Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Б.М. Тріщ

Основи вищої математики

КВМ

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2006

ББК В11я 73-1
Т-65
УДК 51 (075.8)

Рецензенти

М.В. Заболоцький, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
Є.О. Лебедєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);
О.В. Максимук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Львівська державна фінансова академія)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів.
(Лист №14/18.2–1660 від 12.07 2005 р.)

Т-65 Тріщ Б.М. Основи вищої математики – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 385 с.

ISBN 966-613-443-8

Наведено головні означення і доведено теореми векторної алгебри, аналітичної геометрії, лінійної алгебри й основ математичного аналізу, описано розв'язування типових задач. Особливу увагу приділено задачам економічного змісту. Запропоновано деякі моделі, для опису яких використовують методи вищої математики. Матеріал, викладений у посібнику, відповідає програмі курсу вищої математики для економічних спеціальностей вищих закладів освіти.

Для студентів економічних спеціальностей.

ББК В11я 73-1

ISBN 966-613-443-8 © Б.М.Тріщ, 2006

Навчальне видання

Тріщ Богдан Михайлович

Основи вищої математики

КВМ

Редактор *М.М. Мартиняк*
Коректор
Технічний редактор *С.З. Сеник*

Підп. до друку 2006. Формат 60×84/16. Папір друк.
Друк на різогр. Гарнітура Times New Roman. Умовн. друк. арк.
Обл.-вид. арк. Тираж 150 прим. Зам.
Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41

Перехід до ринкової економіки потребує підготовки економістів, які добре володіють математичним апаратом і можуть його застосовувати для розв'язування теоретичних та прикладних задач. Важливим і визначальним у підготовці майбутніх економістів та підприємців є курс вищої математики, який дає потрібні знання для вивчення інших дисциплін математичного циклу, наприклад, таких як математичне програмування, фінансова математика, теорія ймовірностей, математична статистика, математичні методи дослідження операцій, а також виробляє навички математичного дослідження задач економіки.

У посібнику сформульовані й доведені головні теореми з основ аналітичної геометрії та лінійної алгебри, математичного аналізу і диференціальних рівнянь, наведені розв'язки багатьох типових задач, зокрема задач з економічним змістом, що дасть змогу студентам ліпше засвоїти матеріал. Під час викладу матеріалу дано, де це можливо, геометричний та економічний зміст уведених математичних понять, наведено математичні формулювання деяких економічних законів, розглянуто застосування вищої математики до задач економіки. Наприклад, описано балансові моделі, виробничі функції та їхні властивості, граничний аналіз, моделі економічної динаміки. Такі застосування розраховані на рівень знань економіки студентів першого курсу.

Для дослідження економічних процесів широко використовують комп'ютерну техніку, тому в посібнику наведено основи практичного застосування математичного пакета MAPLE.

Головне завдання, яке ставили під час написання посібника – навчити студентів-економістів умінню формулювати економічні задачі математичною мовою, будувати математичні моделі та знаходити їхні розв'язки.

КДУ

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

1.1. Елементи математичної логіки

Мова математики сама є предметом досліджень математиків. Аналізом мови і дослідженням зв'язку цієї мови з її об'єктами займається логіка. Найпростішим об'єктом досліджень у логіці є висловлення. *Висловленням*, або *судженням*, називають кожне твердження, яке є або істинним, або хибним. Наприклад: "кіт – це тварина", "5<3", "студенти-економісти мають більший зріст, ніж студенти-фізики". Перше твердження істинне, друге – хибне, третє не є висловленням. Висловлення будемо позначати великими літерами латинського алфавіту *A, B, C* … .

У математичній логіці під висловленням розуміють будь-який абстрактний об'єкт, який може набувати лише два значення: істинне (позначатимемо через *I* або 1) і хибне (позначатимемо через *X* або 0).

Під час побудови висловлень будемо користуватися такими законами:

1) кожне висловлення є або істинним, або хибним (закон виключення третього);
2) ніяке висловлення не може бути одночасно істинним і хибним (закон суперечності);
3) речення, на яке не можна однозначно дати відповідь, істинне воно чи хибне, не є висловленням.

За допомогою логічних операцій, з простих висловлень можна будувати складні. Є п'ять логічних операцій: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, заперечення та еквівалентність.

Кон'юнкцією висловлень *A* та *B* називають таке висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення *A* та *B* істинні. Позначають $A \wedge B$ і читають "*A* та *B*'' .

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Диз'юнкцією висловлень *A* та *B* називають таке висловлення, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли хоча б одне (або обидва) з висловлень *A* або *B* є істинним. Позначають $A \vee B$ і читають " *A* або *B* ".

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Імплікацією висловлень A та B називають висловлення, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а B – хибне, та істинним тоді й тільки тоді, коли або A хибне, а B довільне (з хибного засновку можна отримати довільні наслідки), або ж коли A і B істинні. Позначають $A \to B$ або $A \Rightarrow B$ і читають з A випливає B, A зумовлює B, якщо A, то B. У цьому разі A називають засновком, B – наслідком або висновком.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Запереченням висловлення A називають висловлення, яке є хибним, якщо A істинне, та істинним, якщо A хибне. Позначають $\overline{A}$, $\neg A$, $\overline{\overline{A}} = A$, $\neg(\neg A)=A$.

Еквівалентністю висловлень A та B називають висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли A та B обидва істинні або обидва хибні. Позначають $A \sim B$, або $A \Leftrightarrow B$ і читають A еквівалентне B .

A	B	$A \sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Висловлення A і B називають *еквівалентними*, якщо висловлення $A \sim B$ істинне.

У математиці часто трапляються вирази, які є змінними висловленнями. Такі вирази в логіці називають *висловлювальними формами*, або *предикатами*. Наприклад, якщо висловлення "кіт – це тварина" замінити висловленням "x – це тварина", то отримаємо висловлювальну форму, тому що, підставляючи замість x якесь конкретне значення (кінь, курка, дерево), отримаємо конкретне висловлення, істинність чи хибність якого залежить від узятого значення x. До предикатів можна застосовувати введені раніше логічні операції. Крім того, до предикатів застосовують нові логічні операції, які записують за допомогою кванторів (символів) $\forall$ і $\exists$. Квантор $\forall$ називають *квантором загальності*; він означає *для кожного*, *для всіх*. Квантор $\exists$ називають *квантором існування*, він має значення *існує*, *знайдеться*. Область зміни змінної, яка пов'язана з квантором $\forall$ або $\exists$, можна записувати разом з квантором у дужках або без них. Твердження записуємо у дужках або без них, або після знака " : ". Символ : означає *маємо*, *випливає*, *таке що*. Наприклад, твердження "для довільного числа $x \neq 0$ знайдеться таке число y, що виконується нерівність $xy > 0$" можна записати у вигляді $\forall x \neq 0 \quad \exists y : xy > 0$.

Нехай задані два висловлення A та B. Якщо істинність B залежить від істинності A, то висловлення A називають *умовою*, а висловлення B – *твердженням*.

Умова A є *необхідною* для виконання твердження B, якщо кожного разу, коли істинне висловлення B, істинним є і висловлення A, тобто коли істинна імплікація $B \Rightarrow A$.

Умова A є *достатньою* для виконання твердження B, якщо кожного разу, коли істинне висловлення A, є також істинним висловлення B, тобто істинною є імплікація $A \Rightarrow B$.

У випадку, коли $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$, A є *необхідною і достатньою* умовою для B, тобто $A \Leftrightarrow B$.

У загальному випадку логічне значення предиката залежить від того, правильною чи фальшивою є умова A. Проте існують такі вирази, які завжди є правильними, тобто мають логічне значення 1. Такі вирази будемо називати *тавтологіями*.

Приклад 1.1.1. Визначимо логічне значення виразу $P \vee (\neg P)$.

- Складемо таблицю

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

Отже, вираз $P \vee (\neg P)$ є тавтологією.

Користуючись таблицею істинності, можна вивести інші тавтології:

1) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ – правило силогізму;
2) $(\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ – правило контрапозиції;
3) $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ – перше правило де Моргана;

4) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ – друге правило де Моргана;

5) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$;

6) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$. (1.1.1)

1.2. Множини і дії над ними

1.2.1. Поняття множини. Алгебра множин

Поняття множини є одним з головних понять математики, яке не має визначення. Задати множину – означає назвати закон чи правило або характерну властивість об'єктів множини, за якими про кожний об'єкт можна зробити висновок: належить він цій множині чи ні. Наприклад, множина студентів економічного факультету, множина комерційних банків, які мають статутний фонд понад 500 млн грн.

Об'єкти, з яких складається множина, називають її *елементами*. Множини будемо позначати великими латинськими літерами *A*, *B*, *C*,…, а їхні елементи – малими *a*, *b*, *c*. Якщо елемент *a* належить множині *A*, то це записують $a \in A$, якщо ні, то $a \notin A$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною* і позначають $\varnothing$.

Множину, яка має скінченну кількість елементів, можна задати, перелічивши всі її елементи: $A = \{a, b, c, d\}$. Якщо для множини *X* елемент *x* є її характерним представником і має деяку властивість *S*, то це записують так: $X = \{x : x \text{ має властивість } S\}$ або $X = \{x \mid x \text{ має властивість } S\}$. Наприклад, множину точок круга радіуса 1 з центром у початку координат можна записати у вигляді $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

Приклад 1.2.1. Випишемо елементи множини

$$A = \{x : x \in N, \quad -2 < x \le 4\}.$$

• Множина *A* задана такою характеристичною властивістю: її елементи є натуральні числа, що задовольняють нерівність $-2 < x \le 4$. Цю нерівність задовольняють натуральні числа 1, 2, 3, 4. Отже, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. ❍

Множину *A* називають *підмножиною* множини *B*, якщо кожний елемент множини *A* належить множині *B*. Позначають $A \subset B$.

Дві скінченні множини *A* і *B* називають *такими, що дорівнюють одна одній*, тобто *A=B*, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Очевидно, що

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A). \quad (1.2.1)$$

Приклад 1.2.2. Перевіримо, чи множина $A = \{\{a, b\}, c\}$ дорівнює $B = \{a, b, c\}$.

• Ці множини не дорівнюють одна одній, тому що множина *A* містить два елементи $\{a, b\}$ і *c*, а множина *B* – три. ❍

Об'єднанням (*сумою*) двох множин A та B називають множину, яка складається з елементів, що належать хоча б одній з цих множин, і позначають $A \cup B$. Отже,

$$A \cup B = \{ x : (x \in A) \vee (x \in B) \}. \qquad (1.2.2)$$

Перерізом (*добутком*) множин A і B називають множину, що складається з елементів, які одночасно належать як до множини A, так і до множини B, і позначають $A \cap B$.

Переріз двох множин можна записати так:

$$A \cap B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \in B) \}. \qquad (1.2.3)$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їхній переріз – порожня множина.

Операції об'єднання і перерізу можна узагальнити на випадок довільної кількості множин:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k , \qquad A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k . \qquad (1.2.4)$$

Приклад 1.2.3. Нехай A – множина підприємств, на яких працює не менше 200 працівників, B – множина підприємств, на яких працює не менше 50 працівників. Тоді $A \cup B$ – множина підприємств, на яких працює не менше 50 працівників, а $A \cap B$ – множина підприємств, на яких працює не менше 200 працівників.

Різницею двох множин A та B називають множину $A \setminus B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B. Очевидно, що

$$A \setminus B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \notin B) \}. \qquad (1.2.5)$$

Нехай $A \subset B$. *Доповненням* множини A до множини B називають різницю $B \setminus A$. Доповнення позначають так:

$$C_B A = \{ x : (x \in B) \wedge (x \notin A) \}. \qquad (1.2.6)$$

Універсальною множиною I називають множину, яка об'єднує всі можливі множини, що мають деяку спільну властивість. Доповнення множини A до універсальної множини позначають $\bar{A}$.

Властивості дій над множинами:

1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ – властивість комутативності;
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – властивість асоціативності;
3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – закони дистрибутивності;
4) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$;
5) $A \cup \varnothing = A, \ A \cup I = I, \ A \cap \varnothing = \varnothing, \ A \cap I = A.$
6) $\overline{\bar{A}} = A, \ \bar{\varnothing} = I, \ \bar{I} = \varnothing$;
7) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – закони двоїстості (де Моргана).

П р и к л а д 1.2.4. Запишемо всі підмножини множини $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

• Підмножинами множини A є такі множини: $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\varnothing$. ❍

П р и к л а д 1.2.5. Нехай $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{3,5,6\}$. Визначимо $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap (A \cap B)$, $A \cup (A \cap B)$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \cap B)$.

• $A \cup B = \{2,3,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,5\}$, $A \cap (A \cap B) = \{3,5\}$, $A \cup (A \cap B) = \{2,3,5,7\}$, $A \setminus B = \{2,7\}$, $B \setminus A = \{6\}$, $A \setminus (A \cap B) = \{2,7\}$. ❍

1.2.2. Множина дійсних чисел

У курсі математичного аналізу використовують множини, елементами яких є числа. Такі множини називають числовими. Ми не будемо тут викладати чітку теорію дійсного числа, опишемо лише деякі відомості з неї, які необхідні для подальшого викладу. Серед числових множин виділимо такі:

1) множина натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$;

2) множина цілих чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$;

3) множина раціональних чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$.

Між цими множинами існує такий зв'язок: $N \subset Z \subset Q$.

Кожна з цих множин виникає з необхідності розширити поняття числа. У множині натуральних чисел завжди можна виконувати дії додавання і множення натуральних чисел. Результатом таких дій є натуральне число. У цій множині не завжди можна виконувати дію віднімання двох натуральних чисел. Наприклад, різниця чисел 5 і 7 не є натуральним числом. Множина цілих чисел є розширенням множини натуральних чисел унаслідок уведення цілих від'ємних чисел і числа 0. У множині цілих чисел можна виконувати дії додавання, множення, віднімання. Результатом цих дій є ціле число. У цій множині не завжди можна виконувати дію ділення двох цілих чисел. Уведення дробів привело до виникнення множини раціональних чисел, яка є розширенням множини цілих чисел. У множині раціональних чисел завжди можна виконувати дії додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль). Результатом цих дій завжди є раціональне число.

Уведемо поняття *числової прямої*. Візьмемо горизонтальну пряму l і на ній довільну точку O (рис. 1.2.1).

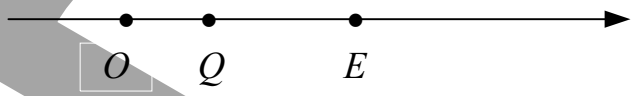


Рис. 1.2.1.

Точку O називають *точкою відліку* на прямій l. Вона є зображенням раціонального числа 0. Точка O поділяє пряму l на два промені. *Додатним* уважа-

ють промінь, який виходить з точки O і напрямлений праворуч. Інший промінь називають *від'ємним*. Візьмемо на додатному промені точку E і припустимо, що вона є зображенням числа 1. Відрізок OE є масштабом, тобто одиницею довжини. Пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і задано одиницю вимірювання, називають *числовою прямою*, або *числовою віссю*.

Доведено, що кожному раціональному числу відповідає єдина точка на числовій прямій, але не кожній точці числової осі відповідає раціональне число. Виявилось, що існують відрізки, довжину яких не можна виразити раціональним числом. Тому постало питання про розширення множини раціональних чисел. Відомо, що кожне раціональне число є скінченним десятковим або нескінченним періодичним десятковим дробом. Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називають *ірраціональним числом*. *Алгебричними ірраціональними числами* називають числа, які є коренями алгебричних рівнянь. Наприклад, числа $\sqrt{3}, \sqrt[4]{5}$ – алгебричні ірраціональні числа. Ірраціональні числа, які не є алгебричними, називають *трансцендентними*. Наприклад, числа π, e – трансцендентні. Усі раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел.

Отже, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Приклад 1.2.5. Доведемо, що число $a = 0{,}101001...10000000...01$ ірраціональне.

• У записі числа a між n-ю і $(n+1)$-ю одиницями є n нулів, а між $(n+1)$-ю і $(n+2)$-ю одиницями є $n+1$ нулів. Тому десятковий дріб не може бути періодичним. Отже, число a – ірраціональне. ❍

На множині дійсних чисел завжди можна виконати операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль). Корінь парного степеня з від'ємного числа на множині дійсних чисел не існує. Дійсне число можна записати у вигляді $a = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, де a_0 – невід'ємне ціле число, а кожне з a_n є однією з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Теоретичною підставою зображення довільного дійсного числа точкою числової прямої є аксіома Кантора, яка виражає властивість неперервності числової прямої.

Аксіома Кантора. Нехай задано послідовність відрізків $[A_n B_n]$, $n \in N$, що лежать на одній прямій. Якщо: 1) кожний наступний відрізок міститься у попередньому, тобто $[A_1 B_1] \supset [A_2 B_2] \supset ... \supset [A_n B_n] \supset ...$; 2) довжина відрізка $[A_n B_n]$ прямує до нуля зі збільшенням n, то існує єдина точка C, спільна для всіх відрізків $[A_n B_n]$, $n \in N$, тобто $C \in [A_n B_n]$ для $\forall\, n \in N$.

Доведено, що між множиною дійсних чисел та точками числової прямої існує взаємно однозначна відповідність. Точки числової осі ототожнюють з відповідними дійсними числами. Для більшої наочності в математичному аналізі часто використовують множини точок на числовій прямій, які називають точковими. Унаслідок цього багато математичних понять отримують просту наочну інтерпретацію.

Множина дійсних чисел є упорядкованою. Для будь-яких двох дійсних чисел a і b визначено співвідношення порядку, тобто для них виконується лише одне і тільки одне співвідношення: або $a < b$, або $a = b$, або $a > b$. У цьому разі для довільного дійсного числа c з того, що $a < b$ і $b < c$, отримаємо, що $a < c$.

Розширена числова пряма. Множину дійсних чисел R доповнюють елементами $+\infty$ і $-\infty$, які називають, відповідно, плюс нескінченність і мінус нескінченність, уважаючи, що за означенням справджуються такі співвідношення:

1) $-\infty < +\infty$;

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

3) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;

4) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Зазначимо, що операції $(+\infty) + (-\infty)$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ невизначені.

Для будь-якого $a \in R$ справджуються такі співвідношення:

1) $-\infty < a < +\infty$;

2) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty,\ \ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$;

3) $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$, якщо $a > 0$;

4) $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = (\infty) \cdot a = +\infty$, якщо $a < 0$.

Нескінченності $+\infty$ і $-\infty$ називають *нескінченними числами*, на відміну від дійсних чисел, які називають *скінченними числами*. Множину дійсних чисел, доповнену елементами $+\infty$ і $-\infty$, називають *розширеною множиною дійсних чисел*, або *розширеною числовою прямою*, і позначають $\overline{R}$. Елементи $+\infty$ і $-\infty$ називають *нескінченно віддаленими* точками розширеної числової прямої. Надалі під дійсним числом будемо розуміти скінченне дійсне число.

Модуль дійсного числа. В кожній упорядкованій множині можна ввести поняття абсолютної величини (модуля) її елементів. За означенням абсолютна величина, або модуль дійсного числа, a є число

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \qquad (1.2.7)$$

Геометрично модуль числа a – це відстань від точки числової осі з абсцисою a до початку відліку O. Справді, якщо $a > 0$, то відповідна точка A числової осі є правіше від точки O на відстані $a = |a|$ (рис. 1.2.2). Якщо $a < 0$, то точка A_1 є лівіше від точки O на відстані $-a = |a|$. Аналогічно можна довести, що $|b - a|$ є відстанню між точками B і A числової осі, абсциси яких дорівнюють, відповідно, b і a.

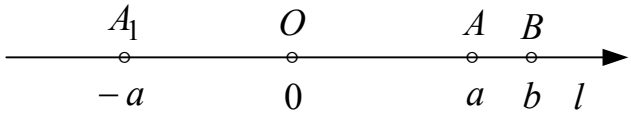


Рис. 1.2.2.

Властивості модуля дійсного числа.

1. $|a| \geq 0.$ (1.2.8)

2. $|a| = |-a|.$ (1.2.9)

3. $-|a| \leq a \leq |a|.$ (1.2.10)

4. Для довільного дійсного числа $b > 0$ нерівності $|a| \leq b$ та $-b \leq a \leq b$ рівносильні.

5. Для довільних дійсних чисел a і b справджується нерівність

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \quad (1.2.11)$$

З нерівності (1.2.11) отримаємо таку нерівність:

$$|a-b| \leq |a| + |b|. \quad (1.2.12)$$

6. Для довільних дійсних чисел a і b справджується нерівність

$$|a-b| \geq |a| - |b|. \quad (1.2.13)$$

7. Для довільних дійсних чисел a і b

$$|ab| = |a||b|. \quad (1.2.14)$$

8. Для довільних дійсних чисел a і b, $b \neq 0$, справджується рівність

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \quad (1.2.15)$$

Приклад 1.2.6. Доведемо, що $\sqrt{a^2} = |a|.$

• Корінь парного степеня з додатного числа має два значення: одне з них додатне, інше від'ємне. Додатне значення кореня парного степеня називають арифметичним. У математиці під коренем парного степеня на множині дійсних чисел завжди розуміють арифметичне значення цього кореня. Якщо $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$, якщо ж $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Отже,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \quad (1.2.16)$$

Оскільки права частина цієї рівності дорівнює $|a|$, то $\sqrt{a^2} = |a|$. ❍

Деякі числові множини. Розглянемо деякі числові множини. Нехай задано два дійсні числа a і b, $a \leq b$. Множину точок $a \leq x \leq b$ називають відрізком, або сегментом, і позначають $[a;b]$. Точки a і b називають, відповідно, лівим і правим кінцями відрізка. Множину точок $a < x < b$ називають інтервалом і позначають $(a;b)$. Число $b-a$ називають довжиною як відрізка, так і інтервалу. Наприклад, відрізок $[2;5]$ та інтервал $(2;5)$ мають однакову довжину, що дорі-

внює $5-2=3$. Множини точок $a \le x < b$ та $a < x \le b$ числової осі називають півінтервалом, або піввідрізком, і позначають, відповідно, $[a;b)$ та $(a;b]$. Відрізки, інтервали, півінтервали (піввідрізки) будемо називати проміжками і позначати $\langle a;b\rangle$.

Інтервал $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ називають ε-околом точки a. Якщо точка a не належить околу, то його називають виколотим і позначають $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$.

Точку a числової множини A називають *внутрішньою точкою* цієї множини, якщо деякий її окіл належить A. Число $b \in R$ називають *граничною точкою* множини A, якщо в будь-якому околі точки b є точки, які належать множині, і точки, які їй не належать.

Принцип вкладених відрізків. Систему числових відрізків

$$[a_1;b_1],\ [a_2;b_2],\ldots,[a_n;b_n],\ldots$$

називають *системою вкладених відрізків*, якщо

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{n-1} \le a_n \le \ldots \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_2 \le b_1.$$

Для будь-якої системи вкладених відрізків, довжина яких зі збільшенням n прямує до нуля, існує тільки одне число, яке належить усім відрізкам.

Принцип вкладених відрізків характеризує властивість неперервності за Кантором множини дійсних чисел.

Межі числових множин. Розглянемо деяку непорожню числову множину A. Множину A називають *обмеженою згори*, якщо існує таке дійсне число M, що для всіх чисел $x \in A$ справджується нерівність $x \le M$. Число M називають *верхньою межею* (*гранню*) *множини* A.

Множину A називають *обмеженою знизу*, якщо існує таке дійсне число m, що для всіх чисел $x \in A$ справджується нерівність $x \ge m$. Число m називають *нижньою межею* (*гранню*) *множини* A.

Приклад 1.2.7. Розглянемо множину $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right\}$. Ця множина обмежена згори, тому що її елементи не більші від числа 0,5. У цьому випадку $M=0{,}5$. Оскільки всі елементи множини більші від нуля, то множина обмежена знизу, і $m=0$. ❍

Очевидно, що для обмеженої згори (знизу) множини є безліч верхніх (нижніх) меж. Справді, якщо M – верхня межа множини A, то довільне число $M_0 > M$ теж буде верхньою межею множини A. Аналогічно, якщо m – нижня межа множини A, то довільне число $m_0 < m$ теж буде нижньою межею множини A. З усіх верхніх (нижніх) меж числової множини важливими є найменша верхня і найбільша нижня межі.

Найменшу верхню межу непорожньої обмеженої згори множини дійсних чисел A називають *точною верхньою межею*, або *верхньою гранню*, цієї множини і позначають $\sup A$, де $\sup$ – скорочення латинського слова supremum, що означає найвище.

Найбільшу нижню межу непорожньої обмеженої знизу множини дійсних чисел A називають *точною нижньою межею*, або *нижньою гранню*, цієї мно-

жини і позначають $\inf A$, де $\inf$ – скорочення латинського слова infimum, що означає найнижче.

Якщо множина дійсних чисел A необмежена згори (знизу), то за означенням $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

Нехай A – непорожня, обмежена згори множина, і $\sup A = \alpha$. Точна верхня межа множини A має такі властивості:

1) для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \le \alpha$;

2) для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $x_\varepsilon \in A$ таке, що $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

Нехай B – непорожня, обмежена знизу множина, і $\inf B = \beta$. Точна нижня межа множини A має такі властивості:

1) для всіх $x \in B$ справджується нерівність $x \ge \beta$;

2) для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $x_\varepsilon \in A$ таке, що $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

З означення верхньої і нижньої меж випливає, що непорожня, обмежена згори числова множина має безліч верхніх меж, а обмежена знизу – безліч нижніх. Постає запитання: чи завжди серед безлічі верхніх (нижніх) меж існує найменша (найбільша)? На це запитання дає відповідь така теорема.

Теорема 1.2.1. Якщо непорожня числова множина обмежена згори (знизу), то вона має точну верхню (нижню) межу.

Ділення дійсного числа на частини. У багатьох випадках потрібно дійсне число розділити на декілька прямо або обернено пропорційних частин та знаходити певні відсотки числа.

Величини a та b називають *прямо пропорційними*, якщо знайдеться таке дійсне число k, що $a = kb$. Для того, щоб число a поділити на частини, пропорційні до чисел b, c, d, потрібно визначити коефіцієнт пропорційності k. Шукані частини числа є kb, kc, kd і $a = kb + kc + kd$. Звідси $k = \dfrac{a}{b+c+d}$, і частини будуть, відповідно, $\dfrac{ab}{b+c+d}, \dfrac{ac}{b+c+d}, \dfrac{ad}{b+c+d}$.

Приклад 1.2.8. Три робітники виконували деяку роботу, відповідно, 8, 5 і 3 години та заробили 160 грн. Скільки заробив кожен робітник?

• Потрібно число 160 розділити на частини, пропорційні до чисел 8, 5, 3. З рівності $8k + 5k + 3k = 160$ отримаємо $k = 10$. Отже, робітники заробили, відповідно, 80, 50 і 30 грн. ❍

Величини a та b називають *обернено пропорційними*, якщо існує таке дійсне число k, що $b = \dfrac{k}{a}$. Для того, щоб число a поділити на частини, обернено пропорційні до чисел b, c, d, потрібно шукані частини вважати такими, що дорівнюють $\dfrac{k}{b}, \dfrac{k}{c}, \dfrac{k}{d}$. Тоді з рівності $a = \dfrac{k}{b} + \dfrac{k}{c} + \dfrac{k}{d}$ визначаємо $k = \dfrac{a}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$, або $k = \dfrac{abcd}{cd + bd + bc}$.

Відсотки. *Відсотком* (*процентом*) деякого числа називають його $\frac{1}{100}$ частину і позначають символом %. Для того, щоб десятковий дріб записати у відсотках, треба перенести кому в записі дробу на два знаки праворуч. Наприклад, $0{,}75 = 75\%$, $3{,}15 = 315\%$, і навпаки, $5\,\% = 0{,}05$, $2{,}27\,\% = 0{,}0227$.

Розглянемо головні задачі на відсотки.

Відшукання відсотків числа. Щоб знайти $p\,\%$ заданого числа a, потрібно число a помножити на p і поділити на 100, тобто $x = \frac{ap}{100}$.

Приклад 1.2.9. Знайдемо 15% від 60 грн.

• $x = \frac{60 \cdot 15}{100} = 9$. ❍

Відшукання числа за його відсотками. Нехай $p\%$ числа a дорівнює b. Тоді шукане число $a = \frac{b}{p} \cdot 100\%$.

Приклад 1.2.10. Визначимо заробітну платню робітника, якщо 40% її дорівнює 600 грн.

• Заробітна платня $a = \frac{b}{p} \cdot 100\% = \frac{600}{40} \cdot 100 = 1500$ грн. ❍

Відшукання відсоткового співвідношення двох чисел. Відсоткове співвідношення двох чисел a і b таке: $p = \frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Приклад 1.2.11. Банк обслуговує 5000 клієнтів, причому 600 – юридичні особи, а решта – фізичні. Скільки відсотків становлять фізичні особи.

• Серед клієнтів банку 5000–600=4400 клієнтів – фізичні особи. Їхній відсоток $p = \frac{4400}{5000} \cdot 100 = 88\%$. ❍

Метод математичної індукції. Метод математичної індукції полягає у тому, що твердження $A(n)$ уважають істинним для всіх натуральних n, якщо виконуються такі умови:

1) твердження $A(n)$ істинне для $n=1$ ($n=p$);
2) з припущення, що твердження $A(n)$ істинне при $n=k$, випливає, що воно істинне при $n=k+1$.

Приклад 1.2.12. Доведемо, що $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$.

• Нехай $n=1$. Оскільки 1=1, то твердження істинне при $n=1$. Припустимо, що $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$. Доведемо, що $1+3+5+\ldots+(2k-1)+ +2k+1=(k+1)^2$. Справді, $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. ❍

Приклад 1.2.13. Доведемо, що для $n>0$ і $x>0$ справджується нерівність Бернуллі $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

• Нехай n=2. Тоді $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$, тобто нерівність виконується. Нехай для $n=k$ виконується нерівність $(1+x)^k \geq 1+kx$. Доведемо, що для $n=k+1$ виконується нерівність $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Розглянемо

$(1+x)^{k+1} \geq (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 >$
$> 1+(k+1)x.$

Отже, за припущенням математичної індукції для $\forall n$ виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$. ❍

1.2.3. Множина комплексних чисел

Множиною комплексних чисел називають множину упорядкованих пар $z=(x;y)$ дійсних чисел, для яких операції додавання, множення і ділення визначають за правилами:

$$1)\ (x_1;y_1)\pm(x_2;y_2)=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2);$$
$$2)\ (x_1;y_1)\cdot(x_2;y_2)=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1); \qquad (1.2.17)$$
$$3)\ \frac{(x_1;y_1)}{(x_2;y_2)}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2};\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

Множину комплексних чисел позначають C.

Отже, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Упорядковані пари чисел $(x;0)$, де x – дійсне число, будемо позначати через x, а пару $(0;1)$ – через i, тобто $i=(0;1)$.

На підставі (1.2.17) обчислимо

$$i^2 = i\cdot i = (0;1)\cdot(0;1) = (0\cdot 0-1\cdot 1;0\cdot 1+0\cdot 1) = (-1;0).$$

Отже,

$$i^2 = -1. \qquad (1.2.18)$$

Використаємо формулу (1.2.17) та отримаємо комплексне число в алгебричній формі:

$$z = x+iy.$$

Справді, $z=(x;y)=(x;0)+(0;y)=(x;0)+(0;1)(y;0)=x+iy$.

Число x називають *дійсною частиною комплексного числа* z і позначають $x=\operatorname{Re} z$, число y – *уявною* і позначають $y=\operatorname{Im} z$.

Два комплексні числа $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$ називають *рівними* тоді і тільки тоді, коли $x_1=x_2$ і $y_1=y_2$.

Число

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.2.19)$$

називають модулем комплексного числа $z=x+iy$ і позначають символом $|z|$.

Якщо $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$1)\ z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$$
$$2)\ z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1); \qquad (1.2.20)$$

3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$

Приклад 1.2.14. Визначимо модуль комплексного числа $z=\dfrac{3+4i}{1+i}$.

- Використаємо формулу (1.2.20) та отримаємо

$$z=\frac{3+4i}{1+i}=\frac{3\cdot1+4\cdot1}{1^2+1^2}+\frac{1\cdot4-3\cdot1}{1^2+1^2}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Отже, за формулою (1.2.19) $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{50}}{2}$. ❍

Якщо на площині введена декартова прямокутна система координат, то кожному комплексному числу $z=(x;y)$ на площині відповідає точка $M(x;y)$, яка зображає це число (рис. 1.2.3).

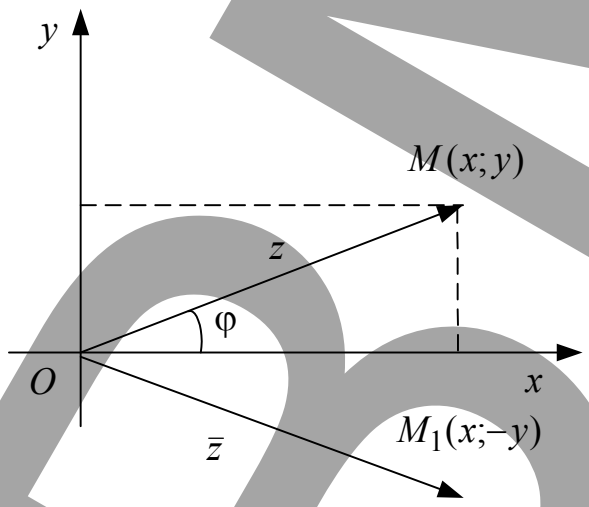


Рис. 1.2.3.

Площину Oxy, на якій зображають комплексні числа, називають комплексною площиною і позначають C, вісь Ox – дійсною віссю, Oy – уявною.

Модуль комплексного числа $z=x+iy$ дорівнює відстані від точки $M(x;y)$, яка його зображає, до початку координат. Кут φ, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з додатним напрямом осі Ox, називають *аргументом комплексного числа* і позначають $\operatorname{Arg} z$. Значення $\operatorname{Arg} z$, яке задовольняє умову $0\le \operatorname{Arg} z<2\pi$, називають *головним значенням* аргумента і позначають $\arg z$. У деяких випадках головним значенням аргумента називають значення $\operatorname{Arg} z$, що задовольняє умову $-\pi<A\operatorname{rg} z\le\pi$.

Отже, $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\quad k\in Z$.

Для обчислення головного значення аргумента числа користуються формулою

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+a\pi, \tag{1.2.21}$$

де $a=0$, якщо $x>0,\ y>0$; $a=1$, якщо $x<0, y>0$; $a=-1$, якщо $x<0, y<0$; $a=2,$ якщо $x>0, y<0$. Якщо $x=0,$ то при $y\neq 0$ $\arg z=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$. У випадку $x=0, y=0$ $\arg z$ невизначений.

Комплексне число $z=x+iy,$ записане у вигляді

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.2.22}$$

де $r-$модуль комплексного числа; $\varphi-$аргумент, називають *тригонометричною формою комплексного числа*. Кожне комплексне число $z\neq 0$ $\left(|z|\neq 0\right)$ має аргумент, який є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{r};\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{r}.\end{cases} \tag{1.2.23}$$

Приклад 1.2.15. Запишемо число $z=-2+2\sqrt{3}\,i$ у тригонометричній формі.

• За формулою (1.2.19) обчислимо $r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$ а за формулою (1.2.21) $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)+\pi=\frac{2\pi}{3}$. Отже, за формулою (1.2.22) запишемо задане число у тригонометричній формі: $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$ ❍

Розглянемо два числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$ записані у тригонометричній формі, і обчислимо їхній добуток:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=$$
$$=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{1.2.24}$$

Отже,

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Ar}g\,z_2. \tag{1.2.25}$$

Другу рівність в останній формулі, як і всі рівності, в яких є Arg, розуміють як рівність відповідних множин, причому кожен елемент множини, яка є в правій частині рівності, – це сума деяких елементів, відповідно, множин $\operatorname{Arg}z_1$ і $\operatorname{Arg}z_2$.

Можна довести, що у випадку ділення двох комплексних чисел z_1 і z_2

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Ar}g\,z_2\,. \tag{1.2.26}$$

Методом математичної індукції легко довести, що

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1z_2\ldots z_n)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2+\ldots+\operatorname{Arg}z_n, \tag{1.2.27}$$

тобто у випадку множення комплексних чисел їхні модулі перемножують, а

аргументи додають. Якщо $z_1 = z_2 = ... = z_n = z,$ то для степеня $z^n,$ $n = 1,2,3,...$ комплексного числа z отримаємо

$$\left|z^n\right| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2,... \qquad (1.2.28)$$

Якщо $\varphi \in \operatorname{Arg} z,$ то $n\varphi \in \operatorname{Arg} z^n,$ і для числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.2.29)$$

Якщо $|z| = r = 1,$ то з формули (1.2.29) отримаємо формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (1.2.30)$$

Нехай n – натуральне число. Коренем n-го степеня з комплексного числа z називають таке комплексне число $w = \sqrt[n]{z},$ що

$$w^n = z. \qquad (1.2.31)$$

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$ $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$ то

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

З цієї рівності отримаємо

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,2,...,n-1. \qquad (1.2.32)$$

Отже,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...n-1. \qquad (1.2.33)$$

Звідси корінь $\sqrt[n]{z}$ для $z \neq 0$ має точно n значень $w_0, w_1, ..., w_{n-1}.$

У комплексній площині числа $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ є в вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом ρ з центром у початку координат.

Приклад 1.2.16. Обчислимо всі значення $\sqrt[4]{-16}.$

- Запишемо число $z = -16$ у тригонометричній формі. Обчислимо $|z| = \sqrt{(-16)^2} = 16,$ $\varphi = \arg z = \pi.$ Тому $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$ За формулою (1.2.33) отримаємо $w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$

Якщо

$$k = 0, \text{ то } w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$k = 1, \text{ то } w_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$k = 2, \text{ то } w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2};$$

$$k = 3, \text{ то } w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \qquad \bigcirc$$

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає *спряжене комплексне число* $\bar{z} = x - iy$. Геометрично спряжене комплексне число $\bar{z}$ зображають вектором $\overrightarrow{OM_1}$, що симетричний вектору $\overrightarrow{OM}$, який зображає комплексне число z (див. рис. 1.2.3).

Властивості спряжених комплексних чисел:

1) $|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z;$

2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2;$

3) $\bar{\bar{z}} = z;$

4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2};$ (1.2.34)

5) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2};$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2};$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, \ z_2 \neq 0.$

Приклад 1.2.17. Запишемо комплексне число $z = \frac{2+3i}{4-5i}$ в алгебричній формі.

• $z = \frac{2+3i}{4-5i} = \frac{(2+3i)\cdot(4+5i)}{(4-5i)\cdot(4+5i)} = \frac{8+10i+12i+15i^2}{16+25} = \frac{8+10i+12i-15}{41} =$

$= -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i.$ ❍

Число

$$z = re^{i\varphi} \tag{1.2.35}$$

називають *показниковою формою комплексного* числа z, де r – модуль цього комплексного числа, φ – аргумент.

Для комплексних чисел, які записані в показниковій формі, справджується формула Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.2.36}$$

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{1.2.37}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \tag{1.2.38}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i(\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{1.2.39}$$

З формули Ейлера (1.2.36) отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.2.40}$$

Приклад 1.2.18. Запишемо число $z = -1 + i$ у показниковій формі.

• Визначимо модуль і аргумент цього числа. За формулами (1.2.19), (1.2.21) отримаємо $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Отже, за формулою (1.2.35) одержимо показникову форму цього комплексного числа: $z = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}}$. ❍

Розділ 2. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Матриці і визначники

2.1.1. Матриці і дії над ними

Поняття матриці. Прямокутну таблицю чисел

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad (2.1.1)$$

яка має m рядків і n стовпців, називають $m\times n$ *матрицею*. Числа, з яких складається матриця, називають її *елементами*. Кожен елемент матриці має два індекси. Перший індекс i означає номер рядка, у якому розміщений цей елемент, а другий індекс j – номер стовпця. Матриці будемо позначати великими літерами латинського алфавіту: $A_{m\times n}, B_{k\times p}$, або малими літерами з двома індексами: $(a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{k\times p}$.

Дві матриці $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ однакових розмірів дорівнюють одна одній, якщо дорівнюють один одному їхні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх $i = 1,2,\cdots,m$ та $j = 1,2,\cdots,n$.

За допомогою матриць зручно записувати багато економічних залежностей.

Приклад 2.1.1. Торгова фірма продає відеомагнітофони, телевізори, музичні центри та аудіомагнітофони в трьох магазинах, які розташовані в різних районах міста. В таблиці наведений розподіл кількості проданого товару за рік.

Вид продукції	Магазини		
	1	2	3
Відеомагнітофони	400	250	300
Телевізори	170	360	155
Музичні центри	112	184	152
Аудіомагнітофони	97	125	110

Числа, наведені в таблиці, можна записати у вигляді такої матриці:

$$A=\begin{pmatrix}400 & 250 & 300\\ 170 & 360 & 155\\ 112 & 184 & 152\\ 97 & 125 & 110\end{pmatrix}.$$

Кожен рядок та кожен стовпець цієї матриці має певний зміст. Наприклад, елементи другого рядка означають кількість проданих телевізорів, відповідно, у першому, другому і третьому магазинах, а елементи другого стовпця – кількість відеомагнітофонів, телевізорів, музичних центрів та аудіомагнітофонів, проданих другим магазином. ❍

Якщо в матриці A, яка має m рядків та n стовпців, замінити її рядки стовпцями, то отримаємо *транспоновану* матрицю. Транспонована матриця має n рядків та m стовпців, її позначають A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}. \qquad (2.1.2)$$

Матрицю, яка складається з одного стовпця, називають *матриця-стовпець* $\bar{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}$, а з одного рядка – *матриця-рядок* $\bar{a}^T=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців $(m=n)$, то матрицю називають *квадратною*. В цьому випадку число n називають *порядком матриці*. Елементи a_{ii}, $i=1,2,\cdots,n$ квадратної матриці називають *діагональними елементами*. Діагональні елементи $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*. Суму цих елементів називають *слідом матриці* і позначають $\operatorname{tr}A$. Отже, $\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. Елементи $a_{n1},a_{(n-1)2},\ldots,a_{1n}$ утворюють другорядну діагональ.

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то її називають *діагональною*:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (2.1.3)$$

Якщо у діагональній матриці n-го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то таку матрицю називають *одиничною*:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}), \qquad (2.1.4)$$

де $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, та $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Символ δ_{ij} називають *символом Кронекера.*

Квадратну матрицю називають *верхньою* (*нижньою*) *трикутною*, якщо всі її елементи, розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ при $i > j$ $(i < j)$.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то її називають *нульовою*, або *нуль-матрицею*:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.1.5)$$

Квадратну матрицю A називають *симетричною*, якщо $A^T = A$, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратну матрицю A називають *кососиметричною* (*антисиметричною*), якщо $A^T = -A$, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$.

Дії над матрицями. Над матрицями можна виконувати такі дії: множення матриці на число, додавання і віднімання матриць, множення матриць.

Добутком матриці $A_{m\times n}$ *на число* λ називають матрицю $B_{m\times n} = \lambda A_{m\times n}$, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A на число λ, тобто

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n. \qquad (2.1.6)$$

Приклад 2.1.2. Обчислимо $5 \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

• $5 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 45 \\ -20 & -30 & 40 \end{pmatrix}$. ❍

Сумою (*різницею*) *двох матриць* $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ однакового розміру називають матрицю $C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n}$, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n. \qquad (2.1.7)$$

Розглянемо матриці A та B. Матрицю A можна помножити на матрицю B тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Добутком матриці $A_{m\times n}$ *на матрицю* $B_{n\times k}$ називають матрицю $C_{m\times k}$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі попарних добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}. \qquad (2.1.8)$$

Приклад 2.1.3. Обчислимо добуток матриці A на матрицю B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

• За формулою (2.1.8) отримаємо

$c_{11} = 2\cdot(-5) + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = -10 + 6 + 3 = -1;$

$c_{12} = 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 7 = 8 + 3 + 7 = 18;$

$c_{21} = 4\cdot(-5) + (-1)\cdot 2 + 5\cdot 3 = -20 - 2 + 15 = -7;$

$c_{22} = 4\cdot 4 + (-1)\cdot 1 + 5\cdot 7 = 16 - 1 + 35 = 50;$

$c_{31} = 7\cdot(-5) + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 = -35 + 6 + 6 = -23;$

$c_{32} = 7\cdot 4 + 3\cdot 1 + 2\cdot 7 = 28 + 3 + 14 = 45.$

Отже,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 18 \\ -7 & 50 \\ -23 & 45 \end{pmatrix}. \quad \bigcirc$$

Справджуються такі властивості дій над матрицями:

1) $A + B = B + A;$
2) $\lambda\cdot(A + B) = \lambda A + \lambda B;$
3) $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C;$
4) $\lambda\cdot(AB) = (\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B);$
5) $(A^T)^T = A;$
6) $(A + B)^T = A^T + B^T;$
7) $A\cdot I = I\cdot A = A;$
8) $(A + B) + C = A + (B + C);$
9) $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C;$
10) $A\cdot B \neq B\cdot A;$
11) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C;$
12) $(\lambda\cdot A)^T = \lambda\cdot A^T;$
13) $(AB)^T = B^T\cdot A^T;$
14) $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0.$

Зазначимо, що добуток двох ненульових матриць може бути нуль-матрицею.

2.1.2. Визначники, їхні властивості й головні способи обчислення

Визначники другого і третього порядків. Розглянемо квадратну матрицю другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником другого порядку є число

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2.1.9)$$

Елементи $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ називають *елементами визначника.*

Приклад 2.1.4. Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

• Використовуючи формулу (2.1.9), отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) = 13. \qquad \text{❍}$$

Розглянемо квадратну матрицю третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

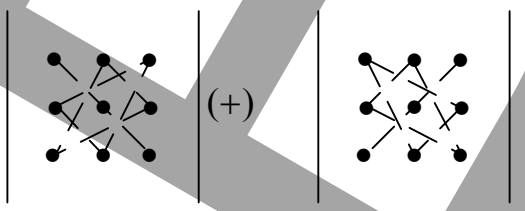
Визначником третього порядку є число

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2.1.10)$$

Діагональ, утворену елементами a_{11}, a_{22}, a_{33}, називають *головною*, а елементами a_{13}, a_{22}, a_{31} – другорядною.

Для обчислення визначників третього порядку зручно користуватися правилом трикутника, за яким добутки елементів, що є на головній діагоналі й у вершинах трикутників, одна зі сторін яких паралельна до головної діагоналі, беруть зі знаком "+", а добутки елементів, що є на другорядній діагоналі й у вершинах трикутників, одна зі сторін яких паралельна до другорядної діагоналі, – зі знаком "–":



Для того, щоб увести поняття визначника вищого порядку, введемо поняття інверсії. Нехай кожне з різних чисел $б_1, б_2, ..., б_n$ набуває одного з різних значень 1,2,3,...,*n*. Перестановкою чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називають їхнє розміщення в певному порядку. Для двох чисел маємо дві (2!) перестановки, для трьох – шість (3!), а для *n* чисел є *n*! перестановок. Два числа в перестановці утворюють інверсію, якщо вони розміщені не в натуральному порядку, тобто більше число стоїть перед меншим. Наприклад, у перестановці (2,1,3,4) є одна інверсія (2,1), а в перестановці (4,3,1,2) – п'ять: (4,3), (4,1), (4,2), (3,1), (3,2). Позначимо кількість інверсій, утворених з чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, через $S = S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Визначником квадратної матриці n-го порядку, або визначником n-го порядку, називають число, яке дорівнює алгебричній сумі $n!$ доданків, кожен з яких є добутком n елементів визначника, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} (-1)^S a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}\,, \qquad (2.1.11)$$

де додавання відбувається за всіма можливими перестановками $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ чисел 1,2,3,...,*n*.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку називають визначник (*n*-1)-го порядку, який отримують із початкового визначника викреслюванням *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку називають його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,. \qquad (2.1.12)$$

Теорема 2.1.1. Визначник квадратної матриці n-го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебричні доповнення цих елементів, тобто

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}\,, \quad i = 1,2,\dots,n\,, \qquad (2.1.13)$$

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}\,, \quad j = 1,2,\dots,n\,. \qquad (2.1.14)$$

Формулу (2.1.13) називають розкладом визначника за елементами *i*-го рядка, а формулу (2.1.14) – розкладом визначника за елементами *j*-го стовпця.

Властивості визначників n-го порядку.

1. Визначник не змінюється внаслідок транспонування, тобто внаслідок заміни його рядків стовпцями.

2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює нулю.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на одне і те ж число $\lambda \neq 0$, то визначник буде помножений на це число λ.

4. Унаслідок переставляння двох сусідніх рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.

5. Якщо у визначнику є два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника є пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Сума попарних добутків елементів рядка (стовпця) на алгебричні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0\,, \text{ якщо } i \neq k\,; \qquad (2.1.15)$$
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0\,, \text{ якщо } j \neq k\,.$$

8. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, яке не дорівнює нулю.

9. Якщо у визначнику Δ деякий рядок є лінійною комбінацією рядків $(b_{i1}b_{i2}\dots b_{in})$ та $(c_{i1}c_{i2}\dots c_{in})$, тобто $a_{i1} = \alpha b_{i1} + \mu c_{i1}$, $a_{i2} = \alpha b_{i2} + \mu c_{i2},\dots,$ $a_{in} = \alpha b_{in} + \mu c_{in}$, то $\Delta = \alpha\Delta_1 + \mu\Delta_2$, де Δ_1 – визначник, в якого i-й рядок дорівнює $(b_{i1}b_{i2}\dots b_{in})$, а решта всі рядки ті ж, що й у визначника Δ, а Δ_2 – визнач-

ник, у якого i-й рядок дорівнює $(c_{i1}c_{i2}\ldots c_{in})$, а решта всі рядки ті ж, що й у визначника Δ.

10. Визначник трикутної матриці n-го порядку, у якій усі елементи, розміщені над (під) головною діагоналлю є нулями, дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \ldots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{(n-1)n} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \qquad (2.1.16)$$

11. Визначник добутку двох квадратних матриць n-го порядку дорівнює добутку їхніх визначників

$$\det(AB) = \det A \det B. \qquad (2.1.17)$$

Приклад 2.1.5. Доведемо, що сума попарних добутків елементів довільного рядка визначника третього порядку на алгебричні доповнення елементів іншого рядка дорівнює нулю.

• Нехай елементи першого рядка помножені на алгебричні доповнення відповідних елементів третього рядка, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}.$$

Обчислимо

$$A_{31} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже,

$\Delta = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{12}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) +$
$+ a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{13}a_{22} + a_{12}a_{13}a_{21} - a_{12}a_{11}a_{23} + a_{13}a_{11}a_{22} -$
$- a_{13}a_{12}a_{21} = 0.$

Аналогічно можна перевірити виконання решти властивостей визначника. ❍

П р и к л а д 2.1.6. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

- Обчислимо визначник, користуючись правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 7 + (-2)(-1)(-3) + 3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 4(-3) - 1(-1)\cdot 1 - 7\cdot 2(-2) = 93.$$

Обчислимо визначник, розкривши його за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(-14-3) + 4\cdot(7+9) + (1-6) = 34 + 64 - 5 = 93. \quad \text{❍}$$

П р и к л а д 2.1.7. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

- Обчислимо визначник, звівши його до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-2)\cdot 15 = -60. \quad \text{❍}$$

2.1.3. Обернена матриця

Квадратну $n\times n$ матрицю A^{-1} називають *оберненою* до квадратної $n\times n$ матриці A, якщо $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$.

Матрицю A називають *невиродженою* (*виродженою*), якщо $\det A \neq 0$ ($\det A = 0$).

Теорема 2.1.2. Для того, щоб для матриці A існувала єдина обернена матриця A^{-1}, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

⏮ *Необхідність*. Нехай матриця A має обернену матрицю A^{-1}, тобто $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. За формулою (2.1.17), отримаємо $\det(AA^{-1}) = \det I = 1 = \det A \det A^{-1}$. Отже, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$. Розглянемо квадратну матрицю $\widetilde{A}$, елементами якої є алгебричні доповнення елементів транспонованої матриці A^T. Позначимо $\widetilde{A}A = C$. За правилом множення двох матриць елементи матриці C визначають за формулою $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj}$. У цьому випадку $c_{ij} = 1$, якщо $i = j$, $c_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Отже, матриця C є діагональною, причому діагональні елементи дорівнюють визначнику матриці A, тобто $c_{ii} = \det A = \Delta$. Аналогічно можна довести, що $A\widetilde{A} = C$. ⏭

Отже, обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}, \qquad (2.1.18)$$

де A_{ij} – алгебричні доповнення елементів a_{ij} квадратної матриці A, $\Delta = \det A \neq 0$.

Для того, щоб побудувати матрицю A^{-1}, обернену до матриці A, потрібно:

1) обчислити визначник матриці A. Якщо $\det A = 0$, то матриця A не має оберненої. Якщо $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1};
2) знайти алгебричні доповнення A_{ij}, $(i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,n)$ елементів a_{ij} матриці A і скласти з них матрицю;
3) транспонувати отриману матрицю, складену з алгебричних доповнень A_{ij};
4) поділити кожен елемент транспонованої матриці на $\Delta = \det A$.

Властивості обернених матриць:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$; 3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;
4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; 5) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$.

Приклад 2.1.8. Для матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$ знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

- Обчислимо визначник матриці:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -7 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & -12 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-7 & -1\\ -12 & -1\end{vmatrix}=5.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=9;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2;\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-12;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Отже,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}8 & -0{,}4 & -0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}2\\ -2{,}4 & 0{,}2 & 1{,}4\end{pmatrix}.\quad ❍$$

2.1.4. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю A, яка складається з m рядків та n стовпців. Нехай $k\le\min(m,n)$. Виберемо в матриці A довільні k рядків та k стовпців. З елементів, які стоять на перетині виділених рядків і стовпців, складемо визначник k-го порядку, який називають мінором k-го порядку матриці A.

Рангом матриці A називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $\operatorname{rang} A$. Якщо ранг матриці дорівнює s, то серед мінорів цієї матриці є хоча б один мінор s-го порядку, що не дорівнює нулю, який називають *базисним*, і всі мінори вищих порядків, ніж s, дорівнюють нулю. Стовпці і рядки, на перетині яких розміщений базисний мінор, називають *базисними стовпцями* і *рядками*.

З визначення рангу матриці отримаємо, що:

1) $\operatorname{rang} A \le \min(m,n)$;
2) $\operatorname{rang} A = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю, тобто $A = 0$;
3) для квадратної матриці n-го порядку $\operatorname{rang} A = n$ тоді і тільки тоді, коли ця матриця є невиродженою.

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка має m рядків та n стовпців. Поняття рангу матриці пов'язане з поняттям лінійної залежності (незалежності) її рядків чи стовпців. Дамо означення лінійної залежності (незалежності) для рядків матриці. Для стовпців ці означення аналогічні. Позначимо рядки матриці через

$$e_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}), \quad e_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}), \ldots,$$
$$e_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}). \qquad (2.1.19)$$

Два рядки дорівнюють один одному, якщо дорівнюють один одному їхні відповідні елементи. Введемо операції множення рядка на число і додавання рядків:

$$\mu e_k = (\mu a_{k1} \quad \mu a_{k2} \quad \cdots \quad \mu a_{kn});$$
$$e_k + e_s = (a_{k1} + a_{s1} \quad a_{k2} + a_{s2} \quad \cdots \quad a_{kn} + a_{sn}). \qquad (2.1.20)$$

Деякий рядок e називають лінійною комбінацією рядків $e_1, e_2, \cdots, e_s$ матриці, якщо

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_s e_s,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ – дійсні числа.

Ненульові рядки матриці $e_1, e_2, \cdots, e_m$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулю, якщо

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_m e_m = 0, \qquad (2.1.21)$$

де $0 = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$ є нульовий рядок.

Якщо остання рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, то рядки називають *лінійно незалежними*.

Теорема 2.1.3. Для того, щоб ненульові рядки $e_1, e_2, \cdots, e_m$ матриці були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією решти рядків.

Теорема 4.1.4. Базисні рядки (стовпці) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).

Наслідок 1. Максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних її стовпців.

Наслідок 2. Для того, щоб визначник матриці дорівнював нулю, необхідно і досить, щоб його рядки (стовпці) були лінійно залежні.

Наведемо головні методи обчислення рангу матриці.

Метод мінорів. Нехай у матриці $A_{m\times n}$ є мінор k-го порядку M_k, який не дорівнює нулю. Розглянемо всі мінори $(k+1)$-го порядку, які містять у собі мінор M_k. Якщо всі ці мінори дорівнюють нулю, то $\operatorname{rang} A = k$. Якщо ж серед цих мінорів знайдеться мінор $(k+1)$-го порядку, який не дорівнює нулю, то процес повторюють.

Приклад 2.1.9. Визначимо ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Зафіксуємо відмінний від нуля мінор другого порядку $M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Обчислимо мінор третього порядку, що містить мінор M_2:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Обчислимо мінори четвертого порядку, які містять мінори M_3:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -9 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, а мінор третього порядку відмінний від нуля, то $\operatorname{rang} A = 3$. ❍

Метод елементарних перетворень. Елементарними перетвореннями матриці будемо називати такі:

1) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) матриці на число, яке не дорівнює нулю;

2) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне число;

3) переставлення двох рядків (стовпців) матриці;

4) транспонування матриці.

Теорема 2.1.5. Унаслідок елементарних перетворень матриці її ранг не змінюється.

П р и к л а д 2.1.10. Визначимо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Для відшукання рангу матриці A виконаємо такі елементарні перетворення:

1) додамо до другого рядка перший, помножений на (–2), до третього рядка – перший, помножений на (–3), до четвертого – перший, помножений на (–1);

2) додамо до третього рядка другий, помножений на (–1), і поміняємо місцями третій і четвертий рядки.

Отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, а мінор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rang} A = 3$. ❍

2.2. Системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

де a_{ij} – довільні числа, які називають коефіцієнтами системи; b_i – вільні члени системи.

Розв'язком системи (2.2.1) називають сукупність n значень змінних $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, у випадку підставлення яких у систему всі рівняння обертаються в тотожності. Систему, яка має хоча б один розв'язок, називають *сумісною*. Система, яка не має жодного розв'язку, є *несумісною*. Систему, яка має єдиний розв'язок, називають *визначеною*, а систему, яка має більше одного розв'язку, – *невизначеною*.

Дві системи лінійних рівнянь називають *рівносильними* (еквівалентними), якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.

Запишемо систему лінійних рівнянь (2.2.1) у матричній формі. Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

де A – матриця системи; X – матриця-стовпець змінних; B – матриця-стовпець вільних членів. Тоді систему (2.2.1) можна записати у вигляді

$$AX = B. \tag{2.2.3}$$

2.2.1. Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Метод оберненої матриці. Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Матриця системи A є квадратною, а її визначник $\Delta = \det A$ називають визначником системи. Якщо матриця A невироджена, тобто $\det A \neq 0$, то для неї існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо рівність (2.2.3) зліва на A^{-1}. Отримаємо розв'язок системи

$$X = A^{-1}B. \tag{2.2.5}$$

Приклад 2.2.1. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

- Запишемо систему в матричному вигляді. Нехай

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -6\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тоді початкова система набуде вигляду $AX=B$. Звідси $X=A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Обчислимо

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -6\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & -12\\ 0 & 8 & -13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -12\\ 8 & -13\end{vmatrix}=-91+96=5;$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & -4\end{vmatrix}=0,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -6\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-13,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -6\end{vmatrix}=12,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Звідси обернена матриця

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -0{,}4 & 0{,}6\\ -2 & -2{,}6 & 2{,}4\\ -1 & -1{,}6 & 1{,}4\end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & -0{,}4 & 0{,}6\\ -2 & -2{,}6 & 2{,}4\\ -1 & -1{,}6 & 1{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$. ❍

Формули Крамера. Розглянемо систему (2.2.4) n лінійних рівнянь з n невідомими. Запишемо головний визначник цієї системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\qquad(2.2.6)$$

і визначники Δ_i, які отримують з головного визначника системи заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів. Помножимо перше рівняння системи (2.2.4) на A_{11}, друге – на A_{21}, ..., останнє – на A_{n1} і додамо їх. Отримаємо:

$$x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots+a_{n2}A_{n1})+\ldots$$

$$+ x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + ... + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1}. \qquad (2.2.7)$$

Оскільки коефіцієнти біля $x_2, x_3, ..., x_n$ є сумою попарних добутків елементів стовпця, починаючи з другого, на алгебричні доповнення елементів першого стовпця, то ці коефіцієнти дорівнюють нулю. Коефіцієнт біля x_1 дорівнює визначнику системи, тобто $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1} = \Delta$. Позначимо через Δ_1 визначник, отриманий з головного визначника Δ заміною у ньому першого стовпця стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що $b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1} = \Delta_1$. Рівність (2.2.7) можна записати у вигляді $\Delta x_1 = \Delta_1$. Аналогічно можна отримати рівності $\Delta x_2 = \Delta_2, ..., \Delta x_n = \Delta_n$, де Δ_i – визначник, отриманий з головного визначника Δ заміною у ньому i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Отже, отримаємо систему рівнянь

$$\Delta x_1 = \Delta_1, \quad \Delta x_2 = \Delta_2, \ ..., \ \Delta x_n = \Delta_n, \qquad (2.2.8)$$

яка є наслідком системи (2.2.4).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.2.8), а отже, і система (2.2.4), має єдиний розв'язок, який обчислюють за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (2.2.9)$$

Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система (2.2.8), а отже, і система (2.2.4), має безліч розв'язків, тобто вона є невизначеною.

Якщо ж $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta_i \neq 0$ $(i = 1,2,...,n)$, то система (2.2.4) не має розв'язків, вона є несумісною.

2.2.2. Системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Проаналізуємо систему лінійних рівнянь (2.2.1) у випадку, коли кількість рівнянь не обов'язково дорівнює кількості невідомих. Розглянемо дві матриці: матрицю A, складену з коефіцієнтів при невідомих системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.2.10)$$

і матрицю

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (2.2.11)$$

яку отримують із матриці A дописуванням до неї стовпця вільних членів. Матрицю $\overline{A}$ будемо називати *розширеною матрицею* системи (2.2.1). Очевидно, що $\operatorname{rang}\overline{A} \geq \operatorname{rang} A$, оскільки кожен мінор матриці A буде мінором матриці $\overline{A}$, але не навпаки. Справджується такий критерій сумісності системи лінійних рівнянь.

Теорема 2.2.1 (Кронекера–Капеллі). Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісна, необхідно і достатньо, щоб ранг головної матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці.

П р и к л а д 2.2.2. Дослідимо систему рівнянь і у випадку сумісності знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

- Запишемо розширену матрицю системи рівнянь і визначимо її ранг:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -14 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\overline{A} = 3$. За теоремою Кронекера–Капеллі система рівнянь має єдиний розв'язок. Виберемо перші три рівняння цієї системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему за формулами Крамера, отримаємо $x_1 = -1, x_2 = 0, \ x_3 = 1$.

Метод Гаусса. Застосування формул Крамера та методу оберненої матриці до розв'язування систем лінійних рівнянь можливе лише тоді, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і потребує великих обчислень. Ме-

тод Гаусса дає змогу з'ясувати, чи сумісна система рівнянь, чи ні, а у випадку сумісності знайти її розв'язки.

Метод Гаусса (метод послідовного вилучення невідомих) полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система лінійних рівнянь зводиться до рівносильної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої потім послідовно визначають усі невідомі.

Приклад 2.2.3. Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

- Зведемо систему рівнянь до східчастого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1; \\ 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 10x_5 = 2; \\ 9x_2 - 9x_3 - 9x_4 + 15x_5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1; \\ 0 = 0; \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5; \\ x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5; \\ x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = c_3, x_4 = c_4, x_5 = c_5$. Тоді отримаємо загальний розв'язок системи

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5; \quad x_2 = \frac{1}{3} + c_3 + c_4 - \frac{5}{3}c_5; \quad x_3 = c_3; \quad x_4 = c_4; \quad x_5 = c_5. \ \text{❍}$$

Приклад 2.2.4. Мале підприємство виробляє шкільну форму для молодшого, середнього і старшого шкільного віку. Для цього використовують сировину чотирьох типів C_1, C_2, C_3, C_4. Норми витрат сировини кожного типу на одиницю продукції за один день задані в таблиці:

Тип сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг			Витрати сировини за один день
	молодший вік	середній вік	старший вік	
C_1	0,8	1,0	1,3	65
C_2	0,4	0,7	0,8	38

C_3	0,3	0,4	0,6	26
C_4	0,2	0,3	0,4	18

Знайдемо щоденний обсяг випуску продукції кожного типу.

- Нехай щодня підприємство випускає x_1 костюмів для школярів молодшого віку, x_2 – для середнього, x_3 – для старшого. Тоді отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + x_2 + 1{,}3x_3 = 65; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}8x_3 = 38; \\ 0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 = 26; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 = 18. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса. Помножимо третє рівняння системи на 2, четверте – на –3 і додамо їх. Помножимо четверте рівняння на –2 і додамо до другого, помножимо четверте рівняння на –4 і додамо до першого. Отримаємо

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 = 18; \\ -0{,}1x_2 = -2; \\ 0{,}1x_2 = 2; \\ -0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 = -7. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему й обчислимо, що $x_1 = 40$, $x_2 = 20$, $x_3 = 10$. ❍

2.2.3. Система лінійних однорідних рівнянь

Система лінійних однорідних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

Система однорідних рівнянь (однорідна система лінійних рівнянь) завжди сумісна, оскільки вона має нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$

Теорема 2.2.2. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг s її матриці коефіцієнтів був менший від n.

⏮ Якщо $s = n,$ то за теоремою Кронекера–Капеллі система має єдиний розв'язок: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$

Якщо ж $s < n,$ то, оскільки система (2.2.12) не може бути несумісною, вона є невизначена, отже, має безліч ненульових розв'язків. ⏭

З цієї теореми випливає така теорема.

Теорема 2.2.3. Для того, щоб однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю.

⏮ Умова $\Delta = 0$ є необхідною, оскільки якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний, а отже, лише нульовий розв'язок. Ця умова є й достатньою, бо з умови $\Delta = 0$ маємо, що ранг матриці коефіцієнтів системи $s < n$. У цьому випадку система має безліч ненульових розв'язків. ⏭

2.3. Векторні простори

Будь-яку впорядковану сукупність n дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називають *n-вимірним вектором* і позначають $\bar{a}$. Розглядають вектор-рядок

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \tag{2.3.1}$$

або вектор-стовпець

$$\bar{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ називають *координатами*, або *компонентами*, вектора $\bar{a}$.

Поняття n-вимірного вектора часто використовують в економіці. Наприклад, деякий набір товарів можна схарактеризувати вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а відповідні ціни – вектором $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, називають *нуль-вектором*

$$\bar{0} = (0, 0, ..., 0). \tag{2.3.3}$$

Розглянемо два вектори $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, які мають однакову кількість компонент.

Два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ *дорівнюють один одному*, тобто $\bar{a} = \bar{b}$, якщо $a_i = b_i, \quad i = 1,2,...,n.$

Сумою двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, координати якого дорівнюють сумі координат доданків, тобто $c_i = a_i + b_i, \quad i = 1,2,...,n.$

Добутком вектора $\bar{a}$ на дійсне число λ називають вектор $\bar{d} = л\bar{a}$, компоненти якого $d_i = лa_i, \quad i = 1,2,...,n.$

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ – комутативна властивість;

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ – асоціативна (сполучна) властивість;

3) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$;

4. $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a};$ (2.3.4)

5) $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a};$

6) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a};$

7) для кожного вектора $\bar{a}$ існує *протилежний* вектор $-\bar{a}$ такий, що $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0};$

8) $1\cdot\bar{a}=\bar{a}.$

Векторним простором R^n називають множину векторів з дійсними компонентами, у якій визначені операції додавання векторів і множення вектора на число, що задовольняють умови 1–8.

Вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,$ які не всі дорівнюють нулю:

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0}. \quad (2.3.5)$$

Систему векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ називають *лінійно незалежною*, якщо рівність $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0}$ виконується лише тоді, коли $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0.$

Вектор $\bar{a}$ є *лінійною комбінацією векторів* (його можна виразити через вектори) $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n,$ якщо

$$\bar{a}=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n. \quad (2.3.6)$$

Теорема 2.3.1. Для того, щоб вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ простору R^n були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією решти.

⏮ *Необхідність.* Нехай вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ лінійно залежні, тобто виконується рівність (2.3.5), у якій не всі числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ дорівнюють нулю. Нехай для визначеності $л_1\neq 0.$ З рівності (2.3.5)

$$\bar{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\bar{a}_3-...-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\bar{a}_n.$$

Позначимо $\lambda_2^*=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\lambda_3^*=-\frac{\lambda_3}{\lambda_1},...,л_n^*=-\frac{л_n}{л_1}.$ Тоді

$$\bar{a}_1=\lambda_2^*\bar{a}_2+\lambda_3^*\bar{a}_3+...+\lambda_n^*\bar{a}_n. \quad (2.3.7)$$

Остання рівність означає, що вектор $\bar{a}_1$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{a}_2,...,\bar{a}_n.$

Достатність. Нехай один із векторів, наприклад $\bar{a}_1$, є лінійною комбінацією решти $\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ векторів. У цьому випадку існують числа $\lambda_2^*,\lambda_3^*,...,\lambda_n^*$ такі, що виконується рівність (2.3.7). Перепишемо цю рівність у вигляді

$$(-1)\bar{a}_1+\lambda_2^*\bar{a}_2+\lambda_3^*\bar{a}_3+...+\lambda_n^*\bar{a}_n=0.$$

Оскільки серед чисел (-1), $\lambda_2^*,\lambda_3^*,...,\lambda_n^*$ є хоча б одне відмінне від нуля, то вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ лінійно залежні. ⏭

Справджуються такі твердження.

1. Якщо серед векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.

2. Якщо частина векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ лінійно залежна, то всі вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ лінійно залежні.

Сукупність упорядкованих лінійно незалежних векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ простору R^n називають *базисом* цього простору, якщо для кожного вектора $\bar{x}$ цього простору існують дійсні числа $x_1,x_2,...,x_n$ такі, що справджується рівність

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n. \qquad (2.3.8)$$

Рівність (2.3.8) називають *розкладом вектора* $\bar{x}$ *за базисом* $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, а числа $x_1,x_2,...,x_n$ – *координатами вектора* $\bar{x}$ у цьому базисі.

Теорема 2.3.2. Кожен вектор $\bar{x}$ простору R^n можна єдиним способом розкласти за векторами базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$.

⏮ Нехай для деякого вектора $\bar{x}$ простору R^n, крім розкладу (2.3.8), справджується такий розклад за векторами базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$:

$$\bar{x} = x_1^*\bar{e}_1 + x_2^*\bar{e}_2 + ... + x_n^*\bar{e}_n. \qquad (2.3.9)$$

Віднімемо від рівності (2.3.9) рівність (2.3.8):

$$(x_1 - x_1^*)\bar{e}_1 + (x_2 - x_2^*)\bar{e}_2 + ... + (x_n - x_n^*)\bar{e}_n = 0. \qquad (2.3.10)$$

Оскільки вектори базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ лінійно незалежні, то $x_1 - x_1^* = 0$, $x_2 - x_2^* = 0,...,x_n - x_n^* = 0$, або $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*,...,x_n = x_n^*$. ⏭

Головне значення базису полягає в тому, що операції додавання векторів і множення вектора на число у випадку задання базису перетворюються у відповідні операції над числами – координатами цих векторів у заданому базисі.

Теорема 2.3.3. Якщо у просторі R^n задано базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, то у випадку додавання двох векторів цього простору їхні координати додають, а у випадку множення вектора на число, усі координати вектора множать на це число.

⏮ Нехай $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ – довільний базис простору R^n. Розкладемо два довільні вектори $\bar{x}$ та $\bar{y}$ цього простору за векторами базису: $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$, $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n$. За аксіомами 1–8

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2 + ... + (x_n + y_n)\bar{e}_n;$$

$$\lambda\bar{x} = (\lambda x_1)\bar{e}_1 + (\lambda x_2)\bar{e}_2 + ... + (\lambda x_n)\bar{e}_n.$$

За теоремою 2.3.2 розклад вектора за базисом єдиний, що й доводить теорему. ⏭

Векторний простір називають n-вимірним і позначають R^n, якщо в ньому є n лінійно незалежних векторів, а будь-які $(n+1)$ векторів є лінійно залежними. Число n називають *розмірністю* простору і позначають $\dim R^n$.

Приклад 2.3.1. З'ясуємо, чи є система векторів $\bar{a}_1 = (1;1;1;1)$, $\bar{a}_2 = (1;-1;1;-2)$, $\bar{a}_3 = (1;3;0;4)$, $\bar{a}_4 = (1;5;-1;7)$ лінійно залежною. Якщо так, то знайдемо лінійну залежність між її векторами.

• Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли існують числа x_1, x_2, x_3, x_4, які не всі дорівнюють нулю, такі що

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + x_3 \cdot \bar{a}_3 + x_4 \cdot \bar{a}_4 = \bar{0}.$$

Запишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ -3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Отримана система має ненульові розв'язки. Отже, система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ лінійно залежна. Знайдемо цю лінійну залежність. Запишемо останню систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4; \\ x_2 = x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = 1, x_4 = 1$. Тоді $x_1 = -5; x_2 = 3$. Отже, одна з залежностей між векторами $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ така:

$$-5\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4 = \bar{0}. \ \text{❍}$$

Теорема 2.3.4. Якщо R^n – векторний простір, що має розмірність *n*, то будь-які *n* лінійно незалежні вектори цього простору утворюють його базис.

Теорема 2.3.5. Якщо у векторному просторі R^n є базис, який має *n* векторів, то розмірність цього простору дорівнює *n*.

Приклад 2.3.2. У просторі R^n розглянемо систему векторів $\vec{e}_1 = (1;0;...;0), \ \vec{e}_2 = (0;1;0;...;), ..., \ \vec{e}_n = (0;0;...;1)$. Доведемо, що ця система векторів є базисом простору R^n.

• Покажемо, що система векторів лінійно незалежна. Запишемо рівність $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = \bar{0}$, або $\lambda_1(1;0;...;0) + \lambda_2(0;1;...;0) + ... + \lambda_n(0;0;...;1) =$
$= (\lambda_1;0;...;0) + (0;\lambda_2;...;0) + ... + (0;0;...;\lambda_n) = (\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_n) = (0;0;...0)$.

Отже, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, тобто система векторів лінійно незалежна.

Візьмемо довільний вектор $x = (x_1;x_2;...;x_n)$ з простору R^n. Отримаємо

$$\bar{x} = (x_1;x_2;...,x_n) = (x_1;0;0;...;0) + (0;x_2;...;0) + (0;0;...;x_n) = x_1(1;0;...;0) +$$
$$+ x_2(0;1;...;0) + ... + x_n(0;0;...;1) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n.$$

Отже, доведено, що система $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторів є базисом простору R^n і $\dim R^n = n$. ❍

Нехай у просторі R^n є два базиси: старий $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ і новий $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$. Кожен з векторів нового базису можна виразити як лінійну комбінацію векторів старого:

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + ... + a_{1n}\bar{e}_n ; \\ \bar{e}'_2 &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{2n}\bar{e}_n ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}'_n &= a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + ... + a_{nn}\bar{e}_n . \end{aligned} \qquad (2.3.11)$$

Перехід від старого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ до нового $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ визначений матрицею переходу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{nn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.3.12)$$

Матриця A є невиродженою, оскільки у протилежному випадку її рядки, а отже, і базисні вектори $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ були б лінійно залежними.

Доведено, що перехід від нового базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ до старого $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ відбувається за допомогою оберненої матриці A^{-1}.

Доведено таке: якщо перехід від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ до базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n$ відбувається за допомогою невиродженої матриці A, то перехід від координат $(x_1; x_2; ...; x_n)$ будь-якого вектора у першому базисі до його координат $(x'_1; x'_2; ...; x'_n)$ у новому базисі можна виконати за допомогою матриці $\left(A^{-1}\right)^T$.

Приклад 2.3.3. У базисі $\bar{e}_1 = (1;0;0), \bar{e}_2 = (0;1;0), \bar{e}_3 = (0;0;1)$ задані вектори $\bar{a}_1 = (1;1;1), \bar{a}_2 = (1;2;1), \bar{a}_3 = (1;1;3)$. Доведемо, що вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ утворюють базис, та знайдемо координати вектора $\bar{b} = (3;-2;5)$ у цьому базисі.

• Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ утворюють базис, якщо вони є лінійно незалежними. Для доведення лінійної незалежності цих векторів відшукаємо ранг матриці, рядками якої є ці вектори:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо елементарні перетворення матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\operatorname{ranq} B = 3$, тобто вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно незалежні й утворюють базис. Знайдемо зв'язок між базисами:

$$\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3;$$
$$\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3;$$
$$\bar{a}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 .$$

Матриця переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ до базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $A = A^T$. Обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$(x_1'; x_2'; x_3') = \bar{b} \cdot \left(A^{-1}\right)^T = (3;-2;5) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (7;-5;-4).$$

Отже, нові координати вектора $\bar{b}$ у базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ є $(7,-5,-4)$ і вектор $\bar{b}$ можна зобразити у вигляді $\bar{b} = 7\bar{a}_1 - 5\bar{a}_2 - 4\bar{a}_3$. ❍

Евклідовим простором E називають векторний простір, у якому кожній парі векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ з цього простору відповідає дійсне число $(\bar{a}, \bar{b})$, яке називають скалярним добутком цих векторів.

Скалярний добуток двох векторів задовольняє такі аксіоми:

1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2) $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b})$;
3) $\alpha(\vec{a}, \vec{b}) = (\alpha\vec{a}, \vec{b})$; $\alpha \in R$; (2.3.13)
4) $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$;
5) $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$, якщо $\bar{a} = \bar{0}$.

У просторі R^n скалярний добуток двох векторів $\bar{a} = (a_1; a_2; ..., a_n)$ та $\bar{b} = (b_1; b_2; ..., b_n)$ можна визначити за формулою

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i . \quad (2.3.14)$$

Теорема 2.3.6. Для будь-яких елементів $\bar{a}$, $\bar{b}$ евклідового простору E справджується нерівність Коші–Буняковського

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 \leq (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) . \quad (2.3.15)$$

Довжиною (*нормою*) вектора $\bar{a}$ в евклідовому просторі називають число

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}. \tag{2.3.16}$$

Для будь-яких векторів $\bar{a},\bar{b} \in E$:

1) $\|\bar{a}\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{a} = \bar{0}$;

2) $\|\alpha\bar{a}\| = |\alpha|\|\bar{a}\|, \quad б \in R$;

3) $|(\bar{a},\bar{b})| \le \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ – нерівність Коші–Буняковського; (2.3.17)

4) $\|\bar{a} + \bar{b}\| \le \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ – нерівність трикутника.

Кут між двома векторами евклідового простору E визначають за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|}. \tag{2.3.18}$$

В евклідовому просторі R^n зі скалярним добутком (2.3.14) для векторів $\bar{a} = (a_1; a_2; ..., a_n)$ та $\bar{b} = (b_1; b_2; ..., b_n)$ справджуються такі формули:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}; \tag{2.3.19}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}. \tag{2.3.20}$$

Нерівність Коші–Буняковського у цьому просторі має вигляд

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \tag{2.3.21}$$

а нерівність трикутника –

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{2.3.22}$$

Два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ евклідового простору називають *ортогональними*, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Систему векторів $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$ називають *ортогональною*, якщо $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ при $i \ne j$.

Систему векторів $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$ називають *ортонормованою*, якщо

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j; \\ 0, & \text{якщо} \quad i \ne j. \end{cases} \tag{2.3.23}$$

Ортонормована система векторів $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$ з n-вимірного евклідового простору утворює *ортонормований* базис. Для доведення цього досить

з'ясувати, що вектори $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$ є лінійно незалежними, тобто рівність $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = 0$ виконується тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Помножимо скалярно останню рівність на $\bar{e}_i$ (i=1,2,...,n). Отримаємо $\lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_i) + \lambda_2(\bar{e}_2, \bar{e}_i) + ... + \lambda_i(\bar{e}_i, \bar{e}_i) + ...\lambda_n(\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0$. Оскільки $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 1$, якщо $i = j$, і $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$, якщо $i \neq j$, то отримаємо, що $\lambda_i = 0$, $i = 1,2,...,n$.

Приклад 2.3.4. Доведемо, що в просторі R^n базис $\bar{e}_1 = (1;0;...,0)$, $\bar{e}_2 = (0;1;...,0)$, … , $\bar{e}_n = (0;0;...,1)$ є ортонормованим.

• Очевидно, що $\|\bar{e}_i\| = 1$, і $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$, якщо $i \neq j$. ❍

Теорема 2.3.7. У кожному n-вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис.

Процес ортогоналізації дає змогу побудувати з довільної лінійно незалежної системи векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_n$ ортонормовану систему ненульових векторів $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$. Вектори $\bar{e}_1, e_2, ..., \bar{e}_n$ визначають так:

$$\bar{q}_1 = \bar{f}_1, \quad \bar{q}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k_i} \bar{q}_i . \tag{2.3.24}$$

Коефіцієнти λ_{k_i} відшукують з умови ортогональності вектора $\bar{q}_k$ до векторів $\bar{q}_1, \bar{q}_2, ..., \bar{q}_{k-1}$:

$$\lambda_{k_i} = \frac{(\bar{f}_k, \bar{q}_i)}{(\bar{q}_i, \bar{q}_i)}. \tag{2.3.25}$$

Пронормуємо вектори $\bar{q}_1, \bar{q}_2, ..., \bar{q}_n$, отримаємо ортонормовану систему елементів

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{q}_i}{\|\bar{q}_i\|} \quad i = 1,2,...,n. \tag{2.3.26}$$

Приклад 2.3.5. Ортогоналізуємо систему векторів $\bar{f}_1 = (1;2;1)$, $\bar{f}_2 = (3;4;1)$, $\bar{f}_3 = (1;-3;-1)$.

• На підставі процесу ортогоналізації ортогональну систему векторів шукаємо у вигляді

$$\bar{q}_1 = \bar{f}_1 , \quad \bar{q}_2 = \bar{f}_2 - k_{21}\bar{q}_1, \quad \bar{q}_3 = \bar{f}_3 - k_{31}\bar{q}_1 - k_{32}\bar{q}_2,$$

де $k_{21} = \frac{(\bar{f}_2, \bar{q}_1)}{(\bar{q}_1, \bar{q}_1)}$, $k_{31} = \frac{(\bar{f}_3, \bar{q}_1)}{(\bar{q}_1, \bar{q}_1)}$, $k_{32} = \frac{(\bar{f}_3, \bar{q}_2)}{(\bar{q}_2, \bar{q}_2)}$.

Оскільки $\bar{q}_1 = \bar{f}_1 = (1;2;1)$, то $(\bar{f}_2, \bar{q}_1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 12$, $(\bar{q}_1, \bar{q}_1) = 1 + 4 + 1 = 6$.

Обчислимо $k_{21}=\frac{12}{6}=2$. Тому $\bar{q}_2=\bar{f}_2-2\bar{q}_1=(1;0;-1)$, а також скалярні добутки $(\bar{f}_3,\bar{q}_1)=-6$, $(\bar{f}_3,\bar{q}_2)=2$, $(\bar{q}_2,\bar{q}_2)=2$ і коефіцієнти $k_{31}=-1$, $k_{32}=1$. Отримаємо, що $\bar{q}_3=\bar{f}_3+\bar{q}_1-\bar{q}_2=(1;-1;1)$.

Отже, маємо ортогональну систему векторів $\bar{q}_1=(1;2;1)$, $\bar{q}_2=(1;0;-1)$, $\bar{q}_3=(1;-1;1)$.

Обчислимо $\|\bar{q}_1\|=\sqrt{6}$, $\|\bar{q}_2\|=\sqrt{2}$, $\|\bar{q}_3\|=\sqrt{3}$ за формулою (4.3.21), отримаємо ортонормовану систему

$$\bar{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \bar{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \bar{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.4. Власні значення і власні вектори матриці

Розглянемо квадратну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.4.1)$$

Число λ називають *власним значенням* (*власним числом*) квадратної матриці A, а ненульовий вектор $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ – її *власним вектором*, що відповідає цьому власному числу λ, якщо виконується рівність

$$AX=\lambda X. \qquad (2.4.2)$$

Множину власних значень матриці A називають її *спектром*. Квадратні матриці одного порядку, які мають однакові спектри, називають *подібними.* Власні значення іноді називають *характеристичними коренями*, а власні вектори – *характеристичними векторами*.

Матричне рівняння (2.4.2) можна записати у вигляді

$$(A-\lambda I)X=0, \qquad (2.4.3)$$

де I – одинична матриця порядку n; $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$, $0=(0,0,\dots,0)^T$ – n-вимірний нуль-вектор.

Матричне рівняння (2.4.3) є системою однорідних лінійних рівнянь відносно $x_1,x_2,\dots,x_n$. Матриця A має власний вектор X, якщо існує ненульовий розв'язок цієї системи.

Відомо, що однорідна система лінійних рівнянь має ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\det\left(A-\lambda I\right)=0, \tag{2.4.4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{2.4.5}$$

Розкриємо визначник (2.4.5), отримаємо характеристичне рівняння матриці A:

$$\det(A-\lambda I)=f(\lambda)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\dots+b_n=0. \tag{2.4.6}$$

Корені характеристичного рівняння (2.4.6) називають власними числами, або власними значеннями, матриці A. Якщо відоме власне число матриці A, то з системи рівнянь (2.4.3) можна визначити власний вектор X.

З рівняння $\det(A-\lambda I)=f(\lambda)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\dots+b_n$ отримаємо, що $\det A=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$, тобто визначник квадратної матриці дорівнює добутку її власних чисел.

Приклад 2.4.1. Знайдемо власні значення і власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

- Складемо характеристичне рівняння заданої матриці:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Розкриємо визначник і отримаємо рівняння $\lambda^2-8\lambda+7=0$. Корені цього рівняння $\lambda_1=7,\quad \lambda_2=1$.

Знайдемо власні вектори. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2=0;\\ 4x_1+(3-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Нехай $\lambda=\lambda_1=7$. Для відшукання власного вектора, який відповідає цьому власному числу, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}-2x_1+2x_2=0;\\ 4x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

Звідси $x_1=x_2=a$. Отже, власний вектор $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix}$ відповідає власному значенню $\lambda_1=7$.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = 1$. Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$ Звідси $x_2 = -2x_1$. Позначивши $x_1 = b$, отримаємо, що $x_2 = -2b$. Отже, власний вектор $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -2b \end{pmatrix}$ відповідає власному значенню $\lambda_2 = 1$. ❍

Теорема 2.4.1. Якщо $л_0$ – власне число невиродженої матриці A, то $\frac{1}{\lambda_0}$ – власне число оберненої матриці A^{-1}.

Теорема 2.4.2. Якщо всі власні числа квадратної матриці A порядку n різні, то усі її власні вектори лінійно незалежні.

Теорема 2.4.3. Якщо всі власні числа квадратної матриці A порядку n різні, то відповідні власні вектори утворюють базис лінійного простору.

Квадратні матриці A і B називають подібними, якщо існує неособлива матриця U така, що $B = U^{-1}AU$.

Теорема 2.4.4. Власними числами діагональної матриці є елементи головної діагоналі.

⏮ Розглянемо діагональну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і запишемо її характеристичне рівняння $|A - \lambda I| = 0$. Запишемо характеристичне рівняння у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Отже, коренями характеристичного рівняння є числа $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. ⏭

Нехай задані квадратна матриця A порядку n і довільний поліном $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Поліномом $g(A)$ називають матрицю $g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$.

Теорема 2.4.5. Нехай невироджена матриця A має власне число λ_* і відповідний власний вектор X^*. Тоді поліном $g(A)$ є матрицею, яка має той же власний вектор X^* і власне число $g(\lambda_*)$.

Теорема 2.4.6 (Келі–Гамільтона). Кожна квадратна матриця є коренем свого характеристичного полінома.

Приклад 2.4.2. Перевіримо, чи матриця

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

є коренем свого характеристичного рівняння.

• У прикладі 2.4.1 знайдено власні числа цієї матриці – $\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 1$. Перевіримо, чи задана матриця A є коренем свого характеристичного рівняння, тобто чи справджується рівність $A^2 - 8A + 7 = 0$.

Обчислимо $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 32 & 17 \end{pmatrix}$.

Отже, $A^2 - 8A + 7I = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 32 & 17 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. ❍

Нагадаємо, що квадратну матрицю A називають *симетричною*, якщо $a_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n$, тобто

$$A = A^T. \tag{2.4.7}$$

Лінійна модель обміну. Як приклад математичної моделі економічного процесу, який приводить до поняття власного вектора і власного значення матриці, опишемо *лінійну модель обміну*.

Розглянемо n країн $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$, національний дохід кожної з яких, відповідно, дорівнює $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на купівлю товарів у країни S_i. Будемо вважати, що весь національний дохід витрачають на купівлю товарів усередині країни або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 (j = 1,2,...,n). \tag{2.4.8}$$

Проаналізуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4.9}$$

яку називають *структурною матрицею торгівлі*. Сума елементів кожного стовпця цієї матриці дорівнює 1.

Для кожної країни $S_i \ (i = 1,2,...,n)$ дохід від внутрішньої і зовнішньої торгівлі становитиме $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Для збалансованої торгівлі потрібна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто дохід від торгівлі кожної країни повинен бути не меншим, ніж її національний дохід, тобто $p_i \geq x_i \ (i = 1,2,...,n)$. Якщо $p_i > x_i$, то отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n > x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n > x_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \qquad (2.4.10)$$

Додамо всі нерівності системи, матимемо $x_1(a_{11} + a_{21}+\ldots+a_{n1}) +$ $+x_2(a_{12} + a_{22}+\ldots+a_{n2})+\ldots+ x_n(a_{1n} + a_{2n}+\ldots+a_{nn}) > x_1 + x_2+\ldots+x_n$.

Оскільки вирази у дужках дорівнюють 1, то отримаємо суперечливу нерівність $x_1 + x_2+\ldots+x_n > x_1 + x_2+\ldots+x_n$. Отже, нерівність $p_i \geq x_i$ є неможливою, і $p_i = x_i$. Економічно це зрозуміло, оскільки всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

Уведемо вектор національних доходів країн $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, одержимо рівняння $AX = X$, тобто отримали задачу визначення власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 2.4.3. Структурна матриця торгівлі трьох країн C_1, C_2, C_3 має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/3 & 1/4 \\ 2/5 & 1/3 & 1/2 \\ 2/5 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Визначимо національні доходи країн так, щоб торгівля була збалансована.

- Знайдемо власний вектор X, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього розв'яжемо рівняння $(A - I)X = 0$.

Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0; \\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0; \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса, отримаємо $x_1 = \frac{5}{6}c,\ x_2 = \frac{5}{4}c,\ x_3 = c$. Отже, збалансованість торгівлі трьох країн настає, якщо співвідношення національних доходів країн таке: $\frac{5}{6}:\frac{5}{4}:1$ або 20:30:24. ❍

2.5. Квадратичні форми

Квадратичною формою називають числову функцію $Q(\bar{x},\bar{x}) = Q(x_1,x_2,...,x_n)$ векторного аргумента $\bar{x}$, яка має вигляд

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \qquad (2.5.1)$$

Симетричну матрицю

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *матрицею квадратичної форми* $Q(\bar{x},\bar{x})$. Кожній симетричній матриці A відповідає квадратична форма

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X \cdot A \cdot X^T, \qquad (2.5.2)$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Приклад 2.5.1. Запишемо квадратичну форму

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 5x_3^2$$

у матричному вигляді.

• Визначимо матрицю квадратичної форми. Її діагональні елементи дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, а решта елементів – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми. Отже,

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad ❍$$

Рангом квадратичної форми називають ранг її матриці.

Якщо ранг матриці квадратичної форми $Q(\bar{x},\bar{x})$ дорівнює розмірності простору, то квадратичну форму називають *невиродженою*, якщо ні – то *виродженою*.

Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Квадратична форма має *канонічний вигляд*, якщо $a_{ij} = 0,\ i \neq j$,

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2. \qquad (2.5.3)$$

Коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ називають *канонічними коефіцієнтами*.

Розглянемо метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Теорема 2.5.1. Кожну квадратичну форму, задану в n-вимірному векторному просторі за допомогою невиродженого лінійного перетворення можна звести до канонічного вигляду.

⏮ Нехай квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x}) \neq 0$ має вигляд

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{2.5.4}$$

Нехай у формулі (2.5.4) $a_{11} \neq 0$. Якщо $a_{11} = 0$, то, перенумерувавши змінні, отримаємо $a_{11} \neq 0$. Очевидно, що таке перетворення є невиродженим. Нехай усі коефіцієнти біля квадратів змінних дорівнюють нулю, і наприклад, $a_{12} \neq 0$. Розглянемо таке невироджене перетворення координат:

$$x_1' = x_1 - x_2;$$
$$x_2' = x_1 + x_2;$$
$$x_i' = x_i, \quad i = 3,4,..,n.$$

Унаслідок такого перетворення коефіцієнт біля $x_1'^2$ дорівнює $2a_{12} \neq 0$. Отже, будемо вважати, що у формулі (2.5.4) $a_{11} \neq 0$.

Виділимо в (2.5.4) групу доданків, е яких є x_1. Отримаємо

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j. \tag{2.5.5}$$

Перетворимо виділену групу доданків:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2.$$

З урахуванням цих перетворень перепишемо вираз (2.5.5) у вигляді

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i x_j, \tag{2.5.6}$$

де $a_{ii}^* = a_{ii} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}$, та $a_{ij}^* = a_{ij}$, якщо $i \neq j$.

Розглянемо таке невироджене перетворення координат:

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n;$$
$$y_2 = x_2; \tag{2.5.7}$$
$$.....;$$
$$y_n = x_n.$$

Використаємо (2.5.7) і (2.5.6):

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*} y_i y_j. \qquad (2.5.8)$$

Отже, якщо форма $Q(\bar{x},\bar{x}) \neq 0,$ то за допомогою невиродженого перетворення координат її можна звести до вигляду (2.5.8).

Розглянемо квадратичну форму $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*} y_i y_j$. Якщо вона дорівнює нулю, то квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$ має канонічний вигляд. Якщо $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^{*} y_i y_j \neq 0,$ то, використовуючи невироджені перетворення координат $y_2, y_3, ..., y_n,$ аналогічні до (2.5.7), за скінченну кількість кроків зведемо квадратичну форму $Q(\bar{x},\bar{x})$ до канонічного вигляду.

Якщо квадратична форма зведена до канонічного вигляду, то не всі коефіцієнти λ_i відмінні від нуля. Залишимо в (2.5.3) лише ненульові коефіцієнти, отримаємо

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + ... + \lambda_k\eta_k^2. \qquad (2.5.9)$$

Очевидно, що $k \le n.$ Оскільки за означенням ранг квадратичної форми дорівнює рангу її матриці, то з (2.5.9) і умови $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1,2,...,k$ отримаємо, що ранг квадратичної форми дорівнює k. Отже, кількість ненульових коефіцієнтів у канонічному вигляді квадратичної форми дорівнює її рангу.

Приклад 2.5.2. Методом Лагранжа зведемо квадратичну форму

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

до нормального вигляду.

- Виконаємо такі перетворення:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) +$$
$$+ (2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 -$$
$$- 4x_2x_3 - x_3^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2(x_2^2 + x_2x_3) + 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2\left(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2{,}5x_3^2.$$

Замінимо змінні: $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad y_2 = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right), \quad y_3 = x_3.$ Отримаємо канонічний вигляд квадратичної форми

$$Q_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2{,}5y_3^2.$$

Лінійне перетворення $z_1 = y_1, \quad z_2 = \sqrt{2}y_2, \quad z_3 = \sqrt{2{,}5}y_3$ зводить квадратичну форму до нормального вигляду $Q_2(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$

Закон інерції квадратичних форм. Нехай у базисі $\bar{e}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$ квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})\neq 0$ має вигляд

$$Q(\bar{x},\bar{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

де $x_1,x_2,...,x_n$ – координати вектора $\bar{x}$ у цьому базисі. Нехай за допомогою невиродженого перетворення координат квадратичну форму зведено до канонічного вигляду

$$Q(\bar{y},\bar{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ky_k^2, \qquad (2.5.10)$$

де $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ відмінні від нуля, причому $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_s>0,\lambda_{s+1}<0,...,\lambda_k<0.$

Розглянемо таке невироджене перетворення координат y_i:

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}y_1,\ z_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}y_2,...,z_s=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_s}}y_s; \\ z_{s+1}=\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}}y_{s+1},...,z_k=\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}y_k; \\ z_{k+1}=z_{k+2}=...=0. \end{cases} \qquad (2.5.11)$$

Унаслідок такого перетворення квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$ набуде *нормального вигляду*

$$Q(\bar{z},\bar{z})=z_1^2+z_2^2+...+z_s^2-z_{s+1}^2-...-z_k^2. \qquad (2.5.12)$$

Отже, за допомогою невиродженого перетворення координат $x_1,x_2,...,x_n$ вектора $\bar{x}$ у базисі $\bar{e}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$, яке має вигляд

$$z_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+...+\alpha_{in}x_n, \qquad \det(\alpha_{ij})\neq 0, \qquad (2.5.13)$$

квадратичну форму можна звести до нормального вигляду (2.5.12).

Теорема 2.5.2 (закон інерції квадратичних форм). Кількість доданків з додатними (від'ємними) коефіцієнтами у нормальному вигляді квадратичної форми не залежить від способу зведення квадратичної форми до такого вигляду.

Класифікація квадратичних форм. Квадратичну форму $Q(\bar{x},\bar{x})$ називають *додатно (від'ємно) визначеною*, якщо для будь-якого ненульового ***x*** справджується нерівність $Q(\bar{x},\bar{x})>0$ $(Q(\bar{x},\bar{x})<0)$. У цьому випадку форму називають знаковизначеною. Квадратичну форму $Q(\bar{x},\bar{x})$ називають *знакозмінною*, якщо існують такі $\bar{x}$ та $\bar{y}$, що справджуються нерівності $Q(\bar{x},\bar{x})>0$ та $Q(\bar{y},\bar{y})<0.$

Кількість відмінних від нуля канонічних коефіцієнтів квадратичної форми, тобто її ранг, називають *індексом інерції квадратичної форми.* Кількість додатних канонічних коефіцієнтів називають *додатним індексом інерції*, кіль-

кість від'ємних – *від'ємним індексом інерції*. Очевидно, що індекс інерції квадратичної форми дорівнює сумі додатного і від'ємного індексів.

Нехай індекс інерції, додатний і від'ємний індекс інерції квадратичної форми дорівнюють, відповідно, k, p, s. Очевидно, що $k = p + s$.

Теорема 2.5.3 (необхідна і достатня умова знаковизначеності квадратичної форми). Для того, щоб квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$, задана в n-вимірному векторному просторі L, була знаковизначеною, необхідно і достатньо, щоб або додатний p, або від'ємний s індекс інерції дорівнювали розмірності n простору L. Форма визначена додатно, якщо $p = n$, і від'ємно, якщо $s = n$.

Теорема 2.5.4 (необхідна і достатня умова знакозмінності квадратичної форми). Для того, щоб квадратична форма була знакозмінною, необхідно і достатньо, щоб як додатний, так і від'ємний індекси інерції цієї форми були відмінні від нуля.

Нехай квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$ в базисі визначена матрицею A:

$$Q(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

і нехай

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

– кутові мінори матриці (a_{ij}).

Теорема 2.5.5 (критерій Сильвестра). Для того, щоб квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$ була додатно визначена, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\Delta_1 > 0,\quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Для того, щоб квадратична форма $Q(\bar{x},\bar{x})$ була від'ємно визначена, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, причому $\Delta_1 < 0$.

Приклад 2.5.3. Доведемо, що квадратична форма $Q = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ є додатно визначеною.

• Матриця A квадратичної форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0.$$

Розв'яжемо його й отримаємо $л_1 = 14,\ л_2 = 4$. Оскільки корені характеристичного рівняння матриці A додатні, то квадратична форма додатно визначена.

Використаємо критерій Сильвестра. Головні мінори матриці $\Delta_1 = a_{11} =$ $=13,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$ додатні, тому матриця додатно визначена. ❍

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Елементи векторної алгебри

Лінійні операції над векторами. *Вектором* називають напрямлений відрізок. Будемо позначати вектор, як напрямлений відрізок, символом $\overrightarrow{AB}$, де точки A і B позначають, відповідно, початок і кінець вектора, або однією буквою $\vec{a}$. На рисунку будемо зображати вектор стрілкою. Початок вектора називають точкою його прикладання.

Довжиною, або *модулем,* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка, яким зображають вектор, і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором* і позначають $\vec{0}$. Модуль цього вектора дорівнює нулю, а його напрям невизначений.

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають *одиничним*, або нормованим.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними*.

Вектори називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені й мають однакові довжини.

Два вектори називають *протилежними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини і протилежно напрямлені. Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$, позначають $-\vec{a}$.

Вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах, називають *компланарними*.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ прикладений до кінця вектора $\vec{a}$ (правило трикутника), як це показано на рис. 3.1.1.

КВМ

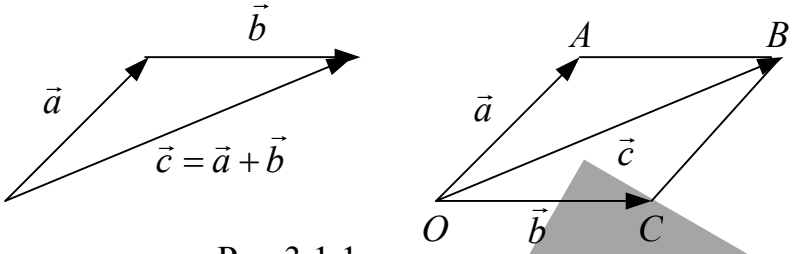


Рис 3.1.1.

Властивості додавання векторів:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність;

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + c = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ – асоціативність; (3.1.1)

3) існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

Доведемо властивість 1. Зведемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до спільного початку і побудуємо на них як на сторонах паралелограм (див. рис. 3.1.1). З трикутника OAB отримаємо, що $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, а з трикутника OCB – $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB}$. Отже, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Доводячи цю властивість, ми отримали, що вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є більшою діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто отримали правило паралелограма додавання векторів.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{d}$ такий, що $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$. Очевидно, що $\vec{d} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ (рис. 3.1.2).

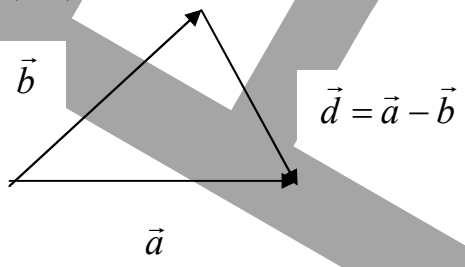


Рис. 3.1.2.

Отже, у паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, одна діагональ – вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ – є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а інша діагональ – вектор $\vec{d} = \overrightarrow{DB}$ – є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 3.1.3).

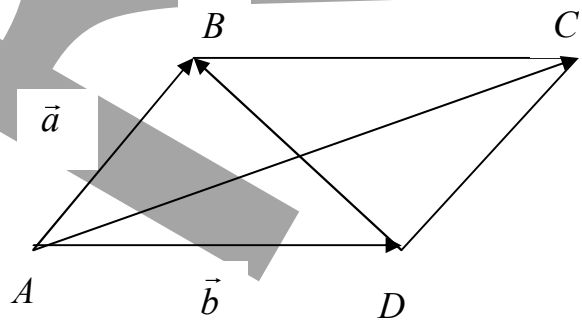


Рис. 3.1.3.

Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр λ називають вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний, якщо $\lambda < 0$. Вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ колінеарні.

Властивості:

1) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; (3.1.2)

3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Наведемо без доведення таку теорему.

Теорема 3.1.1. Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний до ненульового вектора $\vec{a}$, то існує дійсне число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Приклад 3.1.1. Вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника ABC. Виразимо через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ медіани трикутника.

• Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABCD$ (рис. 3.1.4).

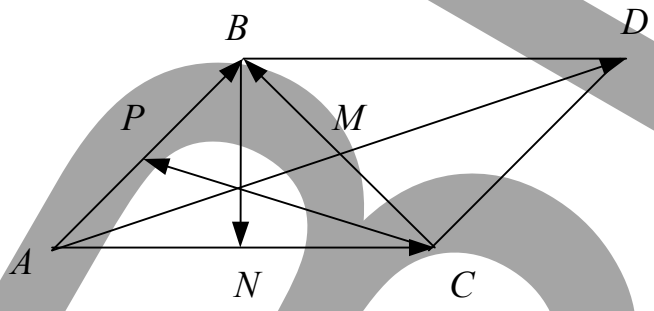


Рис. 3.1.4.

Відомо, що діагоналі паралелограма у точці перетину діляться навпіл. Тому $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Оскільки $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$. З іншого боку, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Аналогічно, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. ❍

Лінійна залежність векторів. Вектор $\vec{a}$ називають лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, що

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n. \quad (3.1.3)$$

Ненульові вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ називають лінійно залежними, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}. \quad (3.1.4)$$

Якщо рівність (3.1.4) можлива тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ називають лінійно незалежними.

Теорема 3.1.2. Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ є нульовим, то ці вектори лінійно залежні.

⏮ Нехай $\vec{a}_1 = 0$. Якщо $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$, то виконується рівність (3.1.4), що означає лінійну залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$. ⏭

Теорема 3.1.3. Якщо серед *n* векторів будь-які (*n*-1) векторів лінійно залежні, то і всі *n* векторів лінійно залежні.

Теорема 3.1.4. Для того, щоб два вектори були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарними.

⏮ *Необхідність*. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні. Доведемо, що вони колінеарні. За означенням лінійної залежності існують такі числа α і β, які одночасно не дорівнюють нулю, що $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Нехай, для визначеності, $\beta \neq 0$. Поділивши останню рівність на β, отримаємо $\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$. Отже, вектори α і β колінеарні.

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Якщо хоча б один з них нульовий, то вони лінійно залежні. Якщо ненульові вектори колінеарні, то за означенням існує таке число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, тобто $\lambda\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$. Оскільки хоча б одне з чисел λ, та -1 не дорівнює нулю, то за означенням вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні. ⏭

Наслідок. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

Приклад 3.1.2. Визначимо, за яких x та y ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, пов'язані співвідношенням $(2x + y - 3)\vec{a} + (3x - 2y - 1)\vec{b} = 0$, неколінеарні.

• Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть неколінеарними, якщо вони лінійно незалежні, тобто рівність $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = 0$ виконується тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Отже,

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0; \\ 3x - 2y - 1 = 0. \end{cases}$$ Тому $x = 1;\ y = 1$. ❍

Вектори називають компланарними, якщо вони є або в одній площині, або у паралельних площинах.

Теорема 3.1.5. Для того, щоб три вектори були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб вони були компланарні.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Для довільних неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та вектора $\vec{c}$, який є в одній площині з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знайдуться такі дійсні числа α і β, що

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (3.1.5)$$

Теорема 3.1.6. Будь-які чотири вектори у просторі лінійно залежні.

Наслідок. Для будь-яких некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і довільного вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що

$$\vec{d} = б\vec{a} + в\vec{b} + г\vec{c}. \qquad (3.1.6)$$

Поняття базису. Два упорядковані лінійно незалежні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ площини утворюють на цій площині *базис*, якщо будь-який вектор $\vec{a}$ цієї площини можна зобразити як лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, тобто

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \qquad (3.1.7)$$

Рівність (3.1.7) називають *розкладом вектора* $\vec{a}$ за базисними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Коефіцієнти a_1, a_2 цього розкладу називають *координатами вектора* $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і записують $\vec{a} = (a_1; a_2)$.

Три лінійно незалежні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору утворюють базис, якщо будь-який вектор $\vec{a}$ цього простору можна зобразити як лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тобто

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \qquad (3.1.8)$$

Рівність (3.1.8) називають розкладом вектора $\vec{a}$ за базисними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Коефіцієнти a_1, a_2, a_3 цього розкладу називають координатами вектора $\vec{a}$ у базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і записують $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Теорема 3.1.7. Будь-які два неколінеарні вектори площини утворюють базис на цій площині.

Теорема 3.1.8. Будь-які три некомпланарні вектори простору утворюють базис у цьому просторі.

⏮ Будь-які три некомпланарні вектори є лінійно незалежні (наслідок 1). Для довільного вектора $\vec{d}$ знайдуться числа α, β, γ такі, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ (наслідок 2). ⏭

Теорема 3.1.9. Координати вектора в заданому базисі визначені однозначно.

Якщо задано базис, то лінійні операції над векторами стають звичайними операціями над числами – координатами цих векторів у заданому базисі.

Теорема 3.1.10. Нехай $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Тоді

1) $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$. (3.1.9)

⏮ Оскільки $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, то, використовуючи властивості (3.1.2) і єдиність розкладу вектора за базисом, отримаємо

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3. \quad ⏭$$

Приклад 3.1.3. Задано вектори $\vec{e}_1 = (2;1;-3)$, $\vec{e}_2 = (3;-2;1)$, $\vec{e}_3 = (-1;0;-2)$. Перевіримо, чи утворюють ці вектори базис. Якщо вони утворюють базис, то розкладемо вектор $\vec{a} = (-2;2;1)$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

• Розглянемо рівність $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$. Цю рівність можна записати у вигляді

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0; \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь, отримаємо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Отже, вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис.

Знайдемо розклад вектора $\vec{a}$ за цим базисом, тобто $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Запишемо цю рівність у вигляді

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 - a_3 = -2; \\ a_1 - 2a_2 = 2; \\ -3a_1 + a_2 - 2a_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = 2; \\ 2a_1 + 3a_2 - a_3 = -2; \\ -3a_1 + a_2 - 2a_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - 2a_2 = 2; \\ 7a_2 - a_3 = -6; \\ -5a_2 - 2a_3 = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - 2a_2 = 2; \\ 7a_2 - a_3 = -6; \\ -19a_3 = 19, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0; \\ a_2 = -1; \\ a_3 = -1. \end{cases}$$

Отже, $\vec{a} = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. ❍

Проекція вектора на вісь. Розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і довільну вісь l. Позначимо через A_1 і B_1 основи перпендикулярів, опущених з точок A і B на цю вісь (рис. 3.1.5). Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь l називають величину A_1B_1 напрямленого відрізка $\overline{A_1B_1}$ осі l і позначають $np_l\vec{a}$. Кутом φ нахилу вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ до осі l називають кут між двома променями, які виходять з довільної точки M і напрями яких збігаються з напрямами вектора $\vec{a}$ і осі l. Проведемо через точку A вісь l', яка має однаковий напрям з віссю l. Нехай точка C – проекція точки B на вісь l'. Очевидно, що $A_1B_1 = AC$, тому $np_l\vec{a} = AC$. Величина AC є проекцією напрямленого відрізка $\overline{AB}$ на вісь l', тому

$$AC = |\overline{AB}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Отже, $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos$ц.

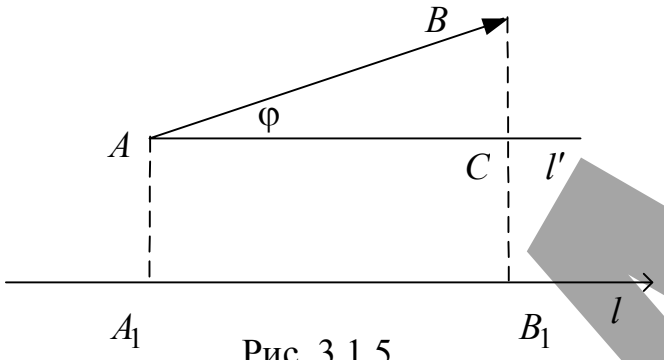


Рис. 3.1.5.

Теорема 3.1.11. У разі додавання двох векторів їхні проекції на довільну вісь додають. У разі множення вектора на довільне дійсне число його проекцію множать на це число.

Декартова прямокутна система координат. Виберемо у просторі деякий базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ і точку O. Сукупність точки O і базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,e_3$ називають *афінною* системою координат у просторі. Кожній точці M поставимо у відповідність вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. Точка O є *початком координат*, вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ *– радіусом-вектором* точки M. Координати радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ називають координатами точки M у вибраній системі координат. Якщо $\vec{r}=\overrightarrow{OM}= x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$, то $M(x; y; z)$.

Афінну систему координат у просторі називають *прямокутною декартовою*, якщо базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ортонормований, тобто $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, і кути між векторами базису є прямі.

Афінна система координат на площині – це сукупність фіксованої точки O і базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Афінну систему координат на площині називають *прямокутною декартовою*, якщо базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ ортонормований, тобто $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$, і кути між векторами базису є прямі.

У випадку декартової прямокутної системи координат базисні вектори позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Довжина кожного з них дорівнює 1, вони взаємно перпендикулярні, і їхні напрями, відповідно, збігаються з напрямами осей Ox, Oy, Oz. Кожен вектор $\vec{a}$ можна єдиним способом розкласти за векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто для кожного вектора $\vec{a}$ існує єдина упорядкована трійка чисел x, y, z така, що

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \qquad (3.1.10)$$

Числа x, y, z називають декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{a}$. Якщо вектор $\vec{a}$ має декартові прямокутні координати x, y, z, то це позначають так: $\vec{a}=(x; y; z)$.

Теорема 3.1.12. Декартові прямокутні координати x, y, z вектора $\vec{a}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz.

Позначимо через α, β, γ кути, які утворює вектор $\vec{a}$, відповідно, з осями Ox, Oy, Oz. Числа $\cos$б, $\cos$в, $\cos$г називають напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. З теореми 3.1.12 отримаємо

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (3.1.11)$$

Оскільки квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його сторін, то з рівностей $OA_1 = x$, $OA_2 = y$, $OA_3 = z$ випливає

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3.1.12)$$

З формул (3.1.12), (3.1.13) отримаємо

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (3.1.13)$$

З рівностей (3.1.14) випливає, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, тобто сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат задано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Тоді $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Приклад 3.1.4. На відрізку AB, заданому точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, знайдемо точку $M(x; y; z)$, яка ділить його у співвідношенні λ, тобто $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = \lambda$.

• Оскільки точка $M(x;y;z)$ ділить відрізок AB у співвідношенні λ, то $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$. Звідси отримаємо, що

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Визначимо з останніх рівностей x, y, z:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Координати точки $M(x;y;z)$, яка ділить відрізок AB навпіл, такі:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.\ \text{❍}$$

Скалярний добуток. *Скалярним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\text{ц}, \qquad (3.1.14)$$

де $\text{ц} = (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Дамо інше означення скалярного добутку двох векторів. Відомо, що проекція вектора $\vec{b}$ на вісь, визначену вектором $\vec{a}$, має вигляд

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\text{ц}. \qquad (3.1.15)$$

З формул (3.1.14), (3.1.15) отримаємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| np_{\vec{a}}\vec{b}. \qquad (3.1.16)$$

Аналогічно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (3.1.17)$$

Скалярним добутком двох векторів називають число, яке дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію іншого вектора на вісь, визначену першим вектором.

Скалярний добуток має такі властивості:

$$1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$
$$2)\ (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}); \qquad (3.1.18)$$
$$3)\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, якщо $\vec{a}$ – ненульовий вектор, і $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, якщо $\vec{a}=\vec{0}$.

Наведені властивості дають змогу в разі скалярного множення векторних поліномів не зважати на порядок векторних співмножників.

Приклад 3.1.5. Обчислимо $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ і $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

• Оскільки $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, то $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$.

Відкриємо дужки: $\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Отже, $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|=1, |\vec{c}|=1$, тому $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1{,}5$. ❍

Оскільки $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, то

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}. \qquad (3.1.19)$$

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони перпендикулярні. Тому умовою перпендикулярності двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \qquad (3.1.20)$$

Приклад 3.1.6. Визначимо, за якого α вектори $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ і $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, (\vec{a}\hat{}\vec{b})=120°$.

• Вектори перпендикулярні, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$; $(\alpha\vec{a}+17\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=0$; $3\alpha\vec{a}^2-\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+51\vec{a}\cdot\vec{b}-17\vec{b}^2=0$;

$$3\alpha\cdot4-\alpha\cdot2\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+51\cdot2\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-17\cdot25=0;\ 17\alpha=680, \alpha=40.\ ❍$$

Теорема 3.1.13. Нехай у прямокутній системі координат $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3; \qquad (3.1.21)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}; \qquad (3.1.22)$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}; \qquad (3.1.23)$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (3.1.24)$$

⏮ Оскільки базисні вектори попарно перпендикулярні, і їхні довжини дорівнюють одиниці, то

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0. \qquad (3.1.25)$$

Використаємо (3.1.19) і (3.1.26):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=a_1b_1\vec{i}\,\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\,\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\,\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\,\vec{i}+$$
$$a_2b_2\vec{j}\,\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\,\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\,\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\,\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\,\vec{k}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Із формул (3.1.19) і (3.1.21) отримаємо (3.1.22), а із (3.1.14), (3.1.21), (3.1.22) – (3.1.23). ⏭

Відстань d між точками $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ – це довжина вектора $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Тоді

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (3.1.26)$$

Векторний добуток двох векторів. *Векторним* добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, і напрямлений так, що з його кінця найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки (рис. 3.1.6).

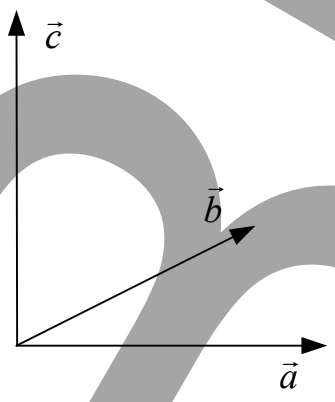


Рис. 3.1.6.

Модуль цього вектора дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, помноженому на синус кута між ними. Векторний добуток позначають $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$. З означення отримаємо, що модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивості векторного добутку такі:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$; (3.1.27)

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Теорема 3.1.14. Якщо $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (3.1.28)$$

Теорема 2.1.15. Для того, щоб два вектори були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб їхній векторний добуток дорівнював нулю.

⏮ *Необхідність* випливає з означення векторного добутку.

Достатність. Нехай $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові, то $|\vec{a}|>0$, $|\vec{b}|>0$. З означення векторного добутку та рівності $\vec{a}\times\vec{b}=0$ отримаємо, що $\sin\varphi=0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то з рівності (3.1.29) отримаємо

$$a_2b_3-a_3b_2=0,\ a_3b_1-a_1b_3=0,\ a_1b_2-a_2b_1=0,$$

або

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \quad ⏭ \qquad (3.1.29)$$

Умова (3.1.29) є умовою колінеарності векторів $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}=(b_1;b_2b_3)$.

Приклад 3.1.7. Обчислимо площу трикутника ABC, якщо $A(2;1;3)$, $B(-1;4;5)$, $C(1,3,2)$.

• Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. $\overrightarrow{AB}=(-3;3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;2;-1)$.

Обчислимо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-7\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}.$$

Отже, $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{49+25+9}=\frac{1}{2}\sqrt{83}$. ❍

Мішаний добуток трьох векторів. *Мішаним добутком трьох упорядкованих векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називають число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Мішаний добуток трьох векторів має такі властивості:

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$;

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$; (3.1.30)

3) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Можна довести, що абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів $\vec{a},\vec{b},c$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, зведених до одного початку, тобто $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. З цього твердження отримаємо таке:

якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, то їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$

Теорема 3.1.16. Якщо $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3),$ то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.1.31)$$

Наслідок. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\ \vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$ є те, що їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.1.32)$$

3.2. Лінії на площині

3.2.1. Рівняння лінії на площині

Нехай на площині задана декартова прямокутна система координат *Oxy* і деяка лінія *L*. Рівнянням лінії *L* на площині називають рівняння

$$F(x,y)=0, \qquad (3.2.1)$$

яке задовольняють координати *x* і *y* кожної точки лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії. Лінія у заданій системі координат є геометричним місцем точок, які задовольняють рівняння (3.2.1).

Якщо з (3.2.1) можна визначити *y*, то рівняння лінії записують у вигляді

$$y=f(x). \qquad (3.2.2)$$

Лінію, яка лежить у площині, називають *плоскою*. Плоскі лінії поділяють на алгебричні та трансцендентні. Лінію *L*, задану рівнянням (3.2.1), називають *алгебричною*, якщо *F*(*x,y*) є поліномом від *x* та *y*. Степінь рівняння, яке визначає лінію, називають її порядком.

Теорема 3.2.1. Якщо лінія у деякій декартовій прямокутній системі координат визначена алгебричним рівнянням степеня *n*, то ця лінія і в будь-якій декартовій прямокутній системі координат визначена алгебричним рівнянням того ж степеня *n*.

Лінії, які не є алгебричними, називають *трансцендентними*.

Іноді зручно виражати координати *x* і *y* точок лінії *L* за допомогою допоміжної змінної, або параметра *t*:

$$x=\text{ц}(t),\quad y=\text{ш}(t), \qquad (3.2.3)$$

де $ц(t), ш(t)$ – неперервні функції параметра *t*. Вилучивши з рівнянь (3.2.3) параметр *t* , отримаємо рівняння $F(x,y)=0$.

Для визначення точок перетину ліній L_1 і L_2, які задані рівняннями $F_1(x,y)=0$ і $F_2(x,y)=0$, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

Приклад 3.2.1. Напишемо рівняння лінії, точки якої є вдвічі ближче до точки $A(3;2)$, ніж до точки $B(-1;5)$.

• Нехай точка $M(x;y)$ належить шуканій лінії. Відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначимо за формулою

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

За умовою задачі $2|AM|=|BM|$, тобто

$$2\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2},$$

або

$$4\left(x^2-6x+9+y^2-4y+4\right)=x^2+2x+1+y^2-10y+25.$$

Отже, шукана лінія має рівняння $3x^2-26x+3y^2-6y+17=0$. ❍

3.2.2. Пряма на площині

Визначити рівняння прямої – означає записати залежність між координатами *x* та *y* змінної точки прямої і параметрами, які визначають розміщення прямої у системі координат. Залежно від заданих параметрів можна отримати різні рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої. Виведемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{N}=(A;B)$. Нехай точка $M(x;y)$ належить цій прямій. Тоді вектори $\vec{N}=(A;B)$ та $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ перпендикулярні, і їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Звідси отримаємо рівняння прямої

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.2.5)$$

де $C=-Ax_0-By_0$.

Рівняння (3.2.5) називають *загальним рівнянням прямої* на площині. Числа *A, B* – координати вектора $\vec{N}=(A;B)$, який перпендикулярний до прямої. Вектор $\vec{N}=(A;B)$ називають *нормальним вектором*, або *вектором нормалі*. Розглянемо окремі випадки рівняння (3.2.5):

а) $C=0$. Пряма $Ax+By=0$ проходить через початок координат;

б) A=0. Пряма $By+C=0$, або $y=-\dfrac{C}{B}$, паралельна до осі Ox;

в) B=0. Пряма $Ax+C=0$, або $x=-\dfrac{C}{A}$, паралельна до осі Oy.

Приклад 3.2.2. Напишемо рівняння прямої, якщо точка $M_0(3;5)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

• Оскільки точка $M_0(3;5)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, то нормальний вектор прямої $\vec{N}=\overrightarrow{OM_0}=(3;5)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка прямої. У цьому випадку вектор $\vec{N}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_0M}=(x-3;y-5)$. Умовою перпендикулярності двох векторів є те, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. З останньої рівності отримаємо шукане рівняння прямої $3(x-3)+5(y-5)=0$, тобто $3x+5y-34=0$. ❍

Канонічне і параметричне рівняння прямої. Виведемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно до заданого вектора $\vec{S}=(m;n)$. Вектор $\vec{S}=(m;n)$ називають напрямним вектором прямої. Нехай точка $M(x;y)$ належить заданій прямій (рис. 3.2.1.).

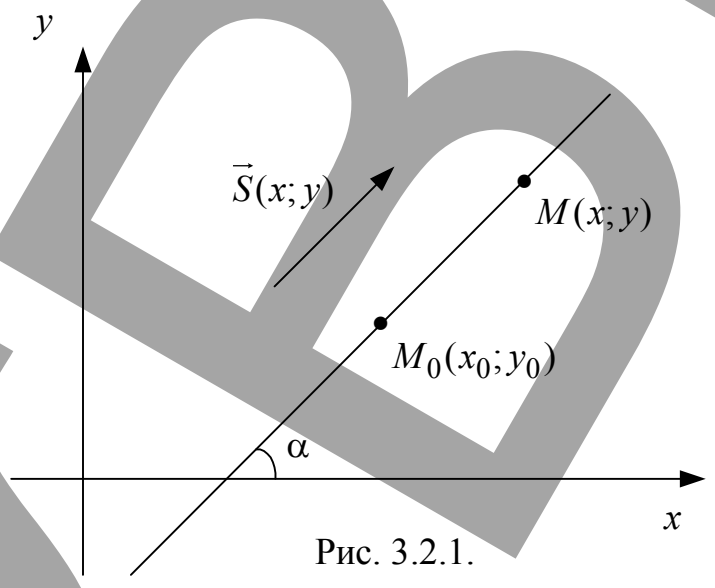


Рис. 3.2.1.

Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ колінеарний до вектора $\vec{S}=(m;n)$. З умови колінеарності цих векторів

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (3.2.6)$$

отримаємо шукане рівняння прямої, яке називають *канонічним рівнянням прямої.*

Прирівняємо у рівнянні (3.2.6) відношення до деякого параметра *t*, отримаємо *параметричне* рівняння прямої:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt; \\ y &= y_0 + nt, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

де скаляр t – деякий параметр.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Виведемо рівняння пучка прямих. *Пучком прямих* називають множину прямих, які проходять через задану точку. З рівняння (3.2.6) отримаємо

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0). \tag{3.2.8}$$

З рис. 3.2.1 видно, що $\frac{n}{m} = k = \operatorname{tg}\text{б}$, де α – кут, який утворює вектор $\vec{S} = (m;n)$, а, отже, і пряма з додатним напрямом осі Ox. Число k називають *кутовим коефіцієнтом* прямої.

Замінимо у рівнянні (3.2.8) відношення $\frac{n}{m}$ на k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.2.9}$$

Якщо k задане, то отримаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$. Якщо k змінне, то отримаємо безліч прямих, які проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$, тобто пучок прямих.

Нехай пряма, яка утворює кут α з додатним напрямом осі Ox, відтинає на осі Oy відрізок завдовжки b. Оскільки $M_0(0;b)$, то з рівняння (3.2.9) отримаємо

$$y = kx + b. \tag{3.2.10}$$

Рівняння (3.2.10) *називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*. Число k – кутовий коефіцієнт прямої, який дорівнює тангенсу кута, що його утворює пряма з додатним напрямом осі Ox, b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy.

Якщо пряма проходить через початок координат, то b=0 і рівняння цієї прямої має вигляд

$$y = kx. \tag{3.2.11}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Виведемо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$. Нехай точка $M(x; y)$ належить шуканій прямій. Вектори $\overrightarrow{AM} = (x - x_1; y - y_1)$ та $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ колінеарні. З умови їхньої колінеарності отримаємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.2.12}$$

Приклад 3.2.3. Витрати на виробництво 100 штук деякого товару становлять 5000 грн., а на виробництво 900 штук – 10 000 грн. Визначимо витрати на виробництво 200 штук товару, якщо функція витрат лінійна.

- Побудуємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(100; 5000)$ і $B(900; 10000)$:

$$\frac{x-100}{900-100}=\frac{y-5\,000}{10\,000-5\,000}.$$

Після спрощень отримаємо рівняння функції витрат $y=\frac{25}{4}x+4\,375$. Підставимо у це рівняння $x=200$ й визначимо, що витрати на виробництво 200 штук товару становитимуть 5 625 грн. ❍

Рівняння прямої у відрізках на осях. Нехай пряма відтинає на осях *Ox* та *Oy* відрізки, відповідно, a і b (рис. 3.2.2).

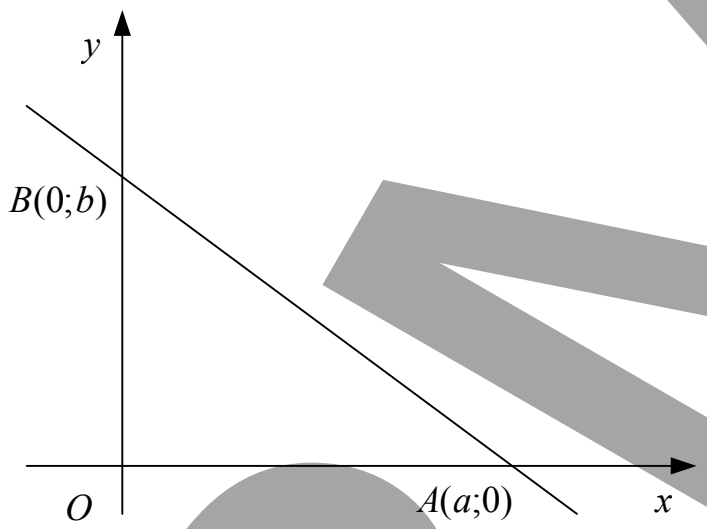


Рис. 3.2.2.

Точками перетину прямої з осями координат є $A(a;0)$ і $B(0;b)$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через ці точки. Підставимо координати цих точок у рівняння (3.2.8):

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{0-b}.$$

Після перетворень отримаємо рівняння прямої *у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3.2.13)$$

де a та b – величини відрізків, які відтинає пряма на осях координат.

Приклад 3.2.4. Запишемо рівняння прямої $2x-3y+6=0$ у відрізках на осях.

• Щоб записати рівняння прямої у відрізках на осях, перенесемо вільний член у праву частину і поділимо на нього обидві частини заданого рівняння. Отримаємо $\frac{2x}{-6}-\frac{3y}{-6}=1$. Запишемо рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1. \qquad ❍$$

Нормоване рівняння прямої. Нехай відома довжина перпендикуляра $|OP|=p$, опущеного з початку координат на пряму, і відомий кут α, який він утворює з додатним напрямом осі *Ox* (рис. 3.2.3).

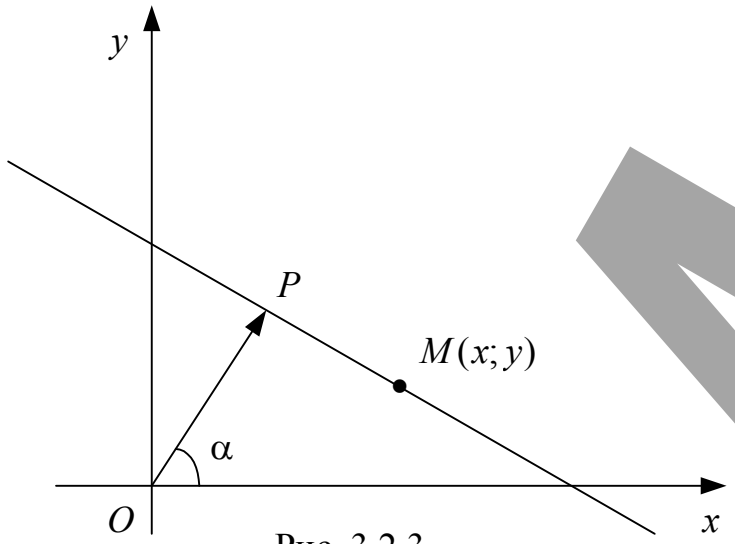


Рис. 3.2.3.

Визначимо координати вектора $\overrightarrow{OP}$. З рис. 3.2.3 видно, що $\overrightarrow{OP} = (p\cos\text{б}; p\sin\text{б})$. Оскільки точка P – кінець вектора $\overrightarrow{OP}$, то $P(p\cos\text{б}; p\sin\text{б})$. Нехай точка $M(x; y)$ належить шуканій прямій. Тоді вектори $\overrightarrow{OP} = (p\cos\text{б}; p\sin\text{б})$ і $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\text{б}; y - p\sin\text{б})$ перпендикулярні. З умови перпендикулярності цих векторів

$$p\cos\text{б}(x - p\cos\text{б}) + p\sin\text{б}(y - p\sin\text{б}) = 0.$$

Скоротимо на p і врахємо, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, отримаємо *нормоване* рівняння прямої

$$x\cos\text{б} + y\sin\text{б} - p = 0. \qquad (3.2.14)$$

Нормоване рівняння прямої (3.2.14) має такі властивості:

1) вільний член нормованого рівняння завжди від'ємний;
2) сума квадратів коефіцієнтів біля x і y дорівнює одиниці.

Зведемо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормованого вигляду. Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на число $M \neq 0$:

$$AMx + BMy + CM = 0.$$

Підберемо число M так, щоб отримане рівняння було нормованим, тобто щоб виконувались властивості нормованого рівняння:

1) $CM < 0$;
2) $(AM)^2 + (BM)^2 = 1$.

З останньої рівності

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак M є протилежним до знака C – вільного члена рівняння прямої. Отже, отримано нормоване рівняння прямої

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (3.2.15)$$

Відстань від точки до прямої. Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої можна обчислити за формулою

$$d = |x_0 \cos б + y_0 \sin б - p|. \qquad (3.2.16)$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.2.17)$$

Приклад 3.2.5. Знайдемо відстань між паралельними прямими $3x + 4y - 12 = 0$ і $3x + 4y - 17 = 0$.

• Задані прямі паралельні. Відстань між паралельними прямими дорівнює відстані від довільної точки на одній з прямих до іншої прямої. Точка $A(4;0)$ належить першій прямій. Тому $d = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1.$ ❍

Кут між двома прямими. Розглянемо дві прямі, які задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

де $\overrightarrow{N_1} = (A_1;B_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2;B_2)$ – нормальні вектори; або канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

де $\overrightarrow{S_1} = (m_1;n_1)$, $\overrightarrow{S_2} = (m_2;n_2)$ – напрямні вектори.

Кут між двома прямими дорівнює куту між їхніми нормальними чи напрямними векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_1}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_1}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{n_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{n_2^2 + m_2^2}}. \qquad (3.2.18)$$

Якщо дві прямі паралельні, то їхні нормальні чи напрямні вектори теж паралельні. З умови паралельності двох векторів отримаємо умови паралельності двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (3.2.19)$$

Якщо дві прямі перпендикулярні, то їхні нормальні чи напрямні вектори теж перпендикулярні. З умови перпендикулярності двох векторів отримаємо умови перпендикулярності двох прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$
$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \qquad (3.2.20)$$

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, де $k_1 = \operatorname{tg} б_1$, $k_2 = \operatorname{tg} б_2$, α_1, α_2 – кути, які ці прямі утворюють з додатним напрямом осі *Ox* (рис. 3.2.4).

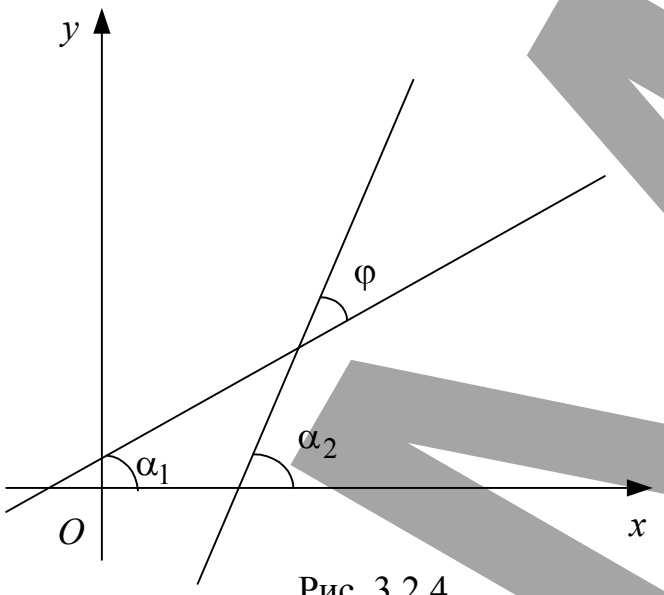


Рис. 3.2.4.

Нехай φ – кут між прямими l_1 і l_2. З рис. 3.2.4 видно, що $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Обчислимо

$$\operatorname{tg} ц = \operatorname{tg}(б_2 - б_1) = \frac{\operatorname{tg} б_2 - \operatorname{tg} б_1}{1 + \operatorname{tg} б_2 \operatorname{t} g б_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg} ц = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.2.21)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $ф = 0^\circ$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$ і $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умова паралельності прямих l_1 і l_2 має вигляд

$$k_1 = k_2. \qquad (3.2.22)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $\operatorname{tg} ц$ не існує. Дріб (3.2.21) не існує, якщо $1 + k_1 k_2 = 0$. Отже, умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2 має вигляд

$$1 + k_1 k_2 = 0, \qquad (3.2.23)$$

або

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (3.2.24)$$

П р и к л а д 3.2.6. Через точку $M_0(1;2)$ проведемо пряму, нахилену до прямої $x - 2y + 3 = 0$ під кутом $45°$.

• Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через задану точку: $y-2=k_1(x-1)$. Кутовий коефіцієнт заданої прямої знайдемо, розв'язавши її рівняння щодо y: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Отже, $k=\frac{1}{2}$. Кутовий коефіцієнт k_1 визначимо з умови, що шукана пряма утворює з заданою кут $45°$:

$$\operatorname{tg}45°=\pm\frac{k-k_1}{1+kk_1}.$$

Розв'яжемо ці рівняння, знайдемо $k_1=3$ і $k_1=-\frac{1}{3}$. Маємо дві прямі, які задовольняють умову задачі: $y=3x-1$ і $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. ❍

3.2.3. Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола. Рівняння цих кривих у прямокутній декартовій системі координат є рівняннями другого степеня щодо x і y, тобто

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\quad A^2+B^2+C^2\neq 0. \tag{3.2.25}$$

Коло. *Колом* називають множину точок площини, відстані від яких до заданої точки (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Виведемо рівняння кола, центр якого є у точці $A(a;b)$, а радіус дорівнює R. Нехай точка $M(x;y)$ належить колу. Тоді $|AM|=R$, тобто

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R,$$

або

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{3.2.26}$$

Рівняння (3.2.26) називають *канонічним рівнянням кола*.

Якщо центр кола є у початку координат, то його рівняння має вигляд

$$x^2+y^2=R^2.$$

Еліпс. *Еліпсом* називають множину точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, які називають *фокусами*, є сталою.

Виведемо рівняння еліпса. Нехай F_1 та F_2 – фокуси еліпса. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат так: за вісь Ox візьмемо вісь, що проходить через точки F_1 і F_2, а вісь Oy проведемо перпендикулярно до осі Ox через середину відрізка F_1F_2 (рис. 3.2.5).

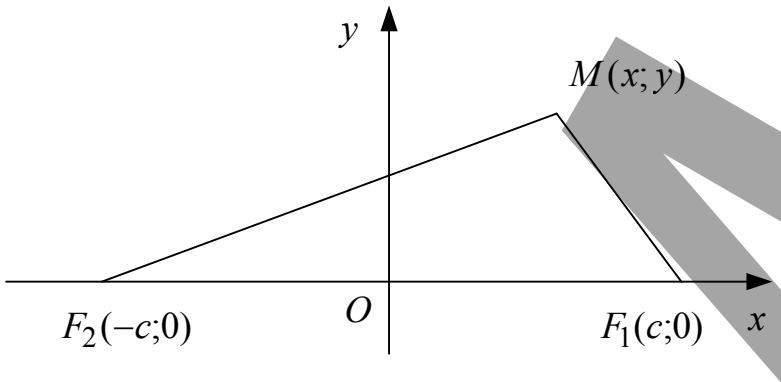


Рис. 3.2.5.

Нехай точка $M(x;y)$ належить еліпсу. Відрізки F_1M та F_2M називають *фокальними радіусами* точки $M(x;y)$ еліпса, їхню суму позначають через $2a$, а відстань між фокусами F_1F_2 – через 2*c*. Очевидно, що $2a > 2c$, тобто *a*>*c*, тому що сторона F_1F_2 трикутника F_1MF_2 менша від суми двох інших сторін F_1M та F_2M. У вибраній системі координат фокуси мають такі координати: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. За означенням еліпса $|F_1M| + |F_2M| = 2a.$

Оскільки $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, то з означення еліпса отримаємо рівняння

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (3.2.27)$$

Для спрощення цього рівняння виконаємо такі перетворення:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2;$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Піднесемо обидві частини отриманої рівності до квадрата. Після спрощень отримаємо

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Оскільки $a > c$, то позначимо

$$a^2 - c^2 = b^2. \qquad (3.2.28)$$

У результаті матимемо рівняння

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

яке після ділення обох його частин на a^2b^2 запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.2.29)$$

Рівняння (3.2.29) називають *канонічним рівнянням еліпса*.

Дослідимо форму еліпса. Розв'яжемо рівняння (3.2.29) відносно *y*:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (3.2.30)$$

Очевидно, що $|x| \le a$. Оскільки кожному значенню x відповідають два значення y, які є однаковими за абсолютною величиною і мають протилежні знаки, то Ox – вісь симетрії еліпса. Змінна x є у рівнянні (3.2.30) в парному степені, тому Oy є віссю симетрії еліпса. Еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$, які називають вершинами еліпса. Якщо x зростає від 0 до a, то y спадає від b до нуля. Відрізки $|A_1A_2| = 2a$ і $|B_1B_2| = 2b$ називають довжинами великої і малої півосей еліпса, а числа a та b – великою і малою півосями еліпса. Отже, еліпсом є фігура, зображена на рис. 3.2.6.

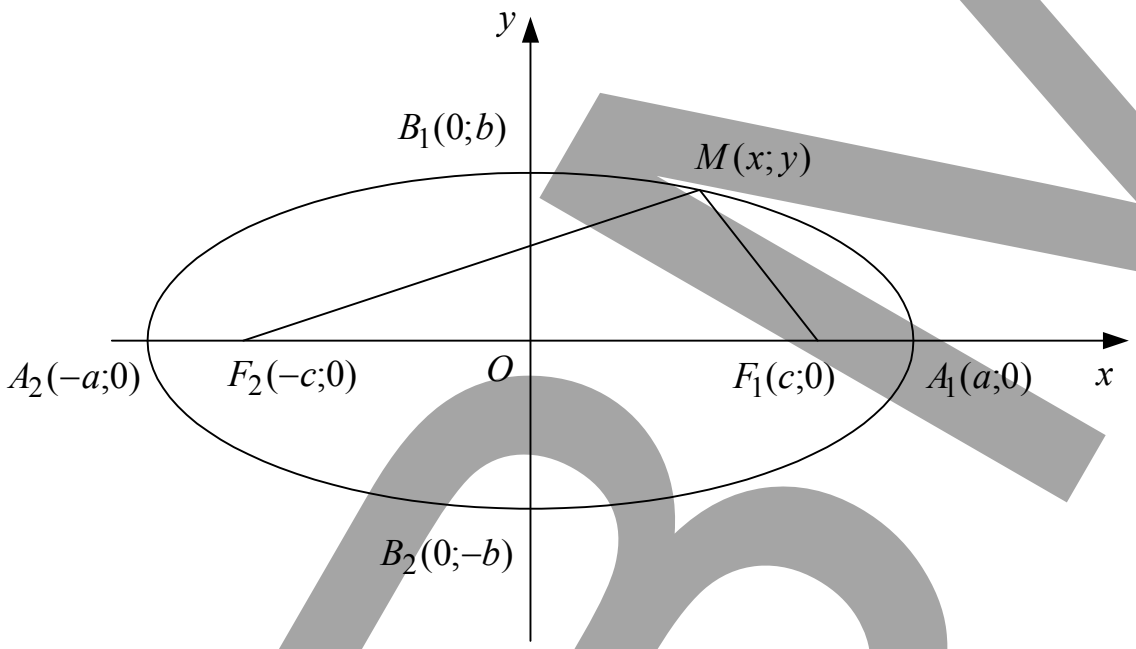


Рис. 3.2.6.

Ексцентриситетом еліпса називають число

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (3.2.31)$$

Оскільки в еліпса $c < a$, то $e < 1$.

Через ексцентриситет еліпса можна виразити відношення його півосей

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \qquad (3.2.32)$$

і фокальні радіуси

$$r_1 = a - ex, r_2 = a + ex. \qquad (3.2.33)$$

Директрисами еліпса називають дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі еліпса та розташовані симетрично щодо центра еліпса на відстані $\frac{a}{e}$ від нього. Рівняння директрис таке:

$$x = \pm\frac{a}{e}. \qquad (3.2.34)$$

Якщо фокуси еліпса є на осі Oy, то $b > a$ і

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \tag{3.2.35}$$

ексцентриситет

$$e = \frac{c}{b}, \tag{3.2.36}$$

рівняння директрис

$$y = \frac{b}{e}. \tag{3.2.37}$$

П р и к л а д 3.2.7. Задано рівняння еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. Обчислимо довжини його півосей, координати фокусів, ексцентриситет, а також запишемо рівняння директрис і визначимо відстань між ними. Відшукаємо фокальні радіуси точки $M\left(\sqrt{13}; 10\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ і точки еліпса, відстані від яких до лівого фокуса еліпса дорівнюють 14.

• З рівняння еліпса маємо $a = 13,\ b = 5$. Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 12$. Отже, координати фокусів $F_1(12;0),\quad F_2(-12;0)$. Ексцентриситет еліпса $e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$. Рівняння директрис $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{169}{12}$.

Відстань між директрисами $d = \frac{169}{6}$. Точка $M\left(\sqrt{13}; 10\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ належить еліпсу. За формулою (3.2.33) обчислимо її фокальні радіуси:

$$r_1 = 13 + \frac{12}{13}\sqrt{13} = 13 + \frac{12}{\sqrt{13}};\ r_2 = 13 - \frac{12}{13}\sqrt{13} = 13 - \frac{12}{\sqrt{13}}.$$

За формулою $r_1 = a + ex$ визначимо абсцису точок, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 14. Оскільки $a = 13,\quad e = \frac{12}{13}$, то $x = \frac{13}{12}$. Підставивши отримане значення x у рівняння еліпса, визначимо ординати цих точок $y = \pm\frac{5\sqrt{143}}{12}$. Отже, є дві точки $C_1\left(\frac{13}{12}; \frac{5\sqrt{143}}{12}\right), C_2\left(\frac{13}{12}; -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$, відстані від яких до лівого фокуса еліпса дорівнюють 14. ❍

Гіпербола. *Гіперболою* називають множину точок площини, різниця відстаней яких від двох фіксованих точок площини, які називають *фокусами*, є сталою.

Як і у випадку еліпса, можна вивести *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.2.38}$$

Дослідимо форму гіперболи. Розв'яжемо рівняння (3.2.38) відносно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3.2.39}$$

Очевидно, що $|x| \geq a$. Оскільки кожному значенню *x* відповідають два значення *y*, які однакові за абсолютною величиною і мають протилежні знаки, то *Ox* є віссю симетрії гіперболи. Змінна *x* є у рівнянні (3.2.39) у парному степені, тому *Oy* є віссю симетрії гіперболи. Гіпербола перетинає вісь *Ox* у точках $A_1(a;0), \quad A_2(-a;0)$, які називають її дійсними вершинами. Відрізок $|A_1A_2| = 2a$ називають довжиною дійсної півосі гіперболи, а число a – великою піввіссю гіперболи. Якщо *x*=0, то рівняння $\frac{y^2}{b^2} = -1$ не має дійсних розв'язків, тобто гіпербола не перетинає вісь *Oy*. Точки $B_1(0;b)$ та $B_2(0;-b)$ називають уявними вершинами, а відрізок $|B_1B_2| = 2b$ – уявною віссю гіперболи. Відрізок $|F_2F_1| = 2c,\ c^2 - a^2 = b^2$ дорівнює відстані між фокусами. Отже, гіперболою є фігура, зображена на рис. 3.2.7.

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{3.2.40}$$

є рівнянням гіперболи, для якої вісь Oy – дійсна, а Ox – уявна. Для такої гіперболи $F_1(0;c), F_2(0;-c)$.

Прямі

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{3.2.41}$$

є *асимптотами гіперболи*.

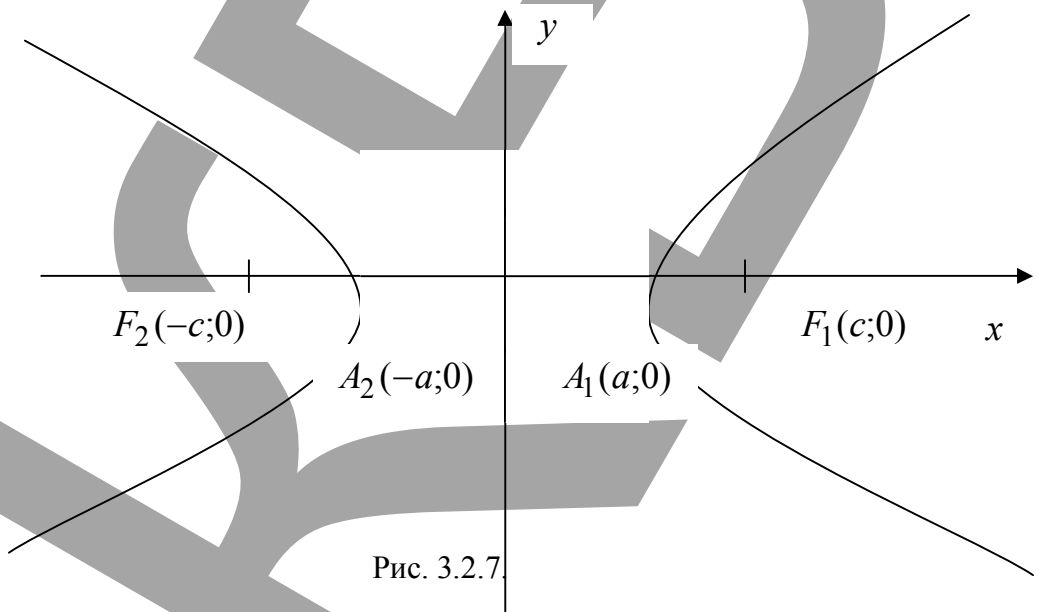


Рис. 3.2.7.

Ексцентриситетом гіперболи називають число

$$e = \frac{c}{a} > 1. \tag{3.2.42}$$

Через ексцентриситет гіперболи можна виразити співвідношення її півосей

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \tag{3.2.43}$$

і фокальні радіуси

$$r_1 = \pm(ex - a), \quad r_2 = \pm(ex + a), \tag{3.2.44}$$

де плюс (мінус) беремо для правої (лівої) гілки гіперболи.

Директрисами гіперболи називають прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи та розташовані на відстані $\frac{a}{e}$ від початку координат. Рівняння директрис

$$x = \pm\frac{a}{e}. \tag{3.2.45}$$

Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ рівняння директрис

$$y = \pm\frac{b}{e}. \tag{3.2.46}$$

Співвідношення довжин фокальних радіусів кожної точки гіперболи та відстаней цієї точки до відповідних директрис є сталим і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{3.2.47}$$

П р и к л а д 3.2.8. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$. Складемо канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

• За означенням $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, або $c^2 = 2a^2$. Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $2a^2 = a^2 + b^2$. Тому $a^2 = b^2$, і рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Оскільки точка $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ належить гіперболі, то $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1$ і $a^2 = 1$. Отже, гіперболі відповідає рівняння $x^2 - y^2 = 1$. ❍

П р и к л а д 3.2.9. Підприємство випускає продукцію, затрачаючи на виробництво однієї штуки 10 грн. Затрати, які не залежать від випуску продукції (заробітна платня, оренда і вартість електроенергії) становлять 5 000 грн. за місяць. Визначимо вартість випуску однієї штуки продукції.

• Позначимо через *x* кількість продукції, випущеної за місяць. Затрати на випуск усієї продукції $C = 10x + 5\,000$. Затрати на випуск однієї штуки продукції $y = \frac{10x + 5\,000}{x}$, *x*>0. Отримано рівняння гіперболи $y = 10 + \frac{5\,000}{x}$ (рис. 3.2.8).

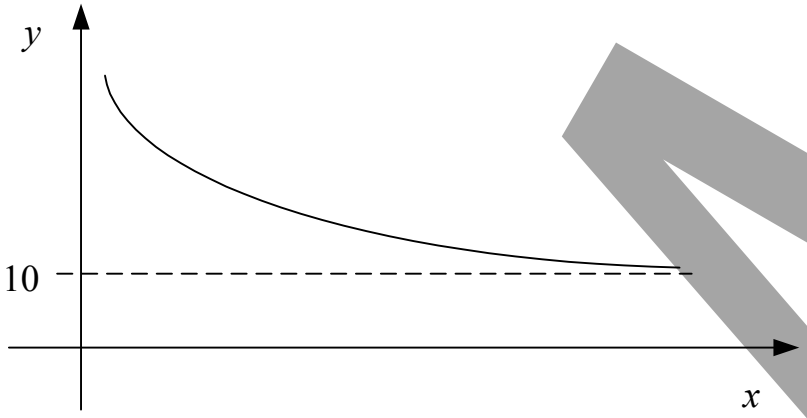


Рис. 3.2.8.

Парабола. *Параболою* називають множину точок площини, рівновіддалених від фіксованої прямої (директриси), і фіксованої точки (фокуса), яка не належить цій прямій.

Для виведення рівняння параболи виберемо систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь Oy – через середину перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису (рис.3.2.9).

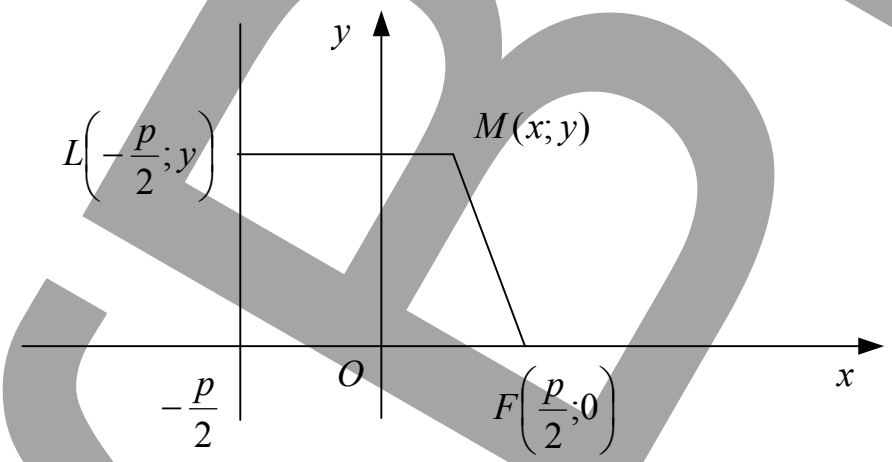


Рис. 3.2.9.

Позначимо відстань від фокуса до директриси через p. Тоді координати фокуса $F(\frac{p}{2};0)$, а рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$. Нехай точка $M(x;y)$ належить параболі, а точка $L\left(-\frac{p}{2};y\right)$ – директрисі. За означенням параболи $|FM|=|ML|$. Оскільки $|FM|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $|ML|=x+\frac{p}{2}$, то рівняння параболи запишемо у вигляді

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \qquad (3.2.48)$$

Піднімемо обидві частини рівняння (3.2.48) до квадрата. Після спрощень отримаємо *канонічне рівняння параболи*

$$y^2=2px. \qquad (3.2.49)$$

Для того, щоб дослідити форму параболи, розв'яжемо останнє рівняння щодо y:

$$y=\pm\sqrt{2px}. \qquad (3.2.50)$$

З рівняння (3.2.50) маємо, що $x\ge 0$, $y\in(-\infty;\infty)$. Оскільки для кожного значення x змінна y набуває двох значень, однакових за абсолютною величиною, але з протилежними знаками, то парабола симетрична щодо осі Ox. Графік параболи зображений на рис. 3.2.10.

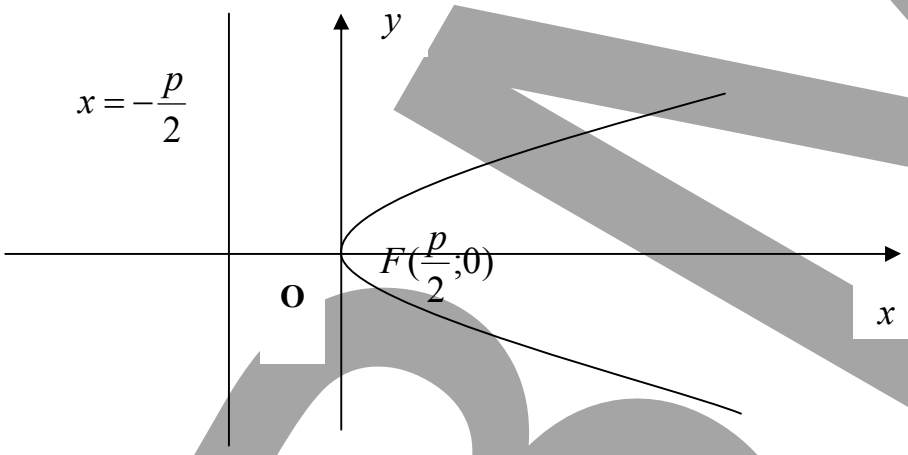


Рис. 3.2.10.

Рівняння $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$ є канонічними рівняннями парабол.

Дотичну до параболи в точці $M_0(x_0;y_0)$ задає рівняння

$$yy_0=p(x+x_0). \qquad (3.2.51)$$

Фокальний радіус точки, яка належить параболі,

$$r=x+\frac{p}{2}. \qquad (3.2.52)$$

П р и к л а д 3.2.10. Визначимо координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2=8x$. Обчислимо довжину фокального радіуса точки $M(2;4)$.

• Парабола задана канонічним рівнянням. Тому $2p=8$, $p=4$. Тоді координати фокуса $F(2;0)$, рівняння директриси $x=-2$. Довжину фокального радіуса точки $M(2;4)$ обчислимо за формулою $r=x+\frac{p}{2}=2+2=4$. ❍

3.3. Лінії і поверхні у просторі

3.3.1. Поняття поверхні та лінії

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат $Oxyz$ і поверхня *S*. Рівнянням поверхні *S* у заданій системі координат називають

$$F(x; y; z)=0, \tag{3.3.1}$$

яке задовольняють координати кожної точки $M(x, y, z)$, що належить поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що їй не належить.

Поверхня є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють рівняння (3.3.1).

Поверхню *S* називають *циліндричною* з твірною, паралельною до осі *Oz*, якщо для кожної точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ цієї поверхні пряма, що проходить через цю точку паралельно до осі *Oz*, повністю належить поверхні.

Можна довести, що рівняння $F(x; y)=0$, яке пов'язує дві змінні *x* та *y* і не містить змінної *z*, визначає циліндричну поверхню з твірною, паралельною до осі *Oz*.

Поверхню *S* називають *конічною* з вершиною у початку координат *O*, якщо для довільної, відмінної від *O*, точки $M(x; y; z)$ цієї поверхні пряма, що проходить через точки $M(x; y; z)$ і *O*, повністю належить поверхні.

Поверхню, яка у деякій декартовій системі координат визначена алгебричним рівнянням з трьома змінними степеня *n*, називають алгебричною поверхнею *n*-го порядку.

Теорема 3.3.1. Якщо поверхня у деякій декартовій прямокутній системі координат визначена алгебричним рівнянням степеня *n*, то ця поверхня і в довільній іншій декартовій прямокутній системі координат визначена алгебричним рівнянням того ж степеня *n*.

Кожну неалгебричну поверхню називають *трансцендентною*.

Якщо $F_1(x; y; z)=0$ і $F_2(x; y; z)=0$ – рівняння двох поверхонь, перерізом яких є лінія *L*, то координати кожної точки лінії *L* задовольняють рівняння обох поверхонь, а координати кожної точки, що не належить *L*, ці рівняння не задовольняють.

Отже, система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x; y; z)=0, \\ F_2(x; y; z)=0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

визначає рівняння лінії *L*.

П р и к л а д 3.3.1. Складемо рівняння поверхні, кожна точка якої є вдвічі ближче до точки $A(0; 1; 0)$, ніж до точки $B(5; 0; 0)$.

• Нехай S – шукана поверхня, $M(x; y; z)\in S$. Тоді $2|AM|=|MB|$, тобто

$$2\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}.$$

Звідси $(x-5)^2+y^2+z^2=4\left(x^2+(y-1)^2+z^2\right)$. Після перетворень отримаємо

$3x^2+3y^2+3z^2-8y+10x-21=0$. ❍

3.3.2. Площина і пряма у просторі

Визначити рівняння площини – означає записати залежність між координатами x, y, z довільної точки площини і параметрами, які визначають цю площину. Залежно від заданих параметрів можна отримати різні рівняння площини.

Загальне рівняння площини. Виведемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x; y; z)$ перпендикулярно до ненульового вектора $\vec{N}=(A; B; C)$ (рис. 3.3.1).

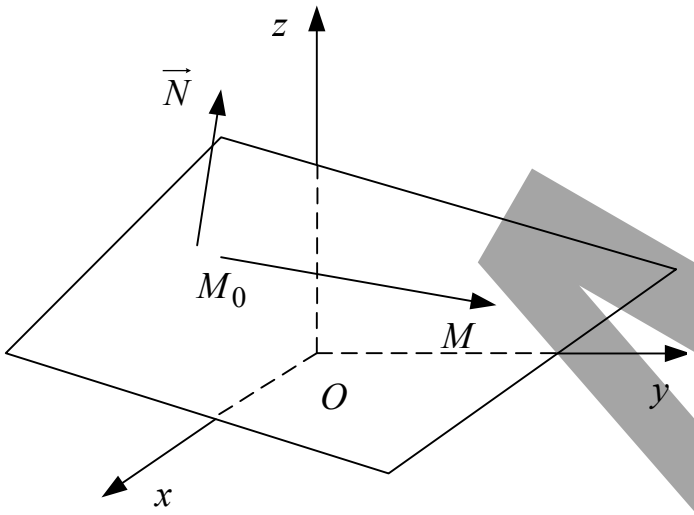


Рис. 3.3.1.

Нехай точка $M(x;y;z)$ належить площині. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{N}=(A;B;C)$. Умовою перпендикулярності цих векторів є те, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.3.3)$$

Рівняння (3.3.3) називають рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{N}=(A;B;C)$**.**

Запишемо рівняння (3.3.3) у вигляді

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.3.4)$$

де A, B, C – координати вектора, перпендикулярного до площини; $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Рівняння (3.3.4) називають загальним рівнянням площини. У ньому числа A, B, C – координати вектора, перпендикулярного до площини. Вектор $\vec{N}=(A;B;C)$ називають *нормальним вектором*, або *вектором нормалі.*

Розглянемо окремі випадки рівняння (3.3.4).

1. Якщо у рівнянні площини D=0, то площина $Ax+By+Cz=0$ проходить через початок координат.
2. Якщо у рівнянні площини A=0, то площина $By+Cz+D=0$ паралельна до осі Ox. Аналогічно, якщо B=0, то площина $Ax+Cz+D=0$ паралельна до осі Oy, а якщо C=0, то площина $Ax+By+D$=0 паралельна до осі Oz.
3. Якщо у рівнянні площини $A=B$=0, то площина $Cz+D=0$ паралельна до площини Oxy. Аналогічно, якщо $A=C$=0, то площина $By+D$=0 паралельна до площини Oxz, а якщо $D=C$=0, то площина $Ax+D$=0 паралельна до площини Oyz .
4. Якщо у рівнянні площини $A=D$=0, то площина $By+Cz$=0 проходить через вісь Ox.
5. Якщо у рівнянні площини $A=B=D$=0, то площина Cz=0 або z=0, суміщена з площиною Oxy. Аналогічно, якщо $B=C=D$=0, то площина $Ax=0$ або x=0, суміщена з площиною Oyz, якщо $A=C=D$=0, то площина By=0 або y=0, суміщена з площиною Oxz.
6. Якщо $B=D$=0, то площина $Ax+Cz$=0 проходить через вісь Oy, а якщо $C=D$=0, то площина проходить через вісь Oz.

П р и к л а д 3.3.2. Складемо рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7;2;-3)$ і $M_2(5;6;-4)$ паралельно до осі Ox.

• Рівняння площини, що паралельна до осі Ox, має вигляд $By+Cz+D=0$. Поділивши його на $D \neq 0$, отримаємо рівняння $B_1 y + C_1 z + 1 = 0$. Оскільки точки $M_1(7;2;-3)$ і $M_2(5;6;-4)$ належать площині, то їхні рівняння задовольняють рівняння площини, тобто

$$\begin{cases} 2B_1 - 3C_1 + 1 = 0; \\ 6B_1 - 4C_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь і отримаємо $B_1 = 0{,}1, \quad C_1 = 0{,}4$. Отже, шукане рівняння $\frac{1}{10} y + \frac{2}{5} z + 1 = 0$, або $y+4z+10=0$. ❍

Приклад 3.3.3. Складемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;0;-1)$ паралельно до векторів $\vec{a} = (5;0;1)$ і $\vec{b} = (0;1;-1)$.

• Оскільки шукана площина паралельна до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то її нормальний вектор $\overrightarrow{N} = \vec{a} \times \vec{b}$, тобто

$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Шукане рівняння має вигляд $-1(x-1)+5(y-0)+5(z+1)=0$, або $x-5y-5z-6=0$. ❍

Нормоване рівняння площини. Розглянемо площину p, яка задана нормаллю $\overrightarrow{OP}$. *Нормаллю площини* називають перпендикуляр, опущений з початку координат на площину (рис. 3.3.2).

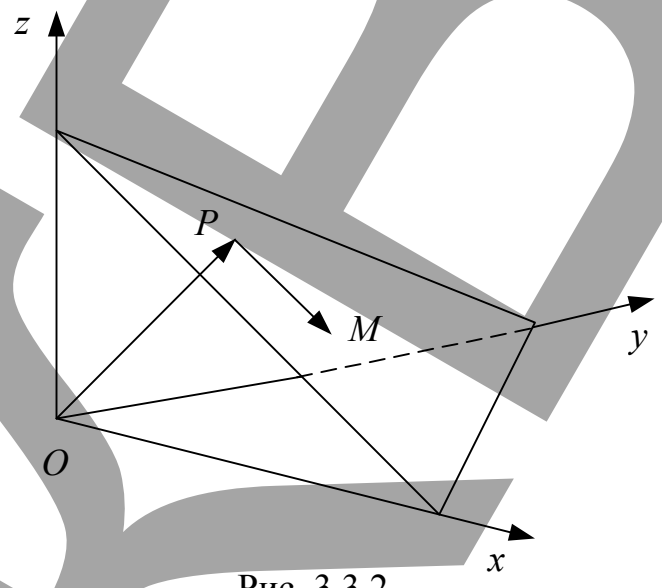


Рис. 3.3.2.

Нехай задана довжина нормалі $|\overrightarrow{OP}| = p$, і кути, які нормаль утворює з додатними напрямами осей координат. Очевидно, що $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha; p\cos\beta; p\cos\gamma)$. Точка $P(p\cos\alpha; p\cos\beta; p\cos\gamma)$ належить заданій площині. Нехай точка $M(x;y;z)$ належить площині π. Тоді вектор $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha; y - p\cos\beta; z - p\cos\gamma)$ перпендикулярний до

вектора $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha; p\cos\beta; p\cos\gamma)$. Умовою перпендикулярності цих векторів є те, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\cos\beta(y - p\cos\beta) + p\cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0.$$

Скоротимо його на p ***і врахуємо, що*** $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, ***отримаємо*** **нормоване рівняння площини*:***

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{3.3.5}$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину; α, β, γ – кути, які утворює цей перпендикуляр (нормаль) з осями *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Нормоване рівняння площини має такі властивості:

1) вільний член нормованого рівняння завжди від'ємний;
2) сума квадратів коефіцієнтів біля x, y, z дорівнює одиниці.

Зведемо загальне рівняння площини (3.3.4) до нормованого вигляду. Для цього помножимо його на множник M. Отримаємо

$$AMx + BMy + CMz + DM = 0. \tag{3.3.6}$$

Рівняння (3.3.6) буде нормованим рівнянням площини, якщо виконуються такі умови:

1) $DM < 0$;
2) $(AM)^2 + (BM)^2 + (CM)^2 = 1$.

З цих умов

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.3.7}$$

Знак перед дробом беремо протилежним до знака *D*. Число M називають *нормувальним множником*. Отже, отримаємо рівняння

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{3.3.8}$$

Відстань від точки до площини. За допомогою нормованого рівняння площини можна визначити відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини, заданої нормальним рівнянням (3.3.5):

$$d = |x_0\cos\text{б} + y_0\cos\text{в} + z_0\cos\text{г} - p|. \tag{3.3.9}$$

Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ можна обчислити за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.3.10}$$

Приклад 3.3.4. Визначимо відстань від точки $M_0(2;-3;5)$ до площини $4x - 7y + 6z - 3 = 0$.

• За формулою (3.3.10) отримаємо

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + (-7) \cdot (-3) + 6 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 6^2}} = \frac{56}{\sqrt{101}}. \quad \bigcirc$$

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки. ***Виведемо рівняння площини, що проходить через три задані точки. Нехай точки*** $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ ***належать площині*** π. ***На цій площині візьмемо точку*** $M(x; y; z)$ ***(рис. 3.3.3).***

Оскільки точка $M(x; y; z)$ ***належить площині*** p, ***то вектори*** $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ ***лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Умовою компланарності трьох векторів*** $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ ***є те, що мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто***

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3.11)$$

Рівняння (3.3.11) є рівнянням площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

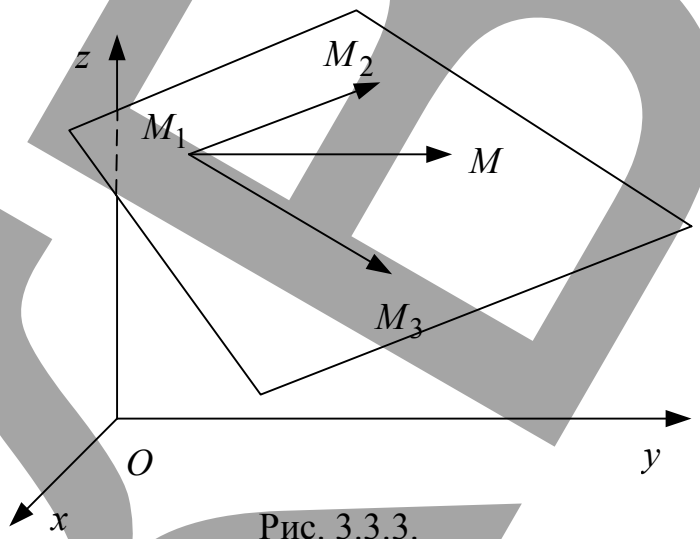


Рис. 3.3.3.

Приклад 3.3.5. З точки $M_0(2;3;-5)$ на координатні площини опущено перпендикуляри. Складемо рівняння площини, яка проходить через основи цих перпендикулярів.

• Основами перпендикулярів, опущених на координатні площини, є точки $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$. За формулою (3.3.11) отримаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$15x + 10y - 6z - 60 = 0. \quad \square$$

Рівняння площини у відрізках на осях. Нехай площина p відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки, відповідно, a, b, c, тобто відомі три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ (рис.3.3.4).

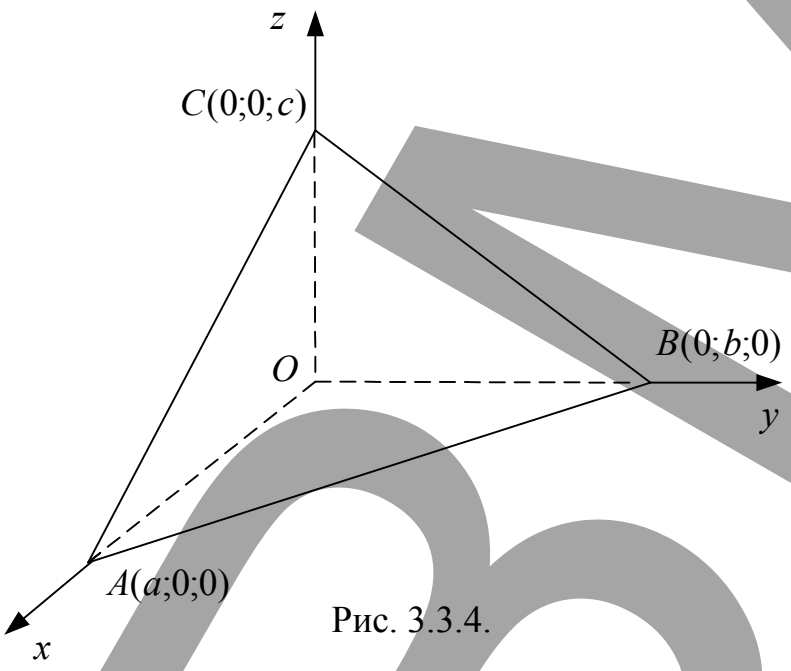


Рис. 3.3.4.

З використанням рівняння (3.3.11) напишемо рівняння площини, яка проходить через ці точки:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(x-a)bc + yac + zab = 0.$$

Розкриємо дужки і поділимо обидві частини рівняння на abc, отримаємо рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.3.12)$$

Приклад 3.3.6. Складемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;5;4)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = -6$, а на осі аплікат відрізок $c = 3$.

• Для розв'язування задачі використаємо рівняння (3.3.12) площини у відрізках на осях. За умовою $b = -6$, $c = 3$, тому

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1.$$

Оскільки точка $M_0(2;5;4)$ належить площині, то її координати задовольняють рівняння цієї площини:

$$\frac{2}{a}+\frac{5}{-6}+\frac{4}{3}=1.$$

З цієї рівності отримаємо, що $a=4$. Отже, рівняння площини $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1.$ ❍

Кут між двома площинами. ***Нехай задано дві площини загальними рівняннями*** $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ***і*** $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$ ***Двогранний кут між площинами вимірюють лінійним кутом*** φ***, який дорівнює куту між нормальними векторами*** $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$ ***і*** $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ ***цих площин, тобто*** $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$***, або***

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.3.13)$$

Якщо площини паралельні, то їхні нормальні вектори теж паралельні. Отже,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (3.3.14)$$

– *умова паралельності* двох площин.

Якщо площини перпендикулярні, то їхні нормальні вектори перпендикулярні. Отже,

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (3.3.15)$$

– *умова перпендикулярності* двох площин.

Рівняння прямої у просторі. Визначити рівняння прямої у просторі – означає записати залежність між координатами x,y,z змінної точки прямої і параметрами, які визначають розміщення прямої у просторі. Залежно від заданих параметрів можна отримати різні рівняння прямої у просторі.

Канонічне рівняння прямої. ***Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат*** $Oxyz$ ***і пряма*** L***, яка проходить через точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***паралельно до вектора*** $\vec{S}=(m;n;p)$ ***(рис. 3.3.5).***

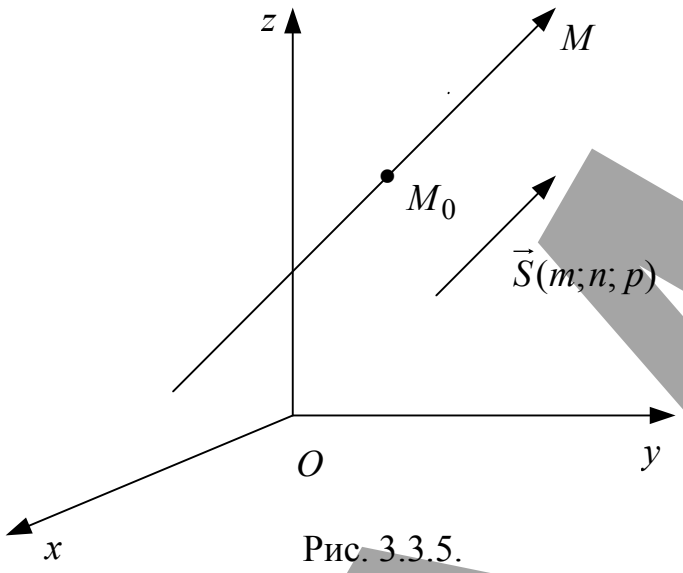


Рис. 3.3.5.

Вектор $\vec{S}=(m;n;p)$ ***називають напрямним вектором прямої*** L. ***Точка*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***і вектор*** $\vec{S}=(m;n;p)$ ***цілком визначають пряму, оскільки через задану точку паралельно до заданого вектора можна провести тільки одну пряму. Нехай точка*** $M(x;y;z)$ ***належить шуканій прямій. Тоді вектор*** $\vec{S}=(m;n;p)$ ***колінеарний до вектора*** $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0z-z_0)$. ***З умови колінеарності цих векторів отримаємо*** **канонічне рівняння прямої у просторі*:***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{3.3.16}$$

Зазначимо, що у рівнянні (3.3.16) одне або два з чисел m,n,p ***можуть дорівнювати нулю. Пропорцію*** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ***розуміємо як рівність*** $ad=bc$, ***тому якщо знаменник дробу дорівнює нулю, то і відповідний чисельник теж дорівнює нулю.***

Якщо кожне з відношень у (3.3.16) прирівняти до деякого параметра t, то отримаємо *параметричне рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Приклад 3.3.7. Складемо канонічне і параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;5)$ і утворює з осями координат кути $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

- За напрямний приймемо вектор

$$\vec{S}=\vec{i}\cdot\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}.$$

За формулою (3.3.16) отримаємо шукане канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2}=\frac{y+3}{1/2}=\frac{z-5}{1/2},$$

або

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{1}.$$

Прирівняємо в останній рівності кожне зі співвідношень до параметра t, отримаємо параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=t\sqrt{2}+2; \\ y=t-3; \\ z=t+5. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нехай пряма проходить через дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ простору. За напрямний вектор прямої можна прийняти вектор $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Нехай точка $M(x;y;z)$ належить прямій. Вектори $\overrightarrow{AM}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$ та $\overrightarrow{AB}==(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ колінеарні. З умови колінеарності цих векторів отримаємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.3.18)$$

Загальне рівняння прямої. ***Пряму L у просторі можна задати рівняннями двох площин, які перетинаються по цій прямій, тобто у вигляді***

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (3.3.19)$$

Рівняння (3.3.19) називають загальним рівнянням прямої. Загальне рівняння прямої можна звести до канонічного вигляду. Для цього потрібно відшукати точку, яка належить прямій, і вектор, паралельний до прямої. Оскільки нормальні вектори $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1C_1)$ та $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ не паралельні, тобто їхні координати не пропорційні, то, не порушуючи загальності викладу, будемо вважати, що

$$\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Надамо x деякого значення x_0 і запишемо систему рівнянь (3.3.19) у вигляді

$$\begin{cases} B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0; \\ B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0. \end{cases} \qquad (3.3.20)$$

Оскільки $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то з системи рівнянь (3.3.20) отримаємо y_0 і z_0. Отже, відома точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, яка належить прямій L. Напрямний вектор $\vec{S}=(m;n;p)$ прямої перпендикулярний до кожного з нормальних векторів $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1C_1)$ та $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ площин, тому

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Звідси напрямний вектор прямої

$$\vec{S} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Отже, загальне рівняння прямої (3.3.19) можна записати у канонічному вигляді:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (3.3.21)$$

П р и к л а д 3.3.8. Запишемо загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0; \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

у канонічному вигляді.

• Визначимо координати будь-якої точки, яка належить прямій. Нехай $z = 0$. У цьому випадку з загального рівняння прямої для визначення координат x та y шуканої точки випливає система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0; \\ 3x + 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримаємо $x = -4,\ y = 5$. Отже, точка $M_0(-4;5;0)$ належить заданій прямій. Напрямний вектор прямої $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$, де $\overrightarrow{N_1} = (2;1;-5),\ \overrightarrow{N_2} = (3;2;-4)$ – нормальні вектори площин, які визначають задану пряму. Обчислимо

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, канонічне рівняння заданої прямої

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z}{1}. \ \bigcirc$$

Кут між двома прямими у просторі. Нехай задано дві прямі

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Вектори $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ і $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$ – напрямні вектори прямих.

Якщо ці прямі паралельні, то їхні напрямні вектори теж паралельні. Умовою паралельності векторів $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ та $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$, а отже, і прямих є умова

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (3.3.22)$$

Якщо прямі перпендикулярні, то їхні напрямні вектори теж перпендикулярні. Умовою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\overrightarrow{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$ є те, що їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}=0$. Отже, умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{3.3.23}$$

Кут ц між двома прямими вимірюють кутом між напрямними векторами $\overrightarrow{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\overrightarrow{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$ цих прямих, тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{3.3.24}$$

Умова перетину двох прямих у просторі. Дві прямі у просторі можуть бути паралельними, мимобіжними або перетинатися. Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то вони лежать в одній площині. Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overrightarrow{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\overrightarrow{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$ компланарні. Умовою перетину двох прямих у просторі є те, що їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \tag{3.3.25}$$

Взаємне розміщення прямої і площини. Розглянемо у просторі пряму L, задану параметричним рівнянням $\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ і площину π, задану загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. Пряма L може бути паралельною до площини р, перетинати площину або належати цій площині. Визначимо точку перетину прямої і площини. Підставимо $x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$ у рівняння площини. Отримаємо

$$A(mt+x_0)+B(nt+y_0)+C(pt+z_0)+D=0,$$

або

$$(Am+Bn+Cp)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D). \tag{3.3.26}$$

Під час розв'язування рівняння (3.3.26) можливі такі випадки:

1) $Am+Bn+Cp\neq 0$. У цьому випадку рівняння (3.3.26) має єдиний розв'язок

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \tag{3.3.27}$$

Підставимо у параметричне рівняння прямої замість t вираз (3.3.27), отримаємо координати точки перетину прямої та площини;

2) $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$ У цьому випадку рівняння (3.3.26) не має розв'язку, тобто пряма L не перетинає площини р;

3) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$ У цьому випадку рівняння (3.3.26) має безліч розв'язків, тобто пряма L належить площині р.

Кут між прямою і площиною. Кут и між прямою L і площиною р вимірюють кутом між прямою та її проекцією на площину р (рис. 3.3.6).

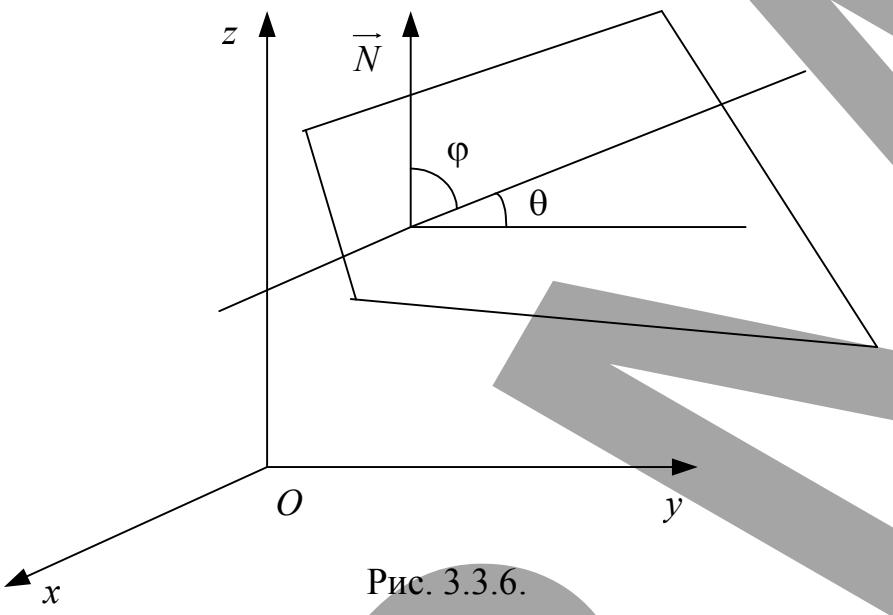


Рис. 3.3.6.

Нехай пряма L задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, а площина р – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. Нехай L' – проекція прямої L на площину π, а кут φ – кут між напрямним вектором $\vec{S}=(m;n;p)$ прямої L і нормальним вектором $\vec{N}=(A;B;C)$ площини. Очевидно, що $\varphi+\theta=90^\circ$. Тому

$$\cos\varphi=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta=\frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{S}\right|\left|\vec{N}\right|},$$

або

$$\sin\theta=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3.3.28)$$

Якщо пряма L перпендикулярна до площини р, то напрямний вектор прямої $\vec{S}=(m,n,p)$ паралельний до нормального вектора площини $\vec{N}=(A,B,C)$. Отже, умовою перпендикулярності прямої і площини є

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}. \qquad (3.3.29)$$

Якщо пряма L паралельна до площини р, то напрямний вектор прямої $\vec{S}=(m,n,p)$ перпендикулярний до нормального вектора площини $\vec{N}=(A,B,C)$. Отже, умовою паралельності прямої і площини є умова

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (3.3.30)$$

П р и к л а д 3.3.9. Визначимо кут між площиною $2x-2y+z-3=0$ і прямою, яка проходить через точки $A(5;1;-4)$ та $B(6;1;-3)$.

• За напрямний вектор $\vec{S}$ прямої приймемо вектор $\overrightarrow{AB}$, тобто $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(1;0;1)$. Оскільки нормальний вектор площини $\vec{N}=(2;-2;1)$, то за формулою (2.3.31)

$$\sin\theta=\frac{2\cdot1+(-2)\cdot0+1\cdot1}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, кут між прямою і площиною $\theta=\frac{\pi}{4}$. ❍

3.3.3. Алгебричні поверхні другого порядку

Алгебричною поверхнею другого порядку називають поверхню, рівняння якої у декартовій прямокутній системі координат має вигляд

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0, \qquad (3.3.31)$$

де $A^2+B^2+C^2\neq0$. Для відшукання канонічного рівняння поверхні другого порядку, яка задана загальним рівнянням (3.3.31), використовують паралельне перенесення осей координат і повертання системи координат на деякий кут. У результаті отримаємо одну з таких канонічних поверхонь:

1) еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.3.7);

2) однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 3.3.8);

3) двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 3.3.9);

4) еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,q>0)$ (рис. 3.10);

5) гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,q>0)$ (рис. 3.3.11);

6) конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 3.3.12);

7) еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 3.3.13);

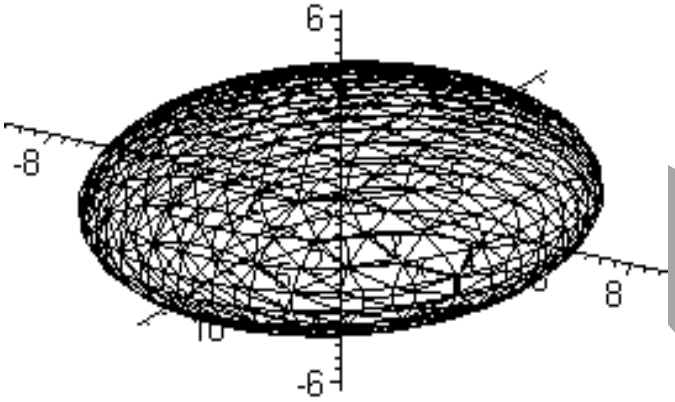


Рис. 3.3.7.

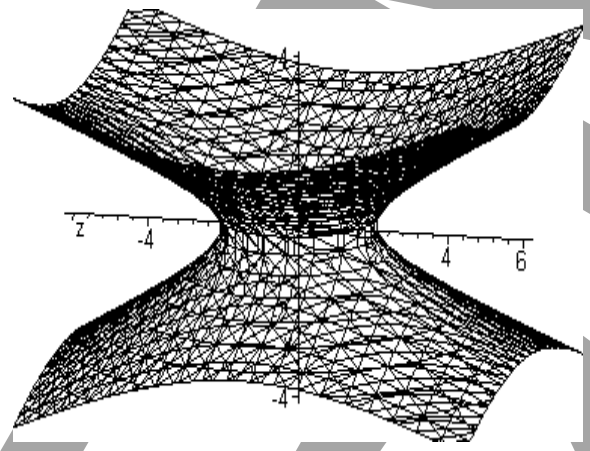


Рис. 3.3.8.

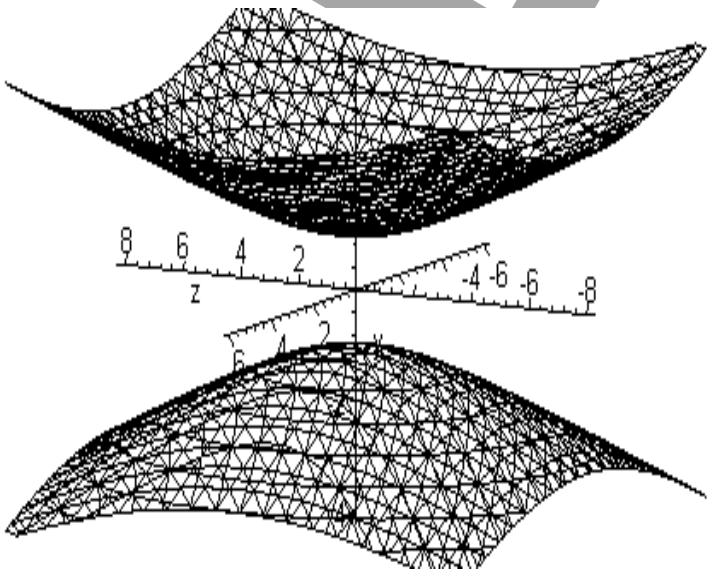


Рис. 3.3.9.

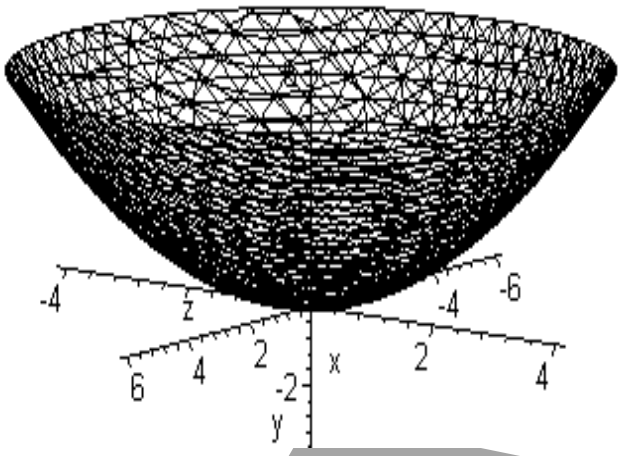


Рис. 3.3.10.

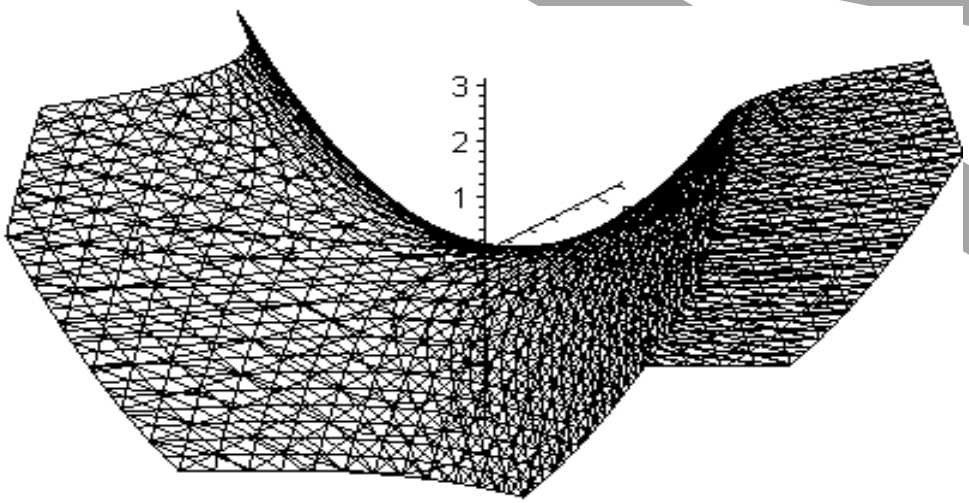


Рис. 3.3.11.

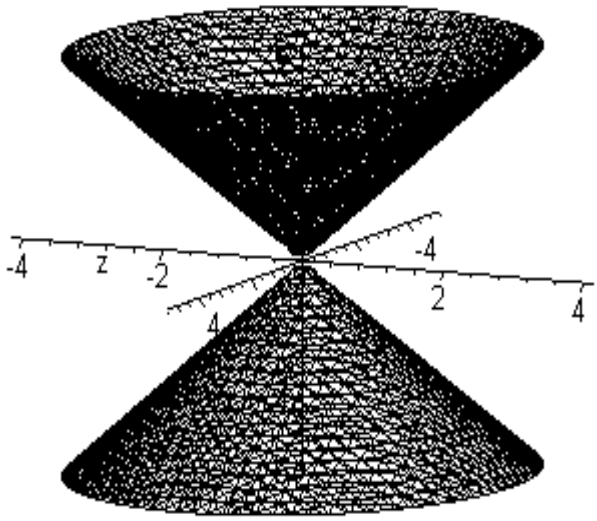


Рис. 3.3.12.

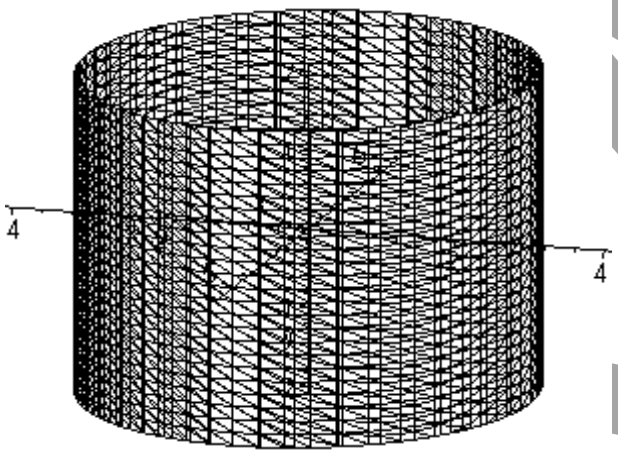


Рис. 3.3.13.

Розділ 4. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

4.1. Функції однієї змінної та їхні властивості

4.1.1. Поняття функції однієї змінної. Властивості функцій

Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким законом f відповідає один елемент $y \in Y$, то ця відповідність задає функцію $y = f(x)$. У цьому разі змінну x називають незалежною змінною, або аргументом, а y – залежною змінною. Множину X називають областю визначення і позначають $D(f)$, множину Y – множиною значень і позначають $E(f)$. Функція є відповідністю між елементами двох множин, тому функцію задано, якщо виконуються такі умови:

1) задано множину X, яка є областю визначення функції;
2) задано закон f, за яким для кожного дійсного числа $x \in X$ можна знайти одне дійсне число $y \in Y$.

Нехай f і g – деякі функції з областями визначення $D(f)$ і $D(g)$.

Суму, добуток, частку і композицію, тобто складену функцію вводять так:

$$1)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ D(f+g) = D(f) \cap D(g);$$
$$2)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g); \qquad (4.1.1)$$
$$3)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) \mid g(x) = 0\};$$

4) $(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ D(f \circ g) = \{ x \in D(g) \mid g(x) \in D(f) \}.$

Графіком $\Gamma(f)$ функції f називають множину упорядкованих пар дійсних чисел $(x; f(x)),\quad x \in D(f)$:

$$\Gamma(f) = \{ (x; f(x)) \mid x \in D(f) \}. \tag{4.1.2}$$

Графік функції можна зобразити як множину точок координатної площини Oxy, які мають координати $(x; f(x)),\quad x \in D(f)$.

Способи задання функції. Припустимо, що множина X, на якій задана функція, відома, і сформулюємо способи задання функції. Розрізняють чотири головні способи задання функції: аналітичний, описовий, табличний і графічний.

Аналітичний спосіб. У цьому випадку функціональну залежність між змінними x та y задають за допомогою деякого аналітичного виразу, або формули. У випадку аналітичного способу використовують явну, неявну та параметричну форми задання функції. У випадку *явного* задання функції формула визначає, які дії і в якому порядку треба виконати над числами й аргументом x, щоб для кожного його значення отримати одне значення y. Наприклад:

$$y = \frac{x^2 \cos 2x + 1}{x - 2}; \tag{4.1.3}$$

$$y = x^2,\quad x \in [-3;5], \qquad y = x^2; \tag{4.1.4}$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \le -2; \\ 5^x, & \text{якщо } -2 < x \le 5; \\ x^3 - 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Якщо не задано області визначення функції, то під областю визначення розуміють множину тих значень аргумента x, за яких заданий аналітичний вираз набуває дійсних значень. Наприклад, для функції, визначеної формулою (4.1.3), областю визначення є множина $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Функції, задані формулою (4.1.4), різні, тому що у них різні області визначення. Зазначимо, що формула (4.1.5) задає одну функцію. Якщо величини, які є в аналітичному виразі, мають певний фізичний чи економічний зміст, то область визначення функції може не збігатися з областю існування аналітичного виразу. Наприклад, функція споживання ФРН за 1975–1977 рр. має вигляд

$$C = 0{,}64Y + 102{,}76, \tag{4.1.6}$$

де C і Y – відповідно, національне споживання і національний дохід, виражені у мільярдах марок. Ця формула має зміст для всіх значень аргумента Y, проте за економічним змістом національний дохід є невід'ємний, тому область визначення функції (4.1.6) $Y \in [0; +\infty]$.

Рівняння $F(x, y) = 0$ задає *неявно* функцію $y = f(x)$, якщо

$$F(x, f(x)) \equiv 0,\quad \forall\, x \in D(f). \tag{4.1.7}$$

У цьому разі $y = f(x)$ називають *неявною функцією*.

Наприклад, функції

$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1], \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1],$$

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1; x_0], \\ \sqrt{1 - x^2}, & x \in [x_0; 1], \end{cases}$$

де $x_0 \in (-1; 1)$, задані рівнянням $x^2 + y^2 = 1$. Співвідношення $x^2 + y^2 = 1$ задає безліч функцій, для виділення яких треба накласти певні обмеження. Наприклад, обмеження $y \geq 0$ виділяє неявно задану на множині $[-1; 1]$ функцію $y = f_1(x)$.

Пара функцій

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \quad t \in T \end{cases} \tag{4.1.8}$$

задає відповідність між змінними x і y, за якої значенню $x = \varphi(t)$ відповідає значення $y = \psi(t), \quad \forall t \in T$. Якщо в цьому разі кожному x відповідає одне і тільки одне значення y, тобто $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2)$, то співвідношення (4.1.8) *параметрично* задає функцію $y = f(x)$. Наприклад, нехай

$$\begin{cases} x = a \sin t; \\ y = b \cos t. \end{cases}$$

Ці співвідношення є параметричним рівнянням еліпса, оскільки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \sin t)^2}{a^2} + \frac{(b \cos t)^2}{b^2} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Зазначимо, що терміни неявна функція та параметрично задана функція відображають не характер функціональної залежності, а лише способи її задання.

Описовий спосіб. Часто закон відповідності між елементами двох множин задають за допомогою опису цієї відповідності. Такий спосіб задання функції називають *описовим*, або *словесним*. Прикладом цього способу задання функції є функція Діріхле $D(x)$, у якій закон відповідності описують так: кожному раціональному числу відповідає число 1, а ірраціональному – число 0. Отже,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне число}; \\ 0, & \text{якщо } x - \text{ірраціональне число}. \end{cases}$$

Нехай X – множина всіх дійсних чисел. Кожному дійсному числу ставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x. Отримаємо функцію $y = E(x)$ –ціла частина числа x. Графік цієї функції зображений на рис. 4.1.1.

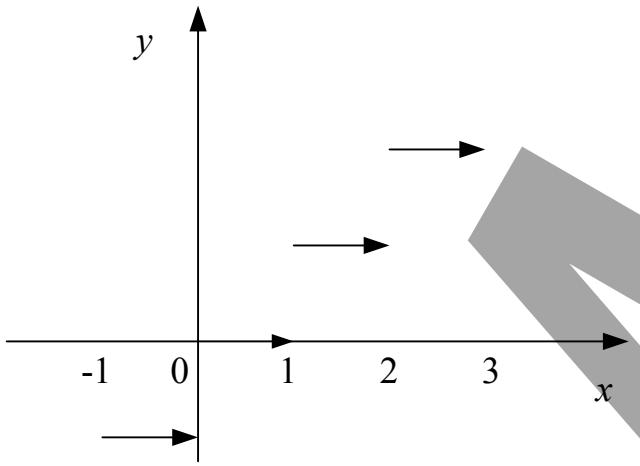


Рис. 4.1.1.

Цю функцію можна задати у такому вигляді:

$$E(x)=\begin{cases} n-1, & \text{якщо } n-1\le x<n; \\ n, & \text{якщо } x=n. \end{cases}$$

Функцію $y=\{x\}$ –дробова частина дійсного числа x можна задати у вигляді

$$y=x-E(x).$$

Графік цієї функції зображений на рис. 4.1.2.

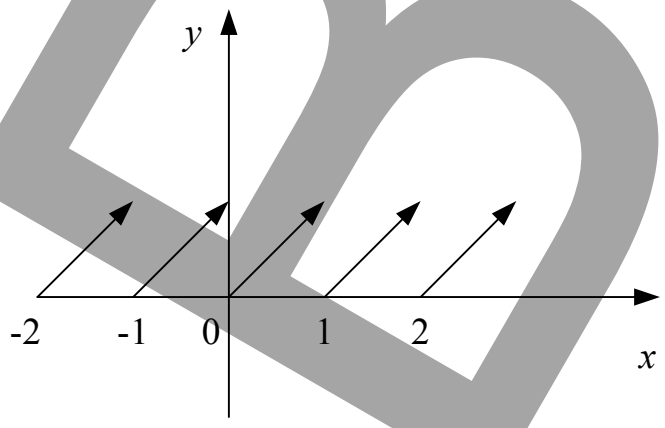


Рис. 4.1.2.

Розглянемо функцію $y=\operatorname{sgn}x$, яка кожному дійсному числу x ставить у відповідність його знак. Цю функцію можна описати так: кожному дійсному числу $x>0$ відповідає число 1, числу $x=0$ – число 0 і кожному числу $x<0$ – число -1. Функцію $y=\operatorname{sgn}x$ можна задати так:

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & \text{якщо } x>0; \\ 0, & \text{якщо } x=0; \\ -1, & \text{якщо } x<0. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рис. 4.1.3.

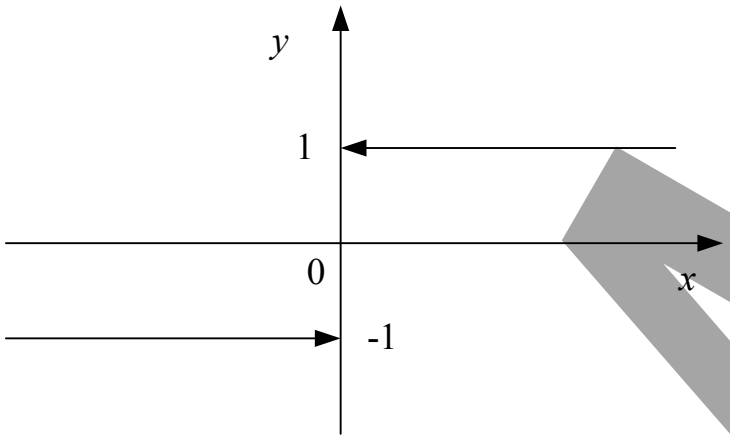


Рис. 4.1.3.

Табличний спосіб. Під час експериментальних досліджень та спостережень залежність між величинами часто наводять у вигляді таблиць: соціологічні опитування, таблиці бухгалтерської звітності і банківської діяльності. У таких таблицях одну зі змінних уважають незалежною, а іншу – функцією від неї. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Зображення функції у вигляді таблиці має свої недоліки. Головний недолік той, що кожна таблиця містить скінченну кількість значень функції, серед яких може і не бути значення, потрібного для розрахунків. Одним з найпростіших наближених методів обчислення невідомого значення функції за її табличними значеннями є метод лінійної інтерполяції. Нехай треба знайти значення $y_0 = f(x_0)$ за табличними значеннями $y_1 = f(x_1)$ і $y_2 = f(x_2)$, де $x_1 < x_0 < x_2$. Припустимо, що на відрізку $[x_1; x_2]$ графіком функції є пряма лінія. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Ця пряма проходить через точку $C(x_0; y_0)$, тому

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

З останньої рівності отримаємо шукане значення функції:

$$y_0 = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x_0 - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Зазначимо, що за даними таблиці можна наближено записати аналітичний вигляд функції.

Графічний спосіб. У цьому способі відповідність між значеннями аргумента і функції задають за допомогою графіка. Цей спосіб часто використовують під час експериментів із застосуванням самописців (осцилографи, сейсмографи, кардіографи).

П р и к л а д 4.1.1. Знайдемо області визначення функцій:

$$1)\ y=\sqrt[4]{x-3};\ \ 2)\ y=\sqrt{9-4x^2}-\ln\frac{2x+1}{x-1}.$$

• 1. Оскільки корінь парного степеня існує лише для невід'ємних значень x, то $D(y)=[3;+\infty)$.

2. Областю визначення першого доданка є множина тих значень x, що задовольняють нерівність $9-4x^2\geq 0$, тобто $X_1=[-1{,}5;1{,}5]$. Областю визначення другого доданка є множина тих значень x, що задовольняють нерівність $\frac{2x+1}{x-1}>0$, тобто $X_2=(-\infty;-0{,}5)\cup(1;+\infty)$. Областю визначення функції $y=\sqrt{9-4x^2}-\ln\frac{2x+1}{x-1}$ є переріз цих множин, тобто $D(y)=[-1{,}5;-0{,}5)\cup(1;1{,}5]$.

❍

Приклад 4.1.2. Знайдемо множину значень функцій:

$$1)\ y=-x^2+8x+3;\ 2)\ y=2+3\sin 5x;\ 3)\ y=3+\sqrt[4]{x-5}.$$

• 1. Запишемо функцію у вигляді

$$y=-x^2+8x+3=-\left(x^2-8x+16\right)+16+3=-(x-4)^2+19.$$

Отже, множина значень цієї функції $E(y)=(-\infty;19]$.

2. Оскільки $-1\leq\sin 5x\leq 1$, то $E(y)=[-1;5]$.

3. Оскільки для всіх x з області визначення функції $\sqrt[4]{x-5}\geq 0$, то $E(y)=[3;+\infty)$. ❍

4.1.2. Деякі класи функцій

Обмежені функції. Функцію $f(x),\ \ x\in D(f)$ називають *обмеженою* на множині $X\subseteq D(f)$, якщо існує таке число $M>0$, що для всіх $x\in X$ виконується нерівність

$$|f(x)|\leq M. \qquad (4.1.9)$$

Замість нерівності (4.1.9) можна записати нерівність

$$-M\leq f(x)\leq M,\quad x\in X\subseteq D(f). \qquad (4.1.10)$$

Графік обмеженої функції є у смузі між прямими $y=-M$, $y=M$ (рис. 4.1.4).

Наприклад, функція $y=\sin 3x$ обмежена для всіх $x\in R$, тому що $|\sin 3x|\leq 1\quad x\in R$.

Функцію $f(x),\ x \in D(f)$ називають *необмеженою* на множині $X \subseteq D(f)$, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $x_0 \in X$ таке, що виконується нерівність

$$|f(x_0)| \geq M. \qquad (4.1.11)$$

Наприклад, функція $y = x^2$ обмежена на кожному відрізку $[a\,;b]$, оскільки $x^2 \leq M$, де $M = \max\left(a^2, b^2\right)$, але вона необмежена для $x \in R$, тому що для будь-якого $P > 0$ знайдеться $x \in R$, наприклад, $x = P + 1$ таке, що $x^2 > P$.

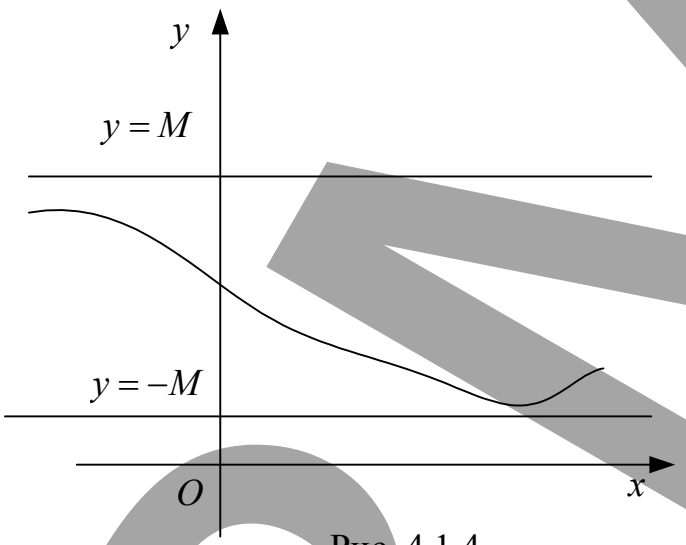


Рис. 4.1.4.

Якщо для функції $f(x)$ $x \in D(f)$ існує число K_1 таке, що $f(x) \leq K_1$, $\forall\, x \in D(f)$, то функцію називають *обмеженою згори.* Якщо для функції $f(x)$ $x \in D(f)$ існує число K_2 таке, що $f(x) \geq K_2$, $\forall\, x \in D(f)$, то функцію називають *обмеженою знизу*. Якщо функція обмежена згори, то її графік є під прямою $y = K_1$, якщо знизу, то над прямою $y = K_2$ (рис. 4.1.5, 4.1.6).

Наприклад, функція $y = 5^x$ обмежена знизу для всіх $x \in R$, функція $y = -x^2 - 3$ обмежена згори для всіх $x \in R$, функція $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ обмежена знизу і необмежена згори для $x \in (-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$.

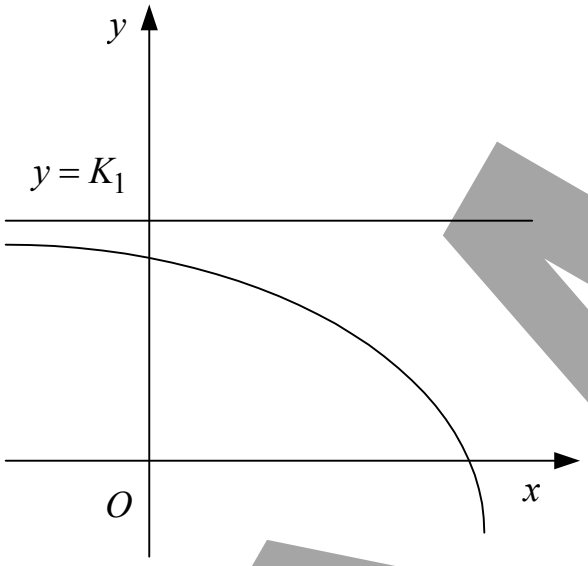


Рис. 4.1.5.

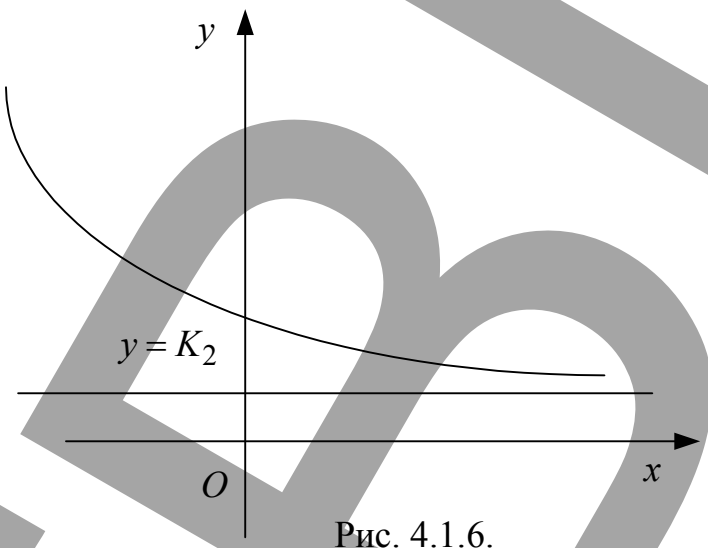


Рис. 4.1.6.

Нехай областю значень функції $f(x),\ \ x \in D(f)$ є множина B. Говорячи про обмеженість функції $f(x),$ ми характеризуємо множину її значень B. Наприклад, якщо функція $f(x)$ обмежена згори, то виконується нерівність $f(x) \le K_1,\ \ \forall\, x \in D(f)$. Це означає, що число K_1 є верхньою межею множини B. Найменшу верхню межу множини B значень функції $f(x),\ \ x \in D(f)$ називають точною верхньою межею, або точною верхньою гранню цієї функції, і позначають $\sup\limits_{x \in D(f)} f(x)$. Аналогічно, можна ввести поняття точної нижньої межі функції $f(x),\ \ x \in D(f)$, яку позначають $\inf\limits_{x \in D(f)} f(x)$.

Монотонні функції. Функцію $f(x)$ називають неспадною (незростаючою) на множині $X \subseteq D(f)$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, з нерівності $x_1 < x_2$

випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Неспадні та незростаючі функції на множині X називають монотонними на цій множині (рис. 4.1.7, 4.1.8).

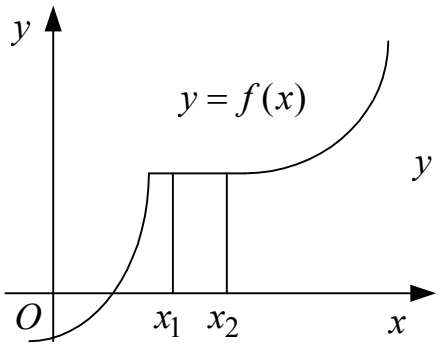


Рис. 4.1.7.

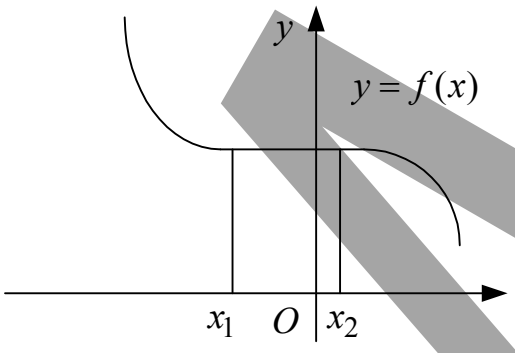


Рис. 4.1.8.

Функцію $f(x)$ називають спадною (зростаючою) на множині $X \subseteq D(f)$, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$. Спадні та зростаючі функції на множині X називають строго монотонними на цій множині (рис. 4.1.9).

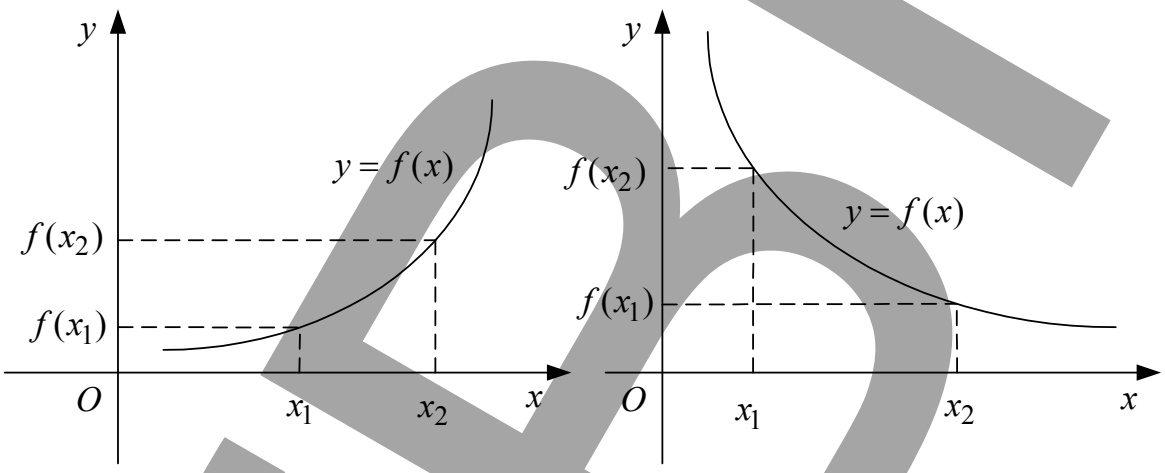


Рис. 4.1.9.

П р и к л а д 4.1.3. Дослідимо на монотонність функцію $y = x^2$.

• Функція $y = x^2$ визначена для всіх $x \in R$. Нехай $x \in (-\infty; 0]$. Якщо $x_1 < x_2$, то у цьому випадку $x_1^2 > x_2^2$, тобто для $x \in (-\infty; 0]$ функція $y = x^2$ спадає. Нехай тепер $x \in [0; +\infty]$. Якщо $x_1 < x_2$, то у цьому випадку $x_1^2 < x_2^2$, тобто для $x \in [0; +\infty]$ функція $y = x^2$ зростає. ❍

Парні і непарні функції. Множину X називають *симетричною* відносно початку координат, якщо з того, що $x \in X$, випливає, що $-x \in X$.

Функцію $f(x)$, $x \in D(f)$ називають *парною*, якщо

$$\forall\, x \in D(f) : -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x). \qquad (4.1.12)$$

Функцію $f(x)$, $x \in D(f)$ називають *непарною*, якщо

$$\forall\, x \in D(f) : -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x). \qquad (4.1.13)$$

Якщо функція $f(x),\ x \in D(f)$ не є парною і не є непарною, то вона є ні парною, ні непарною.

Приклад 4.1.4. Перевіримо, парними чи непарними є такі функції:

$$1)\ f(x) = x^4 + 2\cos 3x - 5; \quad 2)\, g(x) = x^3 - 4\sin x.$$

• Очевидно, що $D(f) = R,$ і якщо $x \in D(f),$ то $-x \in D(f).$ Обчислимо $f(-x) = (-x)^4 + 2\cos(-3x) - 5 = x^4 + 2\cos 3x - 5 = f(x).$ Отже, функція $f(x)$ парна. Для функції $g(x)$ область визначення $D(g) = R,$ і якщо $x \in D(g),$ то $-x \in D(g).$ Обчислимо $g(-x) = (-x)^3 - 4\sin(-x) = -x^3 + 4\sin x = -g(x).$ Отже, функція $g(x)$ непарна. ❍

Доведено, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Теорема 4.1.1. Довільну функцію $f(x),$ визначену на симетричній відносно початку координат множині $D(f),$ можна однозначно зобразити у вигляді суми парної і непарної функцій:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \qquad (4.1.14)$$

Періодичні функції. Функцію $f(x),\ x \in D(f)$ називають *періодичною* з періодом $T > 0,$ якщо

$$\forall\, x \in D(f) : (x \pm T) \in D(f) \wedge f(x + T) = f(x). \qquad (4.1.15)$$

Якщо число T є період функції $f(x),\ x \in D(f),$ то її періодами є також числа $kT,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Це випливає з рівностей

$$f(x) = f(x \pm T) = f((x \pm T) \pm T) = f(x \pm 2T) = \ldots = f(x \pm kT).$$

З означення маємо, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції досить побудувати її графік на проміжку довжини $T,$ а потім продовжити цей графік, повторюючи його через кожний проміжок довжини $T,$ що належить $D(f).$

Обернені функції. Функцію $f(x),$ визначену на множині $X,$ називають *взаємно однозначною* на цій множині, якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$ з того, що $x_1 \neq x_2,$ випливає $f(x_1) \neq f(x_2).$ Розглянемо взаємно однозначну на множині X функцію $f(x)$ (рис. 4.1.10).

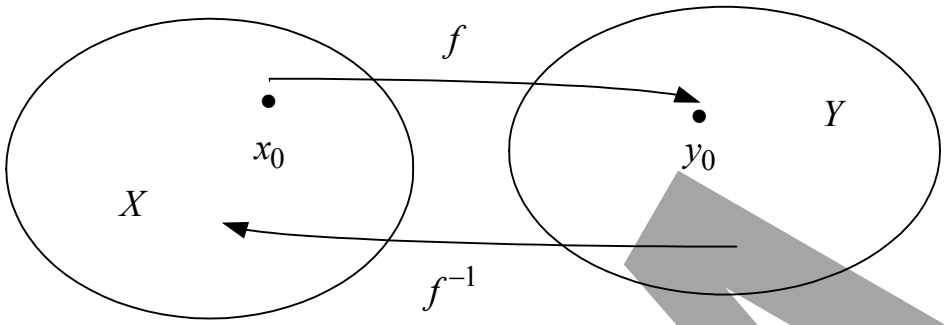


Рис. 4.1.10.

Нехай $Y-$ множина значень функції $f(x),\ x \in X$. Для кожного значення $y_0 \in Y$ знайдеться значення $x_0 \in X$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. У цьому разі елемент $x_0 \in X$ називають *прообразом* для елемента $y_0 \in Y$. Оскільки функція $f(x)$ взаємно однозначна, то для кожного $y_0 \in Y$ існує єдиний прообраз $x_0 \in X$. Функцію, яка кожному значенню $y_0 \in Y$ ставить у відповідність його прообраз $x_0 \in X$, називають *оберненою* до функції $f(x)$ і позначають $x = f^{-1}(y)$. Область значень Y функції $y = f(x)$ є областю визначення оберненої функції $x = f^{-1}(y)$, а область визначення X функції $y = f(x)$ є множиною значень функції $x = f^{-1}(y)$.

Зазначимо таке: якщо функція $x = f^{-1}(y)$ обернена до функції $y = f(x)$, то функція $y = f(x)$ обернена до функції $x = f^{-1}(y)$, тобто вони взаємно обернені. У разі взаємно обернених функцій для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ справджуються рівності

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y. \qquad (4.1.16)$$

Теорема 4.1.2. Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна на множині X і множина Y – множина її значень. Тоді існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, строго монотонна на множині Y.

Прикладом взаємно обернених функцій в економіці є виробнича функція і функція затрат. Розглянемо деяку виробничу систему. Нагадаємо, що функцію, яка виражає залежність обсягу виробництва від розміру затрачених ресурсів, називають виробничою. Розглянемо найпростішу *виробничу функцію* $y = f(x)$, де x – вартість сумарних затрат; y – вартість сумарного випуску. Очевидно, що $x \geq 0, y \geq 0$. Виробнича функція відображає наявну технологію. Зміна технології приводить до зміни виробничої функції. Виробнича функція зростає у своїй області визначення, тому що у випадку збільшення затрат виробництво не зменшується. Якщо допустити, що виробнича функція строго зростає, тобто збільшення затрат веде до збільшення випуску продукції, то за теоремою 4.1.2 виробнича функція $y = f(x)$ має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$, яка визначає

розмір виробничих затрат x, необхідних для випуску обсягу продукції y. Цю функцію називають *функцією затрат*. За теоремою 4.1.2 вона є строго зростаючою.

Зазначимо, що кожна строго монотонна функція має обернену, тобто є оборотною, проте не кожна оборотна функція є строго монотонна. Це означає, що теорема 4.1.2 дає лише достатню умову оборотності функції.

В оберненій функції $x = f^{-1}(y)$ незалежною змінною є y. Графік оберненої функції $x = f^{-1}(y)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, але в цьому разі для функції $y = f(x)$ значення незалежної змінної є на осі Ox, а для оберненої – на осі Oy. Щоб уникнути цієї незручності, в оберненій функції $x = f^{-1}(y)$ незалежну змінну позначають через x, а значення функції – через y. Тоді обернену функцію записують у вигляді $y = f^{-1}(x)$. У цьому випадку графік оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ відрізнятиметься від графіка функції $y = f(x)$. Можна довести, що графік функції $y = f^{-1}(x)$ буде симетричним до графіка функції $y = f(x)$ відносно бісектриси першого і третього координатного кутів (рис. 4.1.11).

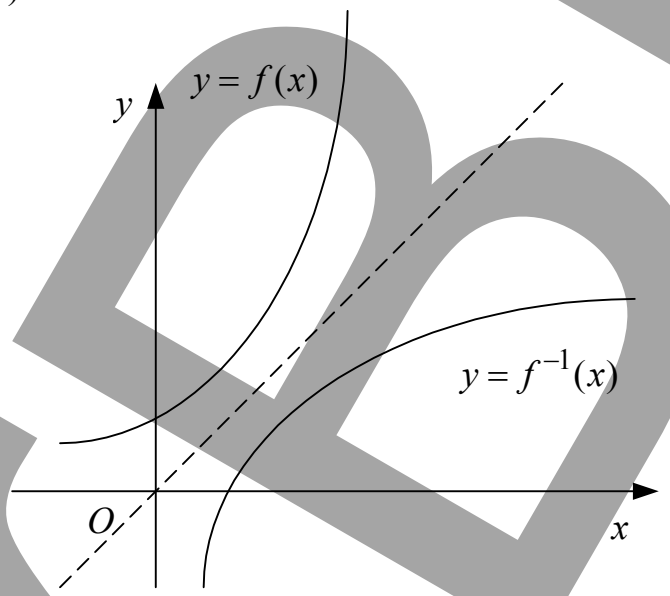


Рис. 4.1.11.

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то для побудови графіка оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ треба графік функції $y = f(x)$ повернути навколо бісектриси першого і третього координатних кутів на 180°. Через те, що функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ взаємно обернені, цей спосіб можна застосувати й до побудови графіка функції $y = f(x)$, якщо відомий графік функції $y = f^{-1}(x)$.

Асимптоти графіка. Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою*, якщо в разі наближення x до a значення функції нескінченно збільшуються (рис. 4.1.12).

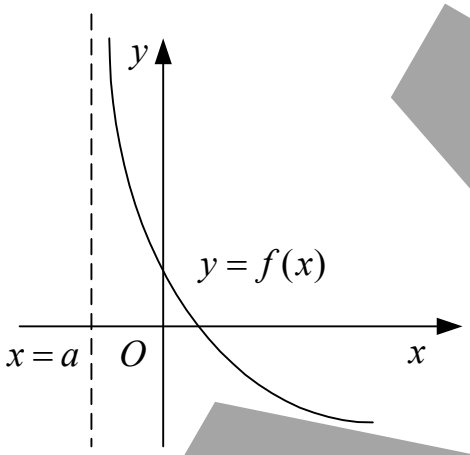


Рис. 4.1.12.

Пряму $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою*, якщо в разі наближення x до ∞ значення функції наближаються до b (рис. 4.1.13).

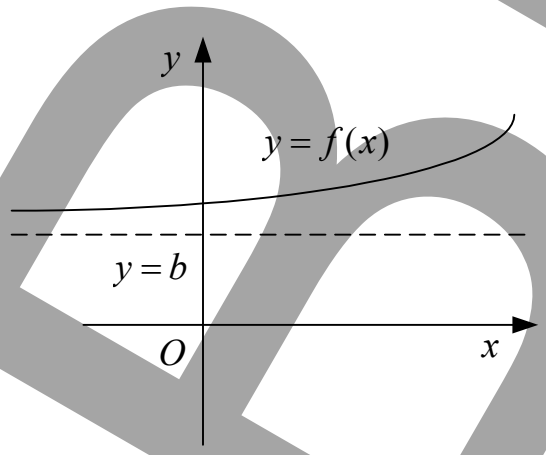


Рис. 4.1.13.

Пряму $y = kx + b$ називають *похилою асимптотою*, якщо в разі наближення x до ∞ графік функції наближається до прямої $y = kx + b$ (рис. 4.1.14).

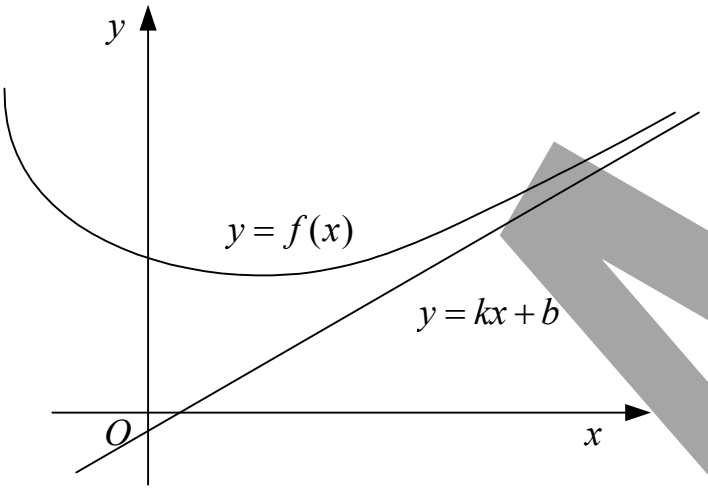


Рис. 4.1.14.

Елементарні функції та їхня класифікація. Функції, задані аналітично, можна утворити з функцій, які називають *головними елементарними функціями.* До головних елементарних функцій належать такі:

стала $y = C, \quad C \in R$;

степенева $y = x^{\alpha}$, α – дійсне число;

показникова $y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$;

логарифмічна $y = \log_a x, \ a > 0, \quad a \neq 1$;

тригонометричні $y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = \operatorname{tg} x, \ y = \operatorname{ctg} x$;

обернені тригонометричні $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \ y = \operatorname{arcctg} x$.

Кожну функцію, яку можна задати за допомогою формули, отриманої у результаті скінченної кількості композицій головних елементарних функцій і скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення і ділення, називають *елементарною функцією*.

Наприклад, функція $f(x) = 2^{x+1} + x^2 \log_5 x - 3$ елементарна.

Областю визначення елементарної функції є множина тих дійсних чисел, для яких можна виконувати дії, записані у формулі.

Елементарні функції поділяють на три класи: раціональні, ірраціональні та трансцендентні.

Функції, які можна задати явно формулою, отриманою у результаті скінченної кількості композицій сталих і степеневих функцій з цілими показниками і скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення і ділення, називають *раціональними функціями*. Функцію $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні числа, а $n \in N$, називають *цілою раціональною функцією*, або *поліномом* степеня n.

Відношення двох цілих раціональних функцій

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k}$$

називають *дробово-раціональною функцією*.

Кожну раціональну функцію можна записати як дробово-раціональну. Наприклад, раціональну функцію

$$y=\frac{x^3-2x^2+3}{x^2-4}+\frac{x-5}{x+2}$$

можна записати у вигляді дробово-раціональної

$$y=\frac{x^3-x^2-7x+13}{x^2-4}.$$

Функції, які можна задати явно формулою, отриманою у результаті скінченної кількості композицій сталих, раціональних і степеневих функцій з дробовими показниками і скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення і ділення називають *ірраціональними функціями*.

Наприклад, функція

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3-1}+2x-5}{x^5-2}$$

є ірраціональною.

Елементарні функції, які не є ні раціональними, ні ірраціональними, називають *трансцендентними*.

Наприклад, функція $f(x)=\cos 2x-\log_3 x+7$ трансцендентна.

Розглянемо схему, за якою можна досліджувати функцію і будувати її графік.

1. Область визначення.
2. Множина значень.
3. Точки перетину з осями координат.
4. Парність, непарність.
5. Періодичність.
6. Випуклість, точки перегину.
7. Проміжки монотонності.
8. Побудова графіка.

4.1.3. Функції, які використовують в економіці

Виробничі функції. *Виробнича функція* однієї змінної $y=f(x)$ – це функція, незалежна змінна якої набуває значення обсягів затраченого ресурсу, тобто чинників виробництва, а залежна змінна набуває значення обсягів випущеної продукції. У цьому разі виробничу функцію називають *одноресурсною*, або *однофакторною.* Її областю визначення є множина невід'ємних дійсних чисел. Запис $y=f(x)$ означає таке: якщо затрачено x штук ресурсу, то

отримають $y = f(x)$ штук продукції. Розглянемо виробничу функцію, яка має вигляд $y = f(x) = ax^b$, де x – затрачений ресурс, наприклад, робочий час, $f(x)$ – кількість випущеної продукції, наприклад, деталей, a, b – параметри, причому $a > 0, \quad 0 < b < 1$. Графік цієї функції зображений на рис. 4.1.15.

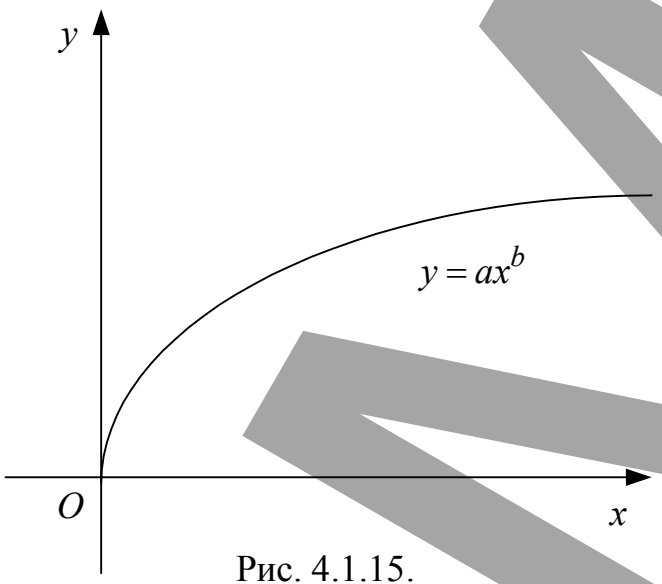


Рис. 4.1.15.

З рис. 4.1.15 видно, що зі збільшенням кількості ресурсу x обсяг випущеної продукції збільшується, проте кожна додаткова одиниця ресурсу дає щораз менший приріст обсягу випущеної продукції. Ця властивість ілюструє фундаментальне положення економічної теорії, яке називають *законом спадної ефективності.*

В економіці використовують макро- і мікроекономічні виробничі функції. *Мікроекономічні виробничі функції* застосовують для опису взаємозв'язку між затраченим або використаним протягом деякого часу ресурсом x і випуском продукції y, яку виготовляє конкретний суб'єкт виробничої діяльності. *Макроекономічні виробничі функції* використовують для опису взаємозв'язків, наприклад, між річними затратами праці регіону і річним випуском продукції.

Функція попиту. Ця функція описує залежність попиту D (*demand*) на товар від ціни P (*price*) на нього:

$$D = f(P). \tag{4.1.17}$$

Функцію попиту часто записують так:

$$Q_D = f(P). \tag{4.1.18}$$

Відомо, що за сталої купівельної спроможності населення зі збільшенням ціни товару зменшується попит на нього. Це означає, що функція попиту є спадною.

У багатьох випадках залежність D від P описує рівняння

$$D = kP^a + c, \tag{4.1.19}$$

або

$$Q_D = kP^a + c, \tag{4.1.20}$$

де $a < 0,\ c$ – так звана екзогенна стала, значення якої залежить від багатьох причин, наприклад, добробуту суспільства, політичної ситуації. Очевидно, що $P > 0,\quad D \geq 0.$

Графік такої функції попиту зображений на рис. 4.1.16.

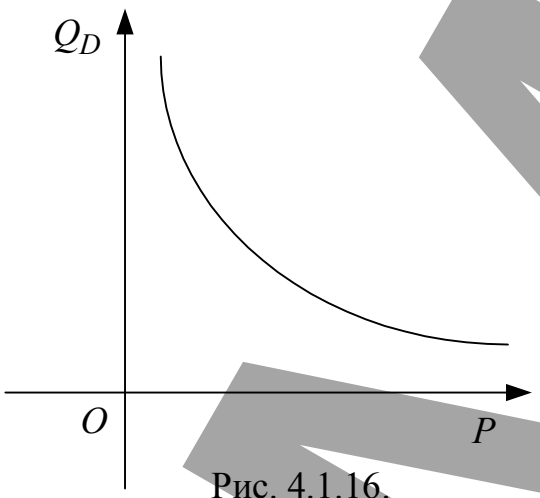


Рис. 4.1.16.

Залежність ціни від попиту описує обернена функція

$$P = f^{-1}(Q_D). \tag{4.1.21}$$

Якщо кількість $Q_D = f(P)$ проданого товару помножити на ціну P одиниці товару, то отримаємо *сумарний виторг продавця*, чи *сумарні витрати покупця*:

$$R = P \cdot f(P), \tag{4.1.22}$$

або

$$R = f^{-1}(Q_D) \cdot Q_D. \tag{4.1.23}$$

П р и к л а д 4.1.5. Залежність ціни від попиту задає співвідношення

$$P = \frac{400}{Q_D + 3}.$$

Визначимо функцію сумарного виторгу.

- За формулою (4.1.23) отримаємо функцію сумарного виторгу

$$R = \frac{400 \cdot Q_D}{Q_D + 3}.$$

Якщо $Q_D = 1, 5, 17,$ то, відповідно, $R = 100, 250, 340.$ ❍

Функція пропозиції. Ця функція описує залежність пропозиції S (*supply*) на товар від ціни P (*price*) на нього:

$$S = g(P). \tag{4.1.24}$$

Функцію пропозиції часто записують так:

$$Q_S = g(P). \tag{4.1.25}$$

Відомо, що за сталої купівельної спроможності населення зі збільшенням ціни товару збільшується його пропозиція. Це означає, що функція пропозиції є зростаючою.

У багатьох випадках залежність S від P описує рівняння

$$S = P^b + d, \tag{4.1.26}$$

або

$$Q_S = P^b + d, \tag{4.1.27}$$

де $b \geq 1$, d – так звана екзогенна стала, значення якої залежить від багатьох причин, наприклад, добробуту суспільства, політичної ситуації. Очевидно, що $P > 0, \quad S \geq 0$.

Графік такої функції пропозиції зображений на рис. 4.1.17.

Залежність ціни від пропозиції описує обернена функція

$$P = g^{-1}(Q_S). \tag{4.1.28}$$

Для аналізу економіки цікавою є умова рівноваги, тобто випадок, коли попит дорівнює пропозиції. Цю умову можна записати рівністю

$$D(P) = S(P). \tag{4.1.29}$$

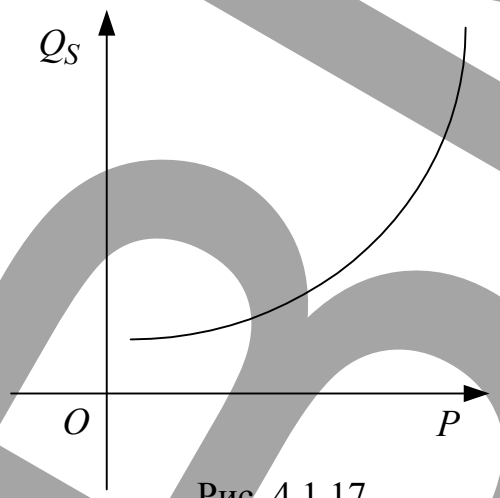


Рис. 4.1.17.

Точку M перетину кривих попиту і пропозиції називають *точкою рівноваги* (рис. 4.1.18).

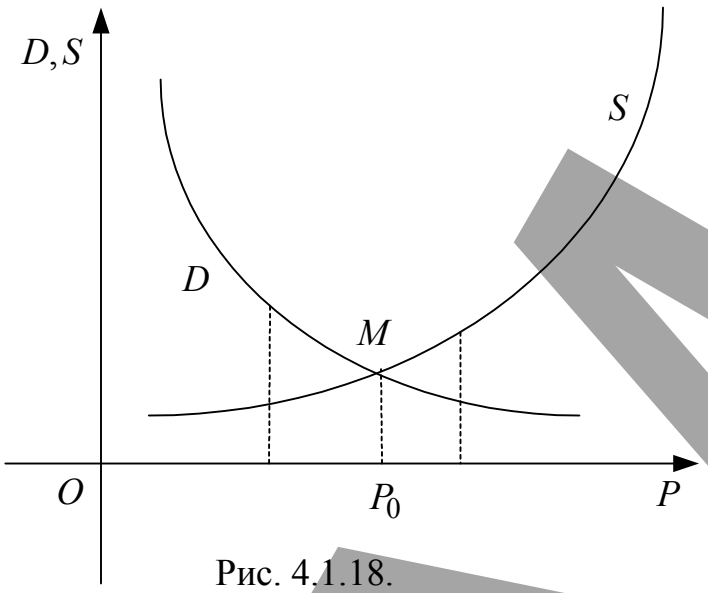


Рис. 4.1.18.

Ціну P_0, за якої виконується рівність (4.1.29), називають *ціною рівноваги*, або *рівноважною ціною*. З рис. 4.1.18 видно: якщо ринкова ціна P_1 більша, ніж ціна рівноваги P_0, то пропозиція товару Q_S більша, ніж попит на нього Q_D, тобто $Q_S > Q_D$. Внаслідок цього товар залишається нереалізованим, що спонукає виробників зменшувати ціну на нього. Внаслідок цього ринкова ціна P_1 буде наближатися до ціни рівноваги P_0. Якщо ринкова ціна P_1 менша, ніж ціна рівноваги P_0, то пропозиція товару Q_S менша, ніж попит на нього Q_D, тобто $Q_S < Q_D$. Унаслідок цього товару є менше, що спонукає виробників збільшувати ціну на нього. Тому ринкова ціна P_1 буде наближатися до ціни рівноваги P_0. Це явище називають *тиском ринку*.

Функція витрат. Ця функція описує залежність між витратами виробництва деякої продукції та обсягом її виробництва. Якщо C – сумарні витрати виробництва x одиниць продукції, то функція сумарних витрат має вигляд

$$C = f(x). \tag{4.1.30}$$

Витрати виробництва поділяють на загальні, сталі та змінні. *Сталі витрати* FC – це витрати, які не залежать від обсягу виробництва і є навіть тоді, коли продукцію не виробляють. До таких витрат належать орендна плата, плата за кредит, амортизаційні відрахування. *Змінні витрати* VC – це витрати, які змінюються зі зміною обсягу виробництва. *Загальні*, або *сукупні*, *витрати* виробництва – це сума сталих і змінних витрат

$$TC = FC + VC. \tag{4.1.31}$$

Графіки цих витрат зображено на рис. 4.1.19.

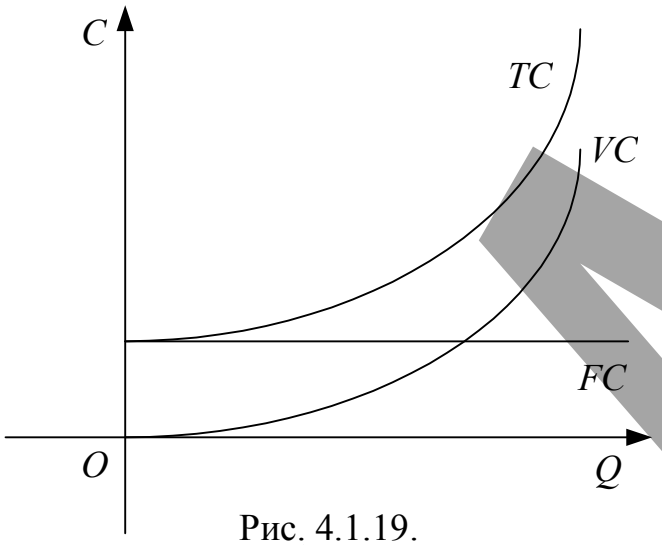


Рис. 4.1.19.

Середні витрати – це витрати на одиницю продукції. Функція середніх витрат має такий вигляд:

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}. \qquad (4.1.32)$$

4.2. Числові послідовності та їхні границі

4.2.1. Поняття числової послідовності та її властивості

Поняття числової послідовності. Поставимо у відповідність за деяким законом кожному натуральному числу $n \in N$ дійсне число y_n. Множину чисел $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ називають *числовою послідовністю* і позначають $\{y_n\}$. Отже, числова послідовність – це числова функція, визначена на множині натуральних чисел. Числа $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ називають *елементами послідовності*, а число y_n – *загальним елементом*. Оскільки числова послідовність є окремим випадком функціональної залежності, то способи її задання ті ж, що і функції.

Числову послідовність можна задати за допомогою формули, яку *називають формулою загального елемента послідовності*. Якщо заданий загальний елемент послідовності, то, надаючи n значень 1, 2, 3,..., отримаємо будь-який елемент послідовності. Наприклад, якщо $y_n = \frac{1}{n}$, то отримаємо послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

Числову послідовність можна задати *рекурентним* способом. Суть його полягає у тому, що задають один або декілька перших елементів послідовності і правило, за яким можна виразити наступний елемент послідовності через попередні.

П р и к л а д 4.2.1. Задамо арифметичну прогресію рекурентним способом, у якої перший елемент $a_1 = a$ і різниця d:

$$a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N. \qquad (4.2.1)$$

• Надамо n значень $1, 2, 3, ...,$ отримаємо $a_2 = a_1 + d = a + d$, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a + 3d, \ldots$. Методом математичної індукції можна довести, що

$$a_n = a + (n-1)d,\quad n \in N. \qquad (4.2.2)$$

Вираз (4.2.2) є формулою загального елемента арифметичної прогресії.

П р и к л а д 4.2.2. Задамо рекурентним способом геометричну прогресію, у якої перший елемент $b_1 = b$ і знаменник q:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,\quad n \in N. \qquad (4.2.3)$$

• Надамо n значень $1, 2, 3, ...,$ отримаємо $b_2 = b_1 q = bq$, $b_3 = b_2 q = bq^2$, $b_4 = b_3 q = bq^3, \ldots$. Методом математичної індукції можна довести, що

$$b_n = bq^{n-1},\quad n \in N. \qquad (4.2.4)$$

Вираз (4.2.4) є формулою загального елемента геометричної прогресії.

Числову послідовність можна задати словесно. Нехай y_n є n-на цифра зображення числа π нескінченним десятковим дробом. Отримаємо послідовність $3, 1, 4, 1, \ldots$.

Арифметичні дії над числовими послідовностями. Розглянемо дві числові послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$.

Сумою послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називають послідовність

$$\{x_n + y_n\}:\ x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ \ldots,\ x_n + y_n, \ldots.$$

Різницею послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називають послідовність

$$\{x_n - y_n\}:\ x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ x_3 - y_3,\ \ldots,\ x_n - y_n, \ldots$$

Добутком числової послідовності $\{x_n\}$ на число m називають послідовність

$$\{mx_n\}:\ mx_1,\ mx_2,\ mx_3,\ \ldots,\ mx_n, \ldots.$$

Добутком послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називають послідовність

$$\{x_n \cdot y_n\}:\ x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3, \ldots,\ x_n y_n, \ldots.$$

Часткою послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називають послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_{21}}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots,\ y_n \neq 0.$$

Обмежені послідовності. Послідовність $\{y_n\}$ називають *обмеженою згори* (*знизу*), якщо існує таке число $M(m)$, що кожний елемент y_n цієї послідовності задовольняє нерівність $y_n \leq M$ $(y_n \geq m)$.

Послідовність $\{y_n\}$ називають *обмеженою*, якщо вона обмежена згори і знизу, тобто існують такі числа M і m, що кожен елемент цієї послідовності задовольняє нерівність $m \le y_n \le M$.

Нехай $A = \max\{|m|, |M|\}$. У цьому випадку умову обмеженості можна записати у вигляді $|y_n| \le A$.

Послідовність $\{y_n\}$ називають *необмеженою*, якщо для будь-якого $A > 0$ існує елемент y_n цієї послідовності такий, що $|y_n| > A$.

З наведених означень маємо, що всі елементи обмеженої згори числової послідовності належать проміжку $(-\infty; M]$, а обмеженої знизу – проміжку $[m; +\infty)$.

Приклад 4.2.3. Послідовність $-1, -2, -3, ..., -n, ...$ обмежена згори, тому що для всіх $n \in N$ $y_n = -n \le -1$, і необмежена знизу.

Приклад 4.2.4. Послідовність $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, ..., \frac{n}{n+3}, ...$ обмежена, тому що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $0 < \frac{n}{n+3} < 1$.

Приклад 4.2.5. Доведемо, що послідовність $-1, 2, -3, 4, ..., (-1)^n n, ...$ необмежена.

• Справді, для будь-якого числа $A > 0$, знайдеться такий елемент y_n послідовності, що $|y_n| \ge A$. ❍

Монотонні послідовності. Послідовність $\{y_n\}$ називають *зростаючою*, якщо кожен її наступний елемент більший від попереднього, тобто $\forall n \in N$ $y_{n+1} > y_n$.

Приклад 4.2.6. Послідовність натуральних чисел 1, 2, 3, ..., $n, ...$ зростаюча, тому що $\forall n \in N$ $y_{n+1} = n + 1 > y_n = n$.

Послідовність $\{y_n\}$ називають *спадною*, якщо кожен її наступний елемент менший від попереднього, тобто $\forall n \in N$ $y_{n+1} < y_n$.

Послідовність $\{y_n\}$ називають *незростаючою*, якщо кожен її наступний елемент не більший від попереднього, тобто $\forall n \in N$ $y_{n+1} \le y_n$.

Послідовність $\{y_n\}$ називають *неспадною*, якщо кожен її наступний елемент не менший від попереднього, тобто $\forall n \in N$ $y_{n+1} \ge y_n$.

Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні послідовності називають *монотонними*, причому зростаючі і спадні послідовності називають *строго монотонними*.

4.2.2. Границя числової послідовності

Поняття границі послідовності. Розглянемо числову послідовність $y_n = \dfrac{3n+2}{3n+5}$. Обчислимо декілька її елементів: $y_1 = \dfrac{5}{8}$, $y_2 = \dfrac{8}{11}$, $y_3 = \dfrac{11}{14}$, ..., $y_{10} = \dfrac{32}{35}, \ldots$, $y_{100} = \dfrac{302}{305}$, ... Зі збільшенням номера елементи послідовності наближаються до 1. Це означає, що зі збільшенням номера n значення $|y_n - 1|$ зменшується. Визначимо, наприклад, за якого значення n буде виконуватися нерівність $|y_n - 1| < 0{,}01$. Розглянемо ліву частину цієї нерівності:

$$|y_n - 1| = \left|\frac{3n+2}{3n+5} - 1\right| = \left|-\frac{3}{3n+5}\right| = \frac{3}{3n+5} < 0{,}01. \qquad (4.2.5)$$

З нерівності $\dfrac{3}{3n+5} < \dfrac{1}{100}$ отримаємо $n > \dfrac{295}{3} = 147{,}5$. Якщо $n \geq 148$, то $|y_n - 1| = \left|\dfrac{3n+2}{3n+5} - 1\right| < 0{,}01$.

Визначимо, за якого значення n буде виконуватися нерівність

$$|y_n - 1| < \varepsilon, \qquad (4.2.6)$$

де ε – довільне як завгодно мале додатне число. Використаємо (4.2.5), отримаємо нерівність $\dfrac{3}{3n+5} < \varepsilon$. Звідси $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{5}{3}$. Позначимо через n_0 цілу частину числа $\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{5}{3}$, тобто $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{5}{3}\right]$. Тоді нерівність (4.2.6) виконується для всіх натуральних $n > n_0$.

Отже, послідовність $y_n = \dfrac{3n+2}{3n+5}$ має таку властивість: для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|y_n - 1| < \varepsilon$.

Наведемо означення границі числової послідовності.

Число a називають *границею* числової послідовності $\{y_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon, \qquad (4.2.7)$$

і записують $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Послідовність, яка має границю, називають *збіжною*.

З використанням логічних символів означення границі числової послідовності можна записати так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0(\varepsilon), \forall\, n > n_0(\varepsilon): \ |y_n - a| < \varepsilon\right). \qquad (4.2.8)$$

На підставі поняття границі можна записати, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{3n+5} = 1$.

П р и к л а д 4.2.7. Доведемо, що границі числових послідовностей $y_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ дорівнюють нулю.

• Для кожної з цих послідовностей виконується нерівність $|y_n - 0| = \frac{1}{n}$. В усіх випадках нерівність $|y_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ виконується для всіх $n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Отже, за означенням у всіх випадках $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Випишемо значення цих послідовностей

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$$

Перша послідовність набуває значень, більших ніж її границя, яка дорівнює нулю, друга – менших, третя – почергово то більших, то менших. ❍

Ці приклади характеризують різні можливості, які є в означенні границі числової послідовності. Несуттєво, чи значення послідовності є менші, ніж її границя, чи більші. Суттєво лише те, що для будь-якого наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε, починаючи з деякого номера $n_0(\varepsilon)$, значення послідовності за абсолютною величиною менші, ніж це ε.

Зазначимо таке: під час доведення того, що число a є границею числової послідовності $\{y_n\}$, не потрібно шукати найменше значення $n_0(\varepsilon)$, досить лише довести, що нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$ виконується, починаючи з деякого номера $n_0(\varepsilon)$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі числової послідовності. Нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$ можна записати у вигляді $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, або $y_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ є ε-околом точки a. Якщо число a є границею числової послідовності $\{y_n\}$, то для будь-якого ε-околу точки a знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що всі елементи послідовності, які мають номери, більші ніж $n_0(\varepsilon)$, належать цьому ε-околу. За межами ε-околу є скінченна кількість елементів послідовності. Справджується й обернене твердження: якщо від деякого і для всіх наступних номерів елементи послідовності $\{y_n\}$ є в довільному ε-околі точки a, то число a є границею цієї послідовності.

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується не-

рівність $|\alpha_n| < \varepsilon$. Елементи нескінченно малої послідовності, починаючи з деякого номера $n_0(\varepsilon)$, стають за абсолютною величиною меншими, ніж будь-яке як завгодно мале наперед задане додатне число ε. Зазначимо, що елементи нескінченно малої послідовності можуть бути досить великі. Наприклад, послідовність $\left\{\frac{100n}{n^2+1}\right\}$ нескінченно мала, тому що $\left|\frac{100n}{n^2+1}\right| < \frac{100}{n} < \varepsilon$ для всіх $n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{100}{\varepsilon}\right]$, хоча окремі її значення – 50, 40, 30 – не є малі числа.

Приклад 4.2.8. Доведемо, що послідовність $\alpha_n = q^n$, $|q| < 1$ нескінченно мала.

• Для доведення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, розглянемо нерівність $|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon$.

Ця нерівність рівносильна таким нерівностям: $n\lg|q| < \lg\varepsilon$, або $n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$, тому що $\lg|q| < 0$. Отже, для будь-якого $0 < \varepsilon < 1$ існує номер $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$, за якого для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon$, що означає $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. ❍

Теорема 4.2.1. Якщо послідовність $\{y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{y_n - a\}$ нескінченно мала.

⏮ Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то за означенням границі $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$, $\forall\, n > n_0(\varepsilon)$ $|y_n - a| < \varepsilon$, або $|\alpha_n| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, тобто $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність. ⏭

Теорема 4.2.2. Якщо послідовність $\{\alpha_n\} = \{y_n - a\}$ нескінченно мала, то послідовність $\{y_n\}$ збіжна, і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

⏮ Оскільки $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то за означенням границі $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$, $\forall\, n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, або $|y_n - a| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ⏭

З використанням доведених теорем дамо друге означення границі числової послідовності: число a називають границею числової послідовності $\{y_n\}$, якщо послідовність $\{\alpha_n\} = \{y_n - a\}$ нескінченно мала.

Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то

$$y_n = a + \alpha_n, \tag{4.2.9}$$

де $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Наведемо деякі властивості нескінченно малих послідовностей.

Теорема 4.2.3. Алгебрична сума скінченної кількості нескінченно малих послідовностей нескінченно мала.

Теорема 4.2.4. Добуток скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема 4.2.5. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю.

Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо для будь-якого додатного числа A існує такий номер $n_0 = n_0(A)$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| > A$, і записують

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty. \tag{4.2.10}$$

Якщо для всіх $n > n^*$ елементи нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ додатні, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, якщо від'ємні, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Приклад 4.2.9. Доведемо, що послідовність $x_n = q^n$, $q > 1$ нескінченно велика.

• За означенням треба довести, що для будь-якого додатного числа A існує такий номер $n_0 = n_0(A)$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|q^n| > A$. З цієї нерівності отримаємо $n \lg q > \lg A$, звідки $n > \dfrac{\lg A}{\lg q}$. Отже, якщо $n_0 = \left[\dfrac{\lg A}{\lg q}\right]$, то для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|q^n| > A$. ❍

Зазначимо, що числова послідовність

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 2k, \\ n!, & \text{якщо } n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

необмежена, але не є нескінченно великою.

Теорема 4.2.6. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, і всі її елементи відмінні від нуля, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала.

⏮ Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність. Для довільного числа $\varepsilon > 0$ візьмемо $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$. За означенням нескінченно великої послідовності для $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ існує такий номер $n_0 = n_0(A)$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| > A$, тобто $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. З цієї нерівності отримаємо, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, тобто послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала. ⏭

Аналогічно можна довести обернену теорему.

Теорема 4.2.7. Якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, і всі її елементи відмінні від нуля, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ нескінченно велика.

Властивості збіжних послідовностей. Дослідимо властивості збіжних послідовностей.

Теорема 4.2.8. Якщо число a – границя числової послідовності $\{y_n\}$ і $a > b$ $(a < c)$, то, починаючи з деякого номера, всі елементи цієї послідовності будуть більші від b (менші від c).

Теорема 4.2.9. Збіжна послідовність є обмеженою.

Зазначимо, що обернене твердження неправильне, тобто обмежена послідовність може не мати границі.

Теорема 4.2.10. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

⏮ Припустимо, що збіжна послідовність $\{y_n\}$ має дві різні границі a і b, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Доведемо, що $a = b$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то за означенням границі

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_1(\varepsilon),\ \forall\, n > n_1(\varepsilon) \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогічно, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_2(\varepsilon),\ \forall\, n > n_2(\varepsilon) \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Тоді для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконуються нерівності $|y_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ і $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Розглянемо

$$|a - b| = |(y_n - b) + (a - y_n)| \le |y_n - b| + |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $|a - b| < \varepsilon$. Очевидно, що така нерівність виконується для всіх $\varepsilon > 0$ тільки тоді, коли $|a - b| = 0$, тобто коли $a = b$. ⏭

Теорема 4.2.11. Якщо елементи збіжних послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ для всіх $n \in N$ задовольняють нерівність $x_n \ge y_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \ge b$.

Зазначимо таке: якщо для всіх $n \in N$ виконується нерівність $x_n > y_n$, то, як і раніше, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Наприклад, нехай $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n+1}$. Для всіх

$n \in N$ виконується нерівність $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, тобто $x_n > y_n$, але $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

Теорема 4.2.12 (про границю проміжної послідовності). Нехай елементи послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ для всіх $n \in N$ задовольняють нерівність $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тоді послідовність $\{y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Застосування означення для обчислення границі числової послідовності зумовлює у багатьох випадках великі труднощі. Тому на практиці для обчислення границі числових послідовностей часто використовують теореми про арифметичні властивості границі.

Теорема 4.2.13. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то їхня сума (різниця) $\{x_n \pm y_n\}$ теж збіжна, і

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad (4.2.11)$$

тобто границя суми цих послідовностей дорівнює сумі їхніх границь.

⏮ Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності. Розглянемо $x_n \pm y_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n)$. Позначимо $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$, де γ_n – нескінченно мала послідовність, отримаємо, що $x_n \pm y_n = a \pm b + \gamma_n$. Отже, використовуючи друге означення границі, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n. \quad ⏭$$

Теорема 4.2.14. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то їхній добуток $\{x_n y_n\}$ теж збіжний, і

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad (4.2.12)$$

тобто границя добутку цих послідовностей дорівнює добутку їхніх границь.

З наведеної теореми маємо два наслідки.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто

$$\lim_{n\to\infty} (Cy_n) = C \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Наслідок 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = a^k$.

Теорема 4.2.15. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, $y_n \ne 0$, $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \ne 0$, то їхня частка $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ теж збіжна, і

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad (4.2.13)$$

тобто границя частки цих послідовностей дорівнює частці їхніх границь.

Невизначені вирази. Теореми про границю суми, добутку і частки числових послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ доведені в припущенні, що ці послідовності мають скінченні границі. Крім того, в разі доведення теореми про границю частки вважали, що границя знаменника не дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ нескінченно великі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Очевидно, що сума і добуток таких послідовностей є нескінченно великою послідовністю. Про різницю двох таких послідовностей у загальному не можна нічого сказати, не знаючи самих послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Наприклад, якщо $x_n = 3n,\ y_n = n,$ то $x_n - y_n = 2n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n) = \infty;$ якщо $x_n = 3n,\ y_n = 5n,$ то $x_n - y_n = -2n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-2n) = -\infty;$ якщо $x_n = 3n + 5,\ y_n = 3n,$ то $x_n - y_n = 5$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5;$ якщо $x_n = n + (-1)^n,\ y_n = n,$ то $x_n - y_n = (-1)^n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не існує.

Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty,$ то вираз $x_n - y_n$ є *невизначеністю* типу $\infty - \infty$.

Частка двох нескінченно великих послідовностей теж невизначена. Наприклад, якщо $x_n = n^3,\ y_n = n^2,$ то їхня частка $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{n^3}{n^2} = n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty;$ якщо $x_n = n^3,\ y_n = n^4,$ то їхня частка $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0;$ якщо $x_n = 4n^3,\ y_n = n^3,$ то їхня частка $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{4n^3}{n^3} = 4$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4;$ якщо $x_n = \left(5 + (-1)^n\right)\cdot n^2,\ y_n = n^2,$ то їхня частка $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\left(5 + (-1)^n\right)n^2}{n^2} = 5 + (-1)^n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 5 + (-1)^n$ не існує.

Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty,$ то вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ є *невизначеністю* типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty,$ то вираз $x_n y_n$ є невизначеним. Наприклад, якщо $x_n = \dfrac{1}{n^3},\ y_n = n,$ то їхній добуток $x_n y_n = \dfrac{1}{n^3}\cdot n = \dfrac{1}{n^2}$ і

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; якщо $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = n^4$, то їхній добуток $x_n y_n = \frac{1}{n^3} \cdot n^4 = n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; якщо $x_n = \frac{2}{n^3}$, $y_n = n^3$, то їхній добуток $x_n y_n = \frac{2}{n^3} \cdot n^3 = 2$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$; якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, $y_n = n^3$, то їхній добуток $x_n y_n = \frac{(-1)^n}{n^3} \cdot n^3 = (-1)^n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не існує.

Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то вираз $x_n y_n$ є *невизначеністю* типу $0 \cdot \infty$.

Частка двох нескінченно малих послідовностей теж невизначена. Наприклад, якщо $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то їхня частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; якщо $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n^5}$, то їхня частка $\frac{x_n}{y_n} = n^2$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$; якщо $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{5}{n^3}$, то їхня частка $\frac{x_n}{y_n} = 5$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$; якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n^3}$, то їхня частка $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не існує.

Отже, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то вираз $\frac{x_n}{y_n}$ є *невизначеністю* типу $\frac{0}{0}$.

З розглянутих прикладів видно, що не завжди можливо наперед визначити границі послідовностей $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, якщо відомі границі послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Відомі невизначеності типу $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Дослідження таких невизначеностей називають *розкриттям невизначеності.*

Приклад 4.2.10. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 4n^2 - 3n - 1}$.

• У цьому випадку маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тому не можна відразу застосувати теорему про границю частки двох послідовностей. Поділимо чисельник і знаменник дробу на найбільший степінь полінома, який є у знаменнику, тобто на n^3, і після цього застосуємо теореми про границю частки і суми послідовностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-2n+3}{2n^3+4n^2-3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=\frac{5-0+0}{2+0-0-0}=2{,}5. \quad \bigcirc$$

Границі монотонних числових послідовностей. Число e. Розглянуті раніше теореми мали таку структуру: в припущенні, що для одних послідовностей існує границя, доводили існування границі для іншої послідовності, яка пов'язана з попередніми. Розглянемо питання про існування границі послідовності безвідносно до інших послідовностей.

Теорема 4.2.16. Якщо послідовність $\{y_n\}$ монотонно неспадна (незростаюча) і обмежена згори (знизу), то вона збіжна.

Зазначимо, що умова монотонності у формулюванні теореми є обов'язковою. Наприклад, послідовність $\{(-1)^n\}$ обмежена згори і знизу, але немонотонна. Доведено, що така послідовність не має границі.

З використанням теореми 4.2.16 можна довести, що послідовність

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{4.2.14}$$

збіжна і

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{4.2.15}$$

Зазначимо, що

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e, \text{ якщо } \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0. \tag{4.2.16}$$

П р и к л а д 4.2.11. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$.

- Виконаємо перетворення:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5=e^5. \quad \bigcirc$$

Підпослідовності. Нехай $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ – деяка числова послідовність. Розглянемо довільну зростаючу послідовність натуральних чисел $k_1, k_2, k_3, ..., k_n, ...$ Виберемо з послідовності $\{y_n\}$ елементи з номерами $k_1, k_2, k_3, ..., k_n, ...$ і розмістимо їх у тому ж порядку, що й числа k_i, $i \in N$.

Отримаємо послідовність $y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, ..., y_{k_n}, ...$, яку називають *частковою послідовністю*, або *підпослідовністю* послідовності $\{y_n\}$.

Підпослідовність збіжної послідовності має таку властивість: якщо послідовність $\{y_n\}$ збіжна і має границею число a, то і довільна її підпослідовність теж збіжна і має ту ж границю. Якщо ж послідовність $\{y_n\}$ розбіжна, то це не виключає можливості існування границі для деякої підпослідовності. Наприклад, послідовність $y_n = (-1)^n$ не має границі. Якщо $n = 2k$, то отримаємо підпослідовність $1, 1, 1, ...$, границя якої дорівнює 1.

Якщо послідовність $\{y_n\}$ необмежена, то деколи буває неможливо виділити підпослідовність, яка має скінченну границю. Для обмеженої послідовності справджується теорема Больцано–Вейєрштрасса.

Теорема 4.2.17. З довільної обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

4.2.3. Математичні основи фінансового аналізу

У будь-яких фінансових операціях розрахунок сум грошей завжди пов'язують з конкретними моментами часу. Необхідність урахування чинника часу визначена сутністю самого процесу фінансування і кредитування та пов'язана з постулатом нерівноцінності грошей у різні моменти часу. Чинник часу у фінансовій сфері враховують за допомогою відсоткової ставки, яка є відношенням суми відсоткових грошей, виплачених за фіксований відрізок часу, до позики. Інтервал, до якого прив'язана відсоткова ставка, називають періодом нарахування. Суму відсоткових платежів визначають з урахуванням розміру позики, загального її терміну і рівня відсоткової ставки. Відсотки нараховують, здебільшого, дискретно, а в деяких випадках і безперервно.

Моделі розвитку операцій за схемою простих відсотків. У найпростішому випадку кредитор і позичальник домовляються про розмір кредиту, тобто про початкову суму грошей P, розмір річної відсоткової ставки $i\%$, термін кредиту і тривалість періоду нарахування відсотків. Математична модель такої фінансової операції може розвиватися за схемою простих відсотків. За цією схемою відбувається нагромадження загальної суми боргу S унаслідок періодичного, наприклад, щорічного нарахування відсоткових грошей I_p. У цьому випадку на кінець першого року загальна сума буде $S_1 + P + I_p$, на кінець другого – $S_2 = S_1 + I_p = P + 2I_p$, ... на кінець n-го року – $S_n = P + nI_p$. У цьому разі нагромаджена сума грошей є арифметичною прогресією $S_0, S_1, ..., S_n$ з першим елементом S_0 і різницею $d = S_2 - S_1 = I_p$. Отже, математичною моделлю зміни капіталу за схемою простих відсотків є арифметична прогресія. Загальний елемент цієї прогресії $S_n = P + nI_p$.

Відсоткову суму визначимо за формулою

$$I = P \times \frac{i\%}{100\%} = P \times i, \tag{4.2.17}$$

де $i = \frac{i\%}{100\%}$ є відносна величина річної ставки позикового відсотка.

У цьому випадку модель нагромадження капіталу за схемою простих відсотків має такий вигляд:

$$S = P + nPi = P(1 + ni). \tag{4.2.18}$$

Зазначимо, що параметр n може бути як цілим, так і дробовим додатним числом:

$$n = \frac{t}{K}, \tag{4.2.19}$$

де t – тривалість періоду нарахування відсотків, дні; K – кількість днів у році (363, 365, 366).

У цьому разі модель нагромадження капіталу за схемою простих відсотків має такий вигляд:

$$S = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{K}\right). \tag{4.2.20}$$

За допомогою цієї моделі можна визначити різні параметри операції.

1. Розмір початкової суми (математичне дисконтування)

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot i} = \frac{S}{1 + i \cdot \frac{t}{K}}. \tag{4.2.21}$$

2. Відносна величина відсоткової ставки

$$i = \frac{S - P}{P \cdot n} = \left(\frac{S - P}{P}\right) \cdot \frac{K}{t}. \tag{4.2.22}$$

3. Тривалість року

$$K = \frac{i \cdot P \cdot t}{S - P}. \tag{4.2.23}$$

4. Кількість інтервалів нарахування (роки)

$$n = \frac{S - P}{i \cdot P}. \tag{4.2.24}$$

5. Період нарахування відсотків (дні)

$$t = K \cdot \left(\frac{S - P}{P \cdot i}\right). \tag{4.2.25}$$

6. Коефіцієнт нарощування за простою відсотковою ставкою:

$$k_н = \frac{S}{P} = 1 + i \cdot n. \tag{4.2.26}$$

Якщо на послідовних інтервалах нарахування відсотків $n_1, n_2, \ldots n_m$ використовують різні ставки відсотків $i_1, i_2, \ldots i_m$, то сума відсоткових грошей становитиме наприкінці першого інтервалу $I_1 = P \cdot n_1 \cdot i_1$, наприкінці другого –

$I_2 = P \cdot n_2 \cdot i_2$ і так далі, наприкінці m-го інтервалу $I_m = P \cdot n_m \cdot i_m$. За весь термін угоди нарощена сума

$$S = P + I_1 + I_2 + ... + I_m = P + P \cdot n_1 \cdot i_1 + P \cdot n_2 \cdot i_2 + ... + P \cdot n_m \cdot i_m .$$

Отже, нарощена сума

$$S = P \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j \cdot t_j \right) = P k_н , \qquad (4.2.27)$$

коефіцієнт нарощення

$$k_н = 1 + \sum_{j=1}^{m} n_j \cdot t_j . \qquad (4.2.28)$$

Зазначимо, що у цьому випадку відсотки нараховують від розміру початкової суми P.

Моделі розвитку операцій за схемою складних відсотків. У фінансових операціях використовують схему складних відсотків, у випадку, коли нарахований відсоток I додають до початкового капіталу P, і на наступному етапі відсоток нараховують від утвореної суми $P + I$. Такий варіант називають *капіталізацією*, або *реінвестуванням*. У цьому випадку сума нагромадженого капіталу на кінець першого року

$$S_1 = P + P \cdot i_c = P(1 + i_c),$$

де i_c – відносна величина річної ставки складних позикових відсотків. На кінець другого року ця сума $S_2 = S_1 + S_1 \cdot i_c = S_1(1 + i_c) = P(1 + i_c)^2$. Аналогічно, на кінець n-го року

$$S_n = P(1 + i_c)^n = P \cdot k_{нс}, \qquad (4.2.29)$$

де

$$k_{\text{нс}} = (1 + i_c)^n \qquad (4.2.30)$$

– коефіцієнт нарощення.

Отже, нагромадження капіталу за формулою складних відсотків утворює зростаючу числову послідовність $S_0, S_1, S_2, ..., S_n$, яка є геометричною прогресією з першим елементом $S_0 = P$ і знаменником $q = 1 + i_c$. Загальний елемент геометричної прогресії визначають за формулою $S_n = P(1 + i_c)^n$.

Отже, отримано модель нарощення за формулою складних відсотків:

$$S = P(1 + i_c)^n = P(1 + i_c)^{\frac{t}{K}} = P \cdot k_{\text{нс}}, \qquad (4.2.31)$$

де t – термін контракту, дні; $k_{\text{нс}}$ – коефіцієнт нарощення. Звідси знаходимо формули для визначення різних показників фінансової операції.

1. Розмір початкової суми, тобто математичне дисконтування під час нарахування складних відсотків

$$P = \frac{S}{(1 + i_c)^n} = \frac{S}{(1 + i_c)^{\frac{t}{K}}}. \qquad (4.2.32)$$

2. Відносна величина відсоткової ставки

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1, \tag{4.2.33}$$

її використовують для визначення ефективної ставки складних відсотків, що характеризує дохідність фінансової операції.

3. Кількість інтервалів нарахування, роки:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1 + i_c)}. \tag{4.2.34}$$

4. Період нарахування відсотків, дні:

$$t = K \cdot \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1 + i_c)}. \tag{4.2.35}$$

5. Тривалість року, дні:

$$K = \frac{t \cdot \ln(1 + i_c)}{\ln \frac{S}{P}}. \tag{4.2.36}$$

6. Коефіцієнт нарощення

$$k_{\text{нс}} = (1 + i_c)^n = (1 + i_c)^{\frac{t}{K}}. \tag{4.2.37}$$

Якщо протягом терміну контракту відсоткова ставка змінюється, то отримаємо таку математичну модель визначення нарощеної суми:

$$S = P \cdot (1 + i_{c1})^{n_1} (1 + i_{c2})^{n_2} \ldots (1 + i_{cL})^{n_L} = P \cdot \prod_{l=1}^{L} (1 + i_{cl})^{n_l}, \tag{4.2.38}$$

де n_l – l-й інтервал нарахування відсотків, $1, 2, \ldots, L$; L – кількість інтервалів нарахування;

$$k_{\text{нс}} = \prod_{l=1}^{L} (1 + i_{cl})^{n_l} \tag{4.2.39}$$

– коефіцієнт нарощення.

Складні відсотки можна нараховувати декілька разів у рік. У цьому випадку зазначають ставку відсотка на кожному періоді, а нарощену суму визначають за формулою

$$S = P \cdot (1 + i_n)^N, \tag{4.2.40}$$

де N – кількість інтервалів нарахування протягом часу виконання контракту; i_n – відсоткова ставка на період нарахування.

У випадку, коли складні відсотки нараховують через однакові проміжки часу n, зазначають номінальну річну відсоткову ставку j і використовують формулу

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}, \qquad (4.2.41)$$

де m – кількість інтервалів нарахування у році; n – термін контракту, роки. У цьому випадку $N = m \cdot n$ відповідає кількості інтервалів нарахування за весь термін контракту.

Деколи на практиці використовують неперервне нарахування відсотків за номінальної річної відсоткової ставки j. У цьому разі нарахування нарощеної суми визначають за формулою

$$S = P \cdot \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e,$ то отримують

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = \lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}} \right)^{n \cdot j} = e^{n \cdot j}.$$

Отже, у випадку нарахування неперервних відсотків, нарощену суму визначають за формулою

$$S = Pe^{n \cdot j} = P \cdot k_{\text{неп}}, \qquad (4.2.42)$$

де $k_{\text{неп}} = e^{n \cdot j}$ – коефіцієнт нарахування під час неперервного нарахування відсотків за номінальною річною ставкою j.

Наведені моделі дають змогу обчислювати різні показники фінансових операцій.

Приклад 4.2.12. Комерційні банки A та B нараховують дохід два рази у рік, причому банк A – за простою відсотковою ставкою, а банк B – за складною. Через рік у цих банках гроші інвесторів збільшуються на 60%. У який банк вигідніше вкласти гроші на півроку, а у який – на півтора?

• За умовою задачі коефіцієнти нарощення банків A і B однакові, тому $k_{\text{н}} = k_{\text{нс}} = 1{,}6$. Для банку A ставку простих відсотків визначають зі співвідношення $k_{\text{н}} = 1 + n \cdot i = 1 + 2i = 1{,}6$. Звідси $i = \frac{1{,}6 - 1}{2} = 0{,}3 = 30\%$. Для банку B ставка складних відсотків $k_{\text{нс}} = (1 + n \cdot i)^2 = 1{,}6$. Звідси $i_c = \sqrt{1{,}6} - 1 = 0{,}265 = 26{,}5\%$. Отже, вигідніше на півроку вкласти гроші у банк A.

Для порівняння результатів фінансових операцій з банками A та B маємо таку таблицю:

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{\text{н}}$	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4
$k_{\text{нс}}$	1,265	1,6	2,02	2,56	3,24	4,1	5,18	6,56

З таблиці видно, що на термін більше року вигідніше вкласти гроші у банк B.

4.3. Границя функції. Неперервність

4.3.1. Границя функції неперервного аргументу

Раніше розглянуто поняття границі числової послідовності, тобто границю функції натурального аргументу. Розглянемо тепер поняття границі функції неперервного аргументу. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій множині дійсних чисел X. Точку a називають *точкою згущення* множини X, якщо в будь-якому околі $(a-\delta; a+\delta)$ цієї точки є значення $x \in X$, відмінні від a. У цьому разі сама точка згущення a може належати множині X, а може й не належати. Наприклад, якщо $X = [a;b]$ або $X = (a;b]$, то в обох випадках точка a є точкою згущення для X, але в першому випадку вона належить множині X, а в другому – ні.

Є два означення границі функції $y = f(x)$ у деякій точці a.

Означення границі функції за Гейне. Нехай точка a є точкою згущення множини X. У цьому випадку з множини X можна багатьма способами вибрати послідовність $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень x, відмінних від a, збіжну до a. Справді, задавши послідовність додатних чисел δ_n, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, у кожному околі $(a-\delta_n; a+\delta_n)$ точки a при $n = 1, 2, 3, ...$ виберемо по одній точці $x = x_n \in X$, яка відмінна від a. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, і $|x_n - a| < \delta_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Значення функції $y = f(x)$ в точках

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \tag{4.3.1}$$

утворюють числову послідовність

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ... \tag{4.3.2}$$

Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці a, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, $n \in N$, яка збігається до числа a, послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A, і записують

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \tag{4.3.3}$$

або

$$f(x) \to A \text{ якщо } x \to a. \tag{4.3.4}$$

Це означення називають ще означенням границі функції в точці мовою послідовностей. Зазначимо, що число A може бути скінченним або ні.

Припустимо, що множина X містить як завгодно великі значення x. У цьому випадку точка $+\infty$ є точкою згущення цієї множини. Околом точки $+\infty$

будемо називати проміжок $(\Delta, +\infty)$. Отже, в кожному околі точки $+\infty$ повинні бути точки з множини X. У цьому випадку з множини X можна виділити послідовність $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, яка має границею $+\infty$. Справді, взявши послідовність додатних значень $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n, ...$, яка прямує до $+\infty$, для кожного Δ_n, $n = 1, 2, 3, ...$, виберемо в X значення $x_n > \Delta_n$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Нехай $+\infty$ є точкою згущення множини X – області визначення функції $y = f(x)$. Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A, і записують

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \tag{4.3.5}$$

або

$$f(x) \to A \text{ якщо } x \to +\infty. \tag{4.3.6}$$

Аналогічно можна дати означення границі функції при $x \to -\infty$.

Наведене означення границі функції грунтується на раніше вивченому понятті границі числової послідовності. Такий підхід дає змогу ефективно використовувати доведені теореми для числових послідовностей з метою дослідження властивостей функцій неперервного аргументу.

Дамо інше означення границі функції, не використовуючи границі послідовності.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій множині X, і a – точка згущення цієї множини. Будемо вважати, що числа a і A скінченні.

Число A є границею функції $y = f(x)$ в точці a, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, і записують $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, або $f(x) \to A$, якщо $x \to a$.

Отже, число A є границею функції $y = f(x)$ в точці a, тоді і тільки тоді, коли всі відповідні значення функції $y = f(x)$ потрапляють в ε-окіл точки A, як тільки значення аргументу потрапляють в δ-окіл точки a.

Зазначимо, що сформульоване означення називають означенням границі функції в точці мовою "ε-δ".

Теорема 4.3.1. Означення границі функції за Гейне і Коші еквівалентні.

Дамо означення границі функції у випадку, коли $x \to +\infty$.

Число A називають границею функції $y = f(x)$ $x \in X$, коли $x \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що з нерівності $x > \Delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Нехай A є нескінченність. У цьому випадку число A називають границею функції $y = f(x),\ x \in X,$ коли $x \to +\infty,$ якщо для будь-якого $\mathrm{E} > 0,$ існує таке число $\Delta > 0,$ що з нерівності $x > \Delta$ випливає нерівність $f(x) > \mathrm{E}.$

Можна довести, що ці означення за Коші еквівалентні відповідним означенням за Гейне.

Отже, для такого важливого в математичному аналізі поняття, як границя функції, маємо два рівносильні означення. Залежно від потреби будемо користуватися будь-яким з них.

Приклад 4.3.1. Користуючись означенням границі функції, доведемо, що $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1.$

• Доведемо твердження, використовуючи означення границі функції за Гейне. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\},$ таку що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1.$ Тоді, використовуючи теорему про границю добутку збіжних послідовностей, отримаємо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1.$ ❍

Приклад 4.3.2. Доведемо, що функція $y = \sin x$ не має границі, коли $x \to \infty.$

• Такі задачі ліпше розв'язувати, використовуючи означення границі функції за Гейне. Візьмемо дві послідовності $\{x_n'\} = \left\{\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right\}$ і $\{x_n''\} = \left\{\dfrac{(2n+1)\pi}{2}\right\},\ n \in N$ значень $x,$ які мають границю $+\infty.$ Отримаємо дві послідовності значень функції: $\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = -1$ і $\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1.$ Ці послідовності значень функції прямують до різних границь, тому функція $y = \sin x$ не має границі, коли $x \to \infty.$ ❍

Односторонні границі. У попередньому випадку під час уведення означення границі функції в точці a змінна x могла наближатися до a довільним способом. Уведемо означення границі функції в точці a у випадку, коли x прямує до $a,$ залишаючись меншим від a (лівостороння границя, або границя ліворуч), і коли x прямує до $a,$ залишаючись більшим від a (правостороння границя, або границя праворуч). Такі границі функції в точці називають *односторонніми границями.*

Дамо означення односторонніх границь мовою послідовностей, тобто за Гейне.

Число A називають *правосторонньою* (*лівосторонньою*) *границею* функції $y = f(x)\ \ x \in X$ в точці $a,$ якщо для довільної збіжної до a послідовності $\{x_n\}\ \ n \in N$ такої, що $x_n > a\ (x_n < a),$ відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до $A.$

Для односторонніх границь використовують такі позначення: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ – для лівосторонньої і $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$ – для правосторонньої.

Дамо означення односторонніх границь "мовою ε-δ", тобто за Коші.

Число A називають правосторонньою (лівосторонньою) границею функції $y=f(x)$ $x\in X$ в точці a, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що з нерівності $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Приклад 4.3.3. Доведемо, що функція $y=\operatorname{sgn} x$ має односторонні границі в точці $x=0$.

• Нагадаємо, що функція $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{якщо } x>0,\\ -1, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

Для будь-якої збіжної до нуля послідовності $\{x_n\}$ такої, що $x_n<0$, $n\in N$, відповідна послідовність значень функції $-1,-1,-1,...,-1,...$ прямує до числа -1. Отже, $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{sgn} x=-1$. Аналогічно, для будь-якої збіжної до нуля послідовності $\{x_n\}$ такої, що $x_n>0$, $n\in N$, відповідна послідовність значень функції $1,1,1,...,1,...$ прямує до числа 1. Отже, $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{sgn} x=1$. ❍

Теорема 4.3.2. Функція $y=f(x)$ має границю в точці a тоді і тільки тоді, коли в цій точці вона має односторонні границі, і ці границі дорівнюють одна одній.

Теореми про границю функції. Виведемо деякі властивості функцій, що мають границю. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині X з точкою згущення a.

Теорема 4.3.3 (про єдність границі функції в точці). Якщо в точці a функція $y=f(x)$ має границю, то ця границя єдина.

Теорема 4.3.4. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, A – скінченне і $A>p$ $(A<q)$, то для достатньо близьких до a значень x, $x\neq a$, функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x)>p$ $(f(x)<q)$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, A – скінченне і $A>0$ $(A<0)$, то для достатньо близьких до a значень x, $x\neq a$, функція $f(x)$ додатна (від'ємна).

Теорема 4.3.5. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, A – скінченне, то для достатньо близьких до a значень x, $x\neq a$, функція $f(x)$ обмежена.

Теорема 4.3.6. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ і $h(x)$ визначені на множині X з точкою згущення a, і для всіх $x\in X$ виконується нерівність $f(x)\le h(x)\le g(x)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$.

Теорема 4.3.7. Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$), і

$$1)\ \lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$$

$$2)\ \lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$

$$3)\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \left(\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right).$$

Зазначимо, що, як і у випадку границі числової послідовності, для функцій неперервного аргументу можливі невизначеності $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Приклад 4.3.4. Обчислимо границю $\lim\limits_{x \to 81} \frac{3 - \sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt{x}}$.

• У цьому випадку маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Нехай $y = \sqrt[4]{x}$. Тоді

$$\lim_{x \to 81} \frac{3 - \sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt{x}} = \lim_{y \to 3} \frac{3 - y}{9 - y^2} = \lim_{y \to 3} \frac{1}{y + 3} = \frac{1}{6}. \quad ❍$$

Деякі важливі границі. Під час обчислення границь часто доводиться використовувати дві важливі границі.

Твердження 4.3.1. Доведено, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.3.7}$$

Можна довести, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \tag{4.3.8}$$

Приклад 4.3.5. Обчислимо границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 5x}$.

• Уведемо заміну $y = 5x$, $x = \frac{y}{5}$. Очевидно, якщо $x \to 0$, то $y \to 0$. Отримаємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 5x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{5 \sin y} = \frac{1}{5} \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = \frac{1}{5}.$$

Задачу можна розв'язати іншим способом. Помножимо чисельник і знаменник дробу на 5. Тоді $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{5 \sin 5x} = 5 \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 5$, оскільки якщо $x \to 0$, то $5x \to 0$. ❍

Твердження 4.3.2. Доведено, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \tag{4.3.9}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.3.10}$$

З формул (4.3.9), (4.3.10) отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.3.11}$$

Замінимо в (4.3.11) $\alpha = \frac{1}{x}$, $\alpha \to 0$, й отримаємо

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{4.3.12}$$

П р и к л а д 4.3.6. Обчислимо границю $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+3)-\ln x\big)$.

- За властивостями логарифма

$$\lim_{x\to\infty} x\big(\ln(x+3)-\ln x\big) = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+3}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x.$$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$. Замінимо $\frac{3}{x} = \text{б}$, $x = \frac{3}{\text{б}}$, $\text{б}\to 0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{3}{\alpha}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^3 = \left(\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^3 = e^3$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+3)-\ln x\big) = \ln e^3 = 3$. ❍

Границя монотонної функції. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякій множині X. Нагадаємо, що функція $f(x)$ зростає (спадає) на цій множині, якщо для всіх $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$. Якщо з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ $\big(f(x_1) \ge f(x_2)\big)$, то функцію $f(x)$ називають незростаючою (неспадною). Деколи такі функції називають зростаючими (спадними) в широкому сенсі. Розглянуті функції називають монотонними.

Теорема 4.3.8. Нехай функція $f(x)$ монотонно зростає, хоча б у широкому сенсі, у множині X з точкою згущення a, яка є скінченною, або дорівнює $+\infty$, причому $x < a$, $\forall x \in X$. Якщо в цьому разі функція $f(x)$ обмежена згори, тобто $f(x) \le M$, $\forall x \in X$, то при $x \to a$ функція має скінченну границю, якщо ж функція необмежена згори, то вона прямує до $+\infty$.

Нескінченно великі і нескінченно малі функції. Нехай функція $y=\alpha(x)$ визначена на множині X, і точка a є точкою згущення цієї множини. Зазначимо, що a може бути $\infty, +\infty$ або $-\infty$.

Функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою в точці a, якщо її границя в цій точці дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0. \qquad (4.3.13)$$

Зазначимо, що функція $y=\alpha(x)$ може бути нескінченно малою в заданій точці і не бути нескінченно малою в іншій точці. Функція може бути нескінченно малою в декількох точках. Наприклад, функція $y=x(x+2)$ є нескінченно малою в точках $x=0$ і $x=-2$, але не є нескінченно малою в точці $x=1$, тому що $\lim\limits_{x\to 0}x(x+2)=0,\ \lim\limits_{x\to -2}x(x+2)=0,$ але $\lim\limits_{x\to 1}x(x+2)=2.$

Функція $y=\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$, тому що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Теорема 4.3.9. Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Теорема 4.3.10. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно мала функція.

Теорема 4.3.11. Добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Теорема 4.3.12. Для того, щоб функція $y=f(x)$ в точці a мала границею число A, необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(x)=f(x)-A$ була нескінченно малою в цій точці.

Нехай функція $y=\alpha(x)$ визначена на множині X, і точка a є точкою згущення цієї множини. Зазначимо, що a може бути $\infty, +\infty$ або $-\infty$.

Функцію $f(x)$, визначену на множині X, називають нескінченно великою на цій множині, якщо

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty. \qquad (4.3.14)$$

Нескінченно малі і нескінченно великі функції пов'язані між собою.

Теорема 4.3.13. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці a і в деякому околі цієї точки $\alpha(x)$ не дорівнює нулю, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно велика в точці a. Якщо $f(x)$ нескінченно велика в точці a, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Деколи доводиться порівнювати дві або більше нескінченно малих або нескінченно великих функцій.

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці a.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,$ то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного і того ж порядку* і записують $\alpha(x)=O\big(\beta(x)\big)$ або $\beta(x)=O\big(\alpha(x)\big)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними нескінченно малими* і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,$ то $\alpha(x)\sim A\beta(x)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C,\quad C\neq 0,$ то функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою порядку k відносно нескінченно малої* $\beta(x)$ і записують $\alpha(x)=O\big(\beta^k(x)\big)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$ то функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку малості, ніж* $\beta(x),$ і записують $\alpha(x)=o(\beta(x)).$

4. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівняти.

Теорема 4.3.14. Для того, щоб нескінченно малі в точці a функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їхня різниця була нескінченно малою функцією вищого порядку малості, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції в точці a такі, що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,$ тобто $\alpha(x)\sim A\beta(x)$ і $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-A=\gamma(x)$ – нескінченно мала функція в точці a. У цьому випадку $\alpha(x)=A\beta(x)+\beta(x)\cdot\gamma(x)$, або

$$\alpha(x)=A\beta(x)+o\big(\beta(x)\big). \tag{4.3.15}$$

Формулу (4.3.15) називають *асимптотичною*.

Теорема 4.3.15. Якщо в точці a виконуються рівності $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ і $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то виконується рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \tag{4.3.16}$$

Приклад 4.3.7. Порівняємо нескінченно малі в точці $x=3$ функції $\alpha(x)=x^2-3x,\ \beta(x)=x-3.$

- Обчислимо

$$\lim_{x\to 3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}x=3.$$

Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції одного порядку. ❍

Доведено, що в точці $x=0$

1) $\sin x \sim x, \quad \sin mx \sim mx;$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, \ \operatorname{tg} mx \sim mx;$

3) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$ (4.3.17)

4) $\ln(1+x) \sim x;$

5) $a^x - 1 \sim x \ln a;$

6) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$

7) $\arcsin x \sim x;$

8) $\operatorname{arctg} x \sim x.$

З використанням рівностей (4.3.17) можна записати такі асимптотичні формули:

1) $\sin x = x + o(x), \quad \sin mx = mx + o(x);$

2) $\operatorname{tg} x = x + o(x), \ \operatorname{tg} mx = mx + o(x);$

3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$

4) $\ln(1+x) = x + o(x);$ (4.3.18)

5) $a^x = 1 + x \ln a + o(x);$

6) $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x).$

7) $\arcsin x = x + o(x);$

8) $\operatorname{arctg} x = x + o(x).$

Асимптотичні формули можна застосовувати для обчислення границь.

Приклад 4.3.8. Обчислимо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{7x}}{\sin 3x}$.

• З використанням асимптотичних формул отримаємо

$$e^{5x} = 1 + 5x + o(x); \quad e^{7x} = 1 + 7x + o(x); \ \sin 3x = 3x + o(x).$$

Тоді

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{7x}}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 5x + o(x) - 1 - 7x - o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x + o(x)}{3x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 + \dfrac{o(x)}{x}}{3 + \dfrac{o(x)}{x}} = -\frac{2}{3}. \quad \bigcirc$$

Нескінченно великі функції можна порівнювати між собою так, як і нескінченно малі функції, лише замість терміна порядок малості використовують термін *порядок зростання*.

Приклад 4.3.9. Доведемо, що функції $f(x)=\dfrac{3+x+x^2}{x^2}$ і $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$ є еквівалентними нескінченно великими.

• Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+x+x^2}{x^2}:\dfrac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3+x+x^2\right)\cdot x^2}{3x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+x+x^2}{3}=1.$ ❍

4.3.2. Неперервність функції в точці

Означення неперервності функції в точці. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині X, і точка a є точкою згущення множини X. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною* в точці a, якщо існує границя функції в цій точці, і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \qquad (4.3.19)$$

На підставі означення границі функції в точці отримаємо означення неперервності функції в точці за Коші. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* a, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх $x\in X$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

На підставі означення границі функції в точці запишемо означення неперервності функції в точці за Гейне. Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* a, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ з X, яка збігається до a, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ збігається до $f(a)$.

На практиці під час дослідження функції на неперервність часто користуються означенням неперервності функції, яке ґрунтується на понятті приросту функції в точці.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в усіх точках множини X. Візьмемо дві довільні точки x_0 і $x=x_0+\Delta x$ з цієї множини. Число $\Delta x=x-x_0$ називають *приростом аргументу*, а число $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – *приростом функції* $f(x)$ в точці x_0.

Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (4.3.20)$$

П р и к л а д 4.3.10. Доведемо, що функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці числової осі.

• Нехай $a \in R$. За означенням функція $y = \sin x$ буде неперервною в точці a, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in R$, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Доведемо, що таке δ існує. Для цього запишемо

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.$$

Оскільки значення x є близькими до a, то $\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le \frac{|x-a|}{2}$, і виконується співвідношення $|\sin x - \sin a| \le |x - a|$.

Отже, з останнього співвідношення отримаємо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \varepsilon$ таке, що для всіх $x \in R$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$, а це доводить неперервність функції $y = \sin x$. ❍

Наведені три означення неперервності функції в точці еквівалентні між собою, тобто якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 неперервна за одним означенням, то вона неперервна в цій точці і за іншими.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 за означенням Коші. Позначивши $x = x_0 + \Delta x$, отримаємо, що з нерівності $\Delta x < \delta$ випливає нерівність $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$, або $\Delta y < \varepsilon$, що означає $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Надалі будемо вивчати функції, визначені на деякому проміжку X. Усі його точки є точками згущення. Функцію називають неперервною на проміжку X, якщо вона неперервна в кожній його точці.

Арифметичні операції над неперервними функціями. Доведемо теорему, яка виражає неперервність функцій, отриманих у результаті арифметичних дій над неперервними функціями.

Теорема 4.3.16. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку X та неперервні в деякій точці $x_0 \in X$, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ g(x_0) \ne 0.$$

Неперервність складеної функції. Нехай маємо складену функцію $y = f(u),\ u \in U,\ u = g(x),\ x \in X$.

Теорема 4.3.17. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці $x_0 \in X$, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = g(x_0)$, то функція $y = f\big(g(x)\big)$ неперервна в точці x_0.

Неперервність деяких елементарних функцій. *Ціла і дробова раціональні функції.* Стала функція $f(x) = C$ неперервна в кожній точці числової пря-

мої, тому що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C=f(x_0)$. Функція $f(x)=x$ неперервна в кожній точці числової прямої, тому що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0=f(x_0)$.

З теореми 4.3.16 отримаємо, що в будь-якій точці числової прямої функції $f(x)=x^2=x\cdot x,\ f(x)=x^3=x\cdot x\cdot x,...,\ f(x)=x^n=x\cdot x...\cdot x,\quad n\in N$ неперервні.

Алгебричний поліном $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ як сума неперервних функцій за теоремою 4.3.16 є неперервною функцією.

Дробова раціональна функція $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – алгебричні поліноми, за теоремою 4.3.16 є неперервною функцією в усіх точках числової прямої, крім точок, де $Q(x)=0$.

Тригонометричні функції. В прикладі 4.3.10 доведено, що функція $f(x)=\sin x$ неперервна в кожній точці числової прямої. Аналогічно можна довести неперервність функції $f(x)=\cos x$. За теоремою 4.3.16 отримаємо, що в своїх областях визначення неперервними є функції $f(x)=\operatorname{tg}x$ і $f(x)=\operatorname{ctg}x$.

Одностороння неперервність. Класифікація точок розриву.

З означення маємо, що функція $y=f(x)$ буде неперервною в точці a тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ визначена не лише в околі точки a, а й у самій цій точці, тобто існує $f(a)$;

2) існують скінченні односторонні границі функції в точці a, тобто існує $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ і $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$;

3) лівостороння і правостороння границі в точці a дорівнюють одна одній, тобто $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

4) односторонні границі в точці a дорівнюють між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то в точці a функцію називають *розривною*.

Функцію $y=f(x)$ називають *неперервною в точці a ліворуч*, якщо

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a),$$

і *неперервною в точці праворуч*, якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a).$$

Якщо ж хоча б одне зі співвідношень не справджується, то функція $y=f(x)$ в точці a має розрив, відповідно, ліворуч чи праворуч.

Теорема 4.3.18. Для того, щоб функція $y=f(x)$ була неперервною в точці a, необхідно і достатньо, щоб у цій точці вона була неперервною ліворуч і праворуч.

Приклад 4.3.11. Доведемо, що функція $f(x)=|x|$ неперервна у кожній точці числової прямої.

• Якщо $x>0$, то $f(x)=x$ є неперервною. Аналогічно, якщо $x<0$, то $f(x)=-x$ теж неперервна. Отже, функція $f(x)=|x|$ неперервна для всіх $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Доведемо, що вона неперервна в точці $x=0$. Обчислимо

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}|x|=\lim_{x\to 0-0}(-x)=-\lim_{x\to 0-0}x=0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}|x|=\lim_{x\to 0-0}(x)=\lim_{x\to 0-0}x=0.$$

Отже, в точці $x=0$ існують границі ліворуч і праворуч, які дорівнюють значенню функції в цій точці. Це означає, що в точці $x=0$ функція $f(x)=|x|$ неперервна. ❍

Дамо класифікацію точок розриву функції. Точку a називають *точкою усувного розриву* функції $f(x)$, якщо в цій точці існує скінченна границя функції, але в точці a функція або не визначена, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$. Наприклад, відомо що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не визначена в точці $x=0$, не існує $f(0)$, тому точка $x=0$ є точкою розриву цієї функції. Цей розрив можна усунути, якщо довизначити функцію в точці $x=0$ значенням її границі в цій точці, тобто ввести нову функцію

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Функція $f_1(x)$ неперервна на всій числовій прямій.

Точку a називають *точкою розриву типу стрибка* функції $f(x)$, якщо в цій точці існують односторонні скінченні границі, які не дорівнюють між собою, тобто $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Точки усувного розриву і точки розриву типу стрибка називають *точками розриву першого типу.*

Точку a називають точкою розриву другого типу функції $f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б однієї односторонньої границі, або хоча б одна з односторонніх границь є нескінченною.

Приклад 4.3.12. Дослідимо неперервність функції

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0;\\ 2-x, & x\geq 0.\end{cases}$$

• Якщо $x<0$, то $f(x)=x^2+2$. Ця функція є елементарна, тому вона неперервна. Якщо $x>0$, то $f(x)=2-x$ теж елементарна, а отже, неперервна. Отже, функція

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0;\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$$

неперервна для $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, тому вона може мати розрив у точці $x=0$. Обчислимо $f(0)=2$ і односторонні границі цієї функції в точці $x=0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(x^2+2\right)=2,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(2-x)=2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)=2$, тобто в точці $x=0$ функція неперервна. ❍

Функцію $y=f(x)$ називають *кусково-неперервною* на проміжку X, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього проміжку, за винятком, можливо, скінченної кількості точок, у яких вона має розриви першого типу. Наприклад, функція $y=E(x)$ – ціла частина числа x є кусково-неперервною.

Неперервність і розриви монотонної функції. Розглянемо функцію $f(x)$, яка монотонно зростає (спадає) в проміжку X.

Теорема 4.3.19. Монотонно зростаюча (спадна) функція $f(x)$ може мати в X лише розриви першого типу, тобто стрибки.

Теорема 4.3.20. Якщо значення монотонно зростаючої (спадної) в проміжку X функції $y=f(x)$ є в проміжку Y і повністю його заповнюють так, що кожне значення $y\in Y$ функція набуває хоча б один раз, то ця функція неперервна в X.

4.3.3. Головні властивості неперервних функцій

Теорема 4.3.21 (про збереження знака неперервної функції). Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці a, причому $f(a)\neq 0$. Тоді існує такий окіл точки a, що для всіх x з цього околу функція $f(x)$ має той же знак, що й $f(a)$.

Проходження неперервної функції через будь-які проміжні значення.

Теорема 4.3.22 (перша теорема Больцано–Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набуває значення різних знаків. Тоді всередині $[a;b]$ існує точка c, в якій функція обертається в нуль, тобто $f(c)=0$.

Сформульована теорема має простий геометричний зміст: неперервна крива під час переходу з нижньої координатної півплощини в верхню обов'язково перетинає вісь абсцис (рис. 4.3.1).

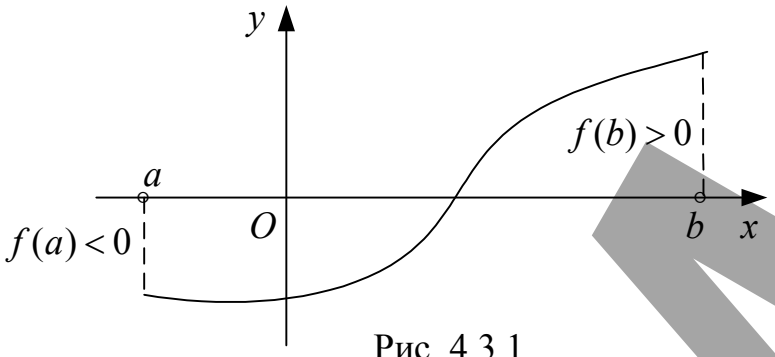


Рис. 4.3.1.

Зазначимо, що вимога неперервності функції в замкнутому проміжку є суттєвою, тому що функція, яка має розрив хоча б в одній точці, може перейти від від'ємного значення до додатного, не обертаючись у нуль. Наприклад, функція $f(x) = E(x) - 0{,}5$ ніде не набуває значення 0, хоча $f(0) = -0{,}5$, а $f(1) = 0{,}5$.

Теорема 4.3.23 (друга теорема Больцано–Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набуває різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тоді для будь-якого C, що є між числами A і B, знайдеться точка $c \in (a;b)$ така, що $f(c) = C$.

⏮ Нехай, для визначеності, $A < C < B$. Розглянемо допоміжну функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ як різниця двох неперервних функцій і на його кінцях набуває значень різних знаків:

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0,\ g(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

За першою теоремою Больцано–Коші існує така точка $c \in (a;b)$, що $g(c) = 0$, тобто $f(c) - C = 0$ або $f(c) = C$. ⏭

З другої теореми Больцано–Коші отримаємо, що значення, яких набуває неперервна на деякому проміжку X функція $f(x)$, повністю заповнюють деякий проміжок Y.

Обмеженість неперервної функції на відрізку. Нагадаємо, що функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

Теорема 4.3.24. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці c, то вона обмежена в деякому її околі.

Теорема 4.3.25 (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на ньому.

Зазначимо, що обидві умови у формулюванні теореми є суттєвими. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, задана на інтервалі $(0;1)$, є неперервною на ньому, але необмеженою, тому що $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$. Функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & \text{якщо } x\in(0;1];\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

задана на відрізку $[0;1]$, необмежена на цьому відрізку, тому що в точці $x=0$ вона розривна. Існують функції, задані на інтервалі, розривні на ньому, але обмежені на цьому інтервалі. Наприклад, функція

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in(0;2];\\ 0, & \text{якщо } x\in(2;3]\end{cases}$$

задана на інтервалі $(0;3]$, розривна в точці $x=2$, але вона обмежена для всіх $x\in(0;3]$, тому що $|f(x)|\le 1$ для цих значень x.

Досягнення функцією своїх точних граней. Якщо точні грані функції є її значеннями, то кажуть, що функція досягає своїх точних граней.

Теорема 4.3.26 (друга теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому своїх точних граней, тобто знайдуться такі точки $x_1, x_2\in[a;b]$, що

$$f(x_1)=M=\sup_{[a;b]} f(x),\ f(x_2)=m=\inf_{[a;b]} f(x).$$

Зазначимо, що вимога неперервності функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є суттєвою. Наприклад, для розривної функції $f(x)=x-E(x)=\{x\}$ – дробова частина числа x під час зміни x у будь-якому проміжку $[0;b]$, $b\ge 1$, точною гранню значень функції є число 1, якого вона не досягає. Тому ця функція не має найбільшого значення.

Для неперервної на відрізку функції її точну верхню грань називають *найбільшим значенням функції*, а точну нижню грань – *найменшим значенням функції* на цьому відрізку.

Обернена функція та її неперервність. Застосуємо вивчені властивості неперервної функції для доведення, за певних умов, існування оберненої функції.

Теорема 4.3.27. Нехай функція $y=f(x)$ визначена, монотонно зростає (спадає) і неперервна на деякому проміжку X. Тоді у відповідному проміжку Y значень цієї функції існує однозначна обернена функція $x=g(y)$, яка монотонно зростає (спадає) на проміжку X.

Деякі обернені функції та їхні властивості. *Функція, обернена до степеневої функції.* Розглянемо степеневу функцію з натуральним показником $y=x^n$. Раніше доведено, що ця функція неперервна для $x\in(-\infty;+\infty)$. Якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то функція $y=x^{2k-1}$ неперервна і зростає в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тому за теоремою 4.3.27 існує обернена функція $x=\sqrt[2k-1]{y}$, $k\ge 2$, або, у звичному записі, $y=\sqrt[2k-1]{x}$, $k\ge 2$, яка неперервна і зростає в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Наприклад, функцією, оберненою до $y=x^3$, є функція $y=\sqrt[3]{x}$. Як-

що $n=2k,\ \ k\in N,$ то функція $y=x^{2k}$ неперервна і зростає в півінтервалі $[0;+\infty),$ тому за теоремою 4.3.27 існує обернена функція $x=\sqrt[2k]{y},$ або, у звичному записі, $y=\sqrt[2k]{x},$ яка неперервна і зростає в півінтервалі $[0;+\infty).$ Наприклад, функцією, оберненою до $y=x^4,$ є функція $y=\sqrt[4]{x}$.

Логарифмічна функція. Відомо, що показникова функція $y=a^x,$ визначена для $x\in(-\infty;+\infty),$ набуває значення з інтервалу $(0;+\infty),$ зростає для $a>1$ і спадає для $0<a<1.$ Доведено, що показникова функція $y=a^x$ неперервна для $x\in(-\infty;+\infty),$ тому за теоремою 4.3.27 в інтервалі $(0;+\infty)$ існує неперервна обернена функція $y=\log_a x,$ яка зростає для $a>1$ і спадає для $0<a<1.$

Обернені тригонометричні функції. Розглянемо функцію $y=\sin x,$ визначену і неперервну для $x\in(-\infty;+\infty),$ але не монотонну в цьому інтервалі. Проте на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ функція $y=\sin x$ монотонно зростає, і її значення заповнюють відрізок $[-1;1].$ За теоремою 4.3.27, на відрізку $[-1;1]$ для функції $y=\sin x$ існує обернена функція $y=\arcsin x,$ яка є неперервною і монотонно зростаючою на цьому відрізку.

Розглянемо функцію $y=\cos x,$ визначену і неперервну для $x\in(-\infty;+\infty),$ але не монотонну в цьому інтервалі. Проте на відрізку $[0,\pi]$ функція $y=\cos x$ монотонно спадає, і її значення заповнюють відрізок $[-1;1].$ За теоремою 4.3.27, на відрізку $[-1;1]$ для функції $y=\cos x$ існує обернена функція $y=\arccos x,$ яка є неперервною і монотонно спадною на цьому відрізку.

Розглянемо функцію $y=\operatorname{tg} x,$ визначену, монотонно зростаючу, неперервну для $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$ яка набуває значень з проміжку $(-\infty;+\infty).$ За теоремою 4.3.27, в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ для функції $y=\operatorname{tg} x$ існує обернена функція $y=\operatorname{arctg} x,$ яка є неперервною і монотонно зростаючою на цьому інтервалі.

Розглянемо функцію $y=\operatorname{ctg} x,$ визначену, монотонно спадну, неперервну для $x\in(0;\pi),$ яка набуває значень з проміжку $(-\infty;+\infty).$ За теоремою 4.3.27, в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ для функції $y=\operatorname{ctg} x$ існує обернена функція $y=\operatorname{arcctg} x,$ яка є неперервною і монотонно спадною на цьому інтервалі.

Розділ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. Похідні і диференціали першого порядку

5.1.1. Означення похідної

Розглянемо деякі задачі, які приводять до поняття похідної.

Задача про дотичну до кривої. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$ і неперервна в точці $x_0 \in (a;b)$. Надамо значенню аргументу x_0 деякого приросту Δx такого, що $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Точки $M_0(x_0; f(x_0))$ і $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ належать графіку функції $y = f(x)$ (рис. 5.1.1).

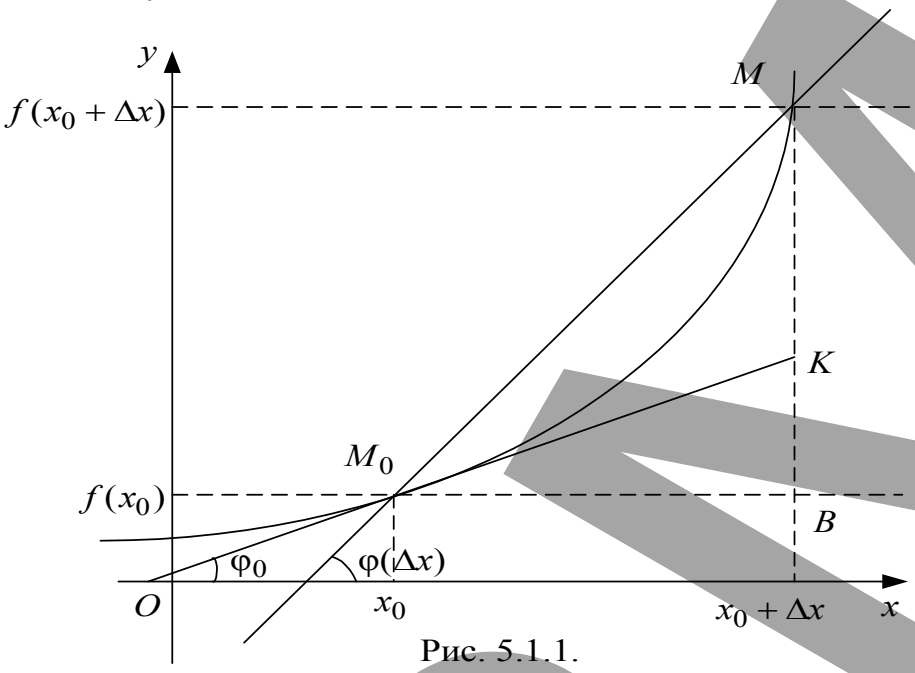


Рис. 5.1.1.

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 називають граничне положення січної M_0M, коли точка M уздовж кривої $f(x)$ прямує до точки M_0. З означення дотичної випливає, що вона існує тоді, коли існує кутовий коефіцієнт дотичної $k = \operatorname{tg}\varphi_0$, який є граничним значенням кутового коефіцієнта січної $k(\Delta x) = \operatorname{tg}\text{ц}(\Delta x)$, тобто $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\text{ц}(\Delta x)$. З трикутника M_0BM випливає, що

$$k(\Delta x) = \operatorname{tg}\text{ц}(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ до графіка функції $y = f(x)$ можна провести дотичну, то її кутовий коефіцієнт

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\text{ц}(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1.1)$$

Задача про миттєву швидкість. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, і закон руху описує функція $s = f(t)$. Визначимо миттєву швидкість руху в момент часу t_0. Надамо t_0 деякого приросту Δt. У цьому випадку приріст шляху $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня швидкість руху за час Δt

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

а миттєва –

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \qquad (5.1.2)$$

Задача про продуктивність праці. Нехай функція $u = f(t)$ виражає кількість виробленої продукції за час t. Визначимо продуктивність праці в момент часу t_0. За проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції буде $\Delta u = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня продуктивність за час Δt

$$z_c = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

а миттєва –

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \qquad (5.1.3)$$

Унаслідок розв'язування різних задач отримали, що потрібно знайти границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля. Розв'яжемо таку задачу в загальному вигляді.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому проміжку X. Надамо значенню аргументу в точці $x_0 \in X$ довільного приросту Δx так, щоб точка $(x_0 + \Delta x) \in X$. Відповідний приріст функції $y = f(x)$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю, якщо вона існує, відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$. Для позначення похідної функції в точці x_0 використовують символи $f'(x_0),\ y'(x_0)$.

Отже,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5.1.4)$$

Якщо для деякого $x_0 \in X$ існують границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty, \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \qquad (5.1.5)$$

то кажуть що в точці x_0 існує нескінченна похідна.

Надалі, якщо не сказано інакше, під висловлюванням "функція має похідну" будемо розуміти, що функція має скінченну похідну.

Односторонні похідні. Якщо існує скінченна або нескінченна границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0, (\ \Delta x \to 0,\ \ \Delta x < 0\ )$, то її називають *правосторонньою* (*лівосторонньою*) *похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'_+(x_0)$ $(f'_-(x_0))$.

Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

Правосторонню і лівосторонню похідні називають *односторонніми похідними.*

З використанням властивостей границі отримаємо, що функція $y = f(x)$, визначена в деякому околі точки x_0, має похідну $f'(x_0)$ тоді і тільки тоді, коли існують $f'_+(x_0)$ та $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. У цьому випадку

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0). \tag{5.1.6}$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці проміжку X, причому під похідною на кінцях проміжку розуміють односторонню похідну, то її похідна $f'(x)$ є функцією, визначеною на множині X.

Механічний та геометричний зміст похідної. З використанням задачі про визначення миттєвої швидкості отримаємо, що границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо вона існує, тобто похідну $f'(x_0)$ можна назвати швидкістю зміни функції $y = f(x)$ в точці x_0. З задачі про проведення дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 отримаємо, що похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної в точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто $k = f'(x_0)$. З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння пучка прямих, які проходять через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Якщо $k = f'(x_0)$, то отримаємо рівняння дотичної

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5.1.7}$$

Напишемо рівняння дотичної у випадку $f'(x_0) = \infty$. У цьому разі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$. Рівняння січної має вигляд $y = k(\Delta x)(x - x_0) + f(x_0)$. Запишемо його у вигляді $\dfrac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \dfrac{f(x_0)}{k(\Delta x)}$ і перейдемо в обох частинах цієї рівності до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y}{k(\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} (x - x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)}{k(\Delta x)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, то отримаємо, що в цьому випадку рівняння дотичної має вигляд

$$x = x_0. \tag{5.1.8}$$

Якщо в точці x_0 існує нескінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то $f'(x_0) = +\infty$, або $f'(x_0) = -\infty$. У цьому випадку графік функції $y = f(x)$ в околі точки x_0 має вигляд, схематично зображений на рис. 5.1.2, 5.1.3.

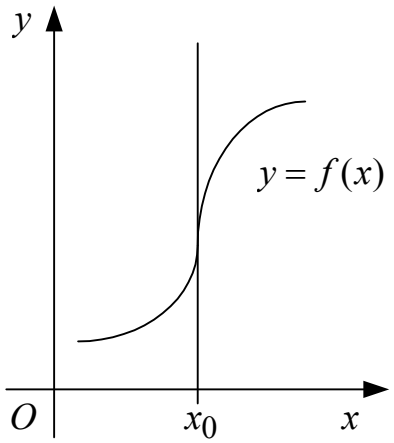


Рис. 5.1.2.

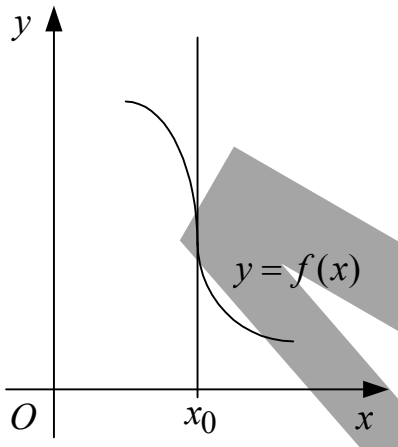


Рис. 5.1.3.

Якщо в точці x_0 існують односторонні похідні різного знака, то у цьому випадку графік функції $y = f(x)$ в околі точки x_0 має вигляд, схематично зображений на рис. 5.1.4 і 5.1.5.

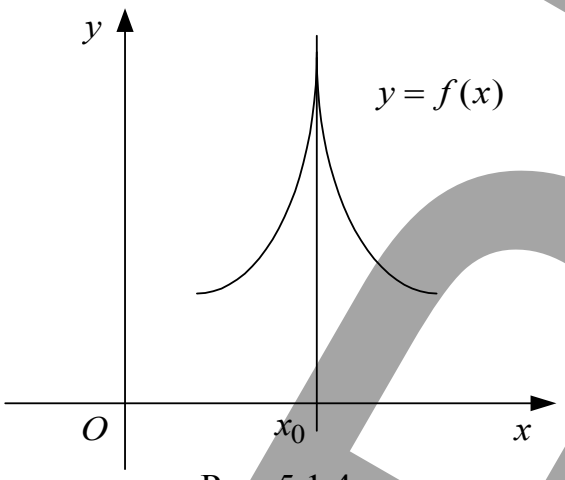


Рис. 5.1.4.

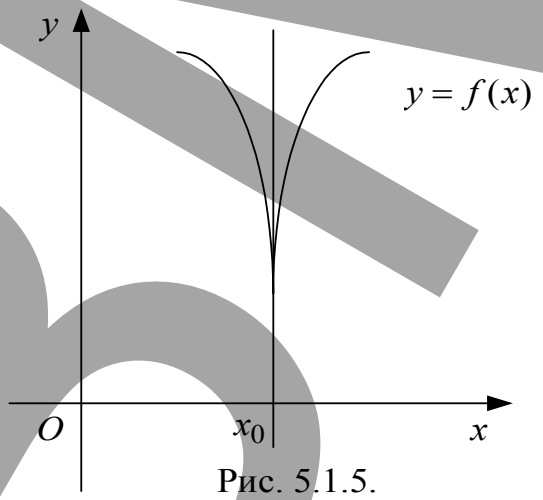


Рис. 5.1.5.

Середні, сумарні і маргінальні величини в економіці. В економіці *сумарна величина* $f(x)$ – це будь-яка функція змінної x. Розглядають *сумарний дохід* $R(Q)$ або *сумарні витрати* $C(Q)$ як функції обсягу випуску Q, обсяг випуску як функцію змінного ресурсу, наприклад капіталу $Q(K)$ або праці $Q(L)$.

Середню величину $Af(x)$ визначають як відношення сумарної величини $f(x)$ до незалежної змінної:

$$Af(x) = \frac{f(x)}{x}. \qquad (5.1.9)$$

Буква A – скорочення англійського слова Average (середнє).

В економіці використовують *середній дохід* $AR = \frac{R(Q)}{Q}$, *середні витрати* $AC = \frac{C(Q)}{Q}$, *середній продукт капіталу* $AQ_K = \frac{Q(K)}{K}$ і *праці* $AQ_L = \frac{Q(L)}{K}$.

Маргінальна, або *гранична*, *величина* $Mf(x)$ дорівнює похідній сумарної величини, тобто

$$Mf(x) = f'(x). \qquad (5.1.10)$$

В економіці застосовують *граничний дохід MR*, *граничні витрати MC* та інші граничні величини. Зазначимо що сумарні і середні величини характеризують стан економічного об'єкта, а граничні величини – процес зміни цього об'єкта. Наприклад, граничні витрати виробництва *MC* наближено характеризують додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції. Застосування диференціального числення до дослідження економічного об'єкта з використанням граничних величин називають *граничним аналізом*.

Якщо задана середня величина $Af(x)$, то можна визначити сумарну величину $f(x) = xAf(x)$, і маргінальну – $Mf(x) = \left(xAf(x)\right)' = Af(x) + x\left(Af(x)\right)'$.

Правило знаходження похідної. З означення похідної випливає правило її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$, треба:

1) значенню аргументу x_0 надати довільного приросту Δx;
2) у точці x_0 знайти приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
3) знайти відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

4) знайти границю цього відношення (якщо вона існує) при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона і є похідною $f'(x_0)$.

Приклад 5.1.1. Знайдемо похідну функції $y = x^3$ в точці x_0.

• Надамо x_0 деякого приросту Δx і визначимо

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 =$$
$$= 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Обчислимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0} x_0^2 + 3x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 3x_0^2. \qquad \text{❍}$$

Приклад 5.1.2. Доведемо, що функція $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$ не має похідної.

• Приріст функції $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює $\Delta y = |\Delta x|$.

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Обчислимо

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\qquad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

Отже, правостороння і лівостороння похідні в точці $x_0=0$ не дорівнюють одна одній, тобто в цій точці функція не має похідної. ❍

5.1.2. Похідні деяких елементарних функцій

За допомогою означення похідної виведемо формули для обчислення похідних деяких елементарних функцій.

Похідна показникової функції $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1.$

- Надамо x деякого приросту Δx і обчислимо приріст функції

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right).$$

Обчислимо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Доведемо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\ln a.$ Нехай $a^{\Delta x}-1=z,\ \Delta x=\log_a(1+z).$ Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\log_a(1+z)}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}}=$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Отже,

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

Звідси отримаємо

$$(e^x)'=e^x.$$

Похідна функції $y=\sin x.$

Надамо x деякого приросту Δx і обчислимо приріст функції

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Обчислимо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\cos x.$$

Отже,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Теорема 5.1.1. Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна та неперервна в деякому околі точки x_0 і має в цій точці похідну $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $x = g(y)$ в точці $y_0 = f(x_0)$ має похідну, причому

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.1.11}$$

Наведена формула має просте геометричне трактування. Відомо, що $f'(x_0) = \operatorname{tg} ц_0$ (див. рис. 5.1.1). Обернена функція $x = g(y)$ має той же графік, що і функція $y = f(x)$, причому незалежна змінна для неї є на осі Oy. Тому $g'(y_0) = \operatorname{tg} б$ (див. рис. 5.1.1). Оскільки $б + ц_0 = \frac{p}{2}$, то виведену формулу можна звести до відомого співвідношення $\operatorname{tg} б = \frac{1}{\operatorname{tg} ц_0}$.

Зазначимо таке: якщо строго монотонна функція $y = f(x)$, $x \in X$ має похідну в кожній точці проміжку X, і $f'(x) \neq 0$, то

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{5.1.12}$$

де $x = g(y)$ – обернена функція.

Формулу (5.1.12) запишемо у вигляді

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \tag{5.1.13}$$

де нижній індекс означає, за якою змінною обчислюємо похідну.

Похідні функції $y = \arcsin x,\ -1 < x < 1,\ -\frac{p}{2} < y < \frac{p}{2}$.

Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції $x = \sin y$, яка має похідну $x'_y = \cos y$. Оскільки $-\frac{p}{2} < y < \frac{p}{2}$, то $\cos y > 0$. За формулою (5.1.13) отримаємо

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Зазначимо, що точки $x=-1$ і $x=1$ ми не розглядаємо, тому що для відповідних значень $y=-\frac{\pi}{2}$ і $y=\frac{\pi}{2}$ похідна $x'_y=\cos y$ дорівнює нулю.

Аналогічно можна довести, що

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким же способом можна вивести формули для обчислення похідних інших функцій.

Випишемо таблицю похідних:

1. $y=C$ $\quad y'=0;$
2. $y=x^{\alpha}$ $\quad y'=\alpha x^{\alpha-1};$
3. $y=a^x$ $\quad y'=a^x\cdot\ln a;$
4. $y=e^x$ $\quad y'=e^x;$
5. $y=\log_a x$ $\quad y'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$
6. $y=\ln x$ $\quad y'=\frac{1}{x};$
7. $y=\sin x$ $\quad y'=\cos x;$
8. $y=\cos x$ $\quad y'=-\sin x;$
9. $y=\operatorname{tg} x$ $\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x};$
10. $y=\operatorname{ctg} x$ $\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 x};$
11. $y=\arcsin x$ $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
12. $y=\arccos x$ $\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13. $y=\operatorname{arctg} x$ $\quad y'=\frac{1}{1+x^2};$

КОПІЯ

14. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2};$

15. $y = \operatorname{sh} x$ $\quad y' = \operatorname{ch} x;$

16. $y = \operatorname{ch} x$ $\quad y' = \operatorname{sh} x;$

17. $y = \operatorname{th} x$ $\quad y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

18. $y = \operatorname{cth} x$ $\quad y' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

5.1.3. Правила обчислення похідних

Теорема 5.1.2. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ в точці x мають похідну, то їхня сума (різниця), добуток і частка за умови $v'(x) \neq 0$ мають у цій точці похідні, причому справджуються такі формули:

$$1)\ \big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$2)\ \big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x); \qquad (5.1.14)$$

$$3)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{\big(v(x)\big)^2}.$$

⏮ Надамо x деякого приросту Δx. За означенням похідної отримаємо

$$1)\ \big(u(x) \pm v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\big) - \big(u(x) \pm v(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

Для виведення решти формул використаємо очевидну рівність

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x);$$

$$2)\ \big(u(x) \cdot v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + \Delta u(x)v(x) + u(x)\Delta v(x) + \Delta u(x)\Delta v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + 0u'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

$$3)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x)+\Delta u(x)\big)\cdot v(x) - \big(v(x)+\Delta v(x)\big)\cdot u(x)}{\Delta x\cdot v(x)\cdot\big(v(x)+\Delta v(x)\big)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)v(x)+\Delta u(x)v(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)}{\Delta x\cdot v(x)\cdot\big(v(x)+\Delta v(x)\big)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\Delta u(x)} = \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v^2(x)+v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u(x)} =$$

$$= \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)\cdot u(x)}{\big(v(x)\big)^2}. \qquad \blacktriangleright\!\blacktriangleright\!|$$

Логарифмічна похідна. Логарифмічною похідною додатної функції $y = f(x)$ називають похідну від її логарифма, тобто

$$\big(\ln y\big)' = \frac{y'}{y}.$$

Логарифмічну похідну називають *відносною швидкістю функції* $y = f(x)$, або *темпом зростання*.

Визначення ставки банківського відсотка. Нехай $K = K(t)$ – наближений розмір вкладу в момент часу t. Визначимо приблизно ставку банківського відсотка.

- Якщо відсотки нараховують один раз за період часу Δt, то за цей період отримаємо приріст вкладу $\Delta K = Kr\Delta t$, де r – номінальна ставка відсотків за рік. Звідси

$$r = \frac{\Delta K}{K\cdot\Delta t}.$$

Перейдемо до границі при $\Delta t\to 0$:

$$r = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta K}{K\cdot\Delta t} = \frac{K'}{K} = \big(\ln K\big)'.$$

Приклад 5.1.3. Нехай $K(t) = K_0(t+1)^{1,5}$, де t – кількість років від моменту відкриття вкладу; K_0 – розмір вкладу в початковий момент часу $t = 0$. Визначимо, як змінюється ставка банківського відсотка.

- Ставку банківського відсотка обчислимо за формулою

$$r = \big(\ln K\big)' = \Big(\ln K_0(t+1)^{1,5}\Big)' = \big(\ln K_0 + 1{,}5\ln(t+1)\big)' = \frac{1{,}5}{t+1},$$

або у відсотках

$$r = \frac{150\%}{t+1}.$$

Отже, через два роки після відкриття вкладу ставка $r \approx 50\%$ річних, через п'ять років ставка зменшилась до 25% річних. Зазначимо, що абсолютна швидкість вкладу зростала, тому що $K'(t) = 1{,}5K_0\sqrt{t+1} > 0.$ ❍

5.1.4. Диференційованість функції. Диференціал

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційованою* в точці $x_0 \in X$, якщо її приріст Δy у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \text{б}(\Delta x)\Delta x, \qquad (5.1.15)$$

де A не залежить від Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{б}(\Delta x) = 0.$

Оскільки добутком двох нескінченно малих функцій $\text{б}(\Delta x)$ і Δx є нескінченно мала функція вищого порядку, то формулу (5.1.15) можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \qquad (5.1.16)$$

Теорема 5.1.3. Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційованою в точці $x_0 \in X$, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну.

⏮ *Необхідність.* Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x_0 \in X$. Потрібно довести, що вона має похідну в цій точці. Якщо функція диференційована в точці x_0, то її приріст у цій точці можна записати у вигляді (5.1.15). Поділимо цю рівність на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A + \text{б}(\Delta x)\big) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \text{б}(\Delta x) = A.$$

Отже, в точці $x_0 \in X$ існує похідна, і $f'(x_0) = A.$

Достатність. Нехай функція $y = f(x)$ має похідну в точці $x_0 \in X$. Потрібно довести, що її приріст у цій точці можна записати у вигляді (5.1.15). Нехай $f'(x_0) = A.$ З означення похідної функції в точці отримаємо, що функція $\text{б}(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A$ є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Помножимо обидві частини цієї рівності на Δx і отримаємо рівність (5.1.15). ⏭

З доведеної теореми випливає, що можна ототожнювати поняття диференційованість та існування похідної для функції однієї змінної. Операцію знаходження похідної функції називають *диференціюванням* функції.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці проміжку X, то вона *диференційована на цьому проміжку*.

Зв'язок між поняттями диференційованості і неперервності функції описує така теорема.

Теорема 5.1.4. Якщо функція диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

⏮ Оскільки функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \text{б}(\Delta x)\Delta x.$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A\Delta x + \text{б}(\Delta x)\Delta x\right) = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \text{б}(\Delta x)\Delta x = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0. ⏭

Зазначимо, що обернене твердження неправильне, тобто функція $y = f(x)$, неперервна в точці x_0, може не мати похідної в цій точці. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, але не має похідної в цій точці.

Приріст диференційованої в точці x_0 функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. У цьому виразі доданок $A\Delta x$ є нескінченно малою функцією одного порядку з Δx, а доданок $o(\Delta x)$ – нескінченно малою функцією вищого порядку, тобто $A\Delta x$ – головна частина приросту функції Δy, який відповідає приросту аргументу Δx.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають головну, лінійну щодо Δx частину приросту функції в цій точці:

$$\mathrm{d}y = A\Delta x. \qquad (5.1.17)$$

Оскільки з теореми 5.1.3 маємо, що $A = f'(x_0)$, то диференціал функції можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x. \qquad (5.1.18)$$

Диференціалом $\mathrm{d}x$ незалежної змінної x називають її приріст Δx. Тоді

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.1.19)$$

З рівності (5.1.19) отримаємо, що похідну $f'(x)$ в будь-якій точці x можна обчислити як відношення диференціала функції $\mathrm{d}y$ до диференціала незалежної змінної $\mathrm{d}x$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \qquad (5.1.20)$$

З використанням останньої формули рівність (5.1.16) можна записати у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}\,y + o(\Delta x). \qquad (5.1.21)$$

З'ясуємо геометричний зміст диференціала функції $y = f(x)$ в точці x_0. З трикутника KBM_0 (рис. 5.1.1) отримаємо $KB = M_0B \cdot \mathrm{tg}\,\text{ц} = f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y$.
Отже, диференціал функції $\mathrm{d}y$ дорівнює довжині відрізка KB.

Оскільки $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, то диференціал функції можна застосовувати до наближених обчислень:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (5.1.22)$$

Приклад 5.1.4. Обчислимо наближено $\sqrt[4]{18}$.

• Для розв'язування задачі використаємо формулу (5.1.22). У нашому випадку $f(x)=\sqrt[4]{x},\ f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}},\ \sqrt[4]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x_0}+\dfrac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x_0^3}}$.

Підставимо в останню формулу $x_0=16,\ \Delta x=2$.

Отже, $\sqrt[4]{18}\approx\sqrt[4]{16}+\dfrac{2}{4\sqrt[4]{16^3}}=2+\dfrac{2}{32}=2{,}0625$. ❍

Теорема 5.1.5. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовані функції, то диференціали їхніх суми, добутку і частки можна обчислити за такими формулами:

1) $\mathrm{d}(cu(x))=c\cdot\mathrm{d}u$,

2) $\mathrm{d}\big(u(x)\pm v(x)\big)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$,

3) $\mathrm{d}\big(u(x)\cdot v(x)\big)=v\cdot\mathrm{d}u+u\cdot\mathrm{d}v$,

4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{v\cdot\mathrm{d}u-u\cdot\mathrm{d}v}{v^2}$.

Теорема 5.1.6. Нехай функція $u=g(x)$ має в деякій точці $x_0\in X$ похідну $u'_x=g'(x_0)$, а функція $y=f(u)$ має у відповідній точці $u_0=g(x_0)$ похідну $y'_u=f'(u_0)$. Тоді складена функція $y=f(g(x))$ в точці $x_0\in X$ має похідну

$$y'=f'_u(g(x_0))\cdot g'(x_0), \tag{5.1.23}$$

або

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{5.1.24}$$

Приклад 5.1.5. Обчислимо похідну функції $y=\sin^4 x$.

• Для обчислення похідної складеної функції використаємо формулу (5.1.24). У нашому випадку $u=g(x)=\sin x,\ y=f(u)=u^4$.

Отже, $y'=\left(\sin^4 x\right)'=4\sin^3 x\cdot\cos x$. ❍

Приклад 5.1.6. Обчислимо похідну функції $y=(\ln x)^{\sin x}$.

• Прологарифмуємо обидві частини рівності:

$$\ln y=\ln\left((\ln x)^{\sin x}\right)=\sin x\cdot\ln(\ln x).$$

Обчислимо похідну обох частин останньої рівності:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\big(\sin x\cdot\ln(\ln x)\big)'=(\sin x)'\cdot\ln(\ln x)+\sin x\cdot\big(\ln(\ln x)\big)'=$$

$$=\cos x\cdot\ln(\ln x)+\sin x\cdot\frac{1}{x\ln x}.$$

Отже, $y'=\left((\ln x)^{\sin x}\right)'=(\ln x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\ln x)+\sin x\cdot\dfrac{1}{x\ln x}\right)$. ❍

Інваріантність форми першого диференціала. Виведемо формулу для диференціала складеної функції $y=f(u),\ u=g(x)$, де функції $f(u)$ і $g(x)$ диференційовані, відповідно, в точках u та x. Тоді за теоремою 5.1.6 складена

функція $y = f(g(x))$ в точці x має похідну $y' = f'_x(g(x))$, а отже, вона має диференціал

$$\mathrm{d}\, y = f'_x(g(x))\,\mathrm{d}\, x.$$

Оскільки

$$f'_x(g(x)) = f'_u(u)\cdot u'_x,$$

то

$$\mathrm{d}\, y = f'_u(u)\cdot u'_x\,\mathrm{d}\, x = f'_u(u)\,\mathrm{d}\, u,$$

або

$$\mathrm{d}\, y = f'(u)\,\mathrm{d}\, u.$$

Отже, навіть у випадках, коли функція складена, зовнішній вигляд диференціала не змінюється. Цю властивість диференціала називають властивістю *інваріантності*, тобто незмінності форми першого диференціала.

Похідна функції, заданої параметрично. Нехай функції $x = \varphi(t)$, $y = \text{ш}(t)$ диференційовані для кожного $t \in (\text{б};\text{в})$ і $\varphi'(t) \neq 0$. Тоді для цих функцій існують диференціали $\mathrm{d}\, x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}\, t$, $\mathrm{d}\, y = \psi'(t)\,\mathrm{d}\, t$, і похідна функції

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\psi'(t)\,\mathrm{d}\, t}{\varphi'(t)\,\mathrm{d}\, t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5.1.25}$$

Це і є формула для похідної функції, заданої параметрично. Формулу (5.1.25) можна записати у вигляді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.1.26}$$

Приклад 5.1.7. Обчислимо похідну функції, заданої параметрично $y = t^3 \sin t,\ x = e^{2t}$.

• Обчислимо похідні $y'_t = 3t^2 \sin t + t^3 \cos t,\ x'_t = 2e^{2t}$. За формулою (5.1.26) отримаємо шукану похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 \sin t + t^3 \cos t}{2e^{2t}}. \quad \bigcirc$$

5.2. Похідні і диференціали вищих порядків

5.2.1. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в проміжку X, і в деякій точці x_0 цього проміжку існує скінченна похідна $f'(x)$. Якщо функція $f'(x)$ диференційована в точці x_0, то її похідну називають *похідною другого порядку*, або *другою похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0, і позначають $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}\, x^2}$, $f''(x_0)$, $y''(x_0)$.

Якщо похідна другого порядку функції $y = f(x)$ існує в кожній точці проміжку X, то її позначають $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$, $f''(x)$, $y''(x)$.

Отже, похідна другого порядку функції $y = f(x)$ є похідною, якщо вона існує, від похідної першого порядку. Похідну від похідної другого порядку, якщо вона існує, називають *похідною третього порядку*, або *третьою похідною*, і позначають $\dfrac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3}$, $f'''(x)$, $y'''(x)$. Маючи похідну третього порядку, можна обчислити похідну четвертого, п'ятого і вищих порядків. Нехай у кожній точці проміжку X існує похідна $(n-1)$-го порядку $y^{(n-1)}(x)$. Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають одним із символів $\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$, $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}(x)$.

Отже,

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'. \tag{5.2.1}$$

Загальні формули для похідних вищих порядків деяких функцій. З означення похідної n-го порядку функції $y = f(x)$ випливає, що для її обчислення потрібно мати похідні до $(n-1)$-го порядку. Виведемо формули, за якими можна відразу обчислити похідні n-го порядку деяких функцій:

1) $y = x^{\text{б}}$, $x > 0$, $\text{б} \in R$. Обчислимо похідні $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$, ... Звідси, використовуючи метод математичної індукції, можна вивести, що

$$y^{(n)}(x) = \left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}. \tag{5.2.2}$$

Якщо в формулі (5.2.2) взяти $\alpha = -1$, то отримаємо

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \tag{5.2.3}$$

Якщо $\alpha = m, m \in N$, то $\left(x^m\right)^{(m)} = m!$, і $\left(x^m\right)^{(n)} = 0$ для $n > m$;

2) $y = \ln x$. Обчислимо $y' = \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$. Використаємо формулу (5.2.3), і отримаємо

$$y^{(n)}(x) = (y')^{(n-1)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}; \tag{5.2.4}$$

3) $y = a^x$. Обчислимо $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2$, ... Отже,

$$y^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n. \tag{5.2.5}$$

Якщо $y = e^x$, то

$$y^{(n)}(x) = e^x; \tag{5.2.6}$$

4) $y = \sin x$. Обчислимо $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$, $y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. Отже,

$$y^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \tag{5.2.7}$$

5) $y = \cos x$. Аналогічно до попереднього випадку отримаємо

$$y^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{5.2.8}$$

Правила обчислення похідних вищих порядків. Формула Лейбніца. З використанням означення похідної n-го порядку і правила диференціювання суми можна довести, що

$$(cu(x))^{(n)} = c(u(x))^{(n)}; \tag{5.2.9}$$

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = (u(x))^{(n)} \pm (v(x))^{(n)}. \tag{5.2.10}$$

Виведемо формулу для обчислення похідної n-го порядку добутку двох функцій $y = u(x) \cdot v(x)$. Обчислимо

$$y' = u'v + uv',\ y'' = u''v + 2u'v' + v'',\ y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Зазначимо, що праві частини цих виразів аналогічні до розкладів бінома Ньютона $u + v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, лише показники степенів замінені на похідні відповідного порядку, а функції $u(x)$ і $v(x)$ є похідними нульового порядку, тобто $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$. Методом математичної індукції можна довести, що

$$y^{(n)} = (u(x) \cdot v(x))^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$$

$$+ C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}. \tag{5.2.11}$$

Приклад 5.2.1. Обчислимо похідну п'ятого порядку функції $y = e^{2x}\sin x$.

• Нехай $u(x) = e^{2x}$, $v(x) = \sin x$. За формулами (5.2.6), (5.2.7) отримаємо $u^{(n)} = e^{2x} \cdot 2^n$, $v^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Підставимо ці вирази в (5.2.11) за $n = 5$:

$$y^{(5)} = e^{2x}(32\sin x + 16 \cdot 5\cos x - 8 \cdot 10\sin x - 4 \cdot 10\cos x + 2 \cdot 5\sin x + \cos x) =$$

$$e^{2x}(41\cos x - 38\sin x). \quad ❍$$

5.2.2. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в проміжку X і в кожній точці цього проміжку має похідні до n-го порядку включно. Тоді для такої функції в кожній точці проміжку X існує диференціал $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, який будемо називати *диференціалом першого порядку*, або *першим диференціалом* функції $f(x)$. Диференціал першого порядку є функцією від x. Тому функція $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \mathrm{const}$, є диференційованою в проміжку X, і вона має диференціал. Цей диференціал називають *диференціалом другого порядку*, або *другим диференціалом функції* $y = f(x)$, і позначають $\mathrm{d}^2 y$.

Отже, за означенням

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Підставимо в цю рівність $\mathrm{d}y$. З урахуванням $\mathrm{d}x = \mathrm{const}$, отримаємо

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}\big(f'(x)\,\mathrm{d}x\big) = \big(f'(x)\,\mathrm{d}x\big)'\,\mathrm{d}x = f''(x)(\mathrm{d}x)^2 = f''(x)\,\mathrm{d}x^2. \qquad (5.2.12)$$

За означенням, *диференціалом третього порядку*, або *третім диференціалом функції* $y = f(x)$, називають перший диференціал від диференціала другого порядку.

Отже,

$$\mathrm{d}^3 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 y) = \mathrm{d}\big(f''(x)\,\mathrm{d}x^2\big) = f'''(x)\,\mathrm{d}x^3. \qquad (5.2.13)$$

Аналогічно введемо поняття диференціала n-го порядку. Якщо функція $y = f(x)$ має диференціал $(n-1)$-го порядку, то *диференціалом n-го порядку* цієї функції називають диференціал першого порядку від диференціала $(n-1)$-го порядку і позначають $\mathrm{d}^n y$.

Отже, за означенням

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y).$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n. \qquad (5.2.14)$$

З використанням (5.2.14) можна отримати формулу Лейбніца для обчислення диференціала n-го порядку добутку двох функцій:

$$\mathrm{d}^n (u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\mathrm{d}^{n-k} u \cdot \mathrm{d}^k v, \ (\mathrm{d}^0 u = u, \mathrm{d}^0 v = v). \qquad (5.2.15)$$

Приклад 5.2.2. Обчислимо $\mathrm{d}^{10} y$, якщо $y = x\sin x$, x – незалежна змінна.

• Нехай $u = \sin x$, $v = x$. За формулою (5.2.15)

$$\mathrm{d}^{10} y = \mathrm{d}^{10}(x\sin x) = C_{10}^0\,\mathrm{d}^{10}(\sin x)x + C_{10}^1\,\mathrm{d}^9(\sin x)\mathrm{d}x.$$

За формулами (5.2.14). (5.2.7) отримаємо

$$\mathrm{d}^{10}(\sin x) = (\sin x)^{(10)}\,\mathrm{d}x^{10} = \sin\left(x + \frac{10\pi}{2}\right)\mathrm{d}x^{10} = \sin(x + 5\pi)\,\mathrm{d}x^{10} = -\sin(x)\,\mathrm{d}x^{10},$$

$$\mathrm{d}^9(\sin x) = (\sin x)^{(9)}\,\mathrm{d}x^9 = \sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right)\mathrm{d}x^9 = \cos(x)\,\mathrm{d}x^9.$$

Отже,

$$\mathrm{d}^{10}y = \mathrm{d}^{10}(x\sin x) = -x\sin x\cdot \mathrm{d}x^{10} + 10\cos x\cdot \mathrm{d}x^{10} = \left(-x\sin x\cdot +10\cos x\right)\cdot \mathrm{d}x^{10}.\ \text{❍}$$

Якщо x – незалежна змінна, то з формул (5.2.12)–(5.2.14) отримаємо

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\ \ y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}, ..., y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}. \qquad (5.2.17)$$

Похідні вищих порядків функції, яка задана параметрично. Якщо функція $y(x)$ задана параметрично, то похідну першого порядку можна обчислити за формулою (5.1.26). З використанням (5.2.17) виведемо формули для похідних вищих порядків функції заданої параметрично. Якщо функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають похідні другого порядку для кожного $t \in (\text{б};\text{в})$, то

$$y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Отже,

$$y''_{x^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}. \qquad (5.2.18)$$

Аналогічно можна обчислити похідні вищих порядків для функції, заданої параметрично.

Приклад 5.2.3. Нехай $x = e^{-t},\ y = t^3$. Обчислимо y''_{x^2}.

• За формулами (5.1.26), (5.2.18) маємо

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{-e^{-t}} = -3t^2 e^t;$$

$$y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-3t^2 e^t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-3t^2 e^t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{-6te^t - 3t^2 e^t}{-e^{-t}} =$$

$$= 3(t^2 + 2t)e^{2t}. \qquad \text{❍}$$

5.3. Головні теореми диференціального числення

5.3.1. Теореми про середнє значення

У курсі математичного аналізу важливе місце посідають теореми про середнє значення, до яких належать теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші. В усіх цих теоремах ідеться про те, що коли функція та її похідна першого порядку задовольняють певні умови, то всередині проміжку X існує точка, в якій функція має певні властивості. Тому ці теореми називають теоремами про середнє значення.

Теорема 5.3.1 (Ферма). Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому інтервалі (a, b) й у внутрішній точці x_0 цього інтервалу набуває найбільшого

(найменшого) значення. Якщо в цій точці існує скінченна похідна, то $f'(x_0)=0$.

⏮ Нехай для визначеності функція $y=f(x)$ набуває в точці x_0 найбільшого значення. У цьому випадку для всіх $x\in(a,b)$ виконується нерівність $f(x)\le f(x_0)$. Виберемо Δx таке, щоб $x=x_0+\Delta x\in(a,b)$. Тоді приріст функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$. Якщо $x>x_0$, тобто $\Delta x>0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ і

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+(x_0)\le 0. \qquad (5.3.1)$$

Якщо $x<x_0$, тобто $\Delta x<0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, і

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_-(x_0)\ge 0. \qquad (5.3.2)$$

За умовою теореми в точці x_0 існує похідна, тому

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0). \qquad (5.3.3)$$

З формул (5.3.1) і (5.3.2) випливає, що рівність (5.3.3) можлива лише тоді, коли $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$. Отже, $f'(x_0)=0$. ⏭

Теорема Ферма має таке геометричне трактування: якщо в точці x_0 диференційована функція $y=f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення, то в точці $M_0(x_0,f(x_0))$ дотична до графіка цієї функції паралельна до осі Ox (рис. 5.3.1).

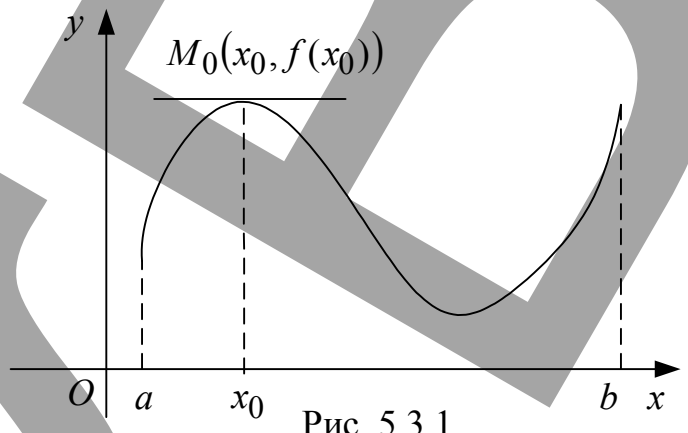


Рис. 5.3.1.

Зазначимо, що теорема неправильна, якщо функцію розглядати на відрізку $[a,b]$. У цьому випадку функція може набувати найбільшого чи найменшого значення на кінцях відрізка, і похідна, якщо вона існує, на кінцях відрізка може не дорівнювати нулю.

Теорема 5.3.2 (Ролля). Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована в інтервалі (a,b) і на кінцях цього відрізка набуває однакових значень, тобто $f(a)=f(b)$. Тоді існує точка $x_0\in(a,b)$, у якій $f'(x_0)=0$.

⏮ Оскільки за умовою теореми функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса вона досягає на цьому відрізку найбільшого M і найменшого m значень. Тоді можливі два випадки: $M = m$ і $M > m$. Якщо $M = m$, то з нерівності $m \le f(x) \le M$ випливає, що функція $f(x)$ стала і $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a, b)$. Якщо $M > m$, то з умови $f(a) = f(b)$ отримаємо, що хоча б одне значення M чи m досяжне у внутрішній точці $x_0 \in (a, b)$. Отже, існує точка $x_0 \in (a, b)$, у якій функція $y = f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення. Тому за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ⏭

Геометрично теорема Ролля означає таке: якщо функція неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована в інтервалі (a, b) і на кінцях відрізка набуває однакових значень, то хоча б в одній внутрішній точці цього відрізка дотична до графіка функції паралельна до осі Ox (рис. 5.3.2).

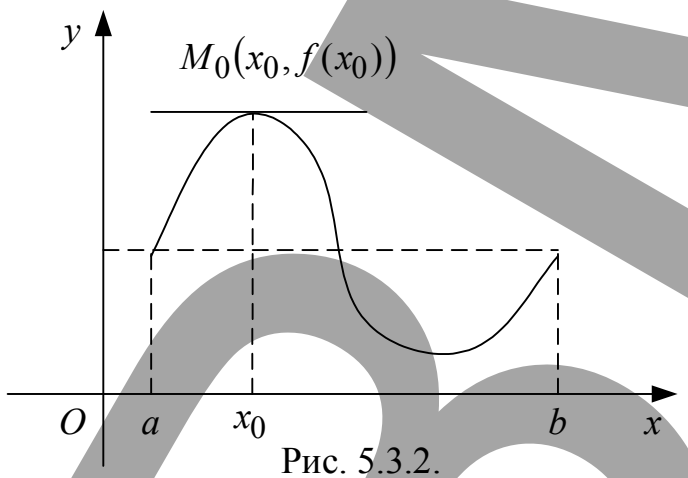


Рис. 5.3.2.

Зазначимо, що всі умови теореми Ролля потрібні. Наприклад, функція $f(x) = x^3$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і диференційована в інтервалі $(0, 1)$, але на кінцях цього відрізка набуває різних значень 0 і 1. Тому нема такої внутрішньої точки $x_0 \in (0, 1)$, у якій $f'(x_0) = 0$.

Теорема 5.3.3 (Лагранжа). Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована хоча б в інтервалі (a, b). Тоді знайдеться хоча б одна точка $x_0 \in (a, b)$, у якій

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \qquad (5.3.4)$$

⏮ Уведемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля. Справді, вона неперервна як різниця неперервних функцій. В інтервалі (a, b) вона має скінченну похідну

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Обчислимо

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Це означає, що на кінцях відрізка $[a, b]$ функція набуває однакових значень. За теоремою Ролля існує хоча б одна точка $x_0 \in (a, b)$, у якій

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

З останньої рівності отримаємо твердження теореми. ⏭

Дамо геометричну інтерпретацію цієї теореми. Нехай графік функції $y = f(x)$ зображений на рис. 5.3.3.

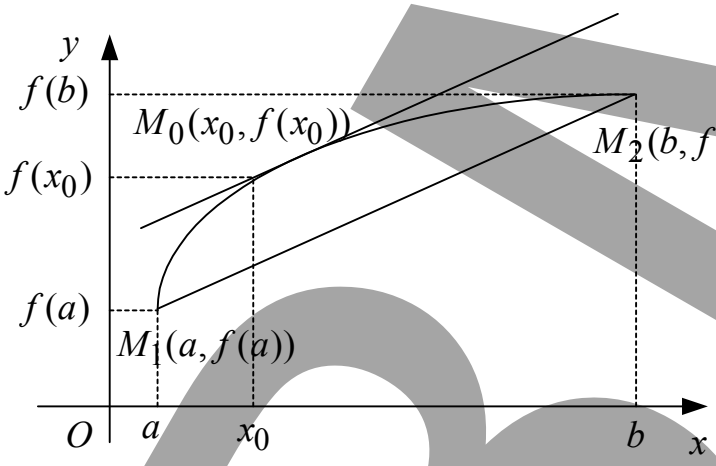


Рис. 5.3.3.

Січна, яка проходить через точки $M_1(a, f(a))$ і $M_2(b, f(b))$, має кутовий коефіцієнт $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Дотична до графіка, проведена в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$. Якщо функція задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку функції знайдеться хоча б одна точка $M_0(x_0, f(x_0))$, у якій дотична паралельна до січної M_1M_2.

Запишемо рівність (5.3.4) в іншому вигляді. Оскільки $a < x_0 < b$, то $0 < x_0 - a < b - a$. Поділимо останню нерівність на $b - a > 0$: $0 < \frac{x_0 - a}{b - a} < 1$. Позначимо $\frac{x_0 - a}{b - a} = \theta$, $0 < \theta < 1$. Тоді $x_0 = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$. Запишемо рівність (5.3.4) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta(b - a),$$

або

$$f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b - a)\big)(b - a). \qquad (5.3.5)$$

Розглянемо відрізок $[x_0, x_0+\Delta x]$, де x_0 і $x_0+\Delta x$ належать відрізку $[a,b]$. На відрізку $[x_0, x_0+\Delta x]$ виконуються умови теореми Лагранжа, тому в цьому випадку формулу (5.3.5) можна записати у вигляді

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x. \qquad (5.3.6)$$

Оскільки $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y,$ то

$$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (5.3.7)$$

де $0<\theta<1$.

Раніше отримали наближену формулу $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$ для обчислення приросту функції в точці x_0. У цій формулі відносна похибка прямує до нуля тільки при $\Delta x\to 0$. Формула (5.3.7) дає точне значення приросту Δy функції в точці x_0 для будь-якого скінченного приросту аргументу Δx. Тому формулу (5.3.7) називають формулою скінченних приростів.

Хоч у формулі (5.3.7) число θ, зазвичай, невідоме, її дуже часто використовують у математичному аналізі.

Приклад 5.3.1. На дузі AB, де $A(-8;4)$, $B(-1;3)$, кривої $y=\sqrt{8-x}$ визначимо точку $M(c;f(c))$, в якій дотична паралельна хорді AB.

• Функція $y=\sqrt{8-x}$ неперервна і диференційована для $x\in(-\infty;8]$. За теоремою Лагранжа, між двома значеннями аргументу $a=-8$ і $b=-1$ існує таке значення x_0, що $y(-1)-y(-8)=f'(x_0)(-1-(-8))$, або $-1=\dfrac{-7}{2\cdot\sqrt{8-x_0}}$. Отже, $x_0=-4{,}25$ і $M(-4{,}25;4{,}5)$. ❍

З теореми Лагранжа отримують твердження, які часто використовують у математичному аналізі.

Теорема 5.3.4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в інтервалі $(a;b)$ і $f'(x)=0$ для всіх $x\in[a;b]$, то $f(x)$ – стала на цьому відрізку.

Теорема 5.3.5 (Коші). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані в інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x)\neq 0$. Тоді існує така точка $c\in(a;b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (5.3.8)$$

Формулу (5.3.8) називають формулою Коші, або узагальненою формулою скінченних приростів. Якщо $g(x)=x,$ то з формули Коші отримаємо формулу Лагранжа.

5.3.2. Формула Тейлора

Формула Тейлора є однією з найважливіших формул математики. Її часто застосовують у різних галузях науки.

Формула Тейлора для полінома. Нехай задано поліном

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \qquad (5.3.9)$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами полінома. Виразимо коефіцієнти полінома через значення $P(x)$ і його похідних до n-го порядку включно в точці $x = 0$. Продиференціюємо $P(x)$ n разів:

$$\begin{aligned} P'(x) &= a_1 x + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n \cdot a_n x^{n-1}, \\ P''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + ... + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2}, \\ P'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 x + ... + (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-3}, \\ &..... , \\ P^{(n-1)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... (n-2)(n-1) a_{n-1} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... (n-2)(n-1) n \cdot a_n x, \\ P^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... (n-2)(n-1) n \cdot a_n. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Підставимо в рівності (5.3.10) значення $x = 0$:

$$a_0 = P(0);\ a_1 = \frac{P'(0)}{1!};\ a_2 = \frac{P''(0)}{2!};\ a_3 = \frac{P'''(0)}{3!}; ...;$$

$$a_{n-1} = \frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!};\ a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \tag{5.3.11}$$

Формули (5.3.11) дають змогу обчислити коефіцієнти полінома через його значення і значення його похідних у точці $x = 0$. Підставимо (5.3.11) в (5.3.9). Отримаємо

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + ... \frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.3.12}$$

Деколи доводиться записувати поліном через степені виразу $(x - x_0)$, де x_0 – деяке дійсне число:

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n. \tag{5.3.13}$$

У цьому випадку, як і в попередньому, поліном $P(x)$ можна записати так:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{P^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{5.3.14}$$

Формулу (5.3.14) називають *формулою Тейлора*, а формулу (5.3.12) – *формулою Маклорена* для полінома.

Формула Тейлора для довільної функції. Розглянемо довільну функцію $f(x)$, визначену на проміжку X. Нехай функція на цьому проміжку має похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Для такої функції можна побудувати *поліном Тейлора*

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0))}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Поліном Тейлора і його похідні до n-го порядку включно в точці x_0 мають ті ж значення, що і функція $f(x)$. Якщо ж функція $f(x)$ не є поліномом, то не можна твердити, що $f(x) = P_n(x)$ для всіх $x \in X$. Поліном Тейлора дає деяке наближення функції $f(x)$, тобто $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$.

Доведено, що функцію $f(x)$ можна записати у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0))}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad (5.3.15)$$

Формулу (5.3.15) називають *формулою Тейлора для функції* $f(x)$ з *додатковим членом*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (5.3.16)$$

у формі Лагранжа.

Якщо у формулі (5.3.15) взяти $x_0 = 0$, то отримаємо *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (5.3.17)$$

Перенесемо $f(x_0)$ у ліву частину рівності (5.3.15) і позначимо $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$. Отримаємо

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0))}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \qquad (5.3.18)$$

Ця формула є узагальненням формули скінченних приростів Лагранжа $\Delta f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x$, яку отримаємо з (5.3.18), якщо $n = 0$.

Додатковий член (5.3.16) у формі Лагранжа дає змогу чисельно оцінити похибку, отриману внаслідок заміни функції $f(x)$ поліномом Тейлора. Часто трапляються випадки, коли потрібно оцінити лише порядок мализни залишкового члена у формулі Тейлора. Таку оцінку можна зробити, використовуючи *залишковий член у формі Пеано*:

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \qquad (5.3.19)$$

Зазначимо, що залишковий член у формі Пеано є нескінченно малою вищого порядку, ніж n порівняно з $x - x_0$, але невідомі його значення для всіх x.

Якщо $x_0 = 0$, то отримаємо формулу Маклорена з залишковим членом у формі Пеано:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

Перенесемо $f(x_0)$ у ліву частину рівності (6.3.17) і позначимо $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$. Отримаємо

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0))}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \\ + o\left((\Delta x)^n\right). \qquad (5.3.20)$$

Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Маклорена. Розглянемо розвинення деяких елементарних функцій за формулою Маклорена, яку запишемо у вигляді

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x), \qquad (5.3.21)$$

де $r_n(x)$ – залишковий член.

1. Нехай $f(x) = e^x$. За формулою (5.2.6) отримаємо $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1,2,3,\ldots$. Оскільки $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 1,2,3,\ldots$, то за формулою (5.3.21)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x). \qquad (5.3.22)$$

2. Нехай $f(x) = \sin x$. За формулою (5.2.7) отримаємо

$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 1,2,3,\ldots$. Оскільки $f(0) = 0$, $f^{(2m)}(0) = \sin(m\pi) = 0$,

$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{(m-1)}$, $m = 1,2,3,\ldots$, то за формулою (5.3.21)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x). \qquad (5.3.23)$$

3. Нехай $f(x) = \cos x$. За формулою (5.2.8) отримаємо

$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 1,2,3,\ldots$. Оскільки $f(0) = 1$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$,

$f^{(2m)}(0) = (-1)^m$, $m = 1,2,3,\ldots$, то за формулою (5.3.21)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x). \qquad (5.3.24)$$

4. Нехай $f(x)=(1+x)^{\alpha},\ x>-1,\ \alpha\in R.$ Обчислимо похідні $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\quad f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$ .... Звідси, використовуючи метод математичної індукції, можна вивести, що

$$f^{(k)}(x)=\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(k)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)}.$$

Обчислимо:

$$f(0)=1,\ f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1).$$

Отже,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x). \qquad (5.3.25)$$

5. Нехай $f(x)=\ln(1+x).$ Обчислимо $f'(x)=\frac{1}{x+1}.$ Похідні вищих порядків отримаємо з формули (5.2.4):

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Обчислимо $f(0)=0,\ f^{(k)}(0)=(-1)^{(k-1)}(k-1)!.$

Отже,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x). \qquad (5.3.26)$$

Формули (5.3.22)–(5.3.26) є асимптотичними формулами при $x\to 0,$ відповідно, для функцій $e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^{\alpha},\ \ln(1+x)$. Ці асимптотичні формули можна використовувати для обчислення границь функцій.

Приклад 5.3.2. Розвинемо функцію $f(x)=\ln\cos x$ за формулою Маклорена включно до члена $x^4.$

• Для розв'язування задачі використаємо формули розвинення елементарних функцій за формулою Маклорена. З формули (5.3.24) отримаємо

$$\ln\cos x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln(1+t),$$

де $t=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$

Тепер використаємо формулу (5.3.26):

$$\ln\cos x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \quad \text{❍}$$

Застосування формули Маклорена до наближених обчислень. Якщо у формулі (5.3.17) відкинути залишковий член, то отримаємо наближену формулу

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (5.3.27)$$

яка дає змогу замінити функцію поліномом. Похибку такої заміни можна оцінити, використовуючи залишковий член у формі Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.3.28)$$

Приклад 5.3.3. Скільки треба взяти доданків у формулі Тейлора для функції e^x, щоб отримати поліном, який зображає цю функцію на відрізку $[-1;1]$ з точністю 0,001?

- З формули (5.3.22) отримаємо наближену формулу

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Використаємо (5.3.28), отримаємо похибку наближеної формули

$$|r_n(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Оскільки $|x| \le 1$ і $0 < \theta < 1$, то

$$|r_n(x)| = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Для того, щоб виконувалася нерівність $|r_n(x)| < 0{,}001$, досить, щоб виконувалася нерівність $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$. З цієї нерівності отримаємо, що $n \ge 6$.

Отже, з точністю 0,001 отримаємо наближену формулу

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.$$

Якщо в цій формулі взяти $x = 1$, то отримаємо

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718. \quad \text{❍}$$

Розкриття невизначеностей. Використаємо диференціальне числення функції однієї змінної до розкриття невизначеностей.

Розглянемо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Теорема 5.3.7 (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $(a;b]$, мають на цьому проміжку скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, причому $g'(x)\neq 0$, і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Якщо існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x)}$ і вони дорівнюють одна одній:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.3.29)$$

Теорему 5.3.7 називають *першим правилом Лопіталя*.

Отже, відшукання границі відношення двох функцій можна звести до відшукання границі відношення їхніх похідних, якщо ця границя існує.

Зазначимо, що $x=a$ лише для визначеності є лівим кінцем проміжку і внаслідок цього $x\to a$ з правого боку. Можливі випадки, що $x=a$ є правим кінцем проміжку і $x\to a$ з лівого боку. Можливо також, що $x=a$ є внутрішньою точкою деякого відрізка.

Може трапитися, що, крім рівностей

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0,$$

виконуються рівності

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a} g'(x)=0.$$

Нехай

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=A.$$

Двічі застосуємо теорему Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=A.$$

Якщо потрібно, то теорему Лопіталя можна застосовувати декілька разів:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=A.$$

Зазначимо, що теорему можна застосовувати й у випадку, коли $a=+\infty$ чи $a=-\infty$.

Розглянемо випадок невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 5.3.8 (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $(a;b]$, мають на цьому проміжку скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, причому $g'(x)\neq 0$, і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Якщо існує скінченна чи

нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, і вони дорівнюють одна одній:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.3.30}$$

Зазначимо, що теорему можна застосовувати й у випадку, коли $a=+\infty$ чи $a=-\infty$.

Невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} за допомогою алгебричних перетворень можна звести до невизначеностей $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 5.3.4. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

• Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лопіталя. Нехай $f(x)=\ln x$, $g(x)=x-1$. Розглянемо проміжок $(1;b]$, $b>1$. Обчислимо границі $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$. Визначимо похідні $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=(x-1)'=1\neq 0$ для усіх $x\in(1;b]$.

Обчислимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Отже, виконуються всі умови першого правила Лопіталя, тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1. \quad \text{❍}$$

5.4. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

5.4.1. Дослідження функцій

Ознака монотонності функції.

Теорема 5.4.1. Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$ і в цьому інтервалі $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$), то вона не спадає (не зростає) в $(a;b)$. Якщо для всіх $x\in(a;b)$ виконується умова $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функція $y=f(x)$ строго зростає (спадає) в цьому інтервалі.

⏮ Нехай для визначеності $f'(x)\geq 0$ для всіх $x\in(a;b)$. Візьмемо дві довільні точки з проміжку $(a;b)$ такі, що $x_1<x_2$. На відрізку $[x_1;x_2]$ функція $y=f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1), \quad c\in(a;b). \tag{5.4.1}$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, і за умовою теореми $f'(c) \geq 0$, то з формули (5.4.1) отримаємо $f(x_1) \leq f(x_2)$, тобто функція не спадає на проміжку $(a;b)$.

Аналогічно можна довести теорему для всіх інших випадків. ⏭

Зазначимо, що умови $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ не є необхідними для строгого зростання (спадання) функції. Наприклад, функція $f(x) = x^3$ строго зростає на всій числовій прямій, але $f'(x) = 0$ для $x = 0$.

Теорема справджується і тоді, коли $f'(x) = 0$ в скінченній кількості точок проміжку $(a;b)$.

Зв'язок між знаком похідної і напрямом зміни функції має просту геометричну інтерпретацію. Відомо, що похідна функції в точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у цій точці. Тому знак цього кутового коефіцієнта означає під яким кутом (гострим чи тупим) нахилена дотична до графіка, і, відповідно, зростає чи спадає функція.

Приклад 5.4.1. Визначимо інтервали монотонності функції $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

• Функція визначена на всій числовій прямій. Обчислимо

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15.$$

З рівняння $f'(x) = 0$, тобто $3x^2 - 12x - 15 = 0$, отримаємо $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Методом інтервалів визначимо знаки похідної (рис. 5.4.1).

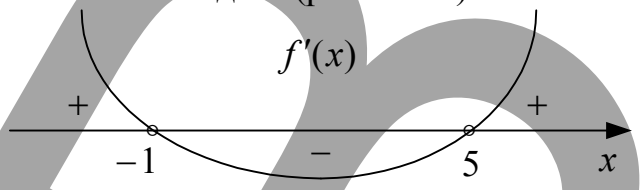


Рис. 5.4.1.

Отже, $f'(x) > 0$ для $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, тобто функція зростає, і $f'(x) < 0$ для $x \in (-1; 5)$, тобто функція спадає. ❍

Точки локального екстремуму. Точку x_0 називають точкою локального *максимуму* (*мінімуму*) функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Локальні максимуми і мінімуми функції називають *локальними екстремумами.* Значення функції в точках локального максимуму (мінімуму) називають локальними максимумами (мінімумами). Локальні екстремуми – це точки, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно з її значеннями у близьких точках, тому локальний мінімум може бути більшим, ніж локальний максимум (рис. 5.4.2).

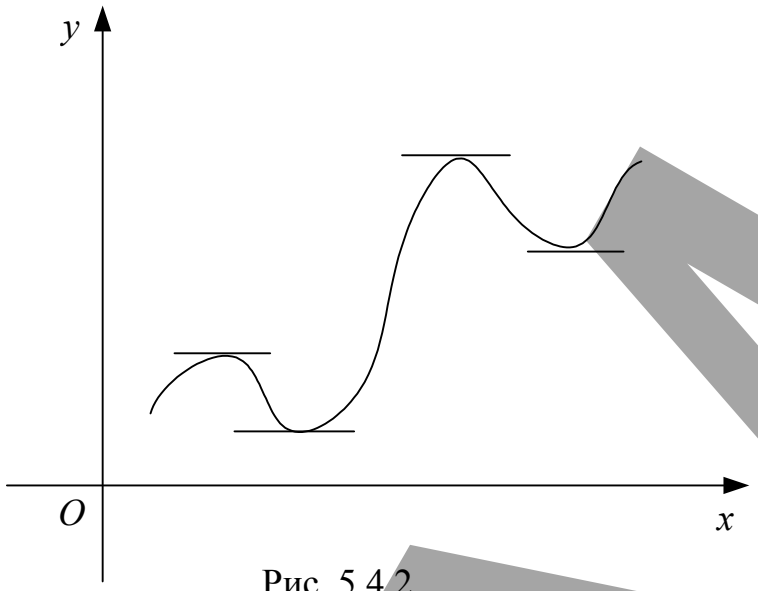


Рис. 5.4.2.

Зазначимо, що є різниця між поняттями локального максимуму (мінімуму) функції і найбільшим (найменшим) значенням цієї функції. Функція може мати декілька локальних мінімумів (максимумів), але тільки одне, якщо воно існує, найбільше (найменше) значення.

Теорема 5.4.2. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 і має в цій точці локальний екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

⏮ За означенням локального екстремуму існує такий інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, у якому значення функції є найбільшим (найменшим). Тоді за теоремою Ферма похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$. ⏭

Точки, у яких дотичні паралельні до осі Ox, а отже, похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними точками*. Стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називають *критичними точками функції*. Критична точка не завжди є точкою екстремуму. Наприклад, для функції $f(x) = x^3$ точка $x = 0$ є стаціонарною, але не є точкою локального екстремуму. Отже, теорема є необхідною умовою існування локального екстремуму.

П р и к л а д 5.4.2. Знайдемо критичні точки функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{якщо } x \le 1; \\ x & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

• Дослідимо неперервність цієї функції. Для всіх $x < 1$ і $x > 1$ функція $f(x)$ неперервна, тому що неперервні елементарні функції $f_1(x) = x^2$ і $f_2(x) = x$. Функція $f(x)$ неперервна в точці $x = 1$, тому що

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} x = 1, \quad f(1) = 1.$$

Для всіх $x<1$ і $x>1$ функція є елементарною, вона диференційована, тому

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{якщо } x<1;\\ 1 & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Функція недиференційована в точці $x=1,$ і $x=0$ є розв'язком рівняння $f'(x)=0$. Отже $x=1$ і $x=0$ – критичні точки цієї функції. ❍

Доведемо достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема 5.4.3. Нехай x_0 – критична точка функції $y=f(x)$, і нехай існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, у кожній точці якого, крім, можливо, точки x_0, функція має похідну $f'(x)$. Тоді

1) якщо $f'(x)>0$ в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ і $f'(x)<0$ в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y=f(x)$;
2) якщо $f'(x)<0$ в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ і $f'(x)>0$ в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $y=f(x)$;
3) якщо в усіх точках інтервалу $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$ або $f'(x)<0$, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

⏮ 1) Нехай $f'(x)>0$ в інтервалі $(x_0-\delta;x_0)$ і $f'(x)<0$ в інтервалі $(x_0;x_0+\delta)$. Це означає, що для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0)$ функція зростає, тобто $f(x)<f(x_0)$, а для всіх $x\in(x_0;x_0+\delta)$ – спадає, тобто $f(x)<f(x_0)$. Отже, для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta),\ x\neq x_0,$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$, тобто, за означенням, точка x_0 є точкою максимуму функції $y=f(x)$.

Аналогічно можна довести випадок 2.

3) Якщо похідна $f'(x)$ не змінює знака в інтервалі $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, то функція $y=f(x)$ монотонна в цьому інтервалі, тому в ньому функція не має точок екстремуму. ⏭

З теорем 5.4.2 і 5.4.3 випливає ***перше правило дослідження функції на екстремум***. Щоб дослідити функцію $y=f(x)$ на екстремум, треба:

1) знайти критичні точки функції, тобто ті розв'язки рівняння $f'(x)=0$, які належать області визначення функції, і точки, що належать області визначення функції і в яких похідна не існує;

2) якщо $f'(x)$ під час переходу через критичну точку зліва направо змінює знак з + на –, то ця критична точка є точкою максимуму; якщо $f'(x)$ змінює знак – на +, то критична точка є точкою мінімуму. Якщо $f'(x)$ під час переходу через критичну точку зліва направо не змінює знака, то критична точка не є точкою екстремуму.

Приклад 5.4.3. Дослідимо на екстремум функцію $y=x^5$.

• Функція визначена на всій числовій прямій. Визначимо критичні точки функції. Похідна функції $f'(x)=5x^4$ існує на всій числовій прямій. З умови $f'(x)=5x^4=0$ отримаємо, що $x=0$ – стаціонарна точка. Оскільки $f'(x)=5x^4>0$ для всіх $x\neq 0$, то похідна не змінює знака під час переходу через критичну точку $x=0$. Отже, $x=0$ не є точкою екстремуму цієї функції. ❍

Теорема 5.4.4. Нехай точка x_0 є стаціонарною для функції $y=f(x)$ і нехай у цій точці існує похідна другого порядку, яка не дорівнює нулю. Тоді якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 є точкою мінімуму; якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимуму функції $y=f(x)$.

З наведеної теореми отримаємо ***друге правило*** для дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум, треба:

1) знайти стаціонарні точки функції;

2) знайти похідну другого порядку функції. Якщо в стаціонарній точці $f''(x_0)>0$, то x_0 є точкою мінімуму; якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимуму функції $y=f(x)$.

Зазначимо, що друге правило не можна застосовувати до тих точок, у яких похідна першого порядку не існує і в яких похідна другого порядку дорівнює нулю.

Приклад 5.4.4. Тижневий прибуток фірми, який залежить від кількості Q проданого товару, описує функція

$$\pi(Q)=-0{,}005Q^2+20Q-5000.$$

Визначимо максимальний тижневий прибуток фірми.

• Визначимо критичні точки функції $\pi(Q)$: $\pi'(Q)=-0{,}01Q+20=0$. Звідси $Q=2000$. Оскільки $\pi''(Q)=-0{,}01<0$, то точка $Q=2000$ є точкою максимуму. Отже, для того, щоб мати максимальний тижневий прибуток, фірма повинна продавати $Q=2000$ штук продукції. У цьому випадку максимальний прибуток фірми $\pi(2000)=15\,000$. ❍

Теорема 5.4.5. Нехай в околі точки x_0 функція $y=f(x)$ має похідні до n-го порядку включно, причому в цій точці $f^{(n)}(x)$ неперервна. Нехай

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Якщо n парне, то точка x_0 є точкою максимуму при $f^{(n)}(x_0)<0$ і точкою мінімуму при $f^{(n)}(x_0)>0$. Якщо n непарне, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

Отже, отримаємо ***третє правило*** дослідження функції на екстремум: якщо першою відмінною від нуля в стаціонарній точці x_0 є похідна парного порядку, то точка x_0 є точкою максимуму у випадку $f^{(n)}(x_0)<0$ і точкою міні-

муму у випадку $f^{(n)}(x_0) > 0;$ якщо першою відмінною від нуля в стаціонарній точці x_0 є похідна непарного порядку, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

Приклад 5.4.5. Дослідимо на екстремум функцію $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x.$

• Функція $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ має похідні будь-якого порядку в кожній точці числової прямої. Її похідна першого порядку $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ дорівнює нулю тільки в одній точці $x = 0$. Обчислимо похідні вищих порядків та їхні значення у стаціонарній точці $x = 0$:

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x; \;\; f''(0) = \operatorname{ch} 0 - \cos 0 = 0;$$
$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x; \;\; f'''(0) = \operatorname{sh} 0 + \sin 0 = 0;$$
$$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x; \;\; f^{(4)}(0) = \operatorname{ch} 0 + \cos 0 = 2.$$

Отже, першою відмінною від нуля є похідна парного порядку. Оскільки $f^{(4)}(0) > 0,$ то в точці $x = 0$ функція має мінімум: $f_{\min} = f(0) = 2.$ ❍

Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді за другою теоремою Вейєрштрасса вона на цьому відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значень. Теорема Вейєрштрасса не дає способу знаходження точок, у яких функція набуває цих значень. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка $[a; b]$, так і його кінці. Якщо функція набуває найбільшого (найменшого) значення у внутрішній точці відрізка, то це значення є одночасно локальним максимумом (мінімумом) функції. Звідси випливає спосіб знаходження точок, у яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Для того щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної на відрізку $[a; b]$ функції, треба знайти значення функції у критичних точках, що належать відрізку $[a; b]$, і на його кінцях. Найбільше і найменше з цих чисел є найбільшим і найменшим значеннями функції на відрізку $[a; b]$.

Приклад 5.4.6. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $f(x) = (x-2)^2 e^{|x|}$ на відрізку $[-1; 3]$.

• Функція має похідну в усіх точках відрізка $[-1; 3]$, крім точки $x = 0,$ яка є критичною точкою. Обчислимо

$$f'(x) = \begin{cases} (x-2)(4-x)e^x, & \text{якщо } x < 0; \\ x(x-2)e^x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Коренями рівняння $f'(x) = 0$ є числа $x = 2$ і $x = 4$. Оскільки $x = 4$ не належить відрізку $[-1; 3]$, то маємо дві критичні точки: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Обчислимо значення функції в цих критичних точках і на кінцях відрізка:

$$f(0) = 4, \;\; f(2) = 0, \;\; f(-1) = 9e, \;\; f(3) = e^3.$$

Отже,

$$\max_{[-1; 3]} f(x) = 9e, \;\; \min_{[-1; 3]} f(x) = 0. \qquad ❍$$

Випуклість і точки перегину графіка функції. Графік функції $y = f(x)$ називають випуклим униз (угору) на $(a;b)$, якщо він розміщений не нижче (не вище) від будь-якої дотичної до цього графіка на $(a;b)$. Деколи графік, випуклий угору, називають *опуклим*, а випуклий униз – *вгнутим*. На рис. 5.4.3 показано випуклий униз графік функції $y = f(x)$, а на рис. 5.4.4 – випуклий угору.

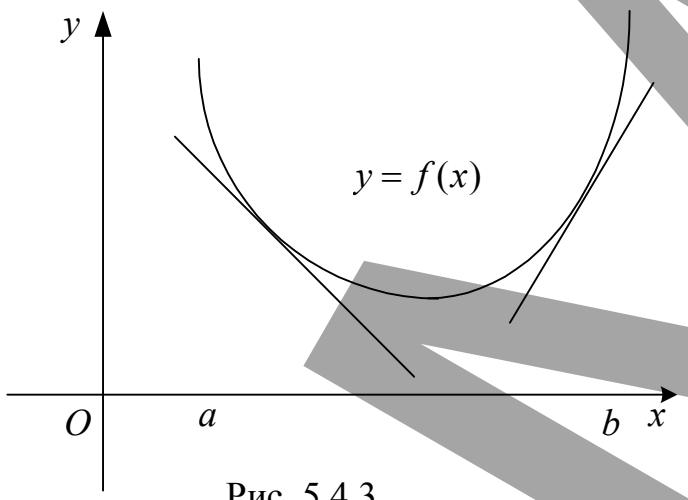


Рис. 5.4.3.

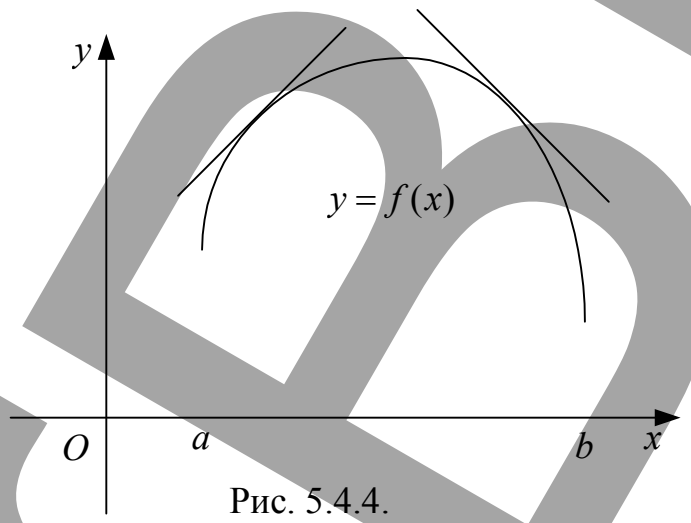


Рис. 5.4.4.

Теорема 5.4.6. Якщо функція $y = f(x)$ має на інтервалі $(a;b)$ похідну другого порядку і $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) на $(a;b)$, то графік функції на цьому проміжку випуклий униз (угору).

⏮ Нехай c – довільна точка інтервалу $(a;b)$. Запишемо рівняння дотичної, проведеної у точці c до графіка функції $y = f(x)$:

$$Y = f'(c)(x-c) + f(c). \qquad (5.4.2)$$

Розвинемо функцію $y = f(x)$ в околі точки c за формулою Тейлора для $n = 1$. Отже, для всіх $x \in (a;b)$

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\zeta)}{2!}(x-c)^2, \quad \zeta \in (a;b). \qquad (5.4.3)$$

Віднімемо від рівності (5.4.3) рівність (5.4.2):

$$y - Y = \frac{f''(\zeta)}{2!}(x-c)^2. \qquad (5.4.4)$$

Нехай для всіх $x \in (a;b)$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$. Тоді з (5.4.4) отримаємо $y \geq Y$, тобто для всіх $x \in (a;b)$ графік функції лежить не нижче від дотичної. Це означає, що він випуклий униз. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ виконується нерівність $f''(x) \leq 0$, то $y \leq Y$, тобто для всіх $x \in (a;b)$ графік функції лежить не вище від дотичної. Це означає, що він випуклий угору. ⏭

Точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають *точкою перегину графіка функції* $y = f(x)$, якщо в цій точці існує дотична і в деякому околі точки x_0 графік функції має різну випуклість.

Зазначимо, що в точці перегину дотична перетинає графік функції (рис. 5.4.5).

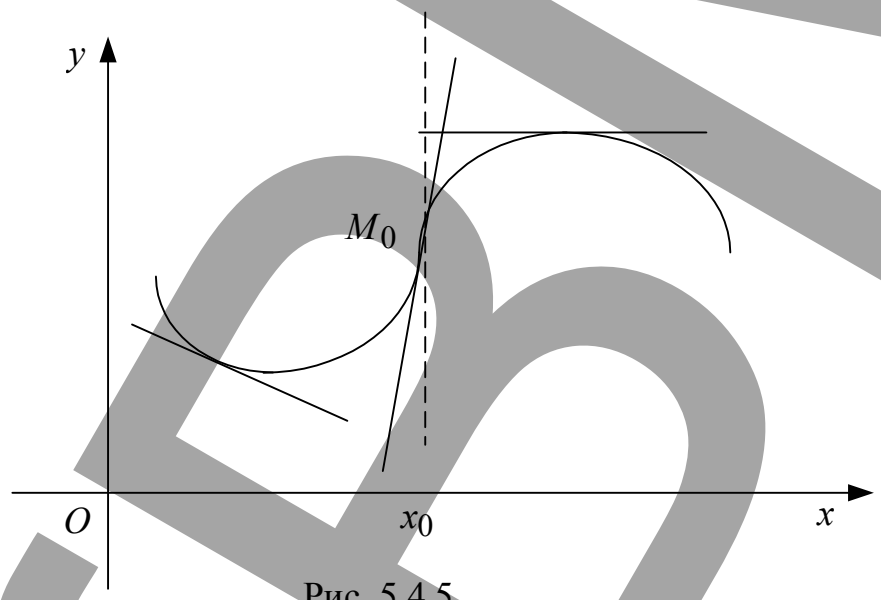


Рис. 5.4.5.

Наведемо необхідну умову існування точки перегину.

Теорема 5.4.7. Нехай точка $M_0(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$ і в точці x_0 функція має неперервну похідну другого порядку. Тоді в цій точці похідна другого порядку дорівнює нулю, тобто

$$f''(x_0) = 0. \qquad (5.4.5)$$

⏮ Припустимо, що $f''(x_0) \neq 0$. У цьому випадку за теоремою про збереження знака неперервної функції існує окіл точки x_0, у якому $f''(x_0) > 0$, або $f''(x_0) < 0$. За теоремою 5.4.6 це означає, що в околі точки x_0 графік функції випуклий угору або вниз, тобто точка x_0 не є точкою перегину графіка. Отримана суперечність доводить теорему. ⏭

Зазначимо, що умова $f''(x_0)=0$ є необхідною умовою, тобто з того, що $f''(x_0)=0,$ не завжди випливає, що точка x_0 є точкою перегину. Наприклад, для функції $f(x)=x^4$ в точці $x=0$ виконується умова $f''(0)=0,$ але ця точка не є точкою перегину. З теореми випливає, що функція має перегин у тих точках, у яких похідна другого порядку не існує або дорівнює нулю.

Для того, щоб дослідити, чи точка x_0 є точкою перегину, потрібно використати достатню умову існування точки перегину, яку дає така теорема.

Теорема 5.4.8. Нехай функція $y=f(x)$ має в околі точки x_0 похідну другого порядку. Якщо ліворуч і праворуч від точки x_0 похідна другого порядку має різні знаки, то точка $M_0(x_0;f(x_0))$ є точкою перегину.

На підставі теорем 5.4.5–5.4.8 сформулюємо правило знаходження точок перегину графіка функції $y=f(x)$. Для того, щоб знайти точки перегину графіка функції $y=f(x),$ треба:

1) знайти похідну другого порядку $f''(x)$, прирівняти її до нуля і вибрати ті розв'язки рівняння $f''(x)=0$, які належать області визначення функції;

2) якщо під час переходу через точку x_0 похідна другого порядку змінює знак, то точка $M_0(x_0;f(x_0))$ є точкою перегину, якщо не змінює знака, то точка $M_0(x_0;f(x_0))$ не є точкою перегину.

Зазначимо, що твердження теореми 5.4.8 справджується й у випадку, коли $f''(x)$ існує в деякому околі точки x_0, крім, можливо, точки x_0, в якій існує дотична. Наприклад, функція $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точці $x=0$ має нескінченні похідні всіх порядків. Дотична до графіка функції в цій точці збігається з віссю Oy. Оскільки похідна другого порядку $f''(x)=-\dfrac{2}{9x^{5/3}}$ в околі точки $x=0$ має різні знаки, то точка $O(0;0)$ є точкою перегину графіка функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (рис. 5.4.6).

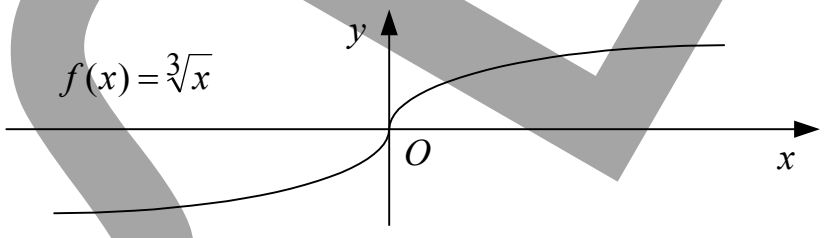


Рис. 5.4.6.

Приклад 5.4.7. Визначимо точки перегину логістичної кривої, заданої рівнянням $y=\dfrac{1}{1+e^{-kx}},\ k>0.$

- Обчислимо похідну першого порядку

$$y' = -\frac{1}{\left(1+e^{-kx}\right)^2}(-k)e^{-kx} = \frac{ke^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2}.$$

Оскільки $y'(x) > 0$ для всіх x, то функція зростає на всій числовій прямій.

Обчислимо похідну другого порядку

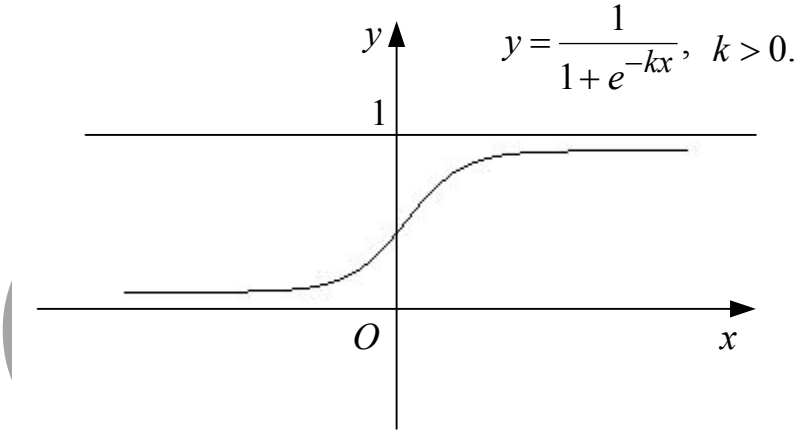
$$y''(x) = k \cdot \frac{\left(-ke^{-kx}\right)\left(1+e^{-kx}\right)^2 - 2e^{-kx}\left(1+e^{-kx}\right)e^{-kx}(-k)}{\left(1+e^{-kx}\right)^4} =$$

$$= k \cdot \frac{-ke^{-kx}\left(1+e^{-kx}\right)+2ke^{-kx}e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^3} = k^2 \cdot \frac{e^{-kx}\left(e^{-kx}-1\right)}{\left(1+e^{-kx}\right)^3}.$$

Якщо $x < 0$, то $y''(x) > 0$, і графік функції випуклий униз; якщо $x > 0$, то $y''(x) < 0$, і графік функції випуклий угору. Отже, точка $x = 0$ є точкою перегину цього графіка. Для того, щоб схематично побудувати графік кривої, обчислимо

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-kx}} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-kx}} = 1.$$

Схематичний графік цієї функції зображений на рис. 5.4.7.



$$y = \frac{1}{1+e^{-kx}}, \quad k > 0.$$

Рис. 5.4.7.

Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка. Дослідження функції і побудову її графіка з використанням диференціального числення можна виконувати в такій послідовності.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину графіка з осями координат. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x); \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = f(x); \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система рівнянь дає точки перетину з віссю Ox, друга – з Oy.

3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти точки розриву функції та дослідити їхній тип.
5. Знайти асимптоти графіка функції.
6. Знайти інтервали монотонності функції і точки екстремуму.
7. Знайти проміжки вгнутості та опуклості функції і точки перегину.
8. На підставі виконаного дослідження побудувати графік функції.

Приклад 5.4.8. Дослідимо функцію $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудуємо її графік.

- Для побудови графіка використаємо загальну схему дослідження функції.

1. Функція визначена для всіх $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $x=0$, то $y=-1$; якщо $y=0$, то $x=0{,}5$. Отже, точки $A(0;-1)$ і $B(0{,}5;0)$ – точки перетину графіка функції з осями координат.

3. Оскільки $f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}$, то $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тобто функція ні парна, ні непарна.

4. Функція неперіодична.

5. Функція неперервна для всіх $x\neq 1$. Обчислимо границю функції в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

Отже, $x=1$ є точкою розриву другого типу.

6. Знайдемо асимптоти графіка функції. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=+\infty$, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою графіка. Знайдемо похилі асимптоти. Для цього обчислимо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Отже, пряма $y=0$ є асимптотою графіка функції.

7. Для визначення проміжків монотонності і точок екстремуму знайдемо похідну першого порядку функції:

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{2(x-1)^2-2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Похідна не існує для $x=1$, та оскільки ця точка не належить до області визначення функції, то вона не є критичною точкою. З рівняння $f'(x)=0$ отримаємо критичну точку $x=0$. Вона розбиває область визначення функції на проміжки

$(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Визначимо знаки похідної на кожному проміжку. Результати досліджень зручно записувати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–		+		–
$f(x)$	Спадає	$f_{\min} = f(0) = -1$	Зростає		Спадає

8. Для визначення проміжків опуклості й увігнутості знайдемо похідну другого порядку:

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

Похідна другого порядку не існує для $x = 1$, та оскільки ця точка не належить до області визначення функції, то вона не є можливою точкою перегину графіка функції. З умови $f''(x) = 0$ отримаємо $x = -0{,}5$. Ця точка розбиває область визначення функції на проміжки $(-\infty;-0{,}5)$, $(-0{,}5;1)$, $(1;+\infty)$. Визначимо знаки похідної другого порядку на кожному проміжку. Результати досліджень зручно записувати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty;-0{,}5)$	-0,5	$(-0{,}5;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–		+		+
$f(x)$	Випукла	$-\frac{8}{9}$	Увігнута		Увігнута

Результати дослідження запишемо у таблицю:

x	$(-\infty;-0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	–		–	0	+		–
$f''(x)$	–	0	+		+		+
$f(x)$	Спадає, опукла	$-\frac{8}{9}$	Спадає, увігнута	-1	Зростає, увігнута		Спадає, увігнута

За результатами дослідження, що записані в останній таблиці, побудуємо графік функції (рис. 5.4.8).

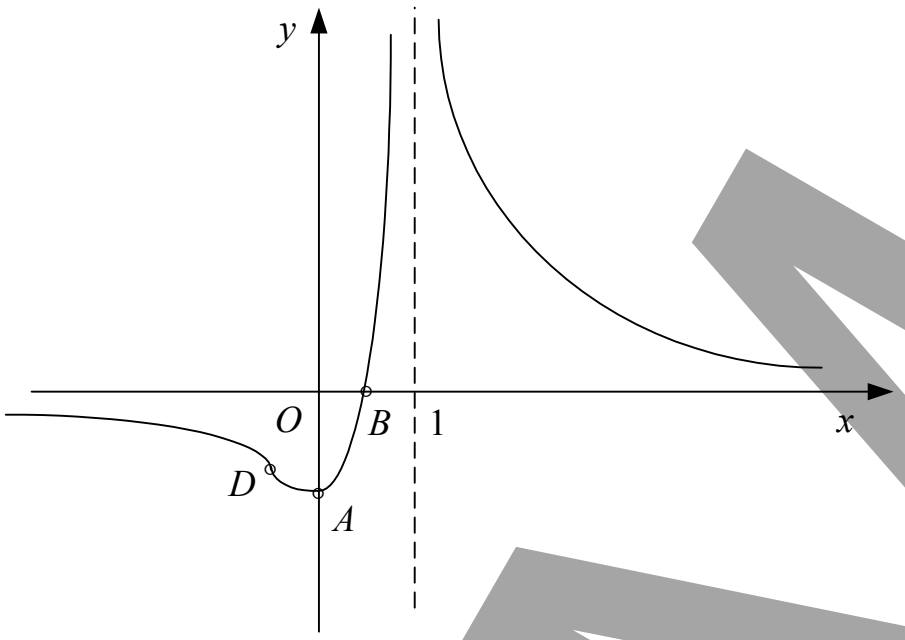


Рис. 5.4.8.

5.5. Застосування диференціального числення функцій однієї змінної до задач економіки

5.5.1. Елементи граничного аналізу в економіці

В економіці часто використовують середні величини, наприклад, середня вартість продукції, середня продуктивність праці, середній дохід, середній обсяг продажу. Під час планування розвитку виробництва виникає потреба з'ясувати, на скільки зміняться результати виробництва внаслідок зміни деяких чинників. Таку задачу не можна розв'язати застосовуючи середні величини, тому що потрібно знати прирости змінних величин. У цьому випадку потрібно знайти границю відношення приростів досліджуваних величин, отже, треба використовувати диференціальне числення.

***Граничні,* або *маргінальні,* величини**. Розглянемо загальну схему введення граничних величин. Якщо задано деяку величину $y = y(x)$, то гранична величина

$$My = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{5.5.1}$$

Приріст Δx у різних випадках задають різними способами. В одному випадку Δx – це одиниця вимірювання величини x, в інших – це різниця між сусідніми значеннями x у таблиці, яка задає функцію $y = y(x)$. У теоретичних дослідженнях найзручніше використовувати таке означення граничної величини:

$$My = y'(x), \tag{5.5.2}$$

припускаючи, що функція $y = y(x)$ диференційована.

Зазначимо, що поняття *граничний* в економіці характеризує не самі величини, а ефект їхньої зміни.

Нехай Q – кількість випущеної продукції, а $C(Q)$ – відповідні витрати виробництва. *Граничні витрати* $MC(Q)$ визначимо як додаткові витрати, пов'язані з виробництвом ще однієї одиниці продукції, тобто

$$MC(Q) = C(Q + \Delta Q) - C(Q),$$

де $\Delta Q = 1$.

Використаємо рівність $\Delta C \approx \mathrm{d}C$, і отримаємо

$$MC(Q) = \Delta C(Q) = \mathrm{d}C = C'(Q)\Delta Q = C'(Q).$$

Відомо, що сумарний дохід можна обчислити за формулою

$$TR(Q) = P \cdot Q = Q \cdot f(Q), \qquad (5.5.3)$$

де ціна $P = f(Q)$.

Граничний, або *маргінальний*, *дохід* $MR(Q)$ – це похідна від сумарного доходу, тобто

$$MR(Q) = TR'(Q). \qquad (5.5.4)$$

Економічна суть граничного доходу полягає в тому, що граничний дохід приблизно дорівнює зміні сумарного доходу, якщо кількість товару зміниться на одиницю.

Нехай кількість продукції залежить лише від прикладеної праці L, а інші чинники виробництва незмінні. Наприклад, для фірми L – кількість працівників. Розглянемо виробничу функцію $Q = f(L)$. Для оцінки ефективності виробництва часто використовують середню продуктивність праці

$$AQ(L) = \frac{Q(L)}{L}. \qquad (5.5.5)$$

Дослідимо, як зміниться обсяг продукції Q внаслідок зміни кількості працівників. Уведемо *граничну продуктивність праці*

$$MQ(L) = Q'(L). \qquad (5.5.6)$$

Гранична продуктивність праці наближено дорівнює зміні обсягу продукції внаслідок зміни кількості працівників на одиницю.

П р и к л а д 5.5.1. Виробнича функція має вигляд $Q = 300\sqrt{L} - 5L$. Визначимо граничну продуктивність праці.

• Гранична продуктивність праці $MQ(L) = Q'(L) = \dfrac{150}{\sqrt{L}} - 5$. Дослідимо, як змінюється гранична продуктивність праці. Розв'яжемо рівняння

$$Q'(L) = \frac{150}{\sqrt{L}} - 5 = 0.$$

Звідси $L = 900$. Обчислимо $Q''(L) = -\dfrac{75}{\sqrt{L^3}}$, $Q''(900) = -\dfrac{75}{\sqrt{900^3}} = -\dfrac{75}{27\,000} < 0$.

Отже, якщо $L = 900$, то кількість виробленої продукції найбільша. ❍

П р и к л а д 5.5.2. Залежність між витратами виробництва та обсягом продукції описує формула $C = -0{,}05Q^3 + 50Q$. Визначимо середні і граничні витрати, якщо $Q = 10$.

• Функція середніх витрат на виробництво одиниці продукції має вигляд $AC(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q} = -0{,}05Q^2 + 50$. Якщо $Q = 10$, то $AC(10) = 45$. Функція граничних витрат $MC(Q) = C'(Q) = -0{,}15Q^2 + 50$. Якщо $Q = 10$, то $MC(10) = 35$. Отже, якщо середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції становлять 45, то граничні витрати, тобто додаткові витрати на виробництво однієї додаткової одиниці продукції за заданого рівня виробництва становлять 35. ❍

Максимізація прибутку. Нехай Q – кількість виробленої продукції, $R(Q)$ – функція доходу, $C(Q)$ – функція затрат на виробництво продукції. Вигляд цих функцій залежить від способу виробництва. Прибуток від реалізованої продукції

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q). \qquad (5.5.7)$$

Визначимо, за якої умови прибуток є найбільшим. З необхідної умови екстремуму отримаємо

$$\pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) = 0, \quad R'(Q) = C'(Q),$$

або

$$MR(Q) = MC(Q). \qquad (5.5.8)$$

Для того, щоб точка Q_*, яка є розв'язком рівняння (5.5.8), була точкою максимуму, потрібно, щоб виконувалась нерівність $\pi''(Q) = R''(Q) - C''(Q) < 0$, або

$$\big(MR(Q)\big)' < \big(MC(Q)\big)'.$$

Отже, отримано відоме в макроекономіці твердження: для того, щоб прибуток був максимальний, необхідно, щоб граничний дохід дорівнював граничним витратам.

П р и к л а д 5.5.3. Визначимо максимальний прибуток, якщо функція доходу $R(Q) = 100Q - Q^2$, $C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000$.

• Визначимо прибуток

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000.$$

З необхідної умови екстремуму

$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 72Q - 69 = 0,$$

або $Q^2 - 24Q + 23 = 0$. Корені цього рівняння $Q_1 = 1$, $Q_2 = 23$.

Обчислимо $\pi''(Q) = -6Q + 72$, $\pi''(1) = 66 > 0$, $\pi''(23) = -66 < 0$. Максимум функції прибутку є при $Q_2 = 23$. Максимальний прибуток $\pi_{\max} = \pi(23) = 1290$. ❍

5.5.2. Еластичність та її застосування в економічному аналізі

Поняття еластичності функції. Нехай величина y залежить від величини x, і цю залежність описує функція $y = f(x)$. Унаслідок зміни незалежної величини x змінюється y. Одним із показників зміни є похідна функції

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

яка характеризує швидкість зміни функції. Похідна залежить від одиниці вимірювання, тому користуватися нею в економічному аналізі незручно. Тому для вимірювання чутливості зміни функції від зміни аргументу в економіці вивчають зв'язок відносних величин.

Еластичністю функції $y = f(x)$ називають границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot f'(x).$$

Отже,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x). \qquad (5.5.9)$$

Еластичність функції означає приблизно, на скільки відсотків зміниться значення функції $y = f(x)$, якщо незалежна змінна x зміниться на 1%.

Запишемо еластичність функції в іншому вигляді.
Оскільки

$$\frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{Mf(x)}{Af(x)},$$

то еластичність

$$E_x(y) = \frac{Mf(x)}{Af(x)}, \qquad (5.5.10)$$

де $Mf(x)$, $Af(x)$ – відповідно, маргінальне і середнє значення функції. Таку еластичність називають *граничною*, або *точковою*.

Оскільки $\mathrm{d}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}y}{y}$, $\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, то еластичність можна записати у вигляді

$$E_x(y) = \frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}(\ln x)}. \qquad (5.5.11)$$

Геометрична інтерпретація. Нехай функція $y = f(x)$ – увігнута і спадна (рис. 5.5.1). Визначимо еластичність функції в точці $M(x; y)$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в цій точці. За означенням похідної функції

$y'(x) = f'(x) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, що $\Delta BCM \sim \Delta MNA$. З подібності цих трикутників отримаємо $\frac{BM}{AM} = \frac{CM}{AN}$. З ΔANM

$$AN = \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{y}{y'}.$$

Тоді $\frac{BM}{AM} = \frac{CM}{AN} = \frac{x}{-\frac{y}{y'}} = -\frac{x}{y} \cdot y'(x) = -E_x(y).$ Отже, $E_x(y) = -\frac{BM}{AM}$.

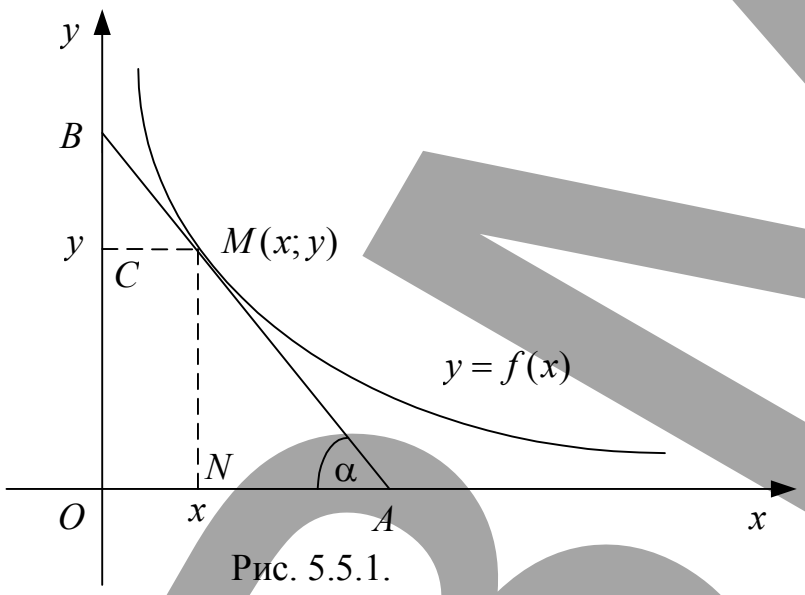


Рис. 5.5.1.

Нехай функція $y = f(x)$ зростає і випукла вгору (рис. 5.5.2). Визначимо еластичність цієї функції в точці $M(x;y)$.

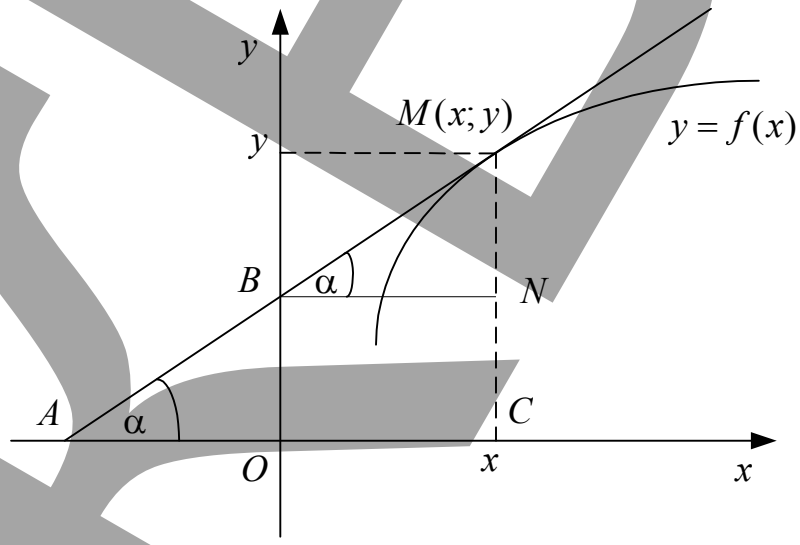


Рис. 5.5.2.

Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в цій точці. За означенням $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \operatorname{tg}\alpha$, де $\operatorname{tg}\alpha$ – тангенс кута нахилу дотичної, проведеної

до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x; y)$. З трикутника $MBN: MN = BN \cdot \operatorname{tg}\alpha = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Трикутники MBN і AMC подібні, тому $\frac{MB}{MA} = \frac{MN}{MC} = \frac{x \cdot \operatorname{tg}\alpha}{y} = E_x(y)$. Отже, $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$.

Аналогічно можна розглянути інші випадки.

Отже, еластичність функції в точці за абсолютною величиною дорівнює відношенню відстаней уздовж дотичної від заданої точки графіка функції до точок перетину дотичної, відповідно, з осями Oy та Ox. Якщо точки перетину дотичної з осями координат є по один бік від точки M, то еластичність додатна (рис. 5.5.1), якщо по різні – від'ємна (рис. 5.5.2).

Властивості еластичності. Наведемо головні властивості еластичності.

1. Еластичність не має розмірності, тобто її значення не залежить від того, у яких величинах вимірюють x та y:

$$E_{ax}(by) = E_x(y). \tag{5.5.12}$$

2. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто

$$E_x(y) = x \cdot T_y. \tag{5.5.13}$$

3. Еластичності взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{5.5.14}$$

4. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їхніх еластичностей:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v). \tag{5.5.15}$$

5. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці їхніх еластичностей:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \tag{5.5.16}$$

6. Еластичність суми двох функцій можна обчислити за формулою

$$E_x(u + v) = \frac{u \cdot E_x(u) + v \cdot E_x(v)}{u + v}. \tag{5.5.17}$$

Еластичності елементарних функцій. Обчислимо еластичності деяких функцій.

1. Еластичність степеневої функції $y = x^\alpha$ стала і дорівнює α:

$$E_x\left(x^\alpha\right) = \alpha. \tag{5.5.18}$$

2. Еластичність показникової функції $y = a^x$ пропорційна до її аргументу x:

$$E_x\left(a^x\right) = x \ln a. \tag{5.5.19}$$

Еластичність лінійної функції $y = kx + b$ обчислюють за формулою

$$E_x(kx + b) = \frac{kx}{kx + b}. \tag{5.5.20}$$

Побудуємо графік лінійної функції для $k < 0$ (рис. 5.5.3).

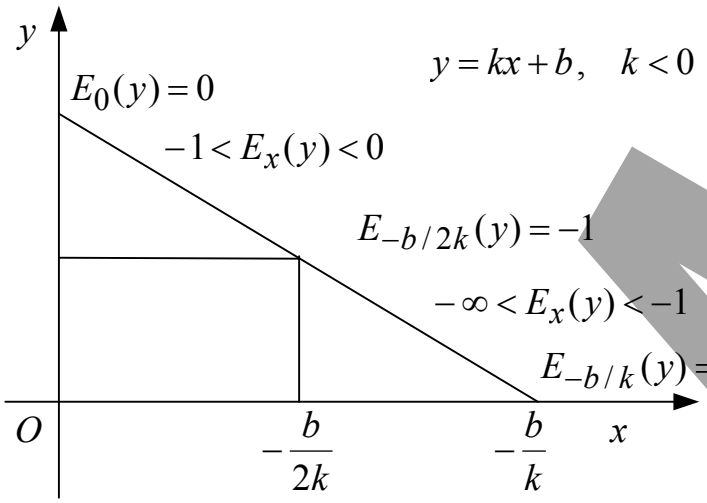


Рис. 5.5.3.

У точці $x = -\frac{b}{k}$ еластичність $E_{-b/k}(y) = -\infty$, у точці $x = -\frac{b}{2k}$ еластичність $E_{-b/2k}(y) = -1$, у точці $x = 0$ еластичність $E_0(y) = 0$. Отримано, що для $0 < x < -\frac{b}{2k}$ еластичність $-1 < E_x(y) < 0$, а для $-\frac{b}{2k} < x < -\frac{b}{k}$ еластичність $-\infty < E_x(y) < -1$.

Функції, які мають в усіх точках нескінченну еластичність, називають *абсолютно еластичними*, а ті, які мають нульову еластичність, – *абсолютно нееластичними*.

Типи еластичностей в економіці. Розглянемо деякі типи еластичностей, які часто використовують в економічному аналізі.

Пряму еластичність попиту $Q = D(P)$ *за ціною* обчислюють за формулою

$$E_P(D) = E_P(Q) = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}. \qquad (5.5.21)$$

Така еластичність визначає відносну зміну у відсотках величини попиту на деякий товар, якщо його ціна змінилася на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію. Якщо $-\infty < E_P(D) < -1$, то *попит еластичний*, якщо $-1 < E_P(D) < 0$, то *попит нееластичний*. Зокрема, якщо $E_P(D) = -\infty$, то попит *абсолютно еластичний*, а якщо $E_P(D) = 0$, то попит *абсолютно нееластичний*. Якщо ж $E_P(D) = -1$, то попит має *одиничну еластичність.*

Нехай $Q = D(P)$ – кількість проданого товару. Загальний виторг продавців $R(P) = P \cdot D(P)$. Обчислимо *еластичність виторгу за ціною*:

$$E_P(R) = \frac{P}{R} \cdot R' = \frac{P}{P \cdot D(P)} \big(P \cdot D(P)\big)' = \frac{D(P) + P \cdot D'(P)}{D(P)} = 1 + \frac{P}{D(P)} D'(P) =$$
$$= 1 + E_P(D).$$

Отримано, що для еластичного попиту $E_P(R) < 0$, а для нееластичного – $E_P(R) > 0$.

Отже, якщо попит еластичний, то внаслідок зміни ціни загальний виторг змінюється у протилежному напрямі, тобто зі збільшенням ціни загальний виторг зменшується, і навпаки. У цьому випадку для збільшення виторгу продавцям вигідно знижувати ціну. Якщо попит нееластичний, то загальний виторг змінюється у тому ж напрямі, що й ціна, тому для збільшення виторгу продавцям вигідно підвищувати ціну.

Графічно (рис. 5.5.4) еластичність (нееластичність) кривої попиту в точці C означає, що відрізок дотичної, проведеної до цієї кривої в точці C з кінцями A та B на осях координат, ділиться точкою C так, що відрізок AC коротший (довший), ніж відрізок BC.

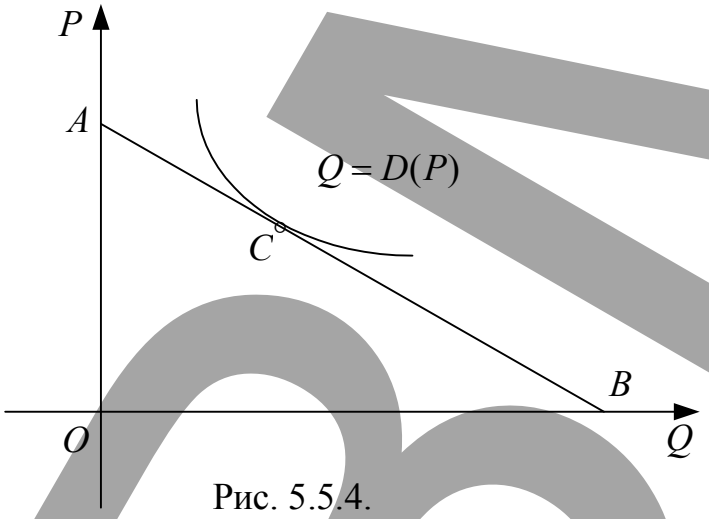


Рис. 5.5.4.

У випадку лінійної функції попиту $D(P) = kP + b,\ k < 0,$ дотична до графіка збігається з кривою попиту. У цьому випадку точка C_1, в якій попит еластичний, розміщена вище, ніж точка M – середина відрізка AB, а точка C_2, в якій попит нееластичний, – нижче.

Крім еластичності попиту за ціною, є й інші типи еластичностей.

Еластичність попиту за доходом обчислюють формулою

$$E_I(Q) = \frac{I}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}I}. \qquad (5.5.22)$$

Така еластичність визначає відносну зміну у відсотках величини попиту на деякий товар, якщо дохід споживача змінився на 1%. Якщо $E_I(Q) > 0$, то товари називають *нормальними*, якщо $E_I(Q) < 0$, – малоцінними. Наприклад, якщо еластичність попиту за доходом для деякої галузі є додатною і великою, то це означає, що внесок цієї галузі є більшим, ніж її частка в структурі економіки, і галузь буде розвиватися. Навпаки, якщо еластичність попиту на продукцію галузі за доходом є малою додатною або від'ємною, то можливий застій і скорочення виробництва.

Перехресну еластичність попиту за ціною визначають за формулою

$$E_{P_j}(Q_i) = \frac{P_i}{Q_j} \cdot \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}P_j}. \qquad (5.5.23)$$

Така еластичність характеризує відносну зміну у відсотках величини попиту на одне благо внаслідок зміни ціни на інше благо, що заміняє або доповнює перше на 1%. Якщо $E_{P_j}(Q_i) > 0,$ то одне благо заміняє інше, якщо $E_{P_j}(Q_i) < 0,$ то вони доповнюють одне одного.

Цінову еластичність ресурсів визначають за формулою

$$E_{P_i}(R_i) = \frac{P_i}{R_i} \cdot \frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}P_i}. \qquad (5.5.24)$$

Така еластичність характеризує відносну зміну у відсотках величини попиту на деякий ресурс унаслідок зміни його ціни на 1%.

Приклад 5.5.4. Статистичними методами отримали функції попиту $D(P) = \frac{P+17}{P+1}$ і пропозиції $S(P) = P + 2,$ де P – ціна товару. Визначимо:
1) ціну рівноваги, тобто ціну, за якої попит дорівнює пропозиції; 2) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни; 3) зміну доходу внаслідок збільшення ціни на 10% від ціни рівноваги.

- Ціну рівноваги визначимо з умови $D(P) = S(P),$ або $\frac{P+17}{P+1} = P + 2.$

Розв'язками квадратного рівняння $P^2 + 2P - 15 = 0$ є числа $P_1 = 3,\ P_2 = -5.$ Ціна рівноваги $P = 3.$

Визначимо еластичності попиту і пропозиції. За формулою (5.5.9) отримаємо

$$E_P(D) = -\frac{16P}{(P+17)(P+1)},\ E_P(S) = \frac{P}{P+2}.$$

Для ціни рівноваги $E_{P=3}(D) \approx -0{,}64;\ E_{P=3}(S) = 0{,}6.$

Отримані значення еластичностей за абсолютною величиною менші від одиниці, тому попит і пропозиція цього товару в разі ринкової ціни нееластичні за ціною. Це означає, що внаслідок зміни ціни не буде різкої зміни попиту і пропозиції. Внаслідок збільшення ціни на 1% попит зменшиться на 0,64% , а пропозиція збільшиться на 0,6%.

Унаслідок збільшення ціни на 10% від ціни рівноваги попит зменшиться на $10 \cdot 0{,}64 = 6{,}4\%$, а дохід збільшиться на 3,6%. ❍

Розділ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Невизначений інтеграл

6.1.1. Первісна і невизначений інтеграл

Як уже зазначено, в економіці розглядають три типи величин: сумарні, середні і граничні, або маргінальні. Для опису *сумарної* величини використовують деяку функцію $F(x)$. Наприклад, сумарний дохід R чи сумарні затрати C є функціями від обсягу Q виробленої продукції, тобто $R = R(Q),\ C = C(Q)$. *Середня величина* AF є відношенням сумарної величини $F(x)$ до аргументу x, тобто $AF(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Наприклад, середній дохід $AR(Q) = \dfrac{R(Q)}{Q}$, середні витрати $AC(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q}$. *Гранична*, або *маргінальна*, *величина* дорівнює похідній від сумарної величини, тобто $MF(x) = F'(x)$. Наприклад, граничний дохід $MR(Q) = R'(Q)$, граничні витрати $MC(Q) = C'(Q)$. Якщо відома сумарна величина, то дуже просто знайти середню і, використовуючи похідну, граничну величину. Нехай відома гранична величина. Потрібно знайти сумарну величину, тобто за заданою функцією $f(x)$ потрібно знайти функцію $F(x)$ таку, що $F'(x) = f(x)$. Такі задачі виникають у різних галузях науки і техніки.

Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ на проміжку X, якщо $F(x)$ диференційована на X і в кожній точці цього проміжку похідна функції $F(x)$ дорівнює $f(x)$:

$$F'(x) = f(x),\ x \in X, \tag{6.1.1}$$

або

$$\mathrm{d}F(x) = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{6.1.2}$$

Зазначимо: якщо проміжок X замкнутий, то під похідною на кінці проміжку розуміють відповідну односторонню похідну. Оскільки функція, яка має в заданій точці похідну, є неперервною у цій точці, то первісна $F(x)$ функції $f(x)$ неперервна на проміжку X.

Наприклад, функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на проміжку $X = (-\infty; +\infty)$, тому що для кожного $x \in X$ виконується рівність $(\sin x)' = \cos x$. Функція $F(x) = \ln x$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на проміжку $X = (0; +\infty)$, тому що в кожній точці цього проміжку $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Зазначимо, що задача знаходження за заданою функцією $f(x)$ її первісної $F(x)$ має безліч розв'язків. Справді, якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$ теж первісна для цієї функції, тому що $(F(x) + C)' = f(x)$.

Теорема 6.1.1. Якщо похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю на проміжку X, то ця функція стала на проміжку X.

Теорема 6.1.2. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то будь-яка первісна функції $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$.

⏮ Нехай $\Phi(x)$ – будь-яка інша первісна для функції $f(x)$ на проміжку X. Тоді на цьому проміжку $\Phi'(x) = f(x)$. Обчислимо

$$\big(\Phi(x) - F(x)\big)' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

З теореми 6.1.1 отримаємо, що $\Phi(x) - F(x) = C$, тобто $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала. ⏭

З теореми 6.1.2 випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де C – довільна стала, а $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$ на проміжку X, утворює сім'ю первісних для функції $f(x)$.

Сукупність усіх первісних функцій для функції $f(x)$ на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають символом

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \qquad (6.1.3)$$

У цьому позначенні знак $\int$ називають *знаком інтеграла*, змінну x – *змінною інтегрування*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ – *підінтегральним виразом*.

Зазначимо, що будь-яку рівність, в обох частинах якої є невизначені інтеграли, розуміють як рівність множин.

Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то це означає, що під знаком інтеграла є диференціал функції $F(x)$:

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Будемо вважати, що цей диференціал під знаком інтеграла можна записувати так:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x). \qquad (6.1.4)$$

Дію знаходження первісної за її похідною або невизначеного інтеграла за заданою підінтегральною функцією називають *інтегруванням* цієї функції. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання. Для перевірки правильності виконаного інтегрування потрібно продиференціювати отриманий результат і одержати підінтегральну функцію.

За поняттям невизначеного інтеграла можна знайти сумарну величину, якщо відома маргінальна:

$$F(x) = \int Mf(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.1.5)$$

6.1.2. Головні властивості невизначеного інтеграла

1. Якщо функція $F(x)$ диференційована на деякому проміжку X, то на ньому

$$\int \mathrm{d}F = F(x) + C, \qquad (6.1.6)$$

або

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \qquad (6.1.7)$$

2. Якщо $f(x)$ має первісну на проміжку X, то для всіх $x \in X$ виконується рівність

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.1.8)$$

Зазначимо, що в цій рівності під інтегралом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ розуміємо довільну первісну $F(x)$ функції $f(x)$. Тому рівність (6.1.7) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні на проміжку X, то функція $f_1(x) + f_2(x)$ має первісну на цьому проміжку і

$$\int\big(f_1(x) + f_2(x)\big)\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.1.9)$$

4. Якщо функція $f(x)$ має первісну на проміжку X і k – дійсне число, то функція $k \cdot f(x)$ теж має первісну на X і для $k \neq 0$ справджується рівність

$$\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.1.10)$$

5. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні на проміжку X, а λ_1 та λ_2 – дійсні числа, то функція $\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x)$ має первісну на цьому проміжку і

$$\int\big(\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x)\big)\mathrm{d}x = \lambda_1 \cdot \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \cdot \int f_2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.1.11)$$

6.1.3. Табличні інтеграли

Операція відшукання невизначеного інтеграла, яку називають *інтегруванням*, є дією, оберненою до диференціювання. З використанням таблиці похідних можна записати таблицю інтегралів:

1) $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

5) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1;$

6) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x;$

7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C;$

8) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C;$

9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C;$

13) $\int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C;$

14) $\int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C;$

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Зазначимо, що похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією. Для невизначених інтегралів це твердження не завжди справджується, тобто інтеграли від деяких елементарних функцій не є елементарними функціями. Такими інтегралами є: $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$ – інтеграл Пуассона, $\int \sin(x^2) \mathrm{d}x$, $\int \cos(x^2) \mathrm{d}x$ – інтеграли Френзеля, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ – інтегральний логарифм, $\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, $\int \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$ – інтегральний синус і косинус.

Кожен з цих інтегралів не є елементарною функцією. Їх часто використовують у математиці та її застосуваннях. Наприклад, інтеграл Пуассона використовують у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

6.1.4. Головні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів з використанням головних властивостей і таблиці інтегралів *називають безпосереднім інтегруванням.*

Приклад 6.1.1. Обчислимо інтеграл $\int \frac{x^4 - 3\sqrt{x} + 2}{x} \mathrm{d}x.$

• $\int \frac{x^4 - 3\sqrt{x} + 2}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^4}{4} - 6\sqrt{x} + \ln x + C.$ ❍

Приклад 6.1.2. Граничний дохід фірми описує функція $MR = 70\,000 - Q^3$. Визначимо функцію сумарного доходу, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

• За формулою (7.1.5) отримаємо функцію сумарного доходу

$$R(Q) = \int \left(70\,000 - Q^3\right)\mathrm{d}Q = 70\,000Q - \frac{Q^4}{4} + C.$$

Оскільки нульовий випуск продукції дає нульовий дохід, то з умови $R(0) = 0$ отримаємо $C = 0$.

Отже, функція сумарного доходу $R(Q) = 70\,000Q - \frac{Q^4}{4}$. ❍

Метод заміни змінної. Заміна змінної інтегрування є одним з найефективніших способів зведення невизначеного інтеграла до табличного. Такий метод називають *методом заміни змінної*, або *методом підстановки*.

Теорема 6.1.3. Нехай функція $x = g(t)$ визначена і диференційована на деякому проміжку T, а X – множина значень цієї функції, яка є областю визначення функції $f(x)$. Тоді якщо функція $f(x)$ має первісну на множині X, то на множині T справджується рівність

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (6.1.12)$$

⏮ Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку X. Обчислимо похідну складеної функції $F\big(g(t)\big)$:

$$\big(F\big(g(t)\big)\big)' = F'_x\big(g(t)\big)g'(t) = f\big(g(t)\big)g'(t).$$

Отже, функція $f\big(g(t)\big)g'(t)$ на множині T має первісну $F\big(g(t)\big)$, а тому

$$\int f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(g(t)\big) + C = F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad ⏭$$

Вираз (6.1.11) називають *формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі.*

Приклад 6.1.3. Обчислимо інтеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

• Уведемо змінну $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Отримаємо

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)\cdot t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} + C. \qquad ❍$$

Інтегрування частинами.

Теорема 6.1.4. Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ визначені і диференційовані на проміжку X і функція $u'(x)v(x)$ має первісну на цьому проміжку. Тоді на проміжку X функція $u(x)v'(x)$ теж має первісну, і справджується формула

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.1.13)$$

⏮ За формулою диференціювання добутку

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Звідси

$$u(x)\cdot v'(x) = \big(u(x)\cdot v(x)\big)' - u'(x)\cdot v(x).$$

Оскільки у правій частині рівності перший доданок має первісну $u(x)\cdot v(x)$, а другий має первісну за умовою теореми, то ліва частина рівності теж має первісну, яку можна знайти за допомогою інтегрування. ⏭

Формулу (6.1.13) можна записати у вигляді

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u. \qquad (6.1.14)$$

Формули (6.1.13) і (6.1.14) називають *формулами інтегрування частинами*.

Зазначимо, що є деякі класи функцій, які зручно інтегрувати частинами. Наприклад, під час обчислення інтегралів $\int P_n(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)a^{kx}\,\mathrm{d}x$ потрібно позначити $u = P_n(x)$, $\mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \sin kx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \operatorname{tg} kx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \operatorname{ctg} kx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^{kx}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = a^{kx}\,\mathrm{d}x$.

Під час обчислення інтегралів $\int P_n(x)\arcsin kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arccos kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} kx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\ln(kx)\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\log_a(kx)\mathrm{d}x$ потрібно позначити $u = \arcsin kx$, $u = \arccos kx$, $u = \operatorname{arctg} kx$, $u = \operatorname{arcctg} kx$, $u = \ln(kx)$, $u = \log_a(kx)$, $\mathrm{d}v = P_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Під час обчислення інтегралів $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ потрібно двічі застосувати формулу інтегрування частинами.

Приклад 6.1.4. Обчислимо інтеграл $\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

• Двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = x^2; & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -e^{-x} \end{matrix}\right| = -x^2\cdot e^{-x} + 2\int xe^{-x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x; & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -e^{-x} \end{matrix}\right| = -x^2\cdot e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= -x^2\cdot e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C. \quad ❍$$

6.1.5. Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо окремий клас функцій, невизначені інтеграли від яких є елементарними функціями, і зазначимо метод їхнього знаходження. До таких належать *раціональні функції.* Клас раціональних функцій складається з *цілих ра-*

ціональних функцій, або *поліномів*, і *дробових раціональних функцій*, тобто функцій, які є відношенням двох поліномів.

Розглянемо цілу раціональну функцію

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 , \qquad (6.1.15)$$

де a_i, $a_n \neq 0$, $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ – дійсні числа. Невизначений інтеграл від $P_n(x)$ існує і є раціональною функцією. Справді,

$$\int P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right)\mathrm{d}x = a_n \int x^n\,\mathrm{d}x + a_{n-1}\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ ... + a_1 \int x\,\mathrm{d}x + a_0 \int \mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C.$$

Отже, внаслідок інтегрування полінома степеня n отримаємо поліном степеня $n+1$.

Розглянемо дробову раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (6.1.16)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – поліноми.

Алгебричний дріб (6.1.16) є *правильним*, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника. Якщо степінь чисельника більший, ніж степінь знаменника, то дріб *неправильний*. Якщо дріб (6.1.16) неправильний, то за допомогою ділення з нього можна вилучити цілу частину, тобто поліном

$$M(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + ... + c_1 x + c_0 .$$

Унаслідок ділення двох поліномів отримаємо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

де степінь полінома $S(x)$ менший, ніж степінь полінома $Q(x)$.

Отже, невизначений інтеграл від неправильного алгебричного дробу

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{S(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

З останньої рівності маємо, що інтегрування неправильних алгебричних дробів можна звести до інтегрування правильних.

Теорема 6.1.5. Нехай $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний алгебричний дріб. Якщо

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} ... (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s},$$

де a_i – попарно різні дійсні корені полінома $Q(x)$, і $D_j = b_j^2 - 4q_j < 0$, то існують дійсні числа $A_i^{(k)}$, $i = 1,2,...,r$, $k = 1,2,...,k_i$, $M_j^{(l)}$ і $N_j^{(l)}$, $j = 1,2,...,s$, $p = 1,2,...,m_j$ такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(k_1)}}{(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{k_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{k_r-1}}+$$

$$\ldots+\frac{A_r^{(k_r)}}{(x-a_r)}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}}+\ldots+\frac{M_1^{(m_1)}x+N_1^{(m_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)}+$$

$$\frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}+\frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+\ldots$$

$$+\frac{M_s^{(m_s)}x+N_s^{(m_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)}. \qquad (6.1.17)$$

Невідомі коефіцієнти $A_i^{(k)}, M_j^{(l)}$ і $N_j^{(l)}$ можна визначити *методом невизначених коефіцієнтів*. У розкладі (6.1.17) праву частину дробу зводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники дробів, які є в обох частинах рівності. Два поліноми дорівнюють один одному, якщо дорівнюють один одному коефіцієнти біля однакових степенів x. Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x, і отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_i^{(k)}, M_j^{(l)}$ і $N_j^{(l)}$.

З цієї теореми випливає, що інтегрування алгебричного дробу зведене до інтегрування *простих дробів*

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^k},\ k\neq 1,\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^n},\ p^2-4q<0.$$

Визначимо інтеграли від простих дробів.

1) $$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|+C;$$

2) $$\int\frac{B}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=B\int(x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x=B\int(x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a)=\frac{B\cdot(x-a)^{1-k}}{1-k}+C;$$

3) $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{Mx+\frac{Mp}{2}+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Приклад 6.1.5. Обчислимо інтеграл $\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}\mathrm{d}x$.

- Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}=\frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}.$$

Прирівняємо чисельники дробів:

$$A(x+6)+B(x-1)=x+2,\quad (A+B)x+6A-B=x+2.$$

Два поліноми дорівнюють один одному, якщо дорівнюють один одному коефіцієнти біля однакових степенів змінної:

$$\begin{cases}A+B=1;\\ 6A-B=2.\end{cases}$$

Звідси $A=\frac{3}{7},\ B=\frac{4}{7}$.

Отже,

$$\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}\mathrm{d}x=\frac{3}{7}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.\quad\bigcirc$$

6.1.6. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли від ірраціональних функцій, здебільшого, не є елементарними функціями. Розглянемо деякі типи ірраціональних функцій, інтеграли від яких є елементарними функціями. Для таких інтегралів можна визначити підстановки, які зводять невизначений інтеграл від ірраціональної функції до інтеграла від раціональної функції. Такий метод інтегрування ірраціональних функцій називають *методом раціоналізації*.

Обчислимо невизначений інтеграл

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right)\mathrm{d}x,\qquad(6.1.18)$$

де R – раціональна функція; числа $r_1, r_2, ..., r_s$ – раціональні, і $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Нехай m – спільний знаменник чисел $r_1, r_2, ..., r_s$. Тоді $r_i = \frac{p_i}{m}$, p_i – ціле, $i = 1,2,...,s$. Уведемо заміну

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{6.1.19}$$

Звідси

$$x = \frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m} = f(t). \tag{6.1.20}$$

Функція $f(t)$ раціональна, тому її похідна $f'(t)$ теж раціональна.

Обчислимо

$$\mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t; \tag{6.1.21}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{m \cdot r_i} = t^{p}, \; i = 1,2,...,s. \tag{6.1.22}$$

Підставимо (6.1.20) – (6.1.22) у (6.1.18):

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int R\left(\frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}, t^{p_1}, t^{p_2}, ..., t^{p_s}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t = \int R^*(t)\,\mathrm{d}t,$$

де $R^*(t) = R\left(\frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}, t^{p_1}, t^{p_2}, ..., t^{p_s}\right) f'(t)$ – раціональна функція.

Отже, обчислення інтеграла (6.1.18) зведене до інтегрування дробової раціональної функції. Після обчислення інтеграла потрібно використати заміну

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Частковими випадками інтеграла (6.1.18) є такі інтеграли:

$$\int R\left(x, (ax+b)^{r_1}, (ax+b)^{r_2}, ..., (ax+b)^{r_s}\right)\mathrm{d}x \text{ і } \int R\left(x, x^{r_1}, x^{r_2}, ..., x^{r_s}\right)\mathrm{d}x.$$

Приклад 6.1.6. Обчислимо інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x$.

• Найменше спільне кратне чисел $n_1 = 2$ і $n_2 = 3$ дорівнює 6, тому застосуємо підстановку $x = t^6$. Обчислимо $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$. Отримаємо

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x=\int \frac{t^2\cdot t^5\,\mathrm{d}t}{t^6\cdot\left(t^3+t^2\right)}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{t}-6\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=6\ln|t|-$$

$$-6\ln|t+1|+C=6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C. \qquad \text{❍}$$

6.1.7. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$. Такі інтеграли завжди можна звести до інтегралів від раціональної функції за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{6.1.23}$$

Справді,

$$x=2\operatorname{arctg}t,\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}; \tag{6.1.24}$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}; \tag{6.1.25}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{6.1.26}$$

тому

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int R^*(t)\,\mathrm{d}t.$$

П р и к л а д 6.1.7. Обчислимо інтеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+5}$.

• Для обчислення інтеграла використаємо універсальну тригонометричну підстановку. За формулами (6.1.23)–(6.1.26) отримаємо

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+5}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+6t+9}=$$

$$=2\int(t+3)^{-2}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C. \qquad \text{❍}$$

Зазначимо, що хоча універсальна тригонометрична підстановка завжди дає змогу звести інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ до інтеграла від раціональної фун-

кції, її застосування часто приводить до громіздких обчислень. Тому під час обчислення таких інтегралів використовують і інші методи. Розглянемо деякі випадки.

1. Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосуємо підстановку $t = \cos x$.
2. Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосуємо підстановку $t = \sin x$.
3. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 6.1.8. Обчислимо $\int \frac{\sin^3 x \, \mathrm{d}x}{\cos^4 x}$.

• Під час заміни $\sin x$ на $-\sin x$ підінтегральна функція змінює знак на протилежний, тому застосуємо підстановку $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$.

Тоді

$$\int \frac{\sin^3 x \, \mathrm{d}x}{\cos^4 x} = -\int \frac{\sin^2 x (-\sin x) \mathrm{d}x}{\cos^4 x} = -\int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}\cos x}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1 - t^2)\, \mathrm{d}t}{t^4} =$$

$$= -\int t^{-4} \, \mathrm{d}t + \int t^{-2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \quad ❍$$

Інтеграли $\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x$, $\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x$, $\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x$ можна обчислити, використавши формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).$$

Приклад 6.1.9. Обчислимо інтеграл $\int \sin 4x \cos 2x \, \mathrm{d}x$.

• Застосуємо формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, отримаємо

$$\int \sin 4x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\sin 6x + \sin 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int \sin 6x \, \mathrm{d}(6x) + \frac{1}{4}\int \sin 2x \, \mathrm{d}(2x) =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C. \quad ❍$$

6.2. Визначений інтеграл

6.2.1. Означення й умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b. \qquad (6.2.1)$$

Сукупність точок $x_0, x_1, ..., x_n$ будемо називати τ - *розбиттям відрізка* $[a;b]$. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ виберемо довільну точку ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = 1,2,3,...,n$ і утворимо суму

$$\sigma_\tau(f, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \sigma_\tau = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (6.2.2)$$

яку будемо називати *інтегральною сумою Рімана* для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Якщо функція $f(x)$ набуває невід'ємних значень на відрізку $[a;b]$, то геометрично інтегральна сума дорівнює сумі площ прямокутників з основами Δx_i та висотами $f(\xi_i)$ (рис. 6.2.1).

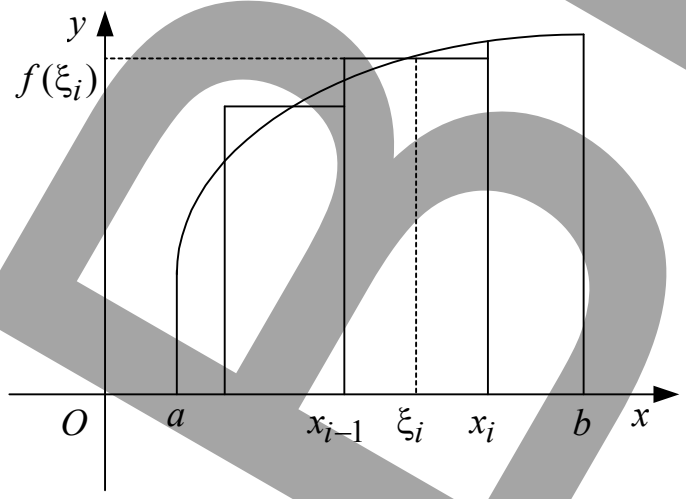


Рис. 6.2.1.

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка Δx_i заданого розбиття:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}. \qquad (6.2.3)$$

Зазначимо, що інтегральна сума відповідає заданому розбиттю τ і заданому вибору проміжних точок ξ_i.

Будемо розбивати відрізок $[a;b]$ за допомогою розбиттів $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, ...$ Послідовність розбиттів $\{\tau_k\}$ називають *основною*, якщо відповідна послідовність значень $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ збігається до нуля. На кожному відрізку

$\left[x_{i-1}^{(k)}; x_i^{(k)}\right]$ довжиною $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}$ виберемо довільну точку $\xi_i^{(k)}$, $x_{i-1}^{(k)} \le \xi_i^{(k)} \le x_i^{(k)}$, $i = 1,2,3,...,n$ і утворимо суму

$$\sigma_\tau^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)}. \qquad (6.2.4)$$

Функцію $f(x)$ називають *інтегрованою* на відрізку $[a;b]$, якщо існує таке число I, що для будь-якої основної послідовності розбиттів $\{\tau_k\}$ і для будь-якого вибору точок $\xi_i^{(k)}$ існує границя послідовності інтегральних сум $\sigma_\tau^{(k)}$, яка дорівнює I, тобто

$$I = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)}. \qquad (6.2.5)$$

У цьому випадку число I називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають символом

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.2.6)$$

Числа a і b називають, відповідно, *нижньою і верхньою межами інтегрування*, $f(x)$ *– підінтегральною функцією*, x *– змінною інтегрування.*

Це означення визначеного інтеграла мовою послідовностей. Можна дати означення визначеного інтеграла мовою "$\varepsilon - \delta$".

Число I називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого основного розбиття τ і для будь-якого вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon. \qquad (6.2.7)$$

Можна довести, що обидва означення рівносильні.

Сформулюємо необхідну умову інтегрованості функції.

Теорема 6.2.1. Інтегрована на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ обмежена на цьому відрізку.

⏮ Припустимо, що функція не обмежена на відрізку $[a;b]$. Тоді для будь-якого розбиття цього відрізка функція не обмежена хоча б на одному частковому інтервалі, наприклад, на $[x_0; x_1]$. Візьмемо на решті часткових відрізків довільні точки ξ_i, $i = 2,3,...,n$ і складемо суму

$$\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Оскільки функція не обмежена на відрізку $[x_0; x_1]$, то для будь-якого додатного числа M можна вибрати таку точку $\xi_1 \in [x_0; x_1]$, що

$$|f(\xi_1)| > \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Отримаємо, що

$$|\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)|\Delta x_1 - |\sigma'| > M.$$

Отже, якщо функція не обмежена на відрізку $[a;b]$, то можна вибрати таке розбиття цього відрізка, що інтегральна сума буде більшою, ніж будь-яке число $M > 0$. Це означає, що вона не має скінченної границі при $\lambda \to 0$, тобто $f(x)$ не інтегрована на відрізку $[a;b]$, що суперечить умові теореми. ⏭

Зазначимо, що обернене твердження неправильне, тобто обмежена на відрізку функція може бути неінтегрована на ньому. Наприклад, функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число;} \\ 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число} \end{cases}$$

неінтегрована на відрізку $[0;1]$. Справді, якщо для будь-якого розбиття цього відрізка вибрати ξ_i раціональними точками, то $f(\xi_i) = 1$, тому інтегральна сума $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$. Якщо ж для будь-якого розбиття цього відрізка вибрати ξ_i ірраціональними точками, то $f(\xi_i) = 0$, і інтегральна сума $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$. Отже, інтегральна сума не має границі, тому функція Діріхле неінтегрована на відрізку $[0;1]$.

Надалі будемо вважати, що функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$, тобто $m \leq f(x) \leq M$, якщо $a \leq x \leq b$.

Класи інтегрованих функцій.

Теорема 6.2.2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 6.2.3. Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$ і має на ньому скінченну кількість точок розриву, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 6.2.4. Монотонна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегрована на цьому відрізку.

Зазначимо, що вимога монотонності функції суттєва. Наприклад, функція Діріхле, яка не є монотонною на будь-якому відрізку, хоча й обмежена на ньому, неінтегрована. Вимога монотонності функції доповнює умову її обмеженості, яка є необхідною умовою інтегрованості функції на відрізку.

6.2.2. Головні властивості інтегрованих функцій

Головні властивості визначених інтегралів.

1. За означенням

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{6.2.8}$$

і

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2.9}$$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

3. Нехай функція інтегрована у найбільшому з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$. Тоді вона інтегрована у двох інших відрізках і

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2.10}$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то функція $k \cdot f(x)$ теж інтегрована на цьому відрізку і

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2.11}$$

5. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a;b]$, то функція $f(x) \pm g(x)$ теж інтегрована на цьому відрізку і

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2.12}$$

Оцінки інтегралів. Розглянемо властивості інтегралів, які виражені нерівностями.

1. Якщо функція $f(x)$ інтегрована і невід'ємна на відрізку $[a;b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0. \tag{6.2.13}$$

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a;b]$, і $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in [a;b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2.14}$$

3. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, $a < b$, то функція $|f(x)|$ теж інтегрована на $[a;b]$, і виконується нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \qquad (6.2.15)$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, $a<b$, і $m \le f(x) \le M$, якщо $a \le x \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a). \qquad (6.2.16)$$

З останньої властивості отримаємо теорему про середнє значення інтегрованої функції.

Теорема 6.2.5. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$ і $m \le f(x) \le M$, якщо $a \le x \le b$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a), \qquad (6.2.17)$$

де $m \le \mu \le M$.

⏮ Поділимо обидві частини нерівності (6.2.17) на $(b-a)$:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \le M.$$

Позначимо $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ і отримаємо (6.2.17). ⏭

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса числа m і M – її найменше і найбільше значення на цьому відрізку. Тоді за другою теоремою Больцано–Коші про проміжне значення функції існує таке $c \in [a;b]$, що $f(c) = \mu$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a). \qquad (6.2.18)$$

Рівність (6.2.18) називають формулою середнього значення, число $f(c)$ – середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Теорема 6.2.6. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a;b]$, функція $g(x)$ не змінює знака на цьому відрізку і m та M – точні нижня і верхня грані функції $f(x)$. Тоді

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (6.2.19)$$

де $m \le \mu \le M$.

Зазначимо таке: якщо функція $f(x)$ неперервна, то формулу (6.2.19) можна записати так:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (6.2.20)$$

де $c\in[a;b]$.

6.2.3. Головна формула інтегрального числення

Інтеграл зі змінною верхньою межею. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то, очевидно, вона інтегрована і на відрізку $[a;x]$, $a\le x\le b$. Розглянемо функцію

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (6.2.21)$$

Функцію $F(x)$, визначену на відрізку $[a;b]$, називають *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема 6.2.7. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, то функція $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ неперервна на цьому відрізку.

⏮ Нехай $x\in[a;b]$. Надамо йому деякого приросту Δx такого, що $(x+\Delta x)\in[a;b]$. Тоді

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

і

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

За умовою теореми функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, тому вона обмежена на ньому, тобто існує така стала $M>0$, що $|f(x)|\le M$ для всіх $x\in[a;b]$. Тоді

$$|\Delta F(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x} M\,\mathrm{d}t\right|\le M|\Delta x|.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F(x)=0$ для будь-якого $x\in[a;b]$, тобто $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. ⏭

Теорема 6.2.8. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і неперервна в точці $x_0 \in [a;b]$, то функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ диференційована в точці x_0 і

$$F'(x_0)=f(x_0). \tag{6.2.22}$$

Теорема 6.2.9. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку вона має первісну.

⏮ Якщо функція неперервна на відрізку, то за теоремою 6.2.2 вона інтегрована на цьому відрізку. Тому за формулою (6.2.22) функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ є первісною для функції $f(x)$. ⏭

Отже, внаслідок інтегрування зі змінною верхньою межею неперервної функції отримаємо первісну функції. Це означає, що така операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, тобто

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x), \quad a\le x\le b. \tag{6.2.23}$$

Формулу (6.2.23) *називають формулою диференціювання визначеного інтеграла по верхній межі*. З цієї формули випливає, що кожна первісна неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ має вигляд $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ $a\le x\le b$. Справді, функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ є первісною для функції $f(x)$, а кожна первісна відрізняється від $F(x)$ лише на сталу. Отже, маємо зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

З формули диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею можна отримати формулу диференціювання інтеграла зі змінною нижньою межею

$$\left(\int\limits_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=-f(x), \tag{6.2.24}$$

а також формулу диференціювання інтеграла зі змінними обома межами інтегрування:

$$\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x), \tag{6.2.25}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – диференційовані функції.

Формула Ньютона–Лейбніца. Виведемо головну формулу інтегрального числення.

Теорема 6.2.10 (Формула Ньютона–Лейбніца). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо $F(x)$ – первісна цієї функції на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (6.2.26)$$

⏮ Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має первісну, яку описує формула

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + C,$$

де C – довільна стала. Підставимо $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) + C,\ C = -F(a).$$

Тоді

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Якщо $x = b,$ то з останньої формули отримаємо

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a). \quad ⏭$$

Формулу (6.2.26) називають *головною формулою інтегрального числення,* або *формулою Ньютона–Лейбніца*

Формулу (6.2.26) можна записати так:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (6.2.27)$$

Формула Ньютона–Лейбніца виражає зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами і дає змогу досить просто обчислювати визначений інтеграл. Справді, якщо для $f(x)$ відома яка-небудь первісна, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ дорівнює різниці двох значень первісної: для $x = b$ і $x = a.$

Приклад 6.2.1. Обчислимо інтеграл $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}.$

• Первісною для функції $f(x) = \frac{1}{x+2}$ є функція $F(x) = \ln|x+2|.$ Тому

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_1^2 = \ln 4 - \ln 3. \qquad \text{❍}$$

6.2.4. Головні правила інтегрування

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Під час обчислення невизначеного інтеграла ефективно використовували метод заміни змінної. Виведемо аналогічну формулу для обчислення визначеного інтеграла.

Теорема 6.2.11. Нехай: 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$; 2) функція $\varphi(t)$ визначена і неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ і множиною її значень є відрізок $[a;b]$, причому $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (6.2.28)$$

⏮ Нехай $F(x)$ – будь-яка первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Розглянемо складену функцію $\Phi(t)=F\big(\varphi(t)\big)$. Функції $F(x)$ та $\varphi(t)$ диференційовані на відповідних проміжках, тому за правилом диференціювання складеної функції

$$\Phi'(x) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$

З цієї рівності випливає, що функція $\Phi(t)$ є первісною для функції $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, яка неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$. За формулою Ньютона–Лейбніца

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ця рівність доводить теорему. ⏭

Зазначимо, що під час обчислення визначеного інтеграла за допомогою заміни змінної не потрібно повертатися до старої змінної.

Приклад 6.2.2. Обчислимо $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$.

• Застосуємо підстановку $t=e^x$, $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. Якщо $x=0$, то $t=1$, якщо $x=1$, то $t=e$. За формулою (6.2.28) отримаємо

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\cdot\left(t+\dfrac{1}{t}\right)} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. \qquad \text{❍}$$

Формула інтегрування частинами. Виведемо формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Теорема 6.2.12. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$. Тоді

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x). \qquad (6.2.29)$$

⏮ Обчислимо $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Функція $u(x)\cdot v(x)$ первісна для функції $\big(u(x)\cdot v(x)\big)'$, тому за формулою Ньютона–Лейбніца

$$\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b.$$

За властивістю 5 визначеного інтеграла

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x). \qquad ⏭$$

Приклад 6.2.3. Обчислимо інтеграл $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

• Використаємо заміну змінної $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$, якщо $x = \dfrac{\pi^2}{4}$, то $t = \dfrac{\pi}{2}$. За формулою (6.2.28) отримаємо

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Проінтегруємо цей вираз частинами. Нехай $u = t$, $\mathrm{d}v = \sin t\,\mathrm{d}t$. Тоді $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, $v = -\cos t$. Отже,

$$2\cdot\int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t = 2\left(-t\cdot\cos t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t\right) = 2\sin t\Big|_0^{\pi/2} = 2. \qquad ❍$$

6.2.5. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі плоскої фігури. Розглянемо на площині Oxy фігуру, обмежену графіком неперервної додатної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox (рис. 6.2.1).

Таку фігуру будемо називати криволінійною трапецією. З визначення означеного інтеграла випливає, що площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.2.30)$$

Якщо фігура обмежена згори і знизу графіками неперервних на відрізку $[a;b]$ невід'ємних функцій $f(x)$ і $g(x)$ (рис. 6.2.2),

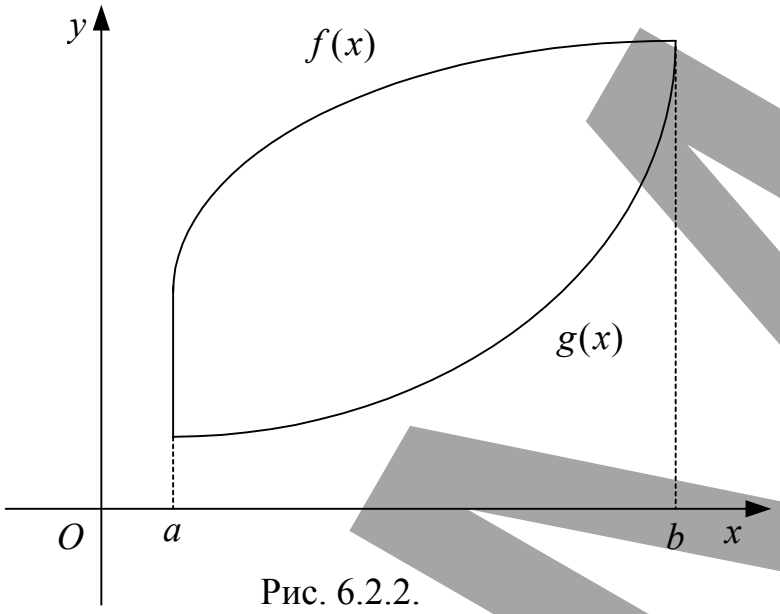


Рис. 6.2.2.

то її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}\,x. \qquad (6.2.31)$$

П р и к л а д 6.2.4. Обчислимо площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 6x - 7$ і прямою $y = x - 3$.

- Побудуємо графіки параболи і прямої (рис. 6.2.3).

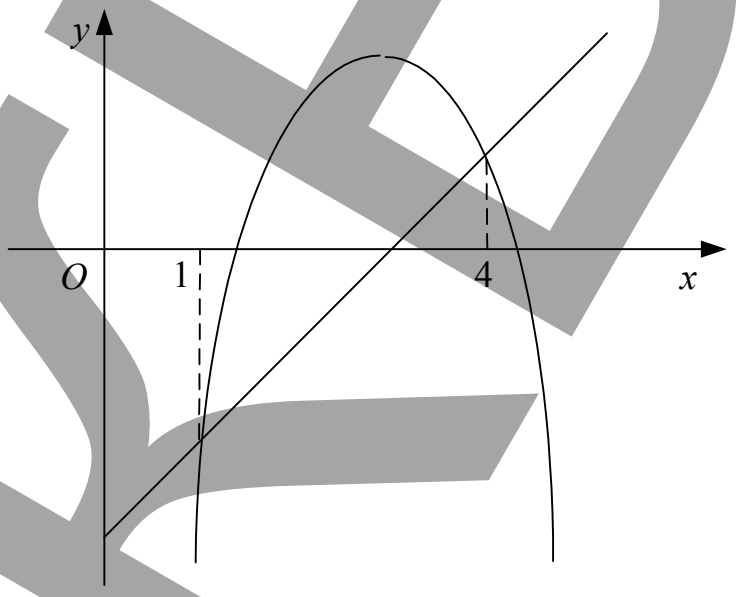


Рис. 6.2.3.

Визначимо абсциси точок перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 7; \\ y = x - 3. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

За формулою (6.2.31) отримаємо

$$S = \int_1^4 \Big((-x^2 + 6x - 7) - (x - 3)\Big)\mathrm{d}\,x = \int_1^4 \Big(5x - x^2 - 4\Big)\mathrm{d}\,x = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{9}{2} = 4{,}5. \qquad \text{❍}$$

6.2.6. Застосування визначених інтегралів до задач економіки

Розглянемо деякі задачі і моделі економіки, які можна розв'язати, використовуючи поняття інтеграла.

Обчислення обсягу продукції за відомою продуктивністю. Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну в часі продуктивності деякого підприємства. Визначимо обсяг продукції, виготовленої підприємством протягом проміжку часу $[0; T]$.

Розіб'ємо відрізок $[0; T]$ на проміжки часу точками

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = T.$$

Протягом часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ підприємство виробить $\Delta U_i = f(\xi_i)\Delta t_i$ продукції. За час $[0; T]$ підприємство виробить продукції

$$U = \sum_{i-1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i\,.$$

Якщо $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta t_i\} \to 0,$ то отримаємо обсяг продукції, виробленої за проміжок часу $[0; T]$,

$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}\,t\,. \qquad (6.2.32)$$

П р и к л а д 6.2.5. Визначимо денний виробіток за восьмигодинний робочий день, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за таким законом:

$$p = f(t) = p_0\left(-\frac{0{,}2t^2}{t_0^2} + \frac{1{,}6t}{t_0} + 3\right),$$

де t – час, год, p_0 – розмірність продуктивності, одиниця продукції за год, t_0 – розмірність часу, год.

• Формула продуктивності праці відображає реальний процес роботи: продуктивність спочатку зростає, досягаючи максимуму в середині робочого дня при $t = 4$ год, а потім спадає (рис. 6.2.4).

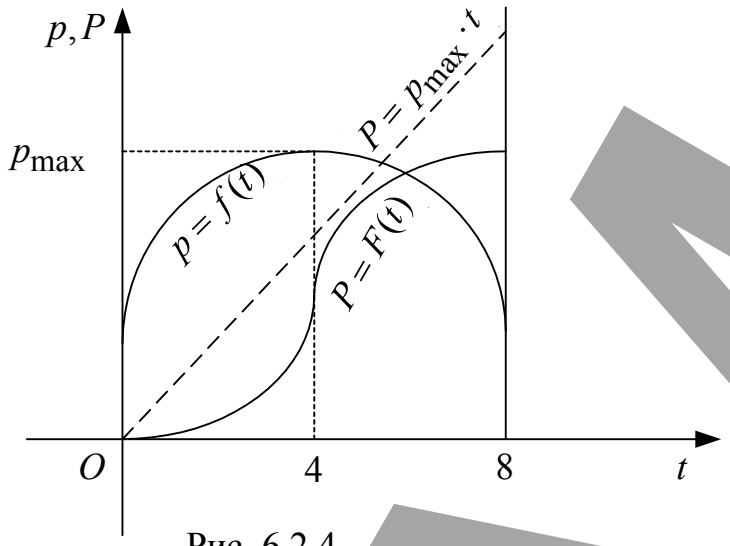


Рис. 6.2.4.

За формулою (6.2.32) отримаємо денний виробіток

$$P = p_0 \cdot t_0 \int_0^8 \left(-\frac{0{,}2t^2}{t_0^2} + \frac{1{,}6t}{t_0} + 3 \right) \mathrm{d}t = p_0 \cdot t_0 \left(-\frac{0{,}2t^3}{3t_0^2} + \frac{0{,}8t^2}{t_0} + 3t \right) \Bigg|_0^8 =$$

$$= 41{,}07\, p_0 \cdot t_0 = 41{,}07 a_0,$$

де a_0 – множник, що має розмірність одиниці продукції.

Якби протягом усього робочого дня працювали з максимальною продуктивністю $p_{\max} = 6{,}2 p_0$, то за день виробили б $P_{\max} = 49{,}6 a_0$ продукції, або приблизно на 21% більше. ❍

Обчислення коефіцієнта нерівномірності розподілу доходів. Розглянемо функцію $y = f(x)$, де y – частка сукупного доходу, який отримує частка x найменш забезпеченого населення. Наприклад, рівність $y(0{,}7) = 0{,}3$ означає, що 70% найменш забезпеченого населення отримує 30% сукупного доходу. Очевидно, що $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \le x$. Припустимо, що нема людей, які мають нульовий дохід, тобто $y(0) = 0,$ і весь дохід отримує все населення, тобто $y(1) = 1.$ Графік такої функції $y = f(x)$ називають *кривою Лоренца* (рис. 6.2.5).

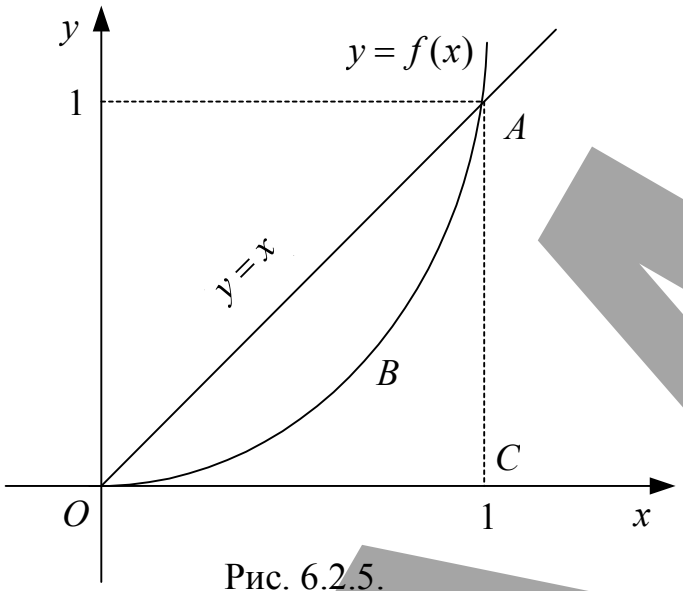


Рис. 6.2.5.

Якби розподіл доходів був досконалим, то, наприклад, 20% населення отримували б 20% сукупного доходу, 30% населення – 30% сукупного доходу. У цьому випадку кривою розподілу доходу була б пряма $y = x$. Відхилення реального розподілу доходів від ідеального вимірюють відношенням L площі фігури OBA до площі трикутника OCA, тобто

$$L = \frac{S_{OBA}}{S_{\Delta OCA}}. \qquad (6.2.33)$$

Число L називають *коефіцієнтом Джині*, або коефіцієнтом нерівномірності розподілу доходів. Очевидно, що $0 \le L \le 1$.

Приклад 6.2.6. Унаслідок статистичних досліджень розподілу доходів у деякій країні отримали, що криву Лоренца описує рівняння $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка доходів. Обчислимо коефіцієнт Джині.

- За формулою (6.2.33) коефіцієнт Джині

$$L = \frac{S_{OBA}}{S_{\Delta OCA}}.$$

Очевидно, що $S_{\Delta OCA} = 0{,}5$.

$$S_{OBA} = \int_0^1 \left(x - 1 + \sqrt{1 - x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x - 0{,}5.$$

Для обчислення інтеграла $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$ використаємо підстановку $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t$. Тоді

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, коефіцієнт Джині $L = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$. Досить велике значення L дає змогу зробити висновок про суттєво нерівномірний розподіл доходів у цій країні. ❍

6.3. Невластиві інтеграли

Під час уведення поняття визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ як границі інтегральних сум припускали, що підінтегральна функція $f(x)$ обмежена і відрізок інтегрування $[a;b]$ скінченний. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то наведене вище означення визначеного інтеграла не має змісту, тобто інтеграл не існує у звичному, властивому сенсі. Справді, якщо відрізок інтегрування нескінченний, то очевидно, що його не можна розбити на скінченну кількість відрізків, що мають скінченну довжину; якщо підінтегральна функція не обмежена, то інтегральна сума не має скінченної границі.

У цих випадках можна узагальнити поняття визначеного інтеграла, увівши поняття *невластивого інтеграла*.

6.3.1. Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Поняття невластивого інтеграла першого типу. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a;A]$. У цьому випадку для будь-якого $A > a$ існує визначений інтеграл $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. Скінченну чи нескінченну границю цього інтеграла, якщо $A \to \infty$, називають *невластивим інтегралом першого типу* від функції $f(x)$ в проміжку $[a;+\infty)$ і позначають

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3.1)$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл (4.3.1) *збіжний*, а функцію $f(x)$ називають інтегрованою у нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Якщо границя (6.3.1) нескінченна або не існує, то невласний інтеграл *розбіжний.*

Аналогічно можна ввести поняття невластивого інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (B < a), \tag{6.3.2}$$

та інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{B\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int\limits_{B}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.3.3}$$

Для будь-якого a виконується рівність

$$\int\limits_{B}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{B}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Якщо при $B \to -\infty$, $A \to +\infty$ існує границя для інтеграла, що є у лівій частині останньої рівності, то існують границі (6.3.1) та (6.3.2).

Отже, для будь-якого a

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3.4}$$

за умови, що існують інтеграли у правій частині цієї рівності.

Геометрично невластивий інтеграл (6.3.1) першого типу – це площа нескінченної області, обмеженої згори графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, знизу – віссю Ox і прямою $x = a$.

Аналогічно можна інтерпретувати невластиві інтеграли (6.3.1) та (6.3.2).

Приклад 6.3.1. Обчислимо $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

• За означенням невластивого інтеграла першого типу

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \lim_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} e^{-x^3}\,\mathrm{d}(-x^3) =$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{A\to\infty} e^{-x^3}\Big|_{0}^{A} = -\frac{1}{3} \lim_{A\to\infty} e^{-A^3} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки існує скінченна границя, то початковий інтеграл збіжний. ❍

Приклад 6.3.2. Дослідимо, за яких значень параметра α збіжний невластивий інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$, $a > 0$.

• Якщо $\alpha = 1$, то за означенням для будь-якого $A > a$

$$\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x| \Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \ln A - \lim_{A\to+\infty} \ln a = \infty.$$

Якщо $\alpha \neq 1,$ то для будь-якого $A > a$

$$\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} - 1 \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{якщо } \alpha > 1, \\ \infty & \text{якщо } \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже, інтеграл $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ збіжний для $\alpha > 1$ і розбіжний для $\alpha \leq 1.$ ❍

Збіжність невластивих інтегралів першого типу. Іноді потрібно дослідити збіжність чи розбіжність невластивого інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,$ не обчислюючи його значення. У цьому випадку використовують різні ознаки збіжності.

Якщо функція $y = f(x)$ невід'ємна, то інтеграл $\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$ є монотонно зростаючою функцією від аргументу $A.$ У цьому випадку справджується така ознака збіжності невластивого інтеграла першого типу.

Теорема 6.3.1. Для збіжності невластивого інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ від додатної функції $y = f(x)$ необхідно і достатньо, щоб у разі зростання A інтеграл $F(A) = \int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$ був обмежений згори:

$$\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Якщо ця умова не виконується, то невластивий інтеграл розбіжний.

З цієї ознаки отримаємо *теорему порівняння* для інтегралів від додатних функцій.

Теорема 6.3.2. Якщо $f(x) \le g(x)$ хоча б для $x \ge A,\ A \ge a,$ то зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, а з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ – розбіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$

Приклад 6.3.3. Дослідимо збіжність інтеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+e^x\right)}.$

• Порівняємо підінтегральну функцію з функцією $g(x)=\frac{1}{x^2}.$ Очевидно, що $\frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}$ для $x \ge 1.$ Інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ збіжний, тому за ознакою порівняння збіжний інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+e^x\right)}.$ ❍

Приклад 6.3.4. Дослідимо збіжність інтеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3}}.$

• Для $x \ge 1$ виконується нерівність $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}}.$ Оскільки $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ збіжний, то за теоремою порівняння інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3}}$ збіжний. ❍

Доведено таке: якщо збіжний інтеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x,$ то збіжний інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$ Зазначимо, що зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ не випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x.$ Якщо зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x,$ то інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ – *абсолютно інтегрованою* в проміжку $[a;+\infty).$

6.3.2. Невластиві інтеграли від необмежених функцій

Поняття невластивого інтеграла другого типу. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Функція $y = f(x)$ інтегрована на кожному проміжку $[a; b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b - a$, але не інтегрована на кожному проміжку $[b-\varepsilon; b]$. У цьому випадку точку $x = b$ називають *особливою*.

Скінченну чи нескінченну границю інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ при $\varepsilon \to 0$ називають невластивим інтегралом другого типу від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3.5)$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *називають збіжним*, а функцію $f(x)$ – інтегрованою на відрізку $[a; b]$. В іншому випадку інтеграл називають *розбіжним*.

Якщо особливою є точка $x = a$, то невластивий інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ визначений рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3.6)$$

Якщо обидві точки $x = a$, $x = b$ – особливі, то невластивий інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ визначений рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \delta \to +0}} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3.7)$$

Рівність (6.3.7) можна замінити рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a < c < b, \qquad (6.3.8)$$

у припущенні, що існують обидва інтеграли у правій частині цієї рівності.

У випадку, коли особливою є точка $x = c$, $a < c < b$, невластивий інтеграл визначений рівністю

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (6.3.9)$$

Приклад 6.3.5. Обчислимо невластивий інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

• Точки $x=-1$ та $x=1$ – особливі, тому що підінтегральна функція в них необмежена. Запишемо цей інтеграл у вигляді

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{0}^{1-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\delta}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(-1+\varepsilon)+\lim_{\delta\to+0}\arcsin(1-\delta)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\ \text{❍}$$

Приклад 6.3.6. Дослідимо, для яких значень показника α збіжний невластивий інтеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}$.

• Точка $x=a$ особлива. Якщо $\alpha=1,$ то

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x-a|\Big|_{a}^{b}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|b-a|-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=\infty.$$

Це означає, що невластивий інтеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}$ при $\alpha=1$ розбіжний. Нехай $\alpha\neq1.$ Тоді

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}(b-a)^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-\alpha}.$$

Якщо $\alpha<1,$ то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-\alpha}=0,$ і інтеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}$ збіжний; якщо ж $\alpha>1,$ то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-\alpha}=\infty$ і інтеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}$ розбіжний.

Отже,

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(b-a)^{1-\alpha} & \text{якщо } \alpha<1,\\ \infty & \text{якщо } \alpha\geq1.\end{cases}\qquad\text{❍}$$

Аналогічно можна дослідити збіжність невластивого інтеграла $\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-b)^{\alpha}}$.

Умови й ознаки збіжності невластивих інтегралів другого типу. Будемо вивчати невластивий інтеграл другого типу, визначений формулою (6.3.7), тобто у випадку, коли особливою є точка $x=b$. Інші випадки досліджують аналогічно. Сформулюємо необхідну і достатню умову існування невластивого інтеграла другого типу.

Теорема 6.3.3. Нехай функція $f(x)$ невід'ємна. Для того, щоб існував невластивий інтеграл другого типу $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, необхідно і достатньо, щоб інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$, $\varepsilon>0$ був обмежений згори

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \le L.$$

Якщо ця умова не виконується, то інтеграл розбіжний.

Справджується теорема порівняння для невластивих інтегралів другого типу.

Теорема 6.3.4. Якщо $f(x)\le g(x)$ для всіх $a\le x<b$, то зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, а з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Приклад 6.3.7. Дослідимо збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}+4x^3}$.

- Для $0\le x\le 1$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$ збіжний, то за теоремою порівняння інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}+4x^3}$ збіжний. ❍

Якщо одночасно збіжні інтеграли $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ та $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ називають збіжним *абсолютно*, а функцію $f(x)$ – *абсолютно інтегрованою на відрізку* $[a;b]$.

Невластиві інтеграли можна застосовувати до розв'язування геометричних та економічних задач.

Приклад 6.3.8. Обчислимо площу фігури, обмежену графіком функції $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ і віссю Ox (рис. 6.3.1).

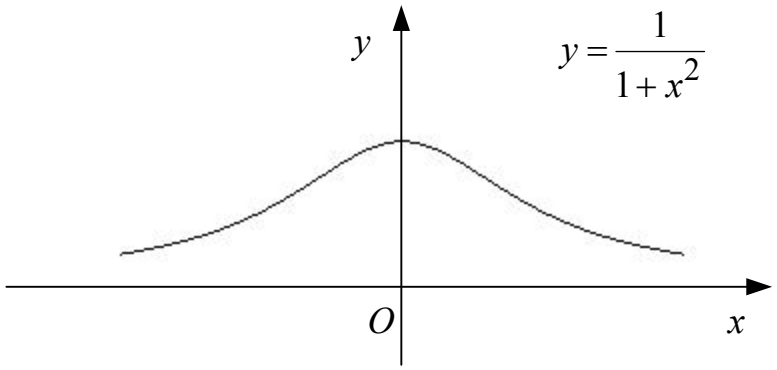


Рис. 6.3.1.

• Площа фігури

$$S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int\limits_A^B\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}B-\operatorname{arctg}A\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi. \qquad \text{❍}$$

Визначення періоду окупності інвестицій. Для порівняння затрат і доходів, отриманих у різні моменти часу, використовують поняття вартості, зведеної до деякого фіксованого моменту часу t_0. Нехай $t_0=0$. Нехай у момент часу t_0 в підприємство вкладені інвестиції a грн. Унаслідок цього випуск продукції за одиницю часу збільшився, і в момент часу t, $t\ge 0$, додатковий випуск становив $b(t)$ грн. Відомо, що величина $b(t)$, зведена до моменту часу $t_0=0$, дорівнює $e^{-it}b(t)$, де i – банківська норма відсотків за умови безперервного нарахування. Тоді сумарне збільшення випуску продукції за період часу $[0;T]$, зведене до моменту часу $t_0=0$,

$$\int_0^T e^{-it} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

Обчислимо $\pi(T)$ – прибуток, отриманий від інвестицій за період часу $[0;T]$:

$$\pi(T) = \int_0^T e^{-it} b(t)\,\mathrm{d}t - a.$$

У випадку $b(t) = b$

$$\pi(T) = \int_0^T e^{-it} b\,\mathrm{d}t - a = -b\left(\frac{e^{-it}}{i}\right)\Bigg|_0^T - a = \frac{b\left(1 - e^{-iT}\right)}{i} - a.$$

Щоб інвестиції окупились, потрібно, щоб виконувалась умова $\pi(T) \geq 0$, тобто

$$\frac{b\left(1 - e^{-iT}\right)}{i} \geq a.$$

З цієї нерівності

$$T \geq \frac{1}{i} \ln \frac{b}{b - ai}$$

за умови, що $b - ai \geq 0$.

Якщо $T \to \infty$, то прибуток

$$\pi = \int_0^\infty e^{-it} b\,\mathrm{d}t - a = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-it} b\,\mathrm{d}t - a = -b \lim_{T\to\infty} \left(\frac{e^{-it}}{i}\right)\Bigg|_0^T - a = \frac{b}{i} - a.$$

Це означає, що неможливо отримати прибуток, більший від $\frac{b}{i} - a$.

Приклад 6.3.9. Визначимо дисконтну вартість під час експлуатації земельної ділянки у випадку безперервної відсоткової ставки r.

• Якщо r – неперервна відсоткова ставка, а $R(t)$ – відповідна рента, то дисконтну вартість земельної ділянки можна отримати за формулою

$$\Pi = \int_0^\infty R(t) e^{-rt}\,\mathrm{d}t.$$

Нехай $R(t) = 10e^{-0{,}7t}$ тисяч гривень за рік, $r = 10\%$. У цьому випадку дисконтна вартість

$$\Pi = \int_0^{\infty} 10e^{-0,7t}e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = 10\int_0^{\infty} e^{-0,8t}\,\mathrm{d}t = 10\lim_{T\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-0,8t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{T\to\infty} 10\left(\frac{e^{-0,8t}}{-0,8}\right)\Bigg|_0^T = \frac{10}{0,8} = 12,5 \text{ тис. грн.}$$

Зазначимо, що у заданий момент часу вартість ділянки дорівнює $R(0) = 10$ тис. грн. ❍

Розділ 7. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

7.1. Функції багатьох змінних та їхні границі. Неперервність

У попередніх розділах ми вивчали функції однієї змінної. Однак багато явищ, зокрема й економічних, залежить від багатьох чинників. Для вивчення таких залежностей уводять функції багатьох змінних.

7.1.1. Поняття евклідового простору та функції багатьох змінних

Евклідів простір та множини у ньому. Викладаючи теорію функцій багатьох змінних, будемо використовувати геометричну термінологію, яка узагальнює і формалізує наші уявлення про площину і реальний тривимірний геометричний простір.

Множину всіх можливих упорядкованих сукупностей $(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називають *n-вимірним координатним простором* і позначають A^n. Кожну упорядковану сукупність $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *точкою* n-вимірного координатного простору і записують $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називають координатами точки M. Координатний простір A^n можна розглядати як множину всіх векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо сумою векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ назвати вектор $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, а добутком вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на дійсне число λ – вектор $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, то отримаємо лінійний простір A^n.

У курсі аналітичної геометрії введено поняття координатної площини і координатного простору. Узагальненням цих понять є координатний простір A^n.

Уведемо поняття *метрики* (*відстані*) між двома точками деякої множини. Якщо кожній парі точок M_1, M_2 деякої множини поставити у відповідність певне невід'ємне число $\rho(M_1, M_2)$ за правилом, що задовольняє такі три аксіоми:
1) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$, причому $\rho(M_1, M_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $M_1 = M_2$;
2) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;

3) $\rho(M_1,M_2)\le\rho(M_1,M_3)+\rho(M_3,M_2)$,

то кажуть, що на цій множині задана метрика (відстань) $\rho(M_1,M_2)$.

Координатний простір A^n називають *n-вимірним евклідовим простором*, якщо відстань між будь-якими двома його точками $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ та $M''(x_1'', x_2'', ..., x_n'')$ можна обчислити за формулою

$$\rho(M',M'')=\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+...+(x_n'-x_n'')^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i'')^2}. \quad (7.1.1)$$

Евклідів n-вимірний простір будемо позначати символом R^n.

Зазначимо, що простір R^1 із метрикою

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{|x_1-x_2|^2}=|x_1-x_2|, \quad (7.1.2)$$

де x_1 і x_2 – координати точок M_1 і M_2, збігається з числовою прямою, простір R^2 з метрикою

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad (7.1.3)$$

де $(x_i;y_i)$ – координати точок M_i, $i=1,2$ – з координатною площиною, а простір R^3 з метрикою

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \quad (7.1.4)$$

де $(x_i;y_i;z_i)$ – координати точок M_i, $i=1,2,3$, – з координатним простором, які вивчають в аналітичній геометрії. Уведене поняття n-вимірного евклідового простору є узагальненням понять евклідової площини й евклідового простору, вивчених в аналітичній геометрії.

Розглянемо деякі множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n.

1. Множину $\{M\}$ усіх точок M евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють нерівність

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2<R^2, \quad (7.1.5)$$

називають *відкритою n-вимірною кулею* з радіусом R і центром у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Відкрита n-вимірна куля з радіусом R і центром у точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ – це множина всіх точок M простору R^n, які задовольняють нерівність

$$\rho(M,M_0)<R. \quad (7.1.6)$$

2. Множину $\{M\}$ усіх точок M евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють нерівність

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\le R^2, \quad (7.1.7)$$

або

$$\rho(M, M_0) \le R, \tag{7.1.8}$$

називають *замкненою n-вимірною кулею* з радіусом R і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

3. Множину $\{M\}$ усіх точок M евклідового простору R^n, координати $x_1, x_2, ..., x_n$ яких задовольняють нерівність

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + ... + \left(x_n - x_n^0\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2 = R^2, \tag{7.1.9}$$

або

$$\rho(M, M_0) = R, \tag{7.1.10}$$

називають *n-вимірною сферою* з радіусом R і центром у точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Зазначимо: якщо до відкритої n-вимірної кулі з радіусом R і центром у точці M_0 приєднати n-вимірну сферу з радіусом R і центром у точці M_0, то отримаємо замкнену n-вимірну кулю з радіусом R і центром в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

4. Відкриту n-вимірну кулю з радіусом $\varepsilon > 0$ і центром у точці M_0 називають *ε-околом точки M_0* і позначають $U(M_0; \varepsilon)$.

5. Відкриту n-вимірну кулю з радіусом $\varepsilon > 0$ і центром в точці M_0, з якої видалена сама точка M_0, називають *проколеним ε-околом точки M_0* і позначають $\overset{\circ}{U}(M_0; \varepsilon)$.

6. Точку M множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *внутрішньою точкою* цієї множини, якщо існує деякий ε-окіл точки M, усі точки якого належать множині $\{M\}$ (рис. 7.1.1).

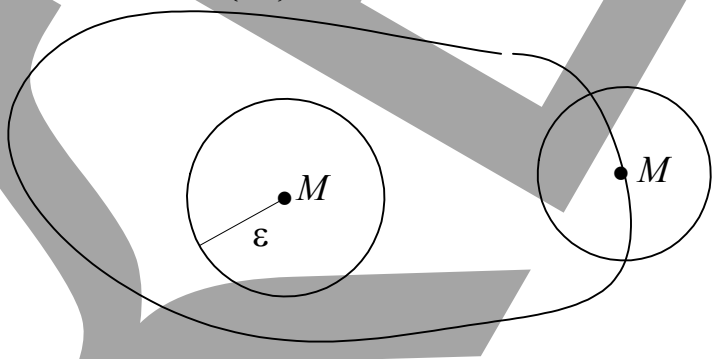


Рис. 7.1.1.

7. Множину, яка складається тільки зі своїх внутрішніх точок, називають *відкритою множиною*.

Прикладом відкритої множини в просторі R^1 є інтервал $(a; b)$, а в просторі R^2 – кільце $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$, $a < b$.

8. Будь-яку відкриту множину, яка містить точку M, називають околом цієї точки і позначають $U(M)$. Окіл точки M без самої точки M називають проколеним околом цієї точки і позначають $\overset{\circ}{U}(M)$.

9. Точку M множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *зовнішньою точкою* цієї множини, якщо існує деякий ε-окіл точки M, усі точки якого не належать множині $\{M\}$.

10. Точку M множини $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *межовою точкою* множини $\{M\}$, якщо ця точка не є ні внутрішньою, ні зовнішньою точкою цієї множини. Зазначимо, що точка M є межовою точкою множини $\{M\}$ тоді і тільки тоді, коли в будь-якому ε-околі цієї точки є точки, що належать множині $\{M\}$, і точки, які їй не належать (рис. 7.1.1). Межова точка може належати або не належати цій множині. Наприклад, кожна точка n-вимірної сфери з радіусом R і центром у точці M_0 є межовою як для відкритої n-вимірної кулі з центром в точці M_0 і їй не належить, так і для замкненої, якій належить. Очевидно, що межові точки не можуть бути ні внутрішніми, ні зовнішніми точками множини.

11. Довільну множину $\{M\}$ точок евклідового простору R^n називають *замкненою*, якщо ця множина містить усі свої межові точки.

12. Множину $\{M\}$ точок M евклідового простору R^n називають *обмеженою*, якщо існує n-вимірна куля, яка містить усі точки цієї множини.

13. Множину $\{M\}$ точок M евклідового простору R^n називають *зв'язною*, якщо будь-які дві точки цієї множини можна з'єднати неперервною лінією, яка належить множині $\{M\}$.

14. Кожну відкриту і зв'язну множину в евклідовому просторі R^n називають *областю*.

15. Якщо множина $\{M\}$ є областю, то множину $\overline{\{M\}}$, отриману приєднанням до $\{M\}$ усіх її межових точок, називають *замкненою областю*.

Наприклад, відкрита n-вимірна куля є обмеженою, зв'язною і відкритою множиною, тобто вона є обмеженою областю в евклідовому просторі R^n.

16. Область, будь-які дві точки якої можна сполучити відрізком прямої, усі точки якого належать цій області, називають *опуклою*.

17. Точку M простору R^n називають граничною точкою множини $\{M\}$, якщо будь-який окіл точки M містить хоча б одну точку множини $\{M\}$.

Поняття функції багатьох змінних. Якщо кожній точці M з множини $\{M\}$ точок n-вимірного евклідового простору R^n за деяким законом f відповідає певне дійсне число u, то на множині $\{M\}$ задана функція $u = u(M)$ або $u = f(M)$. У цьому випадку множину $\{M\}$ називають областю задання, або областю визначення, функції $u = f(M)$ і позначають $D(f)$. Число u, яке відпові-

дає точці M, називають *значенням функції в цій точці*. Сукупність $U = \{u\}$ усіх значень функції $u = f(M)$ називають множиною значень цієї функції і позначають $E(f)$.

Оскільки точка M має координати $x_1, x_2, ..., x_n$, то функцію n змінних записують $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називають аргументами функції f, а число $f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ – значенням функції в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

Функції багатьох змінних можна задавати аналітичним і табличним способами. Аналітичним способом функцію задають за допомогою формули.

Розглянемо приклади деяких функцій багатьох змінних, які задані аналітично:

1) $u = f(M) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}$. Областю визначення цієї функції є множина точок, координати яких задовольняють умову $1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} \geq 0,$ або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$. Ця множина – еліпсоїд з півосями a, b, c;

2) $u = f(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}}$.

Областю визначення цієї функції є множина точок, координати яких задовольняють умову $1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 > 0,$ або $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < 1$. Це є відкрита n-вимірна куля в евклідовому просторі.

Часто функцію багатьох змінних задають табличним способом. Наприклад, розглянемо функцію, яка описує залежність обсягу Q виробленої продукції від витрат капіталу K та трудових ресурсів L.

	L			
K	0	10	20	30
0	0	0	0	0
5	0	25	39	48
10	0	32	48	54
15	0	37	50	61
20	0	43	55	67

З таблиці видно, що зі збільшенням затрат хоча б одного ресурсу зростає виробництво продукції, а також, що однаковий результат можна отримати для різних затрат робочої сили та капіталу: $Q(5;30) = Q(10;20)$.

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена на множині $\{M\} \subset R^n$. *Графіком* цієї функції називають множину точок

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in \{M\}\}$$

простору R^{n+1}. Зокрема, графіком функції двох змінних $z = f(x,y), (x,y) \in D$ є множина точок $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x,y)) \in R^3 \mid (x,y) \in D\}$, яка за певних умов, накладених на функцію f, є деякою поверхнею S у просторі R^3.

Множиною рівня функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка відповідає числу C, називають множину точок $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють рівняння

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C. \tag{7.1.11}$$

У випадку функції двох змінних це рівняння має вигляд

$$f(x,y) = C. \tag{7.1.12}$$

Якщо (7.1.12) є рівнянням лінії, то множину рівня називають *лінією рівня.* Зазначимо, що для деяких значень параметра C множина рівня може бути порожньою. Якщо взяти числа $C_1, C_2, ..., C_n, ...$, які утворюють арифметичну прогресію з різницею d, то отримаємо набір ліній рівня, за взаємним розміщенням яких можна робити висновок про графік функції, тобто про форму поверхні. Там, де лінії розміщені густіше, функція змінюється швидше, а в тих місцях, де лінії рівня розміщені рідше, функція змінюється повільніше.

П р и к л а д 7.1.1. Побудуємо лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

• Лінії рівня цієї функції визначає рівняння $x^2 + y^2 = C$, $0 \le C < +\infty$. Надаючи C різних значень, отримаємо множину ліній рівня, які є концентричними колами з центром у початку координат і радіусами $R = \sqrt{C}$. Якщо $C = 0$, то коло вироджується в точку $O(0;0)$ (рис. 7.1.2).

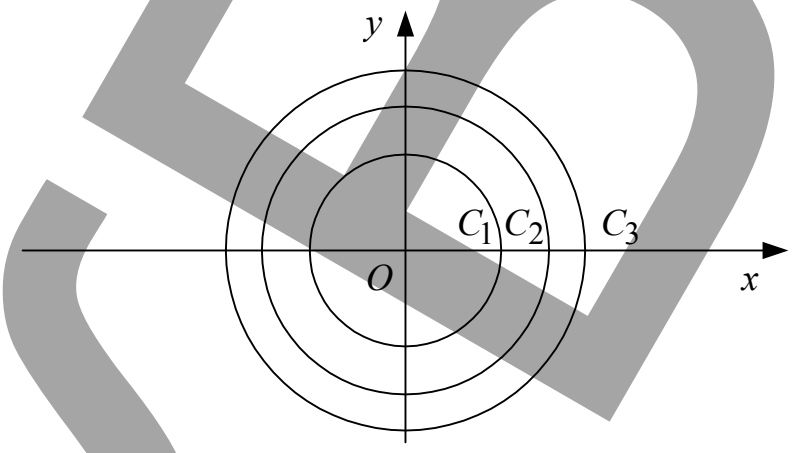


Рис. 7.1.2.

З аналітичної геометрії відомо, що графіком цієї функції є параболоїд обертання.

Функцію $f(M)$, називають обмеженою згори (знизу) на множині $\{M\} \in R^n$, якщо існує таке число $B\,(b)$, що для всіх $M \in \{M\}$ виконується нерівність $f(M) \le B$ $(f(M) \ge b)$.

Функції багатьох змінних в економіці. Функції багатьох змінних використовують для математичного опису економічних понять і явищ. Наведемо приклади найпоширеніших з них.

Виробничі функції. Залежність між виробничими затратами і випуском продукції описують виробничі функції. Нехай є n видів виробничих затрат, яким відповідають незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо y – обсяг випущеної продукції, то функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *виробничою функцією*. Оскільки у виробничій функції $x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n,$ то область визначення цієї функції є множина R_+^n. Очевидно, якщо нема деякого ресурсу, тобто $x_i = 0,$ то і випуск продукції дорівнює нулю, тобто

$$f(x_1, x_2, ...x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0.$$

Функція затрат. Нехай виробнича система випускає n видів продукції $y_1, y_2, ..., y_n,$ а x – сукупні затрати, які забезпечують цей випуск. Тоді функцію $x = F(y_1, y_2, ..., y_n)$ називають *функцією затрат*.

Функція попиту описує залежність попиту на n товарів від їхньої ціни:

$$Q = D(p_1, p_2, ..., p_n).$$

Наведемо приклади функцій багатьох змінних, які часто трапляються в математиці й економіці.

1. Функцію

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b, \tag{7.1.13}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – сталі, називають лінійною функцією, або гіперплощиною, в евклідовому просторі.

2. Функцію

$$u = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{[j}x_ix_j, \tag{7.1.14}$$

де a_{ij} – сталі, називають квадратичною формою від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. В економіці використовують поняття *функції корисності*, яка виражає корисність від набуття n різних товарів. Найчастіше вона має вигляд

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i),\ a_i > 0,\ c_i \geq 0, \tag{7.1.15}$$

її називають логарифмічною функцією корисності.

4. Виробнича функція Кобба–Дугласа, яка визначає обсяг випуску продукції Q, якщо затрати капіталу K і трудових ресурсів L:

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{7.1.16}$$

де $A > 0$ – параметр, який визначає конкретна технологія, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

В економіці лініями рівня є ізокванти та криві індиферентності. Лініями рівня виробничої функції є ізокванти. *Ізокванта* – крива, утворена множиною точок, що відповідають різним варіантам поєднання двох будь-яких видів витрат, які забезпечують одну і ту ж кількість виготовленої продукції (рис. 7.1.3).

Крива індиферентності відображає зміну поєднання двох різних благ за умови, що загальна корисність цих благ стала.

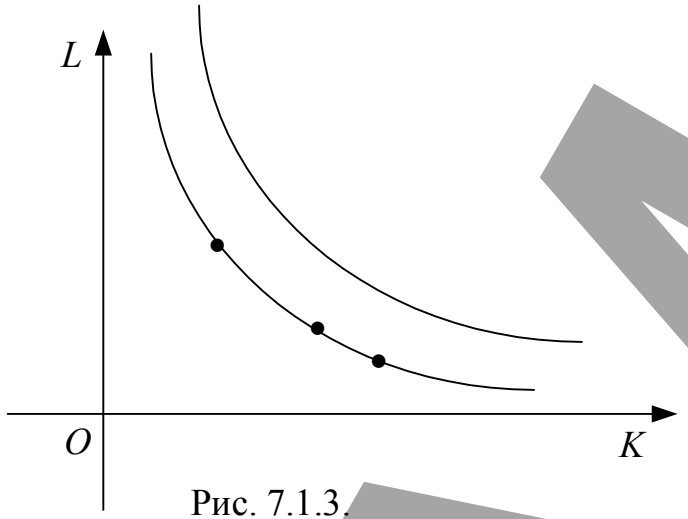


Рис. 7.1.3.

П р и к л а д 7.1.2. Визначимо рівняння лінії рівня для виробничої функції Кобба–Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

• Рівняння лінії рівня у цьому випадку має вигляд $AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C$, де C – довільна стала. Для $C > 0$ маємо сімейство гіпербол, які розташовані у першому квадранті (див. рис. 7.1.3). ❍

3.1.2. Границя функції багатьох змінних

Послідовність точок простору R^n ***та її границя.*** Нехай кожному натуральному числу k відповідає точка M_k евклідового простору R^n. У цьому випадку отримаємо послідовність $M_1, M_2, ..., M_k, ...$ точок простору, яку будемо позначати $\{M_k\}$. Уведемо поняття збіжної послідовності та її границі.

Послідовність $\{M_k\}$ точок евклідового простору R^n називають *збіжною,* якщо існує точка A цього простору така, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $k_0(\varepsilon)$, що для всіх $k > k_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $\rho(M_k, A) < \varepsilon$. У цьому випадку точку A називають *границею послідовності* $\{M_k\}$ і записують

$$\lim_{k\to\infty} M_k = A. \qquad (7.1.17)$$

Зазначимо, що границя A послідовності $\{M_k\}$ точок деякої замкнутої множини $\{M\}$ належить цій множині.

Теорема 7.1.1. Послідовність точок $\{M_k\}$ евклідового простору R^n збігається до точки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ цього простору тоді й тільки тоді, коли числові послідовності $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, ..., \{x_n^{(k)}\}$ збігаються до чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Уведемо поняття обмеженої послідовності точок простору R^n. Послідовність $\{M_k\}$ точок евклідового простору R^n називають *обмеженою*, якщо існує таке число $B>0$, що для всіх k виконується умова $\rho(O,M_k)\le B$, де O – точка, усі координати якої дорівнюють нулю. З означення випливає, що всі точки обмеженої послідовності належать замкнутій кулі радіусом B з центром у початку координат.

Границя функції багатьох змінних. Нехай функція $u=f(M)$ визначена на множині $\{M\}$ точок евклідового простору R^n. Виберемо в просторі R^n точку A, яка, можливо, і не належить множині $\{M\}$, але в будь-якому δ-околі цієї точки є хоча б одна точка множини $\{M\}$, відмінна від A.

Дамо означення *границі функції за Гейне*. Число B називають *границею функції* $u=f(M)$ в точці A, якщо для будь-якої збіжної до A послідовності $\{M_k\}$ точок області визначення $\{M\}$ цієї функції, $M_k\ne A$, відповідна числова послідовність значень функції $\{f(M_k)\}$ збігається до числа B.

Дамо означення *границі функції за Коші*. Число B називають *границею функції* $u=f(M)$ в точці A, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для будь-якої точки M з області визначення $\{M\}$ цієї функції, яка задовольняє нерівність $0<\rho(M,A)<\delta$, виконується нерівність $|f(M)-B|<\varepsilon$.

Границю функції $u=f(M)$ в точці A будемо позначати так:

$$\lim_{M\to A} f(M)=B, \tag{7.1.18}$$

або

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=B. \tag{7.1.19}$$

Такі границі називають n-кратними, наприклад, подвійними для функцій двох змінних чи потрійними для функцій трьох змінних.

Доведено, що ці два означення еквівалентні.

Уведемо поняття границі функції $u=f(M)$ при $M\to\infty$. Припустимо, що для будь-якого $\delta>0$ існує хоча б одна точка M з множини $\{M\}$, на якій визначена ця функція, яка лежить поза кулею радіусом δ з центром у початку координат.

Число B називають границею функції $u=f(M)$ при $M\to\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх точок M з множини $\{M\}$, на якій визначена ця функція, що задовольняють умову $\rho(M,O)>\delta$, виконується нерівність $|f(M)-B|<\varepsilon$, і позначають

$$\lim_{M\to\infty} f(M)=B. \tag{7.1.20}$$

Для границі функцій багатьох змінних справджуються багато теорем, аналогічних до відповідних теорем для границі функцій однієї змінної.

Теорема 7.1.2. Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ задані на множині $\{M\}$ і мають у точці A, відповідно, границі B і C. Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$, $g(M) \neq 0$, мають у точці A, відповідно, границі $B \pm C$, $B \cdot C, B/C, C \neq 0$.

Поняття границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних мають багато спільного, проте між ними є суттєва різниця. Якщо для функції однієї змінної $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то це означає, що односторонні границі функції існують і дорівнюють A. Правильним є й обернене твердження, тобто з існування і рівності односторонніх границь випливає існування границі функції в точці. Для функції багатьох, наприклад, двох змінних, точка $M(x;y)$ може прямувати до точки $M_0(x_0;y_0)$ різними способами: уздовж прямої або уздовж деякої кривої (рис. 7.1.4).

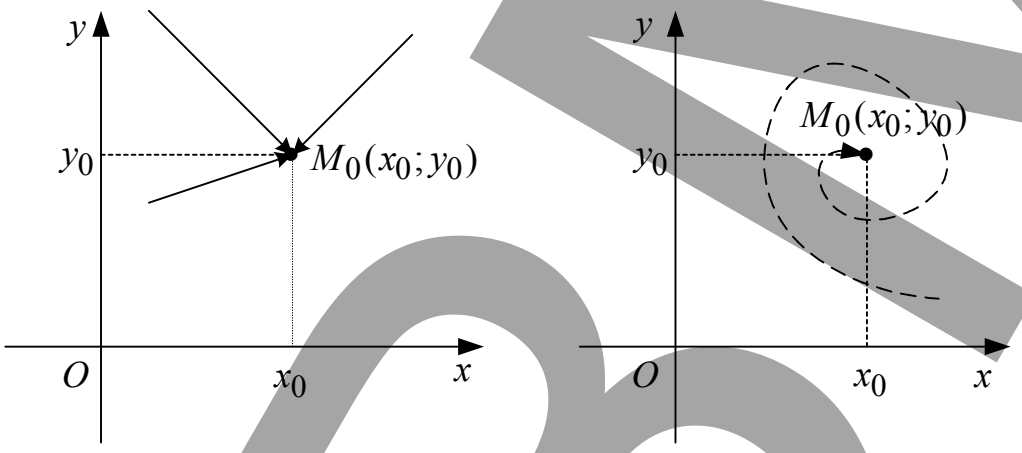


Рис. 7.1.4.

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ справджується тоді і тільки тоді, коли точка $M(x;y)$ може прямувати до точки $M_0(x_0;y_0)$ різними способами, а результат єдиний.

Приклад 7.1.3. Обчислимо границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy + 2x}$.

•

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy + 2x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{xy}{xy + 2x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{xy + 2x} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{y}{y + 2} = 1 \cdot 0 = 0. \quad \bigcirc$$

Приклад 7.1.4. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

• Нехай точка $M(x;y)$ прямує до точки $O(0;0)$ уздовж прямої $y=kx$. Отримаємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{k\cdot x^2}{x^2+k^2\cdot x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{k^2}{1+k^2}.$$

Оскільки для різних значень k отримаємо різні значення границі, то границі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. ❍

Функцію $u=f(M)$ називають *нескінченно малою* в точці A, якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M)=0$. Якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M)=B$, то функція $\alpha(M)=f(M)-B$ є нескінченно малою в точці A. Справді, $\lim\limits_{M\to A}\alpha(M)=\lim\limits_{M\to A}\big(f(M)-B\big)=$ $=\lim\limits_{M\to A} f(M)-B=B-B=0$. Звідси випливає таке: якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M)=B$, то $f(M)=B+\alpha(M)$, де $\lim\limits_{M\to A}\alpha(M)=0$. Нескінченно малі функції багатьох змінних порівнюють так само, як нескінченно малі функції однієї змінної.

Повторні границі. Для функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ багатьох змінних можна ввести поняття повторних границь. Розглянемо, наприклад, функцію двох змінних $u=f(x,y)$. Нехай ця функція задана в деякому прямокутному околі $|x-x_0|<d_1$, $|y-y_0|<d_2$ точки $M_0(x_0;y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Нехай для кожного фіксованого значення $y=y_*$, яке задовольняє умову $|y-y_0|<d_2$, існує границя функції $u=f(x,y)$ однієї змінної x в точці $x=x_0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_*}} f(x,y)=g(y),$$

і нехай існує границя функції $g(y)$ в точці y_0:

$$\lim_{y\to y_0} g(y)=B.$$

У цьому випадку існує повторна границя B для функції $u=f(x,y)$ в точці M_0:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=B.$$

Аналогічно можна ввести повторну границю

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Теорема 7.1.3. Нехай функція $u=f(x,y)$ задана в деякому прямокутному околі $|x-x_0|<d_1$, $|y-y_0|<d_2$ точки $M_0(x_0;y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Якщо: 1) існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=B$;

2) для довільного $y = y_*$, що задовольняє умову $|y - y_0| < d_2$, існує границя

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_*}} f(x, y) = g(y);$$

3) для довільного $x = x_*$, що задовольняє умову $|x - x_0| < d_1$, існує границя

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_*}} f(x, y) = w(y),$$

то існують повторні границі

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y), \quad \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

які дорівнюють між собою і подвійній границі:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = B.$$

Зазначимо, що обернене твердження неправильне. Для функції n змінних є $n!$ повторних границь.

П р и к л а д 7.1.5. Обчислимо повторні границі функції $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ в точці $O(0;0)$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ x = x_0 \neq 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{0}{x_0^2} \right) = 0$. Аналогічно отримаємо, що $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. ❍

Зазначимо: у прикладі 7.1.5 доведено, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує. Отже, з існування і рівності повторних границь у точці не випливає існування подвійної границі функції в цій точці.

7.1.3. Неперервність функцій багатьох змінних

Поняття неперервності функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(M)$ задана на деякій множині $\{M\}$ евклідового простору R^n. Нехай точка A належить множині $\{M\}$ і є граничною точкою цієї множини. Це означає, що в будь-якому δ-околі точки A є точки множини $\{M\}$.

Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* A, якщо існує границя цієї функції в точці A і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A). \qquad (7.1.21)$$

Зазначимо, що оскільки $\lim\limits_{M \to A} M = A,$ то рівність (7.1.21) можна записати у вигляді

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(\lim_{M \to A} M).$$

Отже, для неперервної в заданій точці A функції символи lim та f можна поміняти місцями.

Точки простору $R^n,$ у яких функція $u = f(M)$ не є неперервною, називають *точками розриву* цієї функції. З означення неперервності випливає, що точка A є точкою розриву функції $u = f(M)$, якщо

1) функція $u = f(M)$ не визначена в точці A;

2) функція визначена в точці A, але $\lim\limits_{M \to A} f(M)$ не існує, або якщо ця границя існує, але не дорівнює $f(A)$, тобто $\lim\limits_{M \to A} f(M) \neq f(A).$

Точку A називають точкою *усувного розриву* функції $u = f(M),$ якщо існує $\lim\limits_{M \to A} f(M),$ але функція не визначена в точці A, або

$$\lim_{M \to A} f(M) \neq f(A).$$

Дамо означення *неперервності функції в точці за Гейне*. Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці A, якщо для будь-якої збіжної до точки A послідовності точок $\{M_k\}$ з множини $\{M\}$ задання цієї функції відповідна послідовність $\{f(M_k)\}$ значень функції збігається до числа $f(A)$.

Дамо означення *неперервності функції за Коші*. Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці A, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для будь-якої точки M з множини $\{M\}$ задання цієї функції, яка задовольняє умову $\rho(M, A) < \delta,$ виконується нерівність $|f(M) - f(A)| < \varepsilon.$

Функцію $u = f(M),$ яка визначена на множині $\{M\},$ називають *неперервною на цій множині*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Нехай точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ належать області визначення функції $u = f(M)$. *Повним приростом*, або *приростом*, функції $u = f(M)$ у точці A називають функцію

$$\Delta u = f(M) - f(A). \qquad (7.1.22)$$

Позначимо $x_1 - a_1 = \Delta x_1$, $x_2 - a_2 = \Delta x_2$, ..., $x_n - a_n = \Delta x_n$. Тоді повний приріст функції $u = f(M)$ в точці A можна записати так:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n). \qquad (7.1.23)$$

Функцію $u = f(M)$ називають неперервною в точці $A(a_1, a_2, ..., a_n),$ якщо її повний приріст у цій точці є нескінченно малою функцією, тобто

$$\lim_{M \to A} \Delta u(M) = \lim_{M \to A} \big(f(M) - f(A)\big) = 0, \qquad (7.1.24)$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \dots\dots\\ \Delta x_n\to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \dots\dots\\ \Delta x_n\to 0}} \left(f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2,\dots,a_n+\Delta x_n) - f(a_1,a_2,\dots,a_n)\right) = 0.$$

Приклад 7.1.6. Дослідимо на неперервність у точці $O(0;0)$ функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

• Оскільки $\cos(x-y)-\cos(x+y) = 2\sin x \sin y$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin x \sin y}{xy} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 = f(0;0).$$

Отже, функція неперервна в початку координат. ❍

Неперервність функції по одній змінній. Для функції багатьох змінних можна ввести поняття неперервності за однією змінною за фіксованих значень інших змінних. Розглянемо часткові прирости функції $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в точці $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ з області $\{M\}$ визначення цієї функції. Зафіксуємо всі, крім першого, аргументи функції. Надамо аргументу x_1 деякого приросту Δx_1 такого, щоб точка $M(x_1+\Delta x_1, x_2,\dots,x_n)$ належала множині $\{M\}$. Відповідний приріст функції називають *частковим приростом* функції в точці $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$, що відповідає приросту Δx_1 аргументу x_1, і позначають $\Delta_{x_1} u$:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1+\Delta x_1, x_2,\dots,x_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n). \qquad (7.1.25)$$

Аналогічно вводять поняття часткових приростів $\Delta_{x_k} u$ за рештою змінних.

Уведемо поняття неперервності функції за однією змінною. Функцію $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ називають *неперервною в точці* $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *за змінною* x_k, якщо частковий приріст $\Delta_{x_k} u$ цієї функції в точці M є нескінченно малою функцією від Δx_k, тобто якщо

$$\lim_{\Delta x_k} \Delta_{x_k} u = 0. \qquad (7.1.26)$$

Очевидно, що з неперервності функції $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в точці $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ випливає її неперервність за кожною змінною. Обернене твердження неправильне, тобто з неперервності функції в точці M за кожною змінною $x_1,x_2,\dots,x_n$ не завжди випливає її неперервність у цій точці.

Неперервність складеної функції. Уведемо поняття складеної функції двох змінних. Нехай функції

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2) \end{cases} \tag{7.1.27}$$

визначені на множині $\{T\}$ точок евклідового простору R^2. Тоді кожній точці $T(t_1, t_2)$ з множини $\{T\}$ за формулами (7.1.27) відповідає точка $M(x_1, x_2)$ евклідового простору R^n. Позначимо через $\{M\}$ множину всіх таких точок. Нехай $u = f(x_1, x_2)$ задана на множині $\{M\}$. Тоді на множині $\{T\}$ точок евклідового простору R^k задана складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f\big(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)\big).$$

Теорема 7.1.4. Нехай функції $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ неперервні в точці $A(a_1, a_2)$, а функція $u = f(x_1, x_2)$ неперервна в точці $B(b_1, b_2)$, де $b_i = \varphi_i(a_1, a_2)$, $i = 1,2$. Тоді складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f\big(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)\big)$$

неперервна в точці $A(a_1, a_2)$.

Головні властивості неперервних функцій багатьох змінних. Неперервним функціям багатьох змінних притаманні властивості, аналогічні до властивостей неперервних функцій однієї змінної. Сформулюємо їх у вигляді теорем.

Теорема 7.1.5. Якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ задані на одній і тій же множині $\{M\}$ і неперервні в деякій точці A цієї множини, то функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$, $g(M) \neq 0$, теж неперервні в цій точці A.

Теорема 7.1.6. Будь-яка елементарна функція багатьох змінних неперервна в кожній точці області визначення.

Наприклад, розглянемо виробничу функцію двох змінних $Y = F(K, L)$, де K – обсяг основних фондів; L – затрати праці; Y – обсяг випущеної продукції. Областю визначення такої функції є деяка множина $D \subset R^2_+$. Виробнича функція, у більшості випадків, є елементарною функцією двох змінних. За теоремою 7.1.6 вона неперервна в будь-якій точці $M_0(K_0; L_0) \in D$. Це означає: якщо зміни основних фондів ΔK і затрат праці ΔL досить малі, то зміна випуску продукції $\Delta Y = F(K_0 + \Delta K; L_0 + \Delta L) - F(K_0; L_0)$ теж буде малою.

Теорема 7.1.7 (перша теорема Больцано–Коші). Якщо функція $u = f(M)$ визначена і неперервна на замкненій обмеженій і зв'язній множині $\{M\}$ евклідового простору R^n, а в двох точках цієї множини набуває значень з протилежними знаками, то на множині $\{M\}$ знайдеться точка M_0 така, що $f(M_0) = 0$.

Теорема 7.1.8 (друга теорема Больцано–Коші). Якщо функція $u = f(M)$ визначена і неперервна на замкненій обмеженій і зв'язній множині $\{M\}$ евклідового простору R^n, а в двох точках цієї множини набуває різних значень

$f(M_1)=A,\ f(M_2)=B,\ A\neq B,$ то яке б не було число $C,$ що міститься між числами A та $B,$ на множині $\{M\}$ знайдеться точка N така, що $f(N)=C.$

Теорема 7.1.9 (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо функція $u=f(M)$ неперервна на замкненій обмеженій множині $\{M\},$ то вона обмежена на цій множині.

7.2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

7.2.1. Похідні і диференціали першого порядку

Частинні похідні першого порядку. Нехай функція $u=f(x_1,x_2)$ визначена на деякій множині $\{M\}$точок евклідового простору R^2. Нехай точка $M(x_1,x_2)$ – внутрішня точка множини $\{M\}$. Зафіксуємо значення аргументу x_2 і надамо аргументу x_1 деякого приросту Δx_1 такого, щоб точка $M'(x_1+\Delta x_1,x_2)$ належала множині $\{M\}$. Запишемо в заданій точці $M(x_1,x_2)$ відношення частинного приросту $\Delta_{x_1}u$ до відповідного приросту аргументу Δx_1 :

$$\frac{\Delta_{x_1}u}{\Delta x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x_1,x_2)-f(x_1,x_2)}{\Delta x_1}.$$

Це відношення є функцією від $\Delta x_2,$ яка визначена для всіх $\Delta x_1\neq 0.$

Якщо існує границя відношення частинного приросту $\Delta_{x_1}u$ функції $u=f(x_1,x_2)$ в точці $M(x_1,x_2)$ до відповідного приросту Δx_1 аргументу x_1 при $\Delta x_1\to 0,$ то цю границю називають *частинною похідною* функції в точці M за аргументом x_1 і позначають одним із символів:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_1},\ u'_{x_1},\ fu_{x_1}.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_k}\frac{\Delta_{x_1}u}{\Delta x_1}. \qquad (7.2.1)$$

Аналогічно можна дати означення частинної похідної функції за аргументом $x_2,$ а також частинних похідних функцій багатьох змінних.

Приклад 7.2.1. Обчислимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $u=\arcsin(x^2\cdot y).$

- За правилом відшукання похідної складеної функції отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\cdot y\right)^2}}\left(x^2\cdot y\right)'_x=\frac{2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\cdot y\right)^2}}\left(x^2\cdot y\right)_y'=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4y^2}}.$$ ❍

Економічна інтерпретація частинних похідних. Розглянемо виробничу функцію двох змінних $Y=F(K,L)$. Нехай основні фонди і затрати праці, відповідно, дорівнюють K_0 та L_0.

Відношення

$$\frac{F(K_0+\Delta K,L_0)-F(K_0,L_0)}{\Delta K}$$

означає, яким є додатковий випуск продукції внаслідок зміни на одиницю основних фондів K_0 і за сталих затрат праці L_0. Припустимо, що існує частинна похідна функції $Y=F(K,L)$ в точці $M_0(K_0;L_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K_0;L_0)=\lim_{\Delta K\to 0}\frac{F(K_0+\Delta K,L_0)-F(K_0,L_0)}{\Delta K}.$$

Для малих ΔK виконується наближена рівність

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K_0;L_0)\approx\frac{F(K_0+\Delta K,L_0)-F(K_0,L_0)}{\Delta K}.$$

Якщо одиниці вимірювання K такі, що $\Delta K=1$ можна вважати досить малою зміною основних фондів, то частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial K}(K_0;L_0)$ наближено дорівнює приросту, який отримає випуск $F(K_0,L_0)$ унаслідок додаткового вкладення одиниці основних фондів.

Частинну похідну $\frac{\partial F}{\partial K}$ називають *граничною фондовіддачею*, а $\frac{\partial F}{\partial L}$ – *граничною продуктивністю праці.*

П р и к л а д 7.2.2. Обчислимо граничну фондовіддачу і граничну продуктивність праці для виробничої функції Кобба–Дугласа $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

- За означенням гранична фондовіддача

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K,L)=\frac{\partial}{\partial K}\left(AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)=A\cdot\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha},$$

а гранична продуктивність праці

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)=\frac{\partial}{\partial L}\left(AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)=A\cdot(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$ ❍

Зазначимо, що для функції Кобба–Дугласа гранична фондовіддача і гранична продуктивність праці є функціями лише фондонасиченості $\frac{L}{K}$, тобто залежать лише від співвідношення між основними фондами K і затратами праці L.

Диференційованість функцій багатьох змінних. Нагадаємо, що повним приростом функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, який відповідає приростам $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ аргументу, називають вираз

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *диференційованою* в заданій точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо її повний приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n, \qquad (7.2.2)$$

де $A_1, A_2, ..., A_n$ – числа, які не залежать від $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – нескінченно малі при $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,2,...,n$ функції, які дорівнюють нулю при $\Delta x_i = 0$, $i = 1,2,...,n$.

Співвідношення (7.2.2) називають *умовою диференційованості* функції в заданій точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклідового простору R^n. Запишемо умову (7.2.2) в іншому вигляді. Розглянемо функцію

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2},$$

яка є нескінченно малою при $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,2,...,n$. Оскільки $\frac{\Delta x_i}{\rho} \le 1$, $i = 1,2,...,n$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \right| \le \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_i| \cdot |\Delta x_i|}{\rho} \le \rho \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = o(\rho).$$

Отже, умову диференційованості (7.2.2) можна записати у вигляді

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho). \qquad (7.2.3)$$

Доведено, що умови (7.2.2) і (7.2.3) еквівалентні.

Якщо хоча б одне з чисел $A_1, A_2, ..., A_n$ відмінне від нуля, то сума $\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \Delta x_i$ є головною, лінійною щодо приростів аргументів Δx_i, $i = 1,2,...,n$ частиною приросту диференційованої функції. Зазначимо: якщо приріст функції в деякій точці можна записати у вигляді (7.2.2) чи (7.2.3) при $A_1 = A_2 = ... = A_n = 0$, то функція диференційована в цій точці.

Наведемо необхідну умову диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.1. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то в цій точці існують частинні похідні функції за усіма аргументами, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i, \; i = 1,2,...,n, \qquad (7.2.4)$$

де A_i визначають з умов (7.2.2) чи (7.2.3) диференційованості функції.

⏮ З умови (7.2.2) диференційованості функції в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ випливає, що її частинний приріст $\Delta_{x_i} u$ у цій точці можна записати у вигляді

$\Delta_{x_i} u = A_i \cdot \Delta x_i + \alpha_i \cdot \Delta x_i$. Звідси $\dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i$. Оскільки $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x_i = 0$, $i = 1,2,...,n$, то

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} (A_i + \alpha_i) = A_i . \quad \blacktriangleright\!\blacktriangleright|$$

З урахуванням (7.2.4) умову (7.2.3) диференційованості функції можна записати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i . \qquad (7.2.5)$$

Оскільки $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n$, то зображення диференційованої функції у вигляді (7.2.2) і (7.2.3) єдине.

Теорема 7.2.2. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то вона неперервна в цій точці.

$|\blacktriangleleft\blacktriangleleft$ З умови (7.2.2) диференційованості функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ отримаємо

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} (A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + ... + \alpha_n \cdot \Delta x_n) = 0,$$

що означає неперервність функції в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. $\blacktriangleright\!\blacktriangleright|$

Теореми 7.2.1 та 7.2.2 виражають необхідні умови диференційованості функції в точці. З цих теорем можна отримати достатні умови того, що функція недиференційована: якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не має хоча б однієї частинної похідної в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то вона недиференційована в цій точці; якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не є неперервною в деякій точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то вона недиференційована в цій точці.

Для функцій однієї змінної існування похідної в точці є необхідною і достатньою умовою її диференційованості в цій точці, тому для функцій однієї змінної поняття "функція диференційована" та "існує похідна функції" тотожні. Для функцій багатьох змінних зв'язок між диференційованістю функції та існуванням частинних похідних складніший. Існування частинних похідних є лише необхідною, але не достатньою умовою диференційованості функції. Це означає, що існують функції, які в деякій точці мають усі частинні похідні, але не диференційовані в цій точці.

Наведемо достатні умови диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.3. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має частинні похідні за всіма аргументами в деякому околі точки $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, причому всі ці похідні неперервні в самій точці M_0, то функція диференційована в цій точці.

Сформулюємо теорему про диференціювання складеної функції двох змінних.

Теорема 7.2.4. Нехай функції (7.1.27) диференційовані в деякій точці $T_0\left(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2\right)$, а функція $u = f(x_1, x_2)$ диференційована у відповідній точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2\right)$, де $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i\left(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2\right)$, $i = 1,2$. Тоді складена функція

$$u = f(x_1, x_2) = f\left(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)\right)$$

диференційована в точці T_0. Частинні похідні цієї функції обчислюють за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}, \tag{7.2.6}$$

у яких частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ беруть у точці M_0, а частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}$ – у точці T_0.

Розглянемо випадок, коли в формулах (7.2.6) $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,2$. У цьому випадку маємо складену функцію однієї змінної t:

$$u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Похідну цієї складеної функції обчислюють за формулою

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}. \tag{7.2.7}$$

Приклад 7.2.3. Обчислимо $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \ln\left(u^2 + v^2\right)$, де $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

- За формулами (7.2.6) отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot x + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2(y^4 - 1)}{y(y^4 + 1)}.$$

❍

Приклад 7.2.4. Нехай у виробничій функції Кобба–Дугласа $Y = F(K,L) = 4K^{0,25} \cdot L^{0,75}$ величини K та L залежать від часу: $K(t) = 6t^2 + 2{,}5,\ L(t) = 0{,}001t^2$. Визначимо швидкість зміни випуску продукції Y в момент часу $t = t_0$.

• За формулою (7.2.7)

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial F}{\partial K}(K,L) \cdot \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) \cdot \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}(t_0) = \left(\frac{L}{K}\right)^{0,75} 12t_0 +$$

$$+ 3\left(\frac{K}{L}\right)^{0,25} \cdot 0{,}002t_0 = 12t_0 \cdot \left(\frac{0{,}001t_0^2}{6t_0^2 + 2{,}5}\right)^{0,75} + 0{,}006t_0 \cdot \left(\frac{6t_0^2 + 2{,}5}{0{,}001t_0^2}\right)^{0,25}. \qquad \text{❍}$$

Однорідні функції. Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, задану на множині $\{M\}$, називають *однорідною функцією степеня* p на цій множині, якщо для кожної точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ множини $\{M\}$ і для кожного числа t такого, що точка $K(tx_1, tx_2, ..., tx_n)$ належить $\{M\}$, виконується нерівність

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (7.2.8)$$

Теорема 7.2.5 (теорема Ейлера про однорідні функції). Якщо в деякій області $\{M\}$ функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є диференційованою однорідною функцією степеня p, то в кожній точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ цієї області справджується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot x_n = p \cdot u. \qquad (7.2.9)$$

Повний диференціал функції багатьох змінних. *Диференціалом* диференційованої в точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають головну, лінійну щодо приростів аргументу, частину приросту цієї функції в цій точці:

$$\mathrm{d}u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + ... + A_n \cdot \Delta x_n. \qquad (7.2.10)$$

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n$, то вважають, що $\mathrm{d}u = 0$.

З теореми 7.2.1 маємо, що $A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n$, тому диференціал функції можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \qquad (7.2.11)$$

Диференціалом $\mathrm{d}x_i$ незалежної змінної x_i називають приріст Δx_i цієї змінної. Тоді диференціал функції багатьох змінних можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n. \qquad (7.2.12)$$

Зазначимо таке: формулу (7.2.12) записали, припустивши, що аргументи $x_1, x_2, ..., x_n$ є незалежними змінними.

Доведено, що вигляд першого диференціала функції багатьох змінних не змінюється у випадку, коли аргументи x_i є функціями деяких інших змінних.

Властивість інваріантності форми першого диференціала дає змогу вивести правила диференціювання. Нехай u та v – диференційовані функції багатьох змінних. Тоді

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(Cu) = C\cdot \mathrm{d}u, \quad C=\mathrm{const};\\ &\mathrm{d}(u\pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v;\\ &\mathrm{d}(u\cdot v) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u;\\ &\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}. \end{aligned} \qquad (7.2.13)$$

Приклад 7.2.5. У точці $M(0;1)$ обчислимо диференціал функції

$$u = \ln(x^2 + y^2 + xy).$$

- Обчислимо частинні похідні функції в точці $M(0;1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+y^2+xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y+x}{x^2+y^2+xy}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Отже,

$$\mathrm{d}u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y. \qquad \text{❍}$$

Похідна за напрямом. Градієнт. Нехай функція $u = f(M)$ двох змінних задана в деякому околі точки $M(x;y)$. Розглянемо деякий напрям, який характеризує одиничний вектор $\vec{l} = (\cos\alpha;\cos\beta)$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ (рис. 7.2.1). На прямій, яка проходить у напрямі $\vec{l}$, виберемо точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$ так, що довжина Δl відрізка MM_1 дорівнює $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Приріст функції $f(M)$ має вигляд

$$\Delta u = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y),$$

де $\Delta x = \Delta l\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l\cos\beta$. Нехай функція $f(M)$ диференційована в точці $M(x;y)$. Приріст цієї функції запишемо у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta l) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l\cos\beta + o(\Delta l).$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δl і перейдемо в отриманому виразі до границі при $\Delta l \to 0$.

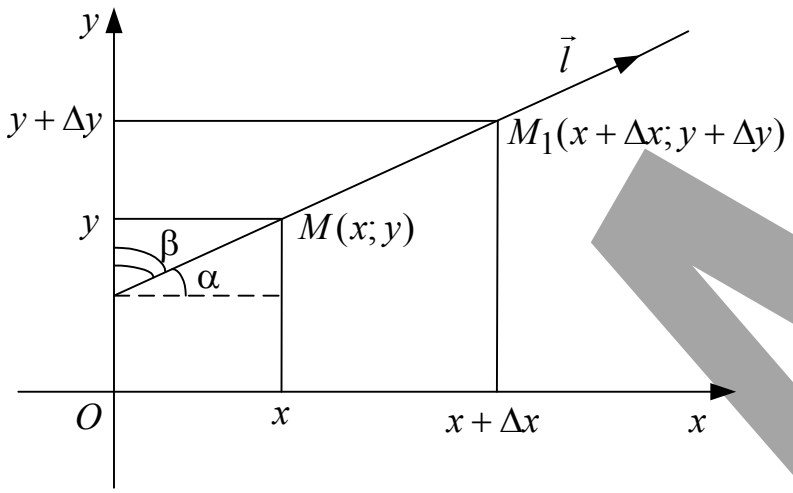


Рис. 7.2.1.

Границю відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ називають *похідною функції* $u = f(M)$ *в точці* $M(x;y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Отже, отримаємо похідну за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta. \qquad (7.2.14)$$

Аналогічно, для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ похідну за напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n)$ визначають за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n, \qquad (7.2.15)$$

де $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + ... + \cos^2\alpha_n = 1$.

Приклад 7.2.6. Обчислимо похідну функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точці $M(1;3;4)$, якщо напрям збігається з радіусом-вектором цієї точки.

• Визначимо координати одиничного вектора, який задає цей напрям. Радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = (1;3;4)$ має довжину $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{26}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{26}}$. За формулою (7.2.15) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{2x + 6y - 8z}{\sqrt{26}}.$$

Обчислимо похідну за заданим напрямом у точці $M(1;3;4)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 3 - 8\cdot 4}{\sqrt{26}} = -\frac{12}{\sqrt{26}}.$$

❍

Розглянемо функцію трьох змінних $u = f(M)$, яка диференційована в деякій точці $M(x;y;z)$.

Градієнтом функції $u = f(x,y,z)$ в точці $M(x;y;z)$ називають вектор, координати якого дорівнюють, відповідно, частинним похідним $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у цій точці, і позначають

$$\overrightarrow{\text{grad}\,u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{7.2.16}$$

Похідну за напрямом можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\,u}, \tag{7.2.17}$$

тобто похідна за напрямом є скалярним добутком векторів $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$.

Градієнт функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у точці $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначають за формулою

$$\nabla u = \overrightarrow{\text{grad}\,u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right\}. \tag{7.2.18}$$

У цьому випадку для похідної за напрямом справджується формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\,u}. \tag{7.2.19}$$

Перепишемо формулу $\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\,u}$ у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\,u} = \left|\vec{l}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\text{grad}\,u}\right| \cdot \cos\varphi, \tag{7.2.20}$$

де φ – кут між векторами $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$. Оскільки $\left|\vec{l}\right| = 1$, то з рівності (7.2.20) випливає, що похідна за напрямом набуває найбільшого значення, якщо $\varphi = 0$, тобто коли напрями векторів $\vec{l}$ та $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$ збігаються. У цьому випадку

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = \left|\overrightarrow{\text{grad}\,u}\right|. \tag{7.2.21}$$

З цієї рівності випливає, що градієнт функції характеризує напрям і значення найбільшої швидкості зростання функції в точці.

Доведемо, що у випадку функції двох змінних $y = f(x,y)$ градієнт у точці $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярний дотичній до лінії рівня L, яка проходить через цю точку (рис. 7.2.2).

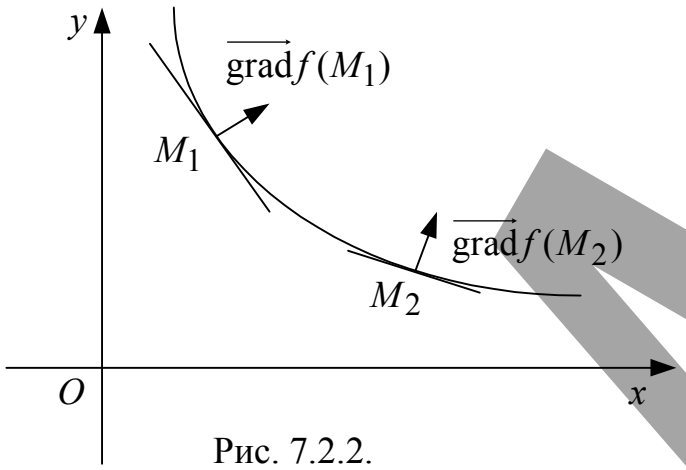


Рис. 7.2.2.

Нехай лінія рівня має рівняння $f(x,y)=C$. Розв'яжемо це рівняння щодо y: $y=g(x)$. Вектор дотичної до лінії рівня має координати $\vec{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$. Запишемо диференціал функції на лінії рівня:

$$\mathrm{d}u\Big|_L=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y=\overrightarrow{\text{grad}}u\cdot\vec{s}=0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{\text{grad}}u$ та $\vec{s}$ перпендикулярні, тобто в заданій точці градієнт перпендикулярний до лінії рівня.

Аналогічно, для функції багатьох змінних у заданій точці градієнт перпендикулярний до множини рівня.

Приклад 7.2.7. Для функції $u=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$ обчислимо градієнт і його модуль у точці $M(5;2;3)$.

- Обчислимо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}.$$

Градієнт функції

$$\overrightarrow{\text{grad}}u=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\right\}.$$

В точці $M(5;2;3)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}u\Big|_M=\left\{\frac{5}{\sqrt{20}},\frac{2}{\sqrt{20}},-\frac{3}{\sqrt{20}}\right\},\quad \left|\overrightarrow{\text{grad}}u\right|_M\Big|=\sqrt{1{,}9}.$$ ❍

7.2.2. Похідні і диференціали вищих порядків

Частинні похідні вищих порядків. Нехай у кожній точці множини $\{M\}$ – області визначення функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, існує частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Ця похідна, що є функцією змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, теж визначена в області $\{M\}$. Якщо функція $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в точці M має частинну похідну за аргументом x_k, то цю частинну похідну називають *частинною похідною другого порядку*, або *другою частинною похідною*, функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці M спочатку за аргументом x_i, а потім за аргументом x_k і позначають

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k},\ f''_{x_i x_k},\ u''_{x_i x_k}. \tag{7.2.22}$$

Якщо $i \neq k$, то похідну називають *мішаною* частинною похідною другого порядку; якщо $i = k$, то частинну похідну другого порядку позначають

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ f''_{x^2},\ u''_{x^2}. \tag{7.2.23}$$

Після того, як визначене поняття частинної похідної другого порядку, можна послідовно ввести поняття частинних похідних третього, четвертого і вищих порядків. Нехай уведене поняття частинної похідної $(m-1)$-го порядку функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за аргументами $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{(m-1)}}$, причому деякі або всі індекси можуть збігатися. Якщо ця похідна $(m-1)$-го порядку має в точці M частинну похідну за аргументом x_{i_m}, то цю похідну називають *частинною похідною n-го порядку*, або n-ю *частинною похідною*, функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за аргументами $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{(m-1)}}, x_{i_m}$ і позначають

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_m} \partial x_{i_{(m-1)}} ... \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{i_{(m-1)}} ... \partial x_{i_1}} \right). \tag{7.2.24}$$

Отже, ми ввели поняття частинної похідної m-го порядку індуктивно, переходячи від похідної першого порядку до наступних похідних.

Якщо не всі індекси $i_1, i_2, ..., i_m$ дорівнюють один одному, то похідну називають *мішаною* похідною m-го порядку; якщо $i_1 = i_2 = ... = i_m$, то частинну похідну позначають

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}. \tag{7.2.25}$$

Оскільки частинну похідну функції за аргументом x_i визначають як звичайну похідну функції однієї змінної x_i за фіксованих значень інших змінних, то для обчислення частинних похідних вищих порядків використовують правила обчислення похідних першого порядку.

П р и к л а д 7.2.8. Обчислимо частинні похідні другого порядку функції $u = x^2 y + xy^3$.

• Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + y^3, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3xy^2.$$

На підставі означення частинних похідних вищих порядків обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 6xy; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x + 3y^2. \qquad \bigcirc$$

У цій задачі мішані частинні похідні другого порядку однакові, тобто $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, що не завжди справджується, тобто значення частинних похідних залежать від послідовності диференціювання.

Уведемо поняття n разів диференційованої функції багатьох змінних. Функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають m разів диференційованою в точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, якщо всі її частинні похідні $(m-1)$-го порядку диференційовані в цій точці.

З означення m-разової диференційованості функції багатьох змінних і теореми 7.2.3 про достатні умови диференційованості функції отримаємо достатні умови m-разової диференційованості функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.6. Для того, щоб функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ була m разів диференційованою в точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, достатньо, щоб усі її частинні похідні m-го порядку були неперервні в цій точці.

Достатні умови незалежності значень мішаних похідних від порядку диференціювання дає така теорема.

Теорема 7.2.7. Нехай функція $u = f(x, y)$ двічі диференційована в точці $M(x; y)$. Тоді в цій точці $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Сформулюємо теорему, аналогічну до попередньої.

Теорема 7.2.8. Нехай у деякому околі точки $M(x;y)$ функція $u=f(x,y)$ має частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$. Якщо частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ неперервні в цій точці, то вони однакові, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Аналогічна теорема справджується для функцій багатьох змінних.

Теорема 7.2.9. Нехай функція $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ диференційована m разів у точці $M_0\left(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,...,\overset{\circ}{x}_n\right)$. Тоді в цій точці значення будь-якої мішаної похідної m-го порядку не залежить від порядку, в якому відбуваються послідовні диференціювання.

Диференціали вищих порядків. Нехай функція $u=f(x,y)$ диференційована в точці $M(x,y)$ і в деякому околі цієї точки. Диференціал функції в цій точці має вигляд

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Цей диференціал називають диференціалом першого порядку, або першим диференціалом функції $u=f(x,y)$. Для позначення диференціалів, крім символів $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ та $\mathrm{d}u$, будемо використовувати символи $\delta x,\delta y,\delta u$. Нехай функція $u=f(x,y)$ двічі диференційована в точці $M(x,y)$. Будемо вважати, що $\mathrm{d}x$ та $\mathrm{d}y$ сталі. У цьому випадку диференціал першого порядку $\mathrm{d}u$ є диференційованою в точці $M(x,y)$ функцією змінних x y. Її диференціал у точці $M(x,y)$ має вигляд

$$\delta(\mathrm{d}u)=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\delta y.$$

Цей вираз при $\delta x=\mathrm{d}x$, $\delta y=\mathrm{d}y$ називають *диференціалом другого порядку*, або *другим диференціалом*, функції $u=f(x,y)$ у точці $M(x,y)$ і позначають d^2u. Виконаємо диференціювання в останній формулі і врахуємо рівність других мішаних похідних, отримаємо

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2. \qquad (7.2.26)$$

Нехай функція $u = f(x, y)$ диференційована m разів у точці $M(x, y)$ і введене поняття диференціалу $(m-1)$-го порядку, тобто $\mathrm{d}^{(m-1)}u$. Значення $\delta\left(\mathrm{d}^{(m-1)}u\right)$ диференціала від диференціала $\mathrm{d}^{(m-1)}u$, взяте при $\delta x = \mathrm{d}x$, $\delta y = \mathrm{d}y$, називають диференціалом m-го порядку, або m-м *диференціалом*, функції $u = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ і позначають $\mathrm{d}^m u$.

Вираз для першого і другого диференціалів зручно записувати у символьному вигляді. Для цього введемо оператор диференціала першого порядку

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{7.2.27}$$

Визначимо оператор d^2 як наслідок піднесення d до другого степеня:

$$\mathrm{d}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2. \tag{7.2.28}$$

З використанням (7.2.28) формулу (7.2.26) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\right)u. \tag{7.2.29}$$

Аналогічно можна ввести диференціал третього порядку

$$\mathrm{d}^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^3 u =$$

$$= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3\right)u. \tag{7.2.30}$$

У формулах (7.2.29), (7.2.30) після формального підняття до степеня досить формально перемножити функцію u на всі доданки в дужках, щоб отримати вирази для відповідного диференціала. Ці формули нагадують розклад за формулою бінома Ньютона. Вираз для диференціала m-го порядку запишемо у вигляді

$$\mathrm{d}^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^m u = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}}\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}y^{m-k}. \tag{7.2.31}$$

Аналогічно можна ввести поняття диференціалів вищих порядків для функцій багатьох змінних.

Як видно з (7.2.31), диференціал m-го порядку є однорідним поліномом m-го порядку щодо $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$.

Зазначимо, що для диференціала порядку $m \geq 2$ не справджується властивість інваріантності форми.

Приклад 7.2.9. Обчислимо диференціал другого порядку для функції $u = x^y$ в точці $M_0(1;0)$.

- Обчислимо частинні похідні першого порядку цієї функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Обчисливши частинні похідні від частинних похідних першого порядку отримаємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

Обчислимо значення похідних другого порядку в точці $M_0(1;0)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = 1,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 0.$$

Підставимо ці значення в формулу (7.2.26):

$$\left.\mathrm{d}^2 u\right|_{M_0} = 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$ ❍

Формула Тейлора для функції багатьох змінних.

Теорема 7.2.10. Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена і $m+1$ разів диференційована в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, то для всіх точок цього околу її приріст можна записати у вигляді

$$\Delta u = \left.\mathrm{d}u\right|_{M_0} + \frac{1}{2!}\left.\mathrm{d}^2 u\right|_{M_0} + ... + \left.\mathrm{d}^m u\right|_{M_0} + R_m(M'); \qquad (7.2.32)$$

де

$$R_m(M') = \frac{1}{(m+1)!}\left.\mathrm{d}^{m+1} u\right|_{M'}. \qquad (7.2.33)$$

Формулу (7.2.32) називають формулою Тейлора для функції $u = f(M)$ з центром розкладу в точці M_0 з залишковим членом $R_m(M')$ у формі Лагранжа.

У випадку функції двох змінних ця формула має вигляд

$$\Delta f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\quad 0 < \theta < 1. \qquad (7.2.34)$$

Формулу (7.2.34) називають формулою Тейлора для функції $u = f(x, y)$ з залишковим членом у формі Лагранжа

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\quad 0 < \theta < 1.$$

Цю формулу можна записати у вигляді

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),\quad 0<\theta<1. \qquad (7.2.35)$$

Якщо $R_m=o(\rho^m)$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, то отримаємо формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.

Для $m=0$ з формули (7.2.34) отримаємо

$$\Delta f(x_0,y_0)=\mathrm{d}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),\ 0<\theta<1,$$

або

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y,\quad 0<\theta<1.$$

Цю формулу називають *формулою скінченних приростів*, або *формулою Лагранжа*, для функції двох змінних.

Формулу Тейлора використовують для наближених обчислень. Абсолютну похибку Δ оцінюють через залишковий член у формі Лагранжа.

Наприклад, для $m=1$ отримаємо

$$\Delta f(x_0,y_0)\approx \mathrm{d}f(x_0,y_0),$$

причому абсолютна похибка $\Delta\le \max\limits_{(x,y)\in D}\frac{1}{2!}\left|\mathrm{d}^2 f(x_0,y_0)\right|$.

Для $m=2$ отримаємо $\Delta f(x_0,y_0)\approx \mathrm{d}f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0,y_0)$, причому $\Delta\le \max\limits_{(x,y)\in D}\frac{1}{3!}\left|\mathrm{d}^3 f(x_0,y_0)\right|$.

Приклад 7.2.10. Розвинемо функцію $u=f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1;0)$ до членів другого порядку включно.

- Знайдемо частинні похідні другого порядку цієї функції в точці M_0:

$$u\Big|_{M_0}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0}=1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0}=\left(\frac{2y}{x^3}+\frac{y^2}{x^4}\right)e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0}=1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x^3}\right)e^{\frac{y}{x}}\Big|_{M_0}=-1.$$

Далі

$$\Delta x=x-1,\ \Delta y=y,\ \rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2},\ R_2(x,y)=o(\rho^2)=o\left((x-1)^2+y^2\right).$$

Підставимо отримані вирази у формулу (7.2.35), отримаємо

$$e^{\frac{y}{x}} = 1 + 0\cdot(x-1) + 1\cdot y - \frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot(-1)(x-1)\cdot y + 1\cdot y^2\right) +$$
$$+ o\left((x-1)^2 + y^2\right) = 1 + y - (x-1)y + \frac{1}{2}y^2 + o\left((x-1)^2 + y^2\right). \quad \text{❍}$$

7.2.3. Локальний екстремум функцій багатьох змінних

Необхідні умови локального екстремуму. Нехай функція багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ евклідового простору R^n. Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум* (*локальний мінімум*), якщо існує такий δ-окіл точки M_0, що для всіх точок M з цього околу виконується нерівність $f(M_0) \le f(M)$ $\left(f(M_0) \ge f(M)\right)$. У цьому випадку точку M_0 називають точкою *локального максимуму* (*локального мінімуму*), а число $f(M_0)$ – *локальним максимумом* (*локальним мінімумом*). Точки локального максимуму (мінімуму) називають точками *локального екстремуму*.

З означення локального екстремуму випливає таке: якщо в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \le 0$, то в точці M_0 функція має локальний максимум; якщо в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \ge 0$, то в точці M_0 функція має локальний мінімум. Якщо ж в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0)$ може змінювати знак, то ця точка не є точкою екстремуму функції $u = f(M)$.

Визначимо необхідні умови існування локальних екстремумів функції.

Теорема 7.2.11 (необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ часткові похідні першого порядку за всіма змінними $x_1, x_2, ..., x_n$ і має в цій точці локальний екстремум, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0,\ ...,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) = 0. \qquad (7.2.36)$$

⏮ Зафіксуємо всі, крім першого, аргументи функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто візьмемо $x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,\ ...,\ x_n = x_n^0$. У цьому випадку отримаємо функцію однієї змінної $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$. Оскільки за умовою теореми функція $u = f(M)$ має локальний екстремум у точці M_0, то функція однієї змінної $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ має локальний екстремум у точці $x_1 = x_1^0$. З необхідної умови екстремуму функції однієї змінної маємо, що її похідна в цій точці дорівнює

нулю. Похідна цієї функції однієї змінної в точці $x_1 = x_1^0$ збігається з частинною похідною $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, тому $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0.$

Аналогічно можна довести решту рівностей у (7.2.36). ⏭

Зазначимо, що умови рівності нулю в точці M_0 усіх частинних похідних першого порядку є необхідними, але не достатніми умовами локального екстремуму в цій точці. Наприклад, для функції $u = f(x,y) = xy$ частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ та $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ в точці $M_0(0;0)$ дорівнюють нулю, але в цій точці функція не має екстремуму. Справді, $f(M_0) = 0,$ але в будь-якому околі цієї точки функція набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Точки, в яких усі частинні похідні першого порядку функції $u = f(M)$ дорівнюють нулю, називають *стаціонарними точками* цієї функції. В кожній стаціонарній точці функція $u = f(M)$ може мати локальний екстремум, а може і не мати. Очевидно, для відшукання всіх стаціонарних точок функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ досить розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \dfrac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

З теореми 7.2.11 отримаємо інший вигляд необхідних умов локального екстремуму.

Теорема 7.2.12. Якщо функція $u = f(M)$ диференційована в точці M_0 і має в цій точці локальний екстремум, то її диференціал $\mathrm{d}u\Big|_{M_0}$ у цій точці дорівнює нулю, тобто

$$\mathrm{d}u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cdot \mathrm{d}x_n = 0. \quad (7.2.37)$$

Достатні умови локального екстремуму. Нехай функція $u = f(M)$ тричі диференційована в стаціонарній точці M_0. Тоді за формулою Тейлора приріст функції в околі цієї точки

$$\Delta u(M_0) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(M_0) + o\left(\rho^2\right). \quad (7.2.38)$$

Доведено таке: якщо аргументи двічі диференційованої функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є незалежними змінними або лінійними функціями деяких незалежних змінних, то другий диференціал цієї функції в заданій точці M_0 є квадратичною формою щодо диференціалів аргументів $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n$:

$$\mathrm{d}^2 u\Big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k, \qquad (7.2.39)$$

де

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0). \qquad (7.2.40)$$

Матрицю цієї квадратичної форми називають матрицею Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \qquad (7.2.41)$$

На підставі (7.2.38) можна стверджувати, що знак приросту $\Delta u(M_0)$ функції в достатньо малому околі точки M_0 визначений знаком її другого диференціала (7.2.39).

Наведемо без доведення теорему, яка дає достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема 7.2.13 (достатні умови існування локального екстремуму). Нехай функція $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ один раз диференційована в деякому околі стаціонарної точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ і двічі диференційована в самій точці M_0. Якщо другий диференціал цієї функції є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від змінних $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n$, то функція $u = f(M)$ має в точці M_0 локальний мінімум (максимум). Якщо другий диференціал є знакозмінною квадратичною формою, то функція $u = f(M)$ в точці M_0 не має локального екстремуму.

Якщо другий диференціал функції в стаціонарній точці є квазізнаковизначеною квадратичною формою, то функція може мати локальний екстремум у цій точці, а може і не мати його. В цьому випадку проводять додаткові дослідження, зокрема, використовуючи диференціали вищих порядків.

На практиці часто трапляється задача про відшукання екстремуму функції двох змінних $u = f(M) = f(x, y)$. Позначимо значення частинних похідних другого порядку цієї функції в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$, відповідно, через a_{11}, a_{12}, a_{22}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = a_{12}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = a_{22}. \qquad (7.2.42)$$

Теорема 7.2.14. Нехай функція $u = f(x,y)$ один раз диференційована в околі стаціонарної точки $M_0(x_0;y_0)$ і двічі диференційована в самій точці M_0. Тоді якщо в точці M_0 виконується умова

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0, \qquad (7.2.43)$$

то функція $u = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний екстремум, а саме: максимум у випадку $a_{11} < 0$ і мінімум у випадку $a_{11} > 0$. Якщо в точці M_0 виконується умова $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0,$ то функція не має локального екстремуму в цій точці.

Приклад 7.2.11. Дослідимо функцію $u = x^3 - 3xy^2 + y^4 + 2$ на локальний екстремум.

- Щоб знайти стаціонарні точки функції, визначимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + 4y^3$$

та прирівняємо їх до нуля.

Розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0; \\ -3x^2 + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

є дві стаціонарні точки $M_1(6;3)$ та $M_2(0;0)$.

Визначимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2.$$

У точці $M_1(6;3)$ матриця Гессе диференціала другого порядку має вигляд

$$H(x;y)\Big|_{M_1(6;3)} = \begin{pmatrix} 6x - 6y & -6x \\ -6x & 12y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -36 \\ -36 & 108 \end{pmatrix},$$

а її головні мінори $a_{11} = 18,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 648$ є додатними.

Отже, на підставі теореми 7.2.14 у точці $M_1(6;3)$ функція має локальний мінімум

$$u_{\min} = u(6;3) = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 3^2 + 3^4 + 2 = -25.$$

У точці $M_2(0;0)$ матриця Гессе диференціала другого порядку

$$H(x;y)\Big|_{M_2(0;0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому в цій точці функція потребує додаткових досліджень. Обчислимо приріст функції в точці $M_2(0;0)$:

$$\Delta u(0;0) = \mathrm{d}\,u(0;0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 u(0;0) + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 u(0;0) + o\left(\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3\right) =$$

$$= \Delta x^3 - 3\Delta x^2 \Delta y + o\left(\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^3\right).$$

Очевидно, що приріст функції в околі точки $M_2(0;0)$ змінює знак, тому в цій точці функція не має екстремуму. ❍

Глобальний екстремум функції багатьох змінних. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена і неперервна в деякій обмеженій і замкненій області D евклідового простору і має в цій області обмежені частинні похідні першого порядку, можливо, за винятком окремих точок. За другою теоремою Вейєрштрасса, в області D ця функція досягає найбільшого та найменшого значення. *Глобальним*, або *абсолютним*, екстремумом функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в замкненій області D називають її найбільше або найменше значення в цій області. Функція може досягати глобального екстремуму або в точках локальних екстремумів, або на межі області D. Тому, щоб знайти глобальний екстремум функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в замкненій області D, потрібно знайти всі точки можливого локального екстремуму всередині області та на її межі, обчислити значення функції в кожній з цих точок і вибрати серед обчислених значень найбільше і найменше.

Приклад 7.2.12. Знайдемо найменше і найбільше значення функції $u = 4x^2 + y^2$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

• Визначимо точки можливого екстремуму всередині круга. Для цього обчислимо похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x} = 8x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ і прирівняємо їх до нуля. Отримаємо єдину стаціонарну точку $O(0;0)$, яка лежить усередині цього круга. Значення функції в цій точці $u(0,0) = 0$. На межі круга $y^2 = 1 - x^2$, тому $u = 1 + 3x^2$, $-1 \le x \le 1$. Очевидно, що на межі круга $u_{\text{найм.}} = 1$, $u_{\text{найб.}} = 4$. Отже, найбільше значення $u_{\max} = 4$ функція набуває на межі області, а найменше $u_{\min} = 0$ – усередині області.

7.2.4. Метод найменших квадратів

У різних дослідженнях доводиться використовувати емпіричні формули, які дають змогу аналітично зображати результати статистичного опрацювання експерименту. Нехай є результати $u_1, u_2, ..., u_n$ спостережень у точках $M_1, M_2, ..., M_n$ над деякою величиною u. Потрібно підібрати таку функцію $u = f(M)$, щоб вона найточніше відображала залежність величини u від точок $M_1, M_2, ..., M_n$.

Задача відшукання емпіричних формул складається з двох етапів:

1) визначають загальний вигляд залежності $u = f(M)$ з точністю до невідомих параметрів, які є в цій залежності;
2) ці невідомі параметри підбирають так, щоб у точках спостереження $M_1, M_2, \ldots, M_n$ значення функції $u = f(M)$ найменше відрізнялися від спостережуваних значень $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Нехай унаслідок аналізу результатів досліджень визначили, що спостережувані значення $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$ бажано наблизити емпіричною формулою

$$u = f(M) = a_1\varphi_1(M) + a_2\varphi_2(M) + \ldots + a_m\varphi_m(M), \qquad (7.2.44)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – невідомі параметри. Виберемо ці параметри так, щоб у точках спостереження $M_1, M_2, \ldots, M_n$ значення функції $u = f(M)$ найменше відрізнялися від спостережуваних значень $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (рис. 7.2.3).

Позначимо ці відхилення через δ_i. Метод найменших квадратів полягає в мінімізації суми квадратів відхилень як функції параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(M_i)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(M_i) \right)^2 .$$

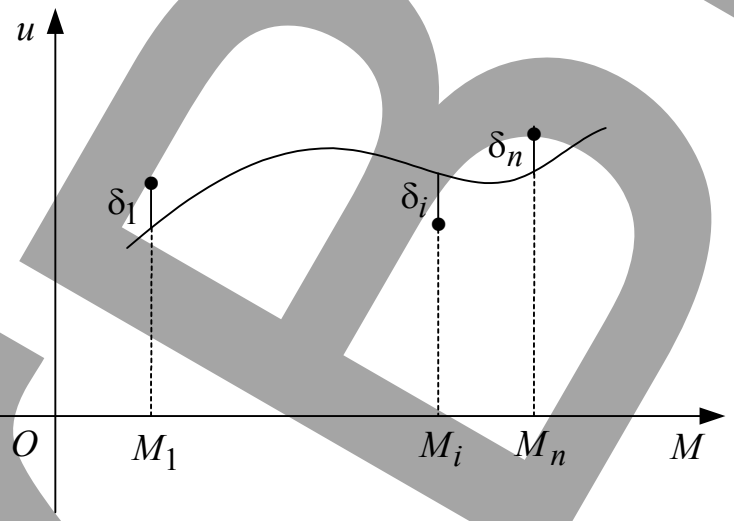


Рис. 7.2.3.

Обчислимо частинні похідні цієї функції і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(M_i) \right) \cdot \varphi_j(M_i) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Звідси отримаємо систему m лінійних рівнянь для визначення невідомих параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$\begin{cases} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + ... + A_{1m}a_m = B_1; \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + ... + A_{2m}a_m = B_2; \\ .....; \\ A_{m1}a_1 + A_{m2}a_2 + ... + A_{mm}a_m = B_m, \end{cases} \quad (7.2.45)$$

де

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(M_i) \cdot \varphi_k(M_i), \ B_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_j(M_i), \ j,k = 1,2,...,m. \quad (7.2.46)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь і отримаємо стаціонарну точку $N(a_1; a_2;...;a_m)$. Доведено, що функція $S(a_1, a_2,...,a_m)$ в цій стаціонарній точці досягає найменшого значення.

Під час опрацювання результатів спостережень найчастіше використовують наближення лінійною або квадратичною функцією однієї змінної. У цьому випадку маємо набір значень аргументу $x_1, x_2,...,x_n$ і набір значень функції $y_1, y_2,...,y_n$. У випадку лінійної функції емпірична формула (7.2.44) має вигляд

$$y = ax + b.$$

Система рівнянь (7.2.45) у цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b = B_1; \\ A_{21}a + A_{22}b = B_2, \end{cases} \quad (7.2.47)$$

де

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \ A_{22} = n, \ B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \ B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \quad (7.2.48)$$

У випадку квадратичної функції емпірична формула (7.2.44) має вигляд

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Система рівнянь (7.2.45) у цьому разі має вигляд

$$\begin{cases} A_{11} \cdot a + A_{12} \cdot b + A_{13} \cdot c = B_1; \\ A_{21} \cdot a + A_{22} \cdot b + A_{23} \cdot c = B_2; \\ A_{31} \cdot a + A_{32} \cdot b + A_{33} \cdot c = B_3, \end{cases} \quad (7.2.49)$$

де

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^4, \ A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i^3, \ A_{13} = A_{31} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ A_{22} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$A_{23} = A_{32} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \ A_{33} = n, \ B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \ B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \ B_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \quad (7.2.50)$$

Приклад 7.2.13. Менеджер з реклами фірми досліджував залежність збуту продукції y (тис. штук) від витрат на рекламу x (тис. гривень):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Припустимо, що між змінними x та y існує квадратична залежність $y = ax^2 + bx + c$, і обчислимо значення параметрів.

- За формулами (7.2.50) обчислимо $A_{11} = 979,\ A_{12} = 225,\ A_{13} = 55,\ A_{21} = 225,\ A_{22} = 55,\ A_{23} = 15,\ A_{31} = 55,\ A_{32} = 15,\ A_{33} = 5,\ B_1 = 680{,}2,\ B_2 = 169{,}8,\ B_3 = 49{,}0.$

Підставимо обчислені коефіцієнти в систему (7.2.49):

$$\begin{cases} 969 \cdot a + 225 \cdot b + 55 \cdot c = 680{,}2; \\ 225 \cdot a + 55 \cdot b + 15 \cdot c = 169{,}8; \\ 55 \cdot a + 15 \cdot b + 5 \cdot c = 49{,}0. \end{cases}$$

Методом Гаусса знайдемо розв'язок цієї системи: $a = 0{,}3,\ b = 0{,}48,\ c = 5{,}06.$

Отже, залежність збуту продукції від витрат на рекламу має вигляд $y = 0{,}3x^2 + 0{,}48x + 5{,}06.$ ❍

7.3. Умовний екстремум функції багатьох змінних

7.3.1. Неявні функції та дії над ними

Неявні функції визначені одним рівнянням. Часто трапляються випадки, коли змінна u, яка є функцією аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, задана за допомогою функціонального рівняння

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0. \qquad (7.3.1)$$

Якщо $F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0$ для всіх $(x_1, x_2, ..., x_n) \in\subset R^n$, то в цьому випадку кажуть, що функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, як функція аргументів $(x_1, x_2, ..., x_n) \in\subset R^n$, задана неявно. Рівняння (7.3.1) може задавати декілька функцій, тому потрібно з'ясувати, за яких умов це рівняння однозначно задає u як функцію змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Розглянемо спочатку випадок неявної функції двох змінних

$$F(x, y) = 0. \qquad (7.3.2)$$

Наприклад, якщо задане рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},\quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},\quad -1 \le x \le 1$$

– неявні функції, задані цим рівнянням. Якщо домагатися, щоб неявна функція задовольняла деякі додаткові умови, то можливо, що така функція буде єдиною. Наприклад, якщо значення неявної функції, визначеної рівнянням $x^2 + y^2 = 1$ на відрізку $[-1; 1]$ невід'ємні, то є лише одна така функція

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},\quad -1 \le x \le 1.$$

Сформулюємо умови, за яких існує єдина неявна функція, визначена рівнянням $F(x,y)=0$.

Теорема 7.3.1. Нехай функція $F(x,y)$ неперервна в деякому прямокутному околі

$$U(x_0,y_0)=\{(x,y):|x-x_0|<\xi,|y-y_0|<\eta\}$$

точки $M_0(x_0;y_0)$ і для кожного фіксованого $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ строго монотонна за y на інтервалі $(y-\eta,y+\eta)$. Тоді якщо $F(x_0,y_0)=0$, то існують околи $U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ точки x_0 та $U(y_0)=(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ точки y_0 такі, що для кожного $x\in U(x_0)$ існує єдиний розв'язок $y\in U(y_0)$ рівняння $F(x,y)=0$. Цей розв'язок $y=f(x)$ неперервний у точці x_0 і $f(x_0)=y_0$.

Отже, з теореми отримаємо, що для зроблених припущень існує неявна функція $y=f(x)$, визначена рівнянням $F(x,y)=0$, і якщо $x\in U(x_0)$, $y\in U(y_0)$, то рівності $F(x,y)=0$ та $y=f(x)$ рівносильні.

Теорема 7.3.2. Нехай функція $F(x,y)$ неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і має в цьому околі частинну похідну $F'_y(x,y)$, неперервну в точці $M_0(x_0;y_0)$. Тоді якщо

$$F(x_0,y_0)=0,\ F'_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

то існують такі околи $U(x_0)$, $U(y_0)$ точок x_0 та y_0, що для будь-якого $x\in U(x_0)$ існує єдиний розв'язок $y=f(x)\in U(y_0)$ рівняння $F(x,y)=0$. Цей розв'язок неперервний для всіх $x\in U(x_0)$ і $f(x_0)=y_0$.

Якщо функція $F(x,y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ частинну похідну $F'_y(x,y)$, неперервну в точці $M_0(x_0;y_0)$, то функція $y=f(x)$ теж має в точці x_0 похідну, яку обчислюють за формулою

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)},\qquad(7.3.3)$$

неперервну в околі точки x_0.

Аналогічно можна ввести поняття неявної функції, визначеної рівнянням

$$F(x_1,x_2,...,x_n,u)=F(\bar{x},u)=0.\qquad(7.3.4)$$

7.3.2. Умовний екстремум

У математиці та її застосуваннях часто доводиться розв'язувати задачу на відшукання екстремумів функції, коли її аргументи задовольняють певні додаткові співвідношення (в'язі). Такі екстремуми *називають умовними*, на відміну від безумовних екстремумів, вивчених раніше.

Нехай в області $D\subset R^n$ $(n\geq 2)$ задано функцію

$$u=f(x_1,x_2,...,x_n)\qquad(7.3.5)$$

та m $(1\leq m<n)$ рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ .....; \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \quad (7.3.6)$$

Функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за наявності в'язей (7.3.6) досягає в точці $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ умовного максимуму (мінімуму), якщо координати цієї точки задовольняють систему рівнянь (7.3.6) та існує такий окіл точки M_0, у якому для всіх точок $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цього околу, координати яких задовольняють систему рівнянь (7.3.6), виконується нерівність

$$f(M) \le f(M_0) \quad \left(f(M) \ge f(M_0)\right).$$

Розглянемо умовні екстремуми для функцій двох змінних.

Розглянемо функцію $u = f(x, y)$, аргументи x та y якої задовольняють умову $g(x, y) = 0$.

Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають точкою *умовного максимуму* (*мінімуму*), якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x; y)$ з цього околу, які задовольняють умову $g(x, y) = 0$, виконується нерівність

$$f(x_0; y_0) \ge f(x; y) \quad \left(f(x_0; y_0) \le f(x; y)\right). \quad (7.3.7)$$

Нехай із рівняння $g(x, y) = 0$ визначили змінну y як функцію змінної x, тобто

$$y = \varphi(x). \quad (7.3.8)$$

Підставимо (7.3.8) у функцію $u = f(x, y)$ і отримаємо функцію однієї змінної $u = f(x, \varphi(x))$. Екстремум цієї функції і буде умовним екстремумом функції $u = f(x, y)$.

Приклад 7.3.1. Знайдемо екстремум функції $u = x^2 + y^2$, якщо її аргументи задовольняють умову $x + y - 4 = 0$.

• Екстремуми цієї функції шукають не на всій площині Oxy, а лише на прямій $x + y - 4 = 0$ (рис. 7.3.1).

КРИ

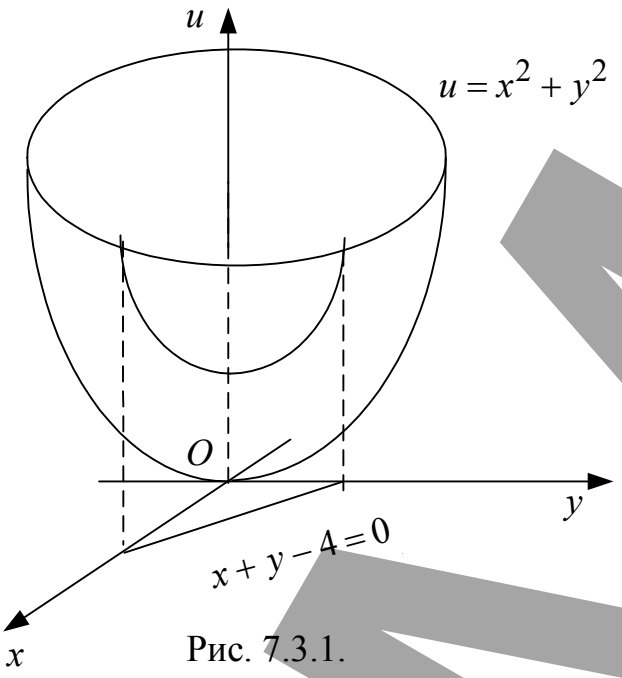


Рис. 7.3.1.

Підставимо $y = 4 - x$ в рівняння $u = x^2 + y^2$ і зведемо задачу на умовний екстремум до відшукання безумовного екстремуму функції $\tilde{u} = 2x^2 - 8x + 16$. Обчислимо $\tilde{u}' = 4x - 8$. З необхідної умови існування екстремуму $\tilde{u}'(x) = 0$ отримаємо стаціонарну точку $x_0 = 2$. Оскільки $\tilde{u}''(x) = 4 > 0$, то функція $\tilde{u} = 2x^2 - 8x + 16$ в точці $x_0 = 2$ має мінімум. Тому функція $u = x^2 + y^2$ з умовою $x + y - 4 = 0$ в точці $M_0(2;2)$ має умовний мінімум, і $u_{\min} = u(2,2) = 8$. Зазначимо, що безумовний мінімум ця функція має в точці $O(0;0)$, і $u_{\min} = u(0,0) = 0$. ❍

Виразити розв'язок системи рівнянь (7.3.6) через елементарні функції часто дуже складно, або взагалі неможливо. Тому існує метод, який дає змогу відшукати умовний екстремум функції (7.3.5), не розв'язуючи системи (7.3.6).

Метод невизначених множників Лагранжа. Нехай потрібно знайти екстремум функції (7.3.5) за наявності в'язей (7.3.6). Уведемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – параметри, які називають *множниками Лагранжа*.

Доведено таке: якщо $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ – точка умовного екстремуму функції (7.3.5) за наявності в'язей (7.3.6), то існують числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ такі, що $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)$ є розв'язком системи $n + m$ рівнянь з $n + m$ змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)}{\partial \lambda_j} \equiv F_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{7.3.9}$$

У цьому разі достатньою умовою наявності умовного екстремуму в точці M_0 є знаковизначеність у цій точці диференціала другого порядку

$$\mathrm{d}^2 L \Big|_{\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)}{\partial x_i \, \partial x_j} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j \tag{7.3.10}$$

за умови, що диференціали аргументів $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n$ пов'язані співвідношеннями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{7.3.11}$$

Зазначимо, що в цьому випадку диференціал $\mathrm{d}^2 L$ в (7.3.10) є квадратичною формою щодо $n - m$ незалежних змінних $\mathrm{d}x_{i_1}, \mathrm{d}x_{i_2}, ..., \mathrm{d}x_{i_{n-m}}$, оскільки решту m змінних $\mathrm{d}x_{i_{n-m+1}}, \mathrm{d}x_{i_{n-m+2}}, ..., \mathrm{d}x_{i_n}$ можна виразити через $\mathrm{d}x_{i_1}, \mathrm{d}x_{i_2}, ..., \mathrm{d}x_{i_{n-m}}$ як розв'язки системи (7.3.11).

Приклад 7.3.2. Методом множників Лагранжа знайдемо точки умовного екстремуму функції $u = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ за умови $x + y + z = 1$.

- Уведемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + \lambda(x + y + z - 1).$$

Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda, \ \frac{\partial L}{\partial y} = 6y + \lambda, \ \frac{\partial L}{\partial z} = -2z + \lambda, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 1$$

і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 4x + \lambda = 0; \\ 6y + \lambda = 0; \\ -2z + \lambda = 0; \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси $x = -3, \ y = -2, \ z = 6, \ \lambda = 12$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=6,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=-2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial zy}=0$$

і запишемо диференціал другого порядку

$$\mathrm{d}^2 L=4\,\mathrm{d}x^2+6\,\mathrm{d}y^2-2\,\mathrm{d}z^2.$$

Урахуємо, що $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0,$ тобто $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$ отримаємо

$$\mathrm{d}^2 L=4\,\mathrm{d}x^2+6\,\mathrm{d}y^2-2(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2=2\,\mathrm{d}x^2-4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}y^2.$$

Матриця диференціала другого порядку $H=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, її головні мінори $M_1=2,\ M_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4$ додатні.

Отже, у точці $A(-3;-2;6)$ функція має умовний мінімум $u_{\min}=-6.$ ❍

7.4. Застосування функцій багатьох змінних до задач економіки

Еластичність функції. Раніше введено поняття еластичності функції однієї змінної. Аналогічно можна ввести поняття еластичності для функції багатьох змінних. Розглянемо функцію двох змінних $u=f(x,y)$ і запишемо її частинні прирости в точці $M_0(x_0;y_0)$:

$$\Delta_x u=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),\ \ \Delta_y u=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Еластичністю функції $u=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ за x називають границю

$$E_{ux}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta_x u}{u}:\frac{\Delta x}{x}\right),$$

а *еластичністю функції $u=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ за y* – границю

$$E_{uy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta_y u}{u}:\frac{\Delta y}{y}\right).$$

Числа $E_{ux}(x_0,y_0)$ та $E_{uy}(x_0,y_0)$ називають коефіцієнтами еластичності в точці $M_0(x_0;y_0)$ функції $u=f(x,y)$ за змінними x та y.

Із означення

$$E_{ux}(x,y)=\frac{x}{u}u'_x=x(\ln u)'_x=\frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln x)};\qquad (7.4.1)$$

$$E_{uy}(x,y)=\frac{y}{u}u'_y=y(\ln u)'_y=\frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln y)}.\qquad (7.4.2)$$

Аналогічно, для функції $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$E_{ux_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{x_i}{u}u'_{x_i}=x_i(\ln u)'_{x_i}=\frac{\partial(\ln u)}{\partial(\ln x_i)}.\qquad (7.4.3)$$

Приклад 7.4.1. Обчислимо коефіцієнти еластичності за x та y функції $u = x^y$ в точці $M(2;3)$.

• За формулами (7.4.1), (7.4.2) отримаємо

$$E_{ux}(x,y) = \frac{x}{u}u'_x = x(y\ln x)'_x = y;$$

$$E_{uy}(x,y) = \frac{y}{u}u'_y = y(y\ln x)'_y = y\ln x.$$

Отже, $E_{ux}(2,3) = 3,\ E_{uy}(2,3) = 3\ln 2.$ ❍

Для кожної пари функцій $y_1 = f_1(x_1,x_2),\ y_2 = f_2(x_1,x_2)$ маємо чотири коефіцієнти еластичності $E_{y_i x_j}$, $i = 1,2;\ j = 1,2$. Запишемо їх у вигляді матриці

$$E_{yx} = \begin{pmatrix} E_{y_1x_1} & E_{y_1x_2} \\ E_{y_2x_1} & E_{y_2x_2} \end{pmatrix}.$$

Елементи $E_{y_1x_2}$ та $E_{y_2x_1}$ називають перехресними коефіцієнтами еластичності.

Коефіцієнти еластичності використовують з метою аналізування функцій попиту для будь-якої кількості різних товарів. Розглянемо випадок двох товарів. Нехай x_i – кількість i-го товару, p_i – його ціна, $i = 1,2$. Нехай попит на кожен товар залежить від обох цін p_1 та p_2:

$$\begin{cases} x_1 = D_1(p_1,p_2); \\ x_2 = D_2(p_1,p_2). \end{cases} \tag{7.4.4}$$

Очевидно, що не лише ціни визначають попит, а і попит визначає ціни. Це означає, що систему (7.4.4) можна розв'язати щодо p_1 і p_2:

$$\begin{cases} p_1 = p_1(x_1,x_2), \\ p_2 = p_2(x_1,x_2). \end{cases} \tag{7.4.5}$$

Системи (7.4.4) і (7.4.5) визначають дві пари взаємно обернених функцій. Матриця коефіцієнтів еластичності цін за попитом є оберненою до матриці коефіцієнтів еластичності попиту за цінами, тобто $E_{px} = E_{xp}^{-1}$.

Розглянемо виробничу функцію двох змінних $Y = F(K,L)$, де K – основні фонди, L – затрати праці. Величина

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)}$$

означає, яким є відносний приріст випуску продукції, якщо основні фонди збільшили на $\Delta K > 0$, а затрати праці незмінні.

Величина

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)} : \frac{\Delta K}{K_0} \tag{7.4.6}$$

означає, яким є відносний приріст продукції, якщо основні фонди збільшили на одиницю. Запишемо (7.4.6) у вигляді

$$\frac{F(K_0+\Delta K,L_0)-F(K_0,L_0)}{\Delta K}\cdot\frac{L_0}{F(K_0,L_0)}. \qquad (7.4.7)$$

У випадку, коли ΔK досить мале, вираз (7.4.7) приблизно дорівнює еластичності функції $F(K,L)$ за змінною K в точці $M_0(K_0,L_0)$, тобто

$$\frac{F(K_0+\Delta K,L_0)-F(K_0,L_0)}{\Delta K}\cdot\frac{L_0}{F(K_0,L_0)}\approx E_{FK}(K_0,L_0).$$

Відносну зміну величини виражають у відсотках. У випадку, коли зміну на 1% можна вважати досить малою відносною зміною, можна сказати, що еластичність випуску за основними фондами в точці $M_0(K_0,L_0)$ означає, на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо основні фонди зміняться на 1%. Аналогічно можна інтерпретувати еластичність випуску за затратами праці, тобто $E_{FL}(K_0,L_0)$.

Приклад 7.4.2. Обчислимо еластичність виробничої функції Кобба–Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ в довільній точці $M_0(K_0,L_0)$ за змінними K і L.

- $$E_{FK}(K_0,L_0)=\frac{F'_K(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)}\cdot K_0=\frac{A\alpha\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{1-\alpha}}{AK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\cdot K_0=\alpha;$$

$$E_{FL}(K_0,L_0)=\frac{F'_L(K_0,L_0)}{F(K_0,L_0)}\cdot L_0=\frac{A(1-\alpha)\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\alpha}}{AK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\cdot L_0=1-\alpha.$$

Отже, еластичність випуску продукції, який описує виробнича функція Кобба–Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, за основними фондами дорівнює α, а за затратами праці – $(1-\alpha)$. Це означає, що відносна зміна основних фондів K на 1% зумовлює приблизно відносну зміну продукції на α%, а відносна зміна затрат праці L на 1% зумовлює приблизно відносну зміну продукції на $(1-\alpha)$%. ❍

Максимізація прибутку виробництва продукції. Функцію прибутку у багатьох випадках задають у вигляді

$$\pi(K,L)=P\cdot F(K,L)-W\cdot L-R\cdot K, \qquad (7.4.8)$$

де P – ціна продукції; $F(K,L)$ – виробнича функція; W і R – відповідно, ціни на працю і капітальні затрати, L і K – відповідно, затрати трудових ресурсів і капіталу. Розглянемо дві задачі, пов'язані з визначенням максимуму прибутку.

Оптимальний план. Точку $M_0(K_0;L_0)$ називають *оптимальним планом*, якщо в цій точці функція прибутку (7.4.8) набуває найбільшого значення. Знайдемо граничну норму заміщення S_K трудових ресурсів основними фондами для оптимального плану. В точці локального екстремуму частинні похідні першого порядку функції (7.4.8) дорівнюють нулю. Звідси отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} P \cdot \dfrac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial K} - R = 0; \\ P \cdot \dfrac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial L} - W = 0. \end{cases} \tag{7.4.9}$$

Із системи (7.4.9) гранична норма заміщення трудових ресурсів основними фондами

$$S_K = -\frac{W}{R}. \tag{7.4.10}$$

Максимізація функції прибутку. Знайдемо оптимальний план і максимум функції прибутку (7.4.8), якщо $F(K,L) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. У цьому випадку функція прибутку

$$\pi(K,L) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} - WL - RK. \tag{7.4.11}$$

З необхідної умови екстремуму отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} PL^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{2}{3}} = R; \\ \dfrac{2}{3} PK^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = W. \end{cases}$$

Звідси координати оптимального плану

$$K_0 = \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{R^2 W}; \quad L_0 = \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{RW^2}.$$

У цьому випадку $\pi_{\max} = \pi(K_0, L_0) = \dfrac{\left(\frac{2P}{3}\right)^3}{RW}$.

Прибуток від виробництва різних товарів. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – кількості вироблених різних товарів, які мають сталі ціни $P_1, P_2, ..., P_n$. Нехай затрати виробництва описує функція $C = S(x_1, x_2, ..., x_n)$. У цьому випадку функція прибутку

$$\pi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n - S(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{7.4.12}$$

З необхідної умови екстремуму

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

отримаємо систему алгебричних рівнянь

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.4.13}$$

Система рівнянь (7.4.13) відображає відоме правило економіки: гранична вартість (ціна) товару дорівнює граничним витратам на його виробництво.

Розв'язками цієї системи рівнянь є набори $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Далі потрібно використати достатні умови екстремуму.

Приклад 7.4.3. Нехай виробляють два товари у кількостях x та y. Ціни товарів, відповідно, дорівнюють $P_1 = 8,\ P_2 = 10,$ а функція затрат $C = x^2 + xy + y^2$. Знайдемо максимум прибутку.

- Прибуток описує функція

$$\pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 8 - 2x - y,\ \frac{\partial \pi}{\partial y} = 10 - x - 2y.$$

З необхідної умови локального екстремуму отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 8; \\ x + 2y = 10, \end{cases}$$

розв'язком якої є точка $A(1;4)$.

Обчислимо $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -2,\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -2,\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial x} = -1$ і складемо матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta_1 = -2,\ \Delta_2 = 3,$ то в точці $A(1;4)$ функція прибутку має локальний максимум $\pi_{\max} = \pi(1,4) = 28.$ ❍

7.5. Інтегрування функцій багатьох змінних

7.5.1. Поняття подвійного інтеграла та його властивості

Нехай G – деяка замкнена обмежена область, а $z = f(x, y)$ – довільна функція, визначена й обмежена в цій області. Межа області G складається зі скінченної кількості кривих, заданих рівняннями $y = g(x)$ або $x = \varphi(y),$ де $f(x)$ і $g(y)$ – неперервні функції. Розіб'ємо область G довільно на n частин $G_i,$ $i = 1, 2, ..., n,$ які не мають спільних внутрішніх точок з площами ΔS_i (рис. 7.5.1).

У кожній частині G_i виберемо довільну точку $M_i(\varsigma_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i; \eta_i) \Delta S_i, \qquad (7.5.1)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $f(x,y)$ в області G. Найбільшу відстань між межовими точками цієї області назвемо *діаметром* $d(G)$ *області* G. Позначимо через λ найбільший із діаметрів частинних областей G_i, $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d(G_i)\}$.

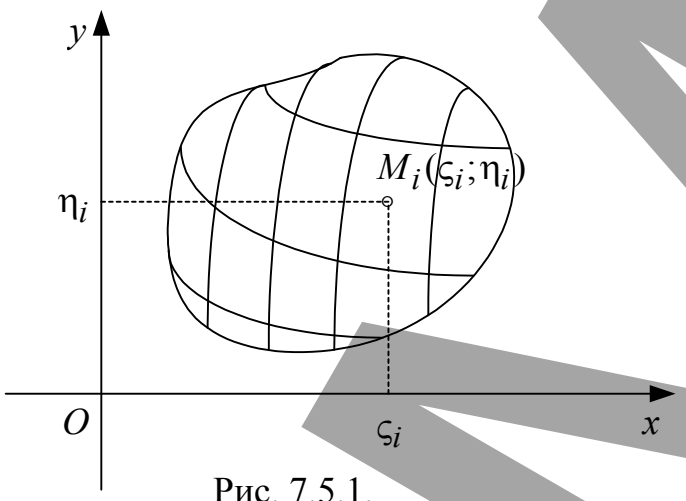


Рис. 7.5.1.

Число I називають *границею інтегральної суми* (7.5.1) при $\lambda \to 0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що незалежно від способу розбиття області G і від вибору точок $M_i(\varsigma_i;\eta_i)$, з нерівності $\lambda < \delta$ випливає нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Якщо існує границя I інтегральної суми (7.5.1) при $\lambda \to 0$, то цю границю називають *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ за областю G і позначають

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (7.5.2)$$

У цьому випадку функцію $f(x,y)$ називають *інтегрованою* в області G, x, y – *змінними інтегрування*, $\mathrm{d}S$ або $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *– елементом площі*, G *– областю інтегрування.*

Очевидно, що функція $f(x,y)$ обмежена. Ця умова є необхідною умовою інтегрування. Вона не є достатньою, тобто існують обмежені, але неінтегровані функції. Наприклад, функція

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ і } y \text{ раціональні числа;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ або } y \text{ ірраціональне число,} \end{cases}$$

визначена в квадраті $G = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, неінтегрована. Це випливає з означення подвійного інтеграла.

Зазначимо, що для з'ясування достатніх умов інтегрованості, як і у випадку функції однієї змінної, можна використати суми Дарбу, властивості яких можливо перенести на випадок подвійного інтеграла. Можна довести таке: якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в області G, то границя як нижніх s, так і вер-

хніх S сум Дарбу при $\lambda \to 0$ дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ по області G.

Як і у випадку визначеного інтеграла від функції однієї змінної, доведено теореми про класи інтегрованих функцій.

Теорема 7.5.1. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона інтегрована в цій області.

Як і для функцій однієї змінної, клас інтегрованих функцій є ширшим, ніж клас неперервних функцій.

Теорема 7.5.2. Нехай функція $f(x,y)$ обмежена в замкненій обмеженій області G і має розриви лише на скінченній кількості кривих цієї області, які є графіками неперервних функцій $y = g(x)$ або $x = \varphi(y)$. Тоді функція $f(x,y)$ інтегрована в області G.

Геометричне трактування подвійного інтеграла. Розглянемо тіло P, згори обмежене графіком неперервної і невід'ємної в області G функції $z = f(x,y)$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області G, з твірними, паралельними до осі Oz, а знизу – областю G, яка лежить у площині Oxy (рис. 7.5.2).

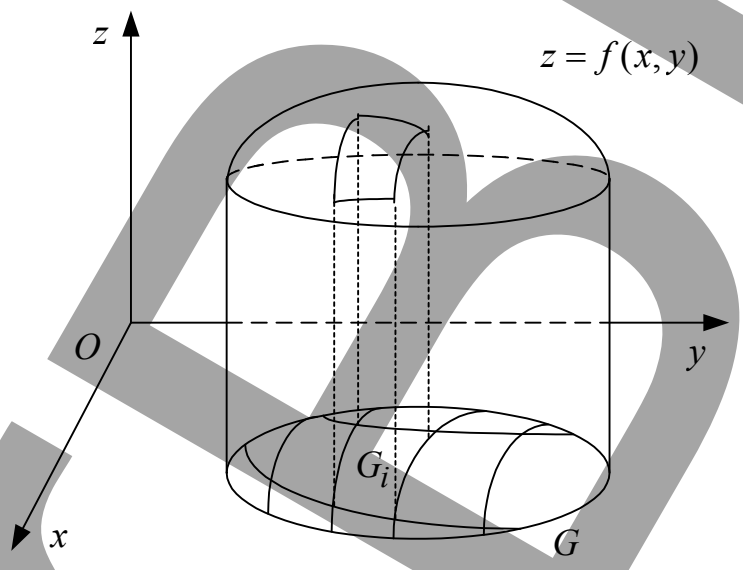


Рис. 7.5.2.

Таке тіло називають *криволінійним циліндром*. Знайдемо об'єм такого тіла. Для цього розіб'ємо область G довільно на n частин G_i, $i = 1, 2, ..., n$, які не мають спільних внутрішніх точок з площами ΔS_i, у кожній частині G_i виберемо довільну точку $M_i(\varsigma_i;\eta_i)$ і побудуємо прямий циліндричний стовпчик з основою G_i та висотою $f(\varsigma_i;\eta_i)$. Його об'єм дорівнює $V_i = f(\varsigma_i;\eta_i)\Delta S_i$. Складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i;\eta_i)\Delta S_i,$$

яка приблизно дорівнює об'єму тіла P. Ця сума тим точніше задає шуканий об'єм, чим меншим буде кожен із діаметрів λ_i частинних областей G_i. Тому об'єм тіла P

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i, \eta_i) \Delta S_i . \tag{7.5.3}$$

Звідси випливає геометричне трактування подвійного інтеграла: подвійний інтеграл від неперервної невід'ємної функції дорівнює об'єму криволінійного циліндра.

Зазначимо таке: якщо $f(x,y) \equiv 1$ в усіх точках області G, то з означення подвійного інтеграла отримаємо формулу для обчислення площі цієї області

$$S = \iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y . \tag{7.5.4}$$

Властивості подвійного інтеграла. Головні властивості подвійного інтеграла аналогічні до відповідних властивостей визначеного інтеграла.

1. Якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в області G і $a \in R$, то функція $a \cdot f(x,y)$ теж інтегрована в G, і

$$\iint\limits_G a \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a \cdot \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла.

2. Якщо функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ інтегровані в області G, то їхня алгебрична сума теж інтегрована в цій області, і

$$\iint\limits_G \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm \iint\limits_G g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Якщо функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ інтегровані в області G, то їхній добуток теж інтегрований у цій області.

4. Якщо область G є об'єднанням областей G_1 та G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, і в кожній з них функція $f(x,y)$ інтегрована, то функція інтегрована в області G, і

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. Якщо в усіх точках області G виконується нерівність $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint\limits_G g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в області G, то функція $\big|f(x,y)\big|$ теж інтегрована, і

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \iint\limits_G \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Для подвійних інтегралів справджується теорема про середнє значення.

Теорема 7.5.3. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області G, то існує така точка $M(\varsigma,\eta)\in G$, що

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le f(\varsigma,\eta)\cdot S. \qquad (7.5.5)$$

7.5.2. Обчислення подвійних інтегралів

Виведемо формули, за якими можна обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ від неперервної в області G функції $f(x,y)$.

Обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної області. Нехай область G – прямокутник зі сторонами, паралельними до осей координат.

Теорема 7.5.4. Нехай для функції $f(x,y)$ в прямокутнику $G=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b;\ c\le y\le d\}$ існує подвійний інтеграл

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (7.5.6)$$

і для кожного $x\in[a;b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (7.5.7)$$

Тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad (7.5.8)$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \qquad (7.5.9)$$

Зазначимо таке: якщо в теоремі 7.5.4 поміняти місцями змінні x та y, то доведено існування повторного інтеграла

$$\int\limits_c^d K(y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

і

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.10)$$

Приклад 7.5.1. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, де $G=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 1;\,0\le y\le 1\}$.

- За формулою (7.5.9) отримаємо

$$\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \bigcirc$$

Зазначимо, що цей інтеграл можна обчислити за формулою (7.5.10).

Обчислення подвійного інтеграла у випадку довільної області. Множину $G = \{(x;y) \mid a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні функції, $y_1(x) \le y_2(x), a \le x \le b,$ будемо називати *областю, стандартною щодо осі* Ox (рис. 7.5.3). Стандартна щодо осі Ox область G має таку властивість: якщо відрізок $[a;b]$ є проекцією G на вісь Ox, то для будь-якого $x_0 \in (a;b)$ пряма $x = x_0$ перетинає межу області лише у двох точках.

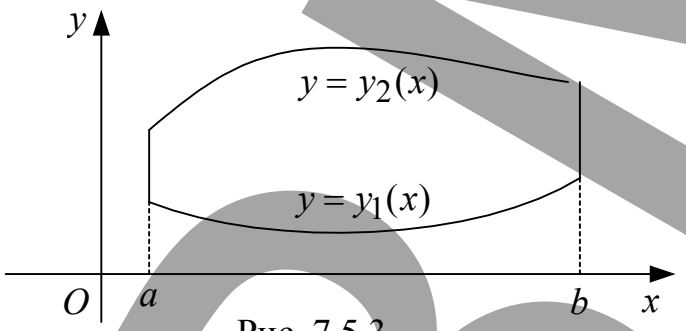


Рис. 7.5.3.

Множину $G = \{(x;y) \mid c \le y \le d;\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, де $x_1(y)$ та $x_2(y)$ – неперервні функції, $x_1(y) \le x_2(y), c \le y \le d,$ будемо називати *областю, стандартною щодо осі* Oy (рис. 7.5.4).

Стандартна щодо осі Oy область G має таку властивість: якщо відрізок $[c;d]$ є проекцією G на вісь Oy, то для будь-якого $y_0 \in (c;d)$ пряма $y = y_0$ перетинає межу області лише у двох точках.

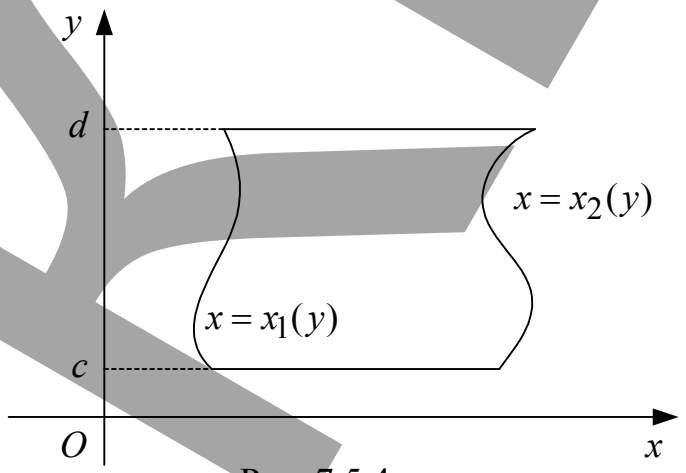


Рис. 7.5.4.

Теорема 7.5.5. Нехай функція $f(x,y)$ визначена й інтегрована в області $G=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b;\ y_1(x)\le y\le y_2\,(x)\}$, де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні функції, $y_1(x)\le y_2(x)$, $a\le x\le b$. Нехай для кожного $x\in[a;b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Тоді існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \qquad (7.5.11)$$

Зазначимо таке: у випадку області, стандартної щодо осі Oy, можна довести, що існує повторний інтеграл

$$\int\limits_a^b I(y)\,\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

і справджується рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y==\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.12)$$

Якщо область G є стандартною щодо осей Ox та Oy (рис. 7.5.5),

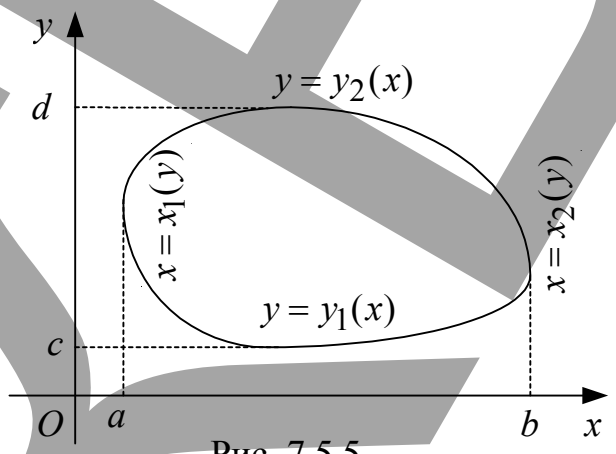


Рис. 7.5.5.

то можна застосовувати обидві формули (7.5.11) та (7.5.12). У цьому випадку отримаємо рівність

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \qquad (7.5.13)$$

Якщо область G не є стандартною щодо осі Ox чи Oy, то потрібно розбити цю область прямими, паралельними до осей координат, на частини, кожна з яких є стандартною щодо осі Ox чи Oy, і зводити подвійний інтеграл до повторного на кожній частині (рис. 7.5.6).

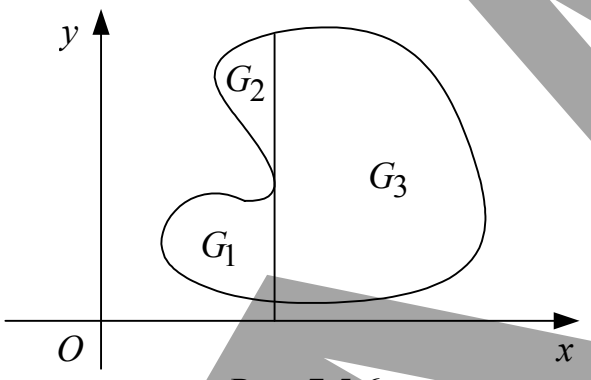


Рис. 7.5.6.

Приклад 7.5.2. Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_G \left(x + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y$, де область G обмежена кривими $y = x$ і $y = x^2$.

• Область G зображена на рис. 7.5.7.

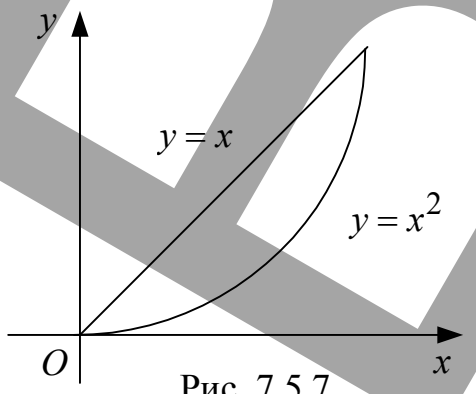


Рис. 7.5.7.

За формулою (7.5.11)

$$\iint\limits_G \left(x + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{x} \left(x + y^2\right)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} \right)\mathrm{d}\,x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6 \right)\mathrm{d}\,x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{21}x^7 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{42}. \qquad \bigcirc$$

7.5.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Криволінійні координати. Нехай задано дві площини. У першій уведемо прямокутну систему координат Oxy, у другій – $O'uv$. Розглянемо у першій площині область G, у другій – Δ. Припустимо, що межа Γ та γ кожної з областей є кусково-гладкою функцією (рис. 7.5.8).

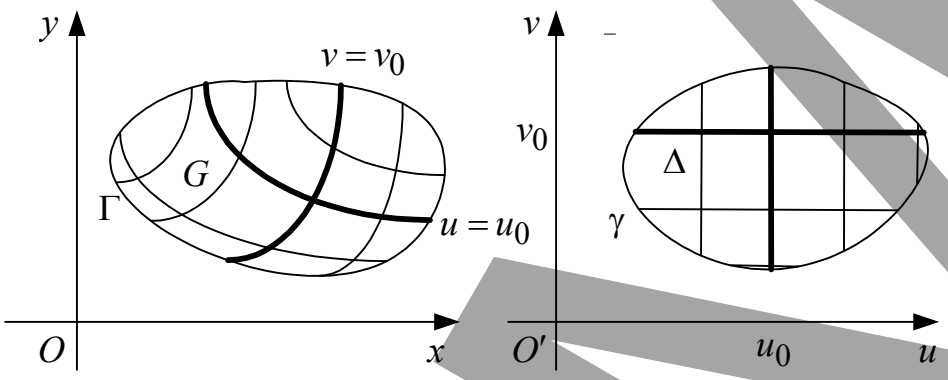


Рис. 7.5.8.

Нехай в області Δ задана система неперервних функцій

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v), \end{cases} \tag{7.5.14}$$

яка кожній точці $M^*(u;v)$ області Δ ставить у відповідність одну точку $M(x;y)$ області G, причому жодна точка не буде пропущена. Якщо різним точкам $M^*(u;v)$ відповідають різні точки $M(x;y)$, і навпаки, то рівняння (7.5.14) можна однозначно розв'язати щодо змінних u і v, які є однозначними функціями змінних x та y в області G:

$$\begin{cases} u = u(x,y); \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{7.5.15}$$

Отже, між областями G і Δ є взаємно однозначна відповідність. Формули (7.5.14) виконують перетворення області Δ в область G, а формули (7.5.15) – обернене перетворення області G в область Δ. У цьому випадку точкам межі γ відповідають точки межі Γ, і навпаки.

Припустимо, що функції (7.5.14) мають неперервні похідні першого порядку. У цьому випадку функціональний визначник

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7.5.16}$$

є неперервною функцією від u,v в області Δ. Будемо вважати, що цей визначник завжди відмінний від нуля, а отже, внаслідок неперервності зберігає сталий знак. Зазначимо, що визначник (7.5.16) називають *якобіаном*.

Задані пари значень змінних u, v в області Δ однозначно визначають точку x, y в області G, і навпаки. Це дає підставу називати числа u, v координатами точки в області G.

Криву, складену з точок області G, у яких одна з координат зберігає сталe значення, називають *координатною лінією*. Наприклад, прийнявши в (7.5.14) $v = v_0$, отримаємо параметричне зображення координатної лінії $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$. Оскільки координатні лінії в загальному випадку є кривими, то числа u, v, які характеризують положення точки в області G, називають *криволінійними координатами точки*. Надаючи координаті v різних можливих значень, отримаємо сім'ю координатних ліній на площині Oxy. Фіксуючи значення координати u, отримаємо іншу сім'ю координатних ліній. У випадку взаємно однозначної відповідності між областями різні лінії однієї тієї ж сім'ї не перетинаються, і через кожну точку області G проходить по одній лінії з кожної сім'ї. Сітка координатних ліній на площині Oxy є зображенням сітки прямих $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на площині $O'uv$ (див. рис. 7.5.8).

Полярні координати. Важливим прикладом криволінійних координат є полярні координати ρ, φ, які уводять за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{7.5.17}$$

У цих формулах $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Деколи беруть $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Якобіан (7.5.16) у цьому випадку

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \tag{7.5.18}$$

Теорема 7.5.6. Нехай: 1) функція $f(x, y)$ неперервна в області G; 2) перетворення (7.5.14) переводить замкнену обмежену область Δ у замкнену обмежену область G і є взаємно однозначним; 3) функції (7.5.14) мають в області Δ неперервні частинні похідні першого порядку, і якобіан (7.5.16) відмінний від нуля. Тоді

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{7.5.19}$$

Формулу (7.5.19) називають *формулою заміни змінних у подвійному інтегралі.*

Приклад 7.5.3. Обчислимо інтеграл $\iint\limits_G (2x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, де G – паралелограм, обмежений прямими $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$.

- Побудуємо область G (рис. 7.5.9).

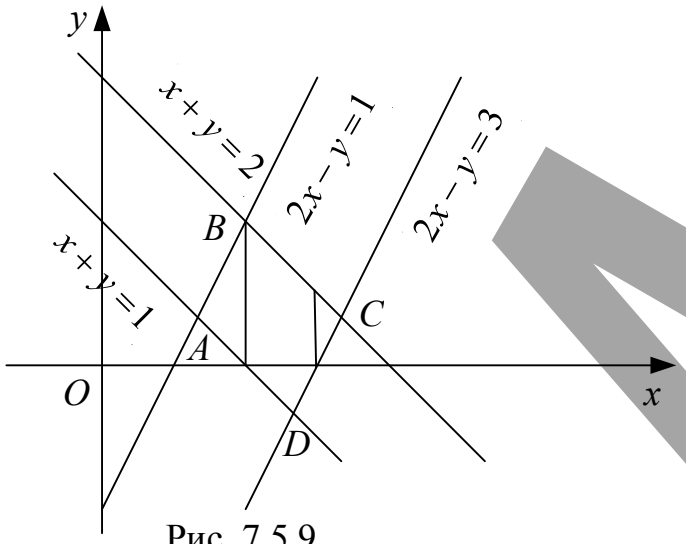


Рис. 7.5.9.

Зазначимо, що область $ABCD$ прямими, паралельними до осі Oy, можна розбити на три області, стандартні щодо осі Ox, і звести цей інтеграл до повторного. Цей спосіб громіздкий, тому використаємо заміну змінних у подвійному інтегралі. Уведемо нові змінні $x+y=u,\ 2x-y=v$. Прямі $x+y=1,\ x+y=2$ переходять у прямі $u=1,\ u=2$ в системі координат $O'uv$, а прямі $2x-y=1,\ 2x-y=3$ – у прямі $v=1,\ v=3$. Паралелограм G взаємно однозначно переходить у прямокутник Δ.

Виразимо x та y через змінні u, v: $x=\dfrac{u+v}{3},\ y=\dfrac{2u-v}{3}$. Обчислимо якобіан:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}.$$

За формулою (7.5.19) отримаємо

$$\iint\limits_G (2x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_\Delta \frac{1}{3}v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(\int\limits_1^3 v\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{v^2}{2}\Big|_1^3\right)\mathrm{d}u=\frac{4}{3}\int\limits_1^2 \mathrm{d}u=\frac{4}{3}.\ \blacksquare$$

7.5.4. Деякі геометричні застосування подвійних інтегралів

Обчислення об'єму криволінійного циліндра. З геометричного трактування подвійного інтеграла випливає, що об'єм криволінійного циліндра, обмеженого згори поверхнею $z=f(x,y)>0$, знизу площиною $z=0$ і з боків циліндричною поверхнею, напрямною якої є контур області G, а твірні паралельні до осі Oz, можна обчислити за формулою

$$V = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (7.5.20)$$

Приклад 7.5.4. Обчислимо об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

• Тіло, обмежене заданими поверхнями, зображене на рис. 7.5.10.

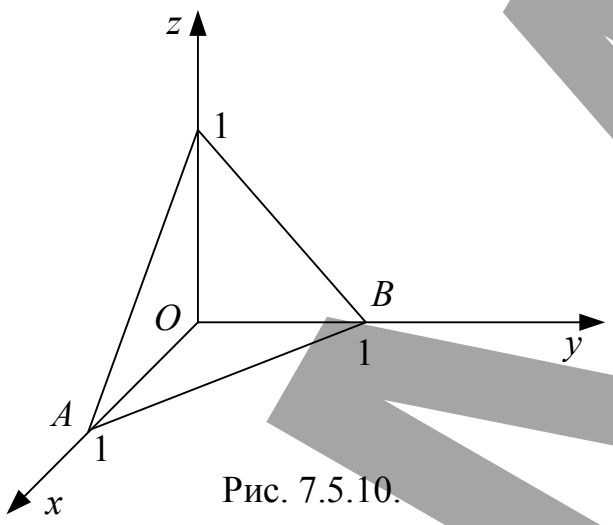


Рис. 7.5.10.

У нашому випадку $f(x,y)=1-x-y$. За формулою (7.5.20) об'єм тіла

$$V = \iint\limits_G (1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

де G – трикутник AOB, обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$. Розставимо межі інтегрування у подвійному інтегралі:

$$V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}. \ \text{❍}$$

Обчислення площі плоскої фігури. Площу S області G можна обчислити за формулою

$$S = \iint\limits_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Зазначимо, що ця формула універсальніша, ніж відповідна формула для площі криволінійної трапеції, яку обчислювали за допомогою визначеного інтеграла.

Приклад 7.5.5. Обчислимо площу фігури, обмежену лініями $y^2+2y-3x+1=0$, $3x-3y-7=0$.

• З умови задачі випливає, що область G обмежена прямою $3x-3y-7=0$ і параболою $y^2+2y-3x+1=0$, або $(y+1)^2=3x$ з вершиною в точці $A(0;-1)$. З системи рівнянь

$$\begin{cases} (y+1)^2 = 3x; \\ y^2+2y-3x+1=0 \end{cases}$$

отримаємо точки $B\left(\frac{16}{3};3\right)$ та $C\left(\frac{1}{3};-2\right)$ перетину цих ліній.

Обчислимо площу області G:

$$S=\int\limits_{-2}^{3}\left(\int\limits_{(y+1)^2/3}^{(7+3y)/3}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{-2}^{3}\left(\frac{7+3y}{3}-\frac{(y+1)^2}{3}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{3}\left(7y+\frac{3}{2}y^2-\frac{(y+1)^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\frac{125}{18}. \quad \bigcirc$$

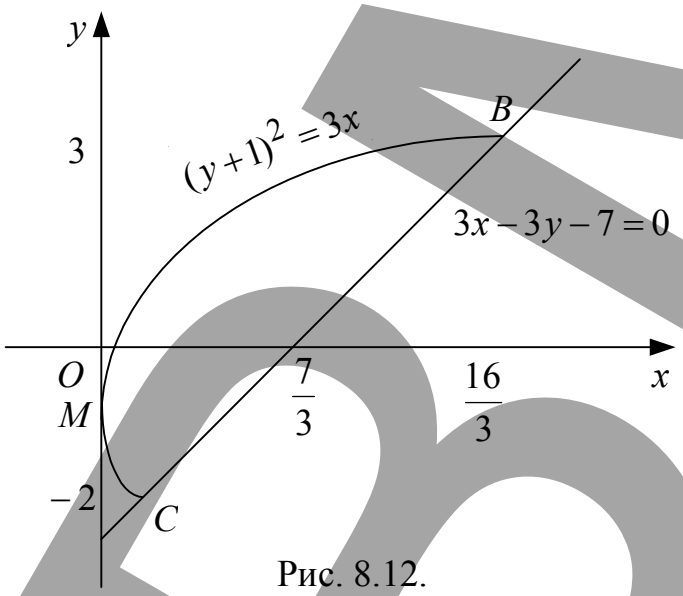


Рис. 8.12.

Обчислимо площу області G:

$$S=\int\limits_{-2}^{3}\left(\int\limits_{(y+1)^2/3}^{(7+3y)/3}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{-2}^{3}\left(\frac{7+3y}{3}-\frac{(y+1)^2}{3}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{3}\left(7y+\frac{3}{2}y^2-\frac{(y+1)^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\frac{125}{18}. \quad \bigcirc$$

8.2. Криволінійні інтеграли

8.2.1. Криволінійні інтеграли першого типу

Поняття криволінійного інтеграла першого типу. Розглянемо на площині Oxy кусково гладку криву AB. Нехай на цій кривій визначена обмежена функція $z = f(M) = f(x, y)$. Розіб'ємо криву AB на n частин точками $A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n = B,$ виберемо на кожній дузі $M_{i-1}M_i$ довільну точку M_i^* (рис. 8.13)
і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i^*\right)\Delta l_i, \qquad (8.2.1)$$

де Δl_i – довжина дуги $M_{i-1}M_i$. Суму (8.2.1) називають *інтегральною сумою* для функції $z = f(M) = f(x, y)$ на кривій AB. Позначимо через λ найбільшу із довжин частинних дуг $M_{i-1}M_i$.

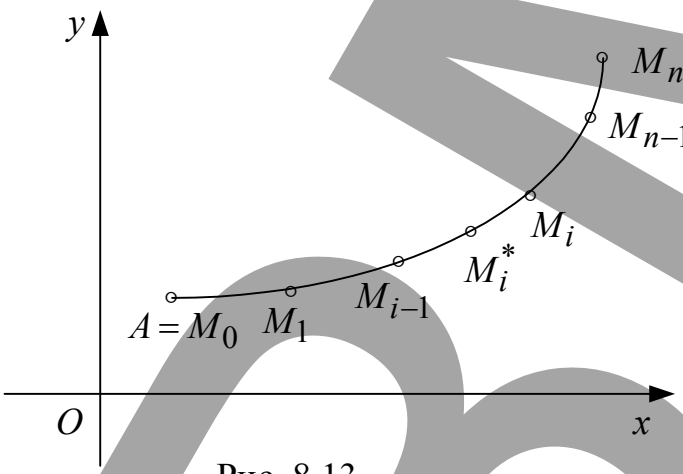


Рис. 8.13.

Якщо існує скінченна границя I інтегральної суми при $\lambda \to 0,$ яка не залежить від способу розбиття кривої AB ні від вибору точок M_i^*, то таку границю називають *криволінійним інтегралом першого типу* від функції $f(x, y)$ на кривій AB і позначають

$$I = \int_{AB} f(M)\,\mathrm{d}l = \int_{AB} f(x, y)\,\mathrm{d}l. \qquad (8.2.2)$$

У цьому випадку функцію $f(x, y)$ називають *інтегрованою вздовж кривої* AB, криву AB – *контуром інтегрування*, A, B – відповідно, *початкова* і *кінцева* точки інтегрування.

Зведемо криволінійний інтеграл першого типу до визначеного інтеграла. Уведемо на кривій AB параметр l – довжину дуги AM, де M – довільна точка кривої AB. У цьому випадку криву можна представити у параметричному вигляді: $x = x(l),\ y = y(l),\ 0 \le l \le L$. Функція, задана на кривій AB є складеною функцією параметра l. Нехай точці M_i відповідає значення l_i параметра l, а точці M_i^* – значення l_i^*. Запишемо інтегральну суму (8.2.1) у вигляді

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\Big(x(l_i^*),\, y(l_i^*)\Big)\Delta l_i, \tag{8.2.3}$$

де $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$, $l_{i-1} \le l_i^* \le l_i$. Сума (8.2.3) є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від функції $f\big(x(l), y(l)\big)$ на відрізку $[0; L]$. Оскільки інтегральні суми (8.2.1) і (8.2.3) дорівнюють одна одній, то відповідні інтеграли теж рівні між собою, тобто

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{0}^{L} f\big(x(l), y(l)\big)\mathrm{d}l. \tag{8.2.4}$$

Із формули (8.2.4) випливає існування криволінійного інтеграла від неперервної на кривій AB функції $f(x,y)$. Зазначимо, що в інтегральній сумі (8.2.1) величини Δl_i завжди додатні, незалежно від того, яку точку кривої вважати початковою, а яку кінцевою, тобто

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{BA} f(x,y)\,\mathrm{d}l.$$

Криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(M)\,\mathrm{d}l$ у випадку $f(M) \ge 0$ дорівнює площі частини циліндричної поверхні, складеної з перпендикулярів довжиною $f(M)$, проведених до площини Oxy з точок $M(x,y)$ кривої AB (рис. 8.13).

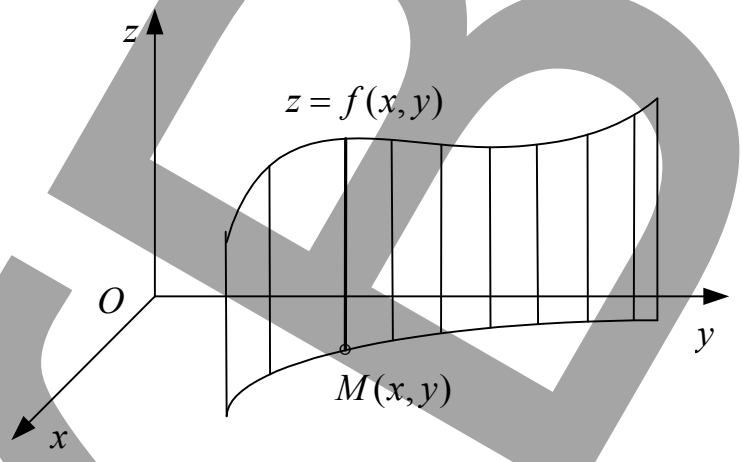


Рис. 8.13.

Якщо $f(x,y) \equiv 1$, то отримаємо криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \mathrm{d}l$ значення якого дорівнює довжині дуги AB.

Якщо AB – дуга кривої у просторі на якій задана функція $f(M) = f(x,y,z)$, то аналогічно, як і у випадку плоскої кривої, можна ввести поняття криволінійного інтегралу першого типу

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,\mathrm{d}l.$$

Обчислення криволінійних інтегралів першого типу. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta$, де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервні разом з своїми похідними першого порядку функції, $f(x,y)$ – неперервна вздовж кривої функція. Нехай точці A відповідає значення параметра $t=\alpha$, точці B – значення $t=\beta$. Для будь-якої точки $M\big(\varphi(t),\psi(t)\big)$ кривої AB довжина l дуги AM є функцією параметра t.

Довжину дуги обчислюють за формулою

$$l=l(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (8.2.5)$$

З рівностей (8.2.4), (8.2.5) отримаємо:

$$\int_{AB}f(x,y)\,\mathrm{d}l=\int_{0}^{L}f\big(x(l),y(l)\big)\mathrm{d}l=\int_{\alpha}^{\beta}f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (8.2.6)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y=\psi(x),\ a\le x\le b$, де $\psi(x)$ неперервно диференційована функція, то з формул (8.2.5), (8.2.6) отримаємо

$$\mathrm{d}l=\sqrt{1+\big(\psi'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (8.2.7)$$

і

$$\int_{AB}f(x,y)\,\mathrm{d}l=\int_{a}^{b}f(x,\psi(x)\sqrt{1+\big(\psi'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.8)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x==\varphi(y),\ c\le y\le d$, де $\varphi(y)$ неперервно диференційована функція, то з формул (8.2.5), (8.2.6) отримаємо

$$\mathrm{d}l=\sqrt{1+\big(\varphi'(y)\big)^2}\,\mathrm{d}y \qquad (8.2.9)$$

і

$$\int_{AB}f(x,y)\,\mathrm{d}l=\int_{c}^{d}f(\varphi(y),y)\sqrt{1+\big(\varphi'(y)\big)^2}\,\mathrm{d}y. \qquad (8.2.10)$$

Приклад 8.2.1. Обчислимо $\int_{AB}\big(4y^2-16x^2-2c0s(11x-4y-5)\big)\mathrm{d}l$, де лінія інтегрування AB – відрізок прямої від точки $A(1;2)$ до точки $B(3;7)$.

- Запишемо рівняння прямої, яка проходить через ці точки: $y=\psi(x)=2{,}5x-0{,}5$. Обчислимо

$$y'=\psi'(x)=2{,}5,\ \mathrm{d}l=\sqrt{1+\big(\psi'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{7{,}25}\,\mathrm{d}x.$$

За формулою (8.2.8)

$$\int_{AB}\Big(4y^2-16x^2-2c0s(11x-4y-5)\Big)\mathrm{d}\,l=$$

$$=\int_1^3\Big(4(2{,}5x-0{,}5)^2-16x^2-2\cos\big(11x-4(2{,}5x-0{,}5)-5\big)\Big)\sqrt{7{,}25}\,\mathrm{d}\,x=$$

$$=\sqrt{7{,}25}\cdot\int_1^3\Big(9x^2-10x-2\cos(x-3)+1\Big)\mathrm{d}\,x=\sqrt{29}(20-\sin 2).\qquad\text{❍}$$

8.2.2. Криволінійні інтеграли другого типу

Поняття криволінійного інтеграла другого типу. Нехай на кривій AB визначені дві обмежені функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$. Розіб'ємо цю криву на n частин точками $A=M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n=B$. Позначимо через Δx_i та Δy_i проекції дуги $M_{i-1}M_i$ на осі координат (рис. 8.14).

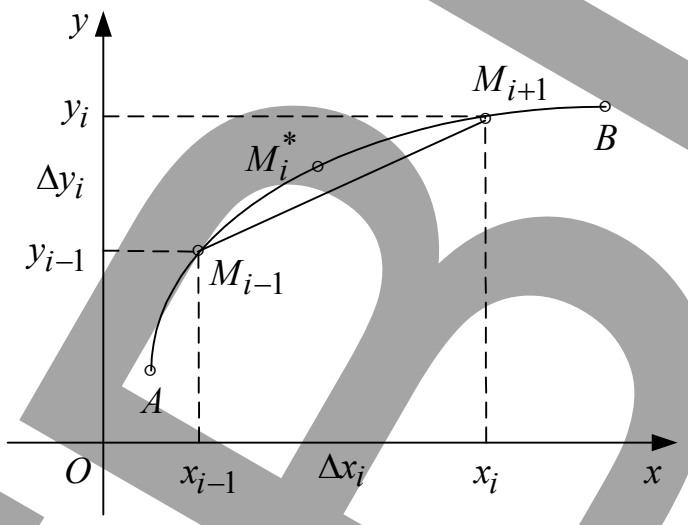


Рис. 8.14.

Виберемо на кожній дузі $M_{i-1}M_i$ довільну точку M_i^* та складемо інтегральні суми для функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$:

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}P\big(M_i^*\big)\Delta x_i\,, \tag{8.2.11}$$

$$\sigma_2=\sum_{i=1}^{n}Q\big(M_i^*\big)\Delta y_i\,, \tag{8.2.12}$$

Позначимо $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta l_i\}$, де Δl_i – довжина дуги $M_{i-1}M_i$.

Якщо інтегральні суми (8.2.11), (8.2.12) при $\lambda\to 0$ мають границі відповідно I та J, які не залежать ні від способу розбиття кривої AB ні від вибору

точок M_i^*, то ці границі називають *криволінійними інтегралами другого типу від функцій* $P(x,y)$ *та* $Q(x,y)$ *на кривій* AB і позначають

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int\limits_{AB} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.2.13}$$

Суму $I + J$ називають *загальним криволінійним інтегралом другого типу* і позначають

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{AB} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.2.14}$$

Криволінійні інтеграли подібні до криволінійних інтегралів першого типу, проте між ними є важлива різниця: у випадку криволінійного інтеграла першого типу в інтегральній сумі значення функції $f\left(M_i^*\right)$ множать на довжину частинної дуги $M_{i-1}M_i$, а у випадку інтеграла другого типу значення $f\left(M_i^*\right)$ множать на проекцію Δx_i чи Δy_i цієї дуги на відповідну координатну вісь. У випадку криволінійного інтеграла першого типу напрям дуги AB вздовж якої інтегруємо несуттєвий. У випадку криволінійного інтеграла другого типу із зміною напряму дуги AB змінюється знак її проекції на осі координат. Тому для криволінійних інтегралів другого типу

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{BA} Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Аналогічно можна ввести поняття криволінійного інтеграла другого типу на незамкненій просторовій кривій AB на якій задані функції $P(M) = P(x,y,z)$, $Q(M) = Q(x,y,z)$, $R(M) = R(x,y,z)$:

$$\int\limits_{AB} P(M)\,\mathrm{d}x + Q(M)\,\mathrm{d}y + R(M)\,\mathrm{d}z.$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого типу. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому точці A кривої відповідає значення $t = \alpha$, точці B – значення $t = \beta$. Нехай функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку, $\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 \ne 0$, функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні на цій кривій. Доведено, що у цьому випадку криволінійні інтеграли другого типу можна звести до визначених інтегралів:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{8.2.15}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\psi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{8.2.16}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\varphi'(t) + Q\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\psi'(t)\right)\mathrm{d}t, \tag{8.2.17}$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = f(x),\ a \le x \le b$, де $f(x)$ неперервно диференційована функція, то із формули (8.2.17) отримаємо

$$\int_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big) f'(x)\big)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.18)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x = g(y),\ c \le y \le d$, де $g(y)$ неперервно диференційована функція, то із формули (8.2.17) отримаємо

$$\int_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \big(P\big(g(y), y\big) g'(y) + Q\big(g(y), y\big)\big)\,\mathrm{d}y. \qquad (8.2.19)$$

У випадку, коли крива L замкнена, тобто точка A збігається з точкою B, із двох можливих напрямків руху вздовж цієї кривої виберемо той, для якого область, яка обмежена кривою L залишається з лівого боку. Такий напрям обходу називають *додатним*, протилежний – *від'ємним*. Криволінійний інтеграл другого типу по замкненому контуру L який обходять у додатному напрямі позначають символом

$$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (8.2.20)$$

Приклад 8.2.2. Обчислимо інтеграл $\int_{AB} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y$, де

1) AB – відрізок прямої, який з'єднує точки $A(0;0),\ B(1;1)$;

2) AB – дуга параболи $y = x^2$, яка з'єднує точки $A(0;0),\ B(1;1)$;

3) AB – ламана, яка з'єднує точки $A(0;0),\ C(1;0),\ B(1;1)$ (рис. 8.15).

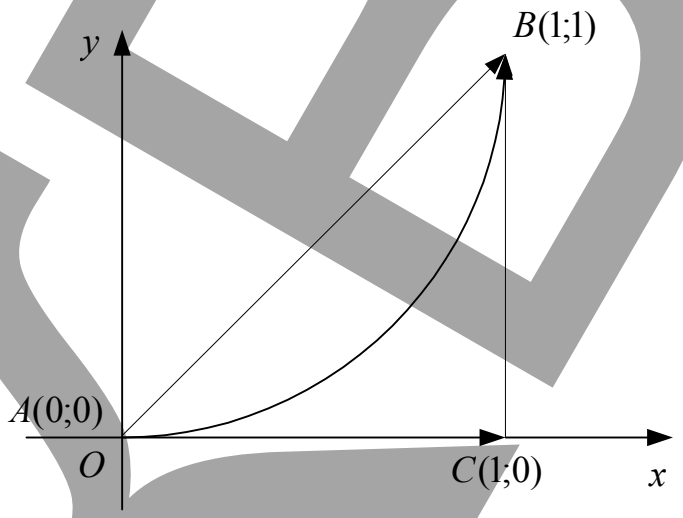


Рис. 8.15.

• Пряму AB задає рівняння $y = x$, пряму CB – рівняння $x = 1$, а пряму AC – рівняння $y = 0$. За формулою (8.2.18) отримаємо:

1) $\int_{AB} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (4x^3+1)\,\mathrm{d}x = 2;$

2) $\int\limits_{AB} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (5x^4 + 2x)\,\mathrm{d}x = 2;$

3)

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{AC} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{CB} 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 3x^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (1+1)\,\mathrm{d}y = 2. \qquad \text{❍}$$

Зазначимо, що інтеграл, обчислений вздовж різних ліній, які з'єднують точки $A(0;0)$, $B(1;1)$ дорівнює одному і тому ж числу.

Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого типу. Позначимо через α і β кути, які утворює дотична проведена в точці $M(x,y)$ до кривої AB (рис. 8.16).

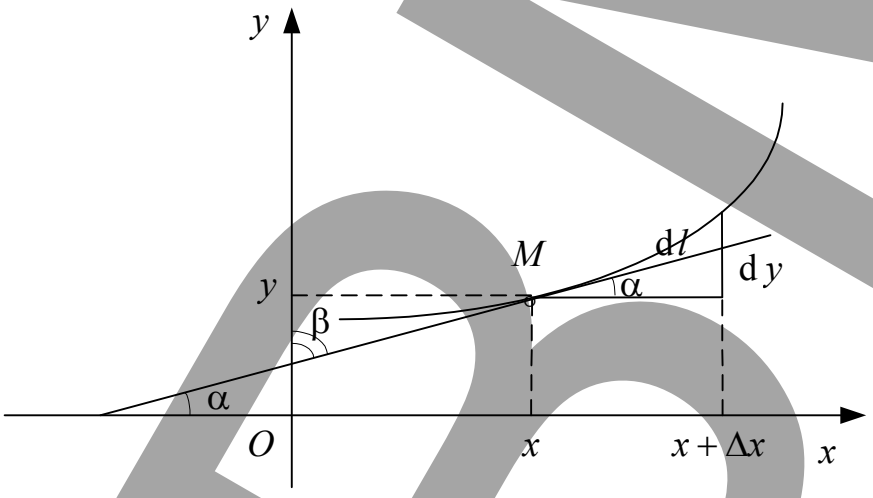


Рис. 8.16.

Нехай додатний напрям дотичної збігається з напрямом руху вздовж кривої AB від точки A до B. Тоді

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}l, \quad \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}l. \qquad (8.2.21)$$

Підставимо (8.2.21) у формули (8.2.13), (8.2.14):

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha\,\mathrm{d}l, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{AB} Q(x,y)\cos\beta\,\mathrm{d}l,$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{AB} \big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\big)\mathrm{d}l. \qquad (.2.22)$$

Отже, формула (8.2.22) дає змогу виразити криволінійні інтеграли другого типу через інтеграли першого типу. Якщо напрям руху точки змінити на протилежний, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ змінять знак, тому формули (8.3.21) не зміняться.

Формула Гріна. Формула Гріна пов'язує криволінійні і подвійні інтеграли. Якщо прямі, паралельні до осей координат перетинають границю замкненої

області не більше ніж у двох точках, то таку область будемо називати *простою областю*. Вважаємо, що границя області гладка, або кусково-гладка.

Теорема 8.2.1. Нехай G – проста замкнена область, обмежена контуром L, а функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні в цій області разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Тоді

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (8.2.23)$$

яку називають *формулою Гріна*.

• Оскільки область G проста, то контур L можна задати рівняннями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $c \le y \le d$, або $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ (рис. 8.17).

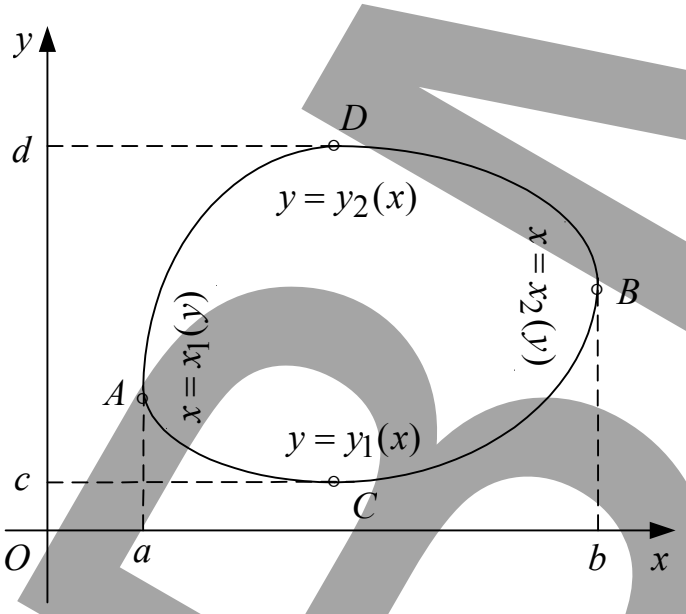


Рис. 8.17.

Розглянемо випадок, коли область G визначають нерівності $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$.

Перетворимо подвійний інтеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ в криволінійний. Зведемо його до повторного інтеграла і проінтегруємо по y:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \big(P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y_2(x))\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

Кожен з цих інтегралів дорівнює криволінійному інтегралу другого типу, взятому вздовж відповідної кривої:

$$\int_a^b P\big(x, y_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{ADB} P(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_{BDA} P(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{ACB} P(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Отже,

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\left(\int_{BDA} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{ACB} P(x,y)\,\mathrm{d}x\right),$$

тобто

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.24)$$

Аналогічно, якщо область G визначають нерівності $x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d$, отримаємо

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L Q(x,y)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.25)$$

Віднімаючи почленно від (8.2.25) рівність (8.2.24), отримаємо (8.2.23).

П р и к л а д 8.2.3. За допомогою формули Гріна обчислимо криволінійний інтеграл

$$\oint_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)\mathrm{d}x + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)\mathrm{d}y$$

де контур L обмежує область $G: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2$.

- У нашому випадку функції

$$P(x,y) = e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2, \qquad Q(x,y) = \sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}$$

неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y} = -10y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x$ на усій площині Oxy, тому для обчислення інтеграла можна використати формулу Гріна. Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x - (-10y) = 4x + 10y,$ то за формулою Гріна

$$\oint_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)\mathrm{d}x + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)\mathrm{d}y = 2\iint_G (2x+5y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (2x + 5y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(2x^3 + 2{,}5x^4\right)\mathrm{d}\,x = 2. \qquad \text{❍}$$

Зазначимо, що без застосування формули Гріна цей інтеграл обчислити неможливо, оскільки інтеграли від e^{x^2} та $\sin x^2$ неможливо виразити через елементарні функції.

Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Плоску область G називають *однозв'язною*, якщо для будь-якого замкненого контура L, який лежить всередині цієї області, частина площини, обмежена цим контуром повністю лежить в цій області.

Теорема 8.2.2. Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій однозв'язній області G. Тоді наступні умови еквівалентні:

1) для кожної замкненої кусково-гладкої кривої L, яка належить G,

$$\oint_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0;$$

2) для довільних точок A і B з області G значення інтеграла

$$\oint_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y \qquad (8.2.26)$$

не залежить від шляху інтегрування, який належить G;

3) вираз $P(x, y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області, тобто існує функція $F(x, y)$, визначена в G, що

$$\mathrm{d}F = P(x, y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y;$$

4) в області G виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (8.2.27)$$

Теорема дає змогу відповісти на питання про те, залежить чи ні криволінійний інтеграл від вибору шляху інтегрування. Наприклад, $\int_{Ab} \sin y\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}y$ в будь-якій області залежить від шляху інтегрування, оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \cos y \neq 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Зазначимо, що усі умови теореми є суттєвими. Розглянемо, наприклад, інтеграл $I = \oint_L \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,y$, де L – коло радіуса R з центром у початку координат. У нашому випадку

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто формально виконується умова незалежності інтеграла від шляху інтегрування, тому цей інтеграл повинен дорівнювати нулю. Параметричне рівняння кола $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$. Обчислимо

$$I=\oint_L \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\frac{R\sin t(-R\cos t)-R\cos tR\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi\neq 0.$$ Здається, що це суперечить теоремі 4.2.2. Насправді, ніякої суперечності з теоремою 8.2.2 тут нема. У цьому випадку не виконується одна з умов теореми: функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні не визначені в точці $O(0;0)$, а круг без точки $O(0;0)$ не є однозв'язною областю.

Інтегрування повних диференціалів. З теореми (8.2.2) випливає таке: якщо виконується умова (8.2.27), то криволінійний інтеграл (8.2.26) не залежить від шляху інтегрування. У цьому випадку інтеграл (8.2.26) однозначно визначений точками $A(x_0;y_0)$ і $B(x_1;y_1)$, тому його можна позначити символом $\int_A^B P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ або $\int_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$. У цій формулі задані лише початок і кінець шляху інтегрування. Зафіксуємо точку $A(x_0;y_0)$, а точку $B(x_1;y_1)$ замінимо на довільну точку $M(x;y)$ області G. У цьому випадку інтеграл є функцією від координат точки $M(x;y)$:

$$F(x,y)=\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y. \qquad (8.2.28)$$

Доведено, що ця функція є первісною для виразу

$$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y. \qquad (8.2.29)$$

Нехай вираз (8.2.29) є повним диференціалом деякої функції $\Phi(x,y)$. У цьому випадку $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q,$ тому різниця $\Phi(x,y)-F(x,y)$ – стала, тобто

$$\Phi(x,y)=F(x,y)+C. \qquad (8.2.30)$$

Якщо $x=x_0,\ y=y_0,$ то із (8.2.28) випливає, що $F(x_0,y_0)=0,$ а з (8.2.30) – $C=\Phi(x_0,y_0)$. Формулу (8.2.30) запишемо так:

$$F(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi(x_0,y_0),$$

а рівність (8.2.28)

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0).$$

Якщо $x = x_1,\ y = y_1,$ то

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \Phi(x_1,y_1) - \Phi(x_0,y_0) = \Phi(x,y)\Big|_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)}. \qquad (8.2.31)$$

Формула (8.2.31) справджується за умови незалежності криволінійного інтеграла від вибору шляху інтегрування.

За формулою

$$F(x,y) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + C, \qquad (8.2.32)$$

де $(x_0;y_0)$ – фіксована точка, а C – довільна стала можна визначити усі функції, такі, що $\mathrm{d}F = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$ Оскільки криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то зручно вибрати ламану, ланки якої паралельні до осей координат (рис. 8.18).

У цьому випадку

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y_0)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \int_{(x;y_0)}^{(x;y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

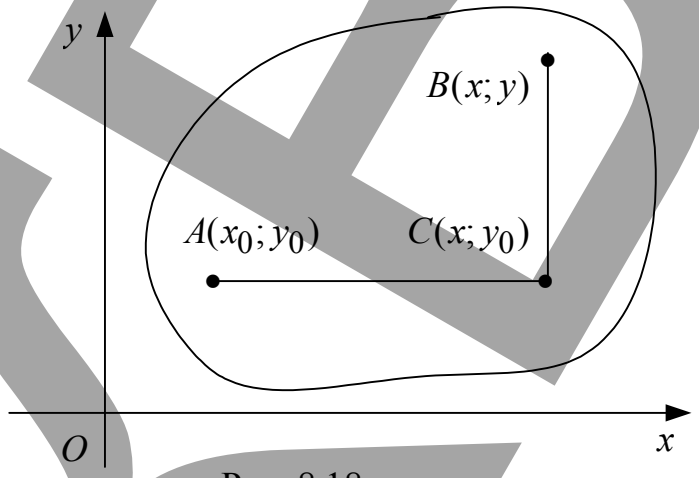


Рис. 8.18.

Оскільки рівняння відрізків AC та CB відповідно дорівнюють $y = y_0$ та $x = x_0,$ то $\mathrm{d}y = 0,\ \mathrm{d}x = 0$ і рівність (8.2.32) запишемо у вигляді

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y_0)\,\mathrm{d}y + C. \qquad (8.2.33)$$

П р и к л а д 8.2.4. Задано вираз $\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}x$. Перевіримо чи він є повним диференціалом деякої функції, і якщо так, то знайдемо її.

• У цьому виразі функції $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y)=x^2-2xy-y^2$ неперервні разом із частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$, які дорівнюють одна одній. Отже, цей вираз є повним диференціалом деякої функції $F(x,y)$, яку визначимо за формулою (8.2.33). Візьмемо $A(0;0)$, $C(x;0)$, $B(x;y)$. Рівняння відрізка $y=0$. Тоді

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)}\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}y+C=\int\limits_0^x x^2\,\mathrm{d}x+$$

$$+\int\limits_0^y\left(x^2-2xy-y^2\right)\mathrm{d}y+C=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C. \qquad \text{❍}$$

Розділ 8. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

8.1. Числові ряди

8.1.1. Поняття числового ряду. Головні властивості

Поняття числового ряду. Розглянемо нескінченну послідовність дійсних чисел $a_1,a_2,...,a_n,...$. Утворимо з її елементів вираз

$$a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{8.1.1}$$

який називають *числовим рядом*, або просто *рядом*. Числа $a_1,a_2,...,a_n,...$ називають *елементами*, або *членами ряду*. Суми перших n елементів ряду

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,...,\ S_n=a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{8.1.2}$$

називають *частковими сумами ряду*. Часткові суми

$$S_1,S_2,S_3,...,S_n,... \tag{8.1.3}$$

ряду (8.1.1) утворюють числову послідовність $\{S_n\}$. Якщо задана послідовність (8.1.3) часткових сум ряду, то, використовуючи (8.1.2), можна визначити елементи ряду:

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-a_1=S_2-S_1,...,\ a_n=S_n-S_{n-1}. \tag{8.1.4}$$

Скінченну чи нескінченну границю S послідовності часткових сум $\{S_n\}$ ряду (8.1.1)

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n \tag{8.1.5}$$

називають сумою ряду і записують

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ця границя скінченна, то ряд називають *збіжним*, якщо вона нескінченна або не існує, то ряд – *розбіжний*. Отже, збіжність ряду рівносильна існуванню скінченної границі послідовності часткових сум (8.1.3). З іншого боку, збіжність будь-якої послідовності $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ пов'язана зі збіжністю ряду $x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_n - x_{n-1}) + ...$, часткові суми якого є елементами цієї послідовності, і сума ряду збігається з границею послідовності.

Отже, вивчення нескінченного ряду і його суми є просто іншим способом вивчення числової послідовності та її границі.

Зазначимо, що такий спосіб дає суттєві переваги як під час дослідження існування границі, так і під час її обчислення, тому числові ряди є важливим інструментом у математичному аналізі та його застосуваннях.

П р и к л а д 8.1.1. Дослідимо збіжність числового ряду

$$a - a + a - a + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a, \quad a \neq 0.$$

• Запишемо послідовність часткових сум цього ряду:

$$S_1 = a, \ S_2 = a - a = 0, S_3 = a, S_4 = 0, ..., S_{2n-1} = a, S_{2n} = 0, ...$$

Очевидно, що послідовність часткових сум не має границі, тому цей ряд розбіжний. ❍

П р и к л а д 8.1.2. Дослідимо збіжність ряду

$$b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ...$$

• Елементи цього ряду утворюють геометричну прогресію. Часткову суму цього ряду можна обчислити за формулою

$$S_n = b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} = \frac{b\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

Дослідимо збіжність цього ряду для різних значень q. Якщо $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{b}{1 - q}.$$

У випадку $|q| > 1$ отримаємо, що $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \infty$. Якщо $q = 1$, то отримаємо ряд $b + b + + ... + b + ...$, який, очевидно, розбіжний. Якщо $q = -1$, то отримаємо ряд $b - b + b - b + ...$, який розбіжний.

Отже, якщо $|q| < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$, елементи якого утворюють геометричну прогресію, збіжний, і його сума дорівнює $\dfrac{b}{1 - q}$, якщо $|q| \geq 1$, то ряд розбіжний. ❍

Властивості числових рядів. Якщо в числовому ряді (8.1.1) відкинути перших m елементів, то отримаємо ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \qquad (8.1.6)$$

який називають *залишком ряду після m-го елемента*, або m-м залишком ряду.

Теорема 8.1.1. Якщо ряд (8.1.1) збіжний, то його загальний елемент прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (8.1.7)$$

⏮ Якщо ряд збіжний і його сума дорівнює S, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad ⏭$$

Теорема 8.1.1 дає *необхідну умову збіжності ряду*. Якщо умова (8.1.7) не виконується, то ряд розбіжний, якщо ж вона виконується, то ряд може бути збіжним або розбіжним.

Приклад 8.1.3. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності ряду $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \ldots$.

• Виведемо формулу загального елемента ряду. Чисельники дробів є послідовними непарними числами, а знаменники – квадратами послідовних натуральних чисел, тому $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$. Обчислимо $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0$. Отже, виконується необхідна ознака збіжності, тобто ряд може бути збіжним або розбіжним. ❍

Теорема 8.1.2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, який називають добутком цього ряду на число c, теж збіжний, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (8.1.8)$$

Теорема 8.1.3. Якщо збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, який називають їхньою сумою, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (8.1.9)$$

⏮ Нехай $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $S'_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$, тоді $\sigma_n = S_n + S'_n$. За умовою теореми існують $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$, тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n + S'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$. ⏭

Теорема 8.1.4. Якщо ряд збіжний, то збіжний і будь-який його залишок, і навпаки, якщо залишок збіжний, то ряд теж збіжний. Якщо

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n,\ r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n,$$

то

$$S = S_m + r_m. \tag{8.1.10}$$

З теореми випливає, що додавання чи відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність.

З формули (8.1.10) отримаємо

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (S - S_m) = 0. \tag{8.1.11}$$

Це означає таке: якщо ряд збіжний, то його залишок прямує до нуля.

8.1.2. Числові ряди з невід'ємними елементами

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, елементи якого невід'ємні, тобто $a_i \geq 0$ для всіх $n \in N$. Очевидно, що $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, тобто послідовність часткових сум ряду неспадна.

Теорема 8.1.5. Для того, щоб ряд з невід'ємними елементами був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його часткових сум була обмежена згори.

Збіжність чи розбіжність ряду з невід'ємними елементами можна дослідити, порівнявши його елементи з елементами збіжного чи розбіжного ряду. Таке порівняння грунтується на теоремі порівняння.

Теорема 8.1.6. Нехай для двох рядів з невід'ємними елементами

$$A: \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

та

$$B: \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

починаючи з деякого n_0, виконується нерівність $a_n \leq b_n$. Тоді зі збіжності ряду B випливає збіжність ряду A, а із розбіжності ряду A – розбіжність ряду B.

⏮ Оскільки відкидання скінченної кількості елементів ряду не впливає на його збіжність, то можна вважати, що $a_n \le b_n$ для всіх $n \in N$. Позначимо часткові суми рядів A та B, відповідно, через A_n та B_n. З нерівності $a_n \le b_n$ для всіх $n \in N$ випливає, що $A_n \le B_n$.

Нехай ряд B збіжний. Це означає, що послідовність його часткових сум обмежена згори, тобто $B_n \le M$ для всіх $n \in N$. З нерівності $A_n \le B_n$ випливає, що $A_n \le M$ для всіх $n \in N$, тобто ряд A теж збіжний. Якщо ряд A розбіжний, то ряд B теж розбіжний (якщо б він був збіжним, то за доведенням повинен бути збіжним ряд A). ⏭

Приклад 8.1.4. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

• Очевидно, що для всіх $n \ge 2$ виконується нерівність $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збіжний, тому за теоремою порівняння початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ теж збіжний.

Теорема 8.1.7 (ознака Даламбера). Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними елементами існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \qquad (8.1.12)$$

Тоді ряд збіжний, якщо $l < 1$, і розбіжний, якщо $l > 1$.

⏮ За означенням границі числової послідовності, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon,$$

або

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \qquad (8.1.13)$$

Якщо $l < 1$, то візьмемо ε таке, що $q = l + \varepsilon < 1$. Тоді з (8.1.13) отримаємо, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, або $a_{n+1} < q \cdot a_n$. З останньої нерівності

$$a_{n_0+1} < q \cdot a_{n_0},\ a_{n_0+2} < q \cdot a_{n_0+1} < q \cdot q \cdot a_{n_0} = q^2 \cdot a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+k} < q^k \cdot a_{n_0}, \ldots.$$

Отже, починаючи з деякого номера n_0, елементи ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ менші, ніж елементи нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $q<1$, яка збіжна. За теоремою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

Нехай $l>1$. Візьмемо ε таке, що $b=l-\varepsilon>1$. З нерівності (8.1.13) отримаємо, що для всіх $n>n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $a_{n+1}>a_n$, тобто елементи ряду зростають і ряд розбіжний. ⏭

Зазначимо, що у випадку $l=1$ ряд може бути збіжним або розбіжним, тому потрібно використовувати інші ознаки збіжності.

Наприклад, для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ число $l=1$, але перший ряд розбіжний, а другий – збіжний.

Приклад 8.1.5. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a^n, \quad a>0.$

• Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot a^{n+1}}{n\cdot a^n}=a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=a.$$

За теоремою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a^n, \quad a>0$, збіжний, якщо $a<1$, і розбіжний, якщо $a>1$. ❍

Теорема 8.1.8 (ознака Коші). Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L, \tag{8.1.14}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними елементами збіжний для $L<1$ і розбіжний для $L>1$.

Зазначимо, що у випадку $L=1$ ряд може бути збіжним або розбіжним, тому потрібно використовувати інші ознаки збіжності.

Приклад 8.1.6. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\cdot\left(\frac{2n+7}{5n-1}\right)^n$.

• Обчислимо

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3\cdot\left(\frac{2n+7}{5n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}\cdot\frac{2n+7}{5n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{5n-1}=1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5},\ \text{оскільки}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{5n-1}=\frac{2}{5}.$$

Отже, $L<1$, тому за ознакою Коші ряд збіжний. ❍

Теорема 8.1.9 (інтегральна ознака). Якщо функція $f(x)$, визначена для всіх $x \geq 1$, невід'ємна і спадна, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{8.1.15}$$

збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.1.16}$$

Приклад 8.1.7. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln(n+1)}$.

- Застосуємо інтегральну ознаку збіжності ряду.

Обчислимо

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot \ln(x+1)} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot \ln(x+1)} = \lim_{b\to\infty} \ln\bigl(\ln(x+1)\bigr)\Big|_{1}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\bigl(\ln(b+1)\bigr) - \ln\ln 2 = \infty.$$

Отже, невластивий інтеграл розбіжний, тому ряд теж розбіжний. ❍

8.1.2. Збіжність довільних числових рядів

Абсолютна збіжність рядів. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{8.1.17}$$

елементи якого мають довільні знаки, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{8.1.18}$$

складений з абсолютних величин початкового ряду.

Якщо ряд (8.1.18) збіжний, то ряд (8.1.17) називають *абсолютно збіжним*. Ряд (8.1.17) називають *умовно збіжним*, якщо він збіжний, а ряд (8.1.18) розбіжний.

Теорема 8.1.10. Із збіжності ряду (8.1.18) випливає збіжність ряду (8.1.17).

Приклад 8.1.8. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)}{5^n}$.

- Очевидно, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність

$$|u_n| = \left| \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)}{5^n} \right| \le \frac{1}{5^n},$$

тому ряд, складений з абсолютних величин початкового ряду, збіжний, а початковий ряд збіжний абсолютно. ❍

Для дослідження абсолютної збіжності ряду можна використовувати ознаки Даламбера і Коші.

Теорема 8.1.11 (ознака Даламбера). Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з довільними елементами існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l^*. \qquad (8.1.19)$$

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний абсолютно, якщо $l^* < 1$, і розбіжний, якщо $l^* > 1$.

Приклад 8.1.9. Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{3^n}$.

• Для дослідження збіжності ряду використаємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{3^{n+1}} \right| : \left| (-1)^n \frac{\ln n}{3^n} \right| = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, ряд, складений з абсолютних величин елементів початкового ряду, збіжний, тому початковий ряд збіжний абсолютно. ❍

Теорема 8.1.12 (ознака Коші). Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L^*, \qquad (8.1.20)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з довільними елементами збіжний для $L^* < 1$ і розбіжний для $L^* > 1$.

Зазначимо таке: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, то розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тобто він не може бути умовно збіжним.

Знакопереміжні ряди. Серед рядів з довільними елементами виділяють *знакопереміжні* ряди, тобто такі ряди, у яких знаки їхніх елементів чергуються:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \qquad (8.1.21)$$

де $u_n > 0$ для всіх $n \in N$.

Теорема 8.1.13 (Лейбніца). Якщо елементи знакопереміжного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то цей ряд збіжний.

⏮ Запишемо часткову суму знакопереміжного ряду у вигляді

$$U_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

За умовою теореми елементи ряду монотонно спадають за абсолютною величиною, тобто $u_{n+1} < u_n$, тому доданки в дужках додатні і часткова сума U_{2m} зростає зі збільшенням m. Запишемо цю часткову суму так:

$$U_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Вирази в дужках додатні, тому часткова сума U_{2m} обмежена згори:

$$U_{2m} < u_1.$$

Отримано, що елементи послідовності $\{U_{2m}\}$ монотонно зростають і обмежені згори, тому вона має границю.

Запишемо $U_{2m-1} = U_{2m} - u_{2m}$ і перейдемо в цій рівності до границі

$$\lim_{n\to\infty} U_{2m-1} = \lim_{n\to\infty} (U_{2m} - u_{2m}) = \lim_{n\to\infty} U_{2m} - \lim_{n\to\infty} u_{2m} = U,$$

тому що за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m} = 0$. Отже, знакопереміжний ряд збіжний і його сума дорівнює U. ⏭

Приклад 8.1.10. Дослідимо збіжність знакопереміжного ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

• Оскільки $\ln(n+1) > \ln n$, $\dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$, тобто $u_{n+1} < u_n$, і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$, то за ознакою Лейбніца цей ряд збіжний. ❍

8.2. Степеневі ряди

Поняття степеневого ряду. Область збіжності. Ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (8.2.1)$$

або

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (8.2.2)$$

називають *степеневим*, а дійсні числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ – *коефіцієнтами.* Надалі будемо досліджувати ряд (8.2.1), тому що (8.2.2) можна звести до нього заміною змінних.

Знайдемо область збіжності степеневого ряду, тобто таку множину значень x, для яких ряд (8.2.1) збіжний.

Теорема 8.2.1. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний для значення $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, то він збіжний абсолютно для $|x| < |x_0|$; якщо цей ряд розбіжний для $x = x^*$, то він розбіжний для всіх $|x| > |x^*|$.

Теорема 8.2.2. Якщо степеневий ряд збіжний не лише для $x = 0$, то існує таке додатне число R, яке може дорівнювати $+\infty$, таке, що ряд збіжний абсолютно для $|x| < R$ і розбіжний для $|x| > R$ (якщо $R < +\infty$).

⏮ Нехай X – область збіжності степеневого ряду (8.2.1). За умовою теореми ця множина непорожня. Доведемо, що вона обмежена. Нехай ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний для $x = x^*$. Тоді за теоремою 8.2.1 для будь-якого $x \in X$ виконується умова $|x| < |x^*|$. Отже, множина X має точну верхню грань $R = \sup_{x \in X} |x|$, причому $R > 0$, тому що ряд збіжний не тільки для $x = 0$. Якщо нема такої точки $x = x^*$, у якій ряд розбіжний, то $R = +\infty$ і множина X необмежена. За теоремою 8.2.1 степеневий ряд збіжний абсолютно для будь-якого $|x| < R$.

Нехай $R < +\infty$. Візьмемо $|x| > R$. Оскільки такі значення x не належать області збіжності, то в цих точках ряд розбіжний. ⏭

Число R та інтервал $(-R; R)$ називають, відповідно, *радіусом збіжності* та *інтервалом збіжності степеневого ряду*. Кожен степеневий ряд має свій радіус збіжності $R \geq 0$. Для $|x| < R$ степеневий ряд збіжний абсолютно, для $|x| > R$ – розбіжний. У випадку $x = \pm R$ потрібно дослідити збіжність відповідного числового ряду.

Теорема 8.2.3. Якщо для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ існує границя

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0, \quad (8.2.3)$$

то радіус збіжності $R = \frac{1}{L}$.

⏮ За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ збіжний, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot L<1.$$

З теореми 8.2.2 випливає, що степеневий ряд збіжний абсолютно для $|x|<\frac{1}{L}$, тому радіус збіжності

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (8.2.4)$$

Зазначимо, що у випадку $L=0$ радіус збіжності $R=\infty$, тобто ряд збіжний на всій числовій прямій. ⏭

Приклад 8.2.1. Визначимо область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

• За формулою (8.2.4) обчислимо радіус збіжності цього ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Степеневий ряд збіжний абсолютно для $-1<x<1$. Нехай $x=1$. У цьому випадку числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний. У випадку $x=-1$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ збіжний за ознакою Лейбніца.

Отже, степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ збіжний абсолютно для $|x|\le 1$. ❍

Властивості степеневих рядів. Нехай R – радіус збіжності степеневого ряду.

Теорема 8.2.4. Сума степеневого ряду всередині проміжку збіжності є неперервною функцією.

Теорема 8.2.5. Якщо степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ в околі точки $x=0$ мають одну і ту ж суму, то ці ряди тотожні, тобто $a_i=b_i$ для всіх $i=1,2,3,\ldots$.

Теорема 8.2.6. Нехай функцію $f(x)$ розклали у степеневий ряд в інтервалі $(-R;R)$, тобто

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad -R<x<R.$$

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний для $x = R \ (x = -R)$, то цей розклад справджується і для $x = R \ (x = -R)$.

Теорема 8.2.7. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}. \qquad (8.2.5)$$

Теорема 8.2.8. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати всередині інтервалу збіжності, тобто для всіх $a \in (-R; R)$

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x x^n \,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.6)$$

На відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$,

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot x^{n+1}. \qquad (8.2.7)$$

Теорема 8.2.9. Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ та $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n \,\mathrm{d}x$ мають один і той же інтервал збіжності.

Теорема 8.2.10. Якщо $R > 0$ – радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то в інтервалі $(-R; R)$ його можна почленно диференціювати та інтегрувати скільки завгодно разів.

Розклад функцій у степеневі ряди. Використаємо попередні теореми для знаходження розкладів функцій у степеневі ряди.

Теорема 8.2.11. Якщо функцію $y = f(x)$ можна розкласти в інтервалі $(-R; R)$ в степеневий ряд, то цей розклад єдиний.

⏮ Нехай функцію $f(x)$ можна розкласти в збіжний в інтервалі $(-R; R)$ степеневий ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

За теоремою 8.2.10 цей ряд можна почленно диференціювати в інтервалі $(-R;\, R)$ довільну кількість разів. Для $x \in (-R;\, R)$ отримаємо

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$

$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots;$

$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2} + \ldots;$

$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + \ldots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-3} + \ldots;$

.... ;

$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) a_{n+1} x + \ldots;$

....

Підставимо $x = 0$ у ці рівності:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ldots. \qquad (8.2.8)$$

Отже, отримаємо розклад функції у степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad (8.2.9)$$

який називають *рядом Маклорена* для функції $f(x)$. ⏭

Якщо функція $f(x)$ диференційована нескінченну кількість разів, то для неї можна скласти ряд Маклорена (8.2.8). Для кожної функції, яка диференційована $n+1$ разів, можна записати формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \varsigma = \theta x, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (8.2.10)$$

– залишковий член у формі Лагранжа.

Нехай $S_n(x)$ – часткова сума ряду Маклорена. Тоді формулу Маклорена можна записати у вигляді

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \qquad (8.2.11)$$

Теорема 8.2.12. Для того, щоб нескінченну кількість разів диференційовану функцію $f(x)$ розкласти в ряд Маклорена на проміжку $(-R;\, R)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0. \qquad (8.2.12)$$

⏮ *Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$. З формули (8.2.11) в інтервалі $(-R;\, R)$ отримаємо

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(f(x) - S_n(x) \right) = f(x) - \lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Достатність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ для всіх $x\in(-R;R)$. З формули (5.2.12) в інтервалі $(-R;R)$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\big(f(x)-R_n(x)\big)=f(x)-\lim_{n\to\infty} R_n(x)=f(x)-0=f(x). \quad \blacktriangleright\!\blacktriangleright\!|$$

Виведемо розклади деяких елементарних функцій у ряди Маклорена. Для цього потрібно за формулами (8.2.8) знайти коефіцієнти ряду, визначити радіус збіжності R і перевірити виконання в інтервалі $(-R;R)$ умови (8.2.12).

1. $f(x)=e^x$.

• Обчислимо $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=1,2,\ldots$. Для $x=0$ отримаємо $f^{(n)}(0)=e^0=1$, тому $a_n=\dfrac{1}{n!}$. Визначимо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Степеневий ряд збіжний на всій числовій прямій.

Доведемо, що функція e^x – сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Для цього оцінимо залишковий член $R_n(x)$ формули Маклорена. Оскільки $\varsigma<|x|$, то

$$|R_n(x)|=|x|^{n+1}\frac{e^{\varsigma}}{(n+1)!}<|x|^{n+1}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

Для фіксованого значення x

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(|x|^{n+1}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\right)=0.$$

Отже,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \qquad (8.2.13)$$

2. Нехай $f(x)=\sin x$. Відомо, що $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k=1,2,3,\ldots$. Оскільки $f(0)=0$, $f^{(2m)}(0)=\sin(m\pi)=0$, $f^{(2m-1)}(0)=\sin\left(m\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $=(-1)^{(m-1)}$, $m=1,2,3,\ldots$, то $a_{2m}=0$, $a_{2m-1}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}$.

За формулою (8.2.9)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (8.2.14)$$

Визначимо область збіжності цього ряду. За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| : \left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n+3} = 0.$$

Це означає, що ряд збіжний для всіх дійсних значень x.

Доведемо, що функція $\sin x$ є сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Залишковий член у формулі Маклорена задовольняє нерівність

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

тому для фіксованого значення x

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0.$$

Отже, функцію $y = \sin x$ можна розвинути в ряд Маклорена за формулою (8.2.14).

3. Нехай $f(x) = \cos x$. Відомо, що $f^{(k)}(x) = \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 1,2,3,\ldots$. Оскільки $f(0) = 1$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$, $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$, $m = 1,2,3,\ldots$, то, як і в попередньому випадку, можна довести, що на всій числовій прямій

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \qquad (8.2.15)$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Для виведення формули розвинення цієї функції в ряд Маклорена використаємо суму нескінченної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \qquad (8.2.16)$$

Цей ряд збігається для $|x| < 1$. Проінтегруємо цей ряд почленно:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}. \qquad (8.2.17)$$

Цей ряд збіжний для $|x| < 1$. Для $x = 1$ отримаємо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, збіжний за ознакою Лейбніца. Для $x = -1$ отримаємо ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. Отже, формула (5.2.18) справджується для $x\in(-1;1]$.

5. $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Для виведення формули розвинення цієї функції в ряд Маклорена замінимо в формулі (8.2.16) x на x^2. Отримаємо розклад функції $\frac{1}{1+x^2}$ в ряд, який збіжний для $x\in(-1;1)$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Проінтегруємо цей ряд почленно:

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (8.2.18)$$

Можна довести, що цей ряд збіжний для всіх $x\in[-1;1]$.

6. $f(x)=(1+x)^m$. Для розвинення цієї функції в ряд Маклорена обчислимо похідні

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1};\ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2};$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},\ldots.$$

Звідси, використовуючи метод математичної індукції, можна вивести, що

$$f^{(k)}(x)=\left((1+x)^m\right)^{(k)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(1+x)^{(m-k)}.$$

Обчислимо

$$f(0)=1,\ f^{(k)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1).$$

Отже, за формулою (8.2.9)

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \quad (8.2.19)$$

Доведено, що ряд (8.2.19) збіжний для всіх $x\in(-1;1)$.

П р и к л а д 8.2.2. Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\cos\frac{3x^4}{5}.$$

- Замінимо в формулі (8.2.15) x на $\frac{3x^4}{5}$, отримаємо

$$\cos\frac{3x^4}{5}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}x^{8n}. \qquad \bigcirc$$

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x, функцію $y=y(x)$ та її похідні. Найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння, називають порядком диференціального рівняння. Отже, звичайне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0.$$

У випадку, коли в рівнянні є декілька незалежних змінних, його називають *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. У цьому розділі будемо вивчати звичайні диференціальні рівняння. Якщо диференціальне рівняння n-го порядку можна записати у вигляді

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right),$$

то кажуть, що рівняння записане у *нормальній формі*. *Розв'язком диференціального рівняння* n-го порядку називають функцію $y=y(x)$, визначену і неперервну на деякому інтервалі $(a;b)$, разом із її похідними до n-го порядку включно, яка, будучи підставленою в диференціальне рівняння, перетворює його в тотожність, тобто

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)\equiv 0.$$

Часто розв'язок отримують у *неявному вигляді* $\Phi(x,y)=0$ *або в параметричному вигляді* $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in(\alpha;\beta)$. Графік розв'язку диференціального рівняння n-го порядку називають *інтегральною кривою*.

9.1. Диференціальні рівняння першого порядку

9.1.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь першого порядку

Поняття диференціального рівняння. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називають рівняння

$$F\left(x, y, y'\right)=0, \qquad (9.1.1)$$

яке пов'язує незалежну змінну x, функцію $y=y(x)$ та її похідну першого порядку $y'(x)$. Якщо рівняння (9.1.1) можна розв'язати щодо похідної y', тобто записати у нормальній формі, то отримаємо

$$y'=f(x,y). \qquad (9.1.2)$$

Рівняння (9.1.2) називають *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним щодо похідної.* Часто рівняння (9.1.2) записують у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{9.1.3}$$

або

$$\mathrm{d}y = f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Диференціальне рівняння першого порядку можна записати у *симетричному вигляді*

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{9.1.4}$$

У цьому рівнянні змінні x та y рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію іншої.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = y(x)$, визначену і неперервно диференційовану в інтервалі $(a;b)$, яка перетворює його в тотожність, тобто

$$F\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big) \equiv 0.$$

Графік розв'язку, тобто інтегральна крива $y = y(x)$ є *гладкою кривою*.

Задача Коші. У багатьох задачах, які зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку, потрібно відшукати розв'язок рівняння, який набуває заданого значення для заданого значення незалежної змінної. Таку задачу називають *початковою задачею*, або *задачею Коші*.

Задачу Коші формулюємо так: знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{9.1.5}$$

У цьому випадку розв'язок задачі Коші записують у вигляді

$$y = y(x, x_0, y_0). \tag{9.1.6}$$

Геометрично це означає, що потрібно знайти інтегральну криву диференціального рівняння (9.1.3), яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$.

Кажуть, що задача Коші

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.1.7}$$

має *єдиний розв'язок*, якщо існує окіл $|x - x_0| < \delta$ точки x_0 такий, що в ньому рівняння має розв'язок (9.1.6) і не існує розв'язку $y = y_1(x, x_0, y_0)$, значення якого хоча б в одній точці не збігаються з (9.1.6). Якщо це не так, то кажуть, що порушена єдиність розв'язку задачі Коші.

Теорема 9.1.1 (про існування і єдиність розв'язку). Якщо права частина диференціального рівняння $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і має неперервну в цьому околі частинну похідну $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то рівняння

(9.1.3) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений у цьому околі точки x_0, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Загальний, частковий і особливий розв'язки. Нехай через кожну точку області проходить тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння (9.1.3). Функцію

$$y = \varphi(x, C), \tag{9.1.8}$$

яка визначена в деякій області D і неперервно диференційована за x, називають *загальним розв'язком* диференціального рівняння (9.1.3), якщо вона задовольняє такі умови:

1) рівність (9.1.8) в області D можна розв'язати щодо довільної сталої, тобто

$$C = \psi(x, y); \tag{9.1.9}$$

2) функція (9.1.8) є розв'язком рівняння (9.1.3) для всіх значень C, отриманих із (9.1.9) для всіх $(x; y) \in D$.

Якщо відомий загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ диференціального рівняння (9.1.3), то можна розв'язати задачу Коші для довільних початкових значень $(x_0; y_0) \in D$. Для цього досить розв'язати рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ щодо C і підставити отримане значення $C = C_0$ в загальний розв'язок (9.1.8). Отримана функція $y = \varphi(x, C_0)$ є єдиним розв'язком задачі Коші.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (9.1.3), записаний у вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

називають *загальним інтегралом* цього рівняння. Часто загальний інтеграл записують у вигляді

$$\Psi(x, y) = C.$$

У цьому випадку функцію $\Psi(x, y)$ називають інтегралом диференціального рівняння (9.1.3).

Частинним розв'язком диференціального рівняння (9.1.3) в області D називають функцію $y = \varphi(x, C^*)$, яку отримують із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ для певного значення $C = C^*$.

Розв'язок $y = y(x)$, у кожній точці якого порушена єдиність розв'язку задачі Коші, називають *особливим розв'язком*. Особливий розв'язок не можна отримати із загального за жодного значення параметра C. Якщо права частина рівняння (9.1.3) задовольняє умови теореми Пікара, то очевидно, що це рівняння не має особливих розв'язків.

Зазначимо, що особливі розв'язки можна виявити під час знаходження загального розв'язку диференціального рівняння. Наприклад, унаслідок ділення обох частин диференціального рівняння на деяку функцію $g(x, y) = 0$ можемо втратити розв'язки $y = \varphi(x)$ чи $x = \psi(y)$, за яких дільник обертається в нуль. Якщо ці функції не можна отримати із загального розв'язку, то вони є особливими розв'язками.

9.1.2. Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних щодо похідної

Рівняння з відокремлюваними змінними. Нехай у рівнянні (9.1.4) функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ можна записати як добуток неперервних функцій, одна з яких залежить лише від x, а інша – лише від y, тобто $P(x,y)=P_1(x)\cdot P_2(y)$, $Q(x,y)=Q_1(x)\cdot P_{Q2}(y)$. У цьому випадку рівняння має вигляд

$$P_1(x)P_2(y)\,\mathrm{d}x+Q_1(x)Q_2(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (9.1.10)$$

Таке рівняння називають *рівнянням із відокремлюваними змінними у симетричній формі.* Поділимо обидві частини рівності (9.1.10) на $P_2(y)\cdot Q_1(x)$ й отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y=0.$$

Проінтегруємо цю рівність і отримаємо загальний інтеграл

$$\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y=C.$$

Якщо рівняння $Q_1(x)=0$, $P_2(y)=0$ мають розв'язки $x=a$, $y=b$, то вони можуть бути особливими.

Важливим частинним випадком диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними є *автономні рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(y). \qquad (9.1.11)$$

Такі рівняння часто трапляються в задачах економічної динаміки. Зазвичай, у таких рівняннях незалежною змінною є час t. Його відсутність у правій частині рівняння (9.1.11) можна трактувати як незмінність законів, за якими в певний проміжок часу розвивається економічна система. Якщо y^* – корінь рівняння $g(y)=0$, то $y(x)=y^*$ є розв'язком рівняння (9.1.11). Такий розв'язок називають *стаціонарним*.

Доведено таке: якщо $y=\varphi(x)$ – розв'язок автономного диференціального рівняння, то $y=\varphi(x+C)$ теж є розв'язком цього рівняння.

Приклад 9.1.1. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $x\left(1+y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y=0.$

• Розділимо в цьому рівнянні змінні, тобто поділимо обидві його частини на $\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)$:

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=0.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,y = 0,$$

або

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln|C|.$$

Звідси отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=C^2.$$

Рівняння $1+x^2=0,\ 1+y^2=0$ не мають дійсних розв'язків, тому під час розділення змінних нема втрачених розв'язків. Усі розв'язки цього диференціального рівняння є в загальному інтегралі. ❍

Приклад 9.1.2. Швидкість знецінення обладнання внаслідок його зношення в кожний момент часу пропорційна до його залишкової вартості. Нехай початкова вартість обладнання становила A_0. Визначимо його вартість через t років.

• Нехай $y=y(t)$ – вартість обладнання в момент часу t. Знецінення вартості дорівнює $A_0-y(t)$. За умовою задачі швидкість знецінення $\dfrac{\mathrm{d}(A_0-y(t))}{\mathrm{d}\,t}$ пропорційна до залишкової вартості $y(t)$. Для визначення $y(t)$ отримано диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}(A_0-y(t))}{\mathrm{d}\,t}=ky(t)$$

з початковою умовою

$$y(0)=A_0.$$

Розділимо у рівнянні $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=-ky$ змінні

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=-k\,\mathrm{d}\,t,$$

і проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=-\int k\,\mathrm{d}\,t,\qquad \ln|y|=-kt+\ln|C|.$$

Отримано загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(t)=Ce^{-kt}.$$

З урахуванням початкової умови $y(0)=A_0$, тобто $A_0=Ce^{-k\cdot 0}$, отримаємо $C=A_0$. Отже, частинний розв'язок

$$y(t)=A_0e^{-kt}.$$ ❍

Приклад 9.1.3. Визначимо функцію попиту $Q=D(P)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_P(D)=-2$ і $D(3)=10$.

• Нагадаємо, що еластичність попиту $Q=D(P)$ за ціною P визначають формулою

$$E_P(D) = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}.$$

Отже, для визначення функції попиту отримано рівняння

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = -2.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{2\,\mathrm{d}P}{P}.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$Q = \frac{C}{P^2}.$$

Використаємо початкову умову й отримаємо $10 = \frac{C}{9}$, $C = 90$.

Отже,

$$Q = \frac{90}{P^2}.$$ ❍

Однорідні диференціальні рівняння. Функцію $f(x,y)$ називають *однорідною функцією степеня* m, якщо

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y). \tag{9.1.12}$$

Якщо $m = 0$, то функцію $f(x,y)$ називають *однорідною функцією нульового степеня.* Кожну однорідну функцію $f(x,y)$ нульового степеня можна записати у вигляді

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.1.13}$$

Відношення двох однорідних функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ однакового степеня m є однорідною функцією нульового степеня

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Диференціальне рівняння

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

де $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового степеня m, називають *однорідним рівнянням*. Нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні в деякій області D і не обертаються одночасно в нуль у цій області. Точку $M_0(x_0;y_0)$, у якій функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ одночасно обертаються в нуль, називають *особливою точкою*. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Оскільки $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового степеня m, то $-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Отже, однорідне диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.1.14}$$

Доведемо, що однорідне рівняння завжди можна проінтегрувати в квадратурах. Нехай

$$y = u(x)\cdot x. \tag{9.1.15}$$

Продиференціюємо (9.1.15):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u.$$

Підставимо цей вираз у (9.1.14):

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = g(u),$$

або

$$x\,\mathrm{d}u + \big(u - g(u)\big)\mathrm{d}x = 0. \tag{9.1.16}$$

Отримано рівняння з відокремлювальними змінними. Якщо $u - g(u) \neq 0$ і $x \neq 0$, то отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{\mathrm{d}u}{u - g(u)} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0. \tag{9.1.17}$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u - g(u)} + \ln|x| = C,$$

або

$$\psi(u) + \ln|x| = C,$$

де

$$\psi(u) = \int \frac{\mathrm{d}u}{u - g(u)}.$$

Отже, отримано загальний інтеграл однорідного рівняння

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = C. \tag{9.1.18}$$

Розглянемо випадок $x = 0$. Це розв'язок рівняння (9.1.16), який може бути розв'язком рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g\left(\dfrac{y}{x}\right)},$$

і тому приєднаємо його до розв'язків рівняння (9.1.14). Якщо рівняння $u - g(u) = 0$ має розв'язки $u = \alpha = \mathrm{const}$, то цим розв'язкам відповідають

розв'язки $y = \alpha x,\ x \neq 0,$ однорідного рівняння (9.1.14), які можуть бути особливими розв'язками.

Нехай $g(u) \equiv u.$ У цьому випадку рівняння (9.1.14) має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}.$$

Це рівняння з відокремлювальними змінними. Його розв'язками є функції

$$\begin{cases} y = Cx,\ x \neq 0; \\ x = 0,\quad y \neq 0. \end{cases}$$

Особливих розв'язків це рівняння не має.

Зазначимо таке: якщо однорідне диференціальне рівняння записане у вигляді

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

то нема потреби зводити його до вигляду (9.1.18). У цьому випадку можна відразу використовувати підстановку (9.1.15).

П р и к л а д 9.1.4. Розв'яжемо рівняння $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

- Запишемо це диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Очевидно, що це однорідне рівняння. Уведемо заміну $y = u(x) \cdot x.$ Тоді $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u.$ Запишемо диференціальне рівняння у вигляді

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Розділимо в цьому рівнянні змінні

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

і проінтегруємо його.

Отримаємо

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1,\ C_1 > 0,$$

або

$$\arcsin u = \ln C_1|x|.$$

Оскільки $C_1|x| = \pm C_1 x,$ то, позначивши $\pm C_1 = C,$ отримаємо

$$\arcsin u = \ln Cx,$$

де $|\ln Cx| \le \frac{\pi}{2},$ або $e^{-\pi/2} \le Cx \le e^{\pi/2}.$ Замінимо $u = \frac{y}{x}$ й отримаємо загальний розв'язок початкового диференціального рівняння

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx$$

або

$$y=x\sin(\ln Cx).$$

Під час розділення змінних обидві частини диференціального рівняння ділили на $x\sqrt{1-u^2}\neq 0$. Нехай $x=0,\ \sqrt{1-u^2}=0$. Підставимо $x=0$ у початкове диференціальне рівняння й отримаємо, що $x=0$ не є його розв'язком. Із другого рівняння отримаємо $1-\frac{y^2}{x^2}=0,$ звідки $y=-x,\ y=x$. Підставимо $y=-x,\ y=x$ у початкове рівняння, отримаємо, що вони є його розв'язками.

Лінійні диференціальні рівняння. Диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x), \tag{9.1.19}$$

де $p(x),\ q(x)$ – відомі, визначені і неперервні в інтервалі $(a;b)$ функції, називають *лінійним неоднорідним рівнянням*. Якщо $q(x)\equiv 0,$ то диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \tag{9.1.20}$$

називають *лінійним однорідним рівнянням*.

Оскільки функції $p(x)$ і $q(x)$ визначені й неперервні в інтервалі $(a;b)$, то з теореми Пікара про існування і єдиність розв'язку випливає, що рівняння (9.1.19) має єдиний розв'язок $y=y(x),$ який задовольняє умову $y_0=y(x_0)$. У цьому випадку y_0 можна задавати довільно, а x_0 брати із проміжку $(a;b)$. Зазначимо, що однорідне рівняння (9.1.19) має єдиний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(x_0)=0,\ x_0\in(a;b)$. Лінійне диференціальне рівняння (9.1.19) не може мати особливих розв'язків. Усі його розв'язки є частинними.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (9.1.20). Очевидно, що це рівняння завжди має розв'язок $y\equiv 0$. Запишемо рівняння (9.1.20) у вигляді

$$\mathrm{d}y+p(x)y\,\mathrm{d}x=0.$$

Розділимо у цьому рівнянні змінні:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}+p(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Проінтегруємо це рівняння, отримаємо

$$\ln|y|+\int p(x)\,\mathrm{d}x=\ln C,$$

або

$$y=Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{9.1.21}$$

Формула (9.1.21) містить усі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, зокрема, розв'язок $y\equiv 0,$ який отримано із (9.1.21) за $C=0$. Отже,

формула (9.1.21) задає загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (9.1.20) в області D:

$$a < x < b,\ |y| < \infty. \tag{9.1.22}$$

Якщо рівняння записане у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = p(x)\,\mathrm{d}x,$$

то його загальний розв'язок в області (9.1.22) має вигляд

$$y = Ce^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Загальний розв'язок (9.1.21) можна записати у вигляді

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x},\ x_0 \in (a;b). \tag{9.1.23}$$

З використанням умови $y_0 = y(x_0)$ з (9.1.23) отримаємо $y_0 = C$. У цьому випадку формула (9.1.23) набуде вигляду

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x},\ x_0 \in (a;b). \tag{9.1.24}$$

Це загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у *формі Коші*.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (9.1.19). Доведемо таке: якщо відомий частинний розв'язок рівняння (9.1.19), то інтегрування такого диференціального рівняння можна звести до інтегрування відповідного однорідного рівняння (9.1.20). Справді, нехай $y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (9.1.19), тобто

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + p(x)y_1 \equiv q(x). \tag{9.1.25}$$

Нехай

$$y(x) = y_1(x) + z(x), \tag{9.1.26}$$

де $z(x)$ – нова невідома функція.

Підставимо (9.1.26) у (9.1.19):

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + p(x)y_1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = q(x).$$

З урахуванням (9.1.25) для знаходження $z(x)$ отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = 0.$$

Його загальний розв'язок

$$z = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (9.1.19)

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння і будь-якого розв'язку цього неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна знайти *методом варіації довільної сталої* (методом Лагранжа). Загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння є функція $y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$. Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння (9.1.19) у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad (9.1.27)$$

де $C(x)$ – невідома, неперервно диференційована функція. Підставимо (9.1.27) у (9.1.19):

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x).$$

Звідси

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

і

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C,$$

де C – довільна стала. Підставимо знайдене $C(x)$ у формулу (9.1.27) і отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right). \qquad (9.1.28)$$

У цьому випадку частинний розв'язок

$$y_1(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Із формули (9.1.28) випливає, що кожен розв'язок $y = y(x)$ лінійного неоднорідного рівняння визначений для всіх $x \in (a;b)$.

Будь-який розв'язок рівняння (9.1.19), який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, можна записати так:

$$y(x) = y_0\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \qquad (9.1.29)$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна знайти *методом Бернуллі*. У цьому випадку розв'язок рівняння (9.1.19) шукаємо у вигляді

$$y = u(x)\cdot v(x), \qquad (9.1.30)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – невідомі функції. Обчислимо $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v + u\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ і підставимо в (9.1.19):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v + u\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)u(x)v(x) = q(x);$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v + u\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)v(x)\right) = q(x). \qquad (9.1.31)$$

Нехай $v(x)$ – один із розв'язків рівняння $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)v(x) = 0,$ наприклад $v(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$. Підставимо знайдене $v(x)$ у рівняння (9.1.31). Отримаємо рівняння для знаходження функції $u(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = q(x)\cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Звідси

$$u(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Підставимо знайдені $u(x)$ та $v(x)$ в (9.1.30), отримаємо загальний розв'язок (9.1.28) лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Зазначимо таке: трапляються випадки, коли диференціальне рівняння не є лінійним щодо y, але воно лінійне щодо x як функції від y. Таке рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + r(y)x = g(y).$$

Приклад 9.1.5. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 3x^2 - 2x^4.$$

• Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Для розв'язування його використаємо метод Лагранжа. Знайдемо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 0.$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Звідси

$$\ln|y| = x^2 + \ln C, \quad y = Ce^{x^2}.$$

Відшукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C(x)\cdot e^{x^2}.$$

Підставимо його у початкове рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}e^{x^2} + 2xe^{x^2}C(x) - 2xe^{x^2}C(x) = 3x^2 - 2x^4,$$

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = e^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right),$$

$$C(x) = \int e^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right)\mathrm{d}x = x^3 e^{-x^2} + C, \quad C \in R.$$

Отже, загальний розв'язок початкового рівняння

$$y(x) = \left(x^3 e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = Ce^{x^2} + x^3. \qquad \bigcirc$$

Рівняння в повних диференціалах. Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9.1.32}$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}U, \tag{9.1.33}$$

то рівняння (9.1.32) називають *рівнянням у повних диференціалах*. Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}U = 0,$$

то його загальний інтеграл

$$U(x,y) = C.$$

Теорема 9.1.2. Нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій однозв'язній області D. Для того, щоб рівняння $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб у цій області виконувалася тотожність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{9.1.34}$$

Приклад 9.1.6. Розв'яжемо рівняння

$$\left(2xy + 3y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + 6xy - 3y^2\right)\mathrm{d}y = 0.$$

- Перевіримо, чи це рівняння в повних диференціалах. У нашому випадку $P(x,y) = 2xy + 3y^2$, $Q(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2$. Обчислимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Отже, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, тому ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$. Для шуканої функції

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

З першого рівняння отримаємо

$$U(x,y) = x^2 y + 3xy^2 + g(y).$$

Продиференціюємо це рівняння за y:

$$x^2 + 6xy + \frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,y} = -3y^2$$

і

$$g(y) = -y^3 + C.$$

Отже,

$$U(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1.$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C. \qquad \text{❍}$$

9.2. Диференціальні рівняння вищих порядків

9.2.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь вищих порядків

Задача Коші. Для диференціального рівняння

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (9.2.1)$$

n-го порядку $(n > 1)$ можна сформулювати задачу Коші: знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (9.2.1), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (9.2.2)$$

де $x_0,\ y_0,\ y_0',\ ...,\ y_0^{(n-1)}$ – задані числа. Геометрично це означає таке: потрібно знайти інтегральну криву $y = y(x)$, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має в цій точці дотичну, що утворює з додатним напрямом осі Ox заданий кут α_0 такий, що $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$ (рис. 9.1.1).

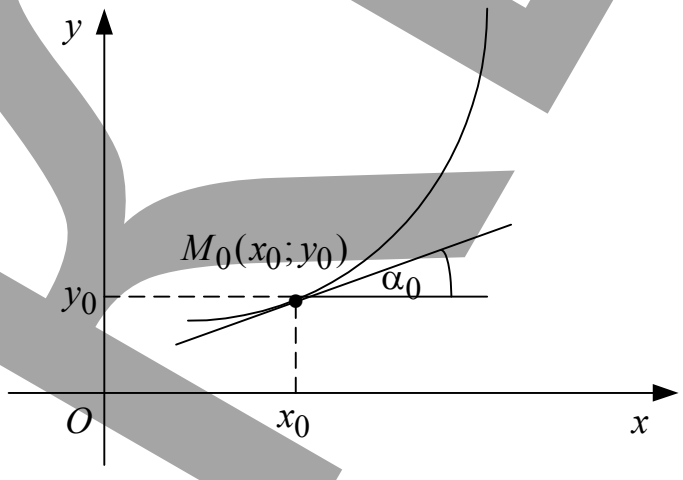


Рис. 9.1.1.

Нехай диференціальне рівняння (9.2.1) можна розв'язати щодо похідної вищого порядку, тобто записати його у вигляді

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{9.2.3}$$

У цьому випадку доведена теорема про існування і єдиність його розв'язку.

Теорема 9.2.1. Якщо функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ неперервна у деякому околі початкової точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ і має неперервні в цьому околі частинні похідні за $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то рівняння (9.2.3) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови (9.2.2).

Наприклад, якщо права частина рівняння (9.2.3) є поліномом щодо всіх аргументів, то для всіх початкових значень $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші, тобто існує єдиний розв'язок з цими початковими значеннями. Якщо права частина рівняння (9.2.3) є поліномом щодо $y, y', ..., y^{(n-1)}$, причому його коефіцієнти неперервні в деякому інтервалі $(a; b)$, то початкові значення шуканої функції та її похідних до порядку $(n-1)$ можна задати довільно, а за початкове значення незалежної змінної можна взяти довільне $x_0 \in (a; b)$. У цьому випадку існує розв'язок задачі з такими початковими умовами і він єдиний.

Загальний та частинний розв'язок, загальний інтеграл. Нехай в околі кожної точки $\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ області D виконуються умови теореми 9.2.1. Функцію

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{9.2.4}$$

яка має неперервні похідні до n-го порядку включно, називають *загальним розв'язком* рівняння (9.2.3) в області D, якщо:

1) Систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \tag{9.2.5}$$

можна розв'язати в області D щодо довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ C_2 = \psi_2\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n = \psi_n\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right); \end{cases} \tag{9.2.6}$$

2) функція (9.2.4) є розв'язком рівняння (9.2.3) для всіх значень довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Загальний розв'язок (9.2.4) містить усі розв'язки рівняння (9.2.3) з початковими значеннями з області D. Кожен такий розв'язок отримуємо з (9.2.4) за відповідних значень довільних сталих.

Загальний розв'язок, записаний у вигляді

$$y = y\left(x, x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right),$$

де x_0 фіксоване, а початкові значення $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ відіграють роль довільних сталих, називають *загальним розв'язком у формі Коші*.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (9.2.3), записаний у вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння називають *частинним*, якщо в кожній його точці збережено єдиність розв'язку задачі Коші. Кожен розв'язок, отриманий із загального розв'язку (9.2.4) для конкретних значень довільних сталих, є частинним.

9.2.2. Випадки інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків, не розв'язаних щодо старшої похідної

Якщо диференціальне рівняння (9.2.1) можна розв'язати щодо $y^{(n)}$, то отримаємо одне або декілька рівнянь

$$y^{(n)} = f_k\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \quad k = 1,2,...m. \tag{9.2.7}$$

Розв'язки рівнянь (9.2.7) називають загальним інтегралом диференціального рівняння (9.2.1).

Розглянемо деякі випадки рівняння (9.2.1), у яких можна знизити його порядок.

1. Розглянемо рівняння $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$. Нехай його можна записати у вигляді

$$y^{(n)} = f(x), \tag{9.2.8}$$

де функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$. Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, послідовно знижуючи його порядок на одиницю. Оскільки $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, то рівняння (9.2.8) запишемо у вигляді

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x),$$

звідки

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1. \tag{9.2.9}$$

Аналогічно, як у попередньому випадку, для рівняння (9.2.9) отримаємо

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + C_1 x + C_2.$$

Внаслідок n послідовних інтегрувань отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (9.2.8):

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n\text{ разів}} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}x}_{n\text{ разів}}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}C_1+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}C_2+\ldots+xC_{n-1}+C_n.$$

Приклад 9.2.1. Знайдемо розв'язок диференціального рівняння $y'''=\dfrac{\ln x}{x^2}$, який задовольняє початкові умови $y(1)=0,\ y'(1)=1,\ y''(1)=2.$

- Проінтегруємо це рівняння послідовно три рази:

$$y''=\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1;$$

$$y'=-\frac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+C_1x+C_2;$$

$$y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови. Підставимо початкові значення у попередні формули:

$$\begin{cases}\dfrac{C_1}{2}+C_2+C_3=0;\\ C_1+C_2=1;\\ -1+C_1=2.\end{cases}$$

Звідси $C_1=3,\ C_2=-2,\ C_3=0{,}5.$

Отже, отримано розв'язок

$$y=-0{,}5x\ln^2 x+1{,}5x^2-2x+0{,}5,$$

який задовольняє задані початкові умови. ❍

2. Розглянемо диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції, або шуканої функції та її послідовних перших похідних:

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)}\right),\ 1\le k\le n-1. \tag{9.2.10}$$

Уведемо нову функцію $z=z(x),$ прийнявши

$$y^{(k)}=z. \tag{9.2.11}$$

Тоді

$$y^{(k+1)}=z',\ y^{(k+2)}=z'',\ \ldots,\ y^{(n)}=z^{(n-k)},$$

і рівняння (9.2.10) набуде вигляду

$$F\left(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)}\right). \tag{9.2.12}$$

Отже, у цьому випадку порядок рівняння можна знизити на k одиниць.

Нехай $z=\varphi_1(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-k})$ – загальний розв'язок рівняння (9.2.12). Тоді для визначення $y(x)$ отримаємо рівняння

$$y^{(k)} = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Проінтегруємо це рівняння й отримаємо загальний розв'язок рівняння (9.2.10):

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Приклад 9.2.2. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

• Це рівняння не містить шуканої функції, тому введемо заміну $y' = z(x)$, $y'' = z'$. Підставимо їх у початкове рівняння й отримаємо лінійне рівняння

$$z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Його розв'язок

$$z = -2\cos^2 x + C_1 \cos x.$$

Для визначення функції $y = y(x)$ з цього рівняння одержимо рівняння

$$y' = -2\cos^2 x + C_1 \cos x.$$

Проінтегруємо й отримаємо

$$y = -x - 0{,}5 \sin 2x + C_1 \sin x + C_2. \qquad \bigcirc$$

3) Розглянемо рівняння

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{9.2.13}$$

яке не містить незалежної змінної x.

Доведемо, що його порядок завжди можна знизити на одиницю. Уведемо заміну $y' = z$, тобто $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z$, де $z = z(y)$. Тоді

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.$$

Обчислимо

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right) = z \cdot \left(z \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right).$$

Після обчислення похідних вищих порядків отримаємо

$$y^{(n)} = g\left(z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right).$$

Отже, отримано рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\left(y, z, z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, ..., g\left(z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)\right).$$

Якщо загальний розв'язок цього рівняння

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

то з рівняння

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

знайдемо загальний інтеграл рівняння

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})} = x + C_n.$$

Приклад 9.2.3. Розв'яжемо рівняння $y \cdot y'' = y^2 y' + (y')^2$.

• Це рівняння не містить незалежної змінної. Нехай $y' = z(y)$, $y'' = z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$. Тоді початкове рівняння має вигляд

$$yzz' = y^2 z + z^2.$$

Очевидно, що $z = 0$ – розв'язок цього рівняння. Звідси отримаємо $y = C$.
Нехай $z \neq 0$. Тоді одержимо лінійне рівняння першого порядку

$$yz' - z = y^2.$$

Його розв'язок

$$z = y^2 + C_1 y.$$

Оскільки $z = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, то для визначення $y = y(x)$ отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + C_1 y.$$

Нехай $C_1 = 0$. Тоді для $y \neq 0$ із попереднього рівняння отримаємо $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$, або $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$. Звідси $x = -\dfrac{1}{y} + C_2$, або $y = \dfrac{1}{C_2 - x}$.

Нехай $C_1 \neq 0$. Тоді

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 + C_1 y} = \mathrm{d}x, \quad x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + C_1 y} = \frac{1}{C_1}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{C_1}\int \frac{\mathrm{d}y}{y + C_1}.$$

Отже,

$$x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_3. \qquad \bigcirc$$

9.3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Задача Коші. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = f(x). \qquad (9.3.1)$$

Нехай усі коефіцієнти $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ і функція $f(x)$ задані й неперервні в інтервалі $(a; b)$. У цьому випадку в околі початкової точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, де $x_0 \in (a; b)$, $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – задані числа, виконуються

умови теореми 9.2.1. Тому для лінійного рівняння (9.3.1) справджується теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

Теорема 9.3.1. Якщо функції $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ і $f(x)$ неперервні в інтервалі $(a;b)$, то рівняння (9.3.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

причому $y_0,\ y'_0,\ ...,\ y_0^{(n-1)}$ можна задавати довільно, а x_0 – довільне з інтервалу $(a;b)$.

Якщо функції $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ і $f(x)$ – поліноми, то всі початкові дані $x_0, y_0,\ y'_0,\ ...,\ y_0^{(n-1)}$ можна задавати довільно. У цьому випадку існує єдиний розв'язок для всіх x.

9.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Якщо в рівнянні (9.3.1) $f(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то отримаємо лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = 0. \qquad (9.3.2)$$

Якщо функції $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ і $f(x)$ неперервні в інтервалі $(a;b)$, то з теореми 9.3.1 випливає, що єдиним розв'язком рівняння (9.2.3), який задовольняє нульові початкові умови

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

є нульовий розв'язок $y = 0$.

Лінійні диференціальні оператори. Уведемо диференціальний оператор

$$L \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + ... + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_n(x). \qquad (9.3.3)$$

Цей оператор має дві головні властивості.

1. Сталий множник можна винести за знак оператора, тобто

$$L(ky) = kL(y). \qquad (9.3.4)$$

2. Оператор від суми двох функцій дорівнює сумі операторів від цих функцій

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2). \qquad (9.3.5)$$

Із властивостей (9.3.4) і (9.3.5) випливає

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k L(y_k), \qquad (9.3.6)$$

тобто оператор від лінійної комбінації n функцій дорівнює лінійній комбінації операторів цих функцій.

Використаємо оператор L і позначимо ліву частину рівняння (9.3.1) через $L(y)$:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y. \qquad (9.3.7)$$

Тоді неоднорідне рівняння (9.3.1) запишемо у вигляді

$$L(y) = f(x), \qquad (9.3.8)$$

а відповідне однорідне –

$$L(y) = 0. \qquad (9.3.9)$$

Якщо функція $y = y(x)$ – розв'язок рівняння (9.3.1) або (9.3.2) в деякому інтервалі $(a;b)$, то $L(y(x)) \equiv f(x)$, або $L(y(x)) \equiv 0$ для всіх $x \in (a;b)$.

Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння. Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння (6.3.2) мають такі властивості.

1. Якщо $y = y_1(x)$ – розв'язок рівняння (9.3.2), то функція $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, теж є розв'язком цього рівняння.

⏮ Оскільки $L(y_1(x)) \equiv 0$, то, використовуючи властивість (9.3.4) лінійного диференціального оператора, отримаємо $L(Cy_1(x)) = CL(y_1(x)) \equiv 0$ для всіх $x \in (a;b)$. ⏭

2. Якщо $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, то їхня сума $y_1(x) + y_2(x)$ теж є розв'язком цього рівняння.

⏮ Оскільки $L(y_1(x)) \equiv 0$, $L(y_2(x)) \equiv 0$, то, використовуючи властивість (9.3.5) лінійного диференціального оператора, отримаємо

$$L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x)) \equiv 0, \text{ для усіх } x \in (a;b). \quad ⏭$$

3. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, то $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ теж є частинним розв'язком цього рівняння.

⏮ Оскільки $L(y_1(x)) \equiv 0$, $L(y_2(x)) \equiv 0, \ldots, L(y_n(x)) \equiv 0$, то за (9.3.6)

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right) = C_k \sum_{k=1}^{n} L(y_k) \equiv 0. \qquad ⏭$$

Фундаментальна система розв'язків. Визначник Вронського. Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ називають *лінійно незалежними на інтервалі* $(a;b)$, якщо для всіх $x \in (a;b)$ рівність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_k y_k(x) = 0 \qquad (9.3.10)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Якщо рівність (9.3.10) виконується тоді, коли хоча б одне $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,k$, то функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ називають *лінійно залежними на інтервалі* $(a;b)$.

Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі $(a;b)$, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$ для всіх $x \in (a;b)$.

Теорема 9.3.2. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ лінійно залежні в інтервалі $(a;b)$, то одна з них є лінійною комбінацією решти.

Сукупність n лінійно незалежних на інтервалі $(a;b)$ розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку називають *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння на інтервалі $(a;b)$.

Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку. Складемо визначник Вронського

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (9.3.11)$$

Теорема 9.3.3. Для того, щоб розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку були лінійно незалежні в інтервалі $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб $W(x)$ не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Справджується формула Остроградського–Ліувілля

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,\mathrm{d}t}. \qquad (9.3.12)$$

Із формули (9.3.12) випливає, що визначник Вронського має дві властивості.

1. Якщо $W(x)$ обертається в нуль в одній точці інтервалу $(a;b)$, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.

2. Якщо $W(x)$ не обертається в нуль в одній точці інтервалу $(a;b)$, то він не дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.

Отже, для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння утворювали фундаментальну систему розв'язків в інтервалі $(a;b)$, досить, щоб визначник Вронського був відмінний від нуля в одній точці цього інтервалу.

Теорема 9.3.4. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку на інтервалі $(a;b)$, то функція

$$y=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k \qquad (9.3.13)$$

є загальним розв'язком цього рівняння.

9.3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку (9.3.1).

Теорема 9.3.5. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цього рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

⏮ Нехай $y = y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (9.3.1), тобто $L(y_1(x)) \equiv f(x),\ x \in (a;b)$. Нехай

$$y = y_1 + z, \tag{9.3.14}$$

де $z = z(x)$ – нова невідома функція. Тоді рівняння (9.3.1) має вигляд $L(y_1 + z) = f(x)$, або $L(y_1) + L(z) = f(x)$. Оскільки $L(y_1) \equiv f(x)$, то $L(z) = 0$. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння, яке відповідає рівнянню (9.3.1). Нехай $z_1(x),\ z_2(x),\ ...,\ z_n(x)\ \ x \in (a;b)$ – фундаментальна система розв'язків цього однорідного рівняння. За теоремою 9.3.4 його загальний розв'язок

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k.$$

Тоді з (9.3.14) отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = y_1 + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k. \tag{9.3.15}$$

Теорема 9.3.6. Якщо в рівнянні (9.3.1) права частина має вигляд $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x)$, $y_2(x)$ – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_2(x)$, то $y = y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (9.3.1).

⏮ З умови теореми випливає, що $L(y_1(x)) \equiv f_1(x),\ L(y_2(x)) \equiv f_2(x)$. Тому $L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y_1(x)) + L(y_2(x)) \equiv f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

Отже, $L(y_1(x) + y_2(x)) \equiv f(x)$, тобто $y = y_1 + y_2$ – частинний розв'язок рівняння (9.3.1). ⏭

Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих) для розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь. Розглянемо спочатку лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{9.3.16}$$

де функції $p(x),\ q(x),\ f(x)$ неперервні в інтервалі $(a;b)$. Розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{9.3.17}$$

Нехай $y_1(x),\ y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (9.3.17). Тоді

$$L(y_1(x)) \equiv 0,\quad L(y_2(x)) \equiv 0 \tag{9.3.18}$$

і

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9.3.19}$$

З теореми 9.3.4 отримаємо загальний розв'язок однорідного рівняння (9.3.17):

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2. \qquad (9.3.20)$$

Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння (9.3.16) у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \qquad (9.3.21)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції.

Продиференціюємо обидві частини рівності (9.3.21):

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2. \qquad (9.3.22)$$

Оскільки для визначення двох невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ маємо лише одне рівняння (9.3.16), то візьмемо

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0. \qquad (9.3.23)$$

Тоді

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \qquad (9.3.24)$$

Обчислимо похідну другого порядку

$$y'' = C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'' + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2'. \qquad (9.3.25)$$

Підставимо (9.3.21), (9.3.24) і (9.3.25) в рівняння (9.3.16):

$$C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'' + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + p(x)\big(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'\big) +$$
$$+ q(x)\big(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2\big) = f(x),$$

або

$$C_1(x) L(y_1(x)) + C_2(x) L(y_2(x)) + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x).$$

З урахуванням (9.3.18) отримаємо

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x).$$

Отже, для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ одержано систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (9.3.26)$$

Оскільки визначник цієї системи є визначником Вронського, який відмінний від нуля, то з системи (9.3.26) можна однозначно визначити $C_1'(x) = \varphi_1(x)$ і $C_2'(x) = \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні в інтервалі $(a; b)$ функції. Тому

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x + C_2, \qquad (9.3.27)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Підставимо (9.3.27) у (9.3.21):

$$y = y_1(x) \cdot \int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + y_2(x) \cdot \int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \qquad (9.3.28)$$

Якщо $C_1 = 0,\ C_2 = 0,$ то отримаємо частинний розв'язок

$$y^* = y_1(x) \cdot \int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + y_2(x) \cdot \int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x \qquad (9.3.29)$$

неоднорідного рівняння (9.3.16). Тому (9.3.28) можна записати у вигляді

$$y = y^* + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \qquad (9.3.30)$$

З теореми 9.3.5 випливає, що (9.3.30) – загальний розв'язок рівняння (9.3.16).

Метод варіації довільних сталих можна застосовувати для розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Розглянемо неоднорідне рівняння (9.3.1). Нехай функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння (9.3.2). Тоді його загальний розв'язок

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k .$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (9.3.1) шукаємо у вигляді

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x), \tag{9.3.31}$$

де функції $C_k(x)$, $k = 1,2,...,n$ визначаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 + ... + C_n'(x) \cdot y_n = 0; \\ \text{.....}; \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-2)} + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{9.3.32}$$

Визначник цієї системи є визначником Вронського, який відмінний від нуля. Тому цю систему можна розв'язати методом Крамера:

$$C_k'(x) = \varphi_k(x), \quad k = 1,2,...,n.$$

Звідси

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x + C_k, \quad k = 1,2,...,n.$$

Підставимо обчислені значення C_k в формулу (9.3.31) і отримаємо загальний розв'язок рівняння (9.3.1):

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \cdot \int \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k . \tag{9.3.33}$$

9.3.4. Диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} \cdot y' + p_n(x) \cdot y = f(x), \tag{9.3.34}$$

де коефіцієнти $p_1, p_2, ..., p_n$ – дійсні числа, а функція $f(x)$ неперервна в деякому інтервалі $(a; b)$. Доведено, що інтегрування неоднорідного лінійного диференціального рівняння можна звести до інтегрування відповідного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} \cdot y' + p_n(x) \cdot y = 0. \tag{9.3.35}$$

Оскільки коефіцієнти цього рівняння сталі, а тому неперервні для всіх дійсних x, то всі його розв'язки визначені для всіх дійсних значень x.

Побудова загального розв'язку однорідного рівняння. Розглянемо метод Ейлера розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$L(y) \equiv y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0. \tag{9.3.36}$$

Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{9.3.37}$$

де λ – невідоме число.

Обчислимо

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

і підставимо їх у (9.3.35):

$$\left(\lambda^2 + p \cdot \lambda + q\right) \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0,$ то отримаємо *характеристичне рівняння*

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0. \tag{9.3.38}$$

Його корені називають *характеристичними числами* диференціального рівняння (9.3.35). Розглянемо деякі випадки характеристичних коренів.

1. Нехай λ_1 і λ_2 – різні дійсні корені характеристичного рівняння (9.3.37). Підставимо їх у (9.3.37) і отримаємо два частинні розв'язки диференціального рівняння (9.3.36):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}. \tag{9.3.39}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що визначник Вронського відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.$$

Отже, частинні розв'язки (9.3.39) утворюють фундаментальну систему розв'язків. За теоремою 9.3.4 загальний розв'язок рівняння (9.3.36) має вигляд

$$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}. \tag{9.3.40}$$

П р и к л а д 9.3.1. Розв'яжемо рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0.$

- Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ – невідоме число. Обчислимо

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

і підставимо їх у рівняння:

$$\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Звідси отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$ Його розв'язки $\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 3.$ Функції $y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^{3x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тоді загальний розв'язок

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}. \qquad \text{❍}$$

2. Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$. Одним частинним розв'язком диференціального рівняння (9.3.36) є функція

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{9.3.41}$$

Доведемо, що функція

$$y_2 = x \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \tag{9.3.42}$$

є частинним розв'язком цього рівняння. Обчислимо

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2'' = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}. \tag{9.3.43}$$

Підставимо (9.3.41), (9.3.42) в рівняння (9.3.36). Оскільки $\frac{p^2}{4} - q = 0,$ то отримаємо

$$-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + pe^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p^2}{2}xe^{-\frac{p}{2}x} + qx \cdot e^{-\frac{p}{2}x} =$$

$$= \left(-\frac{p^2}{4} + q\right)xe^{-\frac{p}{2}x} \equiv 0.$$

Отже, функція

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \tag{9.3.44}$$

є загальним розв'язком рівняння (9.3.36).

Приклад 9.3.2. Розв'яжемо рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0.$

• Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$ Його корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -3.$ За формулою (9.3.44) загальний розв'язок цього диференціального рівняння

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-3x}. \quad \bigcirc$$

3. Нехай характеристичне рівняння (9.3.38) має комплексні корені. Оскільки коефіцієнти характеристичного рівняння дійсні, то його корені спряжені, тобто $\lambda_1 = a + i \cdot b, \quad \lambda_2 = a - i \cdot b.$ Підставимо $\lambda_1 = a + i \cdot b$ в (9.3.37). Отримаємо комплексний розв'язок

$$y = e^{(a+i\cdot b)x} = e^{ax} \cdot e^{i \cdot bx} = e^{ax}\left(\cos bx + i \cdot \sin bx\right) = e^{ax}\cos bx + i \cdot e^{ax}\sin bx.$$

Звідси отримаємо два дійсні частинні розв'язки

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx. \tag{9.3.45}$$

Оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos bx}{\sin bx} = \operatorname{ctg} bx \neq \text{const},$$

то ці розв'язки лінійно незалежні.

Аналогічно, кореню $\lambda_2 = a - i \cdot b$ відповідають два дійсні частинні розв'язки

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = -e^{ax}\sin bx.$$

Ці розв'язки лінійно залежні з розв'язками (9.3.45). Отже, комплексно спряженим кореням $\lambda_1 = a + i \cdot b, \quad \lambda_2 = a - i \cdot b$ відповідають два дійсні лінійно незалежні розв'язки (9.3.45). Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (9.3.36). Функція

$$y = e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right) \qquad (9.3.46)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (9.3.36).

Якщо корені характеристичного рівняння уявні, тобто $\lambda_1 = i \cdot b, \ \lambda_1 = -i \cdot b,$ то їм відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx.$$

Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему, тому функція

$$y = C_1\cos bx + C_2\sin bx$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (9.3.36).

П р и к л а д 9.3.3. Розв'яжемо рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0.$

• Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$ Його корені $\lambda_1 = -1 + 2 \cdot i, \ \lambda_2 = -1 - 2 \cdot i.$ За формулою (9.3.46) знайдемо загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right). \qquad \text{❍}$$

Розглянутий метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків однорідного диференціального рівняння другого порядку можна поширити і на рівняння n-го порядку. Частинний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді (9.3.37). Підставимо його у (9.3.35) і отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (9.3.47)$$

Залежно від коренів цього характеристичного рівняння отримаємо фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (9.3.35).

1. Усі корені $\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні і різні. У цьому випадку функції

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \ y_n = e^{\lambda_1 x}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (9.3.35). Його загальний розв'язок

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

2. Характеристичне рівняння має дійсні корені, серед яких є кратні. Нехай λ_1 – дійсний корінь, який має кратність k. Йому відповідають k лінійно незалежних розв'язків

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}, \ y_3 = x^2 \cdot e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y_k = x^{k-1} \cdot e^{\lambda_1 x}.$$

Після побудови розв'язків, які відповідають іншим кореням характеристичного рівняння, отримаємо фундаментальну систему розв'язків. За цією фундаментальною системою побудуємо загальний розв'язок диференціального рівняння (9.3.35).

3. Характеристичне рівняння має комплексні корені. Кожній парі комплексно спряжених коренів $a \pm i \cdot b$ відповідають два дійсні лінійно незалежні розв'язки вигляду $e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$. Знайшовши дійсні частинні розв'язки, які відповідають комплексним і дійсним кореням, отримаємо фундаментальну систему розв'язків, за якою будують загальний розв'язок диференціального рівняння (9.3.35).

4. Характеристичне рівняння має кратні комплексні корені. Нехай $\lambda_1 = a + i \cdot b$ – корінь кратності k. Тоді характеристичне рівняння має комплексно спряжений корінь $\lambda_2 = a - i \cdot b$, кратність якого теж дорівнює k. Цим спряженим комплексним кореням відповідає $2k$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx;\ x^2e^{ax}\cos bx;\ldots;\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx;$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx;\ x^2e^{ax}\sin bx;\ \ldots;\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

Знайдемо дійсні частинні розв'язки, які відповідають іншим комплексним і дійсним кореням, і отримаємо фундаментальну систему розв'язків, за якою будують загальний розв'язок диференціального рівняння (9.3.35).

Приклад 9.3.4. Розв'яжемо рівняння $y''' + 8y = 0$.

• Частинні розв'язки диференціального рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Обчислимо $y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$ і підставимо в диференціальне рівняння. Отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^3 + 8 = 0,$ або $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$. Його корені $\lambda_1 = 1 + i \cdot \sqrt{3},\ \lambda_2 = 1 - i \cdot \sqrt{3},\ \lambda_3 = -2$. Функції $y_1 = e^x \cos\sqrt{3}x,\ y_2 = e^x \sin\sqrt{3}x,\ y_3 = e^{-2x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x + C_3 e^{-2x}. \qquad \text{❍}$$

Приклад 9.3.5. Розв'яжемо рівняння $y''' + 2y'' + y' = 0$.

• Частинні розв'язки диференціального рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Обчислимо $y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$ і підставимо у диференціальне рівняння. Отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0$. Функції $y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},\ y_3 = 1$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Загальним розв'язком цього диференціального рівняння є функція

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3. \qquad \text{❍}$$

Побудова загального розв'язку неоднорідного рівняння. Оскільки лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами є частинним випадком лінійного рівняння, то його загальний розв'язок завжди можна побудувати методом варіації сталої.

Приклад 9.3.6. Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

• Цьому рівнянню відповідає однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y = 0$. Частинні розв'язки цього диференціального рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Обчислимо $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ і підставимо в рівняння $y'' + 4y = 0$. Отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 2 \cdot i$, $\lambda_2 = -2 \cdot i$. Функції $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння. Загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння є функція

$$\widetilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ із (9.3.26) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0; \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Із цієї системи

$$C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x},\ C_2'(x) = \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$C_1(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1,\ \ C_2(x) = \frac{x}{2} + C_2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin 2x =$$

$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{x}{2} \cdot \sin 2x. \qquad \text{❍}$$

Метод невизначених коефіцієнтів. Під час застосування методу варіації сталої в разі відшукання інтегралів часто доводиться виконувати складні обчислення. Тому у випадках, коли можна легше знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння, цей метод не використовують. Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли права частина має спеціальний вигляд, частинний розв'язок шукають *методом невизначених коефіцієнтів*.

1. Нехай права частина рівняння (9.3.34) має вигляд $f(x) = P_m(x) \cdot e^{ax}$. Тоді:

а) якщо число a не є коренем характеристичного рівняння (9.3.47), то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1 = Q_m(x)e^{ax}, \tag{9.3.48}$$

де $Q_m(x)$ – поліном із невідомими коефіцієнтами;

б) якщо число a є коренем характеристичного рівняння (9.3.47) кратності k, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1 = Q_m(x) \cdot x^k e^{ax}, \tag{9.3.49}$$

де $Q_m(x)$ – поліном із невідомими коефіцієнтами.

Підставимо y_1, y_1', ..., $y_1^{(n)}$ в рівняння (6.3.34), прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x і отримаємо систему $m+1$ лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів полінома $Q_m(x)$.

2. Нехай права частина рівняння (9.3.34) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}\left(P_l(x)\cos bx + P_s(x)\sin bx\right),$$

де a, b – дійсні числа, $P_l(x)$, $P_s(x)$ – поліноми, відповідно, степеня l та s. Зазначимо, що один із поліномів може дорівнювати нулю. Тоді:

а) якщо число $a + i \cdot b$ не є коренем характеристичного рівняння (9.3.47), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_1 = e^{ax}\left(Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right), \tag{9.3.50}$$

де $Q_m(x)$, $R_m(x)$ – поліноми з невідомими коефіцієнтами степеня m, $m = \max\{l, s\}$, причому завжди потрібно записувати обидва поліноми;

б) якщо число $a + i \cdot b$ є коренем характеристичного рівняння (9.3.47) кратності k, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_1 = e^{ax} \cdot x^k \cdot \left(Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right), \tag{9.3.51}$$

де $Q_m(x)$, $R_m(x)$ – поліноми з невідомими коефіцієнтами степеня m, $m = \max\{l, s\}$, причому завжди потрібно записувати обидва поліноми.

Приклад 9.3.7. Розв'яжемо рівняння $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

• Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x) = x^2 + x$. У нашому випадку $a = 0$. Число $a = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_1 = A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Обчислимо $y_1' = 2A_1 x + A_2$, $y_1'' = 2A_1$, $y_1''' = 0$ і підставимо в початкове рівняння:

$$-A_1 x^2 + (2A_1 - A_2)x + A_2 - 2A_1 - A_3 = x^2 + x.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x:

$$\begin{cases} A_1 = -1; \\ 2A_1 - A_2 = 1; \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $A_1 = -1,\ A_2 = -3,\ A_3 = -1,$ тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_1 = -x^2 - 3x - 1.$$

Отже, запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1. \qquad \bigcirc$$

Приклад 9.3.8. Розв'яжемо рівняння $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + 1).$

• Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ має корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$ Кратність цього кореня $k = 2.$ Загальний розв'язок відповідного рівняння

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Права частина неоднорідного рівняння $f(x) = e^x(x^2 + 1).$ Число $a = 1$ є коренем кратності $k = 2$ характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді (9.3.49):

$$y_1 = x^2 e^x (A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

Обчислимо $y_1',\ y_1''$ і підставимо їх у неоднорідне рівняння:

$$12A_0 x^2 + 6A_1 x + 2A_2 = x^2 + x.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x і отримаємо $A_0 = \frac{1}{12},$ $A_1 = 0,\ A_2 = 0{,}5.$ Частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_1 = e^x \cdot \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right),$$

а загальний –

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \cdot \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right). \qquad \bigcirc$$

Приклад 9.3.9. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x.$$

• Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$ тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x) = x \sin x.$ У цьому випадку $a = 0,\ b = 1.$ Число i не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння згідно з (9.3.50) шукаємо у вигляді

$$y_1 = (A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x.$$

Обчислимо

$$y_1' = (A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + (B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x;$$

$$y_1'' = (2B_1 - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x.$$

Підставимо ці вирази в неоднорідне рівняння:

$$(2B_1 - A_2 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1 x)\sin x + 3(A_1 + B_2 + B_1 x)\cos x + \\ + 3(B_1 - A_2 - A_1 x)\sin x + 2(A_1 x + A_2)\cos x + 2(B_1 x + B_2)\sin x = x\sin x$$

або

$$\big((A_1 + 3B_1)x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2\big)\cos x + \big((-3A_1 + B_1)x - 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + \\ + B_2\big)\sin x = x\sin x.$$

Звідси отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження $A_1,\ A_2,\ B_1, B_2$:

$$\begin{cases} A_1 + 3B_1 = 0; \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0; \\ -3A_1 + B_1 = 1; \\ -2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $A_1 = -\frac{3}{10},\ A_2 = \frac{17}{50},\ B_1 = \frac{1}{10},\ B_2 = \frac{3}{25}.$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_1 = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x,$$

а загальний –

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x. \quad \bigcirc$$

Приклад 9.3.10. Нехай попит і пропозицію товару описують рівняння

$$D(P) = 2P'' - P' + 15, \quad S(P) = 3P'' + P' + P + 5,$$

де P – ціна товару, P' – тенденція формування ціни, P'' – темп зміни ціни. Визначимо залежність рівноважної ціни від часу, якщо $P(0) = 6,\ D(0) = S(0) = 10.$

- Рівноважна ціна задовольняє умову $D(P) = S(P)$. Тоді

$$2P'' - P' + 15 = 3P'' + P' + P + 5.$$

Звідси отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$P'' + 2P' + 2P = 10.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння

$$P'' + 2P' + 2P = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -1 + i,\ \lambda_2 = -1 - i.$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\tilde{P}(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $P_1 = A.$ Тоді $P_1' = 0,\ P_1'' = 0.$ Підставимо ці значення в диференціальне рівняння і отримаємо $2A = 10,\ A = 5.$ Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$P(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t + 5.$$

З початкової умови $P(0) = 6$ отримаємо $6 = C_1 + 5,\ C_1 = 1.$

Тоді

$$P(t) = e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t + 5.$$

Обчислимо

$$P'(t) = e^{-t}(\cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-\sin t + C_2 \cos t) =$$

$$= e^{-t}\big((C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t\big);$$

$$P''(t) = -e^{-t}\big((C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t\big) + e^{-t}\big(-(C_2 - 1)\sin t - (C_2 + 1)\cos t\big) =$$

$$= e^{-t}(-2C_2 \cos t + 2\sin t).$$

Звідси

$$P'(0) = C_2 - 1,\ P''(0) = -2C_2.$$

Оскільки $D(P) = 2P'' - P' + 15,\ D(0) = 10,$ то для визначення C_2 отримаємо співвідношення $10 = 2(-2C_2) - (C_2 - 1) - 6 + 15.$ Звідси $C_2 = 0.$

Отже,

$$P(t) = e^{-t}\cos t + 5. \qquad \text{❍}$$

9.4. Застосування диференціальних рівнянь до задач економіки

Модель природного зростання. Нехай випуск продукції за час t описує функція $Q(t)$. Вважаємо, що справджується аксіома про ненасиченість ринку, тобто що весь випущений продукт буде продано. Припустимо, що обсяг продажу не є настільки великим, щоб вплинути на ціну товару P, яку будемо вважати сталою. Для збільшення випуску $Q(t)$ потрібно, щоб чисті інвестиції $I(t)$, тобто різниця між інвестиціями й амортизаційними затратами, були додатні. Нехай α, $0 < \alpha < 1$ – норма чистих інвестицій, тобто частка доходу $P \cdot Q(t)$, яку витрачають на чисті інвестиції. Тоді

$$I(t) = \alpha P \cdot Q(t). \qquad (9.4.1)$$

Унаслідок розширення виробництва отримають приріст доходу, частину якого використають для розширення випуску продукції. Внаслідок цього зросте швидкість випуску, яка пропорційна до розміру інвестицій, тобто

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = mI(t), \qquad (9.4.2)$$

де $\dfrac{1}{m}$ – норма акселерації. Підставимо (9.4.1) в (9.4.2) і отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = kQ(t), \qquad (9.4.3)$$

де $k = \alpha m P = \text{const}.$

Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Його розв'язок

$$Q = Ce^{kt}. \tag{9.4.4}$$

Нехай у момент часу $t = t_0$ задано обсяг продукції Q_0. У цьому випадку $C = Q_0 e^{-kt_0}$.

Отже, отримаємо *рівняння природного зростання*

$$Q(t) = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{9.4.5}$$

Зазначимо, що рівняння (9.4.5) описує динаміку зростання цін у випадку сталого темпу інфляції, процеси радіоактивного розпаду, процеси розмноження бактерій.

Приклад 9.4.1. Дослідимо, за який проміжок часу обсяг продукції подвоїться, якщо $k = 0{,}2$. На скільки відсотків треба збільшити норму інвестицій, щоб проміжок часу, потрібний для подвоєння обсягу продукції, зменшився на 25%.

• Візьмемо в рівнянні (9.4.5) $t_0 = 0$, $k = 0{,}2$, $Q = 2Q_0$, отримаємо $2Q_0 = Q_0 e^{0{,}2t}$. Звідси $t = 5\ln 2 \approx 3{,}46$. Нехай проміжок часу зменшили на 25%, тобто $t_1 = 0{,}75t$. Тоді $k_1 = \dfrac{k}{0{,}75} \approx 1{,}33k$, тобто норму інвестицій потрібно збільшити на 33%. ❍

Модель зростання випуску за умов конкуренції. Припущення про ненасиченість ринку, тобто про незмінність ціни, справджується лише для невеликих проміжків часу. Нехай з часом відбувається насичення ринку. У цьому випадку ціна є спадною функцією випуску продукції, тобто $P = P(Q)$, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} < 0$. Тоді з (9.4.1)–(9.4.4) отримаємо нелінійне диференціальне рівняння з відокремлюваними

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \beta P(Q)Q(t), \tag{9.4.6}$$

де $\beta = \alpha m$.

У рівнянні (9.4.6) усі співмножники додатні, тому $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} > 0$, і функція $Q(t)$ зростає. Характер зростання описує похідна другого порядку

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \cdot P(Q) + Q \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \right) = \beta \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \cdot P\left(1 + \frac{Q}{P} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} \right).$$

Оскільки еластичність попиту $E_P(Q) = \dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} < 0$, то

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} == \beta \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \cdot P\left(1 - \frac{1}{|E_P(Q)|} \right). \tag{9.4.7}$$

Із рівняння (9.4.7) випливає таке: у випадку еластичного попиту, тобто $|E_P(Q| > 1$, виконується умова $\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} > 0$, тому графік функції $Q(t)$ випуклий униз, тобто зростання прогресує; у випадку нееластичного попиту $|E_P(Q| < 1$ виконується умова $\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} < 0$, тому графік функції $Q(t)$ випуклий угору, тобто зростання сповільнене і відбувається насичення ринку.

Розглянемо випадок лінійної залежності

$$P(Q) = a - bQ,\ a > 0,\ b > 0. \tag{9.4.8}$$

У цьому випадку рівняння (9.4.6) має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \beta(a - bQ)Q \tag{9.4.9}$$

і

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = \beta \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(a - 2bQ). \tag{9.4.10}$$

Із (9.4.9), (9.4.10) отримаємо, що $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$ при $Q = 0$, $Q = \frac{a}{b}$ і $\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} > 0$ при $Q < \frac{a}{2b}$, а $\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} < 0$ при $Q > \frac{a}{2b}$. Точка $Q = \frac{a}{2b}$ є точкою перегину графіка функції.

Проінтегруємо диференціальне рівняння (9.4.9). Розділимо у ньому змінні:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q(a - bQ)} = \beta\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} + b\frac{\mathrm{d}Q}{a - bQ} = \beta\,\mathrm{d}t.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\ln|Q| - \ln|a - bQ| = \beta t + \ln C,$$

або

$$\frac{Q}{a - bQ} = Ce^{\beta t}.$$

Звідси

$$Q = \frac{Cae^{\beta t}}{1 + Cbe^{\beta t}}. \tag{9.4.11}$$

Функція (9.4.11) описує також деякі моделі реклами, зростання кількості населення за наявності природних обмежень. Графік цієї функції, який називають *логістичною кривою*, показано на рис. 9.4.1.

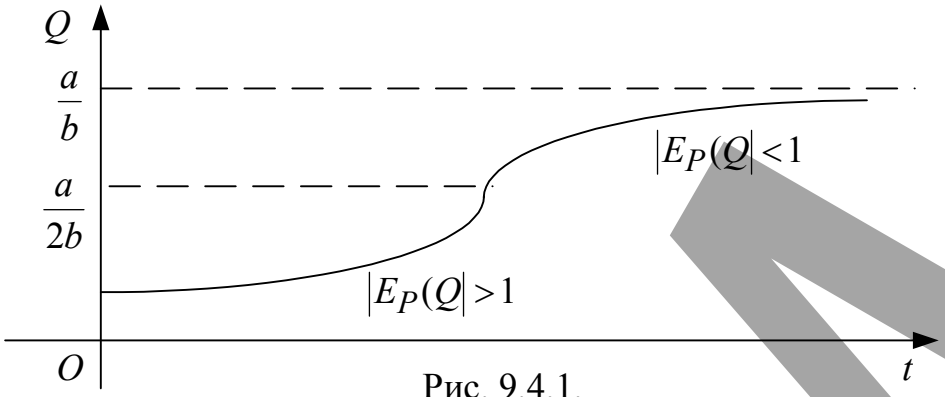


Рис. 9.4.1.

Динамічна модель Кейнса. Розглянемо найпростішу балансову модель, яка містить головні компоненти прибуткової та витратної частин економіки. Нехай $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ – відповідно, національний дохід, державні витрати, споживання та інвестиції. Усі ці величини є додатними функціями часу. Очевидно, що сума всіх витрат повинна дорівнювати національному доходу, тобто

$$Y(t) = S(t) + I(t) + E(t). \tag{9.4.12}$$

Загальне споживання складається з внутрішнього споживання деякої частини національного доходу і кінцевого споживання. Це описує таке рівняння:

$$S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \tag{9.4.13}$$

де $a(t)$, $0 < a(t) < 1$ – *коефіцієнт схильності до споживання*; $b(t)$ – *автономне*, або *кінцеве*, *споживання*.

Розмір інвестицій дорівнює добутку норми акселерації на граничний національний дохід:

$$I(t) = k(t)Y'(t), \tag{9.4.14}$$

де $k(t)$ – *норма акселерації*.

Уважаємо, що функції $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ задані. Потрібно визначити $Y(t)$. Підставимо $S(t)$ і $I(t)$ з рівнянь (9.4.13), (9.4.14) у рівняння (9.4.12). Отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} - \frac{1-a(t)}{k(t)}Y = -\frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \tag{9.4.15}$$

Його загальний розв'язок

$$Y(t) = e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \left(\int q(t) e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + C \right), \tag{9.4.16}$$

де

$$p(t) = -\frac{1-a(t)}{k(t)},\ q(t) = -\frac{b(t)+E(t)}{k(t)}.$$

Проаналізуємо розв'язки рівняння (9.4.15) у випадку, коли параметри a, b, k, E сталі. У цьому разі з (9.4.15) отримаємо рівняння

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} - \frac{1-a}{k} \cdot Y = -\frac{b+E}{k}. \qquad (9.4.17)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. За частинний розв'язок візьмемо розв'язок рівноваги, тобто розв'язок, який отримуємо при $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0$:

$$\bar{Y} = \frac{b+E}{1-a}. \qquad (9.4.18)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\tilde{Y}(t) = Ce^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (9.4.17)

$$Y(t) = Ce^{\frac{1-a}{k}t} + \frac{b+E}{1-a}. \qquad (9.4.19)$$

Нехай $Y(0) = Y_0$. Тоді $C = Y_0 - \frac{b+E}{1-a} = Y_0 - \bar{Y}$.

Отже,

$$Y(t) = (Y_0 - \bar{Y}) \cdot e^{\frac{1-a}{k}t} + \frac{b+E}{1-a}. \qquad (9.4.20)$$

Модель Солоу. В основі односекторної макроекономічної моделі (моделі Солоу) динаміку національного доходу описує блок-схема, зображена на рис 9.4.2.

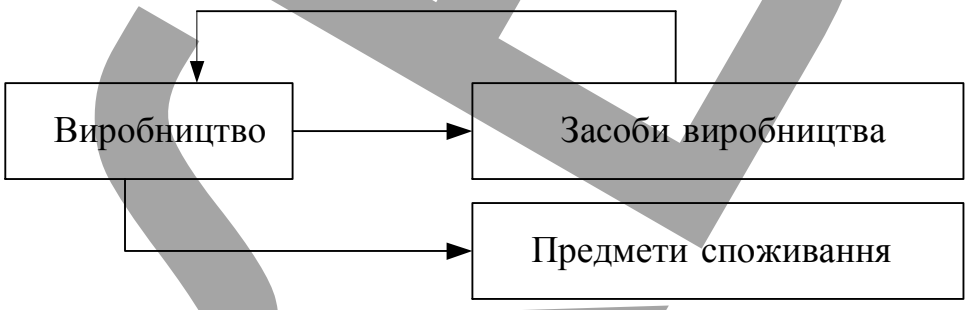


Рис. 9.4.2.

Модель Солоу відображає головну властивість економіки як динамічної системи – її самовідновлюваність. Ця властивість виражена за допомогою механізму внутрішнього зворотного зв'язку, за яким частину продукції повертають у виробничу систему у вигляді приросту основних фондів.

Сформулюємо головні гіпотези, які є в основі цієї моделі.

1. Процес виробництва описує виробнича функція Кобба–Дугласа

$$Y = Y_0\left(\frac{K}{K_0}\right)^a\left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-a}, \qquad (9.4.21)$$

де Y – національний дохід; L – кількість працівників; K – обсяг основних фондів; a, $0 < a < 1$ – коефіцієнт еластичності праці за фондонаповнюваністю, індекс 0 відповідає значенням змінних у початковий момент часу $t = 0$.

2. Національний дохід використовують на споживання C та інвестиції I:

$$Y = C + I. \qquad (9.4.22)$$

3. Інвестиції є часткою національного доходу

$$I = sY, \qquad (9.4.23)$$

де s, $0 < s < 1$ – норма інвестицій.

4. Обсяг споживання описує рівняння

$$C = (1 - s)Y. \qquad (9.4.24)$$

5. Динаміку основних фондів описує диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = W - mK, \qquad (9.4.25)$$

де m, $0 < m < 1$ – норма вибуття основних фондів; W – уведення нових фондів. Для спрощення дослідження будемо вважати, що вони дорівнюють інвестиціям, $W = I$.

6. Кількість працівників описує співвідношення

$$L = L_0 e^{gt}, \qquad (9.4.26)$$

де g – темп приросту працівників.

Рівняння (9.4.21)–(9.4.26) описують динаміку основних фондів.

Нехай $x = \frac{K}{L}$ – *фондонаповнюваність*. Зі співвідношення

$$\frac{x'}{x} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

і рівнянь (9.4.21)–(9.4.26) отримаємо

$$\frac{x'}{x} = A\left(\frac{x}{x_0}\right)^{a-1} - m - g, \qquad (9.4.27)$$

де $x_0 = \frac{K_0}{L_0}$, $A = \frac{sY_0}{K_0}$.

Уведемо безрозмірну змінну $y = \frac{x}{x_0}$. Із рівняння (9.4.27) отримаємо

$$y' - By = Ay^a, \qquad (9.4.28)$$

де $B = m + g$.

Отже, дослідження односекторної моделі економіки звели до розв'язування диференціального рівняння Бернуллі (9.4.28) з початковою умовою

$$y(0)=1. \qquad (9.4.29)$$

Розділ 10. ОСНОВИ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТА MAPLE

10.1. Головні поняття

Пакет Maple – це середовище для виконання математичних розрахунків на комп'ютері. У ньому можна виконувати аналітичні, числові та графічні перетворення. Хоча в Maple можна розв'язувати і прості задачі, однак реальні його переваги стають відчутні, коли є складні перетворення або потрібно виконати одноманітні обчислення. Пакет Maple – потужна обчислювальна система, призначена для виконання складних проектів. У ньому можна виконувати складні алгебричні перетворення і спрощення над полем дійсних та комплексних чисел, обчислювати скінченні та нескінченні суми і добутки, границі та інтеграли, розв'язувати в символьному вигляді алгебричні рівняння і системи рівнянь та нерівностей, системи диференціальних рівнянь. У Maple є пакети підпрограм для розв'язування задач аналітичної геометрії, лінійної алгебри, теорії ймовірностей і математичної статистики, задач фінансової математики і багато інших.

Коротко розглянемо роботу в пакеті Maple і його можливості. Детальніше про роботу в пакеті Maple можна прочитати в [2,4].

Після запуску системи з'являється головне вікно Maple (рис. 10.1).

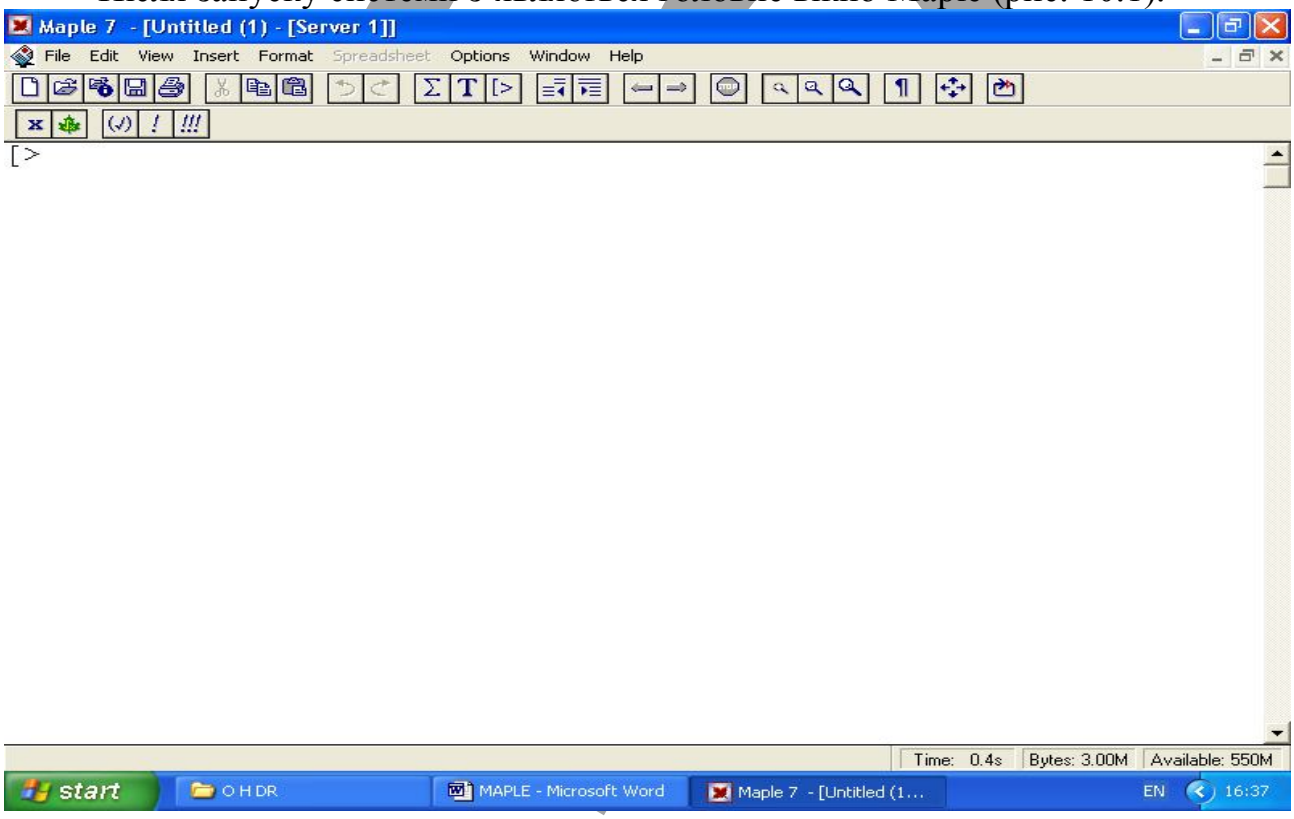


Рис.10.1.1.

У цьому вікні є рядок команд, позначений >. У рядок команд можна записати будь-який вираз. Якщо в кінці виразу поставити знак “;”, то після натискання на клавішу Enter програма виконає дії і виведе результат на екран:

```
> 3*5-2*x+x^3*cos(z-Pi);
```

$$15 - 2x - x^3\cos(z)$$

Якщо в кінці виразу записати знак “:”, то після натискання на клавішу Enter програма виконає дії і не виведе результату на екран.

Вирази в Maple. Найважливішою структурою Maple є *вирази*, складені зі сталих і невідомих величин, пов’язаних арифметичними операторами. Арифметичними операторами в Maple є:

+ (додавання), - (віднімання), * (множення), / (ділення), ^ (піднесення до степеня), ! (знаходження факторіала), abs() (обчислення модуля), iquo(,) (виділення частки від ділення), irem(,) (знаходження залишку від ділення).

Наприклад:

```
> 3*5-2*x+x^3*cos(z-Pi);
```

$$15 - 2x - x^3\cos(z)$$

```
> 2*x^3-3*x+4;
```

$$2x^3 - 3x + 4$$

```
> x^2/9+y^2/4=1;
```

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$$

```
> abs(-3);
```

$$3$$

```
> iquo(7,3);
```

$$2$$

```
> irem(7,3);
```

$$1$$

Послідовність виконання дій відповідає математичним правилам. Для зміни послідовності виконання операцій використовують круглі дужки.

```
> 5+2*6-3;
```

$$14$$

```
> (5+2)*6-3;
```

$$39$$

```
> (5+2)*(6-3);
```

$$21$$

Послідовності, множини та списки. Послідовність можна задати перерахунком її елементів. Наприклад,

```
> 2,5,8,11;
```

$$2, 5, 8, 11$$

Зазначимо, що в Maple є два способи автоматичного генерування послідовностей. Перший – за допомогою оператора $, який використовують для за-

дання кількох примірників одного виразу або в поєднанні з оператором повторюваності .., для задання послідовності за певним законом. Наприклад,

```
> b$5;
```

$$b, b, b, b, b$$

```
> $3..8;
```

$$3, 4, 5, 6, 7, 8$$

```
> n^3$n=1..5;
```

$$1, 8, 27, 64, 125$$

Другий спосіб – це процедура seq, яка має більші можливості для задання елементів послідовності:

```
> seq(n!/n^3,n=3..10);
```

$$\frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \frac{24}{25}, \frac{10}{3}, \frac{720}{49}, \frac{315}{4}, \frac{4480}{9}, \frac{18144}{5}$$

Множини в Maple – це невпорядкована сукупність виразів. Елементом множини може бути будь-який допустимий у Maple вираз. Множини задають переліком сукупності виразів у фігурних дужках {}. Зазначимо, що у множині один і той же елемент не може повторюватись декілька разів, тому Maple замість декількох однакових елементів записує тільки один:

```
> {3,3,2,5,3};
```

$$\{2, 3, 5\}$$

Порядок, у якому записані елементи множини, несуттєвий. Maple записує їх у певному внутрішньому порядку. Надалі ці елементи будуть використані саме у цьому порядку:

```
> {a,b,c};
```

$$\{a, b, c\}$$

```
> {b,a,c};
```

$$\{a, b, c\}$$

```
> {c,a,b};
```

$$\{a, b, c\}$$

Є три головні типи операторів для роботи з множинами: “union” – оператор об’єднання множин, ”intersect” – оператор перерізу множин, “minus” – оператор різниці множин. Наприклад,

```
> {a,b,c,d}union{c,d,e,f};
```

$$\{f, a, b, e, c, d\}$$

```
> {2,3,4,5,6,7}intersect{2,5,8,9};
```

$$\{2, 5\}$$

```
> {a,b,c,d}minus{a,d};
```

$$\{b, c\}$$

Списки в Maple – це упорядковані сукупності елементів, записані у квадратних дужках []. До списків не можна застосовувати операції перерізу, об’єднання чи різниці. Зазначимо, що список може містити однакові елементи:

```
> [2,5,3,6,3,2];
```

$$[2, 5, 3, 6, 3, 2]$$

```
> [a,b,c,c,b,a];
```

$$[a, b, c, c, b, a]$$

```
> [{a,b,c},{b,a,c},{1,2,3,4}];
```

$$[\{a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{1, 2, 3, 4\}]$$

Створені об'єкти Maple тимчасові, доки ми не присвоїмо їхні значення певній змінній. Наприклад, якщо створено список, і не присвоєно його якійсь змінній, то потім кожного разу, коли він буде потрібний, його треба створювати знову. Щоб уникнути цього, використовують оператор присвоєння ":=". Крім знака присвоєння, використовують знак "=", який відображає відношення між певними змінними і не впливає на визначення їхніх значень. Наприклад,

```
> y=x-6;
```

$$y = x - 6$$

```
> x;
```

$$x$$

```
> y;
```

$$y$$

```
>
```

Як бачимо, змінні *x* та *y* залишилися невизначеними.

***Команди в* Maple.** Такі об'єкти Maple, як вирази, списки, множини, використовують як параметри функцій (команд) пакета. Пакет Maple містить близько 3000 стандартних функцій. Часто використовувані стандартні функції становлять головну бібліотеку Maple, а функції, які застосовують у вужчих розділах математики, наприклад, геометрія, теорія чисел, статистика, або виконують сервісні функції, наприклад, побудова графіків, об'єднані в тематичні пакети. Під час виклику пакета використовують команду with. Наприклад, пакет геометрія викликають так:

```
> with(geometry);
```

$$[Apollonius, Appolonius, AreCollinear, AreConcurrent, AreConcyclic, AreConjugate, AreHarmonic, AreOrthogonal, AreParallel, ArePerpendicular, AreSimilar, AreTangent, CircleOfSimilitude, CrossProduct, CrossRatio, DefinedAs, Equation, EulerCircle, EulerLine, ExteriorAngle, ExternalBisector, FindAngle, GergonnePoint, GlideReflection, HorizontalCoord, HorizontalName, InteriorAngle, IsEquilateral, IsOnCircle, IsOnLine, IsRightTriangle, MajorAxis, MakeSquare, MinorAxis, NagelPoint, OnSegment, ParallelLine, PedalTriangle, PerpenBisector, PerpendicularLine, Polar, Pole, RadicalAxis, RadicalCenter, RegularPolygon, RegularStarPolygon, SensedMagnitude, SimsonLine, SpiralRotation, StretchReflection, StretchRotation, TangentLine, VerticalCoord, VerticalName, altitude, apothem, area, asymptotes, bisector, center, centroid, circle, circumcircle, conic, convexhull, coordinates, detail, diagonal, diameter, dilatation, directrix,$$

distance, *draw*, *dsegment*, *ellipse*, *excircle*, *expansion*, *foci*, *focus*, *form*, *homology*, *homothety*, *hyperbola*, *incircle*, *inradius*, *intersection*, *inversion*, *line*, *medial*, *median*, *method*, *midpoint*, *orthocenter*, *parabola*, *perimeter*, *point*, *powerpc*, *projection*, *radius*, *randpoint*, *reciprocation*, *reflection*, *rotation*, *segment*, *sides*, *similitude*, *slope*, *square*, *stretch*, *tangentpc*, *translation*, *triangle*, *vertex*, *vertices*]

Після виклику пакета Maple видає перелік усіх його функцій.

Більшість команд Maple викликають так:

ім'я _команди(параметр1, параметр2, ...)

Імена багатьох команд означають функцію, наприклад, intpart – команда для інтегрування частинами, changevar – заміна змінних.

Кожна команда Maple має послідовність вхідних параметрів, які записують у круглих дужках (). Ними можуть бути числа, вирази, множини або списки.

10.2. Застосування команд Maple до розв'язування задач

Розв'язування рівнянь і нерівностей. Для аналітичного розв'язування рівнянь і нерівностей використовують команду solve(eqns,vars), де eqns – рівняння, нерівність або система рівнянь чи нерівностей; vars – невідома, чи множина невідомих у фігурних дужках.

Приклад 10.2.1. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} ax + by = 3; \\ cx - dy = 2. \end{cases}$

```
> solve({a*x+b*y=3,c*x-d*y=2},{x,y});
```

$$\{y = -\frac{2a - 3c}{ad + cb}, x = \frac{2b + 3d}{ad + cb}\}$$

Приклад 10.2.2. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 5; \\ 4x - 5y = -1. \end{cases}$

```
> solve({2*x+3*y=5,4*x-5*y=-1},{x,y});
```

$$\{y = 1, x = 1\}$$

Приклад 10.2.3. Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23.$

```
> solve((x^2+1)/(x-4)-(x^2-1)/(x+3)=23,x);
```

$$\frac{-55}{16}, 5$$

або

```
> s:=solve((x^2+1)/(x-4)-(x^2-1)/(x+3)=23,{x});
```

$$s := \{x = \frac{-55}{16}\}, \{x = 5\}$$

Приклад 10.2.4. Розв'яжемо рівняння $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}.$

```
> s:=solve(sqrt(x+1)-sqrt(9-x)=sqrt(2*x-12),{x});
```

$$s := \{x = 8\}, \{x = 7\}$$

Приклад 10.2.5. Розв'яжемо рівняння $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$.

```
> s:=solve(log[1-x](3)-log[1-x](2)-0.5=0,{x});
```

$$s := \{x = -1.250000000\}$$

Приклад 10.2.6. Розв'яжемо рівняння $10^{2/x} + 25^{1/x} = 4{,}25 \cdot 50^{1/x}$.

```
> s:solve(10^(2/x)+25^(1/x)=4.25*50^(1/x),{x});
```

$$\{x = -.5000000000\}$$

Векторна алгебра та аналітична геометрія.

Приклад 10.2.7. Знайдемо скалярний і векторний добутки векторів $V = (2,4,7)$ та $U = (1,2,3)$.

```
> with(LinearAlgebra):
> V:=Vector(3,[2,4,7]);
```

$$V := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
> U:=Vector(3,[1,2,3]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> DotProduct(V,U);
```

$$31$$

```
> CrossProduct(V,U);
```

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приклад 10.2.8. Напишемо рівняння прямої, яка проходить через точку $P(3;5)$ паралельно до прямої $2x - 3y = 7$.

```
> with(geometry):
> Point(P,3,5),line(l,2*x-3*y=7,[x,y]);
```

$$\text{Point}(P, 3, 5), l$$

```
> ParallelLine(lp,P,l);
```

$$lp$$

```
> detail(lp);
name of the object:  lp\
    form of the object:  line2d
    equation of the line:  5+2*x-3*y = (
```

Приклад 10.2.9. Напишемо рівняння прямої, яка проходить через точку $P(2;3)$ перпендикулярно до прямої $4x - 3y = 8$.

```
> with(geometry):
> Point(P,2,3),line(l,4*x-3*y=8,[x,y]);
```

Point(P, 2, 3), l

```
> PerpendicularLine(lp,P,l);
```

lp

```
> detail(lp);
```

name of the object: lp

form of the object: line2d

*equation of the line: 18-3*x-4*y = (*

Лінійна алгебра.

Приклад 10.2.10. Задано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ та

$B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Обчислимо: 1) $A+B$; 2) $A\cdot B$; 3) $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{rang} B$; 4) A^T; 5) $\det A$, $\det B$; 6) обернену матрицю A^{-1}.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix(4,4,[[1,2,3,4],[-1,3,6,-7],[2,-3,5,8],[1,-5,6,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=Matrix(4,4,[[-1,9,4,4],[1,-3,6,7],[2,3,-5,8],[1,4,-6,2]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 9 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Add(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> C:=Maltiply(A,B);
```

$$C := \text{Maltiply}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 9 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

```
> Rank(A);
```

$$4$$

```
> Rank(B);
```

$$4$$

```
> Transpose(A);
```

$$\text{Nranspose}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

```
> Determinant(A);
```

$$-32$$

```
> Determinant(B);
```

$$-229$$

```
> MatrixInverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{367}{32} & \frac{-75}{16} & \frac{-387}{32} & \frac{289}{32} \\ \frac{13}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{-9}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{-27}{32} & \frac{7}{16} & \frac{31}{32} & \frac{-21}{32} \\ \frac{-35}{16} & \frac{7}{8} & \frac{39}{16} & \frac{-29}{16} \end{bmatrix}$$

Обчислення границь.

Приклад 10.2.11. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.

```
> limit(sin(3*x)/x,x=0);
```

$$3$$

Приклад 10.2.12. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

```
> limit(x/(sqrt(1+3*x)-1),x=0);
```

$$\frac{2}{3}$$

Приклад 10.2.13. Обчислимо $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

```
> limit((3*x+6)/(x^3+8),x=-2);
```

$$\frac{1}{4}$$

Приклад 10.2.14. Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

```
> limit(sqrt(x^2+3*x)-x,x=infinity);
```

$$\frac{3}{2}$$

Обчислення похідних функцій однієї і багатьох змінних. Знаходження екстремумів функцій.

Приклад 10.2.15. Обчислимо похідну функції $y=ax^n$.

```
> Diff(a*x^n,x)=diff(a*x^n,x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\, a\, x^n = \frac{a\, x^n\, n}{x}$$

Приклад 10.2.16. Обчислимо похідну функції $y=x^2\sin 2x$.

```
> diff(x^2*sin(2*x),x);
```

$$2\,x\sin(2\,x)+2\,x^2\cos(2\,x)$$

Приклад 10.2.17. Для функції $u=x^4\sin(x^2-y^3)$ обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^3}$.

```
> Diff(x^4*sin(x^2-y^3),x)=diff(x^4*sin(x^2-y^3),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\, x^4\sin(x^2-y^3) = 4\,x^3\sin(x^2-y^3)+2\,x^5\cos(x^2-y^3)$$

```
> Diff(x^4*sin(x^2-y^3),y)=diff(x^4*sin(x^2-y^3),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\, x^4\sin(x^2-y^3) = -3\,x^4\cos(x^2-y^3)\,y^2$$

```
> Diff(x^4*sin(x^2-y^3),x$2)=diff(x^4*sin(x^2-y^3),x$2);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, x^4\sin(x^2-y^3) = 12\,x^2\sin(x^2-y^3)+18\,x^4\cos(x^2-y^3)-4\,x^6\sin(x^2-y^3)$$

```
> Diff(x^4*sin(x^2-y^3),x,y)=diff(x^4*sin(x^2-y^3),x,y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\, x^4\sin(x^2-y^3) = -12\,x^3\cos(x^2-y^3)\,y^2+6\,x^5\sin(x^2-y^3)\,y^2$$

```
> Diff(x^4*sin(x^2-y^3),x$2,y$3)=diff(x^4*sin(x^2-y^3),x$2,y$3);
```

$$\frac{\partial^5}{\partial y^3\,\partial x^2}\, x^4\sin(x^2-y^3) = 324\,x^2\cos(x^2-y^3)\,y^6-648\,x^2\sin(x^2-y^3)\,y^3$$
$$-72\,x^2\cos(x^2-y^3)-486\,x^4\sin(x^2-y^3)\,y^6-972\,x^4\cos(x^2-y^3)\,y^3$$
$$+108\,x^4\sin(x^2-y^3)-108\,x^6\cos(x^2-y^3)\,y^6+216\,x^6\sin(x^2-y^3)\,y^3$$
$$+24\,x^6\cos(x^2-y^3)$$

Приклад 10.2.18. Знайдемо екстремуми функцій:

$$1)\ y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x};\quad 2)\ y=xe^{-x/2}.$$

- 1) > `extrema(x/2+2/x,{},x,'z');z;`

$$\{-2,\ 2\}$$

$$\{\{x=2\},\ \{x=-2\}\}$$

2) > `extrema(x*exp(-x/2),{},x,'z');z;`

$$\{2\,e^{(-1)}\}$$

$$\{\{x=2\}\}$$

Приклад 10.2.19. Знайдемо екстремум функції

$$z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20.$$

- > `extrema(x^2-x*y+y^2+9*x-6*y+20,{},{x,y},'z');z;`

$$\{-1\}$$

$$\{\{y=1,\ x=-4\}\}$$

Приклад 10.2.20. Знайдемо екстремум функції $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, якщо

$$x+y=2.$$

- > `extrema(1/x+1/y,{x+y=2},{x,y},'z');z;`

$$\{2\}$$

$$\{\{x=1,\ y=1\}\}$$

Обчислення інтегралів.

Приклад 10.2.21. Обчислимо $\int xe^{-x^2}\,dx$.

- > `Int(x*exp(-x^2),x)=int(x*exp(-x^2),x);`

$$\int x\,e^{(-x^2)}\,dx=-\frac{1}{2}\,e^{(-x^2)}$$

Приклад 10.2.22. Обчислимо $\int x^2\sin x\,dx$.

- > `Int(x^2*sin(x),x)=int(x^2*sin(x),x);`

$$\int x^2\sin(x)\,dx=-x^2\cos(x)+2\cos(x)+2\,x\sin(x)$$

Приклад 10.2.23. Обчислимо $\int\frac{1}{x^3+8}\,dx$.

- > `Int(1/(x^3+8),x)=int(1/(x^3+8),x);`

$$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{12}\ln(x+2) - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{12}\sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{1}{6}(2x-2)\sqrt{3}\right)$$

Приклад 10.2.24. Обчислимо $\int_0^4 (x^3+2x-4)\,dx$.

```
> Int(x^3+2*x-4,x=0..4)=int(x^3+2*x-4,x=0..4);
```

$$\int_0^4 x^3 + 2x - 4\,dx = 64$$

Приклад 10.2.25. Обчислимо $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

```
> Int(x*exp(-x),x=0..infinity)=int(x*exp(-x),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty x\,e^{(-x)}\,dx = 1$$

Розв'язування диференціальних рівнянь.

Приклад 10.2.26. Розв'яжемо диференціальне рівняння $y' - \frac{3y}{x} = x$.

```
> dsolve(diff(y(x),x)-3*y(x)/x=x,y(x));
```

$$y(x) = \left(-\frac{1}{x} + \_C1\right)x^3$$

Приклад 10.2.27. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 1.$$

```
> dsolve(x^2+y(x)^2-2*x*y(x)*diff(y(x),x)=0);
```

$$y(x) = \sqrt{x^2 + x\,\_C1}\,,\ y(x) = -\sqrt{x^2 + x\,\_C1}$$

Приклад 10.2.28. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$x^3y'' + x^2y' = 1.$$

```
> dsolve(x^3*diff(y(x),x$2)+x^2*diff(y(x),x)=1);
```

$$y(x) = \frac{1}{x} + \_C1\,\ln(x) + \_C2$$

Приклад 10.2.29. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

```
> dsolve(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)+2*y(x)=exp(x));
```

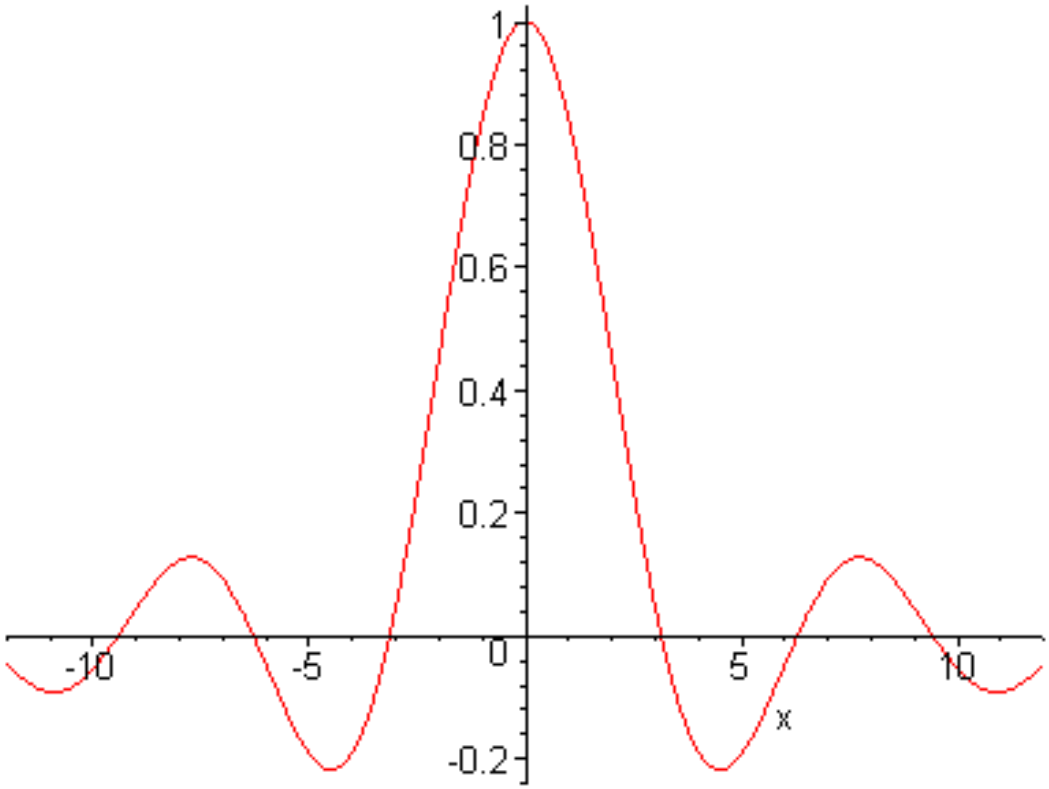
$$y(x) = (-x + e^x\,\_C1 + \_C2)\,e^x$$

ЄДИНА

Побудова графіків функцій.

Приклад 10.2.30. Побудуємо графік функції $y = \frac{\sin x}{x}$.

```
> plot(sin(x)/x,x=-8..8);
```

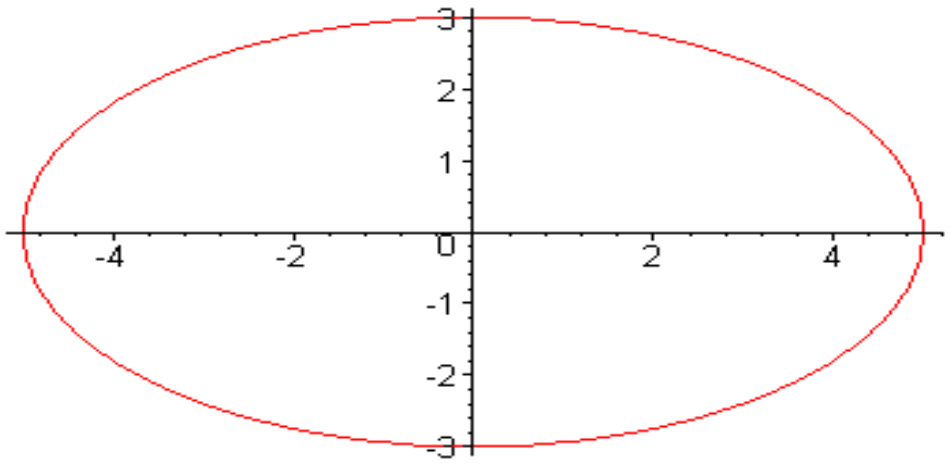


>

Приклад 10.2.31. Побудуємо графік функції, заданої параметрично

$$x = 5\cos t, \quad y = 3\sin t.$$

- `> plot([5*cos(t),3*sin(t),t=0..2*Pi]);`



Список літератури

1. *Барковський В.В, Барковська Н.В*. Математика для економістів. Вища математика. К., 1997.
2. *Гірник М.О*., *Костенко А.В.*, *Лучко М.В.*, *Плеша М.І.* Maple 7. Основи практичного застосування. Львів, 2002.
3. *Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О*. та ін. Збірник задач з вищої математики. К., 1967.
4. *Дьяконов В.П*. Математическая система Maple V R3/R4/R5. М., 1998.
5. *Красс М.С*. Математика для экономических специальностей. М., 1988.
6. *Кремер Н.Ш*. Высшая математика для экономистов. М., 1998.
7. *Лісевич Л.М*., *Бабенко В.В.*, *Бокало М.М.*, *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз у задачах і вправах: Вступ в аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної. К., 1993.
8. *Лісевич Л.М*., *Бабенко В.В.*, *Бокало М.М.*, *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз у задачах і вправах: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Числові та функціональні ряди. К., 1993.
9. *Лісевич Л.М*., *Бабенко В.В.*, *Бокало М.М.*, *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз у задачах і вправах: Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2001.
10. *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. М., 1988.
11. *Тихонов А.Н.*, *Васильева А.Б.*, *Свєшников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М., 1985.
12. *Тріщ Б.М.* Аналітична геометрія і лінійна алгебра. Курс лекцій. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
13. *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз. Ч. 1: Вступ у математичний аналіз. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
14. *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз. Ч. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
15. *Тріщ Б.М.* Математичний аналіз. Ч. 3. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
16. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. СПб., 2001.
17. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз. К.,1994.

Додатки

Додаток 1

Порядкові номери днів року

День	Місяць											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337

4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Додаток 2

Відсотки рахунків накопичення

$$s_{n/i} = \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c}$$ та ренти $$a_{n/i} = \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c}$$

	$i_c = 0{,}5\% = 0{,}005$			$i_c = 1\% = 0{,}01$	
n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$	n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$
1	0,99502	1,0	1	0,99009	1,0
2	1,98509	2,005	2	1,97039	2,01
3	2,97024	3,01503	3	2,94099	3,0301
4	3,95049	4,0301	4	3,90197	4,0604
5	4,92586	5,05025	5	4,85343	5,10105
6	5,89638	6,07551	6	5,79548	6,15202
7	6,86207	7,10588	7	6,72819	7,21335

8	7,82296	8,14141	8	7,65168	8,28567
9	8,77906	9,18212	9	8,56602	9,36853
10	9,73041	10,22803	10	9,47131	10,46221
11	10,67703	11,29917	11	10,36763	11,56684
12	11,06199	12,33557	12	11,25508	12,68251
13	12,55615	13,33972	13	12,13374	13,80933
14	13,48871	14,46423	14	13,00371	14,94742
15	14,41663	15,53655	15	13,86505	16,09689
16	15,33993	16,61423	16	14,71787	17,25786
17	16,25863	17,69731	17	15,56225	18,43044
18	17,17277	18,78579	18	16,39827	19,61475
19	18,08234	19,87972	19	17,22601	20,81089
20	18,98742	20,97911	20	18,04555	22,019
21	19,88798	22,08401	21	18,86698	23,23919
22	20,78406	23,19443	22	19,66038	24,47159
23	21,67568	24,31041	23	20,45582	25,7163
24	22,56286	25,43196	24	21,24339	26,97341

	$i_c = 2\% = 0{,}02$			$i_c = 3\% = 0{,}03$	
n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$	n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$
1	0,98039	1,0	1	0,97087	1,0
2	1,94156	2,02	2	1,91347	2,03
3	2,88388	3,0604	3	2,82861	3,0909
4	3,38077	4,12161	4	3,71709	4,18363
5	4,7134	5,20404	5	4,57971	5,30914
6	5,60143	6,30812	6	5,41719	6,46841
7	6,47199	7,43428	7	6,23028	7,66246
8	7,32548	8,58297	8	7,01969	8,89224
9	8,16223	9,75463	9	7,78611	10,15911
10	8,98258	10,94972	10	8,5302	11,46388
11	9,78685	12,16872	11	9,25262	12,80779
12	10,57534	13,41209	12	9,954	14,19203
13	11,34837	14,68033	13	10,63496	15,61779
14	12,10625	15,97394	14	11,29607	17,08632
15	12,84926	17,29342	15	11,93793	18,59891
16	13,35777	18,63928	16	12,5611	20,15688
17	14,29187	20,01207	17	13,11611	21,76159
18	14,99203	21,41231	18	13,75351	23,41443
19	15,67846	22,84056	19	14,32379	25,11687
20	16,35143	24,29737	20	14,87747	26,87037
21	17,01121	25,78332	21	15,41502	28,68649
22	17,65805	27,29898	22	15,93692	30,53678
23	18,29221	28,84496	23	16,44361	32,45288

24	18,91393	30,42185	24	16,93554	34,42647

	$i_c = 5\% = 0{,}05$			$i_c = 8\% = 0{,}08$	
n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$	n	$a_{n/i}$	$s_{n/i}$
1	0,95238	1,0	1	0,92593	1,0
2	1,85941	2,05	2	1,78327	2,08
3	2,72325	3,1525	3	2,57708	3,2464
4	3,54595	4,31013	4	3,31213	4,50611
5	4,32948	5,52563	5	3,99271	5,86661
6	5,07569	6,80191	6	4,62288	7,33593
7	5,76637	8,14201	7	5,20637	8,92281
8	6,46321	9,54911	8	5,74664	10,63663
9	7,10782	11,02656	9	6,24689	12,48756
10	7,72174	12,57789	10	6,71008	14,48656
11	8,30641	14,20679	11	7,13896	16,64549
12	8,86325	15,91713	12	7,53608	18,97713
13	9,39357	17,71298	13	7,90378	21,49539
14	9,89864	19,59863	14	8,24424	24,21492
15	10,37966	21,57856	15	8,55948	27,15211
16	10,83777	23,65749	16	8,53137	30,32428
17	11,24407	25,84037	17	9,12164	33,75023
18	11,68956	28,13239	18	9,37189	37,45024
19	12,08532	30,53911	19	9,60359	41,44626
20	12,46221	33,06596	20	9,81815	45,76196
21	12,82115	35,71925	21	10,01681	50,42292
22	13,16301	38,50521	22	10,20074	55,45676
23	13,48857	41,43048	23	10,37106	60,89329
24	13,79864	44,50199	24	10,52876	66,76476

Зміст

Передмова…….. 3
Розділ 1. Елементи математичної логіки. Числові множини..... 4
1.1. Елементи математичної логіки……. 4
1.2. Множини і дії над ними……..... 7
1.2.1. Поняття множини. Алгебра множин..... 7
1.2.2. Множина дійсних чисел..…… 9
1.2.3. Множина комплексних чисел..... 16
Розділ 2. Основи лінійної алгебри..... 22
2.1. Матриці і визначники……. 22
2.1.1. Матриці і дії над ними……. 22
2.1.2. Визначники, їхні властивості і основні способи обчислення…… 25
2.1.3. Обернена матриця. 30
2.1.4. Ранг матриці…… 32
2.2. Системи лінійних рівнянь…….. 35
2.2.1. Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими..... 36
2.2.2. Системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими..... 38
2.2.3. Системи лінійних однорідних рівнянь..... 41
2.3. Векторні простори..... 42
2.4. Власні значення і власні вектори матриці..... 51
2.5. Квадратичні форми..... 57
Розділ 3. Аналітична геометрія..... 63
3.1. Елементи векторної алгебри..... 63
3.2. Лінії на площині..... 75
3.2.1. Рівняння лінії на площині…… 75
3.2.2. Пряма на площині…… 76
3.2.3. Криві другого порядку…… 83
3.3. Лінії і поверхні у просторі……. 92
3.3.1. Поняття поверхні та лінії…… 92
3.3.2. Площина і пряма у просторі…… 93
3.3.3. Алгебричні поверхні другого порядку…… 106
Розділ 4. Функції однієї змінної. Границя. Неперервність……. 110
4.1. Функції однієї змінної та їхні властивості…….. 110
4.1.1. Поняття функції однієї змінної. Властивості функцій…… 110
4.1.2. Деякі класи функцій…… 115
4.1.3. Функції, які використовують в економіці..... 124
4.2. Числові послідовності та їхні границі……. 128
4.2.1. Поняття числової послідовності та її властивості…. 128
4.2.2. Границя числової послідовності…… 131
4.2.3. Математичні основи фінансового аналізу..... 141
4.3. Границя функції. Неперервність……. 146
4.3.1. Границя функції неперервного аргументу…… 146

KPI

4.3.2. Неперервність функції в точці…… 155
4.3.3. Головні властивості неперервних функцій..... 160
Розділ 5. Диференціальне числення функцій однієї змінної..... 164
5.1. Похідні і диференціали першого порядку……..... 164
5.1.1. Означення похідної..... 164
5.1.2. Похідні деяких елементарних функцій..... 169
5.1.3. Правила обчислення похідних..... 172
5.1.4. Диференційованість функції. Диференціал..... 174
5.2. Похідні і диференціали вищих порядків…….... 178
5.2.1. Похідні вищих порядків..... 178
5.2.2. Диференціали вищих порядків..... 180
5.3. Головні теореми диференціального числення..... 182
5.3.1. Теореми про середнє значення..... 182
5.3.2. Формула Тейлора..... 187
5.4. Застосування диференціального числення до дослідження функцій..... 194
5.5. Застосування диференціального числення функцій однієї змінної до задач економіки..... 206
5.5.1. Елементи граничного аналізу в економіці…… 206
5.5.2. Еластичність та її застосування в економічному аналізі..... 208
Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної..... 215
6.1. Невизначений інтеграл..... 215
6.1.1. Первісна і невизначений інтеграл..... 215
6.1.2. Головні властивості невизначеного інтеграла..... 217
6.1.3. Табличні інтеграли..... 217
6.1.4. Головні методи інтегрування..... 219
6.1.5. Інтегрування раціональних функцій……. 221
6.1.6. Інтегрування ірраціональних функцій..... 224
6.1.7. Інтегрування тригонометричних функцій..... 225
6.2. Визначений інтеграл..... 227
6.2.1. Означення і умови існування визначеного інтеграла. 227
6.2.2. Головні властивості інтегрованих функцій..... 230
6.2.3. Головна формула інтегрального числення..... 233
6.2.4. Головні правила інтегрування 236
6.2.5. Геометричні застосування визначеного інтеграла..... 237
6.2.6. Застосування визначених інтегралів до задач економіки..... 239
6.3. Невластиві інтеграли..... 242
6.3.1. Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування..... 242
6.3.2. Невластиві інтеграли від необмежених функцій..... 246
Розділ 7. Функції багатьох змінних..... 252
7.1. Похідні і диференціали першого порядку……..... 252
7.1.1. Поняття евклідового простору та функції багатьох

змінних 252
7.1.2. Границя функції багатьох змінних..... 259
7.1.3. Неперервність функцій багатьох змінних..... 264
7.2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних..... 268
7.2.1. Похідні і диференціали першого порядку..... 268
7.2.2. Похідні і диференціали вищих порядків..... 278
7.2.3. Локальний екстремум функцій багатьох змінних..... 284
7.2.4. Метод найменших квадратів..... 289
7.3.Умовний екстремум функції багатьох змінних..... 292
7.3.1.Неявні функції і дії над ними..... 292
7.3.2. Умовний екстремум..... 293
7.4. Застосування функцій багатьох змінних до задач економіки..... 297
7.5. Інтегрування функцій багатьох змінних..... 301
7.5.1. Поняття подвійного інтеграла та його властивості... 301
7.5.2. Обчислення подвійних інтегралів..... 305
7.5.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі..... 309
7.5.4. Деякі геометричні застосування подвійних інтегралів..... 312
Розділ 8. Числові та степеневі ряди..... 314
8.1. Числові ряди..... 314
8.1.1. Поняття числового ряду. Головні властивості..... 314
8.1.2. Числові ряди з невід'ємними елементами..... 317
8.1.3. Збіжність довільних числових рядів..... 320
8.2. Степеневі ряди..... 322
Розділ 9. Диференціальні рівняння..... 330
9.1. Диференціальні рівняння першого порядку..... 331
9.1.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь першого порядку..... 331
9.1.2. Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних щодо похідної. 333
9.2. Диференціальні рівняння вищих порядків..... 344
9.2.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь вищих порядків..... 344
9.2.2. Випадки інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків, не розв'язаних щодо старшої похідної..... 346
9.3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку..... 350
9.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння..... 350
9.3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння..... 353
9.3.3. Диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами..... 356
9.4. Застосування диференціальних рівнянь до задач економіки..... 365
Розділ 10. Основи практичного застосування пакета Maple..... 371

10.1. Головні поняття..... 371
10.2. Застосування команд Maple до розв’язування задач..... 376
Список літератури..... 384

КВМ