

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. Б. Коваленко

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Модуль 1

Навчальний посібник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2024

УДК 51+51-33](075.8)

K56

Автор

Коваленко Людмила Борисівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти:

Солодовник Тетяна Олександрівна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри педагогіки та психології управління соціальними системами ім. акад. І. А. Зязюна Національного технічного університету «ХПІ»;

Вороновська Лариса Петрівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 11 від 31 травня 2024 р.

Коваленко Л. Б.

K56 Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 284 с.

ISBN 978-966-695-612-8

Навчальний посібник спирається на аналогічне 1-ше видання (Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.) і є логічним продовженням підручника «Вища математика. Модуль 1» (авт. Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с.). Друге видання доповнено завданнями з ілюстрацією можливостей застосування табличного процесора MS Excel у розв'язанні задач з курсу вищої математики.

Розрахований на студентів будівельних спеціальностей.

УДК 51+51-33](075.8)

© Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський, 2015

© Л. Б. Коваленко, 2024

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024

ISBN 978-966-695-612-8

З М І С Т

Передмова	5
Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВИЗНАЧНИКИ.	
МАТРИЦІ.	6
Приклад розв’язання типового варіанту.	6
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	11
Розділ 2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.	41
Приклад розв’язання типового варіанту.	41
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	51
Розділ 3 ВЕКТОРИ	81
Приклад розв’язання типового варіанту.	81
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	86
Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ.	
ПРЯМА ЛІНІЯ	91
Приклад розв’язання типового варіанту.	91
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	106
Розділ 5 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ.	
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	123
Приклад розв’язання типового варіанту.	123
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	130
Розділ 6 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ.	160
Приклад розв’язання типового варіанту.	160
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	166
Розділ 7 ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ	175
Приклад розв’язання типового варіанту.	175
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	180
Розділ 8 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ	195
Приклади розв’язання типового варіанту.	195

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	207
Розділ 9 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ	237
Приклад розв’язання типового варіанту.	237
Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів	252
СПИСОК ДЖЕРЕЛ	282

ПЕРЕДМОВА

Представлений «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1» є логічним продовженням видання [1]. Разом вони утворюють навчальний комплекс по курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології.

При підготовці «Збірника тестових завдань» автор намагалася задовольнити сучасним високим вимогам у підготовці спеціалістів з урахуванням обраного студентами фаху.

Збірник містить 9 розділів, в кожному з яких за темами представлені задачі в 30 варіантах. Саме така кількість варіантів обрана з урахуванням того, що наповненість навчальних груп, як правило, не перевищує 30 осіб.

Викладач має можливість запропонувати ці завдання як контрольні або самостійні наприкінці кожної з тем для контролю рівня засвоєння вивченого матеріалу. Автор навмисно відійшла від поширеної зараз практики, коли читачеві відразу пропонують варіанти відповідей, одна з яких – вірна. На наш погляд, це звужує саме поняття тесту (“test” – перевірка, випробування), зводячи його до спроби «вгадати» правильну відповідь. Саме тому при підготовці тестових завдань автор віддала перевагу відкритій формі, при якій студент сам отримує правильну відповідь у вигляді довільного числа (або виразу), що допускає, в тому числі, й комп’ютерне тестування.

На початку кожного розділу наведений приклад розв’язання типового варіанту з посиланням на формули, розділи підручника «Вища математика. Модуль 1».

Особливістю даного навчального посібника є ілюстрація застосування табличного процесору MS EXCEL при розв’язанні задач курсу вищої математики.

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ

Розділ 1 «Збірника тестових завдань з вищої математики» присвячений темі «Лінійна алгебра. Визначники. Матриці». Для успішного розв'язання пропонуємо читачеві звернутися до відповідного розділу підручника [1] і повторити необхідний теоретичний матеріал.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 1-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

Розв'язання: Скористаємося правилом (1.2) посібника «Вища математика для менеджерів» обчислення визначників розкладанням за елементами обраного рядку (стовпця):

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} &= 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} - \\ &- 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 5(2 + 16 + 32 + 2 + 16 - 32) + 2(2 - 16 + 48 - 2 + 24 - \\ &- 32) - 3(16 + 1 + 12 + 8 - 24 + 1) = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 14 = \\ &= 180 + 48 - 42 = 186; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & +1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \\
 & = 4(20 - 8 - 9 - 6 + 12 + 20) + 1(10 - 4 - 3 - 3 + 4 + 10) - \\
 & - 8(20 - 12 + 6 - 9 + 8 - 20) = 4 \cdot 33 + 14 - 8 \cdot (-7) = 186;
 \end{aligned}$$

в) скористаємося властивістю 7 «Основних властивостей визначників» (см. п.1.1):

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 20 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \\
 & \begin{matrix} (-1) \rightarrow \\ 4 \rightarrow \\ (-2) \rightarrow \end{matrix} \\
 & = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -7 & 20 & -7 \\ -1 & 13 & -2 \\ -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 80 + 84 - 182 - 0 - 168) \\
 & = 186.
 \end{aligned}$$

Ми розв'язали задачу трьома різними способами і отримали однаковий результат. Ця самоперевірка надає нам впевненості у правильності відповіді.

Відповідь: $\Delta = 186$.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & x \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -37.$$

Розв'язання: Розкриємо визначник за правилом Саррюса (стор. 6).

$$4x + 10x + 18 - 24 - 2x^2 - 15 = 37;$$

Ми отримали квадратне рівняння, розв'яжемо його:

$$2x^2 - 14x - 16 = 0;$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0;$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = -1; \quad x_2 = 8$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Для обчислення рангу матриці скористаємося, наприклад, методом відокремлюючи мінорів (визн. 1.17).

Складемо мінор першого порядку:

$$\Delta_1 = |2| \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 1.

Складемо мінор другого порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 = 21 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 2.

Складемо мінор третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 42 + 15 - 0 - 60 + 84 = 81 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 3.

Скласти мінор четвертого порядку неможливо, тому що матриця має розмір $[3 \times 5]$, отже ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $\text{rang} A = 3$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо послідовно дії: множення матриці на число, додавання матриць

$$\begin{aligned} 2B + C &= \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 & 14 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \\ 11 & 3 & 11 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

і множення матриць

$$\begin{aligned}
 (2B + C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 99 + 3 + 0 - 52 & 33 + 6 - 55 + 13 \\ 18 + 4 + 0 + 16 & 6 + 8 - 20 - 4 \\ 0 - 1 + 0 - 40 & 0 - 2 - 55 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}. \\
 \text{Відповідь: } A &= \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося схемою знаходження оберненої матриці, запропонованою на стор. 17:

- обчислимо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 21 + 0 + 28 - 0 - 9 = 22,$$

отже, матриця не вироджена і обернена існує;

- знаходимо транспоновану матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

- обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 0) = -9;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 7) = -10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 21) = -21;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5;$$

- запишемо обернену матрицю за правилом (1.9)

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix};$$

- виконаємо перевірку за визначенням 1.15

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 24 - 9 + 7 & 18 - 18 + 0 & -12 + 9 + 3 \\ -40 + 26 + 14 & -30 + 52 + 0 & 20 - 26 + 6 \\ -56 + 21 + 35 & -42 + 42 + 0 & 28 - 21 + 15 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix}.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 1.1

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 9 & -4 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 4-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} x & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (5B - 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 1 & 11 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.2

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{21} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 3-го рядка;
 - б) за елементами 1-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -4 & x & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -68.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 13 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C + 2D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 5 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Додавання та віднімання матриць.

Завдання 1.3

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 12 \\ 2 & 0 & -6 & -3 \\ -5 & 9 & 10 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 2-го рядка;
 б) за елементами 4-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 84.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ -7 & -8 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 2B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 8 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Добуток матриць.

Завдання 1.4

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & -5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 8 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 2-го рядка;
 - за елементами 4-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & -5 & x \\ -3 & x & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 11$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ -6 & 0 & 8 & -11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & 4 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення визначників.

Завдання 1.5

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 8 & -6 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ 5 & 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 3-го рядка;
 - за елементами 2-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ x & 7 & 2 \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = -92.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (3B + 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -7 \\ 0 & 4 \\ -4 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Завдання 1.6

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 10 & 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 3-го рядка;
 - за елементами 4-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ x & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -42.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ - & 1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C - 7D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення визначників другого та третього порядку.

Завдання 1.7

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 9 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{24} .
Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ x & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 125.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & 6 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 8B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 8 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Ранг матриці.

Завдання 1.8

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & 15 \\ -1 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{31} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 88$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & -9 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \\ 4 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.9

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & -1 \\ 7 & -11 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & -6 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{31} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
 б) за елементами 2-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & x \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80.$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (6C - 7D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор та алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.10

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{34} .
Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix} = -80$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 & 4 & -2 \\ 10 & 3 & -8 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + 5C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -8 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правило обчислення визначника n -порядку.

Завдання 1.11

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 & 8 \\ 9 & -8 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{33} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 2-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & x & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & x \end{vmatrix} = 4$. 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 9 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правила обчислення за рядком (стовпцем) з попереднім отриманням нулів.

Завдання 1.12

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & -6 \\ -5 & 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11} .
Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 3-го рядка;
 - за елементами 1-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 184.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \\ -5 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 4D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 8 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.13

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \\ 7 & -6 & -9 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{22} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \\ 6 & x & 1 \end{vmatrix} = -14$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -7 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -7 & 1 & 5 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 2D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор та алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.14

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{44} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
 б) за елементами 3-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 4 & 2 & -2 \\ x & -6 & -1 \end{vmatrix} = -166.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (6B - 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Дії над матрицями. Транспонування матриць.

Завдання 1.15

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 10 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 3-го рядка;
 - за елементами 1-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & x \\ 5 & x & 1 \end{vmatrix} = 40.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 7B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -5 & 0 \\ 8 & 6 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Дії над матрицями. Множення матриці на число.

Завдання 1.16

1. Дано визначник четвертого порядку: Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} .

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 7 & 1 & 7 & -8 \\ 4 & 8 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ x & 2 & -1 \\ 6 & x & 4 \end{vmatrix} = -119.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ -6 & 0 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -7 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Властивості визначників.

Завдання 1.17

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ -5 & 10 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{22} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
 б) за елементами 3-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & x \\ 1 & -2 & 4 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} = 99.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 11 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & -1 \\ -5 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (4C - 3D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ 8 & -1 & 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Правило обчислення визначників n -го порядку.

Завдання 1.18

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 13 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ 6 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{43} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & x & -2 \\ x & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -26$. 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (7B + 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Обернена матриця.

Завдання 1.19

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -9 & 8 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{14} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- за елементами 1-го рядка;
 - за елементами 4-го стовпця;
 - попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ x & -4 & 5 \end{vmatrix} = -30$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 6B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -8 \\ 1 & 4 \\ -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Додавання та віднімання визначників.

Завдання 1.20

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & -4 & 6 \\ -6 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{41} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 3-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} = 27$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 2D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -2 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Мінор і алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.21

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 10 & 3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 2-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & x \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} = 23$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 9 & 2 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = (5B - 2C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \\ -5 & -1 \\ 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Правила обчислення визначників другого і третього порядків.

Завдання 1.22

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 9 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{34} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
 б) за елементами 2-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ -2 & -3 & x \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 66.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C + 4D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -7 \\ 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Обернена матриця.

Завдання 1.23

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 3 \\ 11 & -1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{44} .
Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 2-го рядка;
 - б) за елементами 3-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} 8 & 4 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -3 \end{vmatrix} = -70$.
3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = 6B - C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Властивості визначників.

Завдання 1.24

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -7 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 & 4 \\ 9 & -9 & -6 & 4 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{14} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & x & 9 \\ x & -1 & 2 \end{vmatrix} = -111$. 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C + 3$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & 9 & 2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Мінор і алгебраїчне доповнення.

Завдання 1.25

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 15 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{21} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
б) за елементами 3-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 5 & -5 & x \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 23$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (2C + 5D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Дії над матрицями. Транспонування матриць.

Завдання 1.26

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 & 3 \\ -1 & 6 & -7 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -5 \\ 10 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{33} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 4-го рядка;
 б) за елементами 2-го стовпця;
 в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 & -7 & x \\ x & 4 & 2 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -138.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ -8 & 7 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (4B - 3C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & -6 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 8 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 10 \\ -6 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Правило обчислення визначників n -го порядку.

Завдання 1.27

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{42} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 4-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 2 & x & 1 \\ x & -1 & 5 \end{vmatrix} = -204$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot C - 5D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -7 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -4 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Властивості визначників.

Завдання 1.28

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ -11 & -4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 6 & -2 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{12} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 1-му рядку.

2. Знайти x з рівняння
- $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & x \\ 9 & x & 3 \end{vmatrix} = 223.$$
3. Знайти ранг матриці A , якщо
- $$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & -5 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 7 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = 7B + C \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -2 \\ 0 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Добуток матриць.

Завдання 1.29

1. Дано визначник четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 11 \\ 6 & -6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} . Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
б) за елементами 2-го стовпця;
в) попередньо отримав нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ x & 4 & 2 \\ -1 & 7 & x \end{vmatrix} = -44$. 3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = B \cdot (3C - 5D)$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ -2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ 0 & 13 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. *Теоретичне питання.* Обернена матриця. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Завдання 1.30

1. Дано визначник четвертого порядку:
- $$\begin{vmatrix} 7 & 9 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$
- Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{11} . Обчислити визначник, розкриваючи його
- а) за елементами 4-го рядка;
 - б) за елементами 2-го стовпця;
 - в) попередньо отримав нулі у 3-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x \\ 10 & x & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 110.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ -8 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (2B + 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 6 \\ -7 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 5 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Теоретичне питання. Ранг матриці.

Розділ 2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання:

а) розв'яжемо систему за правилами Крамера. Для цього обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99$$

й три допоміжних визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -12 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -108 - 15 + 48 + 18 - 90 + 48 = -99,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & -12 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 144 - 45 - 24 + 24 - 45 + 144 = 198,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 12 - 72 - 27 - 72 - 12 = -198.$$

За формулами Крамера (1.14) отримаємо результат:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-99}{-99} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{198}{-99} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-198}{-99} = 2.$$

Зробимо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

б) розв'яжемо систему матричним методом. Випишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо оберену до A матрицю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -(-16 + 5) = 11,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 8) = 23,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix};$$

і скористаємося формулою (1.18):

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -198 + 96 + 3 \\ 99 + 168 - 69 \\ -99 - 60 - 39 \end{pmatrix} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -99 \\ 198 \\ -198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. Для зручності запису скористаємося розширеною матрицею (1.16) і виконаємо елементарні перетворення, а саме: поміняємо місцями перший та другий рядки;

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim$$

помножимо перший рядок на (-2) , (-5) , (-3) та додамо його до другого, третього, четвертого рядків відповідно;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow (-2), (-5), (-3) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \sim$$

помножимо другий рядок на $\frac{7}{3}$ та додамо до третього рядка, а четвертий рядок скоротимо на 2;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 7 & -33 & 11 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \frac{7}{3} \\ \downarrow :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -\frac{190}{3} & \frac{89}{3} & \frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \cdot 3 \sim$$

помножимо третій рядок на 3, щоб позбутися знаменників; поміняємо місцями третій та четвертий рядки; помножимо третій рядок на $-\frac{190}{8} = -\frac{95}{4}$ і додамо до четвертого рядка;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{95}{4}]{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{261}{4} & \frac{783}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{:\frac{261}{4}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Нагадаємо, що першому стовпцю відповідають коефіцієнти при невідомому x_1 , другому – при x_2 , третьому – при x_3 , четвертому – при x_4 .

Отже, з четвертого рядка розширеної матриці отримаємо невідоме x_4 :

$$x_4 = 3.$$

З третього рядка, після підстановки знайденого x_4 обчислимо x_3 :

$$-8x_3 + x_4 = -5; \quad -8x_3 + 3 = -5; \quad -8x_3 = -8;$$

$$x_3 = 1.$$

З другого, відповідно – x_2 :

$$-3x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 17; \quad -3x_2 - 13 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 17;$$

$$x_2 = -2.$$

І, нарешті, x_1 :

$$x_1 - (-2) + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3;$$

$$x_1 = 1.$$

Виконаємо перевірку. Для цього підставимо отримані значення невідомих у перше рівняння системи:

$$2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) - 1 + 4 \cdot 3 = 23; \quad 23 = 23.$$

Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 3$.

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 14x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: При розв'язанні однорідних систем будемо застосовувати висновки теореми 1.4.

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 40 + 16 - 3 - 4 - 20 + 24 = 53 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці системи дорівнює трьом ($r = n$), а за теоремою 4.1 відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -14 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 28 - 180 + 140 + 54 - 28 = 0.$$

Ранг матриці менший 3 (кількості невідомих), тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Виключимо із системи, наприклад, третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Положимо $x_3 = k$, де k - довільне дійсне число. Виразимо x_1 і x_2 через k :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -5k \\ 4x_1 + 2x_2 = -2k \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5k & 1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -10k + 2k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5k \\ 4 & -2k \end{vmatrix} = -6k + 20k = 14k.$$

Остаточно маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8k}{2} = -4k;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14k}{2} = 7k.$$

Відповідь: $x_1 = -4k$; $x_2 = 7k$; $x_3 = k$, де $k \in \mathbb{R}$.

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 + x_6 = 37 \\ 5x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 11x_4 + 2x_5 - 13x_6 = 44 \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 25x_5 + 6x_6 = -68 \\ 12x_1 - 8x_2 + 15x_3 + 6x_4 + 9x_5 - 11x_6 = -18 \\ 7x_1 + 22x_2 + 8x_3 - 4x_4 - 13x_5 + 19x_6 = 79 \\ 31x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 11x_4 + 7x_5 - 6x_6 = 196 \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Заповнимо комірки таблиці в EXCEL коефіцієнтами при невідомих та стовпцем вільних членів:

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2		2	-3	1	-5	6	1	37	
3		5	9	-6	-11	2	-13	44	
4		-3	5	7	8	-25	6	-68	
5		12	-8	15	6	9	-11	-18	
6		7	22	8	-4	-13	19	79	
7		31	5	-4	-11	7	-6	196	
8									

Обчислимо визначник системи за допомогою функції МОПРЕД(масив) або (в залежності від версії) MDETERM (масив):

I11 : ✕ ✓ f _x =MDETERM(B9:G14)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10		5	9	-6	-11	2	-13		
11	Δ=	-3	5	7	8	-25	6	=	29818380
12		12	-8	15	6	9	-11		
13		7	22	8	-4	-13	19		
14		31	5	-4	-11	7	-6		

Аналогічно обчислимо шість допоміжних визначників та скористаємося формулами Крамера:

Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1

K18 X ✓ fx =18/11											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
16		37	-3	1	-5	6	1				
17		44	9	-6	-11	2	-13				
18	$\Delta_1 =$	-68	5	7	8	-25	6	=	149091900	$x_1 =$	5
19		-18	-8	15	6	9	-11				
20		79	22	8	-4	-13	19				
21		196	5	-4	-11	7	-6				
22											
23		2	37	1	-5	6	1				
24		5	44	-6	-11	2	-13				
25	$\Delta_2 =$	-3	-68	7	8	-25	6	=	0	$x_2 =$	0
26		12	-18	15	6	9	-11				
27		7	79	8	-4	-13	19				
28		31	196	-4	-11	7	-6				
29											
30		2	-3	37	-5	6	1				
31		5	9	44	-11	2	-13				
32	$\Delta_3 =$	-3	5	-68	8	-25	6	=	-59636760	$x_3 =$	-2
33		12	-8	-18	6	9	-11				
34		7	22	79	-4	-13	19				
37		2	-3	1	37	6	1				
38		5	9	-6	44	2	-13				
39	$\Delta_4 =$	-3	5	7	-68	-25	6	=	-119273520	$x_4 =$	-4
40		12	-8	15	-18	9	-11				
41		7	22	8	79	-13	19				
42		31	5	-4	196	7	-6				
43											
44		2	-3	1	-5	37	1				
45		5	9	-6	-11	44	-13				
46	$\Delta_5 =$	-3	5	7	8	-68	6	=	29818380	$x_5 =$	1
47		12	-8	15	6	-18	-11				
48		7	22	8	-4	79	19				
49		31	5	-4	-11	196	-6				
50											
51		2	-3	1	-5	6	37				
52		5	9	-6	-11	2	44				
53	$\Delta_6 =$	-3	5	7	8	-25	-68	=	89455140	$x_6 =$	3
54		12	-8	15	6	9	-18				
55		7	22	8	-4	-13	79				

Відповідь: $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = -4, x_5 = 1, x_6 = 3$

б) розв'яжемо систему матричним методом. Матриці A і B мають вигляд:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2	-3	1	-5	6	1		37
2		5	9	-6	-11	2	-13		44
3	$A =$	-3	5	7	8	-25	6	$B =$	-68
4		12	-8	15	6	9	-11		-18
5		7	22	8	-4	-13	19		79
6		31	5	-4	-11	7	-6		196

Зауважимо, що визначник матриці вже обчислений у попередньому пункті. Транспонуємо матрицю:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
7							
8		2	5	-3	12	7	31
9		-3	9	5	-8	22	5
10		1	-6	7	15	8	-4
11	$A^T =$	-5	-11	8	6	-4	-11
12		6	2	-25	9	-13	7
13		1	-13	6	-11	19	-6
14							

The formula bar shows the formula: `=TRANSPOSE(B1:G6)`.

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

[illegible]

Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1

52	$A_{31}^- =$	9	5	-8	22	5	=	2382966	$A_{32}^- =$	-3	5	-8	22	5	=	617382
53		-11	8	6	-4	-11				-5	8	6	-4	-11		
54		2	-25	9	-13	7				6	-25	9	-13	7		
55		-13	6	-11	19	-6				1	6	-11	19	-6		
56																
57		2	5	12	7	31				2	5	-3	7	31		
58		-3	9	-8	22	5				-3	9	5	-8	22	5	
59	$A_{13}^- =$	-5	-11	6	-4	-11	=	533316	$A_{14}^- =$	-5	-11	8	-4	-11	=	1280994
60		6	2	9	-13	7				6	2	-25	-13	7		
61		1	-13	-11	19	-6				1	-13	6	19	-6		
62																
63		2	5	-3	12	31				2	5	-3	12	7		
64		-3	9	5	-8	5				-3	9	5	-8	22		
65	$A_{15}^- =$	-5	-11	8	6	-11	=	606666	$A_{16}^- =$	-5	-11	8	6	-4	=	-834564
66		6	2	-25	9	7				6	2	-25	9	-13		
67		1	-13	6	-11	-6				1	-13	6	-11	19		
68																
69		5	-3	12	7	31				2	-3	12	7	31		
70		9	5	-8	22	5				-3	5	-8	22	5		
71	$A_{11}^- =$	-6	7	15	8	-4	=	-5375802	$A_{12}^- =$	1	7	15	8	-4	=	-1225194
72		2	-25	9	-13	7				6	-25	9	-13	7		
73		-13	6	-11	19	-6				1	6	-11	19	-6		
74																
75		2	5	12	7	31				2	5	-3	7	31		
76		-3	9	-8	22	5				-3	9	5	-8	22	5	
77	$A_{13}^- =$	1	-6	15	8	-4	=	-1254552	$A_{14}^- =$	1	-6	7	8	-4	=	428202
78		6	2	9	-13	7				6	2	-25	-13	7		
79		1	-13	-11	19	-6				1	-13	6	19	-6		
80																
81		2	5	-3	12	31				2	5	-3	12	7		
82		-3	9	5	-8	5				-3	9	5	-8	22		
83	$A_{15}^- =$	1	-6	7	15	-4	=	158658	$A_{16}^- =$	1	-6	7	15	8	=	221448
84		6	2	-25	9	7				6	2	-25	9	-13		
85		1	-13	6	-11	-6				1	-13	6	-11	19		
86																
89	$A_{11}^- =$	-6	7	15	8	-4	=	-1424251	$A_{12}^- =$	1	7	15	8	-4	=	-314377
90		-11	8	6	-4	-11				-5	8	6	-4	-11		
91		-13	6	-11	19	-6				1	6	-11	19	-6		
92																
93		2	5	12	7	31				2	5	-3	7	31		
94		-3	9	-8	22	5				-3	9	5	-8	22	5	
95	$A_{13}^- =$	1	-6	15	8	-4	=	-1793926	$A_{14}^- =$	1	-6	7	8	-4	=	418281
96		-5	-11	6	-4	-11				-5	-11	8	-4	-11		
97		1	-13	-11	19	-6				1	-13	6	19	-6		
98																
99		2	5	-3	12	31				2	5	-3	12	7		
100		-3	9	5	-8	5				-3	9	5	-8	22		
101	$A_{15}^- =$	1	-6	7	15	-4	=	567159	$A_{16}^- =$	1	-6	7	15	8	=	-320996
102		-5	-11	8	6	-11				-5	-11	8	6	-4		
103		1	-13	6	-11	-6				1	-13	6	-11	19		
104																
105		5	-3	12	7	31				2	-3	12	7	31		
106		9	5	-8	22	5				-3	5	-8	22	5		
107	$A_{11}^- =$	-6	7	15	8	-4	=	794777	$A_{12}^- =$	1	7	15	8	-4	=	-1337521
108		-11	8	6	-4	-11				-5	8	6	-4	-11		
109		2	-25	9	-13	7				6	-25	9	-13	7		
110																
111		2	5	12	7	31				2	5	-3	7	31		
112		-3	9	-8	22	5				-3	9	5	-8	22	5	
113	$A_{13}^- =$	1	-6	15	8	-4	=	-285838	$A_{14}^- =$	1	-6	7	8	-4	=	-612987
114		-5	-11	6	-4	-11				-5	-11	8	-4	-11		
115		6	2	9	-13	7				6	2	-25	-13	7		
116																
117		2	5	-3	12	31				2	5	-3	12	7		
118		-3	9	5	-8	5				-3	9	5	-8	22		
119	$A_{15}^- =$	1	-6	7	15	-4	=	434907	$A_{16}^- =$	1	-6	7	15	8	=	275872
120		-5	-11	8	6	-11				-5	-11	8	6	-4		
121		6	2	-25	9	7				6	2	-25	9	-13		

Сформуємо обернену матрицю:

122																	
123				-612184	-661108	181976	43704	-95364	1130236							37	
124				-3177167	732451	-1293122	374697	1153503	-443812							44	
125				2382966	617382	533316	1280994	606666	-834564							-68	
126	$A^{-1} =$	1/29818380		-5375802	-1225194	-1254552	428202	158658	221448							-18	
127				-1424251	-314377	-1793926	418281	567159	-320996							79	
128				794777	-1337521	-285838	-612987	434907	275872							196	
129																	

та знайдемо розв'язок системи

D130				=MMULT(D123:I128;K123:K128)		
	A	B	C	D	E	F
129						
130				149091900		5
131				0		0
132	X=	1/29818380		-59636760	=	-2
133				-119273520		-4
134				29818380		1
135				89455140		3
136						

Відповідь: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $x_4 = -4$, $x_5 = 1$, $x_6 = 3$

**Завдання для практичних занять
та самостійної роботи студентів****Завдання 2.1**

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 58 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -10 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = -18 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 29 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \end{array}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 + x_6 = -5 \\ 2x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 7x_4 + 2x_5 - 6x_6 = 57 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 5x_6 = 36 \\ 4x_1 + 19x_2 + 15x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 10x_6 = 23 \\ 7x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 22x_5 - 7x_6 = -14 \\ 9x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 4x_6 = 67 \end{cases}$$

Завдання 2.2

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -48 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 36 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 35 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 9x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 5x_5 + 2x_6 = 26 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 17 \\ -3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 4x_4 + 13x_5 + 5x_6 = -14 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 10x_6 = -37 \\ 7x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 11x_5 - 7x_6 = -20 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 7x_5 - 5x_6 = -56 \end{cases}$$

Завдання 2.3

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -39 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = -27 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -8 \\ -3x_1 + 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 29x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 32 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 12x_6 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 9x_6 = 43 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 11x_5 + 6x_6 = -16 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 4x_5 - 7x_6 = -11 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 13x_5 + 5x_6 = 14 \end{cases}$$

Завдання 2.4

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 33 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 & \text{б) матричним методом.} \\ -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -39 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -18 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -19 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 - 23x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = -27 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 - 4x_6 = 2 \\ -8x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + 4 + 8x_6 = 35 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 5x_6 = -9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 4x_5 - 7x_6 = -45 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 4x_6 = 44 \end{cases}$$

Завдання 2.5

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = -20 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -39 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -23 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -20 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = -9 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -7 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 19x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -16x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 - 2x_6 = -8 \\ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 11x_6 = 45 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 7x_5 - 3x_6 = -33 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 7x_6 = 36 \\ -3x_1 - x_2 + 8x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_6 = -34 \end{cases}$$

Завдання 2.6

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 19 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 32 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -24 \end{cases}$$
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 35 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\text{а) } \begin{cases} 7x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 2x_5 + 2x_6 = -11 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 - 2x_6 = -6 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 8x_6 = 41 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 3x_6 = -15 \\ 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 = 80 \\ -3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 = 16 \end{cases}$$

Завдання 2.7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
 б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
 - а) за правилами Крамера;
 - б) матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 5x_5 + x_6 = 28 \\ -6x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = -58 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 3x_6 = -8 \\ -x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 53 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 8x_5 - 2x_6 = 64 \end{cases}$$

Завдання 2.8

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 6 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -43 & \text{б) матричним методом.} \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 45 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 29x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 8x_6 = 73 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 6x_6 = -30 \\ -6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 9x_5 - x_6 = -16 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 5x_5 + 2x_6 = -12 \\ -x_1 + 8x_2 + 21x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = -28 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 + x_5 - 2x_6 = -1 \end{cases}$$

Завдання 2.9

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 13 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 43 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -21 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 13x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 9x_6 = 29 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 - 6x_6 = -73 \\ -6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 - x_6 = 90 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 2x_6 = -82 \\ -x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 + 6x_6 = -46 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 2x_6 = -75 \end{cases}$$

Завдання 2.10

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -28 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -4 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
 б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -13 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_1 + 2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -7x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
 - а) за правилами Крамера;
 - б) матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 67 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 - 6x_6 = -29 \\ -6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 - x_6 = 20 \\ 9x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 8x_4 - 6x_5 - 2x_6 = -47 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 + 6x_6 = 35 \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 57 \end{cases}$$

Завдання 2.11

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 22 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -15 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -33 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 15 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -33 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 13 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 2x_5 + 7x_6 = -71 \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 - 3x_5 - 6x_6 = -22 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 9x_5 + 12x_6 = -49 \\ 4x_1 + 18x_2 - x_3 + 5x_4 - 6x_5 - 2x_6 = 107 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 7x_6 = -39 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 8x_6 = 35 \end{cases}$$

Завдання 2.12

- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = -26 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 35 & \text{б) матричним методом.} \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -16 \end{cases}$$
- Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 31x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
- Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
 - за правилами Крамера;
 - матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 94 \\ -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 38 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 + 9x_6 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 - 6x_5 - 11x_6 = 116 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 9 \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 + 8x_6 = -16 \end{cases}$$

Завдання 2.13

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 = -63 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -13 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = -20 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 - 3x_6 = -1 \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 2x_6 = -7 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 9x_5 - 9x_6 = 117 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 6x_5 + 5x_6 = 119 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 + 2x_6 = 67 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 - 11x_6 = -105 \end{cases}$$

Завдання 2.14

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 28 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 19 \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 = -14 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} 5x_1 - 11x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4 + 7x_5 - 3x_6 = -36 \\ -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 - 3x_6 = -31 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 9x_6 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 6x_5 + 7x_6 = -38 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 - x_5 + 12x_6 = -29 \\ -x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 5x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 66 \end{cases}$$

Завдання 2.15

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -54 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -28 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -27x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
 - а) за правилами Крамера;
 - б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 - 3x_6 = 41 \\ -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 7x_4 + 2x_5 - x_6 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 4x_6 = 27 \\ -7x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 7x_6 = -12 \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 - 6x_6 = -21 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 27 \end{cases}$$

Завдання 2.16

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -9 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 27 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 8x_5 - 3x_6 = 62 \\ -3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 - x_6 = -25 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 3x_6 = -50 \\ -8x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 7x_6 = -50 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 - x_5 + 3x_6 = 50 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 6x_5 + 4x_6 = 46 \end{cases}$$

Завдання 2.17

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -7 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 51 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 32 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -19x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 - 3x_6 = 83 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 - x_6 = 17 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 - 7x_6 = -52 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 + 9x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 13 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 9x_5 + 2x_6 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 + 4x_6 = 61 \end{cases}$$

Завдання 2.18

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -7 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -20 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 15x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 8x_5 - 3x_6 = -17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 5x_6 = 4 \\ x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 - 7x_6 = 16 \\ 8x_1 + 5x_2 - x_3 + 9x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 63 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 3x_5 - 5x_6 = -48 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 4x_6 = 6 \end{cases}$$

Завдання 2.19

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 23 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -36 \\ 2x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -15 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 23x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + x_6 = 29 \\ -6x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 5x_4 + x_5 + 5x_6 = -11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 10x_4 + 5x_5 - 2x_6 = -18 \\ 8x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 67 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 3x_5 - 5x_6 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 9x_4 + 7x_5 - 3x_6 = 32 \end{cases}$$

Завдання 2.20

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 & \text{б) матричним методом.} \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 23 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -16 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 13x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 9x_6 = 12 \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 + 5x_6 = -10 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 12x_6 = 20 \\ 5x_1 - 7x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 52 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 9x_5 + 4x_6 = -32 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 6 \end{cases}$$

Завдання 2.21

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 & \text{а) за правилами Крамера;} \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 & \text{б) матричним методом.} \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -33 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 26x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 9x_6 = 58 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 + 5x_6 = 63 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 5x_5 + 9x_6 = 117 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 54 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 + 4x_6 = 81 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 17 \end{cases}$$

Завдання 2.22

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 29 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 28 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -25 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 16x_1 + 9x_2 - 24x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 - 8x_6 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 = 58 \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 116 \\ 2x_1 + 12x_2 - x_3 - 8x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 20 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 42 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 38 \end{cases}$$

Завдання 2.23

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 + 5x_4 = -15 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 - 3x_6 = 47 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 24 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 8x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 21 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 7x_6 = 57 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 + 6x_6 = 54 \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 - x_4 + 11x_5 + 4x_6 = 102 \end{cases}$$

Завдання 2.24

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 14x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 20 \\ 6x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 40 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 49 \\ 9x_1 - 5x_2 - x_3 + 8x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 96 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 - 5x_6 = -43 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 + 4x_6 = 47 \end{cases}$$

Завдання 2.25

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -10 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 35 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 - 3x_6 = 17 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 + 5x_6 = -24 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 47 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 8x_6 = 45 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 - 5x_6 = -20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 - 2x_5 + 14x_6 = 51 \end{cases}$$

Завдання 2.26

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -4 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -26 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 11x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 8x_5 - 3x_6 = 60 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 + 11x_6 = -7 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 10 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 7x_6 = 33 \\ -x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 - 3x_6 = -73 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 - 2x_5 + 6x_6 = -3 \end{cases}$$

Завдання 2.27

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$
 а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -20 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 19 \end{cases}$$
3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
а)
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 9x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel
а) за правилами Крамера;
б) матричним методом:
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 + 8x_5 - 3x_6 = -63 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 + 2x_6 = -5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 8x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 29 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 11x_5 + 7x_6 = 2 \\ 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 36 \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 31 \end{cases}$$

Завдання 2.28

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -15 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 4x_5 + x_6 = -42 \\ -4x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 6x_6 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 3x_5 - 3x_6 = -53 \\ 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 5x_5 + 2x_6 = 55 \end{cases}$$

Завдання 2.29

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
- $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -29 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases}$$
- а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 18x_1 + 12x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 72 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 + 8x_6 = 109 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 4x_5 + 7x_6 = 6 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 9x_5 + 6x_6 = 28 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 3x_5 - 2x_6 = -53 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 60 \end{cases}$$

Завдання 2.30

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -8 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = -22 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 27x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою табличного процесору MS Excel

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 116 \\ -4x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 - 3x_5 - x_6 = 54 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 25 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 6x_6 = 49 \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 6x_5 - 2x_6 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 + 10x_6 = 71 \end{cases}$$

Розділ 3 ВЕКТОРИ

Приклад розв'язання типового варіанту

1. За даними координатами точок $A(3; -2; 8)$, $B(1; 1; 4)$ і $C(5; 2; -6)$ для зазначених векторів $\vec{a} = 3\vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CA}$; $\vec{c} = \vec{CB}$; $\vec{d} = \vec{AB}$ знайти:

а) модуль вектора $\vec{a}$;

б) скалярний та векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів:

$$\vec{BC} = (5 - 1; 2 - 1; -6 - 4) = (4; 1; -10);$$

$$\vec{AB} = (1 - 3; 1 - (-2); 4 - 8) = (-2; 3; -4);$$

$$\vec{CA} = (3 - 5; -2 - 2; 8 - (-6)) = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{CB} = -\vec{BC} = (-4; -1; 10).$$

Звідси

$$\vec{a} = (3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2); 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3; 3 \cdot (-10) - 2 \cdot (-4)) = \\ = (12 + 4; 3 - 6; -30 + 8) = (16; -3; -22);$$

$$\vec{b} = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{c} = (-4; -1; 10);$$

$$\vec{d} = (-2; 3; -4).$$

а) знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{16^2 + (-3)^2 + (-22)^2} = \sqrt{256 + 9 + 484} = \sqrt{749};$$

б) скалярний та векторний добуток обчислимо відповідно за формулами (2.8), (2.10):

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 16 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) + (-22) \cdot 14 = -328;$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -22 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 16 & -22 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + \\ + \vec{k} \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-42 - 88)\vec{i} - (224 - 44)\vec{j} + (-64 - 6)\vec{k} = \\ = -130\vec{i} - 180\vec{j} - 70\vec{k};$$

в) обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \\ -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -640 + 168 - 44 + 352 - 60 + 224 = 0;$$

г) знайдемо проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$:

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{-4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 10 \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{8 - 3 - 40}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = -\frac{35}{\sqrt{29}}.$$

2. Довести, що вектори $\vec{a}(1; -2; 1), \vec{b}(5; 4; -1), \vec{c}(3; 1; 1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}(-2; 0; 2)$ в цьому базисі.

Розв'язання: Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис лише в тому випадку, якщо вони лінійно незалежні. Щоб з'ясувати це, обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 5 - 12 + 10 + 1 = 14 \neq 0.$$

Обчислений визначник не дорівнює нулю, звідси прямує, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні та утворюють $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис. Розклад вектора $\vec{d}$ запишемо у вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, де x, y, z – невідомі числа. Векторне рівняння перепишемо у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x, y, z :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 5x + 4y - z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера. Головний визначник ми обчислили раніше, він дорівнює $\Delta = 14$. Допоміжні визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ дорівнюють:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 0 - 8 - 0 - 2 = -14;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 10 - 0 + 10 + 2 = 28;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 10 + 24 + 20 - 0 = 42.$$

За формулами Крамера отримаємо координати вектора $\vec{d}$:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

Остаточно маємо: $\vec{d} = (-1; 2; 3)$, або $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

3. Дано вектори $\vec{a}(-1; -4; 2)$, $\vec{b}(3; 2; -4)$, $\vec{c}(2; 0; 5)$.

Знайти:

а) скалярний добуток, векторний добуток та модуль векторного добутку двох векторів $4\vec{a}, -3\vec{c}$. Перевірити їх на ортогональність та колінійність;

б) мішаний добуток трьох векторів $-7\vec{a}, 4\vec{b}, 2\vec{c}$ та перевірити їх на компланарність.

Розв'язання:

а) Знайдемо координати відповідних векторів:

$$4\vec{a} = (-4; -16; 8) \text{ і } -3\vec{c} = (-6; 0; -15).$$

Їх скалярний добуток:

$$(4\vec{a}, -3\vec{c}) = -4 \cdot (-6) + (-16) \cdot 0 + 8 \cdot (-15) = -96.$$

Скалярний добуток заданих векторів не дорівнює нулю, отже вектори **не ортогональні**.

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\begin{aligned} [4\vec{a}, -3\vec{c}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -16 & 8 \\ -6 & 0 & -15 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -16 & 8 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -16 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \vec{i}(240 - 0) - \vec{j}(60 + 48) + \vec{k}(0 - 96) = 240\vec{i} - 108\vec{j} - 96\vec{k}.$$

Модуль векторного добутку

$$\begin{aligned} |[4\vec{a}, -3\vec{c}]| &= \sqrt{240^2 + (-108)^2 + (-96)^2} = \\ &= \sqrt{57600 + 11664 + 9216} = \sqrt{78480} = 12\sqrt{545}. \end{aligned}$$

Перевіримо вектори на колінійність:

$$\frac{-4}{-6} \neq \frac{-16}{0} \neq \frac{8}{-15},$$

умова колінійності не виконується, отже вектори **не колінеарні**.

б) знайдемо координати відповідних векторів:

$$-7\vec{a} = (7; 28; -14), \quad 4\vec{b} = (12; 8; -16), \quad 2\vec{c} = (4; 0; 10).$$

Обчислимо хх мішаний добуток

$$\begin{aligned} (-7\vec{a}, 4\vec{b}, 2\vec{c}) &= \begin{vmatrix} 7 & 28 & -14 \\ 12 & 8 & -16 \\ 4 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= 560 - 1792 + 0 + 448 - 3360 - 0 = -4144 \neq 0, \end{aligned}$$

мішаний добуток не дорівнює нулю, отже вектори **не компланарні**.

4. Дано три сили $\vec{P}(1; 7; -4)$, $\vec{Q}(-2; 3; 0)$, $\vec{R}(-5; 6; 1)$, прикладені до точки $A(10; -6; 1)$. Обчислити:

а) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка A , рухаючись прямолінійно, перемістилась у точку $B(3; 2; 8)$;

б) величину моменту рівнодійної сил відносно точки B .

Розв'язання: Знайдемо рівнодійну всіх сил:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \\ &= (1 - 2 - 5; 7 + 3 + 6; -4 + 0 + 1) = (-6; 16; -3) \end{aligned}$$

та вектор

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (3 - 10; 2 - (-6); 8 - 1) = (-7; 8; 7).$$

а) обчислимо роботу як скалярний добуток векторів сили та переміщення:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = -6 \cdot (-7) + 16 \cdot 8 + (-3) \cdot 7 = 149;$$

б) величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B обчислимо як векторний добуток сили та переміщення:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{F} \cdot \vec{S}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 16 & -3 \\ -7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(112 + 24) - \vec{j}(-42 - 21) + \vec{k}(-42 + 112) = \\ &= 136\vec{i} + 63\vec{j} + 70\vec{k}. \end{aligned}$$

Його модуль дорівнює

$$|\vec{M}| = \sqrt{136^2 + 63^2 + 70^2} = \sqrt{18496 + 3969 + 4900} = \sqrt{27365}.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

1. За даними координатами точок A , B і C для зазначених векторів знайти:

- а) модуль вектора $\vec{a}$;
- б) скалярний та векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
- в) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
- г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$.

№	A	B	C	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(5; 4; 4)	(-5; 2; 3)	(4; 2; -5)	$11\vec{AC} -$	$\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$
2	(6; 5; -4)	(-5; 2; 2)	(3; 2; 2)	$6\vec{AB} - 3\vec{CB}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$
3	(2; 4; 3)	(3; 1; -4)	(-1; 2; 2)	$2\vec{BA} + 4\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$	$\vec{CB}$
4	(-2; -3; 4)	(2; -4; 0)	(1; 4; 5)	$4\vec{AC} - 8\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$	$\vec{AC}$
5	(2; 4; 6)	(-3; 5; 1)	(4; -5; 4)	$2\vec{BA} - 6\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$	$\vec{CA}$
6	(-5; 4; 3)	(4; 5; 2)	(2; 7; -4)	$3\vec{BC} + 2\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
7	(3; 5; 4)	(4; 2; -3)	(-2; 4; 7)	$3\vec{BA} - 4\vec{AC}$	$\vec{CA}$	$\vec{CB}$	$\vec{AC}$
8	(-2; 3; -4)	(3; -1; 2)	(4; 2; 4)	$7\vec{AC} + 4\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$
9	(3; 4; 1)	(5; -2; 6)	(4; 2; -7)	$5\vec{AB} - 7\vec{AC}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$
10	(4; 6; 7)	(2; -4; 1)	(-3; -4; 2)	$5\vec{AB} - 2\vec{AC}$	$\vec{BC}$	$\vec{BA}$	$\vec{AC}$
11	(1; 3; 2)	(-2; 4; 1)	(1; 3; -2)	$2\vec{AB} + 5\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$
12	(10; 6; 3)	(-2; 4; 5)	(3; -4; -6)	$5\vec{AC} - 2\vec{CB}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$	$\vec{BC}$
13	(3; 4; 6)	(-4; 6; 4)	(5; -2; -3)	$4\vec{CA} - 7\vec{BC}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
14	(-3; -5; 6)	(3; 5; -4)	(2; 6; 4)	$4\vec{AC} - 5\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$
15	(2; 4; 5)	(2; -1; 3)	(-1; -2; 4)	$3\vec{AB} - 4\vec{AC}$	$\vec{BA}$	$\vec{CB}$	$\vec{AC}$

№	A	B	C	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
16	$(-2; -3; 2)$	$(1; 4; 2)$	$(1; 2; -2)$	$2\vec{AC} - 4\vec{BC}$	$\vec{CB}$	$\vec{AB}$	$\vec{CA}$
17	$(-2; 4; -5)$	$(3; 7; 2)$	$(4; 6; -3)$	$9\vec{BA} + 3\vec{BC}$	$\vec{CA}$	$\vec{CB}$	$\vec{AB}$
18	$(6; 4; 5)$	$(-7; 1; 8)$	$(2; -2; 7)$	$5\vec{CB} - 2\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$	$\vec{BC}$
19	$(-2; -2; 4)$	$(1; 2; 3)$	$(1; 4; 2)$	$2\vec{AC} - 3\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
20	$(0; 2; 5)$	$(2; -3; 4)$	$(3; 2; -5)$	$4\vec{CB} - 3\vec{AB}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
21	$(4; 5; 3)$	$(-2; 3; 4)$	$(5; -6; 2)$	$9\vec{AB} - 4\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{CB}$	$\vec{BA}$
22	$(4; 3; 2)$	$(-4; -3; 5)$	$(6; 4; -3)$	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{CB}$
23	$(4; 6; 3)$	$(-5; 2; 6)$	$(4; -4; 3)$	$4\vec{CB} - \vec{AC}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
24	$(2; -4; 3)$	$(-3; -2; 4)$	$(0; 0; -2)$	$3\vec{AC} - 4\vec{CB}$	$\vec{CA}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$
25	$(3; 2; 3)$	$(-2; 1; 3)$	$(2; -2; 1)$	$4\vec{BC} - 3\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$	$\vec{CA}$
26	$(-5; -2; 6)$	$(3; 4; 5)$	$(2; -5; 4)$	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	$\vec{CB}$	$\vec{AB}$	$\vec{CA}$
27	$(1; 3; 2)$	$(-2; 3; -4)$	$(3; 1; -2)$	$2\vec{AB} + 5\vec{CB}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
28	$(-1; -2; 4)$	$(-1; 3; 5)$	$(1; 4; 2)$	$3\vec{AC} - 7\vec{BC}$	$\vec{BA}$	$\vec{CB}$	$\vec{CA}$
29	$(5; 6; 1)$	$(-2; 4; -1)$	$(3; -3; 3)$	$3\vec{AB} - 4\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{BA}$	$\vec{CB}$
30	$(4; 3; -2)$	$(-1; -3; 4)$	$(2; 2; 1)$	$2\vec{CB} - 5\vec{AC}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$

2. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)
2	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)
3	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)
4	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)
5	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)
6	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)
7	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)
8	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)
9	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)
10	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)
11	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)
12	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)
13	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)
14	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)
15	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)
16	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)
17	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(1, 12, -20)
18	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)
19	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-5, 11, 1)
20	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(28, -19, -7)
21	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
22	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)
23	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)
24	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)
25	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)
26	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)
27	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)
28	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)
29	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)
30	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)

3. Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти:

а) скалярний добуток, векторний добуток та модуль векторного добутку двох векторів. Перевірити їх на ортогональність та колінійність; б) мішаний добуток трьох векторів та перевірити їх на компланарність.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	а)	б)
1	(-9; 5; 5)	(1; -2; 4)	(-5; 10; -2)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
2	(3; -1; 5)	(2; -4; 6)	(1; -2; 3)	$6\vec{b}; 3\vec{c}$	$-3\vec{a}; 4\vec{b}; 5\vec{c}$
3	(-7; 0; 2)	(2; -6; 4)	(1; -3; 2)	$2\vec{a}; -7\vec{c}$	$\vec{a}; -2\vec{b}; -7\vec{c}$
4	(5; -3; 4)	(2; -4; -2)	(3; 5; -7)	$-2\vec{b}; 4\vec{c}$	$\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
5	(9; -3; 1)	(-1; -5; 7)	(2; -10; 14)	$-6\vec{a}; 4\vec{c}$	$2\vec{a}; -7\vec{b}; 3\vec{c}$
6	(3; 1; 5)	(2; -4; 8)	(3; 7; -1)	$-9\vec{a}; 4\vec{c}$	$2\vec{a}; -7\vec{b}; 5\vec{c}$
7	(3; 4; 1)	(1; -2; 7)	(3; -6; 21)	$-6\vec{a}; 7\vec{c}$	$2\vec{a}; -3\vec{b}; 4\vec{c}$
8	(-1; 0; 5)	(-3; 2; 2)	(-2; -4; 1)	$7\vec{a}; -3\vec{c}$	$3\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
9	(-3; 8; 0)	(2; -2; 3;)	(8; 12; -8)	$3\vec{b}; -8\vec{c}$	$4\vec{a}; -6\vec{b}; 3\vec{c}$
10	(4; 6; -2)	(-2; 3; 1)	(3; -5; 7)	$-7\vec{b}; 6\vec{a}$	$6\vec{a}; 3\vec{b}; 8\vec{c}$
11	(5; -6; 4)	(4; 8; -7)	(0; 3; -4)	$4\vec{b}; \vec{a}$	$5\vec{a}; 3\vec{b}; -4\vec{c}$
12	(4; 1; -3)	(2; 3; -5)	(7; 2; 4)	$3\vec{a}; 5\vec{c}$	$7\vec{a}; -4\vec{b}; 2\vec{c}$
13	(4; -6; 2)	(2; 3; -1)	(-1; 5; -3)	$-4\vec{b}; 11\vec{a}$	$5\vec{a}; 7\vec{b}; 2\vec{c}$
14	(2; -7; 5)	(-1; 2; -6)	(3; 2; -4)	$5\vec{b}; 3\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
15	(4; 5; -4)	(5; -1; 0)	(2; 4; -3)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
16	(-4; 2; 1)	(3; 5; -2)	(0; 1; 5)	$2\vec{b}; 4\vec{a}$	$-3\vec{a}; 6\vec{b}; -\vec{c}$
17	(4 - 7; 3)	(4; 6; -2)	(6; 9; -3)	$2\vec{b}; \vec{a}$	$-2\vec{a}; \vec{b}; -2\vec{c}$
18	(2; 4; -3)	(5; 1; -2)	(7; 4; -1)	$-6\vec{b}; 7\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
19	(-3; 2; 7)	(-5; 0; 1)	(6; -4; 1)	$-8\vec{b}; 5\vec{c}$	$-2\vec{a}; \vec{b}; 7\vec{c}$
20	(2; -4; 2)	(7; 3; 0)	(3; -5; 7)	$3\vec{a}; -7\vec{b}$	$\vec{a}; 2\vec{b}; 3\vec{c}$
21	(6; -4; 6)	(9; -6; 9)	(1; 0; -8)	$3\vec{b}; -9\vec{c}$	$-2\vec{a}; 7\vec{b}; 5\vec{c}$
22	(2; 4; -2)	(-9; 0; 2)	(3; 5; -7)	$-5\vec{a}; 4\vec{b}$	$7\vec{a}; 5\vec{b}; -\vec{c}$
23	(3; -1; 2)	(-1; 5; -4)	(6; -2; 4)	$6\vec{a}; -4\vec{c}$	$4\vec{a}; -7\vec{b}; -2\vec{c}$
24	(2; -3; 1)	(0; 1; 4)	(5; 2; -3)	$3\vec{a}; 2\vec{c}$	$\vec{a}; 3\vec{b}; \vec{c}$
25	(4; 2; -3)	(2; 0; 1)	(12; 6; -9)	$4\vec{a}; 3\vec{b}$	$2\vec{a}; 3\vec{b}; \vec{c}$
26	(-4; 2; -3)	(0; -3; 5)	(6; 6; -4)	$-7\vec{a}; 4\vec{c}$	$5\vec{a}; -\vec{b}; 3\vec{c}$
27	(7; -4; -5)	(1; -11; 3)	(5; 5; 3)	$2\vec{b}; 6\vec{c}$	$3\vec{a}; -7\vec{b}; 2\vec{c}$
28	(-9; 0; 4)	(2; -4; 6)	(3; -6; 9)	$-2\vec{a}; 8\vec{c}$	$3\vec{a}; -5\vec{b}; 4\vec{c}$
29	(3; -2; 1)	(0; 2; -3)	(-3; 2; -1)	$-2\vec{a}; 4\vec{b}$	$\vec{a}; -3\vec{b}; 2\vec{c}$
30	(-5; 2; -2)	(7; 0; -5)	(2; 3; -2)	$8\vec{a}; -6\vec{c}$	$2\vec{a}; 4\vec{b}; -5\vec{c}$

4. Дано три сили $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, прикладені до точки A .
Обчислити:

а) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка A , рухаючись прямолінійно, перемістилась у точку B ;

б) величину моменту рівнодійної сил відносно точки B .

№	$\vec{P}$	$\vec{Q}$	$\vec{R}$	A	B
1	(9, -3, 4)	(5, 6, -2)	(-4, -2, 7)	(-5, 4, -2)	(4, 6, -5)
2	(5, -2, 3)	(4, 5, -3)	(-1, -3, 6)	(7, 1, -5)	(2, -3, -6)
3	(3, -5, 4)	(5, 6, -3)	(-7, -1, 8)	(-3, 5, 9)	(5, 6, -3)
4	(-10, 6, 5)	(4, -9, 7)	(5, 3, -3)	(4, -5, 9)	(4, 7, -5)
5	(5, -3, 1)	(4, 2, -6)	(-5, -3, 7)	(-5, 3, 7)	(3, 8, -5)
6	(-5, 8, 4)	(6, -7, 3)	(3, 1, -5)	(2, -4, 7)	(0, 7, 4)
7	(7, -5, 2)	(3, 4, -8)	(-2, -4, 3)	(-3, 2, 0)	(6, 4, -3)
8	(3, -4, 2)	(2, 3, -5)	(-3, -2, 4)	(5, 3, -7)	(4, -1, -4)
9	(4, -2, -5)	(5, 1, -3)	(-6, 2, 5)	(-3, 2, -6)	(4, 5, -3)
10	(7, 3, -4)	(9, -4, 2)	(-6, 1, 4)	(-7, 2, 5)	(4, -2, 11)
11	(9, -4, 4)	(-4, 6, -3)	(3, 4, 2)	(5, -4, 3)	(4, -5, 9)
12	(6, -4, 5)	(-4, 7, 8)	(5, 1, -3)	(-5, -4, 2)	(7, -3, 6)
13	(5, 5, -6)	(7, -6, 6)	(-4, 3, 4)	(-9, 4, 7)	(8, -1, 7)
14	(7, -6, 2)	(-6, 2, -1)	(1, 6, 4)	(3, -6, 1)	(6, -2, 7)
15	(4, -2, 3)	(-2, 5, 6)	(7, 3, -1)	(-3, -2, 5)	(9, -5, 4)
16	(7, 3, -4)	(3, -2, 2)	(-5, 4, 3)	(-5, 0, 4)	(4, -3, 5)
17	(3, -2, 4)	(-4, 4, -3)	(3, 4, 2)	(1, -4, 3)	(4, 0, -2)
18	(2, -1, -3)	(3, 2, -1)	(-4, 1, 3)	(-1, 4, -2)	(2, 3, -1)
19	(4, 5, 1)	(1, 3, -1)	(-3, -6, 7)	(2, -1, 0)	(3, 3, -4)
20	(1, -3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(1, 1, -3)	(2, 4, -1)
21	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-1, -3, 5)	(4, 5, -2)
22	(3, -2, 1)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)
23	(-1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
24	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)
25	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-3, 4, 5)	(-2, 5, 1)
26	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)
27	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)
28	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(2, -1, 3)	(5, 1, 2)
29	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)
30	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(-2, 3, -4)	(3, -6, 2)

Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ПРЯМА ЛІНІЯ

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Дано трикутник ABC с вершинами в точках $A(-1; 3)$; $B(7, 2)$; $C(3, 8)$. Знайти:
- 1.а) периметр та площу трикутника.
 - 1.б) рівняння сторін.
 - 1.в) кути трикутника.
 - 1.г) визначити тип трикутника (за сторонами та кутами).
 - 1.д) координати центра мас трикутника.
 - 1.е) рівняння медіани AF .
 - 1.є) рівняння та довжину висоти CN .
 - 1.ж) рівняння бісектриси BT .
 - 1.з) координати центру та радіус описаного кола.
 - 1.и) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB .

Розв'язання:

Побудуємо трикутник ABC (рис.4.1).

1.а) За визначенням периметру, як суми довжин всіх сторін, знайдемо довжини сторін трикутника за формулою (3.1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$AB = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} \text{ (од.)};$$

$$BC = \sqrt{(3 - 7)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (од.)};$$

$$AC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ (од.)};$$

Отже, периметр трикутника

$$P = \sqrt{65} + 2\sqrt{13} + \sqrt{41} \text{ (од.)}.$$

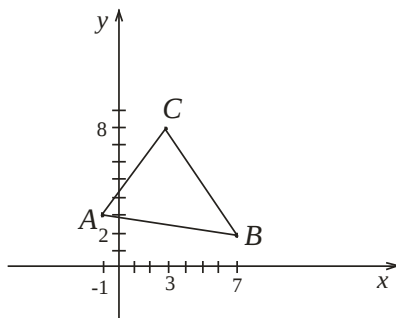


Рисунок 4.1 – Трикутник

Для обчислення площі трикутника скористаємося запропонованим мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

(−) (+)

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-2 + 56 + 9 - 21 - 6 + 8| = \frac{1}{2} \cdot 44 = 22 \text{ од}^2.$$

1.6) Для запису рівняння сторін трикутника скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

і представимо отриманні рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої AB :

$$\frac{x+1}{7+1} = \frac{y-3}{2-3}; \quad \frac{x+1}{8} = \frac{y-3}{-1}; \quad 8(y-3) = -1(x+1);$$

$$8y - 24 = -x - 1; \quad 8y = -x + 23;$$

Остаточно маємо рівняння AB :

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{23}{8} \quad \left(k = -\frac{1}{8}; \quad b = \frac{23}{8}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатним напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{23}{8}$ – пряма відтинає на осі ординат відрізок майже в три одиниці.

Рівняння прямої BC :

$$\frac{x-7}{3-7} = \frac{y-2}{8-2}; \quad \frac{x-7}{-4} = \frac{y-2}{6}; \quad -4(y-2) = 6(x-7) : (-2);$$

$$2y - 4 = -3x + 21; \quad 2y = -3x + 25;$$

Остаточно маємо рівняння BC :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} \quad \left(k = -\frac{3}{2}; \quad b = \frac{25}{2}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{25}{2}$ — пряма відтинає на осі ординат відрізок майже в 12,5 одиниць.

Рівняння прямої AC :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{8-3}; \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}; \quad 4(y-3) = 5(x+1);$$

$$4y - 12 = 5x + 5; \quad 4y = 5x + 17;$$

Остаточно маємо рівняння AC :

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \quad \left(k = \frac{5}{4}; \quad b = \frac{17}{4}\right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k додатний, дійсно, пряма утворює з додатнім напрямком осі абсцис гострий кут, $b = \frac{17}{4}$ — пряма відтинає на осі ординат відрізок майже в чотири з четвертю одиниці.

1.в) кути трикутника знайдемо за формулою:

$$tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Нами вже знайдено кутові коефіцієнти прямих, яким належать сторони трикутника:

$$k_{AB} = -\frac{1}{8}; \quad k_{BC} = -\frac{3}{2}; \quad k_{AC} = \frac{5}{4}.$$

За формулою маємо:

$$tg\angle BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)}{1 + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 4}{32}}{\frac{32 - 5 \cdot 1}{32}} = \frac{44}{27},$$

$$\angle BAC = \arctg \frac{44}{27};$$

$$tg \angle ABC = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{1}{8} - (-\frac{3}{2})}{1 + (-\frac{1}{8}) \cdot (-\frac{3}{2})} = \frac{-\frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 8}{8}}{\frac{1 \cdot 32 + 3}{32}} = \frac{22}{35},$$

$$\angle ABC = \arctg \frac{22}{35};$$

$$tg \angle ACB = \frac{k_{CB} - k_{AC}}{1 + k_{CB} \cdot k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{1 + (-\frac{3}{2}) \cdot \frac{5}{4}} = \frac{-\frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{8}}{\frac{1 \cdot 8 - 15}{8}} = \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7},$$

$$\angle ABC = \arctg \frac{22}{7}.$$

1.г) визначимо тип трикутника. В п. 1.1 ми обчислили довжини сторін трикутника. З результатів прямує, що трикутник *різносторонній*.

З умови $c^2 < a^2 + b^2$ ($AB^2 < BC^2 + AC^2$; $65 < 52 + 41$) прямує, що трикутник *гострокутний*. Зауважимо, що в згаданій нерівності за c приймаємо найдовшу з сторін.

1.д) координати центра мас трикутника обчислимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-1 + 7 + 3}{3} = 3;$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{3 + 2 + 8}{3} = \frac{13}{3}.$$

Центр мас трикутника розташований у точці $O_1 \left(3; \frac{13}{3}\right)$.

1.е) для того, щоб записати рівняння медіани AF , згадаємо, що за визначенням, медіана поділяє протилежну сторону навпіл. Медіана AF поділяє навпіл сторону BC (рис. 4.2). Знайдемо координати точки F як середини BC за формулами (3.6), (3.7):

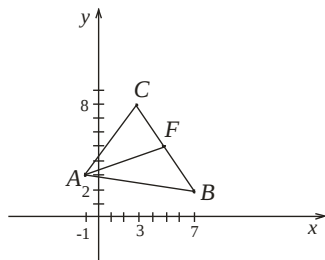


Рисунок 4.2 – Медіана AF

$$x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7}{2} = 3.5;$$

$$y_F = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Точка F має координати: $F(5; 5)$. Рівняння прямої AF запишемо за вже згаданою нами формулою (2.18):

$$\frac{x-(-1)}{5-(-1)} = \frac{y-3}{5-3}; \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{2}; \quad 6(y-3) = 2(x+1) | :2;$$

$$3y - 9 = x + 1; \quad 3y = x + 10.$$

Остаточно маємо

$$AF: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

1.є) рівняння висоти CN знаходимо за визначенням висоти. З нього прямую, що висота CN перпендикулярна стороні AB (рис 4.3). За умовою перпендикулярності маємо:

$$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{8}} = 8$$

Рисунок 4.3 – Висота CN

Про висоту CN нам відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки – C . Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Підставимо у рівняння $k_{CN} = 8$ та координати точки $C(3, 8)$:

$$y - 8 = 8(x - 3); \quad y = 8x - 24 + 8.$$

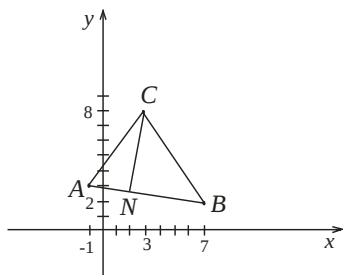
Остаточно маємо рівняння CN :

$$y = 8x - 16.$$

Щоб знайти довжину висоти CN , згадаємо, що найкоротша відстань між точкою та прямою – по перпендикуляру. Отже, довжина висоти CN дорівнює відстані від точки C до прямої AB . В формулі пряма представлена загальним рівнянням:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Перепишемо рівняння AB у вигляді загального і підставимо у формулу:



$$AB: x + 8y - 23 = 0;$$

$$|CN| = d = \frac{|1 \cdot 3 + 8 \cdot 8 - 23|}{\sqrt{1^2 + 8^2}} = \frac{44}{\sqrt{65}} \text{ (од.)}.$$

1.ж) знайдемо рівняння бісектриси BT (рис. 4.4). За визначенням, бісектриса поділяє кут навпіл. Для розв'язання задачі скористаємося наступною властивістю бісектрис: бісектриса поділяє протилежну сторону у відношенні, яке дорівнює відношенню прилеглих сторін. Для бісектриси BT , ця властивість набуває вигляду:

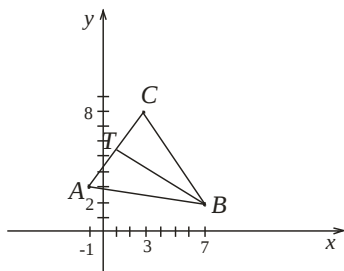


Рисунок 4.4 – Бісектриса

$$\frac{AT}{TC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} = \lambda.$$

Знайдемо координати точки T :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} \cdot 3}{1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}}} = \frac{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}} \cdot 8}{1 + \frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}};$$

Координати точки $T\left(\frac{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}}; \frac{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}}\right)$. Рівняння бісектриси BT набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{x-7}{\frac{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}} - 7} &= \frac{y-2}{\frac{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65}}{2\sqrt{13} + \sqrt{65}} - 2} \quad \Bigg| : (2\sqrt{13} + \sqrt{65}); \\ \frac{x-7}{-2\sqrt{13} + 3\sqrt{65} - 14\sqrt{13} - 7\sqrt{65}} &= \frac{y-2}{6\sqrt{13} + 4\sqrt{65} - 4\sqrt{13} - 2\sqrt{65}}; \\ \frac{x-7}{-16\sqrt{13} - 4\sqrt{65}} &= \frac{y-2}{2\sqrt{13} + 6\sqrt{65}} \quad \Bigg| \cdot 2; \\ \frac{x-7}{-8\sqrt{13} - 2\sqrt{65}} &= \frac{y-2}{\sqrt{13} + 3\sqrt{65}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y-2) \cdot (-8\sqrt{13} - 2\sqrt{65}) &= (x-7) \cdot (\sqrt{13} + 3\sqrt{65}); \\ (-8\sqrt{13} - 2\sqrt{65})y + 16\sqrt{13} + 4\sqrt{65} &= (\sqrt{13} + 3\sqrt{65})x - 7\sqrt{13} - 21\sqrt{65}; \\ (-8\sqrt{13} - 2\sqrt{65})y &= (\sqrt{13} + 3\sqrt{65})x - 23\sqrt{13} - 25\sqrt{65};\end{aligned}$$

і, нарешті, BT :

$$y = -\frac{\sqrt{13}+3\sqrt{65}}{8\sqrt{13}+2\sqrt{65}}x + \frac{23\sqrt{13}+25\sqrt{65}}{8\sqrt{13}+2\sqrt{65}}.$$

1.3) координати центру та радіус описаного кола можна знайти двома різними способами. Опишемо кожний з них, а розв'яжемо задачу лише одним, запропонувавши інший спосіб читачеві (рис. 4.5).

По-перше, за визначенням, відомим нам з курсу середньої школи, центр описаного кола лежить в точці перетину серединних перпендикулярів. Отже, щоб знайти координати центру, необхідно скласти рівняння двох серединних перпендикулярів (знайти координати середин протилежних сторін та, з умови перпендикулярності, кутові коефіцієнти, за запишемо їх рівняння) та точку їх перетину (як результат розв'язку системи).

По-друге, за визначенням кола, центр – точка, рівновіддалена від всіх точок, що належать колу, тобто від всіх вершин трикутника. На наш погляд, розв'язання задачі цим методом потребує від нас менших зусиль та використання меншої кількості формул. Тому розв'яжемо задачу саме так.

Нехай точка $O_2(x, y)$ – центр описаного кола. За приведеним визначенням $AO_2 = BO_2 = CO_2$, звідси маємо

$$AO_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2};$$

$$BO_2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2};$$

$$CO_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}.$$

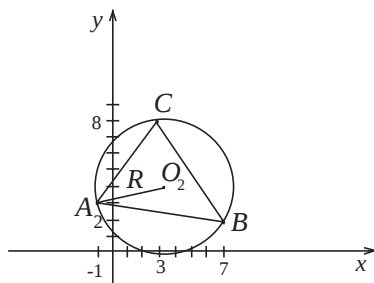


Рисунок 4.5 – Описане коло навколо трикутника ABC

Перепишемо тотожність $AO_2 = BO_2 = CO_2$ у вигляді двох рівнянь $AO_2 = BO_2$ і $AO_2 = CO_2$ – отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими, які відразу підведемо до квадрату:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2 \end{cases};$$

За формулами квадрат суми та квадрат різниці спростимо отримані вирази:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16x - 2y = 43 \\ 8x + 10y = 63 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 16 = 176;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 43 & -2 \\ 63 & 10 \end{vmatrix} = 430 + 126 = 556;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 16 & 43 \\ 8 & 63 \end{vmatrix} = 1008 - 344 = 664;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{556}{176} = \frac{139}{44};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{664}{176} = \frac{83}{22};$$

Отже, розв'язок системи: $x = \frac{139}{44}$; $y = \frac{83}{22}$. Звідси координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22}\right)$. А радіус знайдемо, наприклад, як $R = AO_2$

$$R = \sqrt{\left(\frac{139}{44} + 1\right)^2 + \left(\frac{83}{22} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{183}{44}\right)^2 + \left(\frac{17}{22}\right)^2} = \frac{\sqrt{34645}}{44} \text{ (од.)}$$

Відповідь: Координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22}\right)$, радіус $R = \frac{\sqrt{34645}}{44}$ (од.).

1.и) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB (рис. 4.6) знайдемо як результат розв'язку системи, яка складається з рівнянь, що описують вказані лінії. Нагадаємо, що рівняння медіани AF ми вже знайшли у п. 1.6: $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Рівняння прямої l , що проходить через точку C паралельно AB знайдемо з умови паралельності прямих AB і l :

$k_l = k_{AB} = -\frac{1}{8}$. Нам відомий кутовий коефіцієнт $k_l = -\frac{1}{8}$ і координати точки $C(3,8)$, складемо рівняння прямої:

$$y - 8 = -\frac{1}{8}(x - 3);$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}.$$

Отже система набуває вигляду:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 3y = -10 \\ x + 8y = 67 \end{cases}.$$

За правилами Крамера маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 67 & 8 \end{vmatrix} = -80 + 201 = 121;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 67 \end{vmatrix} = 67 + 10 = 77;$$

$$x = \frac{121}{11} = 11; \quad y = \frac{77}{11} = 7.$$

Відповідь: Точка перетину має координати $K(11,7)$.

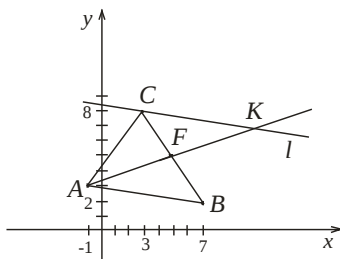


Рисунок 4.6 – Перетин медіани AF і прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB

2. Довести, що рівняння $\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2$ є рівнянням прямої.
 Записати рівняння цієї прямої у вигляді:
 2.а) загальне рівняння прямої.
 2.б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
 2.в) рівняння прямої у відрізках.
 2.г) нормальне рівняння прямої.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2 \quad | \cdot 15;$$

$$30x - 10 + 3y - 6 - 30 = 0;$$

$$30x + 3y - 40 = 0.$$

Ми отримали рівняння першого порядку, а згідно з т. 3.2 такому рівнянню відповідає пряма.

а) Отже, загальне рівняння прямої:

$$30x + 3y - 40 = 0.$$

Відповідні коефіцієнти ($A = 30, B = 3, C = -40$).

б) перепишемо отримане рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$3y = -30x + 40;$$

$$y = -10x + \frac{40}{3}.$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = -10x + \frac{40}{3},$$

Кутовий коефіцієнт прямої $k = -10$, а відрізок, який відсікає пряма на осі ординат $b = \frac{40}{3}$.

в) Для отримання рівняння прямої у відрізках перетворимо загальне рівняння:

$$30x + 3y - 40 = 0;$$

$$30x + 3y = 40 | : 40;$$

$$\frac{30x}{40} + \frac{3y}{40} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Рівняння прямої у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1.$$

Пряма відсікає на осі абсцис відрізок у $a = \frac{4}{3}$ одиниць, а на осі ординат – у $b = \frac{40}{3}$ одиниць.

г) Для того, щоб записати нормальне рівняння прямої, обчислимо нормуючий множник, й обираємо його знак, оберненим до знаку C в загальному рівнянні прямої, тобто знак «+».

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{30^2 + 3^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{99}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{11}};$$

$$M = \frac{1}{3\sqrt{11}}.$$

Помножимо загальне рівняння на нормуючий множник:

$$30x + 3y - 40 = 0 \mid \cdot \frac{1}{3\sqrt{11}}.$$

Остаточно маємо нормальне рівняння прямої:

$$\frac{10}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{40}{3\sqrt{11}} = 0.$$

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 14 одиницям довжини.

Розв'язання: За властивостями ромбу, його діагоналі перпендикулярні і точкою перетину поділяються навпіл. Звідси прямує, що діагоналі ромбу можуть утворювати осі координат, й відсікають на осі абсцис по 4 одиниці, а на осі ординат – по 7. Підставимо отримані результати в рівняння прямої у відрізках :

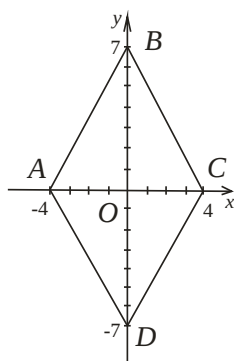


Рисунок 4.7 – Ромб

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$AB: \frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1;$$

$$BC: \frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1;$$

$$CD: \frac{x}{4} + \frac{y}{-7} = 1;$$

$$DA: \frac{x}{-4} + \frac{y}{-7} = 1.$$

4. Записати рівняння прямої, що проходить точку перетину прямих $3x - 2y + 5 = 0$ та $4x + y - 1 = 0$ та початок координат.

Розв'язання: Знайдемо точку перетину прямих Q як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -5; \\ 4x + y = 1 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 = -3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3}{11}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{26}{11};$$

$$Q\left(-\frac{3}{11}; \frac{26}{11}\right).$$

Знайдемо рівняння шуканої прямої OQ :

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{11}-0} = \frac{y-0}{\frac{26}{11}-0};$$

$$-\frac{3}{11}y = \frac{26}{11}x;$$

$$y = -\frac{26}{3}x.$$

$$\text{Відповідь: } OQ: y = -\frac{26}{3}x.$$

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,3)$, $B(5,4)$, $C(10,1)$, $D(1,-2)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$.

Розв'язання. За визначенням, трапеція – це чотирикутник, у якого дві протилежних сторони паралельні. Обчислимо кутові коефіцієнти сторін чотирикутника й перевіримо, чи є така пара коефіцієнтів, яка б задовольняла умові паралельності прямих.

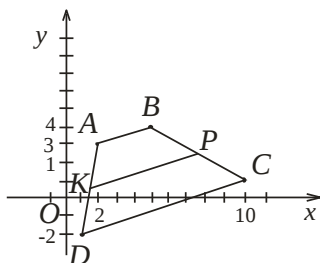


Рисунок 4.8 – Трапеція

$$k_{AB} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}; \quad k_{BC} = \frac{1-4}{10-5} = -\frac{3}{5};$$

$$k_{CD} = \frac{-2-1}{1-10} = \frac{1}{3}; \quad k_{AD} = \frac{-2-3}{1-2} = 5.$$

Бачимо, що $k_{AB} = k_{CD}$, звідси прямує, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ - трапеція.

Шукана середня лінія KP проходить через середини бічних сторін паралельно AB і CD . Знайдемо точку K - середину AD (3.6), (3.7):

$$x_K = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_K = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; \quad K\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

З умови паралельності $k_{KP} = k_{AB} = \frac{1}{3}$. Підставимо у формулу:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right);$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{3}x.$$

Відповідь: $KP: y = \frac{1}{3}x$.

6. Знайти відстань між прямими $3x - 5y + 7 = 0$ та $3x - 5y - 8 = 0$.

Розв'язання. Задані прямі паралельні, тому що виконується умова паралельності $k_1 = k_2 = \frac{3}{5}$. Приведемо рівняння прямих до нормального виду:

$$M_1 = M_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}};$$

$$(1): -\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{7}{\sqrt{34}} = 0;$$

$$(2): \frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{8}{\sqrt{34}} = 0.$$

$$\text{Звідси } p_1 = \frac{7}{\sqrt{34}}, \quad p_2 = \frac{8}{\sqrt{34}}.$$

Прямі розташовані по обидві сторони від початку координат. Відстань між прямими – це сума відстаней від початку координат кожної з прямих:

$$d = p_1 + p_2 = \frac{7}{\sqrt{34}} + \frac{8}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

$$\text{Відповідь: } d = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

7. Записати рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння гіпотенузи (AB) $2x + 3y - 5 = 0$ і координати вершини прямого кута $C(2, -1)$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт гіпотенузи з умови $k_{AB} = -\frac{2}{3}$. Трикутник ABC – рівнобедрений прямокутний, тому кути при основі дорівнюють

$$\angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Скористаємося формулою для знаходження кута між прямими і знайдемо кутові коефіцієнти сторін AC і BC :

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{k_{AC} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_{AC}} = 1;$$

$$k_{AC} + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3}k_{AC};$$

$$\frac{5}{3}k_{AC} = \frac{1}{3}; \quad \rightarrow \quad k_{AC} = \frac{1}{5};$$

аналогічно,

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{2}{3} - k_{BC}}{1 - \frac{2}{3} k_{BC}} = 1;$$

$$-\frac{2}{3} - k_{BC} = 1 - \frac{2}{3} k_{BC};$$

$$-\frac{1}{3} k_{AC} = \frac{5}{3}; \quad \rightarrow \quad k_{BC} = -5.$$

Шукані рівняння мають вигляд:

$$AC: \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2); \quad y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5};$$

$$BC: \quad y + 1 = -5(x - 2); \quad y = -5x + 9.$$

$$\text{Відповідь: } AC: \quad y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}; \quad BC: \quad y = -5x + 9.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

1. Дано трикутник ABC с вершинами в точках A, B, C (див. табл.) Знайти:

- 1.а) периметр та площу трикутника;
- 1.б) рівняння сторін;
- 1.в) кути трикутника;
- 1.г) визначити тип трикутника (за сторонами та кутами);
- 1.д) координати центра мас трикутника;
- 1.е) рівняння медіани AF ;
- 1.є) рівняння та довжину висоти BN ;
- 1.ж) рівняння бісектриси CT ;
- 1.з) координати центру та радіус описаного кола;
- 1.и) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB .

2. Довести, що рівняння (див. табл.) є рівнянням прямої.
Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

- 2.а) загальне рівняння прямої;
- 2.б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
- 2.в) рівняння прямої у відрізках;
- 2.г) нормальне рівняння прямої.

№ в-та	A	B	C	рівняння
1	$(-1; -2)$	$(-2, 5)$	$(8, 1)$	$\frac{2x-5}{4} + \frac{y+3}{5} = -1$
2	$(2, 4)$	$(-3, 6)$	$(5, 7)$	$\frac{3x-1}{2} - \frac{2y+3}{4} = 2$
3	$(1, 5)$	$(5, 3)$	$(-1, -5)$	$\frac{4x-1}{3} + y - \frac{2}{5} = 4$
4	$(5, 5)$	$(1, -6)$	$(-3, 6)$	$\frac{x-1}{2} + \frac{2}{5}y = -3$
5	$(-7, 1)$	$(1, -2)$	$(6, 3)$	$\frac{7x-1}{4} + \frac{2y+3}{5} = -\frac{1}{2}$
6	$(3, 6)$	$(6, 4)$	$(3, -5)$	$6x + \frac{y-3}{7} = \frac{3}{5}$
7	$(-4, 4)$	$(4, 1)$	$(6, 5)$	$\frac{5x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{7}{6}$
8	$(-6, 1)$	$(-4, 6)$	$(8, 1)$	$\frac{7x+8}{2} - \frac{y-1}{6} = -5$

9	$(-3,3)$	$(-2,8)$	$(7,4)$	$\frac{5x+3}{4} - 5y = 2$
10	$(-7,6)$	$(-5,2)$	$(4,7)$	$8x + \frac{6y-1}{9} + \frac{1}{5} = 0$
11	$(2,1)$	$(6,5)$	$(-4,6)$	$\frac{2x-6}{5} + \frac{y-9}{4} - 3 = 0$
12	$(-3,4)$	$(7,-3)$	$(4,-4)$	$4x + \frac{2y-9}{7} - 2 = 0$
13	$(8,1)$	$(9,7)$	$(1,8)$	$\frac{5x+2}{9} - 2y = \frac{4}{5}$
14	$(1,8)$	$(7,9)$	$(-2,-1)$	$\frac{x+7}{3} - \frac{2y-4}{5} = -3$
15	$(-4,3)$	$(7,4)$	$(9,1)$	$\frac{5x-1}{3} + \frac{y-3}{9} = 5$
16	$(-3,-3)$	$(-2,3)$	$(8,1)$	$\frac{x-1}{8} + \frac{2y+1}{5} - 2 = 0$
17	$(0,-2)$	$(-5,4)$	$(11,2)$	$\frac{3x-9}{5} + \frac{y+8}{3} - 4 = 0$
18	$(-6,1)$	$(5,3)$	$(-5,4)$	$\frac{4x+1}{3} + \frac{2y-9}{4} = -\frac{4}{5}$
19	$(-5,3)$	$(6,0)$	$(-7,-4)$	$5x - \frac{3y-8}{2} = -4$
20	$(-4,7)$	$(-5,2)$	$(2,-2)$	$\frac{x-2}{6} + \frac{2y-9}{5} = 1$
21	$(9,4)$	$(-6,6)$	$(-1,8)$	$\frac{5x-2}{3} - \frac{3y+1}{2} - 8 = 0$
22	$(4,-3)$	$(3,2)$	$(-7,1)$	$\frac{x-1}{11} - 4y = -\frac{7}{3}$
23	$(-2,-4)$	$(-6,4)$	$(3,5)$	$\frac{5x-1}{8} - \frac{y+4}{2} = 6$
24	$(5,4)$	$(-3,-4)$	$(-6,-2)$	$\frac{3x-7}{4} + \frac{2y+5}{7} = -3$
25	$(6,9)$	$(3,3)$	$(8,-1)$	$\frac{3x-7}{4} + 4y = \frac{3}{5}$
26	$(5,10)$	$(2,3)$	$(8,-3)$	$\frac{x+8}{5} + \frac{6y-11}{4} = -1$
27	$(6,3)$	$(-7,4)$	$(-6,1)$	$\frac{x-3}{8} + \frac{2y+5}{4} = 3$
28	$(1,4)$	$(-2,7)$	$(-9,2)$	$\frac{6x-1}{5} + \frac{y+9}{3} = -2$
29	$(2,-3)$	$(5,1)$	$(3,8)$	$\frac{5x+4}{2} - \frac{y-2}{6} = 5$
30	$(-1,7)$	$(-5,7)$	$(1,-4)$	$\frac{x-3}{7} + \frac{5y-2}{3} = -1$

Завдання 4.1

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 6 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = \frac{1}{2}x + 2$ та $y = 3x - 7$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,4)$, $B(3,5)$, $C(11,1)$, $D(-1,-2)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$y = 5x - 4 \text{ та } y = 5x + 13.$$

7. Дано дві вершини трикутника $A(2,2)$, $B(3,0)$ та точка перетину його медіан $D(3,1)$. Знайти третю вершину трикутника.

Завдання 4.2

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = 3x - 4$ та $y = \frac{5}{2}x + 1$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,2)$, $B(-2,6)$, $C(5,5)$, $D(6,1)$ є паралелограмом. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x - 5y - 3 = 0 \text{ та } 2x - 5y + 6 = 0.$$

7. Знайти координати вершин прямокутного рівнобічного трикутника, якщо відомі вершина прямого кута $C(3,-1)$ та рівняння гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.

Завдання 4.3

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 8 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y + 5 = 0$ та $x + 3y - 2 = 0$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,6)$, $B(-1,1)$, $C(4,-1)$, $D(2,4)$ є ромбом. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$4x + 3y - 7 = 0 \text{ та } 4x + 3y - 6 = 0.$$

7. Відомі координати двох вершин рівностороннього трикутника ABC : $A(2,1)$ та $B(2,5)$. Знайти координати третьої вершини C . Скільки розв'язків має задача?

Завдання 4.4

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 15 та 4 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 3y - 2 = 0$ та $x + 2y + 3 = 0$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,3)$, $B(1,5)$, $C(3,0)$, $D(-2,-2)$ є прямокутником. Знайти кути перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x - 7y - 2 = 0 \text{ та } 3x - 7y + 5 = 0.$$

7. Відомі координати двох вершин трикутника ABC : $A(-4,3)$ та $B(4,-1)$ та точка перетину висот $M(3,3)$. Знайти координати третьої вершини C .

Завдання 4.5

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 5 = 0$ та $3x - 5y + 7 = 0$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,5), B(0,1), C(-4,2), D(-3,6)$ є квадратом. Знайти площу вписаного в квадрат $ABCD$ кола. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - 2y + 5 = 0 \text{ та } 7x - 2y - 1 = 0.$$

7. Дві сторони паралелограма задані рівняннями

$$y = x - 2 \text{ та } x - 5y + 6 = 0.$$

Його діагоналі перетинаються в початку координат. Написати рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.6

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 7 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x - 7y + 8 = 0$, $3x - 2y + 11 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(0,7), B(3,6), C(4,1), D(-2,3)$ є трапецією. Знайти рівняння діагоналей трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$11x - 2y + 3 = 0 \text{ та } 11x - 2y - 5 = 0.$$

7. Дано трикутник з вершинами $A(0, -4)$, $B(3,0)$, $C(0,6)$. Знайти відстань від вершини C до бісектриси кута A .

Завдання 4.7

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - y - 8 = 0$ та $4x + 3y + 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,1), B(5, -3), C(6,2), D(3,6)$ є паралелограмом. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$5x + 9y - 2 = 0 \text{ та } 5x + 9y + 6 = 0.$$

7. Знайти координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $x + 2y = 4$ та $x + 2y = 10$, та рівняння однієї з його діагоналей $y = x + 2$.

Завдання 4.8

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 12 та 7 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y - 4 = 0$ та $11x = 4y - 7$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3,6), B(8,6), C(11,2), D(6,2)$ є ромбом. Знайти рівняння діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - y + 5 = 0 \text{ та } 7x - y - 1 = 0.$$

7. Записати рівняння сторін трикутника, якщо відома одна з його вершин $A(0,2)$, та рівняння висот (BM) $x + y = 4$ та (CM) $y = 2x$, де M – точка перетину висот.

Завдання 4.9

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = 8x + 4$ та $3x + 5y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3, -2)$, $B(1, -5)$, $C(3, 1)$, $D(-1, 4)$ є паралелограмом. Знайти точку перетину діагоналей паралелограма. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$4x - y - 7 = 0 \text{ та } 4x - y - 1 = 0.$$

7. Дано координати центру квадрата $C(-1, 0)$ та рівняння сторони $x + 3y - 5 = 0$. Записати рівняння трьох інших сторін квадрата.

Завдання 4.10

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 1 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 8y = 9$ та $y = \frac{1}{3}x + 2$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1, -2)$, $B(-3, 3)$, $C(2, 5)$, $D(4, 0)$ є квадратом. Знайти рівняння та довжину діагоналей квадрата. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x + 5y + 1 = 0 \text{ та } 3x + 5y - 7 = 0.$$

7. В прямокутному рівнобічному трикутнику відомі рівняння катету $y = 2x$ та середина гіпотенузи $K(4, 2)$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

Завдання 4.11

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 10 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 5y - 9 = 0$ та $2x - 8y - 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(6,0)$, $B(7,4)$, $C(-1,6)$, $D(-2,2)$ є прямокутником. Знайти точку перетину діагоналей прямокутника. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$x + y + 9 = 0 \text{ та } x + y - 17 = 0.$$

7. Відомі рівняння двох сторін AB та BC паралелограма $2x - y + 5 = 0$ та $x - 2y + 4 = 0$, його діагоналі перетинаються в точці $M(1,4)$. Знайти довжини його висот.

Завдання 4.12

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x + y + 1 = 0$ та $4x - 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,6)$, $B(2,1)$, $C(3,-6)$, $D(-2,-1)$ є ромбом. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x - 5y - 9 = 0 \text{ та } 3x - 5y - 6 = 0.$$

7. Точка $H(-3,2)$ є точкою перетину висот трикутника, дві сторони якого належать прямим $y = 2x$ і $y = -x + 3$. Записати рівняння третьої сторони трикутника.

Завдання 4.13

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 3 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - y - 9 = 0$ та $5x - 6y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2,7), B(2,8), C(9,5), D(-3,2)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x + y + 8 = 0 \text{ та } 7x + y - 9 = 0.$$

7. Дано координати двох вершин трикутника $A(-1,3), B(2,5)$ і точки перетину його висот $H(1,4)$. Знайти координати третьої вершини трикутника і записати рівняння його сторін.

Завдання 4.14

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 4y - 9 = 0$ та $x + 7y + 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3, -1), B(-1,6), C(3,5), D(1, -2)$ є прямокутником. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу та периметр прямокутника $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$3x + y + 2 = 0 \text{ та } 3x + y + 6 = 0.$$

7. Відомі точки $K(1,3)$ і $L(-1,1)$ - середини основ рівнобічної трапеції. Точки $P(3,0)$ і $Q(-3,5)$ належать її бічним сторонам. Записати рівняння сторін трапеції.

Завдання 4.15

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 11 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 2 = 0$ та $x - y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,1), B(0,4), C(3,8), D(7,5)$ є квадратом. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$8x - 3y - 1 = 0 \text{ та } 8x - 3y + 4 = 0.$$

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5, -1)$ перпендикулярно відріzkу AB , якщо $A(4,5); B(3,2)$.

Завдання 4.16

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 4 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $9x - 2y - 7 = 0$ та $x - 2y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2,3), B(7, -2), C(8,5), D(3,10)$ є ромбом. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x + 3y - 11 = 0 \text{ та } 2x + 3y + 2 = 0.$$

7. Точка $A(2,0)$ є вершиною правильного трикутника, а сторона, що лежить проти неї, задана рівнянням $x + y - 1 = 0$. Записати рівняння двох інших сторін трикутника.

Завдання 4.17

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $2x - 5y - 9 = 0$ та $x + 4y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3,3)$, $B(5,4)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -2)$ є паралелограмом. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x + y - 4 = 0 \text{ та } 7x + y + 12 = 0.$$

7. Дано вершини трикутника $A(3, -2)$, $B(5,2)$, $C(-1,4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через середину сторони BC перпендикулярно стороні AB .

Завдання 4.18

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 9 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 2y - 1 = 0$ та $2x + y - 7 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-6,6)$, $B(-4,1)$, $C(2,2)$, $D(6,8)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу та периметр трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$x + 9y - 3 = 0 \text{ та } x + 9y - 6 = 0.$$

7. Дано точка $A(3, -2)$ - вершина квадрата і точка $M(1,1)$ - точка перетину його діагоналей. Записати рівняння сторін квадрата.

Завдання 4.19

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 2 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 7y - 2 = 0$ та $5x - y + 1 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,8), B(7,3), C(-3,-3), D(-6,2)$ є прямокутником. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу прямокутника $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$4x - y - 8 = 0 \text{ та } 4x - y - 12 = 0.$$

7. Відомі дві вершини трикутника $A(-6,2), B(2,-2)$ і точка перетину його висот $H(1,2)$. Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH .

Завдання 4.20

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 8 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x - y - 2 = 0$ та $9x + 2y + 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,2), B(3,-4), C(-3,-3), D(-2,3)$ є квадратом. Знайти точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$9x - y - 1 = 0 \text{ та } 9x - y + 5 = 0.$$

7. Довжина сторони ромба з гострим кутом 60° дорівнює 2.
2. Діагоналі ромба перетинаються в т. $M(1,2)$. Більша діагональ ромба паралельна осі Ox . Записати рівняння сторін ромба.

Завдання 4.21

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 12 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $7x - 5y - 2 = 0$ та $3x + y - 9 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4,7)$, $B(3,3)$, $C(4,-5)$, $D(-3,-1)$ є ромбом. Знайти рівняння та довжину діагоналей ромба. Знайти площу та периметр ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$x + 5y - 2 = 0 \text{ та } x + 5y + 15 = 0.$$

7. Точка A належить прямій $x + y = 8$. Відомо, що відстань між точками A і $B(2,8)$ дорівнює відстані від точки A до прямої $x - 3y + 2 = 0$. Знайти координати точки A .

Завдання 4.22

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 11 та 1 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $4x + 2y + 3 = 0$ та $5x + y - 4 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,3)$, $B(-2,-1)$, $C(-6,2)$, $D(-3,6)$ є квадратом. Знайти рівняння діагоналей квадрата $ABCD$. Знайти площу та периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$6x - 5y - 11 = 0 \text{ та } 6x - 5y + 2 = 0.$$

7. Точка A належить прямій $2x - 3y + 4 = 0$. Відомо, що від точки A до прямої $4x - 3y = 0$ дорівнює 2. Знайти координати точки A .

Завдання 4.23

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 4 та 12 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 2y + 5 = 0$ та $2x - 7y - 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(5,8), B(5,4), C(-3,6), D(1,9)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$x - 2y + 7 = 0 \text{ та } x - 2y + 13 = 0.$$

7. Знайти координати центра та радіус кола, що проходить крізь точку $A(-1,3)$ та дотикається прямих $7x + y = 0$ і $x - y + 8 = 0$.

Завдання 4.24

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 10 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $8x - y + 3 = 0$ та $4x + 3y - 5 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4,0), B(-4,-2), C(-2,-6), D(6,-4)$ є паралелограмом. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$5x - 2y + 5 = 0 \text{ та } 5x - 2y + 2 = 0.$$

7. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3, -1)$ є вершиною прямого кута. Площа трикутника дорівнює 2,25. Записати рівняння катетів цього трикутника.

Завдання 4.25

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 5 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x + y + 1 = 0$ та $x + 7y - 10 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(8,2), B(7, -3), C(-3, -1), D(-2,4)$ є прямокутником. Знайти рівняння діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайти площу прямокутника $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x - 5y + 7 = 0 \text{ та } 2x - 5y + 10 = 0.$$

7. Відомі рівняння двох сторін паралелограма $x + y - 1 = 0$, $3x - y + 4 = 0$ і точка перетину його діагоналей $P(3,3)$. Записати рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.26

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 7 та 16 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x + 2y - 8 = 0$ та $x - 4y + 6 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,4), B(0,11), C(5,6), D(4, -1)$ є ромбом. Знайти точку перетину діагоналей ромба $ABCD$. Знайти площу ромба $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$6x + 5y - 9 = 0 \text{ та } 6x + 5y - 12 = 0.$$

7. Відомі рівняння двох висот трикутника ABC : $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2,3)$. Записати рівняння сторін AB і AC .

Завдання 4.27

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 13 та 3 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x + 4y - 3 = 0$ та $6x + 3y + 2 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2, -4)$, $B(4, -3)$, $C(3, 3)$, $D(-3, 2)$ є квадратом. Знайти точку перетину діагоналей квадрата. Знайти площу і периметр квадрата $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$8x + y - 3 = 0 \text{ та } 8x + y - 7 = 0.$$

7. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC : $3x + 2y = 12$, і рівняння висот (AM) $4x + y = 6$ і (BM) $x + 2y = 4$, де M - точка перетину висот. Записати рівняння сторін AB , BC .

Завдання 4.28

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 9 та 15 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $x - 2y - 1 = 0$ та $2x + 5y + 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2, 4)$, $B(3, 8)$, $C(-6, 5)$, $D(-7, 1)$ є паралелограмом. Знайти рівняння діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$2x + 5y + 7 = 0 \text{ та } 2x + 5y + 9 = 0.$$

7. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння однієї його діагоналі $x + 3y - 6 = 0$. Записати рівняння другої діагоналі.

Завдання 4.29

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 17 та 6 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - 9y - 2 = 0$ та $4x + y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6)$, $B(4,5)$, $C(5,0)$, $D(1,-4)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$7x - 4y + 2 = 0 \text{ та } 7x - 4y - 15 = 0.$$

7. Відомі рівняння двох сторін паралелограму $x - 2y = 0$ і $x - y = 1$ і точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Знайти рівняння двох інших сторін.

Завдання 4.30

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромбу, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 2 та 18 одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $5x - y - 4 = 0$ та $4x + 6y - 3 = 0$ з точкою $O(0,0)$.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1,6)$, $B(4,5)$, $C(5,0)$, $D(1,-4)$ є трапецією. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими

$$8x - 5y + 3 = 0 \text{ та } 8x - 5y + 7 = 0.$$

7. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC і рівняння двох його висот (BH) $5x - 4y - 12 = 0$ і (AM) $x + y - 6 = 0$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.

**Розділ 5 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ.
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Дано рівняння кола: $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 32$. Знайти координати центра та радіус кола.

Розв'язання. За рівняння маємо:

- координати центра: $O(7, -2)$;

- радіус $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (од.).

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.

Розв'язання. У відповідності з визначеннями:

- велика вісь $2a = 2 \cdot 4 = 8$;

- мала вісь $2b = 2\sqrt{7}$.

Звідси координати вершин: $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$, $B_1(0, -2\sqrt{7})$, $B_2(0, 2\sqrt{7})$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для еліпса і знайдемо параметр c :

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9; \quad c = 3.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-3,0)$; $F_2(3,0)$.

Знаходимо ексцентриситет еліпсу:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}.$$

Рівняння директрис мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{16}{3}.$$

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

Розв'язання. У відповідності з визначеннями:

- дійсна вісь $2a = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$;

- умовна вісь $2b = 2\sqrt{5}$.

Звідси координати вершин: $A_1(-4\sqrt{2}, 0)$, $A_2(4\sqrt{2}, 0)$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо параметр c :

$$b^2 = c^2 - a^2; \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 5 = 13; \quad c = \sqrt{13}.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$; $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

Знаходимо ексцентриситет гіперболи:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}.$$

Рівняння директрис мають вигляд:

$$x = \pm d, \text{ де } d = \frac{a}{e} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{13}}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{8}{\sqrt{13}}.$$

Рівняння асимптот гіперболи запишемо, скориставшись формулою:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x.$$

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. У відповідності з визначеннями знаходимо параметр параболи:

$$2p = 8; \quad \Rightarrow \quad p = 4.$$

Фокус має координату $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $\Rightarrow F(2, 0)$. А рівняння директриси має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}; \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

5. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 12$. Визначити положення точки $A(2, -7)$ відносно кола: належить йому, знаходиться у середині або зовні його?

Розв'язання. Підставимо координати точки A у рівняння кола:

$$(2 - 3)^2 + (-7 + 4)^2 = 1 + 9 = 10 < 12.$$

Звідси прямує, що точка лежить в середині кола. Якщо б тотожність виконувалася, це б означало, що точка належить колу. В тому ж випадку, коли між лівою та правою частинами рівняння ми б були вимушені поставити знак «>», з цього б прямувало, що точка лежить поза колом.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(3,8)$, $B(-5,12)$.

Розв'язання. Щоб записати рівняння кола, необхідно визначити координати центра та радіус кола. За визначенням, центр кола поділяє будь-який з його діаметрів навпіл, тому знайдемо координати центру кола як координати середини відрізка AB (2.6), (2.7):

$$x = \frac{3-5}{2} = -1; \quad y = \frac{8+12}{2} = 10. \quad \Rightarrow \quad O_1(-1,10).$$

А радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1 (2.1):

$$R = AO_1 = \sqrt{(-1-3)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Отже, канонічне рівняння кола має вигляд:

$$(x+1)^2 + (y-10)^2 = 20.$$

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що лівий фокус має координату $F_1(-1,0)$, а точка $D\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З умови, що точка D належить еліпсу, прямує, що її координати задовольняють рівнянню еліпса:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Згадаємо основну тотожність для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2; \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Отже маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її, щоб знайти довжини великої та малої осей:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{3}{b^2+1} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 12b^2 + 3b^2 + 3 = 4b^4 + 4b^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 4b^4 - 11b^2 - 3 = 0 \end{cases}; \quad b^2 = \left[-\frac{1}{3} \text{ не задов.} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 3 + 1 = 4 \end{cases}.$$

Шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Щоб знайти величини дійсної та умовної півосей, складемо за умовою систему:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \\ c - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ \frac{a+2}{a} = \frac{7}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} c = a + 2 \\ 5a + 10 = 7a \end{cases};$$

$$\begin{cases} c = 5 + 2 = 7 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо умовну піввісь: $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$.

Остаточно маємо:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання. З рівняння директриси робимо висновок, що парабола симетрична відносно осі ординат, тож її рівняння має вигляд:

$$x^2 = 2py.$$

З рівняння директриси знаходимо параметр параболи:

$$y = -\frac{p}{2}; \quad -\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6}{5}.$$

Отже шукане рівняння параболи:

$$x^2 = \frac{12}{5}y.$$

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + 4y^2 + 8x - 10y - 1 = 0$.

Розв'язання. За визначенням будь-яке рівняння другого ступеня описує криву другого порядку. Проаналізувавши відомі нам канонічні рівняння кола, еліпсу, гіперболи, параболи, зробимо висновок, що загальне рівняння відповідає:

- колу, якщо коефіцієнти $A = B$, $C = 0$;
- еліпсу, якщо $A \neq B$, $C = 0$, A і B одного знаку;
- гіперболі, якщо $A \neq B$, $C = 0$, A і B різних знаків;
- параболі або $A = 0$, або $B = 0$.

Отже ми маємо загальне рівняння кола. Щоб привести його до канонічного вигляду, виділимо повний квадрат (за допомогою формул квадрат суми, квадрат різниці):

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x &= 4(x^2 + 2x) = 4((x^2 + 2x + 1) - 1) \\ &= 4(x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 10y &= 4\left(y^2 - \frac{5}{2}y\right) = 4\left(\left(y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16}\right) = \\ &= 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}; \end{aligned}$$

підставимо у рівняння

$$4(x+1)^2 - 4 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 = 0;$$

$$4(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{4} \quad : 4;$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

Звідси координати центра кола: $O_1\left(-1, \frac{5}{4}\right)$, а радіус $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -4)$ і $B(1, 3)$ дорівнює 2. Зробити креслення.

Розв'язання. Будь-яка точка M кривої має координати $M(x, y)$. Складемо рівняння за умовою:

$$\frac{AM}{BM} = 2.$$

$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}; \quad BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}} = 2.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4((x-1)^2 + (y-3)^2);$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 24y + 36;$$

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 32y + 15 = 0.$$

Ми отримали загальне рівняння кривої другого порядку. В задачі 10 ми провели його аналіз, отже можемо зробити висновок, що шукана крива - коло. Приведемо його рівняння до канонічного вигляду:

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 32y + 15 = 0 \quad : 3;$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{32}{3}y + 5 = 0;$$

$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} + \left(y^2 - \frac{32}{3}y + \frac{256}{9}\right) - \frac{256}{9} + 5 = 0;$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{3}\right)^2 = \frac{212}{9}.$$

Звідси координати центра кола: $O_1\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$, а радіус $R = \frac{2\sqrt{53}}{3}$.

Зробимо креслення:

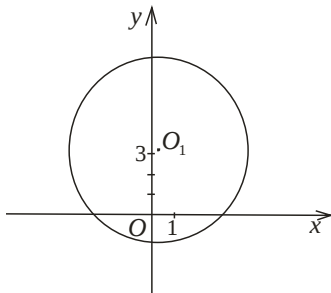


Рисунок 5.1 – Коло.

**Завдання для практичних занять
та самостійної роботи студентів**

Завдання 5.1

1. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 49$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 9x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y + 7)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(-5, 3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(-2, 9)$, а радіус дорівнює 7.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 6, а один з фокусів має координати $F(-4, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 3 і точка $A(6, 4\sqrt{3})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = \frac{7}{4}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-3, 2)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 1$. Зробити креслення.

Завдання 5.2

1. Дано рівняння кола: $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 8y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{3})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-6, 11)$, $B(2, -9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 16 і точка $D(8, \frac{18}{5})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{5}{3}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1, -4)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -3$. Зробити креслення.

Завдання 5.3

1. Дано рівняння кола: $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 29$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 3x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.
Визначити положення точки $A(4, -7)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(5, -11)$ і радіус $R = 13$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{56}}{9}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(5,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = 7$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(2,5)$ і $B(-3,4)$ дорівнює 34. Зробити креслення.

Завдання 5.4

1. Дано рівняння кола: $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 49$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 5y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{2}x$.
Визначити положення точки $A(6, -3)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(2,5), B(-3,12)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7\sqrt{2}, 5)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2,7)$ і $B(5,9)$ дорівнює $\frac{3}{2}$. Зробити креслення.

Завдання 5.5

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y + 3)^2 = 28$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{8} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{7}{3}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 43$.
Визначити положення точки $A(7,15)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-4,8)$ і радіус $R = 12$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(9\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{2}{9}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3, -4)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = 5$.
Зробити креслення.

Завдання 5.6

1. Дано рівняння кола: $(x + 11)^2 + (y - 7)^2 = 12$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = \frac{6}{5}y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$.
Визначити положення точки $A(0,3)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(5,3)$ і $B(-7,-1)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{13}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює $2\sqrt{74}$, а уявна вісь - 10.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0, -7)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння:
$$45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0.$$
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(2,1)$ на відстані у п'ять разів менше ніж від прямої $x = -4$.
Зробити креслення.

Завдання 5.7

1. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y + 11)^2 = 33$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{19} - \frac{y^2}{36} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -4x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Визначити положення точки $A(5, -6)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра кола $A(-7, -9)$ і його радіус $R = 17$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами дорівнює 24.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{3}$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(3, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точок $A(-1, -5)$ і $B(-3, 4)$ дорівнює 26. Зробити креслення.

Завдання 5.8

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 29$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -12y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{13}{7}x$.
Визначити положення точки $A(7, -5)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(2, -7)$ і $B(5, 14)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а точка $M\left(\frac{7}{\sqrt{3}}, 4\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e = \frac{13}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(9, 0)$ і $B(-5, 3)$ дорівнює $\frac{4}{3}$. Зробити креслення.

Завдання 5.9

1. Дано рівняння кола: $(x + 13)^2 + (y - 1)^2 = 47$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{58} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{13}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Визначити положення точки $A(-2, 10)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(14, 0)$ і радіус $R = 2\sqrt{7}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 8, а точка $M(4\sqrt{3}, 9\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата її фокуса $F(0, -17)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -4$ на відстані в чотири рази більше ніж від точки $A(-2, 6)$. Зробити креслення.

Завдання 5.10

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 82$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{22} - \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -\frac{7}{5}y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{14} = 1$.
Визначити положення точки $A(5,3)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-9,13)$, $B(15, -4)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 10, а точка $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 4, а ексцентриситет $e = \frac{5}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = \frac{11}{2}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(9,5)$ і $B(-3,12)$ дорівнює 37. Зробити креслення.

Завдання 5.11

1. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + y^2 = 19$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{20} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 5,2x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $x^2 = -\frac{7}{4}y$. Визначити положення точки $A(-\sqrt{14}, -8)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(16, -5)$ і радіус кола $R = 5\sqrt{3}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{4}$, а ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(-6, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 7 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-3, -2)$ і $B(-1, 5)$ дорівнює $\frac{1}{5}$. Зробити креслення.

Завдання 5.12

1. Дано рівняння кола: $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 43$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 13y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(-4, 1)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB : $A(-4, 9)$, $B(11, -15)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет $e = \frac{4}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{7}$ і точка $M(7\sqrt{2}, 5)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y = -\frac{3}{11}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої віддалена від прямої $x = -5$ на відстані в чотири рази менше ніж від точки $A(-6, 0)$. Зробити креслення.

Завдання 5.13

1. Дано рівняння кола: $(x + 6)^2 + (y - 12)^2 = 11$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{2} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{3}{7}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{7} = 1$.
Визначити положення точки $A(0,7)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(-10,7)$ і радіус $R = \sqrt{5}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $A(-5,4\sqrt{3})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що уявна піввісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 26.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $x = 7,3$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + y^2 - 16x - 36y + 75 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(7,1)$ і $B(2, -5)$ дорівнює $\frac{1}{6}$. Зробити креслення.

Завдання 5.14

1. Дано рівняння кола: $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 99$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{13} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{37} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = \frac{6}{11}y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$. Визначити положення точки $A(-6\sqrt{5}, 4)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB : $A(0, 18), B(-7, 13)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 24, а ексцентриситет $e = \frac{5}{13}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна вісь дорівнює 18, а точка $A(9\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(0, -15)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 10x - 7y + 53 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від прямої $x = -2$ на відстані в сім разів більше ніж від точки $A(-5, 8)$. Зробити креслення.

Завдання 5.15

1. Дано рівняння кола: $(x + 14)^2 + (y - 5)^2 = 63$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{18} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -\frac{17}{2}x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $(x + 5)^2 = 12y + 1$.
Визначити положення точки $A(-10, 2)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(19, -3)$ і радіус кола $R = 7$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 3, а точка $M\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, 1\right)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 10, а кутовий коефіцієнт асимптоти гіперболи $k = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відома координата фокуса $F(9, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $3x^2 + 5y^2 + 54x - 40y + 308 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(3, 3)$ і $B(-7, 6)$ дорівнює 38. Зробити креслення.

Завдання 5.16

1. Дано рівняння кола: $(x + 6)^2 + (y - 19)^2 = 20$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = 8y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 15$.
Визначити положення точки $A(5,12)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів кола $AB: A(13,1), B(-19,8)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами дорівнює 6.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет $e = \sqrt{1,2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відоме рівняння директриси $y = 4,7$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $3x^2 - 2y^2 - 42x - 8y + 121 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-8, -3)$ і $B(2,5)$ дорівнює $\frac{3}{4}$. Зробити креслення.

Завдання 5.17

1. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y + 17)^2 = 5$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{81} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{55} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -3,5x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Визначити положення точки $A(-1, -6)$ відносно еліпса.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати центра $A(8, -13)$ і радіус кола $R = \sqrt{11}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{4}$, а точка $M(-4, \sqrt{21})$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомі координати фокуса $F(17, 0)$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $y^2 - 7x + 18y + 102 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5, -9)$ на відстані у шість разів більше ніж від прямої $y = -3$. Зробити креслення.

Завдання 5.18

1. Дано рівняння кола: $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 40$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 74$.
Визначити положення точки $A(5, -2)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(3, 8)$, а радіус дорівнює 6.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 5, а один з фокусів має координати $F(-3, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 3 і точка $A(7, 9)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{3}{5}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(5, -4)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 2$. Зробити креслення.

Завдання 5.19

1. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 3$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -3y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{7})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-9, 12)$, $B(5, -4)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 12 і точка $D(5, 3)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет дорівнює $\frac{8}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{2}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 - y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-2, 3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = 5$. Зробити креслення.

Завдання 5.20

1. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 11$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -6x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Визначити положення точки $A(5, -8)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(6, -3)$ і радіус $R = \sqrt{5}$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{8}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-8, 0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -2$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $5x^2 + 5y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(1, 5)$ і $B(-2, 3)$ дорівнює 7. Зробити креслення.

Завдання 5.21

1. Дано рівняння кола: $(x + 10)^2 + (y - 2)^2 = 35$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -8y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{7}{4}x$.
Визначити положення точки $A(6, -3)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(6, 3), B(4, -9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 7, а ексцентриситет дорівнює $\frac{2}{5}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(8, -3)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 - 2x - 32y - 95 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(3, -7)$ і $B(2, 6)$ дорівнює 5. Зробити креслення.

Завдання 5.22

1. Дано рівняння кола: $(x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 19$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{12} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{6}{5}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x + 3)^2 + (y + 10)^2 = 8$.
Визначити положення точки $A(-5, -8)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3, 11)$ і радіус $R = 15$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{4}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(7, -2)$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = \frac{2}{15}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(-7, -1)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = -2$.
Зробити креслення.

Завдання 5.23

1. Дано рівняння кола: $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 103$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -3x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 6)^2 = 33$.
Визначити положення точки $A(-5, 3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(-5, 12)$, а радіус дорівнює 14.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 8, а один з фокусів має координати $F(-6, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 7 і точка $A(\sqrt{7}, 6)$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -4$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-5, 1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = 3$. Зробити креслення.

Завдання 5.24

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -12y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{13} = 1$. Визначити положення точки $A(0, \sqrt{3})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(-10, 7)$, $B(2, 3)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(7, 2)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{6}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $16x^2 - 9y^2 - 16x + 6y - 25 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1, -2)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -5$. Зробити креслення.

Завдання 5.25

1. Дано рівняння кола: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 79$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -5x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 1$.
Визначити положення точки $A(4, -7)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-3, -2)$ і радіус $R = 5$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-6, 0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{3}{5}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -10$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2, 5)$ і $B(3, 1)$ дорівнює 22. Зробити креслення.

Завдання 5.26

1. Дано рівняння кола: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{10} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -6y$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{3}{8}x$.
Визначити положення точки $A(4, -2)$ відносно параболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів: $A(12, -5), B(-4, -3)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{6}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(\sqrt{3}, -2)$ належить гіперболі, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{4}{3}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = \frac{5}{9}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $6x^2 - 6x - 12y - 19 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: відношення відстаней від точки M до точок $A(-2, -3)$ і $B(-4, 1)$ дорівнює $\frac{5}{2}$. Зробити креслення.

Завдання 5.27

1. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 8$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = \frac{5}{21}x$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 22$.
Визначити положення точки $A(7, -3)$ відносно кола.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-1, 9)$ і радіус $R = 16$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{7}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точка $M(-5, -2\sqrt{2})$ належить гіперболі, а уявна вісь дорівнює 4.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{7}{8}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 10 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M відстоїть від точки $A(3, -5)$ на відстані у двічі більше ніж від прямої $y = -2$.
Зробити креслення.

Завдання 5.28

1. Дано рівняння кола: $(x - 13)^2 + (y - 2)^2 = 53$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{75} - \frac{y^2}{64} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = -8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y - 9)^2 = 24$.
Визначити положення точки $A(5, -3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(9, 1)$, а радіус дорівнює 13.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 4, а один з фокусів має координати $F(-5, 0)$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 5 і точка $A(-5, 4\sqrt{2})$ належить гіперболі.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -\frac{9}{4}$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $4x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 5 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(-1, 1)$ на відстані, в три рази більше, ніж від прямої $y = -5$. Зробити креслення.

Завдання 5.29

1. Дано рівняння кола: $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 23$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{8} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{45} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $x^2 = -13y$.
Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння еліпса: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{24} = 1$. Визначити положення точки $A(-3, \sqrt{6})$ відносно еліпса: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів $AB: A(-8, 1), B(-2, 9)$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 14 і точка $D(3, -1)$ належить еліпсу.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її уявна піввісь дорівнює 8 і ексцентриситет дорівнює $\frac{9}{4}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -12$.
10. Визначити тип кривої другого порядку, привести до канонічного виду її рівняння: $9x^2 - y^2 - 6x + 10y - 48 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(1, 3)$ на відстані, в два рази менше, ніж від прямої $x = -2$. Зробити креслення.

Завдання 5.30

1. Дано рівняння кола: $(x - 12)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
Знайти координати центра та радіус кола.
2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{25} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса.
3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{16} = 1$.
Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.
4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 7x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.
5. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{15} = 1$.
Визначити положення точки $A(4,3)$ відносно гіперболи.
6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати його центра $A(-9, -3)$ і радіус $R = 11$.
7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала вісь дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що один з фокусів має координати $F(-5,0)$, а кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $\frac{5}{2}$.
9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = -14$.
10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння: $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 17 = 0$.
11. Скласти рівняння кривої, кожна точка M задовольняє умові: сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-2, -3)$ і $B(-3,5)$ дорівнює 21. Зробити креслення.

Розділ 6 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Дано координати точок:
 $A(-3; 2; 1)$, $B(4; 4; 3)$, $C(2; -3; 2)$ і $D(1; 5; -2)$. Знайти:
 а) довжину ребра AB ;
 б) рівняння ребра AD ;
 в) рівняння грані ABC ;
 г) кут між ребрами AB і AD ;
 д) кут між гранями ABC і ABD ;
 е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
 є) рівняння і довжину висоти DK ;
 ж) площу грані BCD ;
 з) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання:

- а) довжину ребра AB обчислимо як довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{49 + 4 + 4} = \sqrt{57} \text{ (од.)};$$

- б) запишемо рівняння ребра AD :

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z - 1}{-2 - 1}; \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{-3};$$

- в) рівняння грані ABC знайдемо як рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 2 - (-3) & -3 - 2 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \cdot (2 + 10) - (y - 2) \cdot (7 - 10) + (z - 1)(-35 - 10) = 0;$$

$$12(x + 3) + 3(y - 2) - 45(z - 1) = 0 \quad |:3;$$

$$4(x + 3) + (y - 2) - 15(z - 1) = 0;$$

$$4x + 12 + y - 2 - 15z + 15 = 0; \quad 4x + y - 15z + 25 = 0;$$

г) кут між ребрами AB і AD знайдемо, користуючись формулами векторної алгебри. Згадаємо, що розташування прямих в просторі визначається їх напрямними векторами. Координати вектора, паралельного прямій AD з'ясуємо, скориставшись результатами п.б): $\overrightarrow{AD}(4; 3; -3)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-3); 4 - 2; 3 - 1) = (7; 2; 2).$$

Кут між ребрами знайдемо по формулі (4.24):

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{28}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1938}};$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right) \text{ і } \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pi - \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right);$$

д) кут між гранями ABC і ABD знайдемо як кут між векторами нормалі до площин (ABC) і (ABD) . Вектор нормалі до площини (ABC) запишемо, скориставшись результатами обчислень у п.в): $\vec{N}_1(4; 1; -15)$. Знайдемо рівняння площини ABD :

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 1 - (-3) & 5 - 2 & -2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-12(x + 3) + 29(y - 2) + 13(z - 1) = 0;$$

$$12x - 29y - 13z + 107 = 0; \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_2(12; -29; -13).$$

Знайдемо кут між площинами:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4 \cdot 12 + 1 \cdot (-29) - 15 \cdot (-13)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-29)^2 + (-13)^2}} = \frac{107}{\sqrt{577}};$$

$$\angle((ABC), (ABD)) = \arccos \frac{107}{\sqrt{577}};$$

е) знайдемо кут між ребром AD і гранню ABC . Згадаємо координати напрямного вектора ребра AD ($\vec{S}(4; 3; -3)$) і вектора нормалі до грані ABC ($\vec{N}(4; 1; -15)$). Отже,

$$\sin \varphi = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-15)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{64}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{242}} = \frac{64}{22\sqrt{17}} = \frac{32}{11\sqrt{17}};$$

$$\varphi = \arcsin \frac{32}{11\sqrt{17}};$$

є) рівняння висоти DK знайдемо як рівняння перпендикуляру, встановленого з вершини D на площину ABC . Згадаємо, що пряма визначається вектором, паралельним їй, а площина – вектором нормалі. Зрозуміло, що шуканий вектор, який визначає розташування висоти DK , паралельний вектору нормалі до площини ABC . З умови паралельності маємо

$$\vec{N}(4; 1; -15) \Rightarrow \vec{S}(4; 1; -15).$$

Складемо рівняння висоти DK (згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$):

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{-15}.$$

Довжину DK знайдемо як відстань від точки D до площини ABC за формулою (4.16). Згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$ та рівняння площини ABC : $4x + y - 15z + 25 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 15 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{39}{\sqrt{242}} = \frac{39}{11\sqrt{2}}.$$

ж) площу грані BCD обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри. Грань BCD – трикутник, площу якого знайдемо як половину модуля векторного добутку. Для підстановки у формулу знайдемо координати векторів $\vec{BC}$ і $\vec{BD}$:

$$\vec{BC} = (2 - 4; -3 - 4; 2 - 3) = (-2; -7; -1);$$

$$\vec{BD} = (1 - 4; 5 - 4; -2 - 3) = (-3; 1; -5);$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}|.$$

Знайдемо спочатку векторний добуток, а потім його модуль:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -7 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (35 + 1)\vec{i} - (10 - 3)\vec{j} + (-2 - 21)\vec{k} = 36\vec{i} - 7\vec{j} - 23\vec{k}; \\ |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| &= \sqrt{36^2 + (-7)^2 + (-23)^2} = \\ &= \sqrt{1296 + 49 + 529} = \sqrt{1874};\end{aligned}$$

Отже $S = \frac{1}{2}\sqrt{1874} \text{ (од}^2\text{)}$;

з) об'єм піраміди $ABCD$ також обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри. Для цього з'ясуємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}(7; 2; 2)$; $\overrightarrow{AC}(5; -5; 1)$; $\overrightarrow{AD}(4; 3; -3)$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 105 + 8 + 30 + 40 + 30 - 21 = 192; \\ V &= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32 \text{ (од}^3\text{)}.\end{aligned}$$

2. Скласти рівняння площини, якій належать точки $M(4; 3; 1)$ і $N(-2; 0; -1)$, і яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1; 1; -1)$ і $B(-3; 1; 0)$.

Розв'язання: Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Звідси $\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-(-1)}{0-(-1)}, \quad \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-(-1)}{1}.$

Якщо площина проходить через точку $M(4; 3; 1)$, то її рівняння можна записати у вигляді

$$A(x - 4) + B(y - 3) + C(z - 1) = 0.$$

З того, що ця площина проходить і через точку $N(-2; 0; -1)$, прямує, що виконується умова

$$A(-2 - 4) + B(0 - 3) + C(-1 - 1) = 0, \text{ або } 6A + 3B + 2C = 0.$$

Оскільки шукана площина паралельна знайденій прямій AB , то з урахуванням умови паралельності $Am + Bn + Cp = 0$, маємо

$$-4A + 0B + 1C = 0 \quad \text{або} \quad 4A - C = 0.$$

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 6A + 3B + 2C = 0 \\ 4A - C = 0 \end{cases},$$

знаходимо, що $C = 4A$, $B = -\frac{14}{3}A$. Підставимо отримані значення C і B у рівняння шуканої площини, маємо

$$A(x - 4) - \frac{14}{3}A(y - 3) + 4A(z - 1) = 0.$$

З умови $A \neq 0$, отримане рівняння еквівалентне рівнянню

$$3(x - 4) - 14(y - 3) + 12(z - 1) = 0$$

$$\text{або } 3x - 14y + 12z + 18 = 0.$$

3. Знайти координати x_2, y_2, z_2 точки M_2 , яка симетрична точці $M_1(6; -4; -2)$ відносно площини $x + y + z - 3 = 0$.

Розв'язання: Складемо параметричні рівняння прямої M_1M_2 , перпендикулярної до даної площини:

$$x = 6 + t; \quad y = -4 + t; \quad z = -2 + t.$$

Підставимо вирази для x, y і z у рівняння даної площини, знайдемо t :

$$(6 + t) + (-4 + t) + (-2 + t) - 3 = 0; \quad 3t = 3; \quad t = 1,$$

і, отже, точку M перетину прямої M_1M_2 , з даною площиною:

$$x = 6 + 1 = 7; \quad y = -4 + 1 = -3; \quad z = -2 + 1 = -1; \quad \Rightarrow$$

$M(7; -3; -1)$. З того, що точка M є серединою відрізка M_1M_2 , вірні рівності:

$$7 = \frac{6+x_2}{2}; \quad -3 = \frac{-4+y_2}{2}; \quad -1 = \frac{-2+z_2}{2},$$

з яких знаходимо координати точки M_2 : $x_2 = 8$; $y_2 = -2$; $z_2 = 0$;
 $M_2(8; -2; 0)$.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

1. Дано координати точок: A, B, C і D . Знайти:

- а) довжину ребра AB ;
- б) рівняння ребра AD ;
- в) рівняння грані ABC ;
- г) кут між ребрами AB і AD ;
- д) кут між гранями ABC і ABD ;
- е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
- є) рівняння і довжину висоти DK ;
- ж) площу грані BCD ;
- з) об'єм піраміди $ABCD$.

№ в-та	A	B	C	D
1	(3, 1, 4)	(-1, 6, 1)	(-1, 1, 6)	(0, 4, -1)
2	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, -2)	(-1, 0, 2)
4	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)
5	(9, 5, 5)	(-3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6	(0, 7, 1)	(2, -1, 5)	(1, 6, 3)	(3, -9, 8)
7	(5, 5, 4)	(1, -1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, -1)
8	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)
18	(7, 2, 2)	(-5, 7, -7)	(5, -3, 1)	(2, 3, 7)
19	(8, -6, 4)	(10, 5, -5)	(5, 6, 8)	(8, 10, 7)
20	(1, -1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21	(1, -2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, -3, 5)

23	(2, 3, 5)	(5, 3, -7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24	(5, 3, 7)	(-2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, -1)
27	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, -5, 8)	(5, 4, 2)
28	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, -3, 9)	(1, 2, 5)
29	(2, -1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, -3, 7)
30	(0, 4, 5)	(3, -2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

Завдання 6.1

Розв'язати наступні задачі:

2. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку $M(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

3. Довести паралельність прямих $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ і $\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0 \\ x + 6z - 6 = 0 \end{cases}$.

Завдання 6.2

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка M_1M_2 , перпендикулярно цьому відрізку, якщо $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(-1; 7; 10)$.

3. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежить у цій площині.

Завдання 6.3

Розв'язати наступні задачі:

2. Знайти відстань від точки $M\left(2; 0; -\frac{1}{2}\right)$ до площини $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -3; 3)$ і утворює з осями координат кути у 60° , 45° і 120° відповідно.

Завдання 6.4

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -3; 5)$ паралельно площині xOy .3. Довести, що пряма $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$.**Завдання 6.5**

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, якій належить вісь Ox і точка $A(2; 5; -1)$.3. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами: $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 1; -4)$ і $C(0; 2; 3)$, яка проведена з вершини C .**Завдання 6.6**

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ паралельно вісі Oy .3. При якому значенні n пряма $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{n} = \frac{z}{1}$ буде паралельна прямій $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$.**Завдання 6.7**

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 5; -1)$ і пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ з площиною $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Завдання 6.8

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3. Знайти проекцію точки $A(3; 1; -1)$ на площину $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

Завдання 6.9

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $x - y - 7z + 9 = 0$ з площиною, яка проходить через вісь Ox і точку $A(3; 2; -5)$.

3. При якому значенні C площини $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ і $x + 3y + 2z + 5 = 0$ будуть перпендикулярні?

Завдання 6.10

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини «у відрізках», якщо вона проходить через точку $M(6; -10; 1)$ і відсікає на вісі Ox відрізок $a = -3$, а на вісі Oz – відрізок $c = 2$.

3. При якому значенні A площина $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

Завдання 6.11

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 3; -4)$ паралельно двом векторам $\vec{a}(4; 1; -1)$ і $\vec{b}(2; -1; 2)$.

3. При яких значеннях n і C пряма $\frac{x-1}{n} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ перпендикулярна площині $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

Завдання 6.12

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1; 1; 0)$ і $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно до площини $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно прямій

$$\{x = 2t + 5; y = -3t + 1; z = -7t - 4\}.$$

Завдання 6.13

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин:

$$2x - 3y + z - 1 = 0 \text{ і } x - y + 5z + 3 = 0.$$

3. Перевірити, чи належать точки $A(0; 0; 2)$, $B(4; 2; 5)$ і $C(12; 6; 11)$ одній прямій.

Завдання 6.14

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(3; -1; 2)$ і $B(2; 1; 4)$ паралельно вектору $\vec{a}(5; -2; -1)$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -5; 3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

Завдання 6.15

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(5; -2; 3)$, $B(1; -3; 5)$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3; 4)$ і перпендикулярна до прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

Завдання 6.16

Розв'язати наступні задачі:

2. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проведена через точку $M(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

3. При яких значеннях A і B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

Завдання 6.17

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; -1; 2)$, перпендикулярно відрізку M_1M_2 якщо $M_1(2; 3; -4)$, $M_2(-1; 2; -3)$.

3. Показати, що пряма $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а пряма $\{x = t + 7; y = t - 2; z = 2t + 1\}$ лежить у цій площині.

Завдання 6.18

Розв'язати наступні задачі:

2. Показати, що пряма $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а пряма $\{x = t; y = t - 2; z = 2t + 1\}$ лежить у цій площині.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $A(-3; 1; -2)$.

Завдання 6.19

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; -4; 1)$ паралельно координатній площині xOy .

3. Показати, що прямі $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярні.

Завдання 6.20

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(3; -5; 2)$.

3. При якому значенні D пряма
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$$
 перетинає вісь Oz .

Завдання 6.21

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(3; -1; 2)$, $N(2; 1; 4)$ паралельно вісі Oz .

3. При якому значенні p прямі
$$\{x = 2t + 5; \quad y = -t + 2; \quad z = pt - 7\} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$
 паралельні?

Завдання 6.22

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; -1)$; і пряму $\{x = t - 3; y = 2t + 5; z = -3t + 1\}$.

3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ і площини $3x - y + 2z - 8 = 0$.

Завдання 6.23

Розв'язати наступні задачі:

2. Знайти проекцію точки $M(4; -3; 1)$ на площину $x - 2y - z - 15 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -5; 3)$ паралельно площині xOz .

Завдання 6.24

Розв'язати наступні задачі:

2. Визначити при якому значенні B площини $x - 4y + z - 1 = 0$ і $2x + By + 10z - 3 = 0$ будуть перпендикулярні.

3. Скласти загальні рівняння прямої, утвореної перетином площини $x + 2y - z + 5 = 0$ і площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(5; 3; 2)$.

Завдання 6.25

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; -3; -4)$ і відсікає на осях координат відрізки однакової величини.

3. При яких значеннях B і D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить у площині xOy ?

Завдання 6.26

Розв'язати наступні задачі:

2. При яких значеннях A і n пряма $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна до площини $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 3; 3)$ паралельно двом векторам $\vec{a}(-1; -3; 1)$ і $\vec{b}(4; 1; 6)$.

Завдання 6.27

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; -1)$ і $B(1; 1; 4)$ перпендикулярно до площини $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; 4; 5)$ паралельно вісі Ox .

Завдання 6.28

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин

$$x + 5y - z + 7 = 0 \text{ і } 3x - y + 2z - 3 = 0.$$

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3; 1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

Завдання 6.29

Розв'язати наступні задачі:

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; -5)$ і $B(-1; 1; -6)$ паралельно вектору $\vec{d}(4; 4; 3)$.

3. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -5; 3)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ і $\{x = 3t + 1; y = -t - 25; z = 2t + 3\}$.

Завдання 6.30

Розв'язати наступні задачі:

2. З'ясувати, при якому значенні C площини $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ і $x - 3y + 3z + 5 = 0$ будуть перпендикулярні.

3. Знайти точку, яка симетрична точці $A(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Розділ 7 ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

Приклад розв'язання типового варіанту

Обчислити границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45} &= \frac{2(-4)^3 - (-4)^2 + 8 \cdot (-4) - 3}{3(-4)^2 - 7 \cdot (-4) - 45} = \\ &= \frac{-128 - 16 - 32 - 3}{48 + 28 - 45} = -\frac{179}{31}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $-\frac{179}{31}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже розкладемо многочлени на множники, скоротимо й отримаємо результат:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} &= \left| \frac{4 - 6 + 2}{8 - 8} \right| = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2 - 1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{12}$.

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція

представлена у вигляді відношення многочленів, отже скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^3 , маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}} = \frac{7}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{7}{2}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^8 , маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x^5} + \frac{3}{x^6} - \frac{9}{x^8}}{5 - \frac{4}{x^3} - \frac{13}{x^7}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь - x^4 , маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x^3} + \frac{11}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{9}{x^2}} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x} - 3\sqrt[7]{x^9}}{\sqrt[9]{x^{13} + 5x} - 6\sqrt[3]{x}}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, отже нам достатньо порівняти максимальні степені чисельника і знаменника:

- в чисельнику $\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{7}$;
- в знаменнику $\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{3}$.

Максимальний степінь $\frac{5}{2}$ - в чисельнику, тому, функція прямує до нескінченності.

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - x - 6}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція має ірраціональність, тому позбавимось ірраціональності в чисельнику розкладемо знаменник на множники, скоротимо отриманий вираз на $(x - 3)$, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - x - 6} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - 5} - 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5 - 4}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)}{(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \frac{3 + 3}{(2 + 3) \cdot (\sqrt{3^2 - 5} + 2)} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{3}{10}$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою важливою границею. Для того, щоб функцію, границю якої ми обчислюємо, звести до першої важливої границі, необхідно виконати певні перетворення, а саме: скористатися формулою різниці косинусів:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x + 7x}{2} \sin \frac{3x - 7x}{2}}{9x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \sin 2x}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x \cdot 5 \cdot 2}{9 \cdot 5x \cdot 2x} = \frac{20}{9}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{20}{9}$.

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення невизначеності необхідно скористатися першою важливою границею. Але першою важливою границею ми можемо скористатися лише в тому випадку, якщо аргумент прямує до нуля. Тому спочатку зробимо заміну змінної, а далі, скориставшись формулами зведення, тригонометричними тотожностями, зведемо границю до першої важливої:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ x = \frac{\pi}{2} - y \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)}{\pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos y \cdot y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{2}$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-1}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $|1^\infty|$. Саме друга важлива границя допоможе нам впоратися з цією проблемою. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-1} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x+4}{6x-3} - 1 \right)^{5x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x+4-6x+3}{6x-3} \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6x-3} \right)^{5x-1} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{7}{6x-3} \right)^{\frac{6x-3}{7}} \right)^{\frac{7}{6x-3}(5x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7(5x-1)}{6x-3}} = e^{\frac{35}{6}}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $e^{\frac{35}{6}}$.

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{3x+2} \right)^{4x+5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію. Бачимо, що не зважаючи на те, що функція, границю якої ми обчислюємо, за структурою нам нагадує приклад 10, ніякої невизначеності тут нема, тому що дріб прямує до $\frac{8}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{3x+2} \right)^{4x+5} = \left(\frac{8}{3} \right)^{\infty} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Зведемо функцію до необхідного вигляду й скористаємося теоремою 3 з теми «Три важливих границі»:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{12x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{12x} = \\ &= \frac{5}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{7}}-1}{5x} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{84}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{5}{84}$.

**Завдання для практичних занять
та самостійної роботи студентів****Завдання 7.1**

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 3x^2 - 14x + 7}{2x^2 + 7x + 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x - 1}{5x^2 + 4x + 12};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{4x^3 + 2x^2 - 6};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x - 13}{5x^3 + 4x - 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - 2x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-7}\right)^{3x+4};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{3x-7}\right)^{2x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{5x}.$

Завдання 7.2

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 15}{x^3 - 3x^2 + 7};$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4x + 3};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 6x + 13}{x^2 - 2x^3 + 5};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 - 3x^5 + 4x^4}{6x^3 + 3x^2 + 14};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 8x + 1}{3x^4 - 4x^3 + 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + 3x} + 7x^2}{\sqrt[3]{x^4 - 7x} + 2\sqrt{x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x^2 - 5x + 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-6}{5x+4}\right)^{x-12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{6x}.$

Завдання 7.3

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x + 9}{3x^4 - 15};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 2}{3x^3 + x - 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x^2 + 4}{2x^2 - 3x - 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 - 3x^4}{2x^4 + 7x^3 + 5};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 + 4} + \sqrt[4]{3x^3 - 1}}{\sqrt[6]{x^8 + 7x^7 + 3} - x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{5x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{5x + 3} \right)^{2x+1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 7}{9x + 2} \right)^{4x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 4x} - 1}{7x}.$

Завдання 7.4

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 5x + 14};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{27x^3 - 1}{3x^2 + 5x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 12}{7x^2 + 3x + 8};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^6 + 2x^5 - 7x^3}{2x^4 + 4x^2 + 5};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 17}{5x^4 - 6x^3 + 14x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^3 + 2}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{7x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x-5} \right)^{7x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{3x-2} \right)^{7x+9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x}.$

Завдання 7.5

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 3x^2 + 14}{2x^2 + 7x - 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 5}{x^2 - 3x + 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 - 4x + 13}{5x^3 + x^2 + 24};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 2x^2 - 7x}{3x^2 + 4x + 8};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7x + 2x^3}{4x^3 + 6x^2 + 15};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 5} + \sqrt{x^3 + 2}}{\sqrt[3]{x^7 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 3x - 10};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - x)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{9x-11};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-1} \right)^{3x-9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{3x^2 - 5x};$

Завдання 7.6

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{21x^2 + 6x - 17}{3x^4 + 9x^2 + 5};$

2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{49 - x^2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x + 8}{3x^3 + 2x + 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2x^5 - 7x^3}{3x^2 + 7x - 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - x^5 + 3x^2}{9x^5 + 4x^2 + 13x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 2} - \sqrt[3]{x^5 + 4}}{\sqrt[8]{x^4 + 3x} + \sqrt[3]{x^2 + 13}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{x^2 - 3x + 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 + 6x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{3x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{2x+5} \right)^{2x-1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} - 1}{5x};$

Завдання 7.7

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{5x^2 + 4x - 35}{324 - x^2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125 + x^3}{x^2 + 8x + 15};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 9x^2 - 4x}{5x^2 - x - 24};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^4 - 3x^2 - 5x}{3x^2 + 7x - 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 9}{8x^3 + 3x^2 + 14x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 - 13} + \sqrt{x^4 + 9}}{2x^2 - \sqrt[6]{x^5 + 3}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{4x + 5} - 5};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 7x}{tg 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)tg \frac{\pi x}{2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 3}{5x - 1} \right)^{4x + 2};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 1}{9x + 13} \right)^{7x + 2};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{x^2 + 5x}.$

Завдання 7.8

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 13x}{2x^2 + 5x - 11};$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 9}{7x^2 + 3x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 7x^4 + 3x^2}{4x^3 + 6x + 15};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 7x - 9}{2x^4 + 9x^3 + 3x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{x^4 + 2} - \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x + 7} + 9x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{3x - 5} - 4}{x^2 - 49};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{\sin 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} tg \left(\frac{\pi}{4} - x \right) tg 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 1}{7x + 3} \right)^{x + 2};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 8}{6x + 5} \right)^{-2x + 3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{3x}.$

Завдання 7.9

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{2x^4 + 15};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 9x - 5}{4x^2 - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 2x^2 + x^4}{3x^4 - 5x^3 - 11x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 - 9}{3x^3 + 2x + 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 5}{3x^4 - 6x^2 + 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 7} + 4x}{\sqrt[6]{x^5 + 14x} - 2\sqrt[9]{x^{10}}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x + 15} - 3}{x^2 - x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{9x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+5}{8x+3}\right)^{x-9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-1}{9x+5}\right)^{x+8};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln 3}{x}.$

Завдання 7.10

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{4x^3 + 2x + 17}{3x^2 - 2x - 11};$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x - 6};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x - 17}{2x^2 + 4x^3 - 5x};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^7 + 6x^5 + 4x^3}{5x^4 + 3x - 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x + 1}{x^5 - 6x^4 + x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^6 + 3x}}{\sqrt[7]{x^6 + 2x} + \sqrt[8]{x^9 + 5}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x+10} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 3x}{\sin 5x + \sin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x+5}\right)^{3x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+7}{9x-3}\right)^{2-5x};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x}.$

Завдання 7.11

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 9}{x^2 + 11x + 6};$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 20};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 6x}{5x^4 - 7x - 12};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^3 + 11x - 3};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 2}{5x^3 + 2x + 13};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[4]{x^5+7x-2x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{5x-1} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{tg} 7x;$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-5} \right)^{7x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{3x-2} \right)^{8x+9};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{(1+2x)^3} - 1}{5x}.$

Завдання 7.12

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{17 - 6x^2 + 3x^4}{x^2 - 9x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x^2 - 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 19x}{9x^4 - x + 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 2x^3 - 7x}{2x^3 + 3x - 11};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2 + 6x + 5}{x^7 + 3x^2 + 4x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5+4} + \sqrt[4]{x^3-2}}{\sqrt[4]{x^6+2x^5-1-4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5} - 1}{x^3 + 64};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 7x}{x \cdot \cos 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\frac{1}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+5} \right)^{4x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+6}{8x-1} \right)^{2x+7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{4x}.$

Завдання 7.13

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 - 5x - 1}{4x^2 + 5x + 10};$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 15}{2x^3 + 6x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 6x^2 + 3}{3x^3 + 2x + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 2}{3x^4 - x^3 - 4x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 2} + \sqrt[3]{x^2 + 9}}{\sqrt[5]{x^5 - 2} + \sqrt[6]{x^2 + 7}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{5x - 4} - 3\sqrt{x - 4}}{x^2 - 64};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{6x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x - 1}{9x - 3} \right)^{6x + 2};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x - 1}{4x + 1} \right)^{9x + 8};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{4x}.$

Завдання 7.14

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7x^2 - 3x - 15}{3x^3 + 2x^2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 36};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 9}{5x^2 - 7x - 11};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 9x^3 + 5x^2}{3x^3 + 5x + 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{x^6 + 2x^5 + 8x^3};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 3} + \sqrt[4]{x^5 + 2x}}{4x - \sqrt[6]{x^3 + 4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2x + 3}}{x^2 - 5x + 6};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{\sin 8x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 7} \right)^{x - 3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{5x + 4} \right)^{2x - 3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x^2 + 4x}.$

Завдання 7.15

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 7x^2 + x + 15}{2x^2 - 6x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 4x - 21};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 2x^2 - x^3}{13 + 4x + 6x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x^2 - 4}{2x^2 - 6x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{19x^3 + 7x - 8};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 6} + \sqrt[10]{x^6 + 9}}{\sqrt[4]{x^2 + 4x - 1} + 3\sqrt{x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+11}}{x^2 + 7x + 10};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x^2}{\sin 11x + \sin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-7} \right)^{x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{7x+1} \right)^{-4x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+7x)^4} - 1}{3x}.$

Завдання 7.16

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^4 - 265}{3x^2 - 9x - 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 5x + 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x - 3}{2x^3 + 4x^2 + 3x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^9 - 7x - 1}{5x^4 - 13x^2 + 8x};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x - 5}{9x^4 - x^3 - 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^9 + 14} + 3x^2}{\sqrt[5]{x^3 + 2} + \sqrt{x^4 - 7}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{3x+16} - 2}{x^2 + x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{3x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+6} \right)^{7x+9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x+5}{2x-1} \right)^{2x-6};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{11x}.$

Завдання 7.17

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{11x^4 + 3x^3 + 18x}{9x^2 - 6x + 5};$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 27};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 2x^2 - 9}{5x + 13x^2 + 6x^4};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 9x^3 + 8}{5x^2 + 6x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 11}{5x^3 + 4x^2 + 13x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 5x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 2x} + \sqrt[5]{2x^4 - 3x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5}}{x^2 + 6x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin x}{4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+5}{7x+4} \right)^{x+13};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+9}{5x-1} \right)^{x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 2^x}{5x}.$

Завдання 7.18

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 6x + 9}{13 - x - x^2};$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 + 11x - 3}{16x^2 - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + x^3 + 3x}{9x^5 - x^4 - 34};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 7x + 14}{x^2 - 6x - 5};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 9}{4x^4 + 5x^2 + 3x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 4} + \sqrt[5]{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[6]{x^4 + 3}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{5x - 1} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{x^2 + 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+1} \right)^{5x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x-3}{7x-3} \right)^{4x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - e^{4x}}{3x}.$

Завдання 7.19

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 15}{5x^2 - 6};$

2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 9x - 11}{5x^2 + 14x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 6x + 8}{2x^2 + 3x + 19};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x - 1}{5x^3 + 4x^2 - 15};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sqrt{8x^2 - 6}}{\sqrt[4]{x^3 + 2} + \sqrt[5]{x^2 - 7x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6x+16}-2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3}};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{5x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right);$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-11}{x+7} \right)^{4x-13};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+4}{7x-2} \right)^{3x-5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{(1+5x)^2} - 1}{4x}.$

Завдання 7.20

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 + 6x^2 + 13x}{x^3 - 3x^2 + 7};$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 11x + 13x^2}{5x^2 + 4x - 9};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^4 - x}{4x^2 + 2x - 17};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x - 8}{2x^4 + 6x^3 - 3};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 9} - \sqrt[4]{x^3 + 2x^2}}{\sqrt[5]{x^6 + 1} - 12};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x}{\sqrt{x+16} - 4};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+5} \right)^{3x+6};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-5}{8x+3} \right)^{4x+12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(6+x) - \ln 6}{3x}.$

Завдання 7.21

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^3 + 6x - 14}{84 - x^4};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 7x^2 + 9}{5 - 3x - 9x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 9x}{4x^3 + 6x^2 - 15};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 5x}{5x^5 - x^3 + 6x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[7]{x^8 - 3} + 5x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{x+1} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x \cdot \arcsin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-9} \right)^{2x+5};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x+3}{7x-5} \right)^{4x-3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{x^3 - 2x^2};$

Завдання 7.22

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^3 - 4x^2 + 3x + 9}{5x^2 - 6x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 + 3x - 10};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x - 15}{4x^2 + 2x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x^2 + 4}{x^2 - 11x + 3};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x - 11}{2x^5 + x^4 + 9x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 6} + 2\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[6]{x^5 + 3} + 13};$

7. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{x+11} - 2}{x^2 + 6x - 7};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos^2 3x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{ctg} x;$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4} \right)^{11x+3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{3x+10} \right)^{5-6x};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{5x^3};$

Завдання 7.23

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 9x^2 - 5}{3x^2 - 112};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 + 13}{5x^2 - 7x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 2x^2 - 9x}{3x^4 - 5x^2 + 16};$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2 - 6x - 5}{7x^3 + 4x^2 + 13};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[5]{x^7 + 2x + 3} + 3x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin \frac{3x}{2}}{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{6x-4}\right)^{2x-7};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+4}{2x+1}\right)^{10x-1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{(1+5x)^7} - 1}{2x}.$

Завдання 7.24

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 9x^2 + 3x}{5x^2 - 9x + 13};$

2. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 36};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x - x^3}{5x^2 + 2x^3 + 4};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 9x^2 + 5}{5x^2 + 9x - 12};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 12}{3x^3 + 6x - 8};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + 2x^2} + 6\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4 + 9x} + \sqrt[12]{x^8 + 3x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{3}}{x^2 + 4x - 12};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\pi}{4} - x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-7}\right)^{5x-3};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+3}{4x-1}\right)^{-3x+12};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{x^2 + x}.$

Завдання 7.25

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 3x - 12}{3x^2 - 9x + 42};$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x^2 + 3x - 4};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 + 6x + 20}{4x^3 + 7x^2 + 25x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 5x + 4}{3x^2 + 6x + 13};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 14x - 13}{5x^2 + 6x - 7};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 - 1} + 2x^2}{\sqrt[8]{x^7 + 6} + \sqrt[3]{x^2 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15} - 2}{\sqrt{x+8} - 3};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x}{\sin 5x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+2} \right)^{5x+2};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{9x-3} \right)^{2x-7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 2^{x^2}}{5x^2}.$

Завдання 7.26

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{13 - 2x - 4x^3 - 7x^5}{12x^3 + 16x - 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125 + x^3}{x^2 + 6x + 5};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 - 9}{4 - 2x + 7x^3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 7x^3 + 13x}{2x^3 + 4x^2 + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 8x^2 - 1}{7x^8 + 4x^4 + 2x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 - 7} + \sqrt[6]{x^4 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 4} + 5x};$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{\sqrt{3x + 10} - 1};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 5x}{6x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)tg \frac{\pi x}{2};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-9} \right)^{2x-1};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{3x+6} \right)^{2x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{4x}}{3x}.$

Завдання 7.27

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 6x - 17}{9x^2 + 7x - 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 16};$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 8x + 1}{4x^2 - 10x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 7x^2 + 13x}{2x^3 + 4x^2 + 9};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 7}{5x^4 + 2x^3 + 6x};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sqrt[7]{x^8 + 13}}{\sqrt[5]{x^6 + 3} + \sqrt[6]{x^8 + 4x^3}};$

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{4x + 9} - 1};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\sin 2x - \sin 4x};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \pi x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x-7} \right)^{8x+1};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7x+4}{5x+3} \right)^{12x+5};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+3x)^2} - 1}{4x}.$

Завдання 7.28

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 15x - 1}{3x^3 + 9x + 14};$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 9x + 14};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 1}{7x^2 + 4x + 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x + 19}{x^2 + 7x + 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 7}{9x^3 + 8x^2 + 14};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 3x^2 + 5} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3 + 7x} + \sqrt[9]{x^6 + 5x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2 + 5x};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x^2 - 8x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+9} \right)^{5x-9};$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{x+5} \right)^{-3x+7};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x) - 1}{x^3 + 3x}.$

Завдання 7.29

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 6x^2 + 5x - 17}{2x^3 - 9x - 3};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 5};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x - 2x^2 - 11x^3}{5x^2 + x^3 - 16};$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 6x^3 + 5}{2x^2 - 11x - 1};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 13}{3x^4 - 14x^3 + 17};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[9]{x^6 + 5x} + \sqrt[4]{x^2 + 4}}{\sqrt[7]{x^8 + 3x^2} + \sqrt{4x}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{7}}{x^2 + x - 20};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 3x}{4x^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+4} \right)^{5x+4};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x+2}{8x-5} \right)^{7x+1};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{3x}.$

Завдання 7.30

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^3 2x - 7}{2x^2 - 11x + 9};$

2. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x - 35};$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 49x + 3}{7x^2 + x + 15};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 7x^2 + 3x}{3x^3 - x^2 - 6};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 1}{2x^5 - x^4 - 3x^2};$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + \sqrt[6]{x^4 + 3}}{\sqrt[5]{x^3 + 2x} + \sqrt[9]{x^8 + 4}};$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt{x-4} - 2};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\arcsin x};$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin 5x};$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-7} \right)^{3x+1};$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-2}{10x+0} \right)^{x+3};$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{9x}}{11x}.$

Розділ 8 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Приклад розв'язання типового варіанту

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{5x^7 - 3x\sqrt{x}}{x^3} + 2x^5 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 27.$$

Розв'язання. Функція проста, степенева, представлена у вигляді алгебраїчної суми, але перед диференціюванням її треба спростити, скориставшись властивостями степенів. Отже перепишемо функцію як:

$$y = 5x^4 - 3x^{-\frac{3}{2}} + 2x^5 + 4x^{-\frac{1}{3}} - 27.$$

Знайдемо її похідну:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} + 2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} - 0 = \\ &= 20x^3 + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} + 10x^4 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

$$2. y = (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \arcsin x.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді добутку:

$$u = 8x^3 + 6\sqrt{x}; \quad u' = 24x^2 + \frac{6}{2\sqrt{x}};$$

$$v = \arcsin x; \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо у формулу:

$$y' = \left(24x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \cdot \arcsin x + (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауваження. Тим, хто легко впорався з технікою диференціювання, допоміжні обчислення можна опустити.

$$3. y = \log_7(x + 3) + 5 \cos 4x - 4 \operatorname{arctg} 8x.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, але звернемо вашу увагу, що кожний доданок – складна функція, тому диференціювати їх будемо згідно таблиці похідних та правилами диференціювання складних функцій:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} (x+7)' + 5(-\cos 4x) \cdot (4x)' - \\ &4 \frac{1}{1+(8x)^2} (8x)' = \\ &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} - 20 \cos 4x - \frac{32}{1+64x^2}. \end{aligned}$$

$$4. y = \frac{5 \sin x + 6x^2}{3x^3 - 8x + 4}.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді частки:

$$\begin{aligned} u &= 5 \sin x + 6x^2; & u' &= 5 \cos x + 12x; \\ v &= 3x^3 - 8x + 4; & v' &= 9x^2 - 8. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу:

$$y' = \frac{(5 \cos x + 12x)(3x^3 - 8x + 4) - (5 \sin x + 6x^2)(9x^2 - 8)}{(3x^3 - 8x + 4)^2}.$$

$$5. y = \operatorname{ctg} 5x^7.$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її, спочатку котангенс, а потім його аргумент – степеневу функцію:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7} \cdot (5x^7)' = -\frac{1}{\sin^2 5x^7} \cdot 35x^6.$$

$$6. y = \arccos 9x.$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її: спочатку степеневу функцію, потім її аргумент – арккосинус, і, наприкінці, аргумент арккосинусу:

$$\begin{aligned}
 y' &= 5 \arccos^4 9x \cdot (\arccos 9x)' = \\
 &= 5 \arccos^4 9x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - (9x)^2}} \right) \cdot (9x)' = \\
 &= -5 \arccos^4 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 81x^2}} \cdot 9 = -\frac{45 \arccos^4 9x}{\sqrt{1 - 81x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$7. y = 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}).$$

Розв'язання. Функція складна. Поступово диференціюємо її: спочатку показникову функцію, потім степеневу (ступінь тангенса), тригонометричну – тангенс, і його аргумент – корінь квадратний натурального логарифма, і, нарешті, сам логарифм:

$$\begin{aligned}
 y' &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot (\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}))' = \\
 &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \cdot (\operatorname{tg}(5\sqrt{\ln x}))' = \\
 &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} (5\sqrt{\ln x})' = \\
 &= 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} \cdot 5 \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} (\ln x)' = \\
 &= \frac{15 \cdot 9 \operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \ln 9 \cdot \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x})}{2x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \cos^2(5\sqrt{\ln x})}.
 \end{aligned}$$

$$8. y = \sqrt[7]{e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x}.$$

Розв'язання. Функція складна. Знаходимо похідну степеневої функції, а потім – похідну кожного з доданків підкоренового виразу:

$$y' = \frac{1}{7} (e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x)^{-\frac{6}{7}} \cdot (e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x)^6}} \cdot (e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} \cdot (\operatorname{arccctg} 6x^4)' + 12) \\
&= \\
&= \frac{1}{7 \sqrt[7]{(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x)^6}} \cdot \left(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} \cdot \left(-\frac{1}{1 + (6x^4)^2} \right) (6x^4)' + 12 \right) = \\
&= \frac{1}{7 \sqrt[7]{(e^{\operatorname{arccctg} 6x^4} + 12x)^6}} \left(12 - \frac{24x^3 \cdot e^{\operatorname{arccctg} 6x^4}}{1 + 36x^8} \right).
\end{aligned}$$

$$9. y = (3x^5 + 5x) \cdot \log_2(4x^2 - 6).$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку, скористаємося формулою похідна від добутку двох функцій:

$$\begin{aligned}
u &= 3x^5 + 5x; & u' &= 15x^4 + 5; \\
v &= \log_2(4x^2 - 6); & v' &= \frac{1}{(4x^2 - 6) \ln 2} \cdot (4x^2 - 6)' = \\
& & & \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}.
\end{aligned}$$

Підставимо у формулу:

$$y' = (15x^4 + 5) \cdot \log_2(4x^2 - 6) + (3x^5 + 5x) \cdot \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}.$$

$$10. y = \frac{\operatorname{tg} 7x^2}{x^4 - 4x^3}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки:

$$u = \operatorname{tg} 7x^2; \quad u' = \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot (7x^2)' = \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x;$$

$$v = x^4 - 4x^3; \quad v' = 4x^3 - 12x^2.$$

Підставимо у формулу:

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x(x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2)}{(x^4 - 4x^3)^2} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= \frac{14x(x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2) \cos^2 7x^2}{(x^4 - 4x^3)^2 \cos^2 7x^2}.$$

$$11. y = \ln(\sin 3x) \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку:

$$u = \ln(\sin 3x);$$

$$v = e^{\sqrt{x^2+4}};$$

$$u' = \frac{1}{\sin 3x} (\sin 3x)' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \operatorname{ctg} 3x;$$

$$v' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot (\sqrt{x^2+4})' = e^{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} (x^2+4)' = \frac{2x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{2\sqrt{x^2+4}}.$$

Підставимо у формулу:

$$y' = 3 \operatorname{ctg} 3x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}} + \ln(\sin 3x) \cdot \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$12. y = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді добутку:

$$u = 5^{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$v = \sqrt{9 + x^2};$$

$$u' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' =$$

$$= 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{1 + (3x)^2} (3x)' = 5^{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1 + 9x^2};$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{9 + x^2}} \cdot (9 + x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}.$$

Підставимо у формулу:

$$y' = 5^{\arctg 3x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{3}{1+9x^2} \cdot \sqrt{9+x^2} + 5^{\arctg 3x} \cdot \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

$$13. y = \frac{\ln(e^x+3)}{\sqrt{1+\cos 3x}}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки:

$$u = \ln(e^x + 3);$$

$$v = \sqrt{1 + \cos 3x};$$

$$u' = \frac{1}{e^x + 3} \cdot (e^x + 3)' = \frac{1}{e^x + 3} \cdot e^x;$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos 3x}} \cdot (1 + \cos 3x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos 3x}} \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = -\frac{3 \sin 3x}{2\sqrt{1 + \cos 3x}} \end{aligned}$$

Підставимо у формулу:

$$y' = \frac{\frac{e^x}{e^x + 3} \sqrt{1 + \cos 3x} - \ln(e^x + 3) \cdot \left(-\frac{3 \sin 3x}{2\sqrt{1 + \cos 3x}}\right)}{1 + \cos 3x} =$$

приведемо чисельник до спільного знаменника, маємо

$$= \frac{2e^x(1 + \cos 3x) + 3(e^x + 3) \ln(e^x + 3) \cdot \sin 3x}{2(e^x + 3)\sqrt{(1 + \cos 3x)^3}}.$$

$$14. y = \frac{\operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1}}{\operatorname{tg}^2(x-1)}.$$

Розв'язання. Функція складна, представлена у вигляді частки:

$$u = \operatorname{arccctg} \sqrt{x^2-1}; \quad v = \operatorname{tg}^2(x-1);$$

$$u' = -\frac{1}{1 + (\sqrt{x^2-1})^2} \cdot (\sqrt{x^2-1})' =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' = \\
&= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \\
v' &= 2 \operatorname{tg}(x-1) \cdot (\operatorname{tg}(x-1))' = \\
&= 2 \operatorname{tg}(x-1) \frac{1}{\cos^2(x-1)} \cdot (x-1)' = \frac{2 \operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}
\end{aligned}$$

Підставимо у формулу:

$$y' = \frac{-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \operatorname{tg}^2(x-1) - \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}}{\operatorname{tg}^4(x-1)} =$$

приведемо чисельник до загального знаменника, маємо

$$= -\frac{\sin^2(x-1) + 2 \operatorname{tg}(x-1) x\sqrt{x^2-1} \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1} \cos^2(x-1) \cdot \operatorname{tg}^4(x-1)}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

Розв'язання. Функція степенево-показникова, тому для її диференціювання треба або скористатися готовою формулою, або прологарифмувати функцію та продиференціювати отриманий вираз. Ми вважаємо, що нема необхідності запам'ятовувати формулу, набагато легше кожного разу повторювати необхідну процедуру.

Логарифмуємо функцію:

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

За властивістю логарифмів, показник степені підлогарифмічного виразу – коефіцієнт перед логарифмом:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x).$$

Ліворуч обчислимо похідну логарифма (пам'ятаємо, що y функція від x , тобто складна функція), а праворуч обчислимо похідну добутку:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Big| \cdot y; \\ y' &= y \left(\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right); \\ y' &= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\cos x} \right).\end{aligned}$$

$$16. y = (\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}}.$$

Розв'язання. Функція степенево-показникова. Для її диференціювання скористаємося алгоритмом, який згадали при розв'язанні прикладу 15:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}}; \\ \ln y &= \frac{5}{x^2} \ln \arcsin \sqrt{x} = \frac{5 \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^2}.\end{aligned}$$

Права частина набуває вигляду частинки, тому за формулою маємо:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= 5 \frac{\frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - \ln \arcsin \sqrt{x} \cdot 2x}{x^4} = \\ &= 5 \frac{x(x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x})}{x^4} = \\ &= 5 \frac{x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3} \Big| \cdot y; \\ y' &= 5(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}} \cdot \frac{x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3}.\end{aligned}$$

$$17. y = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3 \cdot (x-8)^4}}.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки, знаменник дробі – у вигляді добутку. Отже диференціювання такої функції послідовно за формулами похідна від добутку та частки нерационально. Зауважимо, що для диференціювання функції, яка містить більш, ніж два множника, застосовують метод логарифмічного диференціювання. Продиференціюємо функцію, скористаємося властивостями логарифмів і знайдемо похідну:

$$\ln y = \ln \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3 \cdot (x-8)^4}};$$

$$\ln y = \ln(3x+2)^6 - \ln(x+5)^{\frac{3}{7}} - \ln(x-8)^4;$$

$$\ln y = 6 \ln(3x+2) - \frac{3}{7} \ln(x+5) - 4 \ln(x-8);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6 \cdot 3}{3x+2} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x+5} - \frac{4}{x-8} \Big| \cdot y;$$

$$y' = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3 \cdot (x-8)^4}} \left[\frac{6}{3x+2} - \frac{3}{7(x+5)} - \frac{4}{x-8} \right].$$

За бажанням, даний вираз можна спростити:

$$y' = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3 \cdot (x-8)^4}}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{42(x+5)(x-8) - 3(3x+2)(x-8) - 28(3x+2)(x+5)}{7(3x+2)(x+5)(x-8)} = \\ & = - \frac{(3x+2)^5(51x^2 + 536x + 1912)}{7\sqrt[7]{(x+5)^{10} \cdot (x-8)^5}}. \end{aligned}$$

$$18. y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Але при диференціюванні першого множника вже виникають проблеми, а саме: по-перше, знаходиться похідна від степеневі функції, по-друге, підкорений вираз – дріб, тому необхідно його диференціювати за формулою похідна від частки... Цієї проблеми можна уникнути, якщо, як і у попередньому прикладі скористатися методом логарифмічного диференціювання.

$$\ln y = \ln \left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \right);$$

$$\ln y = \ln \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} \cdot \operatorname{ctg}^3 5x \right);$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{1}{4}} - \ln(x-1)^{\frac{1}{4}} + \ln(\operatorname{ctg} 5x)^3;$$

$$\ln y = \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x-1) + 3 \ln(\operatorname{ctg} 5x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 5x} \right) \cdot 5 \Big| \cdot y;$$

$$y' = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \left[\frac{x-1-x-1}{4(x-1)(x+1)} - \frac{15}{\frac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \sin^2 5x} \right];$$

$$y' = -\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{ctg}^3 5x \left[\frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{30}{\sin 10x} \right].$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. y \cos x - x \sin y = 0.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що при диференціюванні таких функцій ми зобов'язані пам'ятати, що y є функцією x , тому диференціювати її потрібно за правилами диференціювання складних функцій. Наша функція складається з двох доданків,

кожний з яких має вигляд добутку, у відповідності з вже відомими правилами маємо:

$$y' \cos x + y(-\sin x) - 1 \cdot \sin y - x \cos y \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканої похідної:

$$y'(\cos x - x \cos y) = \sin y + y \sin x.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}.$$

$$20. \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язання. Продиференціюємо неявно задану функцію аналогічно попередньому прикладу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)'}{x^2 + y^2}; \\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{y - xy'}{x^2 + y^2} &= \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}; & y - xy' &= x + yy'; \\ y'(x + y) &= y - x; \end{aligned}$$

остаточно маємо

$$y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = 4t - 15 \\ y = 2t^3 \end{cases}.$$

Розв'язання. Відповідно до формули, для того, щоб знайти похідну функції, заданої параметрично, спочатку необхідно знайти похідні x та y за параметром t .

$$x'_t = 4; \quad y'_t = 6t.$$

За формулою маємо:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}.$$

$$22. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою :

$$x'_t = 2(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 2t \cos t;$$

$$y'_t = 2(\cos t - \cos t + t \sin t) = 2t \sin t;$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \sin t}{2t \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів

Завдання 8.1

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{7x^3 - 5\sqrt{x}}{x^2} + 3x^6 - \frac{7}{x} + 18;$$

$$2. y = (5x^7 + 13x) \cdot \log_5 x;$$

$$3. y = 2^x + \sin 5x + 4 \operatorname{tg} 3x;$$

$$4. y = \frac{2 \cos x - 12}{2x^2 + 7x - 5};$$

$$5. y = 2^{\log_4 \operatorname{tg} 3x};$$

$$6. y = \sin^7 4x;$$

$$7. y = \cos 9x^{10};$$

$$8. y = \sqrt[6]{\operatorname{tg}^4 7x + 18};$$

$$9. y = (2x^8 + 14) \cdot \operatorname{ctg}^3 5x;$$

$$10. y = \frac{12 \arcsin 4x^5}{x^3 - 4x};$$

$$11. y = 5^{\ln^3 \operatorname{ctg} x} \cdot \cos \sqrt{x};$$

$$12. y = \log_4 (\sin 5x) \cdot e^{\sqrt{x^5}};$$

$$13. y = \frac{\sqrt[4]{2x^5 + 3x^4 - 12x}}{\ln(\cos 7x)};$$

$$14. y = \frac{\arctg^2(e^x - 2)}{(2 \ln x + 5)^3}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$15. y = (\cos 9x)^{\log_3 x};$$

$$16. y = (\operatorname{tg} 7x^4)^{e^{x^3} + 2};$$

$$17. y = \frac{(x-7)^9 \cdot \sqrt[8]{(x+5)^3}}{(2x-9)^4};$$

$$18. y = \sqrt[5]{\frac{x+4}{x-4}} \log_5 (\sin 3x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$19. \operatorname{ctg} y^2 = 5x^2 - 3y;$$

$$20. \ln(5x + 3y) - \frac{x^5 y}{y^3 - 4} = 0$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$21. \begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 6t - t^2 \end{cases};$$

$$22. \begin{cases} x = (t^2 - 9) \cos 3t \\ y = (t^2 + 9) \sin 3t \end{cases}.$$

Завдання 8.2

Знайти похідні:

1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{6x+2\sqrt{x^7}}{x^3} + 2x - 3;$

2. $y = (2x^4 - 5x) \cdot 3^x;$

3. $y = 7ctg4x - e^{6x} - \ln 3x;$

4. $y = \frac{5\sin x + 3x}{4x^5 - 3x^3 + 8};$

5. $y = \log_7(\cos x^3);$

6. $y = \arcsin^8 5x;$

7. $y = tg 6x^9;$

8. $y = \sqrt[5]{e^{\sin 6x} - 12x};$

9. $y = (2x^3 - 6x) \cdot \cos^4 7x;$

10. $y = \frac{9\operatorname{arccctg} 3x^6}{x^6 - 7x};$

11. $y = 8\sqrt[8]{\log_3^7 4x} \cdot ctg^2 6x;$

12. $y = \cos 7x^6 \cdot tg(\sqrt[3]{x^5});$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{7x^4 - 2x^2 - 21}}{\ln(\sin 13x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{arccos}^5(4^x - 9)}{(3\ln 7x - 9)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 8x)^{\cos x};$

16. $y = (\operatorname{arccctg} 2x^5)^{\ln^8 7x};$

17. $y = \frac{(x+6)^8 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^7}}{(4x-7)^5};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} tg(e^{3x} - 5).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 = 8xy;$

20. $x \cdot \sin y^5 - 2y^3 tg x = 0$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 + 1; \\ y = 6t^2 \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = e^{5t} \sin 4t \\ y = e^{5t} \cos 4t \end{cases}.$

Завдання 8.3

Знайти похідні:

1. $y = \frac{9}{\sqrt[6]{x^5}} + 5x^2 + 9 - \frac{3x\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{x}};$
2. $y = (4x^3 - 5x) \cdot \sin x;$
3. $y = 2\arccos 5x + 4\log_5 x - 9^{2x};$
4. $y = \frac{4tgx+7}{3x^5-7x^4+1};$
5. $y = e^{\arccos 5x};$
5. $y = \cos^5 9x;$
7. $y = ctg 8x^3;$
8. $y = \sqrt[4]{5\ln(3x-7) + 8x^2};$
9. $y = (4x^5 + 21) \cdot \sin^6 2x;$
10. $y = \frac{7\arctg^9(2x-3)}{x^5+12x^4};$
11. $y = 4^{\cos^3(2x-7)} \cdot \sin \frac{3}{x};$
12. $y = tg(\arcsin 2x) 2^{\sqrt{x^4}};$
13. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^3+3x^2-9x}}{\ln(tg 5x)};$
14. $y = \frac{\arcsin^5(3x-4)}{(5\cos x-2)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tg 5x)^{\arcsin x};$
16. $y = (\sin 2x^5)^{\ln^4(2x+5)};$
17. $y = \frac{(2x-3)^6}{(x-9)^5 \cdot \sqrt[6]{(x+4)^7}};$
18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \sin(x^2 - 3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\sin(2x^5 - y^2) = 2y \cdot \cos x^2;$
20. $y^2 \cos x = 4 \sin 3x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 7 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases};$
22. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t \cdot \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$

Завдання 8.4

Знайти похідні:

1. $y = 12 + 4\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \frac{3\sqrt[5]{x^4+4x}}{x^4}$;
2. $y = (4x^8 + 5x^3) \cdot \cos x$;
3. $y = 4\cos 7x - 2\log_7 2x - e^{tg^4 x}$;
4. $y = \frac{6ctgx-5}{4x^2+3x^8-11}$;
5. $y = \log_6(e^x - 3x^2)$;
6. $y = tg^4 7x$;
7. $y = \arcsin 5x^4$;
8. $y = \sqrt[8]{\cos^3 9x - 7x}$;
9. $y = (3x^5 - 7x) \cdot ctg^4 7x$;
10. $y = \frac{7\sin 9x^2}{2x^3+5x}$;
11. $y = 3^{tg(5x^4-7x)} \cdot \ln(\sin 8x^3)$;
12. $y = \cos(2^x - 1)tg^5 \sqrt{x^2}$;
13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^9-2x^5-31}}{\ln(ctg 6x)}$;
14. $y = \frac{tg^5(4^x+13)}{(3\arcsin x-2)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (ctg 6x)^{\arccos x}$;
16. $y = (\cos 6x^3)^{\sqrt{tg^5 x}}$;
17. $y = \frac{(3x+1)^4 \cdot \sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x-5)^3}$;
18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} \cos \sqrt{x-6}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\cos^3 y = 3x^4 \cdot \ln y$;
20. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 4t - 9\sin t \end{cases}$;
22. $\begin{cases} x = e^t \cos^2 t \\ y = e^t \sin^2 t \end{cases}$.

Завдання 8.5

Знайти похідні:

1. $y = 2x + \frac{6x^3\sqrt{x}-2x^8}{x^9} + \frac{4}{x^5} + 9;$

2. $y = (4x^5 - 2x^{11}) \cdot \operatorname{tg} x;$

3. $y = 9\operatorname{tg} 5x + 4e^{3x} + \operatorname{arccctg} 7x;$

4. $y = \frac{7\ln x + 3}{2x^6 - 5x^4 - x};$

5. $y = \ln(\operatorname{arccctg} 6x - 15);$

6. $y = \operatorname{ctg}^2 8x;$

7. $y = \arccos 3x^7;$

8. $y = \sqrt[3]{\log_2^6 3x - 9x^4};$

9. $y = (5x^8 + 17x) \cdot \cos^7 2x;$

10. $y = \frac{4\operatorname{tg}^5 3x}{x^7 - 8x^6};$

11. $y = 9\cos^5 \sqrt{x^4} \cdot \operatorname{tg}(7x^8 - 3);$

12. $y = \log_3(\operatorname{tg} 2x) 5^{\cos x^2};$

13. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^5 - 12x^3 - 5x}}{\ln(\operatorname{arcsin} 4x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{ctg}^6(2^x - 9)}{(4\arccos x + 3)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arcsin} 2x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (\operatorname{tg} 5x^2)^{3x^2 - 7};$

17. $y = \frac{(7x-3)^4}{(x-5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^7}};$

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x+7}{x-7}} \ln(\operatorname{tg} 2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2y \ln y = x;$

20. $\operatorname{tg}(4x^7 - 3y^3) = \frac{x^2 - 6}{y^5}.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 2^t \\ y = t^2 + 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{t}} \end{cases}.$

Завдання 8.6

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 - 8 + \frac{8\sqrt{x^5+x^3}}{2x^2} + \frac{3}{x^2}$;
2. $y = (9x^7 + 22) \cdot \operatorname{ctgx}$;
3. $y = (2x + 1)^3 - \cos 5x - 2\ln 6x$;
4. $y = \frac{9\log_3 x - 6}{5x^4 - 2x^2 - 7}$;
5. $y = \sin(2^x - 14x^5)$;
6. $y = \arcsin^4 5x$;
7. $y = \ln 8x^7$;
8. $y = \sqrt[5]{tg^4 12x + 4x^9}$;
9. $y = (9x^3 - 35x^2) \cdot tg^4 8x$;
10. $y = \frac{32 \cdot e^{\cos 2x^5}}{x^6 + 3x^2}$;
11. $y = 7^{\log_3(tg 2x)} \cdot \arccos \sqrt[7]{x^{10}}$;
12. $y = \ln(\operatorname{arctg} 5x) 2^{\cos \sqrt{x}}$;
13. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^2 + 3x - 37}}{\ln(\arccos 7x)}$;
14. $y = \frac{\arcsin^5(e^x + 4)}{(2\ln x - 5)^7}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\ln x}$;
16. $y = (\operatorname{ctg} 4x^7)^{\arcsin^5 4x}$;
17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[9]{(x+5)^2}}{(4x-5)^4}$;
18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}} \operatorname{tg}(\ln 5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $2x^5 \cdot \ln y = 7x^8 + 3\cos y$;
20. $x - y = y \cdot \arcsin x$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \operatorname{tg} t \\ y = \sin 2t + \cos 2t \end{cases}$;
22. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cdot \cos t \end{cases}$.

Завдання 8.7

Знайти похідні:

1. $y = 16 - \frac{7}{\sqrt[5]{x^4}} + 9x^4 + \frac{3\sqrt[3]{x} + 7x^2}{x^5};$ 2. $y = (3x^3 - \sqrt{x})\arcsin x;$

3. $y = 4^{x+3} - 2\arctg 8x - 3\log_9 5x;$ 4. $y = \frac{2e^x - 17}{5x^3 + 4x^2 + 12x};$

5. $y = \cos(\log_7 3x);$

6. $y = \arccos^9 2x;$

7. $y = \arctg 9x^6;$

8. $y = \sqrt[4]{e^{\ln^8 3x} - 12x^5};$

9. $y = (5x^8 + 61x) \cdot \ln^3 4x;$

10. $y = \frac{4\ln(\cos 2x)}{x^6 - 4x^5};$

11. $y = 8^{\sin^4(\ln x)} \cdot \log_5^3(4x - \sqrt{x});$ 12. $y = \tg 7x^9 \cdot \sqrt[3]{\arcsin 6x};$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{8x^7 + 6x^5 + 4x^2}}{\ln(\arctg 9x)};$

14. $y = \frac{\arccos^7(5^x - 9)}{(4\log_6 x - 5)^8}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arctg 3x)^{\sqrt[3]{x}};$

16. $y = (\arcsin 2x^9)^{\log_5^8 x};$

17. $y = \frac{(11x+1)^2}{(x-4)^9 \cdot \sqrt[7]{(x-3)^2}};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} \log_7(\cos 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\ln \frac{x^6}{y} = 4y \cdot \arcsin x;$

20. $y = \tg(2x + 3y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^3 + 3t, \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 2\ln(\ctgt) + 1, \\ y = \tg t + \ctgt \end{cases}.$

Завдання 8.8

Знайти похідні:

1. $y = \frac{5x^4 + 6\sqrt[4]{x^3}}{x^3} + 7x^3 + \frac{2}{x^6} - 13;$

2. $y = (2x^3 - \sqrt[8]{x}) \arccos x;$

3. $y = 6 \operatorname{ctg} 5x - 3 \log_4 3x + 5e^{3x};$

4. $y = \frac{13 \cdot 7^x - 5}{6x^3 - 8x^2 + 4x};$

5. $y = \operatorname{tg}(2x^5 + 5^x);$

6. $y = \operatorname{arctg}^6 4x;$

7. $y = \log_7 6x;$

8. $y = \sqrt[7]{\cos^5 x + 4x};$

9. $y = (12x^6 - 7x^4) \cdot e^{5 \operatorname{ctg} x^2};$

10. $y = \frac{5 \sin 2x^6}{3x^2 + 5x};$

11. $y = 11^{\cos^2 \ln x} \cdot \operatorname{tg} \frac{7}{x};$

12. $y = \operatorname{ctg}(\log_2 x) \cdot 2^{\sqrt{x^7}};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^5 - 3x^3 - 15}}{\ln(\operatorname{arctg} 4x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{arctg}^4(7^x + 3)}{(5 \cos x - 1)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 8x)^{\operatorname{arctg} x};$

16. $y = (\operatorname{arctg} 4x^5)^{2x^7 - 9};$

17. $y = \frac{(x+7)^8 \cdot \sqrt[3]{(x-4)^7}}{(5x-3)^6};$

18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-6}{x+6}} \ln(\operatorname{ctg} 7x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $e^{x^3 + 6y} = 2x \cdot \operatorname{arctg} y;$

20. $\cos(xy) = x + y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4t + e^t; \\ y = 4t \cdot e^t; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = t \cdot \cos t - 2 \sin t \\ y = t \cdot \sin t + 2 \cos t \end{cases}$

Завдання 8.9

Знайти похідні:

1. $y = 5x^2\sqrt{x} - \frac{2\sqrt[3]{x^4} - 5x}{x^3} + 8x^4 - 9$; 2. $y = (8x^6 + 5x^3)\arcsin x$;

3. $y = \arctg 2x + 3^{3x} - \ln(x^2 + x)$; 4. $y = \frac{7\sin x - 10}{2x^2 + 4x - 15}$;

5. $y = \ctg(\sin 4x - 7)$;

6. $y = \arctg 8^5 x$;

7. $y = e^{5x^6 - 8x^2 + 3}$;

8. $y = \sqrt[3]{tg^2 5x + 8x^9}$;

9. $y = (4x^7 + 13x^5) \cdot \arcsin^4 6x$;

10. $y = \frac{8\cos 2x^3}{x^5 - 3x^2}$;

11. $y = 6^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \log_7^4(e^{2x} + 4x)$;

12. $y = \arcsin(\ln x)e^{\sqrt{tg x^3}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{12x^3 - 2x^2 - 5x}}{\log_3(\cos 5x)}$;

14. $y = \frac{\arctg^9(e^x + 4)}{(5\sin x - 7)^3}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 5x)^{\arctg x}$;

16. $y = (\arctg 6x^3)^{\ln^8 x}$;

17. $y = \frac{(9x-2)^7}{(x-7)^4 \cdot \sqrt[5]{(x+1)^3}}$;

18. $y = \sqrt[5]{\frac{x-8}{x+8}} \tg(x^2 + 6x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 \cdot \ln_5 x = 7x^3 - 5tgy$;

20. $y = x + \arctg(x + y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = \sin t(2 + \cos^2 t) \\ y = \cos^3 t \end{cases}$.

Завдання 8.10

Знайти похідні:

1. $y = 15 - 6\sqrt[7]{x^4} + \frac{2}{x^6} + \frac{7x\sqrt[5]{x} + 3x^2}{x^4}$; 2. $y = (3x^2 - x) \cdot \operatorname{arctg} x$;

3. $y = \log_3(2x - 7) + 5\sin 4x + e^{2x}$; 4. $y = \frac{3\cos x + 8}{12x^9 - 7x^5 - x^2}$;

5. $y = \arcsin(x^2 - 3\sqrt{x})$; 6. $y = \ln^7 6x$;

7. $y = 3^{9x^4 - 8x^5}$; 8. $y = \sqrt[10]{\sin^5 2x - 5x^2}$;

9. $y = (10x^7 - 3x^5) \cdot \arccos^3 9x$; 10. $y = \frac{4\operatorname{tg} 7x^3}{x^6 - 4x^5}$;

11. $y = 2^{\sin^4 \ln x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(3x + 2)}$; 12. $y = \log_7(\cos x) \sqrt[3]{5\operatorname{ctg} x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[6]{7x^9 - 10x^3 - 52}}{\log_4(\sin 3x)}$; 14. $y = \frac{\sin^8(e^x - 6)}{(6\log_3 x + 5)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\arcsin x}$; 16. $y = (\ln 5x^9)^{\cos^4 3x}$;

17. $y = \frac{(x-2)^8 \cdot \sqrt[7]{(x+9)^4}}{(7x-4)^5}$; 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+3}{x-3}} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^7 \cdot \operatorname{ctg} y = 8\ln^2 y - 7x$; 20. $x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = xy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2t \operatorname{tg} t \\ y = \sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = e^{3t} \cos^3 t \\ y = e^{3t} \sin^3 t \end{cases}$.

Завдання 8.11

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 + \frac{12x^5 - x^2\sqrt{x}}{x^5} - \frac{8}{\sqrt[3]{x^5}} - 10$; 2. $y = (4\sqrt[5]{x^7} - 9)\arctg x$;

3. $y = 6e^{7x} - 4\operatorname{ctg} 3x - 5\arcsin 2x$; 4. $y = \frac{5\operatorname{tg} x - 2}{4x^5 + 17x^2 + 2x}$;

5. $y = \arccos \sqrt{3x^2 - 5}$;

6. $y = \log_5^8 9x$;

7. $y = \sin 5x^2$;

8. $y = \sqrt[6]{\cos^3 2x + 6x^4}$;

9. $y = (21x^4 + 7x) \cdot 7^{\ln(3x-4)}$;

10. $y = \frac{3\operatorname{ctg} 8x^5}{x^{10} + 3x^6}$;

11. $y = 6\operatorname{tg}^{5(2x-8)} \cdot \log_3^6(\arcsin 4x)$; 12. $y = \cos(2^x) \cdot \operatorname{tg} \sqrt[7]{x^5}$;

13. $y = \frac{\sqrt[7]{8x^5 + 2x^2 - 9x}}{\log_5(\operatorname{tg} 3x)}$;

14. $y = \frac{\cos^7(7^x - 2)}{(4\arcsin x - 6)^2}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{ctg} 10x)^{\arccos x}$;

16. $y = (\log_9 2x^7)^{\arcsin^6 2x}$;

17. $y = \frac{(8x-7)^{10}}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^7}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} \log_9(\operatorname{tg} 4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arcsin x^8 = 3y \cdot e^{x^2}$;

20. $x^3 + y^3 = 12xy$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t + 2\operatorname{tg} t; \\ y = \arcsin t; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t \\ y = \cos t + \frac{t^2}{2} \sin t \end{cases}$.

Завдання 8.12

Знайти похідні:

1. $y = \frac{6}{\sqrt[7]{x^8}} + 4 + 13x^4 + \frac{8x^9 - 5x^3\sqrt[3]{x}}{x^2}$; 2. $y = (11x^3 + 2\sqrt[7]{x}) \cdot e^x$;

3. $y = 6^{2x-3} + 2\operatorname{arccctg} 5x - \log_7 4x$; 4. $y = \frac{7\operatorname{arcsin} x + 15}{x^8 - 2x^5 + 3x^3}$;

5. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 9x - 5x}$;

6. $y = e^{\cos^2 x}$;

7. $y = \operatorname{tg} 3x^{13}$;

8. $y = \sqrt[8]{\operatorname{arcsin}^4 5x + 9x^3}$;

9. $y = (3x^{11} - 9x^4) \cdot \operatorname{arccos}^3 12x$;

10. $y = \frac{9\operatorname{ctg} 5x^4}{x^2 - 2x}$;

11. $y = 9^{\ln^7 \cos x} \cdot \operatorname{arccos} \sqrt{x}$;

12. $y = \sin(\operatorname{ctg} 5x) \ln^9 \sqrt[3]{x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{21x^4 - 3x^3 + 5x^2}}{\log_2(\operatorname{ctg} 10x)}$;

14. $y = \frac{\operatorname{tg}^4(4^x - 5)}{(8\operatorname{arccos} x - 4)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arcsin} 5x)^{\log_7 x}$;

16. $y = (\sin 8x^2)^{\sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}}$;

17. $y = \frac{(x-6)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^{10}}}{(4x-1)^5}$;

18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \cdot e^{\operatorname{arctg} 3x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\ln(x^5 - 6y) = 4y^3 \cdot \operatorname{tg} x$;

20. $y = 9 + x \cdot e^y$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Завдання 8.13

Знайти похідні:

1. $y = \frac{\sqrt[7]{x^9+5x^4}}{x^3} + 18x^3 - 7 + \frac{6}{x^5};$
2. $y = (6\sqrt[3]{x^5} - 4x^9) \cdot 3^x;$
3. $y = 5\arctg 2x + \ln(5x - 4) + 7^{8x};$
4. $y = \frac{4\arccos x - 13}{6x^2 + 3x^9 - 17x};$
5. $y = \arcc tg(5^x + x^5);$
6. $y = 5^{x^3 - x + 12};$
7. $y = \cos 6x^7;$
8. $y = \sqrt[11]{\arccos^2 8x + 5x};$
9. $y = (2x^5 - 9x^7) \cdot \arctg^4 2x;$
10. $y = \frac{7\ln(2x^5 - 4x^2)}{x^7 - 12x};$
11. $y = 8^{\sin^6(e^x - 5)} \cdot \arctg \frac{7}{x};$
12. $y = ctg(e^{x^2}) \arcsin \sqrt[3]{x};$
13. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^7 + 2x^5 - 3x^4}}{\log_3(\arccos 4x)};$
14. $y = \frac{ctg^5(6^x - 9)}{(9\ln x - 8)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arccos 6x)^{\ln x};$
16. $y = (\cos 5x^3)^{\arcc tg^6 9x};$
17. $y = \frac{(3x-7)^2}{(x-4)^9 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^7}};$
18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} tg(\ln 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^2 + 2xy - y^2 = 4x;$
20. $e^{\frac{x}{y}} = \sin(4x^7 - 2y^3).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = \sin 5t; \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{5}{2t^2} - \frac{5}{t} \end{cases}$

Завдання 8.14

Знайти похідні:

1. $y = 9\sqrt[3]{x^5} + \frac{2x^7 - x\sqrt[5]{x}}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 9;$ 2. $y = (\sqrt[6]{x^5} + 14x^2) \cdot \ln x;$

3. $y = \log_2(x^3 + 1) - e^{6x} + 5tg4x;$ 4. $y = \frac{2\arctg x - 6}{5x^8 - 6x^4 - 3};$

5. $y = e^{\cos 4x - 2x^3};$

6. $y = \sin^2 11x;$

7. $y = ctg 9x^{11};$

8. $y = \sqrt[5]{\arctg^2 9x - 7x^4};$

9. $y = (17x^3 + 5x^2) \cdot \operatorname{arcctg}^3 5x;$

10. $y = \frac{6\log_9(5x^4 - 8)}{x^{11} + 3x^2};$

11. $y = 3^{\cos^3(5x^4 - 7x)} \cdot \arctg \sqrt{x};$

12. $y = \log_9(5x^7) ctg^6 3x;$

13. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^6 - 3x^7 - 5x}}{\log_5(\arcsin 6x)};$

14. $y = \frac{\arcsin^2(5^x - 1)}{(11\log_6 x + 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arctg 6x)^{\sqrt{x}};$

16. $y = (tg 8x^3)^{4x^2 - 7};$

17. $y = \frac{(x+3)^{8,4} \sqrt{(x+2)^3}}{(9x-2)^6};$

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+3}} \log_7(\sin 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

20. $x \cdot \arctg y^2 = x^8 - y^5.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 3t^4 + 4t^3 \\ y = t^2 - 2t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{5 + 2 \ln t}{t} \end{cases}.$

Завдання 8.15

Знайти похідні:

1. $y = 5x^{27}\sqrt{x} - 4x^3 + \frac{3x^7 - 7\sqrt[5]{x^2}}{x^2} + 3$; 2. $y = (12x^5 + \sqrt[3]{x})\log_8 x$;

3. $y = 9\arccos 4x + 8e^{5x} - 4\operatorname{ctg} 3x$; 4. $y = \frac{3\operatorname{arccctg} x + 18}{4x^9 + 4x^6 + 11x}$;

5. $y = 2^{tg(x^5 - 8x)}$;

6. $y = \cos^6 3x$;

7. $y = \arcsin 5x^8$;

8. $y = \sqrt[7]{\operatorname{arccctg}^8 5x - 4e^x}$;

9. $y = (8x^2 - 15x) \cdot \sin^4 5x$;

10. $y = \frac{8\arccos 5x^4}{x^8 - 3x^5}$;

11. $y = 4^{\operatorname{arctg} 4x^8} \cdot \ln(\cos 7x^3)$;

12. $y = \arcsin \sqrt{x} \cdot \log_2 \operatorname{tg} x$;

13. $y = \frac{\sqrt[6]{8x^2 - 3x^4 - 7x}}{\log_5(\operatorname{arctg} 9x)}$;

14. $y = \frac{\arccos^3(3^x + 2)}{(5\operatorname{tg} x - 4)^3}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\ln 5x)^{\frac{1}{x}}$;

16. $y = (\operatorname{ctg} 6x^5)^{\arcsin^4 3x}$;

17. $y = \frac{(5x-7)^3}{(x-1)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^8}}$;

18. $y = \sqrt[9]{\frac{x+5}{x-5}} \arcsin \sqrt{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot y - \ln y = 1$;

20. $(x^2 - y) \cdot 2^x = \operatorname{arctg} y$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

Завдання 8.16

Знайти похідні:

1. $y = 11 + 8x^7 - \frac{9}{x^5} + \frac{2x^6 - x^4\sqrt{x}}{x^7}$; 2. $y = (4^9\sqrt{x^{13}} - 25)\sin x$;

3. $y = 5\log_7 6x - 4e^{7x} - 2\arctg 3x$; 4. $y = \frac{7e^x - 3}{2x^2 - 5x^5 - 7x}$;

5. $y = \ln(3\operatorname{ctg} 6x - 8x)$; 6. $y = \operatorname{tg}^5 4x$;

7. $y = \arccos 6x^{10}$; 8. $y = \sqrt[3]{5\sin^3 x - 12x^3}$;

9. $y = (11x^6 + 5x^4) \cdot \cos^7 3x$; 10. $y = \frac{7\arctg 3x^9}{x^5 + 4x}$;

11. $y = 2^{\cos^8(\log_4 x)} \cdot \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$; 12. $y = \log_9(\operatorname{tg} 7x)e^{\sqrt{\cos 2x}}$;

13. $y = \frac{\sqrt[5]{7x^{10} - 9x + 2x^5}}{\log_7(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} 6x)}$; 14. $y = \frac{\arctg^7(4^x + 2)}{(7\sin x + 2)^5}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\log_7 3x)^{\sqrt[3]{x}}$; 16. $y = (\arcsin 7x^2)^{\ln^{14} x}$;

17. $y = \frac{(x+5)^{9,6}\sqrt{(x+2)^5}}{(8x-2)^3}$; 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-3}{x+3}} \arccos \sqrt[3]{x}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctg} x^8 = 4x^7 + 3xy^3$; 20. $\cos(xy) = 3x^4 + 6y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = (t^2 + 3)e^t \\ y = \frac{e^t}{t^2 - 4} \end{cases}$.

Завдання 8.17

Знайти похідні:

1. $y = \frac{3x^7 - 4x^3\sqrt{x}}{x^5} + 9x^4 - \frac{2}{x^3} - 24;$ 2. $y = (5x^2 + 6\sqrt[5]{x^4})\cos x;$

3. $y = 2 \cdot 5^{3x} - \operatorname{ctg} 7x - 9\arccos 4x;$ 4. $y = \frac{4 \cdot 5^x - 3}{12x^3 + 7x^2 + 4x};$

5. $y = \log_9(5\operatorname{ctg} 4x - 9);$ 6. $y = \operatorname{ctg}^7 4x;$

7. $y = \arcsin 2x^6;$ 8. $y = \sqrt[9]{4\arccos x^4 - 21x};$

9. $y = (9x^8 - 13x^4) \cdot \operatorname{tg}^7 9x;$ 10. $y = \frac{10\operatorname{arccctg} 7x^2}{x^9 - 3x^5};$

11. $y = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \operatorname{arctg}(5x - 7);$ 12. $y = \arccos e^{x^5} \cdot \operatorname{tg} \sqrt[5]{4x};$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{3x^3 - 8x^2 - 6x}}{\ln(e^{7x} - 3)};$ 14. $y = \frac{\operatorname{arccctg}^5(6^x - 7)}{(4\cos x + 13)^2}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 2x)^{\operatorname{arctg} x};$ 16. $y = (\arccos 9x^5)^{\sqrt[3]{\ln^5 x}};$

17. $y = \frac{(5x-7)^6}{(x-3)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+5)^5}};$ 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x+5}} \log_3(\cos 9x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^4 \operatorname{tg} x = 7x + 2y^3;$ 20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3xy.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = (t^2 + 5)e^t \\ y = (2t - 4)e^t \end{cases}.$

Завдання 8.18

Знайти похідні:

1. $y = 8\sqrt[9]{x^8} + \frac{3\sqrt[6]{x^5+4x}}{x^4} - \frac{7}{x} + 15;$ 2. $y = (3\sqrt[3]{x^2} - 4x^5) \cdot \operatorname{tg} x;$

3. $y = 11^{4x} + \operatorname{tg} 3x + 2\log_6(3x + 5);$ 4. $y = \frac{2\ln x + 9}{x^{10} - 7x^8 + 3x^4};$

5. $y = \cos(3\ln x - 12);$

6. $y = \arcsin^3 4x;$

7. $y = e^{\operatorname{tg} x^2};$

8. $y = \sqrt[12]{\operatorname{ctg}^5 8x + 4x^7};$

9. $y = (15x^6 - 3x^4) \cdot \operatorname{ctg}^2 7x;$

10. $y = \frac{5\sin 14x^3}{x^{11} + 8x^6};$

11. $y = 7\arctg^5 \ln x \cdot \sin \sqrt{x};$

12. $y = \arccos(\ln x) \cdot e^{\operatorname{tg}^2 x};$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{9x^2+5x^3+6x}}{\ln(3^x+2)};$

14. $y = \frac{\sin^2(e^x-15)}{(2\arctg x-5)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 5x)^{\arctg x};$

16. $y = (\arctg 4x^3)^{\log_7^5 x};$

17. $y = \frac{(x+3)^9 \cdot \sqrt[9]{(x-1)^2}}{(6x-5)^4};$

18. $y = \sqrt[3]{\frac{x+7}{x-7}} \ln(\arccos x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y^2 \ln x = 7x^8 - 9y;$

20. $y = \arccos(x - y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}.$

Завдання 8.19

Знайти похідні:

1. $y = \frac{4}{x^6} + 3 - \sqrt[5]{x^7} + \frac{2x^7 - x^3\sqrt{x}}{x^4}$;
2. $y = (6x^8 + 3x\sqrt{x})\operatorname{ctgx}$;
3. $y = \operatorname{arctg}3x - 6\ln2x - 4^{9x-3}$;
4. $y = \frac{9\log_5 x - 3}{x^5 + 7x^3 - 12x^4}$;
5. $y = \operatorname{tg}(e^{7x-13})$;
6. $y = \arccos^7 3x$;
7. $y = \ln 7x^2$;
8. $y = \sqrt[6]{\sin^5 3x + 8x^4}$;
9. $y = (2x^5 - 8x) \cdot \operatorname{arcsin}^3 14x$;
10. $y = \frac{2\cos 9x^4}{x^3 + 6x^2}$;
11. $y = 8^{\sin^2(x^2+2^x)} \cdot \operatorname{arccctg}(\ln x)$;
12. $y = \cos 9x^3 \cdot \ln^7 \sqrt{x^2 + 3}$;
13. $y = \frac{\sqrt[4]{9x^9 - 7x^5 - 2x^3}}{\ln(\sin 8x)}$;
14. $y = \frac{\cos^6(9^x - 4)}{(7\operatorname{arccctg} x + 3)^4}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{tg} 9x)^{\ln x}$;
16. $y = (\operatorname{arccctg} 5x^9)^{7x^4 - 1}$;
17. $y = \frac{(12x-3)^6}{(x+4)^9 \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2}}$;
18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-5}{x+5}} \operatorname{tg}(x^2 + 7x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctgx}^5 = 4x^2 \cdot \sin y$;
20. $y^4 - 4xy + 6x^3 = 0$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \frac{e^{3t}}{\sqrt{1-t^2}} \\ y = \operatorname{arcsin} 3t \end{cases}$.

Завдання 8.20

Знайти похідні:

1. $y = \frac{4x^9 - 3\sqrt[7]{x}}{x^5} + 7x^2 - \frac{5}{x^3} + 16;$

2. $y = (4x^3 - \sqrt[8]{x}) \arcsin x;$

3. $y = 8\cos 5x + \log_7(x + 9) - 7^{3x};$

4. $y = \frac{9\sin x + 5}{4x^7 - 5x^4 + 13x};$

5. $y = \operatorname{ctg}(5\log_6 3x);$

6. $y = \operatorname{arctg}^7 7x;$

7. $y = \log_3 8x^3;$

8. $y = \sqrt[9]{\cos^4 5x - 9x^6};$

9. $y = (8x^3 + 4x^2) \cdot \arccos^9 2x;$

10. $y = \frac{7\operatorname{tg} 5x^9}{x^6 + 13x^3};$

11. $y = 9^{\log_7^2(9x-17)} \cdot \arcsin \frac{1}{x};$

12. $y = \operatorname{arctg}^5 2x \cdot e^{\sqrt{\cos x^5}};$

13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^4 + 3x^3 + 2x^2}}{\ln(\cos 12x)};$

14. $y = \frac{\operatorname{tg}^7(e^x + 8)}{(5\ln x + 9)^6}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{\log_4 x};$

16. $y = (\ln 3x^{11})^{\sin^4 x};$

17. $y = \frac{(x-2)^4 \cdot \sqrt[9]{(x+1)^4}}{(3x-9)^6};$

18. $y = \sqrt[8]{\frac{x+3}{x-3}} \log_4(\operatorname{ctg} 2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{tg}(y^2 - 4x) = x^2 \ln y;$

20. $\sin(xy) + \cos(xy) = x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t^3 e^t \\ y = t^3 + 3e^t \end{cases};$

22. $\begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t) \\ y = 5(\sin t - t \cos t) \end{cases}.$

Завдання 8.21

Знайти похідні:

1. $y = 8\sqrt[9]{x^5} + \frac{3x^4+8x^5\sqrt{x}}{x^7} + \frac{3}{x^6} + 16;$ 2. $y = (3x^7 - \sqrt[5]{x^4})\arctg x;$

3. $y = 9^{4x} + \log_7(2x - 7) + \cos 4x;$ 4. $y = \frac{7\cos x - 3}{2x^2 - 4x - 9};$

5. $y = \arcsin(x^2 + \ln x);$ 6. $y = \operatorname{arcctg}^5 13x;$

7. $y = \cos 5x^4;$ 8. $y = \sqrt[4]{tg^2 14x + 32x^3};$

9. $y = (13x^6 - 8x) \cdot e^{\arccos x^5};$ 10. $y = \frac{4ctg 8x^{21}}{x^8 - 5x^3};$

11. $y = 10^{\sin^2(3x+5)} \cdot \arccos \sqrt[3]{x};$ 12. $y = \log_2(tg 7x) \cdot e^{\sin^2 x};$

13. $y = \frac{\sqrt[6]{7x^6 - 11x^4 - 22}}{\ln(tg 4x)};$ 14. $y = \frac{ctg^8(8^x + 5)}{(4\log_3 x + 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arcsin 3x)^{tg x};$ 16. $y = (\log_{10} 6x^5)^{\cos^4 2x};$

17. $y = \frac{(5x-12)^2}{(x-3)^9 \cdot \sqrt[5]{(x+5)^2}};$ 18. $y = \sqrt[5]{\frac{x-2}{x+2}} \cos(\ln 3x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arccos y^4 = 4x^2 \cdot tgy;$ 20. $x^3 + x^2 y = xy^2 + y^3.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t; \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\cos t + t\sin t \\ y = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\sin t - t\cos t \end{cases}.$

Завдання 8.22

Знайти похідні:

1. $y = \frac{10}{\sqrt[3]{x^4}} + 7x^9 - 11 + \frac{6x^3 - 3\sqrt[6]{x^5}}{x^8};$
2. $y = (8x^3 + 4x)\arccos x;$
3. $y = 4\ln 2x + 2tg(4x - 1) + 5^{2x};$
4. $y = \frac{4tgx+5}{4x^7-8x^3-11x^2};$
5. $y = \arccos(5^{5x} - 3);$
6. $y = \ln^7 5x;$
7. $y = \sin 2x^9;$
8. $y = \sqrt[5]{ctg^7 8x - 9x^6};$
9. $y = (7x^8 - 19x^4) \cdot 2^{tgx^5};$
10. $y = \frac{6arctg 4x^7}{x^7 - 4x^5};$
11. $y = 9^{\ln^8 tgx} \cdot arcctg \sqrt{x^3};$
12. $y = \cos(\sqrt[3]{x} - 9)e^{tg 2x};$
13. $y = \frac{\sqrt[7]{2x^3 - 8x^4 + 5x}}{\ln(ctg 7x)};$
14. $y = \frac{\arcsin^6(e^x + 2)}{(7\cos x - 5)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arccos 4x)^{tgx};$
16. $y = (\sin 9x^2)^{\arcsin^3 7x};$
17. $y = \frac{(x+7)^9 \cdot \sqrt[6]{(x-5)^5}}{(4x-13)^2};$
18. $y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{x+4}} \arccos \sqrt{x}.$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^4 + 4xy + y^4 = 4(x + y);$
20. $tg(x^2 + y^2) = x \cdot \cos y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases};$
22. $\begin{cases} x = \frac{7t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{14t}{1+t^2} \end{cases}.$

Завдання 8.23

Знайти похідні:

1. $y = 7x + 25 - \frac{2\sqrt[7]{x-5}x^2}{x^4} + \frac{9}{x^{10}};$
2. $y = (\sqrt[5]{x^7} - 4x^3) \cdot e^x;$
3. $y = 10^{2x+5} - \arcsin 4x + \log_5 3x;$
4. $y = \frac{3\arcsin x - 9}{9x^7 - 7x^9 - 13};$
5. $y = \arctg \log_4 5x;$
6. $y = e^{\sin^4 x};$
7. $y = \tg 5x^{12};$
8. $y = \sqrt[4]{\ln^3 2x + 7x^5};$
9. $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot \operatorname{arccotg}^5 3x;$
10. $y = \frac{5\cos 8x^{10}}{x^3 - 4x};$
11. $y = 8^{\tg^5(3x^2 - 7x)} \cdot \arcsin(\ln x);$
12. $y = \ln^7(\sin 3x) \sqrt[7]{\tg^3 6x};$
13. $y = \frac{\sqrt[8]{6x^5 + 3x^8 + 2x}}{\ln(\arcsin 5x)};$
14. $y = \frac{\arccos^7(8^x - 4)}{(3\lg x - 12)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arctg 7x)^{2x^5};$
16. $y = (\tg 2x^8)^{\arccos^7 6x};$
17. $y = \frac{(7x-2)^6}{(x-2)^3 \cdot \sqrt[7]{(x-1)^3}};$
18. $y = \sqrt[9]{\frac{x-6}{x+6}} \log_2(\ctg 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $y - x = y \cdot e^x;$
20. $\ln^2 y = 7x^3 \cdot \operatorname{arccotg} y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = e^{5t} \cos 3t \\ y = e^{5t} \sin 3t \end{cases}$

Завдання 8.24

Знайти похідні:

1. $y = 5 - \frac{1}{10\sqrt{x^3}} + 4x^3 + \frac{7\sqrt[4]{x^3} + 2x^7}{x^5};$ 2. $y = (2x^9 - 3x^3) \cdot 6^x;$

3. $y = 7\cos 4x - \log_2(5x + 4) - 6^{5x};$ 4. $y = \frac{4\arccos x + 2}{5x^2 - 3x - 15};$

5. $y = \operatorname{arccctg}(\sin 5x - 4);$ 6. $y = \log_9^4 6x;$

7. $y = \operatorname{ctg} 12x^5;$ 8. $y = \sqrt[8]{\cos^6 5x - 9x^3};$

9. $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot \sin^7 6x;$ 10. $y = \frac{3 \cdot e^{\sin^5 3x}}{x^{14} - 14x^8};$

11. $y = 7^{\sin^5(\log_2 x)} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x};$ 12. $y = \log_9(\operatorname{ctg} 4x) e^{\sqrt{\sin 5x}};$

13. $y = \frac{\sqrt[9]{12x^3 - 3x^4 - 6}}{\ln(\arccos 4x)};$ 14. $y = \frac{\operatorname{arctg}^9(e^x + 6)}{(2\ln x - 7)^5}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arccctg} 8x)^{\ln x};$ 16. $y = (\operatorname{ctg} 5x^4)^{3x^3 + 7};$

17. $y = \frac{(x+4)^3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}{(7x-1)^5};$ 18. $y = \sqrt[7]{\frac{x+6}{x-6}} \operatorname{ctg}(x^2 + 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x^6 + y^6 = 6x^3y^3;$ 20. $\sqrt{5x - y^2} = x \cdot \ln y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = 4\operatorname{ctg} t \\ y = 6\sin^2 t + 3\sin 2t \end{cases}.$

Завдання 8.25

Знайти похідні:

1. $y = 3x^4 \sqrt{x} + \frac{12x^7 + \sqrt{x^9}}{x^4} - 3x^5 - 7$; 2. $y = (10\sqrt{x^7} - 8x) \cdot \ln x$;

3. $y = (4x - 1)^5 - \operatorname{ctg} 3x + \log_7 8x$; 4. $y = \frac{2 \arctg x - 9}{7x^9 + 7x^5 - 5}$;

5. $y = e^{\operatorname{tg}(4x^3 - 12x)}$;

6. $y = \sin^5 3x$;

7. $y = \arcsin 7x^4$;

8. $y = \sqrt[6]{\log_4 5x - 14x^5}$;

9. $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot \cos^{10} 4x$;

10. $y = \frac{9 \arccos x^5}{x^4 - 4x^5}$;

11. $y = 6^{\cos^4(2x^3 - 6)} \cdot \log_5 \frac{4}{x}$;

12. $y = \arccos \sqrt[9]{x} \cdot \operatorname{ctg}^5 7x$;

13. $y = \frac{\sqrt[8]{5x^2 + 2x - 32}}{\ln(\arctg 8x)}$;

14. $y = \frac{\arccot g^7(4^x + 3)}{(5 \log_7 x - 2)^6}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\sin 6x)^{\log_5 x}$;

16. $y = (\arcsin 9x^4)^{\operatorname{tg}^2 7x}$;

17. $y = \frac{(14x - 3)^4}{(x + 2)^5 \cdot \sqrt[3]{(x - 2)^4}}$;

18. $y = \sqrt[6]{\frac{x+3}{x-3}} \log_6(\cos 5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\operatorname{ctg} x^2 = 5y^5 \cdot \operatorname{tg} x$;

20. $\ln(x + y) = x^3 + y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 8) \sin 2t \\ y = (t^2 - 8) \cos 2t \end{cases}$.

Завдання 8.26

Знайти похідні:

1. $y = 1 - 2\sqrt[8]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{5x^4 - 6x\sqrt{x}}{x^3}$;
2. $y = (3\sqrt[3]{x^5} + 11)\log_3 x$;
3. $y = 3^{8x+7} + \arccos 2x - 4\ln 7x$;
4. $y = \frac{5\arctg x + 8}{4x^2 - 2x^3 - 5x}$;
5. $y = 2\sqrt{\lg 5x}$;
6. $y = \cos^2 10x$;
7. $y = \arctg 6x^8$;
8. $y = \sqrt[6]{\sin^9 8x + 8x^2}$;
9. $y = (3x^9 - 9x^7) \cdot \tg^3 8x$;
10. $y = \frac{8\ctg 3x^5}{x^7 - 14x^5}$;
11. $y = 5^{\sin^3 \sqrt{x}} \cdot \arcsin 3x^8$;
12. $y = \log_8(e^{\sin 5x}) \tg^4 6x$;
13. $y = \frac{\sqrt[7]{2x^6 + 3x^5 - 4x^4}}{\ln(\arctg 3x)}$;
14. $y = \frac{\sin^8(6^x - 9)}{(2\arccos x - 5)^9}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\cos 4x)^{\sqrt[3]{x}}$;
16. $y = (\arctg 5x^5)^{\sqrt{\log_7 x}}$;
17. $y = \frac{(x-2)^6 \cdot \sqrt[6]{(x-3)^5}}{(2x-9)^4}$;
18. $y = \sqrt[7]{\frac{x-2}{x+2}} \ln(\arctg 4x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\cos^2 x = 9x^3 + 5y^4$;
20. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 5(x - y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot \sin t, \\ y = t \cdot \cos t; \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = (t+1)\ln^2 t \\ y = \frac{\ln^2 t}{t+1} \end{cases}$.

Завдання 8.27

Знайти похідні:

1. $y = 9x^2 + \frac{\sqrt[3]{x^8} - 9x^8}{x^4} + 21 - \frac{4}{x^5};$
2. $y = (5x^5 - \sqrt[9]{x^8}) \cdot \sin x;$
3. $y = 2^{4x+5} + \cos 3x + 4 \arctg 7x;$
4. $y = \frac{6e^x - 13}{4x^2 + 3x^4 + 9x};$
5. $y = \ln(e^x - 2x^2);$
6. $y = tg^6 8x;$
7. $y = \operatorname{arcc}tg 5x^2;$
8. $y = \sqrt[5]{\cos^3 7x - 24x^5};$
9. $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot ctg^{11} 3x;$
10. $y = \frac{9 \sin 7x^3}{x^6 - 2x^4};$
11. $y = 4^t g^{7(5^x+2)} \cdot \sin \sqrt{x};$
12. $y = \arctg \sqrt[6]{x} \cdot e^{\sin^5 2x};$
13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^5 - 3x^3 - 2x}}{\log_4(\cos 2x)};$
14. $y = \frac{\cos^3(9^x+6)}{(9 \arctg x - 7)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (tg x)^{\arcsin x};$
16. $y = (\sin 8x^8)^{\frac{12}{\arccos 3x}};$
17. $y = \frac{(4x-7)^5}{(x-9)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}};$
18. $y = \sqrt[6]{\frac{x-4}{x+4}} \log_7(x^2 - x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\arctg y^2 = x^2 \cdot \ln y;$
20. $\sin(xy) - 8xy = 35.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = t \cdot 5^t \\ y = t^5 \cdot \log_5 t \end{cases};$
22. $\begin{cases} x = \cos t \sqrt{2 \cos 8t} \\ y = \sin t \sqrt{2 \cos 8t} \end{cases}.$

Завдання 8.28

Знайти похідні:

1. $y = \frac{13}{\sqrt[5]{x^7}} + 22 - 5x^{10} + \frac{9\sqrt[6]{x^{11}} - 4x^2}{x^4}$; 2. $y = (2x^{10} + \sqrt[3]{x}) \cdot \cos x$;

3. $y = 5e^{6x} + \arctg 7x - \ln(x^2 + 1)$; 4. $y = \frac{5 \cdot 8^x - 9}{4x^4 + 7x - 3x^8}$;

5. $y = \log_9(\sin 5x - 8)$;

6. $y = \operatorname{ctg}^4 2x$;

7. $y = e^{tg x^4}$;

8. $y = \sqrt[5]{\arcsin^4 9x - 22x^3}$;

9. $y = (2x^{14} - 5x^4) \cdot \arccos^2 4x$;

10. $y = \frac{8tg 13x^2}{x^3 + 3x^5}$;

11. $y = 3^{\cos^4 \ln x} \cdot \arctg \sqrt[7]{x^5}$;

12. $y = \arccos(e^{2x}) \cdot \sin x^4$

13. $y = \frac{\sqrt[4]{7x^3 - 3x^4 + 6x}}{\log_{10}(\cos 5x)}$;

14. $y = \frac{tg^5(e^x - 22)}{(7 \ln x + 5)^8}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\arccos 2x)^{\frac{1}{x}}$;

16. $y = (\cos 4x^2)^{7x^5 - 1}$;

17. $y = \frac{(x+5)^2 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3}}{(6x-9)^5}$;

18. $y = \sqrt[4]{\frac{x-9}{x+9}} \cos \sqrt{x+5}$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $x \cdot \sin^2 y = 5y^2 - x$;

20. $x \ln y - y \ln x = 7(x + y)$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2ctgt \\ y = \cos^2 t - \cos 2t \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x = (t^2 + 4)e^{3t} \\ y = \frac{e^{3t}}{t^2 + 4} \end{cases}$.

Завдання 8.29

Знайти похідні:

1. $y = 17\sqrt{x^5} + \frac{10x^6 - \sqrt[7]{x^4}}{x^5} + \frac{8}{x^3} - 25$; 2. $y = (4x^8 - 5x^3\sqrt{x}) \cdot \operatorname{tg} x$;

3. $y = 8\log_3 9x - 4\sin 5x + 3^{x^2-6}$; 4. $y = \frac{6\ln x - 5}{2x^4 + 3x^3 - 9}$;

5. $y = \sin(\ln 4x + 3)$; 6. $y = \arccos^3 9x$;

7. $y = 3^{\operatorname{ctg} x^8}$; 8. $y = \sqrt[6]{\operatorname{arctg}^{13} 2x + 4x^5}$;

9. $y = (7x^9 - 11x^3) \cdot \arcsin^4 9x$; 10. $y = \frac{11\cos 8x^7}{x^8 - 3x^4}$;

11. $y = 2^{\arcsin^5 \sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(7x^6 + 5x^2)$; 12. $y = \ln(\operatorname{ctg} 3x) \cdot \sqrt{\cos 3x}$;

13. $y = \frac{\sqrt[3]{5x^5 - 3x^3 - x}}{\log_8(\operatorname{tg} 6x)}$; 14. $y = \frac{\operatorname{ctg}^9(7^x - 6)}{(4\log_3 x - 2)^3}$.

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arctg} 6x)^{\log_5 x}$; 16. $y = (\operatorname{tg} 7x^{13})^{\arccos^4 5x}$;

17. $y = \frac{(5x-6)^7}{(x+3)^4 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^5}}$; 18. $y = \sqrt[4]{\frac{x+7}{x-7}} \log_9(\sin 5x)$.

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\ln \frac{y}{x} = x^2 \cdot y^5$; 20. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 9x^3 \cdot y^3$.

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = 2t^2 - t^4 \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$; 22. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t} \\ y = t \cdot \ln(1-t) \end{cases}$.

Завдання 8.30

Знайти похідні:

1. $y = 3x^5 \sqrt[3]{x^2} - 5x + 24 + \frac{4x^7 - 9\sqrt[4]{x}}{x^{10}};$ 2. $y = (6x^7 + 4\sqrt[5]{x}) \cdot \operatorname{ctgx};$
3. $y = \ln(2x - 7) + \operatorname{ctg} 8x - 9^{4x-2};$ 4. $y = \frac{2\log_3 x - 1}{7x^8 + 6x^5 + 4x};$
5. $y = \cos(e^{7x} - 3);$ 6. $y = \arcsin^5 6x;$
7. $y = \ln 8x^3;$ 8. $y = \sqrt[14]{\operatorname{arcctg}^3 2x - 5x^7};$
9. $y = (8x^2 - 15x^7) \cdot \operatorname{arctg}^4 6x;$ 10. $y = \frac{5\arccos 4x^9}{x^3 + 2x^7};$
11. $y = 9^{\ln^3 \sin x} \cdot \operatorname{arcctg} \sqrt{x};$ 12. $y = \operatorname{arctg} e^{5x} \cdot \sqrt[3]{\ln^2 3x};$
13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x^7 - 2x^3 + 6x}}{\log_7(\operatorname{ctg} 3x)};$ 14. $y = \frac{\arcsin^8(2^x - 1)}{(5\operatorname{tg} x - 11)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

15. $y = (\operatorname{arcctg} 4x)^{\sin x};$ 16. $y = (\operatorname{ctg} 9x^4)^{\log_6^4(x-5)};$
17. $y = \frac{(x+4)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+3)^7}}{(7x-1)^5};$ 18. $y = \sqrt[8]{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{arctg}(\ln x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

19. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1;$ 20. $\operatorname{ctg}(x^3 - 3y) = 2y \cdot e^x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

21. $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = \operatorname{arcctg} \sqrt{t} \end{cases};$ 22. $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \cos t - t \cdot \sin t \\ y = \frac{t^2}{2} \sin t + t \cdot \cos t \end{cases}.$

Розділ 9 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ

Приклад розв'язання типового варіанту

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.

Розв'язання. Наближене значення функції знайдемо за формулою:

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx,$$

Зрозуміло, що нам треба визначитися з виглядом функції $f(x)$, величинами x_0 та dx , знайти похідну функції, обчислити значення функції та її похідної у точці x_0 . Виконаємо всі вказані дії:

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x};$$

$$x_0 = 16; \quad dx = -1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2;$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

Підставимо отримані значення у формулу, знайдемо наближене значення функції:

$$15^{0,25} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot (-1) = 1,96875.$$

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{2x+3}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обчислимо значення y_0 – ординати точки дотику. Знайдемо похідну функції, обчислимо її значення в точці дотику:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 - 3} = -5;$$

$$y' = \frac{2(2x - 3) - 2(2x + 3)}{(2x - 3)^2} = \frac{4x - 6 - 4x - 6}{(2x - 3)^2} = -\frac{12}{(2x - 3)^2};$$

$$y'(x_0) = -\frac{12}{(2 \cdot 1 - 3)^2} = -12.$$

Підставимо у формулу:

$$y + 5 = -\frac{1}{-12}(x - 1);$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} - 5;$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{61}{12}.$$

3. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до графіку функції $y = x^2 - 5x + 8$ в точці $x_0 = 3$. Записати рівняння дотичної.

Розв'язання. За визначенням, кутовий коефіцієнт дотичної (кут її нахилу до осі абсцис) дорівнює значенню похідної в точці дотику:

$$k_d = y'(x_0).$$

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x - 5;$$

обчислимо її значення у точці дотику:

$$y'(x_0) = 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

За визначенням кутового коефіцієнта

$$k_d = 1 = \operatorname{tg} \varphi;$$

отже, дотична утворює з віссю абсцис кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Складемо рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Обчислимо $y_0 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 2$. Підставимо у формулу:

$$y - 2 = 1(x - 3).$$

Остаточно маємо:

$$y = x - 1.$$

4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 2$ с.

Розв'язання. Швидкість та прискорення руху дорівнюють першій та другій похідним відповідно від закону руху матеріальної точки:

$$v = s'(t); \quad a = v'(t) = s''(t).$$

Знайдемо похідні та обчислимо їх значення через $t = 2$ с:

$$v = s' = 3t^2 - 4t + 4; \quad v(2) = 12 - 8 + 4 = 8 \text{ м/с};$$

$$a = v' = s'' = 6t - 4; \quad a(2) = 12 - 4 = 8 \text{ м/с}^2.$$

5. Обчислити границі функцій:

$$\text{а). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2}.$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримуємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Саме з такими невизначеностями можна впоратися за допомогою правила Лопітала: границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - 5}{2x} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

підставимо граничне значення аргументу, знову отримуємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Згадаємо, що правило Лопітала можна застосовувати стільки разів, скільки в цьому є потреба. Замінімо

границю відношення функцій границею відношення їх похідних ще раз:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{3x} + 4e^{2x}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{13}{2}$.

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right].$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримуємо невизначеність типу $|\infty - \infty|$. Перед тим, як застосувати правило Лопіталя, ми маємо виконати перетворення, а саме – привести дробі до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right] &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x \frac{1}{1+x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2)\cos^2 x}}{\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{(1+x^2)\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\sin 2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x \sin x - 2x}{2x \operatorname{arctg} x + \cos 2x} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

В даному прикладі правило Лопіталя ми застосували двічі, попередньо спростив функцію.

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot \operatorname{ctgx}).$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримуємо невизначеність типу $|0 \cdot \infty|$. Функція представлена у вигляді добутку. Перед застосуванням правила Лопіталя ми маємо переписати функцію у вигляді відношення функцій. Для цього замінимо множення на ctgx діленням на обернену функцію, тобто на $\frac{1}{\operatorname{ctgx}} = \operatorname{tgx}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot \operatorname{ctgx}) &= |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\frac{1}{\operatorname{ctgx}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\operatorname{tgx}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{8}{1} = 8. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 8.

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримуємо невизначеність типу $|\infty^0|$. Функція має вигляд степенєво-показникової. Перед застосуванням правила Лопіталя прологарифмуємо границю. Задану границю позначимо як A , знайдемо її логарифм

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} &= |\infty^0| = A; \\ \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + xe^x)}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \end{aligned}$$

Тепер застосування правила Лопіталя є можливим. Обчислимо границю:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + xe^x}{(1 + xe^x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x)}{1 + xe^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x) + e^x}{e^x + xe^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x + 1)}{e^x(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1.
 \end{aligned}$$

Ми знайшли $\ln A$, двічі застосували правило Лопіталя та виконали необхідні перетворення. Щоб отримати відповідь – необхідно повернутися до заданої границі. За основною логарифмічною тотожністю маємо:

$$A = e^{\ln A} = e^1 = e.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює e .

6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

a) $y = 2x^4 - 4x^2 - 5$.

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою у навчальному посібнику «Вища математика. Модуль 1»:

- ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$;
- знайдемо y'

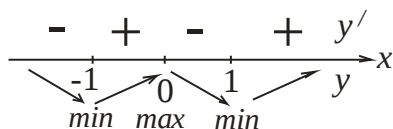
$$y' = 8x^3 - 8x;$$

- знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad 8x^3 - 8x = 0; \quad x(x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів



Робимо висновок, що в точках з абсцисами $x = \pm 1$ - мінімуми, в точці з абсцисою $x = 0$ - максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(-1) = 2(-1)^4 - 4(-1)^2 - 5 = -7;$$

$$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 5 = -7;$$

$$y(0) = 0 - 0 - 5 = -5.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; в точках $M_1(-1; -7)$ та $M_3(1; -7)$ - мінімуми функції, в точці $M_2(0; -5)$ - максимум.

$$\text{б) } y = \frac{x^2 + 7}{x + 3}.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x + 3 \neq 0$; $x \neq -3$;

- знайдемо y'

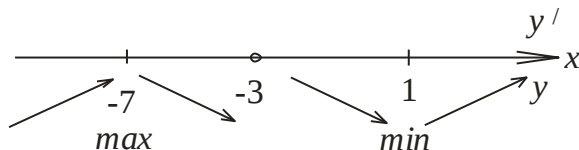
$$y' = \frac{2x(x+3) - (x^2+7) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2 - 7}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 7}{(x+3)^2};$$

- знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = -7; \quad x_2 = 1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точку, в якій функція не існує ($x = -3$), дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів



в точці з абсцисою $x = 1$ - мінімум, в точці з абсцисою $x = -7$ - максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(1) = \frac{1+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$y(-7) = \frac{49+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$, спадає $- x \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$; в точці $M_1(1; 2)$ - мінімум функції, в точці $M_2(-7; -14)$ - максимум.

7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$a) y = 3x^4 - 4x^3 - 6x + 15.$$

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою в навчальному посібнику «Вища математика. Модуль 1»:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 6$$

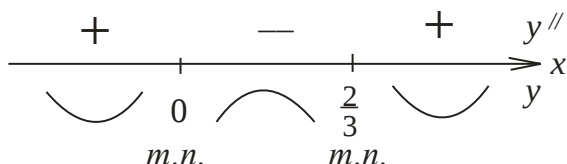
$$y'' = 36x^2 - 24x;$$

- знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0: \quad 36x^2 - 24x = 0; \quad 12x(3x - 2) = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів



Обчислимо ординати точок перегину:

$$y(0) = 15;$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right) + 15 = \frac{281}{27}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$,
 угнута - $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, в точках $P_1(0; 15)$,
 $P_2\left(\frac{2}{3}; \frac{281}{27}\right)$ - точки перегину функції.

$$\text{б) } y = (x + 1)\arctg x.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

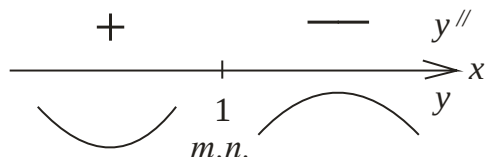
$$y' = \arctg x + (x + 1) \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \arctg x + \frac{x + 1}{1 + x^2};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1 + x^2 - (x + 1) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{2 + 2x^2 - 2x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x}{(1 + x^2)^2}; \end{aligned}$$

- знайдемо критичні точки:

$$\begin{aligned} y'' = 0: \quad \frac{2 - 2x}{(1 + x^2)^2} &= 0; \quad 2 - 2x = 0; \\ \Rightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів



Обчислимо ординату точки перегину:

$$y(1) = (1 + 1) \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. Функція опукла на інтервалі $x \in (1; +\infty)$, угнута - $x \in (-\infty; 1)$, в точці $P\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ - точка перегину функції.

8. Знайти асимптоти функції:

$$a) y = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.

- перевіримо, чи є пряма $x = -5$ - вертикальною асимптотою:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} = \frac{75 + 5 - 2}{-5 + 5} = \frac{78}{0} = \infty;$$

умова виконалася $\Rightarrow$ пряма $x = -5$ є вертикальною асимптотою;

- похилу асимптоту шукаємо у вигляді:

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 5x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x - 1}{2x + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{2} = 3; \end{aligned}$$

та відрізок, який відсікає асимптота на осі ординат:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx);$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2 - 3x^2 - 15x}{x + 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16x + 2}{x + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16}{1} = -16;$$

Отже, рівняння похилої асимптоти має вигляд:

$$y = 3x - 16.$$

Відповідь. Функція має вертикальну асимптоту $x = -5$ та похилу асимптоту $y = 3x - 16$.

$$\text{б) } y = (x - 7)e^{x+3}.$$

Розв'язання:

- ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$; $\Rightarrow$ вертикальної асимптоти нема.
- похилу асимптоту шукаємо у вигляді:

$$y = kx + b;$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт асимптоти. Зауважимо, що обчислювати границі будемо окремо при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$ (поведінка функції суттєво відрізняється):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 7)e^{x+3}}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3} + (x - 7)e^{x+3}}{1} = \infty$$

$\Rightarrow$ при $x \rightarrow +\infty$ похилої асимптоти не існує,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 7)e^{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 7)}{xe^{-(x+3)}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-(x+3)} - xe^{-(x+3)}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$\Rightarrow$ при $x \rightarrow -\infty$ асимптота існує, але при $k = 0$ похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Відповідь. Функція має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік: $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання: Загальна схема дослідження функції приведена в навчальному посібнику «Вища математика. Модуль 1».

- ОДЗ: $x^2 - 1 \neq 0$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$;

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

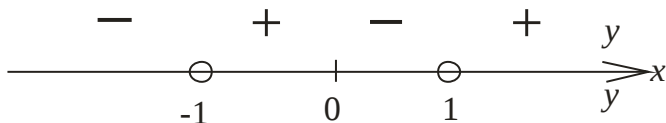
- Знайдемо точки перетину з осями координат:

$$Ox: y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 - 1} = 0; \quad x = 0;$$

$$Oy: x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0}{0^2 - 1} = 0;$$

$\Rightarrow$ функція перетинається з осями координат в початку координат – в точці $O(0; 0)$.

- Знайдемо інтервали знакосталості. Нанесемо на числову вісь точки перетину з віссю абсцис та точки, в яких функція не існує, дослідимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів:



Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, від'ємна - $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

- Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -y(x);$$

$\Rightarrow$ функція непарна, а з цього прямує, що її графік симетричний відносно початку координат.

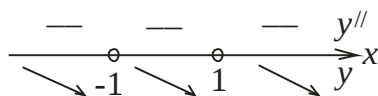
- Періодичність. Функція не періодична.

- Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми. Ми детально розглянули цю схему у завданні 6.

$$y' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2};$$

$$y' = 0: \quad -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} = 0; \quad 2x^2 + 2 = 0; \quad 2x^2 \neq -2;$$

критичних точок не знайдено, тому й екстремумів у функції не існує. Дослідимо на монотонність:



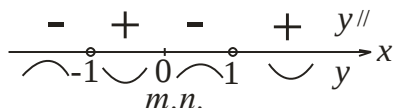
Функція спадає на всій області визначеності. Екстремумів немає.

- Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та точки перегину. Ми детально розглянули цю схему у завданні 7.

$$y'' = -\frac{4x(x^2 - 1)^2 - (2x^2 + 2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= -\frac{4x(x^2 - 1)[x^2 - 1 - 2x^2 - 2]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3};$$

$$y'' = 0; \quad \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0; \quad x = 0;$$



Знайдемо асимптоти функції (см. завдання 8):

- вертикальні асимптоти

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{(-1)^2 - 1} = -\frac{2}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{1^2 - 1} = \frac{2}{0} = +\infty;$$

⇒ прямі $x = -1$ та $x = 1$ – вертикальні асимптоти.

- похила асимптота $y = kx + b$:

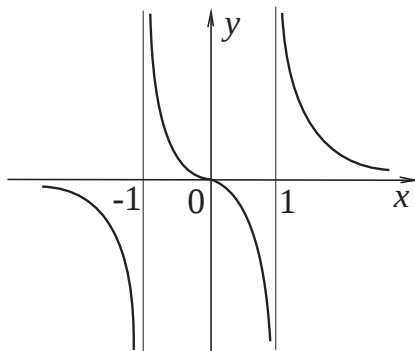
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^3-x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x^2-2x} = \frac{2}{\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

похила асимптота перетворюється в горизонтальну: $y = 0$.

Об'єднаємо результати дослідження на графіку функції:



10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2x}{1+x^4}$ на інтервалі $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання: Проведемо дослідження функції на найбільше та найменше значення функції в замкненому інтервалі за схемою:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

Критичні точки функції:

$$y' = 0: \quad \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = 0; \quad 2-6x^4 = 0; \quad x^4 = \frac{1}{3}; \quad x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}};$$

точка $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ не належить досліджуваному інтервалу.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

та кінцях інтервалу:

$$y(-2) = \frac{2 \cdot (-2)}{1 + (-2)^4} = \frac{-4}{1+16} = -\frac{4}{17};$$

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27};$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17}.$$

З них найбільше – $y_{\text{найб.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17}$, а найменше – $y_{\text{найм.}} = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27}$.

Відповідь:

$$\max_{x \in [-2; \frac{1}{2}]} y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17}; \quad \min_{x \in [-2; \frac{1}{2}]} y(x) = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27}.$$

**Завдання для практичних занять
та самостійної роботи студентів****Завдання 9.1**

1. Знайти наближене значення функції $y = 5x^4 - 3x^2 + 6\ln x$ при $x = 1,005$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x+8}$ в точці з абсцисою $x_0 = -4$.
3. Дано параболу $y = -x^2$. З'ясувати, в якій точці параболи нормаль до неї перпендикулярна прямій $y = 2x - 1$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{6}{x} \right)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tg x)^{2x-\pi}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = 5x^4 - 10x^2 + 13$;
 - б) $y = \frac{7}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;
 - б) $y = x \cdot \ln x$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}$
 - б) $y = \frac{e^{x+2}}{x-3}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 5x$;
 - б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$$
на інтервалі $[1; 5]$.

Завдання 9.2

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arctg 1,003$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 16$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.
3. З'ясувати, в якій точці кривої $y = \sqrt[3]{x}$ кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює $\frac{\pi}{6}$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 5t - 16$. Визначити швидкість руху через $t = 2$ с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right]$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = 2x^2 + 4x + 1$;
 - б) $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 5}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^3 - 3x - 5$;
 - б) $y = x \cdot e^{-x^2}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{7x^2 - 2x - 5}{x^2 - 9}$
 - б) $y = 3 \ln \frac{x}{x+5} - 4$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;
 - б) $y = x - \ln(x + 1)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2$ на інтервалі $[-1; 4]$.

Завдання 9.3

- Знайти наближене значення функції
 $y = 2x^3 + 3x^2 - 5\arcsin x$ при $x = 0,01$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x - 13$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- На кривій $y = x^2 - 7x + 13$ знайти точку, нормаль в якій паралельна прямій $y = \frac{1}{5}x + 2$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 12t + 7$. З'ясувати, в який момент часу її швидкість дорівнювала 4 м/с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right)$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 5x^6 - 6x^5$;	б) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$.
------------------------	--------------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 7$;	б) $y = \ln(1 + x^2)$.
---	-------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{5x^2 + x - 4}{x + 3}$	б) $y = (x - 7)e^{x+4}$.
-------------------------------------	---------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 18x$;	б) $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.
-----------------------------	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \left(\frac{1}{5} \right)^{x^2 - 5x + 4}$$

на інтервалі $[-2; 3]$.

Завдання 9.4

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sin 29^{\circ}$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 19$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
- Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 3x + 2$ в точці перетину її з віссю ординат.
- Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно вздовж осі абсцис, їх закони руху задані рівняннями $s = t^2 + 8t - 5$ і $s = 3t^2 - 5t + 1$. Визначити, в який момент часу їх швидкості будуть рівними.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{5x} - \cos 5x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-5x})$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 6x^2 - 2x^3$;	б) $y = \frac{7x}{\ln x}$.
------------------------	-----------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;	б) $y = \frac{x^3}{x+12}$.
---------------------------	-----------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{9x^2 - 2x - 7}{x^2 - 1}$	б) $y = 6 \ln \frac{x}{x-5} - 3$.
--	------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 9x^2 + 18x$;	б) $y = \frac{x^2 - 4}{x+1}$.
-----------------------------	--------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x \cdot \ln x$ на інтервалі $\left[\frac{1}{10}; 1 \right]$.

Завдання 9.5

1. Знайти наближене значення функції $y = 3x^8 + 2x^5 - 4e^x$ при $x = 0,03$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(1 + x)$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.
3. Записати рівняння нормалей до кривої $y = x^2 + 2x - 1$ в точках перетину її з кривою $y = -2x^2$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 - t$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с після початку руху.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln x)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$;
 - б) $y = \frac{\ln x + 4}{x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 15$;
 - б) $y = x + \arctg x$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{x^2 + x + 3}{3x - 1}$
 - б) $y = xe^{-x^2}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$;
 - б) $y = \frac{e^x}{x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.6

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sin 61^\circ$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{x^2-5}{2x^2+1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
3. З'ясувати кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4$ в точці $M\left(1; \frac{1}{4}\right)$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = 9t - 2t^3$. Визначити швидкість руху та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - t \operatorname{gr} x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^3 x)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$;
 - б) $y = \ln(25 - x^2)$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = x^4 - 2x^2 - 8$;
 - б) $y = (x - 5)e^{x+1}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{x^2+9x+11}{x^2-25}$
 - б) $y = 5 \ln \frac{x+3}{x+4} - 2$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 3x^2$;
 - б) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{x+1}{e^x}$$
на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.7

1. Знайти наближене значення функції $y = 9x^3 + 7x^2 - 3\ln x$ при $x = 1,01$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \operatorname{tg} 4x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{16}$.
3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{4 - 5x}$ в точці її перетину з прямою $2x + y - 1 = 0$.
4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно, закони руху їх задані рівняннями $s = 3t^2 + 7t + 14$ і $s = 2t^2 + 4t + 24$. Визначити швидкості матеріальних точок у момент зустрічі.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5$;
 - б) $y = x \cdot \ln x$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = 5x^3 - 3x^5$;
 - б) $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{8x^2 - 7x + 1}{x - 5}$
 - б) $y = \frac{e^{x+4}}{x+5}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;
 - б) $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

на інтервалі $[-1; 1]$.

Завдання 9.8

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arccos 0,098$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = e^{-3x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.
- Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 + 6x + 7$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 2t^2 - 4t + 3$.
Визначити швидкість руху через $t = 1$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 6^x}{4^x - 8^x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3$;	б) $y = x \cdot \ln^2 x$.
---------------------------	----------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8x - 3$;	б) $y = (x - 3)e^{x+1}$.
---	---------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x}$	б) $y = 4 \ln \frac{x}{x+3} - 1$.
---	------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 2x^4 - x^2 + 1$;	б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.
---------------------------	----------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$
 на інтервалі $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

Завдання 9.9

- Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 2e^x$ при $x = 0,02$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = x + \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- Записати рівняння дотичних до графіку функції $y = x^3 - 12x + 3$, паралельних прямій $4x - y + 5 = 0$.
- Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 13t - 9$ і $s = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 7t + 5$. З'ясувати, в який момент часу їх швидкості були рівними.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(8^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \cdot x$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{5}{3}x^3 - 10x$;	б) $y = \frac{x^3 - x^2}{e^{2x}}$.
---------------------------------	-------------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$;	б) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.
--	---------------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{2x^2 + 9x + 1}{x - 7}$	б) $y = 2 \ln \frac{x+1}{x-1} - 7$.
--------------------------------------	--------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 12x$;	б) $y = \frac{1}{x^2} + x^2$.
-----------------------------	--------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2x^3 - 39x^2 + 252x + 1$ на інтервалі $[5; 8]$.

Завдання 9.10

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arcsin 0,54$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x+2}{x-2}$, яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1; -7)$ і $B(-2; 5)$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 - 8t^3 + 6t^2 - t + 9$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 10x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$;	б) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$.
---	--
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3$;	б) $y = 5 \ln \frac{x}{x-3}$.
--------------------------------------	--------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{5x^2 - 6x - 11}{3x^2 + 9x}$	б) $y = \frac{e^{x+4}}{x-2}$.
---	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 4x^5 - 5x^4$;	б) $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$.
------------------------	---
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = 2x - 3 \cdot \ln x$$
 на інтервалі $[1; e]$.

Завдання 9.11

- Знайти наближене значення функції $y = 5x + x^2$ при $x = 1,003$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -3$.
- Записати рівняння дотичних до кривої $y = \frac{2x+1}{x+1}$, перпендикулярних прямих $y = -x - 3$.
- Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 + 4t + 5$ і $s = 2t^2 + 5t + 7$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2}{x-2} - \frac{x+4}{x^2-x-2} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$	г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x + 14$;	б) $y = (x-3)e^{x+2}$.
---	-------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 6x^5 - 5x^6$;	б) $y = x^2 - 2 \ln x$.
------------------------	--------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{9x^2-x-3}{3x-15}$	б) $y = (3x-7)e^{2x}$.
---------------------------------	-------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = \frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3$;	б) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
--	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

на інтервалі $[1; 4]$.

Завдання 9.12

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $17^{0,25}$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 + 4x + 16$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 + 5$ в точці перетину її з віссю ординат.
- Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки на початку руху ($t = 0$), якщо закон руху матеріальної точки $s = -2t^2 + \frac{20}{3}\sqrt{(t+5)^3} + 30t$.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - e^x}{tgx - x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{2}{x} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{7}x^7 - 9$;
 - $y = x - 5\arctg x$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 9x - 4$;
 - $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x}$
 - $y = 9 \ln \frac{x-3}{x} - 2$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = 6x^4 - 4x^6$;
 - $y = x^2 - 2 \ln x$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 \cdot e^{x+1}$ на інтервалі $[-4; 0]$.

Завдання 9.13

- Знайти наближене значення функції $y = 4x^4 - 8e^{2x}$ при $x = 0,04$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = 7x^2 - 6x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
- Знайти кутовий коефіцієнт нормалі до кривої $y = \frac{5}{9} \left(\frac{x-1}{x+5} \right)^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 + 5t^3 - 7t + 12$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після початку руху.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 8$;
 - $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = 2x^3 - 13x^2 + 23x$;
 - $y = \arctg(x^2)$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{6x^2-4x-2}{x+5}$
 - $y = \frac{e^{x+4}}{x+8}$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = x^3 - 12x$;
 - $y = \ln \frac{x}{x+5} - 4$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2+x^2}{1-x^2}$$

на інтервалі $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Завдання 9.14

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $e^{0,3}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{4}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. На кривій $y = 5x^2 + 10x - 3$ знайти точку, дотична в якій паралельна прямій $y = 20x - 7$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + 3$. Визначити, в який момент часу її швидкість дорівнювала 9 м/с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^2 2x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) t g \frac{x}{2}$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$;
 - б) $y = x - \ln(x + 3)$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = 4x^3 - x^4$;
 - б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$
 - б) $y = (x - 3)e^{x+4}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x$;
 - б) $y = \frac{x^3 - 8}{x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = e^{4x - x^2}$ на інтервалі $[1; 3]$.

Завдання 9.15

1. Знайти наближене значення функції $y = 7x^2 + 4\ln x$ при $x = 1,02$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{8}{x} + 6\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.
3. Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 9x^2 - 18x + 5$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + 8t^3 - t^2 + 2t - 4$. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 4$ с після начала руху.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \sin 3x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{e^x - e^2} - \frac{5}{x - 2} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{3x}) \operatorname{ctg} x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{5}{x} \right)^x$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3$;
 - б) $y = \frac{e^x}{2x+8}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5$;
 - б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{8x^2+3x+1}{x+9}$
 - б) $y = 7 \ln \frac{x-7}{x} + 3$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$;
 - б) $y = \ln(9 - x^2)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на інтервалі $[-4; 4]$.

Завдання 9.16

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\cos 151^\circ$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 7x^2 - 2x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(x^2)$, яка паралельна прямій $y = -x$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 2t^2 + 8t - 7$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 4$ с.
5. Обчислити границі функцій:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin 5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \cdot \sin \frac{5}{x^3} \right)$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\sin x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
а) $y = x^3 - 3x^2 + 5$; б) $y = x^2 - 2 \ln x$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
а) $y = 10 + 7x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$; б) $y = (x + 7) \cdot e^{2x}$.
8. Знайти асимптоти функції:
а) $y = \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 - 8}$ б) $y = 3 \ln \frac{x+2}{x-2} + 4$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{2x-1}{2+x^2}$$
на інтервалі $[-2; 0]$.

Завдання 9.17

1. Знайти наближене значення функції $y = x^3 - 5x^2 + 2\sqrt[3]{x}$ при $x = 8,001$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = tg8x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{32}$.
3. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = x - x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
4. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно вздовж осі абсцис, їх закони руху $s = \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 9t + 11$ і $s = \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 4t - 7$. Визначити моменти часу, коли їх швидкості зрівняються.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 4x}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 5x)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = -2x^3 + 6x^2 + 7$;
 - б) $y = x^2 - \ln x^2$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{1}{6}x^3 - 6x^2 + 4x + 9$;
 - б) $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{x^2 + 5x + 1}{3x + 1}$
 - б) $y = \frac{e^{x+5}}{x+6}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = \frac{1}{4}x^4 - x$;
 - б) $y = (x - 1)e^{1-x}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{x - x^3}$ на інтервалі $[-2; 2]$.

Завдання 9.18

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\ln 0,99$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{11}{2}x^2 + x - 8$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- З'ясувати, в якій точці координатній площини xOy пряма $x + 4y - 4 = 0$ дотикається гіперболи $y = \frac{1}{x}$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 8t^2 + t - 7$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 3$ с після начала руху.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - 1}{x^2}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \left[\frac{5}{5x-1} - \frac{1}{\ln 5x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-7x})$	г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 10 + \frac{5}{2}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$;	б) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
---	---------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = 5x^3 - 3x^5$;	б) $y = 2 \ln \frac{x+4}{x} - 5$.
------------------------	------------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{6x^2 - 2x + 3}{x^2 - 64}$	б) $y = (4x - 8)e^{2-x}$.
---	----------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$;	б) $y = x^2 + \frac{1}{x}$.
-------------------------------------	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x}{2+x^3}$$
 на інтервалі $[0; 3]$.

Завдання 9.19

- Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 1)e^x$ при $x = 0,01$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x + 8}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 + 4$, паралельній прямій $y = -\frac{1}{6}x + 8$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + 5t^2 - 8$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg5x - 15tgx}{3sin5x - 15sinx}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2arctgx) \ln x$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = 4x^3 - 12x^2 - 8$;
 - $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = 2x^4 - 8x^2 - 7x + 2$;
 - $y = x \cdot \ln x$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{2x^2 - 8x - 3}{x - 7}$
 - $y = \frac{e^{x-5}}{x-2}$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = 3x - x^3$;
 - $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x$$
 на інтервалі $[0; 2]$.

Завдання 9.20

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt[3]{8,012}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - 2x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 5$.
3. З'ясувати кут нахилу до осі Ox дотичної до кривої $y = \frac{1}{8}x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 19t - 15$. З'ясувати моменти часу, коли швидкість матеріальної точки дорівнює 12 м/с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \cdot \sin x^2}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln 2x}}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 15$;
 - б) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = 1 + 3x + 3x^2 - x^3$;
 - б) $y = (2x - 1)e^{x-5}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{5x^2 - 7x - 12}{x^2 - 3x}$
 - б) $y = 6 \ln \frac{x+5}{x} + 3$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = 3x^4 - 16x^3$;
 - б) $y = x \cdot \ln x$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на інтервалі $[-1; 2]$.

Завдання 9.21

- Знайти наближене значення функції $y = x^2 + x + \arcsin x$ при $x = 0,51$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x-8}$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
- З'ясувати, під яким кутом нахилена дотична до графіка функції $y = \frac{2}{3}x^3$ в точці $M\left(1; \frac{2}{3}\right)$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 12t - 35$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{tg 3x}{tg x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sin x) \operatorname{ctg} x$	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$;	б) $y = \sqrt{2x - x^2}$.
--------------------------------	----------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{7}x^7$;	б) $y = \ln(9 - x^2)$.
--	-------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{4x^2 - 2x - 5}{x + 11}$	б) $y = \frac{e^{x-4}}{x-3}$.
---------------------------------------	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 + x^2$;	б) $y = \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$.
----------------------	---
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$$
 на інтервалі $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 9.22

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\sqrt{4,09}$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3x^2 - \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.
- Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 5x - 8$ в точці перетину її з віссю ординат.
- Вздовж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = 3t^2 - t + 14$ і $s = 2t^2 + 5t + 9$. З'ясувати, з якою швидкістю віддаляються матеріальні точки в момент зустрічі.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 1} - 5x \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 - x) \cos \frac{\pi x}{2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = 3x^4 - 4x^3 - 7$;
 - $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = 4x^4 - 8x^2 + 5x$;
 - $y = (x + 2)e^{x+2}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x}$
 - $y = 5 \ln \frac{x-2}{x} - 4$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = x^3 - 9x$;
 - $y = x^3 e^{-x}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{1 + \ln x}{x}$$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{e}; e \right]$.

Завдання 9.23

- Знайти наближене значення функції $y = (x^2 + 9)e^{-x}$ при $x = 0,01$.
- Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
- На кривій $y = 7x^2 - 14x + 25$ знайти точку, в якій нормаль паралельна прямій $y = -x + 3$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + 5t^3 - 7t^2 + 3t - 4$. Обчислити швидкість та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 5\sin x}{x^3}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{13}{x} \right)$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + x^2}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$;	б) $y = \ln(1 - x^2)$.
--	-------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;	б) $y = \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^2$.
--------------------------------	---
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{7x^2 - 7x - 4}{x + 5}$	б) $y = \frac{e^{x-9}}{x-2}$.
--------------------------------------	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 9x - x^3$;	б) $y = \frac{4 - x^2}{x^2 + 1}$.
---------------------	------------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = 4 - e^{-x^2}$$
 на інтервалі $[0; 2]$.

Завдання 9.24

1. За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $e^{0,015}$.
2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \arctg 2x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.
3. Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{9}{x}$ в точці $M(3; 3)$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + t - 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 5$ с.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{x^2}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{t g x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln(ctgx)$
 - г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{2x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$;
 - б) $y = \frac{e^{5-x}}{5-x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$;
 - б) $y = \ln \frac{x}{x+4} - 2$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 7x}$
 - б) $y = (5x - 2)e^{x-3}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = 12x - 3x^3$;
 - б) $y = e^{-x^2}$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$
на інтервалі $[0; 5]$.

Завдання 9.25

- Знайти наближене значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 + x \cdot e^x$ при $x = 0,02$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+5}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.
- З'ясувати, який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y = x - x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Вздовж осі абсцис рухаються дві матеріальні точки, закони руху яких задані рівняннями $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 3t + 5$ і $s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8t - 9$. З'ясувати моменти часу, в яких їх швидкості були однаковими.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 - 4} - 2x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 2x^4 + 8x + 6$;	б) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.
--------------------------	--
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 2$;	б) $y = 3 \ln \frac{x-6}{x}$.
--	--------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{4x - 8}$	б) $y = \frac{e^{x-2}}{x-7}$.
---------------------------------------	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 18x$;	б) $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
-----------------------------	------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на інтервалі $[-3; 1]$.

Завдання 9.26

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\ln 0,99$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \cos 2x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{12}$.
- Відомо, що пряма $y = 7x + 4$ є дотичною до графіку функції $y = \frac{1}{4}x^4 - x$. Знайти координати точки дотику.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 9t^2 + t - 11$. Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 4$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 3x) \operatorname{ctg} 5x$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 6x^2$;	б) $y = (x + 4)e^{x-2}$.
-----------------------	---------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^4 - 96x^2 + 315$;	б) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$.
------------------------------	--
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{8x^2 - 2x - 6}{x^2 - 36}$	б) $y = 8 \ln \frac{x-2}{x-4} + 3$.
---	--------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$;	б) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
--	--------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{4}; 4 \right]$.

Завдання 9.27

- Знайти наближене значення функції $y = x^3 \cdot \ln x$ при $x = 0,1$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+3}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- Знайти кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \frac{1}{4}x^4 + 4$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 9$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x)}{x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^2 + 3x - 1}{x - 9} - 4x \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-9x})$	г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x + e))^{\frac{1}{x}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = x^3 - 45x + 27$;	б) $y = \sqrt{x}(x^2 - 5)$.
---------------------------	------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$;	б) $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
--	------------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{9x^2 + x + 6}{3x - 5}$	б) $y = \frac{e^{x-6}}{x-2}$.
--------------------------------------	--------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 4x^3 + 2x^2$;	б) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$.
------------------------	-------------------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \ln(\cos x)$ на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Завдання 9.28

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $15^{0,25}$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 6$.
- Записати рівняння горизонтальної дотичної до параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$.
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{9}{3}t^3 + 13t^2 - t + 2$.
Визначити швидкість та прискорення руху матеріальної точки через $t = 3$ с.
- Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}$;	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-2)} \right]$;
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(tg \frac{\pi x}{4} \right)^{tg \frac{\pi x}{2}}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$;	б) $y = \frac{3x^2 - 6}{3 - 2x}$.
--	------------------------------------
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

а) $y = x^4 - 24x^2 + 12x$;	б) $y = (3x - 4)e^{x+1}$.
------------------------------	----------------------------
- Знайти асимптоти функції:

а) $y = \frac{x^2 - x + 12}{x^2 - 2x}$	б) $y = 4 \ln \frac{x}{x+5} - 7$.
--	------------------------------------
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

а) $y = 3x^4 - 12x^3$;	б) $y = \frac{x}{e^x}$.
-------------------------	--------------------------
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \sqrt{169 - x^2}$$
 на інтервалі $[-12; 5]$.

Завдання 9.29

1. Знайти наближене значення функції $y = (1 - x^2)^{0,5}$ при $x = 0,01$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x + 8}$ в точці з абсцисою $x_0 = -7$.
3. З'ясувати, в яких точках дотична до графіку функції $y = \frac{x-8}{x+8}$ утворює з віссю абсцис кут $\frac{\pi}{4}$.
4. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 12t^2 + 45t - 96$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.
5. Обчислити границі функцій:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{\ln 2x} \right]$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{3x}) \operatorname{ctg} 2x$
 - г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\ln x}$.
6. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 4$;
 - б) $y = x + \frac{1}{x}$.
7. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$;
 - б) $y = \frac{\ln x}{x}$.
8. Знайти асимптоти функції:
 - а) $y = \frac{3x^2 - 2x - 7}{x + 4}$
 - б) $y = \frac{e^{x+1}}{x+9}$.
9. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - а) $y = x^3 - 25x$;
 - б) $y = \ln(1 - x^2)$.
10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\sin x$ на інтервалі $[0; \pi]$.

Завдання 9.30

- За допомогою диференціала функції знайти наближене значення $\arcsin 0,54$.
- Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{18}{x} - 3\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 9$.
- Довести, що дотична до синусоїди $y = \sin x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{2}$ паралельна осі Ox .
- Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - 1$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 5$ с.
- Обчислити границі функцій:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{\tg x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \tg x} - \frac{1}{x^2} \right]$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 \cdot \sin \frac{2}{x^4} \right)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 + x))^{\sin x}$.
- Дослідити функції на монотонність та екстремуми:
 - $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 12x - 15$;
 - $y = \frac{2x}{1+x^2}$.
- Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:
 - $y = 8x^3 - 3x^4$;
 - $y = (x + 4)e^{x-4}$.
- Знайти асимптоти функції:
 - $y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{x^2 - 6x}$
 - $y = \ln \frac{x+8}{x} - 4$.
- Провести повне дослідження функції та побудувати графік:
 - $y = 15x - 5x^3$;
 - $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
- Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{1}{x} + 4x^2$$
 на інтервалі $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/63825/>, вільний (дата звернення: 05.09.2024). – Назва з екрана.
2. Коваленко Л. Б. Вища математика. (Модуль 1) : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/41621/>, вільний).
3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/40637/>, вільний).
4. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/47207/>, вільний).
5. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/48566/>, вільний).
6. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 233 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/55299/>, вільний).
7. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.

9. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.

10. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.

11. Розрахунково-графічне завдання з вищої математики (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 57 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/55798/>, вільний (дата звернення: 05.09.2024). – Назва з екрана.

12. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/58511/>, вільний (дата звернення: 05.09.2024). – Назва з екрана.

13. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 55 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/61774/>, вільний (дата звернення: 05.09.2024). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

**ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Модуль 1

Навчальний посібник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 07.06.2024. Формат 60×84/16
Ум. друк. арк. 17,0

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.