

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчальний посібник

Харків
ХНАДУ
2021

УДК 519.86

М 34

*Рекомендовано Вчено радою ХНАДУ, дозвід № 39/21/5.4
від 26 листопада 2021 р.*

Рецензенти:

Аванесова Ніна Едуардівна, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри менеджменту та публічного адміністрування Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА);

Нечуйвітер Олеся Петрівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики (УПА);

Першина Юлія Ігорівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри вищої математики (НТУ «ХПІ»).

Внутрішній рецензент:

Криворучко Оксана Миколаївна, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри менеджменту Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (ХНАДУ).

Колектив авторів:

І. А. Дмитрієв, О. І. Дмитрієва,
Т. В. Ємельянова, І. Ю. Шевченко, Т. О. Ярхо.

Математичні методи в економічних дослідженнях / І. А. Дмитрієв,
М34 О. І. Дмитрієва, Т. В. Ємельянова, І. Ю. Шевченко, Т. О. Ярхо.
– Харків: ХНАДУ, 2021. – 180 с.
ISBN 978-617-8009-58-8

Посібник призначений для креативної самостійної підготовки здобувачів з математичних методів лінійного програмування та теорії масового обслуговування.

Представлено геометричний, симплексний методи, метод штучного базису, двоїстий симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування; розподільний метод та метод потенціалів розв'язання транспортної задачі; класифікацію систем масового обслуговування та методи розв'язання задач в одноканальних і багатоканальних системах з відмовами та необмеженою чергою, системах з фіксованим часом обслуговування.

Рекомендовано для здобувачів економічних спеціальностей бакалаврату.

ISBN 978-617-8009-58-8

УДК 519.86

© І. А. Дмитрієв, О. І. Дмитрієва,
Т. В. Ємельянова, І. Ю. Шевченко,
Т. О. Ярхо, 2021
© ХНАДУ, 2021

ПЕРЕДМОВА

Сучасний рівень розвитку науки вимагає якісної математичної підготовки майбутніх фахівців економічного профілю у ЗВО. Ця підготовка має включати формування здатностей виявлення найкращого (оптимального) способу дій при вирішенні будь-якої проблеми організаційного управління, в умовах, коли мають місце обмеження техніко-економічного або іншого характеру. Зазначені здатності формуються в процесі вивчення *дослідження операцій*.

Одним із ключових розділів цієї науки є *математичне програмування*, зміст якого становлять теорія і методи розв'язання задач оптимізації, тобто задач про знаходження екстремумів функцій на множинах, що визначаються лінійними і нелінійними обмеженнями (у вигляді рівностей і нерівностей). Термін «математичне програмування» навряд чи можна назвати вдалим, оскільки загальноприйнятим являється розуміння під «програмуванням» кодування на машинній мові математичних алгоритмів. Цей термін виник у результаті неточного перекладу англійського слова *programming* у 1949 р., коли з'явилася робота відомого американського вченого Дж. Данцига. Одне із значень цього слова – *планування*, складання планів. *Лінійне програмування* – це планування на основі лінійних співвідношень. Серед засновників математичного програмування – вчені Дж. Данциг, Л. Понтрягін, Л. Канторович, Д. Юдін, В. Новожилов та інші.

Аналіз процесів в системах обслуговування й управління здійснюється на основі застосувань *теорії масового обслуговування*, що також являє собою важливий розділ дослідження операцій. Задачі теорії масового обслуговування, які носять оптимізаційний характер, включають економічний аспект з визначення найкращих варіантів систем стосовно забезпечення мінімальної суми втрат від очікування обслуговування, втрат часу та ресурсів на обслуговування тощо. Математичний апарат теорії масового обслуговування базується на теорії ймовірностей, математичній статистиці, теорії випадкових процесів. Серед засновників теорії масового обслуговування – вчені Ф. Ерланг, О. Хінчін, А. Колмогоров, А. Марков та інші.

У даному навчальному посібнику системи масового обслуговування розглядаються у сталому режимі, вивчення якого ґрунтується на математичному апараті теорії ймовірностей і математичної статистики.

Посібник призначений для спеціальної математичної підготовки здобувачів економічних спеціальностей бакалаврату з дисципліни «Математичні методи в економічних дослідженнях».

ЧАСТИНА I. МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задачі ЛП є математичними моделями різноманітних задач техніко-економічного змісту.

Побудова математичних моделей здійснюється в наступній послідовності:

- з'ясування мети розв'язання задачі;
- визначення невідомих величин (ідентифікація змінних);
- з'ясування обмежень, що накладаються на змінні (у вигляді рівностей і нерівностей);
- побудова цільової функції, що залежить від невідомих величин і відображає мету розв'язання задачі – знаходження найбільшого або найменшого значення цієї функції.

1.1. Приклади задач лінійного програмування

Приклад 1.1. Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва).

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують 4 види ресурсів: S_1, S_2, S_3, S_4 . Запаси ресурсів, число одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду (у грошових одиницях) наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вид ресурсу	Число одиниць ресурсів, що витрачаються на 1 од. продукції		Запас ресурсу
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	—	1	5
S_4	3	—	21
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2 грош. од.	3 грош. од.	—

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Побудова математичної моделі

Позначимо x_1, x_2 – число одиниць продукції P_1 і P_2 , запланованих до виробництва. Для їх виготовлення потрібно

$(1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_1

$(2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_2

$(0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_3

$(3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_4 .

Оскільки споживання ресурсів S_i ($i = \overline{1, 4}$) не повинно перевищувати їхніх запасів, то зв'язок між споживанням ресурсів та їхніми запасами виражається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21. \end{cases}$$

За змістом задачі змінні є невід'ємними $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Сумарний прибуток складе

$$F = \underbrace{2x_1}_{\text{від реалізації } P_1} + \underbrace{3x_2}_{\text{від реалізації } P_2}.$$

Математична модель задачі

Визначити план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, при якому

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Узагальнення задачі

Задача легко узагальнюється на випадок випуску n видів продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$ з використанням m видів ресурсів $S_1, S_2, \dots, S_m$.

Введемо позначення

$x_j \left(j = \overline{1, n} \right)$ – кількість одиниць продукції P_j , запланованої до виробництва.

$$b_i \left(i = \overline{1, m} \right) - \text{запас ресурсу } S_i.$$

a_{ij} – кількість одиниць ресурсу S_i , що витрачається на виготовлення одиниці продукції P_j .

c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції P_j .

Математична модель задачі

Знайти такий план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ випуску продукції, що задовольняє системі нерівностей

[illegible]

при якому функція $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ (приймає найбільше значення).

Приклад 1.2. Задача складання раціону (задача про суміші).

Нехай є два види корму I і II, що містять поживні речовини (вітаміни) V_1, V_2, V_3 . Вміст числа одиниць вітамінів в 1 кг кожного виду корму і необхідний мінімум вітамінів, а також вартості 1 кг корму I і II виду наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Поживна речовина (вітамін)	Число одиниць поживних речовин в 1 кг корму		Необхідний міні- мум поживних речовин
	I	II	
V_1	3	1	9
V_2	1	2	8
V_3	1	6	12
Вартість 1 кг корму	4 грош. од.	6 грош. од.	—

Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальну вартість, в якому вміст кожного виду поживних речовин був би не менше встановленого мінімуму.

Побудова математичної моделі

Позначимо x_1, x_2 – кількість корму виду I і II, що входить у денний раціон.

Тоді цей раціон буде включати

$(3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини V_1

$(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини V_2

$(1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини V_3 .

Оскільки вміст поживних речовин V_1, V_2, V_3 в раціоні повинен бути не менше, відповідно, 9, 8 і 12 одиниць, то отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}.$$

Крім того, змінні

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Загальна вартість раціону $F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$ (приймає найменше значення).

Узагальнення задачі

Позначимо

$x_j \ (j = \overline{1, n})$ – число одиниць корму j -го виду.

Необхідно знайти такий розв'язок системи $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при якому лінійна функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max(\rightarrow \min),$$

тобто приймає оптимальне (найбільше або найменше) значення.

Означення 1.1. Система (1.1) називається **системою обмежень**.

Лінійна функція F називається **цільовою функцією**.

Зауваження.

1. Задача полягає в максимізації або мінімізації цільової функції.
2. Серед обмежень (1.1) можуть одночасно зустрітися знаки $\leq$, $=$, $\geq$. Тому сформульовану загальну задачу ЛП іноді називають задачею зі змішаними умовами.
3. Коефіцієнти b_i , c_i , a_{ij} передбачаються відомими. У практичних задачах вони мають конкретну інтерпретацію.

Означення 1.2. Набір чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє умовам (1.1) і (1.2), називається **допустимим розв'язком** або **планом** даної задачі.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, що складають план X , називаються **компонентами** або **складовими** цього плану.

Означення 1.3. План, який доставляє оптимальне (найбільше або найменше значення) функції F , називається **оптимальним розв'язком** задачі ЛП або **оптимальним планом**.

Зауваження. Терміни «розв'язок» і «план» є синонімами. Перший використовується частіше, коли мова йде про формальну сторону задачі (про математичний розв'язок). Другий використовується частіше, коли мова йде про змістовну сторону задачі (про економічну інтерпретацію).

Означення 1.4. Задача ЛП, що має хоча б один оптимальний план, називається **розв'язуваною**.

Усі побудовані математичні моделі найпростіших економічних задач у розглянутих прикладах у підсумку представлено в формі **загальної задачі ЛП**. Відзначимо, що запис лінійної функції F , а головним чином, системи обмежень, у різних задачах є різним.

Для створення загальних методів і обчислювальних алгоритмів розв’язання задач ЛП природно розглянути спосіб зведення будь-якої задачі ЛП до найбільш зручної для дослідження форми. Такою формою є **основна задача ЛП** (в літературі її ще називають **канонічною задачею ЛП**).

1.3. Основна задача лінійного програмування

Основна задача ЛП полягає в *мінімізації* лінійної функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

від n дійсних змінних, які задовольняють системі m лінійних рівнянь

[illegible]

і умовам невід'ємності $x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$.

Основна задача ЛП виявляється найбільш зручною при створенні обчислювальних методів ЛП. Проте при розгляді ряду теоретичних питань часто використовують різні форми запису загальної задачі ЛП.

Матрична форма запису

$$F = CX \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} AX = B \\ x \geq 0 \end{cases},$$

де $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – матрица-рядок;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица системы;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець змінних;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець вільних членів.}$$

1.4. Зведення загальної задачі лінійного програмування до основної (канонічної)

Загальна задача ЛП може бути зведена до основної. Для переходу до основної задачі ЛП потрібно вміти:

1. Зводити питання про максимізацію лінійної функції до питання про мінімізацію.

2. Переходити від обмежень, заданих у вигляді нерівностей, до деяких, еквівалентних їм обмежень, заданих у вигляді рівностей.

Покажемо, як це здійснюється.

1. Нехай потрібно знайти найбільше значення деякої цільової функції: $F \rightarrow \max$.

Розглянемо функцію $F_1 = -F$. Очевидно, що при тих же значеннях $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при яких функція F досягає найбільшого значення, функція F_1 досягає найменшого значення. Отже,

$$\begin{array}{ccc} F \rightarrow \max & \Leftrightarrow & F_1 \rightarrow \min \\ \text{(максимізація } F) & & \text{(мінімізація } F_1) \end{array}$$

2. Нехай в системі обмежень (1.1) є нерівність виду

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1,$$

$$\text{Тобто} \quad \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \leq b_1 \quad (1.4)$$

Введемо в розгляд допоміжну змінну x_{n+1} , що дорівнює різниці правої і лівої частини нерівності (1.4)

$$x_{n+1} = b_1 - \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \geq 0.$$

Тоді нерівність (1.4) перетворюється в рівняння

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1.$$

Нехай в системі обмежень (1.1) є нерівність виду

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2. \quad (1.5)$$

Введемо в розгляд допоміжну змінну x_{n+2} , що дорівнює різниці лівої та правої частини цієї нерівності (1.5)

$$x_{n+2} = \sum_{k=1}^n a_{2k} x_k - b_2 \geq 0.$$

Тоді нерівність (1.5) перетворюється в рівняння

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n - x_{n+2} = b_2.$$

Зауваження. У кожену нерівність вводиться своя невід'ємна допоміжна змінна (зі своїм індексом).

Таким чином, система обмежень, яка містить нерівності, переходить в систему обмежень-рівнянь.

Кількість змінних при цьому збільшується на число, що дорівнює числу нерівностей у вихідній системі обмежень.

Приклад 1.3. Приведемо загальну задачу ЛП

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

до основної.

$$1. F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \Leftrightarrow F_1 = -F = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min .$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16. \\ 4x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

Основна задача

$$F_1 = -F = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} .$$

Приклад 1.4. Приведемо до основної загальної задачі ЛП, що є математичною моделлю задачі про використання ресурсів

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \geq 0, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases} ,$$

$$F_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \rightarrow \min .$$

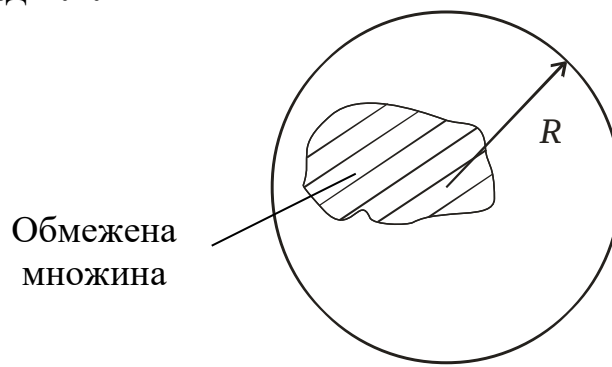
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Основні означення

Введемо деякі означення.

Означення 2.1. Множина точок площини (простору) називається **обмеженою**, якщо існує коло (куля) скінченного радіусу з центром в будь-якій точці множини, яке (яка) повністю містить в собі цю множину. В іншому випадку множина називається **необмеженою**.

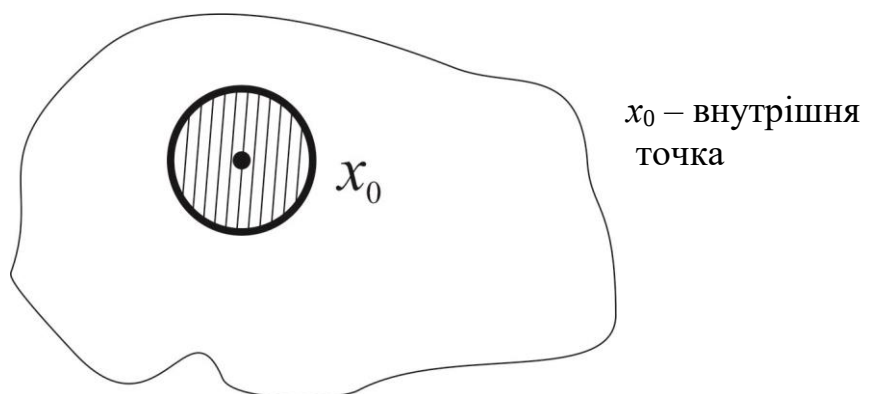
Приклад 2.1.



Означення 2.2. **Околом** точки площині (простору) називається коло (куля) з центром в цій точці.

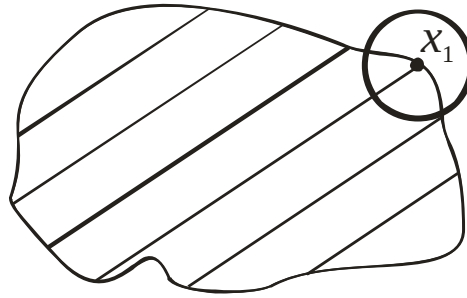
Означення 2.3. Точка множини називається **внутрішньою**, якщо вона входить в цю множину разом з деяким своїм оточенням.

Приклад 2.1.



Означення 2.4. Точка множини називається **граничною**, якщо в будь-якому її оточенні містяться як точки, що належать даній множині, так і точки які не належать їй.

Приклад 2.2.



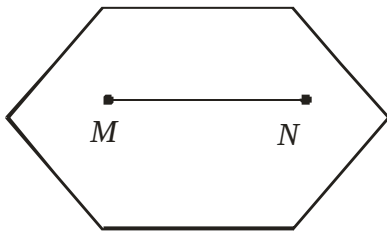
x_1 – гранична точка

Означення 2.5. Множина точок називається **замкненою**, якщо вона включає всі свої граничні точки.

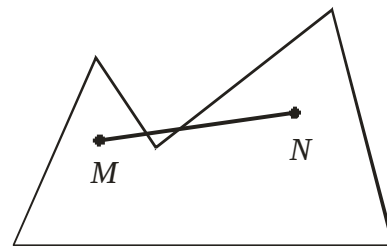
Опуклі множини точок

Означення. Множина точок називається **опуклою**, якщо вона разом з будь-якими своїми точками містить весь відрізок, що з'єднує ці точки.

Приклад 2.3.



Опукла множина



Неопукла множина

Приклад 2.4. (опуклих множин)

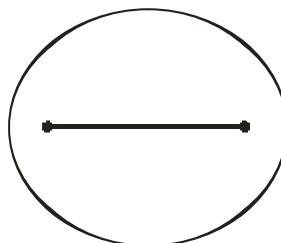
На площині:



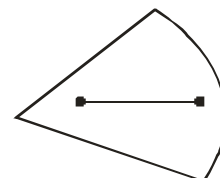
відрізок;



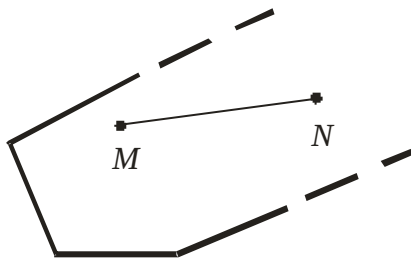
пряма;



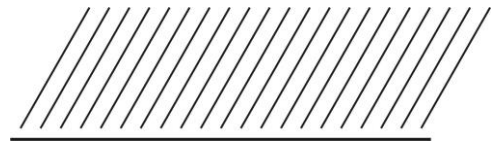
коло;



сектор;

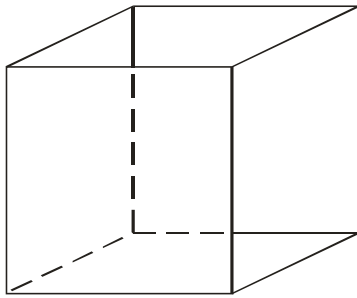


многокутна область;

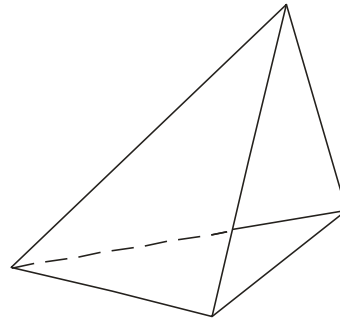


півплощина тощо.

У просторі:



куб;



піраміда;

многогранна область; півпростір тощо.

Опуклі множини мають важливу властивість, яка встановлюється наступною теоремою.

Теорема 2.1. *Перетин (загальна частина) будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною.*

Доведення

Обмежимося випадком двох множин: A і B (рис. 2.1).

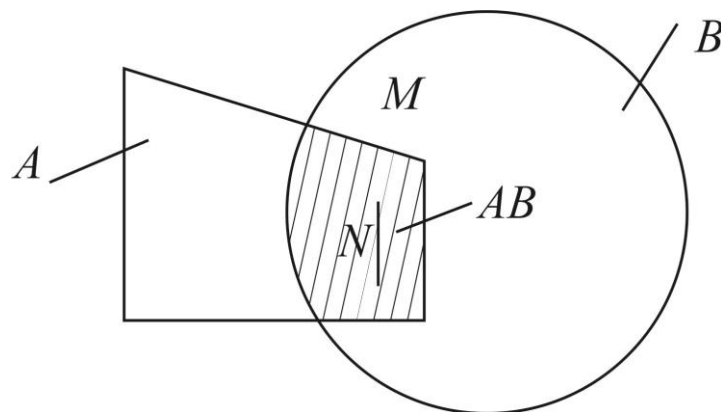


Рис. 2.1

Нехай M, N – дві довільні точки перетину.

Покажемо, що відрізок $MN \in AB$ (AB – перетин множин).

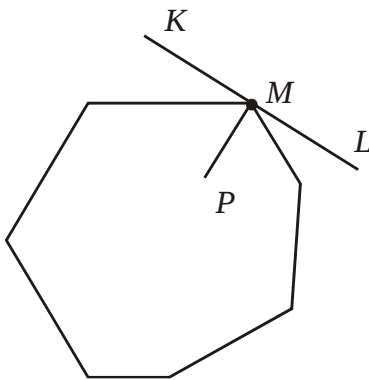
$$\left. \begin{array}{l} M, N \in A; A \text{ є опуклим} \Rightarrow MN \in A \\ M, N \in B; B \text{ є опуклим} \Rightarrow MN \in B \end{array} \right\} MN \in AB.$$

Теорема доведена.

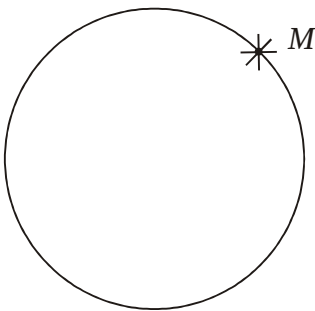
Серед точок опуклої множини виділяють так звані **кутові точки**.

Означення 2.6. Точка опуклої множини називається **кутовою**, якщо вона не є внутрішньою ні для якого відрізка, що цілком належить даній множині.

Приклад 2.5.



1. Усі вершини опуклого багатокутника є кутовими точками (M – внутрішня для KL , але KL не належить множині цілком. MP належить множині, але M не є внутрішньою для MP).



2. Усі точки кола, що обмежує круг, є кутовими (множина кутових точок є нескінченною).

Можна довести справедливості тверджень.

Твердження 2.1. Опуклий багатокутник має скінченну кількість кутових точок, що співпадають з його вершинами.

Твердження 2.2. Будь-яка гранична ділянка опуклої множини, що не є прямою або її частиною, складається тільки з кутових точок (множина кутових точок є нескінченною).

Твердження 2.1 і 2.2 дозволяють ввести.

Означення 2.7. Опукла, замкнена множина точок площині (простору), що містить скінченну кількість кутових точок, називається **опуклим многокутником (опуклим многогранником)**, якщо вона є обмеженою, і опуклою многокутною областю (опуклою многогранною областю), якщо вона є необмеженою.

2.2. Опуклі множини в n -вимірному просторі

До сих пір розглядалися опуклі множини точок на площині і в тривимірному просторі.

Поняття точки і вектора можна узагальнити і ввести у розгляд абстрактний n -мірний векторний простір. Будемо під **точкою** розуміти упорядкований набір n чисел: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Введемо в розгляд відповідний n -вимірний вектор

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

x_i – координати вектора.

На рис. 2.1. а), б) зображено вектори $\vec{X}$ на площині та у тривимірному просторі

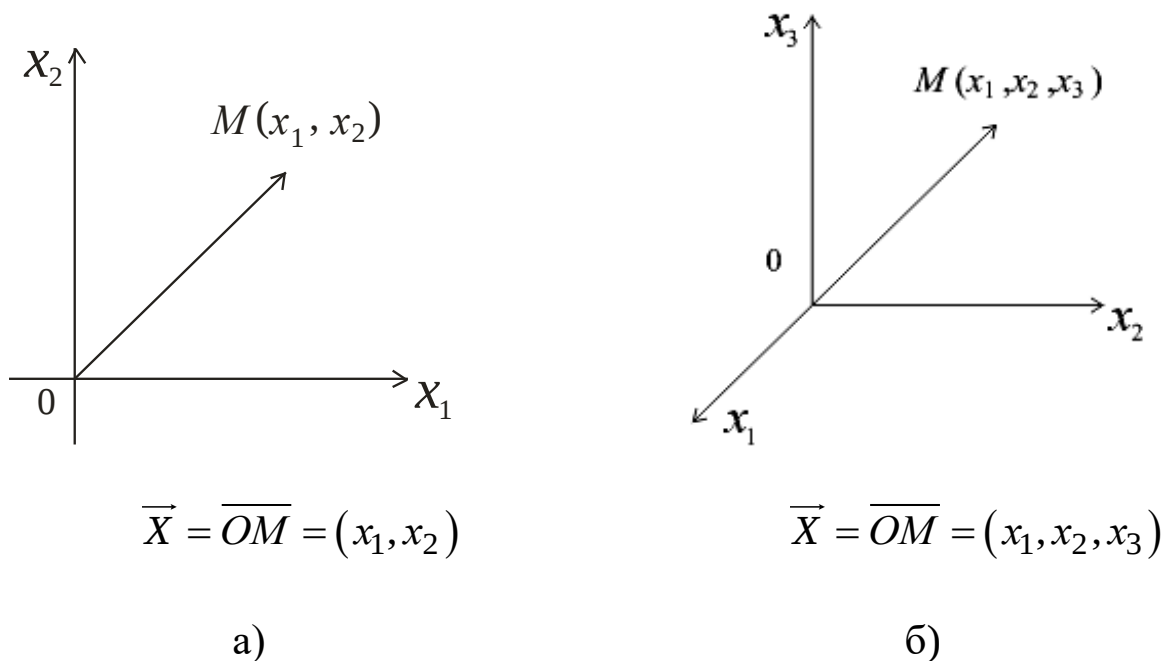


Рис. 2.1

Означення 2.8. Під n -вимірним векторним простором розуміють множину n -вимірних векторів з дійсними координатами, в якій визначено операції додавання векторів і множення на число, що задовольняють відповідним властивостям (введення операцій аналогічно двовимірному і тривимірному випадку).

Зауваження. При $n > 3$ точки і фігури n -вимірного простору не мають реального геометричного змісту. Тому всі дослідження об'єктів проводяться в аналітичній формі.

Означення 2.9 (відрізок в n -вимірному просторі). Відрізком $X^{(1)}X^{(2)}$ в n -вимірному просторі називається геометрична множина точок X , які відповідають умовам

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}, \text{ де} \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (*)$$

$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$; $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ — точки n -вимірного простору.

Зауваження. Можна довести, що рівність (*) виконується для всіх точок відрізка на площині і в просторі.

Означення опуклої множини n -вимірного простору ($n > 3$) вводиться аналогічно випадкам $n = 2$ і $n = 3$.

2.3. Геометричний зміст множини розв'язків лінійної нерівності та сумісної системи лінійних нерівностей

Геометричний зміст множини розв'язків лінійної нерівності з двома змінними

Лінійна нерівність з двома змінними має вигляд

$$ax_1 + bx_2 + c \geq 0, \quad (2.1)$$

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0. \quad (2.2)$$

Кожному розв'язку нерівності (2.1) або (2.2), тобто парі чисел (x_1, x_2) , відповідає точка площині. Геометричний зміст множини розв'язків нерівностей (2.1) і (2.2) встановлює наступна теорема.

Теорема 2.2.

Множиною розв'язків лінійної нерівності (2.1) є одна з півплощин, на які всю площину ділить пряма

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

включаючи і цю пряму.

Інша півплощина разом з тією ж прямою є множиною розв'язків нерівності (2.2).

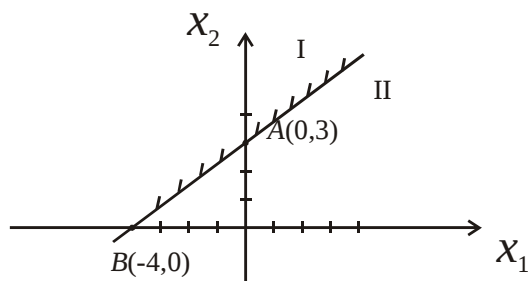
Приклад 2.6.

Побудувати множину розв'язків нерівності

$$3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0.$$

Розв'язання

1. Побудуємо пряму, $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, знайшовши її точки перетину з осями координат.



$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3. \quad A(0, 3)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -4. \quad B(-4, 0)$$

2. Побудована пряма розбила площину на дві півплощини I і II. Для визначення шуканої півплощини рекомендується задати довільну контрольну точку, що не лежить на побудованій прямій.

Якщо нерівність виконується в контрольній точці, то вона виконується і в усіх точках півплощини, що містить контрольну точку і не виконується в усіх точках іншої півплощини.

Візьмемо $O(0, 0)$, що не лежить на побудованій прямій.

$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \leq 0 \text{ - не вірно.}$$

Отже, півплощина I є розв'язком (виділимо штрихуванням).

Геометричний зміст множини розв'язків системи лінійних нерівностей з двома змінними

Теорема 2.3. Множина розв'язків сумісної системи m лінійних нерівностей з двома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

є опуклим многокутником (або опуклою многокутною областю).

Пояснения.

1. Відповідно до теореми 2.1, кожна нерівність системи визначає одну з півплощин, включаючи граничну пряму, тобто визначає опуклу, замкнену множину.

Множиною розв'язків сумісної системи лінійних нерівностей служать точки, що належать півплощинам розв'язків усіх нерівностей, тобто точки перетину півплощин. За теоремою 2.1 ця множина є опуклою (як перетин скінченної кількості опуклих множин).

2. Межами множини перетину є відрізки прямих. Можна довести, що ця множина містить скінченну кількість кутових точок, тобто є опуклим багатокутником (або опуклою багатокутною областю).

*Геометричний зміст множини розв'язків лінійної нерівності
з n змінними ($n \geq 3$)*

Відомо, що множина точок, які задовольняють рівняння

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

Є ПЛОЩИННОЮ.

Узагальненням поняття площини в n -вимірному просторі ($n > 3$) є так звана гіперплощина. Таким чином при $n > 3$ рівняння

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

задає гіперплощину.

Теорема 2.4. Множина всіх розв'язків лінійної нерівності з n змінними ($n \geq 3$)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

є одним з півпросторів, на які весь простір ділиться площиною (або гіперплощиною)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

включаючи і саму цю площину (гіперплощину).

**Геометричний зміст множини розв'язків сумісної системи
т лінійних нерівностей з n змінними**

Теорема 2.5. Множина розв'язків сумісної системи t лінійних нерівностей с n змінними є опуклим многогранником (опуклою многогранною областю) в n -вимірному просторі.

2.4. Властивості задачі лінійного програмування

Теорема 2.6. Множина всіх допустимих розв'язків задачі лінійного програмування (в разі, якщо система обмежень є несуперечною), являє собою опуклий многогранник або опуклу многогранну область.

Надалі множину всіх допустимих розв'язків будемо називати **многогранником розв'язків**.

Відповідь на питання, в якій точці многогранника розв'язків є можливим оптимальний розв'язок задачі ЛП, дає наступна фундаментальна теорема.

Теорема 2.7. Якщо задача ЛП має оптимальний розв'язок, то він збігається з однією з кутових точок многогранника розв'язків.

Зауваження. Теорема 2.6 є фундаментальною, оскільки вона показує принциповий шлях розв'язання задач ЛП. Відповідно до цієї теореми, замість дослідження нескінченної кількості допустимих розв'язків для знаходження серед них шуканого оптимального розв'язку, достатньо дослідити лише скінченну кількість кутових точок многогранника розв'язків.

Приклад 2.7.

Побудувати множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 20 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 & (2) \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 & (3) \\ x_1 \geq 0 & (4) \\ 0 \leq x_2 \leq 6 & (5,6) \end{cases}$$

Розв'язання

Для побудови шуканої множини розв'язків системи нерівностей слід послідовно побудувати множину розв'язків кожної нерівності.

Рекомендується після знаходження кожної півплощини і виділення її штрихуванням знаходити послідовно перетин півплощин (рис. 2.2)

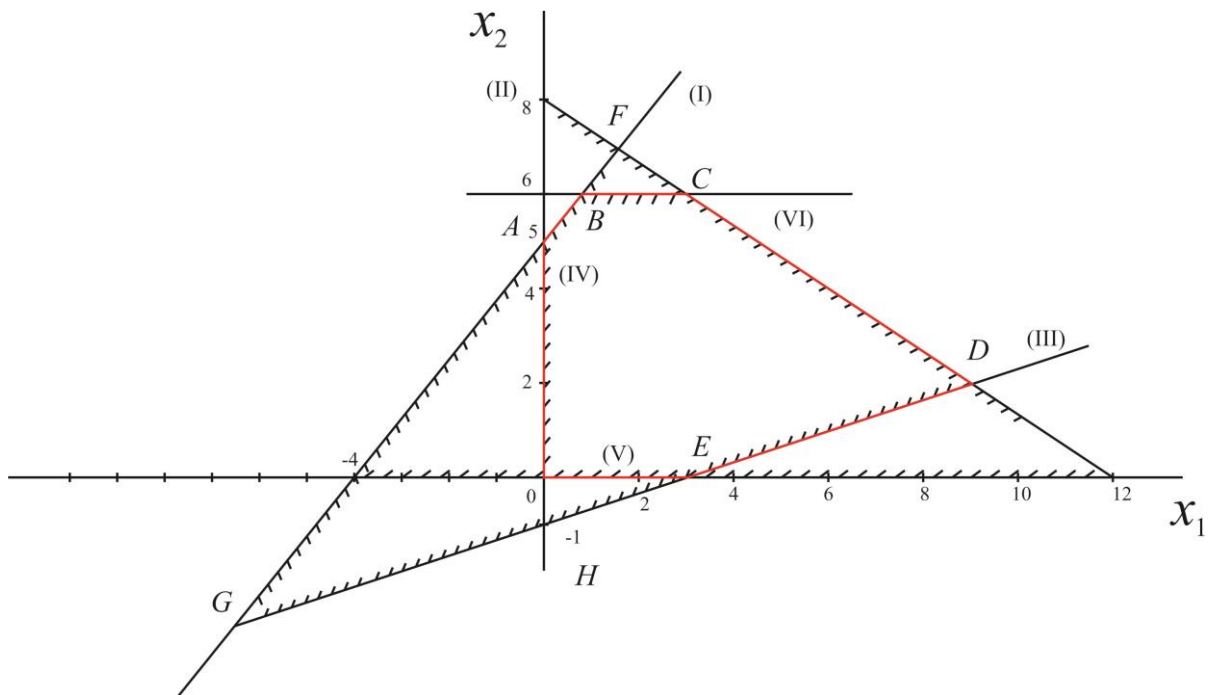


Рис. 2.2

1. $-5x_1 + 4x_2 \leq 20$ (I)

Будуємо пряму $-5x_1 + 4x_2 = 20$

$x_1 = 0, x_2 = 5; (0,5);$

$x_2 = 0, x_1 = -4; (-4,0).$

Нерівність $-5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 20$ є вірною.

Отже, т. $O(0,0)$ належить шуканій півплощині.

2. $2x_1 + 3x_2 \leq 24$ (II)

Будуємо пряму $2x_1 + 3x_2 = 24$

$x_1 = 0, x_2 = 8; (0,8);$

$x_2 = 0, x_1 = 12; (12,0).$

Нерівність $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 24$ є вірною.

Отже, т. $O(0,0)$ належить шуканій півплощині.

3. $x_1 - 3x_2 \leq 3$ (III)

Будуємо пряму $x_1 - 3x_2 = 3$

$x_1 = 0, x_2 = -1; (0,-1);$

$x_2 = 0, x_1 = 3; (3,0).$

Нерівність $1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \leq 3$ є вірною.

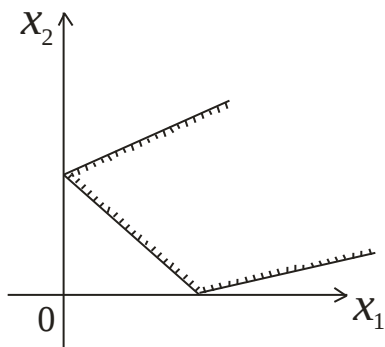
Отже, т. $O(0,0)$ належить шуканій півплощині.

4. $x_1 \geq 0$. (IV)

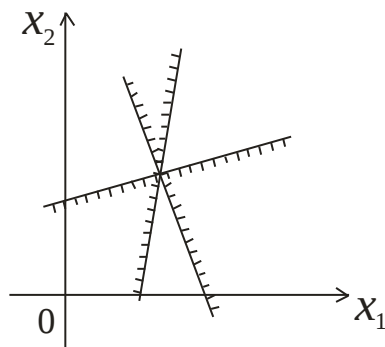
5. $x_2 \geq 0$. (V)

6. $x_2 \leq 6$. (VI)

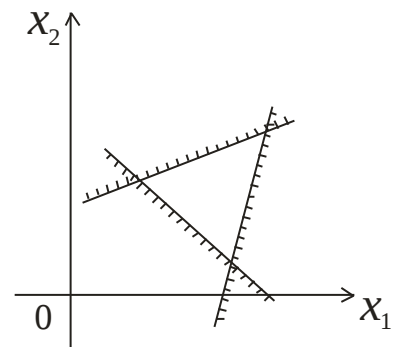
Зауваження. При побудові областей розв'язків нерівностей можуть зустрітися також інші випадки:



Множина розв'язків –
опукла багатокутна
область



Множина розв'язків –
одна точка



Система нерівностей
є несумісною.

РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Покажемо, як можна знаходити оптимальний розв'язок задачі ЛП, використовуючи геометричне уявлення системи обмежень і лінійної функції.

3.1. Зміст геометричного методу

Розглянемо загальну задачу ЛП з двома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

Нехай геометричним зображенням системи обмежень є многокутник ABCDE (рис. 3.1)

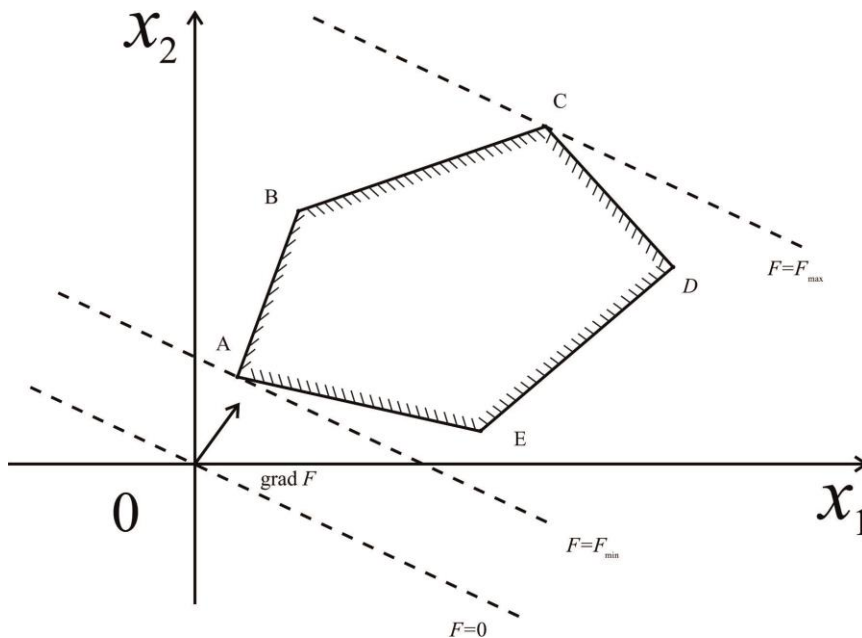


Рис. 3.1

1. Лінія рівня цільової функції F .

Розглянемо лінію рівня цільової функції F , тобто множину точок, на яких $F = c_1x_1 + c_2x_2 = a = \text{const}$.

Очевидно, що це пряма. При різних значеннях a лінії рівня паралельні між собою, оскільки їхні кутові коефіцієнти визначаються тільки співвідношенням між c_1 і c_2 і, отже, є рівними (рис. 3.2).

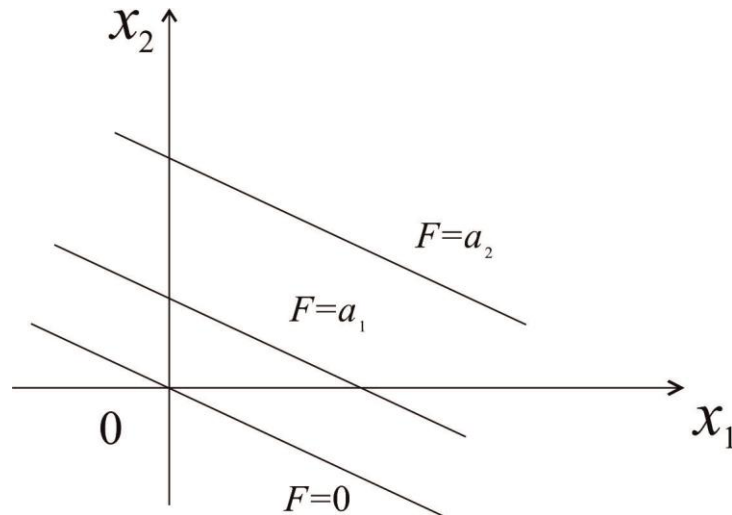


Рис. 3.2

2. Градієнт цільової функції F .

Нагадаємо означення.

Градiєнтом функції в даній точці називається вектор, координатами якого є частинні похідні функції в цій точці

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \bar{j}.$$

Для лінійної цільової функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2$$

$\text{grad } F = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} = (c_1, c_2)$ – сталий вектор, що не залежить від точки, в якій він обчислюється.

Відомо, що $\text{grad } F$ перпендикулярний до лінії рівня функції F і визначає напрямок найбільшого зростання функції F (рис. 3.3).

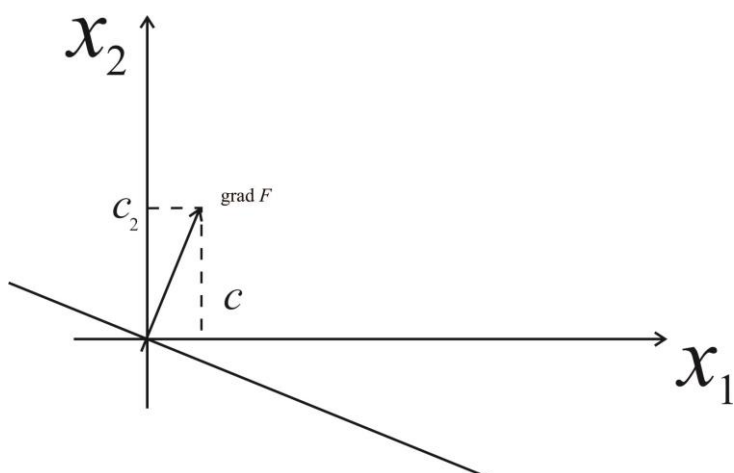


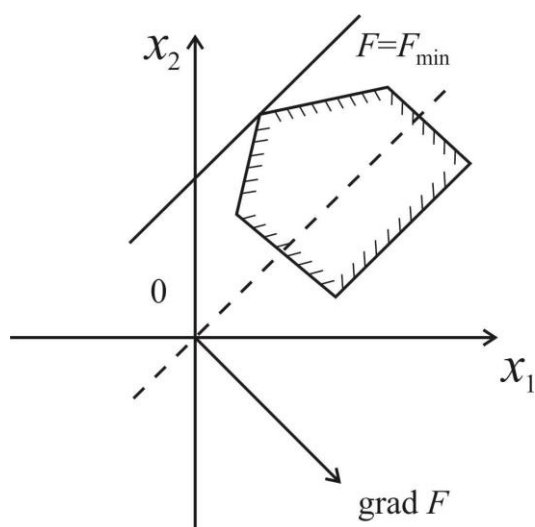
Рис. 3.3

3. Знаходження точки оптимуму цільової функції F .

Якщо рухати лінію рівня в напрямку $\text{grad } F$, то величина константи a (значення F на лінії рівня) буде зростати. Тому функція F досягне максимального значення в останній точці зустрічі лінії рівня з багатокутником розв'язків (рис. 3.1, положення $F = F_{\max}$).

Відповідно, при русі лінії рівня в напрямку $\text{grad } F$, функція F досягне найменшого значення в першій точці зустрічі лінії рівня з багатокутником розв'язків (рис. 3.1, положення $F = F_{\min}$).

При русі лінії рівня в напрямку $-\text{grad } F$, функція F досягне найменшого значення в останній точці зустрічі лінії з багатокутником розв'язків (рис. 3.4).



Рух лінії рівня в напрямку,
протилежному градієнту

Рис. 3.4

Згідно з теоремою 2.7, точка, в якій досягається $\max F$ або $\min F$ буде кутовою точкою *многокутника розв'язків*. Зокрема, якщо область розв'язків є обмеженою, ця точка буде вершиною многокутника розв'язків.

3.2. Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування геометричним методом

1. Побудувати многокутник розв'язків задачі ЛП.
2. Побудувати вектор $\text{grad } F = (c_1, c_2)$ і перпендикулярно до нього лінію рівня $F = 0$.
3. Паралельно переміщати лінію рівня $F = 0$:
 - 3.1. При знаходженні $\max F$ переміщати в напрямку $\text{grad } F$ до останньої точки зустрічі з многокутником розв'язків.
 - 3.2. При знаходженні $\min F$ переміщати в напрямку $\text{grad } F$ до першої точки зустрічі з многокутником розв'язків або переміщати в напрямку $-\text{grad } F$ до останньої точки зустрічі з многокутником розв'язків.
4. Обчислити координати знайденої оптимальної точки і значення цільової функції F .

Приклад 3.1.

Розв'яжемо геометричну задачу (1.1) про використання ресурсів

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 & (2) \\ x_2 \leq 5 & (3) \\ 3x_1 \leq 21 & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & (5) \end{cases} .$$

Розв'язання

1. Побудуємо многокутник розв'язків (рис. 3.5).

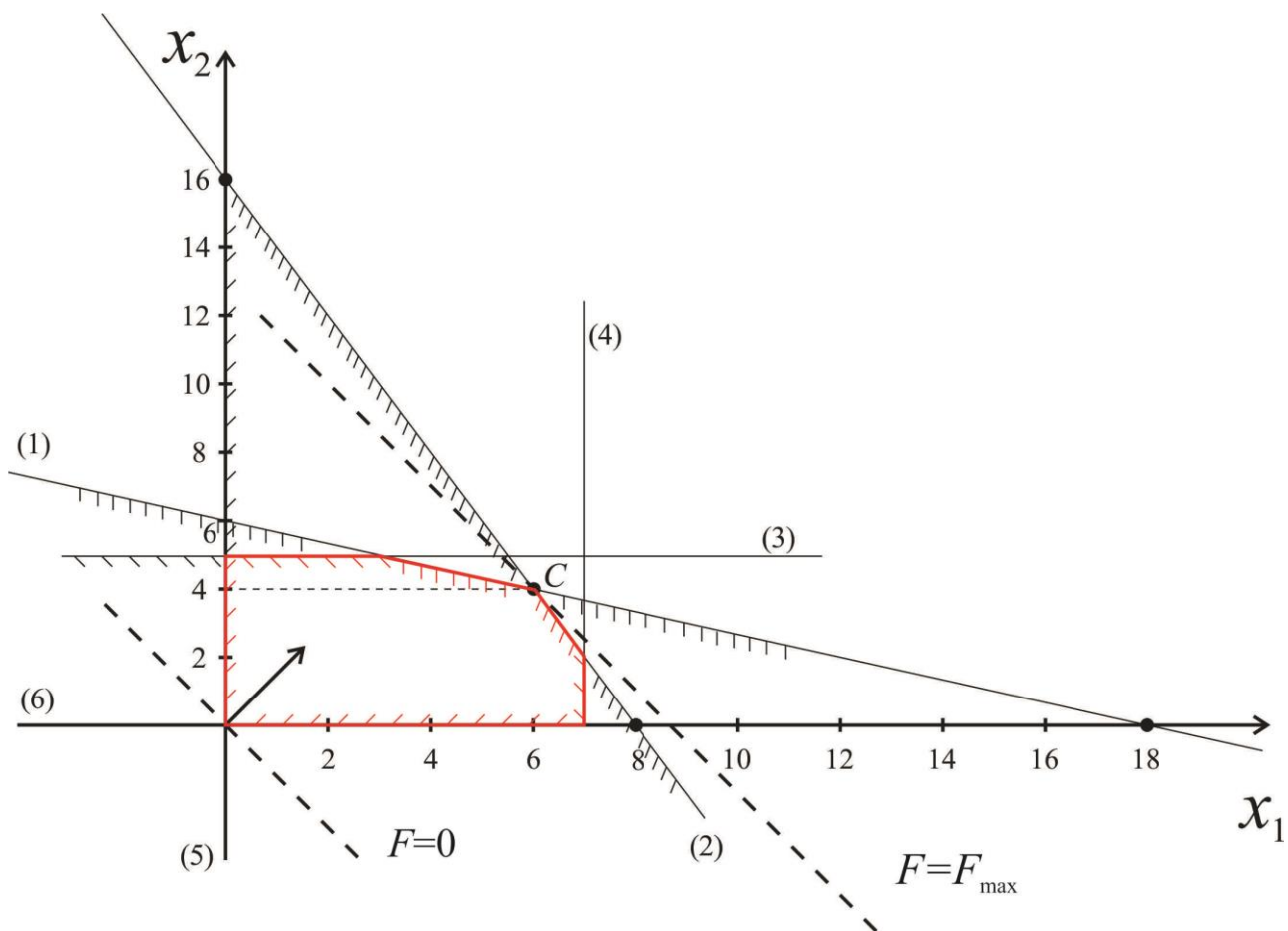


Рис. 3.5

1) $x_1 + 3x_2 \leq 18$.

$x_1 + 3x_2 = 18$ (1).

$x_1 = 0$; $x_2 = 6$; (0,6).

$x_1 = 18$; $x_2 = 0$; (18,0).

$1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 18$ – вірно.

2) $2x_1 + x_2 \leq 16$.

$2x_1 + x_2 = 16$ (2).

$x_1 = 0$; $x_2 = 16$; (0,16).

$x_1 = 8$; $x_2 = 0$; (8,0).

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 16$ – вірно.

3) $x_2 \leq 5$.

$x_2 = 5$ (3).

$$4) 3x_1 \leq 21.$$

$$x_1 = 7 \text{ (4).}$$

$$5) x_1 \geq 0.$$

$$x_1 = 0 \text{ (5).}$$

$$6) x_2 \geq 0.$$

$$x_2 = 0 \text{ (6).}$$

2. $\text{grad } F = 2\bar{i} + 3\bar{j}$. Будуємо $\text{grad } F$. Суміщаємо його початок з $O(0,0)$. Проводимо пунктиром лінію рівня $F = 0$ перпендикулярно $\text{grad } F$.

3. Переміщуємо лінію рівня паралельно самій собі до останньої точки зустрічі з многокутником розв'язків. F приймає найбільше значення в т. C .

4. Знаходимо координати т. C

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 18 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 = 16 \quad (2) \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 5x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 4; x_1 = 6 \\ \text{Отже, } C(6, 4) \end{array}$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24.$$

$$\text{Відповідь: } X^{\text{опт}} = (6, 4); \quad F_{\max} = F|_{X^{\text{опт}}} = 24.$$

Зауваження. У разі, якщо лінія рівня $F = F_{\max}$ або $F = F_{\min}$ збігається зі стороною многокутника розв'язків, задача ЛП має нескінченну множину розв'язків (усі точки відповідної сторони). Для знаходження оптимуму F слід обчислити значення F в одній з вершин зазначеної сторони.

Приклад 3.2. Розв'язати геометрично задачу

$$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 8 \quad (1) \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \quad (2) \\ x_1 - x_2 \leq 2 \quad (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (4,5) \end{array} \right.$$

Розв'язання

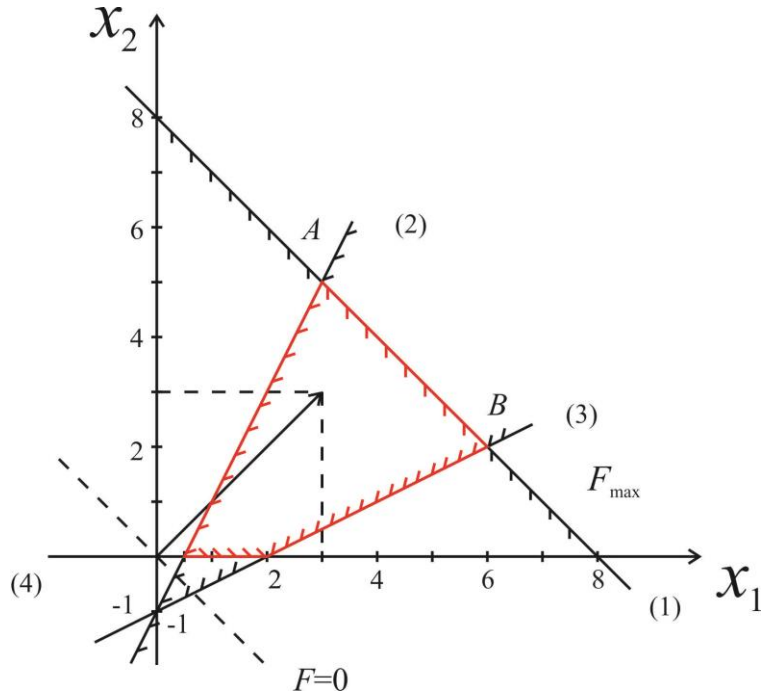


Рис. 3.6

1) $x_1 + x_2 \leq 8$.

$x_1 + x_2 = 8$ (1).

$x_1 = 0$; $x_2 = 8$; $(0, 8)$.

$x_1 = 8$; $x_2 = 0$; $(8, 0)$.

$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 8$ – вірно.

2) $2x_1 - x_2 \geq 1$.

$2x_1 - x_2 = 1$ (2).

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $(0, -1)$.

$x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 0$; $(\frac{1}{2}, 0)$.

$2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \geq 1$ – не вірно.

3) $x_1 - x_2 \leq 2$.

$x_1 - x_2 = 2$ (3).

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $(0, -1)$.

$x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $(2, 0)$.

$1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 2$ – вірно.

$$4) \ x_1 \geq 0.$$

$$x_1 = 0 \quad (4).$$

$$5) \ x_2 \geq 0.$$

$$x_2 = 0 \quad (5).$$

$$\text{grad } F = (3, 3).$$

Лінія рівня $F_{\max}$ збігається зі стороною многокутника розв'язків AB .

Задача має нескінченно багато оптимальних розв'язків. Їх задають координати точок відрізка AB . Точки AB визначаються рівнянням $x_2 = 8 - x_1$, де $3 \leq x_1 \leq 6$

$$A(3, 5); B(6, 2).$$

Відповідь: $X^{\text{опт}} = (c, 8 - c)$, де $3 \leq c \leq 6$.

$$F_{\max} = F|_{X^{\text{опт}}} = 24.$$

Зауваження. Точно встановити паралельність лінії рівня $F = 3x_1 + 3x_2$ і прямої AB $x_1 + x_2 = 8$ дозволяє пропорційність відповідних коефіцієнтів при невідомих.

Відзначимо, що **точки максимуму або мінімуму може і не існувати**, в разі якщо многокутник розв'язків є многокутною областю. Тоді $\max F = \infty$ або $\min F = -\infty$.

Приклад 3.3.

Розв'язати геометричну задачу

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 1 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 & (3) \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 & (4, 5) \end{cases}$$

Розв'язання

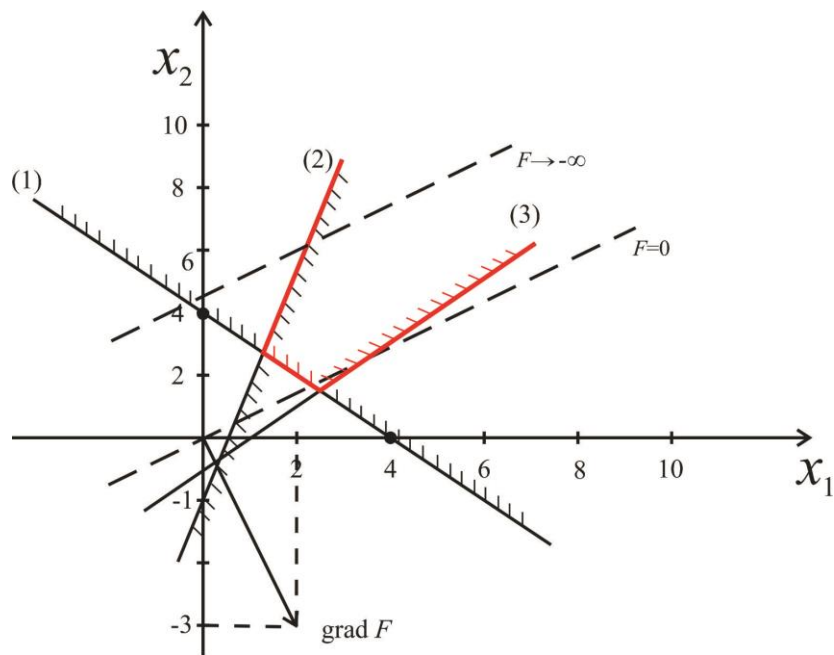


Рис. 3.7

1) $x_1 + x_2 \geq 4$.

$x_1 + x_2 = 4$ (1).

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $(0, 4)$.

$x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $(4, 0)$.

$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \geq 4$ – не вірно.

2) $2x_1 - x_2 \geq 1$.

$2x_1 - x_2 = 1$ (2).

$(0, -1)$; $(\frac{1}{2}, 0)$.

$2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \geq 1$ – не вірно.

3) $x_1 - 2x_2 \leq 1$.

$x_1 - 2x_2 = 1$ (3).

$(0, -\frac{1}{2})$; $(1, 0)$.

$1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 1$ – вірно.

$F_{\min} = -\infty.$

Висновки

1. Перевагами геометричного методу розв'язання задач ЛП є простота і наочність.

2. Недоліками методу є:

- придатність тільки в разі, коли число змінних у системі нерівностей $n = 2$;
- можливість «технічних» похибок, що допускаються при графічній побудові;
- не виявлення чіткого економічного змісту величин.

РОЗДІЛ 4. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Принципові недоліки, властиві геометричному методу розв'язання задач ЛП вказують на необхідність розвитку аналітичних методів для задач ЛП з довільним числом змінних.

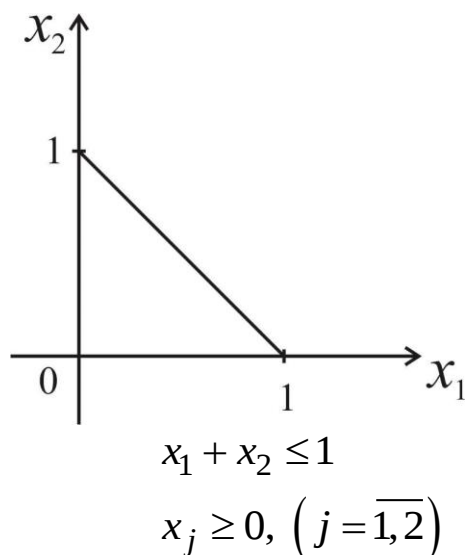
Основним з розроблених універсальних методів розв'язання задач ЛП є так званий **симплексний метод** або **симплекс-метод**, вперше запропонований у 1949 р. американським ученим Джорджем Данцигом.

Метод отримав назву від одного з простих прикладів, при розв'язанні якого використовувалося обмеження виду

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}),$$

яке є рівнянням опуклого многогранника з $(n+1)$ вершиною в n -вимірному просторі, званого симплексом (Simplex (лат.) – простий).

При $n = 2$
симплекс відповідає
трикутнику



При $n = 3$
симплекс відповідає
тетраедру

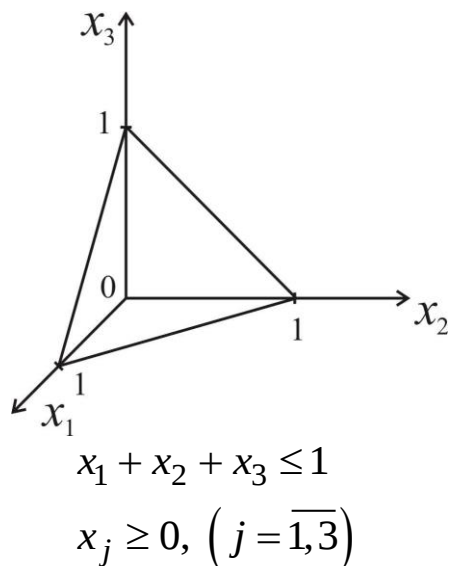


Рис. 4.1

1-ий крок: x_1 виключається з усіх рівнянь, починаючи з другого.

2-ий крок: x_2 виключається з усіх рівнянь, починаючи з третього

n -ий крок: x_n виключається з усіх рівнянь, починаючи з $(n+1)$ -го.

Після n кроків у рівняннях, починаючи з $(n+1)$ -го, вже змінних не виявиться. Ці рівняння приймуть вигляд

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b, \quad (4.3)$$

причому $b = 0$ (оскільки за припущенням п. 1 система є сумісною).

Рівняння виду (4.3) можна відкинути. При цьому вийде система, еквівалентна даній, в якій число рівнянь

$$\boxed{m' \leq n.}$$

Зауваження. В отриманій системі рівнянь, що містять змінні, може виявитися і менше n

$$m' < n,$$

якщо рівняння виду (4.3) з'являться в ході алгоритму Гаусса ще до виключення x_n .

3. Проаналізуємо випадок $m' = n$.

У ході алгоритму Гаусса з системи (4.2) виключаються рівняння, що є наслідками інших.

Можна довести, що в отриманій сумісній системі визначник $\Delta \neq 0$.

Тоді, відповідно до теореми Крамера, система має єдиний розв'язок

$$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Якщо при цьому всі $x_j^0 \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то знайдений єдиний розв'язок і є оптимальним (оскільки інших немає).

Якщо ж існує $x_k^0 < 0$, то задача ЛП розв'язків не має.

Висновок. У задачах ЛП інтерес представляє випадок $m < n$.

4.1. Система m лінійних рівнянь з n змінними при $m < n$

Означення 4.1. Будь-які m змінних системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m < n$) називаються **базисними (основними)**, якщо визначник з коефіцієнтів при них відмінний від нуля.

Тоді решта $(n - m)$ змінних називаються **вільними (неосновними)**.

Зауваження. Базисними можуть бути різні групи по m змінних із загального числа n . Кількість способів вибору m змінних із загального числа n дорівнює C_n^m . Оскільки можуть зустрічатися випадки, коли визначник матриці коефіцієнтів при m змінних дорівнює 0, то загальне число груп базисних змінних не перевищує C_n^m .

Приклад 4.1. Знайти всі можливі групи базисних змінних в системі

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \quad m = 2, n = 4.$$

Розв'язання

1. Загальна кількість груп базисних змінних не більше, ніж $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Можливі групи базисних змінних: (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_1, x_4) , (x_2, x_3) , (x_2, x_4) , (x_3, x_4) .

2. З'ясуємо, чи можуть бути базисними змінними (x_1, x_2) . Знайдемо визначник матриці коефіцієнтів при цих невідомих

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0. \text{ Отже } (x_1, x_2) - \text{базисні змінні.}$$

Пропонуємо перевірити самостійно, що базисними змінними можуть бути тільки (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_1, x_4) .

У решти груп змінних відповідні визначники дорівнюють 0.

Для розв'язання системи (4.2) за умови $(m < n)$ доведемо теорему.

Теорема 4.1.

Якщо для системи m лінійних рівнянь з n змінними $(m < n)$ існує хоча б одна група базисних змінних, то ця система є невизначеною. Причому кожному довільному набору значень вільних змінних відповідає один розв'язок системи.

Доведення

Нехай деякі m змінних системи (4.2) є - базисними. Не порушуючи спільності, можна вважати, що це змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$ (інакше можна змінити нумерацію змінних). Таким чином,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Залишимо в лівих частинах рівнянь системи члени зі змінними $x_1, x_2, \dots, x_m$, а члени зі змінними $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ перенесемо в праві частини. Отримаємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1\ m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2\ m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m\ m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Надаючи вільним змінним $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ довільні значення, кожен раз будемо отримувати нову систему з новими вільними членами. У кожній з отриманих систем $|A| \neq 0$. За теоремою Крамера кожна з цих систем буде мати єдиний розв'язок. Оскільки отриманих таким чином систем є нескінченно багато, то і система (4.2) буде мати нескінченно багато розв'язків, тобто буде невизначеною.

Теорема 4.2 (без доведення).

Якщо система m лінійних незалежних рівнянь з n змінними ($m < n$) не має жодної групи базисних змінних, то система є несумісною.

З нескінченної кількості розв'язків системи m лінійних рівнянь з n змінними виділимо так звані базисні розв'язки.

Означення 4.2. Базисним розв'язком системи m лінійних рівнянь з n змінними ($m < n$) називається всякий її розв'язок, в якому вільні змінні мають нульові значення.

Оскільки число способів розбиття системи на базисні і вільні змінні не перевищує C_n^m , то існує не більше C_n^m базисних розв'язків (кожному розбиттю змінних відповідає один базисний розв'язок).

Зауваження. У базисному розв'язку вільні змінні дорівнюють 0 (за означенням). Базисні змінні, як правило, відмінні від 0.

Означення 4.3. Базисний розв'язок, у якому будь-яка з базисних змінних дорівнює 0, називається виродженням.

Серед розв'язків системи (4.2), в тому числі і базисних, виділимо ті, компоненти яких невід'ємними.

Означення 4.4. Розв'язок системи m лінійних рівнянь з n змінними називається **допустимим**, якщо всі його компоненти є невід'ємними, і **недопустимим**, якщо хоча б одна компонента є від'ємною.

Базисні розв'язки також ділять на допустимі і недопустимі.

Означення 4.5. Допустимі базисні розв'язки системи (4.2) обмежень задачі ЛП називаються **опорними планами**.

Оскільки кількість базисних розв'язків є скінченною, то кількість допустимих базисних розв'язків тим більше є скінченною.

Приклад 4.2. Знайти всі базисні розв'язки системи, наведеної в прикладі 4.1.

Розв'язання

У прикладі 4.1 встановлено, що існує 3 групи базисних змінних: (x_1, x_2) , (x_1, x_3) і (x_1, x_4) .

Отже, число базисних розв'язків дорівнює трьом.

Перший базисний розв'язок.

Базисні: x_1, x_2 .

Вільні: x_3, x_4 ; $x_3 = x_4 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow X^{(1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0 \right) \in$ допустимим

розв'язком.

Другий базисний розв'язок.

Базисні: x_1, x_3 .

Вільні: x_2, x_4 ; $x_2 = x_4 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Звідси $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = 0 \Rightarrow X^{(2)} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0 \right) \in$ до-

пустимим розв'язком.

Третій базисний розв'язок.

Базисні: x_1, x_4 .

Вільні: x_2, x_3 ; $x_2 = x_3 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Звідси $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -\frac{2}{3} \Rightarrow X^{(3)} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{2}{3} \right) \in$

не допустимим розв'язком.

Аналітичне знаходження кутових точок

Теорема 2.7 дозволила зробити висновок: пошук оптимального розв'язку задачі ЛП можна обмежити перебором скінченної кількості кутових точок многогранника розв'язків.

Отже, потрібно мати у своєму розпорядженні будь-який аналітичний метод знаходження координат цих точок. Такий метод надає

Теорема 4.3. Кожному допустимому базисному розв'язку задачі ЛП відповідає кутова точка многогранника розв'язків. Навпаки,

кожній кутовій точці многогранника розв'язків відповідає допустимий базисний розв'язок.

З теореми 2.7 і теореми 4.3 випливає

Наслідок.

Якщо задача ЛП має оптимальний розв'язок, то він збігається, принаймні, з одним з її допустимих базисних розв'язків.

Висновок. Оптимум лінійної функції задачі ЛП завжди слід шукати серед скінченної кількості її допустимих базисних розв'язків.

Геометрична інтерпретація симплексного методу

Оскільки для реальних задач кількість допустимих базисних розв'язків може бути дуже великою, практичне здійснення перебору всіх допустимих базисних розв'язків пов'язано з великими труднощами.

Скорочення числа допустимих базисних розв'язків, які перебираються, можна добитися, якщо вести перебір не безладно, а цілеспрямовано: з урахуванням зміни цільової функції F :

- при $F \rightarrow \max$ – домагатися на кожному кроці збільшення (не зменшення F);
- при $F \rightarrow \min$ – домагатися на кожному кроці зменшення (не збільшення F).

Геометричний зміст симплексного методу полягає в послідовному переході від однієї вершини многогранника розв'язків (початкової) до сусідньої, в якій лінійна функція F приймає краще (принаймні не гірше) значення.

Розглянемо схематичний приклад (на площині).

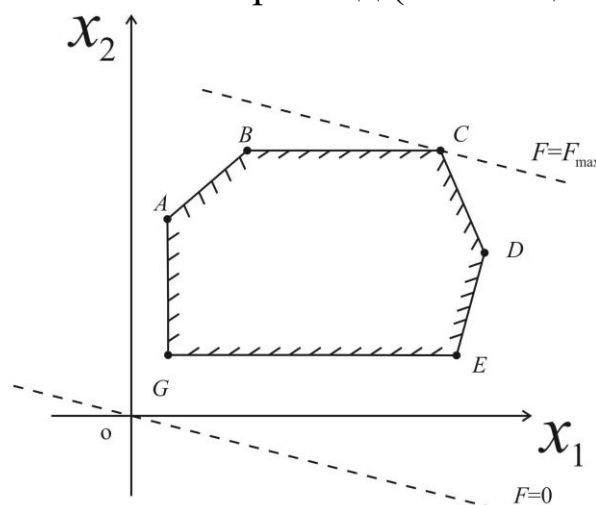


Рис. 4.2

Нехай A відповідає початковому допустимому базисному розв'язку.

При безладному переборі, в загальному випадку доведеться випробувати 6 допустимих базисних розв'язків (кутові точки A, B, C, D, E, G).

Проте, з рис. 4.2 видно, що вигідним є цілеспрямований перехід: $A \rightarrow B \rightarrow C$, що приводить до оптимального розв'язку (беруть участь всього 3 вершини).

Ця ідея послідовного поліпшення розв'язку покладена в основу симплекс-методу.

4.2. Алгоритм симплексного методу

Ідея симплекс-методу

Симплекс-метод включає 3 основних елементи:

1. Спосіб визначення будь-якого початкового допустимого базисного розв'язку задачі.
2. Критерій перевірки оптимальності знайденого допустимого базисного розв'язку.
3. Правило переходу до кращого (точніше не гіршого) допустимого базисного розв'язку.

Доведемо, що таким шляхом можна через скінченну кількість кроків отримати оптимальний план – розв'язок задачі ЛП.

Пояснимо ідею симплекс-методу на прикладі.

Приклад 4.3.

Знайти $\min F = -x_4 + x_5$

при системі обмежень

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Розв'язання

Перший крок. Базисні: x_1, x_2, x_3 . Вільні: x_4, x_5 .

1. Виберемо змінні x_1, x_2, x_3 в якості базисних (це можна зробити, оскільки визначник з коефіцієнтів при них відмінний від нуля).

Дійсно

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді x_4, x_5 – вільні змінні.

2. Виразимо базисні змінні і лінійну функцію F через вільні змінні x_4, x_5 .

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 + 3x_5 \\ x_1 = 2 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

$F = -x_4 + x_5$ є вже вираженою.

Покладемо $x_4 = x_5 = 0$.

Тоді $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 2$.

$X^{(1)} = (2, 7, 2, 0, 0)$ – базисний розв'язок початкової системи рівнянь.

Оскільки всі компоненти базисного розв'язку є невід'ємними, то $X^{(1)}$ – допустимий базисний розв'язок першого кроку.

3. Обчислимо значення цільової функції F при знайденому розв'язку.

$$F|_{X^{(1)}} = 0$$

Таким чином, на першому кроці отримано:

$$X^{(1)} = (2, 7, 2, 0, 0), F|_{X^{(1)}} = 0.$$

Виникає *перше питання* про можливість поліпшення знайденого значення F :

$x_4 = 0$ і $x_5 = 0$ є найменшими значеннями невід'ємних змінних.

Чи можна за рахунок збільшення значень x_4 і x_5 досягти зменшення значення F ?

Відповідь: з виразу для цільової функції F видно, що x_5 входить до складу F зі знаком «+», отже, збільшення x_5 призведе до збільшення F . Це не вигідно.

У той же час, змінна x_4 входить до складу F зі знаком «-». Тому збільшення x_4 спричинить зменшення F . Це вигідно.

Висновок: зменшення значення F можна досягти за рахунок збільшення x_4 .

Виникає наступне *друге питання*: чи є можливим необмежене збільшення x_4 ?

Відповідь: збільшення вільної змінної x_4 викликає відповідні зміни базисних змінних. Ці зміни можуть виявитися такими, що базисні змінні стануть від'ємними, в результаті чого порушиться вимога допустимості.

Висновок: має існувати межа збільшення x_4 .

Виникає *третє питання*: як знайти межу збільшення x_4 ?

Відповідь:

$$(1) \quad x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 - 2x_4; \quad 7 - 2x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq \frac{7}{2}.$$

$$(2) \quad x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = 2 + x_4; \quad x_4 - \text{можна збільшувати необмежено.}$$

$$(3) \quad x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 - x_4; \quad 2 - x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 2.$$

Зазначимо межі збільшення в системі обмежень I-го кроку:

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 + 3x_5 \\ \boxed{x_1 = 2 - x_4 - x_5} \end{cases} \begin{array}{l} \frac{7}{2} \\ \infty \\ \textcircled{2} \end{array} \quad x_4 \uparrow$$

Очевидно, що невід'ємність усіх трьох змінних x_1, x_2, x_3 (тобто допустимість розв'язку) можлива, якщо для x_4 вибрати наступне найбільше можливе значення

$$x_4 = \min \left\{ \frac{7}{2}, \infty, 2 \right\} = 2.$$

Рівняння, що визначає найбільше можливе значення, називається розв'язувальним (його виділяють).

При $x_4 = 2$ змінна x_1 перетворюється в 0 і переходить в змінні.

Другий крок. Базисні: x_2, x_3, x_4 . Вільні: x_1, x_5 .

1. Виразимо нові базисні змінні через вільні, починаючи з розв'язувального рівняння.

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_1 - x_5 \\ x_2 = 7 - 2(2 - x_1 - x_5) - 3x_5 \\ x_3 = 2 + (2 - x_1 - x_5) + x_5 \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} x_4 = 2 - x_1 - x_5 \\ x_2 = 3 + 2x_1 - x_5 \\ x_3 = 4 - x_1 + 2x_5 \end{cases}$$

2. Виразимо цільову функцію F через нові вільні змінні

$$F = -x_4 + x_5 = -(2 - x_1 - x_5) + x_5 = -2 + x_1 + 2x_5.$$

Покладемо вільні змінні $x_1 = x_5 = 0$.

$X^{(2)} = (0, 3, 4, 2, 0)$ – допустимий базисний розв'язок другого кроку.

Виникає *четверте питання*: чи можливо зменшення F за рахунок збільшення x_1 і x_5 ?

Відповідь: неможливо, оскільки будь-яке збільшення x_1 і x_5 призводить до збільшення F .

Висновок: знайдено оптимальний розв'язок

$$X^{\text{опт}} = X^{(2)} = (0, 3, 4, 2, 0). F_{\min} = F|_{X^{\text{опт}}} = -2.$$

Критерій оптимальності допустимого базисного розв'язку в задачі мінімізації F

Якщо всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі цільової функції F є невід'ємними, то отриманий допустимий базисний розв'язок є оптимальним.

Перехід до кращого (не гіршого) допустимого базисного розв'язку

Перелічимо всі можливі випадки оцінки зростання ($\uparrow$) вільної змінної в рівнянні системи обмежень. Нехай

$$x_j = b_j + \dots + \underbrace{a_{ij}x_i}_{\uparrow} + \dots - j\text{-е рівняння системи}$$

Змінна $x_i \uparrow$ (переводиться в базисні). Знайдемо найбільше можливе значення x_i .

Зауваження. Завжди можна вважати $b_j \geq 0$ (в іншому випадку обидві частини рівняння множаться на (-1)).

$$1. \text{ Якщо } b_j > 0, a_{ij} < 0 \Rightarrow \boxed{x_i = \left| \frac{b_j}{a_{ij}} \right|}.$$

$$\text{Приклад: } x_3 = 8 - 2x_2 + \dots \quad x_2 = \left| \frac{8}{-2} \right| = 4.$$

$$2. \text{ Якщо } b_j > 0, a_{ij} > 0 \Rightarrow \boxed{x_i = \infty}.$$

$$\text{Приклад: } x_3 = 8 + 2x_2 + \dots \quad x_2 = \infty.$$

$$3. \text{ Якщо } b_j = 0, a_{ij} < 0 \Rightarrow \boxed{x_i = 0}.$$

$$\text{Приклад: } x_3 = 0 - 2x_2 + \dots \quad x_2 = 0.$$

$$4. \text{ Якщо } b_j = 0, a_{ij} > 0, \text{ то } \boxed{x_i = \infty}.$$

$$\text{Приклад: } x_3 = 0 + 2x_2 + \dots \quad x_2 = \infty.$$

$$5. \text{ Якщо } b_j \geq 0, a_{ij} = 0, \text{ то } \boxed{x_i = \infty}.$$

$$\text{Приклад: } x_3 = 5 + 0 \cdot x_2 + \dots \quad x_2 = \infty.$$

Критерій неіснування оптимального базисного розв'язку задачі мінімізації F

Якщо у виразі цільової функції F є вільна змінна з від'ємним коефіцієнтом, а в усі рівняння системи обмежень даного кроку вказана змінна входить з додатним коефіцієнтом (або відсутня), то лінійна функція F є необмеженою при даній системі обмежень

$$\min F = -\infty.$$

Наступна теорема визначає умови, при яких симплекс-процес завершується за скінченну кількість кроків.

Теорема 4.4.

Якщо на жодному кроці (ітерації) симплекс-процесу немає виродженого допустимого базисного розв'язку, то симплекс-процес закінчиться за скінченну кількість кроків (ітерацій).

Алгоритм симплекс-методу (задача мінімізації F)

1. Знайти опорний план – допустимий базисний розв'язок системи обмежень основної задачі ЛП.

2. Виразити цільову функцію F через вільні змінні.

3. Перевірити виконання критерію оптимальності розв'язку. Можливі два випадки:

3.1. Критерій оптимальності є виконаним. Отриманий допустимий базисний розв'язок є оптимальним. Задачу розв'язано.

3.2. Критерій оптимальності не виконано. Перейти до п. 4.

4. Вибрати в цільовій функції вільну змінну з найбільшим по модулю від'ємним коефіцієнтом (будь-яку із змінних, якщо таких декілька).

5. Розглянути систему обмежень. Можливі два випадки.

5.1. У кожному обмеженні коефіцієнт при обраній вільній змінній є невід'ємним. У цьому випадку оптимального розв'язку немає, $\min F = -\infty$. Задачу розв'язано.

5.2. Серед обмежень системи є такі, в які обрана змінна входить з від'ємним коефіцієнтом. Перейти до п. 6.

6. У кожному рівнянні системи обмежень знайти найбільше можливе значення обраної змінної. Серед отриманих значень знайти найменше. Вибрати рівняння, в якому досягається це найменше значення (розв'язувальне рівняння). Якщо найменше значення досягається в декількох рівняннях, вибрати будь-яке з них.

7. Із знайденого рівняння виразити змінну, яка переводиться в базисні, через всі інші змінні цього рівняння (отримати новий набір вільних змінних).

8. Виразити решту базисних змінних через новий набір вільних змінних. Перейти до п. 2.

Розв'язання симплекс-методом основної задачі лінійного програмування з виділеними базисними змінними

Означення 4.5. Основна задача ЛП називається задачею з **виділеними базисними змінними**, якщо кожне рівняння системи обмежень містить змінну, що не входить в інші рівняння, і коефіцієнт при цій змінній має той же знак, що і вільний член рівняння.

Такі змінні можна вибрати в якості **базисних**, при цьому відповідне базисне рішення є **допустимим**.

Зауваження. Додаткові змінні, в разі, якщо вони мають ті ж знаки, що і відповідні вільні члени в правих частинах рівняння, задовольняють зазначеній в означенні вимозі.

Приклад 4.4. Розглянемо задачу про використання ресурсів

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ \quad \quad x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Це загальна задача ЛП. Зведемо її до основної задачі ЛП.

$$F = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ \quad \quad x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 6) \end{cases}$$

Отримано основна задача ЛП з виділеними базисними змінними. Додаткові змінні x_3, x_4, x_5, x_6 можна вибрати в якості базисних (визначник з коефіцієнтів при них відмінний від нуля). Дійсно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Розв'яжемо цю задачу симплекс-методом.

Розв'язання

Перший крок. Базисні: x_3, x_4, x_5, x_6 . Вільні: x_1, x_2 .

$$\begin{array}{c} x_2 \uparrow \\ \left\{ \begin{array}{l|l} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 & 6 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 & 16 \\ \boxed{x_5 = 5 - x_2} & \textcircled{5} \\ x_6 = 21 - 3x_1 & \infty \end{array} \right. \end{array}$$

$$F = -2x_1 - 3x_2.$$

$$X^{(1)} = (0, 0, 18, 16, 5, 21); F|_{X^{(1)}} = 0.$$

$|-3| > |-2| \Rightarrow x_2 \uparrow$ – у базисні; x_5 – у вільні.

Другий крок. Базисні: x_2, x_3, x_4, x_6 . Вільні: x_1, x_5 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 5 - x_5 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5) \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_5) \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} x_1 \uparrow \\ \left\{ \begin{array}{l|l} x_2 = 5 - x_5 & \infty \\ \boxed{x_3 = 3 - x_1 + 3x_5} & \textcircled{3} \\ x_4 = 11 - 2x_1 + x_5 & 11/2 \\ x_6 = 21 - 3x_1 & 7 \end{array} \right. \end{array}$$

$$F = -15 - 2x_1 + 3x_5.$$

$$X^{(2)} = (0, 5, 3, 11, 0, 21); F|_{X^{(2)}} = -15.$$

$x_1 \uparrow$ – у базисні; x_5 – у вільні.

Третій крок. Базисні: x_1, x_2, x_4, x_6 . Вільні: x_3, x_5 .

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \\ x_2 = 5 - x_5 \\ x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 \\ x_6 = 21 - 3(3 - x_3 + 3x_5) \end{cases}$$

$x_5 \uparrow$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 & \infty \\ x_2 = 5 - x_5 & 5 \\ \boxed{x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_5} & \textcircled{1} \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9x_5 & 12/9 \end{array} \right.$$

$$F = -21 + 2x_3 - 3x_5.$$

$$X^{(3)} = (3, 5, 0, 5, 0, 12); F|_{X^{(3)}} = -21.$$

$x_5 \uparrow$ – у базисні; x_4 – у вільні.

Четвертий крок. Базисні: x_1, x_2, x_5, x_6 . Вільні: x_3, x_4 .

$$\begin{cases} x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 3 - x_3 + 3\left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) \\ x_2 = 5 - \left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9\left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) \end{cases}$$

$$F = -21 + 2x_3 - 3\left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right).$$

$$\begin{cases} x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \end{cases}$$

$$F_1 = -24 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4.$$

$$X^{(4)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3); F|_{X^{(4)}} = -24.$$

Усі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для F_1 є додатними, отже, критерій оптимальності виконано.

Відповідь: $X^{\text{опт}} = (6, 4, 0, 0, 1, 3); F_1 \min = -24.$

$$F_{\max} = -F_1 \min = 24.$$

Розв'язання загальної задачі лінійного програмування з умовою максимізації F

При розв'язанні загальної задачі ЛП з умовою $F \rightarrow \max$ можливі два шляхи.

1. Привести загальну задачу до основної (як у розглянутому вище прикладі). Відшукати $\min F_1$, де $F_1 = -F$. Далі знайти $F_{\max}$ із співвідношення

$$F_{\max} = -F_1 \min.$$

2. Перевести систему обмежень загальної задачі ЛП до системи рівнянь. Знаходити $F_{\max}$, модифікуючи симплекс-метод. На кожному кроці збільшувати лінійну функцію F за рахунок тієї вільної змінної, яка входить у вираз F з додатним коефіцієнтом.

Критерій оптимальності допустимого базисного розв'язку в задачі максимізації F

Якщо всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі цільової функції F є недодатними, то отриманий допустимий базисний розв'язок є оптимальним.

Висновок: розглянуто розв'язання симплекс-методом основної задачі ЛП з виділенням базисом.

Виникає питання про **знаходження опорного плану** (допустимого базисного розв'язку), в разі, якщо система обмежень задачі лінійного програмування **не має виділених базисних змінних**.

Виявляється, що опорний план можна теж знайти за допомогою симплекс-методу. Одночасно вдається встановити, чи має дана система обмежень **хоча б один** допустимий базисний розв'язок.

4.3. Знаходження опорного плану з допомогою симплекс-методу

Нехай дана основна задача ЛП без виділеного базису – задача (4.4) – (4.5).

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (4.5)$$

Зауваження. Завжди можна вважати всі $b_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$). В іншому випадку відповідне рівняння множиться на (-1) .

Поставимо допоміжну задачу. Для цього в кожне рівняння системи (4.5), яке не має виділеної базисної змінної, введемо штучну базисну змінну α_i , що дорівнює різниці правої і лівої частин рівняння.

ред розв'язків нової системи обмежень.

Припустимо, що має місце загальний випадок: жодне з рівнянь системи (4.5) не має виділеної базисної змінної. Тоді допоміжна задача має вигляд (4.6) – (4.7).

Допоміжна задача

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \rightarrow \min \quad (4.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \alpha_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \\ \alpha_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}); \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Теорема 4.5.

Система обмежень (4.5) має допустимий розв'язок тоді і тільки тоді, коли допоміжна задача (4.6) – (4.7) має оптимальний розв'язок, на якому $f = 0$.

Доведення

1. Нехай допоміжна задача (4.6) – (4.7) має оптимальний розв’язок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, x_1, \dots, x_n)$, на якому досягається $\min f = 0$. Це допустимий базисний розв’язок системи обмежень (4.7). Отже, $\alpha_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), $x_j \geq 0$, ($j = \overline{1, n}$). Оскільки $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, то $f = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$). Таким чином, системі рівнянь (4.7) задовольняє набір $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, x_1, \dots, x_n)$, $x_j \geq 0$, ($j = \overline{1, n}$). Це означає, що існує набір $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j \geq 0$, ($j = \overline{1, n}$) (невід’ємних значень x_j), які перетворюють α_i ($i = \overline{1, m}$) в 0 у системі (4.7), і, отже,

набір, що задовольняє системі (4.5). Оскільки $x_j \geq 0$, $(j = \overline{1, n})$, то це допустимий розв'язок системи (4.5).

2. Навпаки, нехай існує допустимий розв'язок системи (4.5). Це набір $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j \geq 0$, $(j = \overline{1, n})$, який перетворює всі α_i $(i = \overline{1, m})$ в 0 в системі (4.7). Отже, набір $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, x_1, \dots, x_n)$, всі компоненти якого є невід'ємними, задовольняє системі (4.7) допоміжної задачі і доставляє 0 функції $f : f = 0$. Оскільки $f \geq 0$, то $\min f = 0$. Таким чином, $(0, 0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n)$ – це оптимальний розв'язок допоміжної задачі, на якому $f = 0$.

Доведена теорема вказує необхідні і достатні умови існування допустимого розв'язку системи обмежень даної задачі ЛП і дозволяє привести наступний алгоритм.

Алгоритм знаходження допустимого розв'язку

1. Симплекс-методом розв'язати допоміжну задачу (4.6) – (4.7).
2. Якщо $\min f = 0$, то всі $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1, m})$, і отримані значення $x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$ складають допустимий розв'язок даної системи (4.5).
3. Якщо $\min f > 0$, то система (4.5) не має допустимих розв'язків (система є несумісною в області невід'ємних значення невідомих).

Проте для розв'язання даної задачі ЛП симплекс-методом необхідно мати початковий допустимий базисний розв'язок.

Сформульоване нижче твердження вказує шлях знаходження допустимого базисного розв'язку.

Твердження 4.1. *Якщо мінімізацією допоміжної функції f (4.7) симплекс-методом знайдено допустимий розв'язок системи (4.5) і при цьому все штучні базисні змінні α_i стали вільними, то знайдений розв'язок одночасно є допустимим базисним розв'язком (4.5).*

Доведення

Нехай $X^{\text{опт}}$ – оптимальний розв’язок допоміжної задачі (4.6) – (4.7).

Тоді

$$X^{\text{опт}} = (0, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Це допустимий базисний розв’язок системи (4.7), в якому все α_i ($i = \overline{1, m}$) є вільними змінними. Тоді базисними можуть бути тільки m змінних з x_j ($j = \overline{1, n}$). Як випливає з доведеної теореми, розв’язок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є допустимим розв’язком (4.5), в якому виділено m базисних змінних. Отже, це допустимий базисний розв’язок системи (4.5).

Висновок. Задача ЛП, яка не має виділених базисних змінних, може бути розв’язана в 2 етапи (кожен з яких заснований на симплекс-методі), що разом складають **двоетапний симплекс-алгоритм**.

Перший етап алгоритму одночасно надає можливість встановити сумісність системи обмежень даної задачі в області невід’ємних значень невідомих.

4.4. Метод штучного базису (двоетапний симплекс-метод)

Алгоритм методу

Етап I

1. У рівняння системи обмежень даної задачі ЛП, які **не містять виділених** базисних змінних, ввести штучні базисні змінні α_i .

2. Записати допоміжну цільову функцію f , яка передбачає **мінімізацію** суми штучних базисних змінних при вихідних обмеженнях, видозмінених за рахунок введення штучних змінних.

3. Розв’язати поставлену допоміжну задачу ЛП симплекс-методом. Можливі два випадки:

3.1. Якщо $\min f > 0$, то початкова задача не має допустимих розв’язків. Завершити обчислення.

3.2. Якщо $\min f = 0$, і все штучні змінні α_i стали вільними, то початкова задача має допустимий базисний розв'язок. Перейти до етапу II.

Етап II.

1. Оптимальний розв'язок допоміжної задачі, отриманий на етапі I, використовувати в якості першого допустимого розв'язку початкової задачі.

2. Систему обмежень останнього кроку етапу I розв'язання допоміжної задачі взяти в якості системи обмежень першого кроку етапу II розв'язання початкової задачі.

3. Розв'язати симплекс-методом початкову задачу з виділеними базисними змінними.

Приклад 4.5.

Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F = 5x_1 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Розв'язання

Етап I.

1. Перше рівняння даної системи містить виділені базисні змінні x_1 і x_3 , друге рівняння не містить виділених базисних змінних. Введемо в друге рівняння штучну базисну змінну α_1 :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \alpha_1 = 1 - x_2 - 2x_4 \end{cases}.$$

2. Запишемо нову цільову функцію f , яка дорівнює сумі введених штучних змінних. В даному випадку $f = \alpha_1 = 1 - x_2 - 2x_4$.

3. Поставимо допоміжну задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} f &= 1 - x_2 - 2x_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \alpha_1 = 1 - x_2 - 2x_4 \end{cases} \end{aligned}.$$

Розв'яжемо її симплекс-методом

Перший крок. Базисні: α_1, x_1 . Вільні: x_2, x_3, x_4 .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 \\ \alpha_1 = 1 - x_2 - 2x_4 \end{cases} \left| \begin{matrix} \infty \\ \left(\frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \\ f = 1 - x_2 - 2x_4 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

$$X^{(1)} = (1, 3, 0, 0, 0); \quad f|_{X^{(1)}} = 1.$$

$x_4 \uparrow$ – у базисні; α_1 – у вільні.

Другий крок. Базисні: x_1, x_4 . Вільні: α_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \\ x_1 = 3 - 2x_3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \right) \end{cases}$$

(штучна базисна змінна α_1 стала вільною. Приймаємо $\alpha_1 = 0$ і в подальшому не враховуємо).

$$f = 1 - x_2 - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \right).$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \\ x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 \end{cases};$$

$$f = 1 - x_2 - 1 + x_2 = 0.$$

$X^{(2)} = \left(0, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ – допустимий базисний розв’язок даної задачі.

Етап II.

Розв’язуємо початкову задачу

$$F = 5x_1 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \\ x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Перший крок. Базисні: x_1, x_4 . Вільні: x_2, x_3 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \\ x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} \infty \\ \frac{7}{4} \end{array} \right).$$

$$F = 5x_1 - x_3 = 5\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3\right) - x_3 = \frac{35}{2} - \frac{15}{2}x_2 - 11x_3.$$

$x_3 \uparrow$ – в базисні; x_1 – у вільні.

Другий крок. Базисні: x_3, x_4 . Вільні: x_1, x_2 .

$$\begin{cases} x_3 = \frac{7}{4} - \frac{x_1}{2} - \frac{3}{4}x_2 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{35}{2} - \frac{15}{2}x_2 - 11\left(\frac{7}{4} - \frac{x_1}{2} - \frac{3}{4}x_2\right) = \frac{70}{4} - \frac{77}{4} + \frac{11}{2}x_1 - \frac{30}{4}x_2 + \frac{33}{4}x_2 = \\ &= -\frac{7}{4} + \frac{11}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2. \end{aligned}$$

$$X^{(2)} = \left(0, 0, \frac{7}{4}, \frac{1}{2} \right); F|_{X^{(2)}} = -\frac{7}{4}.$$

Критерій оптимальності виконано.

$$X^{(\text{опт})} = \left(0, 0, \frac{7}{4}, \frac{1}{2} \right). \min F = F|_{X^{(\text{опт})}} = -\frac{7}{4}.$$

Зауваження. На практиці можлива ситуація, коли в результаті виконання етапу 1 $\min f = 0$, проте не всі змінні α_i стали вільними (α_i залишилися в лівих частинах деяких рівнянь).

Цей випадок відповідає **виродженому** допустимому базисному розв'язку ($\alpha_i = 0$ і α_i – базисна).

У такій ситуації можливі випадки:

1. Рівняння, що містить в лівій частині α_i **не містить** у правій частині змінних x_j . Тоді це рівняння відкидають.

2. Рівняння, що містить в лівій частині α_i , **містить** у правій частині хоча б одну із змінних x_j . Тоді це рівняння розв'язують відносно будь-якої змінної x_j , а потім виключають цю змінну з інших рівнянь (для того, щоб перевести штучну базисну змінну α_i у вільні змінні).

4.5. Окремі випадки симплексного методу

У всіх розглянутих раніше задачах, розв'язаних за допомогою симплексного методу, система обмежень виявлялася сумісною, і був скінченний оптимум, причому єдиний.

Розглянемо приклади, в яких ці умови порушуються.

Система обмежень не має допустимих розв'язків (система обмежень є несумісною).

Приклад 4.6.

Знайти допустимий базисний розв'язок системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо симплекс-методом допоміжну задачу (І етап розширеного симплекс-методу).

Перший крок. Базисні: α_1, α_2 . Вільні: x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ \alpha_2 = 4 - x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \end{array} \right. \left(\frac{1}{3} \right) \frac{1}{4}$$

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 = 5 - 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4.$$

$$X^{(1)} = (1, 4, 0, 0, 0, 0); f|_{X^{(1)}} = 5.$$

$x_1 \uparrow$ – у базисні; α_1 – у вільні.

Другий крок. Базисні: α_2, α_1 . Вільні: α_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ \alpha_2 = \frac{11}{3} + \frac{11}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{array} \right.$$

$$f = \frac{11}{3} + \frac{11}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4.$$

$$X^{(2)} = \left(1, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right); f|_{X^{(2)}} = \frac{11}{3} > 0.$$

Критерій оптимальності в задачі мінімізації виконаний.

$$X^{(\text{опт})} = X^{(2)}, \min f = \frac{11}{3} > 0.$$

Дана система не має допустимого розв'язку.

Відсутність скінченного оптимуму

$$(F_{\max} = \infty \text{ або } F_{\min} = -\infty)$$

Приклад 4.7.

Розв'язання

Зведемо систему обмежень-нерівностей до системи рівнянь і розв'яжемо її симплекс-методом.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$
$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Перший крок. Базисні: x_3, x_4 . Вільні: x_1, x_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \infty \end{array} \right.$$

$$F = x_1 + 2x_2 \quad (\rightarrow \max); \quad F = -x_1 - 2x_2 \quad (\rightarrow \min).$$

$$X^{(1)} = (0, 0, 9, 2); \quad F|_{X^{(1)}} = 0.$$

$x_2 \uparrow$ – у базисні; x_3 – у вільні.

Другий крок. Базисні: x_2, x_4 . Вільні: x_1, x_3 .

$$\begin{cases} x_2 = 3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2\left(3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) \end{cases}$$
$$F = x_1 + 2\left(3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 3 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{array} \right| \infty$$

$$F = 6 + \frac{7}{3}x_1 - 2x_3 \rightarrow \max.$$

$$X^{(2)} = (0, 3, 0, 8); F|_{X^{(2)}} = 6$$

$x_1 \uparrow$ – у базисні.

Із системи обмежень випливає, що при цьому x_1 може зростати необмежено (x_2 та x_4 не стануть від'ємними). Отже, F також може необмежено зростати.

$$\max F = \infty.$$

***Неєдиність оптимального розв'язку
(альтернативний оптимум).***

Приклад 4.8.

$$F = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Розв'язання

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{array} \right.$$

$$F = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

Перший крок. Базисні: x_3, x_4, x_5 . Вільні: x_1, x_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + x_2 \\ x_5 = 8 - x_1 - x_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \infty \\ 2 \\ 8 \end{array}$$

$$F = x_1 - x_2 \quad (\rightarrow \max)$$

$$X^{(1)} = (0, 0, 9, 2, 8); F|_{X^{(1)}} = 0$$

$x_1 \uparrow$ – у базисні; x_4 – у вільні.

Другий крок. Базисні: x_1, x_3, x_5 . Вільні: x_2, x_4 .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_3 = 9 + 2(2 + x_2 - x_4) - 3x_2 \\ x_5 = 8 - (2 + x_2 - x_4) - x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 + x_2 - x_4 \\ x_3 = 13 - x_2 - 2x_4 \\ x_5 = 6 - 2x_2 + x_4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \infty \\ 13 \\ 3 \end{array}$$

$$F = 2 - x_4 \quad (\rightarrow \max).$$

$$X^{\text{опт}} = X^{(2)} = (2, 0, 13, 0, 6); F_{\max} = F|_{X^{(2)}} = 2.$$

Критерій оптимальності в задачі максимізації виконаний. Вільна змінна x_2 у виразі F відсутня (входить з нулевим коефіцієнтом). Тому збільшення x_2 не є вигідним та не є невикладним.

Спробуємо все ж перевести x_2 у базисні, x_5 – у вільні.

Третій крок. Базисні: x_1, x_2, x_3 . Вільні: x_4, x_5 .

$$\begin{cases} x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_1 = 2 + \left(3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5\right) - x_4 \\ x_3 = 13 - \left(3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5\right) - 2x_4 \end{cases}$$

$F = 2 - x_4$ (те ж саме, що і на другому кроці)

Критерій оптимальності виконаний.

$$X^{\text{опт}} = X^{(3)} = (5, 3, 10, 0, 0); F_{\max} = F|_{X^{\text{опт}}} = 2.$$

Отримали два різних оптимальних розв'язки, що доставляють $\max F = 2$.

Висновок: єдиність оптимального розв'язку порушується, якщо на певному кроці виконано критерій оптимальності, а у виразі лінійної функції F відсутня одна з вільних змінних.

Поява виродженого базисного розв'язку

Приклад 4.9.

$$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 6x_1 - 4x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Зведемо систему обмежень - нерівностей до системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \\ 6x_1 - 4x_2 + x_5 = 14 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max.$$

Розв'яжемо отриману задачу симплекс-методом.

Перший крок. Базисні: x_3, x_4, x_5 . Вільні: x_1, x_2 .

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 14 - 6x_1 + 4x_2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 14/6 \end{array} \right.$$

$$F = 2x_1 - x_2.$$

$$X^{(1)} = (0, 0, 2, 6, 14); F|_{X^{(1)}} = 0.$$

$x_1 \uparrow$ – у базисні; x_3 – у вільні.

Оціночні значення в двох перших рівняннях збігаються. У якості розв'язувального можна взяти будь-яке з цих рівнянь, наприклад, перше.

Другий крок. Базисні: x_1, x_4, x_5 . Вільні: x_2, x_3 .

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_2 - x_3 \\ x_4 = 6 - 3(2 + x_2 - x_3) + 2x_2 \\ x_5 = 14 - 6(2 + x_2 - x_3) + 4x_2 \end{cases}$$

$$F = 2(2 + x_2 - x_3) - x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_2 - x_3 \\ x_4 = 0 - x_2 + 3x_3 \\ x_5 = 2 - 2x_2 + 6x_3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \infty \\ 0 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$F = 4 + 2x_2 + 6x_3 (\rightarrow \max).$$

$X^{(2)} = (2, 0, 0, 0, 2)$ – вироджений допустимий базисний розв'язок. Базисна компонента $x_4 = 0$.

$$F|_{X^{(2)}} = 4.$$

$x_2 \uparrow$ – у базисні; x_4 – у вільні.

Третій крок. Базисні: x_1, x_2, x_5 . Вільні: x_3, x_4 .

$$\begin{cases} x_2 = 0 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 = 2 + (0 + 3x_3 - x_4) - x_3 \\ x_5 = 2 - 2(0 + 3x_3 - x_4) - 2x_3 \end{cases}$$

$$F = 4 + (0 + 3x_3 - x_4) - 2x_3.$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 = 2 + 2x_3 - x_4 \\ x_5 = 2 + 2x_4 \end{cases}$$

$$F = 4 - x_3 - \frac{x_4}{3} - \text{критерій оптимальності виконаний.}$$

$X^{(3)} = (2, 0, 0, 0, 2)$ – вироджений допустимий базисний розв'язок. Базисна компонента $x_2 = 0$.

$$F|_{X^{(3)}} = 4.$$

Покомпонентно $X^{(2)}$ і $X^{(3)}$ збігаються (вони формально відрізняються набором базисних змінних).

Третій крок не викликав збільшення F , хоча і привів до нового допустимого базисного розв'язку.

Наявність таких «порожніх» кроків, які не поліпшують значення F , може привести до повернення до раніше знайденого допустимого базисного розв'язку (з тим же набором основних і вільних змінних), тобто так званого «зациклення». В цьому випадку процес є нескінченним.

Зауваження. Задачі із «зацикленням» зустрічаються рідко, оскільки до них призводить не тільки виродженість, але і поєднання виродженості з іншими специфічними умовами.

Існують певні заходи, що дозволяють уникнути «зациклення».

Висновок: якщо на якомусь етапі найбільше можливе значення змінної досягається в декількох рівняннях одночасно, то розв'язувальним є будь-яке з них.

На наступному кроці отримується вироджений допустимий базисний розв'язок.

Перехід до чергового допустимого базисного розв'язку може не змінити цільову функцію F .

Розділ 5. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ

Теорія двоїстості є однією з ключових теорій ЛП.

Кожній задачі ЛП відповідає інша задача, **двоїста** або **спряже-на** по відношенню до початкової.

Теорія двоїстості виявляє тісний зв'язок між обома задачами, які утворюють єдину **двоїсту пару**.

Теоретичне значення теорії двоїстості полягає у побудові чисельних методів ЛП, практичне значення – у якісному дослідженні задач ЛП.

5.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач

Будь-яку господарську діяльність можна розглядати як процес витрати певних ресурсів і випуску деякої продукції. Ресурси, як правило, є обмеженими, і їхня ефективність у різних процесах є різною. Тому виникає необхідність застосування апарату математичного програмування для розв'язання задач оптимального планування і управління виробництвом.

Приклад однієї з таких задач було наведено вище: побудована математична модель задачі про використання ресурсів. Задачу було розв'язано геометричним і симплексним методом.

Задача I (початкова) про використання ресурсів

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при обмеженнях

[illegible]

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Скласти такий план

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

випуску продукції, при якому
прибуток (виручка) від реалізації

Задача II (двоїста) про значення оцінок ресурсів

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

при обмеженнях

[illegible]

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

Знайти такий набір цін (оцінок) ресурсів

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

при якому загальні витрати на

продукції буде максимальним, за умови, що споживання ресурсів за кожним видом продукції не перевищить наявних запасів.

ресурси будуть мінімальними, за умови, що виручка від продажу ресурсів, необхідних для виробництва одиниці кожного виду продукції буде не менше прибутку від реалізації цієї продукції.

Припустимо тепер, що поставлена задача оцінити кожен із ресурсів, що застосовується. Природно, що оцінки будуть відносними, оскільки одні й ті ж ресурси для різних підприємств представляють різну цінність.

Нехай деяка фірма вирішила закупити ресурси $S_1, S_2, \dots, S_m$. Необхідно встановити оптимальні ціни на ці ресурси

$y_1, y_2, \dots, y_m$ (вартість одиниці сировини i – го виду)

Інтереси підприємства-продавця

Підприємство, що продає сировину, зацікавлене в тому, щоб прибуток (виручка) від продажу ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції кожного виду, була **не меншою** прибутку від реалізації одиниці продукції

$$a_{1j} \cdot y_1 + a_{2j} \cdot y_2 + \dots + a_{mj} \cdot y_j \geq c_j - \text{для продукції } j - \text{го виду } (j = \overline{1, n}).$$

Очевидно, що завжди можна підібрати досить великі числа $y_1, y_2, \dots, y_m$ так, щоб система n нерівностей задовольнялася.

Інтереси фірми-покупця

Фірма зацікавлена в тому, щоб витрати на всі ресурси Z були мінімальні

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

(ресурси в кількості $b_1, b_2, \dots, b_m$ за цінами $y_1, y_2, \dots, y_m$).

Таким чином поставлена задача II про визначення оцінок ресурсів.

Зауваження. На відміну від цін на продукцію $c_1, c_2, \dots, c_n$ (відомих або зовнішніх) ціни $y_1, y_2, \dots, y_m$ є **умовними** (обліковими, нея-

вними цінами), оскільки вони визначаються в результаті розв’язання задачі.

Тепер, абстрагуючись від змістовної інтерпретації параметрів, що входять в економічні моделі, розглянемо формально дві задачі ЛП: задачу I і задачу II.

5.2. Симетричні взаємно-двоїсті задачі лінійного програмування

Формальний розгляд задач I і II дозволяє встановити їхні наступні властивості:

1. В одній задачі шукають *максимум* лінійної функції, в іншій – *мінімум*.
2. Коефіцієнти при змінних у лінійній функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень іншої задачі.
3. Систему обмежень кожної задачі задано у вигляді нерівностей. У задачі максимізації все нерівності виду $\leq$. У задачі мінімізації все нерівності виду $\geq$.
4. Матриці коефіцієнтів при змінних в системах обмежень обох задач є транспонованим одна до іншої:

Задача I	Задача II
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

5. Кількість нерівностей в системі обмежень однієї задачі збігається з кількістю змінних в іншій задачі.
6. Умови невід’ємності змінних є в обох задачах.

Означення. Дві задачі ЛП, що мають властивості 1-6, називаються **симетричними** взаємно-двоїстими задачами.

Ми будемо розглядати тільки **симетричні** двоїсті задачі і коротко їх називати **двоїстими задачами**.

Початкову задачу будемо називати **вихідною (або прямою)**.

Пряма і двоїста задача разом утворюють пару **взаємно-двоїстих задач**.

Будь-яку з них можна розглядати як вихідну. Тоді інша виявиться двоїстою до неї.

Виходячи з означення, можна запропонувати наступний

Алгоритм складання двоїстої задачі

1. Привести все нерівності системи обмежень вихідної задачі до одного змісту:

- якщо у вихідній задачі шукається *max* цільової функції, то нерівності $\leq$;
- якщо у вихідній задачі шукається *min* цільової функції, то нерівності $\geq$.

2. Скласти розширену матрицю системи A_1 , в яку включити матрицю A коефіцієнтів при змінних, стовбець вільних членів системи обмежень і рядок коефіцієнтів при змінних у лінійній функції

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_n & F \end{array} \right)$$

3. Знайти матрицю A'_1 , транспоновану до матриці A_1 .

4. Сформулювати двоїсту задачу на основі отриманої матриці A'_1 і умови невід'ємності змінних.

Приклад 5.1. Скласти задачу, двоїсту до наступної вихідної задачі $F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

1. Оскільки вихідна задача являє собою задачу максимізації, приведемо все нерівності системи обмежень до виду $\leq$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Складемо розширену матрицю системи

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ \hline -1 & 2 & F \end{array} \right)$$

3. Транспонуємо матрицю A_1

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ \hline -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{array} \right)$$

4. Сформулюємо двоїсту задачу

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

5.3. Перша теорема двоїстості та її економічний зміст

Теореми двоїстості встановлюють зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач.

Перша (основна) теорема

1. Якщо одна з взаємно-двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша задача, причому оптимальні значення їхніх лінійних функцій є рівними

$$\text{або} \quad \boxed{\begin{array}{l} F_{\max} = Z_{\min} \\ F_{\min} = Z_{\max} \end{array}}$$

2. Якщо лінійна функція однієї з двоїстих задач є необмеженою, то умови іншої задачі є суперечливими.

Зауваження. Твердження, зворотне, по відношенню до другої частини теореми, в загальному випадку, невірне. Тобто з умови суперечливості системи обмежень вихідної задачі ще **не випливає**, що лінійна функція двоїстої задачі є необмеженою.

Приклад 5.2. Дано дві взаємно-двоїсті задачі

Пряма

$$F = 5x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Система обмежень
є суперечливою

Двоїста

$$Z = 2y_1 - 4y_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 3y_2 \geq 5 \\ -3y_1 + 3y_2 \geq -1 \end{cases}$$

Система обмежень є
також суперечливою.

Економічний зміст першої теореми двоїстості

Дамо економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості в термінах оцінок ресурсів.

Якщо задача визначення оптимального плану $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що максимізує прибуток від реалізації продукції, є розв'язуваною, то

розв'язуваною є також і задача знаходження мінімальних оцінок ресурсів $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, причому прибуток, отриманий від реалізації оптимального плану збігається із сумарною оцінкою ресурсів.

Іншими словами: підприємству байдуже, чи продавати продукцію за оптимальним планом X і отримати максимальну виручку $F_{\max}$ або продавати ресурси за оптимальними цінами Y і відшкодувати від продажу мінімальні витрати на ресурси $Z_{\min}$, що дорівнюють прибуткові $F_{\max}$.

Зауваження. Виявляється, що зв'язок між парою двоїстих задач глибше, ніж стверджує теорема 1. Якщо розв'язати одну із взаємно-двоїстих задач, то можна відразу записати оптимальний розв'язок іншої задачі.

5.4. Друга теорема двоїстості

Нехай дано дві взаємно-двоїсті задачі в загальному вигляді. Якщо кожену з них розв'язувати симплексним методом, то їх необхідно привести до основної задачі ЛП.

$$\text{Задача I} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$\text{Задача II} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{21} \cdot y_2 + \dots + a_{m1} \cdot y_m - y_{m+1} = c_1 \\ a_{12} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{m2} \cdot y_m - y_{m+2} = c_2 \\ \dots \\ a_{1n} \cdot y_1 + a_{2n} \cdot y_2 + \dots + a_{mn} \cdot y_m - y_{m+n} = c_n \end{cases}$$

Встановимо зв'язок між початковими змінними однієї з двоїстих задач і додатковими змінними іншої задачі.

Змінні вихідної задачі I											
Початкові						Додаткові					
x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+j}	...	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+j}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
Додаткові						Початкові					
Змінні двоїстої задачі II											

Друга теорема. Компоненти оптимального розв'язку однієї із задач (прямої або двоїстої) дорівнюють абсолютним величинам коефіцієнтів при **відповідних** змінних у виразі цільової функції іншої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею оптимуму і за умови, що отриманий оптимальний розв'язок не є виродженим.

Пояснення. Нехай деяку вихідну задачу ЛП розв'язано симплекс-методом. На останньому кроці цільова функція F має вигляд

$$F = 13 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_6.$$

Нехай встановлено відповідність між змінними вихідної задачі і двоїстої задачі

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{початкові} & \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \right) & \text{додаткові} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
 \text{додаткові} & \left(\begin{array}{cc} y_5 & y_6 \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right) & \text{початкові}
 \end{array}$$

Запишемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі відповідно до другої теореми.

1. Виразимо F через **усі** змінні вихідної задачі

$$F = 13 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - \frac{7}{3}x_6.$$

$$2. y_1 \rightarrow x_3 \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{коефіцієнт при } x_3 \\ \text{за модулем} \end{array} \right) = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

$$y_2 \rightarrow x_4 \rightarrow 0$$

$$y_3 \rightarrow x_5 \rightarrow 0$$

$$y_4 \rightarrow x_6 \rightarrow \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{7}{3}$$

$$y_5 \rightarrow x_1 \rightarrow 0$$

$$y_6 \rightarrow x_2 \rightarrow 0$$

$$Y^{\text{опт}} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{7}{3}, 0, 0 \right).$$

5.5. Двоїстий симплекс-метод

Двоїстим симплекс-методом називається такий метод розв'язання задачі ЛП, при якому симплекс-методом розв'язується задача, двоїста до вихідної, а потім оптимум і оптимальний розв'язок вихідної задачі знаходяться за допомогою першої та другої теорем двоїстості.

Двоїстим симплекс-методом зручно користуватися в тих випадках, коли розв'язання вихідної задачі пов'язане з певними труднощами (наприклад, існує проблема відшукування допустимого базисного розв'язку).

Приклад 5.3. Розв'язати задачу ЛП

$$F = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'язання даної задачі симплекс-методом передбачає використання методу штучного базису (немає виділених базисних змінних).

Застосуємо для розв'язання задачі двоїстий симплекс-метод.

1. Побудуємо двоїсту задачу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & F \end{array} \right); \quad A'_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 4 & Z \end{array} \right)$$

$$Z = 6y_1 + 4y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 \leq 4 \\ y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ -4y_1 \leq 1 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 2}). \end{cases}$$

2. Зведемо сформульовану загальну задачу ЛП до основної і розв'яжемо її симплекс-методом

$$Z_1 = -Z = -6y_1 - 4y_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_4 = 4 \\ y_1 + 2y_2 + y_5 = 5 \\ -4y_1 + y_6 = 1 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 6}). \end{cases}$$

Отримали задачу з виділеними базисними змінними.

Перший крок. Базисні: y_3, y_4, y_5, y_6 . Вільні: y_1, y_2 .

$$\begin{array}{l} y_1 \uparrow \\ \left\{ \begin{array}{l} y_3 = 2 - 2y_1 - 3y_2 \\ y_4 = 4 - y_1 + y_2 \\ y_5 = 5 - y_1 - 2y_2 \\ y_6 = 1 + 4y_1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 5 \\ \infty \end{array} \right. \end{array}$$

$$Z = -6y_1 - 4y_2$$

$$X^{(1)} = (0, 0, 2, 4, 5, 1); Z|_{X^{(1)}} = 0.$$

$y_1 \uparrow$ – у базисні; y_3 – у вільні.

Другий крок. Базисні: y_1, y_4, y_5, y_6 . Вільні: y_2, y_3 .

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2} \\ y_4 = 4 - \left(1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2}\right) + y_2 \\ y_5 = 5 - \left(1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2}\right) - 2y_2 \\ y_6 = 1 + 4\left(1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2}\right) \end{cases}$$

$$Z = -6\left(1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2}\right) - 4y_2.$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{y_3}{2} \\ y_4 = 3 + \frac{5}{2}y_2 - \frac{y_3}{2} \\ y_5 = 4 - \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2} \\ y_6 = 5 - 6y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

$$Z = -6 + 5y_2 + 3y_3.$$

Критерій оптимальності в задачі мінімізації виконаний.

$$Y^{(2)} = (1, 0, 0, 3, 4, 5); Y^{\text{опт}} = (1, 0, 0, 3, 4, 5),$$

$$Z_1|_{Y^{(2)}} = -6;$$

$$Z_{1 \min} = Z_1|_{Y^{\text{опт}}} = -6$$

$$Z_{\max} = -Z_{1 \min} = 6$$

$Z = -Z_1 = 6 - 5y_2 - 3y_3$ – отримано на останньому кроці.

Відповідь: $Y^{\text{опт}} = (1, 0, 0, 3, 4, 5)$, $Z_{\max} = 6$.

3. Відновимо розв’язок вихідної задачі.

За першою теоремою двоїстості

$$F_{\min} = Z_{\max} = 6.$$

Запишемо відповідність між змінними вихідної і двоїстої задач.

початкові	$\overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}$	$\overbrace{x_5 \quad x_6}$	додаткові
	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$	$\updownarrow \quad \updownarrow$	
додаткові	$\underbrace{y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6}$	$\underbrace{y_1 \quad y_2}$	початкові

Виразимо лінійну функцію Z , отриману на останньому кроці розв’язання двоїстої задачі через всі змінні y_i

$$Z = 6 + 0 \cdot y_1 - 5 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6$$

Побудуємо $X^{\text{опт}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

$$\begin{array}{l} x_1 \rightarrow y_3 \rightarrow |-3| = 3 \\ x_2 \rightarrow y_4 \rightarrow |0| = 0 \\ x_3 \rightarrow y_5 \rightarrow |0| = 0 \\ x_4 \rightarrow y_6 \rightarrow |0| = 0 \\ x_5 \rightarrow y_1 \rightarrow |0| = 0 \\ x_6 \rightarrow y_2 \rightarrow |-5| = 5 \end{array} \quad \parallel$$

$$\begin{array}{l} X^{\text{опт}} = (3, 0, 0, 0, 0, 5) \\ F_{\min} = 6 \end{array}$$

Приклад 5.4. Розглянемо тепер конкретну постановку задачі про використання ресурсів (вихідна задача), розв’яжемо її симплекс-методом, а потім запишемо оптимальний розв’язок двоїстої задачі.

Вихідна задача

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цю задачу було
розв'язано симплекс-
методом (п. 4.2)

$$F_{\max} = 24 \quad X^{\text{опт}} = (6, 4, 0, 0, 1, 3).$$

1. Побудуємо задачу, двоїсту даної

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 21 \\ \hline 2 & 3 & F \end{array} \right)$$

$$A'_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 18 & 16 & 5 & 21 & Z \end{array} \right).$$

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 4}). \end{cases}.$$

2. За першою теоремою двоїстості

$$Z_{\min} = F_{\max} = 24.$$

3. Відновимо оптимальний розв'язок двоїстої задачі

початкові	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	додаткові
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
додаткові	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	початкові

$$F = 24 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$y_1 \rightarrow x_3 \rightarrow \left -\frac{4}{5} \right = \frac{4}{5}$	$Y^{\text{опт}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0, 0 \right)$
$y_2 \rightarrow x_4 \rightarrow \left -\frac{3}{5} \right = \frac{3}{5}$	
$y_3 \rightarrow x_5 \rightarrow 0 = 0$	
$y_4 \rightarrow x_6 \rightarrow 0 = 0$	
$y_5 \rightarrow x_1 \rightarrow 0 = 0$	
$y_6 \rightarrow x_2 \rightarrow 0 = 0$	

Висновок. Спільний розгляд пари двоїстих задач і застосування теорем двоїстості дозволило синтезувати **двоїстий симплекс-метод** розв'язання задач ЛП.

Крім цього, теорія двоїстості виявляється корисною при проведенні якісних досліджень задач ЛП.

5.6. Об'єктивно обумовлені оцінки та їхній економічний зміст

Означення. *Об'єктивно обумовленими оцінками* називаються компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі.
(Термін ввів академік Л.В. Канторович).

Для з'ясування змісту цих оцінок повернемося до попереднього прикладу 5.4. задачі I про використання ресурсів і задачі II, двоїстої до неї.

Компоненти оптимального розв'язку вихідної задачі I					
Число одиниць продукції		Залишки ресурсів, одиниць			
p_1	p_2	S_1	S_2	S_3	S_4
$x_1 = 6$	$x_2 = 4$	$x_3 = 0$	$x_4 = 0$	$x_5 = 1$	$x_6 = 3$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_5 = 0$	$y_6 = 0$	$y_1 = \frac{4}{5}$	$y_2 = \frac{3}{5}$	$y_3 = 0$	$y_4 = 0$
Перевищення витрат на ре- сурси над ціною реалізації		Об'єктивно обумовлені оцінки ресурсів (умовні ціни ресурсів)			
Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі II					

Вихідна задача I. Додаткові змінні x_3, x_4, x_5, x_6 являють собою різниці між запасами b_i ($i = \overline{1,4}$) ресурсів S_1, S_2, S_3, S_4 та їх споживанням, тобто висловлюють **залишки ресурсів**.

Двоїста задача II. Додаткові змінні y_5, y_6 являють собою різниці між витратами на ресурси, що витрачаються на виробництво одиниці продукції p_j ($j = 1, 2$), і цінами продукції C_j , тобто висловлюють **перевищення витрат над ціною**.

1. Об'єктивно обумовлені оцінки ресурсів визначають **ступінь дефіцитності** ресурсів: за оптимальним планом виробництва дефіцитні ресурси (тобто ті, що повністю використовуються) отримують ненульові оцінки, а недефіцитні – нульові.

Дійсно, за оптимальним планом, ресурси S_1 і S_2 повністю використовуються, і оцінки цих ресурсів ненульові

$$x_3 = 0, x_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{3}{5}.$$

Ресурси S_3 і S_4 не повністю використовуються, і оцінки цих ресурсів нульові.

$$x_5 = x_6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y_3 = 0, y_4 = 0.$$

2. В оптимальний план виробництва можуть потрапити тільки **рентабельні** (незбиткові види продукції).

За оптимальним планом у вихідній задачі слід виробляти обидва види продукції

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 4,$$

і перевищення витрат на ресурси над ціною реалізації дорівнює 0

$$y_5 = 0, \quad y_6 = 0.$$

Якщо витрати на ресурси перевищують ціну продукції, що з них виготовляється, то ця продукція не включається в оптимальний план. Наприклад, $y_6 > 0 \Rightarrow y_6$ є базисною змінною $\Rightarrow y_6$ відсутня в виразі лінійної функції Z останнього кроку $\Rightarrow$ коефіцієнт при y_6 дорівнює нулю $\Rightarrow x_2 = 0$, за оптимальним планом продукцію p_2 виготовляти не слід.

Зміст чисельних значень об'єктивно обумовлених оцінок розкриває третя теорема двоїстості.

5.7. Третя теорема двоїстості

Нехай розглядаються вихідна і двоїста їй задача ЛП.

Вихідна задача		Двоїста задача
$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$		$Z = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \rightarrow \min$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$		$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n})$

Будемо вважати, що праві частини b_i системи обмежень вихідної задачі піддаються деяким змінам. Тоді максимальне значення цільової функції F також буде змінюватися. Тісний зв'язок між розв'язками пари двоїстих задач полягає ще і в тому, що характер зміни величини $F_{\max}$ можна визначити за допомогою компонент оптимального розв'язку двоїстої задачі.

Третя теорема. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням частинних похідних лінійної функції

$$F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

за відповідними аргументами

$$\boxed{\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i \quad (i = \overline{1, m})} \quad (5.1)$$

Зміст теореми. Компоненти $y_i \quad (i = \overline{1, m})$ являють собою оцінки впливу вільних членів b_i системи обмежень вихідної задачі на величину $\max F$.

Для досить малих Δb_i (впливає з (5.1))

$$\frac{\Delta F_{\max}}{\Delta b_i} \approx y_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Таким чином, об'єктивно обумовлені оцінки y_i показують, на скільки грошових одиниць зміниться максимальний прибуток від реалізації продукції при зміні запасу відповідного ресурсу на одну одиницю.

Приклад 5.5. У розглянутому прикладі двоїстої задачі отримано такі об'єктивно обумовлені оцінки ресурсів вихідної задачі

$$y_1 = \frac{4}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{5}, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0.$$

При збільшенні (зменшенні) запасу ресурсу S_1 або S_2 на одну одиницю максимальний прибуток збільшиться (зменшиться), відповідно, на $\frac{4}{5}$ і $\frac{3}{5}$ грош. од., а при зміні запасів ресурсів S_3 і S_4 – не зміниться.

Практично цю обставину можна, наприклад, використовувати в такий спосіб. При виникненні питання про недопоставки ресурсів, в першу чергу, вимагати, щоб ресурс S_1 був поставлений в повному обсязі.

РОЗДІЛ 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Постановка транспортної задачі. Математична модель

Транспортна задача є однією з найважливіших спеціальних моделей ЛП.

Класична транспортна задача формулюється наступним чином.

Нехай в пунктах

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

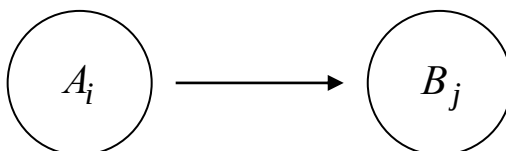
виробляється (або зберігається) деякий однорідний продукт. Обсяг виробництва в п. A_i становить a_i одиниць.

Нехай вказаний продукт споживається в пунктах

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

Об'єм споживання в п. B_j дорівнює b_j одиниць.

Нехай з кожного пункту A_i можливе транспортування продуктів в будь-який пункт B_j



Транспортні витрати, що припадають на одиницю продукту при перевезенні його з A_i в B_j задані і складають c_{ij} грошових одиниць.

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому

- 1. Весь продукт з пункту виробництва буде вивезений.*
- 2. Запити всіх пунктів споживання будуть повністю задоволені.*
- 3. Сумарні транспортні витрати досягнуть мінімуму.*

Умови транспортної задачі зазвичай задають у вигляді таблиці

Пункти споживання Пункти виробництва	B_1	...	B_j	...	B_n	Запаси
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Позначимо x_{ij} – кількість продукту, що перевозиться з пункту A_i в пункт B_j (величина перевезення або величина поставки).

Математична модель задачі

Потрібно знайти набір $X = \{x_{ij}\}$, $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$,

що задовольняє умовам

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (3) \end{array} \right.$$

і такий, що лінійна функція

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

(досягає свого мінімуму).

Зауваження.

1. Система (1) рівнянь балансу по рядках складена відповідно до умови, що з кожного пункту виробництва A_i вивозиться весь продукт (потужність кожного з постачальників реалізована).

2. Система (2) рівнянь балансу по стовпцях складена відповідно до умови, що попит кожного із споживачів задоволений.

3. Лінійна функція F виражає сумарні транспортні витрати. В цей термін не завжди вкладається безпосередній економічний зміст. У різних задачах це може означати собівартість, тариф, відстань, час, тощо.

4. Замість пунктів виробництва і споживання можуть розглядатися станції відправлення і призначення.

5. У термінах транспортної задачі можуть бути сформульовані і досліджені моделі з різних областей застосування ЛП.

Розв'язність транспортної задачі. Закрита модель

Транспортна задача є основною задачею ЛП.

Число рівнянь дорівнює $m + n$

Число змінних дорівнює $m \cdot n$.

Означення. План задачі $X = \{x_{ij}\}$ (тобто набір чисел, що задовольняє умовам (1) – (3)), називається **оптимальним планом** або **розв'язком**, якщо він задовольняє умові (4).

Справедлива

Теорема (необхідні і достатні умови розв'язності транспортної задачі).

Транспортна задача (1)–(4) має **оптимальний план** тоді і тільки тоді, коли виконано умову балансу

$$\boxed{\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j} \quad (6.1)$$

(Сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному обсягу споживання).

Означення. Транспортна модель, в якій виконано умову балансу (6.1) називається **закритою** транспортною моделлю, а транспортна задача – **збалансованою**.

Висновок. Збалансовану транспортну задачу завжди можна розв’язати, тобто вона має оптимальний план.

Для розв’язання збалансованої транспортної задачі як основної задачі ЛП може бути використаний симплекс-метод. Проте через велику розмірність задачі, що містить $m \cdot n$ змінних і, відповідно, великих обсягів обчислень, для її розв’язання розроблено більш ефективний в обчислювальному відношенні – розподільний метод.

Специфіка математичної моделі транспортної задачі

Транспортна задача є **окремим випадком** основної задачі ЛП, в якій

- коефіцієнти при змінних у рівняннях системи обмежень дорівнюють одиниці і нулю;
- кожна змінна входить в систему обмежень два рази: один раз у систему(1), другий раз – у систему(2). Справедлива

Теорема.

Число базисних змінних збалансованої транспортної задачі дорівнює

$$m + n - 1,$$

де m – число постачальників,
 n – число споживачів.

Означення. План транспортної задачі $X = \{x_{ij}\}$ назовемо **розподілом поставок**.

Зазначений план задає заповнення транспортної таблиці.

Надалі будемо ототожнювати значення довільної змінної x_{ij} і вміст відповідної клітини таблиці.

Означення. Клітини транспортної таблиці, що відповідають базисним змінним, називаються **завантаженими**, а вільним змінним – **незавантаженими** (або **вільними**).

На практиці в клітини, що відповідають базисним змінним записують поставки, а клітини, що відповідають вільним змінним, залишають незаповненими.

Відповідний розподіл поставок називається **базисним**.

Розподільний метод розв'язання передбачає перехід від одного базисного розподілу поставок – до іншого в бік незростання цільової функції F аж до оптимального розв'язання.

Для початку такого руху потрібен початковий базисний розподіл поставок, тобто перший **опорний план**.

6.2. Методи знаходження початкового базисного розподілу поставок (першого опорного плану)

Метод «північно-західного кута»

Заповнення транспортної таблиці проводиться без урахування показників витрат і починається з її північно-західного кута – клітинки (1,1)

1.

$$x_{11} = \min(a_1, b_1).$$

Змінній x_{11} приписують **максимальне** значення, що допускається обмеженнями на запаси і потреби.

При цьому можуть представитися три випадки

$$1^\circ \quad \underline{a_1 > b_1}$$

$$2^\circ \quad \underline{a_1 < b_1}$$

$$3^\circ \quad \underline{a_1 = b_1}$$

Розглянемо кожен з них.

$$1^\circ \quad \boxed{a_1 > b_1} \Rightarrow \boxed{x_{11} = b_1}.$$

Потреби B_1 повністю задоволені. Стовбець B_1 виключається з розгляду (викреслюється).

Запаси в пункті A_1 скоротилися до

$$a'_1 = a_1 - b_1.$$

Сумарне число пунктів відправлення і призначення зменшилося на 1.

$$2^{\circ} \quad \boxed{a_1 < b_1} \Rightarrow \boxed{x_{11} = a_1}.$$

Запаси A_1 повністю вичерпані. Строка A_1 виключається з розгляду (викреслюється).

Потреби в пункті B_1 скоротилися до

$$b'_1 = b_1 - a_1.$$

Сумарне число пунктів відправлення і призначення зменшилося на 1.

$$3^{\circ} \quad \boxed{a_1 = b_1} \Rightarrow \boxed{x_{11} = a_1 = b_1}$$

Потреби повністю задоволені запасами a_1 .

Запаси A_1 повністю вичерпані.

Виключається з розгляду або рядок A_1 , або стовбець B_1 (але не те й інше разом).

Якщо виключається стовбець A_1 , то в останньому пункті призначення B_1 потреби приймаються рівними 0.

Якщо виключається рядок B_1 , то в останньому пункті відправлення A_1 запаси приймаються рівними 0.

Висновок. У всіх трьох випадках виключається з розгляду або пункт A_1 , або пункт B_1 . Таким чином, сумарна кількість пунктів відправлення і призначення зменшується на 1.

2. Розглядається перший з решти пунктів відправлення і призначення (в північно-західному куті таблиці). Повторюються операції п. 1.

Процес завершується, коли залишається невикреслених або один рядок, або один стовбець.

Приклад 6.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	0	20	11	15 10
A_2	12	7	9	20	25 20 5
A_3	0	14	16	18	5 0
b_j	5	15 5	15	10 5	45

1. $a_1 > b_1$; $x_{11} = 5$; $a'_1 = 15 - 5 = 10$.
2. $a'_1 < b_2$; $x_{12} = 10$; $b'_2 = 15 - 10 = 5$.
3. $a_2 > b'_2$; $x_{22} = 5$; $a'_2 = 25 - 5 = 20$.
4. $a_2 > b_3$; $x_{23} = 15$; $a''_2 = 20 - 15 = 5$.
5. $a_3 = b'_4 = 5$; $x_{34} = 5$.

Викреслюється або A_3 , або B_4 .

Залишається невикресленим один рядок (стовбець).

Розподіл поставок завершено.

Число заповнених клітин

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Дійсно, на кожному кроці заповнення клітини викреслювався або рядок, або стовбець і залишився 1 рядок (або стовбець). Отже, всього кроків $m + n - 1$.

Виразимо відповідні транспортні витрати

$$F = 10 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 5 + 18 \cdot 5 = 410(\text{ед.})$$

Приклад 6.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	1	0	2	10 5
A_2	3	0	2	3	5 0
A_3	5	3	1	6	15 7 0
b_j	5	10 5	8	7	(30)

1. $x_{11} = 5$; B_1 викреслюється; $a'_1 = 10 - 5 = 5$.

2. $x_{12} = 5$; A_1 викреслюється; $b'_2 = 10 - 5 = 5$.

3. $x_{22} = \min(a_2, b_2) = 5$.

Якщо викреслюється B_2 , то $a''_2 = 5 - 5 = 0$, і на наступному кроці $x_{23} = 0$ (нульова базисна змінна).

Якщо викреслюється A_2 , то $b''_2 = 5 - 5 = 0$, і на наступному кроці $x_{32} = 0$.

В даному прикладі викреслено B_2 .

4 $x_{23} = 0$; A_2 викреслюється.

5 $x_{33} = 8$; B_3 викреслюється; $a'_3 = 15 - 8 = 7$

6 $x_{34} = 7$; B_4 викреслюється.

Залишився один рядок A_3 . Розподіл закінчено.

$$F = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = 20 + 5 + 8 + 42 = 75 \text{ (од.)}$$

Зауваження.

Метод «північно-західного кута» призводить до базисного розподілу поставок. Це впливає з наступної теореми.

Теорема.

Нехай на кожному кроці заповнення таблиці поставок виникає одна заповнена клітина, причому з розгляду на кожному кроці випа-

дає **або один рядок, або один стовпець**. Тоді змінні, відповідні заповненим клітинам, можна прийняти за базисні.

Означення. Розподіл поставок, що містить нульові поставки в заповнених клітинах, називається **виродженням** розподілом.

Він відповідає виродженому базисному розв'язку (частина базисних змінних дорівнює 0).

Зауваження. План, який визначається за допомогою методу «північно-західного кута» залежить лише від **об'ємів** пунктів виробництва і споживання транспортної задачі і ніяк не пов'язаний з матрицею транспортних витрат. Внаслідок цього, зазвичай такий план **значно** відхиляється від оптимального плану.

Оскільки вдала побудова першого опорного плану може значно скоротити число ітерацій алгоритму розв'язання транспортної задачі, то слід модифікувати метод «північно-західного кута», пов'язавши алгоритм розподілу поставок з вартістю перевезень.

Три наступні методи побудови першого опорного плану будуть орієнтовані на вартість перевезень. Кожен з них, відповідно до теореми, призводить до **базисного** розподілу поставок.

Метод мінімального елемента по рядку (найменшої вартості по рядку)

На кожному кроці вибирають клітину, що відповідає найменшій вартості перевезень по рядку.

1. У першому рядку матриці (c_{ij}) транспортних витрат знаходиться мінімальний елемент c_{1l} .

Розглядається відповідна клітина (будь-яка з клітин, якщо їх декілька).

2. Обрана клітина завантажується максимально можливим чином

$$x_{1l} = \min(a_1, b_l).$$

При цьому можуть представитися три випадки.

1° $a_1 > b_l$.

2° $a_1 < b_l$.

3° $a_1 = b_l$.

Розглянемо кожен з них.

$$1^{\circ} \quad \boxed{a_1 > b_l} \Rightarrow \boxed{x_{1l} = b_l}.$$

Потреби B_l повністю задоволено. Стовпець B_l виключається з розгляду. Запаси A_1 скоротилися до

$$a'_1 = a_1 - b_l.$$

Проводиться перехід до наступної за мінімумом $\{c_{1j}\}$ клітині першого рядка.

$$2^{\circ} \quad \boxed{a_1 < b_l} \Rightarrow \boxed{x_{1l} = a_1}.$$

Запаси A_1 повністю вичерпані. Рядок A_1 більше не розглядається. Потреби B_l скоротилися до

$$b'_l = b_l - a_1.$$

Проводиться перехід до наступного рядка, який розглядається як перший.

$$3^{\circ} \quad \boxed{a_1 = b_l} \Rightarrow \boxed{x_{1l} = a_1 = b_l}$$

Запаси A_1 повністю вичерпані. Потреби B_l повністю задоволені. Стовпець B_l виключається з розгляду. Запаси A_1 скоротилися до

$$a'_1 = a_1 - a_1 = 0.$$

Здійснюється перехід до наступної за мінімумом $\{c_{1j}\}$ клітині першого рядка. Вона завантажується фіктивним вантажем, що дорівнює 0. Далі здійснюється перехід до наступного рядка, який розглядається як перший.

Зауваження. Фіктивне нульове завантаження не ставиться в останньому рядку.

Приклад 6.3

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 0	0 15	20	11	15 0
A_2	12 5	7	9 15	20 5	25 10 5
A_3	0	14	16	18 5	5 0
b_j	5	15	15	10 5	45

1. $c_{11} = c_{12} = 0$

$$x_{12} = \min(a_1, b_2) = \min(15, 15) = 15.$$

B_2 викреслюється; $a'_1 = 15 - 15 = 0$.

Вибираємо наступну за мінімумом вартості клітину: $c_{11} = 10$. Завантажуємо її фіктивним 0 вантажем. Переходимо до другого рядку.

2. $c_{21} = c_{23} = 9$

$$x_{23} = \min(a_2, b_3) = \min(25, 15) = 15.$$

B_3 викреслюється; $a'_2 = 25 - 15 = 10$.

Переходимо до наступної за мінімумом вартості клітини другого рядка: $c_{21} = 12$.

$$x_{21} = \min(a'_2, b_1) = \min(10, 5) = 5$$

B_1 викреслюється; $a''_2 = 10 - 5 = 5$

Переходимо до наступної за мінімумом вартості клітини другого рядка: $c_{24} = 20$.

$$x_{24} = \min(5, 10) = 5.$$

A_2 більше не розглядається; $b'_4 = 10 - 5 = 5$.

Переходимо до третьому рядку.

3. $c_{31} = c_{34} = 18$; $x_{34} = \min(a_3, b'_4) = a_3 = b'_4 = 5$.

B_4 викреслюється; $a'_3 = 5 - 5 = 0$.

Нульове завантаження в останньому рядку не ставиться. Розподіл закінчено.

Виразимо відповідні транспортні витрати

$$F = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 12 \cdot 5 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 5 + 18 \cdot 5 = \\ = 0 + 0 + 60 + 135 + 100 + 90 = 385 \text{ (од.)}$$

**Метод мінімального елемента по стовпцю
(найменшої вартості по стовпцю)**

Побудова першого опорного плану проводиться методом, описаним вище з тією лише різницею, що рядки замінюються стовпцями.

Приклад 6.4.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 0	0 15	20	11	15
A_2	12	7 0	9 15	20 10	25 10
A_3	0 5	14	16	18	5
b_j	5 0	15 0	15	10 0	45

1. $c_{11} = c_{31} = 0$.

$$x_{31} = \min(a_3, b_1) = \min(5, 5) = 5.$$

A_3 викреслюється. Наступна за мінімумом вартості $\{c_{j1}\}$ клітина першого стовпця завантажується фіктивним нульовим вантажем:

$$x_{11} = 0.$$

Переходимо до другого стовпця.

$$2. \quad c_{12} = c_{12} = 0.$$

$$x_{12} = \min(a_1, b_2) = \min(15, 15) = 15.$$

B_2 викреслюється. Наступна за мінімумом вартості клітина другого стовпця завантажується фіктивним нульовим вантажем

$$x_{22} = 0.$$

Переходимо до третього стовпця.

$$3. \quad c_{13} = c_{23} = 9. \quad x_{23} = \min(a_2, b_3) = \min(25, 15) = 15.$$

B_3 більше не розглядається. Потреби A_2 скоротилися до $a'_2 = 25 - 15 = 10$.

Переходимо до четвертого стовпця.

$$4. \quad x_{24} = \min(a'_2, b_4) = a'_2 = b_4 = 10.$$

A_2 викреслюється. Потреби b_4 скоротилися до $b'_4 = 10 - 10 = 0$.

Розподіл закінчено.

Загальна вартість перевезень

$$\begin{aligned} F &= 10 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 7 \cdot 0 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 0 \cdot 5 = \\ &= 0 + 0 + 0 + 135 + 20 + 0 = 335 \text{ (од.)} \end{aligned}$$

Метод подвійної переваги

1. У кожному рядку відзначити знаком V клітину з найменшою вартістю.

2. Аналогічну операцію проробити в кожному стовпці.

3. В результаті деякі клітини мають позначку VV. У них знаходиться мінімальна вартість як по рядку, так і по стовпцю.

У ці клітини помістити максимально можливі поставки, кожен раз виключаючи з розгляду відповідні рядки і стовбці (або рядок, або стовпець).

4. Розподілити поставки в клітини, відмічені знаком V.

5. У частині транспортної таблиці, яка осталася, розподілити поставки методом мінімального елемента по рядку або стовпцю.

Приклад 6.5.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	0 VV	20	11 V	15 0
A_2	12	7 V	9 V	20	25 10
A_3	0 VV	14	16	18	5 0
b_j	5	15	15	10 0	

Розподіл поставок у клітині VV.

1. $x_{12} = \min(15, 15) = 15$.

B_2 викреслюється. Потреби A_1 скоротилися до $a'_1 = 15 - 15 = 0$.

2. $x_{31} = \min(5, 5) = 5$.

B_3 викреслюється. Потреби A_3 скоротилися до $a'_3 = 5 - 5 = 0$.

Розподіл поставок у клітині V.

1. $x_{14} = \min(10, 0) = 0$.

Рядок A_1 викреслюється. Потреби $b'_4 = 10 - 0 = 10$.

2. $x_{23} = \min(15, 25) = 15$. B_3 викреслюється. Потреби A_2 скоротилися до $a'_2 = 25 - 15 = 10$.

Розподіл поставок у клітині без відміток (мінімум по стовпцю).

1. $x_{24} = \min(10, 10) = 10$. A_2 викреслюється. Потреби A_1 скоротилися до $b'_4 = 10 - 10 = 0$.

2. $x_{34} = 0$.

Розподіл закінчено.

$$F = 0 \cdot 15 + 11 \cdot 0 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 18 \cdot 0 = 335 \text{ (од.)}$$

6.3. Розподільний метод розв'язання транспортної задачі

Цикл перерахунку

Розглянемо транспортну таблицю, що відповідає базисному розподілу поставок, побудованому, наприклад, методом мінімального елемента по рядку

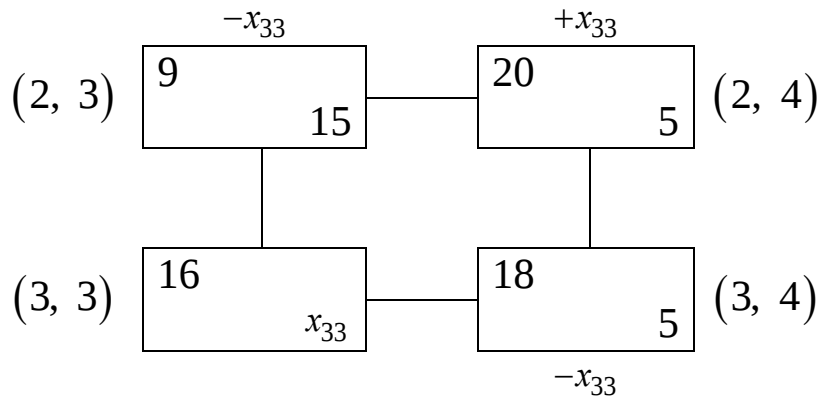
$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 0	0 15	20	11	15
A_2	12 5	7	9 $-x_{33}$ 15	20 x_{33} 5	25
A_3	0	14	16 x_{33} 18 $-x_{33}$	5	5
b_j	5	15	15	10	45

У таблиці, поряд з шістьма завантаженими клітинами, є шість вільних.

Залишаючи поки що осторонь питання, про вигідність або не вигідність, дамо поставку в одну з вільних клітин, наприклад, (3, 3). Очевидно, що розміщення такої поставки порушить баланс в третьому рядку і третьому стовпці.

Порушений баланс можна відновити, якщо поставки в клітинах, наприклад (3, 4) і (2, 3) зменшити на величину даної поставки. При цьому порушиться баланс у другому рядку і четвертому стовпці, який можна відновити, якщо додати цю поставку до поставки клітини (2, 4).

Висновок. Передача поставки в одну з вільних клітин веде до змін поставок в деяких заповнених клітинах. **Кажуть, що відбувається перерозподіл поставок в циклі.**



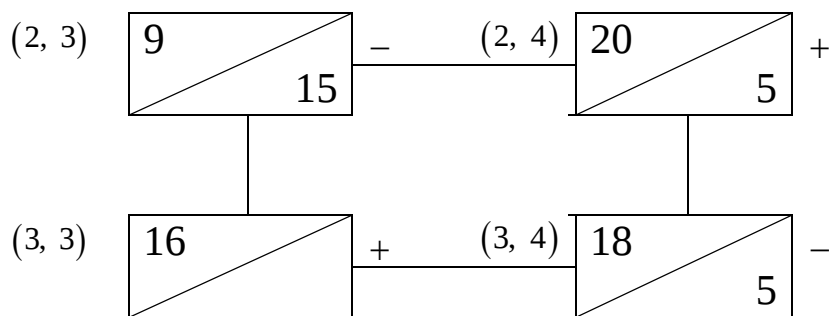
Означення. Циклом в транспортній таблиці будемо називати замкнуту ламану лінію, що складається з вертикальних і горизонтальних відрізків з вершинами в клітинах таблиці.

Означення. Циклом перерахунку назвемо такий цикл в таблиці з базисним розподілом поставок, при якому одна з його вершин лежить у вільній клітині, а інші – в завантажених клітинах.

Означення. Цикл перерахунку називається **означеним**, якщо в його вершинах розставлені знаки «+» і «-» так, що у вільній клітині стоїть знак «+», а сусідні вершини мають протилежні знаки.

Теорема. Для кожної вільної клітини базисного розподілу поставок існує, і до того ж **єдиний** зазначений цикл перерахунку.

Зобразимо цей самий цикл перерахунку для клітини (3, 3) в розглянутому розподілі поставок



При перерозподілі поставки вона додається до всіх поставок клітин зі знаком «+» і віднімається з усіх поставок клітин зі знаком «-».

Оскільки кількість базисних змінних (тобто кількість завантажених клітин) має зберігатися, то передача поставки в вільну клітину має супроводжуватися **звільненням** однієї з клітин циклу.

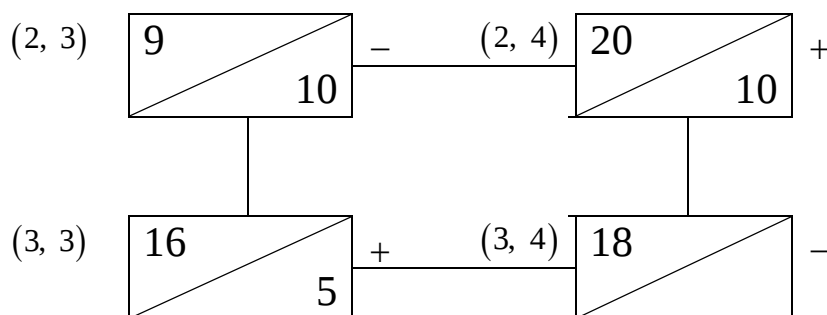
Оскільки всі поставки в таблиці мають бути невід’ємними, то, очевидно, що повинна звільнитися клітина «-», що містить **найменшу** поставку.

Означення. Операція віднімання найменшої поставки серед клітин циклу зі знаком «-» з усіх цих клітин і додавання її до всіх клітин циклу зі знаком «+» називається **перенесенням по циклу**.
Справедливо

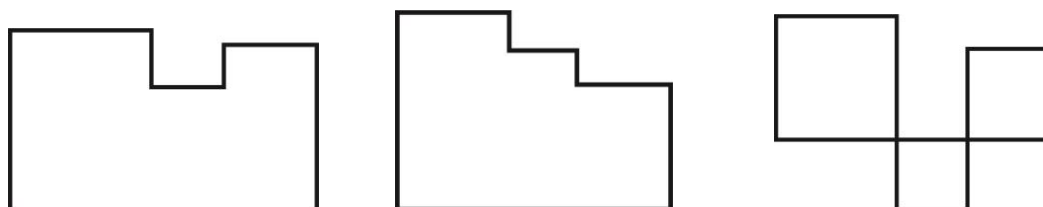
Твердження: операція перенесення по циклу призводить до базисного перерозподілу поставок.

Приклад 6.6.

Зробимо операцію переносу по циклу в циклі, побудованому для клітини (3, 3). Мінімальна поставка клітин зі знаком «-» дорівнює 5 од. Якщо цю поставку передати клітині (3, 3), то стане вільною клітина (3, 4):



Зауваження. Цикли перерахунку в різних транспортних таблицях можуть мати найрізноманітнішу конфігурацію, наприклад



Оцінка циклу

Означення. Оцінкою означеного циклу перерахунку називається алгебраїчна сума показників витрат, що стоять в вершинах циклу, узятих з відповідними знаками.

Позначення α_{ij} , де (i, j) – вільна клітина. Наприклад

$$\alpha_{33} = 16 - 9 + 20 - 18 = (16 + 20) - (9 + 18) = 9.$$

Оцінки циклу можна обчислити для циклів, побудованих для всіх вільних клітин. Справедливо наступне

Твердження. Коефіцієнти у виразі цільової функції F (сумарних транспортних витрат) через вільні змінні дорівнюють оцінкам циклів відповідних вільних клітин, тобто

$$F = F_0 + \alpha_{ij}x_{ij} + \dots \quad (6.2)$$

На основі цього твердження можна сформулювати

Критерій оптимальності базисного розподілу поставок

*Базисний розподіл поставок є оптимальним тоді і тільки тоді, коли оцінки циклів α_{ij} усіх **вільних** клітин (i, j) є невід'ємними*

$$\alpha_{ij} \geq 0.$$

У разі, якщо критерій оптимальності для даного базисного розподілу поставок не виконано, клітини (i, j) для яких $\alpha_{ij} < 0$ слід перевести в базисні (завантажені). Передача поставки в таку клітину призводить до **зменшення** вартості витрат F на величину

$$\boxed{|\alpha_{ij}|x_{ij} .}$$

Таким чином, в цьому випадку приріст сумарних витрат на перевезення складе

$$\Delta F = \alpha_{ij}x_{ij} < 0.$$

Сформулюємо тепер

Економічний зміст оцінки циклу вільної клітини (i, j)

Оцінка циклу α_{ij} вільної клітини (i, j) дорівнює приросту ΔF сумарних витрат на перевезення при переведенні в клітину (i, j)

одиначної поставки (тобто при збільшенні змінної x_{ij} від 0 до 1).

При цьому

- якщо $\alpha_{ij} > 0$, то $\Delta F > 0$;
- якщо $\alpha_{ij} < 0$, то $\Delta F < 0$.

Звідси випливають

Основні елементи розподільного методу

Для знаходження оптимального розподілу поставок слід:

1. Побудувати цикли для **всіх** вільних клітин (i, j) даного базисного розподілу поставок.
2. Обчислити оцінки цих циклів α_{ij} .
3. Перевірити виконання критерію оптимальності.
4. Якщо критерій оптимальності не виконано, взяти вільну клітину з найбільшою за модулем від'ємною оцінкою циклу α_{ij} і перерозподілити поставки в циклі цієї клітини.

Зауваження. Істотним недоліком розподільного методу є **громіздкість**, пов'язана з необхідністю **будувати цикли перерахунку для всіх** вільних клітин і обчислювати оцінки цих циклів.

Перейдемо до розгляду **однієї з модифікацій розподільного методу – методу потенціалів.**

6.4. Метод потенціалів знаходження оптимального базисного розподілу поставок

Потенціали рядків і стовпців

Нехай знайдено деякий опорний план транспортної задачі. Зіставимо кожному рядку i та стовпцю j транспортної таблиці деякі числа, відповідно,

$$u_i \ (i = \overline{1, m}) \text{ і } v_j \ (j = \overline{1, n}),$$

які назвемо **потенціалами рядків і стовпців.**

За означенням u_i і v_j такі, що

$$u_i + v_j = c_{ij}, \tag{6.3}$$

де x_{ij} – базисна змінна поточного розв’язання.

Таким чином, маємо $m+n-1$ рівнянь ($m+n-1$ базисних змінних) для визначення $m+n$ потенціалів.

Величини потенціалів можна **однозначно** знайти із системи (6.3), надаючи одному з них довільне значення, а потім розв’язуючи систему з $(m+n-1)$ рівняння з $(m+n-1)$ невідомими. Зазвичай вважають $u_1 = 0$.

Таким чином, потенціали u_i ($i = \overline{1, m}$) і v_j ($j = \overline{1, n}$) визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_i + v_j = c_{ij} \end{cases}, \quad (6.4)$$

де (i, j) – завантажена клітина.

Зауваження. Можна довести що система має і притому єдиний розв’язок.

Приклад 6.7. Визначимо потенціали рядків і стовпців для опорного плану, отриманого методом мінімуму по рядку.

Модифікуємо вигляд транспортної таблиці:

b_j		5	15	15	10
a_i	v_j	10	0	7	18
	u_i				
15	0	10	0	20	11
		0	15		
25	2	12	7	9	20
		5		15	5
5	0	0	14	16	18
					5

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай (i, j) – будь-яка вільна клітина транспортної таблиці з базисним розподілом поставок. Тоді оцінка зазначеного циклу перерахунку вільної клітини (i, j) обчислюється за формулою

$$\alpha_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Зауваження.

Теорема дає можливість обчислювати оцінки циклів перерахунку, не будуючи самих циклів.

Потенціал незавантаженої клітини

Означення. Потенціалом незавантаженої (вільної) клітини (i, j) називається різниця

$$p_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}.$$

Таким чином, $p_{ij} = -\alpha_{ij}$. Сформулюємо тепер

Критерій оптимальності базисного розподілу поставок в термінах потенціалів:

$$p_{ij} \leq 0.$$

Наведемо алгоритм визначення оптимального розподілу поставок методом потенціалів.

Алгоритм методу потенціалів

1. За даним опорним планом знайти потенціали рядків u_i ($i = \overline{1, m}$) і потенціали стовпців v_j ($j = \overline{1, n}$).

2. Знайти потенціали p_{ij} незавантажених клітин. Можливі два випадки:

2.1. Всі $p_{ij} \leq 0$. Отримано оптимальний розподіл поставок.

Завершення обчислень.

2.2. Існує $p_{ij} > 0$. Перейти до п. 3.

3. Вибрати вільну клітину найбільшим додатним потенціалом (будь-яку з клітин, якщо їх декілька). Побудувати для обраної вільної клітини зазначений цикл перерахунку.

4. Провести в побудованому циклі операцію переносу по циклу.

5. Вилучити з множини завантажених клітин ту, поставка в якій стане рівною 0 в результаті операції перенесення по циклу (будь-яку з клітин, якщо їх декілька). Таким чином, отримано новий базисний розподіл поставок. Перейти до п. 1.

6.5. Особливі випадки в розв'язанні транспортної задачі

1. Якщо в **кількох** клітинах зі знаком « $-$ » виявилися найменші поставки, то позбувають **тільки одну** з таких клітин (будь-яку). Решта клітин залишають заповненими нульовими поставками.

2. Якщо найменша поставка в клітинах зі знаком « $-$ » **нульова**, то по циклу переносять цю нульову поставку. В результаті клітина, що мала нульовою поставкою, звільняється, а колишня вільна клітина заповнюється нульовим постачанням. Поставки в інших клітинах циклу не змінюються.

Приклад 6.8. Нехай перший опорний план побудований методом мінімального елемента по рядку.

Перший крок.

Перевірка X_1 на оптимальність

b_j		5	15	15	10
a_i	v_j	10	0	7	18
u_i					
15	0	10	0	20	11
				-13	7
		0	15		
25	2	12	7	9	20
		-5			
				15	5
					10
5	0	0	14	16	18
		10	-14	-9	
		+5			-5
					0

МАЛЬНИМ.

Вибираємо найбільший додатний потенціал

$$p_{31} = 10.$$

мо операцію переносу по циклу.

Отримано новий опорний план X_2 .

$$F_2 = F_1 - p_{31} \cdot x_{31} = 385 - 10 \cdot 5 = 335 \text{ (од.)}$$

Другой krok.

Перевірка X_2 на оптимальність.

15

$$p_{14} = 17 > 0;$$

$$F_3 = F_2 - p_{14} \cdot x_{14} = F_2 - 0 = F_2 = 335 \text{ (од.)}$$

Третій крок.
Перевірка X_3 на оптимальність.

b_j a_i		5	15	15	10
	v_j u_i	-7	0	0	11
15	0	10 -17	0 -	20 -20	11 +
			5 15		0 10
25	9	12 -10	7 2	9	20 -
			+ 10	15	10
5	7	0	14 -7	16 -9	18
		5			0

$$p_{22} = 2 > 0;$$

$$F_3 = F_2 - p_{22} \cdot x_{22} = 335 - 2 \cdot 10 = 315 \text{ (од.)}$$

4 крок.
Перевірка X_4 на оптимальність.

b_j		5		15		15		10	
a_i	v_j	-7		0		2		11	
	u_i								
15	0	10	-17	0		20	-18	11	
				5				10	
25	7	12	-12	7		9		20	-2
				10		15			
5	7	0		14	-7	16	-7	18	
		5						0	

Все $p_{ij} < 0 \Rightarrow X_4$ оптимальний план.

$$F = 315 \text{ од.}$$

Перевірка.

$$0 \cdot 5 + 11 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 0 \cdot 5 + 18 \cdot 0 = \\ = 110 + 70 + 135 = 315 \text{ (од.)}$$

Оптимальний план формулюється так

Перевезти	од. вантажу	з пункту виробництва	в пункт споживання	заплатив
	5	A_1	B_2	$0 \cdot 5 = 0$ гр.од.
	10	A_1	B_4	$11 \cdot 10 = 110$ гр.од.
	10	A_2	B_2	$7 \cdot 10 = 70$ гр.од.
	15	A_2	B_3	$9 \cdot 15 = 135$ гр.од.
	5	A_3	B_1	$0 \cdot 5 = 0$ гр.од.
	0	A_3	B_4	$18 \cdot 0 = 0$ гр.од.

Сумарні транспортні витрати складають **315 од.**

6.6. Незбалансована транспортна задача

Означення. Транспортна модель, в якій не виконана умова балансу, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j,$$

називається **відкритою** транспортної моделлю, а транспортна задача **незбалансованою** (з порушенням балансом між виробництвом і споживанням).

При невиконанні умов балансу можуть представитися наступні два випадки:

$$1. \quad \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \quad ; \quad 2. \quad \sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Розглянемо кожен з них.

1. Сумарні потреби перевищують сумарні запаси

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

або сумарна потужність постачальників
менше сумарного попиту споживачів

У цьому випадку математична модель задачі має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$(6.5) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & \text{– запаси всіх пунктів виробництва повністю} \\ & \text{вивезені } (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad (j = \overline{1, n}) & \text{– кількість вантажу, що ввозиться в кожен} \\ & \text{пункт споживання, не перевищує потреб цього} \\ & \text{пункту у вантажі.} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Щоб замкнути модель, у цьому випадку вводять фіктивного постачальника A_{m+1}^{Φ} із запасом (об'ємом виробництва)

$$a_{m+1}^{\Phi} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Передбачається, що вартість перевезення з фіктивного пункту відправлення A_{m+1}^{Φ} в усі пункти призначення дорівнює 0

$$C_{m+1, j} : A_{m+1}^{\Phi} \rightarrow B_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$C_{m+1, j} = 0,$$

оскільки запасу вантажу a_{m+1}^{Φ} в дійсності не існує і, отже, витрати на перевезення дорівнюють 0.

Далі розглядається наступна задача складання оптимального плану перевезень між пунктами відправлення

$$A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}^{\Phi}$$

і пунктами призначення

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & (j = \overline{1, n}) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i = \overline{1, m+1}) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (6.6)$$

де $x_{m+1, j} = x_{m+1}^\Phi$, $a_{m+1} = a_{m+1}^\Phi$.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \right)}_{a_{m+1}^\Phi} = \sum_{i=1}^m a_i + a_{m+1}^\Phi = \sum_{i=1}^{m+1} a_i,$$

то поставлена задача є **збалансованою** (закрита модель).

Очевидно, що сформульована збалансована задача (6.6) еквівалентна вихідній незбалансованій задачі (6.5).

Задача (6.6) розв'язується методом потенціалів.

Зауваження. При побудові першого опорного плану методом мінімуму по рядку або стовпцю, або подвійної переваги слід найменшу вартість вибирати тільки серед вартостей реальних постачальників, а запаси фіктивного постачальника розподіляти в останню чергу. Це дозволить отримати перший опорний план, більш близький до оптимального.

В отриманому методом потенціалів оптимальному плані розподілу поставок величини поставок

$$x_{m+1, j} = x_{m+1, j}^\Phi$$

з фіктивного пункту виробництва A_{m+1}^Φ тотожні **недопоставкам** вантажу в пункти споживання B_j .

Приклад 6.9. Знайти оптимальний розподіл поставок у наступній задачі

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	3	5	40
A_2	2	2	3	7	60
A_3	4	3	5	3	90
b_j	45	35	55	65	200 190

Розв'язання

1. Перевіримо виконання умови балансу.

Сумарна потужність постачальників $\sum_{i=1}^3 a_i = 190$ (од.).

Сумарний попит споживачів $\sum_{j=1}^4 b_j = 200$ (од.).

Транспортна модель є відкритою: $\sum a_i < \sum b_j$.

Введемо фіктивного постачальника A_4^ϕ із запасами $a_4^\phi = 200 - 190 = 10$ (од.) і нульовими вартостями перевезень з цього пункту в усі пункти призначення.

Отримаємо закриту транспортну модель. Отримаємо перший опорний план методом мінімального елемента по рядку.

2. Побудова першого опорного плану

		B_1		B_2		B_3		B_4		a_i
$X_1:$	A_1	4		1	35	3		5		40 5
	A_2	2	45	2			15	7		60 15
	A_3	4		3		5		3		90 25
	A_4^ϕ	0		0		0	10	0		10^\phi 0
	b_j	45		35		55 50		65		200
						35				10

$$F_1 = 1 \cdot 35 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 65 + 0 \cdot 10 = \\ = 35 + 15 + 90 + 45 + 125 + 195 = 505 \text{ (од.)}$$

3. Метод потенціалів

Перший крок. Перевірка оптимальності X_1 .

b_j a_i		45	35	55	65
	v_j u_i	2	1	3	1
40	0	4 -2	1 35	3 5	5 -4
60	0	2 45	2 -1	3 15	7 -6
90	2	4 0	3 0	5 25	3 65
10^ϕ	-3	0 -1	0 -2	0 10	0 -2

Усі $p_{ij} \leq 0 \Rightarrow$ Отже, критерій оптимальності виконано.

X_1 – оптимальний розподіл поставок. Мінімальні витрати на перевезення

$$F_{\min} = F_1 = 505 \text{ (од.)}$$

Висновок. При оптимальному розподілі поставок споживач B_3 недоотримає 10 од. вантажу.

2. Сумарні запаси перевищують сумарні потреби

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

або сумарна потужність постачальників
більше сумарного попиту споживачів

У цьому випадку математична модель задачі має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}) & \text{– вивозиться не більше того, що виробляється} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) & \text{– потреби кожного пункту споживання} \\ & \text{повністю задоволені.} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Зауваження. В обох випадках 1 і 2 лінійна функція F одна і та ж. Змінюється тільки вид системи обмежень.

Щоб замкнути модель вводять фіктивного споживача B_{n+1}^Φ , попит якого дорівнює

$$b_{n+1}^\Phi = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Передбачається, що вартість перевезення

$$C_{i, n+1} : A_i \rightarrow B_{n+1}^\Phi \quad (i = \overline{1, m})$$

між будь-яким з пунктів виробництва A_i і фіктивним пунктом споживання B_{n+1}^ϕ дорівнює 0

$$C_{i, n+1} = 0,$$

оскільки у фіктивний пункт призначення вантажі фактично відправляти не доведеться.

Далі розглядається збалансована транспортна задача, яку розв'язують методом потенціалів.

Зауваження. При побудові першого опорного плану, аналогічно випадку 1, найменшу вартість слід вибирати тільки серед вартостей реальних споживачів.

В отриманому оптимальному плані розподілу поставок величини поставок

$$x_{i, n+1} = x_{i, n+1}^\phi$$

тотожні залишкам вантажу в пунктах виробництва A_i .

Приклад 6.10. Знайти оптимальний розподіл поставок у наступній задачі

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	4	6	7	150
A_2	4	4	5	2	70
A_3	5	9	3	2	80
b_j	55	45	125	55	280 300

Розв'язання

1. Перевіримо виконання умови балансу.

Сумарна потужність постачальників $\sum_{i=1}^3 a_i = 300$ (од.).

Сумарний попит споживачів $\sum_{j=1}^4 b_j = 280$ (од.).

Транспортна модель відкрита: $\sum a_i > \sum b_j$.

Введемо фіктивного споживача B_5^Φ з потребами $b_5^\Phi = 300 - 280 = 20$ (од.) і з нульовими вартостями перевезень в цей пункт з усіх пунктів споживання.

Отримаємо закриту транспортну модель.

2. Побудова першого опорного плану.

Побудуємо перший опорний план методом подвійної переваги.

X_1 :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5^Φ	a_i
A_1	2 VV 55	4 45	6 45	7 55	0 15	150 95 50 5
A_2	4 55	4 V	5	2 VV 55	0 15	70 15 0
A_3	5	9	3 V 80	2 VV	0	80
b_j	55	45	125	55	20 20^Φ	300
			45		15	

3. Метод потенціалів.

Перший крок. Перевірка оптимальності X_1 .

$a_i \backslash b_j$		55	45	125	55	20^Φ	
	v_j	2	4	6	2	0	
	u_i						
150	0	2	4	6	7	-5	0 +
		55	45	-45			5 20
70	0	4	-2	4	0	5	+1
				15	55	-15	
80	-3	5	-6	9	-8	3	-3
				80			

$$F_1 = 910 \text{ (од.)};$$

$p_{23} = +1 > 0$ – критерій оптимальності не виконано

Отримано другий оптимальний план X_2 .

$$F_2 = 910 - 1 \cdot 15 = 895 \text{ (од.)}.$$

Другий крок. Перевірка оптимальності X_2 .

b_j		55	45	125	55	20 ^Ф
a_i	v_j	2	4	6	3	0
u_i						
150	0	2	4	6	7	0
		55	45	30	-4	20
70	0	4	4	5	2	0
		-3	-1	15	55	-1
80	-3	5	9	3	2	0
		-6	-3	80	-2	-3

Усі $p_{ij} \leq 0$

Критерій оптимальності виконано. X_2 – оптимальний план.

$$F_2 = 895 \text{ (од.)}$$

При отриманому розподілі поставок у постачальника A_1 залишається 20 од. вантажу.

6.7. Незбалансована транспортна задача з додатковими умовами (привілеями). М-метод розв'язання

1. У незбалансованій транспортній задачі за умови

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

може мати місце така ситуація, коли, в силу певних причин, потреби одного або декількох пунктів призначення повинні бути безумовно і

повністю задоволені. Іншими словами, фіктивний пункт виробництва A_{m+1}^Φ не повинен виконати будь-яку частину поставок цим привілейованим пунктам споживання.

Щоб гарантувати розв'язання задачі з виконанням цих додаткових умов, приймають вартість перевезень одиниці вантажу з A_{m+1}^Φ в такі пункти споживання рівний довільній великій величині M , що є більшою будь-якої вартості c_{ij} . Після цього задача розв'язується звичайним способом. Операції з M виконуються так само, як з будь-яким числом.

Приклад 6.11. Знайти оптимальний розподіл поставок у наступній задачі

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	5	10	2	1200
A_2	3	6	3	7	1000
A_3	8	5	4	6	850
b_j	900	800	1200	300	

Потреби пунктів B_2, B_3 повинні бути повністю задоволені.

Розв'язання

1. Перевіримо виконання умови балансу.

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 3050 ; \sum_{j=1}^4 b_j = 3200 .$$

Транспортна модель є відкритою.

Вводимо фіктивний пункт виробництва A_4^Φ із запасами $a_4^\Phi = 3200 - 3050 = 150$ (од.). Вартості перевезень з A_4^Φ в B_2 і B_3 приймаємо рівними M .

2. Побудова першого опорного плану (метод мінімального елемента по рядку)

		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	
A_1	3	900	5	10	2	1200 900	0
A_2	3		6	3	7	1000	
A_3	8		5	4	6	850 650	
A_4^ϕ	0		M	M	0	150 $^\phi$ 0	
b_j		900	800	1200	300	3200	
			150	200			

3. Метод потенціалів.

Перший крок. Перевірка оптимальності X_1 .

b_j		900	800	1200	300
a_i	v_j	3	5	4	2
1200	0	3 - 750	5 150	10 - 6	2
1000	-1	3	-1 6	-2 3	7 - 6
850	0	8	-5 5	4	6 - 4
150 $^\phi$	$M-5$	0	$M-2$ M	M $M-1$	0 $M-1$
		+ 150	- 150		

$$p_{41} = M - 2 > 0; \quad p_{44} = M - 3 > 0$$

Перенос по циклу поставки 150.

Другий крок. Перевірка оптимальності X_2 .

$a_i \backslash b_j$		900	800	1200	300
$u_i \backslash v_j$		3	5	4	2
1200	0	3 750	5 150	10 -6 2 300	
1000	-1	3 -1	6 -2 1000	3 7 -6	
850	0	8 -5 650	5 4 200	6 -4	
150 ^ф	-3	0 150	M 2-M	M 3-M	0

Усі $p_{ij} < 0$.

Критерій оптимальності виконаний.

X_2 – оптимальний розподіл поставок.

$$F_{\min} = F_2 = 3 \cdot 750 + 5 \cdot 150 + 2 \cdot 300 + 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 650 + 4 \cdot 200 + 0 \cdot 150 = 10650 \text{ (од.)}$$

2. У незбалансованій транспортній задачі за умови

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

може мати місце ситуація, при якій **запаси** одного або декількох поставальників повинні бути повністю вивезені.

Іншими словами, ці поставальники не повинні здійснювати поставки у фіктивний пункт споживання B_{n+1}^{ϕ} .

Щоб гарантувати розв'язання задачі з виконанням цих додаткових умов, приймають вартість перевезень одиниці вантажу з привілейованих пунктів виробництва в B_{n+1}^{ϕ} рівний довільній великій величині M .

Далі задача розв'язується аналогічно випадку 1.

ЧАСТИНА II. МЕТОДИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

1.1. Основні параметри систем масового обслуговування і задачі теорії масового обслуговування

*Системи, призначені для обслуговування масового потоку вимог (запитів) на виконання будь-яких послуг, при обмеженнях на ресурси системи називають **системами масового обслуговування (СМО)**. Дослідженням СМО займається **теорія масового обслуговування**. Методами ТМО може бути вирішено багато задач дослідження процесів, що відбуваються в технічних і економічних системах.*

Основними задачами, які розв'язуються в рамках ТМО, є:

- задачі визначення кількісних характеристик СМО при заданій структурі й параметрах системи;
- задачі формування оптимальної структури СМО при заданих характеристиках і обмеженнях на параметри елементів структури.

Методи ТМО дозволяють встановити кількісні співвідношення між характеристиками системи і параметрами її елементів. При дослідженні СМО методами ТМО необхідно враховувати деякі обмеження, що накладаються на параметри досліджуваної системи.

Одним з параметрів СМО є число обслуговуючих одиниць, **каналів обслуговування**. За кількістю каналів СМО поділяються на **одноканальні** й **багатоканальні**. Прикладами систем можуть служити прилади, пристрої, пункти, станції, лінії зв'язку, обчислювальні машини, робочі точки тощо.

До СМО надходить потік вимог (заявок) на обслуговування (телефонні виклики, поломки обладнання, готові до упаковки вироби та ін.). Заявки надходять випадково, утворюючи випадковий потік вимог. Обслуговування заявки триває деякий випадковий час. Випадковий характер потоку заявок і часу обслуговування призводить до того, що СМО завантажується нерівномірно.

Теорія СМО займається побудовою математичних моделей, що пов'язують задані умови роботи з показниками ефективності СМО, здатністю систем справлятися з потоком заявок.

СМО поділяють на два основних класи: **СМО з відмовами** і **СМО з очікуванням** (чергою).

У СМО з відмовами заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову, залишає СМО і в подальшому процесі обслуговування участі не бере.

У СМО з очікуванням заявка, яка прийшла в момент, коли всі канали зайняті, стає в чергу на обслуговування. СМО з очікуванням поділяються на різні види в залежності від того, як організована черга: з обмеженою або необмеженою довжиною черги, з обмеженим часом очікування тощо.

Системи масового обслуговування мають різну структуру. Однак в них зазвичай можна виділити чотири основні ланки:

- вхідний потік вимог;
- накопичувач, вузли обслуговування;
- потік, що виходить.

Обмеженість накопичувача може проявлятися як в просторових, так і в часових характеристиках. Пробувши деякий час в черзі, заявка може покинути її, не дочекавшись початку обслуговування.

1.2. Випадковий процес. Потоки подій. Найпростіший потік подій

Випадковий процес є процесом випадкової зміни станів системи з часом.

Процес з **дискретними станами** визначається тим, що всі можливі стани $S_1, S_2, S_3, \dots$ можна перерахувати. У процесі з **неперервним часом** моменти переходу системи з одного стану в інший є випадковими.

Процес роботи СМО являє собою випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом. Це означає, що стан СМО змінюється стрибком в випадковий момент появи будь-якої події (приходу нової заявки).

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – так званим графом станів. Зазвичай стани системи зображуються кружками (прямокутниками), а можливі переходи зі стану в стан — стрілками чи орієнтованими дугами, що з'єднують стани.

Потоком подій називають послідовність однорідних подій, наступних один за одним у випадкові моменти часу.

Потік характеризується **інтенсивністю** – середнім числом подій, що надходять СМО в одиницю часу.

Потік подій називають **стаціонарним**, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу. Для стаціонарного потоку інтенсивність є сталою величиною.

Потік подій називають **потоком без післядій**, якщо можна вважати, що ймовірність надходження події залежить тільки від часу між подіями і не залежить від часу надходження попередніх подій.

Потік подій називають **ординарним**, коли дві події ніколи не відбуваються в один і той же момент часу або такі події є дуже рідкісними.

Потік називають **найпростішим**, якщо він одночасно є стаціонарним, ординарним і не має наслідків.

Нехай починаючи з деякого моменту $t_0 = 0$ і до моменту t надійшло n заявок або відбулося n подій. Число заявок n , що надійшли, визначається як випадкова подія з ймовірністю $P_n(t)$, яка є функцією часу. Ймовірність $P_n(t)$ надходження числа заявок n за проміжок часу $[0; t]$ визначається за законом Пуассона

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

де e – основа натурального логарифма ($e=2,71828\dots$);

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ – факторіал числа n .

Ймовірність того, що за проміжок $[0; t]$ не відбулося жодної події ($n=0$) дорівнює

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Зобразимо на осі часу Ot найпростіший потік n -подій у довільному інтервалі довжиною Δt (рис. 1.1)

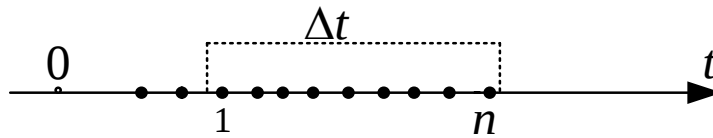


Рис.1.1

Зобразимо на осі часу проміжок T між подіями найпростішого потоку (рис. 1.2).

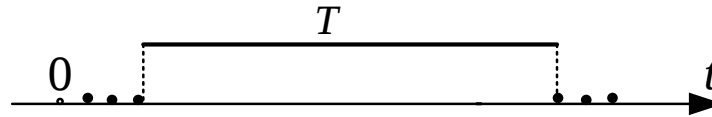


Рис.1.2

Доведено, що T є випадковою величиною, підпорядкованою **показниковому закону розподілу**

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

де λ – інтенсивність потоку (параметр розподілу).

Зауваження. Надалі будемо розраховувати характеристики СМО в припущенні пуассонівських потоків, коли час між сусідніми подіями є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом. Доведено: використовуючи пуассонівський потік обслуговування, отримують граничні характеристики, які гарантують, що в реальних СМО характеристики будуть не гіршими. Наприклад, якщо розраховувати потік обслуговування як пуассонівський, то середня довжина черги на обслуговування буде дещо завищеною, що оберігає від помилки в інший бік. Тому характеристики системи, розраховані в припущенні пуассонівського потоку, мають гарантований «запас міцності».

1.3. Граф події. Рівняння Колмогорова

Процес роботи СМО – це випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом.

Для аналізу систем з найпростішим вхідним потоком і показниковим розподілом часу обслуговування використовують спеціальну

схему – **граф станів системи**. Стани системи $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ позначають колами, а можливі переходи з одного стану в інший – стрілкою, що з'єднує їх.

*Граф з проставленими у стрілок ймовірностями переходу називають **розміченим графом станів**.*

*Щільність ймовірності переходу називають **інтенсивністю**, вона показує середню кількість переходів в одиницю часу.*

Приклад 1.1. Система складається з двох вузлів, кожен з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого миттєво починається ремонт вузла. Побудувати граф станів цієї системи с інтенсивністю λ_{ik} переходу зі стану S_i в стан S_k , ($k=0,1,2,3$).

Здійснемо побудову графу (рис. 1.3).

Тут λ_{i0} – інтенсивність вхідного потоку стану S_i , λ_{0i} – інтенсивність вихідного потоку стану S_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

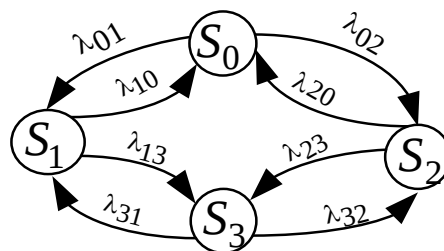


Рис.1.3

Нехай $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ – всі можливі стани СМО, ймовірності яких в момент часу t дорівнюють $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$.

Використовуючи граф станів системи, яка знаходиться в одному із $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ станів, можна скласти n рівнянь за правилом. При складанні i -го рівняння ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) цієї системи потрібно розглянути стан на розміченому графі станів. У лівій частині рівняння повинна знаходитися похідна за часом $\frac{dp_i(t)}{dt}$.

У правій частині рівняння повинна знаходитися сума добутків інтенсивності і ймовірності стану, на який вказує стрілка, зі знаком (+), якщо стрілка спрямована до стану S_i , і зі знаком (-), якщо стрілка спрямована від стану S_i . Доповнюють отриману систему початковими умовами для ймовірнос-

тей станів. Якщо при $t = 0$ система знаходилася в стані S_0 , то треба прийняти при $t = 0$: $p_0(t = 0) = 1, p_1(t = 0) = 0, p_2(t = 0) = 0, \dots$.

*Система рівнянь, доповнена початковими даними, тобто ймовірностями станів в початковий момент часу, називається **системою Колмогорова**. Її розв'язок дає можливість знайти ймовірності всіх станів СМО як функцій часу.*

Приклад 1.2. Записати систему рівнянь Колмогорова для графа станів (рис.1.4)

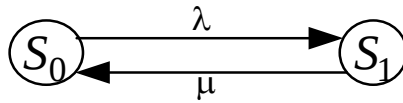


Рис.1.4

з початковими умовами: $p_0(t = 0) = 1, p_1(t = 0) = 0$. Якщо λ - інтенсивність вхідного потоку, що переводить систему зі стану S_0 в стан S_1 , μ - інтенсивність обслуговування, в результаті якого система зі стану S_1 повертається в стан S_0 .

Розв'язання. За розміченим графом станів (рис. 1.4) складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

де $p_0(t)$ - ймовірність стану S_0 - «канал вільний», $p_1(t)$ - ймовірність стану S_1 - «канал зайнятий».

Систему лінійних диференціальних рівнянь (1.1) доповнюємо нормувальною умовою

$$p_0(t) + p_1(t) = 1, \quad (1.2)$$

з якої випливає

$$p_1(t) = 1 - p_0(t).$$

З урахуванням нормувальної умови (1.2) систему рівнянь зводимо до одного диференціального рівняння

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu. \quad (1.3)$$

Розв'язок рівняння (1.3) має вигляд

$$p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad (1.4)$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}).$$

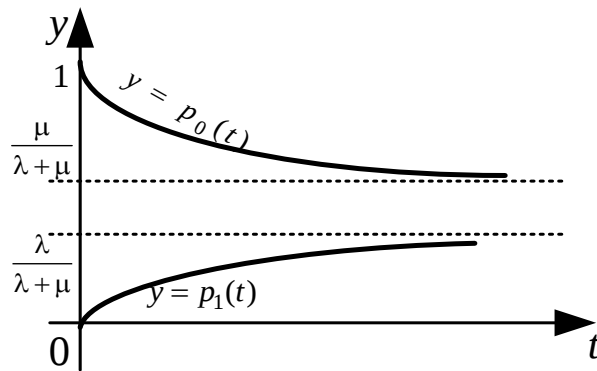


Рис. 1.5

При $t \rightarrow \infty$ система входить у сталий (стаціонарний) режим, ймовірності станів якого дорівнює

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

$$p_1 = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Отримані ймовірності стаціонарного режиму називають **граничними ймовірностями станів системи**. Величина граничної ймовірності стану визначає ймовірність середньої тривалості часу знаходження СМО в цьому стані.

1.4. Граничні ймовірності станів СМО

Записавши і проінтегрувавши систему рівнянь Колмогорова, отримуємо ймовірності станів як функції часу

$$p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t); \quad \forall t, \quad \sum_{i=0}^n p_i(t) = 1.$$

Границі $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$ (якщо вони існують) називають **граничними ймовірностями станів**.

Існування граничних ймовірностей, означає, що з плином часу ($t \rightarrow \infty$) в системі випадковим чином настає стаціонарний режим, коли ймовірності кожного стану не залежать від часу.

Гранична ймовірність p_i - це середній відносний час перебування системи в стані S_i . Якщо $p_i = 0,2$, то 20% часу система перебувала в стані S_i .

Гранична ймовірність не залежить від часу, тому $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0$ ($i = 0, \dots, n$), тобто ліві частини рівнянь Колмогорова треба покласти рівними нулю. В такому випадку диференціальні рівняння Колмогорова перетворюються в алгебраїчні, система диференціальних рівнянь Колмогорова стає системою алгебраїчних рівнянь щодо граничних ймовірностей p_i .

Приклад 1.3. Знайти граничні ймовірності для системи, представленої розміченим графом, якщо інтенсивність переходу зі стану S_0 в стан S_1 дорівнює λ_{01} , а інтенсивність переходу зі стану S_1 в стан S_0 дорівнює λ_{10} .

Розв'язання. За розміченим графом станів (рис. 1.6) складаємо систему рівнянь Колмогорова для ймовірностей граничних станів $p_0(t) = p_0$, $p_1(t) = p_1$; $\frac{dp_0(t)}{dt} = 0, \frac{dp_1(t)}{dt} = 0$.

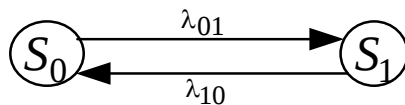


Рис. 1.6

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{10}p_1(t) \\ 0 = -\lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{01}p_0(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

Систему алгебраїчних рівнянь доповнюємо нормувальною умовою (1.2)

$$p_0 + p_1 = 1,$$

з якої випливає

$$p_1 = 1 - p_0.$$

С урахуванням нормувальної умови зводимо систему рівнянь до одного рівняння, з якого випливає значення p_0

$$(\lambda_{01} + \lambda_{10})p_0 = \lambda_{10} \Rightarrow p_0 = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}.$$

З умови $p_1 = 1 - p_0$ знаходимо

$$p_1 = 1 - p_0 \Rightarrow p_1 = 1 - \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{10}}.$$

Отримані ймовірності узгоджуються зі знайденими раніше в прикладі 1.2.

Приклад 1.4. Знайти граничні ймовірності для системи, граф станів якої приведено на рис. 1.3, при $\lambda_{01} = 1$, $\lambda_{02} = 2$, $\lambda_{10} = 2$,

$$\lambda_{13} = 2, \lambda_{20} = 3, \lambda_{23} = 1, \lambda_{31} = 3, \lambda_{32} = 2.$$

Знайти середній дохід від застосування системи в стаціонарному режимі, якщо справна робота в одиницю часу першого і другого вузлів приносить дохід відповідно в 10 і 6 грош. од., а їх ремонт вимагає витрат відповідно 4 і 2 грош. од. Оцінити економічну ефективність наявної можливості зменшення вдвічі середнього часу ремонту кожного з двох вузлів, якщо при цьому доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт кожного вузла (в одиницю часу).

Розв'язання. Система алгебраїчних рівнянь стаціонарного режиму СМО (рис. 1.3)

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{01}p_1 + \lambda_{20}p_2 \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

доповнена нормувальною умовою

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad (1.7)$$

при заданих значеннях інтенсивності потоків приймає вигляд

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2 \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3 \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо

$$p_0 = 0,40; p_1 = 0,20; p_2 = 0,27; p_3 = 0,13.$$

У граничному, стаціонарному режимі система в середньому 40% часу буде знаходитися у стані S_0 (обидва вузли працюють), 20% – у стані S_1 (перший вузол ремонтується, другий працює), 27% – у стані S_2 (другий вузол ремонтується, перший працює) і 13% часу – у стані S_3 (обидва вузли ремонтуються).

Розглядаючи стани системи, граф якої зображено на рис.3, робимо висновок, що перший вузол працює без відмови в середньому, $p_0 + p_1 = 0,40 + 0,27 = 0,67$ години; другий вузол $p_0 + p_1 = 0,40 + 0,20 = 0,60$ години. В той же час перший вузол ремо-

нтується в середньому $p_1 + p_3 = 0,20 + 0,13 = 0,33$ години; а другий вузол ремонтується $p_2 + p_3 = 0,27 + 0,13 = 0,40$ години.

Середній доход в одиницю часу від застосування системи, дорівнює різниці між доходами та витратами

$$Д = 0,67 \cdot 10 + 0,60 \cdot 6 - 0,33 \cdot 4 - 0,40 \cdot 2 = 8,18 \text{ грош. од.}$$

Скорочення вдвічі середнього часу ремонту кожного вузла означає збільшення вдвічі інтенсивності потоку закінчень ремонтів кожного вузла. Таким чином,

$$\lambda_{10} = 4, \quad \lambda_{20} = 6, \quad \lambda_{31} = 6, \quad \lambda_{32} = 4,$$

і система лінійних алгебраїчних рівнянь стаціонарного режиму з нормувальною умовою приймає вигляд

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2 \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3 \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Розв'язуємо систему і отримуємо

$$p_0 = 0,60; p_1 = 0,15; p_2 = 0,20; p_3 = 0,05.$$

Тепер перший вузол працює без відмови, в середньому, $p_0 + p_2 = 0,60 + 0,20 = 0,80$ години; другий вузол – $p_0 + p_1 = 0,60 + 0,15 = 0,75$ години. В той же час перший вузол ремонтується в середньому $p_1 + p_3 = 0,15 + 0,05 = 0,20$ години; а другий вузол ремонтується $p_2 + p_3 = 0,20 + 0,05 = 0,25$ години.

Якщо витрати на ремонт збільшити вдвічі, і вони складуть тепер, відповідно, 8 грош. од. і 4 грош. од., то середній доход в одиницю часу від застосування СМО при зменшенні вдвічі часу ремонту дорівнює

$$Д = 0,80 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6 - 0,20 \cdot 8 - 0,25 \cdot 4 = 9,9 \text{ грош. од.}$$

Висновок. Дохід системи при зменшенні часу ремонту з збільшенням його вартості підвищується на 20%, що говорить про економічну доцільність прискорення ремонту вузлів системи.

1.5. Циклічний процес. Структура процесу масового обслуговування

Розглянемо систему, в якій відбувається циклічний процес, коли система переходить зі стану S_0 в стан S_1 , потім в стан $S_2, \dots, S_n$ і повертається в початковий стан S_0 . Інтенсивності переходу зі стану S_i в стан S_{i+1} дорівнюють $\lambda_{i,i+1}$. Час перебування системи в стані S_i - випадкова величина, розподілена за показниковим законом. Середній час $\bar{t}_i$ перебування системи в стані залежить тільки від інтенсивності

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}.$$

Граф станів такої системи має вигляд (рис.1.7):

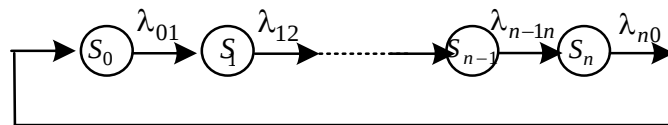


Рис. 1.7

Система алгебраїчних рівнянь Колмогорова для граничних ймовірностей

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \lambda_{12} p_1 \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{23} p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{n0} p_n = \lambda_{01} p_0 \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} p_0 \\ p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{23} \lambda_{12}} p_0 \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{n0}} p_0 \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Підставимо отримані граничні ймовірності в нормувальну умову (1.2)

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1;$$

$$\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} p_0 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} p_0 + \dots + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{n0}} p_0 = 1. \quad (1.10)$$

Отримані співвідношення дозволяють обчислити граничну ймовірність початкового стану системи

$$p_0 \left(\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} + \dots + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{n0}} \right) = 1;$$

$$p_0 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} + \dots + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{n0}} \right)}. \quad (1.11)$$

Приклад 1.4. Граф станів циклічного процесу у СМО «Майстерня» представлено на рис.1.8.

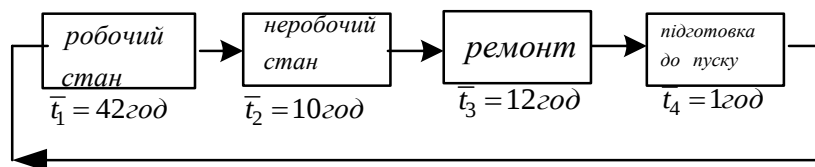


Рис. 1.8

Для визначення різної структури процесів масового обслуговування на рис. 1.9 представлено схему процесу: заявки, що надходять, – вхідний потік, черга, канали обслуговування і вихідний потік – заявки, які були виконано. Для виникнення черги достатньо, щоб тривалість обслуговування була більше, ніж інтервали між заявками, що надходять.



Рис. 1.9

РОЗДІЛ II. КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

СМО ділять на два основних класи: **СМО з відмовами** і **СМО з очікуванням (чергою)**.

У **СМО з відмовами** заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову, залишає СМО і в подальшому процесі обслуговування не бере.

У **СМО з очікуванням** заявка, яка прийшла в момент, коли всі канали зайняті, стає в чергу на обслуговування.

СМО з очікуванням поділяються на різні види в залежності від порядку проходження заявки через чергу, яка може бути обмеженою і необмеженою за довжиною.

2.1. Одноканальна СМО з відмовами

СМО містить один канал. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Утворення черги не допускається. Якщо заявка застала обслуговуючий канал зайнятим, то вона залишає систему. Час обслуговування заявки є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону розподілу з параметром μ .

Середній час обслуговування однієї заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$. Можливі стани

СМО: S_0 (канал вільний) і S_1 (канал зайнятий).

Показники інтенсивності роботи СМО:

A – абсолютна пропускна здатність (середнє число заявок, яке СМО може обслужити в одиницю часу);

Q – відносна пропускна здатність (відношення середнього числа обслуговуваних в одиницю часу заявок до середнього числа заявок, які надійшли за цей час);

$p_{отк}$ – ймовірність відмови (ймовірність того, що заявка покине СМО без обслуговування).

Розмічений граф станів одноканальної СМО з відмовами приведено на рис. 2.1:

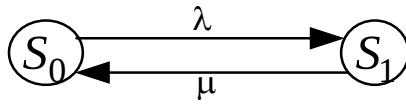


Рис. 2.1

Приклад 2.1. Заявки на відновлення дорожнього полотна автомобільної магістралі надходять у виділений Call - центром канал з інтенсивністю 65 заявок на хвилину. Середній час обробки однієї заявки – 3 хв. Вважаючи потік заявок і потік обслуговування найпростішими, визначити в сталому режимі показники ефективної роботи цього каналу.

Розв’язання. Виділений канал для обробки заявок є одноканальною СМО з відмовами.

$$\text{Час обслуговування } t_{\text{обсл}} = 3 \text{ хв.} = \frac{3}{60} \text{ год.} = 0,05 \text{ год.}$$

$$\text{Інтенсивність обслуговування } \mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ заявок / год.}$$

Розмічений граф СМО має вигляд (рис. 2.2)

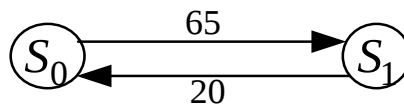


Рис. 2.2

Нехай p_0 , p_1 - граничні ймовірності станів S_0 (канал вільний) і S_1 (канал зайнятий).

Інтенсивності p_0 , p_1 пов’язані рівнянням Колмогорова для граничних ймовірностей, з якого випливає співвідношення між ними

$$0 = -65p_0 + 20p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{65}{20}p_0, \quad p_1 = 3,25p_0.$$

Оскільки $p_0 + p_1 = 1$, то

$$1 = p_0 + 3,25p_0 = 4,25p_0 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{4,25} \approx 0,235.$$

Тоді

$$p_1 = 3,25p_0 \Rightarrow p_1 \approx 3,25 \cdot 0,235 \approx 0,745.$$

$$p_0 \approx 0,235$$

Ймовірність відмови $p_{отк}$ – ймовірність, того що лінія зайнята, гранична ймовірність стану S_1 , дорівнює $p_{отк} = p_1 = 0,745$.

Ймовірність, що лінія вільна, дорівнює $p_0 = 1 - p_1 = 0,235$.

Відносна пропускна здатність Q (відношення середнього числа обслуговуваних в одиницю часу заявок до середнього числа заявок, які надійшли за цей час)

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_1 = 1 - 0,745 = 0,255.$$

Ймовірність того, що заявка буде обслужена, дорівнює 0,255.

Абсолютна пропускна здатність A (середнє число заявок, яке СМО може обслужити в одиницю часу)

$$A = \lambda Q = 65 \cdot 0,255 = 16,575 \text{ дзвінків / год.}$$

Висновок. Заявлена пропускна здатність виділеного Call-центром каналу обробки заявок – 20 заявок на годину відрізняється від абсолютної (реальної) пропускної здатності – 16,575 заявок на годину через випадковий характер потоку дзвінків і випадкового часу обслуговування. Для зниження ймовірності відмови треба збільшити число каналів обслуговування.

2.2. Багатоканальна СМО з відмовами. Задача Ерланга

СМО містить n обслуговуючих каналів. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Утворення черги не допускається. Якщо заявка застала всі обслуговуючі канали зайнятими, то вона залишає систему. Якщо в момент надходження заявки є вільний

канал, то він негайно приступає до обслуговування вимоги. Кожен канал може одночасно обслуговувати тільки одну заявку. Канали функціонують незалежно. Час обслуговування заявки - випадкова величина з показниковим законом розподілу з параметром μ . Середній

час обслуговування однієї заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$.

Можливі стани СМО:

S_0 - всі канали вільні;

S_1 - один канал зайнятий, інші вільні;

S_2 - два канали зайняті, інші вільні;

.....

S_n - всі канали зайняті.

Інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу) $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Показники інтенсивності роботи СМО:

1) абсолютна пропускна здатність A (середнє число заявок, яке СМО може обслужити в одиницю часу);

2) відносна пропускна здатність Q (відношення середнього числа обслуговуваних в одиницю часу заявок до середнього числа заявок, що надійшли за цей час);

3) ймовірність відмови $p_{отк}$ (ймовірність того, що заявка покине СМО без обслуговування);

4) p_0 (ймовірність того, що всі обслуговуючі канали вільні);

5) p_k (ймовірність того, що в системі $k \leq n$ вимог);

6) середнє число вільних від обслуговування каналів N_0 ;

7) коефіцієнт простою каналів $K_{пр}$;

8) середнє число зайнятих каналів обслуговування $N_{зан}$;

9) коефіцієнт завантаження каналів $K_{зан}$.

На рис. 2.3 представлено розмічений граф станів СМО з відмовами:

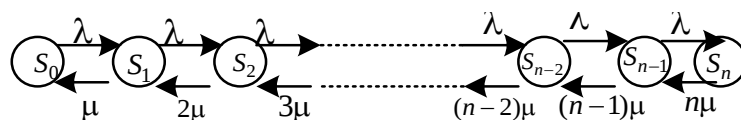


Рис. 2.3

Кількість станів системи є скінченою множиною, тому існують граничні ймовірності: p_0 – гранична ймовірність стану S_0 (всі канали вільні); p_1 – гранична ймовірність стану S_1 (один канал зайнятий, інші вільні); p_2 – гранична ймовірність стану S_2 (два канали зайняті, інші вільні);; p_n – гранична ймовірність стану S_n (всі канали зайняті).

Система рівнянь для граничних ймовірностей станів системи

$$\begin{aligned} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 &\Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0; \\ 0 = +\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + 2\mu p_2 &\Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\rho^2}{2} p_0; \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$0 = +\lambda p_{n-2} - \lambda p_{n-1} - (n-1)\mu p_{n-1} + n\mu p_n \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

$$0 = \lambda p_2 - 3\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho}{3} p_2;$$

Нормувальна умова ймовірностей (1.2)

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n &= 1; \\ p_0 + \rho p_0 + \frac{\rho^2}{2!} p_0 + \dots + \frac{\rho^n}{n!} p_0 &= 1; \\ p_0 \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

дозволяє обчислити p_0

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}. \quad (2.3)$$

Так, гранична ймовірність стану S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) дорівнює

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}; \quad (2.4)$$

p_n визначає ймовірність того, що всі канали зайняті.

Приклад 2.2. Автозаправна станція має три бензозаправні майданчики (канали). Машина, що під'їхала в момент, коли всі майданчики зайняті, отримує відмову і направляється на сусідню автозаправну станцію. Передбачається, що найпростіший потік автомашин надходить на станцію з інтенсивністю $\lambda = 10$ автомашин на годину. Час обслуговування - випадкова величина, яка підпорядковується показниковому закону розподілу. Середній час обслуговування $t_{обс} = 15$ хв. Визначити показники ефективності роботи станції (СМО).

Розв'язання

Автозаправна станція – це багатоканальна система з відмовами,
 $t_{обсл} = 15 \text{ хв.} = \frac{15}{60} = 0,25 \text{ год.}$ Інтенсивність обслуговування $\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ машини / год.}$ Приведена інтенсивність потоку автомашин $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{4} = 2,5$.

Розмічений граф станів СМО має вигляд (рис.2.4):

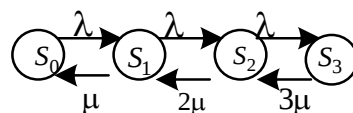


Рис. 2.4

p_0 – гранична ймовірність стану S_0 (всі канали вільні); p_1 – гранична ймовірність стану S_1 (один канал зайнятий, інші вільні); p_2 – гранична ймовірність стану S_2 (два канали зайняті, інші вільні); p_3 – гранична ймовірність стану S_3 (всі канали зайняті).

За формулою (2.1), в якій кількість каналів $n=3$, отримуємо граничні ймовірності всіх станів системи. Ймовірність того, що всі обслуговуючі майданчики вільні, $p_0=0,108$. Ймовірність того, що два обслуговуючі майданчики вільні, $p_1 = 2,5 \cdot 0,108 = 0,27$. Ймовірність того, що один обслуговуючий майданчик вільний, $p_2 = 1,125 \cdot 0,27 = 0,3375$. Ймовірність того, що всі обслуговуючі майданчики зайняті, $p_3 = 0,83 \cdot 0,3375 = 0,281$.

Ймовірність відмови $p_{відм}$ - ймовірність того, що всі майданчики зайняті, гранична ймовірність стану S_3 . Тому $p_{відм} = p_3 = 0,281$.

Відносна пропускна здатність, ймовірність того, що автомашина, яка під'їхала до автозаправки, буде обслужена

$$Q = 1 - p_{відм} = 1 - 0,281 = 0,719.$$

Абсолютна пропускна здатність (середнє число машин, що обслуговуються за годину)

$$A = 10 \cdot 0,719 = 7,19 \text{ машина/год.}$$

Середнє число вільних від обслуговування майданчиків N_0 є математичним сподіванням числа вільних каналів (сума добутоків кількостей вільних каналів на граничні ймовірності відповідного стану)

$$N_0 = 3 \cdot 0,108 + 2 \cdot 0,27 + 1 \cdot 0,3375 + 0 \cdot 0,281 = 1,2.$$

Коефіцієнт простою майданчика

$$K_{пр} = N_0/n = 1,2/3 = 0,4.$$

Середнє число зайнятих майданчиків за годину

$$N_{зайн} = A/\mu = \lambda Q / \mu = 2,5Q = 2,5 \cdot 0,719 = 1,7975.$$

Коефіцієнт завантаження каналів за годину

$$K_{зайн} = N_{зайн} / n = 1,7975/3 = 0,6.$$

2.3. Одноканальна СМО с необмеженою чергою

СМО містить один обслуговуючий канал. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо канал зайнятий, то заявка, що надійшла, встає в чергу і очікує початку обслуговування.

Час обслуговування є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом з параметром μ . Середній час обслуговування однієї заявки $t_{обс}$.

Розмічений граф станів одноканальної СМО з необмеженою чергою має вигляд (рис.2.5):

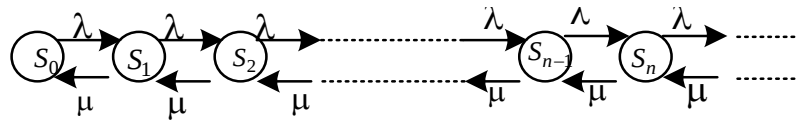


Рис. 2.5

Можливі стани СМО:

S_0 – канал вільний; p_0 - гранична ймовірність стану S_0 ;

S_1 – канал зайнятий, черги нема; p_1 – гранична ймовірність стану S_1 ;

S_2 – канал зайнятий, в черзі одна заявка; p_2 – гранична ймовірність стану S_2 ;

.....

S_n – канал зайнятий, в черзі $n-1$ заявок; p_n - гранична ймовірність стану S_n ;

.....

Система рівнянь для граничних ймовірностей станів системи

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0;$$

$$0 = +\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho p_1 = \rho^2 p_0; \quad (2.5)$$

$$0 = +\lambda p_1 - \lambda p_2 - \mu p_2 + \mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \rho p_2 = \rho^3 p_0;$$

.....

$$0 = \lambda p_{n-1} - \lambda p_n - \mu p_n + \mu p_{n+1} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n = \rho p_n = \rho^{n+1} p_0;$$

.....

Нормувальна умова (1.2) ймовірностей станів СМО

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$$

з урахуванням отриманих співвідношень дозволяє обчислити p_0 при $\rho < 1$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$$

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0 + \dots = 1$$

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = 1.$$

В співвідношенні

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = 1$$

в дужках записана геометрична прогресія со знаменником $\rho < 1$, сума якої дорівнює

$$(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Враховуючи останнє співвідношення, легко обчислити значення ймовірності p_0

$$p_0 \cdot \frac{1}{1 - \rho} = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \rho.$$

Ймовірність $p_0 = 1 - \rho$ визначає ймовірність стану S_0 (канал вільний).

Ймовірність того, що канал зайнятий,

$$p_{\text{зайн}} = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho.$$

Ймовірність стану S_n (канал зайнятий, в черзі $n - 1$ заявок)

$$p_n = \rho^n p_0 = \rho^n (1 - \rho), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Середнє число заявок N_{cp} , які очікують обслуговування, дорівнює сумі добутків числа заявок в черзі і граничної ймовірності відповідного стану

$$\begin{aligned}
N_{cp} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \dots = \\
&= 0 + \rho(1-\rho) + 2\rho^2(1-\rho) + 2\rho^3(1-\rho) + \dots = \\
&= \rho(1-\rho)(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots) = \rho(1-\rho) \left(\frac{d\rho}{d\rho} + \frac{d\rho^2}{d\rho} + \dots \right) = \quad (2.6) \\
&= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) = \\
&= \left| \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) = \frac{1}{(1-\rho)^2} \right| = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Середній час перебування заявок в системі дорівнює відношенню середнього числа заявок до інтенсивності їх потоку (середнього числа заявок в одиницю часу)

$$T_{сист} = N_{сист} / \lambda$$

(формула Літла).

Середній час перебування заявок в системі складається з часу обслуговування $T_{обсл}$ заявки і часу очікування $T_{оч}$ в черзі.

Середнє число заявок, що знаходяться під обслуговуванням, $N_{обсл}$ дорівнює

$$N_{обсл} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = \rho,$$

де p_0 – ймовірність того, що канал вільний (під обслуговуванням нуль заявок), $1 - p_0 = \rho$ – ймовірність того, що канал зайнятий (під обслуговуванням одна заявка).

Середнє число заявок $N_{оч}$ в черзі дорівнює

$$N_{оч} = N_{сист} - N_{обсл} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Середній час перебування заявки в черзі $T_{оч}$ дорівнює

$$T_{оч} = \frac{N_{оч}}{\lambda}.$$

Приклад 2.3. На підприємстві, що випускає системи автомобільної бортової автоматики, ввели нову лінію з регулювання виробів перед відправкою замовнику. Передбачається, що потік виробів надходить з інтенсивністю 10 виробів/год. Час обслуговування є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону розподілу з параметром 15 виробів/год. Визначити показники ефективності роботи нової лінії.

Розв’язання. Лінія з регулювання виробів – одноканальна СМО з необмеженою чергою. Розмічений граф станів має вигляд (рис.2.6):

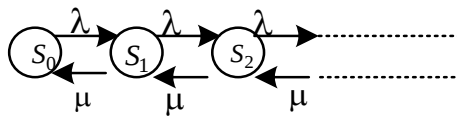


Рис. 2.6

Інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу)
 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} \approx 0,67 < 1$, тому існують граничні ймовірності станів системи.

Ймовірність того, що лінія вільна, дорівнює

$$p_0 = 1 - \rho \approx 1 - 0,67 = 0,33.$$

Середня довжина черги на регулювання приладу

$$L_{\text{черг}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(0,67)^2}{1 - 0,67} \approx 1,36.$$

Середній час перебування в черзі на регулювання

$$T_{\text{черг}} = \frac{L_{\text{черг}}}{\lambda} \approx \frac{1,36}{10} \approx 0,14 \text{ год} = 0,14 \cdot 60 \text{ хв.} = 8,4 \text{ хв.}$$

Середнє число приладів в системі

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,67}{1 - 0,67} \approx 2,03.$$

Середній час перебування приладу в системі

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} \approx \frac{2,03}{10} = 0,203 год = 0,203 \cdot 60 хв. \approx 12 хв.$$

Для СМО з необмеженою чергою при $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, будь-яка заявка в системі буде обслужена. Ймовірність відмови дорівнює нулю.

2.4. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

СМО містить n обслуговуючих каналів. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо в момент надходження заявки є вільний канал, то він негайно приступає до обслуговування. Кожен канал може одночасно обслуговувати тільки одну заявку. Всі канали функціонують незалежно. Якщо всі канали зайняті, то заявка, що надійшла, стає в чергу. Час обслуговування заявки є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом з параметром μ . Середній час обслуговування однієї заявки

$$\bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu}.$$

Можливі стани СМО:

S_0 – всі канали вільні;

S_1 – один канал зайнятий, інші вільні;

S_2 – два канали зайняті, інші вільні;

.....

S_n – всі канали зайняті;

S_{n+1} – всі канали зайняті, в черзі одна заявка;

S_{n+2} – всі канали зайняті, в черзі дві заявки.

.....

Приведена інтенсивність потоку заявок $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Умови задачі до-

зволяють представити розмічений граф можливих станів багатоканальної СМО з необмеженою чергою (рис. 2.7):

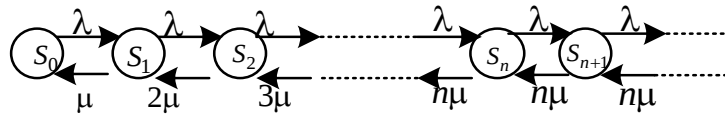


Рис. 2.7

Якщо $\frac{\rho}{n} \geq 1$, інтенсивність надходження заявок перевищує число каналів, черга зростає необмежено. Якщо інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу) ρ не перевищує числа каналів n ($\frac{\rho}{n} < 1$), існують граничні ймовірності станів СМО. Нехай, p_0 – гранична ймовірність стану S_0 ; p_1 – гранична ймовірність стану S_1 ; p_2 – гранична ймовірність стану S_2 ;...; p_n – гранична ймовірність стану S_n ;... .

З часом процес у СМО входить у стаціонарний режим, при якому зв'язки між сусідніми станами продовжуються, проте ймовірності станів стабілізуються і не залежать від часу. Система диференціальних рівнянь перетворюється в систему лінійних алгебраїчних рівнянь для граничних ймовірностей станів СМО:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0; \\
 0 &= +\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot \rho p_0 = \frac{\rho^2}{2} \cdot p_0; \\
 0 &= +\lambda p_1 - \lambda p_2 - 2\mu p_2 + 3\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho}{3} \cdot \frac{\rho^2}{2} p_0 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0; \\
 &\dots\dots\dots p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \\
 0 &= \lambda p_{n-1} - \lambda p_n - n\mu p_n + n\mu p_{n+1} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} p_n = \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \\
 0 &= \lambda p_n - \lambda p_{n+1} - n\mu p_{n+1} + n\mu p_{n+2} \Rightarrow p_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n+1} = \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Нормувальна умова (1.2) граничних ймовірностей станів

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3} + \dots = 1$$

з урахуванням отриманих рівнянь дозволяє записати співвідношення для ймовірності p_0

$$p_0 + \rho p_0 + \frac{\rho^2}{2!} p_0 + \dots + \frac{\rho^n}{n!} p_0 + \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 + \dots = 1;$$

$$p_0 \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \dots \right) = 1;$$

$$p_0 \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \left(1 + \left(\frac{\rho}{n}\right) + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots \right) \right) = 1.$$

У внутрішніх дужках представлена геометрична прогресія з знаменником $\frac{\rho}{n} < 1$. Її сума дорівнює $\frac{1}{1 - \frac{\rho}{n}} = \frac{n}{n - \rho}$.

Замінюємо геометричну прогресію її сумою

$$p_0 \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n - \rho} \right) = 1. \quad (2.8)$$

Гранична ймовірність p_0 , ймовірність того, що всі канали вільні,

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{n - \rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}. \quad (2.9)$$

В цій формулі в дужках доданок $\frac{\rho}{n - \rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!}$ враховує заявки, які знаходяться в черзі на обслуговування.

Середнє число заявок в черзі дорівнює сумі добутків кількостей вимог в кожному стані черзі на граничні ймовірності цього стану:

$$\begin{aligned}
 L_{оч} &= 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + 1 \cdot p_{n+3} + \dots = \\
 &= 1 \cdot \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 + 2 \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 + 3 \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^3 \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 + \dots = \quad (2.10) \\
 &= \rho \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 \left(\frac{1}{n} + 2 \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right) + 3 \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots \right) = \\
 &= \rho \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{n}\right)^3 + \dots \right) = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \frac{\rho n}{(n-\rho)^2}.
 \end{aligned}$$

Середній час перебування заявки в черзі

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

Середнє число зайнятих каналів за годину

$$N_{зан} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Середнє число заявок в системі

$$L_{сист} = L_{оч} + N_{зан} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 + \rho.$$

Середній час перебування заявки в системі

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} \quad (\text{формула Литтла}).$$

$T_{сист}$ складається з часу обслуговування і часу очікування в черзі.

Приклад 2.4. Станція техобслуговування придбала дві лінії з регулювання систем автоматики автомобіля. Потік автомобілів, які прибувають на перевірку, передбачається найпростішим з інтенсив-

ністю $\lambda=3$ автомобілі/год. Якщо лінія з регулювання зайнята, то автомобіль стає в чергу. Час обслуговування автомобіля є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону розподілу з параметром $\mu=4$ автомобілі /год. Визначити параметри СМО.

Розв'язання. Розглядаємо систему як двоканальну СМО з необмеженою чергою. Розмічений граф станів має вигляд (рис. 2.8):

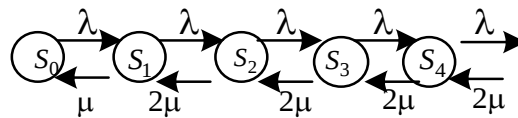


Рис. 2.8

Вводимо інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0,75$ і параметр $\frac{\rho}{n} = \frac{0,75}{2} = 0,375 < 1$, який вказує на існування граничних ймовірностей СМО.

Знаходимо ймовірність стану S_0 системи, якщо канали вільні (лінії з регулювання вільні) і в черзі немає заявок, (на регулювання систем мехатроніки немає заказів), $n = 2$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho}{n-\rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = \quad (2.11)$$

$$= \left(1 + 0,375 + \frac{(0,375)^2}{2!} + \frac{0,375}{2-0,75} \cdot \frac{(0,375)^2}{2!} \right)^{-1} =$$

$$\approx 0,68.$$

Ймовірність того, що лінії регулювання СТО є загрузеними, та в черзі знаходяться дві автомашини, дорівнює

$$p_{n+2} = \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0; \quad p_{2+2} = \left(\frac{0,75}{2} \right)^2 \cdot \frac{(0,75)^2}{2!} \cdot 0,68 \approx 0,026 \quad (2.12)$$

Середня довжина черги

$$\begin{aligned} L_{оч} &= \frac{\rho^n}{n!} p_0 \frac{\rho n}{(n-\rho)^2} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 = \\ &= \frac{(0,75)^{2+1}}{(2-1)!(2-0,75)^2} 0,68 \approx 0,046. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Середній час перебування машини в черзі

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0,046}{3} \approx 0,015 \text{ год.}$$

Середня кількість машин на станції СТО

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho \approx 0,046 + 0,75 \approx 0,796.$$

Середній час перебування машини на станції СТО

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{0,796}{3} \approx 0,265 \text{ год} = 16 \text{ хвлин.}$$

2.5. СМО с фіксованим часом обслуговування

Деякі системи масового обслуговування мають постійний час обслуговування, а не розподілений за показниковим законом. У таких системах заявки обслуговуються протягом фіксованого часу. Для моделей з постійним темпом обслуговування значення деяких характеристик вдвічі менше, ніж відповідні значення в моделях зі змінним темпом обслуговування. Формули, що описують характеристики в цих моделях:

$$\text{середня довжина черзі за годину } L_{оч} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} ;$$

$$\text{середній час очікування в черзі } T_{оч} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} ;$$

середнє число заявок в системі за годину $L_{заявок} = L_{оч} + \frac{\lambda}{\mu}$;

середній час очікування в системі $T_{заявок} = T_{оч} + \frac{1}{\mu}$.

Приклад 2.5. Залізобетонні плити, які застосовують при будівництві автомобільної траси, на склад доставляють вантажівки, інтенсивність найпростішого потоку яких є 4 вантажівки на годину. Розвантаження кожної вантажівки займає 12 хв. Знайти параметри системи обслуговування, вважаючи її одноканальною СМО з фіксованим часом обслуговування.

Розв'язання

Інтенсивність потоку вантажівок на склад $\lambda = 4$ вантаж./год

Фіксований час розвантаження $t_{розв.} = 12 \text{ хв.} = \frac{1}{5}$ год.

Інтенсивність розвантаження $\mu = \frac{1}{t_{розв.}} = 5$ вантаж./год

Середня довжина черги за годину

$$L_{оч} = \frac{4^2}{2 \cdot 5(5 - 4)} = \frac{16}{10} = 1,6;$$

середній час очікування в черзі

$$T_{оч} = \frac{4}{2 \cdot 5(5 - 4)} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ год.};$$

середнє число вантажівок в системі за годину

$$L_{заявок} = 1,6 + \frac{4}{5} = 1,6 + 0,8 = 2,4;$$

середній час перебування вантажівки в системі

$$T_{заявок} = 0,4 + \frac{1}{5} = 0,6 \text{ час.}$$

2.6. Одноканальна СМО з обмеженою чергою

СМО містить один обслуговуючий канал. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо заявка застала обслуговуючий канал зайнятим, то вона встає в чергу і очікує початку обслуговування. Число місць в черзі обмежено і дорівнює m . Якщо заявка застала обслуговуючий канал зайнятим, і в черзі немає вільних місць, то вона залишає систему. Час обслуговування заявки є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом з параметром μ . Середній час обслуговування заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$.

Можливі стани СМО:

S_0 – всі канали вільні;

S_1 – один канал зайнятий, черги нема;

S_2 – один канал зайнятий, в черзі одна заявка;

.....

S_{m+1} – один канал зайнятий; в черзі m заявок;

.....

Розмічений граф станів одноканальної СМО з обмеженою чергою має вигляд (рис. 2.9)

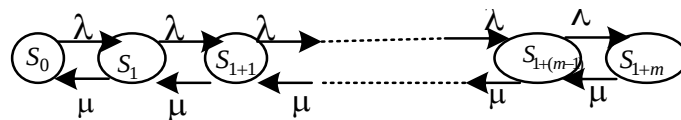


Рис. 2.9

Число станів СМО – скінчена множина, тому існують граничні ймовірності: p_0 – гранична ймовірність стану S_0 ; p_1 – гранична ймовірність стану S_1 ; p_2 – гранична ймовірність стану S_2 ;; p_{m+1} – гранична ймовірність стану S_{m+1} .

Стан S_0 пов'язаний зі станом S_1 двома стрілками з інтенсивностями λ і μ . Для граничних ймовірностей рівняння Колмогорова записуємо за правилом: для обраного стану ймовірності з інтенсивностями вхідного потоку записуємо в ліву частину рівняння, а ймовірності з інтенсивностями вихідного потоку записуємо в праву частину рівняння, отже

Тому

$$p_0 \frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho} = 1; \quad (2.16)$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ – ймовірність того, що канал вільний;

$p_{1+k} = \rho^{1+k} p_0 = \rho^{1+k} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$ p_{1+k} - ймовірність

стану S_{1+k} (канал зайнятий, в черзі k заявок) ;

$p_{1+m} = \rho^{1+m} p_0 = \rho^{1+m} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ - ймовірність стану S_{1+m} (канал зайнятий, в черзі m заявок – вільних місць немає).

Ймовірність відмови, якщо вільних місць немає, дорівнює

$$p_{відм} = p_{1+m} = \rho^{1+m} p_0 = \rho^{1+m} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \quad (2.17)$$

Відносна пропускна здатність Q – ймовірність обслуговування заявки протягом години

(2.18)

$$Q = 1 - p_{відм} = 1 - \rho^{1+m} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Абсолютна пропускна здатність системи за годину

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \rho^{1+m} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \right). \quad (2.19)$$

Середнє число заявок в черзі $L_{оч}$ є математичним сподіванням числа розподілу заявок в черзі, дорівнює сумі добутків кількості заявок в черзі в кожному стані S_{1+k} і граничних ймовірностей цього стану:

$$\begin{aligned}
L_{оч} &= 1 \cdot p_{1+1} + 2 \cdot p_{1+2} + \dots + m \cdot p_{1+m} = \left| \begin{array}{l} p_{1+1} = \rho^2 p_0 \\ \dots\dots\dots \\ p_{1+m} = \rho^{1+m} p_0 \end{array} \right| = \\
&= 1 \cdot \rho^2 p_0 + 2 \cdot \rho^3 p_0 + \dots + m \cdot \rho^{1+m} p_0 = \rho^2 p_0 (1 + 2\rho + \dots + m\rho^{m-1}) = \\
&= \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) = \rho^2 p_0 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})}.
\end{aligned}$$

Приклад 2.6. Реєстрація машини платного паркування проводиться одним службовцем, через що утворюється черга. Якщо в черзі знаходиться більше 2 автомашин, то чергова автомашина проїжджає повз. Передбачається, що найпростіший потік автомашин надходить на паркування з інтенсивністю $\lambda = 9$ автомашин/год. Час реєстрації є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом з параметром $\mu = 12$ автомашин/год. Обчислити параметри системи обслуговування.

Розв'язання. Система платного паркування машин – одноканальна СМО з обмеженою чергою. Розмічений граф станів має вигляд (рис. 2.10)

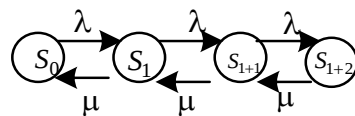


Рис. 2.10

Вводимо інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Гранична ймовірність стану S_0 (ймовірність відсутності машин для паркування) – p_0 .

Стан S_1 пов'язаний із станом S_0 потоками інтенсивності λ і μ .

Гранична ймовірність стану S_1 : $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$.

Гранична ймовірність стану $S_{1+1} : p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho^2 p_0$.

Гранична ймовірність стану $S_{1+2} : p_{2+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \rho^3 p_0$.

Для ймовірностей станів системи виконується нормувальна умова (1.2)

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_{2+1};$$

$$1 = p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0;$$

$$1 = p_0 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3) = \left| \rho = \frac{3}{4} \right| \approx 2,74 p_0.$$

Тому

$$p_0 = \frac{1}{2,74} \approx 0,365; p_1 = 0,75 \cdot 0,365 \approx 0,274;$$

$$p_2 = 0,57 \cdot 0,365 \approx 0,21; p_3 = 0,42 \cdot 0,365 \approx 0,153.$$

Ймовірність проїзду машини повз платного паркування через те, що місця в черзі зайняті

$$p_{\text{відмови}} = p_{1+2} \approx 0,153.$$

Відносна пропускна здатність системи (ймовірність того, що машина буде зареєстрована протягом години)

$$Q = 1 - p_{\text{відмови}} \approx 1 - 0,153 = 0,847.$$

Абсолютна пропускна здатність системи

$$A = \lambda Q = 9 \cdot 0,847 = 7,623 \text{ машин / год.}$$

Середня кількість вільних від обслуговування (реєстрації) каналів протягом години

$$N_0 = 1 \cdot p_0 \approx 1 \cdot 0,365 = 0,365.$$

Середнє число заявок в черзі протягом години

$$L_{оч} = \rho^2 p_0 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})} = \left| \begin{array}{l} m = 2 \\ p_0 = 0,365 \\ \rho = 0,75 \end{array} \right| \approx 0,801.$$

Середній час перебування заявки в черзі

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0,801}{9} \approx 0,089 \text{ год} = 5,34 \text{ хв.}$$

Середня кількість машин під обслуговуванням (реєстрацією)

$$L_{обсл} = 1 - p_0 \approx 1 - 0,365 = 0,635.$$

Середня кількість машин в системі обслуговування-черга

$$L_{сист} = L_{обсл} + L_{оч} = 0,635 + 0,801 = 1,436.$$

Середній час перебування заявки (машини) в системі

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{1,436}{9} \approx 9,57 \text{ хв.}$$

2.7. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

СМО містить n обслуговуючих каналів. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо в момент надходження вимоги є вільний канал, то він негайно приступає до обслуговування заявки. Кожен канал може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу. Всі канали функціонують незалежно. Якщо заявка застала канали зайнятими, то вона встає в чергу і очікує початок обслуговування. Число місць в черзі обмежено і дорівнює m . Якщо заявка застала всі обслуговуючі канали зайнятими, і в черзі немає вільних місць, то вона залишає систему.

Час обслуговування заявки є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону розподілу з параметром μ .

Середній час обслуговування однієї заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$.

Можливі стани СМО:

S_0 – всі канали вільні; S_1 – один канал зайнятий, інші вільні; S_2 – два канали зайняті, інші вільні;.....; S_n – всі канали зайняті; S_{n+1} – всі канали зайняті, в черзі одна заявка;; S_{n+m} – всі канали зайняті, в черзі m заявок.

Розмічений граф станів багатоканальної СМО з обмеженою чергою має вигляд (рис. 2.11):

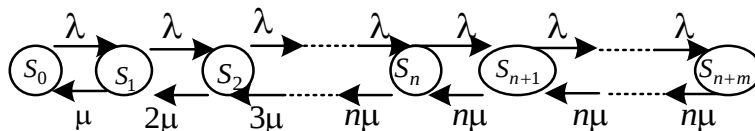


Рис. 2.11

Число станів СМО є скінченною множиною, через це існують граничні ймовірності: p_0 – гранична ймовірність стану S_0 ; p_1 – гранична ймовірність стану S_1 ; p_2 – гранична ймовірність стану S_2 ;.....; p_{n+m} – гранична ймовірність стану S_{n+m} .

Стан S_0 пов'язаний зі станом S_1 потоками з інтенсивністю λ і μ . Для граничних ймовірностей рівняння Колмогорова записуємо за правилом: для обраного стану ймовірності з інтенсивністю вхідного потоку записуємо в ліву частину рівняння, а ймовірності з інтенсивністю вихідного потоку записуємо в праву частину рівняння

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0;$$

$$\lambda p_0 + 2\mu p_{1+1} = \lambda p_1 + \mu p_1 \Rightarrow 2\mu p_{1+1} = \lambda p_1; p_{1+1} = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho p_0 = \frac{1}{2} \rho^2 p_0;$$

$$\lambda p_1 + 3\mu p_{1+2} = \lambda p_{1+1} + 2\mu p_{1+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\mu p_{1+2} = \lambda p_{1+1}; p_{1+2} = \frac{\lambda}{3\mu} p_{1+1} = \frac{1}{2 \cdot 3} \rho \cdot \rho^2 p_0 = \frac{1}{3!} \rho^3 p_0;$$

$$\lambda p_{1+1} + 4\mu p_{1+3} = \lambda p_{1+2} + 3\mu p_{1+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\mu p_{1+3} = \lambda p_{1+2}; p_{1+3} = \frac{\lambda}{4\mu} p_{1+2} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \rho \cdot \rho^3 p_0 = \frac{1}{4!} \rho^4 p_0;$$

.....

$$\lambda p_{(n-2)} + n\mu p_n = \lambda p_{n-1} + (n-1)\mu p_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\mu p_n = \lambda p_{n-1}; p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{1}{n!} \rho \cdot \rho^{(n-1)} p_0 = \frac{1}{n!} \rho^n p_0;$$

$$\lambda p_{(n-1)} + n\mu p_{n+1} = \lambda p_n + n\mu p_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\mu p_{n+1} = \lambda p_n; p_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} p_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rho^{n+1} p_0;$$

$$p_{n+m} = \frac{1}{n^m \cdot n!} \rho^{n+m} p_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

де p_{n+m} - ймовірність стану S_{n+m} (канал зайнятий, в черзі m заявок).

Нормувальна умова (1.2)

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n+m} = 1$$

дозволяє записати співвідношення для p_0

$$p_0 + \frac{1}{1!} \rho p_0 + \frac{1}{2!} \rho^2 p_0 + \dots + \frac{1}{n!} \rho^n p_0 + \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right) \rho^n p_0 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \rho^n p_0 = 1;$$

$$p_0 \left(1 + \frac{1}{1!} \rho + \frac{1}{2!} \rho^2 + \frac{1}{n!} \rho^n + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right) \rho^n + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \rho^n \right) = 1;$$

$$p_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \left[1 + \frac{\rho}{n} + \dots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \right] \right) = 1.$$

В квадратних дужках вказано сума $(m+1)$ елементів геометричної прогресії зі знаменником $\frac{\rho}{n}$, що дорівнює $\frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}$. Тому нормувальна умова приймає вигляд

$$p_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right) = 1.$$

Таким чином, гранична ймовірність стану, що в системі немає заявок (система вільна)

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1}.$$

Гранична ймовірність, що в системі знаходиться k заявок, число яких не перевищує числа каналів n

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Гранична ймовірність, що в черзі на обслуговування знаходиться k заявок

$$p_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^k p_0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Ймовірність відмови системи $p_{відм.}$ (всі канали зайняті, в черзі немає вільних місць)

$$p_{відм.} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Відносна пропускна здатність Q - ймовірність того, що заявка буде обслужена,

$$Q = 1 - p_{відм.} = 1 - p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right).$$

Середнє число вільних від обслуговування каналів

$$N_0 = np_0 + (n-1)p_1 + \dots + 1 \cdot p_n = \sum_{k=0}^n (n-k)p_k.$$

Середнє число заявок в черзі $L_{оч}$ (математичне сподівання числа заявок в черзі)

$$\begin{aligned} L_{оч} &= 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = \left| p_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k p_0 \right| = \\ &= 1 \cdot \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right) p_0 + 2 \cdot \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 p_0 + \dots + m \cdot \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^m p_0 = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right) p_0 \left(1 + 2 \left(\frac{\rho}{n} \right) + \dots + m \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right) = \left| \frac{\rho}{n} = y \right| = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right) p_0 (1 + 2y + \dots + my^{m-1}) = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^1 p_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{1 - y^{m+1}}{1 - y} \right) = \\ &= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n} \right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. Реєстрація машини для платного паркування проводиться двома службовцями, однак, утворюється черга. Якщо в черзі знаходиться більше 3-х автомашин, то автомашина, що прибуває за ними, проїжджає повз. Передбачається, що найпростіший потік автомашин надходить на паркування з інтенсивністю $\lambda = 9$ автомашин/год. Час реєстрації є випадковою величиною, яка розподілена за показниковим законом з параметром $\mu = 12$ автомашин/год. Обчислити параметри системи обслуговування.

Розв'язання. Система платного паркування машин – багатока-
нальна СМО з обмеженою чергою. Розмічений граф станів має ви-
гляд (рис. 2.12):

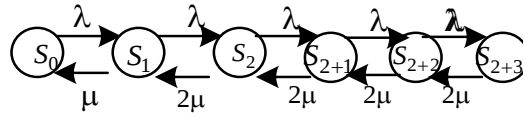


Рис. 2.12

Вводимо інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Нехай p_0 - гранична ймовірність стану S_0 (ймовірність відсут-
ності машин для паркування).

Стан S_1 пов'язаний зі станом S_0 потоками інтенсивності λ, μ . Гра-
нична ймовірність стану S_1 : $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$.

Гранична ймовірність стану S_2 : $p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2} \rho^2 p_0$.

Гранична ймовірність стану S_{2+1} : $p_{2+1} = \frac{\lambda}{2\mu} p_2 = \frac{1}{4} \rho^3 p_0$.

Гранична ймовірність стану S_{2+2} : $p_{2+2} = \frac{\lambda}{2\mu} p_3 = \frac{1}{8} \rho^4 p_0$.

Гранична ймовірність стану S_{2+3} : $p_{2+3} = \frac{\lambda}{2\mu} p_{2+2} = \frac{1}{16} \rho^5 p_0$.

Для ймовірностей станів системи виконується нормувальна
умова (1.2)

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_{2+1} + p_{2+2} + p_{2+3};$$

$$1 = p_0 + \rho p_0 + \frac{1}{2} \rho^2 p_0 + \frac{1}{4} \rho^3 p_0 + \frac{1}{8} \rho^4 p_0 + \frac{1}{16} \rho^5 p_0;$$

$$1 = p_0 \left(1 + \rho + \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{4} \rho^3 + \frac{1}{8} \rho^4 + \frac{1}{16} \rho^5 \right) = \left| \rho = \frac{3}{4} \right| \approx 2,3 p_0.$$

Тому

$$p_0 = \frac{1}{2,3} \approx 0,43; p_1 = 0,75 \cdot 0,43 \approx 0,32; p_2 = 0,28 \cdot 0,43 \approx 0,12;$$

$$p_3 = 0,105 \cdot 0,43 \approx 0,045; p_4 = 0,04 \cdot 0,43 \approx 0,02;$$

$$p_5 = 0,01 \cdot 0,43 \approx 0,004.$$

Ймовірність проїзду машини повз через те, що місця в черзі зайняті $p_{\text{відмови}} = p_{2+3} = 0,004$.

Відносна пропускна здатність системи (ймовірність того, що машина буде зареєстрована протягом години)

$$Q = 1 - p_{\text{відмови}} = 1 - 0,004 = 0,996.$$

Абсолютна пропускна здатність системи

$$A = \lambda Q = 9 \cdot 0,996 = 8,964 \text{ машин / год.}$$

Середня кількість вільних від обслуговування (реєстрації) каналів протягом години

$$N_0 = 2 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = 2 \cdot 0,43 + 1 \cdot 0,32 = 1,18.$$

Середнє число заявок в черзі протягом години

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \left. \begin{array}{l} n = 2 \\ m = 3 \\ \rho = 0,75 \\ p_0 = 0,43 \end{array} \right| = 0,215.$$

2.8. Замкнута СМО

На практиці часто зустрічаються замкнуті системи обслуговування, у яких вхідний потік заявок істотно залежить від стану самої СМО. Як приклад можна привести ситуацію, коли на ремонтну базу надходять з місць експлуатації деякі машини: зрозуміло, що чим більше машин знаходиться в стані ремонту, тим менше їх залишається в робочому стані, і тим менше інтенсивність потоку машин, які знову

потребують ремонту. Для замкнутих СМО характерним є обмеженість кількості джерел заявок, причому кожне джерело "блокується" на час обслуговування його заявки (не видає нових заявок). У подібних системах при скінченному кількості станів СМО граничні ймовірності будуть існувати при будь-яких значеннях інтенсивності потоків заявок і потоків обслуговування.

Нехай вузол обслуговування призначений для обслуговування постійного числа циркулюючих в системі заявок. У такій системі заявка після обслуговування повертається назад в джерело. Завдання такого роду особливо часто зустрічаються при експлуатації машин і механізмів (або комплексного обладнання), які можуть виходити з ладу, але відновлюються після ремонту. Такі системи називаються **замкнутими системами масового обслуговування**. Наведемо приклад замкнутої системи.

Нехай СМО містить n каналів, які обслуговують m об'єктів ($n < m$). На вхід надходить потік заявок кожного об'єкта з інтенсивністю λ . Якщо в момент надходження заявки є вільний канал, то він негайно приступає до обслуговування вимоги. Кожен канал може одночасно обслуговувати тільки одну заявку. Всі канали функціонують незалежно. Якщо заявка застала обслуговуючі канали зайнятими, то вона встає в чергу і очікує початку обслуговування. Оскільки заявки надходять від m обслуговуючих об'єктів, то потік вимог є обмеженим. Час обслуговування заявки є випадковою величиною, розподілена за показниковим законом з параметром μ . Середній час обслуговування однієї заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$.

У замкнутій СМО існує взаємозв'язок між довжиною черги і темпом надходження заявок, чим довше черга на обслуговування, тим нижче темп надходження нових заявок.

Можливі стани СМО:

S_0 – всі канали вільні, заявок немає; S_1 – один канал зайнятий, інші вільні, черги немає; S_2 – два канали зайняті, інші вільні, черги немає; ; S_n – всі канали зайняті, в черзі немає заявок; ... ; S_m – всі канали зайняті, в черзі $(m - n)$ заявок.

Розмічений граф станів замкнутої СМО має вигляд (рис. 2.13):

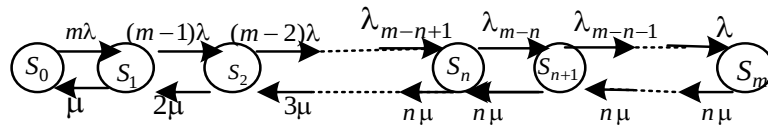


Рис. 2.13

Приклад 2.8. Бригада з 3 чоловік проводить стендові іспити 4-х автомашин. Передбачається, що потік відмов автомашин є найпростішим потоком з інтенсивністю $\lambda = 0,1 \text{ маш / час}$. Час ремонту автомашини є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону розподілу з параметром $\mu = 0,5 \text{ маш / час}$. Визначити параметри системи.

Розв'язання. Розглядаємо систему як замкнуту СМО. Розмічений граф цієї системи має вигляд (рис.2.14):

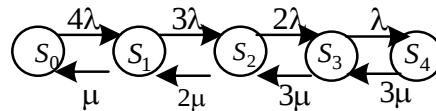


Рис. 2.14

Можливі стани системи:

S_0 – всі автомашини в робочому стані, заявок на ремонт не надходило; S_1 – одна заявка на ремонт автомашини обслуговується, інші автомобілі в робочому стані; S_2 – две заявки на ремонт автомобіля обслуговується, інші автомобілі в робочому стані; S_3 – три заявки на ремонт автомобіля обслуговується, четвертий автомобіль в робочому стані; S_4 – три заявки обслуговуються, одна автомашини в черзі на ремонт.

Число можливих станів системи – скінченна множина, тому існують їхні граничні ймовірності: p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 – граничні ймовірності станів S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 .

Інтенсивність потоку заявок (навантаження каналу) на ремонт автомобіля

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2.$$

Зв'язок між станами S_0 і S_1 залежить від інтенсивності вхідних і вихідних потоків, для S_0 вхідним потоком є потік інтенсивністю μ , вихідним – потік інтенсивністю λ . Тому граничні ймовірності цих станів пов'язані співвідношенням

$$\mu p_1 = 4\lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{4\lambda}{\mu} p_0 = \left| \frac{\lambda}{\mu} = \rho \right| = 4\rho p_0; \quad p_1 = 4\rho p_0.$$

Співвідношення для граничних ймовірностей станів S_1 і S_2 побудовані за аналогічним принципом

$$2\mu p_2 = 3\lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{3\lambda}{2\mu} p_1 = \left| \frac{\lambda}{\mu} = \rho \right| = 1,5\rho p_1; \quad p_2 = 1,5\rho p_1.$$

Зв'язок граничних ймовірностей станів S_2 і S_3 , S_3 і S_4 має вигляд

$$p_3 = \frac{2}{3}\rho p_2; \quad p_4 = \frac{1}{3}\rho p_3.$$

Граничні ймовірності станів зв'язані нормувальною умовою (1.2)

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

З урахуванням отриманих рівнянь зв'язку сусідніх станів системи, знаходимо граничну ймовірність p_0

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 4\rho p_0 \\ p_2 &= 1,5\rho p_1 = 1,5\rho \cdot 4\rho p_0 = 6\rho^2 p_0 \\ p_3 &= \frac{2}{3}\rho p_2 = \frac{2}{3}\rho \cdot 6\rho^2 p_0 = 4\rho^3 p_0 \\ p_4 &= \frac{1}{3}\rho p_3 = \frac{1}{3}\rho \cdot 4\rho^3 p_0 = \frac{4}{3}\rho^4 p_0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 + 4\rho p_0 + 6\rho^2 p_0 + 4\rho^3 p_0 + \frac{4}{3}\rho^4 p_0 = 1$$

$$p_0(1 + 4\rho + 6\rho^2 + 4\rho^3 + \frac{4}{3}\rho^4) = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\rho + 6\rho^2 + 4\rho^3 + \frac{4}{3}\rho^4} \approx 0,482.$$

Знайдене значення граничної ймовірності p_0 дозволяє обчислити граничні ймовірності інших станів системи

$$p_1 = 4\rho p_0 \approx 4 \cdot 0,2 \cdot 0,482 \approx 0,386;$$

$$p_2 = 6\rho^2 p_0 \approx 6 \cdot (0,2)^2 \cdot 0,482 \approx 0,116;$$

$$p_3 = 4\rho^3 p_0 \approx 4 \cdot (0,2)^3 \cdot 0,482 \approx 0,015;$$

$$p_4 = \frac{4}{3}\rho^4 p_0 \approx \frac{4}{3} \cdot (0,2)^4 \cdot 0,482 \approx 0,001.$$

Середня довжина черги на ремонт $L_{оч} = 1 \cdot p_4 = 1 \cdot 0,001 = 0,001$.

Середнє число заявок на ремонт в системі

$$\begin{aligned} L_{сист} &= 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \\ &= 1 \cdot 0,386 + 2 \cdot 0,116 + 3 \cdot 0,015 + 4 \cdot 0,001 = 0,667. \end{aligned}$$

Середнє число співробітників, які не зайняті ремонтом автомашин.

$$\begin{aligned} N_0 &= 3 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = \\ &= 3 \cdot 0,482 + 2 \cdot 0,386 + 1 \cdot 0,116 = 2,334. \end{aligned}$$

2.9. СМО з обмеженим часом очікування

На практиці часто зустрічаються СМО з так званими «нетерплячими» заявками. Такі заявки можуть залишити чергу, якщо час очікування перевищує деяку величину. Зокрема, такого роду заявки виникають в різних технологічних системах, в яких затримка з початком обслуговування може призвести до втрати якості продукції, в системах оперативного управління, коли термінові повідомлення втрачають цінність (або навіть сенс), якщо вони не надходять на обслуговування протягом певного часу.

У найпростіших математичних моделях таких систем передбачається, що заявка може перебувати в черзі випадковий час, розподілений за показниковим законом з деяким параметром ν , тобто можна умовно вважати, що кожна заявка, яка знаходиться у черзі на обслуговування, може покинути систему з інтенсивністю ν .

Розглянемо СМО із заявками, які можуть залишити чергу, якщо час очікування перевищує деяку величину. Передбачається, що заявка може перебувати в черзі випадковий час, який розподіляється за показниковим законом з параметром ν , тобто ν - середня кількість заявок, які залишають чергу в одиницю часу, інтенсивність виходу заявок з черги. Середній час очікування в черзі $t_{оч.} = \frac{1}{\nu}$.

Нехай СМО містить n обслуговуючих каналів. На вхід надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо в момент надходження вимоги є вільний канал, то він негайно приступає до обслуговування заявки. Кожен канал може обслуговувати одночасно тільки одну заявку і функціонувати незалежно від інших каналів. Якщо канали зайняті, то заявка встає в чергу і очікує обслуговування. Час обслуговування заявки є випадкова величина, вона підпорядковується показниковому закону з параметром μ . Середній час обслуговування заявки $t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$.

Розмічений граф станів багатоканальної СМО з обмеженим часом очікування на рис. 2.15:

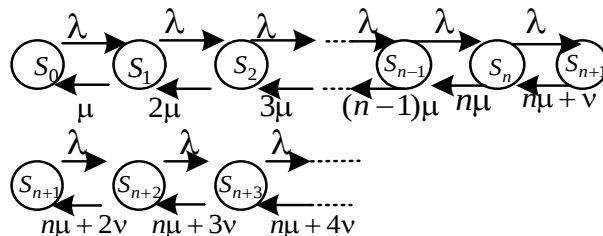


Рис. 2.15

Можливі стани СМО :

S_0 – всі канали вільні, заявок немає; S_1 – один канал зайнятий, інші вільні, черги немає; S_2 – два канали зайняті, інші вільні, черги немає; ; S_n – всі канали зайняті, в черзі немає заявок; S_{n+1} – всі канали зайняті, в черзі 1 заявка, яка може залишити чергу, не дочекавшись обслуговування; S_{n+2} – всі канали зайняті, в черзі 2 заявки, які можуть залишити чергу, не дочекавшись обслуговування.

Стан S_0 зв'язано з станом S_1 двома потоками у протилежних напрямках з інтенсивністю λ и μ . Для граничних ймовірностей рів-

няння Колмогорова записуємо за правилом: для обраного стану ймовірності з інтенсивністю вхідного потоку записуємо в ліву частину рівняння, а ймовірності з інтенсивністю вихідного потоку записуємо в праву частину рівняння, отже

$$(S_0): \lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0;$$

$$(S_1): \lambda p_0 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_1 \Rightarrow 2\mu p_2 = \lambda p_1;$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho p_0 = \frac{1}{2!} \rho^2 p_0;$$

$$(S_2): \lambda p_1 + 3\mu p_3 = \lambda p_2 + 2\mu p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\mu p_3 = \lambda p_2; p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \rho \cdot \rho^2 p_0 = \frac{1}{3!} \rho^3 p_0;$$

.....

$$(S_{n-1}): \lambda p_{n-1} + n\mu p_n = \lambda p_{n-2} + (n\mu - 1)p_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\mu p_n = \lambda p_{n-1}; p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{1}{n!} \rho^n p_0;$$

$$(S_n): \lambda p_n + (n\mu + \nu) p_{n+1} = \lambda p_n + n\mu p_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n\mu + \nu) p_{n+1} = \lambda p_n; p_{n+1} = \frac{\lambda}{(n\mu + \nu)} p_n = \frac{\lambda}{(n\mu + \nu)} \frac{1}{n!} \rho^n p_0;$$

$$(S_{n+1}): \lambda p_n + (n\mu + 2\nu) p_{n+2} = \lambda p_{n+1} + (n\mu + \nu) p_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n\mu + 2\nu) p_{n+2} = \lambda p_{n+1};$$

$$p_{n+2} = \frac{\lambda}{(n\mu + 2\nu)} p_{n+1} = \frac{\lambda^2}{(n\mu + 2\nu)(n\mu + \nu)} \frac{1}{n!} \rho^n p_0;$$

.....

Приклад 2.9. У пункті СТО є дві лінії обслуговування. Потік автомобілів передбачається найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 5$ автомобілів/год. Час обслуговування кожної автомашини є випадковою величиною, яка підпорядковується показниковому закону з параметром розподілу $\mu = 4$ автомобіля/год. Середнє число відвідувачів, які залишають чергу, не дочекавшись обслуговування, дорівнює $\nu = 3$ автомобіля / год. Визначити граничні ймовірності цієї СМО,

середню довжину черги, середнє число заявок в системі, абсолютну і відносну пропускні здатності, середнє число зайнятих ліній.

Ров'язання. Розмічений граф цієї багатоканальної системи обслуговування з обмеженим часом очікування має вигляд (рис. 2.16):

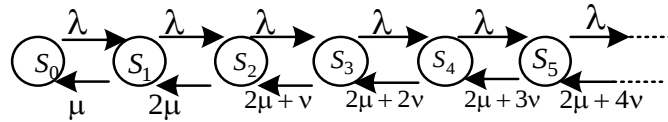


Рис. 2.16

Число станів заданої СМО є скінченною множиною, тому існують їхні граничні ймовірності: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – граничні ймовірності станів $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$.

Складаємо рівняннями Колмогорова для ймовірностей $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ заданої СМО

$$(S_0): \lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0;$$

$$(S_1): \lambda p_0 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_1 \Rightarrow 2\mu p_2 = \lambda p_1;$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho p_0 = \frac{1}{2} \rho^2 p_0;$$

$$(S_2): \lambda p_1 + (2\mu + \nu) p_3 = \lambda p_2 + 2\mu p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\mu + \nu) p_3 = \lambda p_2; p_3 = \frac{\lambda}{(2\mu + \nu)} p_2 = \frac{\lambda}{(2\mu + \nu)} \frac{1}{2} \rho^2 p_0;$$

$$p_4 = \frac{\lambda}{(2\mu + 2\nu)} p_3 = \frac{\lambda}{(2\mu + 2\nu)} \frac{\lambda}{(2\mu + \nu)} \frac{1}{2} \rho^2 p_0;$$

.....

Враховуючі параметри СМО, знаходимо з рівнянь Колмогорова залежність граничних ймовірностей $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ від ймовірності p_0 стану S_0 (всі канали вільні, заявок немає)

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{5}{4} p_0 = 1,25 p_0;$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{5}{8} 1,25 p_0 \approx 0,781 p_0;$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{2\mu + \nu} p_2 \approx \frac{5}{8+3} 0,781 p_0 \approx 0,355 p_0;$$

$$p_4 = \frac{\lambda}{2\mu + 2\nu} p_3 \approx \frac{5}{8+6} 0,355 p_0 \approx 0,127 p_0;$$

$$p_5 = \frac{\lambda}{2\mu + 3\nu} p_4 \approx \frac{5}{8+9} 0,355 p_0 \approx 0,037 p_0;$$

$$p_6 = \frac{\lambda}{2\mu + 4\nu} p_5 \approx \frac{5}{8+12} 0,037 p_0 \approx 0,009 p_0;$$

$$p_7 = \frac{\lambda}{2\mu + 5\nu} p_6 \approx \frac{5}{8+15} 0,009 p_0 \approx 0,002 p_0;$$

$$p_8 = \frac{\lambda}{2\mu + 6\nu} p_7 \approx \frac{5}{8+18} 0,002 p_0 \approx 0,000 p_0.$$

З нормувальної умови (1.2)

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + \dots = 1$$

знаходимо ймовірність стану S_0 : $p_0 \approx 0,281$.

Ймовірності інших станів :

$$p_1 \approx 0,351; \quad p_2 \approx 0,219; \quad p_3 \approx 0,100; \quad p_4 \approx 0,036;$$

$$p_5 \approx 0,010; \quad p_6 \approx 0,003; \quad p_7 \approx 0,000; \quad p_8 \approx 0,000.$$

Граничні ймовірності станів $S_9, S_{10}, \dots$ вважаємо рівними нулю, оскільки обчислення округляємо до трьох цифр після коми.

Отримані дані дозволяють обчислювати характеристики системи:

середня довжина черги, як математичне сподівання числа заявок в черзі

$$L_{оч} \approx 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3p_5 + 4 \cdot p_6 \approx 0,214;$$

середнє число заявок в системі, як математичне сподівання числа заявок в системі

$$L_{сист} \approx 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3p_3 + 4 \cdot p_4 + 5p_5 + 6 \cdot p_6 \approx 1,301.$$

Без обслуговування систему залишають в середньому $\nu L_{сист}$ автомобілів за годину, де ν – інтенсивність відходу з черги без обслуговування. Тому з потоку λ автомобілів за годину буде обслуговано лише

$$A = \lambda - \nu L_{сист} \approx 5 - 3 \cdot 1,301 \approx 1,097 \text{ автомобілей / год.}$$

Середнє число зайнятих ліній обслуговування протягом години дорівнює

$$N_{зайн} = \frac{A}{\mu} = \frac{1,097}{4} \approx 0,274.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
2. Бабурин В. А., Полянская Т. И., Шилкина И. Д. Экономико-математические методы и модели в управлении водным транспортом. Системы массового обслуживания : учебное пособие / Бабурин В. А., Полянская Т. И., Шилкина И. Д.; СПб.: СПГУВК, 2009. – 109 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. Гефан Г. Д. Марковские процессы и системы массового обслуживания. Учебное пособие – Иркутск: Ир ГУПС, 2009. – 77 с.
5. Гильмутдинов Р. Ф., Кирпичников А. П. Математическая модель замкнутой одноканальной системы массового обслуживания. Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – № 6. – С. 189-194.
6. Емельянов А. А. Модели процессов массового обслуживания / Прикладная информатика. - 2008. - №5 (17) – С. 92-130.
7. Есипов Б. А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – Изд. Лань, 2013. – 304 с.
8. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 256 с.
9. Исследование операций и методы оптимизации. Часть 1. Лекционный курс Составитель А. А. Мицель. ТОМСК: Изд. ТУСУР, 2019. – 167 с.
10. Карандаев И. С. Исследование двойственных задач в оптимальном планировании. М.: Статистика, 1976. – 88 с.
11. Карасев А. И., Аксютин З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование. М.: Высшая школа, 1982. – 320 с.
12. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 272 с.
13. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 312 с.

14. Кремер, Б. А. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, Б А Путко, И. М. Тришин, М.Н. Фридман; Под редакцией проф. Н. Ж. Кремера. – М: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

15. Крупин В. Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В. Г. Крупин, А. Л. Павлов, Л. Г. Попов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. – 368 с.

16. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. Н., Волощенко А. Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.

17. Моисеев Н. Н., Иванюков Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 352 с.

18. Перельман М. А. Исследование операций в задачах автомобильного транспорта. Х.: ХГАДТУ, 1995. – 136 с.

19. Просветов Г. И. Теория вероятностей и математическая статистика: задачи и решения :Учебно-методическое пособие. – М: Издательство «Альфа-Пресс», 2009. – 272 с.

20. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х книгах. М.: Мир, 1985. Кн. 1. – 480 с; Кн. 2. – 496 с.

21. Юдин Д. Б., Гольденштейн Е. Г. Линейное программирование. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1963.

22. Ярхо Т. О. Метод штучного базису в курсі математичного програмування / Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. праць. Кривий Ріг: Видавничий відділ НметАУ, 2002. – Т. 1. – С.429–438.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
ЧАСТИНА I. МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	5
РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	5
1.1. Приклади задач лінійного програмування	5
1.2. Загальна задача лінійного програмування.....	9
1.3. Основна задача лінійного програмування	11
1.4. Зведення загальної задачі лінійного програмування до основної (канонічної).....	12
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДІВ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	15
2.1. Основні означення.....	15
2.2. Опуклі множини в n -вимірному просторі	19
2.3. Геометричний зміст множини розв'язків лінійної нерівності та сумісної системи лінійних нерівностей	20
2.4. Властивості задачі лінійного програмування	23
РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	26
3.1. Зміст геометричного методу	26
3.2. Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування геометричним методом.....	29
РОЗДІЛ 4. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	36
4.1. Система m лінійних рівнянь з n змінними при $m < n$	39
4.2. Алгоритм симплексного методу	44
4.3. Знаходження опорного плану за допомогою симплекс- методу	54

4.4. Метод штучного базису (двоетапний симплекс-метод)	57
4.5. Окремі випадки симплексного методу	61
РОЗДІЛ 5. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ.....	70
5.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач	70
5.2. Симетричні взаємно-двоїсті задачі лінійного програмування	72
5.3. Перша теорема двоїстості та її економічний зміст.....	75
5.4. Друга теорема двоїстості.....	76
5.5. Двоїстий симплекс-метод.....	78
5.6. Об'єктивно обумовлені оцінки та їхній економічний зміст	83
5.7. Третя теорема двоїстості	85
РОЗДІЛ 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	87
6.1. Постановка транспортної задачі. Математична модель	87
6.2. Методи знаходження початкового базисного розподілу поставок (першого опорного плану)	91
6.3. Розподільний метод розв'язання транспортної задачі	101
6.4. Метод потенціалів знаходження оптимального базисного розподілу поставок.....	105
6.5. Особливі випадки в розв'язанні транспортної задачі	108
6.6. Незбалансована транспортна задача	111
6.7. Незбалансована транспортна задача з додатковими умовами (привілеями). <i>M</i> -метод розв'язання.....	119
ЧАСТИНА II. МЕТОДИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ	123
РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ	123
1.1. Основні параметри СМО і задачі ТМО	123
1.2. Випадковий процес. Потоки подій. Найпростіший потік подій.....	124
1.3. Граф події. Рівняння Колмогорова.....	126

1.4. Граничні ймовірності станів СМО	130
1.5. Циклічний процес. Структура процесу масового обслуговування.....	134
 РОЗДІЛ II. КЛАСИФІКАЦІЯ СМО	136
2.1. Одноканальна СМО з відмовами.....	136
2.2. Багатоканальна СМО з відмовами. Задача Ерланга	138
2.3. Одноканальна СМО с необмеженою чергою	142
2.4. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою	147
2.5. СМО с фіксованим часом обслуговування.....	152
2.6. Одноканальна СМО з обмеженою чергою	154
2.7. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою	159
2.8. Замкнута СМО	165
2.9. СМО з обмеженим часом очікування	169
 ЛІТЕРАТУРА.....	175

Навчальне видання

І. А. ДМИТРИЄВ,
О. І. ДМИТРИЄВА,
Т. В. ЄМЕЛЬЯНОВА,
І. Ю. ШЕВЧЕНКО,
Т. О. ЯРХО

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск

Редактори

Комп'ютерна верстка *Н. А. Купіної*

Дизайн обкладинки *Д. Ю. Нерівні*

План р. Поз. . (н.п.)

Підписано до друку Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman Суг. Віддруковано на різнографі.

Умовн. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .

Зам. № Наклад прим. Ціна договірна

Видавництво

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25

Тел/факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

*Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002*