

Системи та методи прийняття рішень

Опорний конспект лекцій



Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Системи та методи прийняття рішень

Опорний конспект лекцій

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
Житомир 2024

УДК 004.02:519.816
С35

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного
університету імені Івана Франка
25 червня 2024 року, протокол №11.*

Рецензенти:

Пастернак Ярослав – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та кібербезпеки Волинського національного університету імені Лесі Українки;

Наконечна Оксана – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Одеського державного аграрного університету;

Лавренюк Ярослав – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Житомирського державного університету імені Івана Франка.

С35 Системи та методи прийняття рішень: опорний конспект лекцій / уклад.: Ярослава Сікора. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2024. 302 с.

Опорний конспект лекцій покликаний сформувати у здобувачів теоретичні знання з питань прийняття управлінських рішень, методів аналізу, прогнозування, оптимізації та обґрунтування управлінських рішень й практичне освоєння інформаційних технологій підтримки прийняття рішень. Структуру та зміст опорного конспекту лекцій визначено, виходячи зі змісту робочої програми навчальної дисципліни «Системи та методи прийняття рішень».

Курс лекцій призначений для здобувачів освіти галузі знань 12 Інформаційні технології.

УДК 004.02:519.816

© Сікора Я.Б., 2024

© Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2024

ЗМІСТ

Вступ	4
Лекція 1. Загальні поняття прийняття рішень	5
Лекція 2. Багатокритеріальні задачі прийняття рішень	58
Лекція 3. Моделі та методи прийняття рішення в умовах нечіткої інформації, невизначеності та ризику	130
Лекція 4. Технології прийняття колективних рішень у малих та великих групах	213
Лекція 5. Структура, принципи побудови та класифікація СППР	259
Список використаної та рекомендованої літератури	301

ВСТУП

Вивчення теорії прийняття рішень передбачено програмами підготовки фахівців у галузі інформаційних технологій, а також до програм підготовки менеджерів, підкреслюючи важливу роль вміння приймати оптимальні управлінські рішення. Однією з основних проблем, що виникають під час аналізу ситуації та ухваленні рішення, є формалізоване уявлення інформації, тобто розробка математичної моделі аналізованої ситуації. Залежно від того, що така інформація є, використовуються різні формальні процедури.

Предметом вивчення освітньої компоненти є моделі та методи теорії прийняття рішень, методи розробки алгоритмічного забезпечення інформаційних систем підтримки прийняття рішень.

Метою вивчення освітньої компоненти «Системи та методи прийняття рішень» є формування у здобувачів теоретичних знань щодо основних моделей та методів прийняття рішень, формування вмінь та навичок використання сучасних числових методів та інформаційних технологій підтримки прийняття рішень.

Основні завдання вивчення освітньої компоненти:

- сформувати уявлення про процес, умови та завдання прийняття рішень;
- засвоїти методи формалізації та алгоритмізації процесів прийняття рішень;
- розвинути навички аналізу інформації, підготовки та обґрунтування управлінських рішень;
- ознайомитися з функціями, властивостями, можливостями систем підтримки прийняття рішень;
- сформувати навички використання систем підтримки прийняття рішень для розв'язання прикладних задач.

Оскільки процеси прийняття рішень лежать в основі будь-якої цілеспрямованої діяльності, то знання елементів теорії прийняття рішень буде корисним будь-якій освіченій людині.

Системи та методи прийняття рішень

Обсяг дисципліни

- Лекції – 10 год.
- Лабораторні заняття – 30 год.
- Самостійна робота – 65 год.
- Форма підсумкового контролю – залік (2 семестр).

Тема 1. Загальні поняття прийняття рішень

1. Задача прийняття рішень (ПР). Функція прийняття рішень.
2. Процес прийняття рішення. Етапи прийняття рішень. Види підтримки на кожному етапі прийняття та виконання рішень.
3. Класифікація задач та методів прийняття рішень.
4. Вимірювання при формуванні рішень.

Теорія
прийняття
рішень

Початок 60-х рр. XX століття

Самостійна
дисципліна



основна мета

раціоналізувати процес прийняття рішень

Теорія прийняття рішень

це математична дисципліна, яка спрямована на вибір, в деякому розумінні, найкращого (найкращих) з можливих варіантів з урахуванням наявних обмежень.

Основні поняття теорії прийняття рішень

- ▣ **Прийняття рішень** – вибір найбільш кращого рішення з множини допустимих альтернатив.
- ▣ **Особа, яка приймає рішення (ОПР)** – людина, що фактично здійснює вибір найкращого варіанту дій.
- ▣ **Власник проблеми** – людина, яка, на думку оточуючих, має її вирішувати та несе відповідальність за прийняті рішення.

Основні поняття теорії прийняття рішень

- ▣ **Експерт** – професіонал тієї чи іншої галузі, до якого звертаються за оцінками та рекомендаціями всі люди, залучені до цього процесу.
- ▣ **Альтернативи** – виключаючі одне одного можливості.
- ▣ Альтернативи – це невід’ємна частина проблеми прийняття рішень: якщо немає чого вибирати, немає і завдання (проблеми) вибору.

Основні поняття теорії прийняття рішень

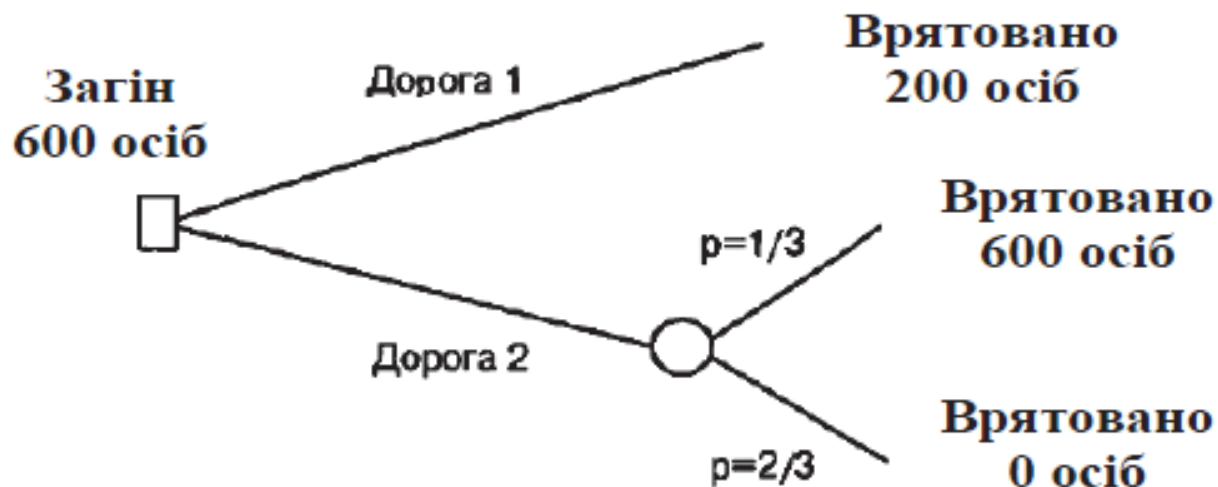
Для вибору необхідно не менше 2-х альтернатив.

Незалежними є ті альтернативи, будь-які дії з якими (видалення з розгляду, виділення як найкращу) не впливають на якість інших альтернатив.

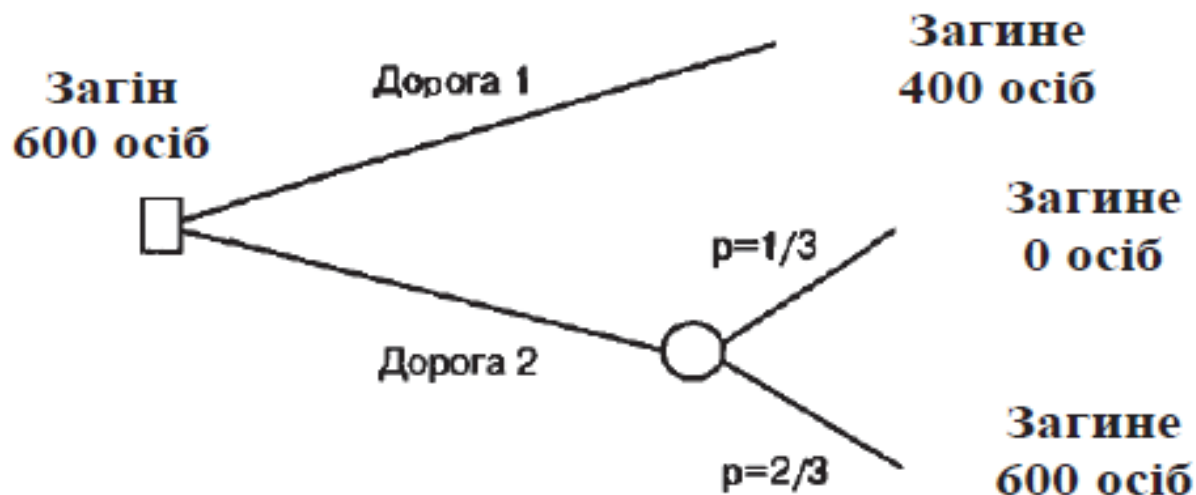


При залежних альтернативах оцінки одних з них впливають на якість інших.

Приклад. Дилема генерала: яку дорогу краще обрати



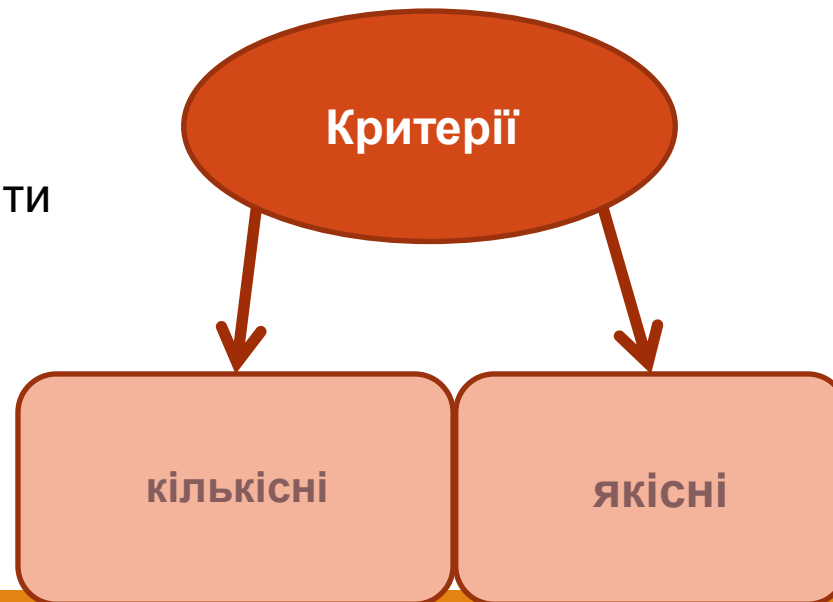
Приклад. Дилема генерала: яку дорогу краще обрати



Критерії оцінки альтернатив

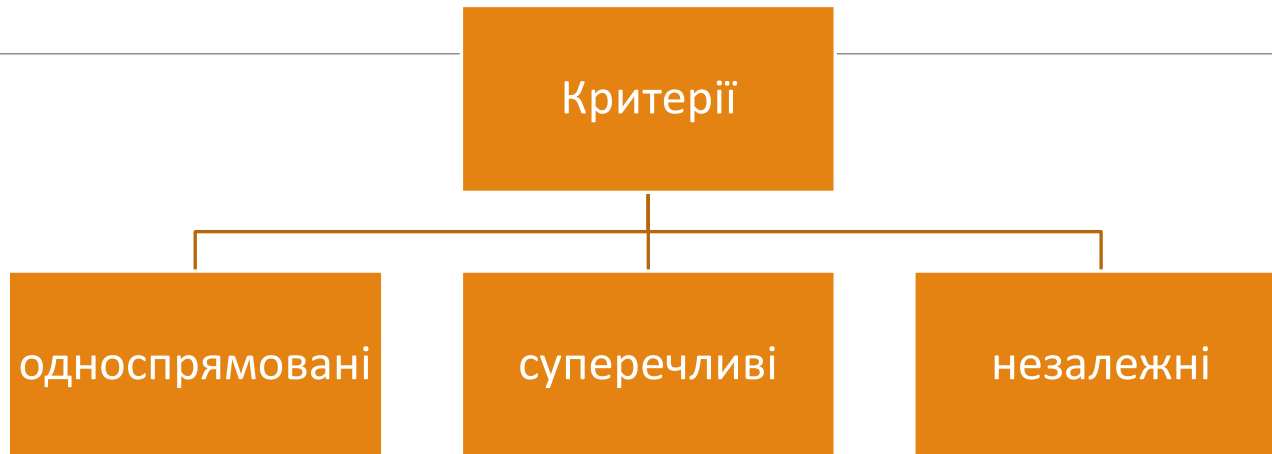
- **Критерії оцінки альтернатив** — показники привабливості (або непривабливості) альтернатив для учасників процесу вибору рішення, зокрема, для ОПР.

Якщо показник привабливості можна точно оцінити чисельним значенням пропорційним показнику, він є кількісним



Якщо показники критеріїв не можна точно пов'язати з будь-яким числом. У цьому випадку він є якісним і характеризується термінами порівняння: "краще - гірше", "далі - ближче", "більше - менше".

Критерії оцінки альтернатив

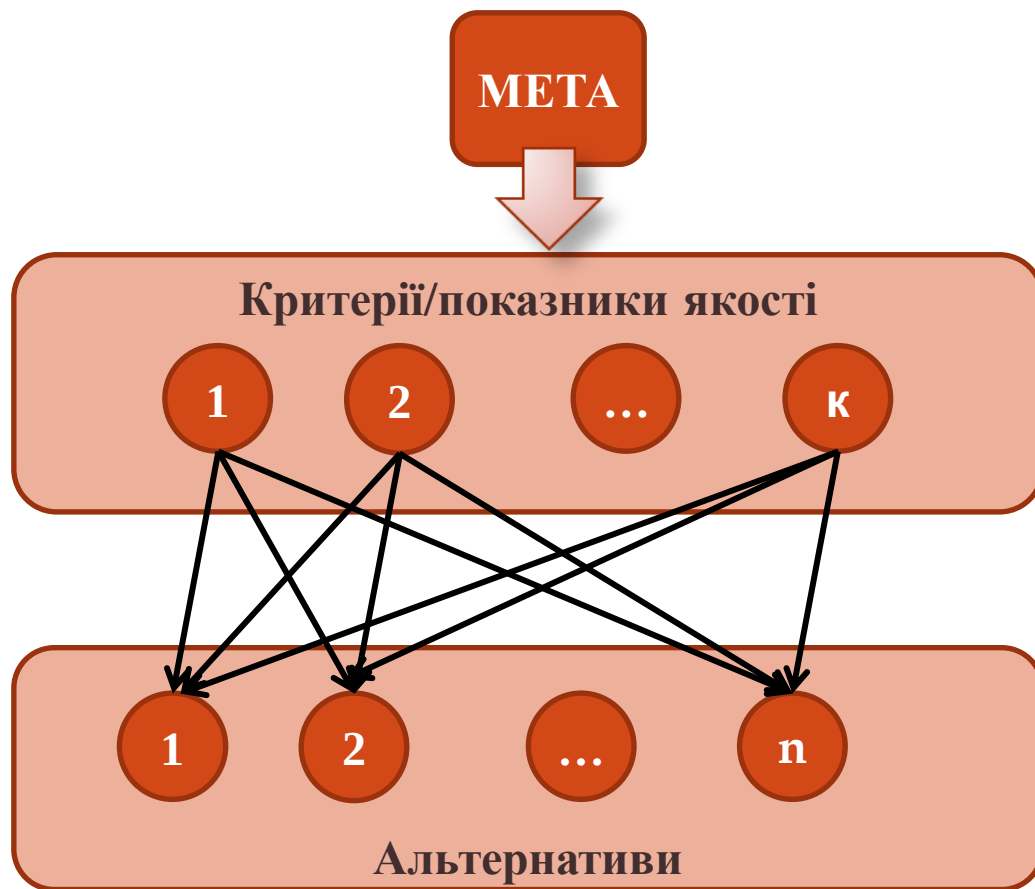


Якщо поліпшення одного критерію призводить до покращення іншого, то критерії односпрямовані, наприклад, обсяги продажу та прибутку

Якщо не можна одночасно покращити обидва критерії (покращуючи один, другий погіршується), то критерії суперечливі, наприклад, ціна та попит.

Якщо критерії ніяк не впливають один на одного і для однієї групи альтернатив одночасно покращуються, а для іншої – змінюються у різних напрямках, такі критерії незалежні.

Задача прийняття рішення



Характерними ознаками рішення є:

- ❑ можливість вибору з набору альтернативних варіантів, оскільки за відсутності альтернатив, відсутній і вибір, а тому відсутнє й рішення;
- ❑ наявність мети, оскільки вибір без цілі не розглядають як рішення;
- ❑ необхідність вольового акту ОПР при виборі рішення, оскільки ОПР формує рішення в умовах боротьбі мотивів і думок.

Типологія рішень

Інтуїтивні рішення

- вибір, зроблений лише на основі відчуття того, що він правильний

Рішення, що базується на судженнях

- вибір, обумовлений знаннями або накопиченим досвідом

Раціональне рішення

- обґрунтовується за допомогою об'єктивного аналітичного процесу

Технологічні рішення

- визначення мети
- встановлення готовності до здійснення робіт
- розподіл ресурсів і способу здійснення робіт
- постановка задач підрозділам

Підходи до прийняття рішень

дескриптивний підхід

нормативний підхід

прескриптивний підхід

Дескриптивний підхід

Дескриптивні методи прийняття рішень - це оціночно-описовий метод дослідження, спрямований на емпіричне дослідження та описи поведінки окремих осіб та груп людей у процесі прийняття рішень.

Дескриптивний підхід заснований на тому твердженні, що у конфлікті почуття і розуму завжди перемагає почуття, тому процес прийняття рішення увінчує неформальний аспект. Залишатися неупередженим до змісту та якості рішень не дозволяє соціальне середовище, в якому здійснюється процес управління. Чим менш виразним є те, що відбувається, гірші кількісні уявлення про проблемну ситуацію, тим більша частка творчості людей.

Цей підхід дозволяє приймати два типи рішень:

- *○інтуїтивні рішення* (вибір, зроблений тільки на основі відчуття того, що він правильний, за повної відсутності свідомого зважування «за» і «проти» щодо кожної альтернативи, немає потреби навіть у розумінні проблемної ситуації);
- *○рішення, що ґрунтуються на судженнях* (вибір, зумовлений знаннями або накопиченим досвідом, при цьому логіка прийняття не очевидна, головне, що аналогічне рішення принесло успіх у минулому за подібних обставин).

Нормативний підхід

Прийняття рішень у рамках нормативного підходу – це **сукупність раціонально обумовлених дій та процедур**, послідовне застосування яких сприяє висуванню оптимальних цілей та засобів їх реалізації.

Така ідеологія **впливає із розуміння людини як раціональної істоти**, самодостатньої для вироблення оптимальних рішень.

З процесуальної точки зору **прийняття рішень є сукупність дій, що жорстко пов'язують оцінку проблеми, вибір рішення і запланований позитивний результат.**

Нормативний підхід ґрунтується на дедуктивній логіці, розрахованій на те, як ми маємо думати, а не на те, що ми думаємо насправді.

Чим більше кількісної визначеності досліджуваного явища, тим більша частка формальної сторони розробки та прийняття рішень.

Цей підхід дозволяє приймати *раціональні рішення*, в яких не враховується минулий досвід, а лише об'єктивний аналітичний процес.

Прескриптивний підхід

Прескриптивний підхід наказує, як має чинити людина з нормальним інтелектом, яка бажає напружено і систематизовано обмірковувати всі аспекти свого завдання.

Прескриптивний підхід не гарантує знаходження оптимального рішення в будь-якій ситуації, але забезпечує вибір такого рішення, яке не обтяжене протиріччями та непослідовностями.

Даний підхід пред'являє людині серйозні вимоги щодо засвоєння методів і прийомів теорії прийняття рішень, і навіть передбачає проведення численних обчислень, пов'язаних з реалізацією цих методів.

Класифікація видів рішень

Ознака	Вид рішення		
Ступінь структуризації проблеми	Гарно структуроване	Погано структуроване	Не структуроване
Кількість етапів реалізації рішення	Статичне (один етап)		Динамічне
Рівень інформованості про стан проблеми	Умови визначеності	Умови ризику	Умови невизначеності
Кількість ОПР	Одна особа		Багато осіб
Зміст рішення	Стратегічне		Тактичне

Етапи процесу прийняття рішень

Герберт Саймон виділяє у процесі прийняття рішень *три етапи*:

- *пошук інформації*. На першому етапі збирається вся доступна на момент прийняття рішення інформація: фактичні дані, думки експертів, будуються математичні моделі, проводяться соціологічні опитування, визначаються погляди на проблему з боку активних груп, що впливають на її ріше;
- *пошук і знаходження альтернатив*. Другий етап пов'язаний з визначенням того, що можна, а чого не можна робити в даній ситуації, тобто з визначенням варіантів рішень (альтернатив);
- *вибір кращої альтернативи*. Третій етап включає в себе порівняння альтернатив і вибір найкращого варіанта (або варіантів) рішення.

Схема процесу прийняття рішень



Схема процесу прийняття рішень

Етап 1. Попередній аналіз проблеми

На цьому етапі визначаються:

- основні цілі;
- рівні розгляду, елементи та структура системи (процесу), типи зв'язків;
- підсистеми, використовувані ними основні ресурси та критерії якості функціонування підсистем;
- основні протиріччя та обмеження.

Схема процесу прийняття рішень

Етап 2. Постановка задачі

Постановка конкретної ЗПР включає:

- формулювання завдання;
- визначення типу завдання;
- визначення множини альтернативних варіантів та основних критеріїв для вибору з них найкращих;
- вибір методу розв'язання ЗПР.

Схема процесу прийняття рішень

Етап 3. Отримання вихідних даних

На цьому етапі встановлюються способи вимірювання альтернатив:

- збирання кількісних (статистичних) даних
- методи математичного чи імітаційного моделювання
- методи експертної оцінки

У останньому випадку необхідно вирішити завдання формування групи експертів, проведення експертних опитувань, попереднього аналізу експертних оцінок.

Схема процесу прийняття рішень

Етап 4. Рішення ЗПР із залученням математичних методів та обчислювальної техніки, експертів та особи, яка приймає рішення.

На цьому етапі здійснюється:

- ▣ математична обробка вихідної інформації,
- ▣ уточнення та модифікація у разі потреби.

Обробка інформації може бути досить трудомісткою, може виникнути необхідність здійснення кількох ітерацій і бажання застосувати різні методи для вирішення завдання.

Тому саме на цьому етапі виникає потреба у комп'ютерній підтримці процесу прийняття рішень, яка виконується за допомогою автоматизованих систем прийняття рішень.

Схема процесу прийняття рішень

Етап 5. Аналіз та інтерпретація отриманих результатів

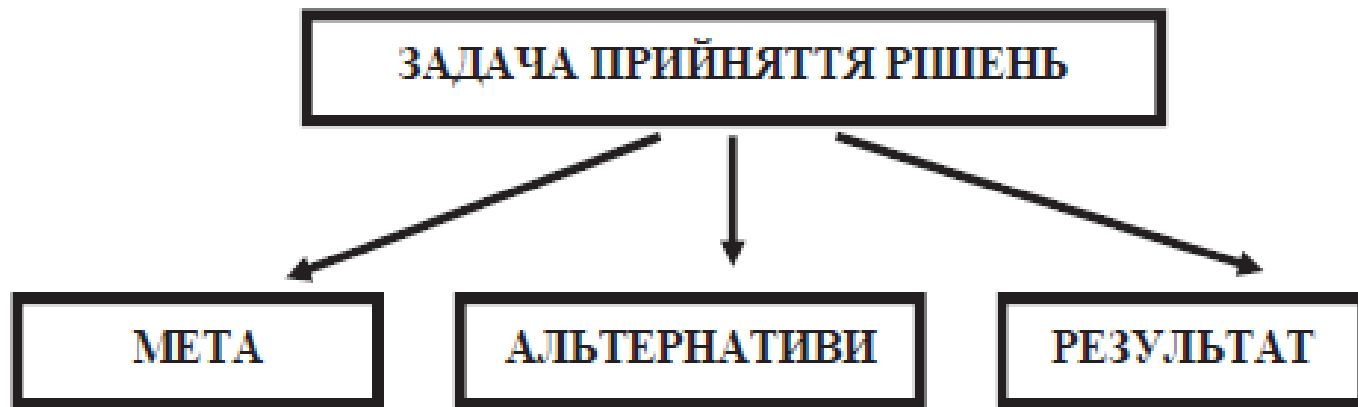
Отримані результати можуть виявитися незадовільними та вимагати змін у постановці ЗПР.

В цьому випадку необхідно буде повернутися на етап 2 або етап 1 і пройти знову весь шлях.

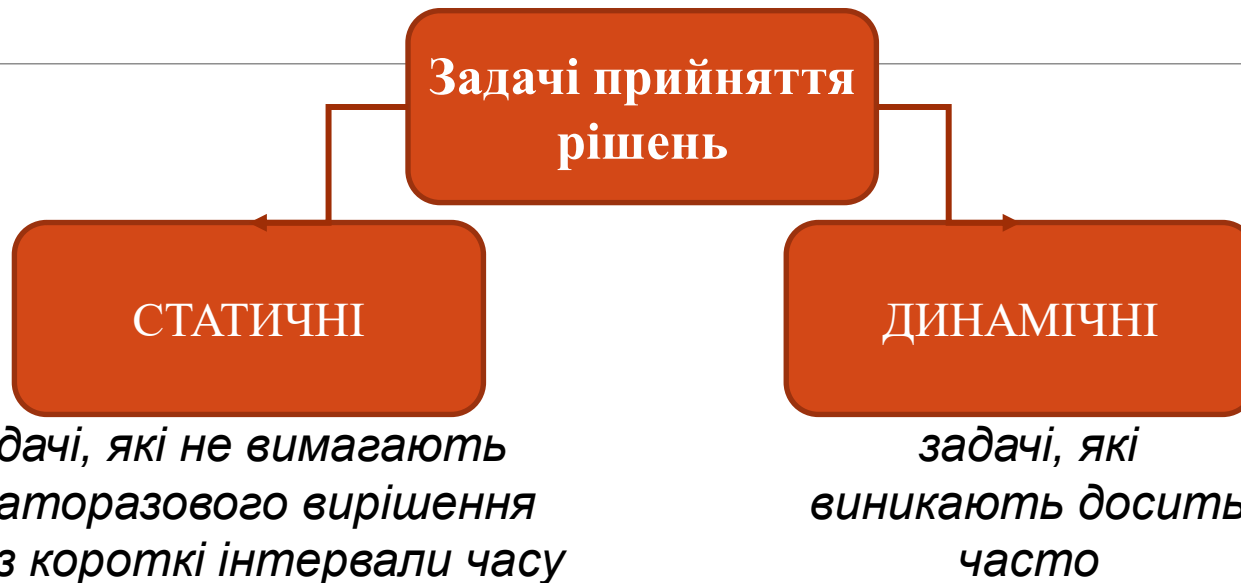
Рішення ЗПР може займати досить тривалий проміжок часу, протягом якого оточення завдання може змінитися і вимагати коригування постановки завдання, а також вихідних даних (наприклад, можуть з'явитися нові альтернативи, що вимагають введення нових критеріїв).

Три складові задачі прийняття рішень

Задача прийняття рішень (ЗПР) може бути сформульована в термінах мети, способів її досягнення (альтернатив) та отриманих результатів



Задачі прийняття рішень



Ітераційний характер процесу прийняття рішень вважатимуться закономірним, що підтверджує необхідність створення та використання ефективних систем комп'ютерної підтримки.

ЗПР, що вимагають одного циклу, можна скоріше вважати винятком, ніж правилом.

Формальна модель задачі ПР

У загальному випадку:

$$\langle T, A, K, X, F, G, D \rangle$$

T – постановка задачі (наприклад, вибрати найкращу альтернативу або впорядкувати весь набір);

A – множина допустимих альтернативних варіантів;

K – множина критеріїв вибору;

X – множина методів виміру переваг (наприклад, використання різних шкал);

F – відображення множини допустимих альтернатив у множину критеріальних оцінок;

G – система переваг експерта;

D – вирішальне правило, що відображає систему переваг.

Формальна модель задачі ПР

Потужність множини K

- Множина критеріїв вибору може містити один або кілька елементів. Відповідно до цього задачі прийняття рішень можна поділити на задачі зі скалярним критерієм та задачі з векторним критерієм (багатокритеріальне прийняття рішень).

Формальна модель задачі ПР

Тип системи G

- Уподобання можуть формуватися однією особою чи колективом, залежно від цього задачі прийняття рішень можна класифікувати на задачі індивідуального прийняття рішень та задачі колективного прийняття рішень.

Формальна модель задачі ПР

Вид відображення F

- Відображення множини A і K може мати детермінований характер, імовірнісний або невизначений вид, відповідно до якого задачі прийняття рішень можна поділити на задачі в умовах визначеності, ризику та задачі в умовах невизначеності.

Класифікація задач прийняття рішення

В умовах визначеності

В умовах ризику

В умовах невизначеності

Задачі прийняття рішень в умовах визначеності

До цього класу відносяться задачі, на вирішення яких є достатня і достовірна кількісна інформація.

Основні умови застосування методів математичного програмування такі:

1. Задача має бути добре формалізована, тобто є адекватна математична модель реального об'єкта.
2. Існує деяка єдина цільова функція (критерій оптимізації), що дозволяє свідчити про якість альтернативних варіантів, що розглядаються.
3. Є можливість кількісної оцінки значень цільової функції.
4. Задача має певні ступені свободи (ресурси оптимізації), тобто деякі параметри функціонування системи, які можна довільно змінювати в деяких межах з метою покращення значень цільової функції.

Задача в умовах ризику

У тих випадках, коли можливі наслідки можна описати за допомогою деякого ймовірнісного розподілу, отримуємо задачу прийняття рішень в умовах ризику.

Для побудови розподілу ймовірностей необхідно мати у розпорядженні статистичні дані, або залучати знання експертів.

Зазвичай на вирішення задач цього типу застосовуються методи теорії одномірної чи багатовимірної корисності.

Ці задачі займають місце на межі між задачами прийняття рішень за умов визначеності та невизначеності. Для вирішення цих задач залучається вся доступна інформація (кількісна та якісна).

Задачі в умовах невизначеності

Ці задачі мають місце тоді, коли інформація, необхідна для прийняття рішень, є неточною, неповною, некілкісною, а формальні моделі системи, що досліджується, або занадто складні, або відсутні.

У цьому випадку для вирішення задач зазвичай залучаються знання експертів.

На відміну від підходу, прийнятого в експертних системах, на вирішення ЗПР знання експертів зазвичай виражені як деякі кількісні дані, що називаються перевагами.

Класифікація задач прийняття рішення

Тривіальні

Нетривіальні

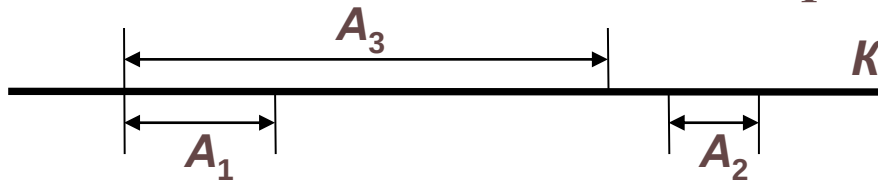
Класифікація задач прийняття рішення

Задача прийняття рішень називається тривіальною, якщо вона характеризується виключно одним критерієм K та всім альтернативам A_i приписані конкретні числові оцінки відповідно до значень зазначеного критерію

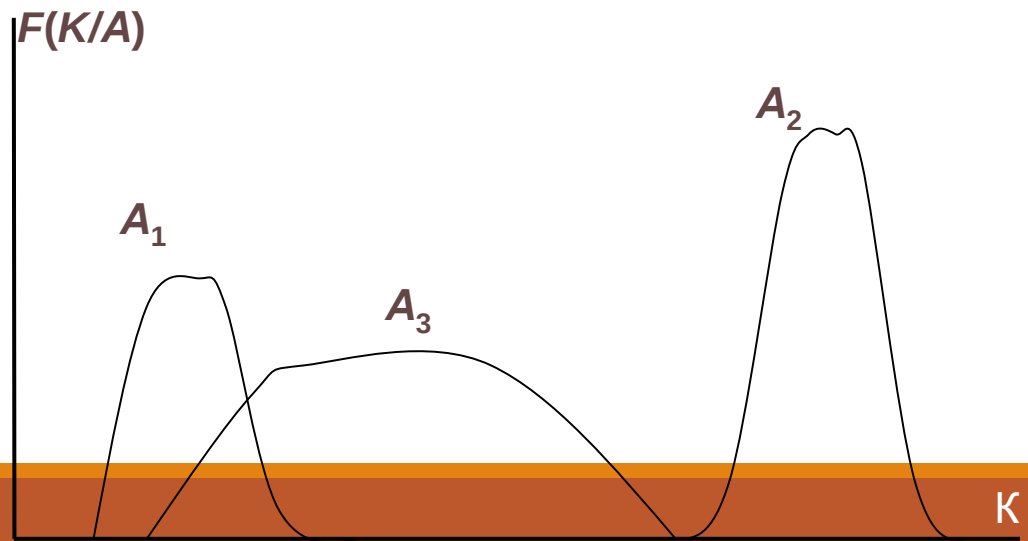


Класифікація задач прийняття рішення

Задача прийняття рішень перестає бути тривіальною навіть за одного критерію K , якщо кожній альтернативі A_i відповідає не точна оцінка, а інтервал можливих оцінок



або розподіл $f(K/A)$ на значеннях зазначеного критерію.

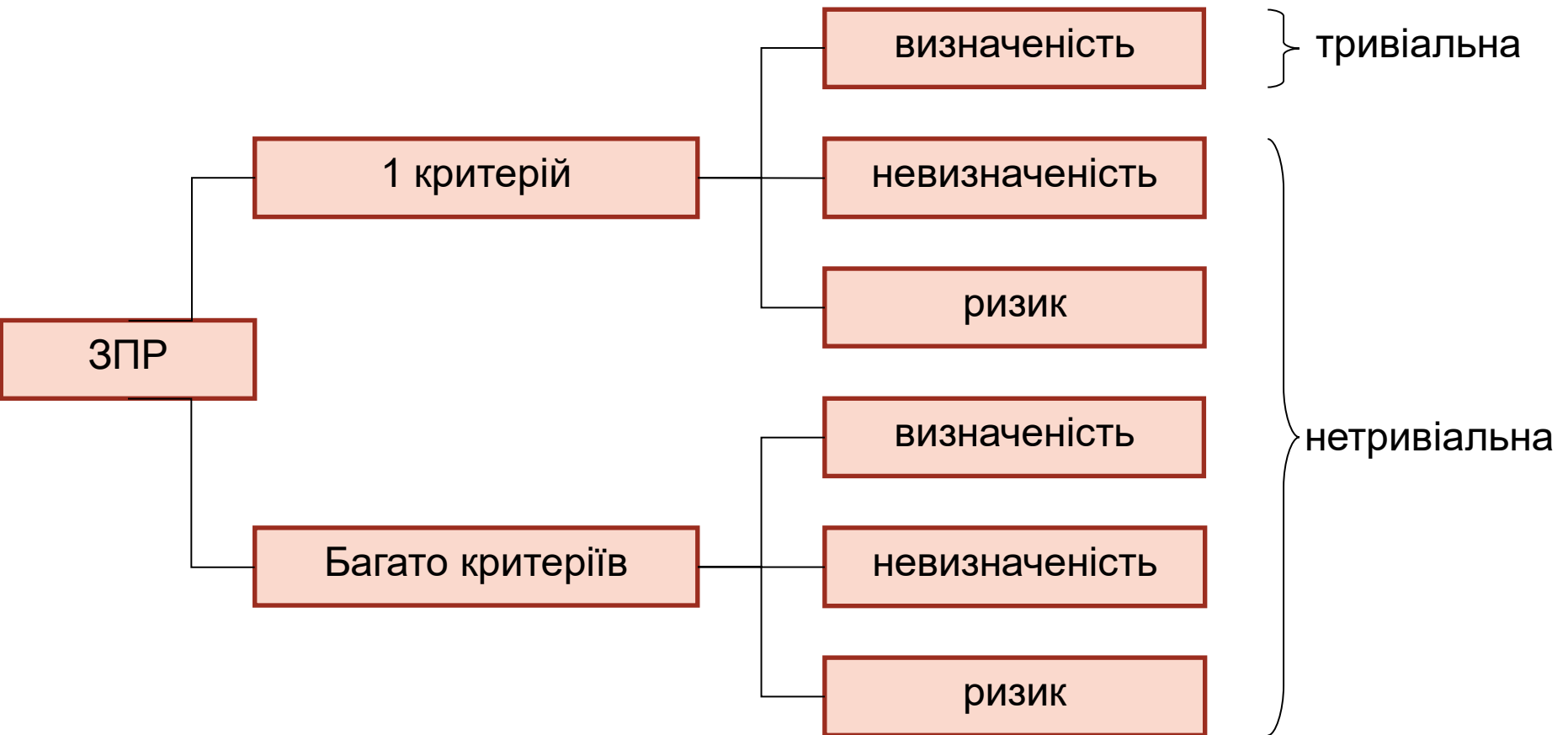


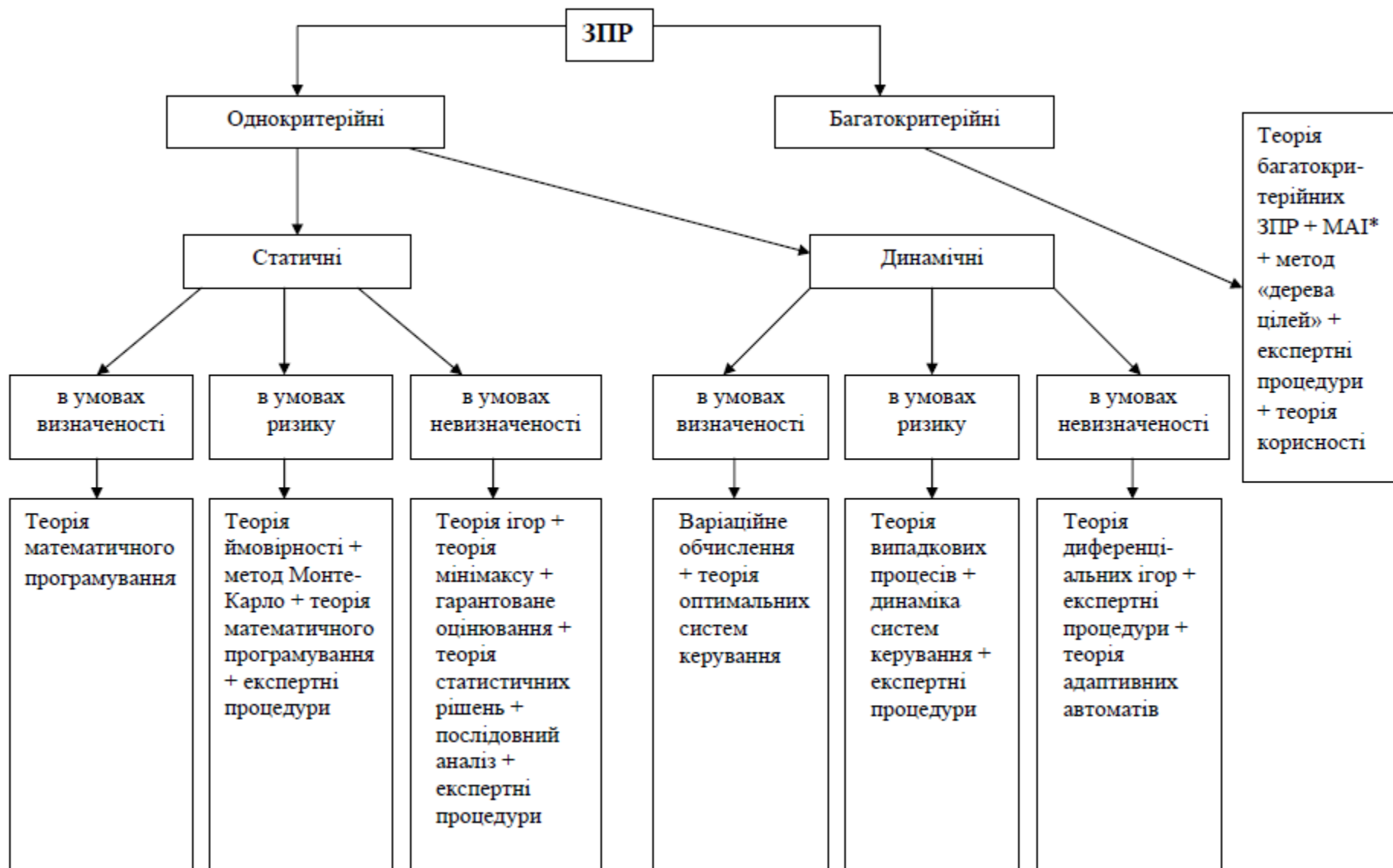
Класифікація задач прийняття рішення

Нетривіальною вважається задача за наявності кількох критеріїв прийняття рішень незалежно від виду відображення множини альтернатив в множину критеріальних оцінок їх наслідків.

Отже, за наявності ситуації вибору, у разі багатокритеріальності та/або здійснення вибору в умовах невизначеності чи ризику задача прийняття рішень є **нетривіальною**.

Класифікація задач прийняття рішення





Шкали оцінок за критеріями у задачах прийняття рішень

Шкала – це інструмент (прийнята система правил) оцінки (вимірювання) якості яких-небудь об'єктів або явищ.

Кваліметрія – наука про оцінку якості об'єктів.

Вимірювання – акт привласнення чисел об'єктам згідно з деякою системою правил.

Якість є найповнішою характеристикою будь-якого об'єкта. Якість виражає визначеність об'єкта у вигляді сукупності різних властивостей, що виявляються у взаємодії об'єкта із зовнішнім середовищем.

Рівні вимірювання (типи шкал)

- шкала найменувань;
- шкала порядку (рангова шкала);
- шкала інтервалів (рівних інтервалів);
- шкала відношень (пропорціональних оцінок).

Шкала найменувань

У шкалі найменувань числа використовуються як найменування об'єктів.

Наприклад, шкалою найменувань є номери документів у проєктній документації, номери кроків розробки інформаційних систем, ідентифікаційні номери користувачів бази даних.

Шкала порядку (рангова шкала)

Шкала порядку утворюється у результаті розташування об'єктів у порядку зростання або спадання міри певної властивості (переваг експертів, ОПР).

Розрізняють шкали:

- простого,
- слабкого,
- сильного порядку.

У шкалі *простого порядку* немає проблеми з порівнянням об'єктів.

Шкала порядку (рангова шкала)

У шкалі *слабкого* порядку можуть мати місце випадки, коли «Об'єкт А такий самий, як об'єкт В». Кожному елементу ряду в цих шкалах приписують числове значення і виконують статистичні операції отримання частот або мод. Обчислюються медіани, процентилі, коефіцієнти рангової кореляції.

У шкалі *сильного* порядку експерт не тільки упорядковує об'єкти за якою-небудь ознакою або властивістю, а і вказує силу цієї переваги, наприклад, в межах $[0,1]$. Прикладом є шкала частоти використання інформаційних технологій:

- дуже часто використовується;
- часто використовується;
- використовується в окремих, специфічних випадках.

Шкала інтервалів (рівних інтервалів)

Шкала інтервалів побудована з рівномірних інтервалів і є кращою порівняно зі шкалою порядку. Для інтервальної шкали характерно, що початок відліку вибирається довільно так само, як і крок (відстань між оцінками) шкали.

Прикладом інтервальної шкали є оцінювання знань студентів під час проведення екзамену. Експерт-викладач, оцінюючи рівень знань студентів, повинен не тільки вирішити, що один студент знає матеріал краще за інших, але сказати, на скільки краще. Вимірювання фактично проводиться по шкалі зі ста балів. Рівень знань, який відповідає одному балу (нульова точка) – не відомий.

Шкала відношень (пропорціональних оцінок)

Якщо початок відліку (нульова точка) співпадає з нульовою мірою даної ознаки, то це шкала відношень. Для двох величин, виміряних за шкалою відношень, можна визначити, у скільки разів значення однієї величини більше за значення іншої. Для цього необхідно знайти відношення числових значень величин у цій шкалі.

Прикладом є шкала термодинамічних температур.

Абсолютна шкала

Абсолютною є шкала, у якій є абсолютний нуль і абсолютна одиниця. Такою шкалою є послідовність натуральних чисел. Особливістю цієї шкали є її безрозмірність, що дозволяє виконувати над даними цієї шкали такі операції, які недопустимі для даних інших шкал.

Психометрична шкала Томаса Сааті (шкала експертного оцінювання пріоритетів або переваг)

Оцінка виконується експертом або ОПР, тому шкалу називають психометричною. Шкала дозволяє порівнювати дані з різною кваліметричною основою. Одні дані вимірюються в таких шкалах як шкала найменувань або рангова шкала, інші – в таких шкалах як шкала інтервалів або відношень.

Крім того, різні дані, що вимірюються в сильних шкалах, можуть мати різну розмірність (метри, кілограми, секунди, гривні). Шкала Сааті дозволяє отримати раціональні співвідношення між даними різної природи.

Тема 2. Багатокритеріальні задачі прийняття рішень

План

1. Багатокритеріальна оптимізація. Ефективні рішення.
2. Множина Парето. Методи багатокритеріальної оптимізації в сучасних системах підтримки прийняття рішень.
3. Метод згорток. Способи вибору вагових коефіцієнтів частинних критеріїв в узагальнених критеріях оптимальності.
4. Метод виділення головного критерію.
5. Основи теорії корисності. Функція корисності, її властивості. Метод побудови функції корисності.

Поняття про багатокритеріальну задачу

Якщо альтернативи оцінюються за кількома критеріями, то така ЗПР називається ***багатокритеріальної ЗПР***
(***задачею векторної оптимізації***)

Джерела та проблеми багатокритеріальності

Джерела: В економічних задачах основними критеріями є ефективність і вартість, причому кожен із критеріїв може бути підрозділений більш приватні критерії.

У *технічних*: максимізація надійності при мінімізації витрат на виробництво

Проблеми:

- У багатокритеріальних задачах суворого порядку немає (в однокритеріальних задачах цільова функція дозволяє ранжувати альтернативи: чим більше значення цільової функції на альтернативі, тим вона краще).
- Конфлікт критеріїв (немає ідеального рішення)

Багатокритеріальна задача

$$(\Omega, \{f_i\}_n, \{\succsim\}),$$

де $\{f_i\}_n$ – n цільових функцій f_i , кожна з яких сформульована у вигляді

$$f_i(x) \rightarrow \max_x$$

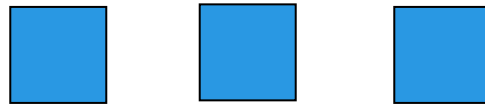
$\succsim$ - відношення переваги

$\sim$ - відношення еквівалентності

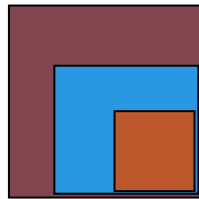
Багатокритеріальна задача

Цілі можуть бути одна з одною у різних відносинах:

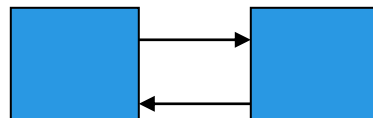
1. Цілі взаємо нейтральні



2. Цілі кооперуються



3. Цілі конкурують



Цілі нейтральні

$x \in \Omega$

$$f_1(x) \rightarrow \max_{x \in \Omega}$$

$x \in \Omega_1$

$$f_2(x) \rightarrow \max_{x \in \Omega_1}$$

$x \in \Omega_{n-1}$

$$\dots f_n(x) \rightarrow \max_{x \in \Omega_{n-1}}$$

Функція корисності

функція, значення якої відбиває наближення її аргументів (як аргумент виступає певне рішення, виражене як вектор критеріїв) до раціонального значення.

У разі оптимізації за одним критерієм ФК може приймати як аргумент скалярне значення.

У ФК локалізована логіка, що чисельно виражає різницю між поточним та необхідним значенням.

Найбільш поширеним підходом до рішення задач ПР є побудова ФК $U(x)$ з такими властивостями:

$$U(x_i) > U(x_j), \text{ якщо } (x_i, x_j) \in P;$$

$$U(x_i) = U(x_j), \text{ якщо } (x_i, x_j) \in I.$$

Алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі

зменшити вихідну множину
альтернатив, прибравши свідомо
гірші

звести задачу до однокритеріальної
шляхом введення інтегрального
критерію

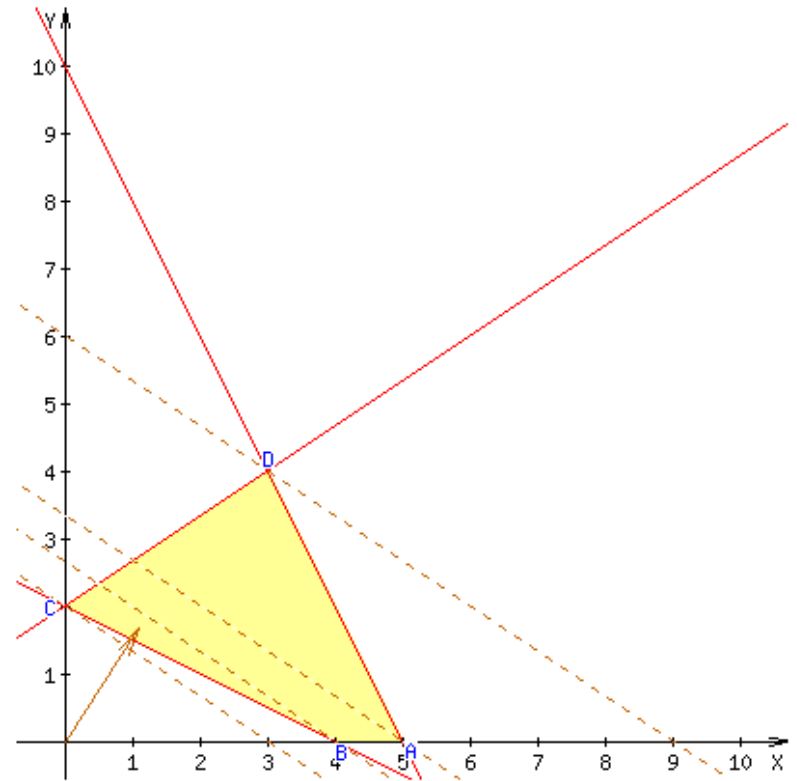
Приклад багатокритеріальної задачі

Векторна цільова функція $f(x)$ та 4 обмеження:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \left(\begin{array}{l} f_1 = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 \\ f_2 = x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right) \rightarrow \text{extr} \\ 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 \leq 400, \\ 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 \leq 500, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 \leq 400, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ f_2(x) = 4x_1 + x_2 \end{cases} \rightarrow \max$$

$$X = \begin{cases} x \in R^2 : \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Ідеальне рішення

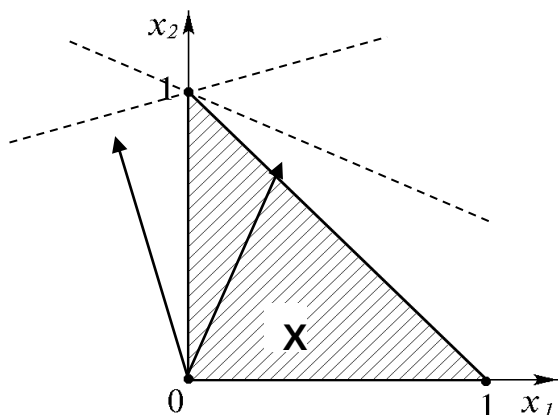


Рис. Ідеальна точка (0,1)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 = x_1 + 10x_2 \\ f_2 = -x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{extr}$$

$$X = \{x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0,\}$$

$$f_{1\max} = f_1(0,1) = 10, \quad \underset{x}{\operatorname{argmax}} f_1 = (0,1)$$

$$f_{2\max} = f_2(0,1) = 10, \quad \underset{x}{\operatorname{argmax}} f_2 = (0,1)$$

Якщо функції $f_1, \dots, f_m$ досягають максимуму в одній і тій же точці $x^* \in X$

$$\underset{x \in X}{\operatorname{argmax}} f_i(x) = x^*, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

то кажуть, що задача (1) має *ідеальне рішення*

$$x^* \in X$$

У разі відсутності «ідеального вирішення» у задачі (1) *шукається компромісне рішення*

Компромісне рішення

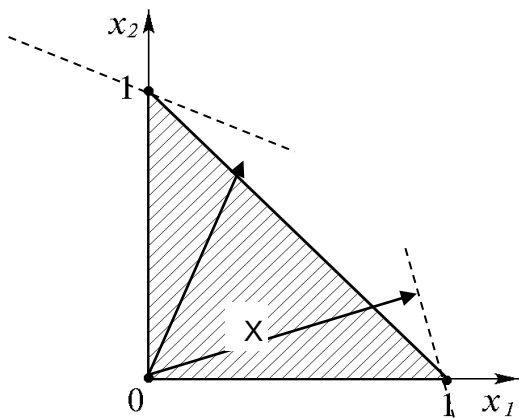


Рис. Компромісне рішення

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 = x_1 + 10x_2 \\ f_2 = 10x_1 + x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{extr}$$

$$X = \{x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0,\}$$

$$f_{1\max} = f_1(0,1) = 10, \quad \arg\max_x f_1 = (0,1)$$

$$f_{2\max} = f_2(1,0) = 10, \quad \arg\max_x f_2 = (1,0)$$

Ідеальне рішення

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 = x_1 + 10x_2 \\ f_2 = -x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{extr}$$

$$X = \{x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0,\}$$

$$f_{1\max} = f_1(0,1) = 10, \quad \operatorname{argmax}_x f_1 = (0,1)$$

$$f_{2\max} = f_2(0,1) = 10, \quad \operatorname{argmax}_x f_2 = (0,1)$$

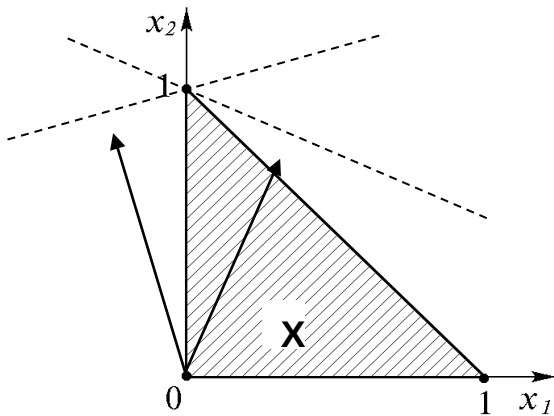


Рис. Ідеальна точка $(0,1)$

Компромісне рішення

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 = x_1 + 10x_2 \\ f_2 = 10x_1 + x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{extr}$$

$$X = \{x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0,\}$$

$$f_{1\max} = f_1(0,1) = 10, \quad \operatorname{argmax}_x f_1 = (0,1)$$

$$f_{2\max} = f_2(1,0) = 10, \quad \operatorname{argmax}_x f_2 = (1,0)$$

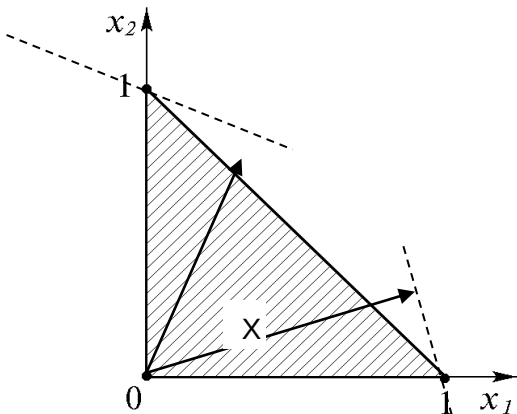
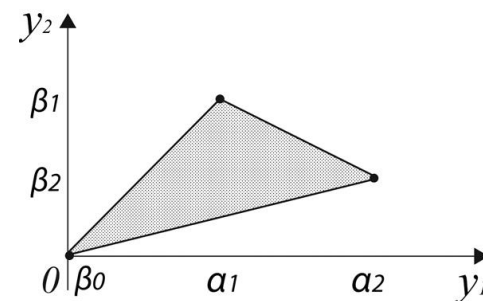
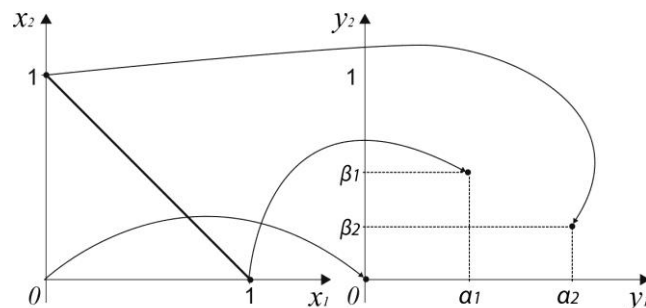
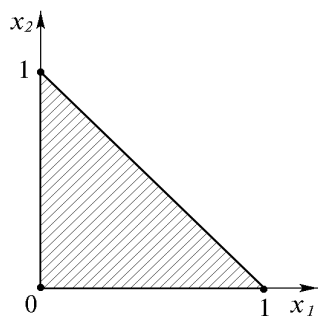


Рис. Компромісне рішення

Множина досяжних цілей

$$\begin{cases} \max f_1(x) = x_1 + 2x_2 & (*1) \\ \max f_2(x) = 2x_1 + x_2 & (*2) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- альтернативі (0,0) відповідає точка (0,0) у просторі критеріїв (векторна оцінка (0;0));
- альтернативі (0,1) відповідає точка (2,1) у просторі критеріїв (векторна оцінка (2;1));
- альтернативі (1,0) відповідає точка (1,2) у просторі критеріїв (векторна оцінка (1,2)).



Порівняні та непорівняні альтернативи

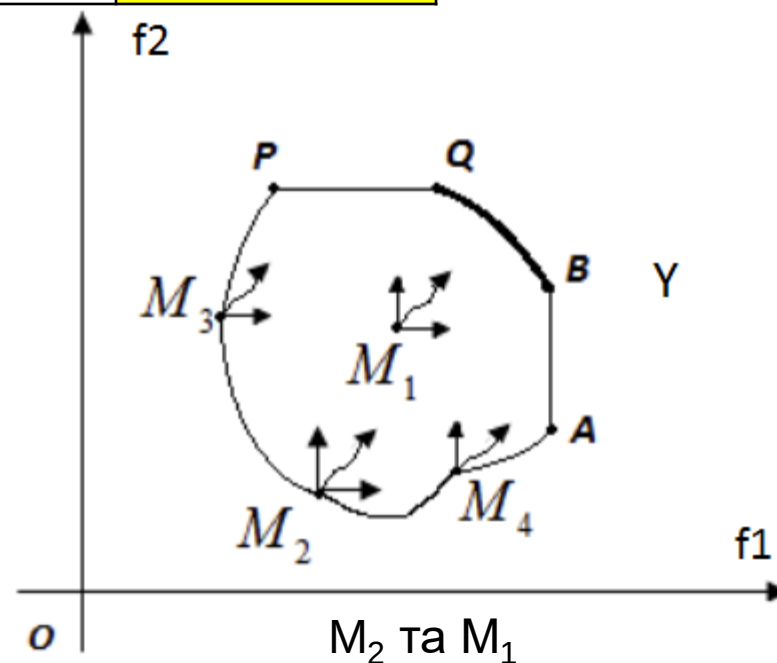
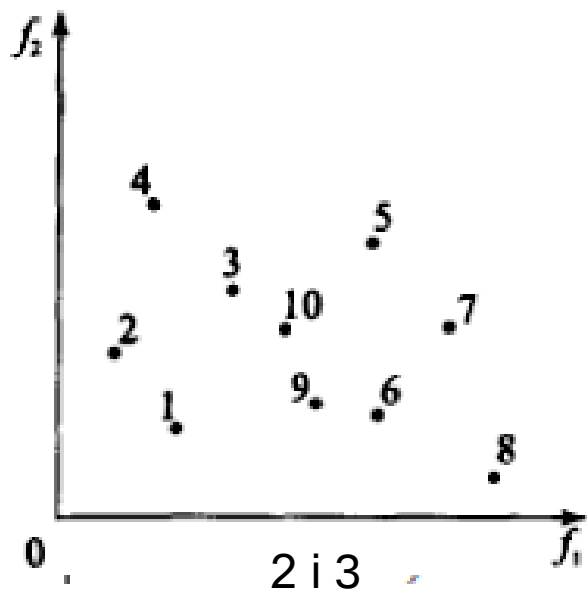
$$x^1 \in X$$

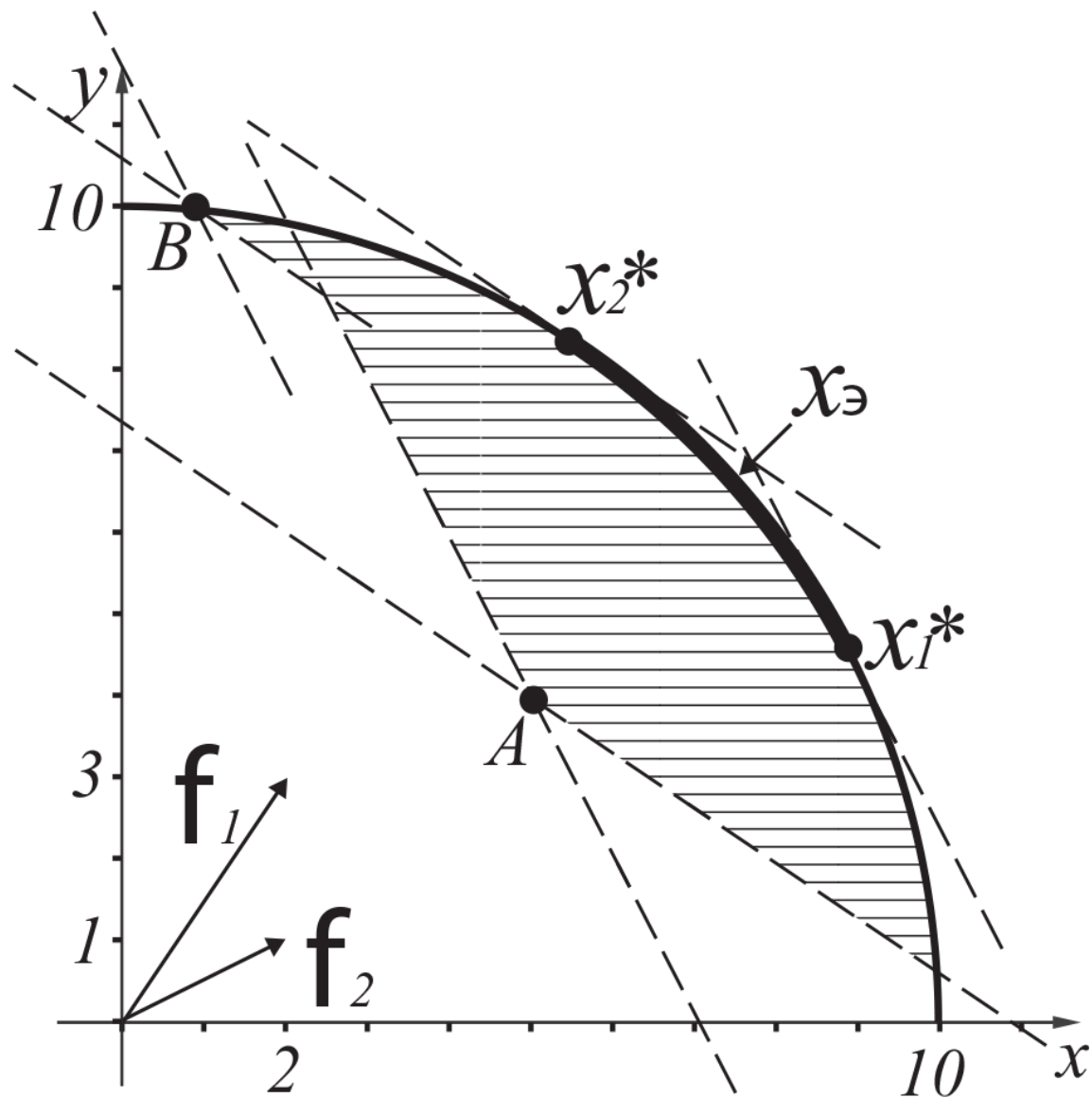
$$x^2 \in X$$

порівняні, якщо

$$f_i(x^1) \geq f_i(x^2), \forall i = \overline{1, m}$$

x	x_1	x_2	x_3
$f_1(x)$	2	4	3
$f_2(x)$	5	1	6





Принцип Парето

Нехай X_1 і X_2 – альтернативи.

Якщо для $\forall i \quad f_i(X_1) \geq f_i(X_2)$,

причому хоча б одна нерівність строга,

то $X_1 \succ X_2$,

і альтернативу X_2 можна виключити з розгляду

Множина Парето

Інші альтернативи утворюють

множину Парето –

множину ***непокращених*** альтернатив,

або множину ***непорівняних*** альтернатив,

Множина Парето

або таких,

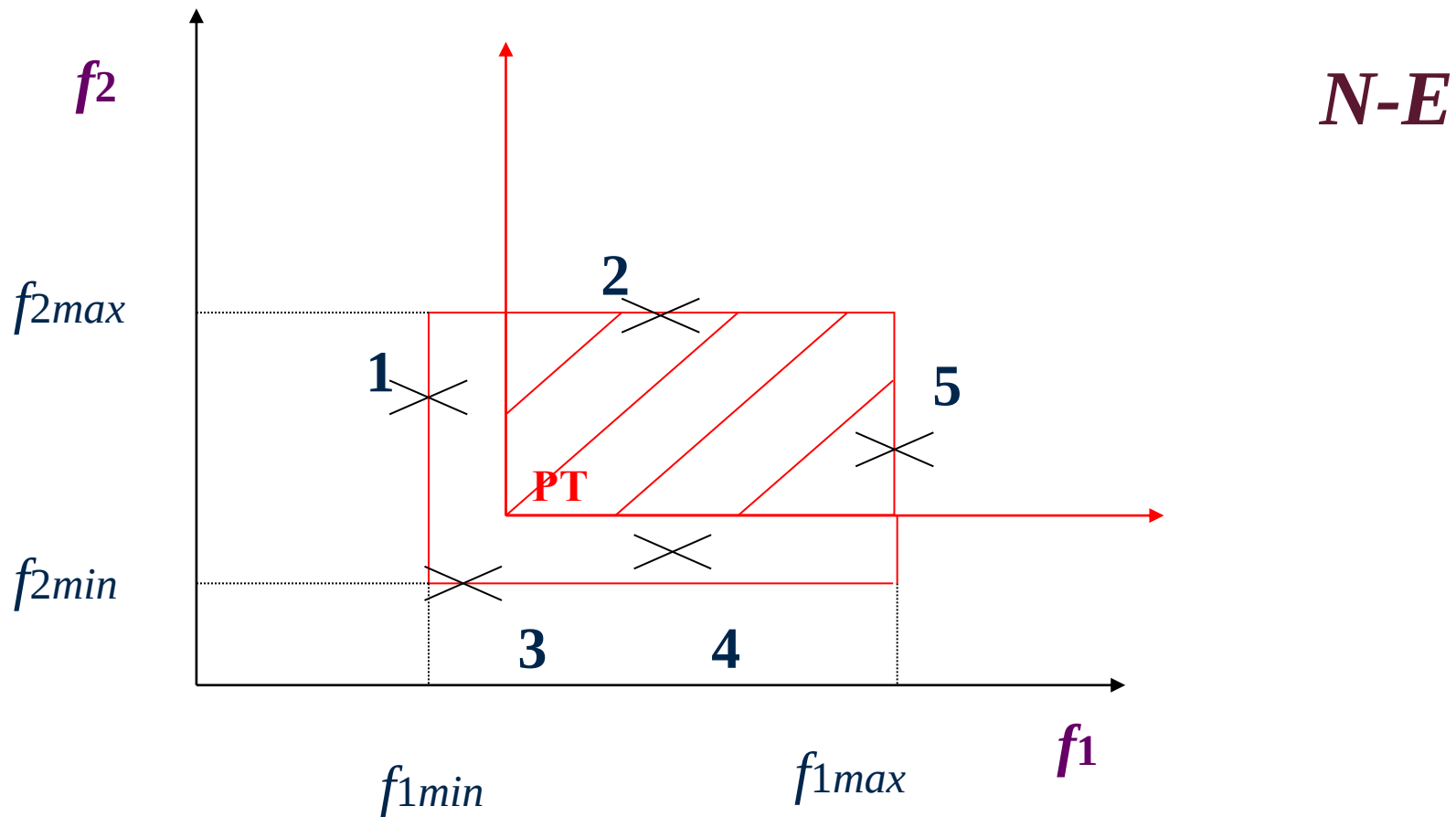
покращення яких за одними
критеріями призводить до їх
погіршення за іншими

Можливі рішення варто шукати лише
серед непокращених альтернатив

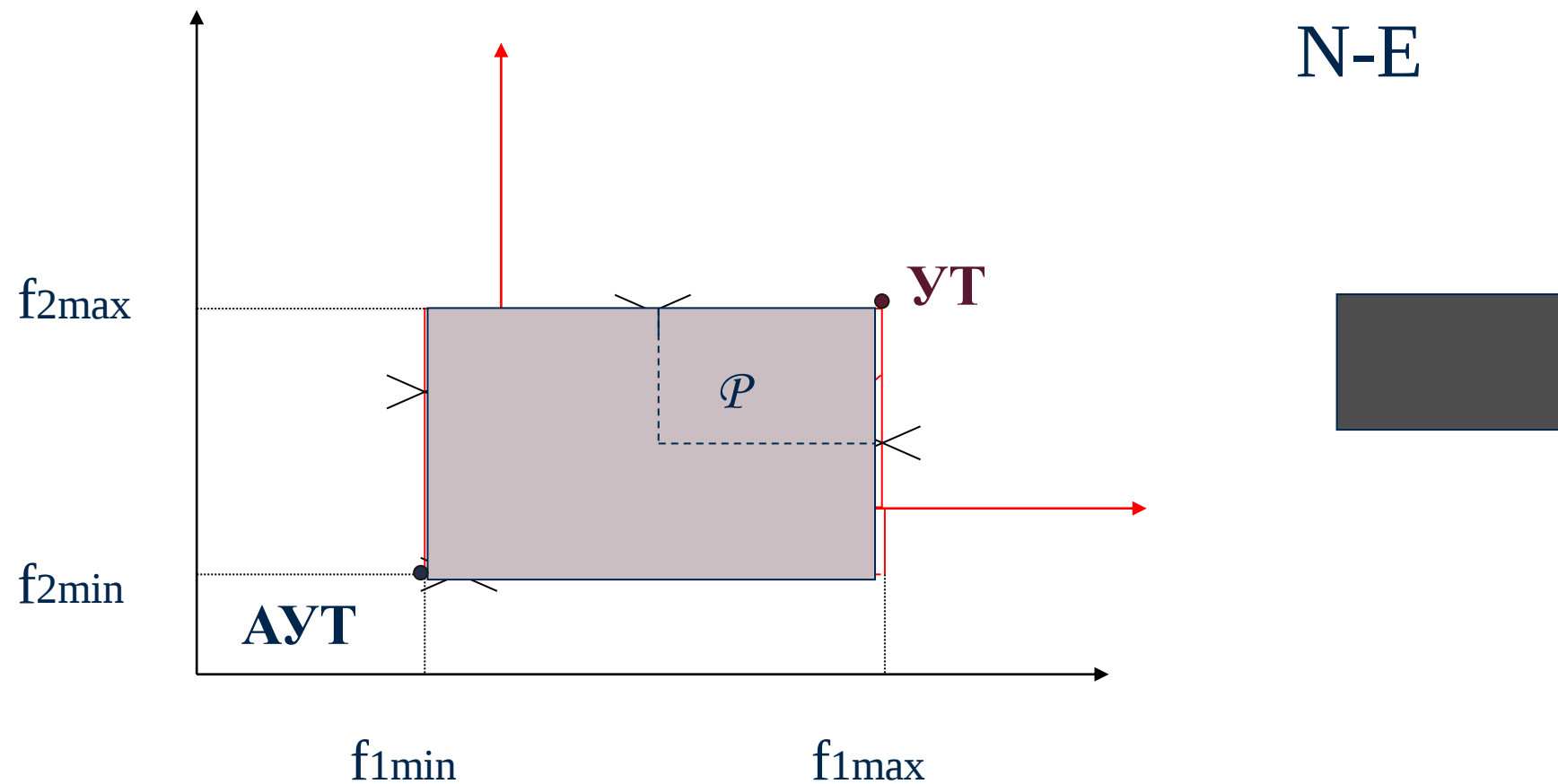
Критеріальний простір

У критеріальному просторі
альтернативи
задані *точками*,
проекції яких на осі є оцінками
альтернатив за відповідними
критеріями.

Конус переваги



Поле корисності



Способи задання альтернатив

координатний

(альтернативи задані своїми координатами у критеріальному просторі)

графічний

(альтернативи утворюють неперервну множину і зображені точками на графіку в координатному просторі)

аналітичний

(оцінки альтернатив за кожним критерієм є неперервними функціями,
наприклад, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^3-4x+2$)

Множина Парето

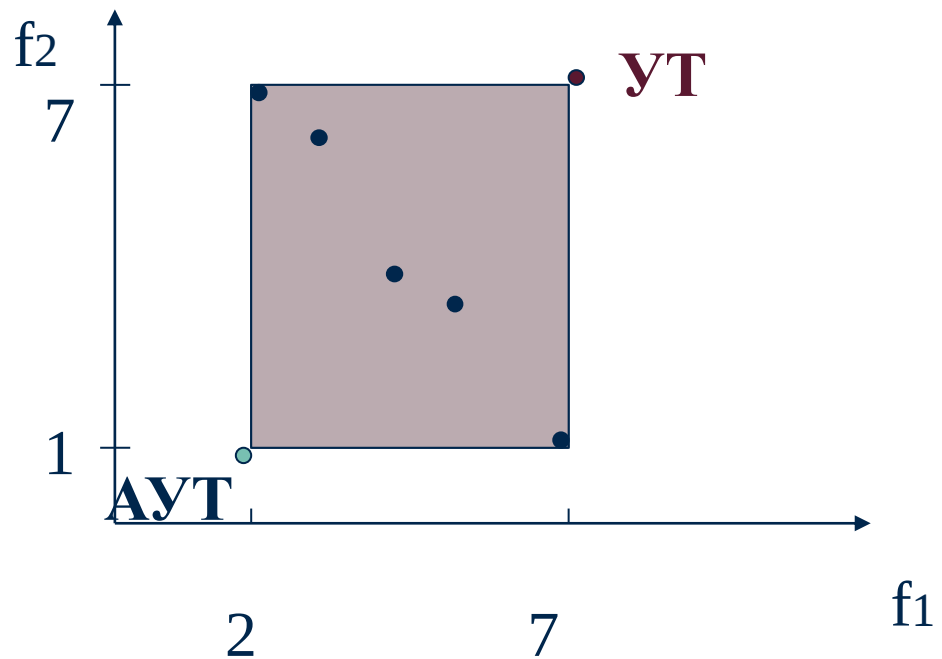
$$\left\{ \begin{array}{l} \# X_1(2;7) \\ \# X_2(4;4) \\ \# X_3(3;6) \\ \# X_4(7;1) \\ \# X_5(5;3) \\ \# X_6(6;0) \\ \# X_7(4;3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Множина Парето

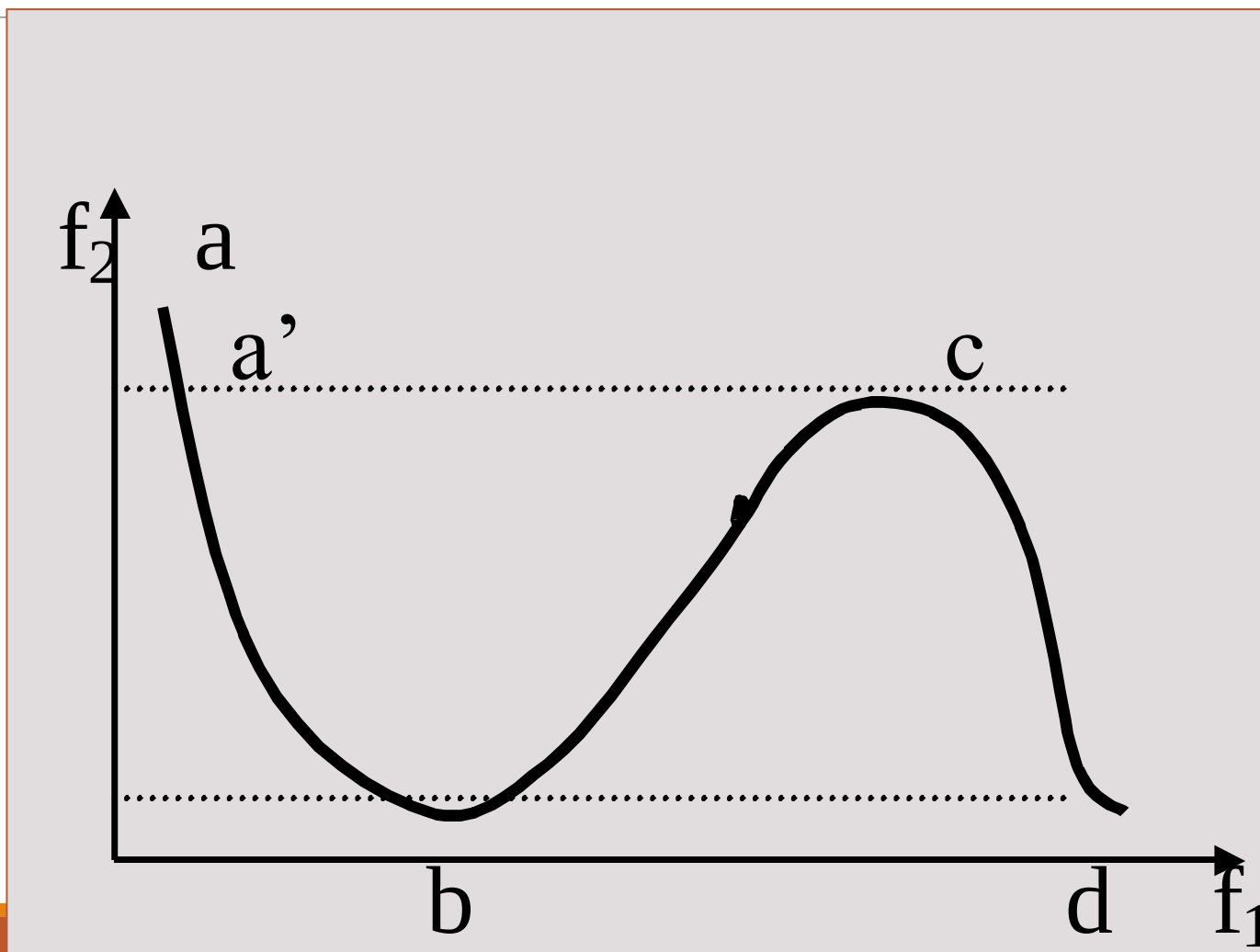
$$\mathcal{P} \{x_1 (2; 7); x_2 (4; 4); x_3 (3; 6); x_4 (7; 1); x_5 (5; 3)\}$$

АУТ (2; 1)

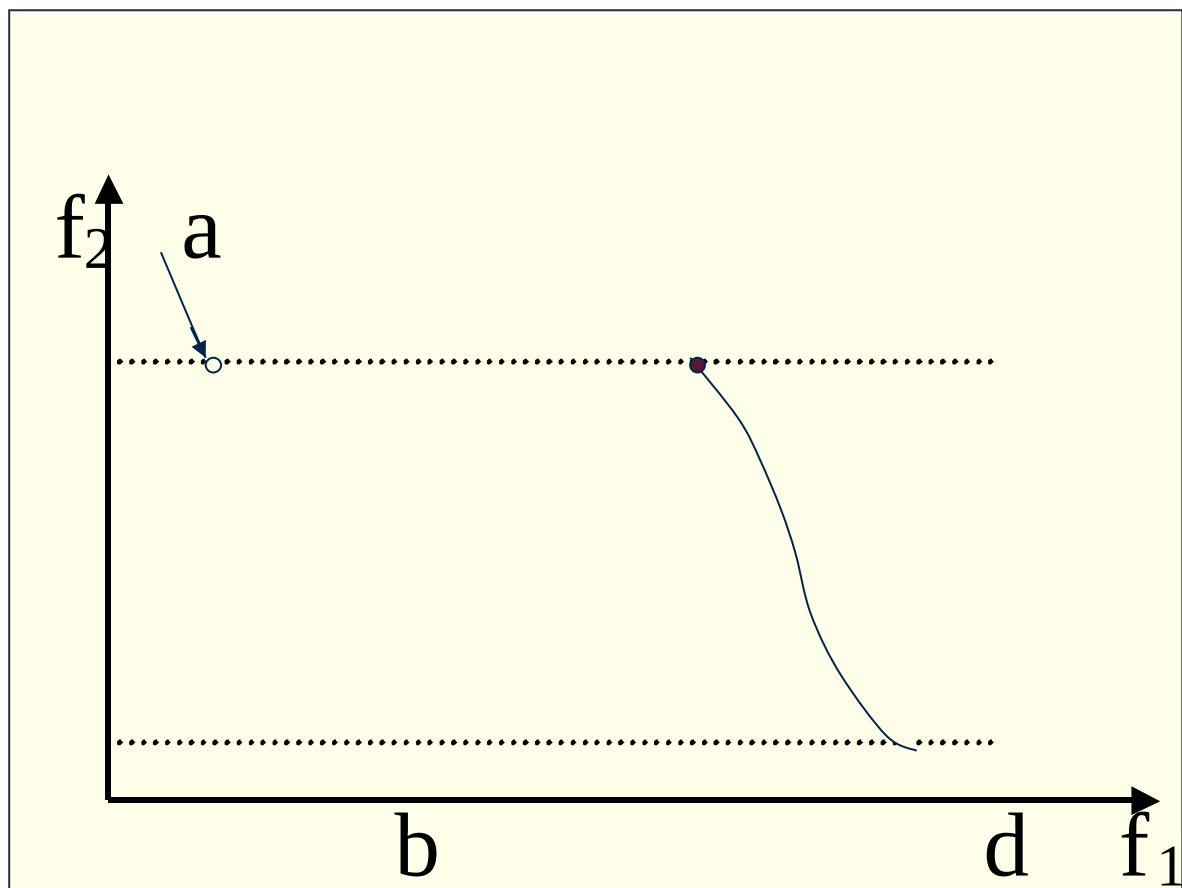
УТ(7;7)



Множина Парето



Множина Парето



Множина Парето

Усі альтернативи з множини Парето є рішенням багатокритеріальної задачі у сенсі цього принципу, тобто є ***паретооптимальними***

Основним недоліком таких рішень є їхня множинність

Переведення в однорідну шкалу

$$f_i(x) = \frac{f_i^*(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

$f_i^*(x)$ – оцінка альтернативи x по i -му критерію в «рідній» шкалі

$f_i^{\max}$ і $f_i^{\min}$ – максимальне та мінімальне значення альтернатив по i -му критерію

Переведення в однорідну шкалу

$$f_i(x) = \frac{f_i^*(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

А: \$ 100 млн; 20 хв; 50 тис. осіб;

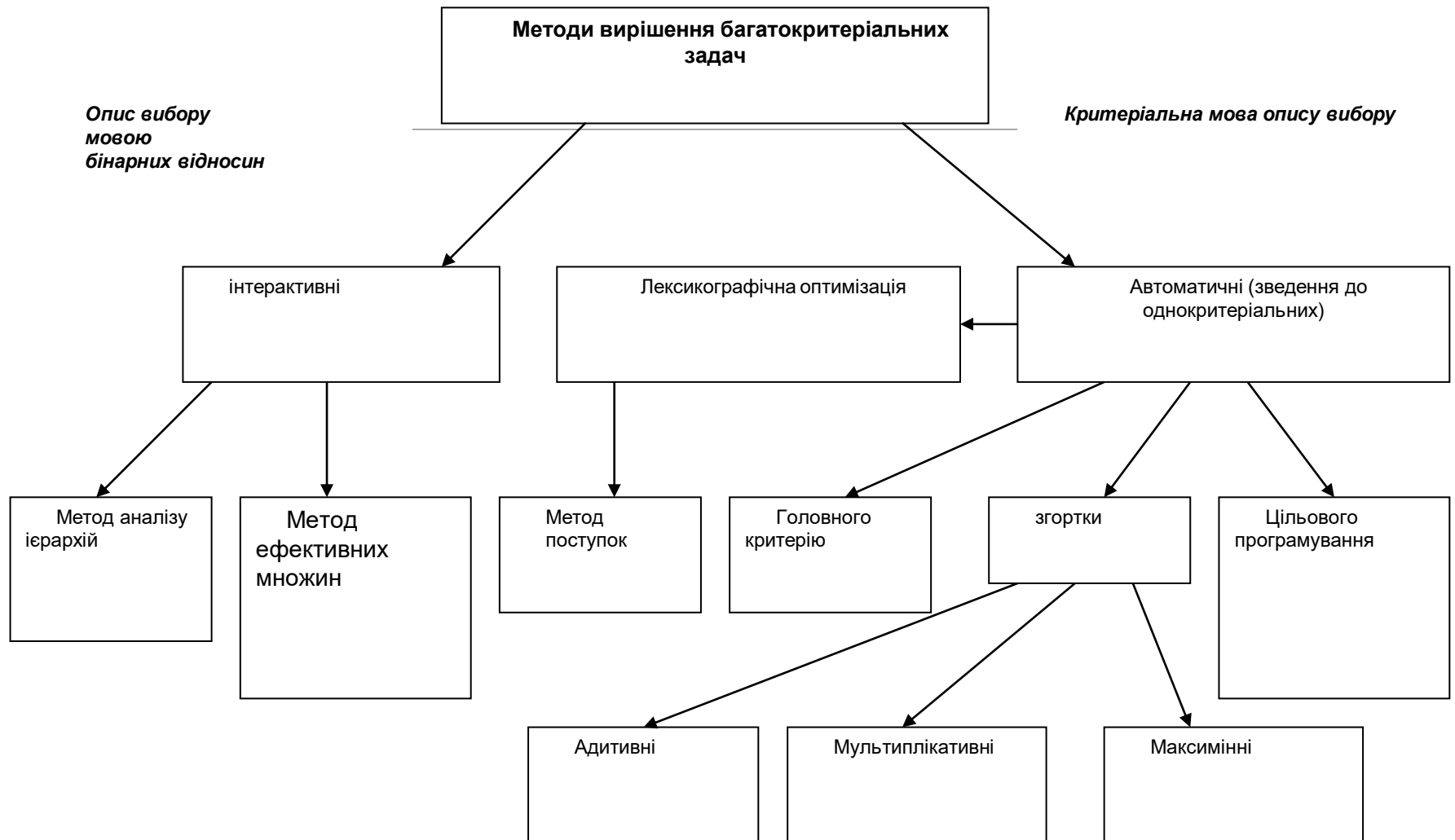
Б: \$ 130 млн; 30 хв; 20 тис. осіб;

З: \$ 200 млн; 60 хв; 5 тис. осіб;

А(0;0;-1) Б(-3/10;-1/4;-1/3) С(-1; -1; 0)

УТ(0;0;0) АУТ(-1;-1;-1)

Методи вирішення багатокритеріальних задач



Інтегральний критерій

$$x \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \longrightarrow F(x)$$

Його роль – поставити у відповідність

кожній альтернативі

тільки **одне число**

Метод арбітражних рішень, або метод Неша

$$\text{АУТ}(f_i^{\min})$$

$$F(x) = \prod_i (f_i(x) - f_i^{\min}) \rightarrow \max_x$$

Приклад

$$\mathcal{P} \{X_1(2;7); X_2(4;4); X_3(3;6); X_4(7;1); X_5(5;3)\}$$

$$F(x_1) = (2-2)(7-1) = 0$$

АУТ (2;1)

$$F(x_2) = (4-2)(4-1) = 6$$

$$F(x_3) = (3-2)(6-1) = 5$$

$$F(x_4) = (7-2)(1-1) = 0$$

$$F(x_5) = (5-2)(3-1) = 6$$

$$\prod_i (f_i(x) - f_i^{\min}) \rightarrow \max_x$$

$x_2 \sim x_5$ за Нешом

Використання контрольних показників

$$\{f_i^*\}_n, \quad f_i(x) \geq f_i^*,$$

$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{f_i^*} \right\} \rightarrow \max_x$$

Приклад

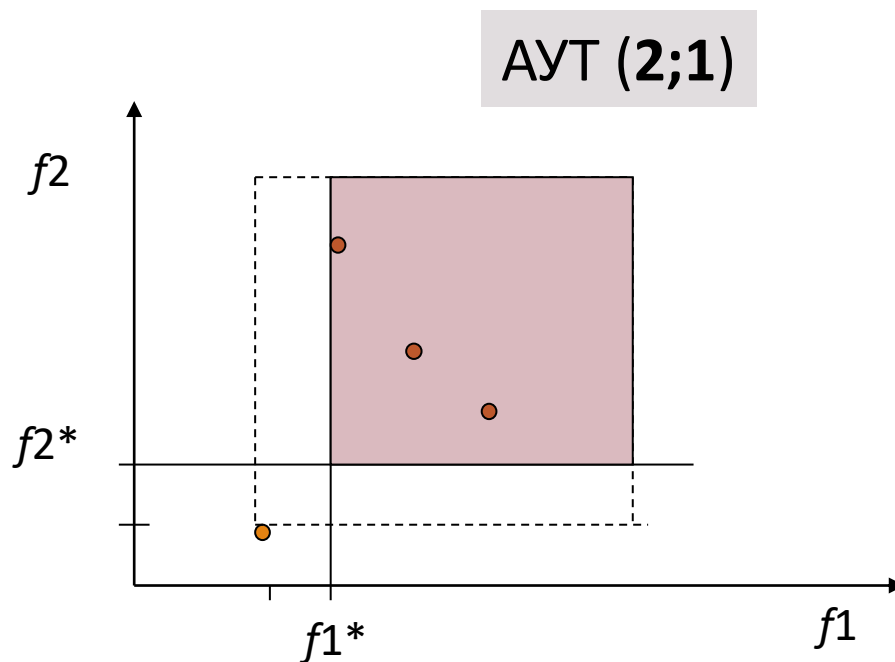
$P \{X_1(2;7); X_2(4;4); X_3(3;6); X_4(7;1); X_5(5;3)\}$

Нехай $f_1^*=3; f_2^*=2$

$$F(x_2)=\min\{4/3; 4/2\}=4/3$$

$$F(x_3)=\min\{3/3; 6/2\}=1$$

$$F(x_5)=\min\{5/3; 3/2\}=\mathbf{3/2}$$



Найпростіший спосіб

$$\begin{aligned} f_i(x) &\geq f_i^* \\ f_1(x) &\rightarrow \max_x \end{aligned}$$

Ранг, що дорівнює 1, надається головному критерію

Введення метрики у просторі цільових функцій

УТ(f_{imax})

$$h(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_{imax} - f_i(x))^2}$$

Приклад

■ $P \{X_1(2;7); X_2(4;4); X_3(3;6); X_4(7;1); X_5(5;3)\}$

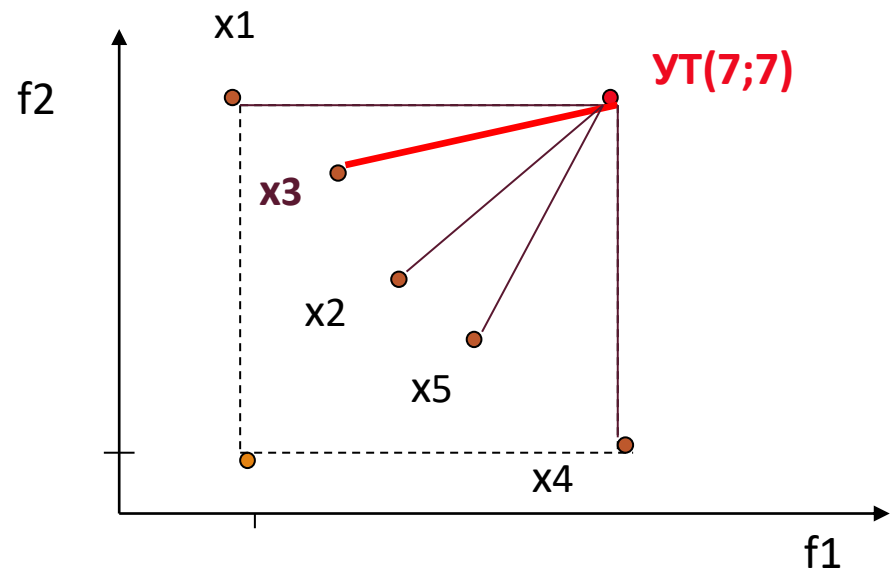
$$h(x_1)=5$$

$$h(x_2)=\sqrt{18},$$

$$h(x_3)=\sqrt{17}$$

$$h(x_4)=6$$

$$h(x_5)=\sqrt{20}$$



Приклад

А:\$ 100млн; 20хв; 50тис. чол;

Б:\$ 130млн; 30хв; 20тис осіб;

С:\$ 200млн; 60хв; 5тис осіб;

	Неш	МКП	Метрика
А(61;61;1)	0	1	$h(A)=60 = \sqrt{3600}$
Б(43; 46; 41)	42*45*40	41	$h(B)=$
3(1; 1; 61)	0	1	$= \sqrt{18^2 + 15^2 + 20^2} = \sqrt{949}$
УТ(61; 61; 61); АУТ (1; 1; 1)			$H(C)=\sqrt{7200}$

Згортка

$$F(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$$

тут x – альтернатива з множини *Парето*
 $f_i(x)$ – оцінка альтернативи x за i -им критерієм

Згортка

C_i- коефіцієнти відносної важливості критеріїв

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1$$

Експертне оцінювання C_i

Нехай r_{ij} – ранг, який
надав

j - експерт

i -му критерію

Щоб отримати числову
оцінку, введемо новий
коефіцієнт

$$b_{ij} = 1 - \frac{r_{ij} - 1}{n}$$

Експертне оцінювання C_i

Тоді коефіцієнт значущості **i -го** критерію з погляду **j -го** експерта

$$C_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^n b_{ij}}$$

Експертне оцінювання C_i

Нехай g_j – компетентність j -го експерта, тоді

$$C_i = \sum_{j=1}^m g_j C_{ij}, \quad \sum_{j=1}^m g_j = 1$$

Оцінювання C_i

Th. Якщо

$$f_i \succ^h f_j,$$

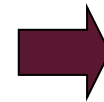
то $C_i = hC_j,$

$$C_i > 0, \sum C_i = 1$$

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь, отримаємо
шукані коефіцієнти

Приклад

$$f_1 \succ^{3/2} f_2, f_2 \sim f_3, f_3 \succ^2 f_4$$



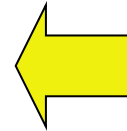
$$C_1 = 1,5C_2;$$

$$C_2 = C_3;$$

$$C_3 = 2C_4;$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1;$$

$$C_1 = 3/8; C_2 = 2/8; C_3 = 2/8; C_4 = 1/8$$



$$3/8 \quad 2/8 \quad 2/8 \quad 1/8$$

	f_1	f_2	f_3	f_4	$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$
X1	2	5	4	5	$3/8 \cdot 2 + 2/8 \cdot 5 + 2/8 \cdot 4 + 1/8 \cdot 5 = 29/8$
X2	5	3	4	3	32/8
X3	3	2	5	5	28/8
X4	4	3	4	4	30/8
X5	3	4	4	4	29/8
X6	4	3	3	4	28/8

Використання лінійної згортки

Ці задачі, пов'язані з критеріями **сумарних збитків або прибутку, доходу, грошових чи тимчасових витрат** за роками планування або за етапами життєвого циклу економічних інформаційних систем тощо, тобто там, де допускається, що **низька цінність однієї характеристики результату компенсується високою цінністю іншої**

Квадратична згортка

$$\Phi_2(x) = \left(\sum C_i f_i^2(x) \right)^{1/2}$$

Згортка порядку t

$$\Phi_t(x) = (\sum C_i f_i^t(x))^{1/t}$$

Величина t , яка стоїть у показнику степеня, відображає **допустиму ступінь компенсації малих значень одних критеріїв більшими значеннями інших.**

Чим більше значення t , тим більша ступінь можливої компенсації.

$$t \rightarrow -\infty$$

$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{c_i} \right\}$$

неприпустима ніяка компенсація, і потрібно
вирівнювання значень усіх критеріїв

(рівномірне «підтягування» значень всіх критеріїв до
їхнього найкращого рівня)

$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{c_i} \right\}$$

3/8 2/8 2/8 1/8

	f_1	f_2	f_3	f_4		
X1	2	5	4	5	$(2/3+5/2+4/2+5)*8$	2/3
X2	5	3	4	3	$(5/3+3/2+4/2+3)*8$	3/2
X3	3	2	5	5	$(3/3+2/2+5/2+5)*8$	1
X4	4	3	4	4	$(4/3+3/2+4/2+4)*8$	4/3
X5	3	4	4	4	$(3/3+4/2+4/2+4)*8$	1
X6	4	3	3	4	$(4/3+3/2+3/2+4)*8$	4/3

$t \rightarrow 0$

$$F(x) = \prod_{i=1}^n f_i^{c_i}(x)$$

- мультиплікативна функція

потрібне забезпечення **приблизно однакових рівнів** значень окремих критеріїв

$$t \rightarrow \infty$$

$$F(x) = \max_i \{c_i f_i(x)\}$$

У задачах планування ударів «у вузьке місце»
допустима

*компенсація збільшення одного з критеріїв
як завгодно великим зменшенням інших*

$$F(x) = \max_i \{c_i f_i(x)\}$$

3/8 2/8 2/8 1/8

	f_1	f_2	f_3	f_4		
X1	2	5	4	5	$(2*3+5*2+4*2+5)/8$	10
X2	5	3	4	3	$(5*3+3*2+4*2+3)/8$	15
X3	3	2	5	5	$(3*3+2*2+5*2+5)/8$	10
X4	4	3	4	4	$(4*3+3*2+4*2+4)/8$	12
X5	3	4	4	4	$(3*3+4*2+4*2+4)/8$	9
X6	4	3	3	4	$(4*3+3*2+3*2+4)/8$	12

Згортка

Використовуючи як інтегральний критерій згортку, вибирають як найкращу ту альтернативу, для якої **$F(x)$** має **максимальне значення**

Метод адитивної згортки

Нехай критерії співмірні (наприклад, нормовані) та визначено вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, що характеризують важливість відповідного критерію (якщо $f_i \succ f_j$ то $\alpha_i > \alpha_j$):

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

Вирішується завдання оптимізації скалярного критерію:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \rightarrow \max, \quad x \in X \quad (2)$$

! Розв'язання задачі (2) ефективно (тобто Парето-оптимально) для вихідної багатокритеріальної задачі

Приклад розв'язання задачі методом адитивної згортки

$$f(x) = (f_1 = x_1 + 3x_2, f_2 = 40x_1 + 10x_2) \rightarrow \max$$

Вагові коефіцієнти:

$$X = \{2x_1 + x_2 \leq 90, x_1 + x_2 \leq 90, x_2 \leq 50, x_1, x_2 \geq 0\}$$

$$\alpha_1 = 0,3, \alpha_2 = 0,7$$

Нормування критеріїв

Знаходимо f_1^*, f_2^* , розв'язуючи задачу окремо за кожним із критеріїв:

За першим критерієм:

	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			
2		10	50			
5	f1	1	3	160		
6	f2	40	10	900		
7	1 орп	2	1	70 <=		90
8	2 орп	1	1	60 <=		60
9	3 орп	0	1	50 <=		50

$$x^{1*} = (10, 50), f_1^* = 160$$

За другим критерієм:

	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			
2		45	0			
5	f1	1	3	45		
6	f2	40	10	1800		
7	1 орп	2	1	90 <=		90
8	2 орп	1	1	45 <=		60
9	3 орп	0	1	0 <=		50

$$x^{2*} = (45, 0), f_2^* = 1800$$

Нормовані критерії

$$\bar{f}_1 = \frac{f_1}{f_1^*} = \frac{1}{160}(x_1 + 3x_2), \quad \bar{f}_2 = \frac{f_2}{f_2^*} = \frac{1}{1800}(40x_1 + 10x_2)$$

Лінійна згортка критеріїв:

$$F(x) = 0,3\bar{f}_1 + 0,7\bar{f}_2 = 0,3 \frac{1}{160}(x_1 + 3x_2) + 0,7 \frac{1}{1800}(40x_1 + 10x_2) = (25,1x_1 + 13,7x_2) / 720$$

Недоліки методу адитивної згортки

1. Значення α , зазвичай, встановлюються виходячи з неформальних міркувань, пов'язаних із результатами експертного аналізу.
2. Взагалі кажучи апріорі незрозуміло, у якому співвідношенні повинні бути вагові коефіцієнти, якщо відомо бажане відношення значень критеріїв в оптимальної точці.
3. Можливі «погані» значення деяких критеріїв з допомогою досить «хороших» значень інших цільових функцій.

Метод головного критерію

Один критерій виділяється як головний

Інші критерії перетворюються на обмеження.

Нехай $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m)$ – вектор, компоненти якого – нижні межі відповідних критеріїв.

Рішення вважається оптимальним, якщо критерій f_1 досягає свого максимального значення за умови, що по всім іншим критеріям досягнуто значення, не менші заданих.

Задача матиме вигляд:

$$\begin{aligned} F(x) = f_1(x) &\rightarrow \max \\ f_i(x) &\geq \gamma_i, i = \overline{2, m}, \\ x &\in X. \end{aligned}$$

Приклад

$$f(x, y) = (f_1 = x, f_2 = y) \rightarrow \max,$$

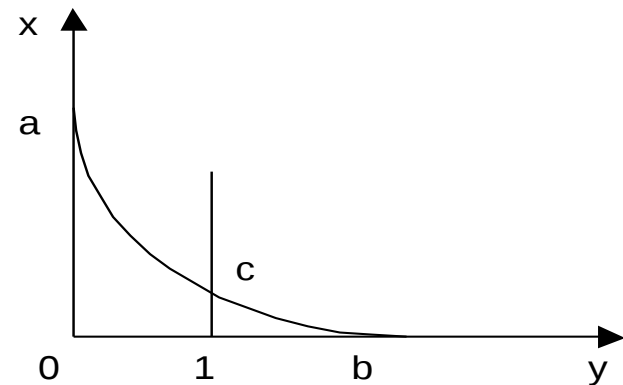
$$X = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\gamma_2 = 1$$

$$f_1 = x \rightarrow \max$$

$$f_2 = y \geq 1$$

$$(x, y) \in X$$



Розв'язання задачі – це точка c на рис.,

множина ефективних точок

$$X^\ominus = \{a, b\}, c \in X^\ominus.$$

Проблеми принципу:

- Можлива наявність кількох «головних» критеріїв, які протирять один одному.
- Не завжди зрозумілий алгоритм вибору нижніх меж
- Рішення може бути слабоефективним, але не ефективним

Метод послідовних поступок

1. Критерії нумеруються в порядку зменшення їх важливості.

$$f_1 \succ f_2 \succ \dots \succ f_m$$

2. Визначається значення $f_1^* = \max_{x \in X} f_1(x)$. ОПР встановлює величину поступки Δ_1 за цим критерієм.

3. Розв'язується задача:

$$f_2(x) \rightarrow \max, x \in X, f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1.$$

Пункти 2 і 3 повторюються для критеріїв $f_2, \dots, f_m$.

Недолік

Отримуване рішення не завжди є ефективним.

Приклад. Розв'язати задачу із поступкою за першим критерієм 10% від його оптимального значення

$$f(x) = (f_1 = x_1 + 3x_2, f_2 = 40x_1 + 10x_2) \rightarrow \max \quad f_1 \succ f_2$$
$$X = \{2x_1 + x_2 \leq 90, x_1 + x_2 \leq 90, x_2 \leq 50, x_1, x_2 \geq 0\}$$

Розв'язання.1 етап.

Розв'яжемо задачу за критерієм f_1

Отримаємо $f_1^* = 160$ Величина поступки $\Delta_1 = 16$

Додаткове обмеження: $f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 \geq 160 - 16$

2 етап: Розв'язуємо задачу $f_2 = 40x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$

$$2x_1 + x_2 \leq 90 \quad (A)$$

$$x_1 + x_2 \leq 90 \quad x_1 + 3x_2 \geq 160 - 16$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Відповідь: $x^* = (18, 42), f_2(x^*) = 1440, f_1(x^*) = 144$

Проблеми методу

- Довільний вибір поступок може призвести до того, що задача (A) не матиме допустимих планів.
- Розв'язання задачі (A) може в загальному випадку не бути оптимальним за Парето для задачі (вихідної);
- Числа Δ_i не порівнюювані між собою і зазвичай підбираються за принципом: виберемо досить маленькі, якщо задача не матиме розв'язку – трохи їх збільшимо.

Приклад розв'язання задачі методом послідовних поступок

Нехай експерти впорядкували критерії $f_2 \succ f_1$

Поступка за головним критерієм становить 3% від його оптимального значення.

Задача 1-го етапу:

$$f(x) = f_2 = 40x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 90$$

$$x_1 + x_2 \leq 60$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			
2		45	0			
5	f1	1	3	45		
6	f2	40	10	1800		
7	1 орп	2	1	90 <=		90
8	2 орп	1	1	45 <=		60
9	3 орп	0	1	0 <=		50

Розв'язання задачі першого етапу $x^{2*} = (10, 50), f_2^* = 1800$

Експертом призначено поступку за головним критерієм:

$$\Delta_2 = 0,03 * f_2^* = 0,03 * 1800 = 54$$

Додаткове обмеження $f_2(x) \geq f_2^* - \Delta_2$

$$40x_1 + 10x_2 \geq 1800 - 54 = 1746$$

Задача 2-го етапу:

$$f(x) = f_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 90$$

$$x_1 + x_2 \leq 60$$

$$x_2 \leq 50$$

$$40x_1 + 10x_2 \geq 1800 - 54 = 1746$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			
2		42,3	5,4			
5	f1	1	3	58,5		
6	f2	40	10	1746	>=	1746
7	1 орп	2	1	90	<=	90
8	2 орп	1	1	47,7	<=	60
9	3 орп	0	1	5,4	<=	50

Відповідь: за методом поступок оптимальною є альтернатива

$$x^{*y} = (42,3; 5,4),$$

відповідні значення критеріїв:

$$f_1(x^{*y}) = 58,5, f_2(x^{*y}) = 1746$$

Зауважимо, що $f_1(x^{*y}) = 58,5 < 160 = f_1^*$, $f_2(x^{*y}) = 1746 < 1800 = f_2^*$

Multi-Attribute Utility Theory (MAUT)

Використовується при можливому структуруванні системи цілей, поданні її у вигляді ієрархії.

Ідея – оцінити корисність кожної альтернативи з точки зору досягнення глобальної мети

Алгоритм *MAUT*

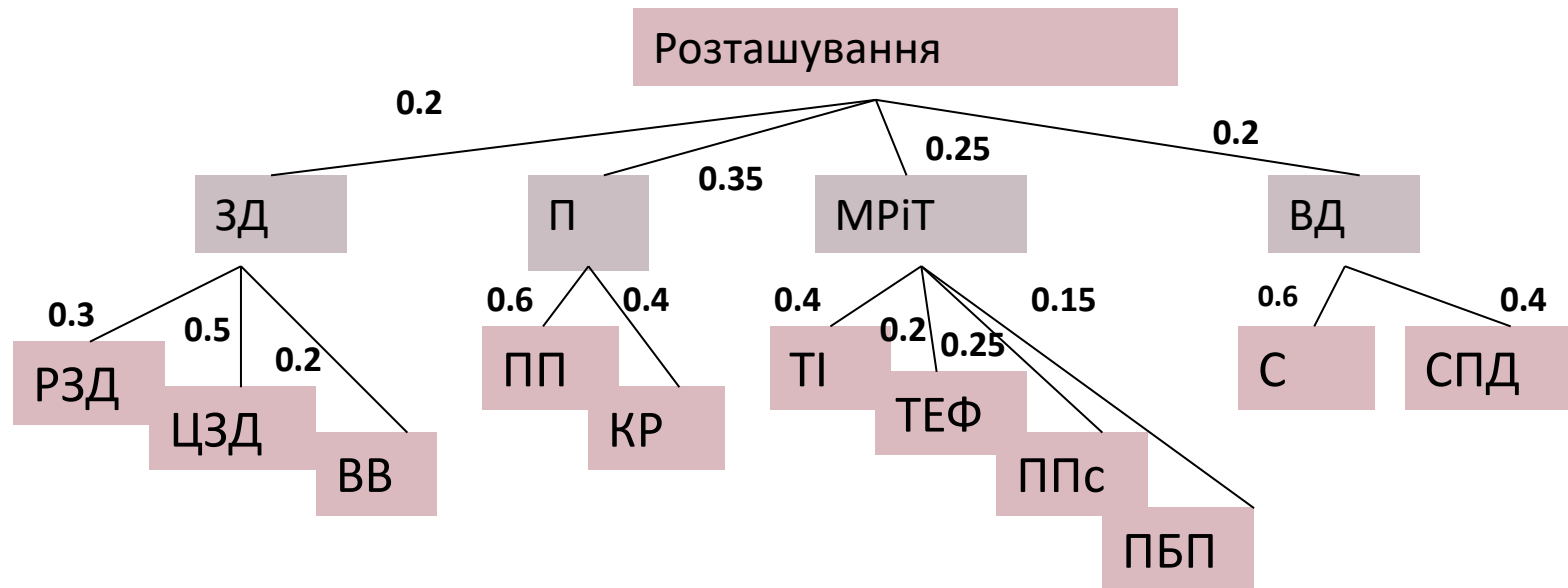
Оцінюється часткова корисність кожної альтернативи по відношенню до відповідного критерію

Оцінюються коефіцієнти відносної важливості критеріїв

Оцінюється загальна корисність кожної альтернативи стосовно головної мети

Найкращою буде та альтернатива, загальна корисність якої більша.

Приклад: «Вибір розташування підприємства»



А, Б, С

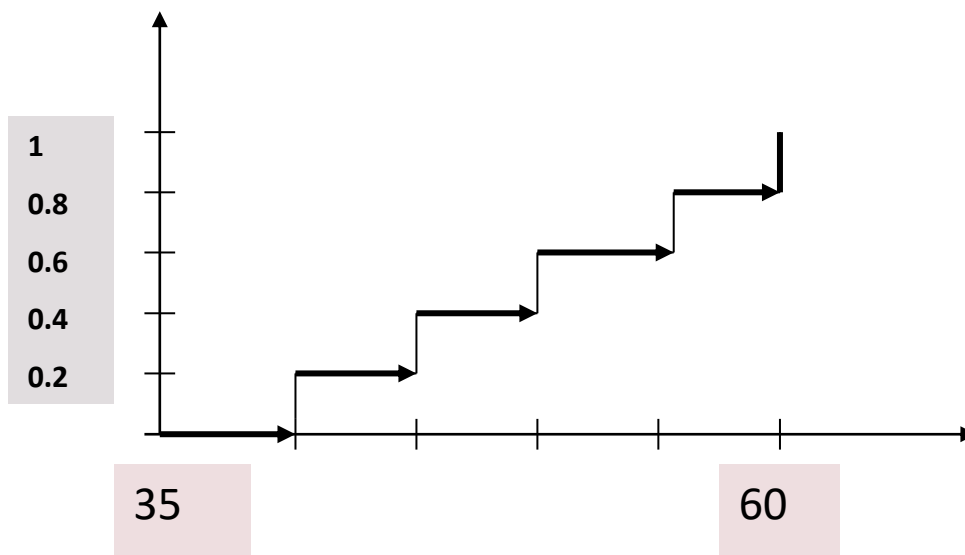
Оцінка часткової корисності альтернатив за критерієм

РЗД, тис. кв. м:

А – 60

Б – 42.5

С – 35



А(1), Б(0.2), С(0)

=>

$$РЗД_A = 1 * 0.3 * 0.2 = 0.06$$

$$РЗД_B = 0.2 * 0.3 * 0.2 = 0.012$$

$$РЗД_C = 0$$

Показники часткової корисності

	0,2	0,2	0,2	0,35	0,35	0,25	0,25	0,25	0,25	0,2	0,2
	0,3	0,5	0,2	0,6	0,4	0,4	0,2	0,25	0,15	0,6	0,4
	РЗД	ЦЗД	ВВ	ПП	КР	ТІ	ТЕФ	ППс	ПБП	С	СПД
А	1,0	0	1,0	0	0	0,6	0,4	0,6	1,0	0,4	0,6
Б	0,2	1,0	0	0,6	0,8	0	0	1,0	0	1,0	1,0
С	0	0,6	0,8	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0,8	0	0

$$U(A)=0,06-0,04+0,06+0,02+0,0375+0,0375+0,048+0,48=\mathbf{0,703}$$

$$U(B)=0,012-0,1+0,126+0,112+0,0625+0,12+0,08=0,4125$$

$$U(C)=-0,06-0,032+0,21+0,14+0,1+0,05+0,03=0,438$$

Застосування

«+»: Відносно простий спосіб знаходження розв'язку багатокритеріальної задачі шляхом системного структурування і легкої інтерпретації результатів - дозволяє оцінювати будь-які (у тому числі і нові альтернативи)

«-»:

передбачається, що людина може дати точні

кількісні оцінки;

складно визначити ваги критеріїв,

функції перетворення

Тема 3. Моделі та методи прийняття рішення в умовах нечіткої інформації, невизначеності та ризику

План

1. Основні поняття теорії нечітких множин. Задачі досягнення нечітко визначеної мети.
2. Проблема прийняття рішень в умовах невизначеності. Класифікація невизначеностей. Ризики у прийнятті рішень. Поняття ризику. Ідентифікація, контроль та управління ризиками.
3. Моделі та методи прийняття рішень в умовах невизначеності. Задача прийняття рішень в умовах невизначеності.
4. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності. Метод дерева рішень.

Прийняття рішень в умовах визначеності

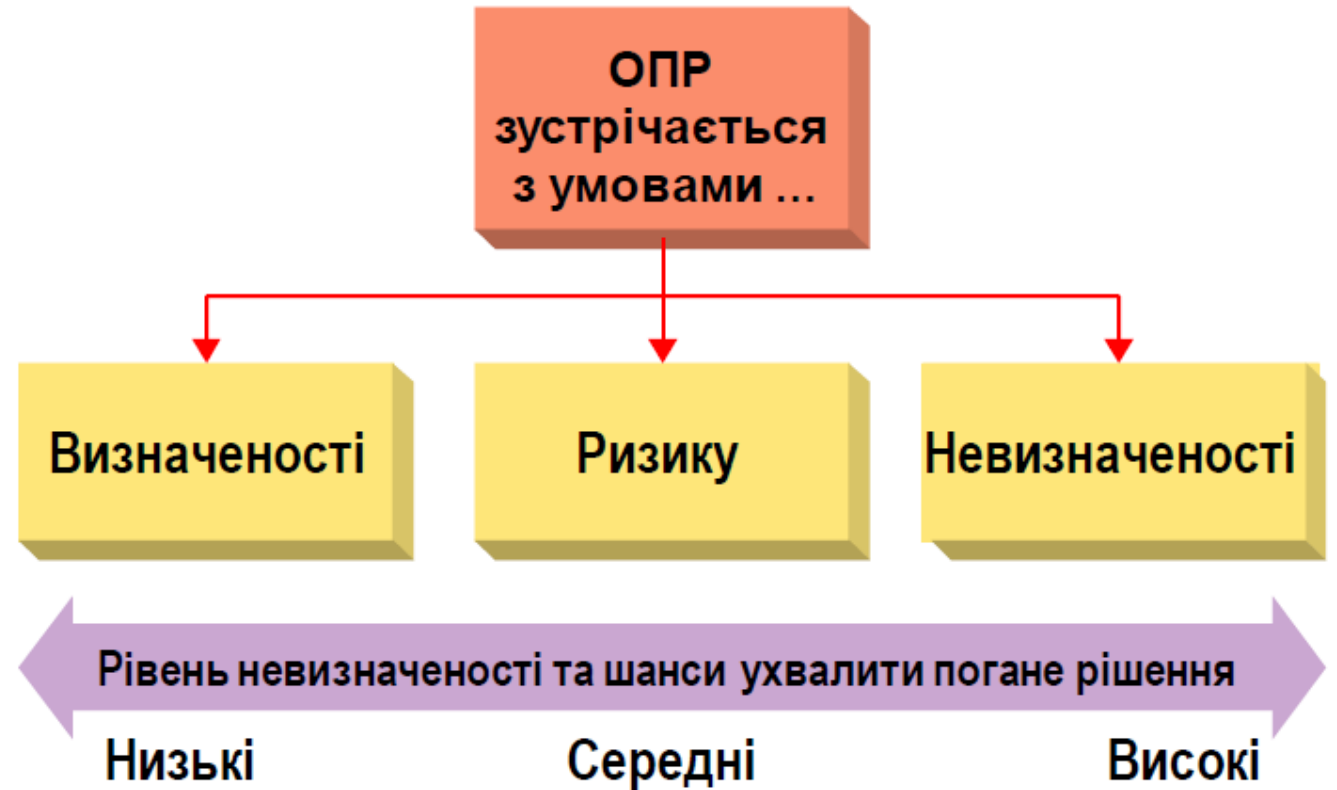
Умови, при яких особа, що приймає рішення, знає з достатнім ступенем впевненості, які існують альтернативи і які умови пов'язані з кожною альтернативою.

Прийняття рішень в умовах ризику

Умова, за якої доступність кожної альтернативи, її потенційні вигоди і витрати – усі асоціюються з ризиками.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Умови, при яких особа, що приймає рішення, не знає всіх альтернатив, ризиків, пов'язаних з кожною із них, або наслідків кожної з альтернатив.



Теорія нечітких множин

розділ *прикладної математики*,
присвячений методам аналізу
невизначених даних, в яких опис
невизначеностей реальних явищ та
процесів проводиться за допомогою
***поняття про множини, які не мають
чітких меж***

Нечітке управління

одна з найрезультативніших галузей застосування
теорії нечітких множин

Інформація про систему

має суб'єктивний характер та її подання природною мовою містить велику кількість невизначеностей типу

"багато",

"мало",

"сильно збільшити",

"високий",

"дуже ефективний" тощо

Fuzzy sets Л. Заді

Нечітка множина – це математична модель класу з нечіткими, або розмитими межами

Нечітка множина

Сукупність елементів, які володіють деякою загальною властивістю, але **...по-різному**

Нечітка множина A в X

сукупність пар виду

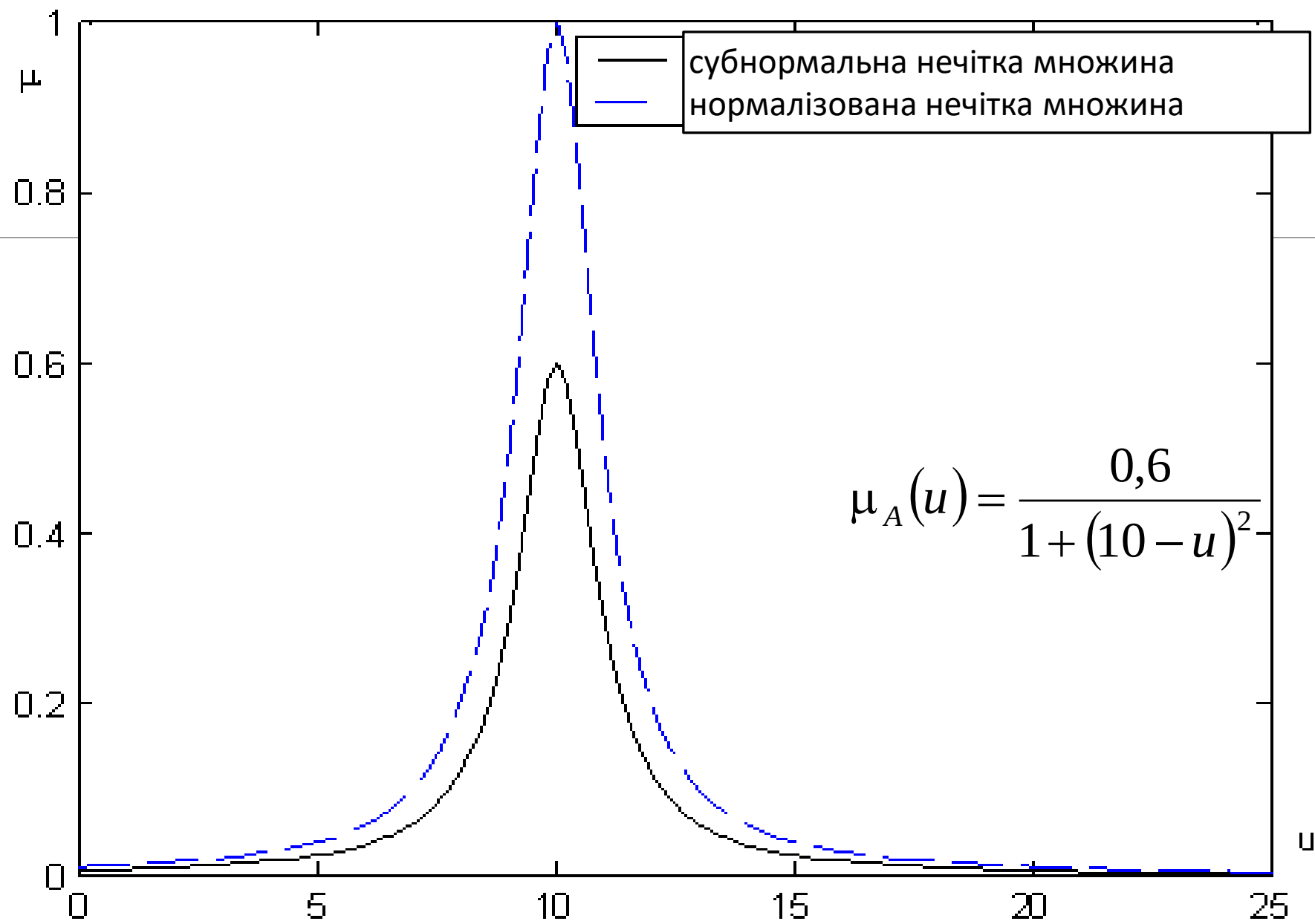
$(x, \mu_A(x))$, де $x \in X$,

$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ - *функція належності*

(membership function)

нечіткої множини A

Значення $\mu_A(x)$ називається ступенем належності x нечіткій множині A



Визначення

$\sup \mu_A(x)$ називається **висотою** нечіткої множини A

Нечітка множина A **нормальна** якщо її висота дорівнює **1**, тобто верхня межа її функції належності дорівнює **1**.

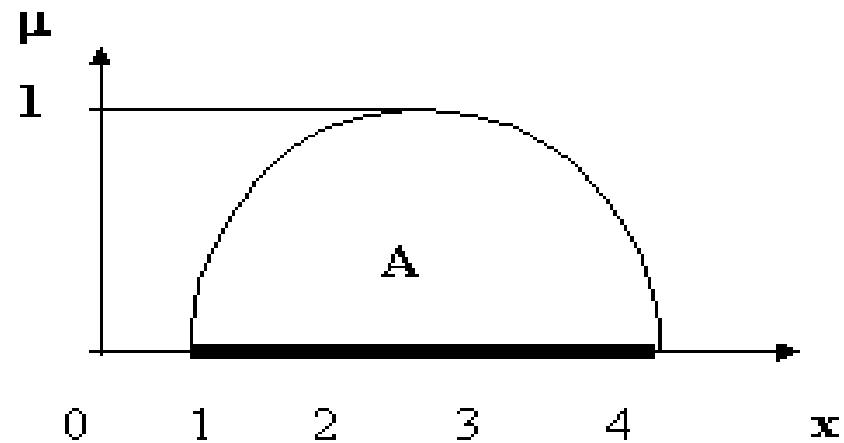
При $\sup \mu_A(x) < 1$ нечітка множина називається **субнормальною**

Носієм нечіткої множини A ($\text{supp } A$) з функцією належності $\mu_A(x)$

називається множина виду

$$\text{supp } A = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$

Для практичних додатків носії нечітких множин завжди обмежені



Ядром нечіткої множини

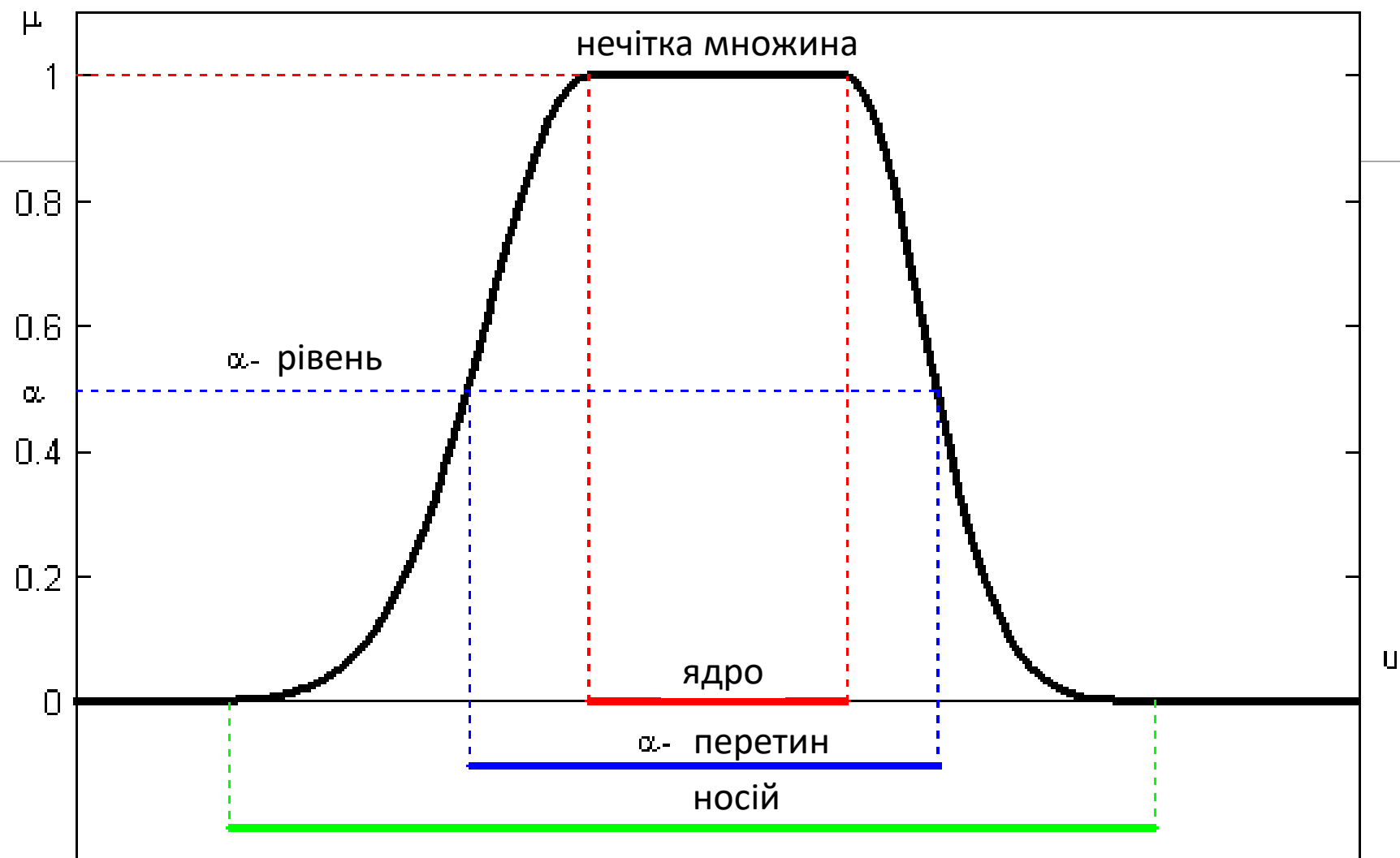
називається чітка підмножина універсальної множини **U** , елементи якої мають ступені належності, рівні одиниці

Ядро субнормальної нечіткої множини порожнє.

α -перетином (або множиною α -рівня) нечіткої множини

називається чітка підмножина універсальної множини **U** , елементи якої мають ступені належності, більші чи рівні **α** :

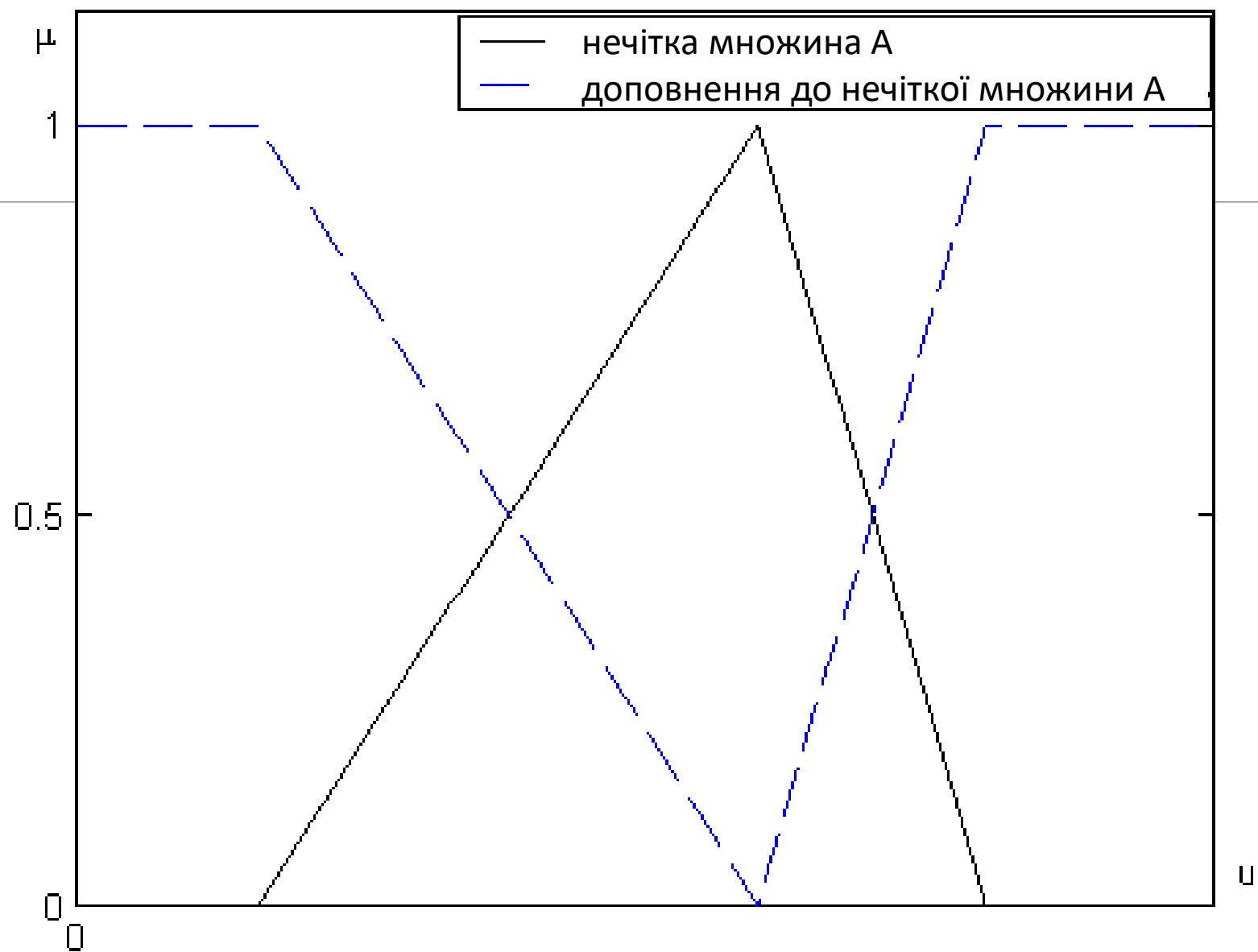
$$A_{\alpha} = \{u \mid \mu_A(u) \geq \alpha\}, \alpha \in [0;1]$$



Операції над нечіткими множинами

- нечіткі множини A і B рівні, якщо $\mu_A(x) = \mu_B(x)$;
- нечітка множина C є підмножиною B , тобто $C \subset B$, якщо $\mu_C(x) \leq \mu_B(x)$;
- нечіткі множини можна поєднувати $A \cup B$, тоді $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;
- нечіткі множини можуть перетинатися $A \cap B$, тоді $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;
- прямий добуток нечітких множин $A \times B$: $\mu_{A \times B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;
- алгебраїчна сума $A + B$: $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{AB}(x)$;
- доповненням нечіткої множини A називається нечітка множина з функцією належності

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$



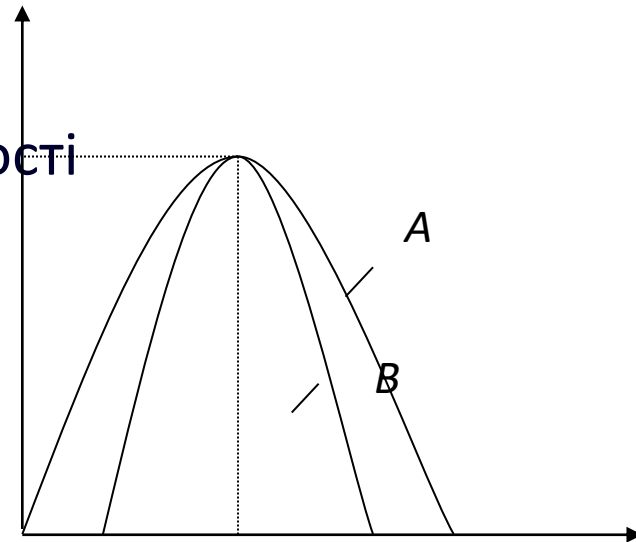
Приклад 1

$$\begin{aligned} \text{supp}A &= \{x \mid \text{величина } x \text{ близька до } 1\}, \\ \text{supp}B &= \{x \mid \text{величина } x \text{ дуже близька до } 1\} \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $B \subseteq A$,

тобто μ_A і μ_B повинні задовольняти нерівності

$\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ за будь-якого $x \in X$.



Приклади запису нечіткої множини

Нехай $X = \{X1, X2, X3, X4, X5\}$,

$M = [0, 1]$;

A - нечітка множина, для якої

$$\mu_A(X1) = 0,3; \mu_A(X2) = 0; \mu_A(X3) = 1;$$

$$\mu_A(X4) = 0,5; \mu_A(X5) = 0,9.$$

$$A = \{0,3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0,5/x_4; 0,9/x_5 \},$$

або

$$A = 0,3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0,5/x_4 + 0,9/x_5,$$

або

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,3	0	1	0,5	0,9

Побудова функцій приналежності нечітких множин

прямі і непрямі методи

прямі методи використовуються для *вимірних* понять,
таких як швидкість, час, відстань, тиск, температура і т.д.,

або

коли виділяються полярні значення

Шкали в задачі розпізнавання образів

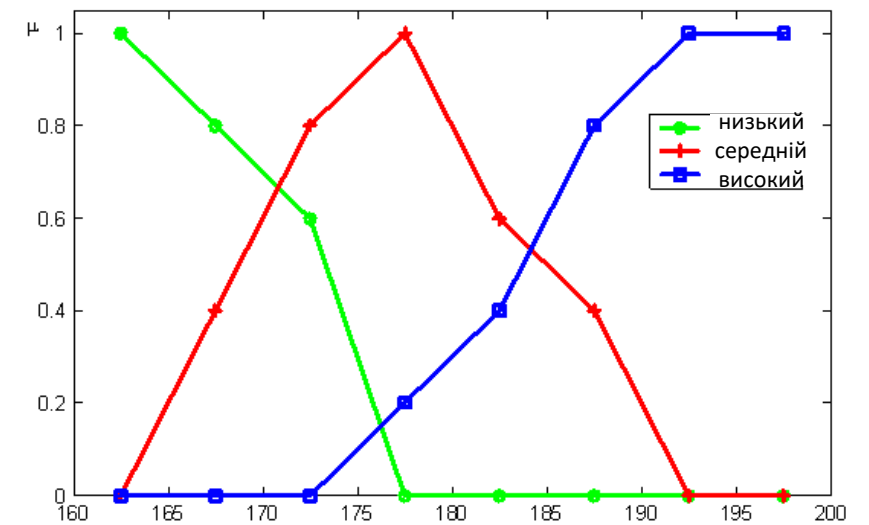
		0	1
x ₁	висота лоба	низький	широкий
x ₂	профіль носа	кирпатий	з горбинкою
x ₃	довжина носа	короткий	довгий
x ₄	розріз очей	вузькі	широкі
x ₅	колір очей	світлі	темні
x ₆	форма підборіддя	гострокутній	квадратний
x ₇	товщина губ	тонкі	товсті
x ₈	колір обличчя	темний	світлий
x ₉	тип обличчя	овальне	квадратне

Приклад. Побудувати функції належності значень «низький», «середній», «високий», що використовуються для лінгвістичної оцінки змінної «зріст чоловіка»

k	Значення	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
Експерт 1	низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	середній	0	0	1	1	1	0	0	0
	високий	0	0	0	0	0	1	1	1
Експерт 2	низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	середній	0	0	1	1	0	0	0	0
	високий	0	0	0	0	1	1	1	1
Експерт 3	низький	1	0	0	0	0	0	0	0
	середній	0	1	1	1	1	1	0	0
	високий	0	0	0	0	0	1	1	1
Експерт 4	низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	середній	0	0	0	1	1	1	0	0
	високий	0	0	0	0	0	0	1	1
Експерт 5	низький	1	1	0	0	0	0	0	0
	середній	0	1	1	1	0	0	0	0
	високий	0	0	0	1	1	1	1	1

Результати обробки думок експертів

Значення	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
низький	5	4	3	0	0	0	0	0
	1	0.8	0.6	0	0	0	0	0
середній	0	2	4	5	3	2	0	0
	0	0.4	0.8	1	0.6	0.4	0	0
високий	0	0	0	1	2	4	5	5
	0	0	0	0.2	0.4	0.8	1	1



Задача досягнення нечітко визначеної мети (підхід Беллмана-Заде)

Нехай **X** - універсальна множина альтернатив,
тобто універсальна сукупність будь-яких виборів
ОПР.

Нечіткою метою є нечітка підмножина X , яку ми
позначатимемо **G** ,

$$G \subset X$$

Нечітка мета G

Функція належності нечіткої мети

$$\mu_G: X \rightarrow [0,1].$$

Чим більший ступінь належності альтернативи X нечіткій множині мети μ_G , тобто чим більше значення $\mu_G(x)$, тим більший ступінь досягнення цієї мети при виборі альтернативи X як рішення.

Нехай деяка альтернатива X забезпечує досягнення мети зі ступенем $\mu_G(X)$, задовольняє обмеженням зі ступенем $\mu_C(X)$

Розв'язати завдання – означає **досягти мети та задовольнити обмеження.**

Таким чином, нечітким розв'язанням задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин **цілі** і **обмежень**,

тобто функція належності рішень μ_D має вигляд:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

За наявності кількох цілей та обмежень

нечітке рішення описується функцією належності

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G1}(x), \dots, \mu_{Gn}(x), \mu_{C1}(x), \dots, \mu_{Cn}(x)\}$$

Оптимальною в сенсі підходу **Беллмана-Заде** буде альтернатива x^* , для котрої $\mu_D(x)$ максимальна

$$x^*: \mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \mu_D(x)$$

$$\alpha_i \in (0;1)$$

- Коефіцієнт відносної важливості i -ої цілі,

$$\beta_j \in (0;1)$$

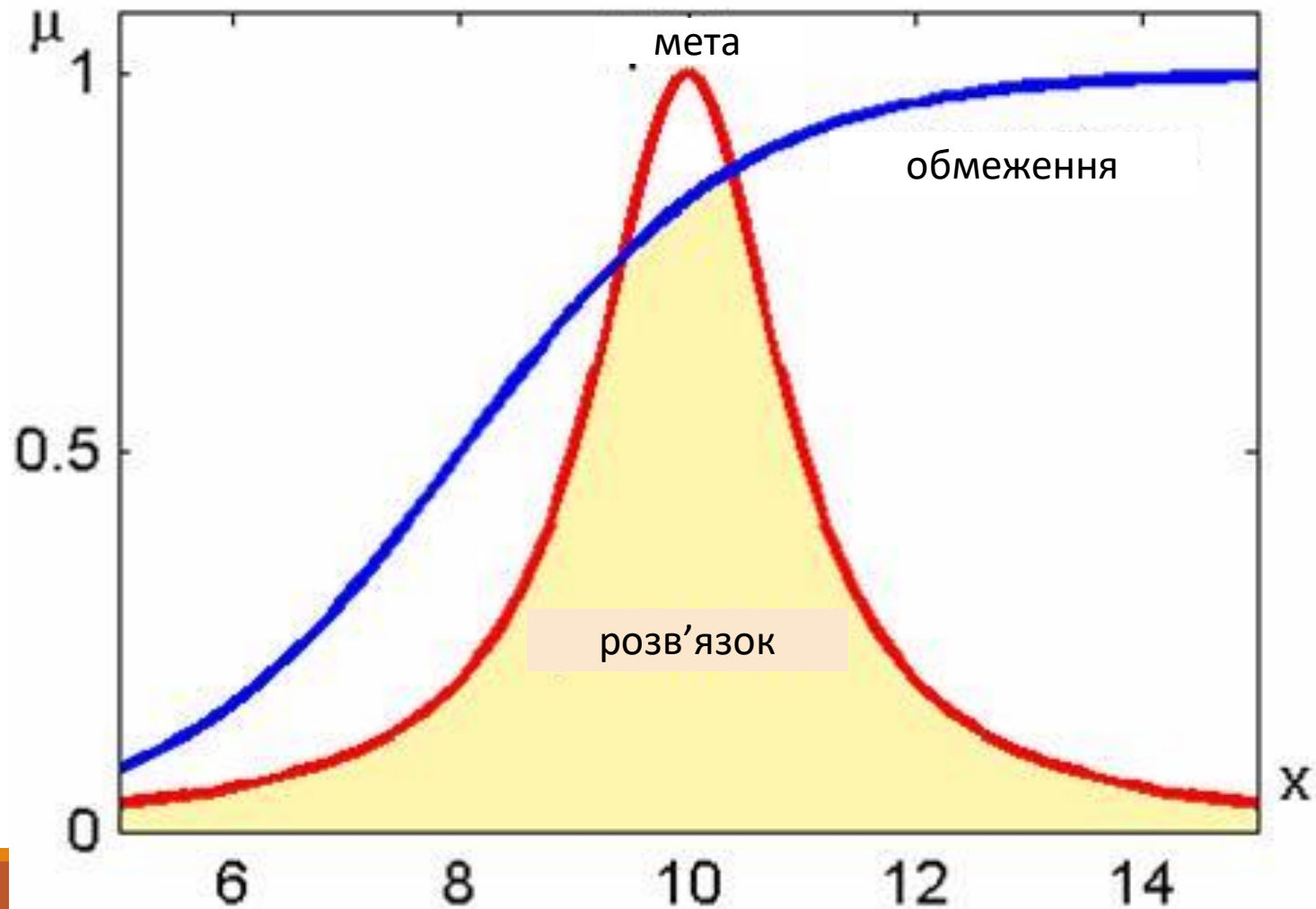
- Коефіцієнт відносної важливості j -го обмеження

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$$

$$\mu_D(x) = \min \left\{ \mu_{G1}^{\alpha1}(x), \dots, \mu_{Gn}^{\alpha n}(x), \mu_{C1}^{\beta1}(x), \dots, \mu_{Cm}^{\beta m}(x) \right\}$$

G : " x має бути близько 10" та

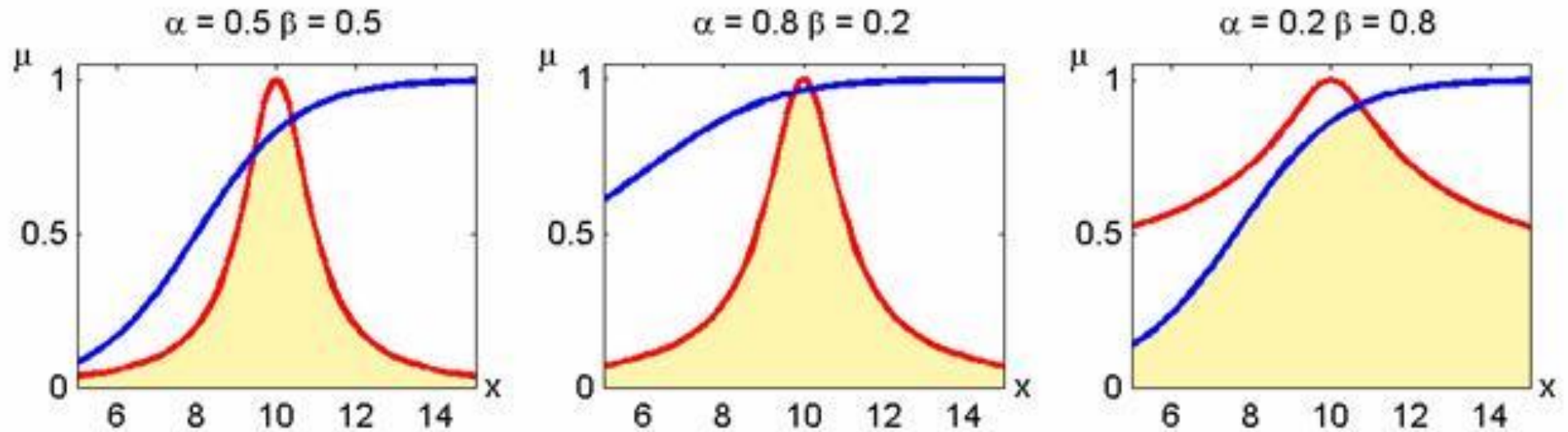
C : " x має бути значно більше 8"



При прийнятті рішення за схемою Беллмана-Заде не робиться жодної різниці між метою та обмеженнями.

Будь-який поділ на мету та обмеження є умовним: можна поміняти місцями мету з обмеженням, при цьому розв'язок не зміниться

Нечіткі рішення при різних коефіцієнтах важливості мети та обмеження



Класифікація типів невизначеностей

невизначеність цілей;

невизначеність наших знань про навколишню обстановку та фактори, що діють у даному явищі (невизначеність природи);

невизначеність дій активного чи пасивного партнера чи супротивника.

Класифікація типів невизначеностей

Можна розрізняти стохастичну (ймовірнісну) невизначеність, коли невідомі чинники статистично стійкі і тому є звичайні об'єкти теорії ймовірностей - випадкові величини (або випадкові функції, події тощо).

При цьому повинні бути відомі або визначені під час постановки задачі всі необхідні статистичні характеристики (закони розподілу та їх параметри).

Іншим крайнім випадком можливо невизначеність нестохастичного виду, коли ніяких припущень про стохастичну стійкість немає.

Поняття ризику

Ризик – діяльність, пов'язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно і якісно оцінити ймовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі чи відхилення від мети.

Ризик – характеристика ситуації, що має невизначеність результату, при обов'язковій наявності несприятливих наслідків.

Поняття та сутність ризику



Три можливі результати ризику:

1. негативний
2. позитивний
3. нульовий

Ідентифікація ризиків – це дослідження, виявлення, опис, документування та групове обговорення ризиків до того, як вони стають проблемами та несприятливим чином впливають на діяльність

Цілі процесу ідентифікації ризиків:

- 1) виявлення та категоризація (систематизація) ризиків, які можуть несприятливо вплинути на процес;
- 2) документарне оформлення цих ризиків.

Ідентифікувати ризики можна способом:

- causes-and-effects (що могло статись і які будуть наслідки)
- effects-and-causes (яких результатів потрібно уникати, а які заохочувати, і як їх можна реалізувати).

Управління ризиками



Постановка задачі

Потрібно вибрати одне з M можливих рішень (альтернатив): $A_1, A_2, \dots, A_M$. Відомо, що кожне з рішень може бути реалізоване в одному з N варіантів зовнішніх умов: $B_1, B_2, \dots, B_N$. Для кожного з рішень відомі його наслідки (виграші сторони, що приймає рішення) у кожному з варіантів зовнішніх умов: E_{ij} , $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Ці виграші можна звести в таблицю, яка називається матрицею виграшів (або платіжною матрицею). Така матриця являє собою математичну модель задачі. Загальний вид матриці виграшів показаний у табл. 1.

Таблиця 1

	B_1	B_2	$\dots$	B_N
A_1	E_{11}	E_{12}	$\dots$	E_{1N}
A_2	E_{21}	E_{22}	$\dots$	E_{2N}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_M	E_{M1}	E_{M2}	$\dots$	E_{MN}

Метод побудови матриці виграшів повністю залежить від конкретних умов задачі.

Потрібно вибрати найбільш ефективний варіант *рішення*, тобто одне з рішень $A_1, A_2, \dots, A_M$.

Критерій очікуваного значення

- максимізація очікуваного (середнього) прибутку;
- мінімізація очікуваних витрат;
- передбачається, що прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є випадковою величиною.

Метод дерева рішень

Дерево рішень – графічне відображення процесу, яке визначає альтернативи рішення, стану природи та їхні відповідні ймовірності віддачі для кожної комбінації альтернатив і станів природи.

Малюють дерева зліва направо.

Місця, де приймаються рішення, позначають квадратами $\square$,

місця появи витрат — колами $\circ$,

можливі рішення — пунктирними лініями -----,

можливі наслідки — суцільними лініями —.

Для кожної альтернативи обраховується очікувана вартісна оцінка (EMV) — максимальна із сум оцінок вигравів, помножених на ймовірність реалізації вигравів, для всіх можливих варіантів.

Дерево рішень. Приклад 1

Припустимо, що ви хочете вкласти на фондовій біржі 10 000 у.о. в акції однієї із двох компаній: А або В. Акції компанії А є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестиції протягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливі, сума інвестиції може знецінитися на 20%. Компанія В забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирувань на біржі й тільки 5% - в умовах зниження котирувань. Всі аналітичні публікації, з якими можна познайомитися (а вони завжди є удосталь наприкінці року), з імовірністю 60% прогнозують підвищення котирувань і з імовірністю 40% - зниження котирувань.

У яку компанію варто вкласти гроші?

Дерево рішень. Приклад 2

Альтернативні рішення	Прибуток за один рік від інвестиції 10000 у.о.	
	При підвищенні котувань (у.о.)	При зниженні котувань (у.о.)
Акції компанії А	5000	-2000
Акції компанії В	1500	500
Ймовірність події	0,6	0,4

Дерево рішень. Приклад 2



Для акцій компанії А: $5000 \times 0,6 + (-2000) \times 0,4 = \mathbf{2\ 200}$ (у.о.).

Для акцій компанії В: $1500 \times 0,6 + 500 \times 0,4 = \mathbf{1\ 100}$ (у.о.).

Апостеріорні ймовірності Байєса

Априорні ймовірності – отримані з накопиченої раніше інформації.

Апостеріорні (або байєсовські) ймовірності – отримані шляхом перерахунку априорних ймовірностей за допомогою поточної й/або отриманої раніше інформації, що ґрунтується на дослідженні вибірових (або експериментальних) даних.

Приклад 3

У прикладі 1 апріорні ймовірності 0,6 і 0,4 підвищення й зниження котувань акцій на біржі були визначені з наявних публікацій фінансового характеру.

Припустимо, замість того, щоб повністю покладатися на ці публікації, ви вирішили провести особисте дослідження шляхом консультацій із другом, що добре розбирається в питаннях, що стосується фондової біржі. Друг висловлює загальну думку "за" або "проти" інвестицій. Це думка надалі визначається кількісно в такий спосіб. При підвищенні котувань його думка з 90%-ою імовірністю буде "за", при зниженні котувань імовірність його думки "за" зменшиться до 50 %. Як найкраще скористатися цією додатковою інформацією?

Приклад 3

Уведемо наступні позначення:

$v1$ - думка “за”,

$v2$ - думка “проти”,

$m1$ - підвищення котувань,

$m2$ - зниження котувань.

Думка друга можна записати у вигляді імовірнісних співвідношень у такий спосіб.

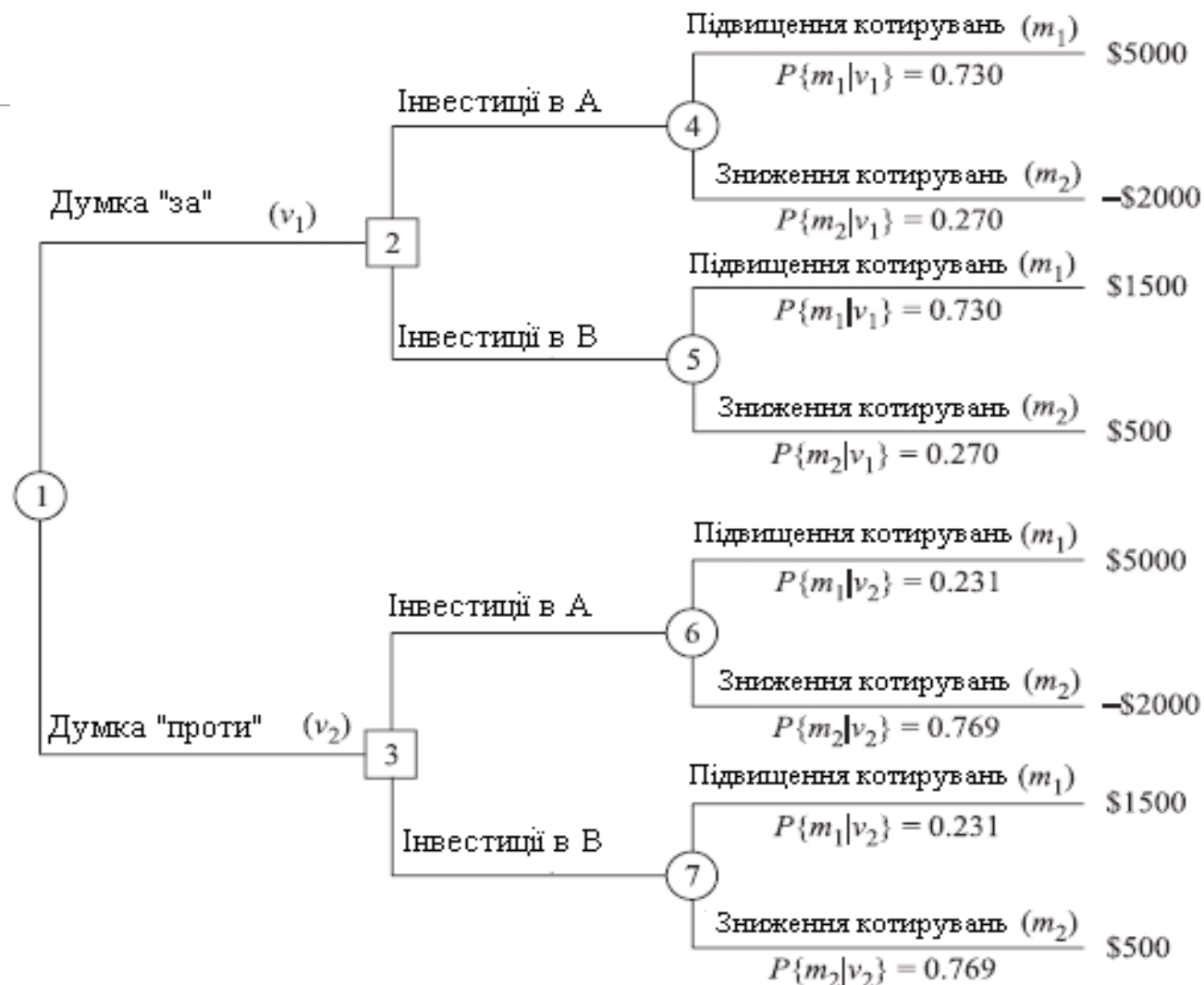
$$P\{v1 \mid m1\} = 0,9, P\{v1 \mid m2\} = 0,1,$$

$$P\{v2 \mid m1\} = 0,5, P\{v2 \mid m2\} = 0,5.$$

За допомогою цієї додаткової інформації задачу вибору рішення можна сформулювати в такий спосіб.

1. Якщо думка друга “за”, акції якої компанії варто купувати - A або B ?
2. Якщо думка друга “проти”, те, знову ж таки, - акції якої компанії варто купувати - A або B ?

Приклад 3. Дерево рішень із апостеріорними ймовірностями



Обчислення апостеріорних ймовірностей $P\{m_i \mid v_j\}$

Крок 1. Умовні ймовірності $P\{v_j \mid m_i\}$ для даної задачі запишемо в такий спосіб.

		v_1	v_2
$P\{v_j \mid m_i\} =$	m_1	0,9	0,1
	m_2	0,5	0,5

Обчислення апостеріорних ймовірностей $P\{m_i \mid v_j\}$

Крок 2. Обчислюємо ймовірності спільної появи подій.

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j \mid m_i\}P\{m_i\} \text{ для всіх } i \text{ і } j.$$

При заданих *априорних* ймовірностях $P\{m_1\}=0,6$ і $P\{m_2\}=0,4$ ймовірності спільної появи подій визначаються множенням першого й другого рядків таблиці, отриманої на кроці 1, на 0,6 і 0,4 відповідно.

$P\{m_i, v_j\} =$		v_1	v_2
		m_1	m_2
	m_1	0,54	0,06
	m_2	0,20	0,20

Сума всіх елементів цієї таблиці дорівнює 1.

Обчислення апостеріорних ймовірностей $P\{m_i \mid v_j\}$

Крок 3. Обчислюємо абсолютні ймовірності.

$$P\{v_j\} = \sum P\{m_i, v_j\} \quad \text{для всіх } j$$

Ці ймовірності обчислюють шляхом сумування елементів відповідних стовпців таблиці, отриманої на кроці 2.

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
0,74	0,26

Обчислення апостеріорних ймовірностей $P\{m_i \mid v_j\}$

Крок 4. Визначаємо шукані апостеріорні ймовірності за формулою:

$$P\{m_i \mid v_j\} = \frac{P\{m_i, v_j\}}{P\{v_j\}}.$$

Ці ймовірності обчислюються в результаті ділення кожного стовпця таблиці, отриманої на кроці 2, на елемент відповідного стовпця таблиці, обчисленої на кроці 3.

	v_1	v_2
m_1	0,730	0,231
m_2	0,270	0,769

Думка "за"

Прибуток від акцій компанії *A* в вузлі 4 = $5000 * 0,730 + (-2000) * 0,270 = \mathbf{3110}$ (дол.).

Прибуток від акцій компанії *B* у вузлі 5 = $1500 * 0,730 + 500 * 0,270 = 1230$ (дол.).

Рішення. Інвестувати в акції компанії *A*.

Думка "проти"

Прибуток від акцій компанії *A* в вузлі 6 = $5000 * 0,231 + (-2000) * 0,769 = -383$ (дол.).

Прибуток від акцій компанії *B* у вузлі 7 = $1500 * 0,231 + 500 * 0,769 = \mathbf{731}$ (дол.).

Рішення. Інвестувати в акції компанії *B*.

Приклад 4

Велика фірма планує придбати пакет акцій одного із трьох підприємств (П1, П2, П3). Прибуток, що одержить фірма від купівлі акцій, не може бути точно відомий заздалегідь, тому що він залежить від того, як буде змінюватися вартість цих акцій. Можливі величини прибутку фірми від купівлі акцій підприємств (у млн. грош. од.) наведені в табл. 2.

Пакет акцій	Зміна вартості акцій		
	Зріст	Стабільний стан	Зниження
П1	10	6	-7
П2	6	4	-3
П3	8	3	-2

Таблиця 2

Відповідно до наявних експертних оцінок, можливі чотири сценарії розвитку економічної ситуації (C1, C2, C3, C4):

- сценарій C1: вартість акцій підприємств П1 і П2 залишається стабільною, вартість акцій підприємства П3 росте;
- сценарій C2: вартість акцій П1 знижується, П2 і П3 - росте;
- сценарій C3: вартість акцій П1 росте, П2 і П3 - знижується;
- сценарій C4: вартість акцій всіх підприємств залишається стабільною.

Потрібно визначити, який пакет акцій варто придбати фірмі, щоб дістати максимальний прибуток.

Приклад 4. Матриця виграшів

Придбаний пакет акцій	Сценарій			
	C1	C2	C3	C4
П1	6	-7	10	6
П2	4	6	-3	4
П3	8	8	-2	3

Критерій Вальда

Рішення вибирається в розрахунку на найгірші зовнішні умови

Кращим є рішення з максимальною оцінкою:

для кожного рядка (стратегії/рішення) обирають **мінімальне значення** корисності;

з обраних корисностей обирають **максимальне значення**.

Якщо E_{ij} – втрати, то знаходиться $\min \max$.

$$Z1 = \min(6; -7; 10; 6) = -7;$$

$$Z2 = \min(4; 6; -3; 4) = -3, Z3 = -2.$$

Фірмі рекомендується придбати пакет акцій підприємства ПЗ.

Критерій Лапласа

Застосовується, якщо можна припускати, що всі варіанти зовнішніх умов однаково ймовірні.

для **кожного рядка** матриці виграшів розраховується **середнє арифметичне значення** оцінок;

кращим є рішення з максимальною оцінкою.

$$Z1 = (6 - 7 + 10 + 6)/4 = 3,75;$$

$$Z2 = (4 + 6 - 3 + 4)/3 = 2,75; Z3 = 4,25.$$

Фірмі варто придбати пакет акцій підприємства ПЗ.

Критерій Севіджа

Рішення приймається розраховуючи на найгірші зовнішні умови, але для оцінки рішень використовується матриця ризиків.

знаходиться максимальний ризик (максимальний загублений виграш), що відповідає даному рішенняю;

кращим є рішення з мінімальною оцінкою.

Критерій Севіджа. Матриця ризиків

якщо таблиця містить прибуток, то елементи нової таблиці дорівнюють різниці максимального значення по стовпчику та елементів цього ж стовпця; якщо таблиця містить втрати, то елементи нової таблиці дорівнюють різниці елементів стовпця та мінімального значення цього ж стовпця.

Придбаний пакет акцій	Сценарій			
	С1	С2	С3	С4
П1	2	15	0	0
П2	4	2	13	2
П3	0	0	12	3

$$Z1 = \max(2; 15; 0; 0) = 15; Z2 = \max(4; 2; 13; 2) = 13; Z3 = 12.$$

Таким чином, рекомендується придбати пакет акцій підприємства П3.

Критерій Гурвиця

Рішення приймається з урахуванням того, що можливі як сприятливі, так і несприятливі зовнішні умови.

слід вказати «коефіцієнт песимізму» - число в діапазоні від 0 до 1, що представляє собою суб'єктивну (тобто не розраховану, а зазначену людиною) оцінку можливості несприятливих зовнішніх умов.

кращим є рішення з максимальною оцінкою.

Критерій Гурвиця

Для кожної стратегії (кожного рядка табл.) розглядаються лише дві величини $l_{ij \max}$ - максимальне та $l_{ij \min}$ мінімальне значення корисності - і розраховують значення:

$\max [\alpha l_{ij \max} + (1 - \alpha) l_{ij \min}]$ - якщо E_{ij} -прибуток;

$\min [\alpha l_{ij \min} + (1 - \alpha) l_{ij \max}]$ - якщо E_{ij} -втрати.

$\alpha = 0,6$.

Знайдемо оцінки рішень:

$Z1 = 0,6 \cdot (-7) + 0,4 \cdot 10 = -0,2$; $Z2 = 0,6 \cdot (-3) + 0,4 \cdot 6 = 0,6$; $Z3 = 0,6 \cdot (-2) + 0,4 \cdot 8 = 2$.

Таким чином, рекомендується придбати пакет акцій підприємства ПЗ.

Критерій Байєса (у деяких джерелах – критерій Байєса-Лапласа)

передбачає, що можливим станам природи можна приписати (дізнатися, зібравши статистику) певну ймовірність їхнього настання і, визначивши математичне очікування виграшу кожного рішення, вибрати те, що забезпечує найбільше значення виграшу з урахуванням цих ймовірностей.

Тобто, ґрунтуючись на попередніх спостереженнях, ОПР може прогнозувати майбутній стан природи (статистичний принцип).

Ймовірності настання *станів природи* P_j позначимо **q_j**
(сума q_j повинна дорівнювати 1).

Правило, відповідно до якого приймається рішення:

У дужках стоїть мат.очікування $M(A_i)$

$$B = \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j \right)$$

Фактично, ОПР орієнтується на **максимальне математичне очікування платежів**, що відповідають стратегіям A_i з огляду на всі можливі стани природи.

Критерій Байєса ставить до ситуації, у якій приймається рішення, наступні вимоги:

- ймовірності q_j появи станів Π_j **відомі** і не залежить від часу;
- рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- для небагатьох реалізацій рішення допускається певний ризик.

При досить великій кількості реалізацій середнє значення поступово стабілізується. Тому за повної (нескінченної) реалізації будь-який ризик виключено.

Критерій оптимістичніший, ніж критерій Вальда, проте він передбачає більш високий рівень поінформованості ОПР та досить довгі реалізації.

Недолік: проблеми можуть виникнути під час збирання та оцінки статистичних даних. Це один із критеріїв, що вимагає від ОПР **підвищеної поінформованості**.

Приклад 5

Нехай ймовірності станів природи (попиту) такі:

Стан природи, P_j	P_1	P_2	P_3
Ймовірність, q_i	0,25	0,5	0,25

Знаходимо математичні очікування щодо елементів рядків:

Тип товару	Попит			Мат. очікування, $M(A_i)$
	P_1	P_2	P_3	
A_1	20	15	10	15
A_2	16	12	14	13,5
A_3	13	18	15	16

Зауваження.
Зазвичай ймовірності більше середніх станів природи, і менше – крайніх. В останньому стовпчику стоять суми добутків елементів рядків на відповідні ймовірності.

За результатами розрахунків рекомендується вибрати **третю стратегію** як оптимальну.

Критерій Ходжа-Лемана

Критерій Ходжа-Лемана за допомогою максимінного критерію якоюсь мірою обмежує появу окремих рішень із неприпустимо малими значеннями навіть при більших середніх значеннях, що отримуються за критерієм Байєса-Лапласа.

При визначенні оптимальної стратегії за цим критерієм вводиться параметр (λ) достовірності інформації про розподіл ймовірностей станів природи $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, значення якого знаходиться на інтервалі $[0,1]$



Якщо ступінь достовірності велика, то домінує критерій Байєса, в протилежному випадку критерій Вальда

Оптимальна стратегія за критерієм Ходжа-Лемана визначається як та, на якій реалізується максимум виразу:



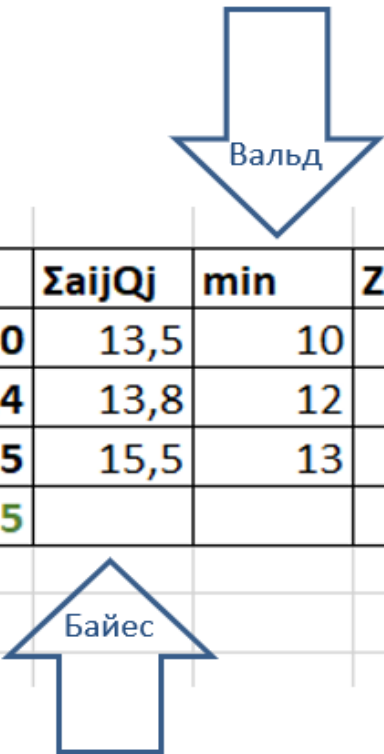
$$Z_{\text{ХЛ}} = \max_i (\lambda \cdot \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot q_j) + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij}) .$$

Зауваження. Іноді, якщо ймовірності станів природи не відомі, використовують припущення про рівноймовірні стани, як у критерії Лапласа. Ризик у цьому випадку збільшується.

Приклад 6

Тип товару	Попит		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Знайти оптимальну стратегію за критерієм Ходжа-Лемана відносно виграшів при $\lambda=0,6$ та за ймовірнісних станів природи $q_1=0,2$; $q_2=0,3$; $q_3=0,5$.



	П1	П2	П3	$\sum a_{ij}Q_j$	min	$Z_{хл}$
A1	20	15	10	13,5	10	12,1
A2	16	12	14	13,8	12	13,08
A3	13	18	15	15,5	13	14,5
q_j	0,2	0,3	0,5			
$\lambda =$		0,6				

Спочатку
 знайдені
 маточікування
 платежів по
 рядкам; потім
 знайдено
 найменший
 платіж в кожному
 рядку; далі
 перша величина
 помножена на
 0,6, а друга на
 0,4. В останньому
 стовпці – сума
 цих добутків

Отриманий результат відповідає стратегії A3.

Примітка: тут ймовірності станів природи дещо інші, ніж у кр. Байєса на сл.55.

Критерій Гермейєра

Він застосовується до задач прийняття рішень в умовах ризику, на вирішення задач вибору стратегії з оптимізації величини витрат чи витрат. Такі задачі часто зустрічаються у господарській практиці в оцінці економічних, логістичних витрат.

Передбачається, як і в критерії Ходжа-Лемана, що ОПР має додаткову інформацію про ймовірність станів природи.

Критерій Гермейєра визначається виразом

$$K_{\text{Гер}} = \max_i \min_j a_{ij} q_j, \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

У відомому відношенні критерій Гермейєра є узагальненням максимінного критерію. У випадку рівномірного розподілу, коли $q_j = 1/m$ ($j = \overline{1, m}$), вони стають ідентичними.

Критерій Гермейєра є надійним тільки у випадку, коли точно відомі імовірності появи станів зовнішнього середовища й рішення реалізується велику кількість разів. А не товикористання критерію Гермейєра може приводити до невиправдано великого ризику.

Приклад 7

Тип товару	Попит		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Нехай ймовірність станів попиту ті ж, що в попередньому випадку:

$$q_1 = 0,2; q_2 = 0,3; q_3 = 0,5$$

Умову від'ємності компонентів матриці платежів не виконано. Тому, щоб використовувати цей критерій, переходимо до іншої матриці A' , еквівалентної A , **віднімаючи від кожного елемента вихідної матриці A найбільший елемент, збільшений на 1**. Можна відняти й інше додатне число, але, бажано, щоб елементи не були дуже великими.

У прикладі віднімемо 21. Нова матриця платежів має вигляд:

		п1	п2	п3	
	A1	-1	-6	-11	
A' =	A2	-5	-9	-7	
	A3	-8	-3	-6	
	qj	0,2	0,3	0,5	

Розрахунки:

A' =		п1	п2	п3				
	A1	-1	-6	-11	-0,2	-1,8	-5,5	-5,5
	A2	-5	-9	-7	-1	-2,7	-3,5	-3,5
	A3	-8	-3	-6	-1,6	-0,9	-3	-3
	qj	0,2	0,3	0,5				
					добутки елементів на ймовірність за стовпцем			

Найбільший із мінімальних добутоків з урахуванням ймовірності попиту



$$Z_{\text{Гер}} = \max_i (\min_j (a_{ij} \cdot q_j)).$$

Отриманий результат відповідає стратегії A₃

Зауваження

Критерій Гермейєра у чомусь схожий і на критерій Вальда і на критерій Байєса. На перший — у тому, що ОПР також діє за принципом «найкраще з найгірших», але об'єктивніше оцінює результат. Подібність до другого - у необхідності знати ймовірності станів природи.

Умови застосування:

- елементи платіжної матриці ≤ 0 ;
- ймовірність появи станів P_j відомі;
- з появою тих чи інших станів, окремо чи комплексно, необхідно рахуватися;
- допускається деякий ризик;
- рішення може реалізуватися один або багато разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а кількість реалізацій ситуації замала, то, дотримуючись критерію Геймейєра, отримують невинновдано великий ризик. Таким чином, тут залишається певна свобода суб'єктивних дій.

Критерій добутків

Критерій добутків заснований на максимізації величини

$$Z_{\text{пр}} = \max_i \left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right).$$

Матриця рішень доповнюється новим стовпцем, що містить добутки всіх компонентів кожного рядка за умови, що всі $a_{ij} > 0$. Вибираються ті варіанти, у рядках яких є найбільші значення цього стовпця.

Критерій добутків

Застосування цього критерію обумовлене такими **обставинами:**

- 1) ймовірності появи станів природи невідомі;
- 2) з появою кожного із станів необхідно рахуватися;
- 3) допускається мала кількість реалізацій рішення;
- 4) можливий певний ризик.

Критерій добутків

Якщо умова позитивності компонент платіжної матриці порушена, слід виконувати певний зсув $a_{ij}+a$ з деякою константою $a > 0$. Якщо ніяка константа може бути визнана як така, що має сенс, то критерій добутків не використовується.

Слід також зазначити, що, якщо серед елементів деякого рядка платіжної матриці є елемент, додатній, але дуже близький до нуля, а решта елементів не сильно відрізняються один від одного, використання критерію добутків напевно призведе до «невибору» (знецінення) відповідної стратегії. Таким чином, **знижується ризик отримати рішення, для якого існує результат у вигляді майже нульової вигоди за одного зі станів природи.**

Приклад 8

Тип товару	Попит		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Тут BCI компоненти додатні. Якби це було не так, потрібно було б до кожного додати одне й те саме число, наприклад, максимум модуля з усіх від'ємних елементів, збільшеному на одиницю.

Розрахунки:

	П1	П2	П3	Добуток по рядку
A1	20	15	10	3000
A2	16	12	14	2688
A3	13	18	15	3510



Найбільший із
добутків
елементів рядків

Отриманий результат відповідає стратегії A_3

Зауваження

Вибір оптимального рішення згідно з цим критерієм виявляється менш песимістичним, ніж, наприклад, вибір відповідно за максимінним критерієм Вальда.

Внаслідок застосування критерію відбувається деяке вирівнювання між великими та малими значеннями виграшів a_{ij} , і, встановлюючи оптимальний варіант рішення, ми можемо при фіксованих станах P_j отримати більшу вигоду, ніж при використанні критерію гарантованого результату, але при цьому має враховуватися можливість появи й гірших результатів.

Слід зазначити, що при використанні цього критерію ні кількість реалізацій, ні інформація про розподіл ймовірностей не беруться до уваги.

Тема 4. Технології прийняття колективних рішень у малих та великих групах

План

1. Колективне прийняття рішень.
2. Процедури голосування.
3. Особливості систем голосування. Аксиоми Ерроу.

Колективне прийняття рішень. Основні поняття та визначення

Задача прийняття рішень, у яких результати вибору визначаються думками чи діями не однієї людини, а багатьох людей, так само поширені практично, як і завдання індивідуального вибору.

Як окремі особи, що приймають рішення, виступають керівники та члени виборних органів, журі, комітетів, судді, експерти, виборці тощо. Сукупність таких дійових осіб називатимемо **групою, яка приймає рішення** (ГПР) незалежно від ролі та значущості кожного члена групи у процесі вирішення задачі вибору.

Таким чином, під **колективним** або **груповим вибором** розуміється процедура прийняття рішення, заснована на спільному обліку та/або узгодженні індивідуальних переваг членів ГПР.

Груповий вибір поєднує у собі суб'єктивні та об'єктивні аспекти. Перевага кожної конкретної ОПР є суб'єктивною і залежить від властивої даній людині системи цінностей. У той же час об'єднання кількох індивідуальних переваг в одну колективну перевагу повинне здійснюватися за можливості більш об'єктивним способом за допомогою явно визначених формальних процедур, що визнаються всіма членами групи і не схильні, в ідеалі, до впливу окремих членів групи.

Проблема колективного вибору:

- Який результат вибору вважати «правильним», «справедливим» чи «кращим»? Якими властивостями він повинен володіти?
- Як агрегувати індивідуальні переваги в інтегральні оцінки якості рішення, на основі яких шукається найкраще рішення?
- Як організувати саму процедуру вироблення колективного рішення, тобто технологію роботи ГПР?



колективного прийняття рішень:

- Перерозподіл відповідальності: що більше осіб бере участь у виборі, то менша частка відповідальності кожного.
- Посилює як нематеріальну, так і матеріальну мотивацію.
- Породжує комфортний морально-психологічний клімат у колективі.
- Групове рішення у ряді випадків виявляється менш суб'єктивним.
- Можливість виявити більше альтернатив за рахунок активізації інтелектуального потенціалу
- Можливість всебічно оцінити численні варіанти, вибрати з них найкращі та усунути слабкі.
- Велика гнучкість та пристосовність до змін зовнішніх умов.



колективного прийняття рішень:

- Порівняно низька оперативність: вироблення такого рішення потребує значного часу.
- "Розмитість" почуття колективної відповідальності.
- Придушення критичного мислення внаслідок засвоєння індивідом групових норм

Задача колективного вибору – є ГПР, що складається з N людей, яка розглядає можливі варіанти вирішення проблеми (альтернативи, об'єкти, способи дії, кандидати) $A_1, \dots, A_m$, число яких може бути як скінченним, так і нескінченним. Кожен із членів ГПР незалежно від інших оцінює всі варіанти відповідно до своїх індивідуальних переваг. Передбачається, що вироблені загальні для всіх членів ГПР правила організації та проведення процедур порівняння та вибору варіантів.

Грунтуючись на індивідуальних перевагах всіх членів групи та враховуючи ступінь їх впливовості, потрібно вирішити одне із завдань:

- 1) виділити найкращі варіанти;
- 2) упорядкувати всі варіанти;
- 3) віднести кожен із варіантів до одного із заздалегідь заданих класів рішень.

Типовими прикладами задач колективного вибору є визначення переможців на виборах шляхом голосування, конкурсний відбір проектів, виконавців для виконання робіт тощо.

Оскільки кожен член ГПР приймає рішення незалежно від інших, виходячи зі своїх власних інтересів і цілей, максимально можливе число індивідуальних переваг дорівнює числу членів ГПР. Однак при колективному прийнятті рішень можуть також виникати коаліції, куди входять учасники, які мають інтереси, що збігаються. Тоді кожна коаліція може розглядатися як самостійний член групи, яка приймає рішення, і загальна кількість індивідуальних переваг зменшується.

При прийнятті колективного рішення і індивідууми, і коаліції можуть дотримуватись різних **стилів поведінки**, а саме:

- 1) **статус кво** — учасники слабо взаємодіють один з одним, намагаються зберігати ситуацію, що склалася;
- 2) **конфронтація** — учасники діють так, щоб завдати максимальних збитків іншим учасникам, розглядаючи їх як противників. Конфронтація характерна для локальних військових дій, конфліктних ситуацій, спортивних ігор;
- 3) **раціональність** — учасники прагнуть діяти у своїх інтересах так, щоб отримати максимальну для себе вигоду, необов'язково завдаючи шкоди іншим учасникам. Нерідко учасникам вигідно об'єднуватися, стаючи союзниками, іноді вигідніше залишатися противниками. Такі взаємини притаманні великим компаніям, які працюють у одному й тому секторі економіки; країнам, залученим до глобального конфлікту.

Принципи узгодження інтересів членів ГПР

Основна складність задач індивідуального раціонального вибору, пов'язана з виявленням переваг окремої ОПР, додатково погіршується складністю агрегування та узгодження індивідуальних переваг кількох ОПР, неоднозначністю можливого переходу від індивідуальних суджень до колективної думки ГПР.

Найбільш відомі принципи узгодження інтересів учасників при колективному виборі:

1. Принцип більшості
2. Принцип диктатора
3. Принцип Курно (коаліцій немає)
4. Принцип Парето (експерти утворюють коаліцію)
5. Принцип Еджворта (у групі кілька коаліцій)
6. Принцип вето



Принцип більшості

Цей принцип стверджує, що узгоджена групова перевага має відповідати коаліції, яка має кількість членів (голосів) t , що перевищує якийсь поріг C .

Цей поріг може дорівнювати $C = \frac{1}{2} \times N$, тобто половині учасників групового вибору. У цьому випадку говорять про **принципі простої більшості**.

Якщо поріг дорівнює $C = \frac{2}{3} \times N$ голосів, то говорять про **принцип більшості в 2/3 голосів** (або *кваліфікованої більшості*).

Якщо поріг дорівнює числу всіх учасників $C = 1 \times N$, то говорять про одноголосне рішення, або **принцип абсолютної більшості**.

Принцип більшості голосів використовується за демократичного способу прийняття рішення.

Принцип диктатора

Відповідно до цього принципу у якості групової переваги приймається перевага однієї особи з членів ГПР – **диктатора**.

При рішеннях за цим принципом не враховуються переваги інших учасників рішення, сутнісно групова перевага відповідає індивідуальній перевазі.
(відомий жарт: "Ми тут порадилися, і я вирішив").

Принцип диктатора характерний для авторитарних режимів, військових організацій і широко використовується для прийняття рішень у надзвичайних обставинах.

При вимірі переваг у якісних шкалах об'єднання індивідуальних переваг у коаліційну перевагу зазвичай здійснюється за принципом 100% більшості, тобто одному рішенню надається перевага в коаліції іншому, якщо всі члени коаліції мають таку ж перевагу. При вимірі переваг у кількісних шкалах коаліційну перевагу отримують шляхом агрегування, наприклад, як зважену суму індивідуальних переваг членів коаліції.

Принцип Курно

Усі члени ГПР мають різні власні інтереси і вибирають незалежно один від одного, тобто число коаліцій дорівнює числу членів ГПР. Тоді ніякому учаснику окремо не вигідно змінювати свою перевагу, оскільки це може лише погіршити прийняте рішення.

Принцип Парето

Усі члени ГПР мають спільні інтереси і вибирають узгоджено, тобто є одна єдина коаліція. Тоді всім учасникам разом не вигідно змінювати свої переваги, оскільки це може лише погіршити ухвалене рішення.

Принцип Еджворта

Усі члени ГПР входять у коаліції, число яких може бути будь-яким (від одного до кількості членів ГПР), і роблять свій вибір на користь своєї коаліції. Тоді жодній коаліції не вигідно змінювати свої переваги, оскільки це може лише погіршити ухвалене рішення.

Принцип вето

Цей принцип вимагає формальної згоди всіх учасників рішення і полягає в тому, що якщо хоча б один із учасників не погоджується з запропонованим варіантом — накладає вето, то рішення не приймається. Принцип вето потребує одностайності для реалізації рішення. Цей принцип є доцільним для важливих, відповідальних рішень зі значними наслідками.

Наприклад, принцип вето застосовується у Раді безпеки ООН, кількість учасників якої обмежена. Кожен із учасників може запропонувати свій варіант рішення, але здійснення рішення, що включає фінансування за рахунок коштів ООН, можливе лише за умови схвалення або нейтралітету решти учасників Ради безпеки.

Класифікація завдань та методів колективного вибору:

- за кількістю членів ГПР можна виділити задачі колективного вибору з **двома та багатьма** (більше двох) учасниками;
- за кількістю критеріїв, що використовуються для оцінки варіантів, задачі колективного вибору поділяються на **однокритеріальні та багатокритеріальні**;
- залежно від того, чи описуються варіанти та переваги учасників детермінованими, імовірнісними чи нечіткими змінними, говорять про колективне прийняття рішень **в умовах визначеності, ймовірнісної, нечіткої чи повної невизначеності**.

Усталеної класифікації методів колективного вибору немає, але умовно виділяють:

- процедури голосування,
- ігрові методи,
- експертні методи,
- групові різновиди методів багатокритеріального вибору та ін.

Процедури голосування

Голосування — один з найпоширеніших, популярних і давно відомих способів колективного прийняття рішень, який застосовується для вибору найкращого для всіх варіантів у різних за розмірами групах.

Обґрунтування процедур голосування та формалізація правил підрахунку голосів для визначення переможців були одними з перших завдань колективного прийняття рішень, які привернули увагу дослідників ще наприкінці XVIII ст.: французькі вчені Жан Борда, Жан де Кондорсе.

У XIX ст. проблеми голосування вивчалися французьким математиком та фізиком П. Лапласом та англійським математиком Ч. Доджсоном.

Першим в 1951 р. аксіоматику раціонального колективного вибору запропонував К.Ерроу, американський математик та економіст, згодом лауреат Нобелівської премії.

Голосування поєднує два механізми:

- ☐ індивідуальний вибір виборців
- ☐ підбиття підсумків виборів, які зазвичай виконуються різними людьми.

Для виявлення індивідуальних переваг виборців застосовуються два основні різновиди процедур голосування:

- **неранжуюча**
- **ранжируюча.**

У неранжуючій процедурі голосування кожен виборець віддає свій голос за один або кілька альтернативних варіантів.

В одних процедурах слід голосувати лише за кілька варіантів, наприклад за одного кандидата на парламентських виборах або за кількох претендентів за кількістю осіб, які обираються до складу керівного органу; в інших допускається голосування за будь-яку довільну кількість варіантів. Голоси, подані за кожний варіант, підсумовуються.

У ранжуючих процедурах голосування потрібно, щоб кожен виборець оцінював усі наявні варіанти. В одних випадках пропонується повністю або частково впорядкувати всі варіанти за перевагою і розташувати їх у порядку зменшення переваги; в інших необхідно провести парне порівняння варіантів та вказати перевагу одного з них.

При підрахунку голосів враховується низка додаткових умов:

1. Якщо всі виборці є рівноправними учасниками, то один голосуючий має 1 голос або m голосів за кількістю порівнюваних варіантів за так званого кумулятивного голосування. В останньому випадку голосуючий повинен на свій розсуд розподілити ці m голосів між довільними варіантами.
2. Якщо виборці нерівноправні, то кожен з них має певну i , як правило, нерівнозначну кількість голосів. Наприклад, голова журі чи генеральний директор компанії має право на два голоси під час розгляду спірних ситуацій; акціонер має число голосів, що дорівнює кількості належних йому акцій і т.п.

Системи голосування відрізняються також формами своєї організації (одно-, багатотурові), правилами визначення переможців кожного туру. У **багатотурових процедурах** колективного прийняття рішень процес пошуку переможця чи підсумкового впорядкування варіантів розбивається на кілька турів чи етапів, кожен з яких може використовувати свою систему голосування, свої правила підрахунку голосів і визначення переможців, які проходять у наступний тур виборів.

Для визначення **кращого** за підсумками голосування варіанту **неранжуючих** у процедурах найчастіше використовуються такі правила:

- 1) один голос «за»** — найкращим вважається варіант, за який проголосував хоча б один учасник, а решта учасників утрималася від вибору;
- 2) відносна більшість голосів** — найкращим вважається варіант, за який проголосувала більшість учасників (більше, ніж за будь-який інший варіант, але необов'язково більше половини від загальної кількості голосів);
- 3) проста більшість голосів** — найкращим вважається варіант, за який проголосувала проста більшість учасників (50% + 1 голос від загальної кількості голосів);
- 4) кваліфікована більшість голосів** — найкращим вважається варіант, за який проголосувало більше заздалегідь заданого числа учасників (наприклад, понад 2/3 або більше від загальної кількості голосів);
- 5) (k1, k2)-більшість голосів** — найкращим вважається варіант, за який проголосувало не менш ніж k1 учасників і проти – не більше ніж k2 учасників;
- 6) Одноголосність** — найкращим вважається варіант, за який проголосували всі учасники;
- 7) Вето** — варіант не обирається, якщо проти нього проголосував хоча б один учасник, незалежно від результатів голосування решти учасників.

Розглянемо процедури голосування, що базуються на процедурі, що ранжує думки голосуючих.

Процедура Борда

Процедура Борда (1770 р.) була історично першою системою голосування, де використовувалася ранжуюча процедура обліку думок голосуючих.

Процедура складається з наступних кроків.

1. Кожен учасник ранжує всі варіанти $A_1, \dots, A_m$ за перевагою.
2. У кожному k -м індивідуальному строгому упорядкуванні перший варіант отримує $(m-1)$ бал, другий варіант – $(m-2)$ бала, останній варіант – 0 балів.
3. Для кожного варіанта A_i обчислюється значення функції Борда:

$$f_B(A_i) = \sum_{k=1}^N b^{(k)}(A_i)$$

що дорівнює сумі балів Борда $b^{(k)}(A_i)$ присвоєних варіанту A_i у всіх індивідуальних упорядкуваннях.

4. Упорядкування варіантів будується за зменшенням значення функції Борда. Кращий варіант A^* відповідає максимальному значенню функції Борда

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_B(A_i)$$

Приклад 1. Припустимо, що $N=60$ виборців мають обрати одного з трьох кандидатів А, В та С. Нехай при використанні ранжуючої процедури обліку думки виборців їх індивідуальні уподобання розподілилися таким чином:

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Обчислимо значення функції Борда для кожного з кандидатів, вважаючи, що в індивідуальному впорядкуванні першому кандидату надається 2 бали, другому — 1 бал, третьому — 0 балів. Тоді отримуємо:

$$f_B(A) = 2 \cdot 23 + 0 \cdot 17 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 58$$

$$f_B(B) = 1 \cdot 23 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 8 = 69$$

$$f_B(C) = 0 \cdot 23 + 1 \cdot 17 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 53$$

Упорядкування кандидатів відповідно до значень функції Борда має вигляд: $B \succ A \succ C$,
оскільки $f_B(B) > f_B(A) > f_B(C)$

Найкращим є кандидат В.

Модифікована процедура Борда

1. Кожен учасник ранжує всі варіанти $A_1, \dots, A_m$ за перевагами.
2. Підраховується кількість індивідуальних суворих упорядкувань одного й того самого виду.
3. Для кожного варіанту A_i підраховується загальна кількість $g(A_i, A_j)$ як число учасників, що надають перевагу варіанту A_i всім іншим варіантам A_j при парних порівняннях у всіх отриманих упорядкуваннях.
4. Для кожного варіанта A_i обчислюється значення модифікованої функції Борда:

$$f_{BM}(A_i) = \sum_j [g(A_i, A_j) - g(A_j, A_i)]$$

5. Упорядкування варіантів будується за зменшенням значення модифікованої функції Борда. Найкращий варіант A^* відповідає максимальному значенню модифікованої функції Борда

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_{BM}(A_i)$$

Приклад 2. Розглянемо застосування цієї процедури для вихідних даних Прикладу 1:

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Якщо в усіх упорядкуваннях розглядати лише парні порівняння кандидатів, то маємо (А та В, А та С), (В та А, В та С) та (С та А, С та В).

Обчислимо кількість голосів, які віддають перевагу кандидату А, ніж кандидату В і навпаки:

$$g(A, B) = 23 + 10 = 33, \quad g(B, A) = 17 + 2 + 8 = 27 = N - g(A, B)$$

Аналогічно:

$$g(A, C) = 23 + 2 = 25, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 35$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 18$$

Обчислимо значення модифікованої функції Борда

$$f_{BM}(A) = [g(A, B) - g(B, A)] + [g(A, C) - g(C, A)] = [33 - 27] + [25 - 35] = -4$$

$$f_{BM}(B) = [g(B, A) - g(A, B)] + [g(B, C) - g(C, B)] = [27 - 33] + [42 - 18] = 18$$

$$f_{BM}(C) = [g(C, A) - g(A, C)] + [g(C, B) - g(B, C)] = [35 - 25] + [18 - 42] = -14$$

Упорядкування кандидатів відповідно до значень модифікованої функції Борда має вигляд: $B \succ A \succ C$ оскільки $f_{BM}(B) > f_{BM}(A) > f_{BM}(C)$. Найкращим є кандидат В.

Процедура Кондорсе

Принцип Кондорсе (1785 р.) свідчить: переможцем під час виборів оголошується кандидат, який перевищує при попарному порівнянні інших кандидатів.

Процедура Кондорсе складається з наступних кроків:

1-3. Збігаються з кроками 1-3 модифікованої процедури Борда і полягають у побудові групового ранжирування варіантів, тобто в агрегуванні всіх парних порівнянь на одне.

4. Найкращий варіант при парному порівнянні варіантів визначається побудовою загального упорядкування – є першим у підсумковому агрегованому упорядкуванні.

Приклад 3. Розглянемо застосування цієї процедури для вихідних даних Прикладу 1:

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

У прикладі 2 знайшли:

$$g(A, B) = 23 + 10 = 33, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 27$$

$$g(A, C) = 23 + 2 = 25, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 35$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 18$$

Так як $g(A, B) > g(B, A)$, то має місце перевага $A \succ B$.

Аналогічно, отримуємо $C \succ A$ та $B \succ C$.

Об'єднуючи, виходить неузгоджена колективна перевага

$$C \succ A \succ B \succ C$$

пов'язана із порушенням транзитивності. Таким чином, у цьому прикладі не можна вибрати найкращого кандидата, використовуючи процедуру Кондорсе.

Таке протиріччя називається феномен неузгодженості Кондорсе.

Процедура Сімпсона

Процедура Сімпсона (1965 р.) дозволяє уникнути виникнення феномена неузгодженості Кондорсе і полягає в наступному:

- 1-3. Збігаються з кроками 1-3 модифікованої процедури Борда.
4. Для кожного варіанта A_i визначається значення функції Сімпсона:

$$f_s(A_i) = \min_{1 \leq j \leq m} g(A_i, A_j), \quad j \neq i$$

що дорівнює мінімальному числу учасників, які віддають перевагу даному варіанту A_i ніж всім іншим варіантам A_j ($j \neq i$) за всіх парних порівняннях.

5. Упорядкування варіантів будується за зменшенням значення функції Сімпсона $f_s(A_i)$. Найкращий варіант A^* відповідає максимальному значенню функції Сімпсона:

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_s(A_i)$$

Приклад 4. Розглянемо застосування цієї процедури для вихідних даних Прикладу 1:

$$A \succ B \succ C - 23$$

$$B \succ C \succ A - 17$$

$$B \succ A \succ C - 2$$

$$C \succ A \succ B - 10$$

$$C \succ B \succ A - 8$$

У прикладі 2 знайшли:

$$g(A, B) = 23 + 10 = 33, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 27$$

$$g(A, C) = 23 + 2 = 25, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 35$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 18$$

Обчислюємо функції Сімпсона для альтернатив:

$$f_s(A) = \min\{g(A, B); g(A, C)\} = \min\{33; 25\} = 25$$

$$f_s(B) = \min\{g(B, A); g(B, C)\} = \min\{27; 42\} = 27$$

$$f_s(C) = \min\{g(C, A); g(C, B)\} = \min\{35; 18\} = 18$$

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_s(A_i) = \max\{f_s(A); f_s(B); f_s(C)\} = 27$$

$$B \succ A \succ C$$



Найкращим є кандидат В.

Процедура Доджсона

Основна ідея процедури Доджсона (1877) полягає в наступному: всі варіанти впорядковуються за кількістю голосів, яких їм не вистачає для того, щоб перевершувати всі інші варіанти простої більшості (більше половини від загального числа) голосів.

1-3. Збігаються з кроками 1-3 модифікованої процедури Борда.

4. Будується допоміжна матриця $H = (h_{ij})_{m \times m}$, де $h_{ij} = g(A_i, A_j) / g(A_j, A_i)$

- групова матриця парних порівнянь варіантів за кількістю поданих голосів. Для кожного варіанта A_i по i -му рядку матриці H знаходяться варіанти A_j для яких $h_{ij} < 1$. Це якраз і будуть ті варіанти, порівняно з якими варіант A_i отримав менше половини від загальної кількості голосів. Позначимо сукупність таких варіантів через $A_{1/2}$.

5. Для кожного варіанта A_i обчислюється значення функції Доджсона

$$f_D(A_i) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(A_i, A_j))$$

де $g_{1/2} = t/2$, якщо число t виборців парно, та $g_{1/2} = (t+1)/2$ при непарному t .

Найкращий варіант A^* відповідає мінімальному значенням функції Доджсона.

Приклад 5. Розглянемо застосування цієї процедури для вихідних даних Прикладу 1:

$$A \succ B \succ C - 23$$

$$B \succ C \succ A - 17$$

$$B \succ A \succ C - 2$$

$$C \succ A \succ B - 10$$

$$C \succ B \succ A - 8$$

Маємо результати попарного порівняння:

$$g(A, B) = 23 + 10 = 33, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 27$$

$$g(A, C) = 23 + 2 = 25, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 35$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 18$$

Будуємо допоміжну матрицю Н згідно $h_{ij} = g(A_i, A_j) / g(A_j, A_i)$

	A	B	C
A	1	33/27	25/35
B	27/33	1	42/18
C	35/25	18/42	1

	A	B	C
A	1	33/27	25/35
B	27/33	1	42/18
C	35/25	18/42	1

$$h_{ij} < 1$$

Обчислюємо функції Доджсона для альтернатив при $g_{1/2} = t/2 = 30$, так як $t=60$:

$$f_D(A) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(A, A_j)) = 30 - 25 = 5$$

$$f_D(B) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(B, A_j)) = 30 - 27 = 3.$$

$$f_D(C) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(C, A_j)) = 30 - 18 = 12$$

Значення функцій Доджсона показують, скільки голосів не вистачило кожному кандидату до половини від загальної кількості голосів.

Найкращий варіант A^* визначається мінімальним значенням функції Доджсона, звідси маємо підсумкове впорядкування: $B \succ A \succ C$

Найкращим є кандидат В.

Нижче в матриці Доджсона в 1-му рядку немає елементів, що належать множині $A_{1/2}$ тому кандидат A є безумовним переможцем – він за всма попарними порівняннями має більше $g_{1/2} = 50$ голосів.

	A	B	C	D
A	1	64/36	52/48	64/36
B	36/64	1	73/27	57/43
C	48/52	27/43	1	49/51
D	36/64	43/57	51/49	1

Уподобання щодо інших кандидатів визначається мінімальним значенням функції Доджсона

$$f_D(B) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(B, A_j)) = 50 - 36 = 14$$

$$f_D(C) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(C, A_j)) = (50 - 48) + (50 - 27) + (50 - 49) = 26$$

$$f_D(D) = \sum_{A_j \in A_{1/2}} (g_{1/2} - g(D, A_j)) = (50 - 36) + (50 - 43) = 21$$

Звідси маємо підсумкове впорядкування: $A \succ B \succ D \succ C$

Процедура Нансона

Процедура Нансона (1882 р.) поєднує підхід Борда та принцип Кондорсе.

Основна ідея процедури полягає у послідовному скороченні множини варіантів шляхом виключення тих, хто отримав мінімальну кількість голосів доти, доки не залишаться невиключні (недоміновані) варіанти. Ці варіанти і вважатимуться результатом колективного вибору.

1-3. Збігаються з кроками 1-3 процедури Борда.

4. Визначається варіант A_1^- , що відповідає мініимальному значенню функції Борда

$$A_1^- = \arg \min_{1 \leq i \leq m} f_B(A_i)$$

Цей варіант виключається із розгляду.

5. Повторюються кроки 1-4, і на звуженій множині $A_1 = A \setminus \{A_1^-\}$ варіантів знаходиться наступний варіант A_2^- , що має мінімальну кількість голосів, який аналогічно виключається з розгляду.

6. Кроки 1-4 повторюються, доки залишиться один чи кілька варіантів, які далі не можна виключити. Найбільш кращі варіанти, що залишилися, становлять множину A^* , що визначається функцією Нансона:

$$f_N(A^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A_{k-1} \setminus \{A_k^-\}$$

Приклад 6. У Прикладі 1 згідно з вихідним завданням:

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Початкова множина альтернатив $A = \{A, B, C\}$.

Знайдено значення функції Борда:

$$f_B(A) = 2 \cdot 23 + 0 \cdot 17 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 58$$

$$f_B(B) = 1 \cdot 23 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 8 = 69$$

$$f_B(C) = 0 \cdot 23 + 1 \cdot 17 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 53$$

Тоді виключаємо кандидата C , тобто $A_1^- = \{C\}$. У зв'язку з цим маємо $A_1 = A \setminus A_1^-$

І вихідне завдання перетворюється на:

$$A \succ B \quad - \quad 23$$

$$B \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \quad - \quad 2$$

$$A \succ B \quad - \quad 10$$

$$B \succ A \quad - \quad 8$$

Знаходимо нові значення функції Борда:

$$f_B(A) = 1 \cdot 23 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 33$$

$$f_B(B) = 0 \cdot 23 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 8 = 27$$

Кандидат В, який має найменше значення функції Борда, виключається. Нова кількість кандидатів A_2 складається з єдиного кандидата А, який і є найкращим.

Упорядкування кандидатів відповідно до функції Нансона має вигляд $A \succ B \succ C$ і відрізняється від результату, отриманого за допомогою функції Борда.

У **модифікованій процедурі Нансона** з розгляду виключається не єдиний варіант, який має мінімальну оцінку Борда, а відразу кілька варіантів, оцінки яких менші за середнє за всіма варіантами значення функції Борда

$$f_B^{\text{серед}} = (1/m) \sum_i f_B(A_i)$$

Наприклад, у Прикладі 6 $f_B^{\text{серед}} = (58 + 69 + 53) / 3 = 60$.

Відповідно, вже на першому ж кроці ми виключаємо кандидатів А та С. Переможець – кандидат В.

Процедура Кумбса

Основна ідея процедури Кумбса (1950 р.) полягає у послідовному скороченні множини варіантів шляхом виключення найгірших за більшістю голосів варіантів до того часу, доки залишаться невиключні варіанти.

1. За результатами голосування визначаються найгірші варіанти: для кожного варіанта підсумовуються голоси, у перевагах яких відповідний варіант посідає останнє місце.
2. Альтернатива, що отримала найбільше голосів вибуває.
3. Множина альтернатив звужується до нової множини, і процедура триває доти, доки не залишаться тільки невиключні варіанти.

Приклад 8. Розглянемо застосування процедури Кумбса.

Припустимо, що 60 виборців мають обрати одного з трьох кандидатів A , B , і C . Нехай при ранжируючій процедурі обліку думки виборців їх індивідуальні переваги розподілилися таким чином:

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 20$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 11$$

Визначимо, скільки людей вважають гіршими за тих чи інших кандидатів.

- Кандидат A : $17 + 11 = 28$ чол.,
- Кандидат B : 10 чол.,
- Кандидат C : $20 + 2 = 22$ чол.

Так як кандидат A набрав найбільше «найгірших» голосів, то його виключаємо.

Тоді маємо

$$B \succ C - 20$$

$$B \succ C - 17$$

$$B \succ C - 2$$

$$C \succ B - 10$$

$$C \succ B - 11$$

Аналогічно, визначимо, скільки людей вважають гіршими за тих чи інших кандидатів.

- Кандидат В: $10+11=21$ чол.,
- Кандидат С: $20 + 2 +17 = 39$ чол.

Т.к. кандидат С набрав найбільше «найгірших» голосів, його виключаємо.

У результаті залишається кандидат В – переможець. Підсумкова перевага:

$$B \succ C \succ A$$

Приклад 8. Розглянемо застосування процедури для прикладу 1.

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Визначаємо найгіршу альтернативу:

- Кандидат А: $17 + 8 = 25$ чол.,
- Кандидат В: 10 чол.,
- Кандидат С: $23 + 2 = 25$ чол.

Т.к. кандидати А і С набрали найбільше «найгірших» голосів, їх виключаємо. Таким чином, переможець – В, але в цьому випадку неможливо у цій процедурі виявити переваги між кандидатами А та С.

Процедура Коупленда

В основі процедури Коупленда (1950 р.) лежить ідея обліку відмінності індивідуальних переваг учасників, аналогічна ідеї модифікованої процедури Борда. Однак тут різниця визначається не кількістю голосів, поданих за варіанти, а числом переваг варіантів в окремих парних порівняннях.

1. Кожен учасник порівнює усі варіанти $A_1, \dots, A_m$ попарно один з одним незалежно від порівнянь інших пар варіантів за значеннями $g(A_i, A_j)$ і звідси формується результат парного порівняння у вигляді бінарних відносин.
2. Для кожного варіанта A_i підраховуються: число $n(A_i, A_j)$ - число парних порівнянь, у яких варіант A_i краще A_j ; і число $n(A_j, A_i)$ - число парних порівнянь, у яких варіант A_j краще A_i .
3. Для кожного варіанта A_i обчислюється значення функції Коупленда

$$f_C(A_i) = n(A_i, A_j) - n(A_j, A_i)$$

4. Упорядкування варіантів будується за зменшенням значення функції Коупленда. Найкращий варіант A^* визначається максимальним значенням функції Коупленда

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_C(A_i)$$

Приклад 9. Розглянемо застосування процедури Коупленда.

Припустимо, що 60 виборців мають обрати одного з трьох кандидатів А, В і С. Нехай при ранжованій процедурі врахування думки виборців, їх індивідуальні переваги розподілилися таким чином:

$$A \succ B \succ C \quad - 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - 8$$

Голоси виборців при попарному порівнянні кандидатів А, В та С розподілилися так:

$$g(A, B) = 23 + 6 = 29, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 31 \quad B \succ A$$

$$g(A, C) = 23 + 6 = 29, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 31 \quad C \succ A$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 6 = 46, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 14 \quad B \succ C$$

Тоді

$$f_C(A) = 0 - 2 = -2;$$

$$f_C(B) = 2 - 0 = 2;$$

$$f_C(C) = 1 - 1 = 0.$$



$$B \succ C \succ A$$

Приклад 10. Розглянемо застосування процедури для прикладу 1.

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Здійснюємо парні порівняння:

$$g(A, B) = 23 + 10 = 33, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 27$$

$$g(A, C) = 23 + 2 = 25, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 35$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 2 = 42, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 18$$

Тоді

$$f_C(A) = 1 - 1 = 0;$$

$$f_C(B) = 1 - 1 = 0;$$

$$f_C(C) = 1 - 1 = 0.$$



$$A \cong B \cong C$$

Тобто. для цього прикладу процедура Коупленда не змогла виявити переваги між кандидатами.

Процедура Фішберна

Ця процедура поєднує ідеї процедур Борда, Кондорсе і Коупленда, визначаючи перевагу кожного варіанту за кількістю варіантів, які даний варіант перевершує за простою більшістю голосів.

1. Збігається з кроком 1 процедури Коупленда.
2. Для кожного варіанта A_i обчислюється значення функції Фішберна, що дорівнює числу варіантів A_j , які поступаються варіантом A_i з простої більшості голосів

$$f_F(A_i) = n(A_i, A_j)$$

3. Упорядкування варіантів будується за зменшенням значення функції Фішберна. Найкращий варіант A^* визначається максимальним значенням функції Фішберна

$$A^* \in \arg \max_{1 \leq i \leq m} f_F(A_i)$$

Приклад 11. Розглянемо застосування процедури Фішберна для прикладу 9.

$$A \succ B \succ C \quad - \quad 23$$

$$B \succ C \succ A \quad - \quad 17$$

$$B \succ A \succ C \quad - \quad 2$$

$$C \succ A \succ B \quad - \quad 10$$

$$C \succ B \succ A \quad - \quad 8$$

Голоси виборців при попарному порівнянні кандидатів А, В та С розподілилися так:

$$g(A, B) = 23 + 6 = 29, \quad g(B, A) = N - g(A, B) = 31$$

$$g(A, C) = 23 + 6 = 29, \quad g(C, A) = N - g(A, C) = 31$$

$$g(B, C) = 23 + 17 + 6 = 46, \quad g(C, B) = N - g(B, C) = 14$$

Тоді

$$f_F(A) = 0 ;$$

$$f_F(B) = 2 ;$$

$$f_F(C) = 1.$$



$$B \succ C \succ A$$

Особливості систем голосування.

Аксіоми Ерроу

В даний час розроблено велику кількість різноманітних систем голосування, які набули широкого поширення на практиці. Голосування як спосіб колективного прийняття рішень прийнято вважати одним з найбільш об'єктивних, якщо не об'єктивним механізмом демократичних виборів у суспільному житті, політиці, економіці, управлінні, судочинстві та багатьох інших областях, оскільки спирається на волевиявлення більшості. Голосування та правила більшості голосів часто використовують для вирішення конфліктних ситуацій за наявності суперечливих інтересів сторін.

Разом з тим опора тільки на думку більшості нерідко призводить до вибору не найефективнішого рішення, оскільки не враховуються інші можливості для вибору, які пропонуються незгодною меншістю.

Помітний вплив на підсумки голосування можуть чинити і правила визначення переможців, які можуть призводити до неспівдаючих та суперечливих результатів. Для підвищення об'єктивності вибору кращого варіанту рекомендують використовувати різні процедури голосування, а потім зіставляти результати, що виходять, і відбирати найбільш стабільні як підсумкові.

Водночас використання будь-якої системи голосування, а тим більше комбінацій різних систем залишає можливості для маніпулювання. Таке маніпулювання може здійснюватися і з боку організаторів голосування, і з боку виборців, і навіть організаторами, і виборцями одночасно. Як виявилось, повністю захищеним від маніпулювання є лише так званий диктаторський вибір.

Аксіоми та «теорема про неможливість» Кеннета Ерроу

Суть цієї теореми полягає в тому, що «... будь-який колективний вибір, що задовольняє цілком розумним аксіомам, може забезпечити найкращу альтернативу лише в тому випадку, якщо він містить примусові риси, або диктаторства».

Перша аксіома Ерроу (універсальності) вимагає, щоб система голосування була достатньо загальною для того, щоб враховувати всі можливі розподіли голосів виборців.

Інтуїтивно ця вимога цілком очевидна. Наперед не можна передбачити розподіл голосів. Цілком необхідно, щоб система була дієвою за будь-яких уподобань виборців.

Друга аксіома Ерроу (повноти). Система голосування повинна дозволяти порівнювати всі пари кандидатів, визначивши, хто з них кращий, а також оголосити двох кандидатів однаково привабливими.

Третя аксіома Ерроу (аксіома відсутності диктатора). Групова перевага не повинна завжди збігатися з перевагою одного виборця.

Четверта аксіома Ерроу (аксіома незалежності). Перевага виборця для пари кандидатів А та В не повинна залежати від ставлення виборця до інших кандидатів.

П'ята аксіома Ерроу (аксіома ненав'язаності групового рішення). Групове рішення має прийматись на основі всіх індивідуальних переваг.

Шоста аксіома Ерроу (аксіома транзитивності). У системі голосування неприпустиме порушення транзитивності.

Теорема Ерроу (про неможливість)

Для $n \geq 3$ учасників ГПР та $N \geq 3$ кандидатів не існує принципу узгодження, що задовольняє аксіомам 1-6.

Наслідок з теореми Ерроу: системи голосування, що задовольняють аксіомам 1–6, мають неприпустимий з погляду демократії недолік: кожна з цих систем є правилом диктатора - особистості, що нав'язує всім іншим виборцям свої переваги.

Результати виявлені Ерроу, здобули широку популярність. Вони розвіяли сподівання багатьох економістів, соціологів, математиків знайти досконалу систему голосування.

"Демократія є поганою формою правління, але людство поки не придумало нічого кращого"
(У. Черчілль).

Вимога виключення диктатора призводить до неможливості створення системи голосування, яка б задовольняла всім аксіомам Ерроу.

Тема 5. Структура, принципи побудови та класифікація СППР

План

1. Сутність та призначення систем підтримки прийняття рішень (СППР).
2. Історія виникнення та розвитку інформаційних СППР.
3. Класифікація СППР. Покоління систем підтримки прийняття рішень.
4. Етапи проектування СППР. Послідовність розробки та реалізації СППР.

Система підтримки прийняття рішень (СППР)

– комп'ютерна автоматизована система, метою якої є допомога людям, що приймають рішення в складних умовах для повного та об'єктивного аналізу предметної діяльності.

Автоматизація процесу підтримки прийняття рішень обумовлена необхідністю:

- швидкого доступу до інформації, накопиченої у комп'ютері ОПР чи комп'ютерній мережі;
- здійснення оптимізації чи інтерактивної імітації (ухвалення рішень), що ґрунтуються на математичних чи евристичних моделях;
- знаходження в базах даних прийнятих раніше рішень у ситуаціях, подібних досліджуваним, для використання ОПР у відповідний момент;
- використання знань найкращих у своїй галузі фахівців, включених до баз знань експертних систем;
- подання результатів у найбільш придатній для ОПР формі.

У СППР технологію обробки даних формує ОПР у процесі взаємодії з системою. Для цього СППР надає користувачеві набір даних, програмних модулів і моделей, з яких користувач вибирає саме ті ресурси і технології, які дозволять отримати йому потрібну інформацію.



Основні відмінності СППР від традиційних звітних систем

Традиційні звітні (чи інформаційно-звітні) системи узагальнюють і регулярно надають *поточну регламентовану* інформацію про основні функції ділової діяльності (маркетинг, виробництво, фінанси), сформовані на основі чітко визначеної технології.

СППР – обслуговує стадії рішення (інформаційну, проектну і стадію вибору). Формування інформації засобами СППР також передбачає певну технологію використання наявних ресурсів (програмного забезпечення, бази моделей даних, телекомунікацій). Однак цю технологію повинен визначити й організувати сам менеджер.

СППР орієнтовані не на процес, а на набір можливостей, що інтерактивно обираються менеджером.

Таким чином, СППР повинна надавати кінцевому користувачу не підтримку однозначно описаного процесу обробки даних, а **набір можливостей**, що не залежать від процесу.

Розвиток концепції і структури СППР

Термін СППР був запропонований у 1971 р. *Скоттом Нортоном* для систем прийняття управлінських рішень.

Перше покоління СППР (1970-1980 р.), значною мірою дублювало функції звичайних управлінських систем. Основні компоненти СППР мали такі ознаки:

- **управління даними** - велика кількість інформації, внутрішні й зовнішні банки даних, опрацювання й оцінка даних;
- **управління обчислюванням** (моделювання) - моделі, розроблені спеціалістами в галузі інформатики для спеціальних проблем;
- **користувацький інтерфейс** (мова спілкування) – мови програмування, створені для великих ЕОМ, які використовуються тільки програмістами.

СППР другого покоління (з 1980 р. до середини 90-х) вже мають нові ознаки:

- **управління даними** - необхідний і достатній обсяг інформації про факти, що охоплюють відповідні припущення, інтереси та якісні оцінки;
- **управління обчислюваннями і моделюванням** - гнучкі моделі, що наслідують спосіб мислення менеджера у процесі прийняття рішень;
- **користувацький інтерфейс** - програмні засоби, «дружні» користувачеві, звичайна мова, безпосередня робота кінцевого користувача з системою.

Розвиток концепції і структури СППР

СППР третього покоління (з середини 90-х років ХХ ст.) мають ті самі ознаки, що й другого покоління, але з'явилися додаткові можливості за рахунок упровадження таких нових засобів інформаційних технологій і методів штучного інтелекту:

- а) сховищ і вітрин даних, що дає змогу творцям рішень аналізувати величезні обсяги даних про поточні ділові транзакції з метою вибору раціонального рішення;
- б) OLAP-систем, які уможливлюють швидке та зручне маніпулювання великими базами даних для дослідження багатьох показників бізнесової діяльності в різних ракурсах.

Класифікації СППР

Класифікація СППР **Альтера** виділяє два типи систем.

1. *Системи, орієнтовані на дані* (вибирають інформацію):
 - накопичування файлів (File drawer systems);
 - аналізу даних (Data analysis systems);
 - аналізу інформації (Analysis information systems).
2. *Системи, орієнтовані на моделі* (дають змогу підтримувати прийняття рішень):
 - розрахункові або облікові та фінансові моделі;
 - репрезентативні або образні;
 - оптимізаційні;
 - рекомендаційні.

Класифікація **Пауера** передбачає виділення п'яти категорій СППР:

- СППР орієнтовані на дані (*Data-driven DSS*);
- СППР орієнтовані на моделі (*Model-driven DSS*);
- СППР орієнтовані на знання (*Knowledge-driven DSS*);
- СППР орієнтовані на документи (*Document-driven DSS*);
- СППР орієнтовані на комунікації та групові СППР.

СППР складаються з двох компонент:

- **сховища даних.** Надає єдине середовище зберігання корпоративних даних, організованих у структурах, оптимізованих до виконання аналітичних операцій.
- **аналітичних засобів.** Дозволяють кінцевому користувачеві, який не має спеціальних знань у галузі інформаційних технологій, здійснювати навігацію та подання даних у термінах предметної області.

СППР-сховище даних

Специфіка роботи аналітичних систем робить практично неможливим їх пряме використання на оперативних даних.

Це пояснюється різними причинами, зокрема розрізненістю даних, зберіганням в форматах різних СУБД, але й незастосовністю структур даних оперативних систем до виконання завдань аналізу.

Для цих цілей створюється спеціалізоване середовище зберігання даних, що називається сховищем даних (Data Warehouse).

Сховище даних є банком даних певної структури, що містить інформацію про виробничий процес компанії в історичному контексті.

Головне призначення – забезпечувати швидке виконання довільних аналітичних запитів.

Переваги сховища даних:

- Єдине джерело інформації;
- Продуктивність;
- Швидкість розробки;
- Інтегрованість;
- Історичність та стабільність;
- Незалежність.

Єдине джерело інформації

Компанія отримує вивірене єдине інформаційне середовище, на якому будуть будуватися всі довідково-аналітичні додатки в тій предметній області, по якій побудовано сховище.

Це середовище матиме єдиний інтерфейс, уніфіковані структури зберігання, спільні довідники та інші корпоративні стандарти, що полегшує створення та підтримку аналітичних систем. Також, при проектуванні інформаційного сховища даних особливу увагу приділяють достовірності інформації, що потрапляє до сховища.

Продуктивність та швидкість розробки

Фізичні структури сховища даних спеціальним чином оптимізовані для виконання абсолютно довільних вибірок, що дозволяє будувати дійсно швидкі системи запитів.

Специфічна логічна організація сховища та існуюче спеціалізоване програмне забезпечення дозволяють створювати аналітичні системи з мінімальними витратами на програмування.

Інтегрованість

Інтеграція даних з різних джерел вже зроблена, тому не треба щоразу проводити з'єднання даних для запитів, що вимагають інформацію з декількох джерел.

Під інтеграцією розуміється як спільне фізичне зберігання даних, а й їх предметне, узгоджене об'єднання; очищення та вивірка при їх формуванні; дотримання технологічних особливостей тощо.

Історичність та стабільність

OLTP-системи оперують з актуальними даними, термін застосування та зберігання яких зазвичай не перевищує величини поточного бізнес-періоду (рік), у той час як інформаційне сховище даних передбачає довгострокове зберігання інформації протягом 10-15 років.

Стабільність означає, що фактична інформація у сховищі даних не оновлюється і не видаляється, а лише спеціальним чином адаптується до змін бізнес-атрибутів. Таким чином, з'являється можливість здійснювати історичний аналіз інформації.

Аналітичні системи

Аналітичні системи СППР дозволяють вирішувати три основні завдання:

- ведення звітності,
- аналіз інформації в реальному часі (OLAP),
- інтелектуальний аналіз даних

Звітність

Сервіс звітності СППР допомагає організації впоратися зі створенням різноманітних інформаційних звітів, довідок, документів, зведених відомостей тощо, особливо коли кількість звітів, що випускаються, велика і форми звітів часто змінюються.

Засоби СППР, автоматизуючи випуск звітів, дозволяють перевести їх зберігання в електронний вигляд і поширювати корпоративну мережу між службовцями компанії.

OLAP

OLAP (On-Line Analytical Processing) – сервіс є інструментом для аналізу великих обсягів даних у режимі реального часу. Взаємодіючи з OLAP-системою, користувач зможе здійснювати гнучкий перегляд інформації, отримувати довільні зрізи даних, і виконувати аналітичні операції деталізації, згортки, наскрізного розподілу, порівняння в часі.

Вся робота з OLAP-системою відбувається в термінах предметної області. OLAP-системи є частиною більш загального поняття Business Intelligence, яке включає в себе засоби організації спільного використання документів, що виникають у процесі роботи користувачів сховища. Технологія Business Intelligence забезпечує електронний обмін звітними документами, розмежування прав користувачів, доступ до аналітичної інформації з Інтернету та Інтранет.

Інтелектуальний аналіз даних (Data Mining)

З допомогою засобів видобутку даних можна проводити глибокі дослідження. Ці дослідження містять:

- пошук залежностей між даними (напр., "Чи правильно, що зростання продажів продукту А обумовлене зростанням продажів продукту В?");
- виявлення стійких бізнес-груп (напр. "Які групи клієнтів, близьких за поведінковими та іншими характеристиками, можна виділити?");
- прогнозування поведінки бізнес-показників (напр. "Який обсяг перевезень очікується наступного місяця?");
- оцінка впливу рішень на бізнес компанії (напр. "Як зміниться попит товару А серед групи споживачів Б, якщо знизити ціну товар С?");
- пошук аномалій (напр. "З якими сегментами клієнтської бази пов'язані найвищі ризики?").

Типи СППР

Залежно від функціонального наповнення інтерфейсу системи виділяють два основні типи СППР:

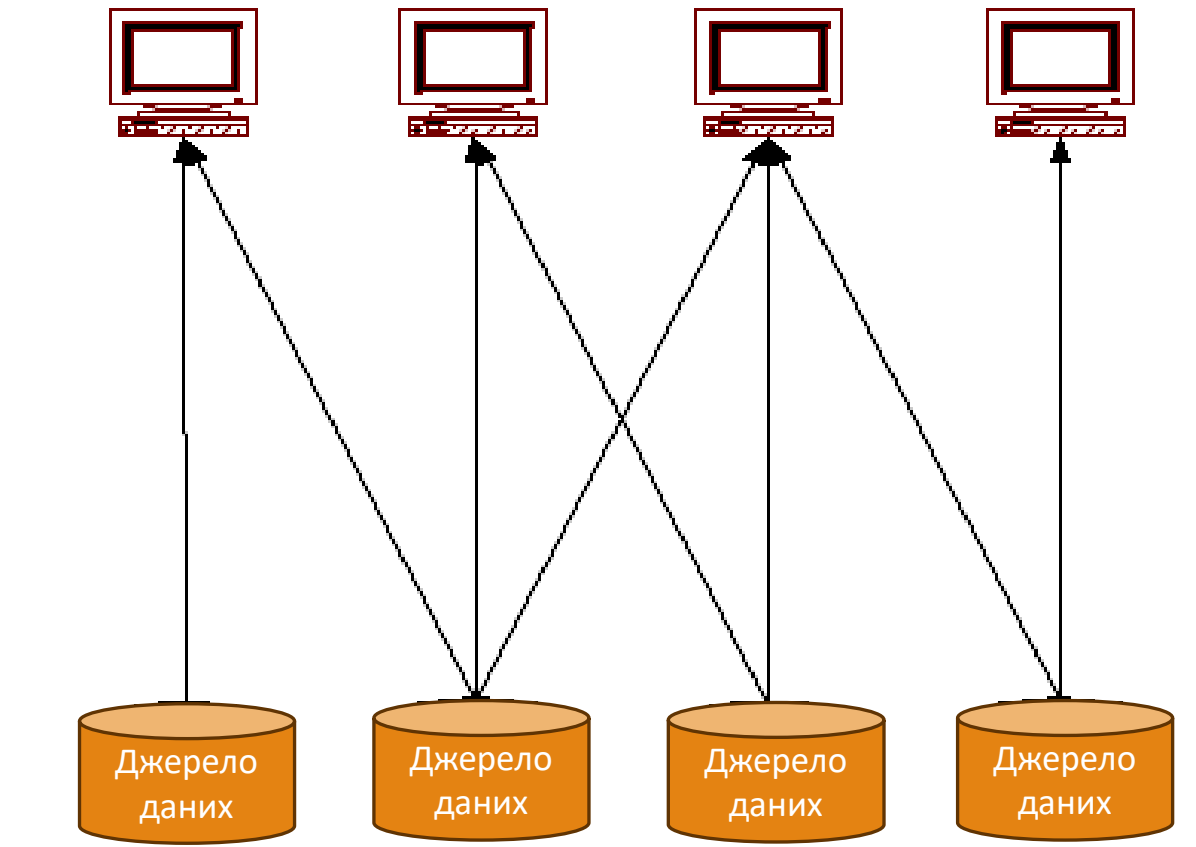
- EIS (Execution Information System) – інформаційні системи керівництвом підприємства. Ці системи спрямовані на непідготовлених користувачів. EIS-системи малюють загальну наочну картину поточного стану бізнес-показників роботи компанії та тенденції їх розвитку, з можливістю поглиблення аналізованої інформації до рівня великих об'єктів компанії.
- DSS (Decision Support System) – повнофункціональні системи аналізу та дослідження даних, розраховані на підготовлених користувачів. Зазвичай для реалізації DSS-систем (за наявності даних) достатньо встановлення та налаштування спеціалізованого ПЗ постачальників рішень з OLAP-систем та Data Mining.

На сьогоднішній день можна виділити чотири найбільш популярні типи архітектур систем підтримки прийняття рішень:

- Функціональна СППР;
- Незалежні вітрини даних;
- Дворівневе сховище даних;
- Трирівневе сховище даних.

Функціональна СППР

Функціональна СППР є найпростішою з архітектурної точки зору. Такі системи часто зустрічаються на практиці, особливо в організаціях з невисоким рівнем аналітичної культури та недостатньо розвиненою інформаційною інфраструктурою.



Характерною рисою функціональної СППР є те, що аналіз здійснюється з використанням даних з операційних систем.

Переваги:

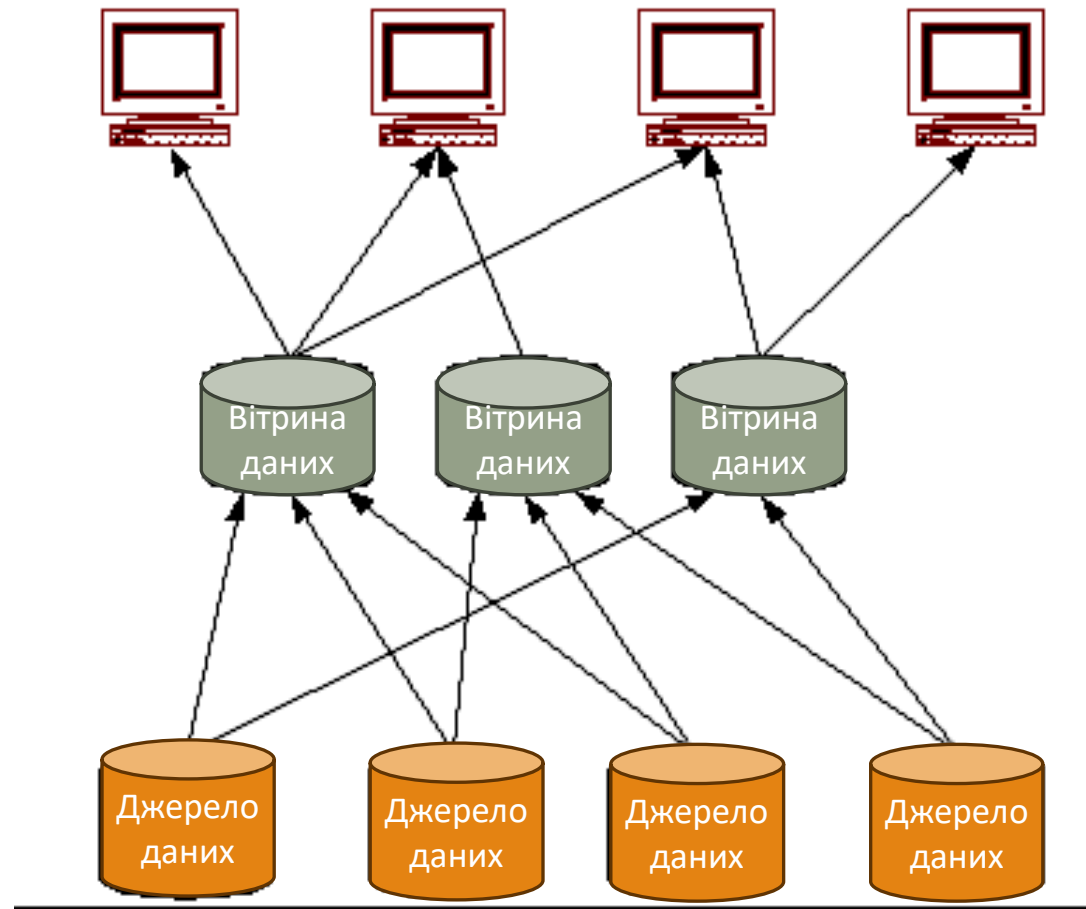
- Швидке використання за рахунок відсутності етапу навантаження даних у спеціалізовану систему
- Мінімальні витрати з допомогою використання однієї платформи.

Недоліки:

- Єдине джерело даних, що потенційно звужує коло питань, на які може відповісти система
- Оперативні системи характеризуються дуже низькою якістю даних з погляду їхньої ролі у підтримці прийнятті стратегічних рішень. В силу відсутності етапу очищення даних, дані функціональної СППР, зазвичай, мають невисоку якість
- Велике навантаження на оперативну систему. Складні запити можуть призвести до зупинки роботи оперативної системи, що дуже небажано.

СППР з використанням незалежних вітрин даних

Незалежні вітрини даних часто зустрічаються у великих організаціях з великою кількістю незалежних підрозділів, які часто мають свої власні відділи інформаційних технологій.



Переваги:

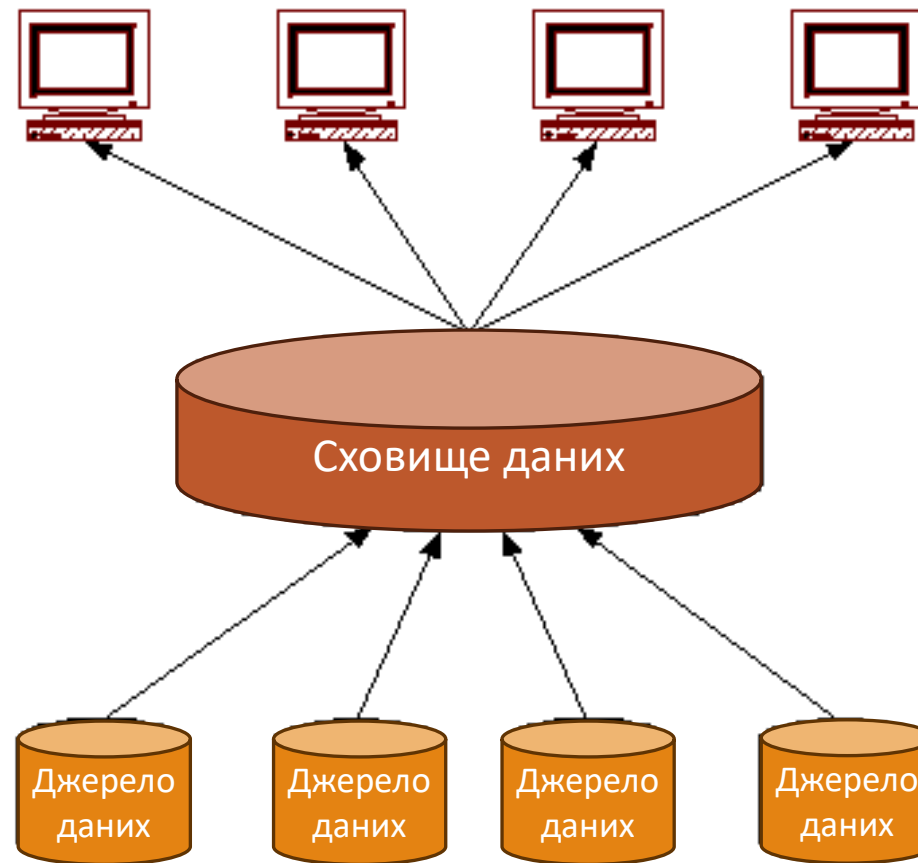
- Вітрини даних можна запроваджувати досить швидко.
- Вітрини проектується для відповідей на конкретний ряд питань.
- Дані у вітрині оптимізовані для використання певними групами користувачів, що полегшує процедури їх наповнення та сприяє підвищенню продуктивності.

Недоліки:

- Дані зберігаються багаторазово у різних вітринах даних. Це призводить до дублювання даних і, як наслідок, збільшення витрат на зберігання і потенційних проблем, пов'язаних з необхідністю підтримки несуперечності даних.
- Потенційно дуже складний процес наповнення вітрин даних за великої кількості джерел даних.
- Дані не консолідуються на рівні підприємства, отже, відсутня єдина картина бізнесу.

СППР на основі дворівневого сховища даних

Двохрівневе сховище даних будується централізовано для надання інформації у межах компанії. Для підтримки такої архітектури необхідна виділена команда професіоналів у галузі сховищ даних. Це означає, що вся організація має узгодити всі визначення та процеси перетворення даних.



Переваги:

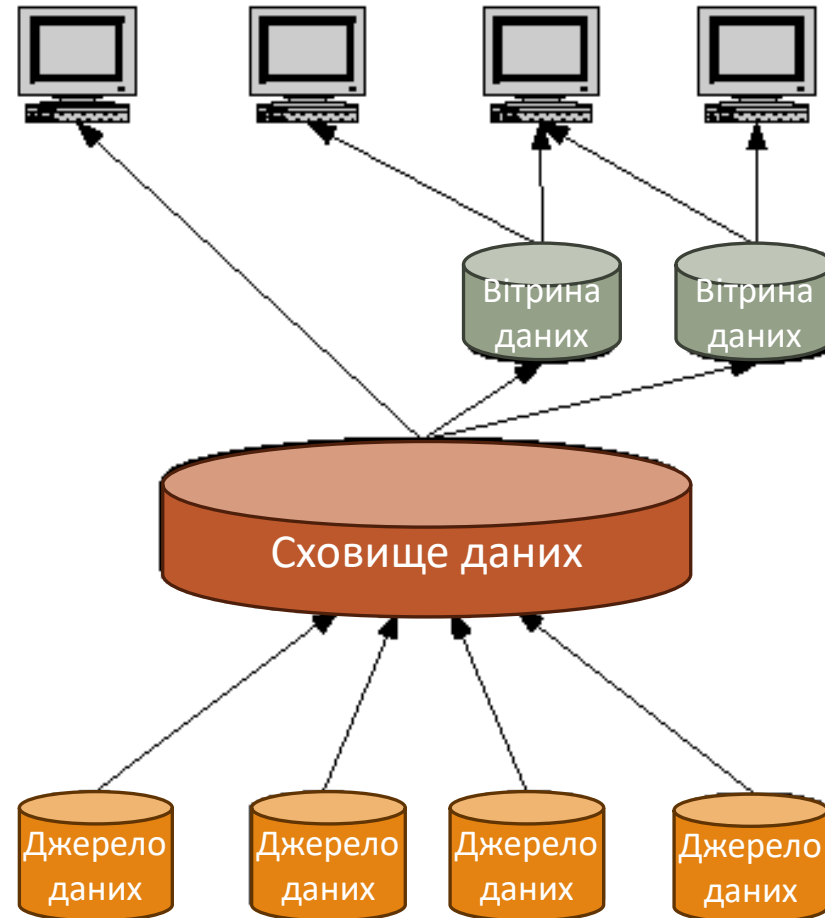
- Дані зберігаються у єдиному екземплярі;
- Мінімальні витрати на зберігання даних;
- Відсутні проблеми, пов'язані із синхронізацією кількох копій даних;
- Дані консолідуються лише на рівні підприємства, що дозволяє мати єдину картину бізнесу.

Недоліки:

- Дані не структуруються для підтримки потреб окремих користувачів чи груп користувачів;
- Можливі проблеми із продуктивністю системи;
- Можливі труднощі з розмежуванням прав користувачів доступу до даних.

СППР на основі трирівневого сховища даних

Сховище даних є єдиним централізованим джерелом корпоративної інформації. Вітрини даних представляють підмножини даних зі сховища, організовані на вирішення завдань окремих підрозділів підприємства.



Переваги:

- Створення та наповнення вітрин даних спрощено, оскільки наповнення надходить із єдиного стандартизованого надійного джерела очищених нормалізованих даних.
- Вітрини даних синхронізовані та сумісні з корпоративним поданням. Є корпоративна модель даних. Існує можливість порівняно легкого розширення сховища та додавання нових вітрин даних.
- Гарантована продуктивність.

Недоліки:

- Існує надмірність даних, що призведе до зростання вимог зберігання даних

Етапи проектування СППР

Існують різні підходи (школи) щодо створення СППР.

Школи аналізу рішень, числення рішень і дослідження рішень реалізують так званий **орієнтований на рішення підхід**, а школа процесу впровадження (реалізації) — відстоює метод, орієнтований на процес створення СППР. Інколи цей метод називають **еволюційним методом** розроблення.

На думку багатьох авторів, **орієнтований на рішення підхід здається найкращим для проектування СППР**. Методологія розроблення СППР у межах цього підходу включає три кроки:

1. Проведення орієнтованої на рішення діагностики.
2. Аналіз технічної здійснюваності проекту чи його техніко-економічне обґрунтування.
3. Розв'язання принципового питання: купувати готове чи створювати програмне забезпечення СППР.

Послідовність розробки та реалізації СППР

1. Формулювання постановки задачі

Постановка задачі оформляється як частина технічного завдання і містить такі елементи.

а) повну назву системи і її аббревіатуру, якщо передбачається її використання. Наприклад, повною назвою може бути «Комп'ютерна інформаційна система підтримки прийняття рішень при виконанні операцій на біржі», а скорочена – Стоктрейдер (StockTrader). Інші приклади: Econometric Views (Eviews); Statistical Analysis of Systems (SAS).

б) опис проблеми, стосовно якої необхідно приймати рішення.

в) попередній аналіз можливості розв'язання задачі за допомогою наявних (відомих) методів комп'ютерної підтримки, даних і знань. При цьому необхідно обов'язково врахувати свій попередній досвід проектування і реалізації систем, подібних до тієї, що проектується.

г) основний метод (методи) прийняття рішень та проектування альтернатив, який буде використано в СППР, наприклад: (1) на основі байєсівського підходу; (2) нечіткої логіки; (3) методу аналізу ієрархій; (4) послідовного перебору варіантів на основі деякого чисельного критерію.

д) типи моделей, критеріїв вибору моделей і рішень, які будуть використані в СППР.

2. Аналіз можливості реалізації СППР

Результати аналізу включають такі елементи:

- а) аналіз можливості технічної реалізації системи на наявних засобах обчислювальної техніки.
- б) наявність технологій розробки систем даного класу і досвіду створення та використання готового продукту.
- в) аналіз економічних можливостей, тобто, аналіз достатньої фінансової підтримки на всіх етапах розробки і реалізації системи.
- г) аналіз біхевіористичного ефекту, тобто в чому буде проявляться позитивний ефект від впровадження СППР в практику.
- д) аналіз можливостей реалізації системи включає також розробку календарного плану, який може корегуватись в подальшому і є частиною технічного завдання. Календарний план визначає послідовність виконання робіт в часі і дає можливість:
 - виявити роботи, які можуть виконуватись паралельно;
 - оптимізувати строки виконання проекту методами дослідження операцій;
 - корегувати навантаження на виконавців;
 - порівнювати плани робіт з планами раніше виконаних проектів.

3. Формулювання вимог до СППР

Вимоги до системи діляться на дві групи: вимоги користувача і функціональні вимоги. Обидві множини вимог можуть перетинатись, але краще записати вимогу два рази ніж пропустити її зовсім.

Вимоги користувача – формулюються виконавцем і узгоджуються із замовником.

Функціональні вимоги до системи – формулюються виконавцем на основі вимог та побажань замовника. Функціональні вимоги стосуються безпосередньо тих функцій, які буде виконувати система.

Вимоги до системи також представляються в технічному завданні.

4. Створення проекту СППР

На основі сформульованих вимог до системи створюється проект, основними елементами якого є такі:

а) остаточний вибір інструментальної системи для реалізації СППР. Вибір ґрунтується на *досвіді виконавця і замовника, наявних коштах і можливостях конкретного інструментарію.*

б) проект мовної системи (МС) містить такі елементи:

- всі види запитів до функцій системи в їх конкретному формулюванні та структурі;
- всі види запитів стосовно допомоги користувачу;
- можливі незначні відхилення від специфікацій, якщо дозволяють засоби реалізації системи; тобто, надання більше свободи користувачу при введенні запитів.

в) проект системи представлення результатів (СПР) повинен містити:

- всі види реакції системи на запити про допомогу користувачу;
- всі види реакції системи на запити щодо розв'язку задачі та представлення результатів із зазначенням типу представлення – текст, графік, таблиця, числа та комбіноване представлення;
- можливі незначні відхилення від специфікацій в залежності від конкретних інструментальних засобів, які використовуються для створення системи.

г) проект системи обробки даних та генерування результатів (СОДГР) повинен містити:

- опис всіх алгоритмів і правил обробки даних і знань;
- опис критеріїв вибору альтернатив;
- в якій формі та на яких носіях зберігаються процедури;
- можливі незначні відхилення від специфікацій, які дозволяють спростити застосування процедур і скоротити час на їх програмування.

д) проект системи зберігання даних і знань (СБДЗ) повинен містити:

- типи даних і знань, способи їх зберігання та доступу до них;
- специфікацію форматів даних і знань та їх узгодження з процедурами (алгоритмами), які їх використовують;
- можливі модифікації та розширення форматів;
- можливі відхилення від специфікацій.

5. Опис програмного забезпечення системи

Складається з опису програмних модулів, з яких буде компонуватись система і створюватись цілісний програмний продукт.

Опис модуля повинен обов'язково містити:

- ім'я модуля та його функціональне призначення;
- типи вхідних та вихідних даних (числові, лінгвістичні, змішані);
- допустимі формати даних;
- метод обробки даних, який реалізується модулем;
- вимоги до точності обчислень (якщо це необхідно);
- вимоги до швидкодії;
- метод (методику) забезпечення обчислювальної стійкості модуля;
- повідомлення, які може генерувати модуль в процесі виконання запрограмованої функції (наприклад, про неможливість завершити виконання операції, несумісність форматів даних).

6. Послідовність програмування модулів системи

Рекомендується така послідовність програмування модулів системи:

- програмування інтерфейсу (для того щоб врахувати вимоги замовника і продемонструвати йому зручність взаємодії з майбутньою системою, її можливості);
- програмування бази знань і даних;
- програмування функцій попередньої обробки даних;
- програмування процедур представлення результатів;
- програмування методів основної обробки даних з метою створення математичних моделей і генерування альтернатив;
- програмування (при необхідності) спеціальних драйверів вводу/виводу даних для нестандартних пристроїв.

7. Послідовність тестування системи

Тестування рекомендується розділяти на три фази: попереднє, загальне і остаточне:

- попереднє тестування стосується окремих модулів, якщо це можливо, і встановлюється принципова можливість виконання основних функцій системою в цілому;
- загальне тестування стосується узгодження функціонування всіх модулів в рамках однієї системи;
- остаточне тестування призначене для встановлення правильності і точності реалізації запрограмованих функцій в системі.

8. Підготовка інсталяційної версії і експлуатаційної документації

Головним документом цього етапу є керівництво для користувача стосовно інсталяції системи та послідовності виконання окремих функцій.

9. Впровадження системи на технічних засобах замовника

Описується послідовність дій стосовно інсталяції на технічних засобах замовника та початку експлуатації системи:

- інсталяція;
- навчання замовника;
- врахування особливостей (рівня) підготовки замовника, його готовності до експлуатації системи;
- врахування можливого організаційного опору – не всі члени команди замовника позитивно відносяться до новинок, особливо до тих, які можуть позбавити їх роботи.

8. Супровід СППР

Процес супроводу впровадженої системи включає в себе такі дії:

- остаточне виправлення помилок в системі на етапі її експлуатації;
- розширення та модифікація функцій;
- врахування додаткових побажань користувача (замовника);
- формулювання доповнень до керівництва користувача.

Створення прототипу СППР

Альтернативним шляхом проектування та реалізації СППР є створення спочатку її прототипу, який представляє собою модульну демонстраційну версію системи з частково реалізованими функціями.

Мета створення прототипу:

- підвищення рівня зацікавленості замовника в даній розробці;
- апробації основних ідей, які закладаються в систему (наприклад, тип інтерфейсу, методів генерування альтернатив та способів представлення результатів);
- прискорення в цілому процесу проектування та реалізації системи.

Рейтинг СППР:

<http://www.capterra.com/decision-support-software/>

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. Катренко А.В., Пасічник В.В. Прийняття рішень: теорія та практика: підручник. Львів: Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.
2. Файнзільберг Л. С., Жуковська О.А., Якимчук В.С. Теорія прийняття рішень: підручник. Освіта України, 2018. 246 с.
3. Негрей М., Тужик К. Теорія прийняття рішень. К.: Центр учбової літератури, 2018. 272 с.
4. Творошенко І.С. Технології прийняття рішень в інформаційних системах: навч. посіб. Харків: ХНУРЕ, 2021. 120 с.
5. Саричева Л.В., Сергеева К.Л. Комп'ютерна підтримка прийняття рішень: навч. посіб. Дніпро: НГУ, 2016. 99 с.
6. Практикум з теорії прийняття рішень: навч. посіб. / фвтор-уклад.: О.В. Присяжнюк. Кропивницький: ЦДПУ імені В.Винниченка, 2018. 76 с.
7. Мічківський С.М., Прігунов О.В., Римар П.В. Системи та методи прийняття рішень: метод. вказівки. Вінниця, ДонНУ імені Василя Стуса, 2019, 76 с.

Додаткова:

1. Полінкевич О.М., Волинець І.Г. Обґрунтування господарських рішень та оцінювання ризиків: навч. посіб. Луцьк: Вежа-Друк, 2018. 336 с.
2. Сметанко О.В. Моделі і методи прийняття рішень в аналізі та аудиті. К.: Центр учбової літератури, 2019. 456 с.
3. Про прийняття розумних рішень. Harvard Business Review. 10 найкращих статей. К.: КМ-Букс, 2018. 208 с.
4. Демиденко М.А. Системи підтримки прийняття рішень: навч. посіб. Д.: НГУ, 2016. 104 с.
5. Нестеренко О.В., Савенков О.І., Фаловський О.О. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень: навч. посіб.; за ред. П. І. Бідюка. К.: Національна академія управління, 2016. 188 с.
6. Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Носков В.І. Засоби та алгоритми прийняття рішень: навч.-метод. посіб. до практ. занять. Х.: НТМТ, 2013. 76 с.
7. Ніколіна І.І. Системи прийняття рішень: опорний конспект лекцій. Вінниця: ВТЕІ КНТЕУ, 2017. 108 с.

Інтернет ресурси:

1. Офіційний сайт компанії Banxia Software Ltd. URL: <https://banxia.com>
2. Офіційний сайт компанії Creative Decisions Foundation. URL: <http://www.superdecisions.com/>
3. Офіційний сайт компанії SpiceLogic Inc. URL: <https://www.spicelogic.com>
4. Бідюк П.І., Тимошук О.Л., Коваленко А.Є., Коршевнік Л.О. Системи і методи підтримки прийняття рішень: навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освітніми програмами «Системний аналіз та управління», «Системний аналіз фінансового ринку» спеціальності 124 «Системний аналіз». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 259 с. URL:

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42360/1/Bidiuk-et-al_SMPPR_PSBY20.pdf

5. Методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни «Технології та системи підтримки прийняття рішень» для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» зі спеціальності 126 Інформаційні системи та технології (освітньої програми «Web-технології, Webдизайн») усіх форм навчання / упоряд. Єгорова О. В.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси: ЧДТУ, 2020. 15 с. URL: <https://er.chdtu.edu.ua/bitstream/ChSTU/1608/1/19-5-24-%d0%9f.pdf>

6. Технології та системи підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності. Практикум для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» зі спеціальностей 122 Комп'ютерні науки та 126 Інформаційні системи та технології усіх форм навчання / упоряд. Єгорова О.В.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси: ЧДТУ, 2019. 90 с. URL: <https://er.chdtu.edu.ua/bitstream/ChSTU/1022/1/18-17-5-286.pdf>