МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:

Конспект лекцій

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 051 «Економіка»,
освітні програми: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка», «Економіка бізнес-підприємства», «Управління персоналом та економіка праці», «Бізнес-аналітика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Математика для економістів: Конспект лекцій: навч. посіб. для студ. спеціальності 051 «Економіка», освітні програми: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка», «Економіка бізнес-підприємства», «Управління персоналом та економіка праці», «Бізнес-аналітика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І.Д. Фартушний. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 109 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу (протокол № 8 від 25.03.2019 р.)

Навчальне видання

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:
Конспект йекцій

Укладачі: *Фартушний Іван Дмитрович*, канд. фіз-матем. наук, доц.

Відповідальний редактор *Капустян В.О., д-р фіз.-матем. наук, проф., зав. кафедрою математичного моделювання економічних систем*

Рецензент *Касьянов П.О., д-р фіз.-матем. наук, проф, завідувач Науково-дослідного відділу системної математики ІПСА*

Конспект лекцій із курсу «Математика для економістів» призначений для студентів факультету менеджменту та маркетингу, які навчаються на першому курсі освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 051 «Економіка». Основна його ціль полягає в організації самостійної роботи студентів до вивчення та систематизації знань за розділами: лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія, границя і похідна, функції багатьох змінних, невизначений інтеграл, визначений інтеграл, невласний інтеграл.

Конспект відповідає переліку питань, які відображені у робочих програмах кредитних модулів: Вища математика 1 та Вища математика 2 для освітніх програм: економічна кібернетика, міжнародна економіка, економіка бізнес-підприємства, управління персоналом та економіка праці, бізнес-аналітика

ЗМІСТ

ВСТУП

Лекція №1

Визначники. Матриці та дії над ними.

Визначники II-го і III-го порядків.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

називається *визначником (детермінантом) II-го порядку.*

Поняття «визначник» (лат. determino – визначати) ввів Вільгельм Лейбніц (1646-1716).

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (1.2)$$

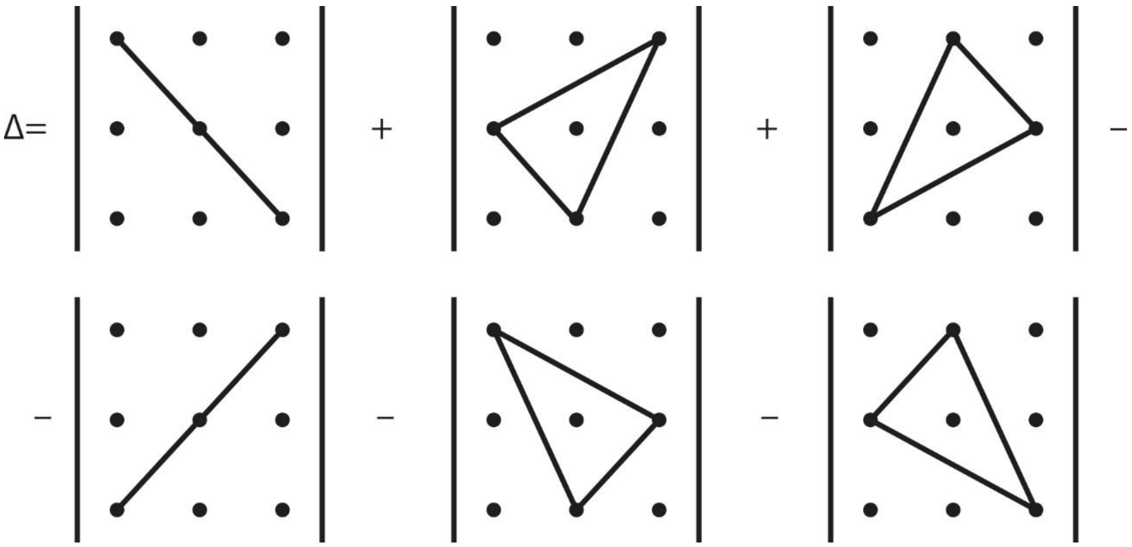
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

називається *визначником (детермінантом) III-го порядку*.

Символи a_{ij} називаються елементами визначника, причому індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *побічну діагональ*.

Визначник III-го порядку зручно обчислювати за *правилом трикутників*: перші три доданки в правій частині формули (1.2) є добутком елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.



Приклади:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$.

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Нехай задано визначник (1.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Приклад: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5A_{21} + (-2)A_{22} + 1 \cdot A_{23} = 10$

Основні властивості визначників.

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Якщо кожен елемент довільного рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця), додати елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Поняття про визначники вищих порядків.

Розглянемо визначник IV-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Згідно з теоремою 1.1. цей визначник можна розкласти за елементами довільного рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}. \quad (1.3)$$

Всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (1.3) є визначниками III-го порядку. Тому за правилом трикутників їх можна обчислити. Але такий спосіб обчислення громіздкий: для обчислення визначника IV-го порядку треба обчислити 4 визначника III-го порядку. Тому на практиці перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки дорівнюють нулю.

Приклад.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\1&2&-2&0\\-1&3&0&2\\2&1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&-1&-2\\-1&3&-1&4\\2&1&1&-1\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+0\cdot A_{14}=.$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-1&-2\\3&-1&4\\1&1&-1\end{vmatrix}=-21$$

Матриці.

Означення. Прямокутна таблиця чисел $a_{ij}, i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n$ складена з m рядків та n стовпців називається *матрицею* і записується у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix} \text{ або } A=\left\|a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}},$$

де a_{ij} – елементи матриці.

Поняття матриці вперше ввели англійські математики Вільям Гамільтон (1805-1865) та Артур Келі (1821-1895).

Якщо матриця має m рядків і n стовпців, то говорять, що вона має розмір $m\times n$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Якщо квадратна матриця має n стовпців (рядків), то матриця має порядок n.

Дві матриці $A=\left\|a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$ і $B=\left\|b_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$ називаються *рівними*, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи $a_{ij}=b_{ij}$.

Матриця називається *нульовою*, якщо її елементи дорівнюють нулю.

Як і в визначниках, в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, розміщені поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця, у якої кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною матрицею* і позначається літерою E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником (детермінантом) і позначається символом $\Delta\,(\det A)$:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Приклад. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-8.$

Зауваження. Прямокутна матриця розміром $m\times n\,(m\neq n)$ визначника не має.

Дії над матрицями.

1. **Додавання** (тільки для матриць однакового розміру)**.**

   Сумою $C=A+B$ двох матриць $A=\left\|a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$ та $B=\left\|b_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$ називається матриця $C=\left\|c_{ij}\right\|=\left\|a_{ij}+b_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$

2. **Добутком** матриці $A=\left\|a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$ на число k називається матриця $B=\left\|b_{ij}\right\|=\left\|k\cdot a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n.}}$

Означення. Матриця A називається узгодженою з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

3. **Множення двох матриць** (лише для узгоджених матриць)**.**

Добутком *C=AB* матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n.}}$ на матрицю $B = \left\| b_{ij} \right\|_{\substack{i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,k.}}$ називається така матриця, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка матриці *A* на відповідні елементи j-го стовпця матриці *B*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj},$$

$$C = \left\| c_{ij} \right\|_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,k.}}$$

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це означення називають *правилом множення рядка на стовпець*. Наприклад, щоб знайти елемент c_{21}, потрібно знайти суму добутків елементів ІІ-го рядка матриці *A* на відповідні елементи І-го стовпця матриці *B*.

Зауваження. Якщо матриці *A* і *B* неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

Лекція №2

Розв'язування систем за допомогою правила Крамера та оберненої матриці.

Нехай *A* – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається _*оберненою*_ до матриці *A*, якщо виконується умова

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Квадратна матриця *A* називається _*виродженою*_, якщо $\det A = 0$, і _*невиродженою*_, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 2.1: Для існування оберненої матриці A^{-1} $\Leftrightarrow$, щоб матриця *A* була невиродженою.

Матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots x_n$ називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Числа a_{ij}, $i = 1, \dots, m,\quad j = 1, \dots, n$ називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами.

Система рівнянь (2.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Означення. Упорядкований набір n чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0\right)$ називається розв’язком системи (2.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожність.

Таку систему чисел називають також n-вимірним вектором.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається <u>*визначеною*</u>, якщо вона має єдиний розв'язок. Сумісна система називається <u>*невизначеною*</u>, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Означення. Визначник, елементами якого є коефіцієнти при невідомих у системі (2.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається визначником цієї системи.

Теорема 2.2: Якщо визначник $\Delta \neq 0$ системи (2.2), то ця система має ! розв'язок, який знаходиться за флормулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots,\, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (2.3)$$

де Δ_k – визначник, утворений з визначника Δ системи (2.2) заміною *k*-го стовпця на стовпець із правих її частин.

Формули (2.3) вперше ввів Габріель Крамер (1704-1752) і вони називаються формулами Крамера.

Зауваження 1. Якщо $\Delta = 0, \quad \Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$ або $\ldots \Delta_n \neq 0$, тоді система (2.2) не має розв'язків, тобто є несумісною.

Зауваження 2. Якщо $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, тоді система (2.2) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Приклад. 1) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + 3y = 7. \end{cases}$

$$2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 \qquad - x_3 = 0, \end{cases} \qquad \Delta = -7, \Delta_1 = -11, \Delta_2 = -12, \Delta_3 = -1.$$

Нехай задано систему (2.2), яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими.

Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Означення. Матрицю розміром $n \times 1$ називають *n- вимірним вектором*.

Матриця A, складену з коефіцієнтів системи (2.2), називають матрицею системи, вектор X – вектором з невідомих, а B – вектором вільних членів.

Тоді систему (2.2) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B. \tag{2.4}$$

Якщо матриця А має обернену матрицю, то рівність (2.4) можна переписати у вигляді:

$$X = A^{-1}B. \tag{2.5}$$

Отже, щоб розв’язати систему рівнянь (2.2), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на вектор вільних членів.

Зауваження 1. Розв’язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи не вироджена.

Зауваження 2. Надалі будемо розглядати наступні типи матричних рівнянь:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B,$$

$$XA = B \quad \Rightarrow \quad X = BA^{-1},$$

$$A \cdot X \cdot B = C \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Приклади. $\begin{cases} x + 2y \qquad = 3, \\ -x + y + 2z = 5, \\ 3x \qquad + z = -2, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

$$x = -1; \quad y = 2; \quad z = 1.$$

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 26 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Лекція №3

Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь загального виду.

Означення. <u>*Рангом*</u> $r(A)$ матриці $A_{m\times n} = A$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів матриці.

Властивості $r(A)$.

1. Ранг існує для довільної матриці $A_{m\times n} = A$, причому $0 \le r(A) \le \min(m,n)$;
2. $r(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = O$;
3. Для квадратної матриці $A_{n\times n}$ $\quad r(A) = n \quad \Leftrightarrow$, коли матриця не вироджена.

Ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати так звані <u>*елементарні перетворення*</u>, а саме:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);
2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий, відмінний від нуля множник;
3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&-4&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&-1&-5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&-5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=3.$$

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{3.1}$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ даної системи:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}.$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв'язку системи (3.1) дає теорема Кронекера-Капеллі (Леопольд Кронекер (1823-1891), Альфредо Капеллі (1855-1910)).

Теорема: Для того, щоб СЛР була сумісною, $\Leftrightarrow$, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо $r(A)=r(\tilde{A})=n$ (n – число невідомих), то система має ! розв'язок.

Якщо $r(A)=r(\tilde{A})<n$, то система має безліч розв'язків.

Нехай система (3.1) сумісна, тобто $r(A)=r(\tilde{A})$. У матриці A візьмемо мінор порядку $r(A)\neq 0$. Цей мінор називається *базисним.*

Якщо $n=r(A)$, то всі змінні $x_1,x_2,\ldots,x_n$ визначаються ! чином. Якщо $n>r(A)$, то змінні, коефіцієнти при яких входять до базисного мінору, називаються базисними. Решту змінних називають *вільними*.

Якщо вільні невідомі дорівнюють нулю, то відповідний розв'язок системи (3.1) називається *базисним*, інакше – *загальним*.

Методи Гаусса та Жордана-Гаусса.

(Карл Гаусс (1777-1855), Марі Енмоль Жордан (1838-1922))

Одним з найпоширеніших методів розв'язування СЛР є метод послідовного виключення невідомих або метод Гаусса. Цей метод запропонований німецьким математиком Карлом Гауссом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

Метод Гаусса складається з двох етапів. На І-му етапі, який називається *прямий хід*, система лінійних рівнянь приводиться до трикутного вигляду. На ІІ-му етапі, який називається *обернений хід*, проводиться послідовне визначення невідомих всієї трикутної системи.

Розглянемо метод Гаусса на конкретному прикладі.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 6, \\ x + 2y - z = 5, \\ 2x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Метод Жордана-Гаусса є модифікацією метода Гаусса. Сутність методу полягає в тому, що кожне невідоме виключається не тільки з розміщених нижче, а з усіх рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему та знайти її загальний та базисний розв'язки:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 6, \\ \quad -2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + x_3, \\ x_4 = -\dfrac{2}{3}x_2 + x_3. \end{cases}$, x_1, x_4 – базисні змінні, x_2, x_3 – вільні змінні.

Лекція №4

Вектори, їх ранг та базис.

Означення. Упорядкована сукупність n дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається *n-вимірним вектором* і позначається

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ або } \vec{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ називаються координатами або проекціями вектора $\vec{a}$. Перехід від запису вектора у вигляді стовпця до запису у вигляді рядка та навпаки називається *транспонуванням* вектора.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними* (паралельними), якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Приклад колінеарності векторів дає будь-яка таблиця обмінних курсів валют.

	1 UAH	1USD	1EUR	1RUR
1 UAH	1	0,043	0,038	2,857
1USD	23,32	1	0,890	66,629
1EUR	26,21	1,124	1	74,886
1RUR	0,35	0,015	0,013	1

Кожен стовпець таблиці виражає курсову вартість одиниці відповідного виду валюти. Будь-які два рядки чи два стовпці цієї таблиці пропорційні, тобто довільні вектор-стовпці та вектор-рядки колінеарні.

Означення. Вектори $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \qquad (4.1)$$

виконується лише при умові $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Рівність (4.1) можна записати як СЛАР:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = 0, \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Теорема 4.1. Для того, щоб вектори $\vec{a}_k$, $k = 1, \ldots, n,$ були лінійно незалежними, необхідно й достатньо, щоб СЛАР (4.2) мала ! нульовий розв'язок.

Означення. Система *n*-лінійно незалежних векторів в просторі R^n називається <u>*базисом*</u>.

Означення. Вектор $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, , \vec{a}_n$, якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n .$$

Приклад. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (3;-2;1), \vec{b} = (-1;1;2), \vec{c} = (3;-2;1)$ лінійно незалежні і знайти координати вектора $\vec{d} = (11;-6;5)$ в цьому базисі.

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} \text{ або } \vec{d} = (2;-3;1).$$

Лекція №5

Власні числа та власні вектори матриці.

Означення. Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається <u>*власним вектором*</u> матриці *A*, якщо існує число λ

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}. \qquad (5.1)$$

Число λ називається <u>*власним числом*</u> матриці *A*, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Систему рівнянь (5.1) можна записати у вигляді

$$A\vec{x} = \lambda E \vec{x} \text{ або } (A - \lambda E)\vec{x} = 0. \qquad (5.2)$$

Власний вектор $\vec{x}$ є ненульовим розв'язком СЛАР (5.2) з визначником:

$$\Delta \equiv |A - \lambda E| = f(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \ldots + b_n .$$

Для того, щоб однорідна система (5.2) мала розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n = 0\,. \qquad (5.3)$$

Рівняння (5.3) називається <u>*характеристичним рівнянням матриці A*</u>, а його корені – <u>*власними числами матриці A*</u>. Якщо відоме власне число λ, то із системи (5.2) можна знайти відповідний власний вектор $\vec{x}$.

Приклад. Знайти власні числа і вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 \to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3 \to \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичні форми.

Означення. <u>*Квадратичною формою*</u> називається нелінійна функція виду:

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_3) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j =$$

$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$

$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n +$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad +$$

$$= a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n,$$

де коефіцієнти a_{ij} та змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – дійсні числа.

Квадратичну форму можна записати так:

$$Q(x) = \vec{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x},$$

де
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця *A* називається <u>*матрицею квадратичної форми*</u>. Вона є <u>*симетричною*</u>, оскільки $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Означення. Квадратична форма $Q(x)$ називається <u>*додатно визначеною (від'ємно визначеною)*</u>, якщо для $\forall x \in R, x \neq 0 \quad Q(x) > 0 \,(Q(x) < 0)$; і невід'ємно визначеною (недодатно визначеною) якщо $Q(x) \geq 0 \,(Q(x) \leq 0)$.

Приклади. $Q(x) = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 > 0$,

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 \geq 0.$$

Означення. *Головними мінорами* матриці A називаються ті її мінори, які розміщені в лівому верхньому її куті.

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots\ ,\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (критерій Сільвестра (Джеймс Джозеф Сільвестр (1814-1897)): Для того, щоб симетрична матриця була додатно визначеною, необхідно й достатньо, щоб усі її головні мінори були додатні.

Наслідок. Для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно й достатньо, щоб знаки головних її мінорів змінювалися по черзі, причому $\Delta_1 < 0$:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0.$$

Зауваження. Якщо квадратична форма ні додатно визначена, ні від'ємно визначена, то вона називається знакозмінною або невизначеною квадратичною формою.

Приклади. Встановити визначеність квадратичних форм:

1) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$,

2) $Q(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

3) $Q(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3$.

Модель Леонтьева багатогалузевої економіки (балансовий аналіз).

Ефективне керування економікою передбачає наявність балансу між окремими галузями (франц. balance – рівновага). Для наглядної ілюстрації взаємного зв'язку між галузями користуються так званими таблицями міжгалузевого балансу. Математична модель таких таблиць, що допускала широкі можливості аналізу, розроблена Василієм Леонтьевим у 1936р. (*Василій*

Леонтьєв (1905-1999) емігрував в США із СРСР в 1925р. В 1973р. йому було присуджена Нобелівська премія за роботи в сфері економіки.)

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік). Припустимо, що розглядається n різних галузей, кожна з яких виробляє свій продукт.

Позначимо: x_i – загальний (валовий) об'єм продукції галузі і x_{ij} – об'єм продукції i-ої галузі, що споживається j–ою галуззю в процесі виробництва; y_i – об'єм продукції галузі i для невиробничого споживання:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (1)$$

Рівняння (1) називається співвідношенням балансу.

Введемо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

який показує витрати продукції галузі i на виробництво одиниці продукції галузі j.

Систему (1) можна записати у вигляді (2)

$$X = AX + Y, \qquad (2)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор валового випуску, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – вектор кінцевого продукту,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця прямих витрат.

<u>Основна задача міжгалузевого балансу</u> полягає у відшуканні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Рівняння (2) можна переписати у вигляді:

$$(E - A)X = Y.$$

Якщо матриця *(E-A)* невироджена, то

$$X = (E - A)^{-1} Y .$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*.

Рівняння (2) називається *рівнянням лінійного міжгалузевого балансу або моделлю Леонтьева*.

Рівняння (2) можна використовувати з метою планування.

Приклад. Знайти матрицю повних витрат матриці прямих витрат *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \det(E - A) = 0.04, \quad S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Модель міжнародної торгівлі.

Модель міжнародної торгівлі (модель обміну) дає відповідь на питання, якими повинні бути співвідношення між державними бюджетами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була взаємовигідною, тобто щоб не було значного дефіциту торгівельного балансу для кожної з країн – учасниць. Проблема достатньо важлива, оскільки дефіцит в торгівлі між країнами породжує такі явища як ліцензії, квоти, торгівельні війни.

Для простоти викладення розглянемо три країни – учасниці торгівлі з державними бюджетами X_1, X_2, X_3, які умовно назвемо Алжир, Туніс, Марокко. Будемо вважати, що весь держбюджет кожної країни витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн.

Припустимо, що Алжир витрачає половину свого бюджету на закупівлю товарів всередині країни, $\frac{1}{4}$ – бюджету на товари з Тунісу, і $\frac{1}{4}$ – на товари з Марокко. Туніс витрачає порівну свій бюджет на закупівлю товарів в Алжирі, всередині країни та у Марокко. Марокко, в свою чергу, витрачає $\frac{1}{2}$ бюджету на закупівлю товари у Алжиру, $\frac{1}{2}$ бюджету на закупівлю в Тунісу і нічого не закупає всередині країни.

Введемо структурну матрицю торгівлі:

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{Алжир} & \textit{Туніс} & \textit{Марокко} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (1)$$

Зауважимо, що сума елементів матриці A в кожному стовпці =1.

Після підведення підсумків торгівлі за рік кожна країна отримає виручку:

$$p_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3 \quad (\textit{Алжир})$$

ш
$$p_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3 \quad (\textit{Туніс})$$

$$p_3=\frac{1}{4}X_1 \quad + \quad \frac{1}{3}X_2 \quad + \quad 0\cdot X_3 \qquad (\textit{Марокко})$$

Частка Алжиру *Частка Тунісу* *Частка Марокко*

Для того, щоб торгівля була збалансованою, необхідно вимагати бездефіцитність торгівлі для кожної країни:

$$p_i \ge X_i, \quad i=1,2,3.$$

Припущення: Умовою бездефіцитності торгівлі є рівність

$$p_i = X_i, \quad i=1,2,3.$$

В матричній формі твердження, що міститься в припущенні, має вигляд:

$$AX=X, \qquad (2)$$

де $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власний вектор X в моделі міжнародної торгівлі (1). Система рівнянь для знаходження X має вигляд (2), тобто

$$(A-E)X=0,$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що загальний розв'язок цієї системи має вигляд:

$$\begin{cases} X_1 = 2X_3, \\ X_2 = \dfrac{3X_3}{2}. \end{cases}$$

$X = (4;3;2)$ – власний вектор матриці (1).

Зокрема, це означає, що збалансованість торгівлі цих трьох країн може бути досягнута лише в тому випадку, коли держбюджети знаходяться в співвідношенні

$$X_1 : X_2 : X_3 = 4:3:2.$$

Лекція 2.1

Прямокутна система координат.

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Сукупність точки і базису називається *декартовою системою координат* в просторі на честь французького математика Р.Декарта. (*Рене Декарт (1596-1650)*). Точка O називається <u>*початком координат*</u>, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються <u>*осями координат*</u>.

Означення. Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається <u>*ортонормованим базисом*</u>.

Позначається ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$,

$$\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \widehat{(\vec{j}, \vec{k})} = \widehat{(\vec{k}, \vec{i})} = \frac{\pi}{2}.$$

Означення. <u>*Прямокутною декартовою системою координат*</u> називається декартова система координат, базис якої ортонормований.

Прямокутну систему координат позначають через *Oxyz* (*Ox* – вісь абсцисс, *Oy* – вісь ординат, *Oz* – вісь аплікат), а координаті площини – *Oxy*, *Oyz*, *Oxz*.

Нехай задана прямокутна система координат *Oxyz* і довільна точка *M*. Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки записують у вигляді

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \text{ або } \vec{r} = (x, y, z).$$

Координати точки *M* дорівнюють відповідним проекціям радіус-вектора цієї точки на осі координат, тобто

$$x = np_{ox}\overrightarrow{OM}, \quad y = np_{oy}\overrightarrow{OM}, \quad z = np_{oz}\overrightarrow{OM}.$$

Вектори в системі координат.

Нехай в системі координат *Oxyz* задано вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

З властивостей проекції випливає, що

$$a_x = np_{ox}\vec{a}, \quad a_y = np_{oy}\vec{a}, \quad a_z = np_{oz}\vec{a}.$$

Отже, координати вектора в системі координат *Oxyz* – це його проекції на осі координат.

Довжина вектора $\vec{a}$ визначається за формулою:

$$\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ міститься в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

і

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Цією формулою користуються для знаходження відстані між точками *A* і *B*.

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат:

$$\alpha = \overline{(\vec{a}, \vec{i})}, \quad \beta = \overline{(\vec{a}, \vec{j})}, \quad \gamma = \overline{(\vec{a}, \vec{k})}, \quad 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi.$$

Косинуси цих кутів називаються _напрямними косинусами_. Формули для напрямних косинусів мають вигляд:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Поділ відрізка в даному відношенні.

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$.

Координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{MB}\right| = \lambda$, визначається згідно з формул:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{x_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}.$$

Скалярний добуток двох векторів.

Розглянемо приклад.

Банк, який бере участь в будівництві багатоповерхових автомобільних стоянок в центрі Києва, доклав зусиль в отриманні кредитів в трьох комерційних банках. Кожен з них надав кредити на *20, 40 і 40* млн. грн. під річну відсоткову ставку відповідно *20%, 15%, 16%*.

В даному прикладі мова йде про два вектори: вектор кредитів $\vec{c} = (20{,}40{,}40)$ і вектор відсоткових ставок $\vec{p} = (20{,}15{,}16)$.

Використовуючи простий розрахунок, керуючий банком може визначити, скільки потрібно платити в кінці року за кредити, взяті у трьох банків:

$$20 \cdot 1{,}2 + 40 \cdot 1{,}15 + 40 \cdot 1{,}16 = 116{,}4 \text{ млн.. грн.}$$

На цьому прикладі видно, як утворюється своєрідна операція над векторами в тривимірному просторі, яка називається скалярним добутком.

Означення. На лінійному просторі заданий _скалярний добуток_, якщо є правило, за яким двом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ставиться у відповідність число $\vec{a} \cdot \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$, яке задовольняє наступним аксіомам:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, якщо $\vec{a}\neq 0$, і якщо $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, то $\vec{a}=0$.

Означення. *Скалярним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}, (\vec{a},\vec{b})$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \qquad \text{де } \varphi=\overline{(\vec{a},\vec{b})}.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Приклад. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b},\quad \vec{n}=4\vec{a}+5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2,\quad \overline{(\vec{a},\vec{b})}=\dfrac{\pi}{3}$. $\qquad \vec{m}\cdot\vec{n}=-54.$

Нехай задано вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, тоді згідно властивостей скалярного добутку

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2.1}$$

Означення. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Вкажемо ряд важливих висновків з формули (2.1):

i. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\Leftrightarrow\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)-$ перпендикулярні (ортогональні).

ii. $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Розглянемо *економічний приклад* на ортогональність векторів.

Одним із способів знаходження індексу цін і рівня інфляції є визначення вартості «споживчого кошику», яка складається з 300 видів товарів і послуг, які отримують споживачі. В наведеній таблиці наведені дані умовного прикладу того, як можна розрахувати індекс цін для деякого визначеного періоду по відношенню до попереднього.

Вид товару	Кількість	Ціна одиниці товару в поточний період	Витрати в поточному періоді	Ціна одиниці товару в попередній період	Витрати в попередньому періоді
Яйця Хліб М'ясо	10 5 1	1,6 7 90	16 35 90	1,5 6 80	15 30 80
Загальні витрати			141		125

Розрахунок індексу цін $\frac{141}{125}\cdot 100\% = 112{,}8\%, \quad 12{,}8\%$ – інфляція.

Позначимо через $\vec{q} = (10;5;1)$ – вектор кількості товарів, що споживаються; $\vec{c} = (1{,}6;7;90)$ –– вектор цін в поточному періоді; $\vec{c}_n = (1{,}5;6;80)$ –– вектор цін в попередньому періоді. Тоді індекс цін обчислюється за формулою:

$$\vec{p} = \frac{(\vec{c},\vec{q})}{(\vec{c}_n,\vec{q})}\cdot 100\% \Rightarrow \vec{p}\cdot(\vec{c}_n,\vec{q}) = (100\vec{c},\vec{q}) \Rightarrow (100\vec{c} - \vec{p}\vec{c}_n,\vec{q}) = 0\,.$$

Таким чином, індекс цін *p* можна визначити як коефіцієнт, який робить вектор $\vec{q}$ ортогональним вектору $100\vec{c} - \vec{p}\vec{c}_n$.

Індекс інфляції отримується з формули:

$$i = p - 100 = \frac{(\vec{c},\vec{q})}{(\vec{c}_n,\vec{q})}\cdot 100 - 100 = \frac{(\vec{c} - \vec{c}_n,\vec{q})}{(\vec{c}_n,\vec{q})}\cdot 100\,.$$

Приклад. Трикутник заданий вершинами *A(0;-1;2), B(-1;-2;7), C(1;-2;6).* Знайти його внутрішній кут *A*.

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{20}{9\cdot\sqrt{6}} \approx 0{,}91, \quad \varphi \approx 25^0$$

Векторний добуток двох векторів.

Означення. *Векторним добутком* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими умовами:

1) Довжина вектора $\vec{c}$ визначається наступним чином $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

2) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Векторний добуток позначається одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

Властивості векторного добутку.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}),\quad \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні;
5. Модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$
6. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Векторний добуток вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на вектор $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти площу трикутника, заданого вершинами *A(1;2;0)*, *B(0;-2;1)*, *C(-1;0;2)*. $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{2}$.

Мішаний добуток векторів

Означення. Скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ називається <u>*мішаним добутком*</u> векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Властивості мішаного добутку

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$;
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$;
3. Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \left| \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \right|.$$

Приклад. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами *A(2;-1;0), B(5;5;3), C(3;2;-2), D(4;1;2).*

$$V = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Лекція 2.2

Пряма на площині.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої; двома точками прямої тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Означення. Ненульовий вектор $\vec{s} = (m; n)$ називається *напрямним* вектором прямої, якщо він паралельний цій прямій.

Якщо пряма *l* розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0;y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$, то рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (2.2.1)$$

називається *канонічним рівнянням прямої*.

Рівняння

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt \qquad (2.2.2)$$

називається *параметричним рівнянням прямої*, де t – довільний параметр.

Якщо пряма проходить через т. $M_0(x_0;y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s} = (m;0)$, і рівняння (2.2.1) має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (2.2.3)$$

називається рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт, а рівняння

$$y = kx + b \qquad (2.2.4)$$

рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k = \frac{n}{m} = tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox, називається кутовим коефіцієнтом, а величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$ – ордината точки перетину прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.2.5)$$

Зокрема, якщо пряма проходить через точки $A(a;0)$ та $B(0;b)$, то з (2.2.5) маємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2.2.6)$$

Рівняння (2.2.6) називається *рівнянням прямої у відрізках на осях*.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1;y_1)$, перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A;B)$ має вигляд:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (2.2.7)$$

Вектор $\vec{n} = (A;B)$ називається *нормальним вектором прямої*.

Кут між двома прямими.
Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2},\quad \varphi \text{ – кут між прямими, } \varphi=(\overline{l_1,l_2}),$$

тоді

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

Якщо прямі l_1 та l_2 паралельні, то

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};$$

Якщо прямі l_1 та l_2 перпендикулярні, то

$$m_1m_2+n_1n_2=0.$$

б) Нехай прямі l_1 та l_2 задано рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

тоді дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

2) умову паралельності між прямими l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

в) Нехай прямі l_1 та l_2 задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y=k_1x+b_1,\quad y=k_2x+b_2,$$

де $k_1=\tan\alpha_1$, $k_2=\tan\alpha_2$ – кутові коефіцієнти, тоді

$$\tan\varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

$k_1 = k_2$ – умова паралельності двох прямих;

$k_1 k_2 + 1 = 0$ або $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ – умова перпендикулярності двох прямих.

Відстань від точки до прямої.

Відстань d точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ знаходиться за формулою

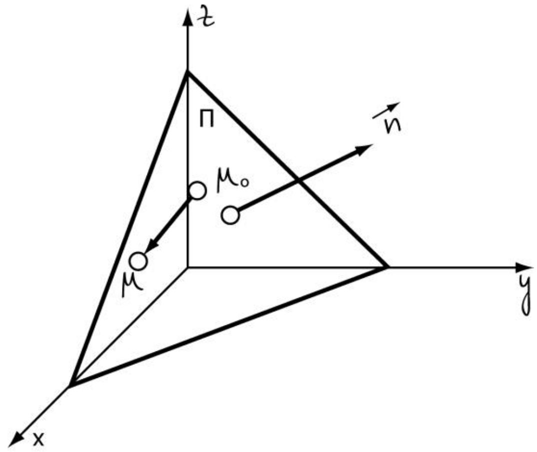
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.2.8)$$

Лекція 2.3

Площина в просторі.

Загальне рівняння площини та його дослідження.

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину Π точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A;B;C)$, що є перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку $M(x,y,z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.



При довільному положенні точки M на площині Π вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємноперпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.3.1)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.3.2)$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Рівняння (2.3.1) називається *рівнянням площини, яке проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до вектора* $\vec{n}=(A;B;C)$, а рівняння (2.3.2) – *загальним рівнянням площини*.

Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ називається *нормальними вектором* площини.

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівнянні (2.3.2) *D=0*, то воно набирає вигляду $Ax+By+Cz=0$. Це рівняння задовольняє точку *O(0;0;0)*. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.
2. Якщо *A=0*, то рівняння (2.3.2) набирає вигляду $By+Cz+D=0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n}=(0;B;C)$ перпендикулярний до осі *Ox*. Отже, таке рівняння визначає площину, що паралельна осі *Ox*.

Аналогічно рівняння $Ax+Cz+D=0$ визначає площину, паралельну осі *Oy*, а рівняння $Ax+By+D=0$ – площину, що паралельна осі *Oz*.

3. Якщо $A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$, то рівняння (2.3.2) набирає вигляду $Cz+D=0$або $z=-\dfrac{D}{C}$. Це рівняння визначає площину, що паралельна площині *Oxy*.

Аналогічно рівняння $By+D=0$ визначає площину, що паралельна площині *Oxz*, а рівняння $Ax+D=0$ визначає площину, що паралельна площині *Oyz*.

4. Якщо в рівнянні (2.3.2) $A=D=0$, то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь *Ox*. Площина $Ax+Cz=0$ проходить через вісь *Oy*, а $Ax+By=0$ проходить через вісь *Oz*.
5. Якщо в рівнянні площини (2.3.2) $A=B=D=0$, то рівняння $Cz=0, z=0$ збігається з площиною *Oxy*. Рівняння *x=0* збігається з площиною *Oyz*, а . *y=0* – з площиною *Oxz*.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *M(1;2;3)* перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(-1;-3;1)$. $x+3y-z-4=0$.

Рівняння площини, що проходить через три точки.

Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай на площині *П* задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій.

Рівняння площини, що проходить через три точки, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.3.3)$$

Приклад. Знайти загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;2)$, $M_3(-2;1;0)$. $5x-3y-4z+13=0$.

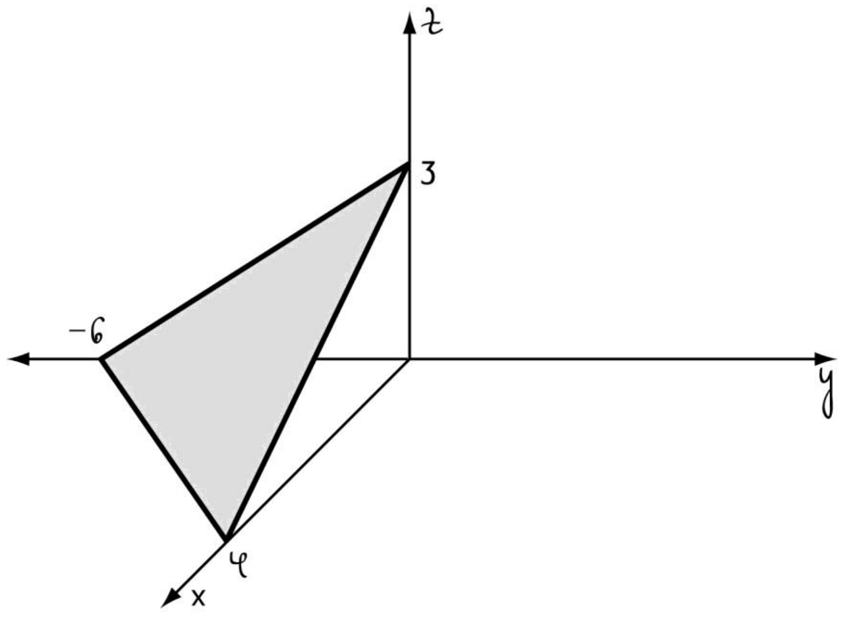
Якщо площина відтинає на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* відрізки *a*, *b*, *c*, то проходить через точки *A(a;0;0)*, *B(0;b;0)*, *C(0;0;c)*.

Підставляючи координати цих точок у формулу (2.3.3) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$xbc+yac+zab-abc=0 \text{ або } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2.3.4)$$

Рівняння (2.3.4) називається *рівнянням площини у відрізках на осях*. Ним зручно користуватися при побудові площини.

Приклад. Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.



$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1 \quad \Rightarrow \quad a=4, \quad b=-6, \quad c=3\,.$$

Кут між двома площинами.

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.

Нехай задано дві площини $П_1$ і $П_2$ відповідно рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,.$$

Косинус кута між площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\,.$$

Якщо площини $П_1$ і $П_2$ перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$$

є умовою перпендикулярності площин.

Якщо площини $П_1$ і $П_2$ паралельні, то умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\,.$$

Відстань від точки до площини.

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини $П$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини $П$ знаходяться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Приклад. Знайти відстань між площинами $2x-y+2z+9=0$ і $4x-2y+4z-21=0$. $d=\frac{13}{2}$

Лекція 2.4

Пряма лінія в просторі.

Різні види рівнянь прямої в просторі.

Нехай у просторі в прямокутній системі координат задану пряму точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(m;n;p)$.

Візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ цієї прямої, тоді аналогічно до прямої на площині дістанемо:

1) параметричне рівняння прямої в просторі:

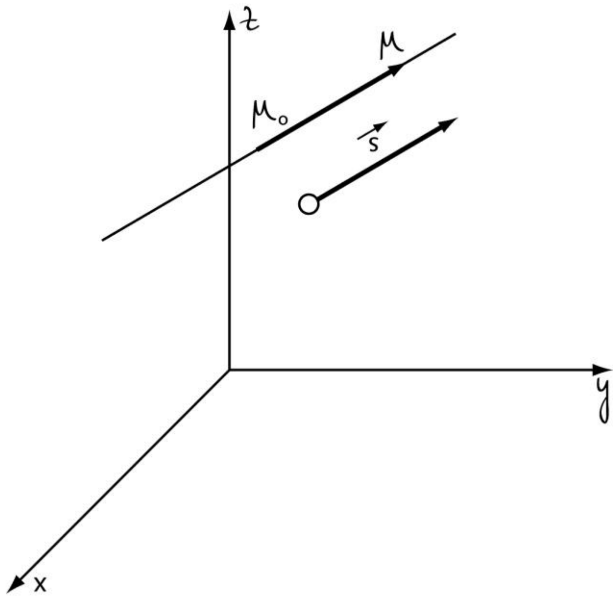
$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt;\ t - \text{параметр} \qquad (2.4.1)$$

2) канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (2.4.2)$$

3) рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.4.3)$$



Система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}. \qquad (2.4.4)$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2;B_2;C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (2.4.4) називається *загальним рівнянням прямої в просторі*.

Щоб від загальних рівнянь (2.4.4) перейти до канонічних рівнянь (2.4.2), потрібно знайти точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$. Для знаходження точки M_0 одну із її координат, наприклад, $x=x_0$ беруть довільно, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0, \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 - A_2 x_0. \end{cases}$$

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходиться як векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Звести рівняння прямої $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

$M_0(0;-1;-2)$ $\qquad \vec{s} = \begin{vmatrix} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ & A_2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z+2}{-3}$.

Кут між двома прямими.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Аналогічно до попереднього дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 та l_2:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

2) Умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3) Умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Кут між прямою і площиною.

Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Нехай площина *П* і пряма *l* задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Кут між прямою і площиною знаходиться за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\left|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Якщо пряма *l* || площині *П*, то $A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$ – умова || прямої і площини.

Якщо пряма *l* перпендикулярна площині *П*, то $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ є умовою перпендикулярності прямої і площини.

Рівняння площини в декартовій прямокутній системі координат:

1) яка проходить через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та || вектору $\vec{s} = (m; n; p) \neq 0$ (|| прямій $\frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p}$):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

2) яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та || векторам $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) \neq 0$, $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2) \neq 0$ (паралельна прямим $\frac{x - x_2}{m_1} = \frac{y - y_2}{n_1} = \frac{z - z_2}{p_1}$, $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

3) яка проходить через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та $M_1(x_1,y_1,z_1)$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0;$$

4) яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0;$$

5) яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$:

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0.$$

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$ має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

Лекція 2.5

Лінії другого порядку.

Означення. Ліня другого порядку – це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0, \qquad (2.5.1)$$

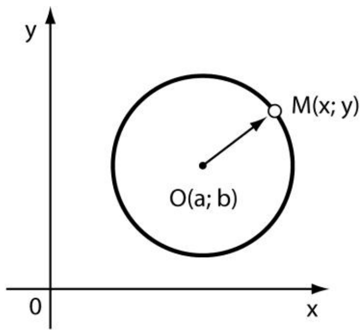
де a, b, c, d, e, f – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел $a,b,c\neq 0$, тобто $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Зокрема, до ліній ІІ-го порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. *Виявляється також, що множиною точок (x;y) з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (2.5.1), може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння (2.5.1) може визначати на площині Oxy також 2 прямі, 1 пряму, точку або не визначати жодної точки.*

Коло.

Колом називають множину точок площини, відстань яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнює сталому числу (радіусу).

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2.5.2)$$



Рівняння (2.5.2) називається *рівнянням кола*, де *O(a;b)* – центр кола, *R* – радіус кола, *M(x,y)* – довільна точка площини.

Якщо в рівнянні (2.5.2) відкрити дужки, то дістанемо *загальне рівняння кола*:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

де $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-R^2$.

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $a=b=0$ і рівняння (2.5.2) набуває вигляду:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2.5.3)$$

Рівняння (2.5.3) називається *канонічним рівнянням кола*.

Приклад. 1) Написати рівняння кола, якщо точки *A(-1;4)* і *B(3;2)* є кінцями його діаметра. $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

2) Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2+4x-6y-23=0$.

$$(x+2)^2+(y-3)^2=36, \quad O(-2;3), \quad R=6.$$

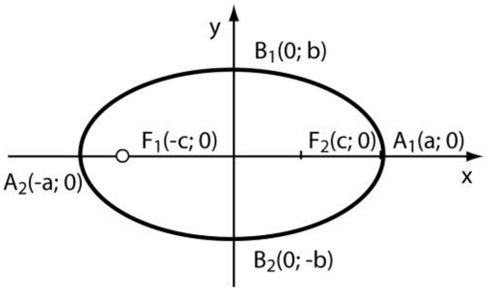
Еліпс.

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.5.4)$$

називається *канонічним рівнянням еліпса*.



$F_1(-c;0), F_2(c;0)$ – фокуси еліпса, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається ексцентриситетом еліпса і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \qquad (2.5.5)$$

причому $0\le\varepsilon<1$, оскільки $0\le c<a$.

Отже, якщо $\varepsilon=0$, тобто $b=a$, то еліпс перетворюється в коло; якщо $\varepsilon\to1$, то відношення осей $\frac{b}{a}$ зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox.

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(3;2)$ і $M_2(4;\frac{2\sqrt{2}}{3})$. $\qquad \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$

Гіпербола.

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2.5.6)$$

де $b^2=c^2-a^2$, $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ – фокуси.

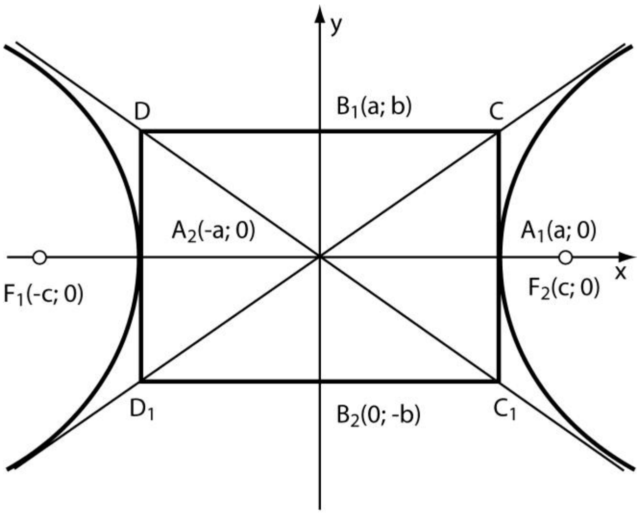
Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називаються осями гіперболи, а точка перетину осей – її центром. Вісь *Ox* перетинає гіперболу в двох точках $A_1(a;0), A_2(-a;0)$, які називаються *вершинами гіперболи*. Ця вісь називається дійсною віссю гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою, – уявною віссю.

Прямокутник із сторонами *2a* і *2b* називається *основним прямокутником гіперболи*.

При побудові гіперболи (2.5.6) доцільно спочатку побудувати основний прямокутник $C_1Д_1СД$, провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника – асимптоти гіпербол і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.



Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

також визначає гіперболу, яка називається *спряженою* до гіперболи (2.5.6).

Гіпербола з рівними півосями ($a=b$) називається *рівносторонньою*, її канонічне рівняння має вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ексцентриситет гіперболи визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

$$c > a \Rightarrow \varepsilon > 1.$$

Ексцентриситет гіперболи характеризує її форму.

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі Ox симетрично початку координат, якщо $2a=6$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

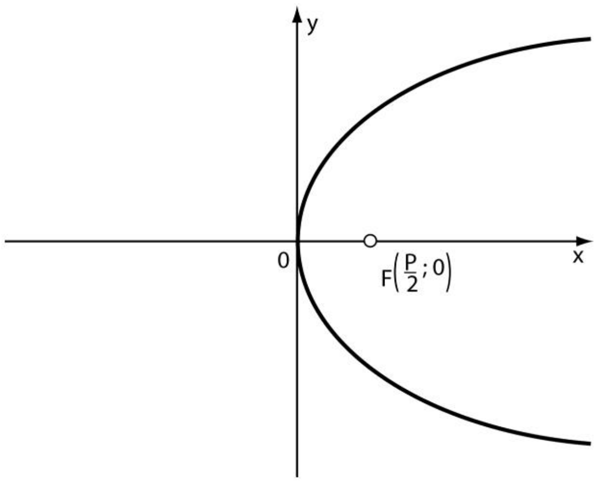
Парабола.

<u>*Параболою*</u> називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Рівняння

$$y^2 = 2px \qquad (2.5.7)$$

називається канонічним рівнянням параболи.



$F(\frac{p}{2};0)$ – фокус параболи; $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси.

Лекція 3.1

Вступ до математичного аналізу

Введемо деякі позначення і символи, які надалі будемо використовувати для зручності запису:

$\forall$ –будь-який, довільний, любий;

! – єдиний;

$\exists$ – існує; ($\not\exists$ – не існує)

$\nearrow$ – зростає;

$\searrow$ – спадає;

: – такий, що

$\Rightarrow$ – необхідність;

$\Leftarrow$ – достатність;

Границя послідовності

Якщо для $\forall n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ називають *числовою послідовністю* і позначають символом $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називаються *членами* або *елементами* послідовності.

Приклад. $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$; $\quad x_n = \dfrac{1}{n}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо $\exists M > 0$:

$$|x_n| \le M$$

виконується для $\forall n \in N$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається монотонно зростаючою (монотонно спадною), якщо $x_{n+1} \ge x_n$ $(x_{n+1} \le x_n), \forall n \in N$.

Приклад. $x_n = \dfrac{1}{n}$ – обмежена, монотонно спадна послідовність;

$x_n = n^2$ – необмежена, монотонно зростаюча послідовність.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

і позначається

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Означення. Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, а яка не має границі – *розбіжною*.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{4n-3} = \dfrac{1}{2}$.

Нехай $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+1}{4n-3}\right\}$, тоді $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2n+1}{4n-3} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{4n-3}$. Задамо $\forall\, \varepsilon > 0$.

Нерівність $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ виконуватиметься, якщо $\dfrac{5}{4n-3} < \varepsilon$, звідки $n > \dfrac{5}{4\varepsilon} + \dfrac{3}{4}$.

Позначимо через N найбільше ціле число, яке не перевищує $\dfrac{5}{4\varepsilon} + \dfrac{3}{4}$:

$$N = E\left[\frac{5}{4\varepsilon} + \frac{3}{4}\right].$$

Тоді для $\forall\, n > N$ матимемо $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{4n-3} = \dfrac{1}{2}$.

Приклад. Послідовність $x_n = (-1)^n$ розбіжна, оскільки не має границі.

Властивості збіжних послідовностей

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c, \quad c = const$.
2. Якщо $\{x_n\}$ має границю, то ця границя !.
3. $\{x_n\}$, яка має границю, є обмеженою.
4. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a<b$. Тоді $\exists N: \quad \forall n > N$ виконується нерівність $x_n < b$.
5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо $\{x_n\}$ при $\forall n > N$ задовольняє нерівність $x_n \le b$, то $a < b$.
6. Якщо $x_n \ge y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \ge b$.

Означення. Перехід від нерівності $x_n \ge y_n$ до $a \ge b$ називається <u>*граничним переходом*</u> у нерівності.

7. (Теорема про двох міліціонерів і п’яничку): Нехай виконується нерівність $x_n \le u_n \le y_n$. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то $\{u_n\}$ також збіжна, і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.
8. Теорема Больцано-Веєрштрасса (*Бернард Больцано (чех, 1781-1848), Карл Рейєрштрасс (німець (1815-1897)*)) $\forall$ монотонно обмежена послідовність має границю.

Означення. Границя послідовності $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ називається числом *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281828459045.$$

Означення. $\{x_n\}$ називається <u>*нескінченно малою*</u>, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Означення. $\{x_n\}$ називається <u>*нескінченно великою*</u>, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема. Якщо $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – збіжні послідовності, і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то послідовності $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ також збігаються і виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

Границя відношення двох многочленів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_l}, & k = l, \\ \infty, & k > l, \\ 0, & k < l. \end{cases}$$

Границя функції

Нехай задано множини *X* та *Y*.

Означення. Відповідність, при якій кожному елементу $x \in X$ відповідає ! елемент $y \in Y$, називається функцією і позначається $y = f(x)$.

Множина *X* називається *областю визначення функції*, а множина *Y* – *множиною значень функції*.

Означення. Нехай $x \in (a;b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на $(a;b)$. Якщо для $\forall$ збіжної $\{x_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \neq x_0)$ $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то говорять, що функція $y = f(x)$ має границю *A* при $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Теореми про границі функції

Теорема 1. Якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, то функція $f(x)$ є обмеженою при $x \to x_0$.

Теорема 2. Якщо $f(x) = c = const$, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

Теорема 3. Якщо $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ і $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = A$, то $\exists$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Теорема 4. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0, причому $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, то функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також мають границі, і виконуються такі співвідношення:

i. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

ii. $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$;

iii. $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad B \ne 0$.

Лекція 3.2

Розкриття невизначеностей

Особливі границі

Перша особлива («чудова») границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наслідки:

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$;
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$;
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$;
4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$;

Приклад: Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$.

Друга особлива («чудова») границя

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

○ Для $\forall x\in R$ виконується нерівність $n\le x<n+1, n\in N$, тоді $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$ або $1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=e.$$

За теоремою про «двох міліціонерів» або «охоплену» послідовність, маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \quad \bullet$$

<u>Наслідки:</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$.

При знаходженні границь, які пов’язані з другою особливою границею, зручно користуватися наступною формулою:

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\left[1^{\infty}\right]=e^{k},$$

$$\lim_{x\to x_0}v(x)(u(x)-1).$$

Приклади: Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}=e^{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=e^{10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^{2}3x}}=e^{-\frac{2}{9}}$.

Порівняння нескінченно малих функцій.

Еквівалентні нескінченно малі функції

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення.

Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ – *нескінченно малі* функції при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0;\quad \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0.$$

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку* при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0,\quad A\in R.$$

Приклад. Функції $\alpha_1(x)=\sin 3x$ та $\alpha_2(x)=x$ – нескінченно малі одного порядку при $x\to 0$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\neq 0$.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0.$$

<u>Приклад</u>. Функції $\alpha_1(x) = x^2$ при $x \to 0$є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x) = \tan x$ при $x \to 0$, тому що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 0$.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ називається *<u>нескінченно малою нижчого порядку</u>*, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty.$$

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються *<u>еквівалентними нескінченно</u>* малими, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

<u>Теорема 1</u>. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$ і $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$, і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає можливість при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$$\sin\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0, \quad e^{\alpha} - 1 \sim \alpha, \quad \alpha \to 0,$$

$$\tan\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0, \quad a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln\alpha, \quad \alpha \to 0,$$

$$\arcsin\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0, \quad \log_a(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}, \quad \alpha \to 0,$$

$$\arctan\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0, \quad \ln(1+\alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \to 0,$$

$$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \to 0, \quad (1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \quad k > 0, \quad \alpha \to 0.$$

Ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою *правила Лопіталя*.

<u>Теорема 2</u>. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

<u>Приклад.</u> Обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+\tan^2 x-10x^3}{2x-x^5}=\left|\begin{matrix}\sin 6x+\tan^2 x-10x^3 \sim 6x \\ 2x-x^5\sim 2x\end{matrix}, x\to 0\right|=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3.$$

Розкриття деяких невизначеностей

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

$$\frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad 0\cdot\infty;\quad \frac{0}{0};\quad \infty^0;\quad 1^\infty.$$

Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*.

1. Невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Щоб розкрити таку невизначеність, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь *x* у цих многочленах.

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{3x^4+x^2-10x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}}=\dfrac{1}{3}.$

2. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Щоб розкрити таку невизначеність, треба у чисельнику і знаменнику виділити *<u>критичний множник</u>* і скоротити на нього дріб.

Означення. Множник $x-x_0$, через який чисельник і знаменник $\to 0$, називається *<u>критичним множником</u>*.

Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{3}.$

3. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Щоб розкрити таку невизначеність, треба позбутися ірраціональності.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{2}{3}.$$

4. Невизначеності виду $\infty-\infty$ задані ірраціональними виразами.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\frac{5}{2}.$$

5. Невизначеності виду $\frac{0}{0}$ задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої особливої границі.

$$\text{Знайти } \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}.$$

6. При розкритті невизначеності виду 1^{∞} використовують другу особливу границю.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Лекція 3.3

Неперервність функції

З поняттям границі функції тісно пов’язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття *неперервності функції*.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається <u>*неперервною*</u> в точці x_0, якщо ця функція визначена в цій точці і для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$: при $|x-x_0|<\delta$ виконується нерівність

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

або якщо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Означення. Функція $y=f(x)$ називається <u>*неперервною зліва*</u> в точці x_0, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0-\varepsilon;x_0]$, де $\varepsilon>0$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається <u>*неперервною справа*</u> в точці x_0, якщо вона визначена на півінтервалі $[x_0;x_0+\varepsilon)$, де $\varepsilon>0$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Використовуючи ці означення, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 $\Leftrightarrow$, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0). \qquad (3.3.1)$$

Дамо означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається <u>*приростом аргументу*</u> в точці x_0 і позначається Δx:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається <u>*приростом функції*</u> в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Рівність

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$$

або

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так:

Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається <u>*неперервною*</u> в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0, називається <u>*розривною*</u> в цій точці.

Розрізняють таки види розривів. Якщо для функції $f(x)$ $\exists$ скінчені границі

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому числа $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називають <u>*розривом I-го роду*</u>, а точку x_0 – точкою розриву I-го роду.

Означення. Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив в точці x_0 називають <u>*усувним розривом*</u>, а точку x_0 – точкою усувного розриву.

У цьому випадку досить довизначити функцію лише в точці x_0, поклавши $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0.

Величину

$$\delta=\left|\lim_{x\to x_0-0} f(x)-\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right|$$

називають *стрибком функції*.

Означення. Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (3.3.1) не існує або $=\infty$, то розрив в точці x_0 називається *розривом ІІ-го роду*, а сама точка x_0 – точкою розриву ІІ-го роду.

Приклади. Дослідити функції на неперервність.

$$a)\quad f(x)=\frac{5}{1+3^{\frac{1}{x+1}}};\qquad b)\ f(x)=\frac{\left|\sqrt{x}-2\right|}{\sqrt{x}-2};\qquad c)\ f(x)=\frac{\sin x}{x};$$

$$d)\quad f(x)=x+4^{\frac{1}{x+5}};\qquad e)\ f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<1,\\ 2, & x=1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

Дії над неперервними функціями

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x)\pm g(x);\quad f(x)\cdot g(x);\quad \frac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\neq 0).$$

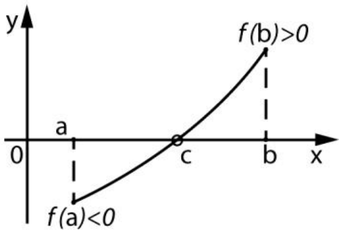
Теорема 2. Якщо функції $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0=f(x_0)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

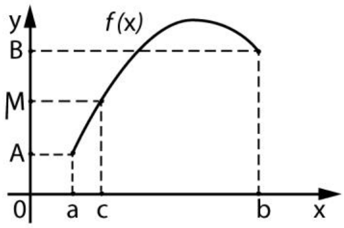
Означення. Функція $y=f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в $\forall$ точці цього інтервалу.

Означення. Функція називається неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;b)$, і, крім того, неперервна справа в точці $x=a$ і зліва в точці $x=b$.

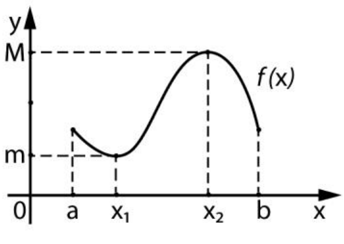
Теорема 3. *(I-а теорема Больцано-Коші (Больцано Бернард (1781-1848) – чех, Коші Огюстен Луї (1789-1857) – франц.))* Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набирає значень різних значень різних значень ($f(a)f(b)<0$), то всередині відрізка $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка $c\in[a;b]$: $f(c)=0, a<c<b$.



Теорема 4. *(II-а теорема Больцано-Коші)* Нехай функція неперервна на на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$. Тоді для $\forall\mu\in(A;B)$ $\exists c\in(a;b)$: $f(c)=\mu$.



Теорема 5. *(Вейєрштрасса (Карл Вейєрштрасс (1815-1897)-нім.))* Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку $\exists$ найменше ($m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$) і найбільше ($M=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$).



Лекція 3.4

Похідна та еластичність функції

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу $\to 0$.

Похідна функції $y=f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad y'_x, \quad f'(x).$$

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$f'(x_0), \quad f'(x)\big|_{x=x_0}, \quad y'\big|_{x=x_0}.$$

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають <u>*диференціюванням*</u> цієї функції.

Приклад. 1) Знайти похідну функції $y = x^2$.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x.$$

2) Знайти похідну функції $y = x^3$.

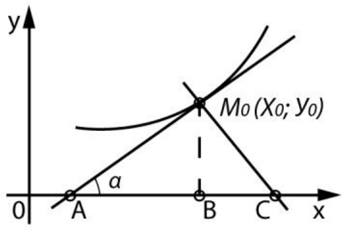
3) Знайти похідну функції $y = \sin x$.

Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є *швидкістю зміни* цього процесу. В цьому полягає *фізичний зміст* похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ або $\tan\alpha$, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі *Ox*, – це похідна $f'(x_0)$ в цій точці:

$$k = \tan\alpha = f'(x_0).$$

У цьому полягає *геометричний зміст* похідної.



Означення. Рівняння

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

називається <u>*рівнянням дотичної*</u> до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Означення. *Нормаллю* до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Означення. *Еластичністю* функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя

$$E_x(f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)}\right) =$$

$$= \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Еластичність – це коефіцієнт пропорційності між відносними змінами величин *y* та *x*.

Еластичність функції показує наближено на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ у разі зміни незалежної змінної *x* на *1%*.

Якщо $|E_x(f(x))| < 1$, то функція називається нееластичною.

Якщо $|E_x(f(x))| > 1$, то функція називається еластичною.

Правила диференціювання

Теорема 1. Якщо функції $u(x), v(x)$ – диференційовані в точці *x*, то сума, добуток, частка цих функцій також диференційовані в цій точці і справедливі такі формули:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема 2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці *x*, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u в точці *u*, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ має похідну y'_x в точці *x* і справедлива формула:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a;b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в $\forall$ точці цього інтервалу, то $\exists$ обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Означення. Похідна функції $\ln\left(|f(x)|\right)$, обчислена за формулою

$$\ln\left(|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

називається <u>*логарифмічною похідною*</u> функції $f(x)$ в точці *x*.

Приклад. а) Знайти *y'*, якщо $y = \dfrac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$;

б) знайти еластичність $E_x(y)$, якщо $y = (\sqrt{x} + \sin x)^{\tan x}$.

Нехай <u>*неявна функція*</u> *y(x)* задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Щоб продиференціювати *неявно задану функцію*, потрібно взяти похідну по *x* від обох частин рівності, вважаючи *y* функцією від *x*, і одержане рівняння розв'язати відносно *y'*.

Приклад. Знайти похідну неявно заданої функції *y'*, якщо $x^3 + y^3 = \sqrt{x - y}$.

Означення. Функція виду $y(x) = u(x)^{v(x)}$ називається <u>*показниково-степеневою функцією*</u>.

Похідна такої функції знаходиться лише логарифмічним диференціюванням

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \ln(u(x)) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

Приклад. Знайти *y'*, якщо $y(x) = x^{\sin x}$.

Формули диференціювання

Вважатимемо, що $u = u(x)$ – диференційована функція, *C* – стала.

1. $C' = 0$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
9. $(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',\ a > 1, a \neq 1,$

10. $(\cot u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

13. $(\arctan u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

14. $(arc\cot u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Диференціал функції

Поняття диференціала тісно пов’язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають *лінеаризацією процесу*.

Термін «диференціал» (від лат. слова *differential –різниця*) ввів у математику Лейбніц (Вільгельм Лейбніц (1646-1716) – німець).

Означення. *Диференціалом* dy функції $y = f(x)$ в точці x називається вираз

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{3.4.1}$$

Диференціал dy називається також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу (3.4.1) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \tag{3.4.2}$$

Формула (3.4.2) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала.

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної

Якщо $u(x), v(x)$ – диференційовані функції, а C – стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$$1.\ dC = 0 \qquad\qquad 4.\ d(uv) = v\,du + u\,dv$$

$$2.\ d(Cu) = C\,du \qquad\qquad 5.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$3.\ d(u \pm v) = du \pm dv$$

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ – складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x), \varphi(t)$ – диференційовані в точках x і t. Тоді $\exists$ похідна $y'_t = y'_x \cdot x'_t$, а отже і диференціал

$$dy = y'_t\,dt = y'_x \cdot x'_t\,dt = y'_x\,dx \qquad (3.4.3)$$

Порівнюючи формули (3.4.2) і (3.4.3), бачимо, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією і тією самою формулою незалежно від того, чи змінна x є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають *інваріантністю (незмінністю) форми диференціала*.

Диференціал застосовується в наближених обчисленнях

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Приклад. Наближено обчислити $\sqrt{1{,}08} \approx 1{,}04$.

Лекція 3.5

Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x), \quad x \in (a;b)$ – диференційована, тобто має похідну, яку називатимемо ще *першою похідною* (або похідною І-го порядку).

Означення. Похідну від І-ої похідної називають *другою похідною* (або похідною ІІ-го порядку) і позначають одним із символів:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Означення. Похідну від ІІ-ої похідної, якщо вона $\exists$, називають *третьою похідною* (або похідною ІІІ-го порядку) і позначають так:

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Означення. Похідною *n*-го порядку функції $y = f(x)$ називають похідну, якщо вона $\exists$, від похідної *(n-1)*-го порядку:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)',\ f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називаються *похідними вищого порядку*.

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначаються не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки, щоб не сплутати його з показником степеня.

<u>Приклад.</u> а) Знайти $y^{(4)}$, якщо $y = x^5 + 8x^3 - 4x^2 + 3$;

б) Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = e^{ax}$;

в) $y = \sin x, \quad y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$; $y = \cos x, \quad y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

Аналогічно визначаються диференціали вищих порядків.

Згідно з формули (3.4.2) перший диференціал функції $y = f(x)$, або *диференціал І-го порядку*

$$dy = f'(x)dx.$$

Другим диференціалом d^2y, або *диференціалом ІІ-го порядку* називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2.$$

n-им диференціалом d^ny, або *диференціалом n-го порядку*, називається диференціал від диференціала (*n*-1)-го порядку:

$$d^2y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

<u>Приклад.</u> Знайти d^3y, якщо $y = \sin 2x$.

Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма (*П'єр Ферма (1601-1665) – франц.)*. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c $\exists$ похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля (*Мішель Ролль (1652-1719) – франц.*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]$, диференційована в інтервалі $(a;b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то $\exists$ принаймні одна точка $c \in (a;b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Теорема Коші (*Огюстен Луї Коші (1789-1857) – франц.*) Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[a;b]$, диференційовані в інтервалі $(a;b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in (a;b)$, то $\exists$ така точка $c \in (a;b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Лагранжа (*Жозеф Лагранж (1736-1813) – франц.*) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]$, диференційована в інтервалі $(a;b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться принаймні одна точка $c \in (a;b)$, в якій

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Останню формулу називають *формулою Лагранжа*, або *формулою скінчених приростів*.

Застосування диференціального числення до обчислення границь

Правило Лопіталя (*Гійом Франсуа Лопіталь (1661-1704) – франц.*)

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0,$$

і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\exists$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. І ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Якщо похідні $f'(x)$, $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\dfrac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x\to x_0$. Цю саму границю має й відношення функцій $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Теорема 1 дає змогу розкривати невизначеності виду $\dfrac{0}{0}$. Аналогічно формулюється теорема, яка стосується розкриття невизначеностей $\dfrac{\infty}{\infty}$.

<u>Приклад.</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;
2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність, і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в пп.1-7.

Приклад. Функція пропозиції та попиту деякої продукції відповідно:

$$y=\frac{x^2+162}{6x-27}, \quad y=\frac{29x+1338}{x^2-14},$$

де x – ціна одиниці продукції.

Визначте ціле значення ціни одиниці продукції, при якій пропозиція і попит врівноважуються, а також еластичність пропозиції та попиту при цій ціні. Дослідити та побудувати графіки функцій пропозиції та попиту.

Розв'язання. Дослідимо функцію пропозиції $y=\frac{x^2+162}{6x-27}$.

1. Область існування функції: $x\in(-\infty;\frac{9}{2})\cup(\frac{9}{2};+\infty)$.

2. Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями:

$$x=0, \quad y=-6; \qquad y=0, \quad x\in\varnothing.$$

3. Дослідимо функцію на періодичність, парність і непарність: *Функція загального вигляду*.

4. Знайдемо точки розриву. *В точці* $x=\frac{9}{2}$ *функція має розрив II-го роду, оскільки* $\lim\limits_{x\to\frac{9}{2}-0}\frac{x^2+162}{6x-27}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{9}{2}+0}\frac{x^2+162}{6x-27}=+\infty$.

5. Знайдемо інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках:

$$y'=\frac{6(x^2-9x162)}{(6x-27)^2}, \quad y'=0\Rightarrow x_1=-9,\ x_2=18.$$

x	$(-\infty;-9)$	-9	$(-9;\frac{9}{2})$	$\frac{9}{2}$	$(\frac{9}{2};18)$	18	$(18;+\infty)$
y'	+	0	–	∞	–	0	+
y	↗	–3	↘	∞	↘	6	↗

$$y_{mzx}=y(-9)=-3; \quad y_{\min}=y(18)=6.$$

6. Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину: $y''=\frac{6\cdot 2187}{(6x-27)^3}$.

x	$(-\infty;\frac{9}{2})$	$(\frac{9}{2};+\infty)$
y''	–	+
y	*опукла* $\cap$	*вгнута* $\cup$

7. Знайдемо асимптоти кривої:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+162}{6x^2-27x}=\frac{1}{6};$$

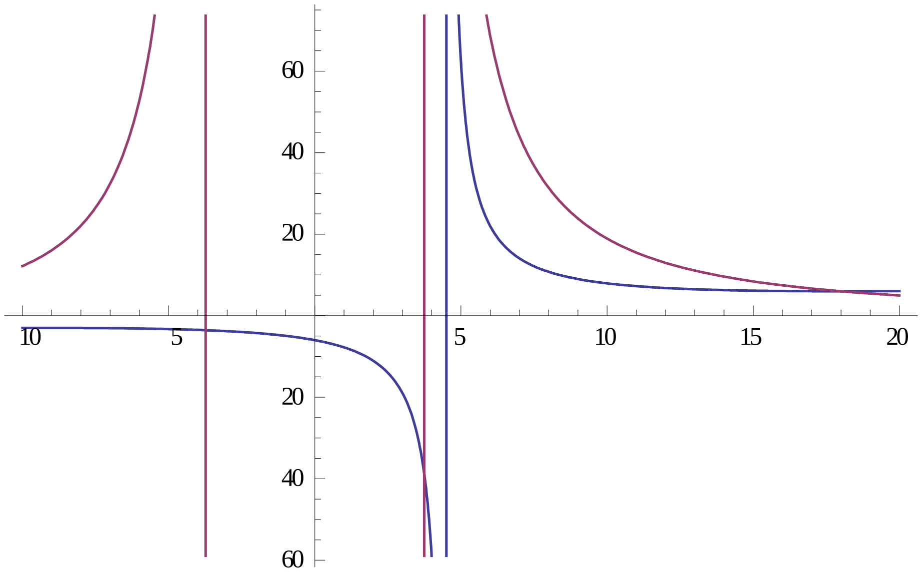
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2+162}{6x-27}-\frac{x}{6})=\ldots=\frac{3}{4}.$$

Отже, $y=kx+b=\frac{x}{6}+\frac{3}{4}$ – похила асимптота, $x=\frac{9}{2}$ – вертикальна асимптота.

Аналогічно досліджуємо функцію попиту $y=\frac{29x+1338}{x^2-14}$**.**

Пункт 6 в дослідженні функції попиту можна ***не робити****.*

Враховуючи проведені вище дослідження, будуємо графіки функцій пропозиції і попиту.



(Неважко бачити, легко переконатися тощо, що) Ціле значення одиниці продукції, при якій пропозиція і попит врівноважуються $x_{min}=18$.

Перевірка: $\frac{324+162}{108-27}=\frac{522+1338}{324-14}=6$.

Знайдемо еластичність пропозиції та попиту при цій ціні: $E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x)$.

Для І-ої функції $E_x(y) = \frac{18}{6} y'(18) = 0$.

Для ІІ-ої функції $E_x(y) = \frac{18}{6} \cdot \frac{(-29 \cdot 18^2 - 2676 \cdot 18 - 406)}{(18^2 - 14)^2} \approx -1.007$.

Лекція 4.1

Основні поняття функції багатьох змінних

Нехай задано множину *D* упорядкованих пар чисел *(x,y)*. Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число *z*, то кажуть, що на множині *D* визначено функцію *z* від двох змінних *x* і *y* і записують так:

$$z = f(x, y).$$

Множину пар (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називається *областю визначення* цієї функції і позначають $D(f)$.

Лінію, що обмежує область *D*, називають *межею області визначення*.

Приклад. Знайти та зобразити область визначення функції:

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \ln(y - x)$;
2. $z = \sqrt{xy - 1} + \log_2(4 - x^2 - y^2)$.

Нехай задано множину *D* упорядкованих точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, або, що теж саме, множину точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *n*-вимірного простору R_n.

Якщо кожній точці $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число *u*, то кажуть, що на множині *D* визначено функцію *u* від *n* змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і записують:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ або } u = f(M), \quad M \in R_n.$$

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних, оскільки результати для функції двох змінних легко по аналогії узагальнити на випадок більшого числа змінних.

Частинні похідні. Повний диференціал.

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M(x;y)$. Надамо змінній *x* приросту Δx, залишаючи змінну *y* незмінною.

Величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$ називається *частинним приростом* функції $f(x;y)$ по змінній *x*.

Аналогічно вводиться приріст $\Delta_y z$ функції по змінній *y*:

$$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y)$$

Якщо $\exists \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, то вона називається *частинною похідною* функції $f(x;y)$ в точці $M(x;y)$ по змінній *x* і позначається одним із таких символів:

$$z'_x,\ f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогічно частинна похідна функції $f(x;y)$ в точці $M(x;y)$ по змінній *y* визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y,\ f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних $u'_{x_1}, u'_{x_2}, \ldots, u'_{x_n}$, де

$$u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

<u>Приклад</u>. Знайти частинні похідні функцій:

a) $z = y \arccos(xy)$;

b) $u = x^2 z + \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Означення. Якщо $\exists$ частинна похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною II-го порядку від функції* $f(x,y)$ *по змінній* x і позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xx}, \quad f''_{x^2}.$$

Означення. Якщо $\exists$ частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то цю похідну називають *мішаною частинною похідною II-го порядку від функції* $f(x,y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ або } f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y.$$

Для функції двох змінних $f(x,y)$ можна розглянути чотири похідні II-го порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо $\exists$ частинні похідні від частинних похідних II-го порядку, то їх називають *частинними похідними III-го порядку функції* $f(x,y)$, їх вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Природно поставити питання: чи будуть рівними між собою мішані похідні, якщо вони взяті по одних і тих самих змінних, одне й те саме число разів, але в різному порядку?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Теорема Шварца (пр. мішані похідні) *(Шварц Герман (1843-1921)-нім.)*. Якщо функція $f(x,y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці

$$f''_{xy}\big|_{M_0} = f''_{yx}\big|_{M_0}.$$

Зауваження. Теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Приклад. Знайти частинні похідні ІІ-го порядку від функції $z = x^3 - yx^2 + y^2$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці $M(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *диференційованою* в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A та B – дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x, \Delta y \to 0$ функції.

Теорема 1(*про існування частинних похідних диференційованої функції*). Якщо функція $z = f(M)$ диференційована в точці $M(x, y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x, y)$, $f'_y = f'_y(x, y)$ і

$$\Delta z = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Означення. *Повним диференціалом* dz диференційованої в точці M функції $z = f(M)$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина приросту цієї функції в точці M, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{4.1.1}$$

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 1 рівність (4.1.1) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічно визначається диференціал для функцій трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Приклади.

1) Знайти повний диференціал функції $z = x\arccos(xy)$;

2) знайти частинний коефіцієнт еластичності $\varepsilon_y = \frac{y}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$ функції $f(x,y) = \sqrt[3]{y}\cdot\arctan\frac{x}{y}$;

3) знайдіть граничну норму заміщення $\delta_{xy} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ для функції $f(x,y) = (\cot x)^{\cos y}$;

4) знайти граничну вартість основного капіталу $\frac{\partial f}{\partial K}$ для функції Кобба-Дугласа $f(K,L) = 28\cdot K^{0,15}\cdot L^{0,85}$.

Функція Кобба-Дугласа – виробнича функція, застосована американськими дослідниками Чарльзом Коббом (1875-1949) і Полом Дугласом (1892-1976) при аналізу розвитку економіки США в 20-30 роках ХХ століття. Має просту алгебраїчну форму:

$$N = A\cdot L^{\alpha}\cdot K^{\beta},$$

де N – національний дохід; A – коефіцієнт розмірності; L і K – відповідно об'єми вкладеної праці і капіталу; α і β – константи (коефіцієнти еластичності виробництва по праці L і капіталу K).

Введемо поняття диференціала вищого порядку.

Нехай $z = f(x,y)$ функція незалежних змінних *x* і *y*. Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (4.1.1), називається ще *повним диференціалом I-го порядку*. *Диференціалом II-го порядку* називається диференціал від диференціалу I-го порядку:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Символічно це записують так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z .$$

Аналогічно, застосовуючи метод математичної індукції, дістанемо формулу для диференціала *n*-го порядку:

$$d^n z = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z .$$

Лекція 4.2

Похідна за напрямом. Градієнт.

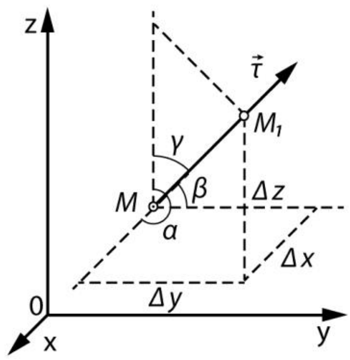
Область простору, кожній M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називається *скалярним простором*.

Прикладом скалярних полів є поле температури даного тіла, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається *стаціонарним*, а скалярне поле, яке змінюється з часом, – *нестаціонарним*.

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття *похідної за напрямом*.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.



На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тоді $\Delta l = \left| \overrightarrow{MM_1} \right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Приріст $\Delta_l u$

функції $u(x,y,z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$ має вигляд:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо $\exists$ границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то ця границя називається похідною функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$ або u'_l, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Формула для обчислення *похідної за напрямом* має вигляд:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cos\gamma.$$

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$.

Якщо скалярне поле задається функцією $z(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Означення. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ називається *градієнтом* функції в цій точці і позначають $grad\,u$:

$$grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема 1. Похідна функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_{\vec{l}}\, grad\, u.$$

Зауваження. Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |grad\, u| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}\ .$$

<u>Приклади</u>.

1) Знайти похідну функції $u(x,y,z) = 6\sqrt[3]{x^2+y^2} - \dfrac{xy}{z}$ у точці $M(-2;2;6)$ за напрямом, який утворює з осями координат рівні гострі кути ($\dfrac{\partial u}{\partial l} = -5\dfrac{\sqrt{3}}{3}$).

2) Знайти похідну функції $f(x,y) = \sqrt{8x - y^2} + \dfrac{5y}{x}$ у точці $M(1;2)$ за напрямом до точки $N(5;5)$ ($\dfrac{\partial f}{\partial l} = -4$).

3) Знайти градієнт функції $u(x,y,z) = x\sqrt{z^3 + 2y^2}$ у точці $M(-6;2;1)$ ($grad\, u = (3;-8;-3)$).

4) Знайти похідну функції $f(x,y) = 3\sqrt[3]{xy + \dfrac{3x}{y}}$ у точці $M(2;1)$ за напрямом її найбільшого зростання $\left(\dfrac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = \sqrt{2}$.

Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області *D*, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Якщо $\exists$ окіл точки M_0, який належить області *D* і для всіх точок *M* цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають <u>*точкою локального максимуму (локального мінімуму)*</u> функції $f(x,y)$, а число $f(M_0)$ – <u>*локальним максимумом (локальним мінімумом)*</u>.

Теорема 1 (*необхідні умови екстремуму*). Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці (x_0, y_0) локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні І-го порядку по змінних *x* та *y* дорівнюють нулю або $\nexists$.

Означення. Точку (x_0, y_0), в якій частинні похідні І-го порядку функції $f(x,y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають *стаціонарною точкою* функції $f(x,y)$.

Теорема 2 (*достатні умови екстремуму*). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні ІІ-го порядку. Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0,$$

то функція $f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці M_0 функція $f(x,y)$ екстремуму не має.

На основі теорем 1 і 2 дістанемо правило дослідження диференційованої функції двох змінних на екстремум.

Щоб знайти екстремум диференційованої функції $z = f(x,y)$, необхідно:

1) Знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

2) У кожній стаціонарній точці (x_0, y_0) обчислити вираз:

$$\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2,$$

де

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) – точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $A<0$ і мінімуму при $A>0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму функції.

3) Обчислити значення функції $f(x,y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

<u>Приклади.</u> Знайти екстремум функції:

1) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy - 14x + 6y$; $M_1(2,-1)$, $M_2(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{3})$, $z_{\min} = z(2;-1) = -21$.

2) $f(x,y) = e^{-x}(x^2 + y^2 - 2y - 2)$; $M_1(3;1)$, $M_2(-1;1)$, $z_{\min} = z(-1;1) = -2e$.

Умовний екстремум

Означення. *Умовним екстремумом* функції $z = f(x,y)$ називається максимум або мінімум цієї функції, досягнутий при умові, що її аргументи пов'язані рівнянням $\varphi(x,y) = 0$ (рівняння зв'язку).

Щоб знайти умовний екстремум функції $f(x,y)$ при умові $\varphi(x,y) = 0$ складають так звану *функцію Лагранжа*:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

де λ – стала, і шукають звичайний екстремум цієї допоміжної функції.

Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$
$$\varphi(x,y) = 0.$$

Питання про $\exists$ і характер умовного екстремуму вирішується за допомогою другого диференціала функції Лагранжа:

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}dy^2.$$

А саме, функція $z = f(x,y)$ має умовний максимум, якщо $d^2F < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2F > 0$.

Приклад. Знайти екстремум інвестиційної функції $f(x,y) = 32x - 24y$ при умові рівноваги $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 25$ $\left(\begin{matrix} z_{\min} = z(-5;10) = -400, & \lambda = 4 \\ z_{\max} = z(3;4) = 0, & \lambda = -4 \end{matrix}\right)$.

Найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Функція, диференційована в обмеженій замкненій області, досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці або в точці границі області.

Для того, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $z = f(x,y)$ в області *D*, потрібно знайти всі внутрішні стаціонарні точки, обчислити значення функції в них і порівняти зі значеннями функції на границі області; найбільше (найменше) із цих значень і буде найбільшим (найменшим) значенням в цій області.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 3$ в області $x \ge -3,\ y \ge -1,\ x + y + 1 \le 0$

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 4, \quad \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -1.$$

Лекція №1_1

Первісна функція. Невизначений інтеграл.

Інтеграл – одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами:

1) про відновлення функції по заданій її похідній;
2) про обчислення площі, обмеженої графіком функції $y = f(x),\ x \in [a,b]$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю *OX*.

Термін «інтеграл» ввів Якоб Бернуллі у 1690 році *(Якоб Бернуллі (1654-1705) – швейц. матем.)*. В історії математики цей термін пов'язують з двома латинськими словами: *integro – відновляти* та *integer – цілий.*

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо $F(x)$ диференційована на (a,b) і $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

Приклад. Первісною функції $f(x) = x$ є функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$, оскільки $F'(x) = f(x)$; очевидно, що первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, де *C* – довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x,\ x \in R$.

<u>Теорема 1.1</u> Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляд $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на (a,b), то вираз $F(x)+C$ називається <u>*невизначеним інтегралом*</u> функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$.

Знак $\int$, який ввів Лейбніц, називається інтегралом, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, $f(x)$ – підінтегральною функцією, x – змінною інтегрування *(Вільгельм Лейбніц (1646-1716) – німец. математик, філософ)*.

Отже,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1.1.1)$$

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають *інтегруванням* цієї функції.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)'dx = f(x)\,dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Зауваження. Властивість 5 справедлива для довільного скінченого числа доданків.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Цю властивість називають інваріантністю формули інтегрування. Вона є дуже важливою і означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Наприклад, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, оскільки $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$. Користуючись інваріантністю цієї формули, одержимо формулу $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$, $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема:

$$\int \sin^3 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

тобто
$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

$$\int \ln^3 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C,$$

тобто
$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Природно виникає питання: чи для всякої функції $\exists$ невизначений інтеграл? Відповідь на це дає наступна теорема.

Теорема 1.2 Будь-яка неперервна функція має первісну.

Таблиця основних інтегралів.

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

I. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

II. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

III. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

IV. $\int e^u du = e^u + C$.

V. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

VI. $\int \cos u du = \sin u + C$.

VII. $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$.

VIII. $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$.

IX. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$.

X. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$.

XI. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\tan \frac{u}{2}\right| + C$.

XII. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

XIII. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C$.

XIV. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C$.

XV. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arc\cot \frac{u}{a} + C$.

XVI. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

XVII. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$.

XVIII. $\int \sqrt{u^2 + A} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C$.

Лекція 1_2

Основні методи інтегрування.

1. *Метод безпосереднього інтегрування.*

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називається <u>*безпосереднім інтегруванням*</u>.

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграли:

а) $\int(2x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=\ldots=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$;

б) $\int(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2\,dx=x-\cos x+C$.

2. *Метод підстановки (заміни змінної).*

Суть цього методу полягає у введені нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто $\int f(x)dx=F(x)+C$, $x\in(a;b)$; і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множиною значень цієї функції є проміжок $(a;b)$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C,\quad t\in(\alpha;\beta).$$

Наслідок. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

<u>Приклад.</u> Обчислити інтеграли:

а) $\int x\sqrt{x-5}\,dx=\ldots=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-5}\right)^5+\frac{10}{3}\left(\sqrt{x-5}\right)^3+C$;

б) $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\left|u=2\ln x+3\right|=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C$;

в) $\int\frac{dx}{5x+4}=\frac{1}{5}\ln\left|5x+4\right|+C$.

3. *Метод інтегрування частинами.*

Нехай $u=u(x), v=v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді, згідно з властивостями диференціала,

$$d(uv)=udv+vdu\quad\Rightarrow\quad udv=d(uv)-vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du ,$$

або
$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (1.2.1)$$

Формула (1.2.1) називається *формулою інтегрування частинами*.

Зауважимо, що під час знаходження функції v вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає.

Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, де $P(x)$ – многочлен, $k \in R$. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився ($u = P(x), \quad dv = \{e^{kx}, \sin kx, \cos kx\}dx$)
2) інтеграли виду $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\arctan x\,dx$, $\int P(x)arc\cot x\,dx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід взяти $u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ arc\cot x \end{Bmatrix}, \quad dv = P(x)dx$;
3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, де α, β – дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (2.1) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграли:

а) $\int (2x+1)\sin x\,dx$; б) $\int \arcsin x\,dx$; в) $\int x^3 \ln x\,dx$; г) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

Лекція 1_3

Інтегрування раціональних функцій.

Означення. Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad n \in N$$

де n – натуральне число, яке називається степенем многочлена, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коефіцієнти многочлена.

<u>Означення</u>. Відношення двох многочленів $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається <u>раціональною функцією</u> або раціональним дробом ($P_m(x) \neq 0, \quad Q_n(x) \neq 0$).

Раціональний дріб називається <u>правильним</u>, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$; в іншому випадку ($m \geq n$) раціональний дріб називається <u>неправильним</u>.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \tag{1.3.1}$$

де $W_k(x)$ і $R_p(x)$ – многочлени k-го p-го степеня, причому $p < n$, тобто дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ – правильний. Наприклад,

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$I.\ \frac{A}{x-a}; \qquad II.\ \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2,3,\ldots;$$

$$III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad IV.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n = 2,3,\ldots,$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Теорема. Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники $Q_n(x) = a_0(x-a)^{\alpha} \ldots (x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\nu}$, тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} +$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+ \qquad (1.3.2)$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+$$

$$+\frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s}+\frac{L_2x+F_2}{(x^2+lx+s)^2}+\ldots+\frac{L_\nu x+N_\nu}{(x^2+px+q)^\nu},$$

де $A_1,\ldots,A_\alpha,B_1,\ldots,B_\beta,M_1,N_1,\ldots,M_\mu,N_\mu,L_1,F_1,\ldots,L_\nu,F_\nu$ – дійсні числа.

Вираз (1.3.2) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби*.

Для знаходження чисел $A_1,A_2,\ldots,L_\nu,F_\nu$ можна скористатися *методом порівнювання коефіцієнтів* або *методом окремих коефіцієнтів*. Суть методу окремих коефіцієнтів полягає в наступному. Помножимо обидві частини рівності (1.3.2) на $Q_n(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1,\ldots F_\nu$. Надаючи змінній конкретних значень стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$.

Приклад. Виразити через елементарні дроби

a) $\dfrac{x^2+25x-47}{(x-2)^2(x+5)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x+5}=\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x+5};$

b) $\dfrac{2x^2-23x-17}{(x^2+4x+13)(x-3)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+4x+13}+\dfrac{C}{x-3}=\dfrac{4x-3}{x^2+4x+13}-\dfrac{2}{x-3}.$

Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

Враховуючи формулу (1.3.1), цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int W_k(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена $W_k(x)$ знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться за допомогою формули (1.3.2) до інтегралів від елементарних дробів.

Розглянемо ці інтеграли:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$.

III. $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + (N - \frac{Mb}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ знаходиться за допомогою табличних інтегралів.

IV. $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ обчислюється за допомогою рекурентної формули, вираз якої є громіздким і не застосовується в даному курсу лекцій.

<u>Приклад.</u> Обчислити інтеграли

1. $\int \frac{x^2+25x-47}{(x-2)^2(x+5)}dx = 4\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - 3\ln|x+5| + C$.

2. $\int \frac{2x^2-23x-17}{(x^2+4x+13)(x-3)}dx = 2\ln|x^2+4x+13| - \frac{11}{3}\arctan\frac{x+2}{3} - 2\ln|x-3| + C$.

Лекція 1_4

Інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів.

Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

I) Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Приклад. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

II) Інтеграли вигляду $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + (n - \frac{mb}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Якщо $a > 0$, то інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводиться до табличного інтегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$.

Якщо $a < 0$, то до інтегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{d} + C$.

Приклад: $\int \frac{6x-1}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

III) Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

За допомогою оберненої підстановки $\frac{1}{mx+n} = t$ ці інтеграли зводяться до інтегралів вигляду II).

Приклад: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

IV) Інтеграли вигляду $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

Шляхом виділення з квадратного тричлена повного квадрату даний інтеграл зводиться до одного з наступних двох інтегралів:

1) $\int\sqrt{A^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}+\frac{A^2}{2}\arcsin\frac{x}{A}+C$;

2) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$.

<u>Приклад</u>: $\int\sqrt{5-4x-x^2}\,dx$.

V) Інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ раціоналізуються підстановкою

$t=\tan\frac{x}{2},\quad (-\pi<x<\pi)$, яка називається *універсальною*.

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\arcsin t,\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

<u>Приклад</u>: $\int\frac{dx}{5+2\cos x}$.

Зауважимо, що універсальна підстановка завжди раціоналізує $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$. Проте на практиці вона часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них:

a) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x=t$;

b) $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x=t$;

c) $\int R(\tan x)\,dx$ раціоналізується підстановкою $\tan x=t$;

d) $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x=t$, якщо функція R непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$; або підстановкою $\sin x=t$, якщо функція R непарна відносно $\cos x$:

$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$; або підстановкою $\tan x=t$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$.

<u>Приклади</u>: $\int\frac{dx}{\sin^2 x+3}$; $\int\tan^3 x\,dx$; $\int\sqrt[4]{2+5\sin 3x}\cos 3x\,dx$.

VI) Інтеграли виду $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$. (1.4.1)

1) Якщо $m=2k+1$ – непарне додатне число, то

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^{2k+1} x\cos^n x\,dx=$$

$$=\int\sin^{2k} x\sin x\cos^n x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\,d(\cos x).$$

Аналогічно, якщо n – непарне додатне число.

<u>Приклад</u>: $\int\sin^2 7x\cos^3 7x\,dx$.

2) Якщо m,n – парні додатні числа, то підінтегральний вираз (1.4.1) перетворюється за допомогою формул:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

VII) Інтеграли вигляду $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$ обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x),$$

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x),$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x).$$

Тригонометричні підстановки для раціоналізації ірраціональних виразів

Інтегруючи вираз $\sqrt{a^2-x^2}$ користуються підстановкою $x=a\sin z$;

Інтегруючи вираз $\sqrt{x^2+a^2}$ користуються підстановкою $x=a\tan z$;

Інтегруючи вираз $\sqrt{x^2-a^2}$ користуються підстановкою $x=\frac{a}{\cos z}$.

Приклад: $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$.

Лекція 2_1

Визначений інтеграл. Теорема Ньютона-Лейбніца.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ позначимо через τ і назвемо τ-розбиттям відрізка $[a;b]$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}$ візьмемо $\forall$т.$\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і побудуємо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (2.1.1)$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – довжина відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Сума (2.1.1) називається *інтегральною сумою* функції $f(x)$, яка відповідає τ-розбиттю відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки.

Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка τ-розбиття і назвемо його діаметром цього розбиття:

$$\lambda = \lambda(\tau) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i.$$

Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (2.1.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить від τ-розбиття і вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)dx$.

Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2.1.2)$$

Функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на відрізку $[a;b]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою і верхньою межею інтегрування*.

Теорема 2.1 (необхідна умова інтегрованості). Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема 2.2 (достатня умова інтегрованості). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтеграла

1 Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz .$$

2 Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

3 Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt .$$

4 Якщо точка $c \in [a;b]$ і $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

5 Сталий множник можна було винести за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx .$$

6 Визначений інтеграл від суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

7 Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8 Якщо $f(x) \le g(x)$, $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

9 Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

10 Якщо для $\forall\, x \in [a;b]$: $|f(x)| \le c$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le c(b-a)$.

11 Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

12 **Теорема 2.3** (Теорема про середнє значення функції)) Якщо функція неперервна на $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка *c*, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

► Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає свого найбільшого M і найменшого значення m. З властивості 11 одержимо

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона набуває всі проміжні значення відрізка $[m;M]$. Отже. $\exists$ т.$c \in [a;b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.1.3)$$ ◄

Рівність (2.1.3) називається формулою середнього значення, а величина $f(c)$ – середнім значенням функції на відрізку $[a;b]$.

Інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, тоді вона інтегрована на будь-якому відрізку $[a;x] \subset [a;b]$, тобто для $\forall x \in [a;b]$ $\exists \int_a^x f(t)dt$.

Позначимо

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (2.1.4)$$

Функція $\Phi(x)$ називається *інтегралом із змінною верхньою межею*.

Теорема 2.4 Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Наслідок: Для всякої неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ $\exists$ первісна функція. При цьому однією з первісних функції є визначений інтеграл (2.1.4)

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a;b].$$

Теорема 2.5 (Теорема Ньютона–Лейбніца): Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.1.5)$$

Формула (2.1.5) називається формулою Ньютона–Лейбніца.

► Згідно наслідку теореми 2.4 $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Поклавши в цій рівності $x = a$, отримаємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a),$$

тому $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$; при $x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \blacktriangleleft$$

<u>Зауваження</u>: Формула Ньютона–Лейбніца записується ще так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

<u>Приклади</u>: а) $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$, $\int_0^\pi (2x - \sin x)dx = \pi^2 - 2$.

Методи обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методами заміни змінної та інтегрування частинами.

Теорема 2.6 Нехай виконуються умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b$ і для $\forall t\in[\alpha;\beta]$, $a<\varphi(t)<b$.

Тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.1.6)$$

Формула (2.1.6) називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі*.

Приклади: $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=6\ln\frac{3}{2}$, $\int_0^2\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Теорема 2.7 Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu\,. \qquad (2.1.7)$$

Формула (2.1.7) називається *формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла*.

Приклади: $\int_0^\pi x\cos^2 xdx$, $\int_1^e x\ln xdx$.

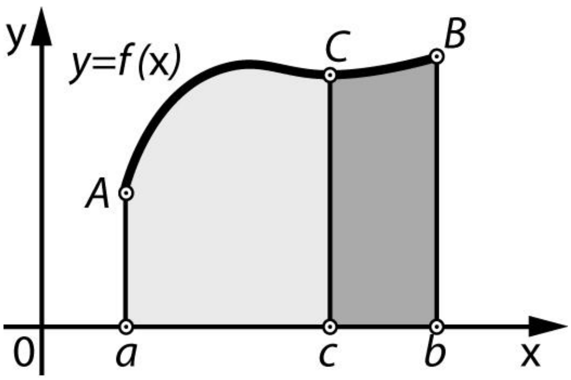
Лекція 2_2

Деякі застосування обчисленого інтеграла

Обчислення плоских фігур

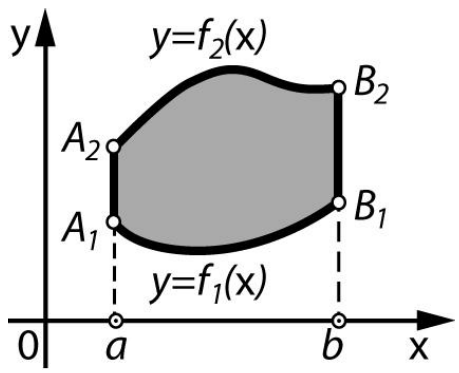
Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(x)\geq 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$ (див. рис.) знаходять за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.2.1)$$



Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$, тоді

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx; \qquad (2.2.2)$$



тобто площу фігури, що обмежена кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$ за умови, що $f_2(x)\geq f_1(x)$, знаходять за формулою (2.2.2).

Приклад: Знайти площу фігури, обмеженою прямою $y=x$ і параболою $y=2-x^2$. $S=\dfrac{9}{2}$.

Довжина дуги

Диференціал dl довжини дуги гладкої кривої, заданої функцією $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, знаходять за формулою

$$dl=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

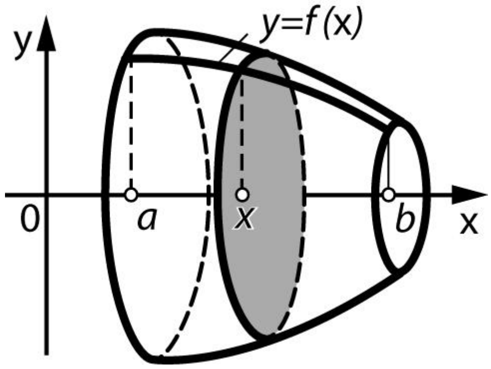
Тому довжина дуги $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Приклад: Знайти довжину дуги параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$ від точки *O(0;0)* до точки $A(1;\dfrac{1}{2})$.

$$l=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$$

Об'єм тіла обертання

Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі *Ox*, то утворюється просторова фігура, яка називається *тілом обертання*.



Ця фігура обчислюється за формулою:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.2.3)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)\ge 0$ і прямими $y=c$, $y=d$, $x=0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі *Oy*, знаходять за формулою

$$V_y=\pi\int_c^d\varphi^2(y)dy. \qquad (2.2.4)$$

Приклад: Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y=x^2$ на проміжку $1\le x\le 2$ навколо осі а) *Ox*; б) *Oy*.

$$V_x=\frac{31\pi}{5},\quad V_y=\pi\int_0^1 y\,dy=\frac{15\pi}{2}.$$

Задача 3.4: (**індивідуальна робота №2**) Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$\begin{cases}x=y^2+2y+2,\\ x+4y-9=0.\end{cases} \qquad (2.2.5)$$

Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі *Ox* фігури, що обмежена лініями (2.2.5), $y=0$ при $y>0$.

► Точки перетину параболи і прямої $M_1(5;1)$, $M_2(37;-7)$.

Точки перетину з координатними осями:

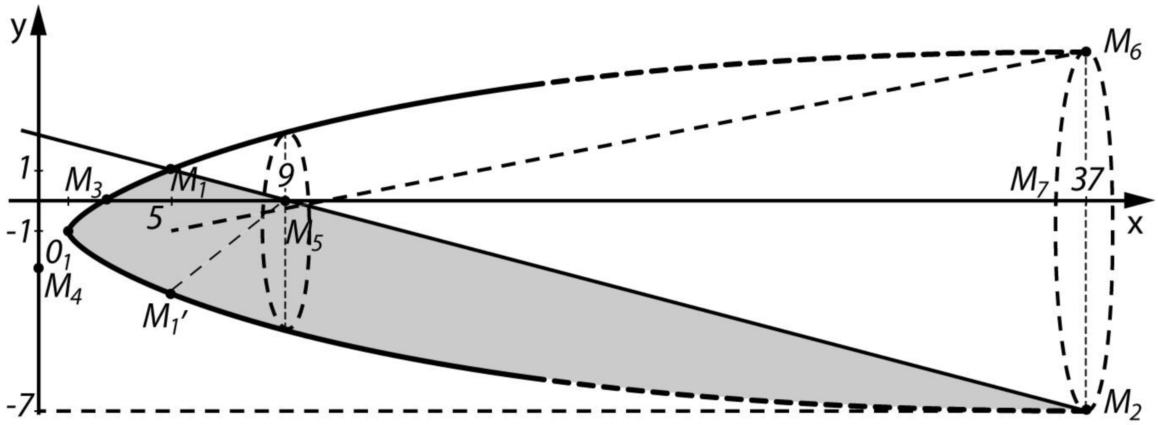
$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \varnothing,$$

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad M_3(2;0),$$

$$\begin{cases} x = 9 - 4y, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad M_4(0;\frac{9}{4}),$$

$$\begin{cases} x = 9 - 4y, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad M_5(9;0)$$

$x = y^2 + 2y + 2 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = (y+1)^2 \quad O_1(1;-1)$ – вершина параболи.



Площа фігури:

$$S_{O_1M_1M_5M_2M_3} = \int_{-7}^{1} (\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy = \int_{-7}^{1} (9 - 4y - y^2 - 2y - 2)dy =$$

$$= \int_{-7}^{1} (-y^2 - 6y + 7)dy = \ldots = \frac{256}{3} \approx 85{,}333.$$

Об’єм тіла обертання:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 2, \\ y > 0, \end{cases} \Rightarrow \quad y = \sqrt{x-1} - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{x-1} - 1.$$

$$V_{M_1M_1'M_3O_1} = \pi \int_{2}^{5} f^2(x)dx = \pi \int_{2}^{5} (\sqrt{x-1} - 1)^2 dy = \ldots = \frac{7\pi}{6}.$$

$$V_{M_1M_5M_1'} = \frac{\pi}{3}(M_1M_5) \cdot (M_1M_1')^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$V = V_{M_1M_1'M_3O_1} + V_{M_1M_5M_1'} = \frac{7\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

Обчислення роботи

Робота Q, яка виконана за деякий час $t \in [0;T]$, обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^T y(t)dt.$$

Економічні застосування визначеного інтеграла

В курсі мікроекономіки часто розглядаються так звані граничні величини, тобто для деякої функції $y = f(x)$ розглядають її похідну $f'(x)$. Наприклад, якщо дана функція витрат C в залежності від об'єму q випущеної продукції $C = C(q)$, то граничні витрати будуть задаватися похідною цієї ж функції $MC = C'(q)$. Її економічний зміст – це витрати на виробництво додаткової одиниці продукції товару, що випускається. Тому часто доводиться знаходити функцію витрат за заданою функцією граничних витрат.

Приклад: Дана функція граничних витрат $MC = 3q^2 - 48q + 202$, $1 \le q \le 20$. Знайти функцію витрат $C = C(q)$ і обчислити витрати у випадку виробництва 10 одиниць товару, якщо відомо, що витрати для виробництва першої одиниці товару склали 50 грн.

$$C(q) = \int_1^q MC(t)dt + C_0, \qquad C_0: \quad C(1) = 50 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 50.$$

$$C(q) = \int_1^q (3t^2 - 48t + 202)dt + 50 = q^3 - 24q^2 + 202q - 129,$$

$$C(10) = 491.$$

Ще одним прикладом застосування визначеного інтеграла є знаходження дисконтної вартості грошового потоку.

Припустимо спочатку, що для дискретного моменту часу $t = 1,2,3,\ldots$ задана величина грошового потоку $R(t)$. Якщо ставку відсотка позначити через p, то дисконтну вартість кожної з величин $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, … знаходять за відомими формулами:

$$\frac{R(1)}{1+p}, \frac{R(2)}{(1+p)^2}, \frac{R(3)}{(1+p)^3}, \ldots.$$

Тоді дисконтну вартість грошового потоку знайдемо, якщо просумувати ці величини:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{R(i)}{(1+p)^i}, \qquad (2.2.6)$$

де n – загальна кількість періодів часу.

В неперервній моделі час змінюється неперервно, тобто для $\forall t:\ 0 \le t \le T$, де $[0;T]$ – період часу, який розглядається, і задана величина $I(t)$ – швидкість зміни грошового потоку. Тоді для отримання величини Π формула (2.2.6) (формула обчислення дисконтної вартості для дискретного випадку) змінюється на її неперервний аналог:

$$\Pi = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt\,. \qquad (2.2.7)$$

<u>Приклад 1</u>: Під будівництво ГЕС заданий неперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млн. грн./рік) протягом 20 років з річною відсотковою ставкою $p = 5\%$. Знайти дисконтну вартість цього потоку.

► За формулою (2.2.7) маємо $\Pi = \int_0^{20} (-t^2 + 20t + 5) e^{-0,05t} dt \approx 892{,}319$.

$\Pi ═ 892$ млн. грн. ◄

<u>Приклад 2</u>: Розглянемо ситуацію коли грошовий потік не припиняється ніколи, наприклад у випадку експлуатації земельної ділянки. Якщо r – неперервна відсоткова ставка, а $R(t)$ – відповідна рента, то знаходження дисконтної вартості земельної ділянки призводить до формули, що містить невласний інтеграл

$$\Pi = \int_0^{\infty} R(t) e^{-rt} dt\,. \qquad (2.2.7)$$

Нехай $R(t) = 5e^{-0,7t}$ (тис. грн./рік) – рента, яку отримують від земельної ділянки, $r = 10\%$ – відсоткова ставка. Визначимо дисконтну вартість земельної ділянки за формулою (2.2.8):

$$\Pi = \int_0^{\infty} 5e^{-0,7t} e^{-0,1t} dt = \ldots = 6{,}25 \text{ (тис. грн.)}$$

Порівняємо отриману величину з вартістю ділянки в даний момент часу, яке дорівнює $R(0)=5$ (тис. грн.)

Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $I=\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ функція. Якщо можна знайти первісну $F(x)$ від функції $f(x)$, то цей інтеграл обчислюється за формулою Ньютона–Лейбніца: $I=F(b)-F(a)$. Якщо ж первісна не є елементарною функцією, або функція $f(x)$ задана графіком чи таблицею, то формулою Ньютона–Лейбніца скористатися не можна. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено.

Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого ґрунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо $f(x)\geq 0$, то інтеграл $I=$ площі криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Для наближеного обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ часто використовують наступні формули:

a) формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}) \tag{1}$$

b) формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n) \tag{2}$$

c) формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right) \tag{3}$$

d) формула Сімпсона (*Сімпсон Томас (1710-1761) – англійський математик*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}), \qquad (4)$$

де $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$, $x_i = \frac{b-a}{n}i$, $i = 0;1;\ldots;n$, n – кількість частинних відрізків, на які розбивають відрізок $[a,b]$.

Формули (1)-(4) називаються квадратурними.

Різницю між лівою і правою частиною квадратурної формули називають її залишковим членом і позначають через $R_n(f)$. Абсолютна похибка $|R_n(f)|$ квадратурної формули залежить від числа n – кількості частинних відрізків, на які розбивається відрізок інтегрування $[a,b]$.

Задача 6.2 (індивідуальна робота №1) На підставі даних про продуктивність праці робітника $Y = (35;42;45;35;25)$ за певну годину $X = (2;5;6;7;8)$ знайти залежність між змінними y та x за методом найменших квадратів. Визначити обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годин роботи безпосереднім інтегруванням функції $y(x)$ та за допомогою наближеного обчислення цього визначеного інтеграла за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона.

► Знайдемо залежність між змінними x і y за методом найменших квадратів

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

де коефіцієнти a_0, a_1, a_2 визначаються з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum_{i=1}^n x_i + a_2\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^n x_i + a_1\sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases}$$

n=5; $\sum_{i=1}^5 x_i = 2+5+6+7+8 = 28$; $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 178$;

$\sum_{i=1}^5 x_i^3 = \ldots = 1204$; $\sum_{i=1}^5 x_i^4 = \ldots = 8434$.

$\sum_{i=1}^5 y_i = 35 + 42 + 45 + 35 + 25 = 182$;

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2\cdot 35 + 5\cdot 42 + 6\cdot 45 + 7\cdot 35 + 8\cdot 25 = 995;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 2^2\cdot 35 + 5^2\cdot 42 + 6^2\cdot 45 + 7^2\cdot 35 + 8^2\cdot 25 = 6125.$$

Отже, система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 5a_0 + 28a_1 + 178a_2 = 182, \\ 28a_0 + 178a_1 + 1204a_2 = 995, \\ 178a_0 + 1204a_1 + 8434a_2 = 6125. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю системи за допомогою засобів комп'ютерної алгебри (наприклад, Microsoft Excel) або методом Крамера (на папері), отримаємо

$$a_0 = 11{,}571 \quad a_1 = 14{,}808 \quad a_2 = -1{,}632.$$

Таким чином, $y(x) = 11{,}571 + 14{,}808x - 1{,}632x^2$.

Визначимо обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годи роботи безпосереднім інтегруванням функції $y(x)$:

$$\int_0^8 y(x)dx = \int_0^8 (11{,}571 + 14{,}808x - 1{,}632x^2)dx = \ldots = 287{,}896.$$

Визначимо обсяг продукції, яка буде вироблена за 8 годи роботи за допомогою наближеного обчислення цього визначеного інтеграла за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона. Для цього розіб'ємо відрізок [0;8] на $n = 8$ рівних частин:

$$y_0 = y(0) = 11{,}571 + 14{,}808\cdot 0 - 1{,}632\cdot 0^2 = 11{,}571,$$

$$y_1 = y(1) = 11{,}571 + 14{,}808\cdot 1 - 1{,}632\cdot 1^2 = 27{,}747,$$

$$y_2 = y(2) = \ldots = 34{,}659, \qquad y_3 = y(3) = \ldots = 41{,}308,$$

$$y_4 = y(4) = \ldots = 44{,}692, \qquad y_5 = y(5) = \ldots = 44{,}813,$$

$$y_6 = y(6) = \ldots = 41{,}670, \qquad y_7 = y(7) = \ldots = 35{,}264,$$

$$y_8 = y(8) = \ldots = 25{,}593.$$

А. За формулою лівих прямокутників:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx y_0 + y_1 + \ldots + y_7 = 278{,}725.$$

В. За формулою правих прямокутників:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx y_1 + y_2 + \ldots + y_8 = 292{,}747\,.$$

C. За формулою трапецій:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx \frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 \ldots + y_7 = 285{,}736.$$

D. За формулою Сімпсона:

$$\int_0^8 y(x)dx \approx \frac{8-0}{3\cdot 8}(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) = 287{,}912\,.$$

Лекція 2_3

Невласні інтеграли. Поняття про подвійний інтеграл.

На попередніх лекціях ми ввели означення визначеного інтеграла як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченого проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума на має скінченної границі. Узагальнюючи ці поняття, приходимо до *невласного інтеграла* – інтеграла від функцій на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли І-го роду)

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і інтегрована на $\forall$ відрізку $[a;b]$: $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо $\exists$ скінчена границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (2.3.1)$$

то її називають *невласним інтегралом І-го роду* і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,. \qquad (2.3.2)$$

Отже,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.3.3)$$

У цьому випадку інтеграл (2.3.2) називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ – інтегровною на проміжку $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя (2.3.1) не існує або нескінченна, то інтеграл (2.3.2) називають також невласним, але розбіжним.

Аналогічно інтегралу (2.3.3) визначається невласний інтеграл на $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

де c – $\forall$ дійсне число.

<u>Приклади</u>: а) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln^5 xdx}{x}$ б) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}(4x-7)\cdot e^{-x}dx$

Теорема 2.3.1: Якщо на $[a;+\infty)$ функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0\le f(x)\le g(x)$, то із збіжності інтеграла

$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx \tag{2.3.4}$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \tag{2.3.5}$$

а із розбіжності інтеграла (2.3.5) випливає розбіжність інтеграла (2.3.4)

Теорема 2.3.2: Якщо $\exists$ границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0<k<+\infty \quad (f(x)>0,\, g(x)>0),$$

то інтеграли (2.3.4) і (2.3.5) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Теорема 2.3.3: Якщо інтеграл $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Невласні інтеграли від необмежених функцій
(невласні інтеграли ІІ-го роду)

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$. Точку $x=b$ назвемо *особливою* точкою функції $f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при $\forall\varepsilon>0$: $b-\varepsilon>a$; тоді якщо $\exists$ скінчена границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (2.3.6)$$

то її називають невласним інтегралом ІІ-го роду і позначають так:

$$\int_a^{b} f(x)dx. \qquad (2.3.7)$$

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (2.3.7) існує або збігається.

Якщо границя (2.3.6) нескінченна або не існує, то інтеграл (2.3.7) називається також невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно, якщо $x=a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^{c_0} f(x)dx$ і $\int_{c_0}^{b} f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_0} f(x)dx+\int_{c_0}^{b} f(x)dx.$$

<u>Приклади</u>: а) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\ldots=\frac{\pi}{2}$; б) $\int_0^1\frac{dx}{x}=+\infty$.

Теорема 2.3.4: Якщо функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні на $[a;b)$, мають особливі точку $x=b$ і задовольняють умову $0\le f(x)\le g(x)$, то із збіжності

інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2.3.5: Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ на проміжку $[a;b)$ неперервні , додатні, і мають особливість в точці $x=b$, тоді якщо $\exists$ границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k, \quad 0<k<+\infty,$$

то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Теорема 2.3.6: Якщо $x=b$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Поняття подвійного інтеграла

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D\subset R^2$. Розіб'ємо область *D* на *n* частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють $\Delta S_i,\, i=\overline{1,n}$. У кожній області візьмемо $\forall$ точки $P_i(\xi_i,\mu_i)$ і утворимо суму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\mu_i)\Delta S_i\,, \tag{2.3.8}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $z=f(x,y)$ по області *D*. Нехай $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (2.3.8) при $\lambda\to 0$ має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області *D* на частинні області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається подвійним інтегралом і позначається:

$$\iint_D f(x,y)dS \text{ або } \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Таким чином, за означенням

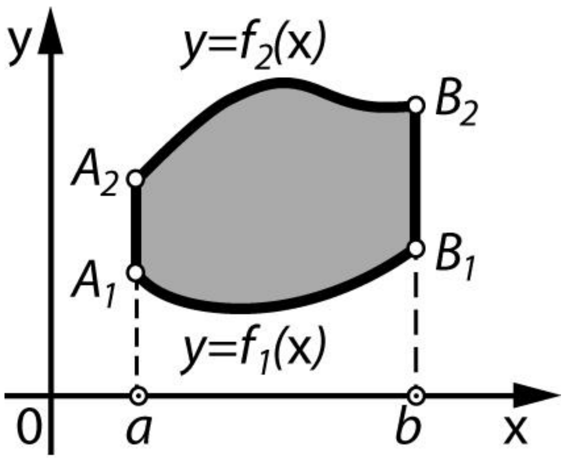
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \;. \qquad (2.3.9)$$

У цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегрованою в області *D*; *D* – областю інтегрування, *x*, *y* – змінними інтегрування; $dS(dxdy)$ – елементом площі.

Теорема 2.3.7 (достатня умова інтегрованості). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області *D*, то вона інтегрована в цій області.

Обчислення подвійного інтеграла за формулою (2.3.9) як границі інтегральної суми пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Якщо область інтегрування *D* обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ і двома прямими $x=a$ та $x=b$,



то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2.3.10)$$

Формула (2.3.10) є формулою обчислення подвійного інтеграла. Праву частину формули (2.3.10) називають повторним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області *D*.

<u>Приклади</u>: а) $\iint\limits_D (2+x^2-y)dxdy$, область *D* – прямокутник $1\le x\le 4;\ \ -1\le y\le 2.$

б) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, область *D* – чверть круга $x^2+y^2\le 4;\ x\ge 0;\ y\ge 0.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому аналізу / Б.П. Демидович – М. «Астрель», 2003. – 558с.
3. Малугин В.А. Математика для экономистов. Математический анализ / В.А. Малугин – М. «Эксмо», 2006. – 232с.
4. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник / В.О. Макаренко – К.: Знання, 2008. – 517 с.