71	1,67
28	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96	1,87	1,82	1,79	1,73	1,69	1,65
29	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,85	1,81	1,77	1,71	1,57	1,64
30	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93	1,84	1,79	1,76	1,70	1,66	1,62
40	1,95	1,92	1,90	1,89	1,87	1,85	1,84	1,74	1,69	1,66	1,63	1,60	1,51
50	1,89	1,87	1,85	1,83	1,81	1,80	1,78	1,69	1,63	1,60	1,59	1,55	1,44
60	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75	1,65	1,59	1,56	1,48	1,44	1,39

Продовження дод. 22

k_2	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50	100	200	∝
70	1,84	1,81	1,79	1,77	1,75	1,74	1,72	1,62	1,57	1,53	1,45	1,40	1,35
80	1,82	1,79	1,77	1,75	1,73	1,72	1,70	1,60	1,54	1,51	1,43	1,38	1,32
90	1,80	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,59	1,53	1,49	1,41	1,36	1,30
100	1,79	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,68	1,57	1,52	1,48	1,39	1,34	1,28
120	1,78	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,66	1,55	1,50	1,46	1,37	1,32	1,25
140	1,76	1,74	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,54	1,48	1,44	1,35	1,30	1,23
160	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	1,64	1,53	1,47	1,43	1,34	1,28	1,21
180	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,64	1,63	1,52	1,46	1,42	1,33	1,27	1,20
200	1,74	1,72	1,69	1,67	1,66	1,64	1,62	1,52	1,46	1,41	1,32	1,26	1,19
∝	1,69	1,67	1,64	1,62	1,60	1,59	1,57	1,46	1,39	1,35	1,24	1,17	1,00

ТАБЛИЦЯ $F(k_1,k_2,\alpha)$ розподілу Фішера для рівня значущості α=0,01 (1%)

	k_1												
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6083	6106	6126
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,4	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1	27,0
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,5	14,4	14,3
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89	9,82
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65
11	9,64	7,20	6,21	5,67	5,31	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,39	4,34
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,90
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,12
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	3,02
24	7,82	5,64	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,83	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90

Продовження дод. 22

	k_1												
k_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,87
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,84
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,81
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,62	2,56	2,51
60	7,07	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,44
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45	2,40
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,36
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39	2,33
100	6,88	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,31
120	6,84	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	2,28
140	6,81	4,76	3,92	3,46	3,15	2,93	2,77	2,64	2,54	2,45	2,38	2,31	2,26
160	6,79	4,74	3,90	3,44	3,13	2,92	2,75	2,62	2,52	2,43	2,36	2,30	2,24
180	6,77	4,72	3,89	3,43	3,12	2,90	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,28	2,23
200	6,75	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	2,22
∝	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	2,13

ТАБЛИЦЯ $F(k_1,k_2,\alpha)$ розподілу Фішера для рівня значущості α=0,01 (1%)

	k_1												
k_2	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**	**200**	∝
1	6143	6157	6169	6182	6192	6201	6209	6261	6287	6303	6335	6350	6366
2	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	26,9	26,9	26,8	26,8	26,8	26,7	26,7	26,5	26,4	26,4	26,2	26,2	26,1
4	14,2	14,2	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5	13,5
5	9,77	9,72	9,68	9,64	9,61	9,58	9,55	9,38	9,29	9,24	9,13	9,08	9,02
6	7,60	7,56	7,52	7,48	7,45	7,42	7,40	7,23	7,14	7,09	6,99	6,93	6,88
7	6,36	6,31	6,28	6,24	6,21	6,18	6,16	5,99	5,91	5,86	5,75	5,70	5,65
8	5,56	5,52	5,48	5,44	5,41	5,38	5,36	5,20	5,12	5,07	4,96	4,91	4,86
9	5,01	4,96	4,92	4,89	4,86	4,83	4,81	4,65	4,57	4,52	4,41	4,36	4,31
10	4,60	4,56	4,52	4,49	4,46	4,43	4,41	4,25	4,17	4,12	4,01	3,96	3,91
11	4,29	4,25	4,21	4,18	4,15	4,12	4,10	3,94	3,86	3,81	3,70	3,65	3,60
12	4,05	4,01	3,97	3,94	3,91	3,88	3,86	3,70	3,62	3,57	3,47	3,41	3,36
13	3,86	3,82	3,78	3,74	3,72	3,69	3,66	3,51	3,42	3,37	3,27	3,22	3,17
14	3,70	3,66	3,62	3,59	3,56	3,53	3,51	3,35	3,27	3,22	3,11	3,06	3,00
15	3,56	3,52	3,49	3,45	3,42	3,40	3,37	3,21	3,13	3,08	2,98	2,92	2,87
16	3,45	3,41	3,37	3,34	3,31	3,28	3,26	3,10	3,02	2,97	2,86	2,81	2,75
17	3,35	3,31	3,27	3,24	3,21	3,19	3,16	3,00	2,92	2,87	2,76	2,71	2,65
18	3,27	3,23	3,19	3,16	3,13	3,10	3,08	2,92	2,84	2,78	2,68	2,62	2,57
19	3,19	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,84	2,76	2,71	2,60	2,55	2,49
20	3,13	3,09	3,05	3,02	2,99	2,96	2,94	2,78	2,69	2,64	2,54	2,48	2,42

Закінчення дод. 22

	k_1												
k_2	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**	**200**	∝
21	3,07	3,03	2,99	2,96	2,93	2,90	2,88	2,72	2,64	2,58	2,48	2,42	2,36
22	3,02	2,98	2,94	2,91	2,88	2,85	2,83	2,67	2,58	2,53	2,42	2,36	2,31
23	2,97	2,93	2,89	2,86	2,83	2,80	2,78	2,62	2,54	2,48	2,37	2,32	2,26
24	2,93	2,89	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,58	2,49	2,44	2,33	2,27	2,21
25	2,89	2,85	2,81	2,78	2,75	2,72	2,70	2,54	2,45	2,40	2,29	2,23	2,17
26	2,86	2,81	2,73	2,75	2,72	2,69	2,66	2,60	2,42	2,36	2,25	2,19	2,13
27	2,82	2,78	2,75	2,71	2,68	2,66	2,63	2,47	2,38	2,33	2,22	2,16	2,10
28	2,79	2,75	2,72	2,68	2,65	2,63	2,60	2,44	2,35	2,30	2,19	2,13	2,06
29	2,77	2,73	2,69	2,66	2,63	2,60	2,57	2,41	2,33	2,27	2,16	2,10	2,03
30	2,74	2,70	2,66	2,63	2,60	2,57	2,55	2,39	2,30	2,25	2,13	2,07	2,01
40	2,56	2,52	2,48	2,45	2,42	2,39	2,37	2,20	2,11	2,06	2,02	1,96	1,80
50	2,46	2,42	2,38	2,35	2,32	2,29	2,27	2,10	2,01	1,95	1,94	1,87	1,68
60	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,03	1,94	1,88	1,75	1,68	1,60
70	2,35	2,31	2,27	2,23	2,20	2,18	2,15	1,98	1,89	1,83	1,70	1,62	1,54
80	2,31	2,27	2,23	2,20	2,17	2,14	2,12	1,94	1,85	1,79	1,65	1,58	1,49
90	2,29	2,24	2,21	2,17	2,14	2,11	2,09	1,92	1,82	1,76	1,62	1,55	1,46
100	2,27	2,22	2,19	2,15	2,12	2,08	2,07	1,89	1,80	1,74	1,60	1,52	1,43
120	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,03	1,86	1,76	1,70	1,56	1,48	1,38
140	2,21	2,17	2,13	2,10	2,07	2,04	2,01	1,84	1,74	1,67	1,53	1,45	1,35
160	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	2,02	1,99	1,82	1,72	1,66	1,51	1,42	1,32
180	2,18	2,14	2,10	2,07	2,04	2,01	1,98	1,81	1,71	1,64	1,49	1,41	1,30
200	2,17	2,13	2,09	2,06	2,03	2,00	1,97	1,79	1,69	1,63	1,48	1,39	1,28
∝	2,08	2,04	2,00	1,97	1,93	1,90	1,88	1,70	1,59	1,52	1,36	1,25	1,00

Джерело: Бронштейн И.Н. Справочник по математике: для инженеров и учащихся ВТУЗов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семенов. – М. : Наука, 1981. – С. 82–87.

Додаток 23

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна–Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,05 (5%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
n	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,30	2,59		
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,38	2,41	0,24	2,82
11	0,93	1,32	0,76	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,45	2,39
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,30
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,69	1,96	0,56	2,22
16	1,11	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,73	1,94	0,62	2,16
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,66	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,54	0,93	1,70	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,07	1,54	0,97	1,69	0,96	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,89	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,65	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,23	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,87
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,75	1,00	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,14	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,53	1,35	1,59	1,30	1,65	1,24	1,72	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	I,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,20	1,79
39	1,44	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,37	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,43	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,37	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,53	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,52	1,79	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
65	1,62	1,67	1,60	1,70	1,58	1,72	1,55	1,75	1,53	1,77

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
90	1,64	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,65	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,76	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78
180	1,72	1,75	1,71	1,76	1,69	1,77	1,68	1,79	1,67	1,80
200	1,76	1,78	1,75	1,79	1,74	1,90	1,73	1,81	1,72	1,82

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,05 (5%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=6		m=7		m=8		m=9		m=10	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
11	0,12	2,89								
12	0,16	2,67	0,11	3,06						
13	0,21	2,49	0,14	2,64	0,09	3,18				
14	0,26	2,35	0,18	2,67	0,12	2,96	0,08	3,29		
15	0,30	2,24	0,23	2,53	0,16	2,82	0,11	3,10	0,07	3,37
I6	0,35	2,15	0,27	2,42	0,20	2,68	0,14	2,94	0,09	3,20
17	0,39	2,08	0,31	2,31	0,24	2,57	0,18	2,81	0,13	3,05
18	0,44	2,02	0,37	2,24	0,28	2,47	0,22	2,70	0,16	2,93
19	0,48	1,96	0,40	2,17	0,32	2,36	0,26	2,60	0,20	2,81
20	0,52	1,92	0,44	2,11	0,36	2,31	0,29	2,51	0,23	2,71
21	1,.55	1,88	0,47	2,06	0,40	2,24	0,33	2,43	0,27	2,63
22	1,57	1.85	0,51	2,02	0,44	2,19	0,37	2,37	0,30	2,55
23	1,,62	1.82	0,55	1,98	0,47	2,14	0,40	2,31	0,34	2,48
24	1,65	1,79	0,58	1,94	0,51	2,10	0,44	2,26	0,38	2,42
25	1,68	1,78	0,61	1,92	0,54	2,06	0,47	2,21	0,41	2,37
26	0,71	1,76	0,64	1,89	0,57	2,03	0,51	2,17	0,44	2,31
27	0,74	1,74	0,67	1,87	0,60	2,00	0,54	2,13	0,47	2,27
28	0,76	1,73	0,70	1,85	0,66	1,97	0,57	2,10	0,50	2,23
29	0,79	1,72	0,72	1,83	0,69	1,95	0,60	2,07	0,53	2,19
30	0,81	1,71	0,76	1,82	0,69	1,93	0,62	2,04	0,56	2,16
31	0,83	1,70	0,77	1,80	0,71	1,91	0,65	2,02	0,59	2,13
32	0,86	1,69	0,79	1,78	0,73	1,89	0,67	2,00	0,62	2,10
33	0,88	1,68	0,82	1,78	0,76	1,87	0,70	1,98	0,64	2,00
34	0,90	1,68	0,84	1,77	0,78	1,86	0,72	1,96	0,67	2,06
35	0,91	1,67	0,86	1,76	0,80	1,85	0,74	1,94	0,69	2,04
36	0,.93	1,67	0,88	1,75	0,82	1,84	0,77	1,93	0,71	2,01
37	0,95	1,66	0,90	1,74	0,84	1,83	0,79	1,91	0,73	2,00
38	0,97	1,66	0,91	1,74	0,86	1,82	0,81	1,90	0,75	1,99
39	0,98	1,66	0,93	1,73	0,88	1,81	0,83	1,89	0,77	1,98
40	1,00	1,65	0,95	1,72	0,90	1,80	0,84	1,88	0,79	1,96
45	1,07	1,64	1,02	1,71	0,97	1,77	0,93	1,83	0,86	1,90
50	1,12	1,64	1,06	1,69	1,04	1,75	1,00	1,81	0,96	1,96
55	1,17	1,64	1,13	1,69	1,10	1,73	1,06	1,79	1,02	1,84
60	1,21	1,64	1,18	1,68	1,14	1,73	1,11	1,77	1,07	1,82
65	1,25	1,64	1,22	1,68	1,19	1,72	1,15	1,76	1,12	1,80
70	1,28	1,65	1,25	1,68	1,22	1,72	1,19	1,75	1,16	1,79

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=6		m=7		m=8		m=9		m=10	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
75	1,31	1,65	1,28	1,68	1,26	1,72	1,23	1,75	1,20	1,79
80	1,34	1,65	1,31	1,68	1,29	1,71	1,26	1,75	1,23	1,78
85	1,36	1,66	1,34	1,69	1,31	1,71	1,29	1,74	1,26	1,77
90	1,38	1,66	1,36	1,69	1,34	1,71	1,31	1,74	1,29	1,77
95	1,40	1,67	1,38	1,69	1,36	1,72	1,34	1,74	1,31	1,77
100	1,42	1,67	1,40	1,69	1,38	1,72	1,36	1,74	1,34	1,77
150	1,54	1,71	1,53	1,72	1,52	1,74	1,50	1,75	1,49	1,77
200	1,61	1,74	1,60	1,75	1,59	1,76	1,58	1,77	1,57	1,78

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,05 (5%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=11		m=12		m=13		m=14		m=15	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
16	0,06	3.,45								
17	0,08	3,29	0,05	3,51						
18	0,11	3,15	0,08	3,36	0,05	3,56				
19	0,15	3,02	0,10	3,23	0,07	3,42	0,04	3,60		
20	0,18	2,91	0,13	3,11	0,09	3,30	0,61	3,47	0,04	3,64
21	0,21	2,82	0,16	3,00	0,12	3,19	0,08	3,36	0,06	3,52
22	0,25	2,73	0,19	2,91	0,15	3,08	0,11	3,25	0,08	3,41
23	0,28	2,65	0,23	2,82	0,18	2,99	0,14	3,16	0,10	3,31
24	0,32	2,58	0,26	2,74	0,21	2,91	0,17	3,07	0,13	3,22
25	0,35	2,52	0,29	2,67	0,24	2,83	0,19	2,98	0,15	3,13
26	0,38	2,46	0,32	2,61	0,27	2,76	0,22	2,91	0,18	3,05
27	0,41	2,41	0,36	2,55	0,30	2,69	0,25	2,84	0,21	2,98
28	0,44	2,36	0,39	2,50	0,33	2,64	0,28	2,77	0,24	2,91
29	0,48	2,32	0,42	2,45	0,36	2,58	0,31	2,71	0,27	2,84
30	0,50	2,28	0,45	2,41	0,39	2,53	0,34	2,66	0,29	2,79
31	0,53	2,25	0,48	2,37	0,42	2,49	0,37	2,61	0,32	2,73
32	0,56	2,22	0,50	2,33	0,45	2,45	0,40	2,56	0,35	2,68
33	0,59	2,19	0,53	2,30	0,48	2,41	0,43	2,52	0,38	2,63
34	0,61	2,16	0,56	2,27	0,50	2,37	0,45	2,48	0,40	2,59
35	0,63	2,14	0,58	2,24	0,53	2,34	0,48	2,44	0,43	2,55
36	0,66	2,11	0,61	2,21	0,55	2,31	0,50	2,41	0,46	2,51
37	0,68	2,09	0,63	2,19	0,58	2,28	0,53	2,38	0,48	2,48
38	0,70	2,07	0,65	2,16	0,60	2,26	0,55	2,35	0,50	2,45
39	0,72	2,06	0,67	2,14	0,62	2,23	0,58	2,32	0,53	2,41
40	0,74	2,04	0,07	2,12	0,65	2,21	0,60	2,30	0,55	2,39
45	0,84	1,97	0,79	2,04	0,74	2,12	0,70	2,19	0,66	2,27
50	0,94	1,93	0,87	1,99	0,83	2,05	0,87	2,12	0,75	2,18
55	0,98	1,89	0,94	1,95	0,90	2,00	0,86	2,06	0,83	2,12
60	1,04	1,86	1,00	1,95	0,97	1,96	0,93	2,02	0,89	2,07
65	1,09	1,85	1,05	1,89	1,02	1,93	0,99	1,98	0,95	2,03
70	1,13	1,83	1,10	1,87	1,07	1,91	1,04	1,95	1,01	2,00
75	1,17	1,82	1,14	1,86	1,11	1,89	1,08	1,93	1,05	1,97
80	1,21	1,81	1,18	1,84	1,15	1,88	1,12	1,91	1,09	1,95
85	1,23	1,80	1,21	1,83	1,18	1,87	1,16	1,90	1,13	1,93

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=11		m=12		m=13		m=14		m=15	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
90	1,26	1,80	1,24	1,83	1,22	1,86	1,19	1,89	1,17	1,92
95	1,29	1,79	1,27	1,82	1,24	1,85	1,22	1,88	1,20	1,91
100	1,31	1,79	1,29	1,82	1,27	1,84	1,25	1,87	1,23	1,90
150	1,47	1,78	1,46	1,80	1,44	1,81	1,43	1,83	1,41	1,85
200	1,56	1,79	1,55	1,80	1,54	1,81	1,53	1,82	1,52	1,84

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,05 (5%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=16		m=17		m=18		m=19		m=20	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
21	0,04	3,67								
22	0,05	3,56	0,03	3,70						
23	0,07	3,46	0,05	3,60	0,03	3,73				
24	0,09	3,36	0,07	3,50	0,04	3,63	0,03	3,75		
25	0,12	3,27	0,09	3,41	0,06	3,54	0,04	3,66	0,03	3,77
26	0,14	3,19	0,11	3,33	0,08	3,45	0,06	3,57	0,04	3,68
27	0,17	3,11	0,13	3,25	0,10	3,37	0,07	3,49	0,05	3,60
28	0,19	3,04	0,16	3,17	0,12	3,30	0,93	3,41	0,07	3,52
29	0,22	2,97	0,18	3,10	0,15	3,22	0,11	3,34	0,09	3,45
30	0,25	2,91	0,21	3,03	0,17	3,15	0,14	3,27	0,11	3,38
31	0,28	2,85	0,23	2,97	0,20	3,09	0,16	3,20	0,13	3,31
32	0,30	2,80	0,26	2,91	0,22	3,03	0,18	3,14	0,15	3,25
33	0,33	2,75	0,29	2,86	0,25	2,97	0,21	3,08	0,17	3,14
34	0,36	2,70	0,31	2,81	0,27	2,92	0,23	3,02	0,20	3,13
35	0,38	2,66	0,34	2,76	0,30	2,87	0,26	2,97	0,22	3,07
36	0,41	2,61	0,36	2,72	0,32	2,82	0,28	2,92	0,24	3,02
37	0,43	2,58	0,39	2,68	0,35	2,77	0,31	2,87	0,27	2,97
38	0,46	2,54	0,41	2,64	0,37	2,73	0,33	2,83	0,29	2,92
39	0,48	2,51	0,44	2,60	0,40	2,69	0,35	2,79	0,32	2,88
40	0,51	2,48	0,46	2,57	0,42	2,66	0,38	2,75	0,34	2,84
45	0,61	2,35	0,57	2,42	0,53	2,50	0,49	2,58	0,45	2,66
50	0,71	2,25	0,67	2,32	0,63	2,39	0,59	2,46	0,55	2,53
55	0,79	2,18	0,75	2,24	0,71	2,30	0,67	2,36	0,64	2,42
60	0,86	2,12	0,82	2,17	0,79	2,23	0,75	2,28	0,72	2,34
65	0,92	2,08	0,89	2,12	0,85	2,17	0,82	2,22	0,79	2,27
70	0,97	2,04	0,94	2,06	0,91	2,13	0,88	2,17	0,85	2,22
75	1,02	2,01	0,99	2,05	0,96	2,09	0,93	2,13	0,91	2,17
80	1,07	1,96	1,04	2,02	1,01	2,06	0,99	2,10	0,96	2,14
85	1,11	1,97	1,08	2,00	1,05	2,03	1,03	2,07	1,01	2,10
90	1,14	1,95	1,12	1,48	1,09	2,01	1,07	2,04	1,04	2,08
95	1,17	1,93	1,15	1,96	1,13	1,99	1,10	2,02	1,08	2,05
100	1,20	1,92	1,18	1,95	1,16	1,98	1,14	2,01	1,11	2,03
150	1,40	186	1,39	1,86	1,37	1,90	1,36	1,91	1,35	1,93
200	1,51	185	1,50	1,86	1,48	1,87	1,47	1,88	1,46	1,90

Продовження дод. 23

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,01 (1%); *n*– число спостережень

	Число факторів									
	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
n	$d_н$	d_0	$d_н$	d_0	$d_н$	d_0	$d_н$	d_0	$d_н$	d_0
6	0,39	1,14								
7	0,44	1,04	0,29	1,68						
8	0,50	1,00	0,35	1,49	0,23	2,10				
9	0,55	1,00	0,41	1,39	0,28	1,88	0,18	2,43		
10	0,60	1,00	0,47	1,33	0,34	1,73	0,23	2,19	0,15	2,69
11	0,65	1,01	0,52	1,29	0,40	1,64	0,29	2,03	0,19	2,45
12	0,70	1,02	0,57	1,27	0,45	1,58	0,34	1,91	0,24	2,28
13	0,74	1,04	0,62	1,26	0,50	1,53	0,39	1,83	0,29	2,15
14	0,78	1,05	0,66	1,25	0,55	1,49	0,46	1,76	0,34	2,05
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,97
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,45	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,11	0,77	1,26	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,81	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,84	1,27	0,74	1,42	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,87	1,27	0,77	1,41	0,69	1,57	0,60	1,74
21	0,98	1,16	0,89	1,28	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,92	1,28	0,83	1,41	0,75	1,54	0,67	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,41	0,78	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,81	1,53	0,73	1,66
25	1,06	1,21	0,98	1,31	0,91	1,41	0,83	1,52	0,76	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,86	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,52	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,33	0,97	1,42	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,86	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,09	1,35	1,02	1,43	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,06	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,44	1,01	1,51	0,95	1,59
5S	1,20	1,31	1,14	1,37	1,09	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,17	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,13	1,45	1,07	1,52	1,02	1,59
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,21	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,04	1,59
45	1,29	1,38	1,25	1,42	1,20	1,47	1,16	1,53	1,11	1,59
50	1,32	1,40	1,29	1,45	1,25	1,49	1,21	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,32	1,57	1,26	1,60
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,40	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,44	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,65	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,43	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65
150	1,61	1,64	1,60	1,65	1,58	1,67	1,57	1,68	1,56	1,69
200	1,66	1,68	1,65	1,69	1,64	1,70	1,63	1,72	1,62	1,73

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,01 (1%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=6		m=7		m=8		m=9		m=10	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
11	0,12	2,89								
12	0,16	2,67	0,11	3,06						
13	0,21	2,49	0,14	2,64	0,09	3,18				
14	0,26	2,35	0,18	2,67	0,12	2,96	0,08	3,29		
15	0,30	2,24	0,23	2,53	0,16	2,82	0,11	3,10	0,07	3,37
16	0,35	2,15	0,27	2,42	0,20	2,68	0,14	2,94	0,09	3,20
17	0,39	2,08	0,31	2,31	0,24	2,57	0,18	2,81	0,13	3,05
18	0,44	2,02	0,37	2,24	0,28	2,47	0,22	2,70	0,16	2,93
I9	0,48	1,96	0,40	2,17	0,32	2,36	0,26	2,60	0,20	2,81
20	0,52	1,92	0,44	2,11	0,36	2,31	0,29	2,51	0,23	2,71
21	1,55	1,88	0,47	2,06	0,40	2,24	0,33	2,43	0,27	2,63
22	1,57	1,85	0,51	2,02	0,44	2,19	0,37	2,37	0,30	2,55
23	1,62	1,82	0,55	1,98	0,47	2,14	0,40	2,31	0,34	2,48
24	1,65	1,79	0,58	1,94	0,51	2,10	0,44	2,26	0,38	2,42
25	1,68	1,78	0,61	1,92	0,54	2,06	0,47	2,21	0,41	2,37
26	0,71	1,76	0,64	1,89	0,57	2,03	0,51	2,17	0,44	2,31
27	0,74	1,74	0,67	1,87	0,60	2,00	0,54	2,13	0,47	2,27
28	0,76	1,73	0,70	1,85	0,66	1,97	0,57	2,10	0,50	2,23
29	0,79	1,72	0,72	1,83	0,69	1,95	0,60	2,07	0,53	2,19
30	0,81	1,71	0,76	1,82	0,69	1,93	0,62	2,04	0,56	2,16
31	0,83	1,70	0,77	1,80	0,71	1,91	0,65	2,02	0,59	2,13
32	0,86	1,69	0,79	1,78	0,73	1,89	0,67	2,00	0,62	2,10
33	0,88	1,68	0,82	1,78	0,76	1,87	0,70	1,98	0,64	2,00
34	0,90	1,68	0,84	1,77	0,78	1,86	0,72	1,96	0,67	2,06
35	0,91	1,67	0,86	1,76	0,80	1,85	0,74	1,94	0,69	2,04

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=6		m=7		m=8		m=9		m=10	
n	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o
36	0,93	1,67	0,88	1,75	0,82	1,84	0,77	1,93	0,71	2,01
37	0,95	1,66	0,90	1,74	0,84	1,83	0,79	1,91	0,73	2,00
38	0,97	1,66	0,91	1,74	0,86	1,82	0,81	1,90	0,75	1,99
39	0,98	1,66	0,93	1,73	0,88	1,81	0,83	1,89	0,77	1,98
40	1,00	1,65	0,95	1,72	0,90	1,80	0,84	1,88	0,79	1,96
45	1,07	1,64	1,02	1,71	0,97	1,77	0,93	1,83	0,86	1,90
50	1,12	1,64	1,06	1,69	1,04	1,75	1,00	1,81	0,96	1,96
55	1,17	1,64	1,13	1,69	1,10	1,73	1,06	1,79	1,02	1,84
60	1,21	1,64	1,18	1,68	1,14	1,73	1,11	1,77	1,07	1,82
65	1,25	1,64	1,22	1,68	1,19	1,72	1,15	1,76	1,12	1,80
70	1,28	1,65	1,25	1,68	1,22	1,72	1,19	1,75	1,16	1,79
75	1,31	1,65	1,28	1,68	1,26	1,72	1,23	1,75	1,20	1,79
90	1,34	1,65	1,31	1,68	1,29	1,71	1,26	1,75	1,23	1,78
85	1,36	1,66	1,34	1,69	1,31	1,71	1,29	1,74	1,26	1,77
90	1,38	1,66	1,36	1,69	1,34	1,71	1,31	1,74	1,29	1,77
95	1,40	1,67	1,38	1,69	1,36	1,72	1,34	1,74	1,31	1,77
100	1,42	1,67	1,40	1,69	1,38	1,72	1,36	1,74	1,34	1,77
150	1,54	1,71	1,53	1,72	1,52	1,74	1,50	1,75	1,49	1,77
200	1,61	1,74	1,60	1,75	1,59	1,76	1,58	1,77	1,57	1,78

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,01 (1%); *n* – число спостережень

	Число факторів									
	m=11		m=12		m=13		m=14		m=15	
n	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o	$d_н$	d_o
16	0,06	3,45								
17	0,08	3,29	0,05	3,51						
18	0,11	3,15	0,08	3,36	0,05	3,56				
19	0,15	3,02	0,10	3,23	0,07	3,42	0,04	3,60		
20	0,18	2,91	0,13	3,11	0,09	3,30	0,61	3,47	0,04	3,54
21	0,21	2,82	0,16	3,00	0,12	3,19	0,08	3,36	0,06	3,52
22	0,25	2,73	0,19	2,91	0,15	3,08	0,11	3,25	0,08	3,41
23	0,28	2,65	0,23	2,82	0,18	2,99	0,14	3,16	0,10	3,31
24	0,32	2,58	0,26	2,74	0,21	2,91	0,17	3,07	0,13	3,22
25	0,35	2,52	0,29	2,67	0,24	2,83	0,19	2,98	0,15	3,13
26	0,38	2,46	0,32	2,61	0,27	2,76	0,22	2,91	0,18	3,05
27	0,41	2,41	0,36	2,55	0,30	2,69	0,25	2,84	0,21	2,98
28	0,44	2,36	0,39	2,50	0,33	2,64	0,28	2,77	0,24	2,91
29	0,48	2,32	0,42	2,45	0,36	2,58	0,31	2,71	0,27	2,84

Продовження дод. 23

	Число факторів									
	m=11		m=12		m=13		m=14		m=15	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
30	0,50	2,28	0,45	2,41	0,39	2,53	0,34	2,66	0,29	2,79
31	0,53	2,25	0,48	2,37	0,42	2,49	0,37	2,61	0,32	2,73
32	0,56	2,22	0,50	2,33	0,45	2,45	0,40	2,56	0,35	2,68
33	0,59	2,19	0,53	2,30	0,48	2,41	0,43	2,52	0,38	2,63
34	0,61	2,16	0,56	2,27	0,50	2,37	0,45	2,48	0,40	2,59
35	0,63	2,14	0,58	2,24	0,53	2,34	0,48	2,44	0,43	2,55
36	0,66	2,11	0,61	2,21	0,55	2,31	0,50	2,41	0,46	2,51
37	0,68	2,09	0,63	2,19	0,58	2,28	0,53	2,38	0,48	2,48
38	0,70	2,07	0,65	2,16	0,60	2,26	0,55	2,35	0,50	2,45
39	0,72	2,06	0,67	2,14	0,62	2,23	0,58	2,32	0,53	2,41
40	0,74	2,04	0,07	2,12	0,65	2,21	0,60	2,30	0,55	2,39
45	0,84	1,97	0,79	2,04	0,74	2,12	0,70	2,19	0,66	2,27
50	0,94	1,93	0,87	1,99	0,83	2,05	0,87	2,12	0,75	2,18
55	0,98	1,89	0,94	1,95	0,90	2,00	0,86	2,06	0,83	2,12
60	1,04	1,86	1,00	1,95	0,97	1,96	0,93	2,02	0,89	2,07
65	1,09	1,85	1,05	1,89	1,02	1,93	0,99	1,98	0,95	2,03
70	1,13	1,83	1,10	1,87	1,07	1,91	1,04	1,95	1,01	2,00
75	1,17	1,82	1,14	1,86	1,11	1,89	1,08	1,93	1,05	1,97
80	1,21	1,81	1,18	1,84	1,15	1,88	1,12	1,91	1,09	1,95
85	1,23	1,80	1,21	1,83	1,18	1,87	1,16	1,90	1,13	1,93
90	1,26	1,80	1,24	1,83	1,22	1,86	1,19	1,89	1,17	1,92
95	1,29	1,79	1,27	1,82	1,24	1,85	1,22	1,88	1,20	1,91
100	1,31	1,79	1,29	1,82	1,27	1,84	1,25	1,87	1,23	1,90
150	1,47	1,78	1,46	1,80	1,44	1,81	1,43	1,83	1,41	1,85
200	1,56	1,79	1,55	1,80	1,54	1,81	1,53	1,82	1,52	1,84

ТАБЛИЦЯ d-статистики (Дарбіна-Уотсона): $d_н$ і d_0 – рівні значущості у α=0,01 (1%); *n*– число спостережень

	Число факторів									
	m=16		m=17		m=18		m=19		m=20	
n	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$	$d_н$	$d_о$
21	0,04	3,67								
22	0,05	3,56	0,03	3,70						
23	0,07	3,46	0,05	3,60	0,03	3,73				
24	0,09	3,36	0,07	3,50	0,04	3,63	0,03	3,75		
25	0,12	3,27	0,09	3,41	0,06	3,54	0,04	3,66	0,03	3,77
26	0,14	3,19	0,11	3,33	0,08	3,45	0,06	3,57	0,04	3,68
27	0,17	3,11	0,13	3,25	0,10	3,37	0,07	3,49	0,05	3,60
28	0,19	3,04	0,16	3,17	0,12	3,30	0,93	3,41	0,07	3,52

Закінчення дод. 23

	Число факторів									
	m=16		m=17		m=18		m=19		m=20	
n	$\mathbf{d_н}$	$\mathbf{d_о}$	$\mathbf{d_н}$	$\mathbf{d_о}$	$\mathbf{d_н}$	$\mathbf{d_о}$	$\mathbf{d_н}$	$\mathbf{d_о}$	$\mathbf{d_н}$	$\mathbf{d_о}$
29	0,22	2,97	0,18	3,10	0,15	3,22	0,11	3,34	0,09	3,45
30	0,25	2,91	0,21	3,03	0,17	3,15	0,14	3,27	0,11	3,38
31	0,28	2,85	0,23	2,97	0,20	3,09	0,16	3,20	0,13	3,31
32	0,30	2,80	0,26	2,91	0,22	3,03	0,18	3,14	0,15	3,25
33	0,33	2,75	0,29	2,86	0,25	2,97	0,21	3,08	0,17	3,14
34	0,36	2,70	0,31	2,81	0,27	2,92	0,23	3,02	0,20	3,13
35	0,38	2,66	0,34	2,76	0,30	2,87	0,26	2,,97	0,22	3,,07
36	0,41	2,61	0,36	2,72	0,32	2,82	0,28	2,92	0,24	3,02
37	0,43	2,58	0,39	2,68	0,35	2,77	0,31	2,87	0,27	2,97
38	0,46	2,54	0,41	2,64	0,37	2,73	0,33	2,83	0,29	2,92
39	0,48	2,51	0,44	2,60	0,40	2,69	0,35	2,79	0,32	2,88
40	0,51	2,48	0,46	2,57	0,42	2,66	0,38	2,75	0,34	2,84
45	0,61	2,35	0,57	2,42	0,53	2,50	0,49	2,58	0,45	2,66
50	0,71	2,25	0,67	2,32	0,63	2,39	0,59	2,46	0,55	2,53
55	0,79	2,18	0,75	2,24	0,71	2,30	0,67	2,36	0,64	2,42
60	0,86	2,12	0,82	2,17	0,79	2,23	0,75	2,28	0,72	2,34
65	0,92	2,08	0,89	2,12	0,85	2,17	0,82	2,22	0,79	2,27
70	0,97	2,04	0,94	2,06	0,91	2,13	0,88	2,17	0,85	2,22
75	1,02	2,01	0,99	2,05	0,96	2,09	0,93	2,13	0,91	2,17
80	1,07	1,96	1,04	2,02	1,01	2,06	0,99	2,10	0,96	2,14
85	1,11	1,97	1,08	2,00	1,05	2,03	1,03	2,07	1,01	2,10
90	1,14	1,95	1,12	1,48	1,09	2,01	1,07	2,04	1,04	2,08
95	1,17	1,93	1,15	1,96	1,13	1,99	1,10	2,02	1,08	2,05
100	1,20	1,92	1,18	1,95	1,16	1,98	1,14	2,01	1,11	2,03
150	1,40	1,86	1,39	1,86	1,37	1,90	1,36	1,91	1,35	1,93
200	1,51	1,85	1,50	1,86	1,48	1,87	1,47	1,88	1,46	1,90

Джерело: Толбатов Ю.А. Економетрика : підруч. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. / Ю.А. Толбатов. – Київ : Четверта хвиля, 1997. – С. 293–300.

Приклад: Нехай для регресійного рівняння $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ для числа спостережень $n = 23$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ знайшли, що $d = 0{,}35$. Оскільки $k = 1 + m = 1+2=3$, то знаходимо по таблицях, що $d_н = 0{,}86$. $d_0 = 1{,}41$. Оскільки $0 < d = 0{,}35 < d_н = 0{,}86$, то автокореляція додатна.

Додаток 24

ТАБЛИЦЯ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ВІДНОШЕННЯ ФОН НЕЙМАНА

$$p\left(\frac{\delta^2}{s^2} < k\right) = \int_0^k \omega\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right) d\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)$$

k	*n*								
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0,00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0.00065	0,00047	0,00031	0,00019	0,00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0,00116	0,00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0.01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0.00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0,00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0.02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1.00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241
1,05	0,05186	0,05364	0,04728	0,04325	0,03849	0.03384	0,02959	0,02578	0,02852
1,10	0,06184	0,06140	0,05500	0.05137	0,04618	0,04120	0,03655	0,03232	0,03577
1,15	0,07194	0,06963	0,06361	0,06036	0,05482	0,04957	0,04458	0,03997	0,04425
1,20			0,07323	0,07020	0,06445	0,05901	0,05375	0,04882	0,05407
1,25						0,06956	0,06412	0,05894	0,06531
1,30								0,07040	

Закінчення дод. 24

k	*n*						
	15	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**
0,35	0,00001						
0,40	0,00002						
0,45	0,00004						
0.50	0,00009	0,00001					
0.55	0,00018	0,00002					
0,60	0,00033	0,00005	0,00001				
0,65	0,00059	0,00012	0,00002				
0.70	0,00100	0,00024	0,00005	0,00001			
0.75	0.00161	0,00044	0,00011	0,00003			
0,80	0,00250	0,00076	0,00023	0,00007	0,00001		
0,85	0,00375	0,00127	0,00044	0,00015	0,00002		
0,90	0,00547	0,00206	0,00079	0,00030	0,00004	0,00001	
0,95	0,00778	0,00323	0,00135	0,00057	0,00010	0,00002	
1,00	0,01079	0,00489	0,00222	0,00102	0,00022	0,00005	0,00001
1,05	0,01465	0,00720	0,00355	0,00176	0,00044	0,00012	0,00003
1.10	0,01950	0,01033	0,00550	0,00294	0,00085	0,00026	0,00008
1,15	0,02550	0,01448	0,00826	0,00474	0,00158	0,00054	0,00019
1,20	0,03280	0,01986	0,01208	0,00738	0,00280	0,00108	0,00043
1,25	0,04155	0,02670	0,01723	0,01117	0,00476	0,00206	0,00092
1,30	0,05189	0.03524	0.02402	0,01644	0,00780	0,00376	0,00185
1,35	0,06396	0.04571	0,03276	0,02357	0,01235	0,00656	0,00355
1,40	0,07787	0,05834	0,04379	0,03298	0,01892	0,01098	0,00649
1,45		0,07333	0,05743	0,04511	0,02810	0,01769	0,01133
1,50			0,07398	0,06038	0,04055	0,02750	0,01893
1,55				0.07920	0,05696	0,04131	0,03034
1,60					0,07797	0,06006	0,04675
1,65						0,08465	0,06942
1,70							0,09949

Значення *k*, для яких $p\left(\frac{\delta^2}{s^2} < k\right) = 0$

n	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**
k	0,7811	0,4775	0,3215	0,2311	0,1740	0,1357	0,1088	0,0891	0,0743	0,0468

n	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**
k	0,0259	0,0164	0,0113	0,0063	0,0040	0,0028

Джерело: Економетрія : навч. посіб. / С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – Київ : КНЕУ, 1997. – С. 345–346.



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики : учеб. для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Болч Б. Многомерные статистические методы для экономики / Б. Болч, К. Дж. Хуань. – М. : Статистика, 1979. – 318 с.
3. Варюхин А.М. Эконометрика : пособие для сдачи экзамена / А.М. Варюхин, О.Ю. Панкина, А.В. Яковлева. – М. : Юрайт-Издат., 2005. – 191 с.
4. Винн Р. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
5. Вучков И. Прикладной линейный регрессионный анализ / И. Вучков, Л. Бояджиева, Е. Солаков. – М. : Финансы и статистика, 1987. – 239 с.
6. Грубер Й. Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії : у 2 т. / Й. Грубер. – Київ : Нічлава, 1998. – Т. 1. – 384 с., 1999; Т. 2– 308 с.
7. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
8. Джонстон Дж. Эконометрические методы / Дж. Джонстон. – М. : Статистика, 1980. – 444 с.
9. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти : пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – XIV. – 402 с.
10. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. –М. : Финансы и статистика, 1986. – Т. 1. – 365 с.; Т. 2. – 379 с.

11. Эконометрика : учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Г.В. Костышева и др. ; под ред. И.И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 576 с.
12. Єлейко В. Основи економетрії / В. Єлейко. – Львів : Марка Лтд, 1995. – 191 с.
13. Жебка В.В. Курс лекцій з економетрії / В.В. Жебка, І.І. Юртин, О.О. Юнькова и др. – Київ : Транспорт України, 2007. –138 с.
14. Иванова В.М. Экономическая теория. Основы бизнеса: Ч. IY: Эконометрика / ред. совет: А.Д. Смирнов, В.Ф. Максимова и др. – М. : СОМИНТЭК, 1991. – 158 с.
15. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ / Э. Кейн. – М. : Статистика, 1977. – 254 с.
16. Корольов О.А. Економетрія : навч. посіб. / О.А Корольов. – 2-ге вид., випр. та скор. – Київ : Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2005 – 416 с.
17. Корольов О.А. Економетрія. Практикум : навч. посіб. / О.А. Корольов, В.В Рязанцева. – Київ : Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2005. – 277 с.
18. Леоненко М.М. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура, В.М. Пархоменко, М.Й. Ядренко. – Київ : ІНФОРМТЕХНІКА, 1995. – 380 с.
19. Лещинський О.Л. Економетрія : навч. посіб. / О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева, О.О. Юнькова. – Київ : МАУП, 2003. – 208 с.
20. Лещинський О.Л. Практикум з економетрії : навч. посіб. / О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева, О.О. Юнькова, І.І. Юртин. – Київ : Персонал, 2009. – 252 с.
21. Лук'яненко І.Г. Економетрика : підручник / І.Г. Лук'яненко, Л.І. Краснікова. – Київ : Знання, КОО, 1998. – 494 с.
22. Лук'яненко І.Г.. Аналіз часових рядів. Побудова ARIMA, ARCH/GARCH моделей з використанням пакета E.Views

6.0 Частина перша / І.Г. Лук'яненко, В.М. Жук. – Київ : Аграр Медіа Груп, 2013. – 186 с.
23. Лук'яненко І.Г. Аналіз часових рядів. Побудова VAR і VECM моделей з використанням пакета E.Views 6.0 Частина друга / І.Г. Лук'яненко, В.М. Жук. – Київ : Аграр Медіа Груп, 2013. – 174.
24. Магнус Я.Р. Эконометрика: Начальный курс / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М. : Дело, 1997. – 248 с.
25. Маленво Э. Статистические методы эконометрии / Э. Маленво. – М. : Статистика, 1975. – 423 с.
26. Математика в экономике : учеб.-метод. пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Финстатинформ, 1999. – 94 с.
27. Монсен Л. Использование Microsoft Excel 97 / Л. Монсен. – К.; М.; СПб. : Вильямс, 1998. – 336 с.
28. Орвис В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов / В. Орвис. –Київ : Юниор,1999. – 528 с.
29. Назаренко О.М. Основи економетрики : підручник / О.М. Назаренко. – 2-ге вид., перероб.– Київ : Центр навч. літ., 2005. – 392 с.
30. Наконечний С.І. Економетрія : навч. посіб. / С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – Київ : КНЕУ, 1997. – 352 с.
31. Новак Э**.** Введение в методы эконометрики : Сборник задач / под ред. чл.-корр. РАН И.И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 324 с.
32. Плис А.И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров : учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. –М. : Финансы истатистика, 1999. – 656 с.
33. Пономаренко О.І. Основи математичної економіки / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – Київ : ІНФОРМТЕХНІКА, 1995. – 319 с.
34. Пуарье Д. Эконометрия структурных изменений (с применением сплайн-функций) / Д. Пуарье. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 183 с.

35. Рабочая книга по прогнозированию / отв. ред. И.В. Бестужев-Лада. – М. : Мысль, 1982. – 430 с.
36. Тинтнер Г. Введение в эконометрию / Г. Тинтнер. – М. : Статистика, 1965.– 361 с.
37. Толбатов Ю.А. Економетрика : підруч. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. / Ю.А. Толбатов. – Київ : Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
38. Устойчивые статистические методы оценки данных / под ред. Р.Л. Лонера, Г.Н. Уилкинсона : пер. с англ. – М. : Машиностроение, 1984. – 232 с.
39. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии / Ф. Фишер. – М. : Статистика, 1978. – 223 с.
40. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях / Д. Хейс. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 225 с.
41. Черняк О.І. Економетрика : підручник / О.І. Черняк, О.В. Комашко, А.В. Ставицький, О.В. Баженова ; за ред. О.І. Черняка. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 359 с.

Навчальне видання

РЯЗАНЦЕВА Валентина Василівна

ЕКОНОМЕТРІЯ.
МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Редактор О.В. Паніматченко
Комп'ютерне верстання І.І. Віннік
Дизайн обкладинки Г.В. Поліщук

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 20,05. Тираж 300 пр. Зам. 493.

Видавець і виготовлювач
Київський національний торговельно-економічний університет
вул. Кіото, 19, м. Київ-156, Україна, 02156

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4620 від 03.10.2013 р.