

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г.М. Барабаш, В.М. Кирилич, О.В. Пелюшкевич

З Б І Р Н И К - Д О В І Д Н И К
з курсу "Вища математика для економістів"

Львів 2019

УДК 51 (075.8)

Б 24

Рецензенти:

д - р фіз. - мат. наук, проф. *Король І.І.*

(Ужгородський національний університет);

д - р фіз. - мат. наук, проф. *Самойленко В.Г.*

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

д - р фіз. - мат. наук, проф. *Пукальський І.Д.*

(Чернівецький національний університет імені Юрія
Федьковича).

Рекомендовано

Вченою Радою Львівського національного університету

імені Івана Франка

(Протокол № 67/4 від 24 квітня 2019 року)

Барабаш Г.М., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В.

Б 24 Збірник - довідник з курсу "Вища математика для економістів".

/Г.М. Барабаш, В.М. Кирилич, О.В. Пелюшкевич. –

Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2019 – 257 с.

Подано задачі з вищої математики та відповідні задачі економічного змісту з основним теоретичним матеріалом і детальним розв'язуванням прикладів. Запропоновано завдання для аудиторних і домашніх робіт, наведено зразки контрольних та екзаменаційних завдань.

Для студентів економічних спеціальностей.

© Львівський національний університет імені Івана Франка,
2019

© Барабаш Г.М., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В., 2019

Вступ

Напевно ніхто не може заперечити, що економіка породила математику, адже обмін результатами своєї праці між людьми привів до "числа", а далі розвивались геометрія, механіка, фізика тощо.

Звичайно, що серйозне використання математичних методів в економіці почалось в XX сторіччі, хоча перші впровадження почалися у XVII-XVIII ст.

Першим природним станом було широке впровадження в економіку статистичних методів, що було зручним інструментом для практичних бухгалтерських розрахунків, далі використання математичного апарату лінійного програмування (формалізація через мінімум та максимум критеріїв якості, тобто оптимальності даних економічних показників). Однак певна обмеженість статистичних моделей у міжгалузевому балансі змусила економістів перейти та впровадити серйозні економіко-математичні дослідження, зокрема динамічних моделей заснованих на диференціальних рівняннях або їхніх дискретних моделях.

Очевидно, що за цими математичними термінами стоїть серйозна наука, яка розпочинається з вищої математики, основи якої подано у цьому збірнику.

Насправді немає окремої математики для економіки, фізики, біології тощо, є застосування математичних методів у цих та інших науках. Під математикою для економістів ми розуміємо наведення для кожного розділу вищої математики конкретних прикладів із економіки, де використано вивчений матеріал для конкретних економічних моделей, з детальним аналізом можли-

вих результатів.

Наприклад, вивчаючи основи лінійної алгебри, у збірнику проаналізовано балансовий аналіз (модель Леонтьєва), модель рівноважних цін і міжнародної торгівлі, а у векторній алгебрі наведено приклади простору товарів, вектору цін тощо. Бюджетні множини та лінії бюджетного обмеження проаналізовано для вивчення елементів аналітичної геометрії, а вивчаючи множини та послідовності, наведено приклади нарахування простих і складних відсотків. Найбільше застосувань в економіці має диференціальне й інтегральне числення функцій з однією та багатьма змінними. Тому для цих підрозділів вищої математики проаналізовано багато економічних моделей і понять, зокрема, еластичність, оптимальність, гранична корисність, норма заміщення, теорія споживання, задачі про рух коштів і нагромадження капіталу, динамічні та неокласичні моделі тощо.

Збірник укладено так, щоб об'єднати теоретичний матеріал із практичним. Тому перед кожною темою, яку потрібно розглянути на практиці, наведено основний теоретичний матеріал, розв'язано низку типових прикладів. Завдання структуровані для аудиторної та домашньої роботи, наведено варіанти модульних, залікових та екзаменаційних завдань.

У кінці збірника-довідника подано список літературних джерел, де можна знайти детальний аналіз основного матеріалу з вищої математики.

Зрозуміло, що основні економічні дослідження проводять з використанням сучасних ІТ-технологій, засвоїти які неможливо без досконалого володіння методами та засобами вищої математики.

Розділ 1

Елементи лінійної алгебри

1.1. Матриці. Дії над матрицями

Прямокутну таблицю чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

називають $k \times n$ – **матрицею**, де k – кількість рядків; n – кількість стовпців; a_{ij} – елемент матриці.

Якщо $k = n$, то матрицю називають **квадратною**, а n – її **порядком**.

Нуль-матрицею називають матрицю, усі елементи якої дорівнюють нулеві

$$O \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Одиничною матрицею n – го порядку називають матрицю

$$I \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{ij} , в яких $i = j$, утворюють **головну діагональ** матриці.

Квадратна матриця, яка набула вигляду

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

називається **діагональною**. Якщо всі λ_i рівні, то діагональну матрицю називають **скалярною**.

Квадратна матриця називається **верхньою трикутною**, якщо всі її елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулеві, тобто $a_{ij} = 0$ при $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **нижньою трикутною**, якщо всі її елементи, які розташовані вище головної діагоналі, дорівнюють нулеві, тобто $a_{ij} = 0$ при $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо рядки $k \times n$ матриці $A = (a_{ij})$ замінити її стовпцями, то отримаємо **транспоновану** матрицю розміру $n \times k$

$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ називається **симетричною**, якщо $A^T = A$, тобто $a_{ji} = a_{ij}$.

Приклад 1.1. Знайти транспоновані матриці до матриць.
Розв'язування.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакових розмірів називають матрицю

$$C = A + B \stackrel{def}{=} (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + b_{k1} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Знайти суму матриць $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+4 & 1+5 \\ 0+6 & 3+7 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $k \times n$ **на скаляр** (число) λ називають матрицю

$$\lambda A \stackrel{def}{=} (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Обчислити $3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$

Розв'язування.

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 14 \\ 16 & -18 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 23 \\ 28 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ $(k \times n)$ **на матрицю** $B = (b_{ij})$ $(n \times m)$ називають матрицю $C = (c_{ij})$ $(k \times m)$, кожний елемент якої визначають за формулою

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

тобто елемент c_{ij} матриці C – розглядають як добуток i -го рядка матриці A на j – й стовпець матриці B .

Властивості дій над матрицями:

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B \neq B \cdot A$,
 $(A \cdot O = O \cdot A = O, A \cdot I = I \cdot A = A, A^2 = A \cdot A)$.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
5. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
7. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
8. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
9. $(A^T)^T = A$.

Приклади 1.4. Знайти добутки матриць AB і BA , якщо:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 & 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 53 \\ 52 & 69 \end{pmatrix},$$

$$AB \neq BA.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) & 5 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 15 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 + 7 \cdot 0 & 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \\ 8 \cdot 5 + 9 \cdot 0 & 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 & 8 \cdot 4 + 9 \cdot 3 \\ -2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 & -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & -2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & 20 & 45 \\ 40 & 26 & 59 \\ -10 & -4 & -11 \end{pmatrix},$$

$$AB \neq BA.$$

Приклад 1.5. Обчислити $f(A) = 3A^2 - 4A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо A^2

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 7 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 & 4 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 7 & 3 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 15 & 35 & -10 \\ 34 & -17 & 35 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо $f(A) = 3A^2 - 4A$

$$\begin{aligned} f(A) &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 15 & 35 & -10 \\ 34 & -17 & 35 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 45 & 105 & -30 \\ 102 & -51 & 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ -16 & 8 & -20 \\ -12 & -28 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 4 & -15 \\ 29 & 113 & -50 \\ 90 & -79 & 105 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Визначники другого та третього порядків

Визначником другого порядку називають число

$$\Delta \equiv \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклади 1.6. Знайти визначники матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 6 + 20 = 26.$$

Визначником третього порядку називають число

$$\Delta \equiv \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило запам'ятовування цієї формули називають правилом *трикутника*.

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} визначника Δ називають визначник, який отримують з Δ викресленням i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебричним доповненням елемента a_{ij} називають число $A_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад 1.7. Знайти визначники матриць:

$$1. B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Використавши правило трикутника,}$$

одержимо

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 9 + 0 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \cdot 4 - 7 \cdot 1 \cdot 4 -$$

$$-6 \cdot 0 \cdot 9 - 8 \cdot 5 \cdot (-2) = -18 + 192 - 28 + 80 = 226.$$

2. $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Використавши правило трикутника, отримаємо

$$\det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + (-1) \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 7 -$$

$$-5 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 6 = 60 + 84 - 6 - 28 - 60 + 18 = 68.$$

1.3. Обернена матриця

Квадратну матрицю називають **оберненою** (A^{-1}) до квадратної матриці A , якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Матрицю A називають **невиродженою**, якщо $\det A \neq 0$.

Матрицю A називають **виродженою**, якщо $\det A = 0$.

Твердження. Невироджена матриця має єдину обернену матрицю, а вироджена матриця не має оберненої матриці.

Обернена матриця до матриці A ($\det A \neq 0$) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.8. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Знайдемо $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 5 - 0 - 9 - 6 = -1 \neq 0,$$

A^{-1} існує.

Обчислюємо алгебричні доповнення усіх елементів матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Записуємо матрицю з алгебричних доповнень $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$,

транспонуємо її $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, поділивши кожний елемент на $\det A = -1$, одержимо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.9. Знайти матрицю X з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, X – невідома матриця. Тоді задане рівняння набуде вигляду

$A \cdot X = B$. Оскільки $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0$,

то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} . Домноживши обидві частини рівняння на матрицю A^{-1} зліва, одержимо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Обчислимо алгебричні доповнення $A_{11} = 4$; $A_{12} = 2$; $A_{21} = 3$; $A_{22} = 2$. Тоді $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже,

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1,5 \cdot 7 & 2 \cdot 3 + 1,5 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аудиторна робота 1

1.1. Знайти транспоновані матриці до матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2. Обчислити:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } 4 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2; \quad \text{є) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{з)} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

1.3. Обчислити:

$$\text{а)} f(A) = 2A^2 + 5A - 5, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} f(A) = 4A^2 - 3A + 2, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4. Обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

1.5. Знайти обернену матрицю:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.6. Знайти матрицю X з рівнянь:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} X \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Домашня робота 1

1.1. Знайти транспоновані матриці до матриць:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Обчислити:

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \\
&\text{б)} 3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\
&\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \\
&\text{д)} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}; \\
&\text{ж)} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^2; \quad \text{з)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \\
&\text{и)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{к)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.
\end{aligned}$$

1.3. Обчислити:

$$\begin{aligned}
&\text{а)} f(A) = 5A^2 + 2A - 3, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \\
&\text{б)} f(A) = -2A^2 + 3A + 4, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \\
&\text{в)} f(A) = -3A^2 + 5A - 2, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.4. Обчислити визначники:

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}; \\
&\text{д)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{ж)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \\
&\text{з)} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{и)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 8 \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \text{при } a = 1, b = -1, c = 3.
\end{aligned}$$

1.5. Знайти обернену матрицю:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{г) } & \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{р) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.6. Знайти матрицю X з рівнянь:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } & \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{р) } X \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}; \\ \text{г) } & X \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи називають впорядковану трійку чисел (x, y, z) , яка у разі підстановки в систему кожне її рівняння перетворює в числову рівність. Позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходимо за **формулами Крамера**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = 0$, то система рівнянь має безліч розв'язків.

Якщо ж $\Delta = 0$ і $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$, то система рівнянь не має жодного розв'язку.

Приклад 1. 10. Розв'язати систему за допомогою формул Крамера
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2, \\ 7x - 2y + 8z = 3, \\ 5x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Розв'язування. Обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 120 + 56 - (-40 + 32 + 21) = -73, \Delta \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 24 + 24 - (8 + 32 + 9) = 3,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3}{73};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 80 - 28 - (60 - 16 - 14) = 16,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{16}{73};$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 45 + 28 - (-20 - 12 - 2) = -26,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{26}{73}.$$

Отже, розв'язком системи є $x = -\frac{3}{73}, y = -\frac{16}{73}, z = \frac{26}{73},$
 $\left(-\frac{3}{73}; -\frac{16}{73}; \frac{26}{73}\right).$

1.5. Метод Гаусса

Розглянемо систему k лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

та її *розширену* матрицю

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right).$$

Розв'язком системи називають впорядкований набір n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, які у разі підстановки в систему кожне рівняння перетворюють у числову рівність.

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо множини їхніх розв'язків рівні. Матрицю називають **східчастою**, якщо вона набуває вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_k} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \dots & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{kj_k} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

де $a_{1j_1} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \dots, a_{kj_k} \neq 0, j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Систему лінійних рівнянь називають **східчастою**, якщо вона набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j_k}x_{j_k} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a_{2j_k}x_{j_k} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{kj_k}x_{j_k} + \dots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Тут $a_{11} \neq 0$, $a_{2j_2} \neq 0$, ..., $a_{kj_k} \neq 0$, $1 < j_2 < \dots < j_k$.

Елементарними перетвореннями системи називають:

1. переставляння двох рівнянь системи.
2. множення рівняння на число, відмінне від нуля.
3. додавання до одного рівняння системи іншого рівняння системи.

Елементарні перетворення системи відповідають елементарним перетворенням розширеної матриці.

Метод Гаусса полягає в тому, що кожну систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень можна звести до еквівалентної їй східчастої системи.

Зауваження. Якщо східчаста матриця містить рядок вигляду $(0 \dots 0 | b_s)$, де $b_s \neq 0$, то система не має розв'язків.

Приклад 1. 11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{1.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{2.-4.} \\ & \xrightarrow{2.-4.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{5.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{6.-7.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xleftrightarrow{6.-7.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array} \right) \xleftrightarrow{8.-9.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{10.} \\
& \xleftrightarrow{10.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_3 = 1. \end{cases} \xleftrightarrow{11.} \begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_1 = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

1. Перший і другий рядки поміняємо місцями. 2. Перший рядок множимо на (-3) і додаємо до другого рядка. 3. Від першого рядка віднімаємо третій рядок. 4. Від першого рядка віднімаємо четвертий рядок. 5. Другий і четвертий рядки поміняємо місцями. 6. Другий рядок множимо на 3 і додаємо до третього рядка. 7. Другий рядок множимо на (-2) і додаємо до четвертого рядка. 8. Додаємо третій і четвертий рядки. 9. Третій рядок поділимо на 14. 10. Запишемо відповідну систему рівнянь. 11. Розв'язуємо систему.

Розв'язок системи $-(-1, 0, 1)$.

1.6. Ранг матриці

Рангом $k \times n$ матриці ($\text{rang } A$) A називають максимальну кількість її незалежних рядків (стовпців).

Мінором s -го порядку $k \times n$ матриці A ($s \leq k, s \leq n$) називають визначник складений з елементів, які стоять на перетині s вибраних рядків і s стовпців матриці. Максимальний порядок ненульового мінора $k \times n$ матриці A дорівнює рангу матриці A .

Метод знаходження $\text{rang } A$: задану матрицю A за допомогою елементарних перетворень зводять до східчастого вигляду. Кількість ненульових рядків східчастої матриці дорівнює її $\text{rang } A$.

Приклад 1.12. Обчислити ранг матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Зведемо матрицю B за допомогою елементарних перетворень до східчастої матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.-3.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4,5.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. До другого рядка додали перший рядок, помножений на -2 .
2. До третього рядка додали перший рядок, помножений на -3 .
3. До четвертого рядка додали перший рядок, помножений на -1 .
4. До третього рядка додали другий рядок, помножений на -1 .
5. Четвертий і третій рядки поміняти місцями.

Отримали $\text{rang } B = 3$.

1.7. Лінійні економічні моделі

1.7.1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Нехай X_i – обсяг валової продукції i -ї галузі ($i = 1, 2, \dots, n$) за одиницю часу, x_{ij} – обсяг продукції i -ї галузі, що використовує j -та галузь у процесі виробництва ($i, j = 1, 2, \dots, n$), Y_i – обсяг кінцевої продукції i -ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

або у матричній формі

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$X = AX + Y,$$

яке називають рівнянням лінійного міжгалузевого балансу (моделлю Леонтьєва).

Основною задачею міжгалузевого балансу є відшукування такої матриці обсягів валової продукції X , яка за відомої матриці прямих витрат A забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції Y .

Отже, $(I - A)X = Y$, або якщо матриця $(I - A)$ – невироджена, то $X = (I - A)^{-1}Y$.

Матрицю $B = (I - A)^{-1}$ називають матрицею повних витрат.

Економічний зміст елементів матриці B такий: кожен елемент b_{ij} матриці B є обсягом валової продукції i -ї галузі, яка потрібна для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції j -ї галузі ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Рівняння міжгалузевого балансу зазвичай використовують у двох випадках, коли відома матриця обсягів валової продукції X , потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції Y , або для планування.

Приклад 1.13. Нехай матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають, відповідно, такий вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Y = (I - A)X = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.14. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Визначити матрицю обсягів валової продукції X .

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

де X_i – обсяги валової продукції галузей.

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3) = 200, \\ X_2 - (0,2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3) = 300, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - 0,2x_2 = 200, \\ -0,2x_1 + x_2 - 0,1x_3 = 100, \\ -0,1x_2 + 0,8x_3 = 300. \end{cases}$$

Знайдемо обернену матрицю

$$B = (I - A)^{-1}.$$

Визначник матриці $B = (I - A)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці $(I - A)$

$$B_{11} = 0,79, \quad B_{21} = 0,16, \quad B_{31} = 0,01,$$

$$B_{12} = 0,16, \quad B_{22} = 0,8, \quad B_{32} = 0,1,$$

$$B_{13} = 0,02, \quad B_{23} = 0,1, \quad B_{33} = 0,96.$$

Обернена матриця набуває вигляду

$$B = (I - A)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,3 & 1,27 \end{pmatrix}$$

(всі числа округлені до сотих).

$$X = (I - A)^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,3 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, планові обсяги валової продукції для галузей, відповідно, становлять $X_1 = 238$, $X_2 = 186$, $X_3 = 400$.

1.7.2. Модель рівноважних цін

Нехай задано матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

де A – матриця прямих витрат; X – матриця обсягів валової продукції; P – матриця цін.

Отже, першій галузі для випуску продукції в обсязі x_1 , треба витратити на закупівлю продукції інших галузей суму, яка становить

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n).$$

Частину доходу, що залишається, позначимо V_1 (додаткова вартість).

Отож, справджується рівність

$$x_1 p_1 = x_1 (a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{n1} p_n) + V_1,$$

або, поділивши на x_1 , одержимо

$$P_1 = (a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{n1} p_n) + W_1,$$

де $W_1 = \frac{V_1}{x_1}$ – додаткова вартість на одиницю продукції, що випускається.

Аналогічно до інших галузей отримаємо

$$p_2 = (a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{n2} p_n) + W_2,$$

.....

$$p_n = (a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \dots + a_{nn} p_n) + W_n.$$

У матричній формі це співвідношення запишемо

$$P = A^T P + W,$$

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} \text{ – матриця нормальної додаткової вартості.}$$

Модель рівноважних цін дає змогу за відомих норм додаткової вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, що є наслідком ціни в одній із галузей.

1.7.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі

Нехай маємо групу з n країн $K_1, K_2, \dots, K_n$, які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через x_j – торговельний дохід j -ї країни. Вважатимемо, що частина q_{ij} – торговельного доходу x_j , яку j -та країна витрачає на купівлю товарів i -ї країни, є сталою.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} - \text{структурна матриця торгівлі.}$$

Вважатимемо, що весь торговельний дохід витрачається або для закупівлі товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Дохід від внутрішньої та зовнішньої торгівлі для K_i - країни становить

$$x_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in}x_n,$$

тобто для збалансованої торгівлі потрібно знайти матрицю

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

щоб справджувалось рівняння $QX = X$.

Аудиторна робота 2

2.1. Розв'язати системи за допомогою формул Крамера:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} -7x - 2y + 4z = 1, \\ -3x + y + 6z = 3, \\ 2x + 2y - 5z = -2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} -4x + 2y + z = -5, \\ -3x + y + 5z = 4, \\ -6x + 2y - 2z = 2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 2x + 5y - 2z = -2, \\ -3x + 4y + 9z = 3, \\ -5x - y + 6z = 5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4, \\ -7x + 2y + 5z = 5, \\ 5x + 2y - z = -2. \end{cases} \end{array}$$

2. 2. Знайти загальний розв'язок систем за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x - 3y - 2z = -3, \\ 2x - 5y - z = 2, \\ x - 4y - 2z = -2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ x + 5y - z = 10, \\ 3x - 6y + 5z = -4; \end{cases} \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x - 3y - 2z = 2, \\ 2x + 7y - z = 1, \\ x + 4y - 5z = -4; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x - 8y + 4z = 6, \\ x - 3y - z = 2, \\ 2x - 6y - 5z = 1. \end{cases}$$

2.3. Знайти ранг матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 10 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домашня робота 2

2.1. Розв'язати системи за допомогою формул Крамера:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} -2x - y + 4z = 1, \\ -3x + 5y + z = 3, \\ x + 2y - 5z = -2; \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - y + z = -6, \\ -3x + y - 2z = 4, \\ 4x + 2y - z = 2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 4x + 5y - 2z = -2, \\ -3x - 4y + 9z = 3, \\ x + y + 7z = 1; \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ 7x - y + 3z = 0, \\ 5x + 2y - z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Знайти загальний розв'язок систем за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} -x - 3y + 5z = 1, \\ 2x - 8y - 3z = 7, \\ x + 4y - 5z = 9; \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} x - 4y + 5z = 3, \\ -2x + 7y - 4z = 2, \\ 3x - 6y + 2z = 4; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 6x + 3y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 7, \\ x + 4y - 5z = -1; \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} 3x + 7y + 4z = 6, \\ x - 3y - z = 5, \\ 2x - 5y - 3z = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. Знайти ранг матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.4. а) Нехай $A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ – транспонована матриця

прямих витрат деякої економічної системи, а $W = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ – матриця додаткової вартості.

Визначити рівноважні ціни економічної системи.

б) Нехай маємо три країни-учасники торгівлі з торговельними доходами X_1 , X_2 , X_3 і структурною матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити доходи країн, що забезпечують збалансовану без-дифіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 ум. од.

в) Нехай матриця технологічних коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$, а $Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 165 \end{pmatrix}$ – обсяг кінцевої продукції, $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$ – обсяг валової продукції.

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвоє, а другої – не зміниться.

г) Нехай загальні витрати для кожної з трьох галузей виробництва становлять

$$X_1 = 50000 + 0,65x_2 + 0,55x_3,$$

$$X_2 = 25000 + 0,25x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_3,$$

$$X_3 = 0,25x_1 + 0,05x_2.$$

Контрольні запитання

1. Що таке матриця?
2. Які є види матриць?
3. Яку матрицю називають сумою матриць?
4. Яку матрицю називають добутком матриці на число?
5. Яку матрицю називають добутком матриць?
6. Які властивості дій над матрицями?

7. Як обчислюють визначник квадратної матриці другого порядку?
8. Як обчислюють визначник квадратної матриці третього порядку?
9. Що називають рангом матриці?
10. Які перетворення матриці називають елементарними?
11. Які системи лінійних рівнянь називають еквівалентними?
12. Що таке обернена матриця?
13. Як обчислюють обернену матрицю?
14. Що називають розв'язком системи лінійних рівнянь?
15. У чому полягає основна ідея методу Гаусса?
16. Як можна застосовувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь?
17. У чому полягає суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки?
18. Яка основна задача міжгалузевого балансу?
19. Як будується економічна модель рівноважних цін?
20. У чому полягає лінійна модель міжнародної торгівлі?

Розділ 2

Векторна алгебра

2.1. Вектори. Дії над векторами

Множину з n дійсних чисел, які записані у певному порядку в стовпець, називають **n – мірним вектором** і записують

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Числа x_i ($i = 1, \dots, n$) називають **компонентами** (або **координатами**) вектора $\vec{x}$.

Два n -мірних вектори називаються **рівними**, якщо усі їхні відповідні компоненти рівні.

Нуль-вектором (нульовим вектором) називається вектор, усі компоненти якого дорівнюють нулеві

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо компоненти вектора записати рядком $(x_1, \dots, x_n) = \vec{x}^T$, то отримаємо **транспонований** вектор.

Сумою двох n -мірних векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називається n -мірний вектор, компоненти якого є сумами відповідних компонент векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що два вектори можна додавати тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість компонент.

Добутком вектора $\vec{x}$ на число c (на скаляр) називається вектор, компонентами якого є добуток кожної компоненти вектора $\vec{x}$ на число c

$$c\vec{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}.$$

2.2. Декартова прямокутна система координат

Виберемо три одиничні взаємоперпендикулярні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти – зі спільним початком відліку – точкою O . Цю сукупність називають *прямокутною декартовою системою координат* у просторі.

$$\text{Тут } \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кожен вектор $\vec{a}$ можна єдиним способом розкласти на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

числа a_x , a_y , a_z – *координати вектора $\vec{a}$* .

Нехай задано точку M , вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ називають **радіус-вектором** точки M . Якщо

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то числа x, y, z називають **декартовими координатами точки** M .

Нехай задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді координати вектора

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.1. Знайти координати вектора $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, де $A(2, -5, 3)$, $B(0, -2, 4)$, $C(-3, 4, 2)$.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ -2 - (-5) \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 4 - (-5) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо координати шуканого вектора

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} &= 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -36 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -27 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор з початком у точці A і кінцем у точці B позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. **Довжиною** вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$. **Нуль-вектор** – це вектор, початок і кінець якого збігаються.

Вектори називають **колінеарними**, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать або в одній площині, або в паралельних площинах.

Зокрема, два вектори будуть **рівними**, якщо вони мають рівні довжини, колінеарні та напрямлені однаково.

2.3. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $(\vec{a}\vec{b})$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi,$$

де ϕ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
3. $(\lambda \vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.
4. $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$, отже, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.
5. $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$; $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$.

Нехай задано координати векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,
 $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, тоді:

1. $\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.
2. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
3. Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, тоді $\vec{a}\vec{b} = 0 \Rightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$

– **умова перпендикулярності**.

4. **Умова колінеарності** $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ або $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$.

5. **Кут між векторами**

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Приклад 2.2. Визначити, чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, якщо: $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (3, 0, -1)$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язування. Обчислимо координати векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 12 \\ -4 + 0 \\ 6 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ -6 + 0 \\ 9 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Підставимо координати векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ в умову колінеарності векторів $\frac{14}{0} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{10}$, $\Rightarrow 0 = \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ — умова не виконується. Отже, вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ не є колінеарними.

Приклад 2.3. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ — перпендикулярні.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів $\vec{a} = (m; -3; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -m)$. Вектори перпендикулярні, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулеві

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m - 6 - 2m = -6 - m \Rightarrow -6 - m = 0 \Rightarrow m = -6.$$

Отже, при $m = -6$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

Приклад 2.4. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, де $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.

Розв'язування. Знайдемо координати векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ -1 - (-2) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -4 - (-2) \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Застосовуємо формулу косинуса кута між векторами

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\vec{AB} \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}, \\ \vec{AB} \vec{AC} &= -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -6, \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \\ |\vec{AC}| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \cos \varphi = \frac{-6}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{-3}{3} = -1, \text{ шуканий кут } -180^0.$$

2.4. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), який задовольняє такі умови:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$, де ϕ – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
3. Вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ проти годинникової стрілки.

Крім того, $|\vec{c}|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$S_{ab} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}|,$$

площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\Delta ab} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{c}|.$$

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
3. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, зокрема, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
4. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.
5. $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Приклад 2.5. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (3; 3; 2)$, $\vec{b} = (5; -2; 9)$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(27 + 4) - \vec{j}(27 - 10) + \vec{k}(-6 - 15) = 31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k} = \\ &= (31, -17, -21). \end{aligned}$$

Приклад 2.6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a} = (5, 0, -1)$, $\vec{b} = (7, 2, 3)$.

Розв'язування. Шукану площу обчислюємо за формулою $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Знайдемо координати векторного добутку

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(0 - (-2)) - \vec{j}(15 - (-7)) + \vec{k}(10 - 0) = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$.

Приклад 2.7. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

Розв'язування. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, тобто $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$. Знайдемо вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо векторний добуток

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тобто $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = |-4| \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = 4\sqrt{6}$.

Отже, шукана площа дорівнює $S = 2\sqrt{6}$.

2.5. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$.
2. Якщо відомо координати векторів $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

3. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, обчислюють за формулою

$$V_{abc} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, обчислюють за формулою

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

4. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є компланарними, тоді і тільки тоді, коли

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = 0.$$

Приклад 2.8. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$ і $\vec{c} = (3, -2, 5)$.

Розв'язування. Обчислимо мішаний добуток векторів

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 2 + 2 \cdot (-5 + 6) + 3 \cdot (-1 - 6) = -7. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}| = |-7| = 7.$$

Приклад 2.9. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(-1, 2, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-3, 4, 1)$, $D(-1, 4, 3)$.

Розв'язування. Шуканий об'єм обчислюємо за формулою $V = \frac{1}{6} |\vec{BA} \vec{BC} \vec{BD}|$. Обчислимо координати векторів

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{BD} &= \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Знайдемо мішаний добуток

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD} &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -3 + 9 + 1 - (3 + 3 - 3) = -3 + 10 - 3 = 4.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{6}|4| = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2.10. З'ясувати, чи лежать точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ і $D(2, 1, 3)$ в одній площині?

Розв'язування. Очевидно, точки A , B , C і D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тобто, якщо їхній мішаний добуток дорівнює нулеві. Знайдемо координати векторів

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \\ \overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Обчислимо мішаний добуток

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Оскільки мішаний добуток дорівнює нулеві, то вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, а отже, точки A , B , C і D лежать в одній площині.

2.6. Простір товарів. Вектор цін

Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг i -го товару позначимо через x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто $\vec{x} \in n$ вимірним вектором. Множину всіх наборів товарів називають простором товарів. Ця множина є простором тому, що в ній можна додавати два довільних набори і множити будь-який набір товарів на довільне число (невід'ємним, бо з економічних міркувань всі $x_i \geq 0$).

Нехай кожен товар має певну ціну, а ціна одиниці товару становить p_i , $i = 1, \dots, n$. Тоді $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ називають вектором цін. Скалярний добуток

$\vec{p} \cdot \vec{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ називають ціною набору товарів.

Аудиторна робота 3

3.1. Визначити, чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, якщо:

- а) $\vec{a} = (4, -3, 5)$, $\vec{b} = (7, 3, -5)$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
 б) $\vec{a} = (10, -3, 7)$, $\vec{b} = (5, 2, -4)$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}$.

3.2. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – перпендикулярні:

- а) $\vec{a} = m\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + m\vec{k}$;
 б) $\vec{a} = 5\vec{i} - m\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$.

3.3. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

- а) $A(-3, 2, 7)$, $B(6, -1, 1)$, $C(5, 2, 1)$;
 б) $A(-3, -1, 2)$, $B(-1, -2, 3)$, $C(0, 3, 1)$.

3.4. Обчислити діагоналі паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

- а) $\vec{a} = 2\vec{k} + 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$;
 б) $\vec{a} = 2\vec{k} - 3\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

3.5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (-1, -2, 1)$, $\vec{b} = (2, 4, -5)$;

б) $\vec{a} = (4, -2, 7)$, $\vec{b} = (3, 2, -1)$.

3.6. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках:

а) $A(-1, 1, -3)$, $B(1, 5, -3)$, $C(7, -4, 3)$;

б) $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.

3.7. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

а) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (5, 2, -4)$, $\vec{c} = (1, 0, 6)$;

б) $\vec{a} = (4, 3, -2)$, $\vec{b} = (1, -1, 5)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$.

3.8. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D :

а) $A(-1, 2, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-3, 4, 1)$, $D(-1, 4, 3)$;

б) $A(4, 2, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(0, 4, 1)$, $D(-1, 2, 3)$.

3.9. Перевірити, чи належать одній площині точки:

а) $A(-3, -1, 1)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-3, 0, 1)$, $D(4, 7, -3)$;

б) $A(0, -1, 3)$, $B(-1, -2, 1)$, $C(0, 3, 1)$, $D(5, -4, 2)$.

Домашня робота 3

3.1. Визначити, чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, якщо:

а) $\vec{a} = (1, -3, 8)$, $\vec{b} = (3, 0, -5)$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{a} + 3\vec{b}$;

б) $\vec{a} = (5, -2, 0)$, $\vec{b} = (7, 5, -1)$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}$.

3.2. Визначити, за якого значення m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – перпендикулярні:

а) $\vec{a} = 2m\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j} - 4\vec{k}$.

3.3. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

а) $A(1, -4, 2)$, $B(9, 1, 2)$, $C(-1, 4, 0)$;

б) $A(-1, 1, -3)$, $B(1, 5, -3)$, $C(7, -4, 3)$.

3.4. Обчислити діагоналі паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{k} - 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 3\vec{k} - \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

3.5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (2, 0, -3)$;

б) $\vec{a} = (2, -2, 1)$, $\vec{b} = (3, 5, -2)$.

3.6. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках:

а) $A(0, 1, 7)$, $B(1, 5, -2)$, $C(-1, 0, 3)$;

б) $A(4, -2, 1)$, $B(8, -1, 0)$, $C(2, 0, 7)$.

3.7. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

а) $\vec{a} = (0, -1, 7)$, $\vec{b} = (2, -3, 1)$, $\vec{c} = (1, 4, 2)$;

б) $\vec{a} = (-3, 5, 1)$, $\vec{b} = (0, 4, -2)$, $\vec{c} = (6, 7, 0)$.

3.8. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A , B , C , D :

а) $A(1, -2, 2)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, -4, 3)$, $D(-3, 5, 4)$;

б) $A(-1, -2, 3)$, $B(2, 1, -3)$, $C(2, -3, 0)$, $D(-1, -5, 6)$.

3.9. Перевірити, чи належать одній площині точки:

а) $A(5, -1, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(3, -1, 1)$, $D(4, 7, -3)$;

б) $A(0, -4, 3)$, $B(4, -2, -1)$, $C(0, 3, 1)$, $D(-3, 4, 2)$.

3.10. Визначити ціну усіх ресурсів, які використовує фірма для виготовлення одиниці продукції, якщо вектор витрат ресурсів $\vec{x} = (200; 500; 0,65; 0,7)$, а відповідний вектор цін $\vec{p} = (3; 5; 10; 15)$.

3.11. Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості "споживчого кошика", який складається з 300 видів

товарів і послуг, якщо: $q = (3, 10, 2)$ – вектор обсягу споживчих товарів, $\bar{c} = (4000, 2000, 4000)$ – вектор цін у поточному місяці, $\bar{c}_n = (3500, 1800, 4500)$ – вектор цін у попередньому місяці, витрати споживачів у поточному та попередньому місяцях становлять 40000 та 37500 грн., відповідно. Зазначимо, що індекс цін (%) обчислюють за формулою $p = \frac{\bar{c}q}{\bar{c}_n q} \cdot 100$, а індекс інфляції $i = p - 100$.

3.12. Нехай вектор кредитів $\vec{x} = (200, 300, 400)$ і вектор відсоткових ставок $\vec{p} = (1, 4; 1, 25; 1, 3)$. Скільки потрібно в кінці року заплатити за кредити?

Контрольні запитання

1. Що таке вектор?
2. Що називають довжиною вектора?
3. Які вектори називають рівними?
4. Які лінійні операції можна виконувати над векторами?
5. Які вектори називають колінеарними?
6. Які вектори називають компланарними?
7. Що називають скалярним добутком векторів?
8. Які властивості скалярного добутку векторів?
9. Що називають векторним добутком векторів?
10. Які властивості векторного добутку векторів?
11. Що називають мішаним добутком векторів?
12. Які властивості мішаного добутку векторів?
13. Який простір називають простором товарів?
14. Що таке вектор цін?
15. Як обчислюють ціну набору товарів?

Розділ 3

Аналітична геометрія

3.1. Відстань між двома точками

Відстань між двома точками

Нехай задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB і обчислюють за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Поділ відрізка в заданому відношенні

Задано точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$.

Одержимо координати точки M за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Зокрема, якщо точка $M(x, y, z)$ є серединою відрізка M_1M_2 ($\lambda = 1$), то її координати обчислюють за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3.2. Пряма на площині

Основна теорема про площину. Лінія є прямою тоді і тільки тоді, коли її рівняння в декартовій системі координат лінійне.

Знайти рівняння прямої – це означає записати залежність між декартовими координатами x і y змінної точки прямої та параметрами, які визначають розташування прямої стосовно системи координат.

Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0,$$

де вектор $\vec{n}^T = (A, B)$ – **нормальний** (перпендикулярний) вектор прямої.

Якщо **пряма проходить через точку** $M_0(x_0, y_0)$ **перпендикулярно до вектора** $\vec{n}^T = (A, B)$, тоді її рівняння набуває вигляду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до ненульового вектора $\vec{s}^T = (l, m)$ (**напрямний вектор**). Позначимо через $M(x, y)$ – змінну точку прямої. Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ паралельні, тоді $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, де $\vec{r}$, $\vec{r}_0$ – радіус-вектори точок $M(x, y)$ та $M_0(x_0, y_0)$. Отримаємо, що $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$. Звідси одержимо

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ – **векторно-параметричне рівняння прямої**;

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad \text{– параметричне рівняння прямої.}$$

З умови паралельності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ отримаємо

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad \text{– канонічне рівняння прямої,}$$

де дробова риска означає відношення, у знаменнику може бути нуль.

Позначимо $k = \frac{m}{l}$. Це відношення називають **кутовим коефіцієнтом** прямої. Якщо ϕ – кут нахилу прямої до осі Ox , то $k = \operatorname{tg} \phi$. З канонічного рівняння одержуємо

$$y - y_0 = \frac{m}{l}(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0).$$

Отже, $y - y_0 = k(x - x_0)$ – **рівняння прямої, яка проходить через задану точку з кутовим коефіцієнтом**.

Розв'язавши останнє рівняння стосовно y , одержимо

$y = kx + b$ – **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**,

де $b = y_0 - kx_0$ – величина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy .

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, тоді її напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. Підставивши координати напрямного вектора в канонічне рівняння, отримаємо

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – **рівняння прямої, яка проходить через дві точки**.

Якщо ж такі дві точки $M_1(a, 0)$ і $M_2(0, b)$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) розміщені на координатних осях, то з останнього рівняння одержимо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ – рівняння прямої у відрізках.}$$

Тут a і b величини відрізків, які відтинає пряма на осях координат.

Обчислимо відстань d_{M_0} від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ за формулою

$$d_{M_0} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Взаємне розміщення прямих

Нехай задано дві прямі l_1 і l_2

$$l_1 : y = k_1x + b_1; \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1};$$

$$l_2 : y = k_2x + b_2; \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0; \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 – паралельні, то їхні напрямні вектори – паралельні, а також нормальні вектори – паралельні. Отже, отримаємо

$k_1 = k_2; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ – умови **паралельності** прямих l_1 і l_2 ($l_1 \parallel l_2$).

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то їхні напрямні вектори – перпендикулярні, а також нормальні вектори – перпендикулярні. Тому скалярні добутки цих векторів дорівнюють нулю. Отож, одержимо

$k_1 = -\frac{1}{k_2}; \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \quad l_1l_2 + m_1m_2 = 0$ – умови **перпендикулярності** прямих l_1 і l_2 ($l_1 \perp l_2$).

Кут ϕ між прямими визначають за формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad \cos \phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \cos \phi &= \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \end{aligned}$$

Визначимо умови накладання прямих ($l_1 = l_2$). Нехай задано дві прямі загальними рівняннями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Існує точка $M_0(x_0, y_0)$, яка задовольняє обидва рівняння

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0; \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на t і віднімемо від першого рівняння, отримаємо

$$(A_1 - t A_2)x_0 + (B_1 - t B_2)y_0 + C_1 - t C_2 = 0.$$

Враховуючи, що $M_0(x_0, y_0)$ – довільна фіксована точка, одержимо

$$\begin{cases} A_1 = t A_2 \\ B_1 = t B_2 \\ C_1 = t C_2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Отже, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – *умова накладання прямих*.

Приклад 3.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $B(1; -2)$ і $C(3; 1)$.

Розв'язування. Рівняння прямої, що проходить через точки B і C , набуває вигляду

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-(-2)}{1-(-2)} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 3x-2y-7=0.$$

Приклад 3.2. Задано загальне рівняння прямої $x-3y+5=0$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-5; 2)$ паралельно до заданої прямої.

Розв'язування. Оскільки шукана пряма, паралельна до заданої, то нормальний вектор заданої прямої $\vec{n}^T = (1; -3)$ також є нормальним вектором для шуканої прямої. Підставляючи в рівняння $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ координати вектора $\vec{n}$ і точки M_0 , одержимо

$$(x - (-5)) - 3(y - 2) = 0 \Rightarrow x - 3y + 11 = 0.$$

Приклад 3.3. Задано трикутник з вершинами $A(0, -1)$, $B(12, 8)$, $C(10, -6)$. Написати рівняння медіани CE .

Розв'язування. Медіана CE проходить через дві точки C і E , де точка E – середина відрізка AB . Обчислимо координати точки

$$E: E_x = \frac{12+0}{2} = 6, \quad E_y = \frac{8+(-1)}{2} = 3,5, \quad E(6; 3,5).$$

Застосуємо формулу рівняння прямої через дві точки

$$CE: \frac{x-10}{6-10} = \frac{y-(-6)}{3,5-(-6)} \Rightarrow \frac{x-10}{-4} = \frac{y+6}{9,5} \Rightarrow \frac{x-10}{-8} = \frac{y+6}{19}.$$

Отже, $19x + 8y - 142 = 0$ – рівняння медіани CE .

Приклад 3.4. Задано трикутник з вершинами $A(-8, -4)$, $B(4, 5)$, $C(2, -9)$. Написати рівняння висоти CD .

Розв'язування. Висота CD проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB . Позначимо через k_{CD} – кутовий коефіцієнт прямої CD , а k_{AB} – кутовий коефіцієнт прямої AB . З умови перпендикулярності CD і AB отримаємо $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}}$. Знайдемо рівняння прямої AB , застосовуючи рівняння прямої через дві точки

$$\frac{x-(-8)}{4-(-8)} = \frac{y-(-4)}{5-(-4)} \Rightarrow \frac{x+8}{12} = \frac{y+4}{9} \Rightarrow \frac{x+8}{4} = \frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x+24=4y+16 \Rightarrow 3x-4y+8=0.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB :

$$4y = 3x + 8 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow k_{AB} = \frac{3}{4}.$$

Тоді $k_{CD} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$. Для знаходження рівняння висоти CD застосуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку з кутовим коефіцієнтом $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - (-9) = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 9 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{3}.$$

Отже, рівняння висоти CD набуває вигляду $y = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$.

3.3. Модель рівноваги ринку

Нехай маємо деякий товар. Позначимо через $s(p)$ число одиниць товару, який пропонується на ринку за ціною p . Функцію $s = s(p)$ називають функцією пропозиції товару. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці бажають купити. Цю функцію $q = q(p)$ називають функцією попиту.

Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають рівноважною ціною, тобто $s(p^*) = q(p^*)$, де p^* – рівноважна ціна.

Точку $E(p^*, q^*)$ називають точкою рівноваги (рис. 3.1).

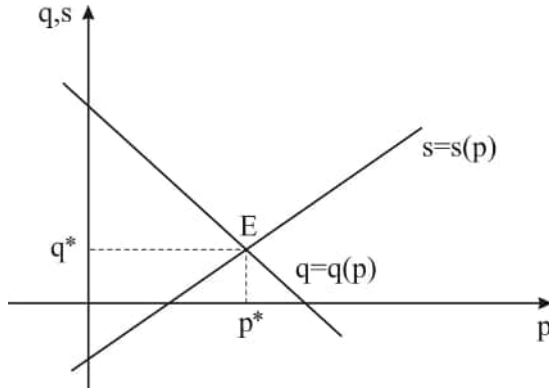


Рис. 3.1.

3.4. Модель рівноваги доходів і збитків

Нехай компанія продає одиницю продукції за ціною p . З'ясовано, що зміна суми y_b загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції x має закономірність $y_b = ax + b$. Знайдемо області прибутків і збитків компанії.

Оскільки дохід від продажу x продукції за ціною p визначається формулою $y_q = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги $y_q = y_b$, тобто $px = ax + b$. Звідки маємо

$$x^* = \frac{b}{p - a}.$$

Отже, точка рівноваги $E\left(\frac{b}{p - a}, \frac{pb}{p - a}\right)$.

Розглянемо можливості компанії. Прибуток компанії визна-

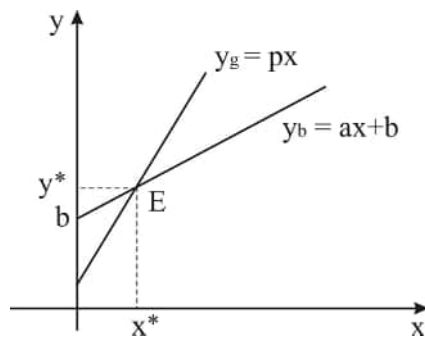


Рис. 3.2.

чається рівністю

$$P = y_q - y_b = px - ax - b = x(p - a) - b.$$

Тому точка рівноваги — це коли прибуток компанії $P = 0$.

Якщо $0 \leq x \leq x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат y_b , і $y_b < y_q$ (рис. 3.2). Тоді $P < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то $y_q > y_b$, тобто графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат y_b . Тоді $P > 0$, і компанія має прибуток.

Отже, область збитків компанії $x \in [0, x^*)$, а область прибутків $x \in (x^*, +\infty)$.

Аудиторна робота 4

4.1. Знайти точку перетину прямих $2x + 5y - 17 = 0$ і $3x - 2y + 3 = 0$.

4.2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $B(-3; 4)$ і $C(2; 5)$.

4.3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ і через точку $M(-4; 1)$.

4.4. Написати рівняння прямої, що проходить через точку

$A(-3; 3)$, перпендикулярно до прямої $3x - y - 1 = 0$.

4.5. Написати рівняння прямої, що проходить через точку

$A(-3; 2)$, паралельно до прямої $2x - 5y + 1 = 0$.

4.6. Задано вершини трикутника $A(1; 1)$, $B(4; 5)$, $C(13; -4)$.

Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .

4.7. Задано трикутник з вершинами $A(-8; -4)$, $B(4; 5)$, $C(2; -9)$.

Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .

4.8. Знайти відстань від точки $A(1; -3)$ до прямої $2x - 3y + 5 = 0$.

4.9. Знайти відстань від точки $M(2; -1)$ до прямої, що відсікає на осях координат відрізки $a = 8$, $b = 6$.

4.10. Знайти кут між прямими $2x + y - 1 = 0$ і $y - x = 2$.

4.11. Знайти кут між прямими $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$ і $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$.

4.12. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(0; 2)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$. Знайти кут між його діагоналями.

4.13. Знайти відстань між прямими $3x + 4y - 12 = 0$ і $3x + 4y - 17 = 0$.

Домашня робота 4

4.1. Знайти точку перетину прямих $5x - 3y - 2 = 0$, $3x + y - 4 = 0$.

4.2. Попит і пропозиція на деякий товар на ринку описується лінійними залежностями $q(p) = a - bp$, $s(p) = dp + c$. Визначити рівноважну ціну, зобразити графічно за заданими параметрами, зробити висновок щодо відхилення від точки рівноваги за параметрів :

а) $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 2$;

б) $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 4$.

4.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2; -4)$ і $B(-4; 1)$.

4.4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ і через початок координат.

4.5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку

- $B(9; -6)$, перпендикулярно до прямої $x + 3y + 1 = 0$.
- 4.6. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $C(7; 8)$, паралельно до прямої $2x - y - 5 = 0$.
- 4.7. Задано трикутник з вершинами $A(0; -1)$, $B(12; 8)$, $C(10; -6)$. Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .
- 4.8. Задано трикутник з вершинами $A(-2; -4)$, $B(10; 5)$, $C(8; -9)$. Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .
- 4.9. Знайти відстань від точки $A(-5; 2)$ до прямої $4x - y + 2 = 0$.
- 4.10. Знайти відстань від точки $M(-3; 1)$ до прямої, що відсікає на осях координат відрізки $a = -2$, $b = 4$.
- 4.11. Знайти кут між прямими $3x + 5y - 1 = 0$ і $10y + 6x - 7 = 0$.
- 4.12. Знайти кут між прямими $\frac{x+8}{2} = \frac{y-2}{-3}$ і $\frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{2}$.
- 4.13. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 3)$. Знайти кут між його діагоналями.
- 4.14. Знайти відстань між прямими $2x + 5y - 18 = 0$ і $2x + 5y + 3 = 0$.
- 4.15. Нехай задано лінійні функції $s(p) = bp - a$ і $q(p) = c - dp$, $a, b, c, d - const > 0$. Знайти рівноважну ціну.
- 4.16. Нехай задано функцію попиту $q = -5p + 40$ і функцію пропозиції $s = \frac{15}{2}p - 10$. Знайти точку рівноваги.
- 4.17. Транспортні витрати на перевезення вантажу залізницею виражаються формулою $y = 2x + 10$, а автомобільним транспортом — $y = x + 20$, x — кілометри перевезення. Визначити, на які відстані вигідніше перевозити вантажі залізничним та автомобільним транспортом. Пояснити графічно.

Контрольні запитання

1. За якою формулою обчислюють відстань між двома точками?
2. За якою формулою обчислюють координати середини відрізка?
3. Як задається пряма на площині?
4. Які є види рівняння прямої на площині?

5. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими на площині?
6. За якою формулою обчислюють відстань від точки до прямої?
7. Які умови паралельності двох прямих на площині?
8. Які умови перпендикулярності двох прямих на площині?
9. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги ринку?
10. Що таке рівноважна ціна, точка рівноваги?
11. Як знаходять рівноважну ціну в економічній моделі рівноваги ринку за умови, що функція попиту й пропозиції лінійні?
12. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги та збитків компанії?

Розділ 4

Множини. Множина комплексних чисел

4.1. Множини

Множиною називають сукупність елементів різної природи, які об'єднані за певною (характеристичною) ознакою.

Множини позначають великими буквами A, B, X , а елементи множин – малими a, b, x . Той факт, що елемент x належить множині A , записують $x \in A$. Якщо ж x не є елементом множини A , то записують $x \notin A$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* множиною і позначають $\emptyset$.

Множину можна задати, перерахувавши усі її елементи:

$A = \{a, b, c, d\}$ – множина A складається з елементів a, b, c, d .

Множину можна задати, описавши її характеристичну ознаку:

$A = \{x : \alpha(x)\}$ – множина A складається з елементів x , яким притаманна властивість $\alpha(x)$.

Приклад 4.1. $A = \{x : 1 < x < 10, x - \text{парне}\}$ – множина складається з усіх парних додатних чисел, які менші 10. Цю саму множину можна визначити і так: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Множини, які складаються з тих самих елементів, називають

рівними.

Якщо кожний елемент множини B є одночасно елементом множини A , то множину B називають *підмножиною* множини A і позначають $B \subset A$. З того, що $B \subset A$, і одночасно $A \subset B$ випливає, що $A = B$.

Приклад 4.2. Нехай $A = \{x : x^2 + 2x = 0\}$,
 $B = \{x : x^2 \leq 9\}$ і $C = \{x : -5 \leq x < 7\}$. Знайти усі можливі підмножини

$A \subset B$ і $A \subset C$, $B \subset C$. Або ж $A \subset B \subset C$.

4.2. Операції над множинами

Об'єднанням множини A і множини B ($A \cup B$) називають множину, яка складається з елементів, що належать або до A , або до B , або до A і B водночас

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Приклад 4.3. Нехай $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 8\}$.
 Об'єднанням A і B є множина $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$.

Перетином множини A і множини B ($A \cap B$) називають множину, яка складається з елементів, які належать до A і B одночасно

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Приклад 4.4. Нехай $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 8\}$.
 Перетином A і B є множина $A \cap B = \{2, 8\}$.

Для довільних множин A і B правильні властивості:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Різницею множини A і множини B ($A \setminus B$) називають множину, яка складається з елементів множини A , які не належать

до множини B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Приклад 4.5. Нехай $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 8\}$. Різницею A і B є множина $A \setminus B = \{1, 5, 9\}$. Різницею B і A є множина $B \setminus A = \{3, 4\}$.

Для довільних множин A і B виконується рівність

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Якщо $B \subset A$, то множину $A \setminus B$ називають **доповненням множини B до множини A** і позначають $\subset_A B$ або $\overline{A}$.

Якщо $a \in A$ і $b \in B$, то пару елементів a і b , яка записана у вигляді (a, b) , називають **впорядкованою парою**. Впорядковані пари (a_1, b_1) і (a_2, b_2) рівні тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Множину, елементами якої є всі впорядковані пари (a, b) , де $a \in A$ і $b \in B$, називають **прямим** або **декартовим добутком множин A і B** і позначають $A \times B$. У цьому разі $A \times B \neq B \times A$, крім окремих випадків.

Приклад 4.6. Нехай $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 8\}$. Декартовим добутком множин A і B є множина

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 8), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 8), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 8), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (9, 8)\}.$$

Декартовим добутком множин B і A є множина

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 5), (2, 8), (2, 9), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (3, 8), (3, 9), (4, 1), (4, 2), (4, 5), (4, 8), (4, 9), (8, 1), (8, 2), (8, 5), (8, 8), (8, 9)\}.$$

Приклад 4.7. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$, для $A = [-3; 3] \cap \mathbb{N}$, $B = (-2; 2] \cap \mathbb{Z}$.

Розв'язування. Визначимо множини A і B , перерахувавши усі їхні елементи

$$A = [-3; 3) \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}, \quad B = (-2; 2] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}.$$

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\} = B, \quad A \cap B = \{1, 2\} = A, \quad A \setminus B = \emptyset, \\ B \setminus A = \{-1, 0\}.$$

Декартовим добутком множин A і B є множина

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Декартовим добутком множин B і A є множина

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

4.3. Множина комплексних чисел

Задача знаходження коренів квадратного рівняння (тобто знаходження таких чисел, що $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, b і c – дійсні числа) має такі розв'язки:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ці корені є дійсними числами лише у разі виконання умови $b^2 - 4ac \geq 0$. Множину дійсних чисел позначаємо через $\mathbb{R}$. Однак у багатьох математичних задачах зручно застосовувати ці формули для знаходження коренів рівняння і в тих випадках, коли $b^2 - 4ac < 0$.

Для подібних ситуацій вводять *уявну одиницю* – число i ,

$$i^2 = -1.$$

Якщо $b^2 - 4ac < 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-1)(4ac - b^2)} = i\sqrt{4ac - b^2}$, а квадратне рівняння має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Комплексним числом в алгебричній формі називають вираз вигляду $z = x + iy$, де $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$, крім того, (x, y) є впорядкованою парою. Зокрема, уявна одиниця $i = (0, 1)$. Причому x називають **дійсною** частиною комплексного числа z ($Re\ z$), а y — **уявною** частиною комплексного числа z ($Im\ z$).

Вираз вигляду $\bar{z} = x - iy$ називають **спряженим** комплексним числом до комплексного числа z . Множину комплексних чисел позначатимемо через $\mathbb{C}$.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ — довільні комплексні числа, $z_1 = z_2$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ — довільні комплексні числа. Тоді

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \\ z_1 - z_2 &= x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1x_2 + i x_2y_1 - i x_1y_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Приклад 4.8. Обчислити $(3 - 2i)^2 + 5i$, визначити дійсну й уявну частини виразу.

Розв'язування. Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки

$$\begin{aligned} (3 - 2i)^2 + 5i &= 9 - 12i + 4i^2 + 5i = 9 - 7i - 4 = 5 - 7i, \\ z &= 5 - 7i, \quad Re\ z = 5, \quad Im\ z = -7. \end{aligned}$$

Приклад 4.9. Обчислити $\frac{2 + 5i}{3 + 2i}$, визначити дійсну й уявну частини виразу.

Розв'язування. Домножимо чисельник і знаменник на комплексне число спряжене до знаменника

$$\begin{aligned}\frac{2+5i}{3+2i} &= \frac{(2+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6+15i-4i-10i^2}{9+4} = \frac{16+11i}{13} = \\ &= \frac{16}{13} + \frac{11i}{13}, z = \frac{16}{13} - \frac{11i}{13}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{16}{13}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{11}{13}.\end{aligned}$$

Якщо на площині введена прямокутна система координат xOy , то будь-якому комплексному числу $z = x + iy$ на цій площині відповідає точка $M(x, y)$, у цьому разі кажуть, що точка $M(x, y)$ зображає комплексне число $z = x + iy$.

Площину, яка зображає комплексні числа, називають **комплексною площиною**, вісь Ox називають **дійсною віссю**, а Oy – **уявною віссю**.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називають число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, тобто це є відстань від початку координат до точки $M(x, y)$.

Кут ϕ , який утворює вектор $\vec{OM}$ з додатним напрямом осі Ox , називають **аргументом** комплексного числа і позначають $\arg z$.

Запис $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ називають **тригонометричною формою** комплексного числа.

Будь-яке комплексне число $z \neq 0$ має аргумент φ , який є розв'язком системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{r}, \end{cases}$$

причому $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Нехай задано два комплексних числа z_1 і z_2 в тригонометричній формі

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тоді дії над комплексними числами можна виконувати за правилами

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Якщо $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ правильна **формула Муавра**

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi));$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

де $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Приклад 4.10. Обчислити $(1-i)^6$.

Розв'язування. Позначимо $z = 1-i$. Переведемо це число в тригонометричну форму $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, кут φ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Застосуємо формулу Муавра

$$\begin{aligned} (1-i)^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) \right) = \\ &= 8 \left(\cos\left(\frac{21\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{21\pi}{2}\right) \right) = \\ &= 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 8(0+i) = 8i. \end{aligned}$$

Приклад 4.11. Обчислити $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$.

Розв'язування. Позначимо $z = -2+2i\sqrt{3}$. Переведемо це число в тригонометричну форму $r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$, кут φ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}, \Rightarrow z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Отже, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{2\pi/3 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi/3 + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$

Знайдемо всі корені третього степеня, тобто

$$\begin{aligned} k=0, \quad z_0 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right), \\ k=1, \quad z_1 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right), \\ k=2, \quad z_2 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

4.4. Бюджетні множини

Нехай C – n -вимірний простір товарів і маємо деяку грошову суму R , яку називаємо бюджетом, а P – вектор цін.

Множину всіх наборів товарів, ціна яких не перевищує R , називають бюджетною множиною й позначають $B(P, R)$, тобто

$$B(P, R) = \{x \in C : P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n \leq R, x_i \geq 0\}.$$

Межею бюджетної множини G називають множину наборів товарів, які мають ціну рівну R , тобто

$$G(P, R) = \{x \in C : P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = R\}.$$

Очевидно, що бюджетна множина $B(P, R)$ залежить від цін p і бюджету R . У випадку збільшення бюджету R межа бюджетної множини паралельно рухається в напрямі від початку координат. За зменшення цін бюджетна множина також збільшується.

Множини бувають випуклими та невивуклими. Випуклою є множина, де разом із будь-якими двома точками їй належить і увесь відрізок, що з'єднує ці точки (рис. 4.1, а). У невивуклих множин є хоча б одна пара точок, що відрізок, який з'єднує ці точки, не належить цілком такій множині (рис. 4.1, б).

Для випуклого багатокутника на площині кутовими точками є його вершини, кількість яких – скінченне число. У n -вимірному просторі випукла множина зі скінченним числом кутових точок називається випуклим багатогранником, або симплексом. Відповідно до цих позначень до випуклого багатокутника належать точка, промінь, кут, відрізок, трикутник, ромб, трапеція тощо.

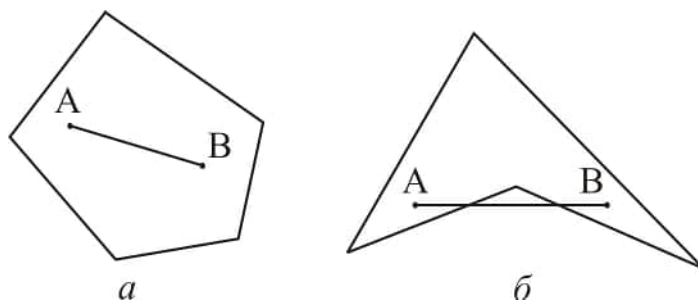


Рис. 4.1.

Аудиторна робота 5

5.1. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

а) $A = [-2; 6)$, $B = [3; 8)$; б) $A = [-5; 3)$, $B = [1; 5)$.

5.2. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$, якщо:

а) $A = [-2; 4) \cap \mathbb{N}$, $B = (-1; 2] \cap \mathbb{Z}$;

б) $A = [-4; 2] \cap \mathbb{N}$, $B = (-1; 4) \cap \mathbb{Z}$.

5.3. Зобразити комплексне число на комплексній площині

а) $z = 2i$; б) $z = -5$; в) $z = 1 - 4i$; г) $z = 2 + 3i$; р) $z = 7i - 5$.

5.4. Обчислити, визначити дійсну й уявну частини виразів:

а) $(3 - 2i)(5 + 4i)$; б) $(5 + 3i)(4 - 3i)$; в) $(1 - 3i)^2 + 7i$;
 г) $(2 + 5i)^2 - 6i + 3$; р) $\frac{6 + i}{4 + 3i}$; д) $\frac{4 + 7i}{3 - 2i}$; е) $\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}$.

5.5. Розв'язати квадратні рівняння:

а) $x^2 + 4 = 0$; б) $x^2 + 2x + 2 = 0$; в) $x^2 - 4x + 8 = 0$.

5.6. Обчислити:

а) $(1 + i)^{24}$; б) $(4 - 4i)^8$; в) $(\sqrt{3}i - 1)^{12}$; г) $(\sqrt{3} - i)^6$.

5.7. Обчислити:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt{-i}$; в) $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$; г) $\sqrt[3]{-8}$.

Домашня робота 5

5.1. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

а) $A = [-2; 4]$, $B = (-4; 1)$; б) $A = (-6; 2)$, $B = [-1; 5]$.

5.2. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$, якщо:

а) $A = (-5; 4] \cap \mathbb{N}$, $B = (-2; 0] \cap \mathbb{Z}$;

б) $A = [-1; 2] \cap \mathbb{N}$, $B = (0; 4] \cap \mathbb{Z}$.

5.3. Зобразити комплексне число на комплексній площині:

а) $z = 4i$; б) $z = -7$; в) $z = 2 - 3i$; г) $z = 3 + i$; ґ) $z = 5i - 2$.

5.4. Обчислити, визначити дійсну й уявну частини виразів:

а) $(6 - 5i)(1 + 2i)$; б) $(5 - 2i)(3 - 4i)$; в) $(2 + 3i)^2 + 4i$;
 г) $(3 - 4i)^2 + 10i - 5$; ґ) $\frac{2 + 7i}{2 - 7i}$; д) $\frac{2 + 5i}{3 + 4i}$; е) $\frac{i^4 + 2}{i^{15} + 3}$.

5.5. Розв'язати квадратні рівняння:

а) $x^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 2x + 10 = 0$;

в) $x^2 - 2x + 5 = 0$; г) $x^2 + 6x + 18 = 0$.

5.6. Обчислити:

а) $(-3 + 3i)^8$; б) $(2 + 2i)^{12}$; в) $(\sqrt{3}i + 1)^{24}$; г) $(i - \sqrt{3})^6$.

5.7. Обчислити:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt{4i}$; в) $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$; г) $\sqrt[3]{-1}$.

5.8. Побудувати бюджетну множину, якщо бюджет $R = 20$ грн.

і вектор цін $\bar{p} = (2; 1)$. Зобразити графічно.

5.9. Побудувати множину розв'язків системи лінійних нерівностей і знайти координати кутових точок випуклого багатокутника (симплекса)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \leq 2, 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$$

5.10. Нехай із бюджету сім'ї, який становить R грн., витрачено на придбання товару A за ціною p_1 і B – за ціною p_2 за одиницю. Визначити бюджетну множину та її межу для цієї сім'ї. В яких кількостях можна придбати ці товари?

Контрольні запитання

1. Що таке множина?
2. Як позначають множини?
3. Яку з множин називають порожньою?
4. Яку з множин називають підмножиною даної множини?
5. Яку множину називають об'єднанням двох даних множин?
6. Яку множину називають перетином двох даних множин?
7. Яку множину називають різницею двох даних множин?
8. Які числові множини ви знаєте?
9. Яку множину називають декартовим добутком двох даних множин?
10. Що називають комплексним числом?
11. Як визначають дії над комплексними числами?
12. За якою формулою обчислюють натуральну степінь комплексного числа?
13. За якою формулою обчислюють корінь вищих порядків з комплексного числа?
14. Що таке бюджетне обмеження?
15. Як визначаються бюджетна множина, її межа й лінії бюджетного обмеження?

Контрольна робота (Модуль) 1

1. Обчислити: а)
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Розв'язати матричне рівняння } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему рівнянь: а) методом Гаусса; б) методом Крамера

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -5, \\ 4x + 2y + 3z = 11, \\ 3x - y - 4z = 7. \end{cases}$$

4. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$: $A(4, -3, 2)$, $B(6, -1, 3)$, $C(-1, 4, 0)$.

5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = 4\vec{k} - 5\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.

6. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A , B , C , D : $A(3, -2, 5)$, $B(2, -1, 0)$, $C(2, -3, 8)$, $D(-1, 5, 2)$.

7. Задано трикутник з вершинами: $A(2; -3)$, $B(5; 4)$, $C(6; -5)$. Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .

$$8. \text{ Обчислити: а) } (4 - 3i)(5 + 6i); \quad \text{б) } \frac{8 + 3i}{7 - 4i}.$$

$$9. \text{ Обчислити } (-2 + 2i)^{12}.$$

Розділ 5

Функція однієї змінної

5.1. Границі числових послідовностей

Розглянемо множину натуральних чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Поставимо у відповідність кожному натуральному числу n дійсне число x_n . Таку множину чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають **нескінченною числовою послідовністю**, яку позначають $\{x_n\}$.

Множину чисел $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbf{R}: |x - x_0| < \varepsilon\}$ називають ε - околom точки x_0 .

Число a називають **границею нескінченної числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна зазначити натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначають цей факт $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, саму ж послідовність називають **збіжною**.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою**, якщо існує така стала $M > 0$, що для всіх номерів n справджується нерівність $|x_n| \leq M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно малою**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|x_n| < \varepsilon$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо для будь-якого числа $A > 0$ можна знайти натуральне число $N = N(A)$ таке, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|x_n| > A$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Властивості збіжних послідовностей:

1. Будь-яка збіжна послідовність має тільки одну границю.
2. Будь-яка збіжна послідовність обмежена.
3. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

зокрема, $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, де c – стала;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (y_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

4. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ і починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $x_n \leq z_n \leq y_n$, тоді послідовність $\{z_n\}$ збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Розглянемо послідовність чисел $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, ця послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає й обмежена, тобто має границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Число e ірраціональне, $e \approx 2,7182\dots$, літерою e це число позначив Л. Ейлер (1707-1783).

Приклад 5.1. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n + 1}{2n^2 - n}$.

Розв'язування. Максимальний степінь n у чисельнику та знаменнику дорівнює 2, тому ділимо чисельник і знаменник на n^2 . Враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n + 1}{2n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Приклад 5.2. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+6}{n^3+n-5}$.

Розв'язування. Максимальний степінь n у чисельнику 1, в знаменнику – 3. Ділимо чисельник і знаменник на n^3 . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+6}{n^3+n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Приклад 5.3. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n)$.

Розв'язування. Перетворимо формулу загального члена

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{4n^2+3n-1} - 2n = \\ &= \frac{(\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n)(\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n)}{\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n} = \\ &= \frac{4n^2+3n-1 - (2n)^2}{\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n} = \frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n} = \\ &= \frac{3 - \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2}. \end{aligned}$$

Отже, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4} + 2} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 5.4. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2 \cdot 5^n}{4^n - 5^{n+3}}$.

Розв'язування. Поділивши чисельник і знаменник на 5^n , отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2 \cdot 5^n}{4^n - 5^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 2}{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5^3}.$$

Враховуючи, що $\frac{4}{5} < 1$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Отож, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2 \cdot 5^n}{4^n - 5^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{-5^3} = -\frac{2}{125}.$$

Приклад 5.5. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3(n+1)!}{(n+2)!}$.

Розв'язування. Перетворимо вирази факторіалів
 $(n+1)! = n!(n+1)$, $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3(n+1)!}{(n+2)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3n!(n+1)}{n!(n+1)(n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1 + 3(n+1))}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n^2+3n+2} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 5.6. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+5} - n \right)$.

Розв'язування. Чисельник дробу є сумою n членів арифметичної прогресії, яку знаходимо за відомою формулою

$$2+4+\dots+2n = \frac{2+2n}{2}n = n(n+1). \text{ Тоді одержимо}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+5} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)}{n+5} - n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2-5n}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{1+\frac{5}{n}} = -4. \end{aligned}$$

5.2. Задача про нарахування відсотків

Маючи початковий вклад у банк s_0 під річну відсоткову ставку p , потрібно знайти розмір вкладу s_t через t років.

У випадку використання простих відсотків розмір вкладу щороку буде збільшуватися на ту саму величину $\frac{p}{100}s_0$, тобто

$$s_t = s_0 \left(1 + \frac{tp}{100} \right).$$

Дуже часто в банківській системі застосовують складні відсотки, коли розмір вкладу щороку збільшується на те саме число $(1 + \frac{p}{100})$ разів, тобто

$$s_t = s_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t,$$

або якщо рік розбити на n частин, то через t років сума депозиту досягне значення

$$s_{nt} = s_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \quad r = \frac{p}{100}.$$

Цей вираз можна перетворити

$$s_{nt} = s_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rt}.$$

Ввівши нову змінну $m = \frac{n}{r}$, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nt} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{rt} = s_0 e^{rt}.$$

Приклад 5.7. Нехай темп інфляції становить 1 % в день. Наскільки зменшиться сума депозиту через півроку?

Розв'язування. Застосування формули нарахування складних відсотків при $r = -0,01$ і $t = 182$, маємо $s_t \approx s_0/e^{1,82}$, де s_0 початкова сума вкладу, 182 – кількість днів у півроці. Отже, інфляція зменшить початкову суму приблизно у 6 разів.

5.3. Границя функції. Односторонні границі

Поняття функції. Кожному елементові x з числової множини X за певним законом ставлять у відповідність один елемент y з числової множини Y .

Символічно записують так: $y = f(x)$ або $f : X \rightarrow Y$.

Область визначення функції позначають $D(f) = X$.

Число A називають *границею функції $f(x)$* , коли $x \rightarrow a$ при $x \neq a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}$, яка збігається до a , відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A .

Позначають цей факт $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Число A називають **границею функції $f(x)$** , коли $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що з виконання умови $0 < |x - a| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Властивості границь функцій:

1. Функція може мати лише одну границю в точці.
2. Якщо функція має скінченну границю в точці, то існує деякий окіл цієї точки, в якому функція обмежена.

3. Нехай $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ мають, відповідно, границі $A \pm B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Число A називають **границею функції $f(x)$** у точці $x = a$ **справа**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна зазначити число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з умови $0 < x - a < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границю справа позначають $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$.

Число A називають **границею функції $f(x)$** у точці $x = a$ **зліва**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна зазначити число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з умови $-\delta < x - a < 0$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границю зліва позначають $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$.

Для того, щоб існувала границя функції $f(x)$ у точці $x = a$, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі $f(a+0)$, $f(a-0)$ і $f(a+0) = f(a-0)$.

Першою чудовою границею називають $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

З якої легко отримати такі границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Другою чудовою границею називають

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

За допомогою заміни змінних $\frac{1}{y} = x$ можна одержати

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Приклад 5.8. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4x + 3}$.

Розв'язування. Підставляючи граничне значення x , знаходимо границю знаменника $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3) = 4 - 8 + 3 = -1$ і границю чисельника $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.

Отже, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Приклад 5.9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

Розв'язування. Якщо $x = 3$, то чисельник і знаменник заданої функції перетворюється в нуль, тобто отримуємо невизначеність $\frac{0}{0}$, яку треба розкрити. Для цього розкладемо на множники чисельник і знаменник

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1), \quad x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3).$$

Скорочуючи чисельник і знаменник на $x - 3 \neq 0$, переходячи до границі ($x \rightarrow 3$), одержимо

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{3 + 1}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 5.10. Обчислити $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{8+x}$.

Розв'язування. Домножимо чисельник і знаменник на вираз спряжений до чисельника

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{8+x} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{1 - x - 9}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-x - 8}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 3} = \frac{-1}{3+3} = \frac{-1}{6}. \end{aligned}$$

Приклад 5.11. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 7x + 1}{3x^2 + 5}$.

Розв'язування. Якщо $x \rightarrow \infty$, то чисельник і знаменник – нескінченно великі функції (отримаємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$). Старший степінь x у чисельнику та знаменнику – 2, тому поділимо чисельник і знаменник на x^2 . Користуючись властивостями границі функції, одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 7x + 1}{3x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (9 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \frac{5}{x^2})} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Приклад 5.12. Обчислити $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - x + 5})$.

Розв'язування. Перетворимо вираз границі

$$\begin{aligned} 3x - \sqrt{9x^2 - x + 5} &= \frac{(3x - \sqrt{9x^2 - x + 5})(3x + \sqrt{9x^2 - x + 5})}{3x + \sqrt{9x^2 - x + 5}} = \\ &= \frac{(3x)^2 - 9x^2 + x + 5}{3x + \sqrt{9x^2 - x + 5}} = \frac{x + 5}{3x + \sqrt{9x^2 - x + 5}} = \frac{1 + \frac{5}{x}}{3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}. \end{aligned}$$

Отже, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - x + 5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}} = \frac{1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

Приклади 5.13. Обчислити, застосовуючи першу чудову границю:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} 6 = 6.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/4)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/4)}{x/4} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x/2)}{3x/2} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$

Приклад 5.14. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 2x}$.

Розв'язування. Використаємо першу важливу границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 2x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Приклад 5.15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$.

Розв'язування. Оскільки $1 - \cos 8x = 2 \sin^2 4x$, то одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 4x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^2 = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} 4 \right)^2 = 2 (4)^2 = 32. \end{aligned}$$

Приклад 5.16. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 5} \right)^{4/(x+2)}$.

Розв'язування. За правилами обчислення границі показниково-степеневі функції знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 5)} = \frac{4}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x + 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Отже, отримаємо } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 5} \right)^{4/(x+2)} = \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{16}{25} = 0,64.$$

Приклад 5.17. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x} \right)^x$.

Розв'язування. За формулою другої чудової границі отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{6x} \right)^{6x} \right)^{1/6} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}.$$

Приклад 5.18. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$.

Розв'язування. Застосуємо другу чудову границю. Для цього виділимо в основі виразу одиницю

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2-1}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(x+2)} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-(x+2)} \right)^{-(x+2)} \right)^{-x/(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{-x/(x+2)} = e^{-1}.\end{aligned}$$

Приклад 5.19. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-4} \right)^x$.

Розв'язування. Якщо $x \rightarrow \infty$, то отримаємо невизначеність типу 1^∞ . Ділимо чисельник і знаменник дробу на x

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-4} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5/x}{1-4/x} \right)^x = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left((1+5/x)^{x/5} \right)^5}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left((1-4/x)^{-x/4} \right)^{-4}} = \frac{e^5}{e^{-4}} = e^9.\end{aligned}$$

Приклад 5.20. Знайдемо $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x-1) - \ln(x+2))$.

Розв'язування. Перетворимо вираз границі

$$x(\ln(x-1) - \ln(x+2)) = x \ln \frac{x-1}{x+2} = \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^x.$$

Виділимо в основі одиницю

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}.$$

Тоді, застосовуючи другу чудову границю, одержимо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x-1) - \ln(x+2)) &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^x = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{-(x+2)/3} \right)^{-3x/(x+2)} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{-3x/(x+2)} = \ln(e^{-3}) = -3.\end{aligned}$$

5.4. Функції в економічній теорії

Найчастіше в економіці використовують такі функції:

- функція корисності (функція переваг) – залежність корисності, тобто результату деякої дії від її інтенсивності;
- виробнича функція – залежність результату виробничої діяльності від чинників, що її зумовлюють;
- функція випуску – залежність обсягу виробництва від наявності ресурсів;
- функція витрат – залежність витрат виробництва від обсягу продукції;
- функція попиту, споживання та пропозиції – залежність обсягу попиту, споживання й пропозицій окремих товарів або послуг від ціни, доходу тощо.

Названі вище функції можуть бути елементарними та складними. Для прикладу наведемо виробничу функцію, яку запропонували у 1928 р. американські вчені Ч. Кобб і П. Дуглас.

Функція Кобба-Дугласа належить до класичного прикладу математичного моделювання економічних процесів і широко застосовується в економічних дослідженнях. Загальний вигляд виробничої функції такий:

$$Y = AF^{\alpha}L^{\beta},$$

де Y – обсяг продукції; F – основний капітал; L – робоча сила;

A – параметр, який визначає ефективність виробничого процесу; α , β – параметри, які характеризують ступінь однорідності виробничої функції ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$).

Сума параметрів ($\alpha + \beta$) свідчить про співвідношення темпів зростання обсягу продукції та виробничих ресурсів: якщо $(\alpha + \beta) > 1$, то темпи зростання обсягу продукції вищі за темпи зростання обох виробничих ресурсів; при $(\alpha + \beta) < 1$ – навпаки.

Наприклад, коли рівень матеріальних (F) і трудових (L) ресурсів збільшиться на $r\%$, на підставі виробничої функції Кобба-Дугласа обсяг продукції становитиме

$$Y_1 = Y \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\alpha+\beta}.$$

Тоді при $(\alpha + \beta) > 1$ обсяг продукції зростає понад $r\%$; якщо $(\alpha + \beta) < 1$ — менше, ніж на $r\%$; при $(\alpha + \beta) = 1$ продукція збільшиться на $r\%$.

Аудиторна робота 6

Обчислити границі:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 9}{7n^3 + 10n + 5}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{5n - 3}.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 7}{5n^2 - 3n + 2}.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 9 - 2n^3}{n^3 + 10n + 5}.$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - 3n^2}{4n^2 - 6n + 1}.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1 - 6n^3}{2n^3 - 3n}.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^6 + 3n^2 + 4}}{7n - 8}.$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 3}}.$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{625n^4 - 3n^2 + 1}}{\sqrt[3]{27n^6 - 4}}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25}.$
11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}.$
12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6}.$
13. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{8 + x}.$
14. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{2x - 7} - 5}{\sqrt{x} - 4}.$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{x^2 + x - 2}.$

Домашня робота 6

Обчислити границі:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5}{3n^3 + 10n + 4}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 4}{4n - 3}.$

- | | |
|--|---|
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 2}{14n^2 - 8n + 5}.$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}.$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3 - 8n^3}{2n^3 + 7n + 1}.$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 - 64}.$ |
| 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 5n^2}{2n^2 - 9n + 1}.$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 125}.$ |
| 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 4 - 7n^3}{2n^3 - 5n}.$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{1 - 3x} - 4}{5 + x}.$ |
| 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^{10} + 9n^2 + 3}}{8n - 1}.$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}.$ |
| 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n^2 + 16}}{\sqrt{4n + 7}}.$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{2x - 14} - 6}{\sqrt{x} - 5}.$ |
| 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{81n^4 + 2n^2 + 1}}{\sqrt[3]{27n^6 + 9}}.$ | 17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5 + x} - 2}{x^2 - 1}.$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}.$ | |

Аудиторна робота 7

Обчислити границі:

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{x^2}.$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/4)}{x}.$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 8x}.$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(3x)}.$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 2x}{x^4}.$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x/2)}.$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{x^3}.$ |

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2(x/3)}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{(5+x)/x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{\sin 7x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6+x}{x+5} \right)^{x^2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+9} - 3}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+x}{x+3} \right)^{x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{\sin 5x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^x.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 6x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+3} \right)^x.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-5} \right)^{x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+5) - \ln n).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{(2+x)/x}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+2)).$$

18. Приріст населення країни становить p відсотків у рік. За скільки років населення країни подвоїться? Відповісти, якщо $p = 3\%$ і $p = 5\%$.

19. Комерційний банк акумуляє гроші підприємств у середньому на 6 місяців. За цей час банк тричі видає ці кошти у вигляді короткотермінових кредитів на три місяці під $p = 4\%$ у місяць. Скільки відсотків прибутку одержує банк на цій операції?

Домашня робота 7

Обчислити границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/6)}{x}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(5x)}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x/4)}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 12x}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 3x}{x^4}.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 7x}{x^3}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2(x/2)}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{\sin 4x}.$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sqrt{x+36}-6}.$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+4}-2}{\sin 3x}.$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos 10x}.$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 18x}{x^2}.$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2}.$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{(3+x)/x}.$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+8x)^{(2+x)/x}.$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9+x}{x+4} \right)^{x+3}.$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+x}{x+8} \right)^{x-4}.$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^x.$
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+5} \right)^{x^2}.$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+7}{x^2-7} \right)^{x^2}.$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln(n+2) - \ln n).$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln n - \ln(n+5)).$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln n - \ln(n-6)).$
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln(n+8) - \ln n).$

27. Потреба ринку в продукції фірми залежить від ціни. Було визначено, що тижневий дохід R є функцією ціни, причому $R = f(p) = (-50p^2 + 500p)$ грн. Визначити ціну, яку потрібно призначити на продукцію фірми, щоб максимізувати загальний дохід.

28. Агенство купує нові автомобілі за ціною 12 тис. грн. за ко-

жний. Упродовж трьох років їхня ціна зменшиться до 2,5 тис. грн. Вартість одного кілометра пробігу автомобіля – 2,5 грн. Агенство здає в оренду автомобілі з розрахунку 4 грн. за кілометр.

Записати загальні функції доходу та вартості оренди автомобілів упродовж трьох років. Записати функцію чистого доходу. Який дохід отримає агенство, якщо пробіг автомобіля 60 000 км за третій рік оренди?

5.5. Неперервність функції

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0 , називають **неперервною у точці** x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0 , називають **неперервною у точці** x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що з виконання умови $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у всіх точках множини X . Використаємо дві точки x_0 і $x_0 + \Delta x$ з цієї множини. Число Δx називають **приростом аргументу**, а число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – **приростом функції** $f(x)$ у точці x_0 .

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки x_0 , називають **неперервною у точці** x_0 , якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Функцію $f(x)$ називають **неперервною справа** у точці x_0 , якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Функцію $f(x)$ називають **неперервною зліва** у точці x_0 , якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною у точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Функцію $f(x)$ називають **неперервною на множині X** ($X \subset D(f)$), якщо функція неперервна у кожній точці цієї множини.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені у проміжку X та неперервні функції в точці $x_0 \in X$, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і функція $\varphi(t)$ неперервна у точці t_0 , причому $x_0 = \varphi(t_0)$, тоді складена функція $f(\varphi(t))$ неперервна в точці t_0 .

Властивості неперервних функцій.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a)f(b) < 0$, то існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f(c) = 0$.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для довільного числа A , що є між значеннями $f(a)$ і $f(b)$, існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f(c) = A$.

Теорема 5. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то $f(x)$ обмежена на $[a; b]$.

Теорема 6. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то $f(x)$ досягає на $[a; b]$ свого найбільшого та найменшого значення.

Якщо функція $f(x)$ визначена в $O(x_0) \setminus \{x_0\}$ і не є неперервною в точці x_0 , то цю точку називають **точкою розриву** функції $f(x)$.

Можлива одна з двох умов: або $f(x)$ визначена в точці x_0 і не є неперервною в точці x_0 , або $f(x)$ невизначена в точці x_0 . Точки розриву є першого та другого роду.

Точку розриву x_0 називають точкою розриву **першого роду**, якщо обидві односторонні границі функції $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$ існують і скінченні.

Якщо ж $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точку розриву першого роду x_0 називають точкою **скінченного стрибка**, висота стрибка дорівнює

$$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Якщо ж $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точку розриву першого роду x_0 називають точкою **усувного розриву**.

Точку розриву x_0 називають точкою розриву **другого роду**, якщо хоча б одна одностороння границя функції $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ не існує.

Приклад 5.21. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Розв'язування. Врахувавши, що $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ одержимо

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

цю функцію часто позначають $\operatorname{sgn} x$ (знак x). Точка $x = 0$ є точкою розриву, бо $f(x)$ в ній невизначена. Обчислимо односторонні границі $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$. Оскільки обидві односторонні границі існують, то $x = 0$ є точкою розриву першого роду, у цьому разі $f(-0) \neq f(+0)$. Отже, $x = 0$ є точкою скінченного стрибка і висота стрибка дорівнює $h = f(+0) - f(-0) = 2$.

Приклад 5.22. Розглянемо функцію $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язування. Точка $x = 0$ є точкою розриву, бо $f(x)$ в ній невизначена. Обчислимо односторонні границі $f(+0) = +\infty$ і $f(-0) = 0$, границя справа не існує, то $x = 0$ є точкою розриву другого роду. Дослідимо поведінку функції при $x \rightarrow \pm\infty$, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^0 = 1.$$

5.6. Економічна інтерпретація неперервності

Функції, які використовують в економіці, зазвичай неперервні. Доведемо це на одному з прикладів. Графік податкової ставки N має вигляд розривної функції (рис 5.1). Адже на кінцях проміж-

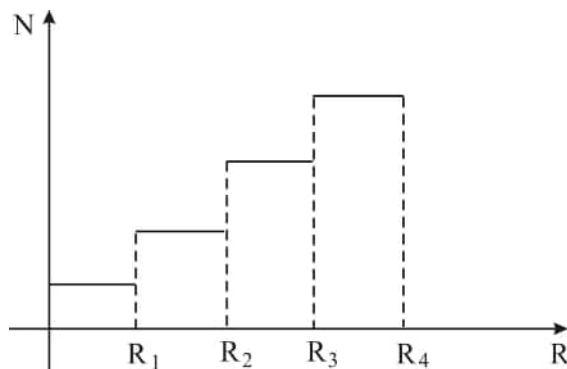


Рис. 5.1.

ків функція розривна й має розриви першого роду. Сам розмір прибуткового податку P є непервною функцією річного доходу R (рис 5.2). Отже, якщо річні доходи двох осіб не дуже відрізняються, то для неперервності функції $N = N(R)$ потрібно, щоб різниця за податковим податком була не дуже великою.

Якщо результат якоїсь задачі, що описує економічний процес не неперервно залежить від вихідних (початкових) даних, то таку задачу називають некоректною.

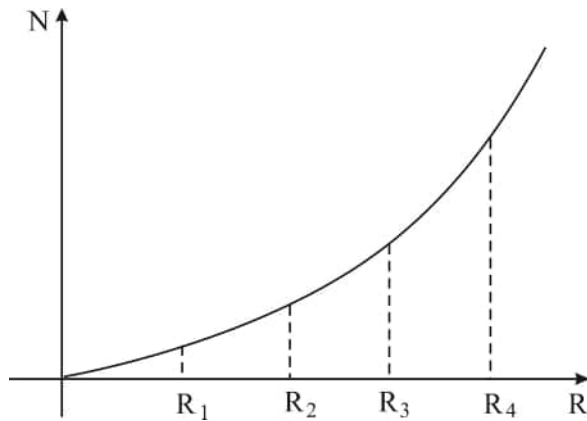


Рис. 5.2.

5.7. Похідна функції. Правила диференціювання

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y' = \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідна є границею відношення малої зміни y до малої зміни x .

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною у точці x_0* , якщо в цій точці існує похідна функції. Очевидно, що похідна сталої функції дорівнює нулю, $C' = 0$, C – стала.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 є *кутовим коефіцієнтом дотичної*, яку провели до графіка функції у точці $(x_0, y_0 = f(x_0))$, $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$. Рівняння дотичної набуває вигляду

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо ж значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ не дорівнює нулеві, тоді рівняння *нормалі*, проведеної до графіка

функції у точці $(x_0, y_0 = f(x_0))$, набуває вигляду

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0).$$

Приклад 5.23. Знайти рівняння дотичної до кривої

$y = x^2 - 5$ у точці з абсцисою 2?

Розв'язування.

Обчислимо значення функції в точці з абсцисою 2 $y(2) = -1$, а також значення похідної у цій точці $y' = 2x$, $y'(2) = 4$. Застосовуючи рівняння дотичної, отримуємо

$$y - (-1) = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 9.$$

Правила диференціювання. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – дві диференційовні функції. Тоді:

1. $(u + v)' = u' + v'$.
2. $(uv)' = u'v + v'u$, зокрема, $(Cu)' = Cu'$, де C – стала.
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Теорема 7. Нехай функція $y = f(x)$ – диференційовна у точці x_0 , а функція $x = \varphi(t)$ – диференційовна у точці t_0 , причому $x_0 = \varphi(t_0)$. Тоді складена функція $y = f(\varphi(t))$ – диференційовна у точці t_0 і правильна формула

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Таблиця похідних. Формули похідних основних функцій

для випадку, коли $u(x)$ – диференційовна функція:

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \text{ де } \alpha - \text{ стала.}$$

$$2. (a^u)' = a^u \ln a u', \text{ де } a - \text{ стала, } a > 0, a \neq 1;$$

$$(e^u)' = e^u u'.$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \text{ де } a - \text{ стала, } a > 0, a \neq 1;$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$4. (\sin u)' = (\cos u) u'.$$

$$5. (\cos u)' = (-\sin u) u'.$$

$$6. (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$7. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

$$8. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$9. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$10. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$$11. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Нехай функцію задано параметрично рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Якщо $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовні функції, причому $\varphi'(t) \neq 0$,

тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$

Властивості диференційованих функцій. Нехай $f(x)$ визначена на множині X і $x_0 \in X$.

Якщо для довільного $x \in X$: $f(x) \geq f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ набуває в x_0 найменшого значення на множині X .

Якщо для довільного $x \in X$: $f(x) \leq f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ набуває в x_0 найбільшого значення на множині X .

Теорема (Ферма). Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , диференційовна в точці x_0 і набуває в цій точці найбільшого (чи найменшого) значення в цьому околі, тоді $f'(x_0) = 0$.

Теорема (Ролля). Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, диференційовна на $(a; b)$, причому $f(a) = f(b)$, тоді існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Теорема (Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, диференційовна на $(a; b)$, тоді існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$ така, що

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема (Коші). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[a; b]$, диференційовні на $(a; b)$ і $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$, тоді існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$ така, що

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Приклади 5.24. Знайти похідну для таких функцій:

1. $y = \arccos \sqrt{1 - 4x}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - 4x})^2}} (\sqrt{1 - 4x})' = \frac{-1}{\sqrt{1 - 1 + 4x}} \frac{(1 - 4x)'}{2\sqrt{1 - 4x}} = \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \frac{-4}{2\sqrt{1 - 4x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 - 4x}}. \end{aligned}$$

2. $y = (x^2 + 2x - 3) \cos x$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 2x - 3)' \cos x + (x^2 + 2x - 3) (\cos x)' = \\ &= (2x + 2) \cos x - (x^2 + 2x - 3) \sin x. \end{aligned}$$

3. $y = \sqrt{x} - (1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\arctg \sqrt{x} + (1+x) \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \arctg \sqrt{x} - (1+x) \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\arctg \sqrt{x}.\end{aligned}$$

$$4. y = \frac{x \ln x}{x + e^x}.$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x \ln x)'(x + e^x) - x \ln x (x + e^x)'}{(x + e^x)^2} = \\ &= \frac{(\ln x + 1)(x + e^x) - x \ln x (x + e^x)}{(x + e^x)^2} = \frac{e^x(1-x) \ln x + x + e^x}{(x + e^x)^2}.\end{aligned}$$

$$5. y = \sin^3 x.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

$$6. y = \sin x^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^3 (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2.$$

$$7. y = \arccos(\log_2 x).$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\log_2 x)^2}} \cdot (\log_2 x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\log_2^2 x}} \cdot \frac{1}{x \ln 2}.$$

$$8. y = \operatorname{ctg}^3(2^x).$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3(\operatorname{ctg}(2^x))^2 \cdot (\operatorname{ctg}(2^x))' = 3 \operatorname{ctg}^2(2^x) \cdot \frac{-1}{(\sin(2^x))^2} \cdot (2^x)' = \\ &= -3 \operatorname{ctg}^2(2^x) \frac{1}{(\sin(2^x))^2} \cdot 2^x \ln 2 = -3 \frac{\cos^2(2^x)}{\sin^4(2^x)} \cdot 2^x \ln 2.\end{aligned}$$

$$9. y = \operatorname{arccctg}(3^{\sqrt[3]{1-x^3}}).$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(3^{\sqrt[3]{1-x^3}})^2} \cdot (3^{\sqrt[3]{1-x^3}})' =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{1+3^2\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x^3}} \ln 3 \cdot \left((1-x^3)^{1/3}\right)' = \\
&= -\frac{1}{1+3^2\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x^3}} \ln 3 \cdot \frac{1}{3} (1-x^3)^{-2/3} (1-x^3)' = \\
&= -\frac{1}{1+3^2\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x^3}} \ln 3 \cdot \frac{1}{3} (1-x^3)^{-2/3} (-3x^2) = \\
&= \frac{x^2 \cdot 3^{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \ln 3}{\left(1+3^2\sqrt[3]{1-x^3}\right) \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.
\end{aligned}$$

10. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3, \quad \frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$

Для диференціювання функції вигляду $y = u^v$, де u і v – функції змінної x ($u > 0$), треба використати тотожність

$$y = u^v = e^{v \ln u}.$$

Тоді
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(e^{v \ln u}\right)' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = \\ &= u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right). \end{aligned}$$

Приклад 5.25. Знайти $\frac{dy}{dx}$: $y = x^{x^2}$.

Розв'язування. Тут основа і показник степеня залежать від x . Зробимо перетворення $y = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$. Продиференціюємо за змінною x

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2 \ln x} \left(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}\right) = x x^{x^2} (1 + 2 \ln x) = x^{x^2+1} (1 + 2 \ln x).$$

Приклад 5.26. Знайти $\frac{dy}{dx}$ з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язування. Продиференціювавши за змінною x обидві частини рівняння, одержимо $3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2x e^y = 0$. Тоді

розв'яжемо останню рівність стосовно y'

$$\frac{y'}{y} - x^2 e^y y' = 2x e^y - 3x^2 \Rightarrow y' \left(\frac{1}{y} - x^2 e^y \right) = 2x e^y - 3x^2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2x e^y - 3x^2}{\frac{1}{y} - x^2 e^y}.$$

Отож,
$$y' = \frac{(2e^y - 3x) x y}{1 - x^2 y e^y}.$$

5.8. Диференціал функції

Якщо $y = f(x)$ – диференційовна функція, тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{ де } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Звідси приріст функції $\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$.

Головну частину $f'(x) \Delta x$ приросту функції називають **диференціалом** функції і позначають dy

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Прийнявши $\Delta x = dx$, отримаємо $dy = f'(x) dx$.

Якщо Δx мале, тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$.

Отож, для наближених обчислень зручно використовувати формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Приклад 5.27. Знайти диференціал функцій:

1. $y = \cos^4 x$.

Розв'язування.

$$dy = (\cos^4 x)' \cdot dx = 4(\cos x)^3 (\cos x)' dx = -4(\cos x)^3 \sin x dx.$$

2. $y = \log_5(x^3 + 7)$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} dy &= (\log_5^7(x^3 + 7))' \cdot dx = 7(\log_5(x^3 + 7))^6 (\log_5(x^3 + 7))' dx = \\ &= 7(\log_5(x^3 + 7))^6 \frac{1}{(x^3 + 7) \ln 5} (x^3 + 7)' dx = \\ &= 7(\log_5(x^3 + 7))^6 \frac{1}{(x^3 + 7) \ln 5} 3x^2 dx. \end{aligned}$$

Приклад. 5.28. Обчислити наближене значення $\arcsin 0,51$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Прийmemo $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$, застосувавши формулу

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x,$$

одержимо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513.$$

5.9. Правила Лопіталя

Для знаходження границь відношення двох функцій часто використовують неозначеності $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$. У випадку диференційовних функцій ці неозначеності розкриваються за допомогою правила Лопіталя, яке сформулюємо у вигляді двох теорем.

Теорема Перше правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та диференційовні в околі точки $x = a$, крім можливо, самої точки a , причому $g(x)$ і $g'(x)$ у цьому околі відмінні від нуля, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Теорема Друге правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та диференційовні в околі точки $x = a$, крім можливо, самої точки a , причому $g(x)$ і $g'(x)$ у цьому околі

відмінні від нуля, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Зауважимо, що A може бути скінченним так і нескінченним.

Приклад 5.29. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Розв'язування. Чисельник і знаменник границі прямують до нуля при $x \rightarrow 1$, тому отримаємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Використаємо Перше правило Лопіталя, тобто розглянемо границю відношень похідних заданих функцій

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Приклад 5.30. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Розв'язування. Чисельник і знаменник границі прямують до ∞ при $x \rightarrow +\infty$, тому отримаємо невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Застосуємо Друге правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Приклад 5.31. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x)$.

Розв'язування. Отримуємо невизначеність вигляду $0 \cdot \infty$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, використаємо Друге правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

Приклад 5.32. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

Розв'язування. Одержуємо невизначеність вигляду $\infty - \infty$. Для того, щоб знайти границю, зведемо дробу до спільного знаменника, а потім, отримавши невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, застосуємо Перше правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(xe^x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1}.$$

Одержали невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, застосуємо ще раз правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x + xe^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 5.33. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

Розв'язування. Це невизначеність вигляду 0^0 . Перетворимо задану функцію, тобто $(\sin x)^x = e^{x \ln(\sin x)}$, розглянемо показник степеня $x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$.

Обчислимо значення границі цього виразу, використавши Друге правило Лопіталя,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sin x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Застосуємо першу чудову границю

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0.$$

Отже, одержимо $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад 5. 34. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M(1; -1)$.

Розв'язування. З рівняння кривої знайдемо похідну, враховуючи, що y функція x ,

$$2x + 2y^2 + 4xy' + 12y^3y' = 0, \text{ тобто } y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Обчислимо значення похідної при $x_0 = 1$ $y_0 = -1$ (координати точки M)

$$y'(1) = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Тоді одержимо рівняння дотичної

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow x - 4y - 5 = 0.$$

Аналогічно отримаємо рівняння нормалі

$$y + 1 = -4(x - 1) \Rightarrow 4x + y - 3 = 0.$$

5.10. Похідні та диференціали вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна, то її похідну $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ називають похідною **першого порядку** функції $y = f(x)$.

Якщо ж $y' = f'(x)$ — диференційовна функція, тоді її похідну $(f'(x))' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ називають похідною **другого порядку** функції $y = f(x)$.

Похідною **n -го порядку** функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної **$(n-1)$ -го порядку** функції $y = f(x)$, тобто

$$(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{або} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Приклад 5.35. Знайти y'' , якщо $y = 5x^3 + \cos x$.

Розв'язування. $y' = 15x^2 - \sin x$;

$$y'' = (y')' = (15x^2 - \sin x)' = 30x - \cos x.$$

Приклад 5.36. Знайти y''' , якщо $y = x^4 + \sqrt{4 - x^2}$.

Розв'язування. Обчислимо першу похідну

$$y' = 4x^3 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 4x^3 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \left(4x^3 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = 12x^2 - \frac{\sqrt{4-x^2} - x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \\ &= 12x^2 - \frac{\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)} = 12x^2 - \frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)^{3/2}} = \\ &= 12x^2 - \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Отже, одержимо

$$\begin{aligned} y''' = (y'')' &= \left(12x^2 - 4(4-x^2)^{-3/2}\right)' = \\ &= 24x - 4 \frac{-3}{2} (4-x^2)^{-5/2} (-2x) = 24x - 12x (4-x^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Далі, якщо u та v — n — разів диференційовні функції змінної x , а k — стала, тоді

$$(ku)^{(n)} = k u^{(n)}; \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} \quad \text{формула Лейбніца},$$

$$\text{де } u^{(0)} = u, \quad v^{(0)} = v \quad \text{і} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}.$$

Приклад 5.37. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = x^2 e^x$.

Розв'язування. За формулою Лейбніца

$$y^{(n)} = (e^x)^{(n)} x^2 + C_n^1 (e^x)^{(n-1)} (x^2)' + C_n^2 (e^x)^{(n-2)} (x^2)'' ,$$

оскільки решта членів дорівнюють нулю. Тому

$$y^{(n)} = e^x x^2 + n e^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x \cdot 2 = e^x [x^2 + 2n x + n(n-1)] .$$

Розглянемо похідні вищих порядків функції, яка задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Якщо $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовні функції, причому $\varphi'(t) \neq 0$, тоді як ми знаємо,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Далі

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Аналогічно знаходимо всі інші похідні вищих порядків.

Приклад 5.38. Знайти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Розв'язування. $\frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{3a \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

Вважатимемо, що диференціал функції $y = f(x)$ є знову диференційовна функція. Диференціалом другого порядку, або другим диференціалом функції $y = f(x)$ називають диференціал від її першого диференціала, і його позначають $d(dy) = d^2y$.

Розглянемо два випадки:

1. x – незалежна змінна, тобто dx – стала і $d(dx) = 0$.
2. x – залежна змінна, тобто, коли $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ і $d(dx) = d^2x \neq 0$.

Тоді у випадку 1 отримаємо

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x) dx^2.$$

У випадку 2 матимемо

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(f'(x) dx) = d(f'(x)) dx + f'(x) d(dx) = \\ &= f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x. \end{aligned}$$

Отож, замінивши змінну, форма диференціала першого порядку не змінюється, тоді як форма диференціала другого порядку змінюється. Аналогічно, коли функція $y = f(x)$ є n разів диференційовна, то **диференціалом n -го** порядку цієї функції називають диференціал від її диференціала $(n-1)$ -го порядку і його позначають $d(d^{n-1}y) = d^ny$.

У випадку, коли x – незалежна змінна, правильна формула

$$d^ny = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Приклад 5.39. Знайти диференціали першого та другого порядку функції $v = e^{2t}$.

Розв'язування. $dv = 2e^{2t}dt, \quad d^2v = 4e^{2t} \cdot dt^2$.

Приклад 5.40. Знайти диференціали першого, другого та третього порядку функції $y = (2x-3)^3$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} dy &= 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2 dx, \\ d^2y &= 12(2x-3) \cdot 2dx^2 = 24(2x-3) dx^2, \\ d^3y &= 24 \cdot 2dx^3 = 48 dx^3. \end{aligned}$$

5.11. Формула Тейлора

Нехай функція $y = f(x)$ має похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в околі точки x_0 і нехай x довільна точка з заданого околу, тоді правильна формула

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

яку називають **формулою Тейлора** функції $f(x)$, а $R_n(x)$ називають залишковим членом формули Тейлора

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

де $c \in (x_0, x)$ – залишковий член у формі Лагранжа.

Якщо $x_0 = 0$, то отримуємо частковий випадок формули Тейлора, який називають **формулою Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Розвинення елементарних функцій за формулою Маклорена (всюди $0 < c < 1$):

$$1. y = e^x, \quad y^{(k)}(x) = e^x, \quad y(0) = y^{(k)}(0) = 1.$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} - \text{залишковий член у формі Лагранжа.}$$

Тоді отримаємо формулу Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n.$$

$$2. y = \sin x, \quad y^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1, \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos(c) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$3. y = \cos x,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos(c) \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4. $y = \ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}.$$

5. $y = (1+x)^m$, $m = \text{const}$,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+c)^{m-n-1}.$$

Приклад 5.41. Зобразити функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у вигляді полінома п'ятого степеня стосовно двочлена $x-1$.

Розв'язування. Обчислимо значення функції $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до п'ятого порядку включно, якщо $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f'(1) = \frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad f''(1) = -\frac{2}{9};$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}, \quad f'''(1) = \frac{10}{27};$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}, \quad f^{IV}(1) = -\frac{80}{81};$$

$$f^V(x) = \frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}}, \quad f^V(1) = \frac{880}{243}.$$

Відповідно, за формулою Тейлора отримаємо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 -$$

$$- \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243 \cdot 5!}(x-1)^5 + R_5,$$

де $R_5 = \frac{f^{IV}(c)}{6!}(x-1)^6 = -\frac{12320}{729 \cdot 6!} \cdot c^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6, \quad 1 < c < x.$

Приклад 5.42. Написати розвинення функції $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$ за цілими додатними степенями x до членів з x^4 .

Розв'язування. Застосуємо розвинення елементарних функцій

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Одержимо

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right]^2 - x^2 \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

5.12. Дослідження поведінки функції

Якщо для двох довільних аргументів x_1 і x_2 з множини X ($X \subset D(f)$) таких, що $x_1 > x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають **зростаючою на множині X** .

Якщо для двох довільних аргументів x_1 і x_2 з множини X ($X \subset D(f)$) таких, що $x_1 > x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають **спадною на множині X** .

Зростаючу або спадну функцію називають **монотонною**. Проміжки, на яких функція зростає або спадає, називають **проміжками монотонності** цієї функції.

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, диференційована на $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, то $f(x)$ є зростаючою на $(a; b)$.

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, диференційована на $(a; b)$ і $f'(x) < 0$ при $x \in (a; b)$, то $f(x)$ є спадною на $(a; b)$.

Якщо похідна $f(x)$ дорівнює нулеві на $(a; b)$, тоді $f(x)$ є сталою величиною на $[a; b]$.

Точку x_0 ($x_0 \in D(f)$) називають **точкою максимуму** неперервної функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ – **максимумом** цієї

функції, якщо існує деякий окіл точки x_0 , що для всіх x ($x \neq x_0$) з цього проміжку виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$.

Точку x_0 ($x_0 \in D(f)$) називають **точкою мінімуму** неперервної функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ – **мінімумом** цієї функції, якщо існує деякий окіл точки x_0 , що для всіх x ($x \neq x_0$) з цього проміжку виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$.

Точки максимуму та мінімуму називають **точками екстремуму**, а максимум і мінімум функції – **екстремумами функції**.

Необхідна умова існування екстремуму (наслідок з теореми Ферма).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $(a; b)$ і досягає в деякій точці x_0 ($x_0 \in (a; b)$) екстремуму, тоді $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує.

Точку x_0 ($x_0 \in D(f)$), в якій або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує, називають **критичною точкою** цієї функції.

Достатня умова існування екстремуму.

Нехай x_0 є критичною точкою функції $f(x)$ й існує деяке додатне δ , що функція $f(x)$ диференційована на множині $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$. Якщо у разі переходу через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, тоді x_0 буде точкою екстремуму, якщо:

- а) похідна $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–”, тоді x_0 буде точкою максимуму;

- б) похідна $f'(x)$ змінює знак з “–” на “+”, тоді x_0 буде точкою мінімуму.

Якщо ж у разі переходу через критичну точку похідна не змінює знак, тоді в цій точці функція не має екстремуму.

Приклад 5.43. Дослідити на екстремум і проміжки монотонності функцію $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 10$.

Розв’язування. Знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18$. Похідна існує у всіх точках. Прирівнюючи похідну до нуля, одержимо критичні точки

$$6x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Методом інтервалів визначимо знак похідної $f'(-2) = 30 > 0$, $f'(0) = -18 < 0$, $f'(4) = 30 > 0$.

У разі переходу через критичну точку $x = -1$ похідна змінює знак з "+" на "-", тому $x = -1$ буде точкою максимуму, а $f(-1) = 20$ – максимумом функції.

Переходячи через критичну точку $x = 3$, похідна змінює знак з "-" на "+", тому $x = 3$ буде точкою мінімуму, а $f(3) = -44$ – мінімумом функції.

$f'(x) > 0$ на множині $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, тому функція на цій множині зростає, $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ – проміжки зростання.

$f'(x) < 0$ на множині $(-1; 3)$, тому функція на цій множині спадає, $(-1; 3)$ – проміжки спадання.

Приклад 5.44. Дослідити на екстремум і проміжки монотонності функцію $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язування. Знайдемо похідну $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Похідна існує у всіх точках. Прирівнюючи похідну до нуля, одержимо критичні точки

$$4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Методом інтервалів визначимо знак похідної $f'(-1) = -16 < 0$, $f'(1) = -8 < 0$, $f'(4) = 64 > 0$.

У випадку переходу через критичну точку $x = 0$ похідна не змінює знак, тому $x = 0$ не буде точкою екстремуму. Переходячи через критичну точку $x = 3$, похідна змінює знак з "-" на "+", тому $x = 3$ буде точкою мінімуму, а $f(3) = -27$ – мінімумом функції.

$f'(x) > 0$ на множині $(3; +\infty)$, тому функція на цій множині зростає, $(3; +\infty)$ – проміжок зростання. $f'(x) < 0$ на множині $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$, тому функція на цій множині спадає, $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$ – проміжки спадання.

Щоб знайти **найбільше та найменше значення** неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ треба:

- а) знайти усі критичні точки функції $f(x)$, які належать $[a; b]$;
- б) обчислити значення функції у цих критичних точках і на кінцях відрізка;
- в) серед одержаних значень вибираємо найбільше та найменше, що і є розв'язком задачі.

Приклад 5.45. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 13$ на $[1; 4]$.

Розв'язування. Знайдемо критичні точки

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Тепер обчислимо $f(2) = -1$; $f(1) = 4$; $f(4) = 7$.

Отже, найбільше значення функції -7 , а найменше $-(-1)$.

Опуклість та увігнутість графіка функції. Точки перегину.

Графік диференційовної функції називають **опуклим на проміжку** $(a; b)$, якщо відповідна частина кривої розміщена нижче від дотичної, проведеної в будь-якій точці цієї кривої.

Графік диференційовної функції називають **увігнутим на проміжку** $(a; b)$, якщо відповідна частина кривої розміщена вище від дотичної, проведеної в будь-якій точці цієї кривої.

Точку x_0 ($x_0 \in D(f)$) називають **точкою перегину** неперервної функції $f(x)$, якщо x_0 відокремлює проміжки опуклості й увігнутості цієї функції.

Теорема 7. Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну $f''(x)$ на проміжку $(a; b)$, тоді:

- а) при $f''(x) < 0$ на $(a; b)$ графік функції опуклий на $(a; b)$;
- б) при $f''(x) > 0$ на $(a; b)$ графік функції увігнутий на $(a; b)$;
- в) якщо $f''(x)$ в точці x_0 ($x_0 \in (a; b)$) дорівнює нулеві або не існує і у випадку переходу через цю точку змінює знак, то x_0 є точкою перегину графіка функції.

Приклад 5.46. Знайти проміжки опуклості й увігнутості графіка функції $f(x) = x^5 + 10x^2 - 2$.

Розв'язування. Обчислимо другу похідну функції

$$f'(x) = 5x^4 + 20x, \quad f''(x) = 20x^3 + 20.$$

Розв'яжемо рівняння

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 + 20 = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Методом інтервалів визначимо знак другої похідної $f''(-2) = -140 < 0$, $f''(0) = 20 > 0$.

У разі переходу через точку $x = -1$ друга похідна змінює знак з "–" на "+", тому $x = -1$ буде точкою перегину функції, $f''(x) > 0$ на множині $(-1; +\infty)$, тому графік функції на цій множині увігнутий, $f''(x) < 0$ на множині $(-\infty; -1)$, тому графік функції на цій множині опуклий.

Асимптоти графіка функції.

Пряму $y = kx + b$ називають **похилою асимптотою** графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо

$$f(x) - kx - b \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \text{ (} x \rightarrow -\infty \text{)}.$$

Значення сталих k і b обчислюють за формулами

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right), \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

$$(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)).$$

У випадку $k = 0$ асимптоту називають **горизонтальною**.

Пряму $x = a$ називають **вертикальною асимптотою**, якщо $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.

Приклад 5.47. Знайти асимптоти кривої $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5}$.

Розв'язування. Область визначення цієї функції

$$D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty).$$

Треба дослідити поведінку функції при $x \rightarrow -5$, отримаємо

$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \infty$. Обчислимо односторонні границі функції в точці -5

$$f(-5+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x > -5}} \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5} = \left(\frac{41}{+0} \right) = +\infty,$$

$$f(-5-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5} = \left(\frac{41}{-0} \right) = -\infty.$$

Отже, пряма $x = -5$ – вертикальна асимптота заданої функції, зауважимо, що точка -5 є точкою розриву другого роду.

Знайдемо похилі асимптоти

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 6}{x(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 + 5x} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x + 6}{x + 5} = -7. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow -\infty$ значення границь не змінюється.

Отже, при $x \rightarrow \pm\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y = x - 7$.

Приклад 5.48. Дослідити поведінку функції та побудувати графік $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$.

Розв'язування. Знаменник не повинен дорівнювати нулеві, тому $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. Областю визначення функції буде множина $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Знайдемо точки перетину з координатними осями:

з Oy ($x = 0$): $y = 0 \Rightarrow (0; 0)$ графік функції проходить через початок координат;

з Ox ($y = 0$): $0 = \frac{x^2}{x + 2} \Rightarrow x = 0$, одержали ту саму точку.

Використовуючи метод інтервалів, визначимо проміжки знакосталості функції.

Отже, при $x \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$ $y > 0$ графік функції проходить у верхній півплощині; при $x \in (-\infty; -2)$ $y < 0$, графік функції проходить у нижній півплощині.

Оскільки область визначення функції не є симетричною стосовно початку відліку, то функція ні парна, ні непарна. Неперіодична.

Точка розриву одна $x = -2$, обчислимо односторонні границі в цій точці

$$f(-2+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{+0} = +\infty,$$

$$f(-2-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{-0} = -\infty;$$

$x = -2$ – точка розриву другого роду, $x = -2$ – вертикальна асимптота.

Дослідимо похилі асимптоти

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2. \end{aligned}$$

Аналогічно $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, і $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = -2$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y = x - 2$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Дослідимо проміжки монотонності, точки екстремуму

$$f' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2};$$

$$f' = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -4.$$

Визначимо знак похідної $f'(x) > 0$ на множині

$(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, тому функція на цій множині зростає,
 $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ – проміжок зростання; $f'(x) < 0$ на множині $(-4; -2) \cup (-2; 0)$, тому функція на цій множині спадає,
 $(-4; -2) \cup (-2; 0)$ – проміжок спадання;

$x = 0$ – точка мінімуму, $f(0) = 0$ – мінімум функції;

$x = -4$ – точка максимуму, $f(-4) = -8$ – максимум функції.

Дослідимо проміжки опуклості та точки перегину

$$\begin{aligned} f'' &= \left(\frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \right)' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2 + 4x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \\ &= \frac{8}{(x+2)^3}; \end{aligned}$$

$f'' = 0 \Rightarrow \frac{8}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow$ точок перегину немає. Визначимо

знак другої похідної

$f'' < 0$ при $x \in (-\infty; -2)$, тому функція опукла на цій множині;

$f'' > 0$ при $x \in (-2; +\infty)$, тому функція увігнута на цій множині.

Аудиторна робота 8

Обчислити похідні:

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| 1. $y = 2x^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}.$ | 3. $y = \frac{12}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{4}{x}.$ | 6. $y = x^2 \operatorname{tg} x.$ |
| | 4. $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} + \frac{7}{x^4}.$ | 7. $y = \sqrt{x} e^x.$ |
| 2. $y = x^5 + \frac{6}{\sqrt[5]{x}}.$ | 5. $y = x^4 \sin x.$ | 8. $y = \frac{3 + x^4}{x^3 + 2}.$ |

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| 9. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - 5x}$. | 18. $y = \ln \cos x$. | 29. $y = \arccos(8x)$. |
| 10. $y = x^7 e^x + 7^x$. | 19. $y = \log_2(x + 3)$. | 30. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$. |
| 11. $y = x^6 4^x + 9^x$. | 20. $y = \log_3(\ln x)$. | 31. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x^2}$. |
| 12. $y = \frac{8}{\sqrt{4x + 5}}$. | 21. $y = \ln^2 x$. | 32. $y = \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. |
| 13. $y = \frac{12}{\sqrt[4]{x^3 + 10}}$. | 22. $y = \cos^2 x^3$. | 33. $y = \arcsin^2 x$. |
| 14. $y = \sqrt{\frac{2 + x^3}{1 - x^4}}$. | 23. $y = \operatorname{tg}^3 2x$. | 34. $y = \operatorname{arctg}^6 x$. |
| 15. $y = \sin 3x + 2$. | 24. $y = \operatorname{ctg}^6 5x$. | 35. $y = \operatorname{arcctg}^5 x^4$. |
| 16. $y = \cos 5x - 3$. | 25. $y = e^{1/x^2}$. | 36. $y = x^3 e^x \sin x$. |
| 17. $y = 5 \operatorname{ctg} 2x$. | 26. $y = 4^{\sin^3 x}$. | 37. $y = \sqrt{x} 5^x \ln x$. |
| | 27. $y = e^{\operatorname{tg} 5x}$. | |
| | 28. $y = \arcsin(4x)$. | |

Домашня робота 8

Обчислити похідні:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $y = x^2 - \frac{7}{\sqrt{x}}$. | 7. $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^3}$. | 13. $y = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$. |
| 2. $y = 3x^4 + \frac{4}{\sqrt{x^7}}$. | 8. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + 3x}$. | 14. $y = \sqrt[3]{\frac{4 + x^6}{3 + x^2}}$. |
| 3. $y = x^6 - \frac{8}{\sqrt[3]{x^5}}$. | 9. $y = \frac{1 - x^5}{\cos x}$. | 15. $y = 3 \sin 4x$. |
| 4. $y = x^7 + \frac{9}{\sqrt[3]{x^4}}$. | 10. $y = x^3 e^x - 8^x$. | 16. $y = 8 \cos 2x$. |
| 5. $y = x^3 \cos x$. | 11. $y = x^5 3^x + 6^x$. | 17. $y = 6 \operatorname{tg} 4x$. |
| 6. $y = x^6 \operatorname{ctg} x$. | 12. $y = \frac{5}{\sqrt[3]{9x + 4}}$. | 18. $y = \ln \sin x$. |
| | | 19. $y = \log_5(x - 7)$. |

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| 20. $y = \ln^3 x$. | 29. $y = \arccos(5x)$. | 37. $y = \operatorname{arctg}^8 x$. |
| 21. $y = \sin^5 x^4$. | 30. $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$. | 38. $y = \arcsin e^{2x}$. |
| 22. $y = \ln^5 x^2$. | 31. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. | 39. $y = \operatorname{arctg}^3 x^6$. |
| 23. $y = \operatorname{ctg}^7 2x$. | 32. $y = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}$. | 40. $y = \operatorname{arctg}^6 x^9$. |
| 24. $y = \operatorname{tg}^4 6x$. | 33. $y = \arcsin \sqrt[6]{x}$. | 41. $y = \ln \ln \ln x$. |
| 25. $y = e^{2/x^3}$. | 34. $y = \arccos \sqrt{x}$. | 42. $y = \ln(\cos 2x)$. |
| 26. $y = 3^{\cos^2 x}$. | 35. $y = \arcsin^2 x$. | 43. $y = x^3 e^x \sin x$. |
| 27. $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$. | 36. $y = \arccos^3 x$. | 44. $y = \sqrt{x^5} 4^x \lg x$. |
| 28. $y = 5^{\cos 2x}$. | | |

Аудиторна робота 9

9.1. Обчислити диференціали таких функцій:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4x$. 2. $y = \sqrt{x^2 + 4}$. 3. $y = \ln \cos x$.

9.2. Обчислити другу похідну для таких функцій:

1. $y = \arccos x$. 2. $y = \arcsin^2 x$. 3. $y = \ln \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

9.3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити такі границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$. 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}}{\ln(1 + 2x)}$.

9.4. Задано рівняння прямолінійного руху $s = f(t)$. Знайти значення швидкості та прискорення у момент часу t_0 :

1. $s = 3t - t^4$, $t_0 = 1$. 2. $s = t^3 + 8t^2 + 5$, $t_0 = 2$.

9.5. Дослідити поведінку функцій і нарисувати їхні графіки:

$$\begin{aligned} 1. y &= x^3 + x^2 - 16x - 16. & 2. y &= \frac{x}{1+x^2}. & 3. y &= \frac{x^2}{4-x^2}. \\ 4. y &= x - 2 \ln x. \end{aligned}$$

Домашня робота 9

9.1. Обчислити диференціали таких функцій:

$$\begin{aligned} 1. y &= 2x^4 - 3x^8 + 5x. & 2. y &= \sqrt[3]{x^6 + 8}. & 3. y &= \ln \sin x. \\ 4. y &= \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - e^{3x}. \end{aligned}$$

9.2. Обчислити другу похідну для таких функцій:

$$\begin{aligned} 1. y &= x^2 \cos x. & 2. y &= \arcsin x. & 3. y &= x^3 \ln x. \\ 4. y &= \ln \sqrt[5]{x^5 + 6}. \end{aligned}$$

9.3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити такі границі:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x}. & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \sin x}{x^3}. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}. \\ 4. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}. & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x (1 - e^{2x}). & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

9.4. Задано рівняння прямолінійного руху $s = f(t)$. Знайти значення швидкості та прискорення у момент часу t_0 .

$$\begin{aligned} 1. s &= 5t - t^2, \quad t_0 = 2. & 2. s &= t^4 + 8t^2, \quad t_0 = 1. \\ 3. s &= 16t - \frac{1}{t^2}, \quad t_0 = 2. \end{aligned}$$

9.5. Дослідити поведінку функцій і нарисувати їхні графіки:

$$\begin{aligned} 1. y &= x^3 + x^2 - 8x - 8. & 2. y &= \frac{x^2}{x+4}. & 3. y &= \frac{x^2}{4-x^2}. \\ 4. y &= x \ln x. \end{aligned}$$

5.13. Застосування похідної в економіці

5.13.1. Еластичність

Еластичністю функції $y = f(x)$ називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту аргументу x при $\Delta x \rightarrow 0$ і позначають

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Еластичність функції наближено виражає, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ у разі зміни незалежної змінної x на 1%.

З означень еластичності й похідної випливає, що

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'$$

або

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Враховуючи, що $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$ і $x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{(\ln x)'}$, одержимо

$$E_x(y) = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'},$$

тобто еластичність можна подати у вигляді "логарифмічної" похідної.

Якщо $|E_x(y)| < 1$, то функцію називають **нееластичною** (її відносний приріст спадає). Якщо $|E_x(y)| > 1$, то функцію називають **еластичною** (її відносний приріст зростає).

Властивості еластичності

1. Еластичність – безрозмірна величина, значення якої не залежить від того, в яких одиницях виражаються величини y та x , тобто

$$E_{ax}(by) = E_x(y).$$

2. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто

$$E_x(y) = xT_y.$$

3. Еластичності взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

4. Еластичність добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, що залежить від того самого аргументу x , дорівнює сумі еластичностей

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

5. Еластичність частки двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, що залежить від того самого аргументу x , дорівнює різниці еластичностей

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

6. Еластичність алгебричної суми двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$ обчислюємо за формулою

$$E_x(u \pm v) = \frac{uE_x(u) \pm vE_x(v)}{u \pm v}.$$

Приклади 5.49. Знайти еластичності для таких функцій:

$$1. \ y = x^\alpha, \quad E_x(y) = E_x(x^\alpha) = \frac{x}{x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{x\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha} = \alpha.$$

$$2. \ y = a^x, \quad E_x(y) = E_x(a^x) = \frac{x}{a^x} \frac{da^x}{dx} = \frac{x}{a^x} a^x \ln a = x \ln a.$$

$$3. \ y = kx + b,$$

$$E_x(y) = E_x(kx + b) = \frac{x}{kx + b} \frac{d(kx + b)}{dx} = \frac{x}{kx + b} k = \frac{kx}{kx + b}.$$

Застосування еластичності в економічному аналізі

Еластичність функцій застосовують для аналізу попиту й споживання, прогнозів цінової політики. Нехай $q = q(p)$ – функція попиту на товар стосовно ціни p за одиницю товару.

Еластичність попиту за ціною

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} q'$$

виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-який товар або послугу у разі зміни ціни на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Приклад 5.50. Задано функцію попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ і функцію пропозиції $s = p + 0,5$, де q , s – обсяги товарів, а p – їхня ціна. Знайти рівноважну ціну, еластичності попиту та пропозиції за рівноважної ціни.

Знайдемо рівноважну ціну p^* , прирівнюючи попит і пропозицію

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0,5, \quad p+8 = p^2 + 2p + 0,5p + 1, \quad p^2 + 1,5p - 7 = 0.$$

Маємо $p_1 = -3,5$; $p_2 = 2$. Отже, рівноважна ціна $p^* = 2$.

Обчислимо еластичність попиту

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q' = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Обчислимо еластичність пропозиції

$$E_p(s) = \frac{p}{s} s' = \frac{2p}{2p+1}.$$

За рівноважної ціни $p^* = 2$ матимемо: $E_2(q) = -0,3$, $E_2(s) = 0,8$. Попит і пропозиція за рівноважною ціною нееластичні. Це означає, що зміна ціни не спричинить різкої зміни попиту й пропозиції. Якщо ціна збільшиться на 1%, то попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

5.13.2. Теорія одноресурсної фірми

Припустимо, що фірма виробляє один вид продукції в кількості y , для чого використовує один ресурс x . Фірма характеризується своєю виробничою функцією $y = f(x)$, що виражає

залежність обсягу продукції, що випускається, від обсягу витраченого ресурсу x . Крім того, будемо вважати, що виробнича функція $f(x)$ двічі диференційовна в області визначення D , а також неспадна для всіх $x \in E$, $E \subset D$: $f''(x) \leq 0$.

Нехай p – ціна одиниці ресурсу, а w – ціна одиниці продукції, що випускається. Отже, прибуток фірми $P = P(x)$ є функцією від обсягу ресурсу x . Тоді $P(x) = wf(x) - px$.

Розглянемо задачу фірми: потрібно знайти максимальне значення прибутку – функції $P(x)$, за умови, що $x \geq 0$, тобто

$$P(x) \rightarrow \max, \quad x \geq 0.$$

Обчислимо похідну функції $P(x)$ і прирівняємо її до нуля

$$P'(x) = wf'(x) - p, \quad wf'(x) - p = 0,$$

звідки

$$f'(x^*) = \frac{p}{w}.$$

Очевидно, що обсяг ресурсу додатний, а отже, точка x^* є точкою екстремуму. Оскільки ми припустили, що $f''(x) \leq 0$, то це точка максимуму. Точку x^* називають **оптимальним** розв'язком задачі фірми.

Приклад 5.51. Обсяг видобування щебеню y залежить від кількості робітників x і задається функцією $y = 6\sqrt{x}$. Ціна щебеня – 40 грн./т, заробітна плата робітника – 30 грн./год. Крім заробітної плати, інші витрати не враховуються. Знайти оптимальну кількість робітників.

За кількості x робітників прибуток фірми дорівнює

$$P(x) = wy - px = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x = 240\sqrt{x} - 30x.$$

Знайдемо похідну функції прибутку:

$$P'(x) = 240 \frac{1}{2\sqrt{x}} - 30 = \frac{120}{\sqrt{x}} - 30$$

та стаціонарні точки з умови $P'(x) = 0$, тобто $\frac{120}{\sqrt{x}} - 30 = 0$, звідки $x^* = 16$.

Знайдемо другу похідну

$$P''(x) = 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{60}{\sqrt{x^3}}$$

та її значення в стаціонарній точці x^*

$$P''(x) = -\frac{60}{\sqrt{16^3}} = -\frac{15}{16} < 0.$$

Отже, $x^* = 16$ – точка максимуму і є оптимальною кількістю робітників.

Приклад 5.52. Знайти оптимальний обсяг q продукції фірми, якщо відомі ціна одиниці продукції $p = 15$ грош. од. і функція витрат $C(q) = q^3 + 3q$.

Запишемо функцію прибутку фірми в разі виробництва q одиниць продукції

$$P(q) = pq - C(q) = 15q - q^3 - 3q = q(12 - q^2).$$

Очевидно, $P(q) \geq 0$, якщо $q \in [0; \sqrt{12}]$. Оскільки $P = P(q)$ – неперервна функція, то на відрізку $[0; \sqrt{12}]$, у деякій точці q_0 , вона набуває свого найбільшого значення. Оскільки $P(q) \leq 0$ при $q > \sqrt{12}$, то $P(q_0)$ – найбільше значення за будь-якого $q \geq 0$. Знайдемо похідну від функції прибутку

$$P'(q) = 12 - 3q^2 = 0,$$

звідки $q_0 = 2$.

Оскільки фірма намагається одержати максимальний прибуток, то вона випускатиме дві одиниці продукції. Фактично ми з'ясували, що за ціни $p = 15$ грош. од. фірмі вигідно випускати для продажу дві одиниці продукції.

5.13.3. Оптимізація оподаткування підприємств

Розглянемо економічну ситуацію щодо дій уряду держави з оподаткування підприємств і фірм і визначимо, як пов'язані прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі за заданої податкової ставки. Нехай ціна на продукцію $p(q) = a - bq$, $a > 0$, $b > 0$, тобто лінійно зменшується зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а витрати $C = C(q)$ залежать від обсягу продукції q так $C(q) = cq^2 + dq + e$, де c , d , e – деякі додатні сталі. Нехай податок є акцизом зі ставкою t , тобто з кожної проданої одиниці товару держава одержує податок t , і податкова сума становить $T = tq$. Тоді фірма має прибуток

$$P(q) = pq - C(q) - T = q(a - bq) - cq^2 - dq - e - tq.$$

Для того, щоб максимізувати прибуток, фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку

$$P'(q) = a - 2bq - 2cq - d - t = a - d - t - 2q(b + c).$$

Перевіримо необхідну умову існування екстремуму. Для цього порівнюємо до нуля похідну функції прибутку $P'(q) = 0$, $a - d - t - 2q(b + c) = 0$. Знайдемо критичну точку

$$q^* = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Оскільки $P''(q) = -2(b + c) < 0$, то згідно з достатніми умовами локального екстремуму q^* – точка максимуму.

Оскільки $t > 0$, то така податкова ставка призводить до зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дій уряду зі встановлення податкової ставки t обчислимо податковий дохід держави

$$T = tq^* = \frac{t(a - d - t)}{2(b + c)} = \frac{-t^2}{2(b + c)} + \frac{(a - d)t}{2(b + c)} = \frac{1}{2(b + c)}[-t^2 + (a - d)t].$$

Знайдемо похідну $T' = \frac{1}{2(b+c)}[-2t+(a-d)]$, визначимо критичні точки з умови $T' = 0$, тобто $2t = a - d$, $t = \frac{a-d}{2}$.

Оскільки друга похідна $T'' = \frac{-1}{(b+c)} < 0$, то максимум досягається при $t^* = \frac{a-d}{2}$ і становить

$$T^* = t^* q^* = \frac{1}{2(b+c)} \left[-\frac{(a-d)^2}{4} + \frac{(a-d)^2}{2} \right] = \frac{(a-d)^2}{8(b+c)}.$$

Оптимальний випуск продукції у цьому значенні t^* становить $q^* = \frac{a-d}{4(b+c)}$, і відповідний прибуток фірми $P(q^*) = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e$. Взагалі прибуток фірми за податкової ставки t

$$P(q^*) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e,$$

звідки випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток фірми зменшується, якщо $0 \leq t \leq a-d$, і існує область значень податкової ставки при $t \geq \tilde{t} = a-d - \sqrt{4e(b+c)}$, в якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи держави додатні. Це відбувається тому, що за критерій вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку фірми, але не було обумовлено, що цей максимум має бути додатним.

Приклад 5.53. Нехай t – податкова ставка, для фірми відомі функція доходу $R(q) = 16q - q^2$ і функція витрат $C(q) = q^2 + 1$. Визначити, яким має бути податок t , щоб сумарний податок T з усієї продукції був найбільшим.

Запишемо функцію прибутку фірми $P(q) = R(q) - C(q) - T$, тобто

$$P(q) = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

З'ясуємо, за якого значення q функція прибутку набуває максимального значення. Оскільки необхідна умова максимуму прибутку $P'(q) = 0$, то $P'(q) = 16 - 4q - t$. Розв'яжемо рівняння

$16 - 4q - t = 0$, $4q = 16 - t$. Отже, $q^* = 4 - t/4$. Оскільки $P''(q) = -4 < 0$, то q^* – точка максимуму. Отож, оптимальний обсяг $q^* = q_{\text{опт}}$.

Підставимо отримане значення обсягу продукції у вираз сумарного податку

$$T = q^* t = t(4 - \frac{t}{4}) = 4t - \frac{1}{4}t^2$$

і знайдемо умови, за яких T буде максимальним.

Обчислимо похідну $T' = 4 - \frac{1}{2}t$. Знаходимо стаціонарні точки

$T' = 0$. Отримаємо $4 - \frac{1}{2}t = 0$, $t = 8$. Тоді $q^* = 4 - 8/4 = 2$.

Обчислимо максимальний прибуток фірми

$$P_{\text{max}} = P(q_{\text{опт}}) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Оптимальний з погляду податкового законодавства акцизний податок $T_{\text{опт}} = 2 \cdot 8 = 16$.

Якщо податку немає, тобто $t = 0$, то $q_{\text{опт}} = 4$, $P_{\text{max}} = 31$.

Отже, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції й сприяє збільшенню прибутку від її реалізації.

Приклад 5.54. Для функції витрат $C(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 40x + 1000$. Знайти граничну вартість випуску $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 150$ одиниць продукції.

Обчислимо граничну вартість $C'(x) = 0,003x^2 - 0,6x + 40$.

При $x_1 = 50$

$$C'(50) = 0,003 \cdot 50^2 - 0,6 \cdot 50 + 40 = 17,5;$$

при $x_1 = 100$

$$C'(100) = 0,003 \cdot 100^2 - 0,6 \cdot 100 + 40 = 10;$$

при $x_1 = 150$

$$C'(150) = 0,003 \cdot 150^2 - 0,6 \cdot 150 + 40 = 17,5.$$

Отже, вартість виготовлення 51-ї та 151-ї одиниць продукції становитиме 17,5 грош. од., а – 101-ї одиниці – лише 10 грош.од.

Приклад 5.55. Для функції витрат $C(x) = 1000 + 10x + 0,1x^2$ виробництва x одиниць продукції знайти граничну та середню вартості виробництва одиниці продукції.

Гранична вартість становитиме

$$C'(x) = 10 + 0,2x.$$

Середня вартість виробництва одиниці продукції

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0,1x.$$

Приклад 5.56. Визначити граничний дохід від виробництва 300 одиниць продукції, якщо обсяг продукції обчислюємо за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – ціна одиниці продукції.

Визначимо ціну p одиниці продукції як функцію обсягу x . Для цього з рівності $x = 1000 - 100p$ виразимо p : $p = 10 - 0,01x$. Тоді функція доходу набуде вигляду

$$R(x) = xp = x(10 - 0,01x) = 10x - 0,01x^2.$$

Знайдемо граничний дохід

$$R'(x) = 10 - 0,02x.$$

Якщо $x = 300$, то матимемо

$$R'(300) = 10 - 0,02 \cdot 300 = 4.$$

Приклад 5.57. Фірма виготовляє x одиниць продукції, ціна кожної з яких $p = -0,1x + 80$, а функція витрат $C(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти граничний прибуток, якщо $x = 150$ і $x = 400$ одиниць продукції, та максимальний прибуток фірми.

Функція доходу має вигляд $R(x) = xp = x(-0,1x + 80) = 80x - 0,1x^2$.

Запишемо функцію прибутку фірми від виготовлення й продажу x одиниць продукції

$$P(x) = R(x) - C(x) = 80x - 0,1x^2 - (5000 + 20x) = 60x - 0,1x^2 - 5000.$$

Знайдемо граничний прибуток для довільного x

$$P'(x) = 60 - 0,2x.$$

Тоді шукані граничні прибутки дорівнюють

$$P'(150) = 60 - 0,2 \cdot 150 = 30, \quad P'(400) = 60 - 0,2 \cdot 400 = -20.$$

Знайдемо максимальний прибуток фірми. Оскільки $P'(x) = 60 - 0,2x = 0$ при $x = 300$ і $P''(x) = -0,2 < 0$, то в разі випуску $x = 300$ одиниць продукції фірма може отримати максимальний прибуток $P_{\max} = 12100$ грн.

Приклад 5.58. Обсяг продукції q , випущеної бригадою робітників, описується функцією $q = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (од.), $t \in [0; 8]$, де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 год після початку роботи й за годину до її завершення.

Продуктивність праці виражається похідною від обсягу виробництва

$$z(t) = q'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100.$$

Швидкість і темп зміни продуктивності праці виражаються похідною $z'(t)$ та

"логарифмічною" похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}$, відповідно. Тому

$$z'(t) = -5t + 15, \quad T_z(t) = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

У моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$, відповідно, маємо

$$z(1) = 112,5, \quad z'(1) = 10, \quad T_z(1) = 0,09;$$

$$z(7) = 82,5, \quad z'(7) = -20, \quad T_z(7) = -0,24.$$

Отже, наприкінці робочого дня продуктивність праці суттєво знижується; у цьому випадку зміна знака $z'(t)$ і $T_z(t)$ з $+$ на $-$ означає, що швидкість і темп зміни продуктивності праці в перші години робочого дня збільшується і знижується в останні години.

Приклад 5.59. Функція споживання деякої країни набуває вигляду $C(x) = 0,36x^{\frac{4}{3}} + 0,25x + 15$, де x – сукупний національний дохід (млн. грош. од.) Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 27 млн грош. од.

Гранична схильність до споживання

$$C'(x) = 0,48x^{\frac{1}{3}} + 0,25.$$

Якщо $x = 27$, то

$$C'(27) = 0,48(27)^{\frac{1}{3}} + 0,25 = 1,69.$$

Гранична схильність до збереження

$$S'(x) = 1 - C'(x) = 0,75 - 0,48x^{\frac{1}{3}}.$$

Якщо $x = 27$, то

$$S'(27) = 1 - C'(x) = 1 - 1,69 = -0,69.$$

Контрольні запитання

1. Яке означення числової послідовності?
2. Як формулюється означення границі числової послідовності?
3. Яку з послідовностей називають нескінченно малою?
4. Яку з послідовностей називають нескінченно малою?
5. Яку з послідовностей називають нескінченно великою?
6. Які числові послідовності називають обмеженими?

7. Яку з послідовностей називають нескінченно малою?
8. Які властивості збіжних послідовностей?
9. Що таке функція одного аргументу?
10. Які функції використовують в економічній теорії?
11. Як формують означення границі функції в точці?
12. Які властивості функції, що має границю?
13. Як визначають важливі границі?
14. Що таке односторонні границі функції в точці?
15. Як формують означення неперервності функції в точці?
16. Які властивості неперервних функцій?
17. Які точки називають точками розриву функції, як їх класифікують?
18. Яка економічна інтерпретація неперервності?
19. Що таке похідна функції однієї змінної?
20. За якими правилами обчислюється похідна суми, добутку, частки двох функцій?
21. За яким правилом обчислюється похідна складеної функції?
22. Який вигляд має рівняння дотичної до кривої?
23. Що називають диференціалом функції?
24. Як формують правила Лопіталя?
25. Що називають формулою Тейлора?
26. Які достатні умови існування екстремуму функції?
27. Які достатні умови точки перегину графіка функції?
28. Що називають еластичністю функції?
29. У чому полягає суть задачі оптимізації оподаткування підприємств?
30. У чому полягає суть задачі про неперервне нарахування відсотків?

Контрольна робота (Модуль) 2

1. Обчислити границі:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 - 3n^3 + 1}{21n^6 - n^5 - 5n}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{2x - 2}}$;

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin^2 2x}.$$

2. Обчислити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + 3x)}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x}.$$

3. Обчислити похідну першого порядку:

$$\text{а)} y = \operatorname{tg}(x^3 + 4x); \quad \text{б)} y = (x^3 - 7x + 7) \cos^3 x; \quad \text{в)} y = \operatorname{arctg} \frac{5x + 2}{\sqrt{x - 1}}.$$

4. Обчислити похідну другого порядку

$$y = e^{-x} \sin 7x + \ln^2 3x.$$

5. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = -x^3 + 3x^2 + 4.$$

Підсумкова контрольна робота

$$1. \text{ Обчислити: а)} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Розв'язати матричне рівняння } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему рівнянь: а) методом Гаусса; б) методом Крамера

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 3x + y - z = 8. \end{cases}$$

4. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

$$A(5, -1, 2), B(6, 1, 3), C(-3, 4, 0).$$

5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = 6\vec{k} - 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

6. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D
 $A(4, -1, 5), B(3, -1, 0), C(2, -2, 3), D(-1, 4, 2)$.

7. Задано трикутник з вершинами $A(4; -3), B(1; 4), C(6; -5)$.
Написати рівняння: а) сторони AC ; б) висоти BD ; в) медіани CM .

8. Обчислити: а) $(6 - 5i)(5 + 7i)$; б) $\frac{9 + 4i}{7 - 6i}$.

9. Обчислити $(-3 + 3i)^{16}$.

10. Обчислити границі:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^5 - 3n^3 + 1}{21n^3 - 2n^5 - 5n}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{2x - 1}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\sin^3 3x}$.

11. Обчислити границю, використовуючи правило Лопітала:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} - 1}{\ln(1 + 5x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\ln^2 x}$.

12. Обчислити похідну першого порядку:

а) $y = \operatorname{tg}(x^5 + 5x)$; б) $y = (x^4 - 8x + 7) \sin^3 x$; в) $y = \operatorname{arctg} \frac{3x + 1}{\sqrt{x + 2}}$.

13. Обчислити похідну другого порядку

$y = e^x \cos 3x + \ln^3 4x$.

14. Дослідити та побудувати графік функції

$y = -x^3 + 2x^2 - 1$.

Розділ 6

Функції багатьох змінних

6.1. Обчислення частинних похідних першого порядку функції багатьох змінних

Для простоти викладу розглядатимемо функції двох змінних, властивості яких легко переносяться на функції багатьох змінних.

Функцією двох (трьох) змінних x і y (x, y і z), визначеною на множині $X \subset \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$), називають правило, згідно з яким кожній точці $M(x, y) \in X$ ($M(x, y, z)$) відповідає тільки одне число $u \in \mathbf{R}$. У цьому випадку позначаємо

$$u = f(x, y), (x, y) \in X \quad (u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in X),$$

або

$$u = f(M), \quad M \in X.$$

Множину X називають **областю визначення функції** f і позначають $D(f)$.

Приклади 6.1. Знайти область визначення для таких функцій:

Розв'язування.

$$1. f(x, y) = \frac{5}{x^2 + y^2}.$$

Зауважимо, що знаменник дорівнює нулеві тоді і тільки, коли $x = 0$ і $y = 0$. Отож, $D(f) = \{(x, y) : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ або $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{O(0, 0)\}$.

$$2. f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Зауважимо, що підкореневий вираз має бути невід'ємним

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0, \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

До області визначення належать усі точки круга з центром в початку координат і радіусом 2 $D(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$$3. f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Зауважимо, що підкореневий вираз має бути додатним

$$25 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 25.$$

Отож, до області визначення належать усі точки внутрішності кулі з центром в початку координат і радіусом 5

$$D(f) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 25\}.$$

Частинні похідні функції двох змінних. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D . Знайдемо її значення в двох точках $(x_0 + \Delta x, y_0)$ і (x_0, y_0) області D та розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує і скінченна, то її значення називають **частинною похідною** функції $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ **за змінною** x і позначають $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякій області D , $(x_0, y_0 + \Delta y)$ і $(x_0, y_0) \in D$ та розглянемо границю

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Якщо ця границя існує і скінченна, то її значення називають **частинною похідною** функції $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ **за змінною y** і позначають $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$.

Зауважимо, що частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ також називають **частинними похідними першого порядку**.

Головну лінійну частину повного приросту функції $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називають її **диференціалом** і позначають $df(M_0)$, тобто

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} dy.$$

Приклади 6.2. Обчислити частинні похідні для таких функцій:

Розв'язування.

1. $f(x, y) = 2x^4y^3 - 3x^2y^5 + 5x.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3y^3 - 6xy^5 + 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 - 15x^2y^4.$$

2. $f(x, y) = e^{-4x^2y}.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-4x^2y}(-8xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-4x^2y}(-4x^2).$$

Похідна за напрямом. Градієнт. Нехай функція $f(x, y)$ визначена, неперервна і диференційовна в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і l вісь, яка характеризується напрямними косинусами $\{\cos \alpha, \cos \beta\}$. Розглянемо точки $M_0, M \in l$. Якщо існує і скінченна границя

$$\lim_{\rho(M_0, M) \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0, M)},$$

то її значення називають *похідною* функції $f(x, y)$ *за напрямом* осі l точки M_0 і позначають символом $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$. Похідну за напрямом осі l обчислюємо за формулою

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta.$$

Вектор $\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right)^T$ називають *градієнтом* функції $f(x, y)$ в точці M_0 і позначають символом $\text{grad } f(M_0)$. Також можемо записати, що

$$\text{grad } f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \vec{j}.$$

Позначимо $\vec{l}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta)^T$ – одиничний напрямний вектор осі l . Тоді отримаємо формулу

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \vec{l}_0 \cdot \text{grad } f(M_0),$$

з якої випливає, що функція f найшвидше зростає у напрямі градієнта.

Приклад 6.3. Обчислити похідну функції $f = x y^3$ за напрямом осі $l \{ \alpha = \pi/3, \beta = \pi/6 \}$ і градієнт у точці $M_0(2; 4)$.

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 4^3 = 64,$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3 \cdot 2 \cdot 4^2 = 96.$$

$$\cos \alpha = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, одержимо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = 64 \cdot \frac{1}{2} + 96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32 + 48\sqrt{3},$$

$$\text{grad } f(M_0) = (64; 96)^T = 64 \vec{i} + 96 \vec{j},$$

$$|\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{64^2 + 96^2} = 32\sqrt{13}.$$

Аудиторна робота 10

10.1. Знайти область визначення функції:

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$

2. $z = \frac{1}{3}y^2\sqrt{x^2 - y^2}.$

3. $z = \ln(4 + 4x - y^2).$

4. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$

10.2. Знайти частинні похідні таких функцій:

1. $u = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}.$

6. $u = \ln(x + \ln y).$

2. $u = \ln \operatorname{tg}(3x^4y).$

7. $u = (\sin x)^{yz}.$

3. $u = \sqrt{2y^3 - x^5}.$

8. $u = 5y - 6x^4 + 3xy^5.$

4. $u = 5xe^{2y}.$

9. $u = x^2 + xy^3 + yz^4.$

5. $u = xy^2 + 7x^4y^3 + 7e^{3x}.$

10. $u = x \sin 3y.$

10.3. Знайти похідну функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці M_0 і градієнт заданої функції в цій точці, якщо:

1. $u = x^2y^3z, \quad \vec{l} = (2; -3; 1), \quad M_0(1; -1; 1).$

2. $u = z \ln(x^2 + y^2), \quad \vec{l} = (3; -2; 4), \quad M_0(-3; 2; 4).$

3. $u = \sin(xy + z), \quad \vec{l} = (0; 0; 1), \quad M_0(0; 2\pi; \pi).$

Домашня робота 10

10.1. Знайти область визначення функції:

1. $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}.$

$$2. z = \frac{1}{xy}.$$

$$3. z = \sqrt{x^2 - y}.$$

$$4. z = \ln(4 + 4x - y^2).$$

$$5. z = \ln(25 - x^2 - y^2).$$

$$6. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

10.2. Знайти частинні похідні таких функцій:

$$1. u = x^3y^2 - 2xyz + 5x^2z^3. \quad 8. u = \sin(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$2. z = x^y. \quad 9. u = x^{z/y}.$$

$$3. z = e^{-x^2y}. \quad 10. u = x^{yz}.$$

$$4. z = 5y - 2x^2 + 3xy + e^{-2y}. \quad 11. z = \arcsin x\sqrt{y}.$$

$$5. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad 12. z = \ln(x^2y + 5y^2).$$

$$6. z = e^{-x/y}. \quad 13. z = x \ln y + \frac{y}{x}.$$

$$7. z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}. \quad 14. z = \ln(x^4 + 2y^3).$$

10.3. Знайти похідну функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці M_0 і градієнт заданої функції в цій точці, якщо:

$$1. u = \sqrt[3]{xzy^2}, \quad \vec{l} = (-2; 3; 5), \quad M_0(1; 3; 1).$$

$$2. u = y \sin z + x \cos y, \quad \vec{l} = (-3; 2; 1), \quad M_0(0; 0; 0).$$

$$3. u = yx^3 - zy^2 + 3x, \quad \vec{l} = (6; 0; 8), \quad M_0(1; 1; 2).$$

$$4. u = x - 2z + \sin y, \quad \vec{l} = (1; 2; -2), \quad M_0(0; \pi; 0).$$

6.2. Обчислення частинних похідних другого порядку функції багатьох змінних

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку функції $f(x, y, z)$ називають **частинними похідними другого порядку**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \\ &\text{мішані похідні.} \end{aligned}$$

Диференціал від диференціала першого порядку називають **диференціалом другого порядку** і позначають $d^2 f(M_0)$. Для функції $f(x, y)$ можна записати формулу обчислення диференціала другого порядку

$$d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} dy^2.$$

Нехай функція $f(x, y, z)$ має усі частинні похідні другого порядку. Частинні похідні від частинних похідних другого порядку називають **частинними похідними третього порядку**. І так далі.

Приклад 6.4. Обчислити диференціали першого та другого порядків для функції $f = e^{x^7 y - y^2}$.

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^7 y - y^2} \cdot 7x^6 y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^7 y - y^2} \cdot (x^7 - 2y).$$

Тоді отримаємо диференціал першого порядку

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{x^7 y - y^2} \cdot 7x^6 y \, dx + e^{x^7 y - y^2} \cdot (x^7 - 2y) \, dy = \\
&= e^{x^7 y - y^2} (7x^6 y \, dx + (x^7 - 2y) \, dy).
\end{aligned}$$

Обчислимо частинні похідні другого порядку

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial(e^{x^7 y - y^2} 7x^6 y)}{\partial x} = 7y \left(6x^5 e^{x^7 y - y^2} + x^6 e^{x^7 y - y^2} 7x^6 y \right) = \\
&= 7yx^5 e^{x^7 y - y^2} (6 + 7x^7 y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial(e^{x^7 y - y^2} (x^7 - 2y))}{\partial y} = \\
&= -2e^{x^7 y - y^2} + (x^7 - 2y)e^{x^7 y - y^2} (x^7 - 2y) = \\
&= e^{x^7 y - y^2} ((x^7 - 2y)^2 - 2), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(e^{x^7 y - y^2} 7x^6 y)}{\partial y} = 7x^6 (e^{x^7 y - y^2} + ye^{x^7 y - y^2} (x^7 - 2y)) = \\
&= 7x^6 e^{x^7 y - y^2} (1 + y(x^7 - 2y)).
\end{aligned}$$

Тоді отримаємо диференціал другого порядку

$$\begin{aligned}
d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\
&= 7yx^5 e^{x^7 y - y^2} (6 + 7x^7 y) dx^2 + \\
&+ 14x^6 e^{x^7 y - y^2} (1 + y(x^7 - 2y)) dx dy + e^{x^7 y - y^2} ((x^7 - 2y)^2 - 2) dy^2 = \\
&= e^{x^7 y - y^2} (7yx^5 (6 + 7x^7 y) dx^2 + 14x^6 (1 + y(x^7 - 2y)) dx dy + \\
&\quad + ((x^7 - 2y)^2 - 2) dy^2).
\end{aligned}$$

Аудиторна робота 11

11.1. Знайти диференціали функцій :

$$1. \, z = \frac{y^3}{x}.$$

2. $z = x^5 y^4 - 6y^2 x$.

3. $u = xy + yz + zx$.

11.2. Знайти диференціали складених функцій :

1. $u = \cos(4x - 3y)$.

2. $u = \ln(x^2 + y^2)$, $x = 4t$, $y = t^4$.

3. $u = \sin(x + 3y - 5z)$, $x = t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$.

11.3. Знайти частинні похідні другого порядку функцій :

1. $z = \frac{x + y}{1 - xy}$.

2. $z = \frac{\cos y^2}{x}$.

3. $z = y^{\ln x}$.

4. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

11.4. Знайти диференціали другого порядку функцій :

1. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

2. $z = x \sin^2 y$.

3. $u = e^{xyz}$.

Домашня робота 11

11.1. Знайти диференціали функцій :

1. $z = \cos xy$.

2. $z = \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y}$.

3. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

4. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

5. $u = x^3 y^2 z$.

6. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

11.2. Знайти диференціали складених функцій :

1. $u = \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$

2. $u = \sqrt{x^3 + y^3}.$

3. $u = \sin(3x + yz).$

4. $u = (x^2 - y^2)(x^5 - 6y)^4.$

5. $u = \sqrt{\frac{x}{z} + \frac{z}{y}}.$

6. $u = \ln(3x + 5y), x = 2t - 4, y = t^3.$

11.3. Знайти частинні похідні другого порядку функцій :

1. $z = xe^{-xy}.$

5. $z = \arcsin(xy).$

2. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$

6. $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3. $z = x^y.$

7. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

4. $z = e^{xe^y}.$

8. $u = e^{xyz}.$

11.4. Знайти диференціали другого порядку функцій :

1. $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

4. $z = \ln(x - y).$

2. $z = (x + y)e^{xy}.$

5. $u = xyz.$

3. $z = x \ln \frac{y}{x}.$

6. $u = xy + yz + zx.$

6.3. Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Функція $f(M)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ **локальний максимум (мінімум)**, якщо існує такий окіл точки $M_0(x_0, y_0)$,

що для всіх точок M з цього околу виконується $f(M) \leq f(M_0)$ ($f(M) \geq f(M_0)$). Якщо функція $f(M)$ має в точці M_0 локальний мінімум чи локальний максимум, то кажуть, що M_0 є точкою **локального екстремуму** функції $f(M)$.

Якщо $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \leq 0$, то в точці M_0 функція має локальний максимум; якщо в околі точки M_0 $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \geq 0$, то в точці M_0 функція має локальний мінімум. Якщо ж в околі точки M_0 приріст функції $\Delta f(M_0)$ змінює знак, то ця точка не є точкою екстремуму функції f .

Необхідна умова існування точки екстремуму. Якщо функція $f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум і частинні похідні $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$ існують, то ці похідні дорівнюють нулеві

$$\begin{cases} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Точки, в яких усі перші частинні похідні функції $f(M)$ дорівнюють нулеві, називають **стаціонарними** точками функції $f(M)$.

Достатні умови існування точки екстремуму. Нехай функція $f(M)$ має в точці M_0 усі частинні похідні другого порядку. Якщо $d^2 f(M_0) \leq 0$, тоді функція $f(M)$ має в точці M_0 локальний максимум, якщо ж $d^2 f(M_0) \geq 0$, тоді функція $f(M)$ має в точці M_0 локальний мінімум. Якщо $d^2 f(M_0)$ змінює знак, тоді функція $f(M)$ не має в точці M_0 локального екстремуму.

Для функції $f(x, y)$ позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Якщо $\Delta > 0$, то M_0 точка екстремуму функції $f(M)$, причому при $A < 0$ – точка локального максимуму, а при $A > 0$ – точка

локального мінімуму. Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці M_0 функція $f(M)$ екстремуму не має.

Приклад 6.5. Знайти точки екстремуму функції

$$f = 5x^2 + y^2 + 4y.$$

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4$.

Для знаходження стаціонарних точок запишемо необхідну умову існування екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 10x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -2. \end{cases}$$

Отже, функція має єдину стаціонарну точку $M_0(0; -2)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Обчислимо $\Delta = AC - B^2 = 20 > 0$ ($A = 10, B = 0, C = 2$).

Отже, $M_0(0; -2)$ є точкою екстремуму функції. Оскільки $A = 10 > 0$, то $M_0(0; -2)$ є точкою мінімуму функції. Обчислимо значення локального мінімуму $f_{\min} = f(0; -2) = -4$.

Приклад 6.6. Знайти точки екстремуму функції

$$f = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 8.$$

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12$.

Для знаходження стаціонарних точок запишемо необхідну умову існування екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ y^2 - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Отже, функція має чотири стаціонарні точки $M_1(1; 2)$, $M_2(1; -2)$, $M_3(-1; 2)$, $M_4(-1; -2)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Обчислимо значення Δ у кожній стаціонарній точці:

для $M_1(1; 2)$: $A = 6$, $B = 0$, $C = 12$; $\Delta = AC - B^2 = 72 > 0$;

для $M_2(1; -2)$: $A = 6$, $B = 0$, $C = -12$; $\Delta = AC - B^2 = -72 < 0$;

для $M_3(-1; 2)$: $A = -6$, $B = 0$, $C = 12$; $\Delta = AC - B^2 = -72 < 0$;

для $M_4(-1; -2)$: $A = -6$, $B = 0$, $C = -12$; $\Delta = AC - B^2 = 72 > 0$.

Отже, $M_2(1; -2)$, $M_3(-1; 2)$ не є точками екстремуму функції. Точки $M_1(1; 2)$, $M_4(-1; -2)$ є точками екстремуму функції. Оскільки в $M_1(1; 2)$ $A = 6 > 0$, то $M_1(1; 2)$ є точкою мінімуму функції. Оскільки в $M_4(-1; -2)$ $A = -6 < 0$, то $M_4(-1; -2)$ є точкою максимуму функції. Обчислимо значення функції в точках екстремуму

$$f_{\min} = f(1; 2) = 1^3 + 2^3 - 3 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 8 = -10,$$

$$f_{\max} = f(-1; -2) = (-1)^3 + (-2)^3 - 3(-1) - 12(-2) + 8 = 26.$$

Приклад 6.7. Знайти екстремум функції

$$f = x^3 - 3x^2y + y^4 + 7.$$

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 4y^3.$$

Для знаходження стаціонарних точок запишемо необхідну умову існування екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 4y^3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 0, \\ 4y^3 = 3x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = 2y, \\ 4y^3 = 3x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^3 = 3(2y)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^3 - 3y^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 0, y = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Отже, функція має дві стаціонарні точки $M_1(6; 3)$, $M_2(0; 0)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Обчислимо значення Δ у кожній стаціонарній точці
 для $M_1(6; 3)$: $A = 18, B = -36, C = 108$; $\Delta = AC - B^2 = 648 > 0$;
 для $M_2(0; 0)$: $A = 0, B = 0, C = 0$; $\Delta = AC - B^2 = 0$.
 Отож, $M_1(6; 3)$ є точкою екстремуму функції, оскільки в $M_1(6; 3)$
 $A = 18 > 0$, то $M_1(6; 3)$ є точкою мінімуму функції.
 Оскільки в $M_2(0; 0)$ $\Delta = 0$ ($df(0; 0) = 0$ і $d^2f(0; 0) = 0$), тому в
 цій точці функція потребує додаткових досліджень.

Найбільше та найменше значення функції двох змінних. Розглянемо функцію $f(x, y)$ визначену та неперервну в деякій замкненій та обмеженій області $\bar{D} \subset \mathbf{R}^2$. Така функція в області $\bar{D}$ досягає свого найбільшого та найменшого значення, тобто існують точки $M_1 \in \bar{D}$ і $M_2 \in \bar{D}$, що для довільної точки $M \in \bar{D}$ виконуються нерівності

$$f(M_1) \leq f(M) \leq f(M_2).$$

Використовуючи поняття екстремуму функції, наведемо правило знаходження найбільшого і найменшого значення функції неперервної в обмеженій області $\bar{D}$ і диференційовної в області D . Спочатку треба знайти усі стаціонарні точки функції, які належать області D та обчислити значення функції в цих точках. Потім досліджуємо функцію на екстремум на межі області $\bar{D}$.

Приклад 6.8. Знайти найбільше і найменше значення функції $f = x^2 + y^2 - xy - x + 5$ в області

$$\bar{D} = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Розв'язування. Обчислимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$.

Для знаходження стаціонарних точок запишемо необхідну умову існування екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x = 2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отримали, що $M_0(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ є стаціонарною точкою функції. Обчислимо значення функції $f(M_0) = f(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 5 = 4\frac{2}{3}$.

Тепер дослідимо функцію на межі області $\bar{D}$. Як бачимо, область $\bar{D}$ є квадратом. Розглянемо функцію на кожній стороні цього квадрата.

I. $y = 0, 0 \leq x \leq 1$: $f_1 = x^2 - x + 5, f'_1 = 2x - 1, f'_1 = 0 \Rightarrow x = 0,5$. Тобто $f_1(0,5) = (0,5)^2 - 0,5 + 5 = 4,75$. На краях проміжку отримуємо $f_1(0) = 5, f_1(1) = 5$.

II. $x = 1, 0 \leq y \leq 1$: $f_2 = y^2 - y + 5, f'_2 = 2y - 1, f'_2 = 0 \Rightarrow y = 0,5$. Тобто $f_2(0,5) = (0,5)^2 - 0,5 + 5 = 4,75$. На краях проміжку одержимо $f_2(0) = 5, f_2(1) = 5$.

III. $y = 1, 0 \leq x \leq 1$: $f_3 = x^2 - 2x + 6, f'_3 = 2x - 2, f'_3 = 0 \Rightarrow x = 1$. Тобто $f_3(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 5$. На краях проміжку отримуємо $f_3(0) = 6$.

IV. $x = 0, 0 \leq y \leq 1$: $f_4 = y^2 + 5, f'_4 = 2y, f'_4 = 0 \Rightarrow y = 0$. Тобто $f_4(0) = 0^2 + 5 = 5$. На краях проміжку одержимо $f_4(1) = 6$.

Порівнюючи отримані значення функції, можемо зробити висновки, що в заданій області $f(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}) = 4\frac{2}{3}$ – найменше значення функції, $f(0,1) = 6$ – найбільше значення функції.

Умовні екстремуми функції двох змінних. У багатьох економічних дослідженнях трапляються задачі про знаходження екстремумів функції двох змінних за додаткових умов на її аргументи. Такі екстремуми називають умовними.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D , у якій також задано деяку лінію L із рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Якщо задатись питанням про визначення екстремуму функції z на лінії L , то таку задачу називають задачею про умовний екстремум функції z . Така назва пов'язана з тим, що на змінні x і y накладаємо додаткову умову $\varphi(x, y) = 0$ (умова зв'язку).

Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами:

метод зведення до задачі на безумовний екстремум;

метод невизначених множників Лагранжа.

У першому випадку безумовний екстремум можна застосувати, якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ розв'язане, наприклад, стосовно $y = \psi(x)$. Тоді, підставляючи $y = \psi(x)$ у вираз функції $z = f(x, y)$, одержимо складену функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яку досліджуємо на екстремум.

Приклад 6.9. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + y^2$, якщо її аргументи задовольняють умову зв'язку $x + y - 2 = 0$.

Розв'язування. Екстремуми функції z шукаємо не на всій площині D , а лише на прямій $y = 2 - x$, тобто задачу про умовний екстремум зведемо до задачі на безумовний екстремум для функції $z = x^2 + (2 - x)^2$.

Ця функція має екстремум в точці $x = 1$, тобто функція $z = x^2 + y^2$ за наявності цього зв'язку має умовний мінімум $z = 2$ у точці $(1, 1)$, який не збігається з безумовним мінімумом у точці $(0, 0)$.

Розглянемо **метод невизначених множників Лагранжа**. Для дослідження функції $z = f(x, y)$ на умовний екстремум за умови $\varphi(x, y) = 0$, де $\varphi(x, y)$ – диференційовна функція двох аргументів x і y , обчислимо повні диференціали цих функцій

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

У стаціонарних точках $dz = 0$, тому

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Додамо останнє рівняння до виразу $\frac{d\varphi}{dx}$, помноженого на сталий множник λ , тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Або

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Із останнього рівняння визначимо стаціонарні точки, вибравши параметр λ так, щоб

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Тоді одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму визначають зі системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо розглянути функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

то знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ зводиться до відшукування безумовного екстремуму функції $L(x, y, \lambda)$, оскільки остання система трьох рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

ця система виражає необхідні умови існування умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 8.1. Нехай виконуються такі умови:

1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ критична точка функції Лагранжа для деякого λ .

2. Функції $z = f(x, y)$ і $\varphi = \varphi(x, y)$ у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ мають неперервні похідні другого порядку, причому $L''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $L''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $L''_{yy}(x_0, y_0) = C$ і повний диференціал

$$d^2L(M_0) = A(dx)^2 + 2B dx dy + C(dy)^2,$$

у якому dx і dy задовольняють умову зв'язку

$$\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0.$$

Тоді:

а) якщо $d^2L(M_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має умовний мінімум;

б) якщо $d^2L(M_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має умовний максимум.

Приклад 6.10. Знайти умовний екстремум функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язування. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знайдемо її частинні похідні та прирівняємо до нуля

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння одержимо $x = -\frac{1}{2\lambda}$, із другого – $y = -\frac{1}{2\lambda}$. Підставивши ці вирази у третє рівняння, отримаємо $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$, звідки матимемо $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайшовши відповідні значення x і y , одержимо точки $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$M_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Далі з'ясуємо чи є зазначені точки точками екстремуму. Для цього обчислимо значення другого диференціала функції Лагранжа у цих точках, вважаючи λ параметром. Знаходимо частинні похідні та диференціал другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} (dy)^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Оскільки при $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ другий диференціал $d^2 L > 0$, то в точці M_1 матимемо умовний мінімум

$$z \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

Відповідно, якщо $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ другий диференціал $d^2 L < 0$, то в точці M_2 маємо умовний максимум

$$z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

У разі визначення умовного екстремуму функції багатьох змінних обмеження можуть бути також у вигляді нерівностей. Тоді метод множників Лагранжа можна узагальнити на випадок задачі з обмеженнями у вигляді нерівностей, застосувавши необхідні та достатні умови Куна-Таккера.

Нехай маємо задачу про знаходження максимуму функції $z = f(x, y)$ при обмеженнях $g(x, y) \leq 0$. Обмеження-нерівності можна перетворити у рівності за допомогою невід'ємних додаткових змінних.

Нехай $s \geq 0$ – додаткова змінна, яку додаємо до лівої частини обмеження $g(x, y) + s^2 = 0$. Тоді функція Лагранжа набуває вигляду

$$L(x, y, s, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) + s^2).$$

З прикладних міркувань у задачі максимізації функції z , $\lambda \geq 0$, у мінімізації цієї ж функції z , $\lambda \leq 0$. Розглянемо інші умови щодо функції Лагранжа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial s} = -2s\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(g(x, y) + s^2) = 0. \end{array} \right.$$

Із останніх двох рівнянь системи одержуємо:

а) якщо $\lambda \neq 0$, то $s^2 = 0$, це означає, що обмеження мають вигляд рівностей;

б) якщо $s^2 > 0$, то $\lambda = 0$, тобто $\lambda g(x, y) = 0$.

Отже, тепер для задачі максимізації можна сформулювати умови, які називають умовами Куна-Таккера

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \geq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \lambda g(x, y) = 0, \\ g(x, y) \leq 0. \end{array} \right.$$

Для задачі мінімізації потрібно в системі прийняти $\lambda \leq 0$.

Приклад 6.11. Мінімізувати функцію $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в обмеженнях

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0, \\ g_2(x_1, x_3) = x_1 + x_3 - 2 \leq 0, \\ g_3(x_1) = 1 - x_1 \leq 0, \\ g_4(x_2) = 2 - x_2 \leq 0, \\ g_5(x_3) = -x_3 \leq 0. \end{array} \right.$$

Розв'язування. Оскільки розглядаємо мінімізацію функції, то $\lambda \leq 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$. Тому умови Куна-Таккера запису-

ємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 &(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \leq 0, \\
 &(2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \bar{0}, \\
 &\lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \lambda_3 g_3 = \lambda_4 g_4 = \lambda_5 g_5 = 0.
 \end{aligned}$$

Ці умови можна спростити і звести до вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0, \lambda_5 \leq 0, \\ 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = 0, \\ 2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0, \\ \lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0, \\ \lambda_3(1 - x_1) = 0, \\ \lambda_4(2 - x_2) = 0, \\ \lambda_5 x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Звідки й одержимо розв'язок

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4.$$

Аудиторна робота 12

12.1. Дослідити на екстремум такі функції двох змінних:

1. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.
2. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$.
3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
4. $z = x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 2$.
5. $z = e^{x-y}(x^2 - y^2)$.
6. $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2$.

12.2. Визначити екстремальне значення функції

$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$, якщо $x_1 + x_2 = 2$.

12.3. Мінімізувати функцію $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в обмеженнях $4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$.

12.4. Визначити екстремум функції $u = x - 2y + 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

12.5. Максимізувати функцію $z = x_1^3 - x_2^2 + x_1x_3^2$ в обмеженнях $x_1 + x_2^2 + x_3 \leq 5$, $5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Домашня робота 12

12.1. Дослідити на екстремум такі функції двох змінних:

1. $z = x^3 - y^3 - 30xy$.
2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$.
3. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.
4. $z = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.
5. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
6. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y$.
7. $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$.
8. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

12.2. Знайти умовний екстремум функції

$z = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y$, якщо $2x - 3y = 6$.

12.3. Визначити екстремум функції $z = xy$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

12.4. Мінімізувати функцію $z = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$ в обмеженнях $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \leq 10$, $x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$.

6.4. Економічне застосування функції двох змінних

6.4.1. Еластичність функції двох змінних

Введемо поняття еластичності для функції двох змінних $z = f(x, y)$. Розглянемо її частинні прирости

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Еластичністю функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) за змінною x називають границю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \frac{x}{z} \right) = E_x(z(x_0, y_0)).$$

Еластичністю функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) за змінною y називають границю

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y} \frac{y}{z} \right) = E_y(z(x_0, y_0)).$$

Приклад 6.12. Знайти коефіцієнти еластичності за x і за y функції $z = x^y$ у точці $(4; 3)$.

Розв'язування. Обчислюємо коефіцієнти еластичності

$$E_x(z(x, y)) = \frac{x}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^y} y x^{y-1} = y,$$

$$E_y(z(x, y)) = \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^y} x^y \ln x = y \ln x.$$

Отже,

$$E_x(z(4, 3)) = 3; \quad E_y(z(4, 3)) = 3 \ln 4.$$

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій використовують такі показники: часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва.

Відношення граничної продуктивності i -го ресурсу M_i до його середньої продуктивності $\bar{z}_i$ називають частинною **еластичністю випуску за i -м фактором виробництва** й позначають

$$E_{x_i}(f) = \frac{M_i}{\bar{z}_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Суму

$$E(x) = \sum_{i=1}^n E_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

називають **еластичністю виробництва**.

Приклад 6.13. Знайти еластичності виробництва й часткові еластичності для двофакторної лінійної виробничої функції $y = a_1x_1 + a_2x_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Розв'язування.

$$E_{x_1}(y) = \frac{x_1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2}; \quad E_{x_2}(y) = \frac{x_2}{y} \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2};$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^2 E_{x_i}y = E_{x_1}(y) + E_{x_2}(y) = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2} + \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2} = 1.$$

Приклад 6.14. Знайти еластичність виробництва й часткові еластичності для виробничої функції Кобба–Дугласа $y = AK^\alpha L^\beta$, $A > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Розв'язування. Отримаємо

$$E_K(y) = \frac{K}{y} \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{K}{AK^\alpha L^\beta} \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta = \alpha;$$

$$E_L(y) = \frac{L}{y} \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{L}{AK^\alpha L^\beta} \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \beta;$$

$$E(x) = E_K(y) + E_L(y) = \alpha + \beta = 1.$$

6.4.2. Попит на конкурентні товари

Розглянемо випадок двох товарів x і y . Нехай p_x і p_y – ціни за одиницю відповідного товару, а q_x і q_y – кількісний попит на товари x і y , відповідно.

Частинні похідні функції попиту виражають:

$\frac{\partial q_x}{\partial p_x}$ – граничний попит на товар x стосовно ціни p_x ;

$\frac{\partial q_x}{\partial p_y}$ – граничний попит на товар x стосовно ціни p_y .

Товари x і y називають **конкурентними**, якщо $\frac{\partial q_x}{\partial p_x} > 0$ і $\frac{\partial q_x}{\partial p_y} > 0$.

Еластичність попиту на товар x стосовно ціни p_x обчислюється за формулою

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x} \frac{\partial q_x}{\partial p_x}.$$

Еластичність попиту на товар x стосовно ціни p_y обчислюється за формулою

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x} \frac{\partial q_x}{\partial p_y}.$$

Товари x і y називають **взаємозамінними**, якщо $E_{p_y}(q_x) > 0$. У цьому разі збільшення ціни одного товару спричиняє зростання попиту на інший товар.

Товари x і y називають **взаємодоповняльними**, якщо $E_{p_y}(q_x) < 0$. У цьому разі збільшення ціни будь-якого товару спричиняє зменшення попиту на нього.

Приклад 6.15. Задано функцію попиту $q_x = 500 + 3p_y - 6p_x^2$ на товар x , де p_x і p_y – ціни товарів x і y , відповідно. Знайти коефіцієнти еластичності попиту стосовно цін p_x і p_y , якщо $p_x = 5$, $p_y = 30$.

Розв'язування.

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x} \frac{\partial q_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{500 + 3p_y - 6p_x^2} (-12p_x) = \frac{-12p_x^2}{500 + 3p_y - 6p_x^2}.$$

$$E_5(q_x) = \frac{-12 \cdot 25}{500 + 3 \cdot 30 - 6 \cdot 25} = -\frac{300}{440} \approx -0,68.$$

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x} \frac{\partial q_x}{\partial p_y} = \frac{3p_y}{500 + 3p_y - 6p_x^2}.$$

$$E_{30}(q_x) = \frac{3 \cdot 30}{500 + 3 \cdot 30 - 6 \cdot 25} = \frac{90}{440} \approx 0,2.$$

6.4.3. Задача багаторесурсної фірми

Нехай фірма випускає один товар (його обсяг позначимо через q) і використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обсяги різних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції, а через $p_1, p_2, \dots, p_n$ – відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини). Витрати виробництва однозначно пов'язані з випуском продукції і цей зв'язок визначає виробнича функція $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка виражає обсяг q продукції, що випускається, через обсяги $x_1, x_2, \dots, x_n$ ресурсів, які використовуються у виробництві.

Доходом R фірми за певний період часу називають добуток загального обсягу продукції q , що випускається, на ринкову ціну p_0 цієї продукції

$$R = p_0 q.$$

Витратами фірми C називають її загальні витрати за певний період часу, тобто

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Прибутком P фірми за певний період часу називають різницю між одержаним нею доходом і витратами виробництва $P = R - C$, тобто

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n).$$

Основна задача багаторесурсної фірми полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом

раціонального розподілу ресурсів, які використовують у виробництві.

Набір ресурсів $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають **оптимальним**.

Фірма може вільно вибирати вектор ресурсів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, причому $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Знайдемо оптимальну для фірми комбінацію ресурсів $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, тобто розв'яжемо основну задачу багаторесурсної фірми.

Прирівнявши частинні похідні функції прибутку до нуля, отримаємо

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{p_2}{p_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P}{\partial x_n} = \frac{p_n}{p_0}.$$

Припустимо, що всі витрати ресурсів строго додатні. Тоді точка $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ є критичною. Будемо вважати, що умови, які накладають на виробничу функцію, гарантують, що це точка максимуму. Тоді $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ називають **оптимальним** розв'язком задачі багаторесурсної фірми.

Приклад 6.16. Нехай задано виробничу функцію фірми $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/2}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і факторів виробництва – відповідно $p_1 = 1$, $p_2 = 1/2$. Знайти комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток.

Розв'язування. Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 2x^{1/4}y^{1/2} - x - \frac{1}{2}y.$$

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку й прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} P'_x = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0, \\ P'_y = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{4}}, \\ \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, точка $M(1, 4)$ є критичною. Перевіримо достатні умови.

Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку й обчислимо їхні значення в точці $M(1, 4)$

$$P''_{xx} = \frac{1}{2}(-\frac{3}{4})x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{2}}, \quad P''_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{2}}, \quad P''_{yy} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}};$$

$$A = -\frac{3}{8} \cdot 2 = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{16}.$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = -\frac{1}{32} > 0 \quad \text{і} \quad A = -\frac{3}{8} < 0,$$

то точка $M(1, 4)$ – точка локального максимуму. Обчислимо максимальний прибуток фірми

$$P_{\max} = R(1; 4) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 - \frac{1}{2}4 = 1.$$

6.4.4. Задача оптимального розподілу товарів

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги випуску різних товарів фірмою, $p_1, p_2, \dots, p_n$ – відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини). Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді функція прибутку набуває вигляду

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n - C(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Максимум прибутку природно шукати як локальний екстремум функції багатьох змінних $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму $\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, які приводять до системи алгебричних рівнянь стосовно

змінних x_i : $p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$, тобто

$$p_i = \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ця система реалізує відоме правило економіки: гранична ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару.

Приклад 6.17. Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їхні обсяги через x і y . Нехай ціни на ці товари становлять, відповідно, $p_x = 8$, $p_y = 10$, а функція витрат $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайти максимальний прибуток, який може одержати фірма.

Розв'язування. Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Запишемо необхідні умови локального екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 8 - 2x - y = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 10 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є критична точка $M(2, 4)$. Перевіримо достатні умови локального екстремуму. Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(2, 4)$

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2, \quad B = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2.$$

Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{і} \quad A = -2 < 0.$$

Отже, $M(2, 4)$ – точка локального максимуму. Максимальний прибуток, який одержить фірма, $P_{\max} = P(2; 4) = 28$.

6.4.5. Задача визначення мінімальних витрат фірми

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги різних ресурсів, які використовує фірма для виробництва своєї продукції, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ – відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини). Нехай загальні витрати виробництва фірми задаються функцією витрат $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Можна сформулювати задачу: визначити мінімально можливі витрати ресурсів на виробництво фіксованого обсягу продукції.

Ці мінімальні витрати природно шукати як локальний мінімум функції багатьох змінних $C = C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Приклад 6.18. Нехай задано виробничу функцію Кобба–Дугласа, що залежить від двох змінних $q = q(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$, де A – стала конкретного виробництва; x – витрати капіталу; y – витрати людської праці. Знайти значення величин x і y , які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції, якщо задано відповідні ціни на ресурси p_1 і p_2 .

Розв’язування. Функція загальних витрат виражається формулою

$$C(x, y) = p_1 x + p_2 y.$$

Потрібно знайти мінімальне значення функції витрат за умови, що задано обсяг продукції $q(x, y) = q_0$.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L = p_1 x + p_2 y + \lambda(Ax^\alpha y^{1-\alpha} - q_0).$$

Необхідні умови її умовного екстремуму виражаються рівностями

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Знайшовши частинні похідні й прирівнявши їх до нуля, отримаємо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} p_1 + \alpha \lambda A x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} = 0, \\ p_2 + (1 - \alpha) \lambda A x^\alpha y^{1-\alpha-1} = 0, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} - q_0 = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо її

$$\begin{cases} p_1 + \alpha \lambda q_0 x^{-1} = 0, \\ p_2 + (1 - \alpha) \lambda q_0 y^{-1} = 0, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} = q_0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = -\frac{p_2}{(1 - \alpha) \lambda q_0}, \\ Ax^\alpha y^{1-\alpha} = q_0, \\ \frac{1}{x} = -\frac{p_1}{\alpha \lambda q_0}. \end{cases}$$

Розв’язок системи – точка $M_0(x_0; y_0)$, координати якої

$$x_0 = \frac{q_0}{A} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right)^{\alpha-1}, \quad y_0 = \frac{q_0}{A} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2} \right)^\alpha.$$

Оскільки $d^2L(M_0) > 0$, то ця точка є точкою умовного мінімуму функції витрат.

6.4.6. Функції попиту споживача

Нехай p_x – ціна товару X , а p_y – ціна товару Y , R – дохід споживача, а $u = u(x, y)$ – функція корисності. Вважатимемо, що споживач може купувати лише такі набори товарів $(x; y)$, вартість яких не перевищує його доходу R , тобто $p_x x + p_y y \leq R$.

Нехай функція корисності $u = u(x, y)$ у довільних додатних p_x , p_y і R на множині $D = \{p_x x + p_y y \leq R, x \geq 0, y \geq 0\}$ має єдину точку максимуму $(x^*; y^*)$. Тоді функції $x^* = q_x(p_x, p_y, R)$ і $y^* = q_y(p_x, p_y, R)$ називають **функціями попиту**.

Отже, задача зводиться до знаходження умовного максимуму функції корисності за умов $p_x x + p_y y \leq R$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u(x, y) + \lambda_1(R - p_x x - p_y y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y.$$

Перевіримо необхідні умови умовного екстремуму. Для цього, знайшовши частинні похідні та прирівнявши їх до нуля

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0,$$

одержимо систему

$$\begin{cases} u'_x(x, y) - \lambda_1 p_x + \lambda_2 = 0, \\ u'_y(x, y) - \lambda_1 p_y + \lambda_3 = 0, \\ R - p_x x - p_y y = 0, \\ \lambda_2 x = 0, \\ \lambda_3 y = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0. \end{cases}$$

Якщо відомо, що функція попиту не перетворюється в нуль, то з четвертого і п'ятого рівнянь випливає $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, і система набуває вигляду

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = \lambda_1 p_x, \\ u'_y(x, y) = \lambda_1 p_y, \\ R - p_x x - p_y y = 0, \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 6.19. Знайти функції попиту q_x і q_y , якщо функція корисності

$$u(x, y) = \ln x + \ln y - \ln(x + y).$$

Розв'язування. Для заданої функції корисності знаходимо частинні похідні першого порядку

$$u'_x = \frac{y}{x(x+y)}, \quad u'_y = \frac{x}{y(x+y)}.$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{p_x}{p_y}, \\ p_x x + p_y y = R. \end{cases}$$

Знаходимо другі похідні функції $u = u(x, y)$:

$$u''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2}, \quad u''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2}, \quad u''_{xy} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Тоді визначник $\Delta = u''_{xx}u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = \frac{2}{xy(x+y)^2}$.

В області $x > 0$, $y > 0$ маємо $u''_{xx} < 0$, $u''_{yy} < 0$, тому $\Delta > 0$, крім того, $u'_x > 0$. Тому функції попиту будуть такими:

$$q_x = \frac{R}{p_x + \sqrt{p_x p_y}}, \quad q_y = \frac{R}{p_y + \sqrt{p_x p_y}}.$$

Аудиторна робота 13

Розв'язати задачі:

13.1. Виробнича функція має вигляд $f(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 5$, а другого – $p_y = 10$. Знайти максимальний прибуток у разі використання ресурсів.

13.2. Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних: $q(x, y) = 5xy$, де x – витрати основних фондів; y – витрати людської праці, а також задано відповідні ціни на ресурси

$p_x = 10$ і $p_y = 8$ умов. грош. од. Знайти значення величин x і y , які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1600$.

13.3. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y , на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 8$ і $p_y = 10$ грн., відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ – функція витрат фірми. Визначити її максимальний прибуток.

13. 4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1; x_2) = 8000 - x_1^2 - x_2^2 + 40x_1 + 60x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

13. 5. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y , на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 72$ і $p_y = 90$ грн., відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ – функція витрат фірми. Знайти її максимальний прибуток.

13. 6. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 50$, а другого – $p_y = 25$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 100$ умов. грош. од.

13. 7. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 60$, а другого – $p_y = 30$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 120$ умов. грош. од.

13. 8. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1; x_2) = 10000 - 2x_1^2 - 4x_2^2 + 60x_1 + 80x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, обчислити його.

13. 9. Обчислити еластичності попиту за цінами і доходом для товару x , якщо задано функції попиту

$$x = \frac{2w}{3p_x + p_y}, \quad y = \frac{(p_x + p_y)w}{p_y(3p_x + p_y)}$$

при $p_x = 1$, $p_y = 2$, $w = 10$. Переконатись, що сума еластичностей дорівнює нулю.

13. 10. Обчислити еластичності попиту за цінами і доходом для товару y , якщо задано функції попиту

$$x = \frac{(p_x + p_y)w}{p_x(p_x + 2p_y)}, \quad y = \frac{w}{p_x + 2p_y}$$

при $p_x = 2$, $p_y = 1$, $w = 8$. Переконатись, що сума еластичностей дорівнює нулю.

13. 11. Обчислити еластичності випуску продукції Y за капіталом K і працею L для виробничої функції Кобба – Дугласа $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$.

Домашня робота 13

Розв'язати задачі:

13.1. Виробнича функція має вигляд $f(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 5$, а другого – $p_y = 10$ умов. грош. од. Через бюджетні обмеження на ресурси можна витратити не більше, ніж 600 умов. грош. од. Знайти оптимальний для виробника набір обсягів ресурсів (x, y) .

13. 2. Функція корисності має вигляд $u(x, y) = 2\ln(x - 1) + 3\ln(y - 1)$. Ціни одиниці товарів x і y , відповідно, становлять $p_x = 8$ і $p_y = 16$ умов. грош. од. На придбання цих товарів можна витратити 1000 умов. грош. од. Визначити, як розподілити цю суму між двома товарами x і y , щоб корисність їх придбання була найбільшою.

13. 3. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 40$, а другого – $p_y = 20$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 80$ умов. грош. од.

13. 4. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y , на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 24$ і $p_y = 30$ грн.,

відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ – функція витрат фірми. Знайти її максимальний прибуток.

13. 5. Нехай фірма випускає два види товарів в обсязі x і y , на які встановлено ціну за одиницю $p_x = 216$ і $p_y = 270$ грн., відповідно; $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ – функція витрат фірми. Знайти її максимальний прибуток.

13. 6. Виробнича функція фірми має вигляд $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x = 10$, а другого – $p_y = 5$ умов. грош. од. Знайти максимальний прибуток, який може одержувати фірма, якщо ціна на її продукцію становить $p_0 = 20$ умов. грош. од.

13. 7. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1; x_2) = 90000 - x_1^2 - 2x_2^2 + 40x_1 + 120x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 200$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, обчислити його.

13. 8. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1; x_2) = 25000 - x_1^2 - x_2^2 + 30x_1 + 100x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 155$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, обчислити його.

13. 9. Обчислити еластичності попиту за цінами і доходом для товару x , якщо задано функції попиту

$$x = \frac{3w}{p_x + 4p_y}, \quad y = \frac{(4p_y - 2p_x)w}{p_y(p_x + 4p_y)}$$

при $p_x = 1$, $p_y = 1$, $w = 8$. Переконатись, що сума еластичностей дорівнює нулю.

13.10. Обчислити еластичності попиту за цінами і доходом для товару y , якщо задано функції попиту

$$x = \frac{2w}{2p_x + p_y}, \quad y = \frac{w}{2p_x + p_y}$$

при $p_x = 1$, $p_y = 3$, $w = 5$. Переконатись, що сума еластичностей дорівнює нулю.

Контрольні запитання

1. Що називають функцією двох змінних?
2. Як знаходять область визначення функції двох змінних?
3. Які лінії називають лініями рівня функції двох змінних?
4. Яке означення частинних похідних функції двох змінних?
5. Як обчислюють частинні похідні другого порядку функції двох змінних?
6. Що називають диференціалом функції двох змінних?
7. Яке означення похідної за напрямком функції двох змінних?
8. Як обчислюють градієнт функції двох змінних?
9. Яке означення екстремуму функції двох змінних?
10. Як формують необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?
11. Як формують достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?
12. Що називають умовним екстремумом функції двох змінних?
13. У чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа?
14. За якою формулою обчислюють еластичність функції двох змінних?
15. Що називають еластичністю випуску за певним фактором?
16. Які товари називають конкурентними?
17. Які товари називають взаємозамінними?
18. Які товари називають взаємодоповняльними?
19. Що називають оптимальним набором ресурсів у задачі багаторесурсної фірми?
20. У чому полягає суть задачі оптимального розподілу товарів?
21. Як формують задачу мінімізації витрат фірми?
22. Що називають функцією попиту споживача?

Контрольна робота (Модуль) 3

1. Знайти область визначення функції
$$z = \ln(4 - x^2 - y) + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$
2. Знайти диференціал першого порядку функції
$$u = \frac{x^2 - 3y^2}{\sin(3x - 2y)}.$$
3. Знайти частинні похідні другого порядку функції
$$z = \ln(3x - 2y) + e^{5y} + x^2y^3.$$
4. Знайти градієнт функції $u = \sin 3y + e^{3x+z} + 5xyz^2 + x$ в точці $M(1; 0; -3)$. Обчислити похідну за напрямом $\vec{l} = (-1; -2; 2)$ в цій точці.
5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 2$.
6. Обчислити еластичності попиту за цінами і доходом для товару x , якщо задано функції попиту $x = \frac{2w}{3p_x + p_y}$,
$$y = \frac{(p_x + p_y)w}{p_y(3p_x + p_y)}$$
 при $p_x = 1$, $p_y = 2$, $w = 10$. Переконатись, що сума еластичностей дорівнює нулеві.
7. На деякій фірмі виробляють два види товарів, причому товар першого виду реалізують за ціною $p_x = 40$, а товар другого виду – за ціною $p_y = 60$. Витрати виробництва описуються функцією $C(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 2xy$. За яких обсягів x , y виробництва прибуток фірми буде максимальним? Знайти цей прибуток.

Розділ 7

Невизначений інтеграл

Функцію $F(x)$ називають **первісною** функції $f(x)$, якщо

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тоді функція $\Phi(x) = F(x) + C$ теж є первісною функції $f(x)$, де C – довільна дійсна стала.

Множину усіх функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, а C – довільна дійсна стала називають **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначають

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$
2. $\int C f(x) dx = C \int f(x) dx, \quad C - const.$
3. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$
4. $\int d(f(x)) = f(x) + C.$

Таблиця інтегралів.

Нехай $u(x)$ – диференційовна функція:

1. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m - const, \quad m \neq -1).$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad (a - const, \quad a > 0, \quad a \neq 1)$
 $\int e^u du = e^u + C.$
4. $\int \cos u du = \sin u + C \quad \left(\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C \right).$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C \quad \left(\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C \right).$
6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax) + C \right).$
7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left(\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg}(ax) + C \right).$
8. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad (a - const, \quad a \neq 0).$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, \quad (|u| < |a|, \quad a - const, \quad a \neq 0).$
10. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$
11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$
12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C,$
 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C, \quad (a - const, \quad a \neq 0).$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|, \quad (a - const, \quad a \neq 0).$

Приклади 7.1. Обчислити інтеграли, звівши їх до табличних інтегралів:

1. $\int \frac{(x-3)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3} dx =$
 $= \int \left(\frac{x^2}{x^3} - 6 \frac{x}{x^3} + 9 \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - 6x^{-2} + 9x^{-3} \right) dx =$
 $= \ln x - \frac{6x^{-1}}{-1} + \frac{9x^{-2}}{-2} + C = \ln x + \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + C.$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} - \frac{x^{3/4}}{x^{1/2}} \right) dx =$
 $= \int (x^{-1/6} - x^{1/4}) dx = \frac{6x^{5/6}}{5} - \frac{4x^{5/4}}{5} + C.$
3. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$
 $+ \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$
4. $\int \operatorname{ctg} 2x dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + C.$
5. $\int \cos^2 x dx = \left[\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx =$
 $= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$
6. $\int \frac{dx}{6x^2 + x - 2}.$

Поліном $6x^2 + x - 2$ доповнимо до повного квадрата

$$6x^2 + x - 2 = 6 \left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 6 \left(\left(x + \frac{1}{12} \right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{3} \right) = 6 \left(\left(x + \frac{1}{12} \right)^2 - \left(\frac{7}{12} \right)^2 \right).$$

Одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{6x^2 + x - 2} &= \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{12}\right)}{\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{12} - \frac{7}{12}}{x + \frac{1}{12} + \frac{7}{12}} \right| + C = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{6x - 3}{6x + 4} \right| + C; \end{aligned}$$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}}$. Перетворимо підкореневий тричлен, доповнюючи його до повного квадрата $1 - 4x - x^2 = 5 - (x + 2)^2$. Тоді одержимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}} = \int \frac{d(x + 2)}{\sqrt{5 - (x + 2)^2}} = \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{5}} + C.$$

Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

де $x = \varphi(t)$ неперервно – диференційовна однозначна функція.

Приклад 7.2. Обчислити інтеграли, застосовуючи метод заміни змінної:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x + 1} + 1} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x + 1} = t; \quad 2x + 1 = t^2; \\ x = \frac{1}{2}(t^2 - 1); \quad dx = t dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1)t dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \int (t^2 - t) dt = \\ &= \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(2x + 1)^3} - \frac{1}{4}(2x + 1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= [x = t^6, dx = 6t^5 dt] = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^3 - t^2} = \\
&= 6 \int \frac{t^6 dt}{t - 1} = 6 \int \frac{(t^6 - 1) + 1}{t - 1} dt = \\
&= \left[\begin{aligned} t^6 - 1 &= (t^3)^2 - 1 = (t^3 - 1)(t^3 + 1) = \\ &= (t - 1)(t^2 + t + 1)(t^3 + 1) = \\ &= (t - 1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) \end{aligned} \right] = \\
&= 6 \int \left(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt = \\
&= t^6 + \frac{6t^5}{5} + \frac{3t^4}{2} + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln |t - 1| + C = \\
&= x + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln |x^{\frac{1}{6}} - 1| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx = \left[\begin{aligned} \sin^4 x &= (1 - \cos^2 x)^2 \\ \sin x dx &= -d(\cos x) \end{aligned} \right] = \\
&= - \int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = [\cos x = t] = - \int (1 - t^2)^2 dt = \\
&= - \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = -\frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 - t + C = \\
&= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} &= \left[e^x - 1 = t^2; x = \ln(1 + t^2); dx = \frac{2t dt}{1 + t^2} \right] = \\
&= \int \frac{2t dt}{t(1 + t^2)} = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C.
\end{aligned}$$

Аудиторна робота 14

14.1. Використовуючи табличні інтеграли, знайти інтеграли:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\int (x^3 + 2x^2 + x + 1)dx.$ | 6. $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}})dx.$ |
| 2. $\int (2x^4 - 3x + 5)dx.$ | 7. $\int e^x(1 - \frac{e^{-x}}{x^2})dx.$ |
| 3. $\int \frac{1}{x^4}dx.$ | 8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx.$ |
| 4. $\int (x^2 + 2x + \frac{4}{x})dx.$ | 9. $\int e^x(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx.$ |
| 5. $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3}dx.$ | 10. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx.$ |

14.2. Обчислити інтеграли:

- | | |
|---|--|
| 1. $\int (2x + 5)^7 dx.$ | 8. $\int (\cos(3x+2) - \sin 2x)dx.$ |
| 2. $\int (\frac{2x}{3} - 4)^9 dx.$ | 9. $\int (\frac{5}{\sin^2 7x} - \frac{3}{\cos^2 2x})dx.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{(2+x)^2}.$ | 10. $\int \frac{-7 dx}{\cos^2(2x+1)}.$ |
| 4. $\int \frac{dx}{(2x-3)^3}.$ | 11. $\int \frac{dx}{\sin^2(x-10)}.$ |
| 5. $\int \frac{dx}{(4-x)^5}.$ | 12. $\int (e^{4x} + e^{-2x+7})dx.$ |
| 6. $\int \frac{dx}{7x+3}.$ | 13. $\int 5^{10x-4}dx.$ |
| 7. $\int (\frac{5}{x-3} + \frac{4}{2x+1})dx.$ | 14. $\int \frac{dx}{1+64x^2}.$ |

15. $\int \frac{-3dx}{1-9x^2}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

16. $\int \frac{dx}{4+(2x-1)^2}.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

17. $\int \frac{dx}{1+(5+x)^2}.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+4)^2}}.$

14.3. Знайти інтеграли, використовуючи заміну змінних або внесення під знак диференціала:

1. $\int \frac{dx}{1-2x}.$

9. $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}.$

2. $\int xe^{-x^2}dx.$

10. $\int \frac{(4+2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx.$

11. $\int \frac{xdx}{1+x^2}.$

4. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$

12. $\int (x^2+4)^5 x dx.$

5. $\int x^2 e^{x^3} dx.$

13. $\int x\sqrt{1+x^2}dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}.$

14. $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$

7. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}.$

15. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}.$

8. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

Домашня робота 14

14.1. Використовуючи табличні інтеграли, знайти інтеграли:

1. $\int (4x^3 - 5x^4 + 8x)dx.$
2. $\int (7x^6 + 10x^5 - 3x^2)dx.$
3. $\int (x^3 + 4x + 3)dx.$
4. $\int (x^4 + 3x^2 + 5)dx.$
5. $\int (\frac{5}{x^5} - \frac{2}{x^7})dx.$
6. $\int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^8} + \frac{1}{\sqrt[7]{x}})dx.$
7. $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[8]{x^5})dx.$

14.2. Обчислити інтеграли:

1. $\int (6 - 7x)^5 dx.$
2. $\int (5x - 4)^3 dx.$
3. $\int \frac{3dx}{(x+4)^7}.$
4. $\int \frac{7dx}{(8x-4)^3}.$
5. $\int \frac{dx}{(3x-4)^6}.$
6. $\int \frac{dx}{(1-7x)^8}.$
7. $\int \frac{dx}{7(x-3)^4}.$
8. $\int \frac{2dx}{x+4}.$
9. $\int \frac{3dx}{7-x}.$
10. $\int \frac{dx}{4(1-x)}.$
11. $\int \sin(20x - 3)dx.$
12. $\int (6 \sin 3x + 9 \cos 5x)dx.$
13. $\int \frac{2dx}{\sin^2(x+4)}.$
14. $\int \frac{dx}{\cos^2(x-10)}.$
15. $\int (2^x - 7 \cdot 3^x)dx.$
16. $\int (e^{-5x} + e^{6x+1})dx.$
17. $\int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{16}}.$
18. $\int \frac{dx}{1 + 121x^2}.$
19. $\int \frac{dx}{1 + (8x-1)^2}.$
20. $\int \frac{dx}{4 + x^2}.$

21. $\int \frac{dx}{16 + x^2}.$

24. $\int \frac{10dx}{\sqrt{1 - 64x^2}}.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}.$

23. $\int \frac{7dx}{\sqrt{49 - x^2}}.$

14.3. Знайти інтеграли, використовуючи заміну змінних або внесення під знак диференціала:

1. $\int \frac{dx}{4x + 3}.$

11. $\int \frac{x^2 dx}{4 + x^6}.$

2. $\int \frac{xdx}{1 + x^2}.$

12. $\int \frac{xdx}{0,25 + x^4}.$

3. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}.$

13. $\int \frac{(2x + 2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$

4. $\int x^2 e^{2x^3 + 1} dx.$

14. $\int \frac{(2x - 2)dx}{\sqrt{2 - 2x + x^2}}.$

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

15. $\int \frac{(3 - 4x)dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}.$

6. $\int e^{\cos x} \sin x dx.$

16. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + 3x + 3}.$

7. $\int e^{-x^2} x dx.$

17. $\int \frac{(2x - 2)dx}{x^2 - 2x + 5}.$

8. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$

18. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 3)^6}.$

9. $\int \sqrt[3]{x^3 - 8x^2} dx.$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}.$

10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}.$

20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 6}}.$

21. $\int e^{\sin x} \cos x dx.$

25. $\int \frac{x dx}{x^2 + 3}.$

22. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3 + 1)}.$

26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}.$

23. $\int \frac{(\ln x)^2 dx}{x}.$

24. $\int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}.$

27. $\int x \ln(1 + x^2) dx.$

7.1. Обчислення невизначених інтегралів

Метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно-диференційовні функції та існує інтеграл $\int v du$. Тоді справджується рівність

$$\int u dv = uv - \int v du$$

– формула **інтегрування частинами**, яка використовується для обчислення інтегралів типу:

$$\int x^k e^{ax} dx, \int x^k \sin ax dx, \int x^k \cos ax dx,$$

$$\int x^k \ln x dx, \int x^k \arcsin x dx, \int x^k \arccos x dx,$$

$$\int x^k \operatorname{arctg} x dx, \int e^{ax} \sin bx dx, \int e^{ax} \cos bx dx,$$

$$\int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx.$$

У цьому випадку для інтегралів перших трьох типів за $u(x)$ приймають x^k , а за dv – відповідні вирази $e^{ax} dx$, $\sin ax dx$, $\cos ax dx$;

для інтегралів наступних трьох типів за $u(x)$ вибирають, відповідно, функції $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ а за $dv = x^k dx$.

Приклади 7.3. Обчислити інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} 1. \int x^3 \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx; \quad v = \int dv = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} (\ln x - \frac{1}{4}) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int x \cos 3x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos 3x dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \\ &= \frac{x}{3} \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

Аудиторна робота 15

15.1. Інтегруючи частинами, знайти інтеграли:

$$\begin{array}{lll} 1. \int \ln(x^2 + 1) dx. & 3. \int x e^{2x} dx. & 5. \int \arctg x dx. \\ 2. \int (\ln x)^2 dx. & 4. \int x \cos 2x dx. & 6. \int x 5^{-x} dx. \end{array}$$

15.2. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\begin{array}{ll} 1. \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}. & 3. \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx. \\ 2. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx. & 4. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}. \end{array}$$

5. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}.$

6. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$

15.3. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \sin^2 3x dx.$

4. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

2. $\int (1 + \cos 2x)^2 dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

3. $\int \cos^5 x dx.$

Домашня робота 15

15.1. Інтегруючи частинами, знайти інтеграли:

1. $\int x \ln(x - 1) dx.$

7. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

2. $\int x^3 \ln x dx.$

8. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

3. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

9. $\int (x - 7) \sin x dx.$

4. $\int x^2 e^{-x} dx.$

10. $\int x 2^{-x} dx.$

5. $\int x \sin 3x dx.$

6. $\int x^2 \cos x dx,$

11. $\int (2x - 1) e^x dx.$

15.2. Обчислити інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1. $\int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx.$

3. $\int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} dx.$

2. $\int \frac{(3x^2 + 2x - 3) dx}{x^3 - x}.$

4. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$

5. $\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx.$

9. $\int \frac{x dx}{x^3 + 8}.$

6. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$

10. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx.$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

11. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} dx.$

8. $\int \frac{x^3 dx}{x-2}.$

12. $\int \frac{x^3 dx}{x^2-4}.$

15.3. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int (1 - \sin 2x)^2 dx.$

6. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

2. $\int (\cos x)^4 dx.$

7. $\int \sin^5 x dx.$

3. $\int (1 + 3 \cos 2x)^2 dx.$

8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

4. $\int \sin^4 x dx.$

5. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

9. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

7.2. Обчислення та застосування визначених інтегралів

Розглянемо неперервну невід'ємну на відрізку $[a; b]$ функцію $f(x)$. **Визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називають вираз

$$\int_a^b f(x) dx,$$

7.2. Обчислення та застосування визначених інтегралів 179

де a і b —, відповідно, *нижня* і *верхня межі інтегрування*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x)$

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Тут $f(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$. У загальному випадку — $S = \int_a^b |f(x)| dx$. Функцію $f(x)$, для якої існує визначений інтеграл на відрізку $[a; b]$, називають *інтегровною* на відрізку $[a; b]$.

Властивості визначеного інтеграла :

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
3. $\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$, $C - const$.
4. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
5. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, $c \in [a; b]$.
6. Якщо $f(x) \leq g(x)$ на відрізку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

7. Якщо $a \leq b$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
8. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то знайдеться точка $c \in [a; b]$ така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a).$$

Число $f(c)$ називають середнім значенням функції на відрізку $[a; b]$.

Формула Ньютона – Лейбніца. Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізьку $[a; b]$ функція, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на $[a; b]$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі. Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізьку $[a; b]$, $x = \varphi(t)$ – монотонна й неперервно диференційовна на відрізьку $[\alpha; \beta]$ функція, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Метод інтегрування частинами визначеного інтеграла. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на відрізьку $[a; b]$ функції та існує інтеграл $\int_a^b v du$. Тоді

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклади 7.4. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)|_0^{\pi/4} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} \mathbb{R}^m dx &= \left[x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) \right] = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \arctg x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x, \quad dt = \cos x dx \\ x = 0 \rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} 4. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \, dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \, v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{3}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії
Обчислення площі плоских фігур. Визначений інтеграл від додатної неперервної функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a; b]$, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі абсцис та відповідними відрізками прямих $x = a$, $x = b$

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо криволінійна фігура, яка утворена двома неперервними на відрізку $[a; b]$ кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та, відповідно, прямими $x = a$, $x = b$, причому $f_2(x) \geq f_1(x)$ на відрізку $[a; b]$, то її площа (як різниця площ двох криволінійних трапецій) обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Приклади 7.5. 1. Обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою $y = x^2 - 3x$ та прямою $y + 3x - 4 = 0$.
Розв'язування. Знайдемо межі інтегрування, тобто точки перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь $y = x^2 - 3x$ та $y + 3x - 4 = 0$. Маємо $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Обчислимо площу

$$S = \int_{-2}^2 [(4-3x) - (x^2-3x)] dx = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями

$$100y = x^2 \text{ і } y^2 = 100x.$$

Розв'язування. Знайдемо точки перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь $100y = x^2$ і $y^2 = 100x$. Виразивши з першого рівняння $y = \frac{x^2}{100}$ і підставивши в друге, отримаємо $\frac{x^4}{10000} = 100x$. Звідси, розклавши на множники, одержимо рівняння

$$x \left(\frac{x^3}{10000} - 100 \right) = 0.$$

Маємо корені $x_1 = 0$, $x_2 = 100$. Зауважимо, що на проміжку $[0; 100]$ виконується нерівність

$$y = 10\sqrt{x} \geq y = \frac{x^2}{100} \quad (y^2 = 100x \Rightarrow y = \pm 10\sqrt{x}).$$

Тому вибираємо $f_2(x) = 10\sqrt{x}$ і $f_1(x) = \frac{x^2}{100}$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{100} \left(10\sqrt{x} - \frac{x^2}{100} \right) dx = \left(10 \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{1}{100} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{100} = \\ &= \frac{20}{3} 100^{3/2} - \frac{100^3}{300} = \frac{20000}{3} - \frac{10000}{3} = \frac{10000}{3} = 333\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Аудиторна робота 16

16.1. Обчислити:

1. $\int_{-1}^3 x^4 dx.$

3. $\int_0^4 |2-x| dx.$

2. $\int_1^9 \sqrt{x} dx.$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

7.2. Обчислення та застосування визначених інтегралів 183

$$5. \int_0^1 (2 + x - x^3) dx.$$

$$10. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x) dx}{\cos^3 x}.$$

$$6. \int_0^{\pi/6} \sin 6x dx.$$

$$11. \int_{-1}^0 \frac{3dx}{4x^2 + 4x - 3}.$$

$$7. \int_3^5 \frac{x dx}{x^2 - 4}.$$

$$12. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$8. \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)}.$$

$$13. \int_{\pi/12}^{\pi/6} \operatorname{ctg} 3x dx.$$

$$9. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$14. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx.$$

16.2. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані в прямокутній системі координат:

1. $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

2. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

3. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

4. $y = 4x + x^2$, $y = x + 4$.

5. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$.

6. Однією півхвилею синусоїди $y = \sin x$, $y = 0$.

Домашня робота 16

16.1. Обчислити:

$$1. \int_1^2 \left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right) dx.$$

$$2. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3. \int_0^1 \sqrt{1+xdx}.$$

$$4. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$5. \int_0^5 e^{x/5} dx.$$

$$6. \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

$$7. \int_0^2 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

$$8. \int_{-2}^{-1} x^2 e^{-2x} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$$

$$10. \int_{2/5}^{4/5} \frac{dx}{4+25x^2}.$$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$12. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$$

$$13. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$14. \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

$$15. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$$

$$16. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$$

$$17. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$18. \int_e^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x + 1)}.$$

$$19. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x}.$$

20.
$$\int_1^e \frac{(1 + \ln x)dx}{x}.$$

21.
$$\int_0^2 2^x dx.$$

16.2. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані в прямокутній системі координат:

1. $y = x^2, x + y = 0.$

2. $y = 6x - x^2, y = 0.$

3. $y = x^3, y = 4x.$

4. $y = x^2, 2x - y + 3 = 0.$

5. $y = 2x - x^2, y + x = 0.$

6. $y = x^2, y = 2 - x^2.$

7. $xy = 4, x + y = 5.$

8. $y = 3 - 2x - x^2, y = 0.$

9. $y = x^2 + 2x, y = x + 2.$

10. $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14.$

7.3. Невластиві інтеграли

Невластиві інтеграли першого роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; \infty)$ та інтегровна на кожному відрізку $[a; A]$, $a < A$. **Невластивим інтегралом першого роду** називають границю

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad a < A.$$

Якщо границя існує і скінченна, то невластивий інтеграл першого роду називають **збіжним**. Якщо ж границя не існує або є

нескінченною, то невластивий інтеграл першого роду називають **розбіжним**.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; b]$ та інтегрована на кожному відрізку $[B; b]$, $B < b$. **Невластивим інтегралом першого роду** називають границю

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad B < b.$$

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $(-\infty; +\infty)$ та інтегровна на кожному відрізку $[B; A]$, $B < A$. **Невластивим інтегралом першого роду** називають границю

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A f(x) dx + \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^c f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad B < c < A.$$

Приклади 7.6. Дослідити невластиві інтеграли на збіжність:

1. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0.$

Розв'язування. Розглянемо випадок $\alpha = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty - \text{інтеграл розбіжний.} \end{aligned}$$

Якщо ж $\alpha \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)} \Big|_a^A = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отож, невластивий інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ – збіжний, а при $\alpha \leq 1$ – розбіжний.

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{\substack{B \rightarrow -\infty \\ A \rightarrow +\infty}} \int_B^A \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x+1) \Big|_B^0 + \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x+1) \Big|_0^A = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} B) + \lim_{A \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.
\end{aligned}$$

Невластивий інтеграл збіжний.

$$\begin{aligned}
3. \quad &\int_2^\infty \frac{(1+x^4)dx}{x^5} = \int_2^\infty \frac{1}{x^5} dx + \int_2^\infty \frac{x^4}{x^5} dx = \\
&= \int_2^\infty \frac{1}{x^5} dx + \int_2^\infty \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

у першому доданку $\alpha = 5 > 1$, тому невластивий інтеграл $\int_2^\infty \frac{1}{x^5} dx$ збіжний, у другому доданку $\alpha = 1 \leq 1$, тому невластивий інтеграл $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$ розбіжний. Сума збіжного невластивого інтеграла і розбіжного невластивого інтеграла буде розбіжним невластивим інтегралом.

$$\begin{aligned}
4. \quad &\int_4^\infty \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t; \quad x = t^2; \quad dx = 2t dt \\ x = 4 \rightarrow t = 2 \\ x = +\infty \rightarrow t = +\infty \end{array} \right] = \\
&= \int_2^\infty \frac{2t dt}{t^2 + t} = 2 \int_2^\infty \frac{dt}{t+1} = 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(t+1) \Big|_2^A = \\
&= 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(A+1) - \ln 3) = +\infty.
\end{aligned}$$

Невластивий інтеграл розбіжний.

$$5. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+4x^2}}.$$

Розглянемо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+4x^2}}$. Оцінімо її функцією $\frac{1}{x^\alpha}$. Для всіх $x \in [1; +\infty)$ виконується

$$f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+4x^2}} \leq \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^3}.$$

Тоді зі збіжності невластивого інтеграла $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ($\alpha = 3 > 1$), використовуючи другу ознаку збіжності невластивих інтегралів першого роду, впливає збіжність заданого невластивого інтеграла першого роду.

Невластиві інтеграли другого роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на $[a; b)$, інтегровна на кожному відрізку $[a; b-r]$, $0 < r < b-a$, і в точці $x = b$ функція $f(x)$ має розрив другого роду. Тоді границя

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_a^{b-r} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

називається **невластивим інтегралом другого роду** функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Якщо задана границя існує і є скінченною, то невластивий інтеграл називають **збіжним**; якщо ж границя не існує або є нескінченною, тоді невластивий інтеграл – **розбіжний**.

Нехай функція $f(x)$ визначена на $(a; b]$, інтегровна на кожному проміжку $[a+r; b]$, $0 < r < b-a$, і в точці $x = a$ функція $f(x)$ має розрив другого роду. Тоді границя

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{a+r}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

називається **невластивим інтегралом другого роду** функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Якщо $f(x)$ визначена на $[a; c) \cup (c; b]$, інтегровна на кожному проміжку $[a; c-r_1] \cup [c+r_2; b]$, де $0 < r_1 < a-c$, $0 < r_2 < b-c$, і в точці $x = c$ функція $f(x)$ має розрив другого роду, то границя

$$\lim_{r_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-r_1} f(x) dx + \lim_{r_2 \rightarrow +0} \int_{c+r_2}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

називається **невластивим інтегралом другого роду** функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Приклади 7.7. Дослідити невластні інтеграли на збіжність:

$$1. \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a < b.$$

Розв'язування. $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$. Нехай $\alpha = 1$, тоді

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{r \rightarrow +0} \int_a^{b-r} \frac{dx}{b-x} = \lim_{r \rightarrow +0} (\ln(b-a) - \ln r) = \infty.$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{r \rightarrow +0} \int_a^{b-r} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}} \Big|_a^{b-r} = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \lim_{r \rightarrow +0} \left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right) = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, заданий невластний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ при $\alpha < 1$ – збіжний, при $\alpha \geq 1$ – розбіжний.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Розглянемо підінтегральну функцію $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, яка неперервна на відрізку $[0; 1]$, крім точки $x = 0$. Використаємо результати попереднього прикладу $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{3/4}}$, де $\alpha = \frac{3}{4} < 1$, тому заданий невластний інтеграл другого роду збіжний.

$$3. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^8}}.$$

Розглянемо підінтегральну функцію $\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$, яка неперервна на відрізку $[-2; 0]$, крім точки $x = 0$. Маємо, що $\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} = \frac{1}{x^{8/3}}$, де $\alpha = \frac{8}{3} > 1$, тому заданий невластний інтеграл другого роду – розбіжний.

$$4. \int_0^1 \frac{(1 + \sqrt{x^3}) dx}{x^2}.$$

Цей інтеграл має особливість у точці $x = 0$. Розкладемо його на суму інтегралів

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1 + \sqrt{x^3}) dx}{x^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{\sqrt{x^3} dx}{x^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{x^{3/2} dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}. \end{aligned}$$

У першому доданку $\alpha = 2 > 1$, тому невластний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ розбіжний, у другому доданку $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, тому невластний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ збіжний. Сума збіжного невластного інтеграла і розбіжного невластного інтеграла буде розбіжним невластним інтегралом.

$$5. \int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}.$$

Розглянемо підінтегральну функцію $\frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{(x-3)^2}$, яка неперервна на відрізку $[3; 6]$, крім точки $x = 3$. Маємо, що $\alpha = 2 > 1$, тому заданий невластний інтеграл другого роду – розбіжний.

Аудиторна робота 17

17.1. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}, \quad a > 0.$$

3.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}.$$

9.
$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a > 0.$$

4.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}.$$

10.
$$\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

5.
$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, \quad a > 0.$$

11.
$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(2x)}.$$

6.
$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

12.
$$\int_0^1 x \ln x dx.$$

7.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}.$$

13.
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

8.
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

14.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

Домашня робота 17

17.1. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

1.
$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}.$$

3.
$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

2.
$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$$

4.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+4}.$$

5. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

12. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}.$

7. $\int_0^3 \frac{dx}{x^a}, a > 0.$

13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

8. $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}}.$

14. $\int_0^{10} \ln x dx.$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

15. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$

10. $\int_0^{\sqrt{2/3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-9x^4}}.$

16. $\int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}.$

7.4. Економічні застосування визначеного інтеграла

Задача про обсяг продукції. Нехай деяке підприємство виробляє продукцію з інтенсивністю (продуктивність праці) $f = f(t)$. Знайдемо обсяг продукції q , виробленої за інтервал часу $[0; T]$, тобто

$$q = \int_0^T f(t) dt.$$

Приклад 7.8. Продуктивність праці виробничої бригади ви-

ражається функцією $f(t) = 8t - t^2$. Робітники працюють 8 год, тобто $t \in [0, 8]$. Обчислити обсяг виробленої продукції: а) за робочий день; б) за інтервал часу $[2; 6]$; в) порівняти ці обсяги в процентному відношенні.

Розв'язування.

$$\text{а) } q_1 = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (8t - t^2)dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^8 = \frac{256}{3};$$

$$\text{б) } q_2 = \int_2^6 f(t)dt = \int_2^6 (8t - t^2)dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_2^6 = \frac{176}{3};$$

$$\text{в) } r = \frac{q_2}{q_1} 100\% = \frac{17600}{256} = 68,75\%.$$

Приклад 7.9. Знайти обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд $f(t) = (1 + 2t)e^{5t}$.

Розв'язування. Отримаємо

$$\begin{aligned} q &= \int_0^2 (1 + 2t)e^{5t}dt = \left[\begin{array}{l} u = 1 + 2t, \quad du = 2dt \\ dv = e^{5t}dt, \quad v = \frac{1}{5}e^{5t} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1 + 2t}{5}e^{5t}\Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{5t}dt = e^{10} - \frac{1}{5}e^0 - \frac{1}{10}e^{5t}\Big|_0^2 = \\ &= e^{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}(e^{10} - e^0) = 0,9e^{10} - 0,1. \end{aligned}$$

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення. Якщо $C = C(t)$, $R = R(t)$, $P = P(t)$ – відповідно змінні витрати, дохід і прибуток підприємства (фірми), то їхні середні значення за час від $t = t_0$ до $t = t_1$ обчислюють за формулами

$$C_{\text{сеп}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} C(t)dt, \quad R_{\text{сеп}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} R(t)dt,$$

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt.$$

Приклад 7.10. Знайти середній дохід за 10 місяців поточного року, якщо задано функцію доходу фірми $R(t) = 3t^2 + 2t - 1$, де t – час.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} R_{\text{сер}} &= \frac{1}{10} \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1) dt = \frac{1}{10} (t^3 + t^2 - t) \Big|_0^{10} = \\ &= \frac{1}{10} (10^3 + 10^2 - 10) = 109 \text{ умов. грош. од.} \end{aligned}$$

Якщо $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ – відповідно, функції граничних витрат, доходу та прибутку підприємства (фірми), то при реалізації x одиниць продукції зміни витрат, доходу й прибутку зі збільшенням реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюють за формулами

$$C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x) dx, \quad R(b) - R(a) = \int_a^b R'(x) dx,$$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x) dx.$$

Приклад 7.11. Задано граничний прибуток фірми $P'(x) = 23,5 - 0,01x$. Визначити зростання прибутку, якщо реалізація продукції збільшується з 1000 до 1500 одиниць.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} P(1500) - P(1000) &= \int_{1000}^{1500} (23,5 - 0,01x) dx = \\ &= (23,5x - 0,01 \frac{x^2}{2}) \Big|_{1000}^{1500} = 35350 - 11250 + 5000 = 5500. \end{aligned}$$

Отже, прибуток зросте на 5500 умов. грош. од.

Приклад 7.12. Задано граничний дохід фірми $R'(x) = 15 - 0,01x$. Знайти функцію доходу й визначити співвідношення між ціною одиниці продукції та обсягом проданої продукції.

Розв'язування. Знайдемо функцію доходу

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (15 - 0,01x)dx = 15x - 0,005x^2 + C.$$

Щоб визначити C , використаємо, що дохід дорівнює нулю, якщо не продано жодної одиниці продукції, тобто

$$R(0) = 0, \quad 0 = 15 \cdot 0 - 0,005 \cdot 0 + C, \quad C = 0.$$

Отже, функція доходу фірми має вигляд $R(x) = 15x - 0,005x^2$. Якщо ціна кожної одиниці проданої фірмою продукції p і продано x одиниць, то її дохід $R(x) = px$. Отже, $px = 15x - 0,005x^2$, тому $p = 15 - 0,005x$.

Аудиторна робота 18

Розв'язати задачі:

18.1. Нехай гранична ціна проданої фірмою продукції описується функцією $p'(x) = 2x + 120$, де x – обсяг проданої продукції. Визначити загальну функцію ціни проданої продукції, якщо ціна 100 одиниць дорівнює 50000 грн.

18.2. Продуктивність праці впродовж робочого дня описується функцією $f(t) = -t^2 + 8t + 3$. Обчислити обсяг продукції, випущеної протягом робочого дня ($0 \leq t \leq 8$).

18.3. Продуктивність праці впродовж робочого дня описується функцією

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \leq 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2 + 13t - 40, & 5 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

де t – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, випущеної впродовж робочого дня.

18.4. За функцією граничних витрат $C'(x) = 3x^2 - 48x + 202$, $1 \leq x \leq 20$ знайти функцію витрат $C = C(x)$ і обчислити витрати у випадку виробництва 10 одиниць продукції, якщо відомо, що витрати на виробництво першої одиниці продукції становлять 50 грн.

18.5. Знайти обсяг виробленої продукції за 5 років, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд $f(t) = AK^\alpha(t)L^\beta(t)e^{\lambda t}$, де t – час (років), $K(t) = (100 - 3t)^2$, $L(t) = (t + 1)^2$, $A = \lambda = 1$, $\alpha = \beta = 0,5$.

Домашня робота 18

Розв'язати задачі:

18.1. Нехай гранична ціна проданої фірмою продукції описується функцією $p'(x) = x + 100$, де x – обсяг проданої продукції. Визначити загальну функцію ціни проданої продукції, якщо ціна 100 одиниць становить 40000 грн.

18.2. Продуктивність праці протягом робочого дня описується функцією $f(t) = -t^2 + 10t + 4$. Обчислити обсяг продукції, випущеної протягом робочого дня ($0 \leq t \leq 10$).

18.3. Знайти обсяг виробленої продукції за 5 років, якщо виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд $f(t) = AK^\alpha(t)L^\beta(t)e^{\lambda t}$, де t – час (років), $K(t) = (100 - 3t)^2$, $L(t) = (t + 1)^2$, $A = \lambda = 1$, $\alpha = \beta = 0,5$.

18.4. Знайти середнє значення витрат виробництва, якщо вони визначаються формулою $C(x) = 3x^2 + 4x + 1$, де x – обсяг виробленої продукції, $0 \leq x \leq 3$, і обчислити обсяг виробництва, за якого витрати набувають середнього значення.

Контрольні запитання

1. Яку функцію називають первісною для заданої функції?
2. Що називають невизначеним інтегралом від заданої функції?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як обчислюють основні невизначені інтеграли від основних елементарних функцій?
5. Як записується формула заміни змінної у невизначеному інтегралі?
6. У чому полягає суть методу інтегрування частинами?
7. Як записується формула Ньютона – Лейбніца?

8. Які основні властивості визначеного інтеграла?
9. Як здійснюється заміни змінної у визначеному інтегралі?
10. Як записується формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла?
11. Які основні застосування визначеного інтеграла до задач геометрії?
12. Що називають невластивим інтегралом першого роду?
13. Що називають невластивим інтегралом другого роду?
14. За якою формулою обчислюють обсяг виробленої продукції?
15. Як визначають функцію доходу фірми, якщо відомий її граничний дохід?

Контрольна робота (Модуль) 4

Знайти інтеграли:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int \left(6e^{3x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$ | 5. $\int \frac{3e^x}{7 + e^x} dx.$ |
| 2. $\int_0^\pi \sin x \cos^3 x dx.$ | 6. $\int_0^1 \frac{4x + 1}{x^2 - 3x - 10}.$ |
| 3. $\int \left(\cos 6x + \frac{10}{x - 1} \right).$ | 7. $\int (3x^2 + 5) \ln x dx.$ |
| 4. $\int_1^2 (3 + 2x)e^{5x}.$ | 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ |

9. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2 - x - 6$, $y = x + 9$.

10. Знайти обсяг продукції, що вироблена за 4 роки, якщо виробнича функція має вигляд $f(x) = 3x^3 + 3x + 2$.

Розділ 8

Диференціальні рівняння

8.1. Диференціальне рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння можна звести до вигляду

$$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0 \quad \text{або} \quad y' = f(x)g(y),$$

то його називають *рівнянням з відокремленими змінними*. Щоб розв'язати таке рівняння, відокремимо змінні

$$\frac{g_2(y) dy}{g_1(y)} = - \frac{f_1(x) dx}{f_2(x)}$$

та проінтегруємо одержану рівність

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = - \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + C.$$

Зауваження. Треба окремо досліджувати значення x та y , за яких функції $g_1(y)$ та $f_2(x)$ дорівнюють нулю. Перевірити, чи корені рівнянь

$$g_1(y) = 0, \quad f_2(x) = 0$$

задовольняють вихідне рівняння.

Розглянемо рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де a , b , c – задані сталі. Застосуємо заміну змінних $z = ax + by + c$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція

$$\frac{dz}{dx} = a + b y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Підставляючи у вихідне рівняння, отримаємо

$$z' = b f(z) + a$$

це рівняння з відокремленими змінними.

Приклади 8.1. Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $(e^x + 1)y' = ye^x$.

Розв'язування. Це рівняння з розділеними змінними. Запишемо його у вигляді

$$(e^x + 1) \frac{dy}{dx} = ye^x. \quad \text{Тоді} \quad \frac{dy}{y} = \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$$

Проінтегрувавши це співвідношення,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$$

Тоді

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y|, \quad \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln |e^x + 1|.$$

Прирівнюючи праві частини, одержимо

$$\ln |y| = \ln(e^x + 1) + \ln |C| \Rightarrow \ln |y| = \ln |C(e^x + 1)|.$$

Отож, розв'язок рівняння має вигляд $y = C(e^x + 1)$, який називають загальним.

$$2. \quad x^3 y' = \sqrt{y^2 - 5}.$$

Розв'язування. Це рівняння з відокремленими змінними. Запишемо його у вигляді

$$x^3 \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 5}.$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 5}} = \frac{dx}{x^3}$.

Зінтегрувавши це співвідношення, одержимо

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 5}} = \int \frac{dx}{x^3}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 5}} = \ln |y + \sqrt{y^2 - 5}|, \quad \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

Тоді отримаємо $\ln |y + \sqrt{y^2 - 5}| = -\frac{1}{2x^2} + C$.

Перевіримо чи не втратили розв'язків $\sqrt{y^2 - 5} = 0$, $y = \sqrt{5}$, $y = -\sqrt{5}$. Підставимо в умову $x^3 \cdot 0 = \sqrt{(\pm\sqrt{5})^2 - 5} \Rightarrow 0 = 0$. Отож, отримали загальний розв'язок

$$\ln |y + \sqrt{y^2 - 5}| = -\frac{1}{2x^2} + C, \quad y = \sqrt{5}, \quad y = -\sqrt{5}.$$

$$3. \quad y' \sin y (9 + x^2) = \cos y.$$

Розв'язування. Це рівняння з відокремленими змінними. Запишемо його у вигляді $\frac{dy}{dx} \sin y (9 + x^2) = \cos y$. Відокремлюючи змінні, отримаємо $\frac{\sin y dy}{\cos y} = \frac{dx}{9 + x^2}$.

Проінтегрувавши це співвідношення, одержимо

$$\int \frac{\sin y \, dy}{\cos y} = \int \frac{dx}{9 + x^2}$$

.

$$\int \frac{\sin y \, dy}{\cos y} = \int \operatorname{tg} y \, dy = -\ln |\cos y|, \quad \int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}.$$

Прирівнюючи праві частини, отримаємо

$$\ln |\cos y| = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \ln |C|.$$

Отож, загальний розв'язок

$$\cos y = C e^{-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}}.$$

$$4. \quad x^2 y' - 6y^3 = 0, \quad y(3) = 2.$$

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок зазначеного рівняння

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 6y^3 = 0 \Rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} = 6y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 6 \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -2 \frac{dy}{y^3} = -12 \frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегрувавши це співвідношення, отримаємо

$$-2 \int \frac{dy}{y^3} = -12 \int \frac{dx}{x^2}.$$

$$-2 \int \frac{dy}{y^3} = -2 \int y^{-3} dy = -2 \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{1}{y^2},$$

$$-12 \int \frac{dx}{x^2} = -12 \int x^{-2} dx = -12 \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{12}{x}.$$

Прирівнюючи праві частини, одержимо $\frac{1}{y^2} = \frac{12}{x} + C$.

Перевіримо чи не втратили розв'язків $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$. Підставимо в умову $x^2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0$. Задовольняє, тому дописуємо до

відповіді. Аналогічно, $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Підставимо в умову $0^2 y' - 6y^3 = 0$ – не задовольняє, тому не дописуємо до відповіді. Отож, отримали загальний розв'язок рівняння

$$\frac{1}{y^2} = \frac{12}{x} + C, \quad y = 0.$$

З умови $y(3) = 2$ підставляємо $y = 2$, $x = 3$ у загальний розв'язок, щоб визначити значення сталої C

$$\frac{1}{2^2} = \frac{12}{3} + C \Rightarrow C = -3,75.$$

Отож, отримали шуканий розв'язок задачі Коші

$$\frac{1}{y^2} = \frac{12}{x} - 3,75.$$

5. $y' \operatorname{ctg} x - y = 6, \quad y(\pi/3) = 4.$

Розв'язування. Спочатку знайдемо загальний розв'язок зазначеного рівняння

$$\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} = y + 6 \Rightarrow \frac{dy}{y+6} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \frac{dy}{y+6} = \operatorname{tg} x \, dx.$$

Проінтегрувавши це співвідношення, отримаємо $\int \frac{dy}{y+6} = \int \operatorname{tg} x \, dx$,

$$\int \frac{dy}{y+6} = \ln |y+6|, \quad \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x|.$$

Прирівнюючи праві частини, одержимо загальний розв'язок рівняння

$$\ln |y+6| = -\ln |\cos x| + \ln |C| \Rightarrow y+6 = \frac{C}{\cos x}.$$

З умови $y(\pi/3) = 4$ підставляємо $y = 4$, $x = \pi/3$ у загальний розв'язок, щоб визначити значення сталої C

$$4+6 = \frac{C}{\cos(\pi/3)} \Rightarrow 10 = 2C \Rightarrow C = 5.$$

Отже, отримали шуканий розв'язок

$$y = \frac{5}{\cos x} - 6.$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y)$$

називають **однорідним**, якщо $f(x, y)$ задовольняє умову

$$f(tx, ty) = f(x, y),$$

для довільного дійсного ненульового t .

Таке рівняння завжди можна звести до вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Застосовуючи підстановку $y = ux$, де $u = u(x)$ – нова невідома функція, а $y' = u + xu'$, отримаємо

$$u + xu' = \varphi\left(\frac{yu}{x}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x} (\varphi(u) - u)$$

рівняння з відокремлюваними змінними, які можна розділити.

Приклад 8.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$3y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{10y}{x} + 10.$$

Розв'язування. Це однорідне диференціальне рівняння. Зробимо заміну $y = ux$, де $u = u(x)$ – невідома функція ($y' = u'x + u$, $\frac{y}{x} = u$). Після підстановки в умову одержимо

$$3(u'x + u) = u^2 + 10u + 10 \Rightarrow 3u'x = u^2 + 7u + 10 \Rightarrow$$

$$\frac{3xdu}{dx} = u^2 + 7u + 10 -$$

рівняння з відокремлюваними змінними. Тоді

$$3 \int \frac{du}{u^2 + 7u + 10} = \int \frac{dx}{x}.$$

Розкладемо підінтегральну функцію в лівій частині рівняння на прості дроби

$$\frac{1}{u^2 + 7u + 10} = \frac{1}{(u+2)(u+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+5} \right).$$

Прирівнюючи праві частини, одержимо загальний розв'язок рівняння

$$\int \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+5} \right) du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |u+2| - \ln |u+5| = \ln |x| + \ln |C|,$$

$$\ln \left| \frac{u+2}{u+5} \right| = \ln |Cx| \Rightarrow \left| \frac{\frac{y}{x}+2}{\frac{y}{x}+5} \right| = |Cx| \Rightarrow \frac{y+2x}{y+5x} = Cx.$$

Перевіркою переконуємось, що $y = -5x$ є частинним розв'язком рівняння. Отож, отримали загальний розв'язок

$$\frac{y+2x}{y+5x} = Cx, \quad y = -5x.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (8.1.1)$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – задані неперервні функції. Якщо $q(x) = 0$, то (8.1.1) називають **лінійним однорідним**, якщо $q(x) \neq 0$, то **лінійним неоднорідним** рівнянням.

Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки лінійного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$. Тоді функція $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння за довільних дійсних значень сталих C_1 і

C_2 . Диференціальне рівняння (8.1.1) розв'язують за допомогою *методу варіації сталої*.

Приклад 8.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + y = e^{-x}$, який задовольняє умову $y(0) = 2000$. *Розв'язування.* Це лінійне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації сталої. Спочатку розглянемо відповідне однорідне рівняння $y' + y = 0$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int dx \Rightarrow \ln |y| = -x + \ln |C| \Rightarrow y = C e^{-x}.$$

Розв'язок заданого рівняння будемо шукати у вигляді $y = C(x) e^{-x}$, де $C(x)$ – деяка невідома функція. Підставивши це співвідношення в умову, отримаємо

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow C'(x) = 1.$$

Тоді знайдемо $C(x) = \int dx = x + C$ й одержимо загальний розв'язок $y = C e^{-x} + x e^{-x}$. Використовуючи умову $y(0) = 2000$ ($x = 0$, $y = 2000$), одержимо

$$2000 = C e^0 + 0 e^0 \Rightarrow C = 2000.$$

Отож, отримаємо шуканий розв'язок

$$y = 2000 e^{-x} + x e^{-x}.$$

Приклад 8.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2x y = x e^{-x^2}.$$

Розв'язування. Це лінійне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації сталої. Спочатку розглянемо відповідне однорідне рівняння $y' + 2x y = 0$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = -2x y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx,$$

$$\ln |y| = -x^2 + \ln |C| \Rightarrow y = C e^{-x^2}.$$

Розв'язок заданого рівняння будемо шукати у вигляді $y = C(x) e^{-x^2}$, де $C(x)$ – деяка невідома функція. Підставляючи це співвідношення в рівняння, отримаємо

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2x C(x)e^{-x^2} = x e^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x.$$

Тоді

$$C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

і одержимо загальний розв'язок

$$y = C e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2}.$$

Аудиторна робота 19

19.1. Розв'язати рівняння з відокремленими змінними:

- | | |
|--|--|
| 1. $xy' + y = y^2$. | 4. $xy + (x+1)y' = 0$. |
| 2. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$. | 5. $\sqrt{y^2 + 1} = xy y'$. |
| 3. $y' - xy^2 = 2xy$. | 6. $e^x \sin^3 y + (1+e^{2x}) \cos y y' = 0$. |

19.2. Розв'язати однорідні рівняння:

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$. | 3. $(3x + 2y)dx + xdy = 0$. |
| 2. $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$. | 4. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. |

19.3. Розв'язати лінійні рівняння першого порядку:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $xy' - 2y = 2x^4$. | 4. $2x(x^2 + y) = y'$. |
| 2. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$. | 5. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$. |
| 3. $y = x(y' - x \cos x)$. | 6. $x^2 y' + xy + 1 = 0$. |

Домашня робота 19

19.1. Розв'язати рівняння з відокремленими змінними:

1. $xy' - 3y = 0$.

5. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

2. $x^2y' - \cos 2y = 1$.

6. $x \sin(y) = y'(1 + x^2) \cos y$.

3. $x^2y' \cos y + 1 = 0$.

7. $(xy^2 + x)dx = -(y - x^2y)dy$.

4. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

8. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$.

19.2. Розв'язати однорідні рівняння:

1. $(x \operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y)dx + xdy = 0$.

2. $(2y - 2x)dx + (y - 3x)dy = 0$.

3. $(3x^2 - 6xy + y^2)dx + 2x^2dy = 0$.

4. $(y^2 + 4xy - 4x^2)dx - 4x^2dy = 0$.

5. $(3y - 2x)dx + (y - 2x)dy = 0$.

6. $(5x + 3y)dx + (x + y)dy = 0$.

19.3. Розв'язати лінійні рівняння першого порядку:

1. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

2. $(x - 1)y' = (x - 1)^2 \operatorname{tg} x + y$.

3. $xy + e^x - xy' = 0$.

4. $(xy' - 1) \ln(x) = 2y$.

5. $((x + 2) + (x - 1)y)dx - xdy = 0$.

6. $(x + 2)y' = (x + 1)y + \sin x$.

7. $y' - 4e^x = 3y$.

$$8. \quad 5e^x - 4y = -y'.$$

$$9. \quad y' + 2y = 3e^x.$$

$$10. \quad y' + y \cos y = \sin x.$$

$$11. \quad y' = 3\frac{y}{x} - x.$$

$$12. \quad y' = 2\frac{y}{x} + 2x^3.$$

8.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду

$$a y'' + b y' + c y = f(x), \quad (8.2.1)$$

де a , b , c – задані сталі ($a \neq 0$), $f(x)$ – задана функція, називають **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами**. Рівняння вигляду

$$a y'' + b y' + c y = 0, \quad (8.2.2)$$

де a , b , c – задані сталі ($a \neq 0$), називають **лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Загальний розв'язок рівняння (8.2.1) має вигляд

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

де y_0 – загальний розв'язок рівняння (8.2.2), $\tilde{y}$ – будь-який частинний розв'язок рівняння (8.2.1). Розв'язок y_0 будемо шукати у вигляді $e^{\lambda x}$, причому стала λ задовольняє таке рівняння:

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.$$

Його називають *характеристичним* рівнянням, яке відповідає рівнянню (8.2.2). Розглянемо три можливі випадки.

Якщо $D = b^2 - 4ac > 0$, то коренями характеристичного рівняння будуть числа $\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ і $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.2.2) набуде вигляду

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Тут C_1, C_2 – довільні дійсні незалежні сталі.

Якщо ж $D = b^2 - 4ac = 0$, то коренями характеристичного рівняння будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.2.2) матиме вигляд

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x},$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні незалежні сталі.

Якщо ж $D = b^2 - 4ac < 0$, то коренями характеристичного рівняння буде $\lambda_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ і $\lambda_2 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Позначимо $\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.2.2) виглядатиме так:

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Тут C_1, C_2 – довільні дійсні незалежні сталі.

Метод варіації сталих. Лінійне неоднорідне рівняння (8.2.1) з довільною правою частиною розв'язують методом варіації сталої. Якщо відомий розв'язок $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ відповідного однорідного рівняння (8.2.2), тоді загальний розв'язок рівняння (8.2.1) шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

де функції $C_1(x), C_2(x)$ визначають із системи умов

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ a(C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2') = f(x). \end{cases}$$

Приклади 8.5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. $y'' - 36y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -6.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-6x}$.

2. $y'' - 5y' = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 + C_2 e^{5x}$.

3. $y'' - 8y' - 9y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -1.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 e^{9x} + C_2 e^{-x}$.

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

5. $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda + 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}$.

6. $y'' + 16y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -16 \Rightarrow \lambda^2 = (4i)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 4i.$$

Визначимо сталі $\alpha = 0$, $\beta = 4$.

Тоді $y = e^{0x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x))$. Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$.

7. $y'' + 6y' + 18y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \Rightarrow D = 36 - 72 = -36 = (6i)^2.$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = 3 \pm 3i \Rightarrow \alpha = -3, \quad \beta = 3.$$

Отже, отримали загальний розв'язок

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)).$$

8. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Розв'язування. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4 - 20 = -16 = (4i)^2.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Отже, отримали загальний розв'язок

$$y = e^x(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)).$$

$$9. \quad y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язування. Це задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо спочатку загальний розв'язок. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Отже, отримали загальний розв'язок $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Підберемо значення сталих C_1 і C_2 , щоб виконувались умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Спочатку обчислимо похідну розв'язку $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$. Тоді

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad 1 = C_1 + C_2,$$

$$y'(0) = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad 2 = C_1 + 2C_2.$$

Одержимо, що $C_2 = 1$, $C_1 = 0$. Тоді $y = 0 \cdot e^x + 1 \cdot e^{2x}$.

Отже, отримали розв'язок цієї задачі Коші $y = e^{2x}$.

$$10. \quad y'' - 2y' = e^{-x}.$$

Розв'язування. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 2y' = 0.$$

Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. Тоді $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^{2x},$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ шукаємо з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_2'(x)2e^{2x} = e^{-x}. \end{cases}$$

З другої умови одержимо

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-3x} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{6}e^{-3x} + C_2.$$

$$C_1'(x) + \frac{1}{2}e^{-3x}e^{2x} = 0 \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + C_1.$$

Отож, отримаємо загальний розв'язок

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1 + \left(-\frac{1}{6}e^{-3x} + C_2\right)e^{2x} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}e^{-x} + C_1 + C_2e^{2x}.$$

11. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Тоді $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)xe^{3x},$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x)xe^{3x} = 0, \\ C_1'(x)3e^{3x} + C_2'(x)(e^{3x} + xe^{3x}) = e^{3x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи, одержимо

$$\begin{cases} C_1'(x) = -x, \\ C_2'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1, \\ C_2(x) = x + C_2, \end{cases}$$

де C_1 і C_2 – дійсні сталі. Повертаючись до вигляду загального розв'язку, отримаємо

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right)e^{3x} + (x + C_2)xe^{3x} \Rightarrow y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{x^2}{2}e^{3x}.$$

Підберемо значення сталих C_1 і C_2 , щоб виконувались умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Тоді $y(0) = C_1e^0 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow 2 = C_1$.

Обчислимо похідну розв'язку

$$y' = C_1 3e^{3x} + C_2(e^{3x} + x3e^{3x}) + xe^{3x} + \frac{3x^2}{2}e^{3x}. \text{ Тоді}$$

$$y'(0) = C_1 3e^0 + C_2 e^0 \Rightarrow 1 = 3C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1 - 3C_1 = -5.$$

Одержали, що $C_1 = 2$, $C_2 = -5$. Отже, отримали розв'язок цієї задачі

$$y = 2e^{3x} - 5xe^{3x} + \frac{x^2}{2}e^{3x}.$$

$$12. \quad y'' + y = 2 \cos x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$. Складемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = (i)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i.$$

Визначимо сталі $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Тоді отримаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, які задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = 2 \cos x. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, одержимо

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{C_2'(x) \sin x}{\cos x}, \\ \frac{C_2'(x) \sin^2 x}{\cos x} + C_2'(x) \cos x = 2 \cos x, \\ \begin{cases} C_1'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x, \\ C_2'(x) = 2 \cos^2 x. \end{cases} \end{cases}$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C_1, \\ C_2(x) &= \int 2 \cos^2 x \, dx = 2 \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = x + \frac{1}{2} \sin 2x + C_2, \end{aligned}$$

де C_1 і C_2 – дійсні сталі. Повертаючись до вигляду загального розв'язку, одержимо

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2} \cos 2x + C_1\right) \cos x + \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + C_2\right) \sin x, \\ y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x + x \sin x. \end{aligned}$$

Підберемо значення сталих C_1 і C_2 так, щоб виконувались умови $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$. Тоді

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{2} \cos 0 = C_1 + \frac{1}{2}, \quad 5 = C_1 + \frac{1}{2}, \quad C_1 = 4, 5.$$

Обчислимо похідну розв'язку

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin x + x \cos x. \quad \text{Тоді}$$

$$y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - \frac{1}{2} \sin 0 + \sin 0 = C_2, \quad 2 = C_2.$$

Одержали, що $C_1 = 4, 5$, $C_2 = 2$. Отож, отримали розв'язок цієї задачі

$$y = 5 \cos x + (x + 2) \sin x.$$

Аудиторна робота 20

20.1. Розв'язати однорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| 1. $y'' - 6y' + 5y = 0.$ | 6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$ |
| 2. $y'' + 4y' + 4y = 0.$ | 7. $y'''' - 5y'' + 4y = 0.$ |
| 3. $y'' - 6y' + 9y = 0.$ | 8. $y'' - y' - 6y = 0.$ |
| 4. $y'' + 2y' + 10y = 0.$ | 9. $y'''' - y = 0.$ |
| 5. $y''' + 2y'' + y' = 0.$ | 10. $y'''' + 25y'' = 0.$ |

20.2. Розв'язати неоднорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$ | 3. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$ |
| 2. $2y'' + y' - 2y = 3xe^x.$ | 4. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$ |

20.3. Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = 1.$
2. $y' \sin x - y \cos x = 0; \quad y(\pi/2) = 1.$
3. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y(2) = 1, y'(2) = -2.$
4. $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 4, y'(0) = -3.$

Домашня робота 20

20.1. Розв'язати однорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1. $y'' - 4y' = 0.$ | 3. $y'' + 10y' + 25y = 0.$ |
| 2. $y'' - 2y' + y = 0.$ | 4. $y'' + y = 0.$ |

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 5. $2y'' - y' - y = 0$. | 8. $y''' + y' = 0$. |
| 6. $y''' - 5y'' + 4y' = 0$. | 9. $y'' - 4y' + 8y = 0$. |
| 7. $y''' - y'' - y' + y = 0$. | 10. $y'' + 2y' + 10y = 0$. |

20.2. Розв'язати неоднорідні лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$. | 4. $y'' + y = 4 \sin x$. |
| 2. $y'' - 4y = 9e^x - 8$. | 5. $y'' - y = 2e^x - x^2$. |
| 3. $y'' + y = 4xe^x$. | 6. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$. |

20.3. Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $y'' + y = 0$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
2. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
3. $y'' - 2y' = 0$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
4. $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

8.3. Застосування методів диференціальних рівнянь в економічних моделях

Модель демографічного процесу. Відомо, що для цього регіону кількість новонароджених і померлих за одиницю часу пропорційна кількості населення з коефіцієнтами k_1 та k_2 , відповідно. Знайдемо закон зміни чисельності населення в часі, тобто опишемо демографічний процес у регіоні.

Нехай $y = y(t)$ – кількість мешканців регіону в момент часу t . Приріст населення Δy за час Δt дорівнює різниці між кількістю народжених і кількістю померлих за цей час, тобто

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t \quad \text{або} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

де $k = k_1 - k_2$. Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо рівняння

$$y' = ky.$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними.

Модель рівноважного зростання випуску продукції.

Нехай продукція деякої фірми продається за фіксованою ціною p . Позначимо через $q(t)$ обсяг продукції, реалізованої в момент часу t . Тоді на цей момент отримаємо дохід $R(t) = pq(t)$. Припустимо, що частина доходу використовується на інвестиції у виробництво, тобто

$$I(t) = mpq(t).$$

Тут m – норма інвестицій (стале число), причому $0 < m < 1$.

Якщо виходити з припущення про ненасичення ринку (тобто про повну реалізацію продукції, що випускається), то на підставі розширення виробництва буде одержано приріст доходу, частину якого знову використають для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску продукції (акселерації), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$q'(t) = I(t),$$

де $1/l$ – норма акселерації. Тоді врахувавши ці рівності, отримаємо

$$q'(t) = mpq(t), \quad \text{або} \quad q'(t) = kq(t).$$

Тут $k = lmp$.

Отримане рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними, загальний розв'язок якого $q = Ce^{kt}$, де C – довільна стала.

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ обсяг продукції становить q_0 . Тоді $q_0 = Ce^{kt_0}$, звідси $C = q_0 e^{-kt_0}$. Отримаємо розв'язок задачі Коші $q = q_0 e^{k(t-t_0)}$.

Модель зв'язку інфляції та безробіття. Залежність між зростанням оплати праці та безробіттям (залежність Філіпа) описує функція

$$w = f(u), \quad f'(u) < 0,$$

де $w = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$ – норма зростання оплати праці; $W(t)$ – оплата праці в момент часу t ; u – норма безробіття. Позначимо $p = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$ – темп інфляції, T – ефективність праці. Отримаємо залежність

$$p = w - T.$$

Нехай функція $f(u)$ лінійна, тобто $w = f(u) = \alpha - \beta u$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тоді, підставивши в попереднє рівняння, отримаємо модифіковану залежність Філіпа

$$p = \alpha - T - \beta u, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Економісти часто застосовують розширену версію залежності Філіпа завдяки очікуванням інфляції

$$w = f(u) + h\pi, \quad 0 < h \leq 1,$$

де π – значення очікуваного темпу інфляції. Згідно з ідеєю Фрідмана, якщо інфляційний тренд триває досить довго, то люди схильні виробити собі певні інфляційні очікування, тому w має бути зростаючою функцією від π . У цьому випадку

$$p = \alpha - T - \beta u + h\pi, \quad 0 < h \leq 1.$$

Припустимо, що інфляційні очікування можна описати залежністю

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi), \quad 0 < j \leq 1.$$

Це диференціальне рівняння описує не величину π , а тенденцію її зміни з часом. Якщо реальний темп інфляції p перевищує очікуваний темп π , то π буде зростати, якщо ж $p < \pi$, то π буде спадати. Врахувавши останні два рівняння, одержимо

$$\frac{d\pi}{dt} = j(\alpha - T - \beta u) - j(1 - h)\pi.$$

Аудиторна робота 21

21.1. Розв'язати задачі:

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння розширеного відтворення (зміна сукупного суспільного продукту в часі) $\frac{dP}{dt} = \frac{H-S}{f}P$, де H , S , f – сталі.

2. Повні витрати виробництва є функцією y від обсягу виробництва x . Граничні та повні витрати для всіх x задовольняють рівняння $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію повних витрат, якщо $y(0) = 0$.

3. Граничний виторг від продажу x одиниць продукції описує функція $U'(x) = x + 100$. Знайти виторг як функцію x , якщо виторг від продажу 100 одиниць продукції дорівнює 40000 грн.

4. Визначити виробничу функцію $y = f(x)$, якщо еластичність $E_x(y) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x - 1}$ і її графік проходить через точку $M(1; 2)$.

5. Кількість населення деякого міста описує диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = 0,2y(1 - 0,0001y)$, де час t вимірюють у роках. У початковий момент часу в місті проживало 1000 людей. Через скільки років населення цього міста збільшиться в 4 рази.

Домашня робота 21

21.1. Розв'язати задачі:

1. Знайти проміжок часу, через який подвоїться сукупний суспільний продукт P , якщо його зміну в часі описує диференціальне рівняння $\frac{dP}{dt} = \frac{H-S}{f}P$, де $H = 0,6$, $S = 0,5$, $f = 1$.

2. Повні витрати виробництва є функцією y від обсягу виробництва x . Знайти функцію повних витрат, якщо граничні витрати для всіх x пропорційні до середніх витрат з коефіцієнтом пропорційності k і $y(0) = 1$.

3. Сумарний прибуток фірми є функцією $y(x)$, де x – кількість виробленої продукції. Граничний прибуток описує функція

$y'(x) = 500 - x$. Знайти сумарний прибуток, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

4. У селі, в якому проживає 3000 людей, епідемію грипу описує диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = 0,001y(3000 - y)$, де y – кількість хворих у момент часу t . Через який проміжок часу захворіє 70 відсотків населення цього села, якщо в початковий момент було троє хворих.

Контрольні запитання

1. Які рівняння називають диференціальними?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Як формулюється означення загального розв'язку диференціального рівняння?
4. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння?
5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням з відокремленими змінними?
6. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним?
7. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним?
8. Яке диференціальне рівняння другого порядку називають лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами?
9. У чому полягає метод варіації сталих для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
10. Як формулюється модель демографічного процесу?
11. У чому полягає задача рівноважного зростання випуску продукції?
12. Як формулюється модель зв'язку інфляції та безробіття?

Розділ 9

Ряди

9.1. Числові ряди

Числовим рядом називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

де числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ називають **членами** ряду, а u_n – **загальним членом** ряду.

Вважають, що ряд заданий, якщо заданий його загальний член, який називає правило побудови ряду. Наприклад, загальний член має вигляд

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

визначає ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

Суму n перших членів ряду називають **n -ю частковою сумою** ряду і позначають S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд називають **збіжним**, а число S – його **сумою**. В цьому випадку записують

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Якщо ж послідовність $\{S_n\}$ часткових сум ряду не є збіжною, то ряд називають **розбіжним**.

Приклад 9.1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

Розв'язування. Обчислимо n -ту часткову суму ряду S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^k + 2^k}{6^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3^k}{6^k} + \frac{2^k}{6^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right).$$

Враховуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, отримаємо

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1,5.$$

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює 1,5.

Приклад 9.2. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Розв'язування. Обчислимо n -ту часткову суму ряду S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Приклад 9.3. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n).$$

Розв'язування. Підставляючи значення $n = 1, 2, 3, \dots$, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) = 2 + 0 + 2 + 0 + \dots$$

Обчислимо n -ту часткову суму ряду

$$S_n = \sum_{k=1}^n (1 - (-1)^k).$$

Якщо $n = 2m$ – парне, то $S_n = n$, а якщо $n = 2m + 1$ – непарне, то $S_n = n + 1$. Тоді границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Отже, ряд розбіжний.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд збіжний, то послідовність його членів збіжна до нуля, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

З необхідної умови збіжності ряду випливає таке: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд є розбіжним.

Приклад 9.4. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10n^2 - 3}.$$

Розв'язування. Перевіримо чи виконується необхідна ознака збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{10n^2 - 3} = \frac{1}{10} = 0,1 \neq 0.$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад 9.5. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8n+5}.$$

Розв'язування. Перевіримо чи виконується необхідна ознака збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{8n+5} = \frac{2}{8} = 0,25 \neq 0.$$

Отже, ряд розбіжний.

Критерій Коші. Для того, щоб ряд був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого ε існувало таке число N , що для всіх номерів $n > N$ і будь-якого натурального p виконувалась нерівність

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Приклад 9.6. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Розв'язування. Застосуємо критерій Коші. Обчислимо n -ту і $n+p$ -ту частинні суми ряду

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$S_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}.$$

Прийmemo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Розглянемо ліву частину нерівності критерію Коші

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > \sum_{k=1}^p \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Позаяк p будь-яке натуральне число, то прийmemo $p = n$, отримаємо

$$|S_{n+p} - S_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Отож, критерій Коші не справджується, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний. Цей ряд називають **гармонійним** рядом.

Інтегральна ознака Коші. Нехай $f(x)$ – невід’ємна, спадна функція на проміжку $[n_0, +\infty)$ ($n_0 \geq 1$) і $u_n = f(n)$ для $n \in \mathbf{N}$.

Тоді інтеграл $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ збігається (чи розбігається) одночасно

з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Приклад 9.7. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ де } \alpha - \text{деяка стала.}$$

Розв’язування. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Визначимо загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Функція $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ додатна і спадна на проміжку $[1, +\infty)$. Невласивий інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, як відомо, збіжний, коли $\alpha > 1$, і розбіжний, коли $\alpha \leq 1$. Отож, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{збіжний, якщо} & \alpha > 1; \\ \text{розбіжний, якщо} & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Цей ряд називають **узагальненим гармонійним** рядом.

Ознака порівняння 1. Якщо, починаючи з деякого n_0 , виконується нерівність $0 < u_n \leq v_n, n \geq n_0$, то :

1. Зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
2. Зі розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ випливає розбіжність

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Ознака порівняння 2. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad k = \text{const} \neq 0,$$

то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ($u_n > 0, v_n > 0$) або збіжні, або розбіжні одночасно.

Якщо $k = 0$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність

$$\text{ряду } \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Приклад 9.8. Дослідити за допомогою ознаки порівняння збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}}.$$

Розв'язування. Розглянемо загальний член ряду $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}}$.

Очевидно, що $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}} \geq v_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbf{N}$. За ознакою порівняння 1 вихідний ряд розбіжний.

Приклад 9.9. Дослідити за допомогою ознаки порівняння

збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Розв'язування. Розглянемо загальний член ряду

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}.$$

Оцінимо його, зберігаючи найстарший степінь n ,

$$u_n = \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} \leq v_n = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Отже, за ознакою порівняння 1 вихідний ряд збіжний.

Приклад 9.10. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

Розв'язування. Розглянемо загальний член ряду

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$u_n = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \leq \frac{2}{n\sqrt{n+1}} \leq v_n = \frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{3/2}},$$

$\forall n \in \mathbf{N}$, то за ознакою порівняння 1 вихідний ряд збіжний.

Ознака Даламбера. Якщо існує границя $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, то при $q < 1$ – ряд збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, а при $q = 1$ – ознака відповіді не дає.

Приклад 9.11. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)5^n}.$$

Розв'язування. Застосуємо ознаку Даламбера. Для цього визначимо

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{4^n}{(n+1)5^n}, \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}. \\ q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}}{\frac{4^n}{(n+1)5^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)5^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+4}{5n+10} = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд є збіжним.

Приклад 9.12. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}.$$

Розв'язування. За ознакою Даламбера маємо

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{(2n)!}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}, \\ q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{3^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Отже, ряд – збіжний.

Приклад 9.13. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(5n-1)}.$$

Розв'язування. Застосуємо ознаку Даламбера. Оскільки

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{5n-1}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{5(n+1)-1} = \frac{2^n}{5n+4}.$$

$$\begin{aligned}
 q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{5n+4}}{\frac{2^{n-1}}{5n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(5n+4)} \frac{(5n-1)}{2^{n-1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-2}{5n+4} = \frac{10}{5} = 2 > 1.
 \end{aligned}$$

Отже, ряд є розбіжним.

Ознака Коші. Якщо існує границя $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, то при $q < 1$ – ряд збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, а при $q = 1$ – ознака відповіді не дає.

Приклад 9.14. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

Розв'язування. Використаємо ознаку Коші

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд – збіжний.

Приклад 9.15. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n^2}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n.$$

Розв'язування. Використаємо ознаку Коші

$$\begin{aligned}
 q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{8n^2}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2}{5n^2 + 2n + 1} = \frac{8}{5} > 1.
 \end{aligned}$$

Отже, ряд є розбіжним.

$$\text{Ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (9.1.1)$$

де u_n – дійсні числа довільних знаків, називають **знакозмінним**. Ряд (9.1.1) називають **абсолютно збіжним**, якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad (9.1.2)$$

який складений з абсолютних величин членів ряду (9.1.1) є збіжним. Якщо ж ряд (9.1.2) розбіжний, а ряд (9.1.1) збіжний, то ряд (9.1.1) називають **умовно збіжним**.

Знакопочерезним рядом називають ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad (9.1.3)$$

де $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ознака Лейбніца. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ і, починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $u_n > u_{n+1}, n \geq n_0$, то ряд (9.1.3) є збіжним і його сума не перевищує u_1 .

Зауважимо, що дослідження збіжності знакозмінних рядів починаємо з дослідження їх на абсолютну збіжність.

Приклади 9.16. Дослідити збіжність рядів:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Розв'язування. Це знакопочерезний ряд. Дослідимо його спочатку на абсолютну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Оскільки $\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2 + 4n + 1} \leq v_n = \frac{1}{4n^2}$,
 то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний ($\alpha = 2 > 1$).

За ознакою порівняння 1 ряд, який складений з абсолютних величин членів вихідного ряду, є збіжним. Отож, вихідний ряд абсолютно збіжний.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 5^n}.$$

Розв'язування. Дослідимо ряд на абсолютну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n 5^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^n}.$$

Застосуємо ознаку Коші

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} 5} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд, який складений з абсолютних величин членів вихідного ряду, є збіжним. Отож, вихідний ряд є абсолютно збіжним.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n^3}}.$$

Розв'язування. Дослідимо спочатку на абсолютну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n^3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}, \quad \alpha = \frac{3}{8} \leq 1.$$

Ряд, який складений з абсолютних величин членів вихідного ряду, є розбіжним. Перевіримо чи виконуються умови ознаки Лейбніца. Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 0$,

$u_n = \frac{1}{\sqrt[8]{n^3}} > u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[8]{(n+1)^3}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді ряд збіжний. Отож, вихідний ряд умовно збіжний.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{6n+7}.$$

Розв'язування. Дослідимо на абсолютну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}n}{6n+7} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n+7}.$$

Перевіримо необхідну ознаку збіжності. Маємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n+7} = \frac{1}{6} \neq 0$, отож ряд, який складений з абсолютних величин членів вихідного ряду, розбіжний. Легко бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{6n+7}$ не існує. Отож, вихідний ряд розбіжний.

9.2. Степеневі ряди

Ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

називають **степеневим рядом**, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — задані числа, які називають його **коефіцієнтами**, а x — деяка змінна величина. Множину значень x , для яких степеневий ряд збіжний, називають областю збіжності степеневого ряду або інтервалом його збіжності.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збіжний у точці x_0 ($x_0 \neq 0$), то він збіжний, абсолютно для всіх значень x , які задовольняють нерівність $-|x_0| < x < |x_0|$. Якщо степеневий ряд розбіжний у точці x_1 , тоді він розбіжний для всіх значень x , для яких $|x| > |x_1|$.

Із теореми Абеля випливає, що існує інтервал $(-R; R)$, в усіх точках якого степеневий ряд збіжний, а за межами $[-R; R]$ – розбіжний. Число R називають **радіусом збіжності** степеневого ряду і його обчислюють за однією з формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

за умови, що границі існують.

Приклади 9.17. Знайти область збіжності степеневих рядів:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^{n-1}}.$$

Розв'язування. Визначимо коефіцієнти ряду

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}.$$

Знайдемо радіус збіжності за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^n}{n \cdot 3^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{n} = 3.$$

Отож, при $|x| < 3$ – ряд збіжний, при $|x| > 3$ – розбіжний.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

$$а) \ x = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} - \text{числовий ряд розбіжний};$$

$$б) \ x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{n} - \text{ряд збіжний за ознакою Лейбніца.}$$

Отож, область збіжності $-3 \leq x < 3$;

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n.$$

Розв'язування. Визначимо коефіцієнт ряду $a_n = 2^n$. Обчислимо радіус збіжності за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Отож, при $|x| < \frac{1}{2}$ – ряд збіжний, при $|x| > \frac{1}{2}$ – розбіжний.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

а) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$ – числовий ряд розбіжний;

б) $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – числовий ряд розбіжний.

Отож, область збіжності $-0,5 < x < 0,5$.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^3}.$$

Розв'язування. Визначимо коефіцієнти ряду

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3}.$$

Знайдемо радіус збіжності за формулою

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+1)^3}{n^3 (-1)^{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} = 1. \end{aligned}$$

Отож, при $|x| < 1$ – ряд збіжний, при $|x| > 1$ – розбіжний.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності:

а) $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$. Отриманий числовий ряд абсолютно збіжний;

б) $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Ряд збіжний за інтегральною ознакою Коші.

Отож, область збіжності $-1 \leq x \leq 1$.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n!}.$$

Розв'язування. Визначимо коефіцієнти ряду

$$a_n = \frac{4^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Знайдемо радіус збіжності за формулою

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^n (n+1)!}{n! 4^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+1)}{4 n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{4} = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, при $x \in (-\infty, +\infty)$ – ряд збіжний.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)! x^n}{5^n}.$$

Розв'язування. Визначимо коефіцієнти ряду

$$a_n = \frac{(n+2)!}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+3)!}{5^{n+1}}.$$

Знайдемо радіус збіжності за формулою

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} (n+2)!}{(n+3)! 5^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 (n+2)!}{(n+2)! (n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(n+3)} = 0. \end{aligned}$$

Отже, тільки при $x = 0$ – ряд збіжний.

9.3. Ряд Тейлора

Розглянемо таку функцію $f(x)$, що має в точці x_0 похідні усіх порядків. Тоді ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

називають **рядом Тейлора** функції $f(x)$ в точці x_0 .

Якщо функція $f(x)$ має в деякому околі точки x_0 похідні усіх порядків, обмежені деяким числом, то у цьому околі

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Зокрема, якщо $x_0 = 0$, то отримаємо

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

який називають **рядом Маклорена** функції $f(x)$.

Розвинення елементарних функцій у ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{для } x \in \mathbf{R};$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \text{для } x \in \mathbf{R}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{для } -1 < x \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad \text{для } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Аудиторна робота 22

22.1. Застосовуючи необхідну умову збіжності, дослідити ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+3}{5n-7}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{100n-1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+1)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{4n^2-1}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lg n}{\lg n+2}.$$

22.2. Дослідити на збіжність. Якщо ряд збіжний, то знайти суму:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}.$$

$$3. 1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^{n-1}}.$$

$$4. 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n + \dots$$

22.3. Дослідити на збіжність узагальнені гармонійні ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

22.4. Дослідити на збіжність за допомогою ознак порівняння :

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+5}{n^3}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$5. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} +$$

$$\frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}.$$

22.5. Застосовуючи ознаку д'Аламбера, дослідити на збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

$$4. \frac{1}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{6^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

22.6. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність :

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2+3^n)^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{10^n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n}{6n+7} \right)^n.$$

22.7. За допомогою ознаки Лейбніца, дослідити на збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{n^n+2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}.$$

22.8. Знайти області збіжності степеневих рядів:

$$1. 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$2. 1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^3 + \dots$$

$$3. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} + \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+3)^n}{5^n}.$$

$$6. \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x+5)^n.$$

22.9. Розкласти в степеневий ряд за степенями x функції:

$$1. y = \cos^2 x.$$

$$3. y = x \ln(1+x^2).$$

$$2. y = \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$4. y = \frac{x - \ln(1+2x)}{x^2}.$$

Домашня робота 22

22.1. Застосовуючи необхідну умову збіжності, дослідити ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6n+3}{8n-7}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+7}{50n-1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{n(n+4)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}} - 25}{\sqrt{n} + 50}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^2 + 3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln n + n^2}.$$

22.2. Дослідити на збіжність. Якщо ряд збіжний, то знайти суму:

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{n-1}.$ | 3. $1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{7^{n-1}}.$ | 4. $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{6} + \dots$ |

22.3. Дослідити на збіжність узагальнені гармонійні ряди:

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$ | 3. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}.$ | 4. $5 + \frac{5}{\sqrt{2^3}} + \dots + \frac{5}{\sqrt{n^3}} + \dots$ |

22.4. Дослідити на збіжність за допомогою ознак порівняння :

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^3 + 1}{n^4}.$ | 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}.$ | 5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 2n}{\sqrt{n^3} + 2}.$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 7}{\sqrt{n^5}}.$ | 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}.$ |

22.5. Застосовуючи ознаку д'Аламбера, дослідити на збіжність :

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$ | 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}.$ |
| 2. $\frac{1}{4} + \frac{n}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^n} + \dots$ | 5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{5^n}.$ | 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^{n+1}}.$ |

22.6. Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2+5^n)^n}.$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n+1)^n}.$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{3}.$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n}.$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{2n^2+5n+8} \right)^n.$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5n+3}{2n+7} \right)^n.$

22.7. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+4}.$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)2^{2n-1}}.$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}.$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}.$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{8^n}.$

22.8. Знайти області збіжності степеневих рядів:

1. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$
2. $1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \dots + n^nx^n + \dots$
3. $1 + \frac{x}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{5^n}} + \dots$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!^2}{(2n)!} x^n.$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(8)^n x^n}{\sqrt{3^n}}.$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n (x-2)^n.$

22.9. Розкласти в степеневий ряд за степенями x функції:

1. $y = \sin^2 x$.

3. $y = e^{-x^2}$.

2. $y = (1 + x^2)^{12}$.

4. $y = \frac{x + \ln(1 - x)}{x^3}$.

9.4. Застосування рядів у економіці

Сумарний видобуток корисних копалин. Нехай відома початкова величина видобутку d_0 руди і план видобутку на майбутнє, тобто через n днів маємо видобувати по d_n руди. Тоді **сумарний видобуток** D можна визначити за формулою

$$D = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n.$$

Приклад 9.18. Нехай на деякій штольні спочатку видобули k_0 руди і кожного наступного n -го дня мають видобувати $d_n = \frac{k_0}{n(n+1)}$ руди. Знайти сумарний видобуток.

Розв'язування. Використовуючи попередню формулу, обчислимо сумарний видобуток

$$D = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{n(n+1)}.$$

Обчислимо n -ну частинну суму ряду S_n

$$\begin{aligned} S_n &= k_0 + \sum_{k=1}^n \frac{k_0}{k(k+1)} = k_0 + k_0 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= k_0 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = k_0 \left(2 - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Тоді $D = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = 2k_0$. Отож, одержали, що величина сумарного видобутку $D = 2k_0$.

Сумарне забруднення. Якщо відома величина забруднення z_n , яке надходить у певне середовище через n днів (одиниць часу) після початку дослідження, тоді **сумарне забруднення** Z можна визначити за формулою

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Приклад 9.19. Злив відходів деякого виробництва відбувається за правилом $z_n = \frac{1+2^n}{4^n}$, де n – кількість днів після початку спостереження. Знайти величину сумарного забруднення.

Розв'язування. Використовуючи попередню формулу, обчислимо сумарне забруднення

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{4^n}.$$

Знайдемо суму цього ряду. Обчислимо n -ну частинну суму ряду S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1+2^k}{4^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4^k} + \frac{2^k}{4^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{2^k} \right).$$

Враховуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, отримаємо

$$S_n = \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4^n})}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) + 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n}.$$

Тоді одержимо величину сумарного забруднення

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n} \right) = 1 \frac{1}{3}.$$

Контрольні запитання

1. Що називають числовим рядом?
2. Яке означення збіжності числового ряду?
3. Як формулюється необхідна умова збіжності числового ряду?
4. Яке твердження називають критерієм Коші збіжності числового ряду?
5. Який ряд називають узагальненим гармонійним рядом?
6. Як формулюється інтегральна ознака Коші?
7. У чому суть ознак порівняння збіжності числового ряду?
8. Як формулюється ознака Даламбера?
9. Як формулюється радикальна ознака Коші?
10. Який ряд називають знакопозначеним рядом?
11. Що називають степеневим рядом?
12. Яке означення радіусу збіжності степеневих рядів?
13. Що називають рядом Маклорена?
14. Які формули описують розвинення елементарних функцій у ряд Маклорена?
15. За якою формулою обчислюють сумарний видобуток корисних копалин?

Контрольна робота (Модуль) 5

1. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1. y' = y \cos 3x. & 2. y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}. \\ 3. y'' - 4y' + 20y = 0. & 4. y'' + y' = (2x + 1)e^x. \end{array}$$

2. Розв'язати задачу Коші $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$.

3. Дослідити збіжність ряду:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^2 + 2\sqrt{n}}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1}{n}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}.$$

4. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(2n-1)^2}}.$$

5. Визначити радіус та інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(2n-1)}.$$

Підсумкова контрольна робота (Підсумковий Модуль)

1. Знайти частинні похідні другого порядку функції, записати повний диференціал $u = (3x^4 - 2x)e^{2y-1}$.

2. Знайти похідну функції $u = 3x^3y^2z$ за напрямом вектора $\vec{l} = (2; -3; -1)$ у точці $M_0(1; -1; 1)$.

3. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - 2y^2 + 2xy - 2x + 3y - 10$.

4. Знайти площу фігури обмеженої кривими $y = x^2 - 2x$, $y = 2x + 9$.

5. Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^{\pi/3} \sin(2x) \cos^3(x) dx$. 2. $\int (3x - 7) e^{x-1} dx$. 3. $\int \frac{(7x - 4)dx}{x^2 + 2x - 35}$.

6. Дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{5n-1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}$.

7. Дослідити на умовну й абсолютну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^3 + 2}.$$

8. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1. y' \cos^2(5x) = 4y. & 2. xy' = y + x \sin^2 \frac{y}{x}. \\ 3. y'' - 4y' = (5x + 7)e^{2x}. & 4. y'' - 4y' + 8y = 0. \end{array}$$

9. Розв'язати задачу Коші $xy' + 7y = -x$, $y(1) = 2$.

Зразок екзаменаційного білета

1. Обчислити $f(A)$, якщо

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 5, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$.

3. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z = 2 + 2i$. Обчислити за формулою Муавра z^{12} .

4. Задано трикутник з вершинами $A(4; -4)$, $B(1; 2)$, $C(3; 4)$. Написати рівняння сторони BC , висоти AD і медіани BM .

5. Знайти кут між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, якщо $A(1; -2; 3)$, $B(2; 3; -2)$, $C(-2; 4; 5)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 2$.

7. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 24, \\ 3x - 2y + z = 48, \\ x + 4y - z = 48. \end{cases}$$

8. Дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{5n-1}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}.$$

9. Знайти границі:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{\sqrt{x^4 + 2}}$. 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 7}{3n + 5} \right)^{2n+1}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg}(9x)}{\sqrt{x + 81} - 9}$.

10. Знайти похідну функції

$$y = (7x - 4)\cos^3(3x + 2) + \frac{e^{6x-7}}{\sqrt{x^2 - 7x - 9}}.$$

11. Знайти розв'язок задачі Коші $y'(x + 1) = y$, $y(1) = 2$.

12. Обчислити частинні похідні другого порядку

$$f(x, y) = x^4 y + 7xy^7 - 5 \ln(xy).$$

13. Обчислити інтеграли:

1. $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos^5 x dx$. 2. $\int (3x - 1) e^{x-3} dx$. 3. $\int \frac{(7x - 4) dx}{x^2 + 2x - 35}$.

14. Знайти площу фігури обмежену кривими:

$$y = x^2 + 2x + 1, \quad y = -x + 5.$$

15. Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y'' - 2y' + y = 0$. 2. $y'' + 2y' + 10y = 0$. 3. $y'' - 4y' = (2x - 3)e^{2x}$.

16. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

17. На деякій фірмі виробляють два види товарів, де товар першого виду реалізують за ціною $p_x = 40$, а товар другого виду – за ціною $p_y = 60$. Витрати виробництва описує функція $C(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 2xy$. За яких обсягів x , y виробництва прибуток фірми буде максимальним? Знайти цей прибуток.

Список літератури

1. Бабенко В. В. Збірник задач з вищої математики / В. В. Бабенко, А. Г. Зіневич, С. М. Кічура, Б. М. Тріщ, Ж. Я. Цаповська.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005.– 255с.
2. Барабаш Г. М. Збірник задач з курсу "Вища математика для економістів". Ч.2 / Г. М. Барабаш, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2016.– 62с.
3. Барабаш Г. М. Збірник-довідник з курсу "Вища математика для економістів". Ч.1 / Г. М. Барабаш, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2016.– 68с.
4. Барабаш Г. М. Практикум з курсу "Вища математика"/ Г. М. Барабаш, А. І. Гаталевич, С. М. Кічура, О. Я. Мильо.– Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.– 158с.
5. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: навч. посібник.– Київ: Либідь, 2007.– 720с.
6. Доманська Г. П. Основи вищої математики для економічних спеціальностей: навч. посібник / Г. П. Доманська, С. П. Лавренюк – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.– 634с.

7. Тріщ Б. М. Вища математика для економістів: навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 552с.
8. Шкіль М. І. Вища математика. У 3-х кн. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова – Київ: Либідь, 1994.

Показчик

- Асимптота функції, 108
- Бюджетна множина, 64
- Вектор, 32
- Вектор цін, 42
- Векторний добуток векторів, 37
- Визначник другого порядку, 10
- Визначник третього порядку, 11
- Відстань
 - між двома точками, 46
- Градiєнт, 132
- Границя
 - функції, 73
 - функції зліва, 74
 - функції справа, 74
 - числової послідовності, 69
- Декартова система координат, 33
- Декартовий добуток множин, 59
- Диференціал функції, 94
- Диференціальне рівняння, 198
- Добуток матриць, 8
- Екстремум функції двох змінних, 139
- Еластичність
 - функції, 115
- Знакопочережний ряд, 231
- Знакозмінний ряд, 231
- Інтегральна ознака Коші, 226
- Комплексне число, 61
- Координати вектора, 33
- Кут
 - між векторами, 35
- Лінійне диференціальне рівняння, 204
- Матриця, 5
- Метод
 - Гаусса, 20
 - інтегрування частинами, 175
 - заміни змінної, 169
- Мінімізація витрат, 157
- Мішаний добуток векторів, 39
- Множина, 57
- Модель
 - багаторесурсної фірми, 154
 - демографічного процесу, 217
 - Леонтьєва, 22
 - міжнародної торгівлі, 27
 - одноресурсної фірми, 118
 - оптимізації оподаткування, 120

- рівноваги ринку, 51, 52
- рівноважних цін, 26
- Неперервна функція, 84
- Нескінченно мала послідовність, 69
- Нескінченно велика послідовність, 70
- Невизначений інтеграл, 166
- Невластивий інтеграл другого роду, 188
- Невластивий інтеграл першого роду, 185
- Об'єднання множин, 58
- Обернена матриця, 12
- Однорідне диференціальне рівняння, 203
- Ознака
 - Даламбера, 228
 - Коші, 230
 - Лейбніца, 231
- Ознака порівняння, 227
- Перетин множин, 58
- Первісна функції, 166
- Підмножина, 58
- Площа криволінійної трапеції, 181
- Похідна
 - другого порядку, 98
 - за напрямком, 131
 - функції, 88
- Правила
 - диференціювання, 89
- Правило
 - Лопітала, 95
- Приріст функції, 84
- Простір
 - товарів, 42
- Радіус збіжності, 234
- Ранг матриці, 21
- Рівняння
 - дотичної, 88
 - нормалі, 89
 - прямої, 47
- Різниця множин, 58
- Ряд
 - Маклорена, 237
 - Тейлора, 237
- Скалярний добуток векторів, 35
- Степеневий ряд, 233
- Сума матриць, 7
- Сума ряду, 223
- Сумарне забруднення, 244
- Сумарний видобуток, 243
- Точка
 - критична, 105
 - максимуму, 105
 - мінімуму, 105
 - перегину, 107
 - розриву, 85
- Умова
 - Колінеарності векторів, 35
 - накладання прямих, 50
 - паралельності прямих, 49
 - перпендикулярності векторів, 35
 - перпендикулярності прямих, 49
- Уявна одиниця, 60
- Узагальнений гармонійний ряд, 226
- Формула

- Лейбніца, 99
- Маклорена, 102
- Муавра, 63
- Ньютона – Лейбніца, 180
- Тейлора, 102
- Формули Крамера, 17
- Функція, 73
 - двох змінних, 129
 - Кобба-Дугласа, 79
 - монотонна, 104
 - опукла, 107
 - попиту, 159
 - увігнута, 107
- Частинна похідна, 130
- Частинна похідна другого по-
рядку, 135
- Числовий ряд, 222
- Чудова границя, 74

Зміст

Вступ	3
1 Елементи лінійної алгебри	5
1.1 Матриці. Дії над матрицями	5
1.2. Визначники другого та третього порядків	10
1.3 Обернена матриця	12
1.4 Розв’язування систем лінійних рівнянь	17
1.5 Метод Гаусса	19
1.6 Ранг матриці	21
1.7 Лінійні економічні моделі	22
1.7.1 Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки	22
1.7.2 Модель рівноважних цін	26
1.7.3 Лінійна модель міжнародної торгівлі	27
2 Векторна алгебра	32
2.1 Вектори. Дії над векторами	32
2.2. Декартова прямокутна система координат	33
2.3 Скалярний добуток двох векторів	35
2.4 Векторний добуток двох векторів	37
2.5 Мішаний добуток трьох векторів	39
2.6 Простір товарів. Вектор цін	42
3 Аналітична геометрія	46
3.1 Відстань між двома точками	46
3.2 Пряма на площині	47
3.3 Модель рівноваги ринку	51

3.4	Модель рівноваги доходів і збитків	52
4	Множини. Множина комплексних чисел	57
4.1	Множини	57
4.2	Операції над множинами	58
4.3	Множина комплексних чисел	60
4.4	Бюджетні множини	64
5	Функція однієї змінної	69
5.1	Границі числових послідовностей	69
5.2	Задача про нарахування відсотків	72
5.3	Границя функції. Односторонні границі	73
5.4	Функції в економічній теорії	79
5.5	Неперервність функції	84
5.6	Економічна інтерпретація неперервності	87
5.7	Похідна функції. Правила диференціювання	88
5.8	Диференціал функції	94
5.9	Правила Лопіталя	95
5.10	Похідні та диференціали вищих порядків	98
5.11	Формула Тейлора	101
5.12	Дослідження поведінки функції	104
5.13	Застосування похідної в економіці	115
5.13.1	Еластичність	115
5.13.2	Теорія одноресурсної фірми	117
5.13.3	Оптимізація оподаткування підприємств	120
6	Функції багатьох змінних	129
6.1	Обчислення частинних похідних першого порядку функції багатьох змінних	129
6.2	Обчислення частинних похідних другого порядку функції багатьох змінних	135
6.3	Екстремум функції двох змінних	138
6.4	Економічне застосування функції двох змінних	151
6.4.1	Еластичність функції двох змінних	151
6.4.2	Попит на конкурентні товари	153
6.4.3	Задача багаторесурсної фірми	154

6.4.4	Задача оптимального розподілу товарів	156
6.4.5	Задача визначення мінімальних витрат фірми . . .	157
6.4.6	Функції попиту споживача	159
7	Невизначений інтеграл	166
7.1	Обчислення невизначених інтегралів	175
7.2	Обчислення та застосування визначених інтегралів . .	178
7.3	Невластиві інтеграли	185
7.4	Економічні застосування визначеного інтеграла	192
8	Диференціальні рівняння	198
8.1	Диференціальне рівняння першого порядку	198
8.2.	Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами	208
8.3.	Застосування методів диференціальних рівнянь в економічних моделях	217
9	Ряди	222
9.1	Числові ряди	222
9.2	Степеневі ряди	233
9.3	Ряд Тейлора	236
9.4	Застосування рядів у економіці	243
	Список літератури	249
	Показчик	251

Навчальне видання

Барабаш Галина Михайлівна
Кирилич Володимир Михайлович
Пелюшкевич Ольга Володимирівна

Збірник - довідник
з курсу "Вища математика для економістів"

Редактор *Н.Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання
Г.М. Барабаш, О.В. Пелюшкевич

Формат 60 × 84. Умовн. друк. арк. Тираж 300

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул.
Університетська, 1, м. Львів, 79000.

Свідомство про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.