

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інженерно-хімічний факультет

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ: ОРГАНІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ У СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра,
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Комп'ютерне моделювання процесів і систем: Організація розрахунків у середовищі MathCAD [Електронний ресурс]: навчальний посібник для самостійної роботи студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського: уклад.: О.О. Квітка, А.М. Шахновський. – Електронні текстові данні (1 файл 4,84 Мбайт). – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 89 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 30.09.2022 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету
(протокол № 8 від 01.09.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Комп'ютерне моделювання процесів і систем: ОРГАНІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ У СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Укладачі	Квітка Олександр Олександрович, канд. хім. наук, доцент Шахновський Аркадій Маркусович, канд. техн. наук, доцент
Відповідальний редактор	Складанний Д.М., канд. техн. наук, доцент
Рецензент	Джигирей І.М., канд. техн. наук, доцент кафедри штучного інтелекту Навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

При виконанні лабораторних і практичних робіт з дисципліни «Комп'ютерне моделювання процесів і систем» пакет MathCAD є основним інструментом виконання розрахунків. Навчальний посібник призначений для надання студентам спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» допомоги у самостійній роботі з опанування навичок використання пакету прикладних програм MathCAD для розв'язання різноманітних задач моделювання а також інших математичних та технічних розрахунків.

У навчальному посібнику наведені основні теоретичні положення та методичні вказівки з прикладами вирішення найпоширеніших обчислювальних завдань у середовищі MathCAD, завдання для самостійної роботи та перевірки засвоєних знань.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Принципи організації обчислень у середовищі MathCAD	5
1.1. Найбільш поширені версії MathCAD	5
1.2 Інтерфейс MathCAD	5
1.2 Принципи обчислень у MathCAD	9
1.3 Введення і редагування виразу	12
1.4 Розрахунок за формулою.	14
1.5 Задавання діапазону значень	15
1.6 Розрахунок суми, добутку	18
1.7 Визначення функції користувача	18
2 Виконання символічних обчислень у середовищі MathCAD	20
2.1 Принципи символічних обчислень	20
2.2. Виконання алгебраїчних перетворень	23
2.3. Диференціювання та інтегрування	27
3 Деякі операції з матрицями у середовищі MathCAD	31
3.1 Створення матриці	31
3.2 Робота з окремими елементами матриці	34
3.3 Операції з кількома матрицями	38
3.4 Взаємодія MathCAD із зовнішніми файлами даних	40
4 Створення графіків у середовищі MathCAD	43
4.1 Побудова двовимірного графіка	43
4.2. Створення графіків у полярній системі координат	47
4.3. Створення графіків функцій, заданих параметрично	48
4.4. Створення тривимірних графіків	48
5 Вирішення рівнянь у MathCAD	52
5.1 Вирішення алгебраїчних рівнянь	52
5.2 Вирішення звичайних диференціальних рівнянь	57
5.3 Вирішення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	61
6. Завдання для самостійної роботи	64
Завдання № 1. Вивчення інтерфейсу MathCAD та виконання найпростіших обчислень	64
Завдання № 2. Дослідження прийомів роботи з векторами і матрицями в середовищі MathCAD	70
Завдання № 3. Дослідження прийомів введення-виведення даних, аналізу та візуалізації даних у середовищі MathCAD	74
Завдання № 4. Дослідження прийомів реалізації наближених чисельних методів у середовищі MathCAD	78
Список рекомендованої літератури	89

Вступ

Сучасний рівень розвитку обчислювальної техніки розширює можливості використання методів математичного моделювання технологічних об'єктів як при дослідженні так і при проектуванні хіміко-технологічних процесів та систем управління ними для нових виробництв та виробництв, що модернізуються. Оскільки математичні моделі можуть бути представлені лінійними, нелінійними, диференціальними рівняннями, рівняннями у частинних похідних та їх системами, залежно від складності модельованих явищ, необхідно знати та вміти застосовувати чисельні методи та спеціальне програмне забезпечення для їх вирішення.

Метою даного навчального посібника є допомога здобувачам вищої освіти у самостійній роботі з опанування навичок використання пакету прикладних програм MathCAD – системи «комп'ютерної алгебри», орієнтованої на підготовку інтерактивних документів, автоматизацію різноманітних математичних, технічних розрахунків.

Уміщені у посібнику теоретичні відомості та індивідуальні завдання до самостійної роботи призначені для вирішення конкретної навчальної задачі практичного характеру. Індивідуальні завдання до самостійної роботи призначені для поглиблення знань з викладеного курсу, розвитку в здобувачів вищої освіти аналітичного мислення, навичок роботи з технічною літературою і є важливим етапом у засвоєнні навчального матеріалу кредитного модуля.

У навчальному посібнику наведені основні теоретичні положення та методичні вказівки з прикладами вирішення найпоширеніших обчислювальних завдань у середовищі MathCAD, завдання для самостійної роботи.

Теоретична частина даного навчального посібника має довідково-методичний характер і може використовуватися здобувачами вищої освіти як цілком, так і окремими частинами в залежності від конкретної вирішуваною ними в даний момент задачі в процесі подальшого навчання та професійної діяльності.

1 Принципи організації обчислень у середовищі MathCAD

1.1. Найбільш поширені версії MathCAD

MathCAD – це інтегроване середовище, математичний пакет, призначений для виконання фундаментально-математичних, інженерних і наукових розрахунків.

Пакет включає наступні функціональні компоненти: систему меню різних рівнів вкладеності; контекстно-залежні меню; набір панелей інструментів; текстовий редактор; редактор формул; редактор графіків (включаючи тривимірні); обчислювальну систему, що полегшує виконання математичних операцій, як у чисельному, так і в аналітичному (символьному) вигляді; набір шаблонів, що забезпечують зручну й ефективну систему введення інформації; систему перевірки правильності написання математичних виразів; вбудовану систему виведення результатів розрахунку.

Версії MathCAD в зв'язку із поступовим зростанням функціонального інструментарію, мають обмежену зворотну сумісність документів із попередніми версіями, але можуть у більшості випадків відкривати документи, створені у старих версіях.

В сучасній практиці, в залежності від вимог до програми та наявних обчислювальних потужностей найчастіше використовуються версії MathCAD 15, MathCAD Prime 5-8.

На відміну від MathCAD 15 (і попередніх версій), у MathCAD Prime розробниками принципово змінено інтерфейс користувача. Тепер він виконаний у вигляді стрічок (ribbons), робочий документ представлено у вигляді аркушів, як у текстових редакторах.

Найновіша нині версія MathCAD – MathCAD Prime 8.0, була представлена у грудні 2021 року.

1.2 Інтерфейс MathCAD

Після запуску системи MathCAD на екрані з'являється вікно програми. Програма MathCAD Prime поєднує традиційний функціонал попередніх версій MathCAD та сучасне компонування інтерфейсу (рис. 1.1), базується на використанні стрічки (ribbon) як у Microsoft Office (починаючи з версії 2007).

Кнопка **PTC MathCAD Prime** міститься в рядку заголовка і містить такі елементи:

- Створити (New), Відкрити (Open), Зберегти (Save), Зберегти як (Save As), Закрити (Close) – команди для роботи з файлами.
- Друк (Print) – команда для друку поточного документа.
- Опції (Options) – відкриває діалогове вікно Опції PTC MathCAD (PTC MathCAD Options) та надає доступ до вкладок Ліцензія (License) та Опції (Options).
- Про програму (About) – відкриває діалогове вікно Про програму PTC MathCAD Prime (About PTC MathCAD Prime) з інформацією про продукт,

версію, мовне налаштування та посилання на документ із захисту авторського права.

- Вихід (Exit) – вихід із PTC MathCAD Prime, якщо не потрібне збереження жодного з відкритих документів. Інакше відкривається вікно запиту з опцією, яка дозволяє зберегти або не зберігати кожний незбережений документ.
- Нещодавно використовувані документи (Recently Used Worksheets) – список останніх документів, що використовуються.

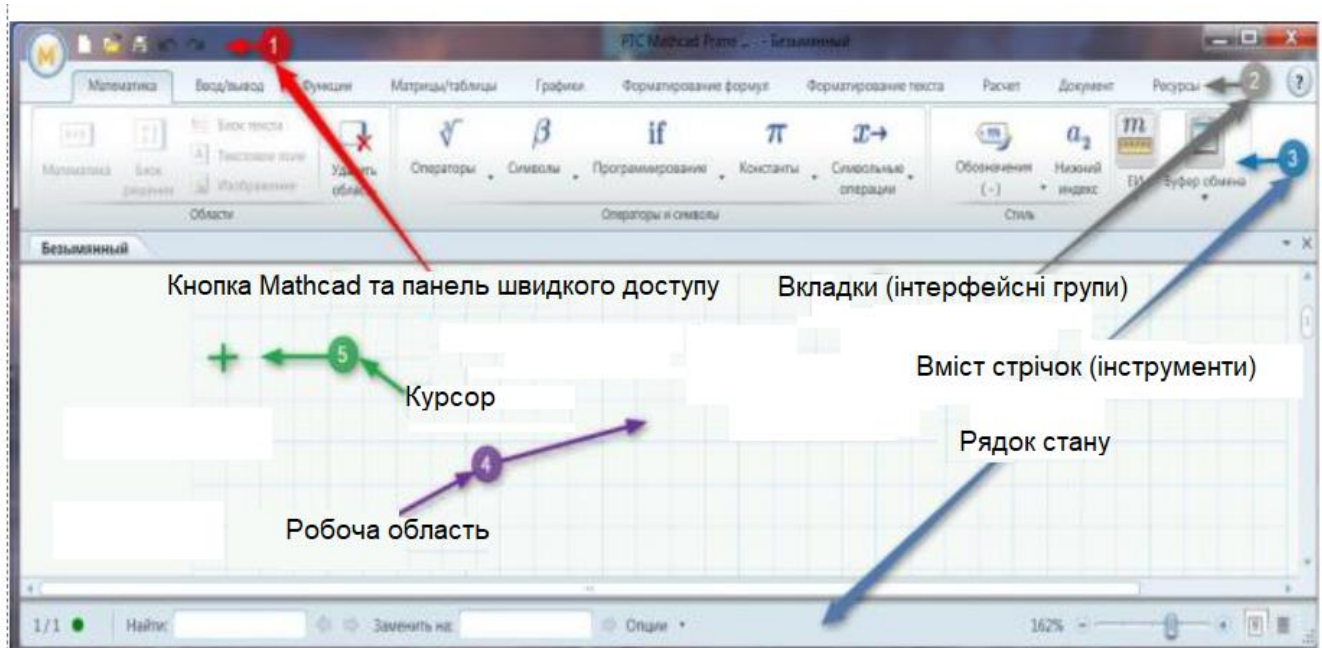
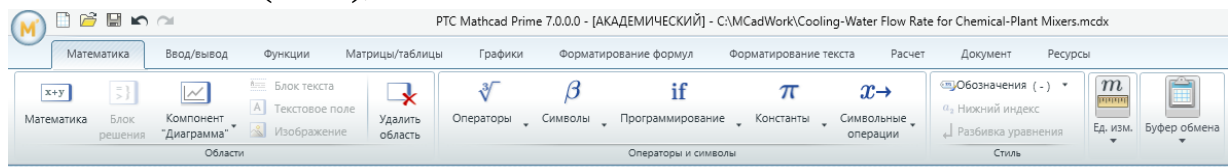


Рисунок 1.1 – Інтерфейс програми MathCAD Prime

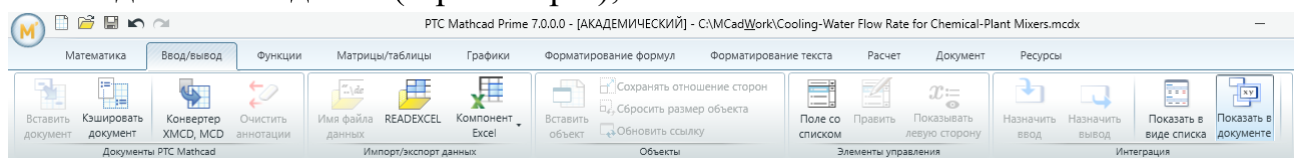
Стрічка, як і в інших сучасних програмах, складається з вкладок (інтерфейсних груп), на яких згруповані відповідні команди. На вкладках Стрічки відображаються кнопки, призначені для виконання тих чи інших команд, причому багато кнопок зібрані в контекстно-залежні меню.

MathCAD Prime містить такі вкладки:

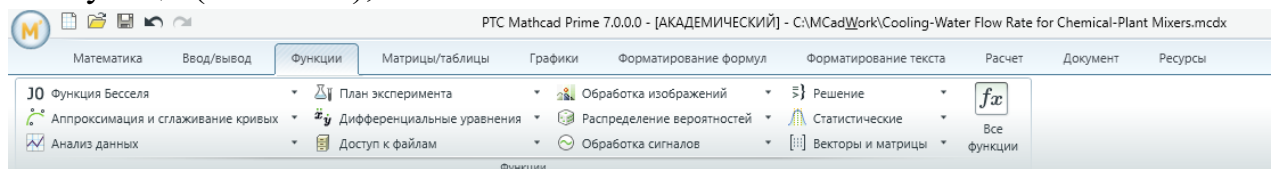
– Математика (Math);



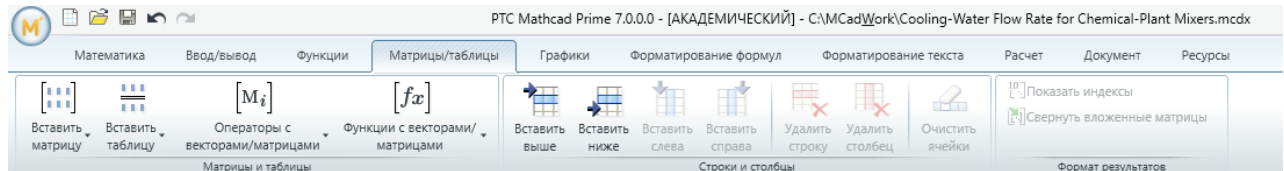
– Введення/виведення (Input/Output);



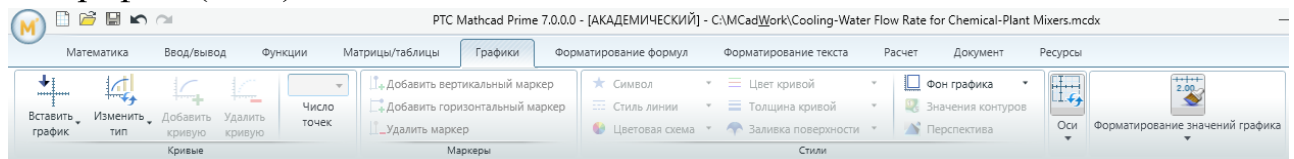
– Функції (Functions);



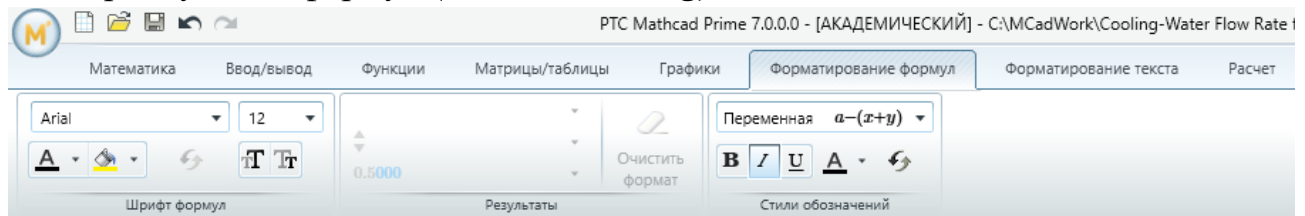
– Матриці/таблиці (Matrices/Tables);



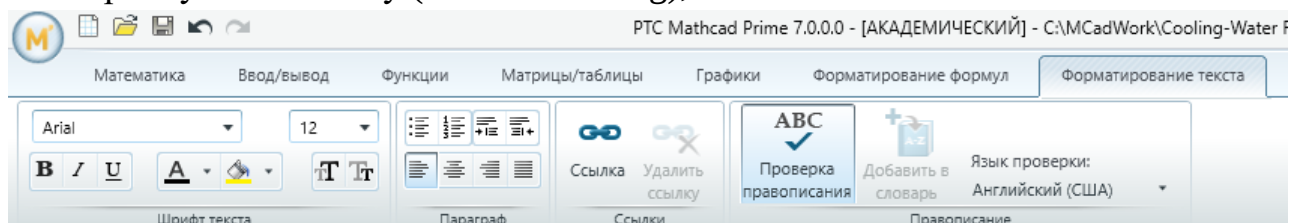
– Графіки (Plots);



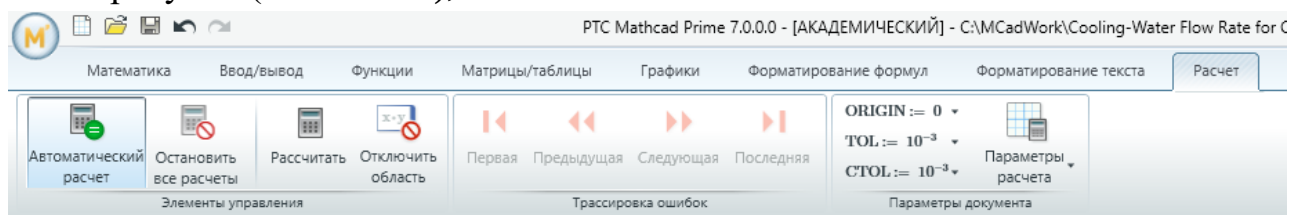
– Форматування формул (Math Formatting);



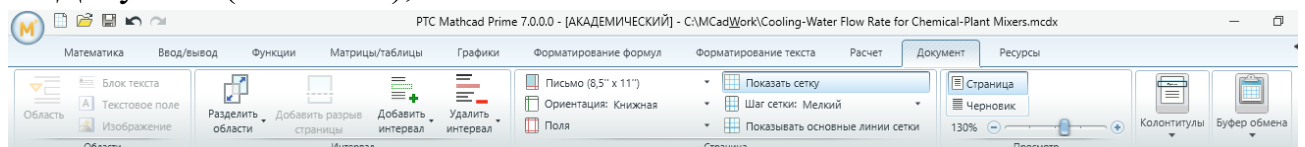
– Форматування тексту (Text Formatting);



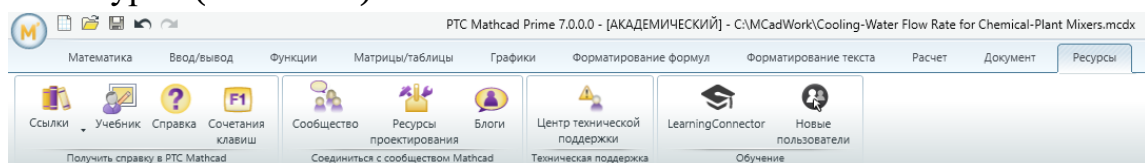
– Розрахунок (Calculation);



– Документ (Document);



– Ресурси (Resources)



Стрічку можна приховати, залишивши на екрані одні вкладки (що грають роль заголовків меню). Для цього слід клацнути правою кнопкою миші десь в області Стрічки і вибрати в контекстному меню команду Згорнути стрічку. Аналогічно для повторного розгортання Стрічки достатньо в тому ж меню вибрати команду Розгорнути стрічку.

Ще один характерний елемент стрічкового інтерфейсу – панель швидкого доступу, призначена для швидкого здійснення найбільш частих операцій. За замовчуванням вона містить кілька кнопок, але може бути доповнена іншими командами. Щоб додати нову кнопку на панель швидкого доступу:

1. Відкрийте на Стрічці інтерфейсну групу, що містить потрібну кнопку.
2. Викличте з області кнопки контекстне меню.

3. Оберіть пункт Додати до панелі швидкого доступу. У результаті нова кнопка з'явиться на панелі швидкого доступу

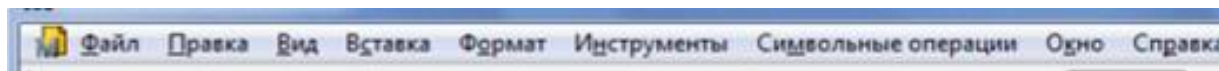
Щоб приховати кнопку з панелі швидкого доступу, достатньо викликати з області цієї кнопки контекстне меню та вибрати команду Видалити з панелі швидкого доступу.

Розглянемо також елементи вікна Mathcad попередніх версій (до версії 15 включно).

Mathcad попередніх версій має ієрархічну систему меню, що складається з головного меню і системи спадаючих, спливаючих і контекстно-залежних меню (підменю).

- **Головне меню**

Головне меню – це набір пунктів для виклику спадаючих меню, розташований у другому рядку робочого столу системи.

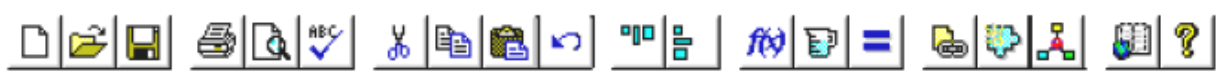
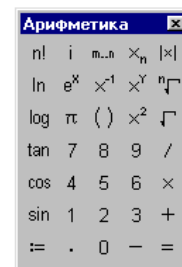


- **Панелі інструментів**

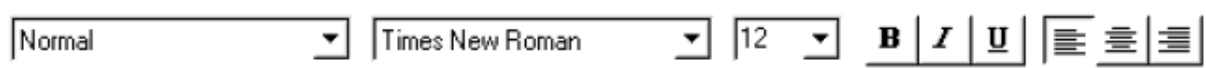
Панелі інструментів значною мірою дублюють команди головного меню.



Математична панель (Math) надає можливість швидкого введення математичних операторів. При натисканні кнопок на панелі ви одержите палітри (підпорядковані панелі інструментів) для вибору конкретних операторів. При натисканні на символ відповідного оператора на панелі інструментів він переноситься у ваш робочий аркуш.



Стандартна панель інструментів (Standard) надає можливість швидкого виконання багатьох схожих для більшості програм процедур, таких як відкриття нового або існуючого робочого аркушу, його збереження та друкування, редагування, перевірка правопису тощо.



Панель форматування (Formattaing) дозволяє здійснювати оформлення робочого аркуша системи MathCAD, зокрема, обирати шрифти для тексту та математичних виразів або стилів.

Панель навігації в електронній книзі MathCAD з'являється завжди, коли відкривається електронна книга.



Ви можете знайти відповідний розділ або тему, що цікавлять вас, переміститися до попереднього, наступного аркушів книги.

1.2 Принципи обчислень у MathCAD

Робота з системою MathCAD зводиться до підготовки у вікні редагування завдання на обчислення та встановлення форматів для їх результатів. У даному вікні математичні вирази вводяться у вигляді, у якому зазвичай записуються інженерами на аркуші паперу.

MathCAD інтегрує у собі три редактори: формульний, текстовий та графічний. Текстові блоки дозволяють створювати у документі пояснення, тобто робити документ MathCAD більш зрозумілим. Для введення тексту необхідно клацнути в документі місце вставки тексту, яке позначиться синім перехрестям. Текст можна вставити у вигляді:

- текстового блоку, який розтягується по ширині сторінки, та її область не перекривається з іншими областями документа;
- текстового поля із змінною шириною, яке можна переміщати за документом, і може перекриватися іншими областями.

Обидві команди знаходяться на вкладці Математика (Math) у групі Області (Regions). Після введення або вставки через буфер обміну тексту натисніть клавішу Enter для переміщення на новий рядок або натисніть за межами текстової області для припинення набору тексту. Якщо змінити налаштування стилю шрифту та абзацу, задані на вкладці Форматування (Formatting) у групах Шрифт (Font) та Параграф (Paragraph), то вони будуть застосовуватися або до виділених, або до всіх нових текстових областей у документі.

Для вставки в документ зображення необхідно вибрати команду на вкладці Математика у групі Області та вибрати зображення у вікні Відкрити.

Клацнувши в документі будь-де, можна ввести математичні вирази (цифри, літери та математичні оператори).

В результаті створюється область формул. Для введення формули також можна вибрати команду Математика на вкладці Математика в групі Області.

Перш ніж, починати роботу з MathCAD необхідно пам'ятати такі правила:

1. Усі обчислення, оголошення змінних проводяться в строго визначеному порядку, за правилом *зверху вниз і зліва направо*.

2. Набір формул проводиться за тими же принципами, як і в редакторі формул Microsoft Word, тобто за допомогою шаблонів формул.

Алфавіт системи MathCAD містить: рядкові і прописні латинські і грецькі літери; арабські цифри від 0 до 9; системні змінні; оператори; імена вбудованих функцій; спецзнаки; рядкові та прописні букви кирилиці (при роботі з русифікованими документами); укрупнені елементи мови: типи даних, оператори, функції користувача і керуючі структури. До типів даних відносяться числові константи, звичайні і системні змінні, масиви (вектори і матриці) і дані файлового типу.

Числові константи задаються за допомогою арабських цифр, десяткового дробу (а не комою) і знака – (мінус). Наприклад: 123 – цілочисельна десяткова константа;

12.3 – десяткова константа з дробовою частиною;

12.3 * 10.5 – десяткова константа з мантиси (12.3) і порядком 5.

Знак множення * при виведенні числа на екран змінюється на звичну математикам точку, а операція піднесення до ступеня (із застосуванням спецзнаку ^) відображається шляхом подання порядку у вигляді надрядкового елемента.

Більшість обчислень система виконує як з дійсними, так і з комплексними числами, які зазвичай подаються в алгебраїчному вигляді:

$$Z = \text{Re}Z + i * \text{Im}Z$$

або

$$Z = \text{Re}Z + j * \text{Im}Z$$

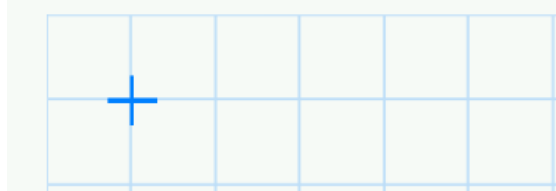
Тут $\text{Re}Z$ – дійсна частина комплексного числа Z , $\text{Im}Z$ – його уявна частина, а символи i чи j позначають уявну одиницю, тобто корінь квадратний з -1 . Таке уявлення характерно і для системи MathCAD (за винятком того, що знак рівності не є знак присвоювання). Перед використанням будь-яких операцій з комплексними числами, корисно спочатку визначити i або j як уявну одиницю (тобто присвоїти їм значення квадратного кореня з -1).

Імена змінних (ідентифікатори) в системі MathCAD можуть мати практично будь-яку довжину, і в них можуть входити будь-які латинські і грецькі літери, а також цифри. Однак починатися вони можуть тільки з букви, наприклад: x , x_1 , α , X , coordinate . Крім того, ідентифікатор не повинен містити пробілів.

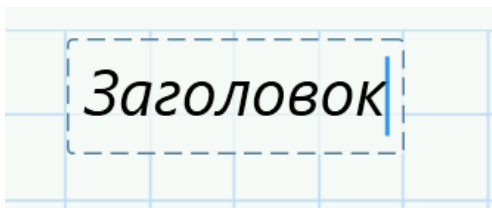
Слід пам'ятати, що рядкові і прописні літери в іменах різняться! Ім'я не повинно збігатися з іменами вбудованих функцій.

Для набору $+i$ – використовуються відповідні клавіші клавіатури. Розподіл набирається клавішею $/$.

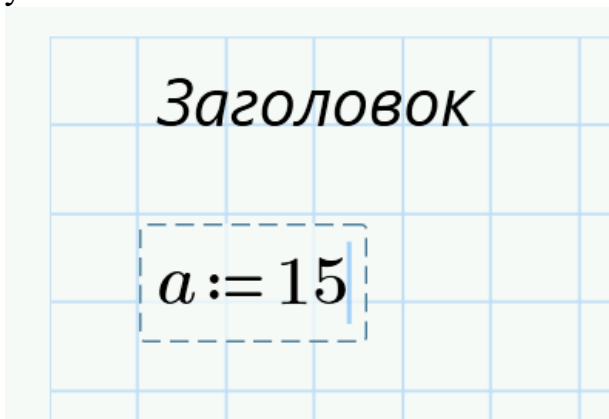
Після входу в MathCAD на екрані з'являється блакитний хрестик (візир), який позначає місце, де проводитиметься запис.



При введенні будь-якого символу на місці хрестика з'являється пунктирна рамка – шаблон.



При переході до наступного запису перший шаблон зникає. Якщо підвести курсор до запису без шаблону і натиснути на клавішу миші, шаблон з'явиться знову.



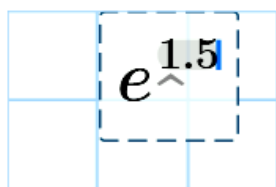
Видалення записів в MathCAD можна робити декількома способами.

1. Для видалення одного або кількох виразів одночасно можна, натиснувши ліву кнопку миші, обвести весь вираз, що видаляються, і потім натиснути **del** або **backspace**.

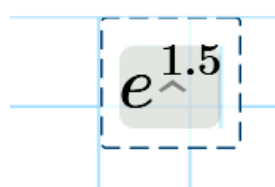
2. Для видалення одного виразу можна, підвівши курсор до виразу, активізувати його і, пересунувши куточок в крайнє праве положення, натиснути **del**.

3. Для видалення одного виразу можна також, підвівши до нього курсор, активізувати його, а потім виділити («зачорнити») і натиснути **del**.

Велику роль при наборі чисел відіграє розташування курсора та області виділення (на рис. 1.2 – вертикальна риска та «виділення»). Наприклад, якщо курсор та виділення розташовані, як показано на рис. 1.2, а, то будь-які знаки операцій (додавання, віднімання і т.п.) будуть додаватися до показника ступеня; якщо ж курсор та виділення розташовані, як показано на рис. 1.2, б, то вони будуть додаватися до *всього виразу*.



а)



б)

Рисунок 1.2 – Розташування курсора

В інтегрованому середовищі MathCAD є низка вбудованих математичних і системних сталих (табл. 1.1 та табл. 1.2).

Таблиця 1.1 – Деякі математичні константи, що використовуються в системі MathCAD

Стала	Призначення
∞	Системна нескінченність (10^{307})
π	Число π (3.14...)
e	Основа натурального логарифма (2.71...)
i	Уявна одиниця
j	Уявна одиниця
%	Відсоток (0.01)

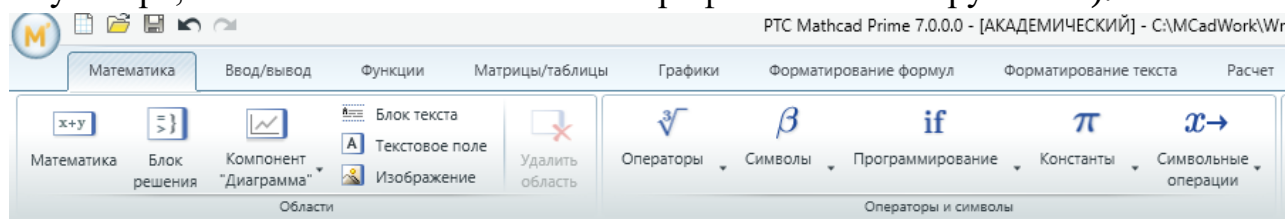
Таблиця 1.2 – Деякі системні сталі, що використовуються в системі MathCAD

Стала	Значення	Призначення
TOL	0.001	Похибка чисельних методів
ORIGIN	0	Нижня границя індексації
PRNPRECISION	4	Кількість значимих цифр у функції
PRNCOLWIDTH	8	Кількість десяткових знаків у стовпчику

1.3 Введення і редагування виразу

Хоча MathCAD призначений для складних математичних обчислень, його легко можна використовувати і для *найпростіших розрахунків*.

Для того, щоб виконати найпростіші розрахунки, можна ввести символи, константи та знаки операцій з клавіатури, а також скористатися інструментами групи Оператори та символи вкладки Математика (у старших версіях програми – на панелі меню «Математика» натиснути лівою клавішею миші на піктограму калькулятора, після чого з'явиться панель арифметичних інструментів).



Принципи роботи з формулами в MathCAD подібні принципам роботи редактора формул у Microsoft Word, однак, існує особливість: після того, як формула була набрана і після неї був поставлений знак обчислення (=), система MathCAD відразу ж обчислює вираз.

Ключовим кроком в редагуванні виразів в MathCAD є розміщення відповідної частини виразу у виділяючу рамку.

Наприклад, треба ввести вираз $\frac{x - 3 \cdot a^2}{-4 + \sqrt{y+1}}$

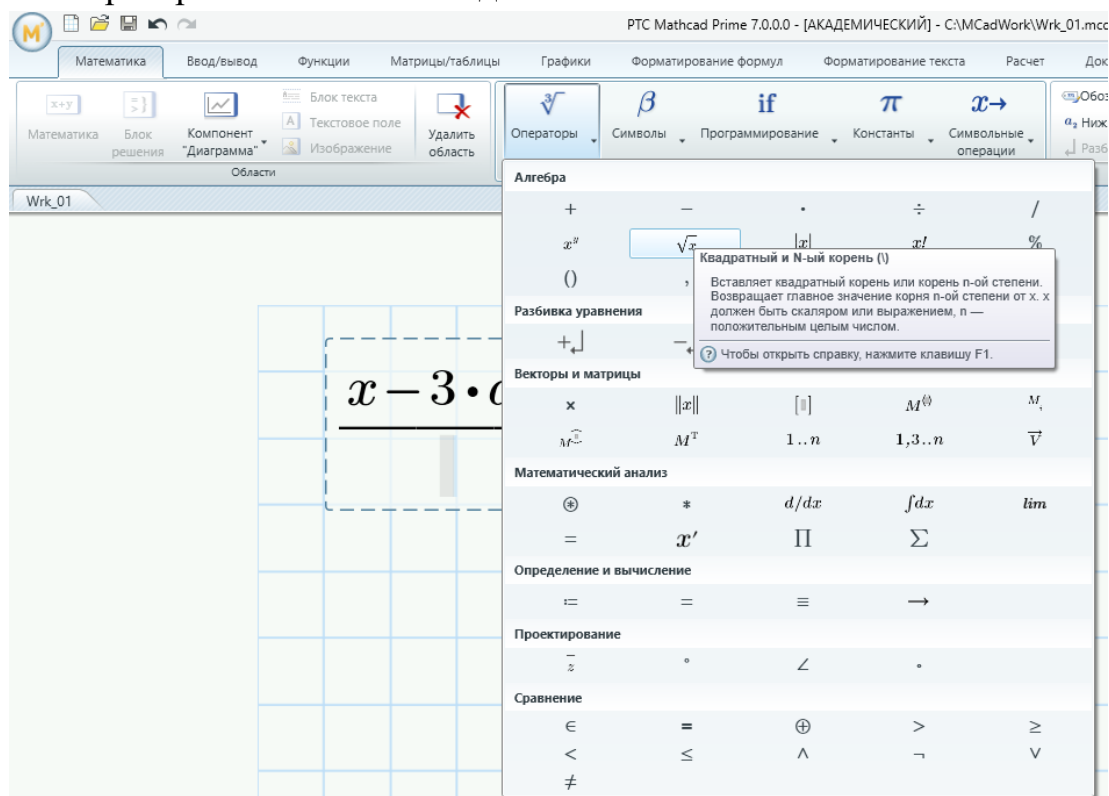
- Надрукуйте $x-3 \cdot a^2$.

До цих пір правила старшинства дозволяли нам просто друкувати символи підряд, далі так продовжувати не можна, оскільки маркер введення знаходиться на 2, і тільки 2 потрапить у чисельник, якщо натиснути /. Оскільки потрібно, щоб вираз $x-3 \cdot a^2$ цілком став чисельником, слід використовувати виділяючу виділення.

- Щоб виділити весь вираз $x-3 \cdot a^2$, послідовно натисніть [Space]. Натисніть [Space] ще три рази, щоб рамка охопила вираз цілком.

- Натисніть /, щоб створити дріб.

- Тепер надрукуйте -4+ і клацніть на кнопці, поміченій $\sqrt{}$ у меню Оператори групи Оператори і символи вкладки Математика.



Потім надрукуйте під радикалом $y+1$, щоб завершити введення знаменника.

$$\frac{x - 3 \cdot a^2}{-4 + \sqrt{y + 1}}$$

Примітка: Будь-який введений вираз (формула, рівняння тощо) повинний записуватися **всередині одного шаблону**. Нижче наведено вираз, уведений з помилкою: усередині першого шаблону знаходиться незакінчений вираз «х-»:

$$x - (a + b)^2$$

1.4 Розрахунок за формулою.

Щоб визначити будь-яку змінну, необхідно:

- Надрукувати ім'я змінної, яку необхідно визначити
- Надрукувати двокрапку, щоб ввести *символ присвоєння*.
- Надрукувати значення, що присвоюється змінній. Значення може бути числом або поєднанням чисел і змінних.

Наприклад, для того, щоб визначити змінні t і acc потрібно:

- ☐ Ввести t : (символ t супроводжується двокрапкою). MathCAD показує символ присвоєння $:=$

Для визначення змінних та функцій використовується **оператор «присвоєння»** (позначається двома символами ":=") , який можна вибрати на вкладці Математика в панелі Оператори або ввести з клавіатури, натиснувши клавішу «двокрапка». Праворуч від знака визначення може стояти або числове значення, або вираз, що обчислюється.

$$t :=$$

- ☐ Надрукувати, наприклад, 10 в порожньому полі, щоб завершити визначення t .

$$t := 10$$

- ☐ Аналогічні дії виконати для змінної acc

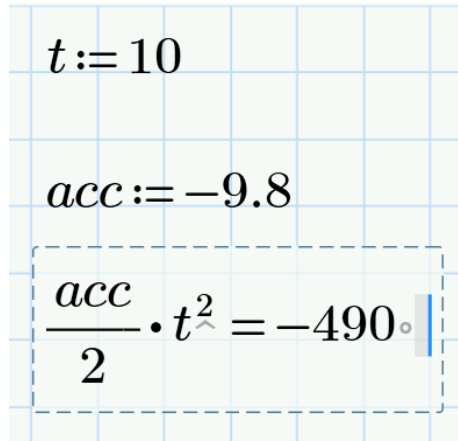
$$t := 10$$

$$acc := -9.8$$

Тепер коли змінні визначені, їх значення можуть бути використані в інших виразах.

- ❑ Помістити покажчик миші на декілька рядків нижче за два попередні визначення
- ❑ Надрукувати, наприклад, $acc/2 * t^2[Space]$
- ❑ Натиснути знак $=$.

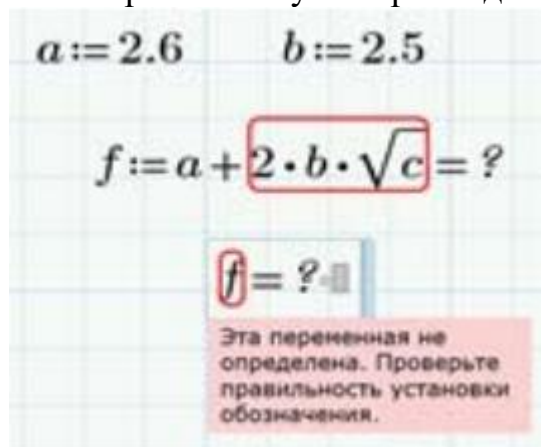
Оператор Обчислення (позначається символом " $=$ ") повертає результат обчислення виразу, що знаходиться зліва від нього



The screenshot shows a MathCAD worksheet with a grid background. At the top, the variable t is assigned the value 10: $t := 10$. Below that, the variable acc is assigned the value -9.8: $acc := -9.8$. A dashed rectangular box highlights the calculation $\frac{acc}{2} \cdot t^2 = -490$. The cursor is positioned at the end of the expression.

Примітка. Оператор присвоєння не повертає значення змінної на відміну оператора обчислення « $=$ ». Проте в одному рядку можна поєднувати спочатку оператор присвоєння, а потім праворуч від обчислюваного виразу – оператор обчислення.

Слід також пам'ятати, що змінні, які входять у вираз, що обчислюється, повинні бути раніше визначені (або вище, або лівіше у вікні редагування). Інакше з'явиться повідомлення про помилку. Наприклад:



The screenshot shows a MathCAD worksheet. At the top, variables a and b are assigned values: $a := 2.6$ and $b := 2.5$. Below them, the expression $f := a + 2 \cdot b \cdot \sqrt{c} = ?$ is entered. The variable c is not defined. A red box highlights the variable c in the expression. Below the expression, a red error message box appears with the text: "f = ?" and "Эта переменная не определена. Проверьте правильность установки обозначения." (This variable is not defined. Check the correctness of the notation setting).

1.5 Задавання діапазону значень

Можна присвоїти змінній діапазон значень, наприклад, всі цілі числа від 0 до 10. Якщо у виразі присутня така змінна (дискретний аргумент), MathCAD обчислює вираз стільки разів, скільки значень містить дискретний аргумент.

Оператор діапазону може бути введений у документ, натиснувши двічі на клавішу «точка», а також вибраний на вкладці стрічки Математика в групі Оператори та символи на панелі Оператори.

Для завдання найпростішого варіанта діапазону (крок змінюється на одиницю) використовується така конструкція:

Ім'я змінної діапазону := Nпоч .. Nкін

де Nпоч – початкове значення змінної;

Nкін - кінцеве значення змінної.

Якщо Nпоч < Nкін, то крок зміни змінної дорівнює +1, а якщо Nпоч > Nкін, то крок зміни змінної дорівнює –1.

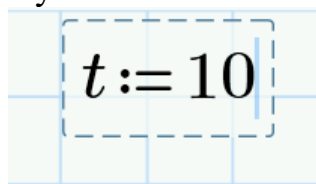
Крок зміни можна задати будь-яким, використовуючи іншу конструкцію завдання таких змінних:

Ім'я змінної діапазону := Nпоч, Nслід .. Nкін,

де Nслід – наступне за Nпоч значення змінної. Крок у разі дорівнює Nслід – Nпоч.

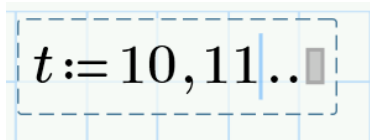
Приклад. Для того, щоб обчислити вираз для діапазону значень, спочатку слід визначити дискретний аргумент. Наприклад треба обчислити результати для діапазону значень t від **10** до **20** з кроком **1**. Це робиться таким чином:

- ❑ Присвоїти початкове значення t . Показчик введення повинен з'явитись услід за **10**, як показано на малюнку.



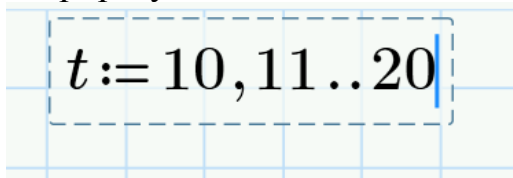
$t := 10$

- ❑ Надрукувати кб11ому та **11**. Ця дія визначає наступне число в діапазоні як **11**.



$t := 10, 11 ..$

- ❑ Надрукуйте після двох крапок **20**, щоб визначити останнє число в діапазоні як **20**. (у старших версіях MathCAD необхідно увести з клавіатури символ крапки з комою, що інтерпретується як два символи точки підряд).



$t := 10, 11 .. 20$

- ❑ Після клацання мишею поза рівністю для t MathCAD обчислює його для всіх значень t , що входять в діапазон (в нашому випадку – одинадцять значень). Вони відображаються в таблиці, як показано на рис. 1.3-а (старші версії MathCAD) та 1.3-в (MathCAD Prime).

$t := 10, 11 \dots 20$	
$acc := -9.8$	
$\frac{acc \cdot t^2}{2}$	
-490	
-592.9	
-705.6	
-828.1	
-960.4	
$-1.103 \cdot 10^3$	
$-1.254 \cdot 10^3$	
$-1.416 \cdot 10^3$	
$-1.588 \cdot 10^3$	
$-1.769 \cdot 10^3$	
$-1.96 \cdot 10^3$	

а

$t := 10, 11 \dots 20$	
$acc := -9.8$	
$d(t) := 1600 + \frac{acc}{2} \cdot t^2$	
$d(t)$	
$1.11 \cdot 10^3$	
$1.007 \cdot 10^3$	
894.4	
771.9	
639.6	
497.5	
345.6	
183.9	
12.4	
-168.9	
-360	

б

$t := 10, 11 \dots 20$		$acc := -9.8$	
		$\frac{acc}{2} \cdot t^2 =$	
		-490	
		-592.9	
		-705.6	
		-828.1	
		-960.4	
		$-1.103 \cdot 10^3$	
		$-1.254 \cdot 10^3$	
		$-1.416 \cdot 10^3$	
		$-1.588 \cdot 10^3$	
		$-1.769 \cdot 10^3$	
		$-1.96 \cdot 10^3$	

в

$t := 10, 11 \dots 20$		$acc := -9.8$	
		$d(t) := 1600 + \frac{acc}{2} \cdot t^2$	
		$d(t) =$	
		$1.11 \cdot 10^3$	
		$1.007 \cdot 10^3$	
		894.4	
		771.9	
		639.6	
		497.5	
		345.6	
		183.9	
		12.4	
		-168.9	
		-360	

г

Рисунок 1.3 – Приклади використання діапазонів

1.6 Розрахунок суми, добутку

Для знаходження суми, твори членів ряду слід на вкладці стрічки Математика групи Оператори та символи (Operators and Symbols) розкрити панель Оператори, знайти відповідну піктограму та натиснути ліву клавішу миші. В результаті на поле документа виведеться шаблон цієї операції (рис. 1.4.)

Після заповнення відповідних позицій шаблону та введення символу «=» отримаємо результат, наприклад:

$$\prod_{x=1}^{20} \left(\sin(x) \cdot \frac{e}{x} \right) = -2.628 \cdot 10^{-15}$$

У прикладі вище константа $e = 2,7$ у чисельнику дробу вводиться зі списку Константи (Constants) групи Оператори та символи на вкладці Математика.

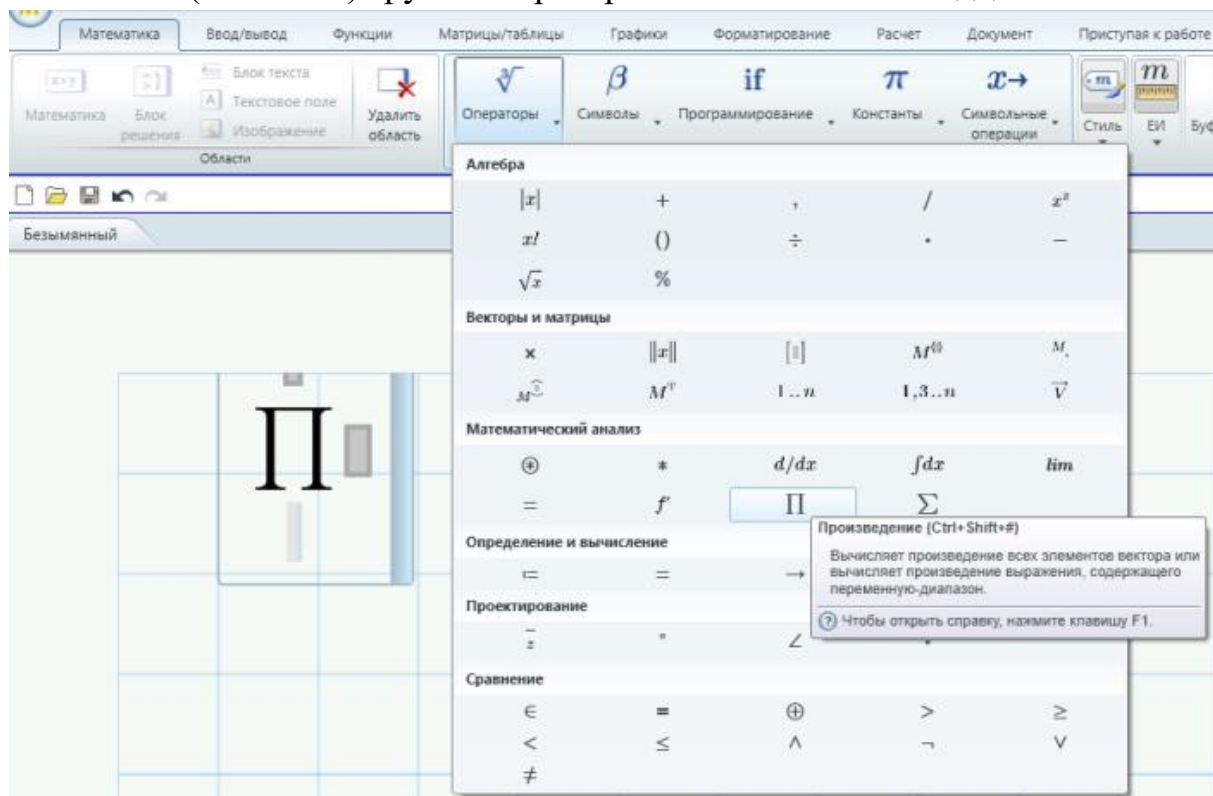


Рисунок 1.4 – Вставлення у документ місцезаповнювача добутку

1.7 Визначення функції користувача

- ❑ Почніть визначення функції користувача **d(t)**, надрукувавши **d(t):**
- ❑ Надрукуйте вираз **1600+acc/2 [Space] *t^2 [Enter]**

$$d(t) := 1600 + \frac{acc}{2} \cdot t^2$$

Визначення користувацької функції завершено. Ім'я функції – **d**, аргумент функції – **t**. Можна використовувати цю функцію, щоб обчислити значення

виразу – її правій частині – для довільних значень **t**. Для цього потрібно підставити замість **t** відповідне число.

Наприклад: $d(12.5) = 834.375$

Тобто, щоб обчислити значення **d** для значення **t = 12,5** досить надрукувати **d(12.5) =**.

MathCAD поверне відповідне значення, як показано на малюнку вище.

Щоб обчислити функцію для кожного значення **t** з діапазону, визначеного раніше, досить клацнути мишею внизу інших рівнянь і ввести **d(t) =**.

MathCAD виведе таблицю значень – рис. 1.3, б (старші версії MathCAD) та 1.3, г (MathCAD Prime). Слід зауважити, що перші два із значень записані в експоненціальному вигляді.

2 Виконання символьних обчислень у середовищі MathCAD

Розрахунки у MathCAD можуть здійснюватися як числовій формі (результатом є число або сукупність чисел), так і в аналітичній формі (результатом є сукупність змінних, математична залежність, тощо).

Система MathCAD забезпечена спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Він дозволяє вирішити багато задач математики аналітично, без застосування чисельних методів і, відповідно, без помилок обчислень. В результаті, MathCAD дозволяє проводити широкий спектр аналітичних перетворень, таких як алгебраїчні і матричні операції, основні дії математичного аналізу і розрахунки інтегральних перетворень функцій.

Вирази у символьних розрахунках обчислюються за допомогою оператора аналітичного перетворення ($\rightarrow$) замість оператора чисельного обчислення ($=$). Стандартні оператори MathCAD та багато вбудованих функцій можна обчислювати аналітично.

Використання аналітичних перетворень виразів має такі переваги.

- На відміну від числових обчислень, символьні операції дозволяють обчислювати вирази без присвоєння значень змінним.
- Символьні результати можуть виявляти взаємозв'язки змінних, які завжди очевидні з чисельних результатів.
- Символьні розрахунки вільні від помилок округлення, притаманних чисельним розрахункам.

2.1 Принципи символьних обчислень

Для символьних обчислень у MathCAD Prime призначено меню Символьные операции групи Операторы и символы вкладки Математика:

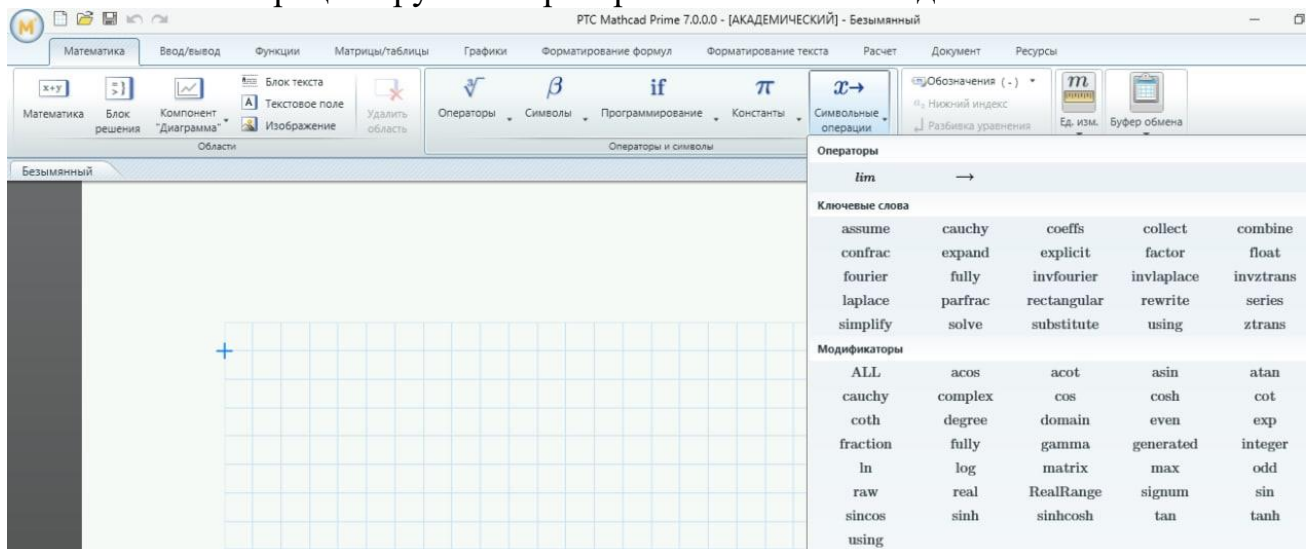
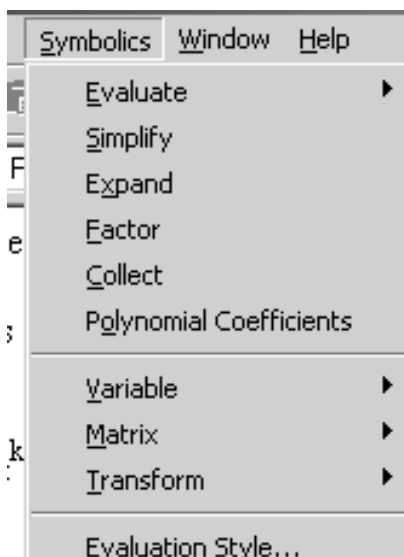


Рисунок 2.1 – Меню Символьные операции группы Операторы и символы вкладки Математика (MathCAD Prime)

Для символьних обчислень у старших версіях MathCAD призначено меню **Symbolics** (Символіка), що об'єднує математичні операції, які MathCAD



вміє виконувати аналітично. Також (паралельно, в якості іншого способу) для символьних обчислень у старших версіях MathCAD можуть бути використані інструменти, придатні для чисельних обчислень (наприклад, панелі **Calculator**, **Evaluation** і т. д.), і спеціальна математична панель інструментів, яку можна викликати на екран натисненням кнопки **Symbolic Keyword Toolbar** (Панель символіки) на панелі **Math** (Математика). На панелі **Symbolic** (Символіка) знаходяться кнопки, що відповідають специфічним командам символьних перетворень. Наприклад, таким як розкладання виразу на множники, розрахунок перетворення Лапласа і іншими операціями, які в MathCAD не можна проводити чисельно, і для яких, відповідно, не передбачені вбудовані функції.

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні вироблятися, тобто треба виділити вираз. Для ряду операцій варто не тільки вказати вираз, до якого вони ставляться, але й намітити змінну, щодо якої виконується та або інша символьна операція. Сам вираз в такому випадку не виділяється.

Таким чином, для виконання операцій із символьним процесором потрібно виділити об'єкт (цілий вираз або його частину).

2.1.1. Виконання обчислень з використанням меню (версії MathCAD 15 і раніші)

Якщо в документі є виділений вираз, то з ним можна виконувати різні операції, представлені нижче:

- **Evaluate** (Розрахунки) – перетворити вираз з вибором виду перетворень із підменю;
- **Simplify** (Спростити) – спростити виділений вираз із виконанням таких операцій, як скорочення подібних що складають, приведення до загального знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і т. д.;
- **Expand** (Розширити) – розкрити вираз. Наприклад, для $(X + Y)(X - Y)$ одержуємо $X^2 - Y^2$;
- **Factor** (Фактор) – розкласти число або вираз на множники. Наприклад, $X^2 - Y^2$ дасть $(X + Y)(X - Y)$;
- **Collect** (Подібні) – звести подібні, зібрати доданки, подібні до виділеного виразу, що може бути окремої змінної або функцією зі своїм аргументом (результатом буде вираз, поліноміальне щодо обраного виразу);
- **Polynomial Coefficients** (Коефіцієнти полінома) – по заданій змінній знайти коефіцієнти полінома, що апроксимує вираз, у якому ця змінна використана.

Розглянемо приклад: розкладання на співмножники виразу $\sin(2-x)$.

Перший спосіб (за допомогою меню).

1. Введіть вираз $\sin(2-x)$.
2. Виділіть потрібну для перетворення частину виразу (у даному випадку – вираз цілком).
3. Виберіть у головному меню пункти **Symbolics / Expand** (Символіка / Розкласти).

Після цього результат розкладання виразу з'явиться трохи нижче у вигляді ще одного рядка.

$$\sin(2-x)$$

$$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Для ряду операцій треба знати, щодо якої змінної вони виконуються. У цьому випадку необхідно виділити змінну, установивши на ній маркер уведення. Після цього стають доступними наступні операції підміню **Змінні**:

- **Обчислити** – знайти значення виділеної змінної, при яких утримуючий її вираз стає рівним нулю;
- **Заміна** – замінити зазначену змінну вмістом буфера обміну;
- **Диференціали** – диференціювати вираз, що містить виділену змінну, по цій змінній (інші змінні розглядаються як константи);
- **Інтеграція** – інтегрувати весь вираз, що містить змінну, по цій змінній;
- **Розкласти на складові...** – знайти кілька членів розкладання виразу в ряд Тейлора щодо виділеної змінної;
- **Перетворення в частки** – розкласти на елементарні дроби вираз, що розглядається як раціональний дріб щодо виділеної змінної.

Операції з виділеними матрицями (**Matrix**). Операції з виділеними матрицями представлені позицією підміню **Матриці**, що має своє підменю з наступними операціями:

- **Транспонування** – одержати транспоновану матрицю;
- **Інвертування** – створити зворотну матрицю;
- **Визначник** – обчислити детермінант (визначник) матриці.

Результати символьних операцій з матрицями часто виявляються надмірно громіздкими й тому погано доступні для огляду.

2.1.2. Виконання обчислень з використанням оператора символьного виводу

Оператор символьного обчислення (symbolic evaluation) позначається символом $\rightarrow$ і в більшості випадків застосовується так само, як оператор чисельного виводу, однак внутрішня різниця між дією цих двох операторів величезна. Якщо чисельний вивід – це розрахунок за формулами і чисельним методом, то символьний вивід – результат роботи системи штучного інтелекту, вбудованого в MathCAD, який має назву символьного процесора.

Етапи символьного обчислення математичного виразу:

1. Введіть потрібний вираз.

2. Введіть оператор символічного виводу за допомогою меню Символьные операции групи Операторы и символы вкладки Математика – рис. 2.1 (у старших версіях програми – за допомогою панелі інструментів Symbolic – рис. 2.2).

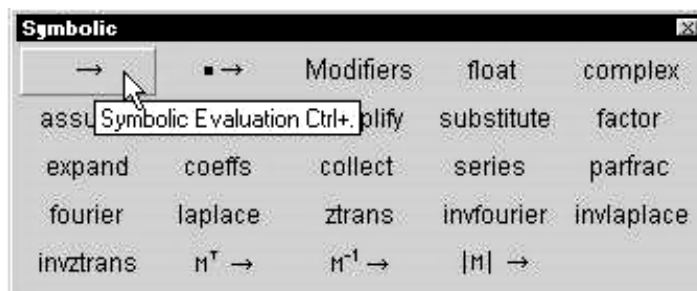


Рисунок 2.2 – Панель інструментів Symbolic (MathCAD 15 та раніше)

3. Після цього праворуч від символу оператора символічного виводу з'явиться аналітичне значення виразу, як показано нижче на прикладах.

$$B \cdot \sin(a \sin(C \cdot x)) \rightarrow B \cdot C \cdot x$$

$$x^2 \cdot \cos(x + y) \rightarrow x^2 \cdot \cos(x + y)$$

$$f(x) := x^2 \cdot \cos(x + 5)$$

$$f(3) = -1.31$$

$$f(3) \rightarrow 9 \cdot \cos(8)$$

$$f(x) := x^2 \cdot \cos(x + 5)$$

$$a := f(3)$$

$$a \rightarrow 9 \cdot \cos(8)$$

$$a = -1.31$$

Слід пам'ятати, що для символічного виводу не потрібно попередньо визначати змінні, які входять в ліву частину виразу. Якщо ж змінним були привласнені раніше деякі значення, символічний процесор просто підставить їх у спрощену формулу і видасть результат з урахуванням цих значень.

2.2. Виконання алгебраїчних перетворень

Нижче описана послідовність виконання алгебраїчних перетворень за допомогою оператора символічного виводу.

Примітка. Слід зауважити, що **вигляд операторів (а дуже часто – також результат)** символічних перетворень у версіях MathCAD 15 і старших **суттєво відрізняється** від перетворень у MathCAD Prime.

Спрощення виразів (Simplify)

Спрощення виразів – найбільш часто застосовувана операція. Символічний процесор MathCAD прагне так перетворити вираз, щоб вираз набув більш просту форму. При цьому використовуються різні арифметичні формули, зведення подібних доданків, тригонометричні тотожності, перерахунок зворотніх функцій, тощо.

Для спрощення виразу за допомогою оператора символічного виводу використовуйте ключове слово **simplify**

Версії MathCAD 15 і старші:

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ simplify } \rightarrow z \cdot x + 2 \cdot z \cdot y - z^2 \cdot x - 5 \cdot z^2 \cdot y + z$$

MathCAD Prime:

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z \xrightarrow{\text{simplify}} -(z \cdot ((5 \cdot y + x) \cdot z - (2 \cdot y + x + 1)))$$

Слід пам'ятати, що якщо деяким змінним, що входять у вираз, раніше були присвоєні деякі значення, то вони будуть підставлені в нього при виконанні символьного виводу

Версії MathCAD 15 і старші:

$$x := 10 \quad y := 1$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ simplify } \rightarrow 13 \cdot z - 15 \cdot z^2$$

MathCAD Prime:

$$x := 10 \quad y := 1$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot (x + 5 \cdot y) + z \xrightarrow{\text{simplify}} -(z \cdot (15 \cdot z - 13))$$

Спрощення виразів, що містять числа, проводиться по-різному, в залежності від наявності в числах десяткової точки. Якщо вона є, то виконується безпосереднє обчислення виразу

$$\sqrt{3} \xrightarrow{\text{simplify}} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3.01} \xrightarrow{\text{simplify}} 1.7349351572897472412$$

Розкладання виразів (Expand)

Операція символьного розкладання, або розширення, виразів протилежна за змістом операції спрощення. В ході розкладання розкриваються всі суми і добутки, а складні тригонометричні залежності розкладаються за допомогою тригонометричних тотожностей. Розкладання виразів проводиться шляхом використання разом з оператором символьного виводу ключового слова `expand`

Версії MathCAD 15 і старші:

$$\cos(2 \cdot x) \text{ expand, } x \rightarrow 2 \cdot \cos(x)^2 - 1$$

MathCAD Prime:

$$\cos(2 \cdot x) \xrightarrow{\text{expand}} 2 \cdot \cos(x)^2 - 1$$

Розкладання на множники (Factor)

Розкладання виразів на прості множники проводиться використанням разом з оператором символьного виводу ключового слова **factor**

Версії MathCAD 15 і старші:

$$x^4 - 16 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

$$28 \text{ factor} \rightarrow 2^2 \cdot 7$$

MathCAD Prime:

$$x^4 - 16 \xrightarrow{\text{factor}} (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

$$28 \xrightarrow{\text{factor}} 2^2 \cdot 7$$

Ця операція дозволяє розкласти поліноми на добуток простіших поліномів, а цілі числа – на прості співмножники.

Зведення подібних доданків (Collect)

Щоб звести подібні доданки за допомогою оператора символьного виводу

1. Введіть вираз.
2. Натисніть кнопку **Collect**.
3. Введіть в місцезаповнювач після вставленого ключового слова **collect** ім'я змінної, щодо якої потрібно привести подібні доданки (наприклад, змінна x).
4. Введіть оператор символьного виводу $\rightarrow$.
5. Натисніть клавішу <Enter>.

Версії MathCAD 15 і старші:

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ collect, } x \rightarrow (z - z^2 \cdot y) \cdot x + 2 \cdot z \cdot y - 5 \cdot z^2 \cdot y^2 + z$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ collect, } y \rightarrow -5 \cdot z^2 \cdot y^2 + (2 \cdot z - z^2 \cdot x) \cdot y + z \cdot x + z$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \text{ collect, } x, y, z \rightarrow (z - z^2 \cdot y) \cdot x + 2 \cdot z \cdot y - 5 \cdot z^2 \cdot y^2 + z$$

MathCAD Prime:

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \xrightarrow{\text{collect, } x} (-(y \cdot z^2) + z) \cdot x + ((2 \cdot y + 1) \cdot z - 5 \cdot y^2 \cdot z^2)$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \xrightarrow{\text{collect, } y} (x + 1) \cdot z + ((2 \cdot z - x \cdot z^2) \cdot y - 5 \cdot z^2 \cdot y^2)$$

$$(x + 2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x + 5 \cdot y) + z \xrightarrow{\text{collect, } x, y, z} x \cdot (y \cdot -z^2 + z) + (y \cdot 2 \cdot z + z - y^2 \cdot 5 \cdot z^2)$$

Як можна бачити, після ключового слова **collect** допускається завдання кількох змінних через кому. В цьому випадку приведення подібних доданків виконується послідовно по всім змінним.

Коефіцієнти полінома (Polynomial Coefficients)

Якщо вираз є поліномом щодо деякої змінної x , заданим не в звичайному вигляді $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, а як добуток інших, простіших поліномів, то коефіцієнти $a_0, a_1, a_2 \dots$ легко визначаються символьним процесором MathCAD. Коефіцієнти самі можуть бути функціями (часом, досить складними) інших змінних.

Щоб обчислити поліноміальні коефіцієнти за допомогою оператора символьного виводу:

1. Введіть вираз.
2. Натисніть кнопку **Coeffs**.
3. Введіть в місцезаповнювач після вставленого ключового слова **coeffs** аргумент полінома.
4. Введіть оператор символьного виводу $\rightarrow$.
5. Натисніть клавішу <Enter>.

Приклад. Розрахунок коефіцієнтів для різних аргументів:

Версії MathCAD 15 і старші:

$$\begin{aligned} (x+2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x+5 \cdot y) + z \text{ coeffs}, z &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x+2 \cdot y+1 \\ -y \cdot x-5 \cdot y^2 \end{pmatrix} \\ (x+2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x+5 \cdot y) + z \text{ coeffs}, x &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot z \cdot y - 5 \cdot z^2 \cdot y^2 + z \\ z - z^2 \cdot y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

MathCAD Prime:

$$\begin{aligned} (x+2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x+5 \cdot y) + z &\xrightarrow{\text{coeffs}, z} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot y + x + 1 \\ -(5 \cdot y^2) - x \cdot y \end{bmatrix} \\ (x+2 \cdot y) \cdot z - z^2 \cdot y \cdot (x+5 \cdot y) + z &\xrightarrow{\text{coeffs}, x} \begin{bmatrix} -(5 \cdot y^2 \cdot z^2) + (2 \cdot y + 1) \cdot z \\ -(y \cdot z^2) + z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Визначення коефіцієнтів можливе не тільки для окремих змінних, але для більш складних виразів, що входять в дану формулу в якості складової частини.

Версії MathCAD 15 і старші:

$$(x-4) \cdot (x-7) \cdot x + 99 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 99 \\ 28 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MathCAD Prime:

$$(x-4) \cdot (x-7) \cdot x + 99 \xrightarrow{\text{coeffs}, x} \begin{bmatrix} 99 \\ 28 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Слід пам'ятати, що не всякий вираз піддається аналітичним перетворенням. Якщо це так (через те, що задача зовсім не має аналітичного рішення, або якщо вона виявляється занадто складною для символьного процесора MathCAD), то як результат виводиться сам вираз.

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot x) &\xrightarrow{\text{expand}, x} 2 \cdot \cos(x)^2 - 1 \\ \cos(x) &\xrightarrow{\text{expand}, x} \cos(x) \end{aligned}$$

2.3. Диференціювання та інтегрування

Операції диференціювання та інтегрування реалізована в MathCAD як у чисельній, так і в аналітичній формі та позначається за допомогою традиційного оператора, тобто відповідними математичними символами (подібно до складання або множення).

За допомогою MathCAD можна обчислювати похідні скалярних функцій будь-якої кількості аргументів, причому як функції, і аргументи можуть бути і дійсними, і комплексними. При цьому MathCAD дозволяє обчислювати як звичайну похідну, так і похідні вищих порядків, а також часткові похідні.

У MathCAD допускається обчислювати інтеграли від скалярних функцій у межах інтегрування, які також мають бути скалярними. Незважаючи на те, що межі інтегрування повинні бути дійсними, підінтегральна функція може мати і комплексні значення, тому значення інтеграла може бути комплексним.

Для того, щоб аналітично знайти похідну функції $f(x)$ в MathCAD:

1. Задайте користувачку функцію $f(x)$.

2. Введіть оператор диференціювання натисканням кнопки Похідна (Derivative) у меню Оператори групи Оператори и символи вкладки Математика – рис. 2.2 (у старших версіях MathCAD – натисканням кнопки Похідна на панелі Математичний аналіз (Calculus)).



3. У місцезаповнювачах оператора диференціювання введіть функцію, що залежить від аргументу x , тобто $f(x)$, і ім'я самого аргументу x .

4. Введіть оператор символьного виводу $\rightarrow$.

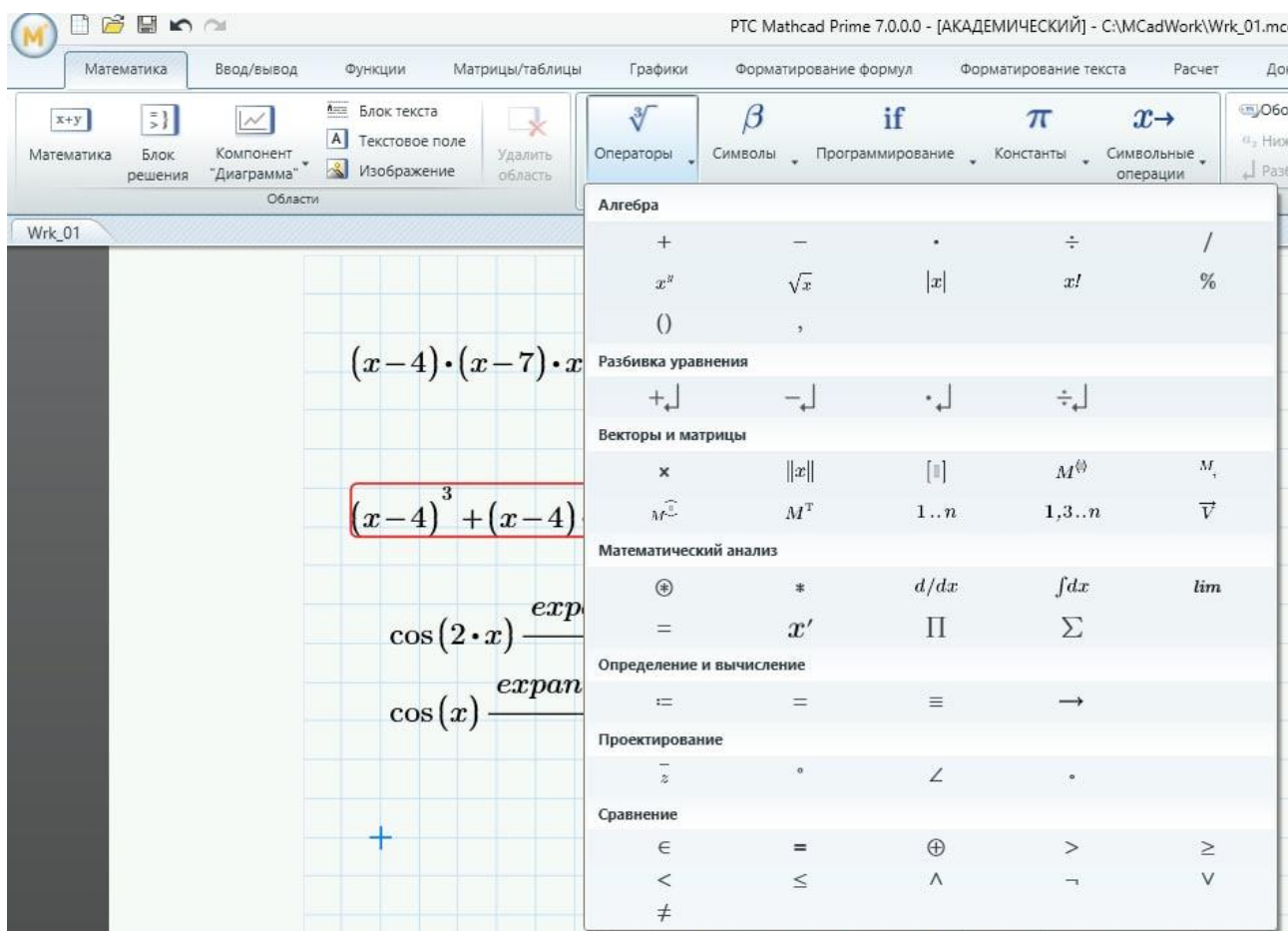


Рисунок 2.3 – Меню **Операторы** группы **Операторы и символы** вкладки **Математика** (MathCAD Prime)

Приклад:

$$f(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow -(2 \cdot \ln(x) \cdot \sin(2 \cdot x)) + \frac{\cos(2 \cdot x)}{x}$$

Примітка. Диференційована функція може залежати не тільки від аргументу x , але і від інших аргументів, наприклад $f(x, y, z)$ і т. п. У цьому випадку диференціювання проводиться у такий самий спосіб, причому стає більш зрозумілою необхідність визначення змінної диференціювання (у нижньому місцепозначенні оператора диференціювання). Розрахунки похідних з різних аргументів (у разі говорять про приватних похідних), зрозуміло, будуть давати різні результати.

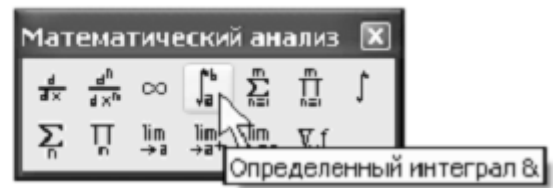
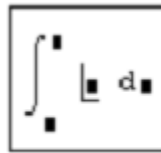
Якщо у робочій області задано значення аргументу, то це значення буде автоматично підставлено в аналітично розраховану похідну:

$$f(x) := \cos(2 \cdot x) \cdot \ln(x)$$

$$x := \frac{3}{4} \pi$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2 \cdot \ln\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = 1.714$$

Щоб обчислити інтеграл (невизначений чи визначений), слід вставити до документа знак інтегралу з меню Операторы групи Операторы и символы вкладки Математика – рис. 2.2 (у версіях MathCAD 15 та старших на панелі Математичний аналіз (Calculus) обираються окремо знаки визначеного або не визначеного інтеграла).



З'явиться символ інтеграла з кількома місцезаповнювачами, в які потрібно ввести нижній та верхній інтервали інтегрування, підінтегральну функцію та змінну інтегрування.

Щоб отримати результат інтегрування, слід ввести символ або чисельного обчислення.

Приклад обчислення у MathCAD деяких невизначених інтегралів:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$F(x) := \frac{2}{3} \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2 \cdot \sqrt{x} \right] \rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Нижче наведений фрагмент робочого документа MathCAD з обчисленням визначеного інтеграла засобами символної математики пакету по формулі Ньютона-Лейбніца.

$$F(x) := \sin(x) \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \sin(3 \cdot x)$$

$$\int f(x) dx \rightarrow \frac{-1}{16} \cdot \cos(4 \cdot x) - \frac{1}{8} \cdot \cos(2 \cdot x) + \frac{1}{24} \cdot \cos(6 \cdot x)$$

$$F(x) := \frac{-1}{16} \cdot \cos(4 \cdot x) - \frac{1}{8} \cdot \cos(2 \cdot x) + \frac{1}{24} \cdot \cos(6 \cdot x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \rightarrow \frac{1}{6}$$

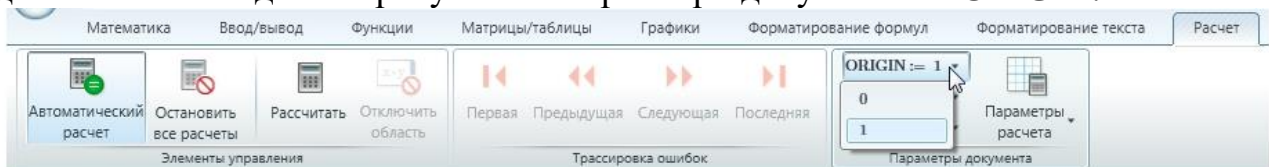
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0.167 - \frac{1}{6} = 0.167$$

3 Деякі операції з матрицями у середовищі MathCAD

Операції, що виконуються над векторами і матрицями в MathCAD, можна розбити на дві групи. До першої групи відносяться операції, які застосовуються до окремих векторів та матриць, наприклад, транспонування матриці або обчислення зворотної матриці.

До другої групи належать операції, які виконуються над групою векторів та матриць. Як правило, вони виконуються над двома матрицями або матрицею та вектором. Наприклад, додавання, віднімання матриць, перемноження матриць або множення матриці та вектора. До векторів і матриць MathCAD, при виконанні операцій над ними, можуть пред'являтися певні вимоги відповідно до вимог класичної математики. Наприклад, при перемноженні матриці та вектора, кількість стовпців матриці має дорівнювати кількості рядків вектора.

За умовчуванням, нумерація рядків та стовпчиків у MathCAD починається з номера «0». Існує можливість встановити довільний номер першого елемента матриці (вектора), наприклад, рівний «1». Це можна зробити за допомогою вкладки Розрахунок -> Параметри документа -> ORIGIN:



Також це значення "бази відліку індексів" можна встановити безпосередньо в документі, за допомогою системної константи ORIGIN:

ORIGIN := 0	$M := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$M_2 = 3$
ORIGIN := 1	$M := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$M_2 = 2$

3.1 Створення матриці

Оберіть меню Вставити матрицу з групи Матрицы и таблицы вкладки Матрицы / таблицы (рис. 3.1).



(у старших версіях MathCAD – на панелі з основними компонентами натисніть кнопку

Примітка: нумерація рядків і стовпців за умовчанням починається з 0 (стандартне значення константи ORIGIN – нуль).

Вектор задається, так само як і матриця, але кількість колонок = 1.

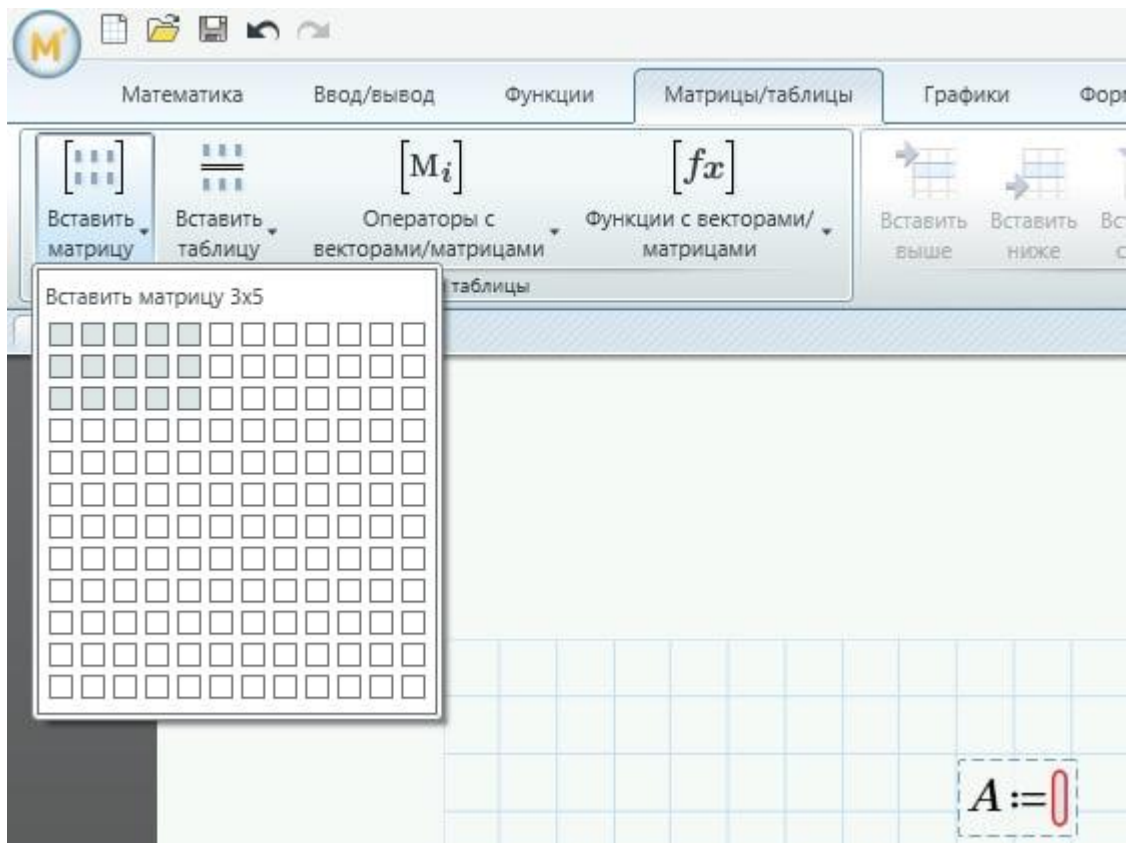
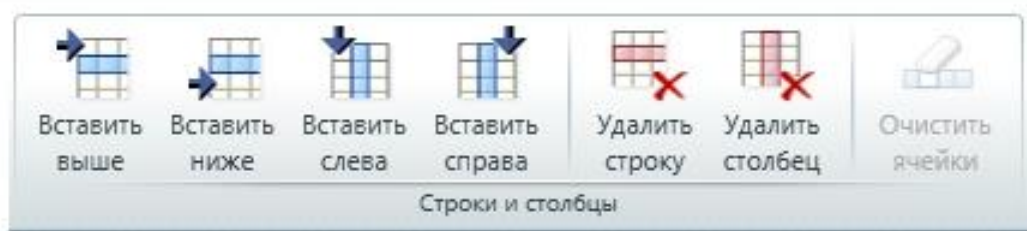


Рисунок 3.1 – Вставка матриці 3x5

Виберіть бажаний розмір матриці (перемістіть вказівник на потрібну кількість клітин сітки). З'явиться порожня матриця, яку заповнюють значеннями.

Матриці можна присвоїти ім'я, клацнувши ліву дужку, натиснувши $[:]$ для оператора привласнення та ввівши ім'я.

Вставку та видалення рядків та стовпців можна здійснювати за допомогою команд з меню «Операторы с векторами/матрицами» на вкладці Матрицы и таблицы:



У старших версіях програми MathCAD реалізована дещо інша можливість видаляти і вставляти будь-яку кількість рядків або стовпців з матриці. Для цього:

1. Виберіть в матриці елемент того рядка або стовпця, який Ви збираєтеся видалити.

2. Натисніть "CTRL-M" або виберіть пункт меню Matrix з меню Insert, в результаті в діалоговому вікні, що з'явилося, виберіть кількість рядків або стовпців які ви збираєтесь видалити.

3. Натисніть кнопку Delete.

4. Натисніть кнопку Close (Якщо натиснути кнопку Ok, то нічого не зміниться)

Для вставки рядків або стовпців у старших версіях програми MathCAD алгоритм приблизно той же, тільки потрібно врахувати, що рядок, що вставляється, розташовуватиметься нижче вибраного елемента, а стовпець — справа. Також в діалоговому вікні слід вибрати кнопку Insert.

Заповнювати вектори і матриці можна, задаючи окремі елементи матриці, а також за допомогою формул. Приклади:

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 2 \quad x_4 := 4 \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..2 \quad j := 1..3 \quad M1_{i,j} := i + j \quad M1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Визначення елементів матриці забезпечує також функція $matrix(M, N, f)$ – створення матриці розміру NxM, де кожний елемент, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця є $f(i, j)$,

M – кількість рядків,

N – кількість стовпців,

$f(i, j)$ – функція користувача.

Приклад:

$$f(i,j) := a \cdot i + \sqrt{3} \cdot j \quad A := matrix(2,3,f) \quad A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 2 \cdot \sqrt{3} \\ a & a + \sqrt{3} & a + 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Для створення матриць спеціального виду застосовують функції *identity* та *diag*:

$identity(N)$ – створення одиничної матриці розміру NxN,

$diag(V)$ – створення діагональної матриці, на діагоналі якої знаходяться елементи заданого вектора V.

Приклад:

$$A := \text{identity}(4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V1 := \begin{bmatrix} 37 \\ 1 \\ 19 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$B := \text{diag}(V1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 37 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Існує можливість читання матриці даних з файлу. Зокрема, можна вставити матрицю з текстового файлу, з файлу Excel (див. нижче).

3.2 Робота з окремими елементами матриці

Щоб дістати доступ до окремого елемента матриці, необхідно набрати ім'я матриці і задати індекси рядка і стовпця.

Індекс елемента можна ввести за допомогою блоку Векторы и матрицы з меню Операторы группы Операторы и символы вкладки Математика (рис. 3.2).

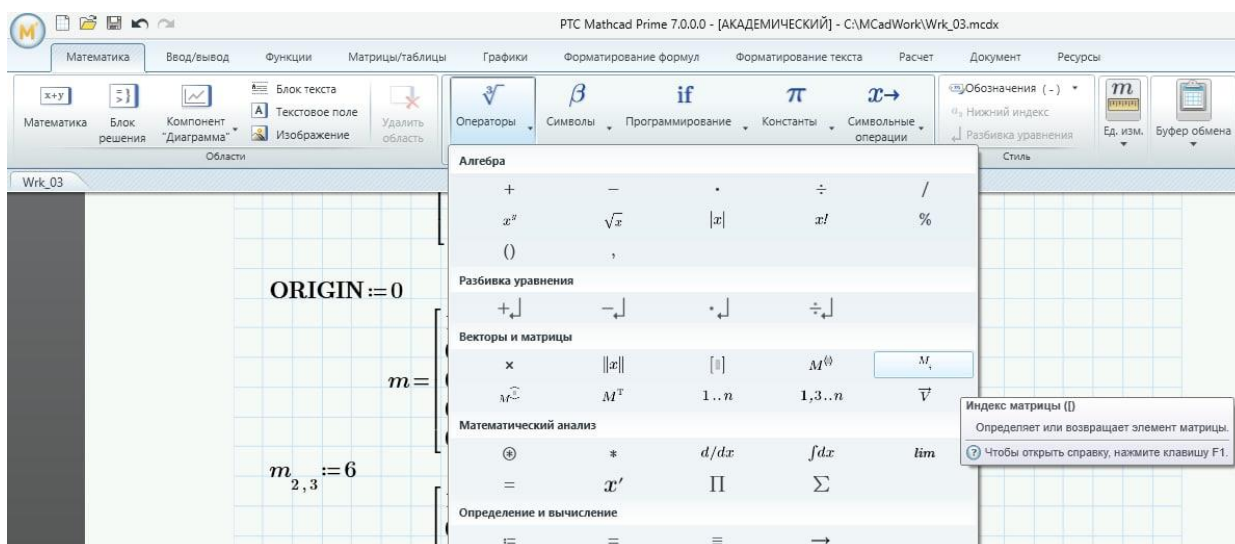


Рисунок 3.2 – Блок Векторы и матрицы

Наприклад, команда $m_{2,3} := 6$ надає значення 6 елементу матриці m , який стоїть на перетині третього рядка і четвертого стовпчика (для стандартного випадку $\text{ORIGIN}=0$).

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{2,3} := 6$$

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Примітка. Таким способом (поелементно), можна створити нову матрицю наприклад:

$$m_{2,3} := 6$$

$$m_{3,2} := 5$$

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогічно можна не тільки присвоювати, а й отримувати значення елемента матриці:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{2,3} = 6$$

Передбачена можливість також «вирізати» з матриці рядок або стовпчик. Для цього призначені відповідно інструменти «Столбец матрицы» та «Строка матрицы», доступні у блоку Векторы и матрицы з меню Операторы групи Операторы и символы вкладки Математика (рис. 3.2). У старших версіях програми була доступна тільки функція «стовпець матриці», а для доступу до рядків матриці можна слід було попередньо використовувати операцію транспонування.



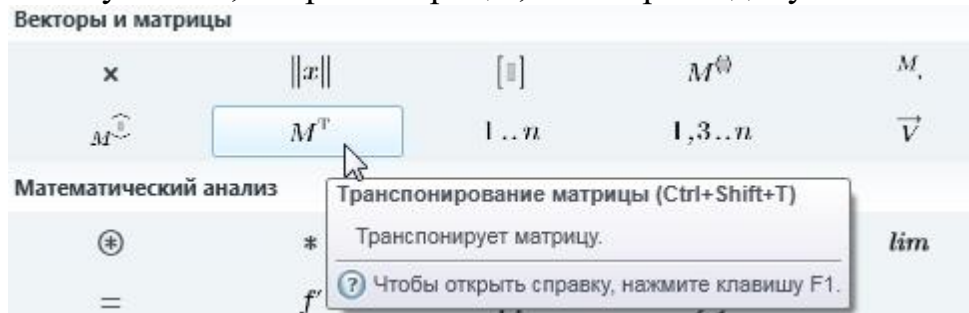
Приклад:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{m^{(2)}} = [0 \ 0 \ 1 \ 6 \ 0 \ 0]$$

$$m^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Також у зазначеному блоці Вектори и матрицы з меню Операторы групи Операторы и символы вкладки Математика (рис. 3.2) доступні інструменти «транспонування», «норма матриці», «векторний добуток».



Приклад транспонування:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Операції обернення матриці (значення «-1» у верхньому індексі) та обчислення детермінанта (інструмент «абсолютное значение/определитель» рис. 3.2) застосовуються до квадратних матриць:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D := |A|$$

$$D = -12$$

$$AO := A^{-1}$$

$$AO = \begin{bmatrix} 2.25 & -4 & 17.75 & -0.75 \\ -1.583 & 3 & -12.083 & 0.417 \\ 0.083 & 0 & -0.417 & 0.083 \\ -0.667 & 1 & -4.667 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Отримання розміру матриць

Для отримання відомостей про характеристики матриць або векторів передбачені такі функції:

$rows(A)$ – число рядків матриці A ,
 $cols(A)$ – число стовпців матриці A ,
 $length(v)$ – кількість елементів вектора v ,
 $last(v)$ – індекс останнього елемента вектора v ;
 $rank(A)$ – повертає ранг чи число лінійно незалежних стовпців матриці A .

Приклади:

$$A := \begin{pmatrix} a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad rows(A) \rightarrow 4 \quad cols(A) \rightarrow 3$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \\ 200 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$S1 := \sum B \quad S2 := \sum_{i=ORIGIN}^{last(B)} B_i$$

$$S1 = 231 \quad S2 = 231$$

Сортування матриць

Для перестановки елементів матриці або вектора (розташування елементів у певному рядку або стовпці в порядку зростання або спадання), використовуються вбудовані функції:

$sort(v)$ – сортування елементів вектора v порядку зростання,

$csort(A, i)$ – сортування рядків матриці A вибудовуванням елементів i -го стовпця в порядку зростання,

$rsort(A, i)$ – сортування стовпців матриці A вибудовуванням елементів i -го рядка в порядку зростання,

$reverse(v)$ – перестановка елементів вектора v (елементів кожного стовпця матриці v) у зворотному порядку.

Приклад:

ORIGIN := 1

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} & C &:= \text{sort}(B) \rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ \sqrt{3} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{reverse}(C) &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ -7 \end{pmatrix} \\
 A1 &:= \text{csort}(A,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -2 & b & -4 \\ a & \sin(a) & 1 \\ a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{pmatrix} & A2 &:= \text{rsort}(A,4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sin(a) & a \\ -4 & b & -2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & a+b \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 \text{reverse}(A1) &\rightarrow \begin{pmatrix} a+b & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ a & \sin(a) & 1 \\ -2 & b & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3 Операції з кількома матрицями

Об'єднання двох матриць, або матриці і вектора можна провести двома способами:

1. Приєднанням до початкової матриці справа, для цього розмірність початкової матриці повинна бути $m \times n$, приєднуваної матриці $m \times p$, результуюча матриця матиме розмірність $m \times (n+p)$. Для цього використовується функція $\text{augment}(A,B)$.

Схематично це виглядає так.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} & v &= \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} \\
 \text{augment}(M,v) &= \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Приєднанням до початкової матриці знизу, для цього розмірність початкової матриці повинна бути $m \times n$, приєднуваної матриці $p \times n$, результуюча матриця матиме розмірність $(m+p) \times n$. Для приєднання до початкової матриці знизу використовується функція $\text{stack}(A,B)$.

Схематично це виглядає так.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \\
 \text{stack}(M,v) &= \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \leftarrow v = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Приклад:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} \quad N := \begin{bmatrix} 12 & 15 & 19 \\ -2 & -3 & -6 \\ 16 & 18 & 22 \\ -6 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} 98 & 56 \\ 87 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{augment}(M, N) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 12 & 15 & 19 \\ 5 & 7 & -2 & -3 & -6 \\ 9 & 11 & 16 & 18 & 22 \\ 13 & 15 & -6 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{stack}(M, K) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 15 \\ 98 & 56 \\ 87 & 14 \end{bmatrix}$$

Сумовування елементів по стовпцях

$$D := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Crow} := (1 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Crow} \cdot D = [12 \ 15 \ 18]$$

Сумовування елементів по рядках

$$\text{Ccol} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D \cdot \text{Ccol} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Множення на число, множення на скалярну матрицю

$$2 \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} \quad E2 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E2 \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Створення матриць A та B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Створення вектора v

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Додавання матриць

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Множення матриць

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 33 & 57 \\ -19 & -8 & -20 \\ -11 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

Множення на вектор

$$B \cdot v = \begin{pmatrix} 38 \\ 52 \\ 42 \end{pmatrix}$$

3.4 Взаємодія MathCAD із зовнішніми файлами даних

Важливий компонент введення-виведення інформації – це введення-виведення в зовнішні файли. Введення зовнішніх даних у документи MathCAD застосовується частіше виведення, оскільки MathCAD має потужні розвинені можливості представлення результатів розрахунків.

Робота з текстовими файлами

Наведемо вбудовані функції для роботи з текстовими файлами:

- READPRN ("file") – читання даних в матрицю з текстового файлу;
 - WRITEPRNC'file ") – запис даних в текстовий файл;
 - APPENDPRNC'file") – дозапис даних в існуючий текстовий файл;
- («file» – шлях до файлу).

Приклад запису матриці I до текстового файлу:

```
I := identity (5)
```

```
I3,4 := 99
```

Приклад читання даних з текстового файлу в матрицю C

```
WRITEPRN ( "datafile.prn" ) := I
```

```
C := READPRN ( "datafile.prn" )
```

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад додавання вектора k в існуючий текстовий файл

```
k := ( 1 2 3 4 5 )
```

```
APPENDPRN ( "datafile.prn" ) := k
```

Функція READFILE

"Універсальна" функція READFILE повертає матрицю з елементами, зчитаними із зовнішнього файлу даних.

Синтаксис:

READFILE ("file","type",[colwidth,rows,cols,emptyfill]):

"file" – назва файлу (включаючи шлях до нього на диску);

"type" – тип файлу ("delimited" або "Excel");

colwidth – ширина стовпця даних, що зчитується з файлу у разі вибору як попередній параметр типу "fixed", тобто з фіксованою шириною даних;

rows – початковий рядок імпорту даних або двокомпонентний вектор, що задає інтервал імпорту рядків;

cols – початковий стовпець імпорту даних або двокомпонентний вектор, що задає інтервал імпорту стовпців;

emptyfill – значення, яке буде використано для заміни відсутніх даних (пустот у файлі). Для нього можна використовувати значення "Нечисло" (NaN).

Приклади:

З файлу *abc.txt* прочитати у матрицю C1 чотири рядки та п'ять стовпчиків, недостаючі елементи замінити нулем.



2	1.5	2	3	5	11
4	2/7	7	12/11	1.35	
6	7	11	13	91	

$$C1 := \text{READFILE}\left["E:\text{abc.txt}", "delimited", \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, 0\right]$$
$$C1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 3 & 5 & 11 \\ 4 & 0.286 & 7 & 1.091 & 1.35 \\ 6 & 7 & 11 & 13 & 91 \end{pmatrix}$$

З файлу *abc.txt* прочитати рядки з 3 по 5 та стовпці 3 по 5 у матрицю X:



2	1.5	2	3	5	11
4	2/7	7	12/11	1.35	
6	7	11	13	91	

$$X := \text{READFILE}\left["E:\text{abc.txt}", "delimited", \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$
$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 7 & 1.091 & 1.35 \end{pmatrix}$$

Робота з графічними файлами

Аналогічно роботі з текстовими файлами, можна організувати читання і запис даних в графічні файли різних форматів.

При цьому дані ототожнюються з інтенсивністю того чи іншого кольору пікселя зображення, що знаходиться у файлі. Наведемо основні функції:

- READRGB ("file" – читання кольорового зображення;
 - READBMP ("file") – читання зображення у відтінках сірого;
 - WRITERGB ("file") – запис кольорового зображення;
 - WRITEBMP ("file") – запис зображення у відтінках сірого;
- («file» – шлях до файлу).

Приклад запису матриці I в графічний файл

```
I:=identity(100)·100  
I3,9:=500  
WRITEBMP("data.bmp"):=I
```

Приклад читання з графічного файлу

```
C:=READBMP("data.bmp")
```

Приклад в кольоровий графічний файл

```
R:=identity(100)·100  
G:=identity(100)  
B:=identity(100)  
WRITERGB("color.bmp"):=augment(R,G,B)
```

4 Створення графіків у середовищі MathCAD

У MathCAD вбудовано декілька різних типів графіків, які можна розбити на дві великі групи, зокрема:

- Двовимірні графіки:

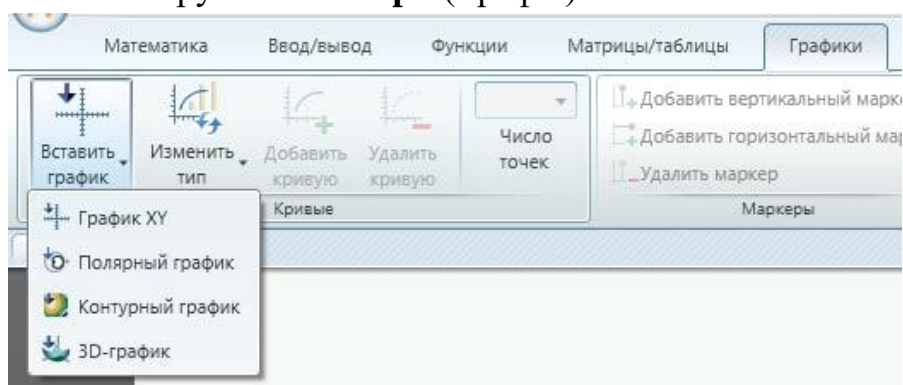
- XY (декартів) графік (XY Plot);
- полярний графік (Polar Plot).

- Тривимірні графіки:

- 3D графік тривимірної поверхні (Surface Plot);
- контурний графік ліній рівня (Contour Plot);

Ділення графіків на типи досить умовне, оскільки управляючи установками параметрів, можна створювати комбінації типів графіків, а також нові типи (наприклад, двовимірна гістограма розподілу є різновидом простого XY-графіка).

Всі графіки створюються однаково, за допомогою меню Вставити графік на вкладці Графики в групі Кривые (у старших версіях програми – за допомогою панелі інструментів **Graph** (Графік)).



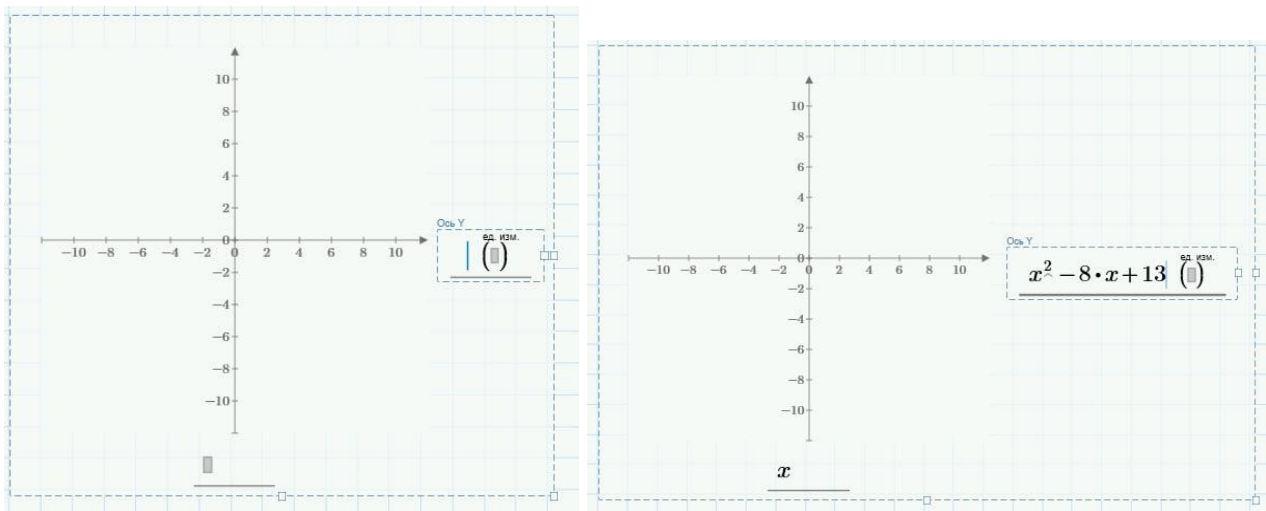
У результаті в документ вставиться шаблон вибраного графіка, у якому необхідно заповнити відповідні позиції X і Y.

Графіки можна масштабувати. Можна змінювати розташування назви осей графіка, а також можна правити та налаштовувати поділки та значення поділів осей. Осі графіка можна задати в лінійному чи логарифмічному масштабі. За умовчанням масштаб осей є лінійним.

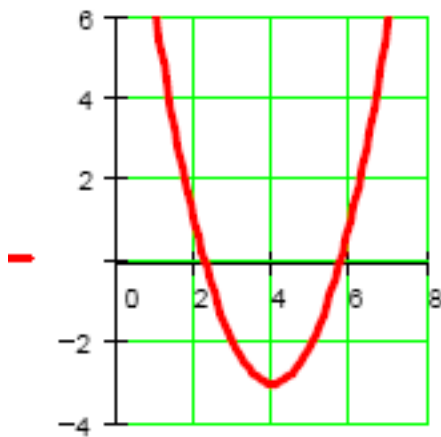
Вигляд графіка можна змінити за допомогою параметрів, які є на вкладці Графики (Plots). Щоб відкрити список Символ (Symbol) або список Стиль линии (Line Style) у групі Стили (Styles), клацніть стрілку праворуч від списку Символ (Symbol) або Стиль линии (Line Style) відповідно. Щоб відкрити список Изменить тип у групі Кривые, виберіть Изменить тип.

4.1 Побудова двовимірного графіка

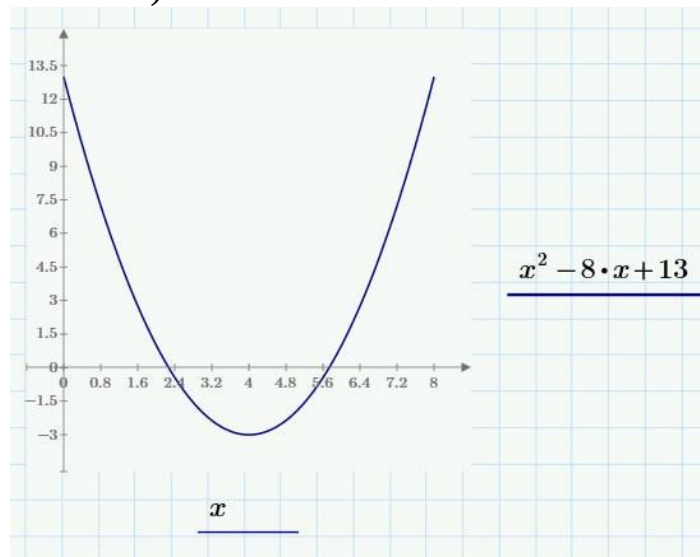
Для побудови графіка функції натисніть кнопку "График XY" у меню Вставити графік. Місцезаповнювачі слід заповнити необхідним вмістом, вказавши заздалегідь зміну аргументу.



Результати побудови ХУ-графіка представлено на рис. 4.1 (а – версії MathCAD 15 та старші, б – MathCAD Prime).



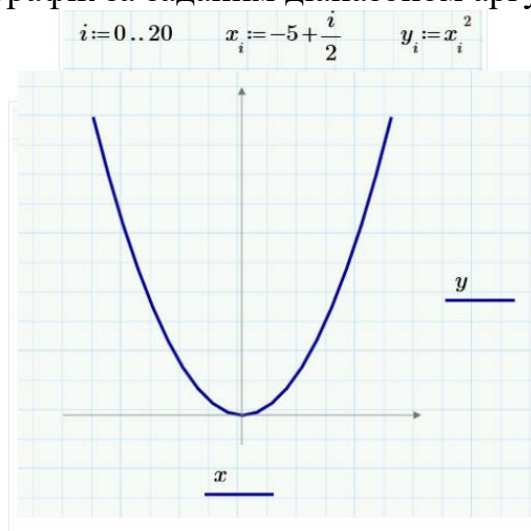
а)



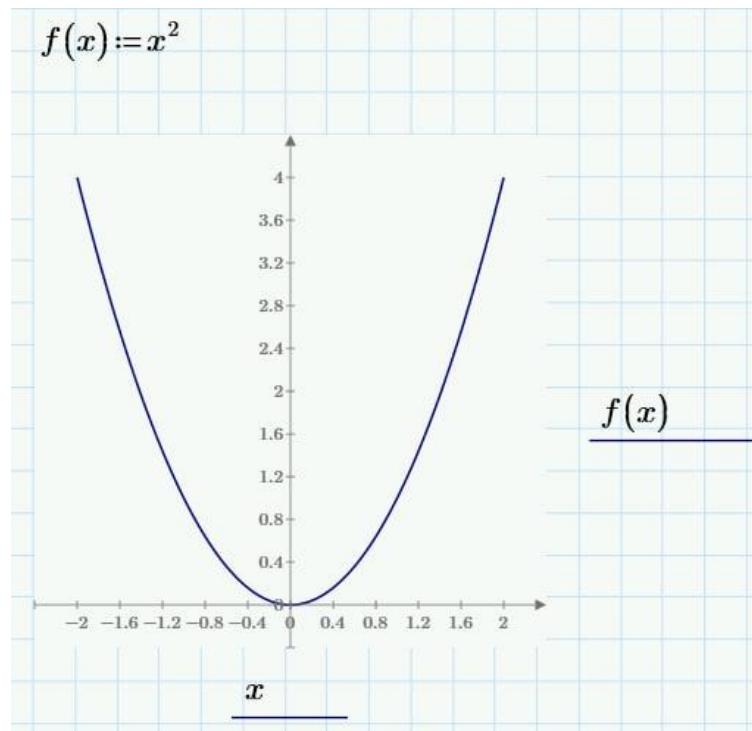
б)

Рисунок 4.1 – ХУ графік.

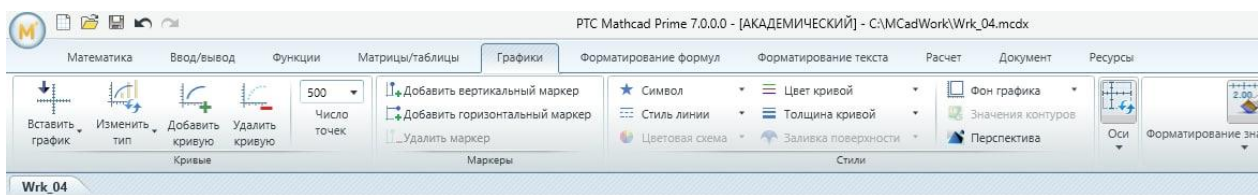
Можна побудувати графік за заданим діапазоном аргументу:



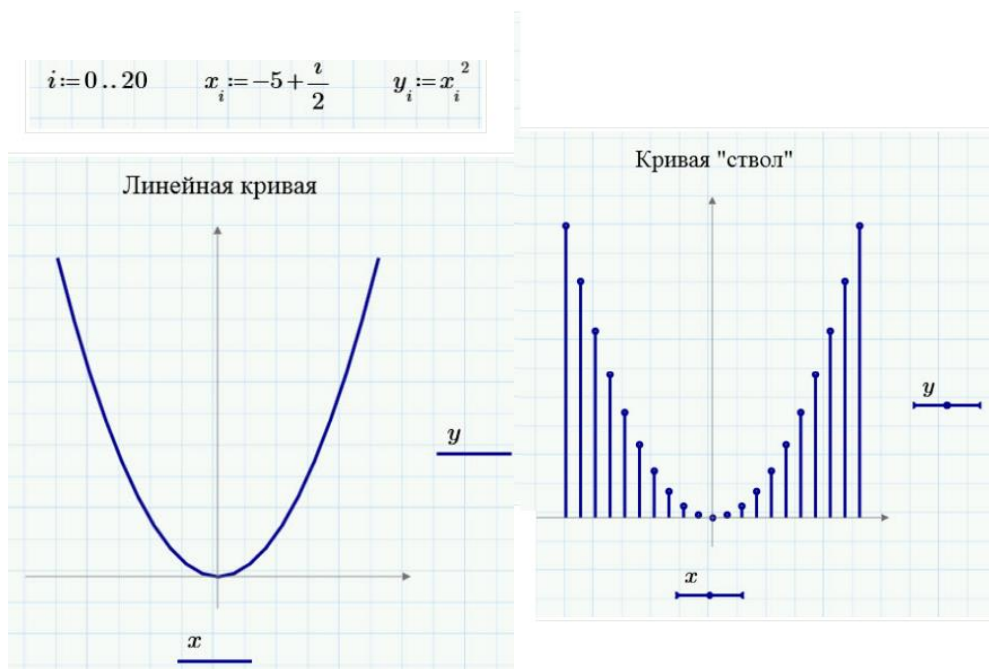
Також можна побудувати графік заданої користувацької функції:

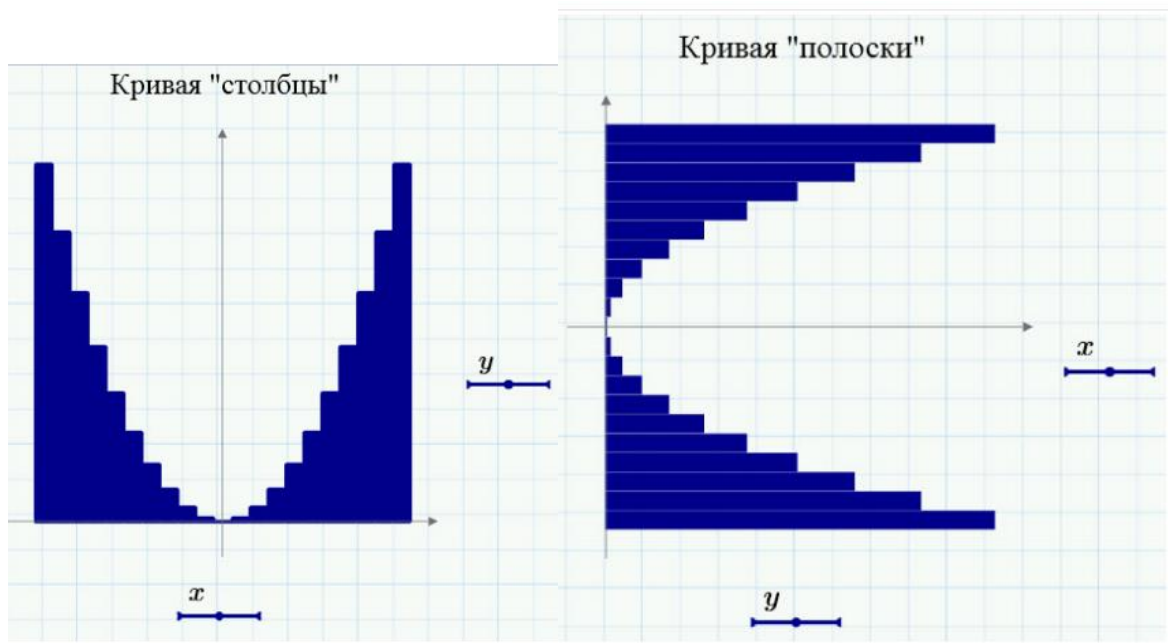


Вкладка Графіки дозволяє налаштувати параметри виділеного графіка:



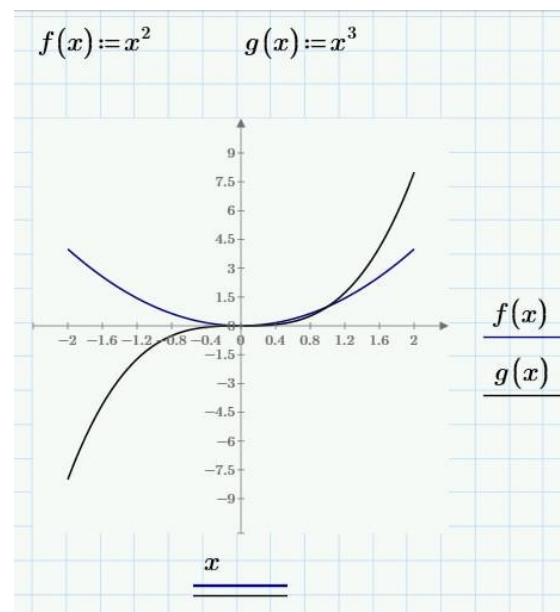
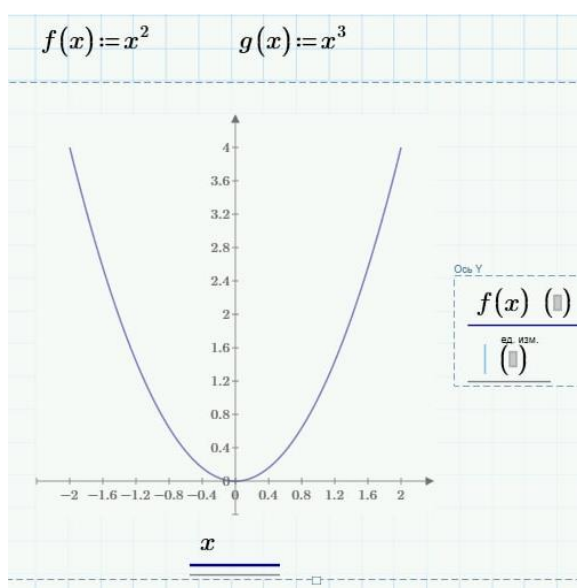
Зокрема, щоб змінити тип графіку, натисніть на нього, а потім виберіть вкладку Графіки → Кривые → Изменить тип. Нижче представлені рисунки чотирьох типів ХУ графіків:





Декілька графіків в одній системі координат.

Щоб додати криву до осі, помістіть курсор після позначення легенди осі Y графіка та натисніть Графики → Кривые → Добавить кривую. З'явиться ще один місцезаповнювач для осі Y:



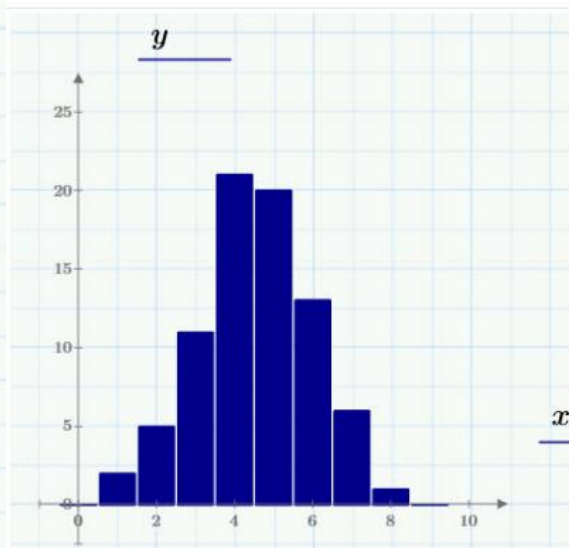
Більшу частину графіків можна додати також за допомогою описаної команди.

Побудова гістограми.

Використовуємо тип кривої «Столбцы».

Приклад. Попередньо побудуємо таблицю з даними — вкладка Матрицы/таблицы → Вставить таблицу, таблица 2x10. Заповнимо таблицю даними, потім вставимо графік XY. Налаштуємо вигляд графіку (розташування легенди, тощо). Після цього змінимо тип графіку, обравши Графики → Кривые → Изменить тип → Кривая «столбцы»:

x	y
0	0
1	2
2	5
3	11
4	21
5	20
6	13
7	6
8	1
9	0



4.2. Створення графіків у полярній системі координат

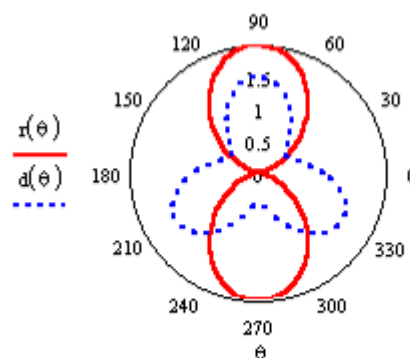
Для створення полярного графіка необхідно обрати Графики → Кривые → Вставити графік → Полярний графік і вставити імена змінних і функцій, які будуть побудовані в полярній системі координат: кут і радіус-вектор.

Полярний кут q слід визначити заздалегідь як змінну, що приймає значення з проміжку (ранжирувана змінна). Функція радіус-вектора $r(q)$ або задається заздалегідь, або її визначення вводиться безпосередньо в лівий місцезаповнювач.

$$N := 15 \quad \theta := 0, \frac{1}{N} \dots 2 \cdot \pi$$

$$r(\theta) := 1 + \sin\left(2 \cdot \theta + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$d(\theta) := 1 + \frac{\sin(3 \cdot \theta + \pi)}{2}$$

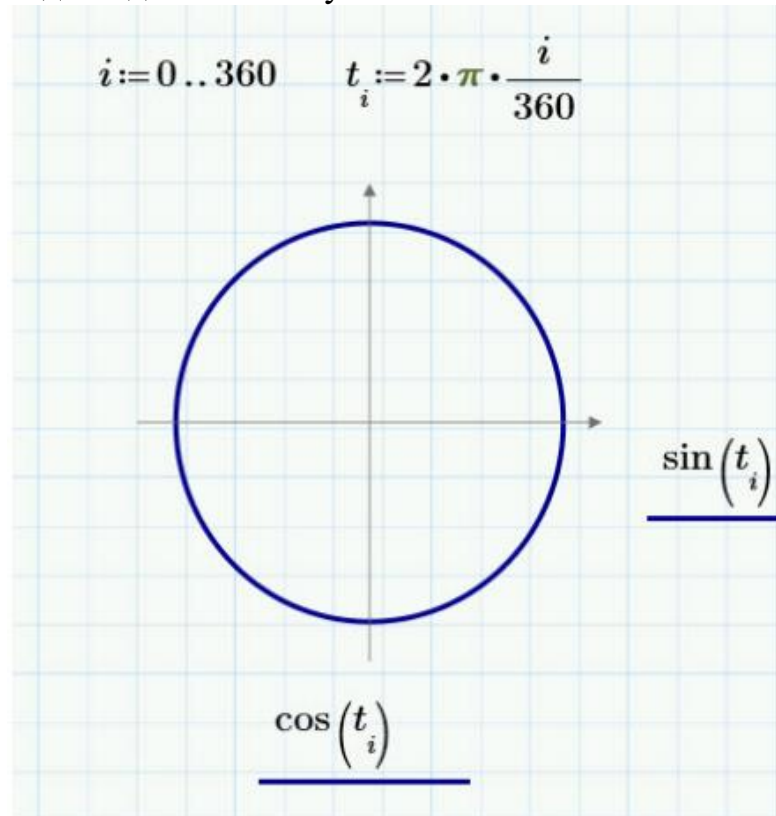


Графік в полярних координатах можна побудувати і за допомогою команди XY Plot. Тільки в цьому випадку необхідно додатково поставити такі функції: $x(q) = r(q) \cos(q)$ і $y(q) = r(q) \sin(q)$, а для абсцис і ординат вказати відповідно $x(q)$ і $y(q)$.

Так само, як при створенні декартового графіка, по осях можуть бути відкладені два вектори, елементи векторів, а також може бути здійснена швидка побудова графіка функції.

4.3. Створення графіків функцій, заданих параметрично

У разі побудови параметрично заданої кривої, замість незалежної змінної x під віссю абсцис необхідно задати індексовану змінну x_i . А поруч з віссю ординат необхідно відповідно вказати y_i .



Якщо потрібно вивести множину точок, то можна сформулювати два вектори, один з яких містить абсциси точок, а інший - їх ординати. У цьому випадку на графіку у відповідних місцях вказуються тільки імена векторів.

4.4. Створення тривимірних графіків

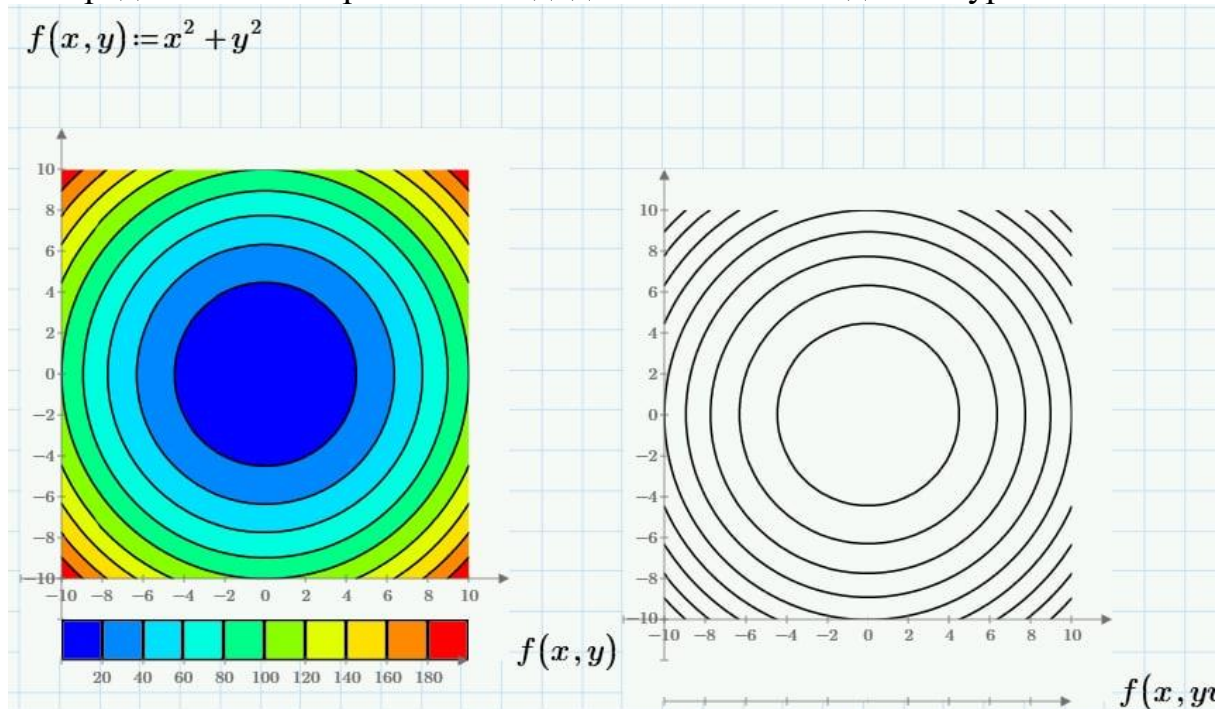
Щоб створити тривимірний графік, потрібно скористатися меню Графики → Кривые → Вставить графік на вкладці Графики (у старших версіях програми – натиснути кнопку із зображенням будь-якого з типів тривимірних графіків на панелі інструментів Graph). В результаті з'явиться порожня область графіка з трьома осями і єдиним місцезаповнювачем. У цей місцезаповнювач слід ввести або ім'я функції, або ім'я матричної змінної, яка задасть розподіл даних на площині XY.

Контурний графік

Контурний графік відбиває зміну поверхні за висотою. Він є лініями рівних висот. Щоб вставити графік, виберіть Графики → Кривые → Вставить графік → Контурный графік на вкладці Графики.

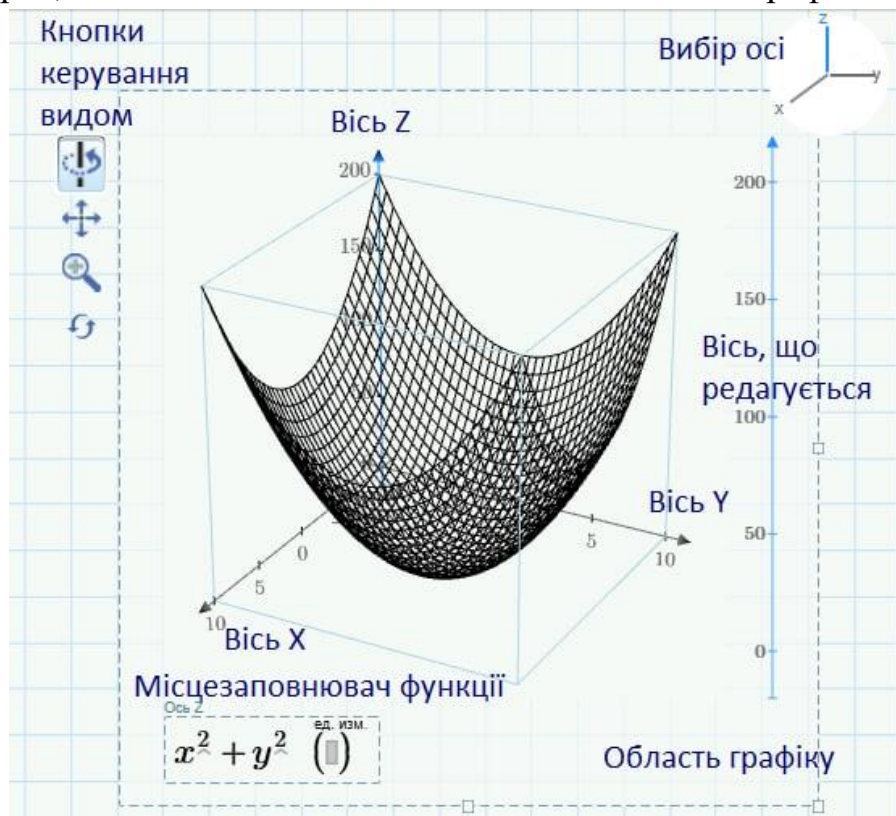
Приклад. Контурний графік функції $z = x^2 + y^2$.

Діапазони за замовчуванням: $-10 < x < 10$, $-10 < y < 10$. По осі значень (тобто $f(x,y)$) діапазон підбирається автоматично, залежно від величини функції. Змінити ці діапазони можна, змінюючи величину першої та останньої міток, а відстань між мітками – зміною величини другої мітки. Крім того, можна вибрати серед кількох кольорних схем і додавати величини до контурних ліній:



3D-графік

Насамперед, визначимося з основними елементами 3D-графіка:



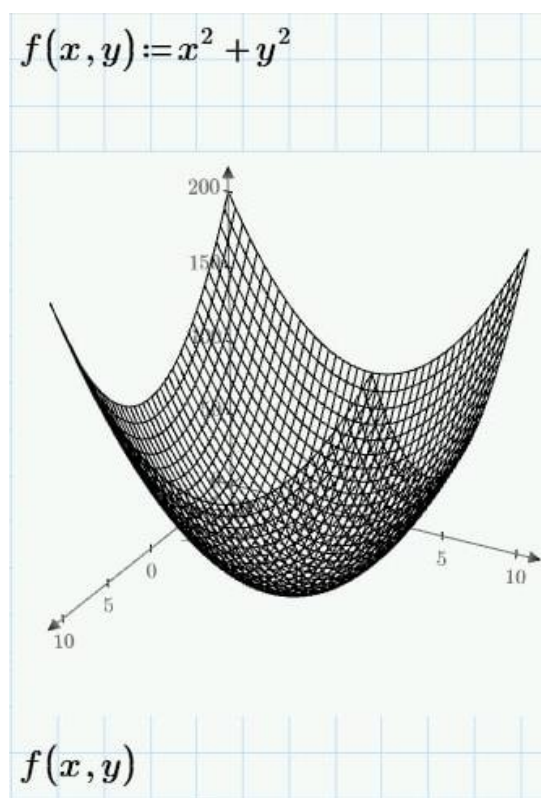
Щоб вставити 3D-графік, виберіть Графики → Кривые → Вставить график → 3D-график на вкладці Графики.

У 3D-графіка є три осі: X, Y та Z. Вісь Z зазвичай вертикальна. Сам графік «укладено» в прямокутну область, обмежену осями. У 2D-графіках були окремі місцезаповнювачі для осей X та Y. Тут – лише один місцезаповнювач для осі Z.

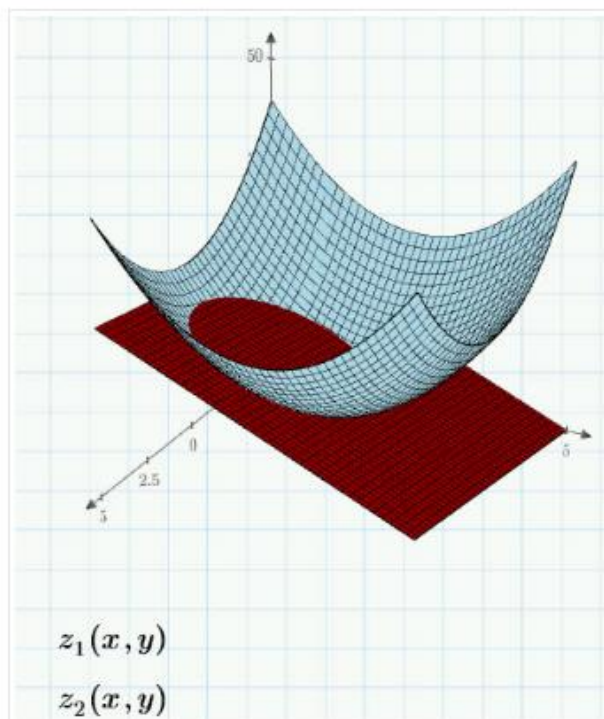
У верхньому правому кутку є кнопка для вибору осей. Обрана вісь буде підсвічена синім як на кнопці вибору, так і в області графіка. Ви можете змінювати значення першої, другої та останньої позначки, як на 2D-графіку. Так можна змінювати діапазони по осях і кількість міток.

Ви можете переміщувати, стискати та розширювати область із графіком за допомогою кнопок на межі області. За допомогою кнопок у лівому верхньому куті можна переміщати, обертати та масштабувати графік, а також скинути вигляд графіка (щось подібне до кнопки «Скасувати»).

Так само, як для 2D-графіку, можна у відповідному місцезаповнювачі вказувати як певний вираз, так і ім'я користувацької функції. Можлива побудова кількох поверхонь в одному полі графіку:



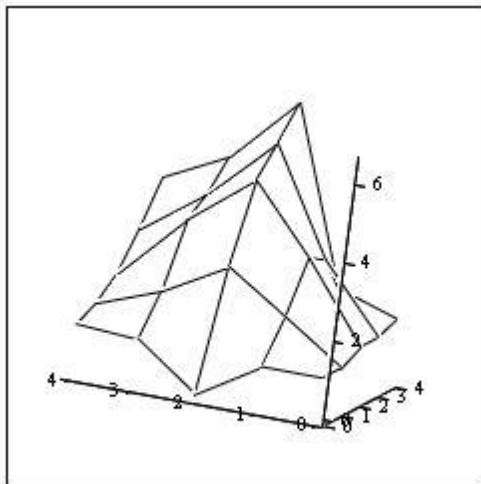
$$z_1(x, y) := x^2 + y^2 - 10 \quad z_2(x, y) := x - 3 \cdot y - 5$$



«Дискретний» 3D-графік

Графік поверхні може бути не розрахований у програмі, а заданий безпосередньо заданий матрицею аплікату. Наприклад:

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 2 & 3 & 2.1 & 1.5 \\ 1.3 & 3.3 & 5 & 3.7 & 2 \\ 1.3 & 3 & 5.7 & 4.1 & 2.9 \\ 1.5 & 2 & 6.5 & 4.8 & 4 \end{pmatrix}$$



Z

Побудова параметричного 3D-графіку

Побудувати параметричну 3D-поверхню (наприклад, сферу, тор, спіраль, фігуру типу «морська мушля», тощо) дещо складніше, ніж 2D-графік, тому що ви можете додати на графік лише значення Z. Розглянемо, як виконати побудову параметричного 3D-графіку за допомогою спеціальної матричної функції **CreateMesh** (Створити сітку)

$$F(u, v) := u \quad \text{mesh} := 30$$

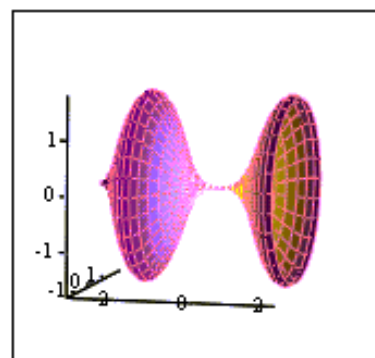
$$G(u, v) := f(u) \cdot \cos(v)$$

$$H(u, v) := f(u) \cdot \sin(v)$$

$$SX := \text{CreateMesh}(F, G, H, a, b, 0, 2\pi, \text{mesh})$$

Функція CreateMesh має такі параметри:

- Ім'я матриці значень або функції F;
- Початкове значення першої змінної s;
- Початкове значення другої змінної sl;
- Кінцеве значення першої змінної t;
- Кінцеве значення другої змінної tl;
- Число ліній сітки по першій змінній sgrid;
- Кількість ліній сітки по другій змінній tgrid;
- Карта відображення fmap.



SX

5 Розв'язання рівнянь у MathCAD

5.1 Розв'язання алгебраїчних рівнянь

Існує кілька методів знаходження рішення алгебраїчних рівнянь вигляду $f(x)=0$ в MathCad.

Розв'язання алгебраїчних рівнянь за допомогою функцій *root*, *polyroots*.

Загальний вигляд функції *root* наступний:

$root(f(x), x)$,

де $f(x)$ – функція, що описує ліву частину виразу виду $f(x)=0$,

x – ім'я змінної, щодо якої вирішується рівняння.

Функція *root* реалізує алгоритм пошуку кореня ітераційними чисельними методами і вимагає попереднього *завдання початкового наближення* змінної x , що шукається. Пошук кореня буде проводитись поблизу цього числа. Таким чином, присвоєння початкового значення вимагає попередньої інформації про зразкову локалізації кореня.

Функція дозволяє знайти як дійсні корені, так і комплексні. У разі комплексного кореня початкове наближення необхідно задати як комплексне число.

Якщо після багатьох ітерацій MathCAD не знаходить відповідного наближення, з'явиться повідомлення «відсутня збіжність». Ця помилка може бути викликана наступними причинами: 1) немає коріння рівняння; 2) корені рівняння розташовані далеко від початкового наближення; 3) вираз $f(x)$ має розриви між початковим наближенням та коренем; 4) вираз має комплексний корінь, але початкове наближення було дійсним і навпаки.

Для зміни точності, з якою функція *root* шукає корінь, потрібно змінити значення системної змінної TOL. Наприклад, після завдання в документі оператора $TOL := 0.00001$ точність обчислення кореня дорівнює 0.00001.

Для знаходження коріння поліноміального рівняння виду $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ використовується функція *polyroots*. На відміну від функції *root*, функція *polyroots* не вимагає початкового наближення та обчислює відразу всі коріння, як дійсні, так і комплексні.

Загальний вигляд функції *polyroots*:

$polyroots(v)$,

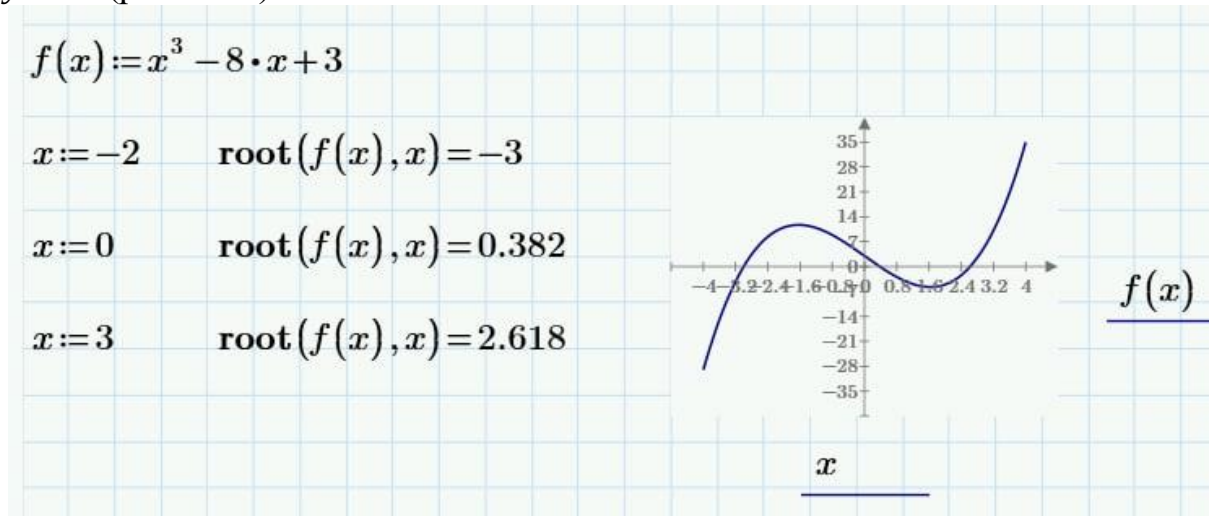
де v – вектор коефіцієнтів полінома довжини $n+1$,

n – ступінь полінома.

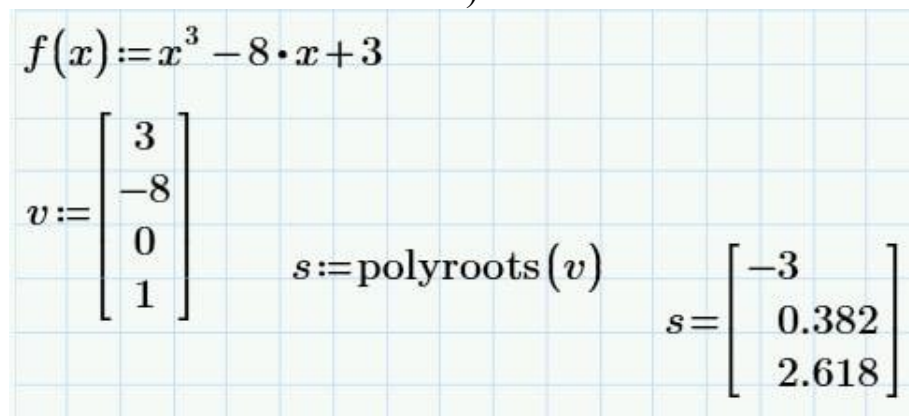
Вектор v формується наступним чином: у перший його елемент заноситься значення коефіцієнта полінома при x^0 , тобто, v_0 , другий елемент – значення коефіцієнта полінома при x^1 , тобто, v_1 і т.д. Таким чином, вектор заповнюється коефіцієнтами перед ступенями полінома зправа наліво.

Функція обчислює вектор довжини n , що складається із коренів полінома.

На рис. 5.1 представлено приклади обчислення коренів рівнянь за допомогою функцій *root* (рис. 5.1а, в залежності від початкового наближення) та *polyroots* (рис. 5.1б).



а)



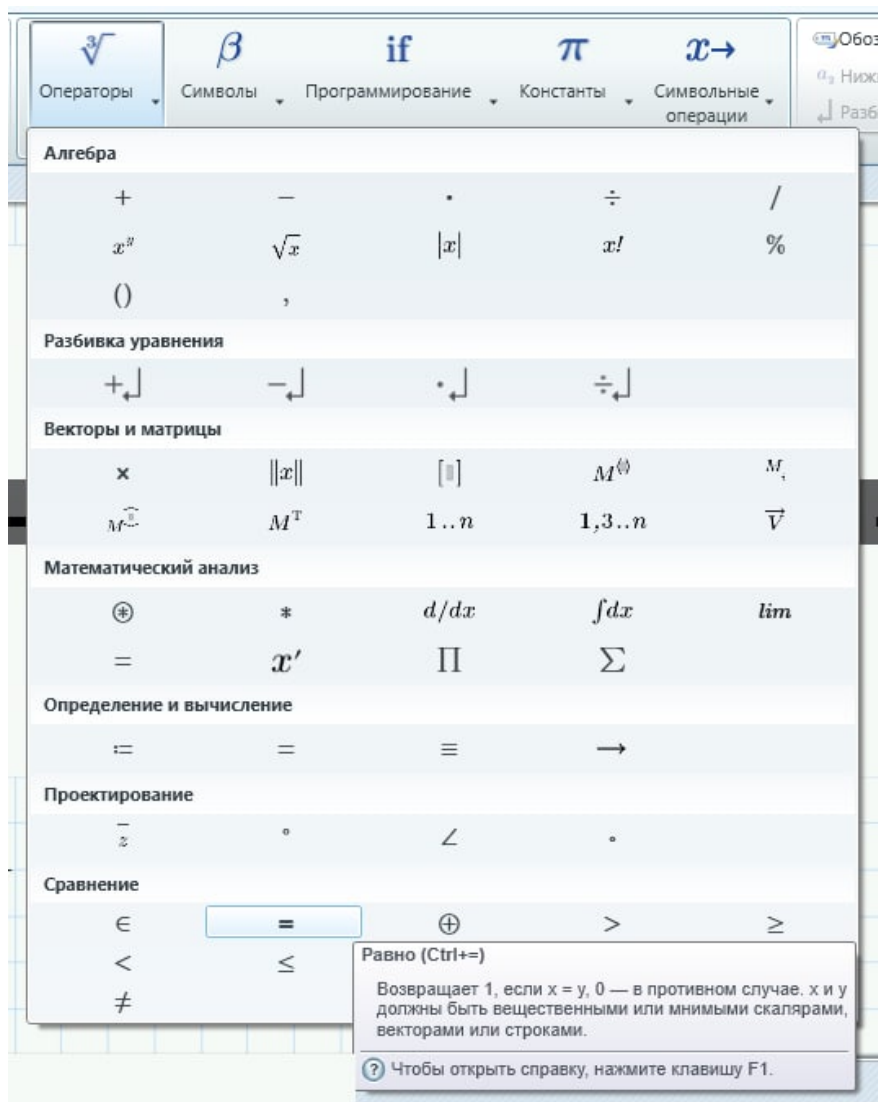
б)

Рисунок 5.1 – Обчислення коренів рівнянь за допомогою функцій *root* та *polyroots*.

Розв'язання систем алгебраїчних рівнянь

Програма MathCAD дає можливість вирішувати системи рівнянь та нерівностей. Найбільш поширеним методом вирішення рівнянь MathCAD є блоковий метод. Для вирішення системи цим методом необхідно виконати наступне:

1. Натисніть на місці документа, де потрібно вставити блок рішення.
2. На вкладці Математика (Math) у групі Области (Regions) клацніть Блок рішенняч (Solve Block).
3. Натисніть в області блоку рішення, а потім натисніть початкові наближення для всіх невідомих. Наприклад, для системи із двох рівнянь задайте x та y .
4. Використовуючи логічні оператори, ввести рівняння та нерівності у будь-якому порядку. **Увага!** Використовуйте логічний оператор "=" (Equal To), щоб визначити ці рівняння:



5. Викличте функції блоку рішення (наприклад, *Find*, *Minerr*, тощо).

6. Переконайтеся, що змінні x та y , локально визначені в даному блоці рішення, не мають значень за його межами.

Примітка. У версіях MathCAD 15 та старших блоку рішення задається за допомогою ключового слова *Given*. Блоковий метод у випадку цих версій програми передбачає такі етапи: а) задати початкове наближення всім невідомим, які входять у систему рівнянь; б) задати ключове слово *Given*, яке вказує, що далі слідує система рівнянь; в) ввести рівняння та нерівності у будь-якому порядку (використовувати кнопку логічної рівності на панелі знаків логічних операцій для набору логічної рівності « $\equiv$ » у рівнянні); г) ввести вираз, який включає функції блоку рішення (наприклад, *Find*, *Minerr*, тощо). Як блок вирішення у старих версіях програми інтерпретується частина документа, розташована між ключовими словами *Given* та функцією блоку рішення (наприклад, *Find*, *Minerr* тощо). Після набору вирішального блоку MathCAD повертає точне рішення рівняння або системи рівнянь.

Звернутися до функції *Find* можна декількома способами: $\text{Find}(x_1, x_2, \dots)$ = - корінь або коріння рівняння обчислюються та виводяться у вікно документа.

$x := \text{Find}(x_1, x_2, \dots)$ – формується змінна чи вектор, що містить обчислені значення коріння.

Повідомлення про помилку «Рішення не знайдено» з'являється тоді, коли система не має рішення або для рівняння, яке не має речовинного коріння, як початкове наближення взято речовинне число і навпаки.

Наближене рішення рівняння або системи можна отримати за допомогою функції *Minerr*. Якщо в результаті пошуку не може бути отримано подальше уточнення поточного наближення (тобто, рішення рівняння відсутнє), таке рівняння все одно можна "вирішити" за допомогою функції *Minerr* замість *Find*, Функція *Find* у цьому разі повертає повідомлення про помилку. Правила використання функції *Minerr* такі ж, як і для функції *Find*.

Приклади застосування блоку вирішення представлено на рис. 5.2 (а – версії MathCAD 15 та старші, б – MathCAD Prime).

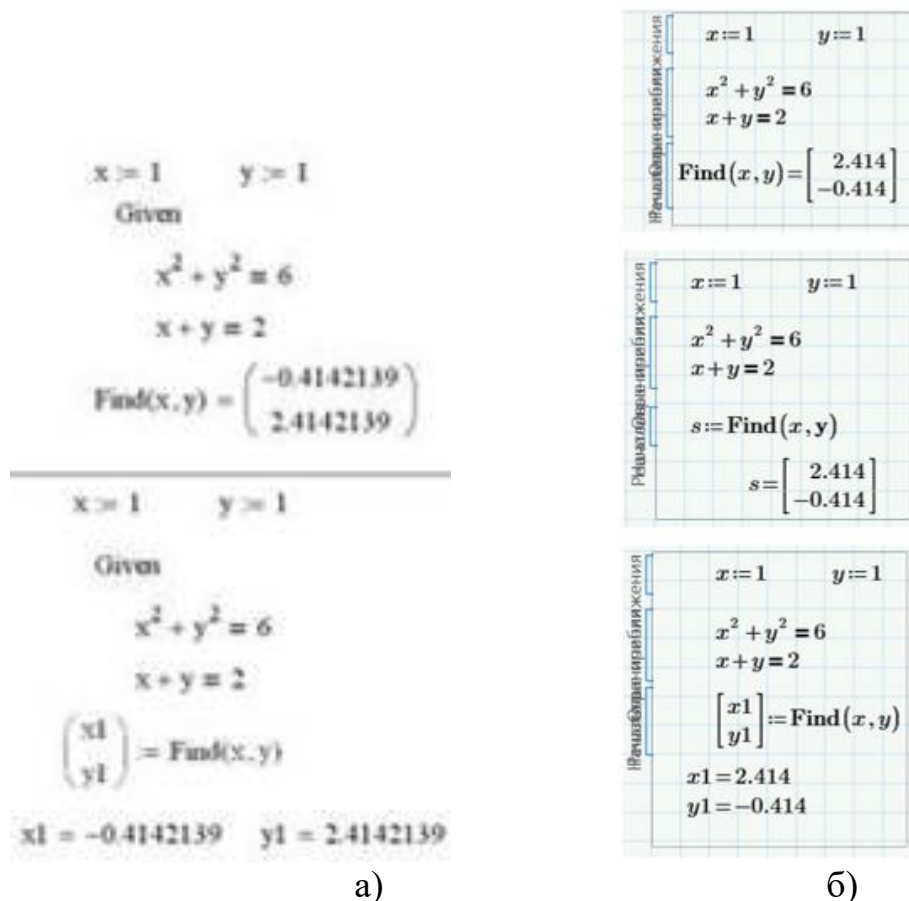
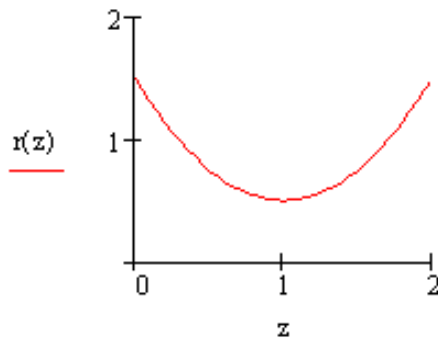


Рисунок 5.2 – Розв'язання систем рівнянь блоковим методом.

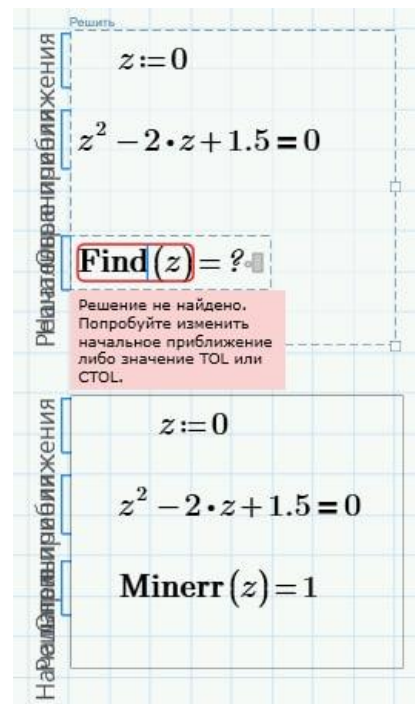
Пошук кореня *рівняння з одним невідомим* за допомогою функцій *Find*, *Minerr* виконується аналогічно.

Приклади застосування блоку вирішення представлено на рис. 5.3 (а – версії MathCAD 15 та старші, б – MathCAD Prime).

$r(z) := z^2 - 2 \cdot z + 1.5$
 $z := 0$ Given $r(z) = 0$ $z0 := \text{Find}(z)$
 $z := 0$ Given $r(z) = 0$ $z0 := \text{MinErr}(z)$
 $z := 0, 0.05 \dots 2$ $z0 = 1$



а)



б)

Рисунок 5.3 – Розв'язання рівнянь блоковим методом: пошук значення «близького» до кореня.

Для розв'язання систем лінійних рівнянь можна також використовувати загальноприйняті математичні методи: метод Крамера, метод зворотної матриці і т.д.

Приклад. Задана система лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад, система трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 6 \\
 x - y + z &= 2 \\
 2 \cdot x + y - z &= 1
 \end{aligned}$$

Лінійні рівняння можна вирішити за допомогою методу оберненої матриці. Представимо ліву частину рівнянь (1), (2) та (3) як добуток матриці коефіцієнтів A на вектор невідомих розв'язків X :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Праву частину запишемо як вектор:

$$b := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тоді рішення у MathCAD можна знайти:

$$X := A^{-1} \cdot b \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Такий запис можна застосовувати до систем лінійних рівнянь довільної розмірності.

Слід пам'ятати, що рішення є лівим добутком зворотної матриці коефіцієнтів і вектора результатів, тобто при множенні важлива послідовність множників. Розмірність матриці A та вектора вільних членів мають відповідати одна одній.

Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь (метод зворотної матриці) реалізований у MathCAD також у вбудованій функції *lsolve*. Загальний вигляд функції:

lsolve (a, b),

де a – матриця коефіцієнтів перед невідомими,

b – вектор вільних членів.

Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь

$$x + 3y = 5$$

$$2 \cdot x + y = 12$$

із використанням вбудованої функції *lsolve*:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, B) = \begin{bmatrix} 6.2 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

5.2 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

При розв'язанні диференціального рівняння (ЗДР) шуканою величиною є функція.

Для ЗДР невідома функція – функція однієї змінної. Диференціальні рівняння у часткових похідних – це диференціальні рівняння, у яких невідомою є функція двох чи більше змінних.

З диференціальних рівнянь у часткових похідних у MathCAD є можливість вирішувати рівняння з двома незалежними змінними: одновимірні параболічні та гіперболічні рівняння, такі як рівняння теплопровідності, дифузії, хвильові рівняння, а також двовірні еліптичні рівняння (рівняння Пуассона та Лапласа).

MathCAD не має універсальної функції для розв'язання диференціальних рівнянь, а містить близько двадцяти функцій для різних видів рівнянь, додаткових умов і методів розв'язання.

Кожна з цих функцій призначена для чисельного розв'язання диференціального рівняння, наприклад, ЗДР першого порядку. Диференціальне рівняння першого порядку — це рівняння, яке не містить похідних вище першого порядку від невідомої функції. Приклад: диференціальне рівняння $y' + 3y = 0$ з початковими умовами: $y(0) = 4$.

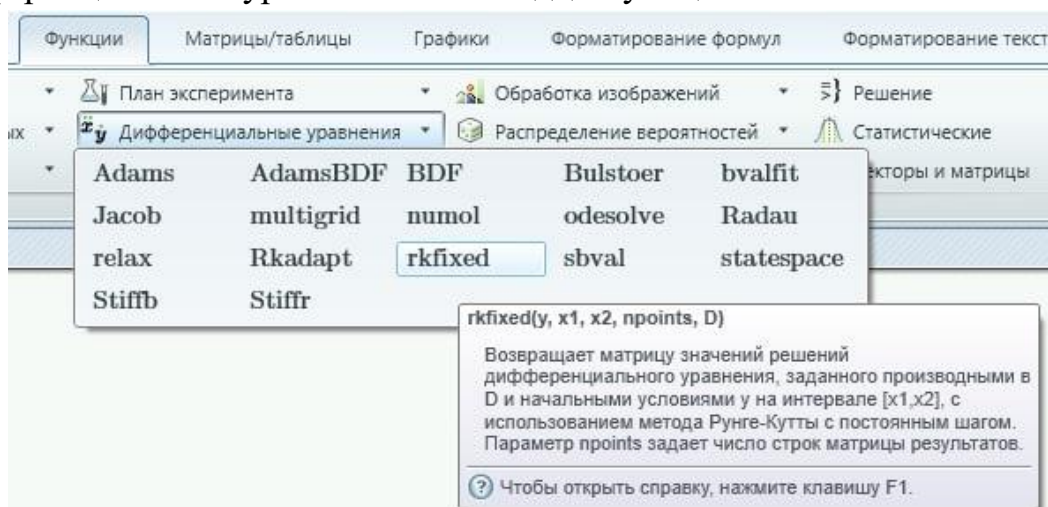
В результаті рішення виходить матриця, що містить значення функції, обчислені у деякій точці (на деякій сітці значень). Для кожного алгоритму, який використовується під час вирішення диференціальних рівнянь, MathCAD має різні вбудовані функції. Незважаючи на різні методи пошуку рішення, кожна з цих функцій вимагає, щоб були задані принаймні наступні величини, необхідні для пошуку рішення:

- Початкові умови.
- Набір точок, у яких потрібно знайти рішення.
- Саме диференціальне рівняння, записане у певному спеціальному вигляді, який буде описаний нижче.

Є два типи задач, для яких можливе чисельне рішення ОДУ за допомогою MathCAD:

- задача Коші, якою визначено початкові умови на шукані функції, тобто, задані значення цих функцій у початковій точці інтервалу інтегрування рівняння;
- крайові задачі, якими задані певні співвідношення відразу обох меж інтервалу.

Для вирішення диференціальних рівнянь із початковими умовами система MathCAD має ряд вбудованих функцій, які доступні в меню Дифференциальные уравнения на вкладці Функции.



Найбільш часто використовуються наступні функції для розв'язання диференціальних рівнянь:

Rkfixed – функція для розв'язання ЗДР та систем ЗДР методом Рунге-Кутта четвертого порядку зі сталим кроком;

Rkadapt – функція розв'язання ЗДР та систем ЗДР методом Рунге-Кутта зі змінним кроком;

Odesolve – функція, що вирішує ЗДР блоковим способом;

BDF – метод на основі формул диференціювання назад для жорстких систем диференціальних рівнянь.

Stiffb – метод Булірша-Штера, адаптований до жорстких систем диференціальних рівнянь.

StiffR – метод Розенброка для жорстких систем диференціальних рівнянь.

AdamsBDF – «автовибір» методу вирішення: автоматично визначається, чи є система жорсткою чи нежорсткою, і застосовується *Adams* чи *BDF* відповідно.

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь з використанням вбудованої функції *rkfixed*.

Функція *rkfixed* використовує для пошуку рішення чисельний метод Рунге-Кутти четвертого порядку.

Функція *rkfixed* має такі аргументи:

rkfixed (*y*, *x1*, *x2*, *npoints*, *D*),

де *y* = вектор початкових умов розмірності *n*,

n – порядок диференціального рівняння або число рівнянь в системі (якщо вирішується система рівнянь); для диференціального рівняння першого порядку, як, наприклад, рівняння вектор початкових значень вироджується в одну точку $y_0 = y(x_1)$.

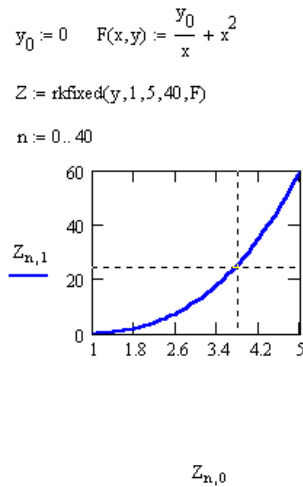
x1, *x2* – граничні точки інтервалу, у якому шукається розв'язання диференціальних рівнянь. Початкові умови, задані у векторі, — це значення рішення в точці *x1*.

npoints – кількість точок (крім початкової точки), у яких шукається наближене рішення. За допомогою цього аргументу визначається число рядків ($1 + npoints$) у матриці, що повертається функцією *rkfixed*.

D (*x*, *y*) = Функція, що повертає значення у вигляді вектора *n* елементів, що містять перші похідні невідомих функцій.

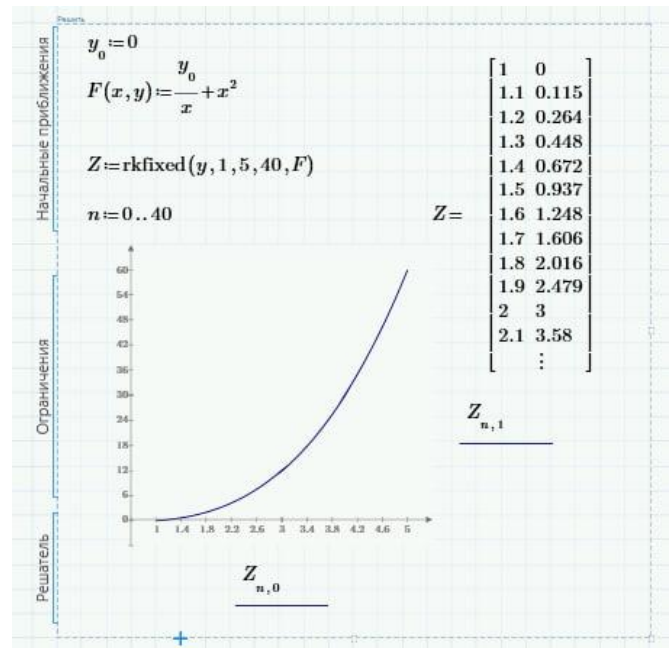
Приклад вирішення задачі Коші методом Рунге-Кутти з фіксованим

кроком (на прикладі диференційного рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$ при початковій умові $y(1)=0$ на відрізку $[1,5]$) із застосуванням блоку вирішення представлено на рис. 5.4 (а – версії MathCAD 15 та старші, б – MathCAD Prime).



	0	1
0	1	0
1	1.1	0.115
2	1.2	0.264
3	1.3	0.448
4	1.4	0.672
5	1.5	0.937
6	1.6	1.248
7	1.7	1.606
8	1.8	2.016
9	1.9	2.479
10	2	3
11	2.1	3.58
12	2.2	4.224
13	2.3	4.933
14	2.4	5.712
15	2.5	6.562

а)



б)

Рисунок 5.4 – Розв'язання задачі Коші методом Рунге-Кутти.

Приклад розв'язання на відрізку $[0, 10]$ методом Рунге-Кутти з фіксованим кроком задачі Коші, що включає систему з двох диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}x = y - x^2 - x \quad \frac{d}{dt}y = 3x - x^2 - y$$

при початкових умовах $x(0)=0$, $y(0)=1$ із застосуванням блоку вирішення представлено на рис. 5.5 (а – версії MathCAD 15 та старші, б – MathCAD Prime).

$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 - (y_0)^2 - y_0 \\ 3 \cdot y_0 - (y_0)^2 - y_1 \end{bmatrix}$
 $U := \text{rkfixed}(y, 0, 10, 100, F)$

а)

$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $F(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 - y_0^2 - y_0 \\ 3 \cdot y_0 - y_0^2 - y_1 \end{bmatrix}$
 $U := \text{rkfixed}(y, 0, 10, 100, F)$

б)

Рисунок 5.5 – розв'язання системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутти.

Як відомо, ЗДР вищих порядків можуть бути зведені до системи рівнянь першого порядку, із подальшим розв'язанням цієї системи.

Приклад: вирішити ЗДР другого порядку

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 2 \cdot \frac{d}{dx}y = e^x + x \cdot \cos(x)$$

початковими умовами $y(0)=0$, $\frac{d}{dx}y(0) = 1$ на відрізку $[0; \pi]$.

Позначивши y як y_0 , y' як y_1 , запишемо еквівалентну систему ЗДР першого порядку:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}y_0 = y_1 & y_0(0) = 0 \\ \frac{d}{dx}y_1 = 2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 + (e^x + x \cdot \cos(x)) & y_1(0) = 1 \end{bmatrix}$$

Подальше розв'язання ЗДР другого порядку зводиться до розв'язання системи ЗДР першого порядку:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 + (e^x + x \cdot \cos(x)) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, \pi, 314, F)$$

5.3 Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Якщо для диференціального рівняння n -го порядку k граничних умов задані у початковій точці x_1 , а $(n-k)$ граничних умов – у кінцевій точці x_2 , то така задача називається, як відомо, *крайовою задачею*. У MathCAD реалізовані функції, що дозволяють чисельно знайти умови в точках x_1 і x_2 .

Двоточкова крайова задача

Задача вирішується у два етапи. Спочатку за допомогою функції *sbval* знаходяться початкові значення, а потім застосовується одна з вище описаних функцій для вирішення стандартної задачі Коші на відрізку.

Отже, функція *sbval*($v, x_1, x_2, F, \text{load}, \text{score}$) шукає відсутні початкові умови, в точці x_1 ,

де v – вектор початкових наближень для початкових значень у точці x_1 ,

x_1, x_2 – граничні точки інтервалу;

$F(x, y)$ – вектор-стовпець з n елементів, що містить праві частини диференціальних рівнянь;

$\text{load}(x_1, v)$ – вектор-стовпець з n елементів, що містить початкові значення у точці x_1 ; деякі з значень-константи, інші невідомі та будуть знайдені у процесі рішення.

$\text{score}(x_2, y)$ – вектор-стовпець розмірності вектора v , що містить різницю між початковою умовою в точці x_2 та значенням шуканого рішення в цій точці.

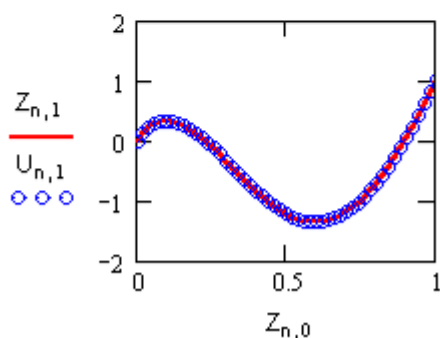
Приклад. Вирішити диференціальне рівняння $y^{(4)} + y = 0$ за граничних умов:
 $y(0) = 0 \quad y'(0) = 7$
 $y(1) = 1 \quad y'(1) = 10 \quad y''(1) = 5.$

Перший етап:

$$\begin{aligned}
 V &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Стартові умови для пошуку} \\
 F(x, y) &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -y_0 \end{pmatrix} \\
 L1(x1, V) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{score}(x2, y) := \begin{pmatrix} y_0 - 1 \\ y_1 - 10 \\ y_2 - 5 \end{pmatrix} \\
 S &:= \begin{pmatrix} -85.014 \\ 348.107 \\ -516.257 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y''(0) \\ y'''(0) \\ y'''(0) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Недостаючі} \\ \text{початкові умови} \\ \text{знайдено} \end{matrix} \\
 S &:= \text{sbval}(V, 0, 1, F, L1, \text{score})
 \end{aligned}$$

На другому етапі розв'язання крайової задачі вирішуємо ЗДР традиційним чисельним методом:

$$\begin{aligned}
 y &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \\
 Z &:= \text{rkfixed}(y, 0, 1, 50, F) \\
 U &:= \text{Rkadapt}(y, 0, 1, 50, F) \\
 n &:= 0..50
 \end{aligned}$$



Крайова задача з умовами всередині інтервалу.

Дана задача також вирішується у два етапи. На першому етапі використовується функція *balfit*, що шукає відсутні початкові умови в точках x_1 і x_2 , «зшиваючи» рішення, які виходять з цих точок, в точці x_f :

$$\text{balfit}(V1, V2, x1, x2, xf, F, \text{load1}, \text{load2}, \text{score}),$$

де $V1, V2$ – вектори початкових наближень для початкових значень у точках x_1 і x_2 ;

x_1, x_2 – граничні точки інтервалу;

$\text{load1}(x_1, V_1)$ – вектор-стовпець з n елементів, що містить початкові значення у точці x_1 ; деякі з значень-константи, інші невідомі та будуть знайдені у процесі вирішення;

$\text{load2}(x_2, V_2)$ – вектор-стовпець з n елементів, містить початкові значення у точці x_2 ; деякі з значень-константи, інші невідомі та будуть знайдені у процесі рішення;

$\text{score}(x_f, y)$ – вектор-стовпець розмірності n , що містить різницю між рішеннями, що починаються в точках x_1 і x_2 , у точці x_f .

Приклад. Розв'язати диференційне рівняння $y''=y$ за граничних умов $y(-1) = 1$ $y(3) = 2$, «зшиваючи» рішення у точці $x=0$.

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 := -1 & x_f := 0. & v_{10} := 1 \\ x_2 := 3 & & v_{20} := 1 \end{matrix}$$

$$\text{load1}(x_1, v_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ v_{10} \end{pmatrix} \quad \text{load2}(x_2, v_2) := \begin{pmatrix} 2 \\ v_{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{score}(x_f, y) := y \quad S1 := \text{bvalfit}(v_1, v_2, x_1, x_2, x_f, F, \text{load1}, \text{load2}, \text{score})$$

«Недостаючи» значення похідних у точках $x=-1$ та $x=3$, відповідно, знайдено:

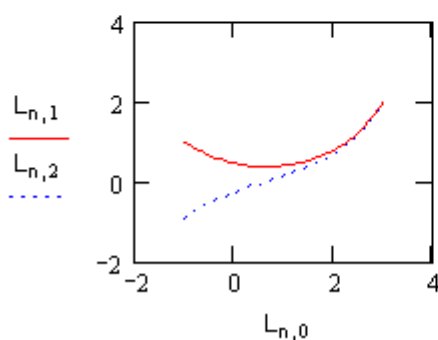
$$S1 = (-0.927 \quad 1.965)$$

Другий етап вирішення. Складаємо вектор початкових умов та реалізуємо метод Рунге-Кутти:

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ -0.927 \end{pmatrix}$$

$L := \text{rkfixed}(y, x_1, x_2, 40, F)$

$n := 0 \dots 40$



$L =$

	0	1	2
0	-1	1	-0.927
1	-0.9	0.912	-0.831
2	-0.8	0.833	-0.744
3	-0.7	0.763	-0.665
4	-0.6	0.7	-0.591
5	-0.5	0.645	-0.524
6	-0.4	0.595	-0.462
7	-0.3	0.552	-0.405
8	-0.2	0.514	-0.352
9	-0.1	0.482	-0.302
10	0	0.454	-0.255
11	0.1	0.43	-0.211
12	0.2	0.411	-0.169
13	0.3	0.397	-0.129
14	0.4	0.386	-0.09
15	0.5	0.379	-0.051

6. Завдання для самостійної роботи.

Завдання № 1.

Вивчення інтерфейсу MathCAD та виконання найпростіших обчислень

Мета та основні завдання роботи: дослідити особливості організації середовища MathCAD. Набути досвіду виконання найпростіших обчислень середовища MathCAD.

Послідовність виконання роботи

Згідно з отриманим індивідуальним завданням виконати наступне:

1. Створити новий документ MathCAD.
2. Набрати в верхній частині робочого аркуша MathCAD текст «Завдання №1», а також інший коментар (наприклад, тему, номер варіанта, прізвище студента та групу, дату виконання роботи).
3. Набрати текст завдання до першої частини роботи («1. Обчислити значення виразу»). Виконати дії відповідно до індивідуального завдання свого варіанту (табл. 6.1).
4. Зберегти документ MathCAD під іменем, що містить номер роботи, прізвище студента та варіант.
5. Набрати текст завдання до другої частини роботи. Виконати дії відповідно до індивідуального завдання свого варіанту (табл. 6.2). Результати розрахунку записати у змінну β . Вивести значення змінної β на екран.
6. Перемістити блок, у якому змінній a присвоюється значення, нижче (або лівіше) блоку розрахунку виразу β . Зробити висновки щодо послідовності обчислення блоків у MathCAD. Вказати у протоколі роботи, як виконати глобальне присвоєння змінній a значення.
7. Набрати текст завдання до третьої частини роботи. Виконати дії відповідно до індивідуального завдання свого варіанту (табл. 6.3). III. Обчислити значення виразу при заданих дискретних значеннях змінних. Результати

розрахунку записати у змінну **A**. Вивести значення змінних **a, b, c, A** на екран.

8. Зберегти документ MathCAD. Зберегти створений документ під тим же іменем у інших форматах:
 - a. у форматі MathCAD однієї з попередніх версій;
 - b. у форматі RTF;
9. Відкрити утворені у п. 7 документи. Зробити висновки щодо ефективності перетворення між форматами.

Індивідуальні завдання до роботи

Таблиця 6.1 – Обчислення значення найпростішого виразу.

№ варіан та	Арифметичний вираз	№ варіанта	Арифметичний вираз
1	$0.123^2 + \frac{32.265 + 2.56^3}{\sqrt[3]{456 + 3.12^{-0.236}}}$	16	$\sqrt[6]{12.26 + 2.65^3} + 5.26^{-1.26}$
2	$\frac{45.23 + 2.65^3}{5.26} - \sqrt{23.56^2 + 3.26^3}$	17	$\sqrt{\frac{2.65^3 + 0.265^2}{15.26}} + 0.12^4$
3	$\frac{23.6^2 + 3.25^3}{2.654} + \sqrt[7]{2.65 + 3.25^4}$	18	$15.26^3 + \sqrt[6]{\frac{12.23^4 + 3.26^5}{156.23 + 2.26}}$
4	$45.26^2 + 5.65 + \sqrt{\frac{2.65^3 + 0.265^2}{15.26}}$	19	$3.26^{-0.12} \cdot \sqrt{2.26^4 + 3.21^3} + 0.265^{-15}$
5	$2.36 + \frac{3.65^3 + 0.654^2}{0.265^{-2.365}}$	20	$\frac{12.26 + 3.26^3}{12.26} - 2.654 \cdot \sqrt[5]{2.26 + 1.26^3}$
6	$1.26^{-0.32} + \frac{2.56^3 - 3.26^4}{2 + 3.26 \cdot \sqrt[5]{2.65 + 0.265}}$	21	$\sqrt[7]{12.26^2 + 3.26^3} + 6.26^{-0.265} - \sqrt{456.26}$
7	$2.65^{-0.32} \cdot 3.26^2 + 0.26 \cdot \sqrt[6]{12.26 + 2.65}$	22	$\sqrt{2.26^2 + 3.26^3} + 0.5 \cdot 2.26^4 + \frac{126}{1.2 - 0.456}$
8	$0.25 \cdot \sqrt[8]{12.26 + 3.26^4} + 5.26^{-1.26}$	23	$\frac{12.26 + 3.26^3}{12.26} - 2.654 \cdot \sqrt[5]{2.26 + 1.26^3}$
9	$2.45 + \frac{1 - 2.6^3 + 0.514^2}{0.25^{-2.365}}$	24	$5.25^2 - 15.5 + \sqrt{\frac{2.5^4 + 0.25^3}{15.5}}$
10	$0.263^3 \cdot \sqrt[3]{1.23^2 + 6.23^3} - \sqrt{12.65 - 2.12^{-0.1}}$	25	$\sqrt[3]{12.26^2 + 3.26^3} + 6.26^{-0.254}$

№ варіан та	Арифметичний вираз	№ варіанта	Арифметичний вираз
11	$1.26^{-0.32} + \frac{2.56^3 - 3.26^4}{2 + 3.26 \cdot \sqrt[5]{2.65 + 0.265}}$	26	$\sqrt[7]{12.26^2 + 3.26^3} + 6.26^{-0.265} - \sqrt{456.26}$
12	$2.65^{-0.32} \cdot 3.26^2 + 0.26 \cdot \sqrt[6]{12.26 + 2.65}$	27	$\sqrt{2.26^2 + 3.26^3} + 0.5 \cdot 2.26^4 + \frac{126}{1.2 - 0.456}$
13	$0.25 \cdot \sqrt[8]{12.26 + 3.26^4} + 5.26^{-1.26}$	28	$\frac{12.26 + 3.26^3}{12.26} - 2.654 \cdot \sqrt[5]{2.26 + 1.26^3}$
14	$2.45 + \frac{1 - 2.6^3 + 0.514^2}{0.25^{-2.365}}$	29	$5.25^2 - 15.5 + \sqrt{\frac{2.5^4 + 0.25^3}{15.5}}$
15	$0.263^3 \cdot \sqrt[3]{1.23^2 + 6.23^3} - \sqrt{12.65 - 2.12^{-0.}}$	30	$\sqrt[3]{12.26^2 + 3.26^3} + 6.26^{-0.254}$

Таблиця 6.2 – Обчислення значення виразу при заданих значеннях змінних.

№ варіан та	Змінні				Вираз $\beta =$
	a	b	c	X	
1	2.23	0.45	3.25	0.123	$a \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \cos bx + c$
2	0.23	135	0.36	0.231	$a \cdot \cos(bc \cdot \sin x) + c$
3	1.23	0.68	136	1.235	$\sqrt{a + b \cdot c^{\sin x}} + 1$
4	2.36	0.56	3.65	1.365	$\sqrt[3]{a \cdot \operatorname{tg} x + c \cdot \sin b}$
5	0.36	1.23	5.26	0.236	$\frac{bx^2 - a}{e^{ax} - 1} + \sqrt[3]{x^{0.35} + 2ac}$
6	2.65	3.23	1.25	0.254	$\frac{\sin x}{\sqrt{1 + a^3 \sin^2 x}} - c \cdot \ln bx$
7	0.45	3.26	2.26	1.265	$bac^{ax^2} + a \cdot \sqrt{c + 1.5}$
8	2.36	1.25	5.36	0362	$e^{-ax} \cdot \sqrt{x + 1} + e^{-bx} \cdot \sqrt[3]{x + 1.5}$
9	3.23	2.56	2.65	1.254	$b^x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt[5]{x + c}$
10	4.56	2.56	8.45	0.698	$\frac{x + \arccos 2x}{x + \sqrt{a + b \sin 3c}}$
11	536	4.56	5.65	1.562	$ae^{-\sqrt{x}} - be^{-2\sqrt{x}}$
12	6.13	5.98	1.25	1.302	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - e^{-bx} \cdot \sqrt{x + 1}$
13	2.31	4.89	2.26	0.365	$e^{-ax} \cos x + e^{-bx} \sin x$
14	3.65	5.25	2.36	0.987	$2^x \lg ax - 3^x \lg bx$

№ варіан та	Змінні				Вираз $\beta =$
	a	b	c	X	
15	2.34	2.01	5.26	1.205	$e^{-ax} \cdot \frac{x + \sqrt{x+a}}{c - \sqrt{2x+b}}$
16	3.51	3.02	4.21	0.236	$\frac{a}{x+2} e^{-bx^2} + \ln(a+bx)$
17	1.62	5.12	3.21	0.365	$e^{-ax} \cdot \sqrt[3]{ax+b \sin 2x}$
18	3.26	3.23	6.12	1.364	$\frac{ax + e^{-x} \cos bx}{bx - e^{-x} \sin bx + 1}$
19	6.13	5.98	1.25	1.302	$\arccos\left(\frac{x}{2a}\right) - e^{-bx} \cdot \sqrt{(x+1)^2}$
20	2.31	4.89	2.26	0.365	$e^{-bx} \sin x + e^{-ax} \cos^2 x$
21	4.56	2.56	8.45	0.698	$\frac{x + \arccos 2x}{x + \sqrt{a+b \sin 3c}}$
22	536	4.56	5.65	1.562	$ae^{-\sqrt{x}} - be^{-2\sqrt{x}}$
23	6.13	5.98	1.25	1.302	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - e^{-bx} \cdot \sqrt{x+1}$
24	2.31	4.89	2.26	0.365	$e^{-ax} \cos x + e^{-bx} \sin x$
25	3.65	5.25	2.36	0.987	$2^x \lg ax - 3^x \lg bx$
26	2.34	2.01	5.26	1.205	$e^{-ax} \cdot \frac{x + \sqrt{x+a}}{c - \sqrt{2x+b}}$
27	3.51	3.02	4.21	0.236	$\frac{a}{x+2} e^{-bx^2} + \ln(a+bx)$
28	1.62	5.12	3.21	0.365	$e^{-ax} \cdot \sqrt[3]{ax+b \sin 2x}$
29	3.26	3.23	6.12	1.364	$\frac{ax + e^{-x} \cos bx}{bx - e^{-x} \sin bx + 1}$
30	6.13	5.98	1.25	1.302	$\arccos\left(\frac{x}{2a}\right) - e^{-bx} \cdot \sqrt{(x+1)^2}$

Таблиця 6.3 – Обчислення значення виразу при заданих дискретних значеннях змінних.

№ варіанта	Змінні			Дискретний		Вираз $A =$
	a	b	c	Інтервал	Крок	
1	2.32	0.45	3.25	$X \in (0.1; 0.4)$	0.025	$\frac{x + a \cos 2x}{x + \sqrt{a+b \sin 3c}}$
2	1.23	1.35	0.36	$X \in (1; 3)$	0.2	$e^{-bx} \sin(ax+b) - \sqrt{bx+a}$
3	2.36	0.68	1.36	$X \in (0; 2)$	0.25	$2^{-x} \arctg(x+a) - 3^{-bx} \cos(x+b)$
4	3.21	9.56	3.65	$X \in (1; 4)$	0.5	$e^{2x} \lg(a+x) - b^{3x} \lg(b-x)$

№ варіанта	Змінні			Дискретний		Вираз $A=$
	a	b	c	Інтервал	Крок	
5	2.36	4.23	5.26	$X \in (1;2)$	0.2	$x \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + b \arcsin\left(\frac{x}{b}\right)$
6	4.12	3.23	1.25	$X \in (0;3)$	0.5	$\frac{a^{2x} + b^{-x} \cos(a+b)x}{x+1}$
7	5.02	3.26	2.26	$X \in (1;2)$	0.1	$e^{-ax} \cdot \sqrt[3]{ax + b \sin 2x}$
8	3.01	1.25	5.36	$X \in (1;3)$	0.2	$\frac{a}{x+2} e^{-bx^2} + \ln(a+bx)$
9	2.06	2.56	2.65	$X \in (0;2)$	0.25	$e^{-ax} \cdot \frac{x + \sqrt{x+a}}{c - \sqrt{2x+b}}$
10	5.31	2.56	8.45	$X \in (1;4)$	0.5	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - e^{-bx} \cdot \sqrt{x+1}$
11	3.21	4.56	5.65	$X \in (1;2)$	0.2	$e^{-ax} \cos x + e^{-bx} \sin x$
12	1.23	5.98	1.25	$X \in (0;0.4)$	0.05	$\frac{x + a \cos 2x}{x + \sqrt{a+b} \sin 3c}$
13	1.56	4.89	2.26	$X \in (1;2)$	0.1	$b^x \cdot \arctg\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt[5]{x+c}$
14	0.45	5.25	2.36	$X \in (1;3)$	0.2	$bae^{ax^2} + a \cdot \sqrt{c+1.5}$
15	2.36	2.01	5.26	$X \in (0;2)$	0.25	$\frac{\sin x}{\sqrt{1+a^3 \sin^2 x}} - c \cdot \ln bx$
16	3.69	3.02	4.21	$X \in (1;4)$	0.5	$\sqrt[3]{a \cdot \tg x + c \cdot \sin b}$
17	2.34	5.12	3.21	$X \in (1;2)$	0.2	$e^{0.89x} \cdot \lg(a^2 + x^3) - \arctg(c^2 + b^3)$
18	5.02	3.26	2.26	$X \in (1;2)$	0.1	$e^{-bx} \cdot \sqrt[3]{a^2 x + b \sin^2 x}$
19	3.01	1.25	5.36	$X \in (1;3)$	0.2	$\frac{a}{x+2} - e^{-bx^2} + \lg(a+bx^2)$
20	3.25	3.23	6.12	$X \in (0;3)$	0.5	$a \cdot \cos(bc \cdot \sin x) + c$
21	3.21	4.56	5.65	$X \in (1;2)$	0.2	$e^{-ax} \cos x + e^{-bx} \sin x$
22	1.23	5.98	1.25	$X \in (0;0.4)$	0.05	$\frac{x + a \cos 2x}{x + \sqrt{a+b} \sin 3c}$
23	1.56	4.89	2.26	$X \in (1;2)$	0.1	$b^x \cdot \arctg\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt[5]{x+c}$
24	0.45	5.25	2.36	$X \in (1;3)$	0.2	$bae^{ax^2} + a \cdot \sqrt{c+1.5}$
25	2.36	2.01	5.26	$X \in (0;2)$	0.25	$\frac{\sin x}{\sqrt{1+a^3 \sin^2 x}} - c \cdot \ln bx$

№ варіанта	Змінні			Дискретний		Вираз $A=$
	a	b	c	Інтервал	Крок	
26	3.69	3.02	4.21	$X \in (1;4)$	0.5	$\sqrt[3]{a \cdot \operatorname{tg} x + c \cdot \sin b}$
27	2.34	5.12	3.21	$X \in (1;2)$	0.2	$e^{0.89x} \cdot \lg(a^2 + x^3) - \operatorname{arctg}(c^2 + b^3)$
28	5.02	3.26	2.26	$X \in (1;2)$	0.1	$e^{-bx} \cdot \sqrt[3]{a^2 x + b \sin^2 x}$
29	3.01	1.25	5.36	$X \in (1;3)$	0.2	$\frac{a}{x+2} - e^{-bx^2} + \lg(a + bx^2)$
30	3.25	3.23	6.12	$X \in (0;3)$	0.5	$a \cdot \cos(bc \cdot \sin x) + c$

Завдання № 2.

Дослідження прийомів роботи з векторами і матрицями в середовищі MathCAD

Мета та основні завдання роботи: дослідити особливості виконання обчислень з векторами і матрицями.

Послідовність виконання роботи

Згідно з отриманим індивідуальним завданням виконати наступне:

1. Створити новий документ MathCAD.
 2. Набрати в верхній частині робочого аркуша MathCAD заголовок «Завдання №2», а також додатковий коментар (наприклад, тему роботи, номер варіанта, прізвище студента та групу, дату виконання роботи).
 3. Використовуючи дані таблиці 6.4, виділити матрицю A (матриця коефіцієнтів) із заданої у табл. системи лінійних рівнянь.
 4. Інвертувати матрицю A .
 5. Транспонувати матрицю A .
 6. Знайти визначник матриці A .
 7. Використовуючи дані таблиць 6.4 і 6.5, знайти матрицю $\alpha = A \cdot B \cdot C$ і максимальний елемент у цій матриці
- Примітка. Матриці A , B , C – це матриці коефіцієнтів при невідомих в системах рівнянь з таблиці 6.4 (номера систем дивіться відповідно у таблиці 6.5).
8. Використовуючи дані таблиць 6.4 і 6.5, знайти матрицю $\beta = A \cdot B + B \cdot C$ і мінімальний елемент у цій матриці.
 9. Використовуючи дані таблиць 6.4 і 6.5, знайти матрицю $\lambda = A^2 - B^2$.
 10. Використовуючи дані таблиці 6.4, виділити матрицю B (матриця правих частин – вільних членів системи рівнянь) із заданої у табл. системи лінійних рівнянь.

11. Використовуючи дані таблиці 6.4, дослідити задану систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A \cdot X = B$ на наявність розв'язку (із використанням *rank* – вбудованої функції MathCAD, знайти ранг матриці та ранг розширеної матриці). Якщо розв'язок системи існує, знайти його а) за методом зворотньої матриці; б) за формулами Крамера; в) вбудованим засобами MathCAD для вирішення лінійних рівнянь;
12. Зберегти документ MathCAD під іменем, що містить номер роботи, прізвище студента та варіант.

Індивідуальні завдання до роботи

Таблиця 6.4 – Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

№ варіанта	Система лінійних рівнянь	№ варіанта	Система лінійних рівнянь
1.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 20 \\ 4.5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6.5x_4 = -4 \\ -7x_1 + 9.5x_2 + 10x_3 - 4.5x_4 = 15 \\ 8x_1 - 2.5x_2 + 8x_3 + 8.5x_4 = 40 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$

№ варіанта	Система лінійних рівнянь	№ варіанта	Система лінійних рівнянь
7.	$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 2x_4 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 7 \\ 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - 14x_3 + 12x_4 = -4 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_1 - 5.5x_2 + 3.5x_3 + 6x_4 = 12 \\ 7x_1 + 9x_2 + 12.5x_3 - 45x_4 = -20 \\ 8x_1 + 2.5x_2 - 8x_3 + 8.5x_4 = -8 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 5x_1 + 1.5x_2 + 6x_3 - x_4 = 20 \\ 4.5x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 6.5x_4 = 14 \\ -7.5x_1 + 9x_2 + 10.5x_3 - 4x_4 = -15 \\ 8x_1 - 2.5x_2 + 8x_3 + 8.5x_4 = 40 \end{cases}$	25	$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ 2.5x_1 - 3.5x_2 + 4.5x_3 + 5.5x_4 = 20 \\ 7x_1 - 9x_2 + 12.5x_3 + 45x_4 = -20 \\ 8.5x_1 + 2.5x_2 - 8.5x_3 + 8.5x_4 = -10 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$
14.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 20 \\ 4.5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6.5x_4 = -4 \\ -7x_1 + 9.5x_2 + 10x_3 - 4.5x_4 = 15 \\ 8x_1 - 2.5x_2 + 8x_3 + 8.5x_4 = 40 \end{cases}$

Таблиця 6.5 – Дані для отримання матриць А, В, С,

№ варіанта	А	В	С	№ варіанта	А	В	С
1.	1	14	8	16	16	7	14
2.	2	13	7	17	17	6	13
3.	3	12	6	18	18	5	12
4.	4	11	5	19	19	4	11
5.	5	10	4	20	20	3	10
6.	6	9	3	21	21	2	9
7.	7	8	2	22	22	1	8
8.	8	4	7	23	23	5	8
9.	9	4	6	24	24	6	3
10.	10	8	2	25	25	3	6
11	11	9	3	26	26	2	9
12	12	8	2	27	27	1	8
13	13	4	7	28	28	5	8
14	14	4	6	29	29	6	3
15	15	8	2	30	30	3	6

Завдання № 3.

Дослідження прийомів введення-виведення даних, аналізу та візуалізації даних у середовищі MathCAD

Мета та основні завдання роботи: дослідити особливості введення-виведення, аналізу даних та побудови графіків.

Послідовність виконання роботи

Згідно з отриманим індивідуальним завданням виконати наступне:

1. Створити новий документ MathCAD.
2. Набрати в верхній частині робочого аркуша MathCAD заголовок «Завдання №3», а також додатковий коментар (наприклад, тему роботи, номер варіанта, прізвище студента та групу, дату виконання роботи);
3. Використовуючи дані таблиці 6.6, відповідно до свого варіанта виконати побудову графіка №1 залежності $y = f(x)$. Дослідити поведінку функції в області її допустимих значень, обрати інтервал зміни аргументу, що найбільш повно характеризує поведінку функції, побудувати графік №2 зміни функції у цьому інтервалі. Із використанням засобу трасування знайти координати екстремумів на графіку №1. Позначити на графіку №1 за допомогою маркерів MathCAD абсциси і ординати екстремумів функції.
4. Засобами MathCAD знайти аналітичний вираз для похідної заданої функції (табл. 6.6). Побудувати графік №3, що містить на одному полі дві залежності: функцію та її похідну. Відформатувати графік №3: нанести лінії сітки, відобразити представлення функції чорною неперервною лінією, а її похідної – синьою пунктирною лінією
5. Створити вектор X , заповнивши його послідовністю чисел від -4 до 2 з кроком 0,5. Створити вектор $Y1$, заповнивши його значеннями функції $f(x)$ з табл. 6.6, розрахованими для компонентів вектора X . Побудувати декартів графік залежності $Y1$ від X .
6. Записати вміст вектора X у текстовий файл, назвавши його «(Прізвище).txt», де (Прізвище) – прізвище студента.

7. Створити вектор Y2, заповнивши його послідовністю чисел від -4 до 5 з кроком 0,5. Створити вектор X2, почитавши у нього вміст текстового файлу (Прізвище).txt. Створити вектор Z2, заповнивши його значеннями функції $Z = f(x, y)$, розрахованими для компонентів вектора X2 та Y2. Побудувати графік залежності Z2 від X2 та Y2.
8. Використовуючи дані таблиці 6.7, відповідно до свого варіанта побудувати графік функції $Z = f(x, y)$. Функцію попередньо задати у вигляді функції користувача MathCAD.
9. Зберегти документ MathCAD під іменем, що містить номер роботи, прізвище студента та варіант.

Індивідуальні завдання до роботи

Таблиця 6.6 – Вихідні дані для побудови Декартових графіків

№ варіанту	Вираз $f(x)$
1	$(\sin x)^2 - \frac{5}{6} \sin x + \frac{1}{6}$
2	$(\sin x)^2 + \frac{7}{12} \sin x + \frac{1}{12}$
3	$(\sin x)^2 - \frac{1}{30} \sin x - \frac{1}{30}$
4	$(\cos x)^2 + \frac{2}{35} \cos x + \frac{1}{35}$
5	$(\cos x)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) \cos x + \frac{1}{4\sqrt{2}}$
6	$(\cos x)^2 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{18}$
7	$(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6$
8	$(\ln x)^2 - \ln x - 2$
9	$(\ln x)^2 - \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{8}$
10	$(\operatorname{tg} x)^2 + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} x - \sqrt{3}$
11	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{28}{9} \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}$

№ варіанту	Вираз $f(x)$
12	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{53}{6} \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}$
13	$x^4 - 7x^2 + 10$
14	$x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 1$
15	$x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 3$
16	$(\sin x)^2 + \frac{5}{6} \sin x + \frac{1}{6}$
17	$(\sin x)^2 - \frac{7}{12} \sin x + \frac{1}{12}$
18	$(\sin x)^2 + \frac{1}{30} \sin x - \frac{1}{30}$
19	$(\cos x)^2 - \frac{2}{35} \cos x - \frac{1}{35}$
20	$(\cos x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) \cos x - \frac{1}{4\sqrt{2}}$
21	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{18}$
22	$(\lg x)^2 + \frac{5}{3} \lg x - \frac{2}{3}$
23	$(\lg x)^2 - \lg x - \frac{3}{4}$
24	$(\lg x)^2 + \frac{3}{4} \lg x - \frac{1}{4}$
25	$(\operatorname{tg} x)^2 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$
26	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{7}{4} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$
27	$(\operatorname{tg} x)^2 + \frac{37}{6} \operatorname{tg} x + 1$
28	$x^4 - 11x^2 + 24$
29	$x^4 - \frac{26}{5}x^2 + 1$
30	$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5$

Таблиця 6.7 – Вихідні дані для побудови тривимірних графіків

№	Завдання	№	Завдання	№	Завдання
1	$z = x^2y + \frac{x^2}{y} + \frac{4}{x}$	11	$z = 3y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{x^2y}$	21	$z = 2xy + \frac{3}{y} + \frac{27}{x^2y}$
2	$z = 2xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$	12	$z = x^3 + y^3 + \frac{3}{xy}$	22	$z = 3x^3 + 3y^3 + \frac{9}{xy}$
3	$z = \frac{1}{4}x^2y + \frac{x^2}{y} + \frac{2}{x}$	13	$z = 2\sqrt{x} + 3y + \frac{1}{xy^3}$	23	$z = \sqrt{xy} + \frac{9}{y} + \frac{36}{x}$
4	$z = 2xy + \frac{3}{y} + \frac{27}{x^2y}$	14	$z = 2x + \frac{2}{x\sqrt{y}} + y$	24	$z = x^2y + \frac{3}{y} + \frac{2y}{x}$
5	$z = 3x^3 + 3y^3 + \frac{9}{xy}$	15	$z = 4y\sqrt{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{\sqrt{x}}$	25	$z = x^2y + \frac{x^2}{y} + \frac{4}{x}$
6	$z = xy + \frac{2}{x^4y^2} + \frac{2}{y^2}$	16	$z = 3\sqrt[3]{x} \cdot y + \frac{2}{y} + \frac{1}{xy}$	26	$z = 2xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$
7	$z = xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x^2y}$	17	$z = x^2y + \frac{4x^2}{y} + \frac{8}{x}$	27	$z = \sqrt{x} \cdot y + \frac{4}{xy} + \frac{1}{y}$
8	$z = x + \frac{2y}{\sqrt{x}} + \frac{2}{y}$	18	$z = \sqrt{xy} + \frac{9}{y} + \frac{36}{x}$	28	$z = 2\sqrt{x} + 3y + \frac{1}{xy^3}$
9	$z = \frac{2}{9}xy^4 + \frac{8}{x} + \frac{16}{3y}$	19	$z = x^2y + \frac{3}{y} + \frac{2y}{x}$	29	$z = xy + \frac{2}{x^4y^2} + \frac{2}{y^2}$
10	$z = y + \frac{2x}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x}$	20	$z = \sqrt{x} \cdot y + \frac{4}{xy} + \frac{1}{y}$	30	$z = x^2y + \frac{x^2}{y} + \frac{4}{x}$

Завдання № 4.

Дослідження прийомів реалізації наближених чисельних методів у середовищі MathCAD

Мета та основні завдання роботи: дослідити особливості реалізації чисельних методів у середовищі MathCAD.

Послідовність виконання роботи

Згідно з отриманим індивідуальним завданням виконати наступне:

1. Створити новий документ MathCAD.
2. Набрати в верхній частині робочого аркуша MathCAD заголовок «Завдання №4», а також додатковий коментар (наприклад, тему роботи, номер варіанта, прізвище студента та групу, дату виконання роботи);
3. Використовуючи дані таблиці 6.8, відповідно до свого варіанта виконати знайти аналітичний вираз часткових похідних функції $F(x, y, z)$ та значення цих похідних у заданій точці M .
4. Для заданої підінтегральної функції (використовуючи дані таблиці 6.9, відповідно до свого варіанта) знайти вираз первісної (обчислити невизначений інтеграл). Обчислити визначений інтеграл: 1) безпосередньо із використанням можливостей MathCAD; 2) за формулою Ньютона-Лейбніца із використанням знайденого значення первісної у вигляді функції користувача.
5. Використовуючи дані таблиці 6.10, відповідно до свого варіанта виконати обчислення із поліномами, використовуючи 1) можливості меню **Symbolics**; 2) вбудовані функції MathCAD. У поліномі $P_{1n}(x)$ відкрити дужки і звести подібні члени (використати команду **collect**). Розкласти на множники поліном $P_{2n}(x)$ (використати команду **factor**). Розділити поліном $P_{3n}(x)$ на поліном $P_{4n}(x)$ із залишком (використати команди **Symbolics, Variable, Convert to Partial Fraction**). Знайти всі корені поліному $P_{5n}(x)$ двома методами: а) використовуючи функцію **solve**; б) використовуючи функцію **polyroots** (при цьому стовпчик коефіцієнтів полінома слід шукати із використанням функції **coeff**). Перевірити правильність результатів шляхом підстановки. Зробити висновки щодо того, який з методів є більш точним.
6. Із використанням вбудованих функцій MathCAD, вирішити методом Рунге-Кутти задачу Коші для звичайного диференційного рівняння (взявши вихідні дані з таблиці 6.11, відповідно до свого варіанта).
7. Зберегти документ MathCAD під іменем, що містить номер роботи, прізвище студента та варіант.

Таблиця 6.8 – Вихідні дані для визначення похідних

<i>№ варіанту</i>	<i>Функція</i>	<i>Похідні</i>	<i>Точка</i>
1	$F(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2 - z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y \partial z^2},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-1; 2; 0).$
2	$F(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 - y)}{z}$	$\frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^2 \partial z^2},$ $\frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^1 \partial z^3}$	$M(1; -2; 2).$
3	$F(x, y, z) = \frac{\cos(xy)}{z - x^2}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y \partial z^3}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(-1; 1; 2).$
4	$F(x, y, z) = \frac{e^{z-x^2}}{y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y \partial z^3}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(-1; 1; 3).$
5	$F(x, y, z) = \frac{\arctg(x+z)}{y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}, \frac{\partial^7 F}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z}$	$M(-2; -1; 1).$
6	$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y + x}{z - 2y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y \partial z^3}$	$M(-1; -1; 2).$
7	$F(x, y, z) = \frac{x^2 + z}{z - y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^8 F}{\partial x^2 \partial y^4 \partial z^2},$ $\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}$	$M(-1; -1; 1).$
8	$F(x, y, z) = \frac{z^3 + e^y}{x - y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-1; 2; 1).$
9	$F(x, y, z) = \frac{e^x \cdot z^3 - 1}{y + 1}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-1; 1; 1).$
10	$F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z - 2x}{y}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}, \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y \partial z}$	$M(0; -1; 1).$
11	$F(x, y, z) = \frac{e^y x^3 - y}{z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^8 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^4},$	$M(-2; -1; 1).$

№ варіанту	Функція	Похідні	Точка
		$\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	
12	$F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z-x}{y+2}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y^2 \partial z}$	$M(1; -1; 2).$
13	$F(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1-x-y-z}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(1; -1; -1).$
14	$F(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-x-y-z}}{x}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(1; -1; -2).$
15	$F(x, y, z) = \sqrt[3]{y+e^x} \cdot \sqrt{z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z},$ $\frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(2; -1; 1).$
16	$F(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2 - z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y \partial z^2},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-1; 2; 0).$
17	$F(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 - y)}{z}$	$\frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^2 \partial z^2},$ $\frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^1 \partial z^3}$	$M(1; -2; 2).$
18	$F(x, y, z) = \frac{\cos(xy)}{z - x^2}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y \partial z^3}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(-1; 1; 2).$
19	$F(x, y, z) = \frac{e^{z-x^2}}{y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y \partial z^3}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(-1; 1; 3).$
20	$F(x, y, z) = \frac{\arctg(x+z)}{y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}, \frac{\partial^7 F}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z}$	$M(-2; -1; 1).$
21	$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y + x}{z - 2y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y \partial z^3}$	$M(-1; -1; 2).$
22	$F(x, y, z) = \frac{x^2 + z}{z - y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^8 F}{\partial x^2 \partial y^4 \partial z^2},$ $\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}$	$M(-1; -1; 1).$
23	$F(x, y, z) = \frac{z^3 + e^y}{x - y}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2},$	$M(-1; 2; 1).$

№ варіанту	Функція	Похідні	Точка
		$\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	
24	$F(x, y, z) = \frac{e^x \cdot z^3 - 1}{y + 1}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-1; 1; 1).$
25	$F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z - 2x}{y}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}, \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y \partial z}$	$M(0; -1; 1).$
26	$F(x, y, z) = \frac{e^y x^3 - y}{z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^8 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^4},$ $\frac{\partial^7 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$	$M(-2; -1; 1).$
27	$F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z - x}{y + 2}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y^2 \partial z}$	$M(1; -1; 2).$
28	$F(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1 - x - y - z}}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(1; -1; -1).$
29	$F(x, y, z) = \frac{\sqrt{1 - x - y - z}}{x}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(1; -1; -2).$
30	$F(x, y, z) = 3\sqrt[3]{y + e^x} \cdot \sqrt{z}$	$\frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z},$ $\frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$	$M(2; -1; 1).$

Таблиця 6.9 – Вихідні дані для розрахунку інтегралів

№ вар.	$f(x)$	[a,b]	№ вар.	$f(x)$	[a,b]
1	$\sqrt{256 - x^2}$	[0,16]	11	$\frac{1}{(64 - x^2)^{3/2}}$	$[0, 4\sqrt{3}]$
2	$x^2 \sqrt{1 - x^2}$	[0,1]	12	$\frac{x^4}{(16 - x^2)^{3/2}}$	$[0, 2\sqrt{3}]$
3	$\frac{1}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}}$	[0,5]	13	$\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$	$[0, \sqrt{3}]$

№ вар.	$f(x)$	[a,b]	№ вар.	$f(x)$	[a,b]
4	$\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}$	[3,5]	14	$\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}$	[6,9]
5	$\frac{1}{(5-x^2)^{3/2}}$	$[0, \frac{\sqrt{5}}{2}]$	15	$\sqrt{\frac{6-x}{x-14}}$	[8,12]
6	$\frac{x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$	$[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$	16	$\sqrt{\frac{4-x}{x-12}}$	[6,10]
7	$\frac{\left(\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}\right)}{\sqrt{16-x^2}}$	[0,4]	17	$\frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}$	[0,3]
8	$\sqrt{4-x^2}$	[0,2]	18	$\frac{\sqrt[6]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x}}{2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$	[1,64]
9	$x^2 \sqrt{16-x^2}$	[0,4]	19	$\frac{\sqrt{3-x}}{(3+x) \cdot \sqrt{9-x^2}}$	[0,3]
10	$x^2 \sqrt{25-x^2}$	[0,5]	20	$\frac{x^4}{(2-x^2)^{3/2}}$	[0,1]
21	$\frac{\left(\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}\right)}{(4+x) \cdot \sqrt{16-x^2}}$	[0,4]	25	$\frac{1}{\exp(9+x^2)}$	[0,3]
22	$\sqrt{(4-x^2)} \cdot$	[0,5]	26	$\frac{\sqrt{x+8}}{(2 \cdot \sqrt{x})}$	[1,21]
23	$\sqrt{16-x^2} \cdot$	[0,3]	27	$\frac{\frac{3-x}{3+x}}{(3+x) \sqrt{9+x^2}}$	[0,4]
24	$x^2 \sqrt{25-x^2}$	[0,5]	28	$\frac{x^4}{(2-x^2)^{3/2}}$	[0,1]

Таблиця 6.10 – Вихідні дані для аналітичних перетворень поліномів

№ варіанту	Поліноми
1	$P1n(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 6.$ $P3n(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 2$
2	$P1n(x) = (x^2 - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1).$ $P2n(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^2 - x - 6.$ $P3n(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - x - 1$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$
3	$P1n(x) = (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 - 36.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^2 - x - 1$ $P4n(x) = x^2 + x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$
4	$P1n(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1).$ $P2n(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 24.$ $P3n(x) = x^6 - x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^3 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 13x + 6$
5	$P1n(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 + 2) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 + 3x^5 - 7x^4 - 23x^3 - 10x^2 - 36x - 72.$ $P3n(x) = x^6 - x^4 - 3x^2 - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x - 3$
6	$P1n(x) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^3 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 18x + 108.$ $P3n(x) = x^5 - 5x^4 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 1$ $P5n(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 12x - 8$
7	$P1n(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + x - 3) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 40x^3 - 57x^2 + 45x - 54.$ $P3n(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 - 3x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 4x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 8x - 3$

№ варіанту	Поліноми
8	$P1n(x) = (3x - 1) \cdot (x^2 + 11x - 5) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 33x + 18.$ $P3n(x) = 2x^5 - x^4 - x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 + x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^2 - x - 6$
9	$P1n(x) = (x - 7) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 2x^4 - 12x^3 - 19x^2 - 20x - 12.$ $P3n(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 33x + 18$
10	$P1n(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 2) \cdot (x^2 + 3x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 4x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 8x - 3.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 - x - 7$ $P4n(x) = x^2 - 3x + 1$ $P5n(x) = x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 40x^3 - 57x^2 + 45x - 54$
11	$P1n(x) = (x + 5) \cdot (x^3 + 1) \cdot (x^2 - x + 1).$ $P2n(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 12x - 8.$ $P3n(x) = 3x^5 - x^4 - x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^3 - 1$ $P5n(x) = x^6 - x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 18x + 108$
12	$P1n(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^3 + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x - 3.$ $P3n(x) = 3x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 7$ $P4n(x) = x^2 - 2x - 1$ $P5n(x) = x^6 + 3x^5 - 7x^4 - 23x^3 - 10x^2 - 36x - 72$
13	$P1n(x) = (x - 2) \cdot (x^3 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 13x + 6.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - x^2 - 3x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 24$
14	$P1n(x) = (3x - 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1).$ $P2n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6.$ $P3n(x) = x^5 - 5x^4 - 3x^2 - x + 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 - 36$

№ варіанту	Поліноми
15	$P1n(x) = (x+2) \cdot (x^2+4) \cdot (x^2+x+1).$ $P2n(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 - 7x^3 - 10x^2 - 7x - 2.$ $P3n(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - x - 1$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
16	$P1n(x) = (x-2) \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+2x+4).$ $P2n(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^2 - x - 6.$ $P3n(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 2$
17	$P1n(x) = (x^4-3) \cdot (x-1) \cdot (x^2-2x+2).$ $P2n(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 6.$ $P3n(x) = x^6 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$
18	$P1n(x) = (2x^2-3x+1) \cdot (2x^2+1) \cdot (x^4+x^2+1).$ $P2n(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 24.$ $P3n(x) = x^6 - x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^3 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$
19	$P1n(x) = (x+1) \cdot (x^4+x^2+6) \cdot (x^2+2x-11).$ $P2n(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 - 36.$ $P3n(x) = x^6 - x^4 - 3x^2 - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 13x + 6$
20	$P1n(x) = (4x-1) \cdot (x^2+2) \cdot (2x^2+x-1).$ $P2n(x) = x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 40x^3 - 57x^2 + 45x - 54.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^2 - x - 1$ $P4n(x) = x^2 + x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x - 3$
21	$P1n(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^3+x^2+1).$ $P2n(x) = x^6 + 3x^5 - 7x^4 - 23x^3 - 10x^2 - 36x - 72.$ $P3n(x) = x^5 - 5x^4 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 1$ $P5n(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 12x - 8$

№ варіанту	Поліноми
22	$P1n(x) = (x-1) \cdot (x^2 + x - 3) \cdot (x^2 + x - 1).$ $P2n(x) = x^6 - x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 18x + 108.$ $P3n(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 4x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 8x - 3$
23	$P1n(x) = (3x+1) \cdot (x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 + x - 1).$ $P2n(x) = x^6 - 2x^4 - 12x^3 - 19x^2 - 20x - 12.$ $P3n(x) = 2x^5 - x^4 - x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 + x - 1$ $P5n(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^2 - x - 6$
24	$P1n(x) = (x-1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 33x + 18.$ $P3n(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 - 3x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 33x + 18$
25	$P1n(x) = (x+1) \cdot (x^3 + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1).$ $P2n(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 12x - 8.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 - x - 7$ $P4n(x) = x^2 - 3x + 1$ $P5n(x) = x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 40x^3 - 57x^2 + 45x - 54$
26	$P1n(x) = (x+5) \cdot (x^3 + 1) \cdot (x^2 - x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 4x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 8x - 3.$ $P3n(x) = 3x^5 - x^4 - x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^3 - 1$ $P5n(x) = x^6 - x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 24x^2 + 18x + 108$
27	$P1n(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^3 + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x - 3.$ $P3n(x) = 3x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 7$ $P4n(x) = x^2 - 2x - 1$ $P5n(x) = x^6 + 3x^5 - 7x^4 - 23x^3 - 10x^2 - 36x - 72$
28	$P1n(x) = (x-2) \cdot (x^3 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 13x + 6.$ $P3n(x) = x^5 - 2x^4 - x^2 - 3x - 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 24$

№ варіанту	<i>Поліноми</i>
29	$P1n(x) = (3x - 2) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1).$ $P2n(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6.$ $P3n(x) = x^5 - 5x^4 - 3x^2 - x + 2$ $P4n(x) = x^2 - 3x - 1$ $P5n(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - 5x^2 - 36$
30	$P1n(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 + x + 1).$ $P2n(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 - 7x^3 - 10x^2 - 7x - 2.$ $P3n(x) = x^6 - 3x^2 - x - 2$ $P4n(x) = x^2 - x - 1$ $P5n(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

Таблиця 6.11 – Вихідні дані для вирішення задачі Коші

№ варіанта	Рівняння	Початкові умови	№ варіанта	Рівняння	Початкові умови
1	$y' = 0,9x + y^2$	$y = 0,6$ при $x=0$	2	$y' = 2,3x + 0,1y^2$	$y = 0,4$ при $x=0$
3	$y' = 1,8x + 1,1y^2$	$y = 0,2$ при $x=0$	4	$y' = 0,7x^2 + 0,9yx$	$y = 0,3$ при $x=0$
5	$y' = 0,3x + 1,2y^2$	$y = 0,1$ при $x=0$	6	$y' = 0,9x^2 + 1,2y$	$y = 0,5$ при $x=0$
7	$y' = 0,8x + 2,1y$	$y = 0,3$ при $x=0$	8	$y' = 1,1xy + y^2$	$y = 0,2$ при $x=0$
9	$y' = 0,9x^2 + y^2$	$y = 0,7$ при $x=0$	10	$y' = x^2 + 0,3y^2$	$y = 0,6$ при $x=0$
11	$y' = 0,4x + 0,9y^2$	$y = 0,5$ при $x=0$	12	$y' = 0,2x + 0,1y^2$	$y = 0,3$ при $x=0$
13	$y' = 1,1x + 0,2y^2$	$y = 0,4$ при $x=0$	14	$y' = 2,1x^2 + yx$	$y = 0,7$ при $x=0$
15	$y' = 0,2x^2 + 1,5yx$	$y = 0,8$ при $x=0$	16	$y' = 0,8x^2 + 0,2yx$	$y = 0,4$ при $x=0$

№ варіанта	Рівняння	Початкові умови	№ варіанта	Рівняння	Початкові умови
17	$y' = 2x^2 + 0,3xy$	$y = 0,3$ при $x=0$	18	$y' = 1,2x^2 + 2xy$	$y = 0,2$ при $x=0$
19	$y' = 0,7x^2 + 0,1y^2$	$y = 0,6$ при $x=0$	20	$y' = 2,2x^2 + 2,7y^2$	$y = 0,1$ при $x=0$
21	$y' = 0,3x^2 + 0,6y^2$	$y = 0,7$ при $x=0$	22	$y' = 0,4x^2 + 0,1y^2$	$y = 0,5$ при $x=0$
23	$y' = 0,8xy + 0,2y^2$	$y = 0,3$ при $x=0$	24	$y' = 0,5xy + y^2$	$y = 0,4$ при $x=0$
25	$y' = 1,4xy + 0,1y^2$	$y = 0,2$ при $x=0$	26	$y' = 0,3xy + 2y^2$	$y = 0,6$ при $x=0$
27	$y' = 0,1xy + 0,4y^2$	$y = 0,8$ при $x=0$	28	$y' = 0,5x^2 + 1,6y^2$	$y = 0,3$ при $x=0$
29	$y' = 3,2x + 0,1y^2$	$y = 0,4$ при $x=0$	30	$y' = 0,1x + 2,8y^2$	$y = 0,1$ при $x=0$

Список рекомендованої літератури

1. Комп'ютерна техніка та організація обчислювальних робіт: Організація розрахунків у середовищі MathCAD [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Уклад.: Т.В. Бойко, О.О. Квітка, А.М. Шахновський – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 64 с. URL: <https://kxtp.kpi.ua/common/kvitka-ctp-lr.pdf>
2. Інформаційні технології: Системи комп'ютерної математики [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / І. В. Кравченко, В. І. Микитенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського . – Електронні текстові дані (1 файл: 5,57 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 243с. URL: https://oiep.kpi.ua/downloads/disc/info_t/posibn_Krav_Myk.pdf
3. Кундрат А. М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD та MS Excel : навч. посіб. / А. М. Кундрат, М. М. Кундрат. – Рівне : НУВГП, 2014. – 252 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/1760/1/734733%20zah.pdf>
4. Коробов В.І. , Очков В.Ф. Хімічні розрахунки в середовищі MathCAD : навч. посібник– Д. : Вид-во ДНУ, 2012. – 216 с. URL: <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/MathCAD-Chem-Ukr.pdf>

Деякі Інтернет-ресурси, що стосуються роботи у MathCAD

Крім друкованих джерел, відомості про особливості використання системи MathCAD, зокрема, в хімічній технології та інженерії, можна одержати у таких формах:

- Довідкова система, «Центр ресурсів» та «Швидкі приклади»
- Інтернет-ресурси

У мережі *Internet* можна знайти багато сайтів, які містять інформацію щодо використання системи MathCAD, по застосуванню MathCAD для математичного моделювання процесів хімічної технології та інженерії. Наведемо деякі з них.

Офіційний сайт фірми *PTS*: <http://www.ptc.com/product/mathcad/>, <http://communities.ptc.com/community/mathcad>, <http://communities.ptc.com/docs/DOC-3621>. Тут можна одержати файли MathCAD, інформацію про технічну підтримку тощо.

Також, цікавими з точки зору застосування системи MathCAD є, зокрема, такі ресурси:

<http://www.adeptscience.co.uk/as/products/mathsim/mathcad/>
<http://www.mhhe.com/engcs/civil/finnmore/msol.mhtml>
<http://www.umche.maine.edu/mathcad/>