МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

Р. М. Трохимчук

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ З МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Київ
ДП «Видавничий дім «Персонал»
2008

ББК 22.12я73
Т76

Рецензенти: *С. Л. Кривий*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
В. П. Шевченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.
І. В. Бейко, д-р техн. наук, проф.

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 1 від 31.01.07)

Трохимчук, Р. М.
Т76 Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.
ISBN 978-966-608-854-6

Збірник містить ретельно відібраний і систематизований набір відомих і оригінальних задач і вправ з класичних розділів математичної або формальної логіки: алгебра висловлень, числення висловлень і логіка предикатів. Кожному розділу передує короткий теоретичний вступ, де подано основні означення і терміни. Цей збірник можна використовувати як для проведення аудиторної роботи, так і для організації самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Для студентів університетів, інших вищих навчальних закладів і всіх, хто бажає здобути фундаментальні знання в галузі сучасної інформатики.

ББК 22.12я73

ISBN 978-966-608-854-6

ПЕРЕДМОВА

Термін “логіка” походить від грецького λογοξ, що означає “слово, що виражає думку” або “поняття”, “вчення” чи “міркування”. Саме аналізуючи зв’язок слова та думки, мови та міркувань, стародавні (переважно давньогрецькі) мислителі створили логіку — науку про способи мислення, що ведуть до істини, або науку про закони і форми правильного мислення.

Логічні закони і правила побудови коректних міркувань почали формуватись у далеку давнину, коли в людини з’явилась потреба обмінюватись досвідом і знаннями, обґрунтовувати свої думки, робити правильні висновки з певних посилань або гіпотез. Важливо підкреслити, що ці правила і процедури проведення коректних міркувань не залежать від конкретного змісту посилань і висновків, а також від жодних суб’єктивних (настрій, емоції, рівень інтелекту або рівень освіти, ставлення до підсумку умовиводу тощо) чи зовнішніх (погода, пора року, місце чи умови перебування особи тощо) чинників, а залежать лише від форми вираження цих міркувань і є загальними для всіх міркувань тієї самої форми, безвідносно до того, про що в них ідеться.

Так з’явилась так звана формальна логіка. Вважають, що формальна логіка як учення про умовивід і доведення, виникла більше двох з половиною тисяч років тому в Давній Греції. Найповніше її принципи й положення викладено у працях видатного давньогрецького вченого і філософа Арістотеля (384–322 рр. до н. е.) та його учнів і послідовників.

Досягнувши відносно високого ступеня досконалості, арістотелева логіка багато століть по тому на відміну від математики практично не розвивалась. Вона була обов’язковою складовою гарної освіти і слугувала переважно як інструмент для обґрунтування різного роду тверджень (часто, як у випадку середньовічної схоластики, досить сумнівних).

Новий етап в історії формальної логіки датують серединою XIX століття, коли було опубліковано головні праці визначного англійського математика Джорджа Буля (1815–1864), в яких він наблизив логіку до математики і заклав основи математичної логіки.

Характерною особливістю математичної логіки є використання математичної мови символів, операцій, формул, обчислення, числень, рівносильних перетворень тощо.

Розуміння формальних методів і моделей, уміння ними користуватися, знання й володіння законами математичної логіки є необхідним етапом у процесі вивчення та засвоєння інформатики, мов і методів програмування для ЕОМ, важливим елементом сучасної освіти та сучасного наукового мислення і практики. В епоху комп'ютеризації усіх сфер людського буття — виробництва, економіки, наукових досліджень, освіти, побуту — знання основ математичної логіки необхідне для формування фахівця в будь-якій галузі діяльності, розвинення в нього аналітичного й творчого мислення, ефективного використання обчислювальної техніки.

Вивчення й засвоєння мови та методів сучасної формальної логіки сприятиме набуттю навичок правильних міркувань і переконливої аргументації, чіткого формулювання думок і висновків, формування загальної культури мислення. Ці навички потрібні не тільки студентам природничих факультетів, вони корисні й необхідні в будь-яких сферах людської діяльності, оскільки логіка є окремою науковою дисципліною і водночас інструментом будь-якої науки. Елементи математичної логіки, безумовно, слід викладати в сучасній середній школі поряд з іншими дисциплінами.

Сьогодні курс математичної або формальної логіки входить до навчальних програм багатьох факультетів (як природничих, так і гуманітарних) усіх університетів та інших вищих навчальних закладів. Головною метою цього курсу є набуття навичок правильних міркувань і коректних доведень, уміння чітко й аргументовано формулювати й обґрунтовувати свої думки та висновки, розвинення загальної культури мислення тощо.

Формування таких навичок і вмінь немислиме без активних індивідуальних дій, без набуття самостійного досвіду і практики у процесі розв'язування задач. Тому для глибокого й усебічного засвоєння курсу математичної логіки надзвичайно важливо використовувати достатньо широкий і представницький набір різноманітних логічних задач.

Пропонований навчальний посібник містить ретельно відібране і добре впорядковане зібрання як відомих, так і оригінальних задач і вправ з класичних розділів математичної логіки: алгебра висловлень, числення висловлень і логіка предикатів. Кожний розділ розпочинається з короткого теоретичного вступу, де подано потрібні означення й терміни і наведено корисні й характерні приклади. Тому цей збірник зручний як для проведення аудиторної роботи, так і для організації самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Збірник містить широкий діапазон задач: від простих вправ до достатньо складних і нетривіальних проблем. Це дає змогу викладачеві гнучко регулювати темп і рівень практичних занять, швидко та якісно проводити поточний і загальний контроль знань студентів, організовувати індивідуальну та самостійну роботу студентів.

Матеріал посібника повністю відповідає як навчальній програмі дисципліни “Теорія алгоритмів і математична логіка”, так і відомим “Рекомендаціям з викладання інформатики в університетах”, розробленим, пропагованим і впроваджуваним авторитетними міжнародними комітетами й фахівцями.

Зміст цього навчального посібника орієнтовано переважно на курс математичної логіки для природничих факультетів, однак значну частину збірника можна використовувати для проведення практичної, самостійної та індивідуальної роботи й для студентів гуманітарних факультетів.

1. ПОНЯТТЯ ВИСЛОВЛЕННЯ. ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ. СКЛАДЕНІ ВИСЛОВЛЕННЯ

Просте (елементарне) висловлення (висловлювання) — це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити питання про його правильність або неправильність.

Прості висловлення, в яких виражено правильну думку, називатимемо **істинними**, а ті, що виражають неправильну, — **хибними**.

Звичайно елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, ... (можливо, з індексами), а значення висловлень "Істинно" і "Хибно" — відповідно символами 1 і 0 (або I і X).

Окрім того, розглядатимемо так звані **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, ... (можливо, з індексами) і називатимемо також **пропозиційними змінними**. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення: 0 або 1.

Над висловленнями можна виконувати такі логічні операції: **кон'юнкцію**, **диз'юнкцію, заперечення, імплікацію** та **еквівалентність**.

У табл. 1 наведено різні назви та позначення, що їх використовують для цих операцій.

Таблиця 1

Назва	Позначення
Кон'юнкція (логічне множення, логічне "І")	$\wedge$ & $\cdot$
Диз'юнкція (логічне додавання, логічне "АБО")	$\vee$
Заперечення (логічне "НІ")	$\neg$ $\bar{\ }$ $'$
Імплікація (логічне слідування)	$\rightarrow$ $\supset$ $\Rightarrow$
Еквівалентність (рівнозначність)	$\sim$ $\leftrightarrow$ $\equiv$

Використовуватимемо перші з наведених назв і позначень. Табл. 2 містить означення цих операцій.

Таблиця 2

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

З елементарних висловлень і пропозиційних змінних за допомогою означених операцій і дужок утворюють **складені висловлення**, яким відповідають формули або вирази.

Зауважимо, що символам логічних операцій відповідають у звичайній мові такі вирази:

$\wedge$ — “і”; “та”; “а”; “але”; “хоч”; “разом з”; “незважаючи на”; ...

$\vee$ — “або”; “чи”; “хоч (принаймні) одне з”; ...

$\neg$ — “не”; “неправильно, що”; ...

$\to$ — “якщо (коли) ..., то (тоді)...”; “... імплікує ...”; “з ... слідує (випливає) ...”;“у разі ... має місце ...”; ...

~ — “... тоді й тільки тоді, коли ...”; “... якщо і тільки якщо ...”; “... еквівалентне ...”; “... рівносильне ...” тощо.

У математичній мові імплікацію $p \to q$ трактують так: твердження p є достатньою умовою для q, а твердження q є необхідною умовою для твердження p. Вираз $p \to q$ інтерпретують ще як “q тоді, коли p” або “p тільки тоді, коли q”. В імплікації $p \to q$ операнд p називають **антецедентом**, або посилкою, а q — **консеквентом**, або висновком.

Використовуючи пропозиційні змінні та символи логічних операцій, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, тобто перетворити на формулу, яка виражатиме його **логічну структуру**. Наприклад, висловлення “Якщо число 24 кратне 2 і 3, то число 24 кратне 6” має таку логічну структуру: $(a \wedge b) \to c$.

1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме — істинним чи хибним.

(а) Число 357 кратне 7.

(б) Для будь-яких дійсних чисел x і y виконується нерівність $x^2 + y^2 \geq 0$.

(в) Сонце зійшло.

(г) Чи існує ціле число, більше за 2 і менше від $\log_2 9$?

(д) Весна — найкраща пора року.

(е) Виходячи з кімнати, вимикайте світло.

(є) Київ — столиця України.

(ж) $7 < 7$.

(з) $7 \leq 7$.

(и) $2 \times 2 = 4$.

(і) Існує опуклий многокутник з чотирма гострими кутами.

(ї) Не існує найбільшого простого числа.

(й) Чи існує найменше просте число?

(к) Рівняння $x^3 - 7x - 6 = 0$ має принаймні один дійсний корінь.
(л) "Учітесь, читайте, і чужому научайтесь, й свого не цурайтесь" (*Т. Шевченко*).
(м) Викладач процитував: "Учітесь, читайте, і чужому научайтесь, й свого не цурайтесь" (*Т. Шевченко*).
(н) Бісектриса трикутника ділить його площу на рівновеликі частини.
(о) Будь-яке число кратне 6 є кратним 2.
(п) Будьте уважні та взаємно ввічливі.
(р) Відношення перпендикулярності прямих — антирефлексивне.
(с) Це речення розміщено на сторінці з парним номером.
(т) Це речення складається з шести слів.
(у) Нехай усе буде гаразд.
(ф) Хай живе кібернетика!
(х) Число 7 менше Евересту.
(ц) Справджується нерівність $x < 2$.
(ч) Нерівність $3 < 2$ хибна.
(ш) Нерівність $2 < 3$ хибна.
(щ) Це висловлення — хибне.

2. Записати по два речення, які є істинними висловленнями, хибними висловленнями, а також такі, що не є висловленнями.

3. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, виходячи з відомих значень істинності простих висловлень, з яких воно складається.

(а) Число 777 кратне 7, але не кратне 11.
(б) Число 36 кратне 6 або 7.
(в) Принаймні одне з чисел 21, 24 чи 27 парне.
(г) $-2 > -3$ і $(-1/2) > (-1/3)$.
(д) $-2 > -3$, але $(-2)^2 < (-3)^2$.
(е) Якщо $2 < 3$, то $2^2 < 3^2$.
(є) Якщо $4 < 3$, то $4^2 < 3^2$.
(ж) Якщо число 24 кратне 6, то число 24 кратне 3.
(з) Якщо число 27 кратне 6, то число 27 кратне 3.
(и) Якщо число 27 кратне 3, то число 27 кратне 6.
(і) Якщо $2 < 3$ і $3 < 1$, то $2 < 1$.
(ї) 144 кратне 24 тоді і тільки тоді, коли 144 кратне 8 і 144 кратне 3.

(й) 144 кратне 48 тоді і тільки тоді, коли 144 кратне 8 і 144 кратне 6.

(к) 72 кратне 48 тоді і тільки тоді, коли 72 кратне 8 і 72 кратне 6.

(л) Неправильно, що $2 < 3$ і $4 < 3$.

(м) Число 187 кратне 11 і 17, але не кратне 19.

(н) Неправильно, що принаймні одне з чисел 35, 57, 77 просте.

(о) Неправильно, що виконується хоч одна з нерівностей $2 < 3$ чи $3 < 2$.

(п) Чотирикутник $ABCD$ є прямокутником тоді, коли його діагоналі рівні.

(р) Чотирикутник $ABCD$ є прямокутником тільки тоді, коли його діагоналі рівні.

4. Нехай задано елементарні висловлення:

a — “7 — ціле число”; c — “7 — просте число”;

b — “7 — від’ємне число”; d — “Число 7 кратне 3”.

Сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність.

(а) $a \wedge b$; (г) $(a \vee c) \to b$; (є) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$;

(б) $a \vee b$; (д) $(a \vee (b \wedge d)) \to \neg c$; (ж) $(b \to \neg a) \vee c$;

(в) $a \to \neg b$; (е) $(\neg a \vee \neg d) \sim b$; (з) $(\neg a \to \neg c) \wedge b$.

5. Записати логічну структуру складеного висловлення та визначити його істинність.

(а) Якщо $3 > 2$, то $3 \geq 2$.

(б) Якщо $3 > 2$ і $2 \geq 1$, то $3 \geq 1$.

(в) Якщо $3 > 2$ і $2 > 4$, то $3 > 4$.

(г) Якщо $3 > 2$ і $2 < 4$, то $3 < 4$.

(д) Якщо число 31 парне і більше 2, то воно не є простим.

(е) Число 24 кратне 3 і 7 або число 24 кратне 6 чи 7.

(є) Число 24 кратне або 5, або 6, або 7.

(ж) Число 7007 кратне 1001 тоді й тільки тоді, коли воно кратне 7, 11 і 13.

(з) Якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні, то він є ромбом.

(и) Неправильно, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо його діагоналі взаємно перпендикулярні.

(і) Число 72 кратне 24 тільки тоді, коли 72 кратне 6 і кратне 4.

(ї) Неправильно, що число 35 не кратне 21 тоді й тільки тоді, коли 35 не кратне 3 і не кратне 7.

(й) Число 1001 кратне 143 тоді й тільки тоді, коли 1001 кратне 11 і кратне 13, але 1001 не кратне 143 тоді й тільки тоді, коли 1001 не кратне 11 або не кратне 13.

(к) Відношення R є еквівалентністю тільки тоді, коли воно рефлексивне і транзитивне.

6. Визначити, чи мають складені висловлення 1 і 2 однакову логічну структуру.

(а) 1) Якщо відношення R рефлексивне і симетричне, то R толерантне. 2) Якщо число 72 кратне 6 і 8, то воно кратне 48.

(б) 1) Нерівність $2 < |3|$ рівносильна сукупності нерівностей $2 < 3$ або $3 < -2$. 2) Співвідношення $x \in A \cup B$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x \in A$ чи $x \in B$.

(в) 1) Квадрат $ABCD$ є ромбом і прямокутником. 2) Неправильно, що множина раціональних чисел Q є щільною і континуальною.

(г) 1) Якщо число 24 кратне 6 або число 24 кратне 3, то число 24 кратне 18. 2) Якщо $x \in A$ або $x \in B$, то $x \in A$.

7. Чи правильне твердження: “Якщо логічні структури двох складених висловлень збігаються, то вони мають ті самі значення істинності”? Відповідь обґрунтувати.

8. Для наведеного виразу придумайте два складені висловлення (істинне і хибне), які він формалізує:

(а) $\neg(a \to b)$; (в) $\neg(a \wedge b) \to (\neg a \sim b)$;

(б) $\neg a \to (b \wedge c)$; (г) $(a \vee b) \to (\neg a \sim \neg b)$.

9. Записати у вигляді формули дане твердження, позначаючи прості висловлення буквами, і визначити його істинність чи хибність.

(а) Чотирикутник $ABCD$ — квадрат тільки тоді, коли він рівносторонній.

(б) Чотирикутник $ABCD$ — квадрат тоді, коли він є прямокутником.

(в) Чотирикутник $ABCD$ — квадрат тільки тоді, коли він рівносторонній і його діагоналі взаємно перпендикулярні.

(г) Чотирикутник $ABCD$ — квадрат тоді, коли він рівносторонній і його діагоналі взаємно перпендикулярні.

(д) Для того щоб паралелограм $ABCD$ був ромбом, необхідно, але недостатньо, щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярні.

(е) Умова $R^\circ R \subseteq R$ є достатньою, щоб відношення R було транзитивним.

(є) Умова $\mathrm{Pr}_1 R = \mathrm{Pr}_2 R$ є необхідною, але недостатньою, щоб відношення R було симетричним.

(ж) Число 17 просте тільки тоді, коли воно непарне.

(з) Число 15 просте тоді, коли воно непарне.

(и) Число 35 кратне 10 тоді, коли воно кратне 5.

(і) Для того щоб число 35 було кратне 5, достатньо, але не необхідно, щоб 35 було кратне 10.

(ї) Необхідною і достатньою умовою подільності числа 70 на 10 є подільність 70 на 5 і на 2.

(й) Необхідною і достатньою умовою подільності числа 36 на 24 є подільність 36 на 6 і на 4.

(к) $x^2 - 5x + 6 = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 2$ або $x = 3$.

(л) Умова, що непорожня частково впорядкована множина M є скінченною, є достатньою, але не необхідною, щоб множина M містила мінімальний і максимальний елементи.

(м) Для того щоб об'єднання $R_1 \cup R_2$ двох відношень було рефлексивним, необхідно і достатньо, щоб обидва відношення R_1 і R_2 були рефлексивними.

10. Визначити значення істинності висловлень a, b, c, d, якщо висловлення 1) і 2) — істинні, а висловлення 3) і 4) — хибні.

1) Якщо 7 — просте число, то a.
2) Якщо b, то 7 — складене число.
3) Якщо 7 — просте число, то c.
4) Якщо d, то 7 — складене число.

11. Записати твердження логіко-математичною символікою і визначити його істинність чи хибність.

(а) Якщо 72 кратне 24, то 72 кратне 8, а якщо 72 не кратне 8, то 72 не кратне 24.

(б) Якщо 72 кратне 24, то 72 кратне 8.

(в) Якщо 78 кратне 24, то 78 кратне 8.

(г) $x^2 > 9$ тоді й тільки тоді, коли $x > 3$ або $x < -3$.

(д) $x^2 > 9$ тоді й тільки тоді, коли $x > 3$ і $x < -3$.

(е) $x^2 < 9$ тоді й тільки тоді, коли $x < 3$ і $x > -3$.

(є) $x^2 < 9$ тоді й тільки тоді, коли $x < 3$ або $x > -3$.

12. Сформулювати наведене твердження у вигляді "Якщо ..., то ...".

(а) Із нерівності $x < 3$ випливає нерівність $x \leq 3$.

(б) Я успішно складу іспит з математичної логіки тоді, коли регулярно виконуватиму домашні завдання.
(в) Необхідно знати означення понять, щоб правильно зрозуміти формулювання математичної задачі.
(г) Щоб чотирикутник $ABCD$ був ромбом, достатньо, щоб він був квадратом.
(д) Число 24 кратне 6 тільки тоді, коли воно кратне 3.
(е) Симетричність відношення R є необхідною умовою для того, щоб відношення R було толерантним.
(є) Умова $x \in A$ достатня, щоб виконувалось співвідношення $x \in A \cup B$.

13. Записати словами у вигляді твердження дану імплікацію чотирма різними способами, використовуючи вирази: “необхідна умова”, “достатня умова”, “тоді, коли”, “тільки тоді, коли”.
(а) (Чотирикутник $ABCD$ — ромб) $\to$ (Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм);
(б) (24 кратне 6) $\to$ (24 кратне 3);
(в) $(n > 2) \to (n \geq 2)$;
(г) $(n = 3) \to (n \leq 3)$;
(д) (R — толерантне відношення) $\to$ (R — симетричне відношення);
(е) $(a < -2) \to (a^2 > 4)$;
(є) $(2 > 3) \to (1 > 2)$;
(ж) $(x \in A \cap B) \to (x \in A)$;
(з) $(x \in A) \to (x \in A \cup B)$;
(и) $(a \leq 4) \to (a < 5)$;
(і) (M — зліченна множина) $\to$ (M — нескінченна множина);
(ї) $(A \subseteq B) \to (|A| \leq |B|)$.

14. Використовуючи терміни “антецедент” і “консеквент”, сформулювати:
(а) достатню, але не необхідну умову істинності імплікації;
(б) необхідну, але не достатню умову хибності імплікації;
(в) необхідну і достатню умову істинності імплікації;
(г) необхідну і достатню умову хибності імплікації.

15. Визначити, яке з тверджень 1 або 2 є умовою необхідною, достатньою або необхідною і достатньою для іншого твердження.
(а) 1) Числова множина M нескінченна. 2) Числова множина M щільна.

(б) 1) $x \notin B$. 2) $x \in A \setminus B$.
(в) 1) $A \subseteq B$. 2) $A \cup B = B$.
(г) 1) $C \subseteq A \cup B$. 2) $C \subseteq A$ і $C \subseteq B$.
(д) 1) $C \subseteq A \cap B$. 2) $C \subseteq A$ і $C \subseteq B$.
(е) 1) $A \cup B \subseteq C$. 2) $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$.
(є) 1) $A \cap B \subseteq C$. 2) $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$.
(ж) 1) Числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена і монотонна. 2) Числова послідовність $\{x_n\}$ збіжна.
(з) 1) Число 42 кратне 14. 2) Число 42 кратне 7.
(и) 1) Для рефлексивного відношення R виконується $R^{-1} = R$. 2) R — толерантне відношення.
(і) 1) Чотирикутник $ABCD$ — квадрат. 2) Чотирикутник $ABCD$ рівносторонній і його діагоналі взаємно перпендикулярні.
(ї) 1) $A \subseteq B$. 2) $|A| \leq |B|$.

16. Із трьох елементарних висловлень a, b, c побудувати складене висловлення, що є істинним тоді й тільки тоді, коли:
(а) істинними є всі три висловлення a, b, c;
(б) істинним є принаймні одне з висловлень a, b, c;
(в) істинним є тільки одне з висловлень a, b, c;
(г) a — істинне, а b або c — хибні висловлення;
(д) a і b — хибні, а c — істинне висловлення;
(е) a або c — істинні, а b — хибне висловлення;
(є) хибними є всі три висловлення a, b, c.

17. Із хибної нерівності $1 > 2$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення, вивести:
(а) хибну нерівність $5 > 7$;
(б) правильну нерівність $5 < 7$.

18. Із хибної рівності $2 \times 2 = 5$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення, вивести:
(а) хибну рівність $3 \times 3 = 8$;
(б) правильну рівність $2 \times 3 = 6$.

2. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ. ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ. ТАБЛИЦЯ ІСТИННОСТІ. ТАВТОЛОГІЇ. ПРОБЛЕМА РОЗВ'ЯЗНОСТІ

Носієм алгебри висловлень є множина висловлень.

Сигнатура алгебри висловлень традиційно складається з означених вище операцій: **кон'юнкції**, **диз'юнкції, заперечення, імплікації** та **еквівалентності**. Застосовуючи до елементарних висловлень і пропозиційних змінних ці операції, діставатимемо складені висловлення, яким відповідатимуть так звані формули або вирази алгебри висловлень. Для того щоб записати ці формули, дослідити їх властивості та співвідношення між формулами та висловленнями, використовують формальні мови, тобто певні множини слів у деякому алфавіті.

Алфавіт найпоширенішої формальної мови алгебри висловлень складається з трьох груп символів:

1) символи елементарних висловлень і пропозиційних змінних: $a, b, c, \ldots$ і $x, y, z, \ldots$ (можливо, з індексами);

2) символи операцій: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \sim$;

3) допоміжні символи — круглі дужки: (і).

Із символів цього алфавіту будують пропозиційні формули або просто **формули** алгебри висловлень за таким індуктивним правилом:

1) усі пропозиційні змінні та елементарні висловлення є формулами;

2) якщо A і B — формули, то вирази $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ також є формулами (для всіх цих виразів формули A і B є підформулами);

3) інших формул, ніж побудовані за правилами 1) і 2), немає.

Формули алгебри висловлень позначатимемо великими латинськими літерами.

Кожна формула A зображує форму або схему складеного висловлення: вона перетворюється на висловлення, якщо замість її пропозиційних змінних підставити будь-які висловлення. Оскільки кожне з підставлених висловлень має значення 0 або 1, то, послідовно обчислюючи значення всіх підформул формули A, одержимо значення формули A на цьому наборі висловлень, яке дорівнюватиме 0 або 1. Підставляючи у формулу A замість її пропозиційних змінних інший набір висловлень, аналогічно обчислимо нове значення формули A і т. д. Оскільки кожне з висловлень набору повністю характеризується своїм значенням (істинно або хибно, тобто 1 або 0), то замість пропозиційних змінних у формулу можна підставляти не самі висловлення, а їхні значення — 1 або 0.

Нехай $p_1, p_2, ..., p_n$ — усі пропозиційні змінні, що входять до формули A; позначатимемо цей факт $A(p_1, p_2, ..., p_n)$. Формулі $A(p_1, p_2, ..., p_n)$ поставимо у відповідність функцію $f(p_1, p_2, ..., p_n)$, що означена на множині B^n ($B = \{0, 1\}$) і набуває значення у множині B, тобто функцію типу $B^n \to B$. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, ..., a_n$ її змінних $p_1, p_2, ..., p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, ..., p_n)$ при підстановці в неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, ..., p_n$ значень $a_1, a_2, ..., a_n$ відповідно. Зауважимо, що кількість елементів в області визначення функції f дорівнює 2^n.

Функцію f називають **функцією істинності** для формули A або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати так звану **таблицю істинності** (табл. 3). Традиційно набори значень змінних розміщують у цій таблиці в лексикографічному порядку.

Таблиця 3

p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n	$f(p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, ..., 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, ..., 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, ..., 1, 0)$
0	0	...	1	1	$f(0, 0, ..., 1, 1)$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
1	1	...	1	0	$f(1, 1, ..., 1, 0)$
1	1	...	1	1	$f(1, 1, ..., 1, 1)$

Формулу алгебри висловлень $A(p_1, p_2, ..., p_n)$ називають **тавтологією**, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює 1. Те, що формула A є тавтологією, позначають так: $\models A$.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами**, або **законами** алгебри висловлень.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \vee (\neg p))$ (закон виключення третього);

$(\neg(p \wedge (\neg p)))$ (закон виключення суперечності);

$(p \to p)$ (закон тотожності).

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності.

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула A **сильніша, ніж** B, а формула B **слабша, ніж** A.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою так званого **способу відшукання контрприкладу** (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладах.

Нехай потрібно перевірити, чи є тавтологією формула

$A = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg c)$.

Припустімо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення 0. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою операцією формули A є імплікація, то її консеквент має дорівнювати нулю, а антецедент — одиниці. Тоді $a = 0$ і $c = 1$. Звідси $(a \to \neg b) = 1$ і $(\neg c \to \neg a) = 1$. Залишилось з'ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \to (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна. Отже, ми знайшли набір (0, 0, 1), на якому формула A набуває значення 0, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією.

У разі, коли при спробі відшукати контрприклад для певної формули A приходимо до суперечності, можемо стверджувати, що A — тавтологія.

Наприклад, для формули

$B = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg b)$,

яка є дещо зміненим варіантом попередньої формули A, матимемо $a = 0$ і $b = 1$, тобто $(a \to \neg b) = 1$, $(\neg c \to \neg a) = 1$, однак $(b \to (a \wedge c)) = 0$, що суперечить припущенню $(b \to (a \wedge c)) = 1$. Отже, формула B — тавтологія.

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, ..., p_n)$, яка набуває значення 0 на всіх наборах $(a_1, a_2, ..., a_n)$ значень своїх пропозиційних змінних, називається **суперечністю**, або **тотожно хибною формулою**.

Формулу, яка не є ані тавтологією, ані суперечністю, називають **нейтральною**.

Множина всіх формул алгебри висловлень розбивається на тавтології, суперечності та нейтральні формули.

Формула, яка не є суперечністю, називається **виконуваною**, інакше — **невиконуваною**.

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. З метою зменшити кількість дужок у формулах випускають зовнішні дужки і запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, ~ (у порядку спадання). Часто у формулах алгебри висловлень випускають знак кон'юнкції $\wedge$ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Проблема розв'язності (вирішення) в алгебрі висловлень — це задача знаходження алгоритму, за допомогою якого для будь-якої формули A алгебри висловлень можна визначити є A тотожно істинною (тавтологією) чи ні.

Для алгебри висловлень цю проблему можна, зокрема, розв'язати двома способами:

1) побудувати таблицю істинності для формули A і перевірити, чи складається стовпчик значень A лише з одиниць;

2) застосувати спосіб відшукання контрприкладу.

Аналогічно можна сформулювати і вирішити проблему розв'язності для визначення того, що певна формула алгебри висловлень є суперечністю чи виконуваною.

1. Визначити, чи є наведена послідовність символів формулою алгебри висловлень:

(а) $(((x \to y) \wedge z) \sim ((\neg x) \to (y \vee z)))$;
(б) $(((\neg x) \sim ((\neg y) + 1)) \to (x \vee 5y))$;
(в) $((\neg xy) \to (x \sim ((\neg y) \vee x)$;
(г) $(((\neg y) \sim (x \wedge (\neg z))) \to ((\neg y) \vee x))$;
(д) $(((((x \to y) \sim (\neg z)) \vee x) \wedge (\neg y)))$.

2. Виписати всі підформули наведеної формули:

(а) $(((x \to (\neg y)) \wedge (\neg z)) \sim ((\neg x) \to (x \wedge z)))$;
(б) $((((y \vee (\neg z)) \to (y \wedge z)) \sim ((\neg y) \wedge x))$;
(в) $((z \to (\neg y)) \wedge ((\neg x) \vee (\neg(y \vee (\neg x)))))$;
(г) $(((((\neg z) \sim (\neg(x \to (\neg y)))) \sim z) \vee y) \wedge x)$.

3. Довести, що будь-яку формулу C алгебри висловлень, яка не є пропозиційною змінною, можна зобразити в одному з таких виглядів: $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \to B)$ або $(A \sim B)$, де A і B — якісь формули алгебри висловлень.

4. Довести, що коли у формулі A алгебри висловлень підставити замість якоїсь пропозиційної змінної p формулу B, то отримаємо формулу алгебри висловлень.

5. Довести, що коли у формулі A алгебри висловлень замінити деяку підформулу B на формулу C, то отримаємо формулу алгебри висловлень.

6. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі.

(а) $(((y \sim (\neg z)) \wedge (\neg x)) \rightarrow ((\neg z) \sim (x \wedge y)))$;

(б) $(((x \rightarrow (\neg y)) \rightarrow (y \wedge ((\neg z) \rightarrow x))) \sim (\neg x))$;

(в) $((x \rightarrow (\neg y)) \sim ((\neg x) \vee (\neg(z \rightarrow (\neg y)))))$;

(г) $(((((\neg x) \rightarrow (\neg(y \sim (\neg z)))) \sim x) \vee ((\neg x) \wedge z)) \vee y)$.

7. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі з урахуванням їх пріоритетів.

(а) $(a \rightarrow \neg b) \vee (\neg a \sim c) \wedge b \vee (c \rightarrow \neg(a \sim b))$;

(б) $(a \rightarrow \neg((b \vee c) \wedge \neg a)) \rightarrow (\neg c \vee b) \wedge a \sim \neg(a \rightarrow \neg b)$;

(в) $(\neg a \rightarrow \neg b) \wedge (a \vee \neg c \vee (a \sim \neg b) \wedge c)$;

(г) $((\neg b \sim (c \vee \neg a \wedge \neg b)) \rightarrow (\neg a \wedge \neg(c \sim b))) \wedge a$.

8. Порівняти послідовність виконання операцій у формулах.

(а) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ і $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow c)$;

(б) $(a \rightarrow (b \vee c)) \rightarrow \neg(b \vee c)$ і $a \rightarrow ((b \vee c) \rightarrow \neg(b \vee c))$;

(в) $(a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c))$ і $((a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)$.

9. Знайти значення істинності формули.

(а) $(a \sim b) \wedge ((\neg c \rightarrow b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))$ при $a = 0, b = 0, c = 0$;

(б) $((b \rightarrow a) \wedge (\neg c \vee (a \sim \neg b))) \rightarrow (a \wedge (d \vee \neg b))$ при $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$;

(в) $\neg a \wedge (a \sim c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \rightarrow a))$ при $a = 1, b = 0, c = 1$;

(г) $(\neg(a \sim b) \wedge (c \rightarrow \neg a)) \vee (b \sim c)$ при $a = 0, b = 1, c = 0$;

(д) $((a \rightarrow \neg b) \wedge b) \rightarrow ((\neg c \vee a) \sim b)$ при $a = 1, b = 0, c = 0$.

10. Знайти значення істинності складеного висловлення.

(а) "Якщо ми успішно складемо іспити (a), то поїдемо відпочивати до моря (b), і ми або успішно складемо іспити, або здійснимо турпохід у Карпатах (c) тоді й тільки тоді, коли погода буде гарною (d)". Значення істинності елементарних висловлень такі: $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$.

(б) "Якщо ми успішно виконаємо домашнє завдання з математичної логіки (a), ми отримаємо заліковий бал (b) або візьмемо участь у науковому семінарі (c), водночас якщо ми візьмемо участь у науковому семінарі і отримаємо заліковий бал, то достроково складемо іспит з математичної логіки (d)". Значення істинності елементарних висловлень такі: $a = 0, b = 1, c = 0$, $d = 1$.

11. Скласти таблицю істинності для формули алгебри висловлень.

(а) $(a \to \neg(b \wedge c)) \to (c \to \neg a)$;
(б) $((\neg a \vee b) \sim (a \wedge \neg c)) \vee (a \to b)$;
(в) $((a \to b) \sim (b \to \neg c)) \to (c \wedge a)$;
(г) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;
(д) $(a \sim \neg b) \wedge ((a \wedge b) \to (\neg a \wedge \neg b))$;
(е) $(\neg a \to (b \sim \neg c)) \wedge (a \vee (\neg b \to c) \vee \neg b)$;
(є) $(a \to \neg(b \wedge \neg a)) \vee (a \sim (\neg b \to \neg a))$.

12. Скільки рядків містить таблиця істинності для формули алгебри висловлень $(a \vee b \vee c) \to d$? Не складаючи таблиці істинності, визначити, на скількох наборах ця формула набуває значення 0.

13. Скільки рядків містить таблиця істинності для формули алгебри висловлень A? Не складаючи таблиці істинності, визначити, на скількох наборах формула A набуватиме значення 1.

(а) $A = a \to (b \vee c \vee d)$;
(б) $A = a \to (b \wedge c \wedge d)$;
(в) $A = (a \vee b) \to (c \vee d)$;
(г) $A = (a \wedge b \wedge \neg c) \to (d \vee \neg e \vee f)$;
(д) $A = p_1 \to (p_2 \vee p_3 \vee ... \vee p_n)$;
(е) $A = (p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_{n-1}) \to p_n$.

14. Скільки існує різних таблиць істинності для формули алгебри висловлень, що містить n пропозиційних змінних і набуває значення 1 тільки на k наборах ($k \le 2^n$)?

15. Формула F алгебри висловлень містить 10 пропозиційних змінних $p_1, p_2, ..., p_{10}$. Визначити порядковий номер (рахуючи від нуля) того рядка таблиці істинності для F, в якому:

(а) p_5 має значення 1, а решта змінних p_i мають значення 0;
(б) p_3, p_4 і p_6 мають значення 1, а решта змінних p_i мають значення 0;
(в) p_5, p_6 і p_{10} мають значення 1, а решта змінних p_i мають значення 0;
(г) p_1 і p_7 мають значення 1, а решта змінних p_i мають значення 0.

16. Побудувати таблицю істинності і показати, що наведена формула алгебри висловлень є тотожно істинною (тавтологією).

(а) $\neg a \vee \neg b \vee a \wedge b$;
(б) $(a \to \neg a) \to \neg a$;
(в) $a \to (b \to a)$;
(г) $a \to (a \vee b)$;
(д) $(\neg a \to a) \to a$;
(е) $(a \wedge b) \to a$;
(є) $(a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to b)$;
(ж) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;
(з) $((a \to b) \to a) \to a$;
(и) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c))$;
(і) $(a \to (a \to b)) \to (a \to b)$;
(ї) $(a \to \neg b) \to (b \to \neg a)$.

17. Способом відшукання контрприкладу встановити, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією.

(а) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;
(б) $(a \to (b \to c)) \to ((d \to a) \to (d \to (b \to c)))$;
(в) $(a \to (b \to c)) \to ((c \to d) \to (a \to (b \to d)))$;
(г) $(a \vee b) \to ((a \to c) \wedge (b \to d) \to (c \vee d))$;
(д) $(a \to (b \to c)) \to ((d \to b) \to (a \to (d \to c)))$;
(е) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;
(є) $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c)))$;
(ж) $(a \to (b \wedge \neg b)) \to \neg a$.

18. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$ є тавтологією (транзитивна властивість імплікації). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

19. Довести, що формула $((a \sim b) \wedge (b \sim c)) \to (a \sim c)$ є тавтологією (транзитивна властивість еквівалентності). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \sim c) \to ((a \sim b) \wedge (b \sim c))$?

20. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

21. Довести, що формула $(a \to b) \wedge (b \to c) \to (a \to (b \wedge c))$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \to (b \wedge c)) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

22. Різними способами показати, що наведена формула алгебри висловлень не є тавтологією.

(а) $(a \to b) \to (b \to a)$;
(б) $((a \wedge b) \to c) \sim ((a \to b) \to c)$;
(в) $(a \to b) \sim (\neg a \to \neg b)$;
(г) $(a \to b) \sim ((a \to c) \to (b \to c))$;

(д) $(a \sim (b \wedge c)) \sim ((a \sim b) \wedge (a \sim c))$;
(е) $(a \to (a \to b)) \to (b \sim a)$.

23. Перевірити (довести чи спростувати), що задана формула алгебри висловлень є тавтологією.
(а) $((a \to b) \to (c \to d)) \to ((a \to c) \to (b \to d))$;
(б) $(a \to b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to d) \to (a \to b \wedge c \wedge d)$;
(в) $(a \to (b \to c)) \to ((c \to d) \to (a \to (b \to d)))$;
(г) $(b \to (a \to (b \to c))) \to (a \to c)$;
(д) $((a \to b) \vee (c \to b)) \sim ((a \wedge c) \to b)$;
(е) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$.

24. Порівняти формули A і B. Переконатись, що одна з цих формул є тавтологією, а інша — ні.
(а) $A = a \to ((a \to b) \to b)$,
$B = (a \to (a \to b)) \to b$;
(б) $A = ((a \to b) \to (a \to \neg b)) \to \neg a$,
$B = (a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$;
(в) $A = (b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$,
$B = ((b \to c) \to (a \to b)) \to (a \to c)$;
(г) $A = (a \to b) \to ((a \to c) \to ((a \wedge b) \to c))$,
$B = ((a \to b) \to (a \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$;
(д) $A = b \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$,
$B = b \to (a \to (b \to c))) \to (a \to c$
(е) $A = (a \to b) \to ((\neg a \to b) \to b)$,
$B = ((a \to b) \to (\neg a \to b)) \to b$.

25. Показати, що наведена формула алгебри висловлень є виконуваною.
(а) $(a \to (b \to \neg b)) \wedge (a \to c) \vee (a \wedge \neg c)$;
(б) $(a \to b) \wedge (a \to \neg b) \wedge (b \to c) \wedge (b \to \neg c) \wedge (c \to a) \wedge (c \to \neg a)$;
(в) $(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee c) \vee (a \to \neg b)$.

26. Переконатися, що наведена формула алгебри висловлень є суперечністю.
(а) $\neg((a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to b))$;
(б) $(a \vee b) \sim (\neg a \wedge (b \to \neg b))$;
(в) $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge (a \wedge \neg c)$;
(г) $\neg b \wedge a \wedge (a \to b)$;
(д) $a \wedge b \wedge (\neg a \vee \neg b)$;
(е) $(a \vee \neg a) \to (b \wedge \neg b)$.

27. Довести, що формула A алгебри висловлень є сильнішою від формули B.

(а) $A = (a \to c) \wedge (b \to c)$, $B = (a \wedge b) \to c$;

(б) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to c$;

(в) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to (b \wedge c)$;

(г) $A = (a \sim b) \wedge (b \sim c)$, $B = a \sim c$;

(д) $A = a \to (b \to c)$, $B = (a \to b) \to (a \to c)$.

28. Довести, що будь-яка суперечність сильніша, ніж будь-яка тавтологія.

29. Довести, що довільна формула алгебри висловлень сильніша, ніж будь-яка тавтологія.

30. Довести, що будь-яка суперечність сильніша, ніж довільна формула алгебри висловлень.

31. Довести, що формула $A \sim B$ є тавтологією тоді й тільки тоді, коли формула A сильніша, ніж B, і формула B сильніша, ніж A.

32. Визначити, чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією, суперечністю чи нейтральною.

(а) $((a \vee b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c))$;

(б) $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \wedge (b \to c))$;

(в) $(a \wedge c \vee b \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(г) $(a \wedge b \vee c \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(д) $((a \sim b) \to (c \sim d)) \to ((a \vee c) \sim (b \vee d))$;

(е) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge d))$;

(є) $((a \to b) \wedge a \wedge b) \sim ((a \to b) \wedge a)$;

(ж) $((\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge a) \to \neg c$;

(з) $(a \to b) \to ((c \sim d) \to ((a \vee c) \sim (b \vee d)))$;

(и) $(a \wedge b \wedge (a \to b)) \sim a$;

(і) $((a \wedge c) \to (b \wedge d)) \to ((a \to b) \wedge (c \to d))$.

33. Чи може тавтологія містити тільки операції з множини $\{\vee, \wedge\}$? Відповідь обґрунтувати.

34. Чи може суперечність містити тільки операції з множини $\{\vee, \wedge, \sim, \to\}$? Відповідь обґрунтувати.

35. Довести, що будь-яка формула алгебри висловлень, операціями якої є тільки операції з множини $\{\vee, \wedge\}$, є нейтральною.

36. Довести, що довільна формула алгебри висловлень, яка містить із символів логічних операцій лише $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, є виконуваною.

37. Довести, що формула алгебри висловлень A, яка містить тільки операцію еквівалентності $\sim$, є тавтологією тоді й тільки тоді, коли кожна пропозиційна змінна входить в A парну кількість разів.

38. Довести твердження.

(а) Заперечення тавтології є суперечністю, і навпаки.

(б) Кожна тавтологія є виконуваною формулою. Чи правильним є обернене твердження?

(в) Кожна нейтральна формула є виконуваною. Чи правильне обернене твердження?

(г) Заперечення виконуваної формули може бути як виконуваною формулою, так і невиконуваною.

39. Довести чи спростувати твердження.

(а) Із двох формул A і $\neg A$ алгебри висловлень принаймні одна — тавтологія.

(б) Якщо A і B — тавтології, то $A \wedge B$ — тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(в) Якщо A і B — тавтології, то $A \vee B$ — тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(г) Якщо A і B — тавтології, то $A \rightarrow B$ — тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо формула $A \sim B$ — тавтологія, то A і B — тавтології. Чи правильне обернене твердження?

40. Довести чи спростувати твердження.

(а) Якщо A — виконувана формула алгебри висловлень, то формула $\neg A$ є невиконуваною.

(б) Формула A невиконувана тоді й тільки тоді, коли A — суперечність.

(в) Із двох формул A і $\neg A$ алгебри висловлень хоч одна є виконуваною.

(г) Якщо A і B — виконувані формули, то $A \wedge B$ — виконувана. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо A і B — виконувані формули, то $A \vee B$ — виконувана. Чи є правильним обернене твердження?

(е) Якщо $A \rightarrow B$ — виконувана формула, то A і B — виконувані. Чи правильне обернене твердження?

(є) Якщо $A \sim B$ — виконувана формула, то A і B — виконувані. Чи правильне обернене твердження?

41. Довести, що коли формула алгебри висловлень $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k$ виконувана, то виконуваною є кожна з формул A_i, $i = 1, 2, ..., k$. Чи правильне обернене твердження?

42. Довести, що формула алгебри висловлень $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_k$ виконувана тоді й тільки тоді, коли виконуваною є принаймні одна з формул A_i, $i = 1, 2, ..., k$.

43. Довести чи спростувати твердження.
(а) Якщо A — нейтральна формула алгебри висловлень, то формула $\neg A$ також є нейтральною.
(б) Із двох формул A і $\neg A$ алгебри висловлень принаймні одна є нейтральною.
(в) Якщо A і B — нейтральні формули, то формула $A \wedge B$ нейтральна. Чи правильне обернене твердження?
(г) Якщо A і B — нейтральні формули, то формула $A \vee B$ нейтральна. Чи правильне обернене твердження?
(д) Якщо A і B — нейтральні формули, то формула $A \rightarrow B$ нейтральна.
(е) Якщо $A \rightarrow B$ — нейтральна формула, то формули A і B нейтральні.
(є) Якщо $A \sim B$ — нейтральна формула, то формули A і B нейтральні. Чи правильним є обернене твердження?

44. Довести, що коли $\models A(a)$, де a — пропозиційна змінна, то $\models A(B)$, де B — довільна формула алгебри висловлень, а через $A(B)$ позначено формулу, отриману з $A(a)$ після підстановки формули B замість усіх входжень a (*теорема про підстановку*). Чи правильне обернене твердження? Відповідь обґрунтувати.

45. Довести, що коли $\models A(B)$, де B — підформула формули A і при цьому $\models B \sim C$, то $\models A(C)$, де $A(C)$ — формула, отримана з $A(B)$ заміною підформули B формулою C (*теорема про заміну*). Чи буде твердження правильним, якщо замість умови $\models B \sim C$ записати $\models B \rightarrow C$? Відповідь обґрунтувати.

46. Довести твердження.
(а) Якщо A і $A \rightarrow B$ — тавтології, то B — тавтологія (правило висновку або правило modus ponens (MP)).

(б) Якщо $A \to B$ і $\neg B$ — тавтології, то $\neg A$ — тавтологія (правило заперечення або правило modus tolens).

(в) Якщо $A \vee B$ і $\neg A$ — тавтології, то B — тавтологія (правило диз'юнктивного силогізму).

(г) Якщо $A \to B$ і $B \to C$ — тавтології, то $A \to C$ — тавтологія (правило ланцюгового висновку).

(д) Якщо $A \to B$ і $A \to \neg B$ — тавтології, то $\neg A$ — тавтологія (метод доведення від супротивного).

47. Довести твердження.

(а) Якщо $(A \vee B)$ і $(\neg A \vee C)$ — тавтології, то $(B \vee C)$ — тавтологія.

(б) Якщо формули $(A \vee B)$, $(A \to C)$ і $(B \to D)$ — тавтології, то $(C \vee D)$ — тавтологія.

(в) Якщо $(\neg A \vee B)$ і $(\neg B \vee \neg C)$ — тавтології, то $(A \to \neg C)$ — тавтологія.

48. Довести, що для довільних формул $A_1, A_2, ..., A_k$ алгебри висловлень формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k) \to A_i$ є тавтологією для будь-якого $i = 1, 2, ..., k$.

49. Довести, що для довільних формул $A_1, A_2, ..., A_k$ алгебри висловлень формула $A_i \to (A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_k)$ є тавтологією для будь-якого $i = 1, 2, ..., k$.

50. Довести, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією.

(а) $(a \to b) \sim (\neg a \vee b)$;

(б) $(a \sim b) \sim ((a \to b) \wedge (b \to a))$;

(в) $\neg(a \wedge b) \sim (\neg a \vee \neg b)$;

(г) $\neg(a \vee b) \sim (\neg a \wedge \neg b)$;

(д) $(a \to c) \wedge (b \to c) \sim ((a \vee b) \to c)$;

(е) $(a \to b) \wedge (a \to c) \sim (a \to (b \wedge c))$;

(є) $(a \sim b) \sim ((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b))$;

(ж) $(a \sim b) \sim ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$;

(з) $(a \to b) \to ((a \wedge b) \sim a)$;

(и) $(a \to b) \to ((a \vee b) \sim b)$.

51. Сформулювати означення та алгоритми, які розв'язують проблему вирішення для перевірки виконуваності певної формули алгебри висловлень.

52. Сформулювати означення та алгоритми, які розв'язують проблему вирішення для перевірки того, чи є певна формула алгебри висловлень суперечністю (невиконуваною).

53. Відомо, що A — тавтологія. Що можна стверджувати про формулу:

(а) $\neg A$;

(б) $A \to B$;

(в) $B \to A$;

(г) $\neg A \to B$;

(д) $B \to \neg A$,

де B — довільна формула алгебри висловлень?

54. Про формулу A відомо, що вона не є тавтологією. Що можна стверджувати про формулу $\neg A$?

55. Відомо, що A — суперечність. Що можна сказати про формулу:

(а) $\neg A$;

(б) $A \to B$;

(в) $B \to A$;

(г) $\neg A \to B$;

(д) $B \to \neg A$,

де B — довільна формула алгебри висловлень?

56. Відомо, що формула $A \to B$ є суперечністю. Що можна стверджувати про формули A і B?

57. Нехай $\models A$ і $\models A \to B$. Чи можна стверджувати, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією?

(а) B;

(б) $\neg A \to \neg B$;

(в) $\neg B \to \neg A$;

(г) $A \to (A \to B)$;

(д) $A \to (\neg A \to B)$.

58. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ — суперечністю. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

59. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ нейтральна. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

60. Формула $A \sim B$ є суперечністю. Що можна стверджувати про формули $\neg A \sim B$ і $\neg A \sim \neg B$?

61. Відомо, що $\models A \to \neg A$. Що можна сказати про формулу A?

62. Відомо, що $\models B \to C$. Чи можна стверджувати, що для довільної формули A алгебри висловлень формула $(A \to B) \to (A \to C)$ є тавтологією?

63. Відомо, що формула A сильніша, ніж B, і B — суперечність. Що можна сказати про формулу A?

64. Відомо, що формула алгебри висловлень B виконувана і сильніша, ніж A. Довести, що формула A також виконувана.

65. Дано, що B — виконувана формула алгебри висловлень і $\models A \to \neg B$. Довести, що формула A не є тавтологією.

66. Різними способами показати, що формула алгебри висловлень $(a \to (b \to c)) \to (\neg(b \to c)) \to (a \to \neg a)$ є тавтологією.

67. Різними способами показати, що формула алгебри висловлень $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a \wedge \neg c$ є суперечністю.

68. Різними способами показати, що формула алгебри висловлень $((a \wedge c \to \neg b) \vee (a \wedge c \to b)) \to ((\neg a \wedge \neg c \to a) \wedge (\neg b \wedge c \wedge d))$ виконувана.

69. Різними способами показати, що формула алгебри висловлень $(a \wedge b \to c) \wedge (a \wedge c \to d) \to (a \wedge b \to c \wedge d)$ не є тавтологією.

70. Різними способами довести чи спростувати твердження, що формула алгебри висловлень $((a \sim d) \vee (b \to c)) \to ((a \to b) \vee \vee (c \to d))$ є тавтологією.

71. Різними способами довести чи спростувати твердження, що наведена формула є суперечністю.

(а) $(a \to b) \wedge (a \to c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge a$;

(б) $(a \to b) \wedge (b \to c) \wedge \neg(a \sim c)$;

(в) $((a \wedge b \to \neg c) \vee (a \wedge b \to c)) \to ((\neg a \wedge \neg b \to a) \wedge (b \wedge \neg c \wedge d))$;

(г) $(a \to (b \to \neg b)) \wedge (a \to c) \vee (a \wedge \neg c)$.

72. Способом відшукання контрприкладу переконатись, що формула алгебри висловлень $(b \to a) \vee (a \wedge \neg b) \wedge ((a \to b) \sim (\neg b \wedge \wedge (a \to c))) \wedge \neg c$ не є ані тавтологією, ані суперечністю.

73. Довести, що формула алгебри висловлень $A_1(p_1, p_2, ..., p_n) \to \to (A_2(p_1, p_2, ..., p_n) \to (... (A_{m-1}(p_1, p_2, ..., p_n) \to A_m(p_1, p_2, ..., p_n))...)$ є суперечністю тоді й тільки тоді, коли формули $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ є тавтологіями, а A_m — суперечністю.

74. Побудувати формулу алгебри висловлень A, що залежить від пропозиційних змінних a, b, c і для якої наведена формула буде тавтологією.

(а) $(((A \wedge b) \to \neg a) \to ((a \to \neg b) \to A))$;
(б) $((a \wedge A) \to (a \wedge b)) \to ((a \vee A) \to (a \vee c))$;
(в) $(((c \to (\neg b \wedge a)) \to A) \to (A \wedge ((a \to b) \to c)))$;
(г) $((c \to A) \to (c \to (a \wedge b))) \to ((A \to c) \to (A \wedge (\neg(a \vee b) \to c)))$.

3. РІВНОСИЛЬНІ ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ

Формули A і B алгебри висловлень називають **рівносильними**, якщо їм відповідає та сама функція істинності. Рівносильність формул A і B позначають за допомогою знака $\equiv$ (= або $\leftrightarrow$): записують $A \equiv B$.

Неважко переконатись, що відношення рівносильності на множині формул є відношенням еквівалентності, тому часто це відношення називають еквівалентністю.

Рівносильність формул можна перевірити укладанням таблиць істинності відповідних функцій і порівнюванням цих таблиць.

Рівносильним перетворенням формули A називається дія або процедура, в результаті якої дістаємо формулу B, рівносильну формулі A.

1. Довести, що відношення рівносильності має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності, тобто є еквівалентністю.

2. Довести основні тотожності (рівносильності) алгебри висловлень.

(а) $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ (асоціативність);
(б) $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ (комутативність);
(в) $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (дистрибутивність);
(г) $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ (ідемпотентність);
(д) $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$, $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ (закони де Моргана);
(е) $\neg\neg a \equiv a$ (закон подвійного заперечення);
(є) $a \vee 0 \equiv a$, $a \wedge 1 \equiv a$;
(ж) $a \vee 1 \equiv 1$, $a \wedge 0 \equiv 0$ (властивості елементів 0 і 1);
(з) $a \vee \neg a \equiv 1$, $a \wedge \neg a \equiv 0$ (властивості заперечення).

3. Довести таку рівносильність (правило поглинання):

(а) $a \vee (a \wedge b) \equiv a$;

(б) $a \wedge (a \vee b) \equiv a$.

4. Довести, що формули алгебри висловлень A і B рівносильні тоді й тільки тоді, коли рівносильні їхні заперечення $\neg A$ і $\neg B$.

5. Нехай a — деяка пропозиційна змінна формул $A(a)$ і $B(a)$, C — довільна формула алгебри висловлень. Довести, що коли $A(a) \equiv B(a)$, тоді $A(C) \equiv B(C)$, де останні дві формули отримано в результаті підстановки формули C замість усіх входжень змінної a у формулах A і B (*правило підстановки*).

6. Нехай C — деяка підформула формул $A(C)$ і $B(C)$. Довести, що коли $A(C) \equiv B(C)$ і $D \equiv C$, то $A(D) \equiv B(D)$, де останні дві формули отримано заміною в $A(C)$ і $B(C)$ підформули C формулою D (*правило заміни*).

7. Довести, що з рівносильностей $A_1 \equiv A_2$ і $B_1 \equiv B_2$ випливає така тотожність:

(а) $A_1 \vee B_1 \equiv A_2 \vee B_2$;

(б) $A_1 \wedge B_1 \equiv A_2 \wedge B_2$;

(в) $A_1 \rightarrow B_1 \equiv A_2 \rightarrow B_2$;

(г) $A_1 \sim B_1 \equiv A_2 \sim B_2$.

8. Довести, що для довільних формул A, B і C алгебри висловлень виконується рівносильність:

(а) $(A \sim A) \equiv (B \sim B)$;

(б) $(A \sim B) \equiv (B \sim A)$;

(в) $(A \sim (B \sim C)) \equiv ((A \sim B) \sim C)$.

9. Довести таку рівносильність алгебри висловлень:

(а) $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$;

(б) $a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$;

(в) $a \sim b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$;

(г) $a \sim b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$;

(д) $a \sim b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$;

(е) $a \sim b \equiv \neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg(\neg a \wedge b)$.

10. Використавши тотожності попередньої задачі та властивості відношення рівносильності, замінити наведену формулу алгебри висловлень рівносильною, що не містить символів ~ і →.

(а) $\neg(a \rightarrow b) \sim (\neg a \rightarrow \neg b)$;

(б) $\neg(a \to b) \sim (\neg b \to a)$;
(в) $\neg((a \sim b) \wedge a) \to b$;
(г) $(\neg a \to b) \sim ((\neg b \to a) \vee \neg a)$.

11. За допомогою рівносильних перетворень звести наведену формулу до такої, що містить лише операції з множини $\{\vee, \wedge, \neg\}$.
(а) $(a \to \neg(b \wedge c)) \sim (c \to \neg a)$;
(б) $((\neg a \vee c) \sim (a \sim \neg c)) \vee (a \to b)$;
(в) $((a \to c) \sim (b \to \neg c)) \sim (a \wedge b)$;
(г) $(a \to c) \sim ((b \vee \neg c) \to (a \sim c))$.

12. Обґрунтувати твердження, що будь-яку формулу алгебри висловлень, яка містить лише операції з множини $\{\vee, \wedge, \neg\}$, можна перетворити до рівносильної формули, в якій операція заперечення стосуватиметься тільки елементарних висловлень.

13. Довести, що для будь-якої формули алгебри висловлень існує рівносильна формула, операціями якої є:
(а) $\vee, \wedge, \neg$;
(б) $\vee, \neg$;
(в) $\wedge, \neg$.

14. Побудувати всі можливі таблиці істинності унарних і бінарних операцій алгебри висловлень. Виразити у вигляді рівносильностей операції, відмінні від кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення, імплікації та еквівалентності, через названі операції.

15. Довести таку рівносильність:
(а) $a \vee b \equiv \neg a \to b$;
(б) $a \wedge b \equiv \neg(a \to \neg b)$;
(в) $\neg a \equiv a \to \neg a$;
(г) $a \sim b \equiv \neg((a \to b) \to \neg(b \to a))$.

16. Чи можна стверджувати, що для будь-якої формули алгебри висловлень існує рівносильна формула, операціями якої є тільки імплікація і заперечення? Відповідь обґрунтувати.

17. Довести таку рівносильність:
(а) $a \wedge \neg b \vee \neg a \wedge b \equiv (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$;
(б) $a \vee b \vee c \vee d \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \to d$;
(в) $(a \wedge b) \to c \equiv (a \wedge \neg c) \to \neg b$;
(г) $(a \sim b) \wedge (a \wedge \neg b \vee b) \equiv a \wedge b$;
(д) $(a \to b) \wedge a \wedge b \equiv (a \to b) \wedge a$;

(е) $(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \equiv a$;
(є) $(a \vee b) \to \neg b \equiv \neg b$.

18. Довести таку рівносильність:
(а) $(a \vee b) \to c \equiv (\neg a \to b) \to c$;
(б) $(a \to c) \wedge (b \to c) \equiv ((a \vee b) \to c)$;
(в) $(a \to b) \wedge (a \to c) \equiv a \to (b \wedge c)$;
(г) $(a \to (b \to c)) \equiv ((a \wedge b) \to c)$.

19. Довести, що формули алгебри висловлень $(a \wedge b) \to c$, $(a \wedge \neg c) \to \neg b$, $(b \wedge \neg c) \to \neg a$ і $a \to (b \to c)$ рівносильні.

20. Визначити, яка з наведених чотирьох формул рівносильна формулі $\neg(a \to b)$.
1) $\neg a \to \neg b$;
2) $a \to \neg b$;
3) $\neg a \to b$;
4) $a \wedge \neg b$.

21. Довести, що $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$ (*закон контрапозиції*).

22. Довести, що заперечення висловлення "p є необхідною і достатньою умовою для q" рівносильне висловленню "p є необхідною і достатньою умовою для $\neg q$".

23. Визначити, яке з наведених висловлень рівносильне запереченню висловлення "p є необхідною і достатньою умовою для q":
1) "p є необхідною, але недостатньою умовою для q";
2) "p є достатньою, але не необхідною умовою для q";
3) "p не є необхідною і не є достатньою умовою для q";
4) "Або p не є необхідною, або p не є достатньою умовою для q".

24. Використовуючи основні тотожності алгебри висловлень (задача 3.2) і властивості відношення рівносильності, довести тотожність.
(а) $(a \wedge b \to c) \to (a \to c) \equiv \neg a \vee b \vee c$;
(б) $(a \to b) \vee (a \to c) \to (a \to (b \to c)) \equiv \neg a \vee \neg b \vee c$;
(в) $a \vee b \vee c \vee d \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \to d$;
(г) $(a \wedge b \to c) \to (c \to a \wedge b) \equiv (c \to a) \wedge (c \to b)$.

25. Довести, що $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \equiv a \wedge c \vee a \wedge d \vee b \wedge c \vee b \wedge d$.

26. Узагальнити рівносильність попередньої задачі на випадок, коли в її лівій частині записано таку кон'юнкцію: $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge \wedge (y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n)$ (*правило "перехресного множення"*).

27. Довести, що
$((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \equiv ((a \vee c \;\; \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d))$.

28. Узагальнити рівносильність попередньої задачі на випадок, коли її ліва частина має такий вигляд: $(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge \wedge ... \wedge y_n)$ (*правило "перехресного додавання"*).

29. Довести чи спростувати рівносильність.
$(a \wedge b \vee c \wedge d) \wedge (e \wedge g \vee h \wedge f) \equiv (a \wedge e \vee g \wedge h) \wedge (b \wedge c \vee d \wedge f)$.

30. Перевірити (довести або спростувати), чи виконується така рівносильність:
(а) $\neg(a \sim \neg b) \equiv a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b$;
(б) $(a \vee c) \to (b \vee d) \equiv (a \to b) \wedge (c \to d)$;
(в) $a \to (a \sim b) \equiv (a \to b)$;
(г) $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$;
(д) $(a \vee b \vee \neg c) \to a \equiv (b \to a) \wedge (\neg a \to c)$;
(е) $((a \vee b \;\; \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee d)) \equiv ((a \wedge d) \vee (b \wedge c))$;
(є) $(a \wedge (a \vee c \;\; \wedge (b \vee c)) \equiv ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$;
(ж) $((a \vee b \;\; \wedge (a \vee \neg b)) \equiv a$;
(з) $((a \wedge b) \vee ((a \vee b \;\; \wedge (\neg a \vee \neg b)) \equiv (a \vee b$;
(и) $(a \vee (\neg a \wedge b)) \equiv (a \vee b$.

31. За допомогою рівносильних перетворень звести наведену формулу алгебри висловлень до простішої, число логічних операцій в якій дорівнює k.
(а) $a \wedge b \wedge \neg c \vee a \wedge \neg b \wedge c \vee a \wedge b \wedge c \quad (k = 2)$;
(б) $(\neg(a \vee b) \to (a \wedge b \wedge \neg c)) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \quad (k = 2)$;
(в) $a \wedge c \vee \neg b \wedge c \vee \neg a \wedge b \vee a \wedge \neg c \quad (k = 2)$;
(г) $\neg(a \to b) \vee \neg(c \to b) \vee \neg b \quad (k = 1)$;
(д) $a \wedge \neg b \vee a \wedge c \vee (\neg a \to c) \vee a \vee \neg b \wedge c \quad (k = 1)$;
(е) $\neg(a \to b) \wedge \neg(a \wedge b) \vee b \quad (k = 1)$;
(є) $a \wedge b \vee \neg a \wedge c \vee a \quad (k = 1)$;
(ж) $\neg a \wedge b \vee a \wedge \neg b \vee a \wedge b \quad (k = 1)$;
(з) $((a \to b) \to \neg b) \to (a \wedge \neg b) \quad (k = 1)$;
(и) $(a \to b) \wedge (a \vee b \wedge c) \wedge (a \to c) \vee c \quad (k = 1)$;
(і) $(a \vee b) \wedge (b \to a) \vee b \wedge c \vee a \wedge b \vee b \wedge \neg c \quad (k = 1)$;
(ї) $a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b \vee a \wedge \neg b \quad (k = 1)$;
(й) $(\neg(c \to \neg b) \vee \neg b \wedge a \vee b \wedge \neg c) \to \neg a \quad (k = 1)$;
(к) $(a \vee (b \to c)) \wedge (a \vee (\neg b \to c)) \wedge (a \vee (\neg c \to d)) \quad (k = 1)$;
(л) $(a \vee b) \wedge (b \to a) \vee \neg(a \to c) \quad (k = 0)$.

32. Визначити, які з наведених висловлень логічно рівносильні.

1) Якщо $x \in A$, то $y \in B$;
3) Якщо $x \in A$, то $y \notin B$;
2) Якщо $y \in B$, то $x \notin A$;
4) Якщо $y \notin B$, то $x \notin A$.

33. Дано два складені висловлення:

1) Якщо один доданок кратний 3 і сума кратна 3, то й другий доданок кратний 3.
2) Якщо один доданок кратний 3, а другий доданок не кратний 3, то сума не кратна 3.

Записати ці висловлення формально і визначити, чи вони рівносильні.

34. Перевірити, чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі пари тверджень:

(а) "Якщо *a*, то *b*" і "Якщо неправильно, що *b*, то неправильно, що *a*".
(б) "Якщо *a*, то *b*" і "Якщо неправильно, що *a*, то неправильно, що *b*".
(в) "Якщо *a*, то *b*" і "Неправильно, що *a*, і неправильно, що $\neg b$".
(г) "З *a* випливає *b*" і "*a* тільки тоді, коли *b*".
(д) "*b* випливає з *a*" і "$\neg b$ — достатня умова для $\neg a$".
(е) "*b* — необхідна умова для *a*" і "*b* тільки тоді, коли *a*".
(є) "*b* — необхідна умова для *a*" і "$\neg b$ — достатня умова для $\neg a$".
(ж) "Неправильно, що *a* і *b*" і "Неправильно, що *a*, або неправильно, що *b*".
(з) "Неправильно, що *a* або *b*" і "Неправильно, що *a*, і неправильно, що *b*".
(и) "Неправильно, що *a* і $\neg b$" і "Неправильно, що *a*, або справджується *b*".
(і) "Неправильно, що *a* тоді й тільки тоді, коли *b*" і "$\neg a$ тоді й тільки тоді, коли $\neg b$".
(ї) "Неправильно, що *a* тоді й тільки тоді, коли *b*" і "Неправильно, що *a* тоді, коли *b*, і неправильно, що *a* тільки тоді, коли *b*".

35. Визначити, які з наведених висловлень логічно рівносильні.

1) Студент розв'язав цю задачу, але не склав іспит з математичної логіки.
2) Студент розв'язав цю задачу або не склав іспит з математичної логіки.
3) Неправильно, що студент не розв'язав цю задачу або склав іспит з математичної логіки.

4) Студент розв'язав цю задачу і склав іспит з математичної логіки або він не розв'язав цю задачу і не склав іспит з математичної логіки.
5) Якщо студент склав іспит з математичної логіки, то він розв'язав цю задачу.
6) Студент склав іспит з математичної логіки тоді й тільки тоді, коли він розв'язав цю задачу.

36. Застосовуючи рівносильність $a \to b \equiv \neg a \vee b$, переформулювати твердження.

(а) Якщо число n кратне 3 і n кратне 8, то n кратне 24.
(б) Якщо $x^2 - 5x + 6 = 0$, то $x = 2$ або $x = 3$.
(в) Якщо трикутник ABC — правильний, то він рівнобедрений.
(г) Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$.
(д) Якщо $x \in A \cap B$, то $x \in A$.
(е) Якщо $a \leq 4$, то $a < 5$.

37. Застосовуючи закони де Моргана, замінити твердження логічно рівносильним.

(а) Неправильно, що 24 кратне 3 і кратне 5.
(б) Неправильно, що 5 або 7 є дільником числа 24.
(в) Неправильно, що x є елементом множини A або елементом множини B.
(г) Неправильно, що x є елементом множини A і елементом множини B.
(д) Неправильно, що 0 або 1 є коренем рівняння $x^3 - 2x + 3 = 0$.

38. Виходячи з означення рівності множин, сформулювати умову нерівності множин, використавши закон де Моргана.

39. Виходячи з означення рівності двох векторів, сформулювати умову нерівності векторів, використавши закон де Моргана.

40. Виходячи з означення належності елемента об'єднанню сукупності множин, сформулювати умову того, що певний елемент не належить об'єднанню сукупності множин, використавши закон де Моргана.

41. Довести рівносильність.

(а) $a \to b \equiv (a \wedge \neg b) \to (c \wedge \neg c)$;
(б) $a \to b \equiv (a \wedge \neg b) \to b$;
(в) $a \to b \equiv (a \wedge \neg b) \to \neg a$;
(г) $\neg(a \to b) \equiv a \wedge \neg b$.

Навести змістовну інтерпретацію кожної рівносильності в термінах доведення твердження методом від супротивного.

42. Довести, що формула A алгебри висловлень сильніша, ніж формула B, тоді й тільки тоді, коли $A \wedge B \equiv A$.

43. Довести, що формула A алгебри висловлень сильніша, ніж формула B, тоді й тільки тоді, коли $A \vee B \equiv B$.

44. Довести, що формули алгебри висловлень A і B рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула $A \sim B$ є тавтологією.

45. Довести, що формули алгебри висловлень A і B рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ є тавтологією.

46. Довести, що формули алгебри висловлень A і B рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула A сильніша, ніж B, і формула B сильніша, ніж A.

47. Перевірити (довести чи спростувати) таку властивість операції імплікації:

(а) $(a \to b) \to c \equiv a \to (b \to c)$ (асоціативність);
(б) $a \to b \equiv b \to a$ (комутативність);
(в) $a \to (b \wedge c) \equiv (a \to b) \wedge (a \to c)$ (ліва дистрибутивність імплікації щодо кон'юнкції);
(г) $(a \wedge b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$ (права дистрибутивність імплікації щодо кон'юнкції);
(д) $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$ (ліва дистрибутивність імплікації щодо диз'юнкції);
(е) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$ (права дистрибутивність імплікації щодо диз'юнкції);
(є) $a \to (b \to c) \equiv (a \to b) \to (a \to c)$ (ліва дистрибутивність імплікації щодо імплікації);
(ж) $(a \to b) \to c \equiv (a \to c) \to (b \to c)$ (права дистрибутивність імплікації щодо імплікації);
(з) $a \wedge (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to (a \wedge c)$ (дистрибутивність кон'юнкції щодо імплікації);
(и) $a \vee (b \to c) \equiv (a \vee b) \to (a \vee c)$ (дистрибутивність диз'юнкції щодо імплікації).

48. Перевірити (довести чи спростувати) таку властивість операції еквівалентності:

(а) $(a \sim b) \sim c \equiv a \sim (b \sim c)$ (асоціативність);

(б) $a \sim b \equiv b \sim a$ (комутативність);

(в) $a \sim (b \wedge c) \equiv (a \sim b) \wedge (a \sim c)$ (дистрибутивність еквівалентності щодо кон'юнкції);

(г) $a \sim (b \vee c) \equiv (a \sim b) \vee (a \sim c)$ (дистрибутивність еквівалентності щодо диз'юнкції);

(д) $a \sim (b \sim c) \equiv (a \sim b) \sim (a \sim c)$ (дистрибутивність еквівалентності щодо еквівалентності);

(е) $a \wedge (b \sim c) \equiv (a \wedge b) \sim (a \wedge c)$ (дистрибутивність кон'юнкції щодо еквівалентності);

(є) $a \vee (b \sim c) \equiv (a \vee b) \sim (a \vee c)$ (дистрибутивність диз'юнкції щодо еквівалентності).

49. Довести чи спростувати рівносильність.

(а) $a \to (b \sim c) \equiv (a \to b) \sim (a \to c)$ (ліва дистрибутивність імплікації щодо еквівалентності);

(б) $(a \sim b) \to c \equiv (a \to c) \sim (b \to c)$ (права дистрибутивність імплікації щодо еквівалентності);

(в) $a \sim (b \to c) \equiv (a \sim b) \to (a \sim c)$ (дистрибутивність еквівалентності щодо імплікації);

(г) $(a \sim b) \sim c \equiv (a \sim b) \wedge (a \sim c)$.

50. Довести рівносильність.

(а) $a \to (b \wedge c) \equiv (a \to b) \wedge (a \to c)$;

(б) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$;

(в) $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$;

(г) $(a \wedge b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$.

51. Розглянемо тернарну логічну операцію, тобто операцію від трьох аргументів a, b, c, що задається формулою $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Позначимо її $m(a, b, c)$ і називатимемо *медіаною*.

Довести таку властивість медіани:

(а) $m(a, b, c) \equiv m(b, c, a) \equiv m(a, c, b)$;

(б) $m(a, a, b) \equiv a$; $m(a, \neg a, b) \equiv b$;

(в) $\neg m(a, b, c) \equiv m(\neg a, \neg b, \neg c)$;

(г) $m(a, b, c) \equiv m(\neg(m(\neg a, b, c)), b, c)$;

(д) $m(a, b, c) \equiv m(a, \neg m(a, \neg b, c), c)$;

(е) $m(m(\neg a, b, c), m(a, \neg b, c), m(a, b, \neg c)) \equiv m(a, m(\neg a, \neg b, \neg c), m(\neg a, b, c))$;

(є) $a \wedge b \wedge c \vee d \wedge (a \vee b \vee c) \equiv m(m(a, b, d), m(a, c, d), m(b, c, d))$;

(ж) $(a \vee b \vee c) \wedge d \vee (a \wedge b \wedge c) \equiv m(m(b, c, d), a, d)$.

52. Побудувати формулу алгебри висловлень A, що залежить від пропозиційних змінних x, y, z і для якої виконуються такі рівносильності:

(а) $(x \wedge A) \equiv (x \wedge y)$ і $(x \vee A) \equiv (x \wedge z)$;
(б) $(z \to A) \equiv (z \to (x \wedge y))$ і $(A \to z) \equiv (\neg(x \vee y) \to z)$;
(в) $(x \to A) \equiv (y \to (\neg x \vee z))$ і $((z \to y) \to x) \equiv (\neg x \to \neg A)$;
(г) $A \wedge (x \vee y) \equiv x \wedge y \wedge z$.

4. ЛОГІЧНИЙ ВИСНОВОК НА БАЗІ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ. НЕСУПЕРЕЧНІСТЬ МНОЖИНИ ВИСЛОВЛЕНЬ

Формула $B(p_1, p_2, ..., p_n)$ називається **логічним висновком** з формул $A_1(p_1, p_2, ..., p_n)$ $A_2(p_1, p_2, ..., p_n)$ $..., A_k(p_1, p_2, ..., p_n)$ на базі алгебри висловлень, якщо B набуває значення 1 на всіх тих наборах значень $p_1, p_2, ..., p_n$, на яких усі A_i $(i = 1, 2, ..., k)$ набувають значення 1. Формули $A_1, A_2, ..., A_k$ при цьому називають **посилками**, чи **припущеннями**. Те, що B є логічним висновком (логічно випливає, слідує) з $A_1, A_2, ...,$ A_k на базі алгебри висловлень, позначають $A_1, A_2, ..., A_k \models B$. Вираз $A_1, A_2, ..., A_k \models$ В називають **вивідністю** (на базі алгебри висловлень).

Зокрема, якщо $k = 1$, то формулу $B(p_1, p_2, ..., p_n)$ називають **логічним слідуванням** формули $A_1(p_1, p_2, ..., p_n)$ і позначають це $A_1 \Rightarrow B$.

Множина висловлень $M = \{A_1(p_1, p_2, ..., p_n),\ A_2(p_1, p_2, ..., p_n), ..., A_k(p_1, p_2, ..., p_n)\}$ називається **несуперечною (сумісною)**, якщо існує такий набір значень для $p_1, p_2, ..., p_n$, на якому кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k$ набуває значення 1 (про висловлення $A_1, A_2, ..., A_k$ тоді кажуть, що вони **сумісні** між собою). В іншому разі, тобто якщо на всіх наборах значень $p_1, p_2, ..., p_n$ кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k$ набуває значення 0, кажуть, що висловлення $A_1, A_2, ..., A_k$ **несумісні** або що множина висловлень M **суперечна**.

1. Довести, що формула $B(p_1, p_2, ..., p_n)$ є логічним висновком з формул $A_1(p_1, p_2, ..., p_n)$ $A_2(p_1, p_2, ..., p_n)$ $..., A_k(p_1, p_2, ..., p_n)$ на базі алгебри висловлень (тобто $A_1, A_2,..., A_k \models B$) тоді й тільки тоді, коли $\models A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \to B$.

2. Довести, що $A_1, A_2,..., A_k \models B$ тоді й тільки тоді, коли $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \Rightarrow B$.

3. Довести, що $A_1, A_2, ..., A_k \models B$ тоді й тільки тоді, коли формула $(A_1 \to (A_2 \to (... (A_k \to B)...))$ є тавтологією.

4. Довести, що коли кожна з формул $A_i(p_1, p_2, ..., p_n)$ $i = 1, 2, ..., k$ сильніша ніж формула $B(p_1, p_2, ..., p_n)$, то формула $B(p_1, p_2, ..., p_n)$ є логічним висновком з формул $A_1(p_1, p_2, ..., p_n)$ $A_2(p_1, p_2, ..., p_n)$ ..., $A_k(p_1, p_2, ..., p_n)$ на базі алгебри висловлень. Чи правильне обернене твердження? Відповідь обґрунтувати.

5. Довести, що для довільних формул $A_1, A_2, ..., A_k$ алгебри висловлень виконується $A_1, A_2, ..., A_k \models A_i$ $i = 1, 2, ..., k$.

6. Довести, що коли $A_1, A_2, ..., A_k \models B_i$ для всіх $i = 1, 2, ..., m$ і $B_1, B_2, ..., B_m \models C$, то $A_1, A_2, ..., A_k \models C$.

7. Довести вивідність.

(а) $a \vee b, \neg a \vee c \models b \vee c$;
(б) $a \vee b, a \to c, b \to d \models c \vee d$;
(в) $\neg a \vee b, \neg b \vee \neg c \models a \to \neg c$;
(г) $a \to b, a \wedge \neg b \models b$;
(д) $\neg(a \vee b) \models \neg a \vee c$;
(е) $a, c \to \neg(a \vee b) \models \neg c$;
(є) $a \wedge b, \neg c \to \neg b \models c$;
(ж) $a \vee \neg c, a \to d, b \to c, \neg b \to d \models d$;
(з) $(a \vee b) \to c, c \to (d \vee e), e \to f, \neg d \wedge \neg f \models \neg a$;
(и) $a \to (b \vee c), d \to a \models (\neg b \wedge \neg c) \to \neg d$.

8. Виходячи з означення логічного висновку на базі алгебри висловлень, перевірити правильність твердження $a \vee b,\ a \to \neg c \models a \vee (\neg c \sim b)$.

9. Побудувавши відповідні таблиці істинності, визначити, чи є правильною така вивідність:

(а) $(a \to b) \to c \models (a \vee b) \vee c$;
(б) $(a \vee b) \vee c \models (a \to b) \to c$;
(в) $a \to b, a \vee c \models (a \vee c) \to (a \wedge b)$;
(г) $a \to b, a \to c, a \models b \wedge c$;
(д) $a \to b, c \wedge a \models c \wedge b$;
(е) $a \to b, c \wedge a \models c$;
(є) $a \wedge b, \neg a \vee b \models \neg b$;
(ж) $a \vee b, a \to c, b \to c \models \neg c \to \neg a$.

10. Формули A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 задано таблицями істинності.

x	y	z	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

Визначити, чи виконується така вивідність:

(а) $A_1 \models B_2$;

(б) $A_1, A_3 \models B_1$;

(в) $A_2, A_3 \models B_2$;

(г) $A_1, A_2, A_3 \models B_2$;

(д) $A_2, A_3 \models B_1$;

(е) $A_1, A_3 \models B_2$.

11. Розташувати наведені формули в такому порядку, щоб кожна з них була логічним висновком з усіх попередніх:

1) $\neg a \sim b$;

2) $a \to (\neg a \to b)$;

3) $a \wedge \neg b$;

4) $\neg a \to b$;

5) $a \wedge \neg(\neg b \vee a)$.

12. Довести, що відношення логічного слідування на базі алгебри висловлень рефлексивне і транзитивне. Чи є це відношення симетричним? Чи є воно антисиметричним?

13. Виходячи з означення логічного слідування на базі алгебри висловлень, довести твердження.

(а) Якщо $A \models B$ і $B \equiv C$, то $A \models C$.

(б) Якщо $A_1, A_2 \models B$ і C — довільна формула алгебри висловлень, то $A_1, A_2, C \models B$.

(в) Якщо $A, C \models B$ і C — тавтологія, то $A \models B$.

(г) $A \models B$ тоді й тільки тоді, коли $\neg B \models \neg A$.

14. Довести, що коли $A \models B$, то для довільної формули C алгебри висловлень виконуються такі вивідності: $A \vee C \models B \vee C$ і $A \wedge C \models B \wedge C$. Чи правильне обернене твердження? Відповідь обґрунтувати.

15. Довести чи спростувати твердження, що коли $A \models B$, то для довільної формули C алгебри висловлень виконується $A \to C \models B \to C$.

16. Довести чи спростувати твердження, що коли $A \models B$, то для довільної формули C алгебри висловлень виконується $A \sim C \models B \sim C$.

17. Довести, що коли $A_1 \models B$ і $A_2 \models B$, то $A_1, A_2 \models B$. Чи правильне обернене твердження? Відповідь обґрунтувати.

18. Знайти принаймні одну відмінну від тавтології і посилок формулу алгебри висловлень, яка є логічним висновком із таких формул:

(а) $a, a \sim b$;

(б) $a, a \vee c$;

(в) $a \to b, b \to c$;

(г) $a \to b, b \vee c, (a \wedge b) \sim c$.

19. Знайти принаймні одну відмінну від тавтології і посилок формулу $F(a, b)$ алгебри висловлень, яка є логічним висновком із таких формул:

(а) $\neg a \vee c, \neg b \wedge \neg c, b \to a$;

(б) $a \to c, b \vee \neg c, \neg b \to a$;

(в) $a \vee \neg c, a \to b, b \to c, \neg b \wedge a$;

(г) $a \to b, a \wedge c, (a \wedge b) \to c$.

20. Знайти принаймні одну відмінну від тавтології і посилок формулу алгебри висловлень, яка є логічним висновком із формул $a \vee b$, $a \to c$, $b \sim d$ і залежить тільки від таких пропозиційних змінних:

(а) a і b;

(б) a і c;

(в) b, c і d.

21. Сформулювати всі логічні висновки, що випливають із таких посилок: 1) Якщо сума цифр цілого числа n ділиться на 3, то це число ділиться на 3 і на 9. 2) Якщо число n ділиться на 9, то воно ділиться на 3.

22. Знайти щонайменше дві посилки, логічним висновком з яких є наведена формула алгебри висловлень (посилки не повинні бути суперечностями і не повинні бути рівносильними цій формулі).

(а) $a \to b$;

(б) $(a \vee b) \to (a \wedge b)$;

(в) $a \vee \neg b$;

(г) $((a \wedge \neg b) \to c) \to (b \vee c)$.

23. У наведеній вивідності (за умови її коректності) знайти відсутню посилку $F(a, b)$, що містить пропозиційні змінні a і b.

(а) $a \vee \neg c, b \to (a \wedge c), F(a, b) \models \neg b \vee \neg c$;
(б) $a \to c, \neg b \vee \neg c, F(a, b), c \to (b \vee d) \models a \wedge \neg d$.

24. Скільки існує нерівносильних між собою формул алгебри висловлень $F(a, b, c)$, для яких виконується така умова:
(а) $(a \to b) \to c \models F(a, b, c)$;
(б) $(a \vee b) \vee c \models F(a, b, c)$;
(в) $(a \vee c) \to (a \wedge b) \models F(a, b, c)$;
(г) $(a \sim c) \to (a \wedge b) \models F(a, b, c)$.

25. Довести, що для довільних формул A, B, C алгебри висловлень виконується вивідність $(B \to C) \to C, \neg B \wedge \neg C \models A$.

26. Довести, що для довільних формул алгебри висловлень A, B з умов $A \models B$ і $A \models \neg B$ випливає $\models \neg A$.

27. Яке з двох тверджень $A \models B$ чи "Якщо $\models A$, то $\models B$" є сильнішим? Відповідь обґрунтувати.

28. Нехай формули $A_1(p), A_2(p), ..., A_n(p)$ і $B(p)$ алгебри висловлень містять пропозиційну змінну p. Довести, що коли $A_1(p), A_2(p), ..., A_n(p) \models B(p)$, то для довільної формули C алгебри висловлень виконується $A_1(C), A_2(C), ..., A_n(C) \models B(C)$.

29. Довести чи спростувати твердження, що коли $\models A(p)$, то $A(p) \models A(C)$, де p — пропозиційна змінна, C — довільна формула алгебри висловлень.

30. Довести, що формула B є логічним слідуванням формули A тоді й тільки тоді, коли множина наборів значень змінних, для яких істинна формула A, є підмножиною множини наборів значень змінних, для яких істинна формула B.

31. Довести, що формула B є логічним слідуванням формули A тоді й тільки тоді, коли тотожно істинною є формула $(A \to B)$.

32. Довести, що формула B є логічним слідуванням формули A тоді й тільки тоді, коли формула A сильніша, ніж формула B.

33. Довести, що $A \Rightarrow B$ тоді й тільки тоді, коли $A \wedge B \equiv A$.

34. Довести, що $A \Rightarrow B$ тоді й тільки тоді, коли $A \vee B \equiv B$.

35. Довести, що $A \Rightarrow B$ тоді й тільки тоді, коли $\neg B \Rightarrow \neg A$.

36. Довести, що формули A і B рівносильні тоді й тільки тоді, коли кожна з них є логічним слідуванням іншої, тобто $A \equiv B$ тоді й тільки тоді, коли $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$.

37. Довести, що будь-яка формула є логічним слідуванням тотожно хибної формули (суперечності).

38. Довести, що тотожно істинна формула (тавтологія) є логічним слідуванням довільної формули.

39. Перевірити (довести чи спростувати) таке твердження:
(а) $A \to B, B \models A$;
(б) $\neg B \to \neg A, A \models B$;
(в) $A \to B, B \to \neg A \models A$;
(г) $\neg A \to B, \neg A \models B$;
(д) $A \to B, \neg A \to B \models B$;
(е) $\neg A \to \neg B, A \models B$.

40. Довести таке твердження (вивідність).
(а) $A, A \to B \models B$;
(б) $A \to B, \neg B \models \neg A$;
(в) $A \to B, B \to C \models A \to C$;
(г) $A \vee B, \neg A \models B$;
(д) $A \to B, A \to \neg B \models \neg A$;
(е) $A \to \neg A \models \neg A$;
(є) $A \to B, B \to \neg A \models \neg A$;
(ж) $\neg A \to A \models A$.
Навести приклади застосування запропонованих логічних схем у математичних доведеннях.

41. Перевірити (довести чи спростувати) таке твердження:
(а) $A \to B, \neg A \to B \models B$;
(б) $A \to B, \neg B \to \neg C \models C \to A$;
(в) $A \to B, \neg A \to B \models \neg B$;
(г) $A \to B, C \to \neg B \models A \to \neg C$;
(д) $A \to B, \neg A \to C \models B \to C$;
(е) $A \to C, B \to C \models B \to A$;
(є) $A \to B, A \to C, B \vee C \models A$;
(ж) $A \to B, \neg A \to \neg C, B \vee \neg C \models \neg A$;
(з) $A \vee C, A \to B, C \to D \models B \vee D$;
(и) $A \vee D, A \to B, C \to D \models B \vee C$;

(і) $B \vee D, A \to B, C \to D \models A \vee C$;
(ї) $A \vee C, A \to B, C \to D \models B \wedge D$;
(й) $A \sim B, B \vee C, \neg C \models \neg A$;
(к) $A \to B, \neg A \to \neg B, A \vee \neg C \models A$.

42. Довести таке твердження:
(а) $A \to B, \neg(B \vee C) \models \neg A$;
(б) $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D), A \to \neg A \models C$;
(в) $A \to B, C \to B, D \to (A \vee B), D \models B$;
(г) $(A \to (C \to B)), A \vee \neg D, C \models D \to B$;
(д) $\neg A \vee B, C \to \neg B \models A \to \neg C$;
(е) $(A \to B) \wedge (C \to D), (B \to E) \wedge (D \to F), \neg(E \wedge F), A \to C \models \neg A$.

43. Перевірити (довести чи спростувати) таке твердження:
(а) $A \to B, C \to D, A \wedge C \models B \wedge D$;
(б) $(A \vee B) \to C, (A \wedge C) \to \neg B \models \neg C \to \neg A$;
(в) $A \vee B \vee C, C \to (A \wedge \neg B), A \to \neg C, B \to C \models A$;
(г) $(A \to (B \to C)), A \vee \neg D, B \models D \to C$.

44. Перевірити (довести чи спростувати) коректність вивідності.
(а) $A \vee B, \neg B \models \neg A$;
(б) $A \vee B, A \models \neg B$;
(в) $A \vee B, \neg(A \wedge B), B \models \neg A$;
(г) $A \vee B \vee C, \neg A \wedge \neg B \models C$.
Навести словесну інтерпретацію запропонованої логічної схеми.

45. Довести вивідність $(A \wedge B) \to C \models (A \wedge \neg C) \to \neg B$.

46. Чи є твердження “Студент погано працював протягом семестру, тому не склав іспит з дискретної математики” логічним слідуванням з твердження “Якщо студент добре працюватиме протягом семестру, то він успішно складе іспит з дискретної математики”?

47. Нехай задано таку посилку: “Якщо студент не знає математичної логіки, то він не зможе розв’язати цю логічну задачу”. Визначити коректність логічного висновку за умови другої посилки.
(а) Студент розв’язав цю логічну задачу. Отже, студент знає математичну логіку.
(б) Студент знає математичну логіку. Отже, студент зможе розв’язати цю логічну задачу.
(в) Студент не знає математичної логіки. Отже, студент не зможе розв’язати цю логічну задачу.

(г) Студент не розв'язав цю логічну задачу. Отже, студент не знає математичної логіки.

48. У наведеному міркуванні знайти відсутню другу посилку A (за умови правильності вивідності), що виражала би зв'язок між висловленнями: "Цей чотирикутник ромб" і "У цього чотирикутника діагоналі взаємно перпендикулярні".

1) Якщо даний чотирикутник квадрат, то він — ромб. 2) A?

Отже, якщо діагоналі цього чотирикутника не взаємно перпендикулярні, то він не є квадратом.

49. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами.

(а) Якщо студент не прочитає підручник з математичної логіки, то він не здобуде необхідних йому знань. Але студент прочитав підручник логіки. Отже, він здобув необхідні знання.

(б) Якщо певний елемент обчислювальної машини має дефект, то машина не працюватиме. Обчислювальна машина не працює, отже, цей елемент має дефект.

(в) Шахіст N не буде чемпіоном, якщо не виграє цю партію. Але N виграв цю партію. Отже, N буде чемпіоном.

(г) Якщо всі посилки вивідності істинні й вивідність правильна, то висновок — істинний. У цій вивідності висновок хибний. Отже, у цій вивідності не всі посилки істинні або вона неправильна.

(д) Якщо Андрій поїде в Харків, то Віктор поїде в Київ. Андрій поїде в Харків або в Одесу. Якщо Андрій поїде в Одесу, то Ольга залишиться у Львові. Але Ольга не залишилась у Львові. Отже, Віктор поїде в Київ.

(е) Для того щоб бути допущеним до іспитів, необхідно отримати залік з математичної логіки. Я отримаю цей залік, якщо навчуся розв'язувати логічні задачі. Я не навчився розв'язувати логічні задачі. Отже, я не буду допущений до іспитів.

(є) Для того щоб скласти іспит з дискретної математики, мені необхідно дістати підручник або конспект. Я дістану підручник тільки в тому разі, якщо мій приятель не поїде додому. Але він поїде додому тільки тоді, коли я дістану конспект. Отже, я складу іспит з дискретної математики.

50. Записати нижченаведені міркування у вигляді вивідності (на базі алгебри висловлень) і визначити коректність отриманої вивідності.

(а) 1) Щоб певна множина A натуральних чисел не була нескінченною, достатньо, щоб вона була обмеженою. 2) Множина A — скінченна. Отже, множина A — обмежена.

(б) 1) Для того щоб відповідність C не була функціональною, необхідно, щоб відповідність C не була взаємно однозначною. 2) Відповідність C — взаємно однозначна. Отже, відповідність C — функціональна.

(в) 1) Для того щоб відношення R було толерантним, достатньо, щоб воно було рефлексивним. 2) Відношення R не є толерантним.
Отже, відношення R — нерефлексивне.

(г) 1) Якщо дискримінант D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то $ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів. 2) Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів і $a > 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ виконується для всіх дійсних x. 3) $D < 0$; 4) $a < 0$. Отже, $ax^2 + bx + c < 0$ для всіх дійсних x.

(д) 1) Число ділиться на 9 тільки тоді, коли воно ділиться на 3. 2) Це число не ділиться на 9. Отже, це число не ділиться на 3.

(е) 1) Якщо число n кратне 35, то n кратне 5 і n кратне 7. 2) Число n не кратне 35. 3) Число n не кратне 5. Отже, число n не кратне 7.

(є) 1) Якщо число n кратне 5 і n кратне 7, то n кратне 35. 2) Число n не кратне 35. 3) Число n кратне 5. Отже, число n не кратне 7.

(ж) 1) Якщо число n кратне 24, то n кратне 6 і n кратне 4. 2) Число n не кратне 24. 3) Число n кратне 6. Отже, число n не кратне 4.

(з) 1) Для того щоб число 2007 було простим, необхідно, щоб 2007 не було кратне 6. 2) 2007 кратне 6 тільки тоді, коли 2007 кратне 2. 3) 2007 не кратне 2. Отже, 2007 — просте число.

(и) 1) Якщо в розкладі занять на сьогодні є лекція з алгебри, то немає лекції з дискретної математики. 2) Заняття з французької мови є тільки тоді, коли є практикум з програмування. 3) Немає лекції з математичного аналізу, якщо немає заняття з французької мови. 4) Лекція з алгебри є в розкладі занять на сьогодні. Отже, у розкладі занять на сьогодні немає лекції з математичного аналізу.

(і) 1) Будь-який дріб — раціональне число. 2) Кожне ціле число є раціональним числом. Отже, кожне ціле число — дріб.

(ї) 1) Будь-який дріб — раціональне число. 2) Кожне ціле число є раціональним числом. Отже, будь-який дріб — ціле число.

(й) 1) π — число трансцендентне тільки тоді, коли π є ірраціональним числом. 2) π — число ірраціональне. Отже, π — трансцендентне число.

(к) 1) Якщо $a = 0$ або $b = 0$, то $ab = 0$. 2) $ab \neq 0$. Отже, $a \neq 0$ і $b \neq 0$.

(л) 1) Якщо $a = 0$ або $b = 0$, то $ab = 0$. 2) $ab = 0$. Отже, $a = 0$ і $b = 0$.

(м) 1) Частково впорядкована множина A має найменший елемент тоді, коли вона скінченна і має єдиний мінімальний елемент. 2) Частково впорядкована множина A — нескінченна. 3) Множина A має єдиний мінімальний елемент. Отже, множина A не має найменшого елемента.

51. Що можна стверджувати про правильність двох вивідностей, які мають однакові формалізовані вигляди?

52. Чи може правильна вивідність мати хибний висновок?

53. Чи може неправильна вивідність мати істинний висновок?

54. Якщо вивідність правильна, але принаймні одна з її посилок хибна, то що можна стверджувати про значення істинності висновку?

55. Якщо вивідність правильна і всі її посилки істинні, то що можна сказати про її висновок?

56. Якщо вивідність правильна, але висновок хибний, то що можна стверджувати про її посилки?

57. Чи може бути правильною вивідність, в якої всі посилки хибні, а висновок істинний?

58. Що можна сказати про вивідність, усі посилки якої істинні, а висновок хибний?

59. Визначити, чи є задана множина висловлень несуперечною.

(а) $\{a \to b, \neg a, \neg b\}$;

(б) $\{a \to \neg b, a \wedge b\}$;

(в) $\{a \to b, a \to \neg b, \neg a\}$;

(г) $\{a \to \neg a, \neg a \to a\}$;

(д) $\{\neg(a \to b), b \to a\}$;

(е) $\{a \sim c, c \to b, a \wedge \neg c\}$;

(є) $\{a \wedge \neg b, \neg b \to \neg a, c \sim b\}$;

(ж) $\{\neg a \sim \neg b, c \to b, c \wedge \neg a\}$;
(з) $\{a \sim \neg b, \neg a \to \neg c, a \vee c, c \to b\}$;
(и) $\{a \to b, c \sim b, a \vee \neg c\}$.

60. Довести, що коли формула $A_1(p_1, p_2, ..., p_n) \to (A_2(p_1, p_2, ..., p_n) \to \to (... \to (A_{m-1}(p_1, p_2, ..., p_n) \to A_m(p_1, p_2, ..., p_n))...)$ є суперечністю, то висловлення $A_1(p_1, p_2, ..., p_n), A_2(p_1, p_2, ..., p_n),..., A_m(p_1, p_2, ..., p_n)$ несумісні. Чи правильне обернене твердження?

61. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.
1) R_1 рефлексивне тоді й тільки тоді, коли R_3 толерантне.
2) Якщо R_3 — симетричне, то R_2 — антисиметричне.
3) Неправильно, що R_1 рефлексивне тоді, коли R_3 рефлексивне.
4) R_3 — толерантне або R_2 не є антисиметричним.

62. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.
1) Якщо $a \in M_1$, то неправильно, що $a \in M_2$.
2) $a \in M_2$ тоді й тільки тоді, коли $a \in M_3$.
3) Неправильно, що $a \in M_2$ тільки тоді, коли $b \in M_3$.
4) Якщо $b \notin M_3$, то $a \in M_1$.
5) $a \in M_2$ і $b \in M_3$ або $a \notin M_1$ і $a \in M_3$.

63. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.
1) Дмитро успішно складе іспит з дискретної математики тоді й тільки тоді, коли регулярно виконуватиме домашні завдання.
2) Якщо Дмитро раціонально організує свій робочий час, то він регулярно виконуватиме домашні завдання.
3) Дмитро поїде на екскурсію до Львова тоді, коли успішно складе іспит з дискретної математики.
4) Дмитро раціонально організує свій робочий час і поїде на екскурсію до Львова.

64. Визначити коректність логічного висновку в наведеному міркуванні. “Крадіжку могли здійснити або **А**, або **Б**, або **В**. Але крадіжку здійснив **А**. Отже, крадіжку не здійснили ні **Б**, ні **В**”.

65. Слідчий допитує трьох свідків **А**, **Б**, **В**. **А** стверджує, що **В** говорить неправду. **В** наполягає на тому, щоб слідчий не вірив показанням **Б**, **Б** каже, що ані **А**, ані **В** не говорять правди. Визначити, хто з трьох свідків говорить правду.

66. Перевірити формальними методами правильність таких логічних міркувань поліцейського детектива: “Якщо Джонс не зустрічав цієї ночі Сміта, то або Сміт — убивця, або Джонс бреше. Якщо Сміт — убивця, то Джонс не зустрічав Сміта цієї ночі, і вбивство сталося після опівночі. Якщо вбивство сталося після опівночі, то або Сміт — убивця, або Джонс бреше. Отже, Сміт — убивця".

67. Студенти факультету кібернетики Андрій, Володимир, Геннадій, Дмитро, Євген, Павло, Сергій та Ігор брали участь у турнірі з шахів. Про результати змагань вони розповіли таке:

Андрій: "Переміг Дмитро".

Володимир: "Найбільше очок набрали Євген або Петро".

Петро: "Ні, Євген посів перше місце".

Сергій: "Андрій сказав неправду".

Дмитро: "Неправду сказав Сергій".

Євген: "Я не посів першого місця".

Геннадій: "Ігор сказав правду".

Павло: "Ні Євген, ні Ігор першого місця не посіли".

Згодом шахісти сказали, що лише три з цих відповідей правильні. Хто переміг у турнірі?

68. При розв'язуванні задачі знайдено такі відповіді:

1) число x — ірраціональне і дорівнює площі правильного трикутника зі стороною 2;
2) $x < 3$ і x — діагональ квадрата зі стороною 2;
3) x є число, кратне 3, і дорівнює радіусу кола завдовжки 2.

Одна частина кожного з тверджень правильна, а інша — ні. Знайти x.

69. Віктор запросив до себе друзів: Ірину, Тетяну та Андрія.

Відомо, що:

1) коли прийде Ірина, то буде й Тетяна;
2) Ірина не буде тільки тоді, коли будуть Тетяна й Андрій разом;
3) коли не буде Андрія, то не прийде й Ірина.

Хто з друзів Віктора прийде до нього на запрошення?

70. Коли студента **А** запитали, чи він разом із своїми друзями **Б** і **В** дивився новий фільм, той відповів:

1) коли я дивився новий фільм разом із **Б**, то фільм дивився також і **В**, але
2) неправда, що коли **В** дивився новий фільм, то я був у залі, зате
3) коли дивився новий фільм я чи **В**, то його дивився також і **Б**.

Хто із студентів дивився новий фільм?

71. Шість студентів **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Е** купили по лотерейному білету. Після розіграшу виявилось, що два з них виграли. На запитання, хто саме виграв, студенти дали такі відповіді: **А** — "виграв я і **Д**"; **Б** — "виграв я і **Е**"; **В** — "виграли **А** і **Е**"; **Г** — "виграли **Г** і **Б**"; **Д** — "виграли **Е** і **Д**". У чотирьох із відповідей лише одна частина твердження правильна, а в одній — обидві неправильні. Чиї лотерейні білети виграли?

72. Хтось із трьох студентів **А**, **Б**, **В** розбив вікно. **А** сказав, що він і **Б** вікно не розбивали; **Б** сказав, що **А** цього не робив, а розбив вікно **В**; **В** сказав, що він також не розбивав, а це зробив **А**. Як виявилося пізніше, один із студентів двічі сказав неправду, інший — двічі сказав правду, а серед тверджень третього одне правильне, а друге — ні. Хто розбив вікно?

73. Три дівчини Ірина, Оксана і Тетяна ходили на дискотеку. Одна з них була в червоній сукні, друга — у білій, третя — у синій. На запитання, яка сукня була на кожній з дівчат, вони дали таку відповідь: Ірина була в червоній, Оксана — у нечервоній, Тетяна — у несиній.

У цій відповіді з трьох частин одна правильна, дві неправильні. В якій сукні була кожна з дівчат?

74. Шестеро юнаків розглядали перехожого. Згодом кожен із них відповів на запитання, якого кольору були його волосся, очі й костюм і скільки йому років.

Андрій: рудий, очі блакитні, костюм сірий, 34.

Володимир: блондин, очі чорні, костюм синій, 30.

Борис: рудий, очі карі, костюм коричневий, 32.

Григорій: брюнет, очі блакитні, костюм не коричневий, 30.

Дмитро: шатен, очі чорні, костюм сірий, 28.

Євген: блондин, очі карі, костюм синій, 32.

Кожен із них тричі помилився. Але із шести відповідей на кожне із запитань щонайменше одна була правильною. Назвіть прикмети перехожого.

75. Троє обвинувачених **А**, **Б**, **В** дають такі свідчення: **А** — "**Б** винен, а **В** — ні"; **Б** — "Якщо **А** винен, то і **В** теж"; **В** — "Я не винен, але хоч один з двох інших винен".

(а) Вважаючи, що **Б** і **В** говорять правду, встановити, хто саме винен.

(б) Якщо всі троє невинні, то хто з них сказав правду, а хто — неправду?

76. Родина, що складається з батька, матері, сина, молодшої і старшої доньок, придбала телевізор.

Умовилися, що в перший вечір дивитимуться передачі в такому порядку:

1) коли батько дивиться передачу, мати також дивиться цю передачу;
2) доньки, обидві або одна з них, дивляться передачу;
3) із двох членів родини — мати і син — дивляться передачу або тільки мати, або тільки син;
4) син дивиться передачу тоді й тільки тоді, коли її дивиться старша донька;
5) якщо молодша донька дивиться передачу, то батько і старша донька роблять те саме.

Хто з членів родини дивився цього вечора передачу?

77. Маємо п'ять тверджень T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Відомо, що:

1) серед цих тверджень істинних більше, ніж хибних;
2) у списку цих тверджень підряд слідують щонайбільше два твердження, які мають однакові значення істинності;
3) значення істинності тверджень T_1 і T_5 протилежні.

Визначити, яке з цих тверджень є істинним, а яке — хибним. Яким має бути значення істинності другого твердження, щоб значення істинності всіх п'яти тверджень визначались однозначно?

78. При дослідженні хвороби в клініці отримано таку інформацію.

(а) 1) Симптоми a або c спостерігаються тоді, коли з'являється симптом b.

2) Симптом a відсутній тільки тоді, коли спостерігаються обидва симптоми b і c.

3) Якщо немає симптому c, то обов'язково виявляється симптом a.

4) Симптом b без симптому a буває тільки тоді, коли відсутній симптом c.

(б) 1) Симптом c спостерігається тоді, коли є симптоми a, b і d.

2) Симптом a спільно із симптомом b буває тільки тоді, коли є симптом c або немає симптому d.

3) Із наявності симптому b без c випливає відсутність симптомів a і d.

4) Якщо за наявності симптому b відсутній симптом a, то є також симптом c чи d.

5) Із наявності симптомів b і d випливає, що спостерігається принаймні один із симптомів — a або c.

Проаналізувати і спростити отриману інформацію.

5. ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ. ФОРМАЛЬНЕ ДОВЕДЕННЯ. ТЕОРЕМИ

Числення (формальна теорія) висловлень (ЧВ) означається так.

1. Алфавіт числення висловлень складають такі символи:

– малі латинські літери $a, b, c, d, ..., x, y, z$ (можливо, з індексами), які називатимемо пропозиційними змінними;

– знаки $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$, які називають логічними зв'язками;

– круглі дужки: (і).

2. Поняття **формули** означимо індуктивно:

а) усі пропозиційні змінні є формулами;

б) якщо A і B — формули, то вирази (або слова) $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$ також є формулами (для всіх цих виразів формули A і B є підформулами);

в) інших формул, ніж побудовані за правилами а) і б), немає.

Зауважимо також, що з метою зменшення кількості дужок звичайно випускають зовнішні дужки формул, а замість $(\neg A)$ записують $\neg A$.

3. Аксіомами *A*1 – *A*10 числення висловлень будуть такі формули:

***A*1**. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$

***A*2**. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$

***A*3**. $(a \wedge b) \rightarrow a$

***A*4**. $(a \wedge b) \rightarrow b$

***A*5**. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c)))$

***A*6**. $a \rightarrow (a \vee b)$

***A*7**. $b \rightarrow (a \vee b)$

***A*8**. $(a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c))$

***A*9**. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a)$

***A*10**. $\neg\neg a \rightarrow a$

4. Правилами виведення (виводу) є:

1) **правило підстановки**. Якщо A — вивідна формула, яка містить літеру p (позначимо цей факт $A(p)$), то вивідною є й формула $A(B)$, що здобувається з A заміною всіх входжень літери p на довільну формулу B; записується

$$\frac{A(p)}{A(B)};$$

2) **правило висновку (modus ponens)**. Якщо A і $A \to B$ — вивідні формули, то вивідною є й формула B; записується

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Формули $A(B)$ і B, які є результатом дії означених правил, називають **безпосередньо вивідними** з формул $A(p)$ та A і $A \to B$ за відповідним правилом виведення.

Для зручності записуватимемо дію означених правил виведення у такому вигляді:

$S(p; B)A(p) = A(B)$ (правило підстановки),

$\mathrm{MP}(A, A \to B) = B$ (правило висновку).

Замість послідовності підстановок $S(p_1; B_1)$, $S(p_2; B_2)$, ..., $S(p_k; B_k)$ писатимемо складну (одночасну) підстановку у вигляді $S(p_1, p_2, ..., p_k; B_1, B_2, ..., B_k)$.

Виведенням (виводом, вивідністю) формули B з формул $A_1, A_2, ..., A_n$ називають послідовність формул $F_1, F_2, ..., F_m$ таку, що $F_m = B$, а будь-яка формула F_i, $i = 1, 2, ..., m$ є:

1) або аксіомою;

2) або однією з початкових формул $A_1, A_2, ..., A_n$;

3) або безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, ..., F_{i-1}$ (або будь-якої їх підмножини) за одним з правил виводу.

Якщо існує виведення формули B з формул $A_1, A_2, ..., A_n$, то кажуть, що B є **вивідною** з $A_1, A_2, ..., A_n$, і позначають цей факт так: $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$. Формули $A_1, A_2, ..., A_n$ називають **посилками**, **припущеннями** або **гіпотезами** виведення, а формулу B — **висновком**, **наслідком** або **вислідом**. Перехід у виведенні від формули F_{i-1} до F_i називають i-м кроком виведення.

Доведенням формули B називають виведення B з порожньої множини формул, тобто виведення, в якому як початкові формули використовують тільки аксіоми теорії.

Формула B, для якої існує доведення, називається **довідною (вивідною) формулою**, або **теоремою**; цей факт позначають $\vdash B$.

При вивченні формальних теорій розрізняють два типи тверджень:

1) твердження (формули) самої теорії, або її теореми;

2) твердження про теорію (про властивості її теорем, доведень тощо).

Перші є елементами (словами, виразами, формулами) внутрішньої мови теорії, а другі — зовнішніми; останні формулюють у термінах мови, що є зовнішньою щодо теорії і називається метамовою теорії; самі ці твердження називають **метатеоремами**.

Наприклад, якщо побудовано доведення формули B, то вираз B — теорема, а твердження "$\vdash B$" — метатеорема.

Розглянемо приклади виведень у ЧВ.

Для зручності оберемо таку форму запису виведення формул у ЧВ:

а) послідовність формул виведення записуватимемо у стовпчик, нумеруючи їх у порядку слідування $F1$, $F2$, ...

б) поряд із кожною формулою після двокрапки писатимемо пояснення, що встановлює законність її появи у виведенні.

Приклад 5.1.

1) $\vdash (a \to a)$.

$F1$: $S(b, c; b \to a, a)A2 = (a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to$
$\to (a \to a))$

$F2$: $\mathrm{MP}(A1, F1) = ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$

$F3$: $S(b; b \to a)A1 = (a \to ((b \to a) \to a))$

$F4$: $\mathrm{MP}(F3, F2) = (a \to a)$

2) $a \vdash (b \to a)$.

$F1$: a

$F2$: $\mathrm{MP}(F1, A1) = (b \to a)$

3) $a, b \vdash (a \wedge b)$.

$F1$: $S(b, c; a, b)A5 = ((a \to a) \to ((a \to b) \to (a \to (a \wedge b))))$

$F2$: $(a \to a)$ (*див. п.* 1))

$F3$: $\mathrm{MP}(F2, F1) = ((a \to b) \to (a \to (a \wedge b)))$

$F4$: b

$F5$: $S(a, b; b, a)A1 = (b \to (a \to b))$

$F6$: $\mathrm{MP}(F4, F5) = a \to b$

$F7$: $\mathrm{MP}(F6, F3) = (a \to (a \wedge b))$

$F8$: a

$F9$: $\mathrm{MP}(F8, F7) = (a \wedge b)$

Множина формул Γ називається **суперечною**, якщо існує така формула A числення висловлень, що $\Gamma \vdash A$ і $\Gamma \vdash \neg A$; інакше множина формул Γ називається **несуперечною**.

1. Переконатись за індуктивним означенням, що наведений вираз є формулою числення висловлень. Виписати всі її підформули.

(а) $(((\neg a) \to b) \vee ((\neg b) \to a))$;

(б) $(((a \wedge (\neg b)) \to c) \vee (a \to c))$;

(в) $((a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c))))$;

(г) $((((\neg a) \to (b \vee c)) \wedge ((\neg c) \to b)) \to ((a \wedge (\neg b)) \wedge (c \to (\neg a))))$.

2. Визначити, чи є формулою числення висловлень такий вираз:

(а) $((a \vee ((\neg b) \to c)) \to (\neg a))$;

(б) $(((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \to (ab \wedge c))$;

(в) $(a \to b) \sim ((\neg b) \to (\neg a)))$;

(г) $(a \vee ((a \vee \neg b) \to c) \to (a - b))$;

(д) $(a \vee b \to ((a \sim c) \wedge a) \to \vee c)$;

(е) $(\neg\neg a \to b) \wedge (\neg b) \to (a \to c))$.

3. Записати складну (одночасну) підстановку у вигляді $S(p_1, p_2, ..., p_k; B_1, B_2, ..., B_k)$ і визначити її результат:

(а) підстановку $(a \to b)$ замість a і a замість b в аксіому $A1$;

(б) підстановку $(b \to a)$ замість a, $(a \to b)$ замість b, $\neg b$ замість c в аксіому $A2$;

(в) підстановку $(a \to (b \to c))$ замість a, $((b \to c) \to b)$ замість b в аксіому $A9$;

(г) підстановку $(a \vee b)$ замість a, $(\neg a \to b)$ замість b, $(a \to \neg b)$ замість c в аксіому $A5$.

4. Перевірити, чи коректно виконано просту підстановку.

(а) $S(a; b \to a)\, A1 = (b \to a) \to (b \to a)$;

(б) $S(a; b \to a)\, A1 = (b \to a) \to (b \to (b \to a))$;

(в) $S(c; b \to c)\, A2 = (a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to c))$;

(г) $S(\neg a; b \to a)\, A9 = (a \to b) \to ((a \to \neg b) \to (b \to a))$;

(д) $S(a; \neg\neg a)\, A10 = a \to a$;

(е) $S(a \to b; \neg b \to \neg a)\, ((a \to b) \to a) = (\neg b \to \neg a) \to a$;

(є) $S(b; a)\, A6 = b \to (b \vee a)$;

(ж) $S(a \wedge b; a)\, A3 = a \to a$.

У разі неправильного виконання підстановки зазначити, в чому саме полягає помилка.

5. Перевірити, чи коректно виконано складну підстановку.

(а) $S(a, b; a \to b, \neg b)\, A1 = (a \to b) \to (\neg b \to a)$;

(б) $S(a, b; b \to a, \neg a)\, A1 = (b \to a) \to (\neg a \to (b \to a))$;

(в) $S(a, b; a \to b, \neg c)\, A2 = ((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to (a \to \neg c))$;

(г) $S(a, a \to \neg b; a \to b, \neg b)\, A9 = (a \to b) \to ((\neg b) \to \neg(a \to b))$.

6. Визначити і записати символічно, результатом якої підстановки і в яку аксіому є наведена формула.

(а) $(a \to b) \to (((a \vee b) \to c) \to (a \to b))$;

(б) $((a \vee b) \to b) \to (((a \vee b) \to (b \to (b \wedge c))) \to ((a \vee b) \to (b \wedge c)))$;

(в) $(((a \wedge b) \to b) \to c) \to ((b \to c) \to ((((a \wedge b) \to b) \vee b) \to c))$;

(г) $((\neg a \wedge \neg b) \to \neg b) \to (((\neg a \wedge \neg b) \to \neg\neg b) \to \neg(\neg a \wedge \neg b))$;

(д) $(a \to b) \to ((a \to b) \vee ((a \vee b) \to b))$.

7. Нехай формули числення висловлень $A_1(p), A_2(p), ..., A_n(p)$ і $B(p)$ містять пропозиційну змінну p. Довести, що коли $A_1(p), A_2(p), ..., A_n(p) \vdash B(p)$, то для довільної формули C числення висловлень виконується $A_1(C), A_2(C), ..., A_n(C) \vdash B(C)$.

8. Знайти пари формул, до яких можна застосувати правило висновку, і визначити результат дії.

1) $(a \to b) \to b$;
2) $(a \to b) \to (a \to \neg c)$;
3) $(a \to b)$;
4) $((a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c))))$;
5) $((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to (a \to \neg c))$;
6) $(a \to b) \to (a \to c)$.

9. Доповнити кожен крок доведення теореми числення висловлень поясненнями у вигляді запису відповідного правила виводу.

(а) $\vdash (a \wedge a) \to a$.

$F1$: $(a \wedge a) \to a$

(б) $\vdash (a \vee a) \to a$.

$F1$: $(a \to a) \to ((a \to a) \to ((a \vee a) \to a))$
$F2$: $(a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$
$F3$: $(a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$
$F4$: $a \to ((b \to a) \to a)$
$F5$: $a \to a$
$F6$: $(a \to a) \to ((a \vee a) \to a)$
$F7$: $(a \vee a) \to a$

(в) $\vdash (a \wedge b) \to (a \vee b)$.

$F1$: $(a \to (a \vee b)) \to ((a \wedge b) \to (a \to (a \vee b)))$
$F2$: $(a \wedge b) \to (a \to (a \vee b))$
$F3$: $((a \wedge b) \to a) \to (((a \wedge b) \to (a \to (a \vee b))) \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee b)))$
$F4$: $((a \wedge b) \to (a \to (a \vee b))) \to ((a \wedge b) \to (a \vee b))$
$F5$: $(a \wedge b) \to (a \vee b)$

(г) $\vdash (a \vee b) \to (b \vee a)$.

$F1$: $(a \to (b \vee a)) \to ((b \to (b \vee a)) \to ((a \vee b) \to (b \vee a)))$
$F2$: $a \to (b \vee a)$
$F3$: $b \to (b \vee a)$

$F4$: $(b \to (b \vee a)) \to ((a \vee b) \to (b \vee a))$
$F5$: $(a \vee b) \to (b \vee a)$

(д) $\vdash (a \to b) \to (a \to (a \wedge b))$.
$F1$: $(a \to a) \to ((a \to b) \to (a \to (a \wedge b)))$
$F2$: $(a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$
$F3$: $(a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$
$F4$: $a \to ((b \to a) \to a)$
$F5$: $a \to a$
$F6$: $(a \to b) \to (a \to (a \wedge b))$

10. Визначити, чи є виведенням даної теореми числення висловлень наведена послідовність формул. У разі позитивної відповіді доповнити кожен крок доведення поясненнями у вигляді запису відповідного правила виводу.

(а) $\vdash a \to (a \wedge a)$.
$F1$: $(a \to a) \to ((a \to a) \to (a \to (a \wedge a)))$
$F2$: $(a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$
$F3$: $(a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$
$F4$: $a \to ((b \to a) \to a)$
$F5$: $a \to a$
$F6$: $(a \to a) \to (a \to (a \wedge a))$
$F7$: $a \to (a \wedge a)$

(б) $\vdash (\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$.
$F1$: $(\neg\neg a \to a) \to (\neg b \to (\neg\neg a \to a))$
$F2$: $(a \to a) \to (\neg b \to (\neg\neg a \to a))$
$F3$: $(a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$
$F4$: $(a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$
$F5$: $a \to ((b \to a) \to a)$
$F6$: $a \to a$
$F7$: $\neg b \to (\neg\neg a \to a)$
$F8$: $(\neg b \to (\neg\neg a \to a)) \to ((\neg b \to \neg\neg a) \to (\neg b \to a))$
$F9$: $(\neg b \to \neg\neg a) \to (\neg b \to a)$
$F10$: $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$

(в) $\vdash a \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))$.
$F1$: $(a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))$
$F2$: $((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))) \to (a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee c))))$
$F3$: $a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))$
$F4$: $(a \to (a \vee c)) \to ((a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))) \to$
$\to (a \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))))$

$F5\colon a \to (a \vee c)$

$F6\colon (a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))) \to (a \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee c)))$

$F7\colon a \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))$

(г) $\vdash ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c$.

$F1\colon ((a \wedge c) \to c) \to (((b \wedge c) \to c) \to (((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c))$

$F2\colon (a \wedge c) \to c$

$F3\colon ((b \wedge c) \to c) \to (((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c)$

$F4\colon (b \wedge c) \to c$

$F5\colon ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c$

(д) $\vdash a \to ((a \vee b) \wedge a)$.

$F1\colon (a \to (a \vee b)) \to ((a \to a) \to (a \to ((a \vee b) \wedge a)))$

$F2\colon (a \to a) \to (a \to ((a \vee b) \wedge a))$

$F3\colon (a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$

$F4\colon (a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$

$F5\colon a \to ((b \to a) \to a)$

$F6\colon a \to a$

$F7\colon a \to ((a \vee b) \wedge a)$

11. Доповнити кожен крок виведення формули числення висловлень з множини формул поясненнями у вигляді запису відповідного правила виводу.

(а) $a \to b, a \to c \vdash a \to (b \wedge c)$ (*правило композиції*).

$F1\colon a \to b$

$F2\colon a \to c$

$F3\colon (a \to c) \to (a \to (b \wedge c))$

$F4\colon a \to (b \wedge c)$

(б) $a \to b, a \to \neg b \vdash \neg a$ (*правило введення заперечення*).

$F1\colon a \to b$

$F2\colon a \to \neg b$

$F3\colon (a \to \neg b) \to \neg a$

$F4\colon \neg a$

(в) $a, a \to b \vdash a \wedge b$.

$F1\colon (a \to a) \to ((a \to b) \to (a \to (a \wedge b)))$

$F2\colon (a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$

$F3\colon (a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$

$F4\colon a \to ((b \to a) \to a)$

$F5\colon a \to a$

$F6\colon (a \to b) \to (a \to (a \wedge b))$

$F7\colon a \to b$

$F8: a \to (a \wedge b)$
$F9: a$
$F10: a \wedge b$

(г) $a \to b, b \to c \vdash a \to c$ (*правило ланцюгового висновку чи правило силогізму*).
$F1: a \to b$
$F2: b \to c$
$F3: (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$
$F4: (b \to c) \to (a \to (b \to c))$
$F5: a \to (b \to c)$
$F6: a \to c$

12. Визначити, чи є наведена послідовність формул виведенням даної формули числення висловлень з множини формул. У разі позитивної відповіді доповнити кожен крок виведення поясненнями у вигляді запису відповідного правила виводу.

(а) $a \vee a \vdash a$.
$F1: (a \to a) \to ((a \to a) \to ((a \vee a) \to a))$
$F2: (a \to (b \to a)) \to ((a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a))$
$F3: (a \to ((b \to a) \to a)) \to (a \to a)$
$F4: a \to ((b \to a) \to a)$
$F5: a \to a$
$F6: (a \to a) \to ((a \vee a) \to a)$
$F7: (a \vee a) \to a$
$F8: a \vee a$
$F9: a$

(б) $\neg a \to b, \neg b \vdash a$.
$F1: \neg a \to b$
$F2: \neg b$
$F3: \neg b \to (\neg a \to \neg b)$
$F4: \neg a \to \neg b$
$F5: (\neg a \to b) \to ((\neg a \to \neg b) \to \neg\neg a)$
$F6: (\neg a \to \neg b) \to \neg\neg a$
$F7: \neg\neg a$
$F8: a$

(в) $a \wedge b \vdash a \vee b$.
$F1: (a \to (a \vee b)) \to ((a \wedge b) \to (a \to (a \vee b)))$
$F2: (a \wedge b) \to (a \to (a \vee b))$
$F3: ((a \wedge b) \to a) \to (((a \wedge b) \to (a \to (a \vee b))) \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee b)))$

$F4$: $((a \wedge b) \rightarrow (a \rightarrow (a \vee b))) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow (a \vee b))$
$F5$: $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$
$F6$: $a \wedge b$
$F7$: $a \vee b$

(г) $a \vee b, c \vdash (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.
$F1$: c
$F2$: $c \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)$
$F3$: $(a \vee b) \rightarrow c$
$F4$: $((a \vee b) \rightarrow c) \rightarrow (((a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)))) \rightarrow$
$\rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)))))$
$F5$: $((a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)))) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow ((a \wedge c) \vee$
$\vee (b \wedge c))))$
$F6$: $c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$
$F7$: $(c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))))$
$F8$: $(a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)))$
$F9$: $(a \vee b) \rightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$
$F10$: $a \vee b$
$F11$: $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

(д) $(a \wedge b) \rightarrow c, a, b \vdash c$.
$F1$: $(a \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b)))$
$F2$: $(a \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((a \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a))$
$F3$: $(a \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a)$
$F4$: $a \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a)$
$F5$: $a \rightarrow a$
$F6$: $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b))$
$F7$: $b \rightarrow (a \rightarrow b)$
$F8$: b
$F9$: $a \rightarrow b$
$F10$: $a \rightarrow (a \wedge b)$
$F11$: a
$F12$: $a \wedge b$
$F13$: $(a \wedge b) \rightarrow c$
$F14$: c

13. Визначити множину формул M, виведенням з якої є наведена послідовність формул. Доповнити кожен крок виведення поясненнями у вигляді запису відповідного правила виводу.

(а) $M \vdash b \wedge a$.
$F1$: $((a \wedge b) \rightarrow b) \rightarrow (((a \wedge b) \rightarrow a) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow (b \wedge a)))$

$F2$: $((a \wedge b) \to a) \to ((a \wedge b) \to (b \wedge a))$
$F3$: $(a \wedge b) \to (b \wedge a)$
$F4$: $a \wedge b$
$F4$: $b \wedge a$

(б) $M \vdash a \vee c$.
$F1$: $(a \to (a \vee c)) \to ((a \wedge b) \to (a \to (a \vee c)))$
$F2$: $a \to (a \vee c)$
$F3$: $(a \wedge b) \to (a \to (a \vee c))$
$F4$: $a \wedge b$
$F5$: $a \to (a \vee c)$
$F6$: a
$F7$: $a \vee c$

(в) $M \vdash c$.
$F1$: $(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c))$
$F2$: $((a \wedge c) \to c) \to (((b \wedge c) \to c) \to (((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c))$
$F4$: $(a \wedge c) \to c$
$F5$: $((b \wedge c) \to c) \to (((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c)$
$F6$: $(b \wedge c) \to c$
$F7$: $((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to c$
$F8$: $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
$F9$: c

(г) $M \vdash a \vee c$.
$F1$: $(a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))$
$F2$: $((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))) \to (a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee c))))$
$F3$: $a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))$
$F4$: $((a \to (a \vee c)) \to \quad (a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))) \to$
$\to (a \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))))$
$F5$: $a \to (a \vee c)$
$F6$: $(a \to ((a \vee c) \to ((a \wedge b) \to (a \vee c)))) \to (a \to ((a \wedge b) \to$
$\to (a \vee c))))$
$F7$: $a \to ((a \wedge b) \to (a \vee c))$
$F8$: a
$F9$: $(a \wedge b) \to (a \vee c)$
$F10$: $a \wedge b$
$F11$: $a \vee c$

14. Довести теорему:
(а) $(a \wedge a) \to a$;

(б) $a \to (a \wedge a)$;
(в) $(a \vee a) \to a$;
(г) $a \to (a \vee a)$.

15. Довести теорему:
(а) $(a \to b) \to (a \to (a \wedge b))$;
(б) $(b \to (a \vee c)) \to ((a \vee b) \to (a \vee c))$.

16. Довести теорему:
(а) $(b \to a) \to ((a \vee b) \to a)$;
(б) $\neg(b \to a) \to \neg a$.

17. Довести теорему:
(а) $\neg b \to \neg(a \wedge b)$;
(б) $\neg(a \vee b) \to \neg a$.

18. Довести теорему:
(а) $(a \vee b) \to (b \vee a)$;
(б) $(a \wedge b) \to (b \wedge a)$;
(в) $a \to ((a \vee b) \wedge a)$;
(г) $(a \vee (a \wedge b)) \to a$.

19. Довести теорему:
(а) $a \to ((a \wedge b) \to b)$;
(б) $a \to (b \to \neg\neg b)$;
(в) $(a \vee b) \to (\neg\neg a \to a)$;
(г) $a \to ((b \to c) \to (\neg c \to \neg b))$.

20. Довести теорему:
(а) $(a \wedge (a \to b)) \to b$;
(б) $a \to ((a \to b) \to b)$.

21. Довести теорему:
(а) $(a \vee b) \to (\neg b \to a)$;
(б) $(a \vee b) \to (\neg a \to b)$;
(в) $(\neg a \vee b) \to (a \to b)$;
(г) $(a \vee \neg b) \to (b \to \neg a)$.

22. Довести вивідність:
(а) $a \to c, b \to c, a \vee b \vdash c$;
(б) $a \to c, b \to d, a \vee b \vdash c \vee d$;
(в) $a \to b, a \to c, \neg b \vee \neg c \vdash \neg a$;
(г) $a \to c, b \to d, \neg c \vee \neg d \vdash \neg a \vee \neg b$.

23. Довести теорему числення висловлень:

(а) $((a \wedge b) \to c) \to ((a \wedge b) \to (b \wedge c))$;

(б) $(a \to b) \to (a \to ((b \to a) \wedge a))$;

(в) $(b \to c) \to (b \to (a \to c))$;

(г) $(b \to (a \to (b \to c)) \to (b \to ((a \to b) \to (a \to c))))$;

(д) $(a \to b) \to (a \to \neg\neg b)$;

(е) $(a \to \neg\neg b) \to (a \to b)$;

(є) $a \to ((b \vee c) \to (a \vee c))$;

(ж) $(a \wedge b) \to (c \to b)$;

(з) $(b \to c) \to (a \to (\neg c \to \neg b))$;

(и) $c \to ((a \wedge b) \to (b \vee c))$;

(і) $(a \vee c) \to (((a \vee b) \to c) \to (\neg c \to \neg(a \vee b)))$;

(ї) $(b \to (a \vee c)) \to ((b \to c) \to ((d \to c) \to ((b \vee d) \to c)))$;

(й) $(a \wedge b) \to (a \vee b)$;

(к) $(\neg a \to b) \to (\neg b \to (\neg\neg a \to a))$;

(л) $(c \to (a \to b)) \to (c \to (\neg b \to \neg a))$;

(м) $(a \to \neg b) \to (a \to (c \vee \neg b))$;

(н) $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$;

(о) $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$;

(п) $(a \to \neg b) \to (b \to \neg a)$.

24. Визначити, чи є виведенням формули $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$ така послідовність формул:

(а) $F1$: $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$
$F2$: $(\neg a \to b) \to (\neg b \to \neg\neg a)$
$F3$: $\neg\neg a \to a$
$F4$: $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$

(б) $F1$: $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$
$F2$: $(\neg a \to b) \to (\neg b \to \neg\neg a)$
$F3$: $\neg\neg a \to a$
$F4$: $a \to (b \to a)$
$F5$: $(\neg\neg a \to a) \to (\neg b \to (\neg\neg a \to a))$
$F6$: $\neg b \to (\neg\neg a \to a)$
$F7$: $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
$F8$: $(\neg b \to (\neg\neg a \to a)) \to ((\neg b \to \neg\neg a) \to (\neg b \to a))$
$F9$: $(\neg b \to \neg\neg a) \to (\neg b \to a)$
$F10$: $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$.

25. Провести формальне доведення теореми:

(а) $\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$;

(б) $(\neg a \wedge \neg b) \to (\neg a \vee \neg b)$;
(в) $\neg(a \wedge b) \to (\neg a \vee \neg b)$;
(г) $(\neg a \vee \neg b) \to \neg(a \wedge b)$.

26. Довести теорему:
(а) $a \to \neg\neg a$;
(б) $(\neg\neg a \to a) \wedge (a \to \neg\neg a)$.

27. Провести формальне доведення теореми:
(а) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$ (*перший закон ланцюгового висновку*).
(б) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ (*другий закон ланцюгового висновку*).

28. Довести, що коли T — теорема, то для довільної формули A числення висловлень наведена формула також є теоремою.
(а) $A \to T$;
(б) $(A \wedge \neg A) \to \neg T$;
(в) $\neg T \to A$.

29. Довести, що коли T — теорема, то для довільних формул A і B числення висловлень формула $(A \to \neg T) \to (A \to B)$ також є теоремою.

30. Визначити, чи є наведена множина формул числення висловлень суперечною.
(а) $\{a \to b, \neg a, \neg b\}$;
(б) $\{a \to \neg b, a \wedge b\}$;
(в) $\{a \to b, a \to \neg b, \neg a\}$;
(г) $\{a \to \neg a, \neg a \to a\}$.

31. Довести, що множина Γ формул числення висловлень суперечна тоді й тільки тоді, коли для якоїсь формули A числення висловлень виконується $\Gamma \vdash (A \wedge \neg A)$.

32. Довести, що множина формул Γ несуперечна тоді й тільки тоді, коли існує формула числення висловлень, що не є вивідною з Γ.

6. МЕТАТЕОРЕМА ДЕДУКЦІЇ. ПОХІДНІ ПРАВИЛА ВИВЕДЕННЯ

Будь-яку доведену у численні вивідність вигляду $\Gamma \vdash A$, де Γ — множина формул, A — довільна формула, можна розглядати як правило виведення $\frac{\Gamma}{A}$, яке можна додати до заданої множини правил.

Наприклад, доведену у прикладі 5.1(2) вивідність $a \vdash b \to a$ разом з правилом підстановки можна розглядати як правило $\frac{A}{B \to A}$, що може бути інтерпретовано так: "якщо формула A є вивідною, то вивідною є і формула $B \to A$, де B — довільна формула". Це правило надалі можна використовувати для побудови нових виведень. Такі правила називатимемо похідними правилами.

За допомогою додаткових похідних правил дістаємо можливість скоротити виведення формул, не виконуючи повного виведення. Маючи скорочене виведення, завжди можна побудувати повне виведення, замінюючи кожну формулу, яка є результатом застосування похідного правила виведення, повним її виведенням. Такою формулою є, наприклад, формула $F2$ у прикладі 5.1(3).

Могутнім засобом одержання низки важливих і корисних похідних правил виведення є так звана метатеорема дедукції **(МТД)**; зокрема, сама МТД може розглядатись як таке похідне правило.

Метатеорема дедукції. Якщо $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$, де Γ — множина формул (можливо, порожня), A і B — формули.

Розглянемо кілька прикладів застосування метатеореми дедукції.

Приклад 6.1. 1) Поширеним методом математичних доведень є метод доведення від супротивного: припускаємо, що a — істинне твердження, і доводимо, що, по-перше, з a виводиться b, а по-друге, що з a виводиться $\neg b$, що неможливо; отже, a хибне, тобто істинне $\neg a$.

У термінах числення висловлень цей метод формулюється так: "якщо $\Gamma, a \vdash b$ і $\Gamma, a \vdash \neg b$, то $\Gamma \vdash \neg a$".

Доведемо справедливість цього правила у численні висловлень.

Справді, за метатеоремою дедукції, якщо $\Gamma, a \vdash b$ і $\Gamma, a \vdash \neg b$, то $\Gamma \vdash a \to b$ і $\Gamma \vdash a \to \neg b$.

$F1$: $a \to b$

$F2$: $a \to \neg b$

$F3$: MP($F1$, $A9$) = $(a \to \neg b) \to \neg a$

$F4$: MP($F2$, $F3$) = $\neg a$

Доведене твердження (метатеорему) часто називають правилом уведення заперечення і записують у вигляді

$$\frac{\Gamma, A \mid\!- B; \Gamma, A \mid\!- \neg B}{\Gamma \mid\!- \neg A}.$$

2) Крім того, неважко переконатись у справедливості для числення висловлень такого твердження або метатеореми, яку можна вважати оберненою до метатеореми дедукції (ОМТД): “якщо $\Gamma \mid\!- A \to B$, то $\Gamma, A \mid\!- B$”.

Послідовно маємо

$F1$: A

$F2$: $A \to B$

$F3$: MP($F1$, $F2$) = B

3) Доведемо тепер закон виключення третього: $\mid\!- a \vee \neg a$.

$F1$: $S(b; \neg a)A6 = a \to (a \vee \neg a)$

$F2$: $S(a; \neg(a \vee \neg a))\,(a \to a) = (\neg(a \vee \neg a)) \to (\neg(a \vee \neg a))$ (див. приклад 5.1(1)).

Із формул $F1$ і $F2$ маємо (за ОМТД)

$F3$: $\neg(a \vee \neg a), a \mid\!- a \vee \neg a$

$F4$: $\neg(a \vee \neg a), a \mid\!- \neg(a \vee \neg a)$.

За доведеним правилом уведення заперечення зі співвідношень $F3$ і $F4$ отримаємо

$F5$: $\neg(a \vee \neg a) \mid\!- \neg a$.

Аналогічно використовуємо аксіому $A7$:

$F6$: $S(b; \neg a)A7 = \neg a \to (a \vee \neg a)$

$F7$: $\neg(a \vee \neg a), \neg a \mid\!- a \vee \neg a$

$F8$: $\neg(a \vee \neg a), \neg a \mid\!- \neg(a \vee \neg a)$

З $F7$ і $F8$ маємо

$F9$: $\neg(a \vee \neg a) \mid\!- \neg\neg a$.

За правилом уведення заперечення з $F5$ і $F9$ дістанемо:

$F10$: $\neg\neg(a \vee \neg a)$

$F11$: $S(a; a \vee \neg a)A10 = \neg\neg(a \vee \neg a) \to (a \vee \neg a)$

$F12$: MP($F10$, $F11$) = $a \vee \neg a$.

1. Із припущень $a \to b$, $a \to c$, a вивести формулу $b \wedge c$.

2. Із припущень $a \to b$, $a \to c$ вивести формулу $a \to (b \wedge c)$.

3. Вивести формулу $a \vee b$ із припущення a (або b).

4. Вивести формулу a (або b) із припущення $a \wedge b$.

5. Вивести формулу $a \wedge b$ із припущень a і b.

6. Із припущення $a \to b$ вивести формулу $\neg b \to \neg a$.

7. Із припущень $a \to b$, $b \to c$ вивести формулу $a \to c$.

8. Обґрунтувати вивідність $a \to b, b \to c \vdash (a \vee b) \to c$.

9. Обґрунтувати вивідність $a \to (b \to c), a \to b, a \vdash c$.

10. Обґрунтувати вивідність $a \to (b \to c), a, b \vdash d \to c$.

11. Із припущень $a \to (b \to c)$, $a \to b$, a вивести формулу $d \to c$.

12. Із припущення $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ вивести формулу $(b \to (a \to (b \to c))) \to ((b \to (a \to b)) \to (b \to (a \to c)))$.

13. Із припущення $(b \to (a \to (b \to c))) \to (b \to (a \to b)) \to (b \to \to (a \to c)))$ вивести формулу $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c))$.

14. Із припущення $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ вивести формулу $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)$.

15. Обґрунтувати вивідність:

(а) $a \wedge b \vdash a \vee b$;
(б) $a \wedge b \vdash a \to b$.

16. Позначимо через Γ довільну скінченну (можливо, порожню) множину формул числення висловлень, через A, B, C — формули числення висловлень. Користуючись означенням вивідності, обґрунтувати таку властивість символу $\vdash$:

(а) $C \vdash C$.
(б) Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.
(в) Якщо $\Gamma, A, B \vdash C$ і $\vdash B$, то $\Gamma, A \vdash C$.
(г) Якщо $\vdash B$, то $\Gamma \vdash B$.
(д) Якщо $\Gamma \vdash C$, то $\Gamma, A \vdash C$.
(е) Якщо $B, B, \Gamma \vdash C$, то $B, \Gamma \vdash C$.
(є) Якщо $\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C$, то $\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C$.
(ж) Якщо $\Gamma_1 \vdash A$ і $\Gamma_2, A \vdash C$, то $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C$.
(з) Якщо $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$, то $A_1, A_2, ..., A_n, \Gamma \vdash B$.
(и) Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.
(і) Якщо $\Gamma \vdash A$ і $A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$ (*транзитивність відношення вивідності*).
(ї) Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$ (*правило введення заперечення*).

(й) Якщо $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_n \vdash B_i$, $i = 1, 2, ..., k$ і $B_1, B_2, ..., B_k \vdash C$, то $\Gamma, A_1, A_2, ..., A_n \vdash C$ (*правило силогізму*).

Сформулюйте словами звичайної мови твердження, які виражають властивості (а) — (й).

17. Використовуючи метатеорему дедукції й наведені вище властивості відношення вивідності, довести таке похідне правило виведення:

(а) якщо $\Gamma, A \vdash C$ і $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$ (*загальне правило вилучення диз'юнкції*);

(б) якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma, A \vdash C$, то $\Gamma, A \vdash B \wedge C$ (*загальне правило композиції*).

18. Довести, що коли $A \vdash B$ і $B \vee C \vdash D$, то $A \vee C \vdash D$.

19. Довести таке похідне правило виведення:

(а) $A \vdash A \vee B$ (*правило введення диз'юнкції*);

(б) $B \vdash A \vee B$ (*правило введення диз'юнкції*);

(в) $A \wedge B \vdash A$ (*правило вилучення кон'юнкції*);

(г) $A \wedge B \vdash B$ (*правило вилучення кон'юнкції*);

(д) $A, B \vdash A \wedge B$ (*правило введення кон'юнкції*);

(е) $\neg\neg A \vdash A$ (*правило вилучення заперечення*);

(є) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ (*правило ланцюгового висновку* чи *правило силогізму*);

(ж) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$ (*правило перестановки посилок*);

(з) $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$ (*правило об'єднання посилок*);

(и) $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$ (*правило роз'єднання посилок*);

(і) $A \to B, A \to C \vdash A \to (B \wedge C)$ (*правило композиції*);

(ї) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ (*правило контрапозиції*).

20. Обґрунтувати таке похідне правило виведення: $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (*правило* modus tollens).

21. Обґрунтувати похідне правило виведення:

(а) $A \to \neg B \vdash B \to \neg A$;

(б) $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$;

(в) $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$.

22. Обґрунтувати похідне правило виведення: $A \vee B, \neg A \vdash B$ (*правило диз'юнктивного силогізму*).

23. Довести похідне правило виведення

$(A \wedge B) \to C \vdash (A \wedge \neg C) \to \neg B$.

24. Довести таке похідне правило виведення:

(а) $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;

(б) $A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;

(в) $A \to B \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$;

(г) $A \to B \vdash (C \wedge A) \to (C \wedge B)$;

(д) $A \to B \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$;

(е) $A \to B \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$.

25. Перевірити (довести або спростувати), чи виконується таке правило виведення: $A \to B \vdash (A \to C) \to (B \to C)$.

26. Довести таке похідне правило виведення:

(а) $A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C$;

(б) $A \to B, A \to C, \neg B \vee \neg C \vdash \neg A$;

(в) $A \to C, B \to D, \neg C \vee \neg D \vdash \neg A \vee \neg B$;

(г) $A \to C, B \to D, A \vee B \vdash C \vee D$;

(д) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$;

(е) $A \vee B \vee C, \neg A, \neg B \vdash C$.

27. Довести таке похідне правило виведення:

(а) $\neg A \vdash A \to B$;

(б) $A \vdash \neg A \to B$;

(в) $B \vdash A \to B$;

(г) $\neg B \vdash A \to \neg B$.

28. Застосовуючи метатеорему дедукції, довести таку теорему:

(а) $((a \to b) \to a) \to ((a \to b) \to b)$;

(б) $(a \to c) \to (a \to (b \vee c))$;

(в) $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$;

(г) $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$.

29. За допомогою метатеореми дедукції довести таку теорему:

(а) $((a \to b) \to (a \to c)) \to ((a \to (b \to c))$ (*обернена теорема до закону Фреге*);

(б) $(a \to (b \wedge c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ (*обернення аксіоми* $A5$ — *закону композиції*);

(в) $(\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$ (*обернення закону контрапозиції*);

(г) $((a \vee b) \to c) \to ((a \to c) \to (b \to c))$ (*обернення аксіоми* $A8$).

30. Довести наведену теорему числення висловлень за допомогою метатеореми дедукції і порівняти з доведенням цієї теореми безпосередньо за означенням формального доведення.

(а) $(b \to c) \to (b \to (a \to c))$;
(б) $(b \to a) \to ((a \vee b) \to a)$;
(в) $a \to ((b \vee c) \to (a \vee c))$;
(г) $(a \wedge b) \to (c \to b)$;
(д) $(b \to (a \vee c)) \to ((b \to c) \to ((d \to c) \to ((b \vee d) \to c)))$;
(е) $((b \to a) \to c) \to (a \to c)$.

31. Відновлюючи хід доведення метатеореми дедукції, але не використовуючи самої метатеореми, довести, що з вивідності 1) випливає вивідність 2)

(а) 1) $a \to b, b \to c, a \vdash c$;
2) $a \to b, b \to c \vdash a \to c$.
(б) 1) $a \wedge b, a \to (b \to c) \vdash c$;
2) $a \to (b \to c) \vdash (a \wedge b) \to c$.
(в) 1) $a \wedge b \vdash c \to b$;
2) $\vdash (a \wedge b) \to (c \to b)$.
(г) 1) $a \to b, b \to c \vdash a \to c$;
2) $a \to b \vdash (b \to c) \to (a \to c)$.
(д) 1) $a \to c, a \vdash b \vee c$;
2) $a \to c \vdash a \to (b \vee c)$.

32. Доповнити запропоноване формальне доведення чи виведення відповідним аналізом, тобто обґрунтувати кожний його крок. Зокрема, визначити, де і як використовується та чи інша з властивостей відношення вивідності.

(а) $\vdash a \to ((\neg b \wedge \neg c) \to (a \vee (b \vee c)))$
1) $\vdash a \to (a \vee (b \vee c))$;
2) $a \vdash a \vee (b \vee c)$;
) $a, \neg b \wedge \neg c \vdash a \vee (b \vee c)$;
4) $a \vdash (\neg b \wedge \neg c) \to (a \vee (b \vee c))$;
5) $\vdash a \to ((\neg b \wedge \neg c) \to (a \vee (b \vee c)))$.
(б) $\vdash (a \vee b) \to ((a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a))$
1) $(a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a) \vdash (a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a)$;
2) $a \vee b, (a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a) \vdash (a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \to \neg a)$;
3) $\vdash (a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a)$;
4) $a \vee b \vdash (a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a)$;
5) $\vdash (a \vee b) \to ((a \to c) \to ((a \to \neg c) \to \neg a))$.
(в) $a \to b \vdash (a \vee c) \to (b \vee c)$
1) $a \to b, a \vdash b$;

2) $\vdash b \to (b \vee c)$;
3) $b \vdash b \vee c$;
4) $a \to b, a \vdash b \vee c$;
5) $\vdash c \to (b \vee c)$;
6) $c \vdash b \vee c$;
7) $a \to b, c \vdash b \vee c$;
8) $a \to b, a \vee c \vdash b \vee c$;
9) $a \to b \vdash (a \vee c) \to (b \vee c)$.

(г) $\vdash (a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$
1) $a \to b \vdash (a \to \neg b) \to \neg a$;
2) $\vdash \neg b \to a \to \neg b$;
3) $\neg b \vdash a \to \neg b$;
4) $a \to b, \neg b \vdash (a \to \neg b) \to \neg a$;
5) $a \to b, \neg b \vdash a \to \neg b$;
6) $a \to b, \neg b \vdash \neg a$;
7) $a \to b \vdash \neg b \to \neg a$;
8) $\vdash (a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$.

(д) $\neg a \to b \vdash \neg b \to a$
1) $\neg a \to b \vdash (\neg a \to \neg b) \to \neg\neg a$;
2) $\neg b \vdash \neg b$;
3) $\neg b, \neg a \vdash \neg b$;
4) $\neg b \vdash \neg a \to \neg b$;
5) $\neg a \to b, \neg b \vdash (\neg a \to \neg b) \to \neg\neg a$;
6) $\neg a \to b, \neg b \vdash \neg a \to \neg b$;
7) $\neg a \to b, \neg b \vdash \neg\neg a$;
8) $\neg\neg a \vdash a$;
9) $\neg a \to b, \neg b \vdash a$;
10) $\neg a \to b \vdash \neg b \to a$.

(е) $a \to b \vdash (c \wedge a) \to (c \wedge b)$
1) $\vdash (c \wedge a) \to c$;
2) $c \wedge a \vdash c$;
3) $\vdash (c \wedge a) \to a$;
4) $c \wedge a \vdash a$;
5) $a, a \to b \vdash b$;
6) $c \wedge a, a \to b \vdash b$;
7) $a \to b, c \wedge a \vdash b$;
8) $a \to b, c \wedge a \vdash c$;
9) $a \to b, c \wedge a \vdash c \wedge b$;
10) $a \to b \vdash (c \wedge a) \to (c \wedge b)$.

33. Довести за допомогою метатеореми дедукції наведену теорему числення висловлень:

(а) $((a \to b) \to c) \to (b \to c)$;

(б) $((a \to (b \to c)) \to ((c \to d) \to (a \to (b \to d)))$.

34. Довести за допомогою МТД і наведених вище властивостей відношення вивідності таку теорему числення висловлень:

(а) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;

(б) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge d))$;

(в) $(a \vee b) \to (((a \to c) \wedge (b \to d)) \to (c \vee d))$;

(г) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((b \to c) \to (a \to d))$.

35. Довести теорему числення висловлень:

(а) $((a \wedge b) \wedge c) \to (a \wedge (b \wedge c))$ (*асоціативність кон'юнкції*);

(б) $((a \vee b) \vee c) \to (a \vee (b \vee c))$ (*асоціативність диз'юнкції*);

(в) $((a \vee b) \wedge c) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge c))$ (*дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції*);

(г) $((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \to ((a \vee b) \wedge c)$;

(д) $((a \wedge b) \vee c) \to ((a \vee c) \wedge (b \vee c))$ (*дистрибутивність диз'юнкції щодо кон'юнкції*);

(е) $((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \vee c)$.

36. Довести теорему числення висловлень:

(а) $((a \wedge c) \vee (b \wedge d)) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(б) $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$.

37. Довести теорему:

(а) $(a \to (b \wedge c)) \to (a \to b)$;

(б) $(a \to (b \wedge c)) \to (a \to c)$.

38. Використовуючи теорему $\vdash (a \wedge \neg a) \to b$, довести, що формула $\neg(a \wedge \neg a)$ є теоремою числення висловлень (*закон суперечності*).

39. Використовуючи доведений у попередній задачі закон суперечності, довести, що формула $a \vee \neg a$ є теоремою числення висловлень (*закон виключеного третього*).

40. Довести теорему:

(а) $(a \wedge (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$;

(б) $(a \wedge (b \to c)) \to (b \to (a \wedge c))$.

41. Застосовуючи похідні правила виведення і доведені вище теореми, довести, що наведена формула є теоремою числення висловлень.

(а) $(a \vee (a \wedge b)) \to a$;
(б) $a \to (a \wedge (a \vee b))$;
(в) $(a \to \neg a) \to \neg a$;
(г) $(\neg a \to a) \to a$;
(д) $\neg b \to (\neg c \vee (b \wedge c))$;
(е) $(a \to b) \vee (a \to \neg b)$;
(є) $(a \vee b) \to ((a \to b) \to b)$;
(ж) $\neg a \to (a \to b)$;
(з) $a \to (\neg a \to b)$;
(и) $((a \to b) \to b) \to (a \vee b)$;
(і) $a \to (\neg b \to \neg(a \to b))$;
(ї) $(a \wedge (a \to b)) \to b$;
(й) $(\neg b \wedge (a \to b)) \to \neg a$;
(к) $(\neg a \wedge (a \vee b)) \to b$;
(л) $(a \to b) \vee (b \to a)$;
(м) $(\neg a \vee b) \to (a \to b)$;
(н) $(a \to b) \to (\neg a \vee b)$;
(о) $((a \wedge \neg b) \to \neg a) \to (a \to b)$;
(п) $((a \to b) \wedge (a \to \neg b)) \to \neg a$;
(р) $(a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to \neg a)$;
(с) $(a \to (b \wedge \neg b)) \to \neg a$;
(т) $((a \wedge \neg b) \to b) \to (a \to b)$;
(у) $(a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to b)$;
(ф) $(a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to (c \wedge \neg c))$;
(х) $((a \wedge \neg b) \to (c \wedge \neg c)) \to (a \to b)$;
(ц) $((a \to b) \to a) \to (\neg a \to a)$;
(ч) $((a \to b) \to a) \to a$;
(ш) $(a \to b) \to ((\neg a \to b) \to b)$.

42. Доповнити відповідним аналізом доведення теореми $(\neg a \vee \neg b) \to \neg(a \wedge b)$.

1) $a \wedge b \vdash a$;
2) $a \wedge b, \neg a \vdash a$;
3) $\neg a \vdash \neg a$;
4) $a \wedge b, \neg a \vdash \neg a$;
5) $\neg a \vdash \neg(a \wedge b)$;
6) $a \wedge b \vdash b$;
7) $a \wedge b, \neg b \vdash b$;
8) $\neg b \vdash \neg b$;

9) $a \wedge b, \neg b \vdash \neg b$;
10) $\neg b \vdash \neg(a \wedge b)$;
11) $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$;
12) $\vdash (\neg a \vee \neg b) \to \neg(a \wedge b)$.

43. Використовуючи правило введення заперечення, властивості символу вивідності та метатеорему дедукції, довести теорему.
(а) $\neg(a \wedge b) \to (\neg a \vee \neg b)$;
(б) $(\neg a \vee \neg b) \to \neg(a \wedge b)$;
(в) $\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$;
(г) $(\neg a \wedge \neg b) \to \neg(a \vee b)$;
(д) $(a \vee b) \to \neg(\neg a \wedge \neg b)$;
(е) $\neg(\neg a \wedge \neg b) \to (a \vee b)$;
(є) $(a \wedge b) \to \neg(\neg a \vee \neg b)$;
(ж) $\neg(\neg a \vee \neg b) \to (a \wedge b)$.

44. Довести теорему:
(а) $((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \to ((((a \vee c) \wedge (a \vee d)) \wedge (b \vee c)) \wedge (b \vee d))$;
(б) $((a \vee b) \wedge (c \vee d)) \to ((((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee (a \wedge d)) \vee (b \wedge d))$.

45. Довести теорему $((a \to b) \to c) \to ((a \to c) \to c)$.

46. Довести теорему $(a \vee (a \to b)) \wedge (b \vee (\neg a \to \neg b))$.

7. РІВНОСИЛЬНІСТЬ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

Уведемо в алфавіт числення висловлень додатково символ ~ і записуватимемо формулу $A \sim B$ як скорочення для формули $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Формули A і B числення висловлень називають **рівносильними** (еквівалентними), якщо формула $A \sim B$ (тобто $(A \to B) \wedge (B \to A)$) є теоремою числення висловлень.

1. Довести, що:
(а) коли $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma, B \vdash A$, то $\Gamma \vdash A \sim B$;
(б) коли $\Gamma \vdash A \sim B$, то $\Gamma \vdash A \to B$;
(в) коли $\Gamma \vdash A \sim B$, то $\Gamma \vdash B \to A$;
(г) коли $\Gamma \vdash A \sim B$, то $\Gamma, A \vdash B$;
(д) коли $\Gamma \vdash A \sim B$, то $\Gamma, B \vdash A$.

2. Довести, що наведені формули рівносильні (A і B — довільні формули числення висловлень).

(а) A і $\neg\neg A$;
(б) $\neg(A \vee B)$ і $\neg A \wedge \neg B$;
(в) $\neg(A \wedge B)$ і $\neg A \vee \neg B$;
(г) $A \to B$ і $\neg A \vee B$.

3. Довести теорему числення висловлень:
(а) $(a \vee b) \sim ((a \to b) \to b)$;
(б) $(\neg a \to a) \sim a$;
(в) $\neg(a \to b) \sim (a \wedge \neg b)$;
(г) $(a \to \neg b) \sim \neg(a \wedge b)$.

4. Довести теорему:
(а) $(a \to b) \sim ((a \wedge \neg b) \to (c \wedge \neg c))$;
(б) $(a \to b) \sim ((a \wedge \neg b) \to \neg a)$;
(в) $(a \to b) \sim ((a \wedge \neg b) \to b)$;
(г) $(a \vee b) \sim (\neg a \to b)$.

5. Довести, що формули A і B рівносильні.
(а) $A = a \wedge b$, $B = b \wedge a$;
(б) $A = a \vee b$, $B = b \vee a$;
(в) $A = a \wedge (b \wedge c)$, $B = (a \wedge b) \wedge c$;
(г) $A = a \vee (b \vee c)$, $B = (a \vee b) \vee c$;
(д) $A = a \wedge (b \vee c)$, $B = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
(е) $A = a \vee (b \wedge c)$, $B = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
(є) $A = a \vee (a \wedge b)$, $B = a$;
(ж) $A = a \wedge (a \vee b)$, $B = a$;
(з) $A = a \vee a$, $B = a$;
(и) $A = a \wedge a$, $B = a$.

6. Довести теорему:
(а) $(a \to b) \sim \neg(a \wedge \neg b)$;
(б) $(a \vee b) \sim \neg(\neg a \wedge \neg b)$;
(в) $(a \wedge b) \sim \neg(a \to \neg b)$;
(г) $(a \wedge b) \sim \neg(\neg a \vee \neg b)$.

7. Довести, що відношення рівносильності на множині формул числення висловлень рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є еквівалентністю.

8. Довести, що $\vdash A \sim B$ тоді й тільки тоді, коли $\vdash \neg A \sim \neg B$.

9. Нехай $\vdash A \sim B$ і $\vdash C \sim D$. Довести, що:
(а) $\vdash (A \wedge C) \sim (B \wedge D)$;
(б) $\vdash (A \vee C) \sim (B \vee D)$;
(в) $\vdash (A \to C) \sim (B \to D)$.

10. Довести, що:
(а) $A \sim B \vdash (A \wedge C) \sim (B \wedge C)$;
(б) $A \sim B \vdash (C \wedge A) \sim (C \wedge B)$;
(в) $A \sim B \vdash (A \vee C) \sim (B \vee C)$;
(г) $A \sim B \vdash (C \vee A) \sim (C \vee B)$;
(д) $A \sim B \vdash (A \to C) \sim (B \to C)$;
(е) $A \sim B \vdash (C \to A) \sim (C \to B)$.

11. Нехай B — підформула формули A числення висловлень, а A_1 — результат заміни деякого входження B в A формулою B_1. Довести, що $B \sim B_1 \vdash A \sim A_1$ (*теорема про заміну*).

12. Довести, що коли у формулі числення висловлень A замінити її довільну підформулу B_1 формулою B_2, рівносильною B_1, то одержана внаслідок заміни формула A_1 буде рівносильна вихідній формулі A (***метатеорема еквівалентності***).

13. Довести, що коли $A_1, A_2, ..., A_k \vdash B$ і $B \sim C$, то $A_1, A_2, ..., A_k \vdash C$.

14. Доведення теореми $((a \to (b \wedge c)) \wedge (a \to (\neg b \vee \neg c))) \to \neg a$ доповнити відповідним аналізом.
1) $((a \to (b \wedge c)) \wedge (a \to \neg(b \wedge c))) \to \neg a$;
2) $\neg(b \wedge c) \sim (\neg b \vee \neg c)$;
3) $((a \to (b \wedge c)) \wedge (a \to (\neg b \vee \neg c))) \to \neg a$.

15. Довести теорему:
(а) $(a \sim b) \wedge (\neg a \to \neg b)$;
(б) $(a \sim b) \wedge (\neg b \to \neg a)$;
(в) $(a \sim b) \sim ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$;
(г) $(a \sim b) \sim ((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b))$;
(д) $\neg(a \sim b) \sim ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b))$;
(е) $\neg(a \sim b) \sim ((a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b))$.

16. Використовуючи метатеорему еквівалентності й раніше доведені теореми, довести, що наведена формула є теоремою числення висловлень.
(а) $(((b \vee c) \to a) \wedge ((\neg b \wedge \neg c) \to a)) \to a$;
(б) $(a \to ((\neg a \vee b) \vee c)) \to ((a \to (a \to b)) \vee (a \to c))$;
(в) $(a \vee b) \to ((\neg b \vee \neg c) \to (a \vee \neg c))$;
(г) $\neg(a \vee (b \wedge c)) \sim ((\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c))$;

(д) $(a \to ((\neg a \vee \neg b) \vee \neg c)) \to ((a \to (a \wedge b)) \to (a \to c))$;
(е) $(((a \vee b) \vee c) \vee d) \sim (((\neg a \wedge \neg b) \wedge \neg c) \to d)$.

17. Довести:
(а) $\vdash a \to ((a \wedge b) \sim b)$;
(б) $\vdash b \to ((a \vee b) \sim a)$.

18. Довести:
(а) $\vdash \neg a \to ((a \wedge b) \sim a)$;
(б) $\vdash \neg a \to ((a \vee b) \sim b)$.

19. Довести теорему:
(а) $\neg(a \vee \neg a) \sim (a \wedge \neg a)$;
(б) $\neg(a \wedge \neg a) \sim (a \vee \neg a)$.

20. Довести:
(а) $\vdash (a \wedge (b \vee \neg b)) \sim a$;
(б) $\vdash ((a \vee \neg a) \vee b) \sim (a \vee \neg a)$;
(в) $\vdash (a \vee (b \wedge \neg b)) \sim a$;
(г) $\vdash ((a \wedge \neg a) \wedge b) \sim (a \wedge \neg a)$.

21. Довести:
(а) $\vdash ((a \vee b) \to c) \sim ((\neg a \to b) \to c)$;
(б) $\vdash ((a \wedge b) \to c) \sim ((a \wedge \neg c) \to \neg b)$.

22. Довести:
(а) $\vdash (a \to (b \wedge c)) \sim ((a \to b) \wedge (a \to c))$;
(б) $\vdash ((a \vee b) \to c) \sim ((a \to c) \wedge (b \to c))$.

23. Довести теорему:
(а) $(((a \to c) \wedge (b \to c)) \wedge (a \vee b)) \to c$;
(б) $(((a \to b) \wedge (c \to d)) \wedge \neg(b \vee d)) \to \neg(a \vee c)$;
(в) $(a \to b) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge c))$;
(г) $(a \to b) \to ((a \vee c) \to (b \vee c))$;
(д) $(((a \to b) \wedge (c \to d)) \wedge (a \vee c)) \to (b \vee d)$;
(е) $((((a \to b) \wedge (c \to d)) \wedge (a \vee c)) \wedge \neg(b \wedge d)) \to ((b \to a) \wedge (d \to c))$.

24. Довести:
(а) $\vdash (a \to (b \vee c)) \sim ((a \to b) \vee (a \to c))$;
(б) $\vdash ((a \wedge b) \to c) \sim ((a \to c) \vee (b \to c))$.

25. Довести теорему $(a \to (b \to c)) \sim ((a \wedge b) \to c)$.

26. Користуючись метатеоремою еквівалентності й раніше доведеними теоремами числення висловлень, довести, що наведена формула є теоремою числення висловлень.

(а) $((a \wedge \neg b) \rightarrow (c \vee d)) \rightarrow (((\neg c \rightarrow d) \rightarrow ((a \rightarrow (b \wedge c))) \rightarrow$
$\rightarrow (\neg(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \vee (b \wedge c)))))$;

(б) $(b \rightarrow (\neg a \rightarrow c)) \rightarrow (((a \wedge \neg b) \rightarrow b) \rightarrow (\neg(a \rightarrow b) \rightarrow (a \vee c)))$.

27. Довести, що коли T — теорема, то для довільної формули A числення висловлень формула $(A \sim T) \sim A$ також є теоремою.

28. Довести, що коли T — теорема, то для довільної формули A числення висловлень формула $(A \sim \neg T) \rightarrow \neg A$ також є теоремою.

29. Нехай $F(a)$ — довільна формула числення висловлень, що містить літеру a, T_1 і T_2 — довільні теореми числення висловлень. Довести, що наведена формула є теоремою числення висловлень.

(а) $(F(T_1) \wedge F(\neg T_2)) \rightarrow (((a \sim T_1) \rightarrow F(a)) \wedge ((a \sim \neg T_2) \rightarrow F(a)))$;

(б) $(((a \sim T_1) \rightarrow F(a)) \wedge ((a \sim \neg T_2) \rightarrow F(a))) \rightarrow (((a \sim T_1) \vee$
$\vee (a \sim \neg T_2)) \rightarrow F(a))$;

(в) $(F(T_1) \wedge F(\neg T_2)) \rightarrow F(a)$.

30. Довести, що коли T_1 і T_2 — теореми, то для довільної формули A числення висловлень наведена формула також є теоремою.

(а) $(T_1 \wedge \neg T_2) \rightarrow A$;

(б) $(A \sim T_1) \vee (A \sim \neg T_2)$.

8. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ. КВАНТОРИ

***n*-місним предикатом** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множині M називається довільна функція типу $M^n \rightarrow B$, де $B = \{0, 1\}$ — булевий (двійковий) алфавіт.

Множина M називається **предметною областю**, або універсальною множиною, а $x_1, x_2, ..., x_n$ — **предметними змінними**, або термами предиката P.

Множина елементів $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M^n$ таких, що $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, називається **областю істинності** (або **характеристичною множиною**) предиката P.

Якщо $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, то згідно з логічною інтерпретацією казатимемо, що предикат P є істинним на $(a_1, a_2, ..., a_n)$. В іншому разі казатимемо, що предикат P є хибним.

Вираз $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, що перетворюється на висловлення після заміни всіх його змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ елементами певної предметної області M, називається **пропозиційною (висловлювальною) формою**.

Приклад 8.1. Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел, тоді вирази "x — просте число", "x ділить y", "$x + y = z$", "$x < 5$" тощо є пропозиційними формами.

Пропозиційна форма є одним зі способів задання предиката.

Для $n = 1$ предикат $P(x)$ називається **одномісним**, або унарним, для $n = 2$ $P(x, y)$ — **двомісним**, або бінарним, для $n = 3$ $P(x, y, z)$ — **тримісним**, або тернарним.

Нехай $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ — n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають предикат $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень термів, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ дорівнюють 1.

Диз'юнкцією $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають предикат $T(x_1, x_2, ..., x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень термів, на яких принаймні один із предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ дорівнює 1.

Запереченням $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають предикат $S(x_1, x_2, ..., x_n)$, що дорівнює 1 на тих і лише тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ дорівнює 0.

Аналогічно вводять й інші логічні операції $\to$, ~ тощо.

Знаючи, як виконуються окремі операції, можна утворювати вирази або формули, операндами яких є предикати. Наприклад, формула $P_1(x) \vee (\neg P_3(x, z) \to P_2(y, x, z))$ задає деякий предикат $Q(x, y, z)$. Значення предиката Q неважко обчислити для будь-якого набору значень його термів x, y, z, виходячи зі значень предикатів P_1, P_2, P_3 на цьому наборі.

Нехай $P(x)$ — предикат на множині M. Тоді **квантор загальності** — це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення "для всіх x з M $P(x)$ істинно"; для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, записують $\forall x P(x)$ (читається: "для всіх x P від x").

Іншу операцію називають **квантором існування** і позначають її знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ — деякий предикат на множині M, то висловлення "існує у множині M елемент x такий, що $Q(x)$ істинно" записують у вигляді $\exists x Q(x)$ і читають "існує такий x, що Q від x" або "є такий x, що Q від x".

Приклад 8.2. Розглянемо два бінарні предикати на множині натуральних чисел: предикат “x менше y” і предикат “x ділить y”. Перший з них записуватимемо у традиційній формі $x < y$, а другий — у вигляді $x \mid y$. Тоді неважко переконатись, що висловлення $\forall x \exists y (x < y)$ і $\forall x \exists y (x \mid y)$ є істинними, а висловлення $\exists y \forall x (x < y)$ і $\exists y \forall x (x \mid y)$ — хибні. Істинними будуть, наприклад, висловлення $\forall x (0 < x^2 - x + 1)$, $\exists x ((x \mid 1) \wedge (\neg(1 < x)))$, $\forall x ((x < 1) \rightarrow (x < 2))$, $\forall x (((2 \mid x) \wedge (3 \mid x)) \rightarrow$ $\rightarrow (6 \mid x))$, а висловлення $\forall x (2 \mid x)$, $\exists x (x^2 < 0)$, $\forall x ((3 \mid x) \rightarrow (6 \mid x))$ — хибні.

Областю дії квантора називають вираз, до якого відноситься цей квантор. Область дії квантора позначають за допомогою дужок. Ліва дужка, що відповідає початку області дії, записується безпосередньо після кванторної змінної квантора, а відповідна їй права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Там, де це не викликає невизначеності, дужки можна випускати і замість $\forall x (P(x))$ або $\exists x (P(x))$ записувати відповідно $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$.

Приклад 8.3. У всіх нижченаведених кванторних виразах область дії квантора підкреслено.

$\exists x \underline{((3|x) \rightarrow (6|x))}$, $\quad \exists x \underline{(3|x)} \rightarrow (6|x)$,

$\forall x \underline{((x^2 < 9) \rightarrow (x < 3))}$, $\quad \forall x \underline{(x^2 < 9)} \rightarrow (x < 3)$.

Нехай $P(x)$ — деякий предикат на M. Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називається **зв’язуванням** змінної x. Інші назви — навішування квантора на змінну x (або на предикат $P(x)$), або квантифікація змінної x. Змінна x, на яку навішено квантор, називається **зв’язаною**, інакше змінна x називається **вільною**.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$ і $\exists$ до змінних x і y двомісного предиката $A(x, y)$, отримуємо чотири різні одномісні предикати $\forall x A(x, y)$, $\exists x A(x, y)$, $\forall y A(x, y)$ і $\exists y A(x, y)$. У перших двох змінна x є зв’язаною, а змінна y — вільною, а у двох останніх — навпаки.

Вираз $\forall x A(x, y)$ (читається “для всіх x A від x і y”) є одномісним предикатом $B(y)$. Він є істинним для тих і тільки тих $b \in M$, для яких одномісний предикат $A(x, b)$ є істинним для всіх x з M.

Приклад 8.4. Розглянемо двомісний предикат $A(x, y)$, означений на множині $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ за допомогою табл. 4.

Таблиця 4

$x \setminus y$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	0
a_2	0	1	1	1
a_3	0	0	1	1
a_4	0	0	1	0

Таблиці істинності для чотирьох відповідних одномісних предикатів, отримуваних з $A(x, y)$ навішуванням одного квантора, наведено у табл. 5.

Таблиця 5

y	$\forall x A(x, y)$	y	$\exists x A(x, y)$	x	$\forall y A(x, y)$	x	$\exists y A(x, y)$
a_1	0	a_1	0	a_1	0	a_1	1
a_2	0	a_2	1	a_2	0	a_2	1
a_3	1	a_3	1	a_3	0	a_3	1
a_4	0	a_4	1	a_4	0	a_4	1

У всіх чотирьох випадках до вільної змінної, що залишилась, можна застосовувати один із кванторів і, зв'язавши в такий спосіб обидві змінні, перетворити відповідні предикати у висловлення.

У результаті отримаємо такі висловлення:

$\forall x(\forall y A(x, y)) = 0$, $\forall y(\forall x A(x, y)) = 0$,

$\exists x(\exists y A(x, y)) = 1$, $\exists y(\exists x A(x, y)) = 1$,

$\exists y(\forall x A(x, y)) = 1$, $\exists x(\forall y A(x, y)) = 0$,

$\forall y(\exists x A(x, y)) = 0$, $\forall x(\exists y A(x, y)) = 1$.

Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його на висловлення (іноді таку предикатну формулу називають **замкненою**).

1. Бінарний предикат $P(x, y)$ задано на універсальній множині $M = \{a, b\}$ таблицею:

1)

$x \setminus y$	a	b
a	0	1
b	1	1

2)

$x \setminus y$	a	b
a	1	1
b	0	0

3)

$x \setminus y$	a	b
a	0	1
b	0	1

Визначити істинність формули.
(а) $\forall x P(x, a)$;
(б) $\forall x P(x, b)$;
(в) $\exists x P(x, a)$;
(г) $\exists x P(x, b)$;
(д) $\forall y P(a, y)$;
(е) $\forall y P(b, y)$;
(є) $\exists y P(a, y)$;
(ж) $\exists y P(b, y)$;
(з) $\forall x \forall y P(x, y)$;
(и) $\forall y \forall x P(x, y)$;
(і) $\exists x \exists y P(x, y)$;
(ї) $\exists y \exists x P(x, y)$;
(й) $\forall x \exists y P(x, y)$;
(к) $\exists y \forall x P(x, y)$;
(л) $\forall y \exists x P(x, y)$;
(м) $\exists x \forall y P(x, y)$.

2. Сформулювати наведене твердження звичайною мовою:
(а) $(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \to P(x, z)$, де P — предикат “передує” і Q — предикат “збігаються”, $x, y, z \in N$;
(б) $\neg((D(x, 2) \wedge D(x, 6)) \to D(x, 12)$, де D — предикат “ділиться на”, $x \in N$;
(в) $(((D(x, n) \wedge D(x, m)) \to D(x, nm)) \sim V(n, m)$, де D — предикат “ділиться на”, V — предикат “взаємно прості”, $x, n, m \in N$;
(г) $(P(x, y) \wedge P(y, z)) \to (P(x, z) \vee Q(x, z))$, де P — предикат “паралельні прямі” і Q — предикат “збігаються”, x, y, z — прямі.

3. Зобразити таблицями одномісні предикати: “число x кратне 2 і кратне 3” і “число x кратне 2 або кратне 3” на універсальній множині натуральних чисел $\{1, 2, ..., 12\}$.

4. Зобразити таблицею двомісний предикат, заданий нерівністю $|x + y| \leq 2$, де x і y належать предметній області $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

5. Нехай задано предикати: $N(x)$ — "x — натуральне число", $Z(x)$ — "x — ціле число", $P(x)$ — "x — просте число", $E(x)$ — "x — парне число", $O(x)$ — "x — непарне число", $D(x, y)$ — "x ділиться на y". Сформулювати звичайною мовою такі висловлення та визначити їх значення істинності:

(а) $P(2)$;
(б) $P(1)$;
(в) $E(2) \wedge P(2)$;
(г) $\forall x(D(x, 2) \rightarrow E(x))$;
(д) $\exists x(E(x) \wedge D(6, x))$;
(е) $\forall x(N(x) \rightarrow Z(x))$;
(є) $\exists x(Z(x) \rightarrow N(x))$;
(ж) $\forall x(Z(x) \rightarrow N(x))$;
(з) $\exists x(Z(x) \rightarrow (O(x) \vee E(x))$;
(и) $\forall x(Z(x) \rightarrow (E(x) \vee \neg E(x))$;
(і) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(E(y) \wedge D(y, x)))$;
(ї) $\forall x \forall y(O(x) \rightarrow (P(y) \rightarrow D(y, x)))$;
(й) $\forall x \exists y((Z(x) \wedge Z(y)) \rightarrow D(x, y)))$;
(к) $\exists y \forall x((Z(x) \wedge Z(y)) \rightarrow D(x, y)))$;
(л) $\forall x \forall y((O(x) \wedge E(y)) \rightarrow \neg D(x, y))$;
(м) $\forall x \exists y((O(y) \wedge E(x)) \rightarrow D(x, y))$.

6. Нехай x, y — якісь люди, предикат $F(x, y)$ означає "x батько y". Сформулювати звичайною мовою такі висловлення та визначити їх значення істинності:

(а) $\forall x \forall y F(x, y)$;
(б) $\forall y \exists x F(x, y)$;
(в) $\exists x \forall y F(x, y)$;
(г) $\exists y \exists x F(x, y)$;
(д) $\forall x \exists y F(x, y)$;
(е) $\exists y \forall x F(x, y)$.

7. Перед пропозиційною формою написати відповідні квантори так, щоб отримати істинне висловлення (x, y, z — дійсні числа).

(а) $x \geq 0$;
(б) $5x = 15$;
(в) $x^2 + 1 > 0$;

(г) $(x + y)z = xz + yz$;
(д) $x + y = 5 + x$;
(е) $(x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)$.

8. Нехай $P(x)$ — предикат "$3 \mid x$", а $Q(x)$ — предикат "$6 \mid x$" на універсальній множині $\{1, 2, 3, ..., 15\}$. Зобразити таблицею предикат
(а) $P(x) \vee Q(x)$;
(б) $P(x) \wedge Q(x)$;
(в) $\neg P(x) \vee Q(x)$;
(г) $P(x) \to Q(x)$;
(д) $Q(x) \to P(x)$;
(е) $P(x) \vee \neg Q(x)$.

9. Довести, що область істинності предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ збігається з теоретико-множинним перетином областей істинності предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$.

10. Довести, що областю істинності предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ є об'єднання областей істинності предикатів $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$.

11. Довести, що областю істинності предиката $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ є доповнення (до множини M^n) області істинності предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

12. Довести, що область істинності предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n) \to Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ збігається з областю істинності предиката.
(а) $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$;
(б) $\neg(P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge \neg Q(x_1, x_2, ..., x_n))$.

13. Довести, що область істинності предиката $P(x_1, ..., x_n) \sim Q(x_1, ..., x_n)$ збігається з областю істинності предиката.
(а) $(\neg P(x_1, ..., x_n) \vee Q(x_1, ..., x_n)) \wedge (P(x_1, ..., x_n) \vee \neg Q(x_1, ..., x_n))$;
(б) $(\neg P(x_1, ..., x_n) \wedge \neg Q(x_1, ..., x_n)) \vee (P(x_1, ..., x_n) \wedge Q(x_1, ..., x_n))$;
(в) $(P(x_1, ..., x_n) \to Q(x_1, ..., x_n)) \wedge (Q(x_1, ..., x_n) \to P(x_1, ..., x_n))$.

14. Виразити область істинності предиката через області істинності відповідних елементарних предикатів.
(а) $(P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge R(x) \vee \neg R(x) \wedge \neg P(x)$;
(б) $(P(x) \to R(x)) \wedge (Q(x) \to \neg R(x)) \wedge (P(x) \to \neg R(x))$;
(в) $\neg(P(x) \vee Q(x)) \sim (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$;
(г) $(\neg P(x) \to Q(x)) \vee P(x) \wedge Q(x)$.

15. Зобразити на координатній площині область істинності даного бінарного предиката $P(x, y)$, предметною областю якого є множина R дійсних чисел.

(а) $(x^2 - y^2 = 0) \vee (x^2 + y^2 = 4)$;
(б) $(|x - y| \leq 2) \wedge \neg(y > 0)$;
(в) $(x \geq 0) \rightarrow (y < 0)$;
(г) $(|x + y| < 2) \sim (x^2 + y^2 \geq 1)$;
(д) $(2x - y \geq 0) \rightarrow \neg(x < 0)$;
(е) $(x^2 - y^2 < 3) \sim (|x - y| \geq 1)$.

16. Перевірити за допомогою діаграм Венна та методу логічних таблиць, чи є несуперечним такий набір тверджень про властивості P, Q, R:

(а) 1) Множина елементів, які не мають властивості Q, але мають властивість R, порожня.
2) Кожен елемент, що має властивість R, має також властивість P.
3) Множина елементів, що мають властивість P, але не мають ані властивості Q, ані властивості R, непорожня.
4) Множина елементів, що мають властивості P і R, є підмножиною множини елементів, що мають властивість Q.

(б) 1) Множина елементів, що мають властивість R, непорожня.
2) Кожен елемент, що має властивість P, має також властивість R.
3) Будь-які елементи, що мають властивості Q і R, мають також властивість P.
4) Множина елементів, що мають властивості P і R, порожня.

(в) 1) Множина елементів, що мають властивість P, непорожня.
2) Множина елементів, що мають властивості P і Q, порожня.
3) Немає елементів, що мають одночасно властивості P і R.
4) Множина елементів, що мають властивість P, але не мають ані властивості Q, ані властивості R, порожня.

17. Записати символікою логіки предикатів твердження: “Якщо якийсь елемент x має властивість P і не має властивості Q, то з того, що x не має властивості R, випливає, що елемент x може або не мати властивості P, або мати властивість Q”.

18. Нехай на універсальній множині людей Б(q, x) означає: “q — батько x”, М(p, x) означає: “p — мати x”, Ч(x) означає: “x — чоловік”. Записати через предикати Б, М, Ч, що:

(а) a — брат b;
(б) a і b — брати;
(в) a — небіж b;
(г) a — дідусь b;
(д) a — онук, а b — онучка c;
(е) a — сестра батька b.

19. Означимо на числовій універсальній множині тернарні предикати Д(x, y, z) і М(x, y, z) так:

Д$(x, y, z) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $x + y = z$,

М$(x, y, z) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $xy = z$.

Сформулювати словами смисл наведеної формули і визначити її істинність, якщо універсальною множиною є 1) N; 2) Z; 3) Q; 4) R.

(а) $\exists y \forall x$Д(x, y, x);
(б) $\exists y \forall x$М(x, y, x);
(в) $\forall x \exists y$Д(x, y, x);
(г) $\forall x \exists y$М(x, y, x);
(д) $\forall x \forall z \exists y$Д$(x, y, z)$;
(е) $\forall x \forall z \exists y$М$(x, y, z)$.

20. Зобразити таблично всі двомісні предикати, означені на одноелементній універсальній множині $M = \{a\}$.

21. Зобразити таблично всі двомісні предикати, означені на двохелементній універсальній множині $M = \{a, b\}$.

22. Визначити, скільки є різних тримісних предикатів, означених на:
(а) одноелементній універсальній множині;
(б) двохелементній універсальній множині.
Відповідь обґрунтувати.

23. Визначити, скільки є різних n-місних предикатів, означених на універсальній множині, що містить k елементів.

24. Визначити область дії кожного квантора.

(а) $\exists x(P(x) \to \forall y((Q(y) \vee \exists z P(z)) \sim \neg P(y)))$;
(б) $\exists x(P(y) \to (P(x) \wedge \exists z(Q(z) \sim (\exists y(Q(y) \vee Q(x))))) \wedge \forall x(P(x) \to$
$\to \neg Q(y))$;
(в) $\forall x((x^2 y > 0) \to \exists y(y > 0))$;
(г) $\exists x(x > 3) \wedge \forall x \forall y(xy^2 > 0)$.

25. Вказати вільні й зв'язані змінні в наведеному виразі. Для кожної зв'язаної змінної визначити, яким саме квантором вона зв'язана.

(а) $(P(x) \to (\forall y(Q(x, y) \vee \exists z P(z))) \sim \neg P(z))$;

(б) $\exists x(P(y) \to (P(x) \wedge \exists z(Q(z) \sim \exists y(Q(y) \vee Q(x)))) \wedge \forall x(P(x) \to$
$\to \neg(\exists z Q(z)))$;

(в) $\forall x((x^2 y > 0) \to (y > 0))$;

(г) $(x > 1) \wedge \forall x \forall y(xy^2 > 0)$;

(д) $\forall x \forall y((x < y) \to \exists z((x < z) \wedge (z < y)))$.

26. Нехай універсальною множиною є множина R дійсних чисел. Визначити, є наведений вираз висловленням чи висловлювальною формою. У першому випадку вказати, істинне чи хибне висловлення; у другому — навісити квантори так, щоб одержати істинне висловлення.

(а) $\exists y(x < y)$;

(б) $\forall x(x^2 + y^2 = 1)$;

(в) $\exists y \forall x(xz = xy)$;

(г) $\forall x \exists z(x + y = z)$;

(д) $\forall x \forall y \exists z(xy = z)$;

(е) $(x < 4) \to (|x| < 2)$;

(є) $\forall y \exists z(yz = x - 2)$;

(ж) $\exists p \forall x(x^2 + px + q > 0)$.

27. Порівняти область дії квантора і значення істинності двох виразів (універсальною множиною є множина N натуральних чисел).

(а) $\forall x(x > 2) \to (1 > 2)$ і $\forall x((x > 2) \to (1 > 2))$;

(б) $\exists x(x \mid 12) \to (5 \mid 12)$ і $\exists x((x \mid 12) \to (5 \mid 12))$;

(в) $\forall x(x > 2) \to (3 > 2)$ і $\forall x((x > 2) \to (3 > 2))$;

(г) $\exists x(x \mid 12) \to (3 \mid 12)$ і $\exists x((x \mid 12) \to (3 \mid 12))$.

28. Універсальна множина — це множина N натуральних чисел. Проаналізувати область дії кванторів і значення істинності висловлення.

(а) $\forall x \forall y(\exists z((z > x) \wedge (z < y)) \sim (x < y))$;

(б) $\forall x \forall y \exists z(((z > x) \wedge (z < y)) \sim (x < y))$.

9. ФОРМУЛИ. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ. ТОТОЖНО ІСТИННІ ФОРМУЛИ. РІВНОСИЛЬНІСТЬ ФОРМУЛ

Поняття **формули логіки предикатів (предикатної формули** або просто формули) на предметній області M означимо індуктивно.

1. Усі предикати $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множині M є формулами. Такі формули називають **елементарними**, або **атомарними**.

2. Якщо A і B — формули, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \sim B)$ також є формулами.

3. Якщо $A(x)$ — формула, а x — вільна змінна в $A(x)$, то $(\forall x(A(x)))$ і $(\exists x(A(x)))$ також формули.

4. Інших формул, крім утворених за правилами 1–3, немає.

Зокрема, усі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів, оскільки висловлення — це нульмісні предикати.

Для зручності домовляються про такі правила скорочення кількості дужок у формулах. По-перше, залишають усі умови скорочення кількості дужок, які було прийнято в алгебрі висловлень, виходячи з пріоритету логічних операцій. По-друге, традиційно випускають зовнішні дужки. Вважають, що квантори мають більший пріоритет, аніж логічні операції. Випускають також дужки, що позначають область дії квантора, якщо остання є елементарною формулою. Нарешті, не пишуть дужки між кванторами, що слідують один за одним. При цьому такі кванторні операції виконують у порядку, зворотному до їх слідування (справа наліво).

Нехай $A = \langle M, \Omega, \pi \rangle$ — алгебрична система. Інтерпретація числення (формальної теорії) T складається з множини M і відображення γ, що ставить у відповідність кожній предикатній змінній певне відношення (предикат) $R \in \pi$ на множині M, кожній функціональній букві (якщо такі в теорії є) — якусь операцію $\varphi \in \Omega$ на множині M, кожній вільній предметній змінній — елемент множини M. Постійні терми числення (тобто терми, що не містять предметних змінних) також відображаються в елементи множини M. Носій M алгебричної системи називають **областю інтерпретації**, а саму алгебричну систему — **інтерпретацією** формальної теорії T. Результатом інтерпретації теорії T буде інтерпретація формул числення T на множині M.

Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ — деяка формула логіки предикатів на множині (області інтерпретації) M. При логічній (істинnісній) інтерпретації формули F можливі такі ситуації.

1. Існує інтерпретація на множині M, для якої формула F перетворюється на істинне висловлення. У цьому разі формула F називається **виконуваною в області M**.

Якщо для F існує область M, в якій F є виконуваною, то формула F називається просто **виконуваною**.

2. Якщо формула F набуває значення 1 (тобто є виконуваною) для всіх інтерпретацій на множині M, то вона називається **тотожно істинною в M**.

Формула, тотожно істинна в будь-яких M, називається **тотожно істинною**, або **логічно загальнозначущою** (скорочено — **лзз**).

3. Якщо формула F є невиконуваною в M, то вона називається **тотожно хибною в M**. Формула, невиконувана в усіх M, називається **тотожно хибною**, або **суперечністю**.

Приклад 9.1. 1) Нехай задано предикатну формулу $\forall y(P(x, y) \to \neg Q(y))$. Побудуємо таку її інтерпретацію на множині N натуральних чисел. Предикатній змінній P поставимо у відповідність бінарне відношення (предикат) $x \mid y$, змінній Q — унарне відношення (предикат) "y — просте число", а вільній предметній змінній x — число 4 (елемент множини N). Унаслідок такої інтерпретації дістанемо висловлення $\forall y((4 \mid y) \to \neg$"$y$ — просте число"), істинне на множині N. Неважко змінити інтерпретацію даної формули так, щоб одержати хибне висловлення на множині N (наприклад, замінити змінну x на 2 та ін.). Отже, ця формула виконувана (бо виконувана на множині N), однак вона не є тотожно істинною (зокрема, тому що вона не тотожно істинна на множині N).

2) Формула $\exists x P(x, y) \to \forall x P(x, y)$ є виконуваною і тотожно істинною в усіх одноелементних областях M. Формула $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно істинна, а формула $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge \neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно хибна. Тотожно істинними будуть формули $\forall x P(x) \to P(y)$ і $P(y) \to \exists x P(x)$.

Формули P_1 і P_2 логіки предикатів називають **рівносильними (еквівалентними) на області інтерпретації M**, якщо за всіх можливих інтерпретацій на M вони набувають однакових значень істинності.

Формули P_1 і P_2, рівносильні на довільній області інтерпретації, називають **рівносильними (логічно рівносильними**, або **логічно еквівалентними**) і позначають $P_1 = P_2$.

Приклад 9.2. 1) Неважко переконатись у рівносильності формул, яка описує переставність однойменних кванторів у двомісних предикатах: $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$ і $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

2) Доведемо рівносильність, що описує дистрибутивність квантора загальності щодо кон'юнкції $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

Нехай ліва частина цього співвідношення є істинною для якихось предикатів P і Q, визначених на деякій універсальній множині M. Тоді для будь-якого $a \in M$ істинною буде кон'юнкція $P(a) \wedge Q(a)$, тому $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільних, а отже, формула $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ є істинною. Якщо ліва частина хибна, то це означає, що для якогось $a \in M$ хибним є або $P(a)$, або $Q(a)$. Тому хибним буде або $\forall xP(x)$, або $\forall xQ(x)$, а отже, хибною буде й права частина.

3) Доведемо ще одне корисне і популярне в логіці та математиці рівносильне співвідношення: $\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x))$.

Нехай для деяких предиката P і предметної області M ліва частина істинна. Тоді не існує $a \in M$, для якого $P(a)$ істинне. Отже, для всіх $a \in M$ $P(a)$ хибне, тобто $\neg P(a)$ істинне. Таким чином, права частина є істинною. Якщо ліва частина хибна, то існує $b \in M$, для якого $P(b)$ істинне, тобто $\neg P(b)$ — хибне. Отже, права частина буде також хибною.

Можливість проведення рівносильних перетворень для предикатних формул дає змогу означити в логіці предикатів поняття певної канонічної, або нормальної, форми.

Формула, що має вигляд $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_nF$, де $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ — квантори, а F — формула, яка не містить кванторів і є областю дії всіх n кванторів, називається **випередженою (пренексною) нормальною формулою**, або формулою у випередженій формі.

Формула, яка знаходиться у випередженій формі і рівносильна формулі F, називається **випередженою (пренексною) формою** F.

1. Довести, що коли предикатна формула $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_k$ виконувана, то виконуваною є кожна з формул P_i, $i = 1, 2, ..., k$. Чи правильне обернене твердження?

2. Довести, що предикатна формула $P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_k$ виконувана тоді й тільки тоді, коли виконуваною є принаймні одна з формул P_i, $i = 1, 2, ..., k$.

3. Довести, що коли формула $\exists x\forall yP(x, y)$ є виконуваною, то виконуваною буде й формула $\forall y\exists xP(x, y)$.

4. Довести, що предикатна формула $\forall x(P(x) \to P(y))$ виконувана на будь-якій непорожній множині.

5. Довести, що предикатна формула
$P(x, y) \vee \neg P(x, z) \vee P(y, x) \vee \neg P(y, z) \vee P(z, x) \vee \neg P(z, y)$
(а) виконувана на будь-якій множині M, що містить не менше трьох елементів;
(б) є невиконуваною на двохелементній множині M.

6. Довести, що коли формула A логіки предикатів виконувана на множині M, то A виконувана на будь-якій множині M_1, потужність якої не менша за потужність множини M.

7. Довести, що коли формула A логіки предикатів виконувана на одноелементній множині, то A виконувана на будь-якій непорожній множині.

8. Довести, що формула логіки предикатів $Q(x) \wedge \neg Q(y)$ виконувана на двохелементній множині, але не є виконуваною на одноелементній множині.

9. Довести, що формула логіки предикатів $\exists y \forall x (Q(x) \wedge \neg Q(y))$ є невиконуваною.

10. Перевірити (довести чи спростувати), чи буде виконуваною формула $\forall x \exists y (Q(x) \wedge \neg Q(y))$.

11. Довести, що формула логіки предикатів $\exists x \exists y ((P(x)) \vee Q(y)) \wedge$ $\wedge (\neg P(x) \wedge \neg Q(y)))$ є невиконуваною.

12. Визначити, на якій множині формула логіки предикатів $P(x) \rightarrow P(y)$ є:
(а) виконуваною;
(б) тотожно істинною.

13. Довести, що:
(а) формула $P(x)$ логіки предикатів виконувана тоді й тільки тоді, коли виконуваною є формула $\exists x P(x)$;
(б) формула $P(x)$ логіки предикатів тотожно істинна тоді й тільки тоді, коли тотожно істинною є формула $\forall x P(x)$.

14. Довести, що формула логіки предикатів $\forall x \forall y (P(x, y) \vee$ $\vee \neg Q(x, y))$ виконувана на довільній множині, але не є тотожно істинною.

15. Записати формулу логіки предикатів, яка містить двомісний предикат і є тотожно істинною на триелементній множині, але не є тотожно істинною на множині, що містить більше ніж три елементи.

16. Навести приклад формули логіки предикатів, яка не є виконуваною на множині, що містить рівно три елементи, але виконувана на множині, що містить більше трьох елементів.

17. Довести, що формула логіки предикатів $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge$ $\wedge \neg P(x, y))$ невиконувана.

18. Довести, що формула логіки предикатів

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x (\neg P(x, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z))$$

є невиконуваною на множині, яка містить рівно чотири елементи. Чи буде вона виконуваною на множині, що містить більше чотирьох елементів? Відповідь обґрунтувати.

19. Довести, що відношення рівносильності формул логіки предикатів має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності, тобто є еквівалентністю.

20. Довести, що формули логіки предикатів $\forall x (P(x) \to P(y))$ і $\forall x (P(x)) \to P(y)$ рівносильні на будь-якій одноелементній множині $\{a\}$.

21. Побудувавши відповідну інтерпретацію, довести, що формули логіки предикатів $\forall x (P(x) \to P(y))$ і $\forall x (P(x)) \to P(y)$ нерівносильні на множині, яка містить більше одного елемента.

22. Визначити, чи існує інтерпретація з носієм $M = \{a, b\}$, для якої була б виконуваною формула $\forall x \exists y (P(x, y, z) \vee Q(x, y, z))$.

23. Методом побудови інтерпретації над довільною (непорожньою) множиною довести рівносильність.

(а) $\neg(\exists x P(x)) = \forall x (\neg P(x))$;

(б) $\neg(\forall x P(x)) = \exists x (\neg P(x))$;

(в) $\exists x P(x) = \neg(\forall x (\neg P(x)))$;

(г) $\forall x P(x) = \neg(\exists x (\neg P(x)))$.

24. Методом побудови інтерпретації над довільною непорожньою множиною довести рівносильність:

(а) $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$;

(б) $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

25. Показати, що формули логіки предикатів $\forall x \exists y P(x, y)$ і $\exists y \forall x P(x, y)$ рівносильні на будь-якій одноелементній множині, але не є рівносильними на множині, що містить більше одного елемента.

26. Довести, що формула $\exists xP(x, y) \to \forall xP(x, y)$ є тотожно істинною в усіх одноелементних предметних областях M.

27. Довести, що формули логіки предикатів P і Q рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула $P \sim Q$ тотожно істинна.

28. Довести, що формули логіки предикатів P і Q рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ тотожно істинна.

29. Довести, що формула $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно істинна, а формула $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge \neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно хибна.

30. Нехай змінна x є вільною змінною у формулі $B(x)$ і не є вільною у формулі A. Довести, що:

(а) коли формула $A \to B(x)$ тотожно істинна, то формула $A \to \forall xB(x)$ також тотожно істинна;

(б) коли формула $B(x) \to A$ тотожно істинна, то формула $\exists xB(x) \to A$ також тотожно істинна.

31. Довести, що наведена формула є тотожно істинною.

(а) $\forall xP(x) \to P(y)$;

(б) $P(y) \to \exists xP(x)$.

32. Довести, що формула $\forall xP(x) \to \exists xP(x)$ тотожно істинна.

33. Довести, що наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною.

(а) $\exists xP(x) \sim \neg\forall x(\neg P(x))$;

(б) $\exists x(\neg P(x)) \sim \neg\forall xP(x)$;

(в) $\neg\exists xP(x) \sim \forall x(\neg P(x))$;

(г) $\neg\exists x(\neg P(x)) \sim \forall xP(x)$.

34. Довести, що для довільних предикатних формул $P_1, P_2, ..., P_k$ формула $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_k) \to P_i$ є тотожно істинною для будь-якого $i = 1, 2, ..., k$.

35. Довести, що для довільних предикатних формул $P_1, P_2, ..., P_k$ формула $P_i \to (P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_k)$ є тотожно істинною для будь-якого $i = 1, 2, ..., k$.

36. Перевірити (довести чи спростувати) рівносильність.

(а) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) = \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$;

(б) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) = \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$;

(в) $\forall x(P(x) \to Q(x)) = \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$;

(г) $\exists x(P(x) \to Q(x)) = \exists xP(x) \to \exists xQ(x)$;
(д) $\forall x(P(x) \sim Q(x)) = \forall xP(x) \sim \forall xQ(x)$;
(е) $\exists x(P(x) \sim Q(x)) = \exists xP(x) \sim \exists xQ(x)$.

37. Довести, що:
(а) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$;
(б) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$;
(в) $\exists x(P(x) \to Q(x)) = \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$;
(г) $\forall x(P(x) \to Q(x)) = \forall x(\neg Q(x) \to \neg P(x))$.

38. Навести приклади тверджень як математичного, так і нематематичного змісту, в яких є кванторні вирази "для кожного" і "існує" і значення істинності яких змінюється в разі зміни порядку слідування цих виразів.

39. Перевірити (довести чи спростувати) твердження, що коли в будь-якій формулі логіки предикатів A поміняти місцями два одноіменні квантори, то отримана при цьому формула буде рівносильна A.

40. Придумайте два висловлення, які мають вигляд $\forall x \exists y P(x, y)$ та $\exists y \forall x P(x, y)$ і такі, що:
(а) обидва вони істинні;
(б) обидва вони хибні;
(в) перше з них — істинне, а друге — хибне.

41. Придумайте два висловлення, які мають вигляд $\forall x \exists y P(x, y)$ і $\exists x \forall y P(x, y)$, так, щоб:
(а) обидва вони були істинними;
(б) обидва вони були хибними;
(в) перше з них було істинним, а друге — хибним;
(г) перше з них було хибним, а друге — істинним.

42. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що наведені формули логіки предикатів не є рівносильними.
(а) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ і $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$;
(б) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ і $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$;
(в) $\exists xP(x) \to \exists xQ(x)$ і $\exists x(P(x) \to Q(x))$.

43. Довести, що наведена формула є тотожно істинною.
(а) $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$;
(б) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$;

(в) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$;
(г) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists xQ(x))$;
(д) $\forall x(P(x) \sim Q(x)) \to (\forall xP(x) \sim \forall xQ(x))$;
(е) $\forall x(P(x) \sim Q(x)) \to (\exists xP(x) \sim \exists xQ(x))$.

44. Предметною областю унарних предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ є множина M. Що можна сказати про множину M, якщо наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною в M?
(а) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$;
(б) $\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \wedge \exists x(P(x) \to Q(x))$.

45. Довести чи спростувати рівносильність.
(а) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) = \forall x(Q(x) \to (P(x) \to R(x)))$;
(б) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) = \forall x(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$.

46. Показати, що формули логіки предикатів $\forall x(P(x) \to \forall yQ(y))$ і $\forall x\forall y(P(x) \to Q(y)))$ рівносильні.

47. Довести чи спростувати твердження про рівносильність (логічну еквівалентність) таких формул логіки предикатів:
(а) $\forall y\forall x(P(x) \to Q(y)) = \forall y(\forall xP(x) \to Q(y))$;
(б) $\forall x(P(x) \to Q(y)) = \forall x(P(x)) \to Q(y)$;
(в) $\exists x(P(x) \to Q(y)) = \exists x(P(x)) \to Q(y)$;
(г) $\forall x(P(x)) \to P(y) = \forall x(P(x) \to P(y))$;
(д) $Q(y) \to \exists xP(x) = \exists x(Q(y) \to P(x))$;
(е) $\forall x((P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x)) = \forall x(P(x) \to Q(x)) \vee$
$\vee \forall x(Q(x) \to P(x))$.

48. Довести рівносильність.
$\exists x(P(x) \sim Q(x)) = \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

49. Показати, що формули логіки предикатів $\forall x\exists y\forall zP(x, y, z)$ і $\forall z\exists y\forall xP(x, y, z)$ не є рівносильними на двохелементній множині $\{a, b\}$.

50. Довести рівносильність.
(а) $\forall x(P(x)) \wedge Q(y) = \forall x(P(x) \wedge Q(y))$;
(б) $\forall x(P(x)) \vee Q(y) = \forall x(P(x) \vee Q(y))$;
(в) $\exists x(P(x) \vee Q(y)) = \exists x(P(x)) \vee Q(y)$;
(г) $\exists x(P(x) \wedge Q(y)) = \exists x(P(x)) \wedge Q(y)$;
(д) $\exists x(P(x)) \to Q(y) = \forall x(P(x) \to Q(y))$;
(е) $\forall x(P(x)) \to Q(y) = \exists x(P(x) \to Q(y))$.

51. Довести рівносильність.

(а) $\exists x\forall y(P(x) \wedge Q(y)) = \forall y\exists x(P(x) \wedge Q(y))$;

(б) $\exists x\forall y(P(x) \vee Q(y)) = \forall y\exists x(P(x) \vee Q(y))$;

(в) $\exists x\forall y(P(x) \to Q(y)) = \forall y\exists x(P(x) \to Q(y))$.

52. Перевірити (довести чи спростувати) рівносильність.

(а) $\forall x\exists y(P(x) \to Q(y)) = \exists y\forall x(P(x) \to Q(y))$;

(б) $\forall x\exists y(P(x) \sim Q(y)) = \exists y\forall x(P(x) \sim Q(y))$.

53. Визначити, які з наведених тверджень логічно рівносильні.

1) Неправильно, що всі x мають властивість P.
2) Не всі x мають властивість P.
3) Усі x не мають властивості P.
4) Деякі x не мають властивості P.
5) Усі x мають властивість, протилежну до P.
6) Деякі x мають властивість P.
7) Існує x, яке має властивість P.
8) Жодне x не має властивості P.
9) Усі x мають властивість P.

54. Визначити, яке з наведених тверджень логічно рівносильне запереченню твердження “жодне x не має властивості P”.

1) Будь-яке x має властивість P.
2) Деякі x мають властивість P.
3) Існує таке x, що має властивість P.
4) Неправильно, що жодне x не має властивості P.

55. Сформулювати різні варіанти заперечення наведеного твердження і визначити значення істинності отриманого висловлення.

(а) Усі натуральні числа парні.

(б) Деякі трикутники прямокутні та рівнобедрені.

(в) Кожне число, яке ділиться на 2 і на 3, ділиться на 6.

(г) Для всіх натуральних чисел x і y існує таке число z, що виконується рівність $xy = z$.

56. Сформулювати у ствердній формі заперечення такого висловлення:

(а) Не більше ніж один об’єкт має властивість P.

(б) Один і тільки один об’єкт має властивість P.

(в) Принаймні один об’єкт має властивість P.

(г) Принаймні два об’єкти мають властивість P.

(д) Не більше двох об'єктів мають властивість P.
(е) Два і тільки два об'єкти мають властивість P.

57. Визначити, які з наведених тверджень логічно еквівалентні (рівносильні).

1) Неправильно, що всі числа, кратні 4, є точними квадратами.
2) Усі числа, кратні 4, не є точними квадратами.
3) Не всі числа, кратні 4, є точними квадратами.
4) Існує число, кратне 4, яке не є точним квадратом.
5) Деякі числа, не кратні 4, не є точними квадратами.

58. Нехай M — частково впорядкована множина і A — якась її підмножина. Визначити, які з наведених тверджень є логічно еквівалентними (рівносильними).

1) Неправильно, що існує множина A, яка має найбільший елемент і для якої не існує точної верхньої грані.
2) Кожна множина A, для якої існує найбільший елемент, має точну верхню грань.
3) Не існує множини A, в якої є найбільший елемент і немає точної верхньої грані.
4) Існує множина A, що має найбільший елемент і має точну верхню грань.
5) Жодна множина A, яка не має точної верхньої грані, не має найбільшого елемента.

59. Визначити, які з наведених формул логіки предикатів рівносильні.

1) $\forall x \exists y (P(x, y) \vee \neg P(x, z)) \wedge \forall x (Q(x) \to R(x))$;
2) $\forall u \exists y (P(u, y) \vee \neg P(u, z)) \wedge \forall u (Q(u) \to R(u))$;
3) $\forall u \exists y (P(u, y) \vee \neg P(u, z)) \wedge \forall x (Q(x) \to R(x))$;
4) $\forall x \exists y (P(x, y) \vee \neg P(x, t)) \wedge \forall x (Q(x) \to R(x))$;
5) $\forall x \exists y (P(z, y) \vee \neg P(z, z)) \wedge \forall z (Q(z) \to R(z))$.

60. Довести, що коли $\exists x \forall y P(x, y)$ — істинне висловлення, то $\forall y \exists x P(x, y)$ також істинне.

61. Довести, що коли $\exists y \forall x P(x, y)$ — істинне висловлення, то $\forall x \exists y P(x, y)$ також істинне.

62. Довести чи спростувати твердження, що коли $\forall y \exists x P(x, y)$ — істинне висловлення, то $\exists x \forall y P(x, y)$ також істинне.

63. Довести чи спростувати твердження, що коли $\forall x \exists y P(x, y)$ — істинне висловлення, то $\exists y \forall x P(x, y)$ також істинне.

64. Довести, що наведена формула логіки предикатів є логічно загальнозначущою на одноелементній множині, але не є такою на множині, що містить більше одного елемента.

(а) $P(x) \vee \neg P(y)$;

(б) $P(x) \to P(y)$.

65. Довести, що формула логіки предикатів $\forall x \exists y (P(x) \vee \neg P(y))$ є логічно загальнозначущою. Чи буде такою формула $\exists y \forall x (P(x) \vee \vee \neg P(y))$?

66. Показати, що перша з наведених формул логіки предикатів є логічно загальнозначущою (тотожно істинною), а друга — ні.

(а) 1) $\exists x (P(x) \to P(y))$,
2) $\exists x (P(x)) \to P(y)$;

(б) 1) $\forall x (P(x) \to P(y))$,
2) $\forall x (P(x)) \to P(y)$;

(в) 1) $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$,
2) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$;

(г) 1) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \vee Q(x))$,
2) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$;

(д) 1) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$,
2) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \to Q(x))$;

(е) 1) $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$,
2) $\exists x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$;

(є) 1) $\forall x (P(x) \sim Q(x)) \to (\forall x P(x) \sim \forall x Q(x))$,
2) $(\forall x P(x) \sim \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \sim Q(x))$.

67. Довести, що наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною.

(а) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$;

(б) $(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$.

68. Довести, що наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною.

(а) $(\exists x (P(x) \vee Q(x))) \sim (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$;

(б) $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \sim (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$.

69. Визначити, чи є тотожно істинною формула логіки предикатів.

(а) $(\forall x(P(x) \sim Q(x))) \sim (\forall xP(x) \sim \forall xQ(x))$;
(б) $(\exists x(P(x) \sim Q(x))) \sim (\exists xP(x) \sim \exists xQ(x))$.

70. Визначити, чи є тотожно істинною формула логіки предикатів $(\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \to R(x))) \to (\exists x(Q(x) \to R(x)))$. Відповідь обґрунтувати.

71. Довести, що формула логіки предикатів $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to \to (\forall x(P(x) \to \exists xQ(x))$ тотожно істинна. Чи буде такою обернена до неї імплікація?

72. Довести, що формула логіки предикатів $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \to (\exists x(P(x) \to \exists xQ(x))$ тотожно істинна. Чи буде такою обернена імплікація?

73. Довести, що формула логіки предикатів $\forall x(P(x) \sim Q(x)) \to \to (\exists x(P(x) \sim \exists xQ(x))$ тотожно істинна. Чи буде такою обернена імплікація?

74. Порівняти формули $\forall x(((P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x)))$ і $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vee \forall x(Q(x) \to P(x))$. Визначити, чи є принаймні одна з цих формул логічно загальнозначущою.

75. Довести чи спростувати твердження, що наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною.
(а) $(\exists xP(x) \wedge \exists x(P(x) \to Q(x))) \to \exists xQ(x)$;
(б) $(\exists xP(x) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))) \to \exists xQ(x)$;
(в) $(\forall xP(x) \wedge \exists x(P(x) \to Q(x))) \to \exists xQ(x)$;
(г) $(\forall x(P(x) \to Q(x)) \to R(x))) \to \forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$;
(д) $(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to R(x)) \to \forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$;
(е) $((\exists xP(x) \to \forall xQ(x)) \to R(y)) \sim ((\exists xP(x) \wedge \neg(\forall xQ(x))) \vee R(y))$;
(є) $(\neg(\exists x(P(x) \to \forall yQ(y)))) \sim (\forall x(P(x) \wedge \exists y(\neg Q(y))))$.

76. Довести чи спростувати твердження, що наведена формула логіки предикатів є тотожно істинною.
(а) $\forall x\exists yP(x, y) \to \exists yP(y, y)$;
(б) $\forall x\exists yP(x, y) \to \exists yP(x, x)$;
(в) $\forall yP(x, y) \to P(y, y)$;
(г) $\forall x\exists zP(x, y) \to \exists zP(y, z)$;
(д) $P(x, x) \to \exists yP(x, y)$;
(е) $P(x, x) \to \exists yP(y, y)$;
(є) $\exists x\forall y\forall zP(x, y, z) \sim \forall z\exists xP(x, x, z)$;
(ж) $\forall x\forall y\exists z(P(x) \to (P(y) \to P(z)))$.

77. Довести, що наведена формула логіки предикатів є логічно загальнозначущою.

(а) $(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \sim \exists x(P(x) \to Q(x))$;

(б) $(\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$;

(в) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to \neg R(x)) \to \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$;

(г) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to P(x)) \to \exists x \neg(Q(x) \wedge R(x))$.

78. Показати, що наведена формула логіки предикатів не є тотожно істинною.

(а) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x))$;

(б) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$;

(в) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to R(x)) \to \forall x(P(x) \wedge R(x))$;

(г) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to Q(x)) \to \exists x(\neg P(x) \wedge R(x))$.

79. Довести, що формула логіки предикатів $\forall x \forall y \forall z \exists u((P(x) \to (P(y) \to P(z))) \to ((P(x) \to P(y)) \to (P(x) \to P(u))))$ є тотожно істинною.

80. Довести, що для довільної формули логіки предикатів існує рівносильна формула, операціями якої (окрім кванторів) є:

(а) $\vee, \wedge, \neg$;

(б) $\vee, \neg$;

(в) $\wedge, \neg$.

81. Довести, що коли Q — предикатна формула, яка не містить вільних входжень змінної x, то виконується така рівносильність:

(а) $\forall x(P(x) \vee Q) = \forall x P(x) \vee Q$;

(б) $\exists x(P(x) \vee Q) = \exists x P(x) \vee Q$;

(в) $\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$;

(г) $\exists x(P(x) \wedge Q) = \exists x P(x) \wedge Q$;

(д) $Q \to \forall x P(x) = \forall x(Q \to P(x))$;

(е) $Q \to \exists x P(x) = \exists x(Q \to P(x))$;

(є) $\forall x P(x) \to Q = \exists x(P(x) \to Q)$;

(ж) $\exists x\, P(x) \to Q = \forall x(P(x) \to Q)$.

82. Перетворити наведену формулу логіки предикатів до випередженої (пренексної) форми.

(а) $\neg(\exists x \exists y \forall z \neg P(x, y, z)) \sim \exists x \forall z \exists y \neg P(x, y, z)$;

(б) $\forall x P(x) \to \forall y(\exists z Q(x, y, z) \to (\neg \forall x(P(x) \wedge \exists x R(x, y)))$;

(в) $(\neg \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \vee \forall x(\forall y R(x, y) \to P(y))$;

(г) $(\forall x \forall y P(x, y) \wedge \exists x Q(x)) \to (\neg \exists x P(x, y))$.

10. ЛОГІЧНЕ СЛІДУВАННЯ НА БАЗІ ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

Кажуть, що формула B логіки предикатів є **логічним слідуванням** з формул $A_1, A_2, ..., A_k$ в логіці предикатів, якщо на кожній множині M при довільній інтерпретації формула B набуває значення 1 при всіх підстановках замість вільних змінних тих елементів множини M, на яких усі формули A_i ($i = 1, 2, ..., k$) набувають значення 1. Формули $A_1, A_2, ..., A_k$ при цьому називають **посилками**, чи **припущеннями**, а B — **висновком**, або **вислідом**. Символічно це записують, як і в алгебрі висловлень, $A_1, A_2, ..., A_k \models B$.

Вираз $A_1, A_2, ..., A_k \models B$ називають **вивідністю** (у логіці предикатів).

Змінна y називається **вільною** для x у формулі $P(x)$, якщо жодне вільне входження x у $P(x)$ не належить області дії квантора, який зв'язує y. У такому разі формула $P(x)$ називається вільною для y.

Приклад 10.1 1) Перевірити правильність такого міркування: "1) Кожне число, кратне 35, кратне 5 і кратне 7. 2) Кожне число кратне 5 тоді й тільки тоді, коли остання цифра його десяткового запису кратна 5. 3) Остання цифра десяткового запису числа 2004 не кратна 5. Отже, число 2004 не кратне 35".

Для перевірки коректності міркування замінимо пропозиційні форми "x — кратне 35", "x — кратне 5", "x — кратне 7" і "остання цифра x — кратна 5" відповідними предикатами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ і $S(x)$. Тоді припущення запишуться у вигляді 1) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$; 2) $\forall x(Q(\mathrm{x}) \sim S(x))$; 3) $\neg S(y)$, а висновок — $\neg P(y)$.

Скористаємось методом доведення від супротивного. Нехай для деякої інтерпретації висновок $\neg P(y)$ хибний. Тоді істинним буде $P(y)$, а отже, згідно з першим припущенням — і $Q(y)$. Тоді з другого припущення випливатиме істинність $S(y)$, що суперечитиме третьому припущенню. Отже, проведене міркування правильне.

2) Перевірити, чи є правильним міркування: "1) Деякі рівнобедрені трикутники — прямокутні. 2) Жодний прямокутний трикутник не є правильним. Отже, деякі рівнобедрені трикутники не є правильними".

Запишемо логічну структуру міркування, замінюючи пропозиційні форми "x — рівнобедрений трикутник", "x — прямокутний трикутник" і "x — неправильний трикутник" відповідними предикатами $P(x)$, $Q(x)$ і $R(x)$. Припущення 1) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$; 2) $\forall x(Q(x) \to R(x))$, висновок: $\exists x(P(x) \wedge R(x))$.

Розглянемо наведену логічну схему на довільній області інтерпретації M. Тоді для деякого $a \in M$ висловлення $P(a) \wedge Q(a)$ істинне, тобто істинними будуть $P(a)$ і $Q(a)$. Із другого припущення робимо висновок, що $R(a)$ також істинне. Отже, $P(a) \wedge R(a)$ — істинне і формула $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ є істинною в M. Міркування правильне.

3) Перевірити правильність такого міркування: "1) Не всі алгебричні числа раціональні. 2) Усі раціональні числа — дійсні. Отже, деякі алгебричні числа не є дійсними".

Уведемо предикати $P(x)$, $Q(x)$ і $R(x)$ замість пропозиційних форм "x — алгебричне число", "x — раціональне число" і "x — дійсне число" відповідно. Логічна структура міркування матиме вигляд: 1) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$; 2) $\forall x(Q(x) \to R(x))$ — припущення, $\exists x(P(x) \wedge \wedge \neg R(x))$ — висновок.

Усі спроби формально обґрунтувати правильність цього міркування марні. Тому слід спробувати побудувати контрприклад, тобто знайти таку інтерпретацію, щоб у ній обидва припущення набували значення 1, а висновок — значення 0.

Неважко переконатись, що шуканою інтерпретацією може бути, наприклад, така: предикати $P(x)$, $Q(x)$ і $R(x)$ замінимо відповідно унарними відношеннями "x — кратне 2", "x — кратне 4" і "x — кратне 2", визначеними на множині N натуральних чисел.

Варто зазначити, що змістовна правильність припущень і висновку не гарантує логічної коректності відповідного міркування.

1. Визначити, чи є y вільною змінною для x у наведеній формулі логіки предикатів.

(а) $\exists y P(x, y)$;

(б) $\forall y(P(x, y)) \vee Q(x)$;

(в) $P(x) \to \forall y Q(y)$;

(г) $Q(y) \to \forall z P(x, y, z)$.

2. Визначити, чи є змінна x вільною для y у наведеній формулі.

(а) $Q(x) \wedge \forall x(P(x, y)) \vee P(z, x)$;

(б) $Q(z, y) \vee \exists x R(x, y, z)$.

3. Довести, що формула B є логічним слідуванням формули A (змінна x не входить вільно в Q).

(а) $A = (Q \to P(x))$, $B = (Q \to \forall x P(x))$;

(б) $A = (P(x) \to Q)$, $B = (\exists x P(x) \to Q)$.

4. Перевірити (довести чи спростувати), чи виконується така вивідність:

(а) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \to R(x)) \models \exists x(P(x) \wedge R(x))$;

(б) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg Q(x) \models \forall x P(x)$;

(в) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x)) \models \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$;

(г) $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to R(x, y))), \forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \to$
$\to \neg R(x, y))) \models \forall x(Q(x) \to \neg S(x))$.

5. Довести, що формула B є логічним слідуванням з формул $A_1, A_2, ..., A_k$ у логіці предикатів (тобто $A_1, A_2, ..., A_k \models B$) тоді й тільки тоді, коли формула $((...(A_1 \wedge A_2) \wedge ... \wedge A_k) \to B$ є тотожно істинною.

6. Визначити, чи є формула B логічним слідуванням із формули A.

(а) $A = \exists x P(x)$, $B = P(y)$;

(б) $A = \forall x P(x)$, $B = P(y)$;

(в) $A = P(y)$, $B = \exists x P(x)$;

(г) $A = P(y)$, $B = \forall x P(x)$.

7. Довести таку вивідність (у логіці предикатів):

(а) $\forall x P(x) \models P(y)$, коли змінна y є вільною для x у формулі $P(x)$;

(б) $P(y) \models \exists x P(x)$, коли змінна y є вільною для x у формулі $P(x)$;

(в) якщо $\Gamma \models P(x)$ і x не має вільних входжень у жодну з формул множини гіпотез Γ, то $\Gamma \models \exists x P(x)$;

(г) $(Q \to P(x)) \models (Q \to \forall x P(x))$ (змінна x не входить вільно в Q);

(д) $(P(x) \to Q) \models (\exists x P(x) \to Q)$ (змінна x не входить вільно в Q).

8. Побудувати контрприклад, який свідчить, що вивідність $\forall x P(x) \models P(y)$ не виконується, коли змінна y не є вільною для x у формулі $P(x)$.

9. Побудувати контрприклад, який доводить, що вивідність $P(y) \models \exists x P(x)$ не виконується, коли змінна y не є вільною для x у формулі $P(x)$.

10. Перевірити (довести чи спростувати) вивідність.

(а) $P(x) \models \forall x P(x)$;

(б) $\exists x P(x) \models P(x)$.

11. Довести, що коли $\models P(x)$, то $\models \forall x P(x)$ (*правило узагальнення*).

12. Перевірити, чи випливає в логіці предикатів з даних припущень зроблений з них висновок, тобто чи є правильним (коректним) наведене міркування. Якщо міркування правильне, то обґрунтувати його, інакше — побудувати відповідний контрприклад.

(а) 1) Деякі рівнобедрені трикутники є тупокутними. 2) Жодний тупокутний трикутник не є правильним. Отже, деякі рівнобедрені трикутники не є правильними.

(б) 1) Деякі вписані в коло чотирикутники є прямокутниками. 2) Кожний прямокутник є паралелограмом. Отже, деякі вписані в коло чотирикутники є паралелограмами.

(в) 1) Кожний квадрат — правильний многокутник. 2) Усі квадрати — паралелограми. 3) Існує многокутник, який є квадратом. Отже, деякі правильні многокутники є паралелограмами.

(г) 1) Усі квадрати — ромби. 2) Усі квадрати — прямокутники. 3) Деякі ромби не є прямокутниками. Отже, деякі прямокутники є ромбами.

(д) 1) Будь-яке раціональне число не є ірраціональним. 2) Будь-яке ірраціональне число не є раціональним. 3) Кожне раціональне число є дійсним. Отже, будь-яке ірраціональне число є дійсним.

(е) 1) Кожне число, кратне 21, кратне 7 і кратне 3. 2) Кожне число кратне 3 тільки тоді, коли сума цифр запису цього числа в десятковій системі кратна 3. 3) Сума цифр числа 2005 не кратна 3. Отже, число 2005 не кратне 21.

(є) 1) Жодне раціональне число не є трансцендентним. 2) Жодне трансцендентне число не є коренем рівняння $x^2 = 2$. Отже, жодне раціональне число не є коренем рівняння $x^2 = 2$.

(ж) 1) Кожна зліченна множина є нескінченною. 2) Кожна незліченна множина є нескінченною. 3) Деякі множини скінченні. 4) Жодна скінченна множина не є нескінченною. Отже, існує множина, яка не є зліченною і не є незліченною.

(з) 1) Кожна нескінченна множина рівнопотужна деякій своїй власній підмножині. 2) Жодна скінченна множина не рівнопотужна жодній своїй власній підмножині. Отже, жодна скінченна множина не є нескінченною і жодна нескінченна множина не є скінченною.

(и) 1) Кожне просте число має рівно два дільники. 2) Число 1 не має двох дільників. Отже, число 1 не є простим.

(і) 1) Не всі алгебричні числа є раціональними. 2) Усі раціональні числа — дійсні. Отже, деякі алгебричні числа не є дійсними.

(ї) 1) Кожний математик мислить логічно. 2) Той, хто мислить логічно, не припускає логічних помилок. 3) Деякі студенти припускають логічні помилки. Отже, не всі студенти — математики.

(й) 1) Ірина шанує тільки тих, хто добре вчиться і гарно співає. 2) Сашко добре вчиться, але не вміє гарно співати. 3) Андрій вміє гарно співати, але не вчиться добре. Отже, Ірина не шанує ні Сашка, ні Андрія.

(к) 1) Якщо хтось може розв'язати певну логічну задачу, то якийсь здібний студент зробить це. 2) Петренко — здібний студент. 3) Петренко не розв'язав цю логічну задачу. Отже, жоден не розв'яже цю логічну задачу.

(л) 1) Будь-яке рефлексивне відношення не є антирефлексивним. 2) Будь-яке антирефлексивне відношення не є рефлексивним. Отже, існує відношення, яке не є ані рефлексивним, ані антирефлексивним.

(м) 1) Кожна взаємно однозначна відповідність є відображенням. 2) Будь-яке відображення є функцією. 3) Деякі функції не є відображеннями. Отже, жодне відображення не є взаємно однозначним.

(н) 1) Кожне відображення є всюди визначеною відповідністю. 2) Деякі функції є відображеннями. Отже, існують функції, що є всюди визначеними відповідностями.

(о) 1) Будь-яка підмножина довільної множини A має потужність не більшу, ніж потужність множини A. 2) Кожна нескінченна множина зліченної множини є зліченною. Отже, деякі підмножини зліченної множини є скінченними.

(п) 1) Кожне відношення, симетричне й антисиметричне водночас, є діагональним відношенням. 2) Деякі відношення не збігаються з діагональним. Отже, існують відношення, які не є ні симетричними, ні антисиметричними.

(р) 1) Будь-яке толерантне відношення є симетричним. 2) Для кожного симетричного відношення R виконується рівність $R = R^{-1}$. Отже, усі відношення R, для яких справджується рівність $R = R^{-1}$, толерантні.

(с) 1) Будь-яке відношення еквівалентності є толерантним відношенням. 2) Деякі толерантні відношення не є транзитивними. Отже, існують еквівалентності, що не є транзитивними.

(т) 1) Будь-яка частково впорядкована множина (ЧВМ) містить не більше одного найбільшого елемента. 2) Кожен найбільший елемент ЧВМ є єдиним максимальним елементом цієї множини. 3) Існують ЧВМ, що містять більше ніж один максимальний елемент. Отже, існують ЧВМ, які не мають найбільшого елемента.

(у) 1) Кожна скінченна ЧВМ містить мінімальний елемент. 2) Деякі ЧВМ не мають мінімального елемента. Отже, існують нескінченні ЧВМ.

(ф) 1) Кожна скінченна решітка є повною решіткою. 2) Деякі решітки не є повними решітками. 3) Існують решітки, які не є скінченними. Отже, будь-яка повна решітка є скінченною.

13. Обґрунтувати, що твердження “Множина всіх ірраціональних чисел має потужність не меншу, ніж зліченна” випливає з таких припущень: 1) Для кожної нескінченної множини існує її зліченна підмножина. 2) Множина всіх ірраціональних чисел — нескінченна. 3) Кожна множина має потужність не меншу, ніж будь-яка її підмножина.

14. Спростувати міркування: 1) Деякі толерантні відношення є еквівалентностями. 2) Деякі транзитивні відношення є еквівалентностями. Отже, деякі транзитивні відношення є толерантними.

15. Показати, що з припущень:

1) V є множина всіх множин; 2) для кожної множини M існує множина T, потужність якої більша, ніж потужність M; 3) якщо M — підмножина T, то потужність M не більша, ніж потужність T; 4) кожна множина є підмножиною V

можна вивести суперечність. Тим самим показати, що поняття множини всіх множин у канторовій теорії множин є суперечним.

16. Показати, що з припущення “У місті N перукар — це людина, що голить всіх тих і тільки тих, хто не голиться сам” логічно слідує (на базі логіки предикатів), що в місті N немає жодного перукаря (це варіант *парадокса Рассела*).

17. Проаналізувати таке неправильне міркування: 1) $\forall x(P(x) \vee \vee Q(x) \vee R(x))$; 2) $\neg\forall xP(x)$; 3) $\neg\forall xQ(x)$. Отже, $\forall xR(x)$. Побудувати відповідні контрприклади.

18. Нехай універсальною множиною є множина R дійсних чисел. Із хибного твердження 1) вивести співвідношення 2).

(а) 1) $\forall a \forall b \forall x((ax = bx) \to (a = b))$;
2) $2 \times 2 = 3$;

(б) 1) $\forall x \exists y \forall z(x \times y = z)$;
2) $2 \times 2 = 4$;

(в) 1) $\forall a \forall b \forall c \exists x(ax^2 + bx + c = 0)$;
2) $2 \times 2 = 5$;

(г) 1) $\exists x(x^2 + 1 = 0)$;
2) $4 = 5$.

19. У традиційній (арістотелевій) логіці прийнято чотири види так званих категоричних суджень:

1) "Усі S є P" (*загальностверднe судження*), позначається SaP.
2) "Деякі S є P" (*частинностверднe судження*), позначається SiP.
3) "Жодне S не є P" (*загальнозаперечне судження*), позначається SeP.
4) "Деякі S не є P" (*частиннозаперечне судження*), позначається SoP.

Перевірити справедливість запропонованих схем логічного слідування (*арістотелевих силогізмів*), записавши їх символікою логіки предикатів (у дужках записано назви відповідних схем).

(а) 1) MaP; 2) SaM; отже, SaP (*Barbara*);
(б) 1) MaP; 2) SaM; отже, SiP (*Barbari*);
(в) 1) MeP; 2) SaM; отже, SeP (*Celarent*);
(г) 1) MeP; 2) SaM; отже, SoP (*Celaront*);
(д) 1) MaP; 2) SiM; отже, SiP (*Darii*);
(е) 1) MeP; 2) SiM; отже, SoP (*Ferio*);
(є) 1) PeM; 2) SiM; отже, SoP (*Festino*);
(ж) 1) PeM; 2) SaM; отже, SeP (*Cesare*);
(з) 1) PeM; 2) SaM; отже, SoP (*Cesaro*);
(и) 1) PaM; 2) SeM; отже, SeP (*Camestres*);
(і) 1) PaM; 2) SeM; отже, SoP (*Cameostro*);
(ї) 1) PaM; 2) MeS; отже, SoP (*Cameno*);
(й) 1) PaM; 2) MeS; отже, SeP (*Camenes*);
(к) 1) PaM; 2) MaS; отже, SiP (*Bramantip*);
(л) 1) MoP; 2) MaS; отже, SoP (*Bocardo*);
(м) 1) PaM; 2) SoM; отже, SoP (*Baroco*);
(н) 1) MiP; 2) MaS; отже, SiP (*Disamis*);
(о) 1) PiM; 2) MaS; отже, SiP (*Dimaris*);
(п) 1) MaP; 2) MiS; отже, SiP (*Datisi*);
(р) 1) PeM; 2) MiS; отже, SoP (*Fresison*).

20. Показати, що такі логічні слідування не справджуються без додаткової умови, що предметна множина непорожня.

(а) 1) *PeM*; 2) *MaS*; отже, *SoP* (*Fesapo*);

(б) 1) *PaM*; 2) *MaS*; отже, *SiP* (*Bamalip*);

(в) 1) *MaP*; 2) *MaS*; отже, *SiP* (*Darapti*);

(г) 1) *MeP*; 2) *MaS*; отже, *SoP* (*Felapton*).

11. ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

Мову так званого **вузького числення предикатів** часто використовують для записування тверджень (властивостей, аксіом, лем, теорем) і означень у різних конкретних розділах математики. Використання символіки логіки предикатів дає змогу досягти більшої строгості й формальності у викладенні математичних результатів, уникнути неоднозначності та багатослівності звичайної мови.

Приклад 11.1. 1) Твердження про те, що довільне ціле число n можна розділити з остачею на ціле число m, яке не дорівнює нулю, можна записати так:

$$\forall(n\in Z)\forall(m\in Z)[(m\neq 0)\to(\exists(q\in Z)\exists(r\in Z)(n=m\times q+r)\wedge$$
$$\wedge((r=0)\vee((0<r)\wedge(r<|m|))))].$$

Часто, коли предметна область відома і не змінюється, замість $\forall(n\in Z)$ записують просто $\forall n$. У наведеному виразі всі предикатні букви для позначення відношень $=, \neq, <, \in$ і всі знаки арифметичних і логічних операцій мають звичайний смисл. Словесно записане твердження читається так: “Для цілих n і m, якщо m не дорівнює нулю, існують цілі числа q і r, для яких $n = mq + r$ і r або дорівнює 0, або r більше нуля і менше $|m|$”.

2) Предикатні формули зручно використовувати для записування означень різних понять. Наприклад, означення предиката $x\,|\,y$ (“x ділить y” або “x є дільником y”) на множині цілих чисел можна записати так: $\exists k(y = kx)$. Часто такі означення записують у вигляді $x\,|\,y \equiv \exists k(y = kx)$. Замість знака рівносильності $\equiv$ пишуть також знак, $\overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$ який читається “за означенням”.

3) За допомогою предиката $x\,|\,y$ можна означити унарний предикат “x — просте число” (позначимо його $P(x)$):

$$P(x)\overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}\forall y((y\,|\,x)\to((y=1)\vee(y=-1)\vee(y=x)\vee(y=-x))).$$

4) Означення границі числової послідовності $\{x_i\}$ можна записати так:

$$\lim x_i = a \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow} \forall(\varepsilon>0)\exists(k\in N)\forall(i\in N\wedge i>k)(|x_i-a|<\varepsilon).$$

Аналогічно можна записати класичні означення різних варіантів поняття неперервності дійсної функції f:

а) функція $f(x)$ неперервна в точці $a \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\eta > 0)\forall(x \in R)((|x - a| < \eta) \to (|f(a) - f(x)| < \varepsilon));$$

б) функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a, b) \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall(c \in (a, b))\forall(\varepsilon > 0)\exists(\eta > 0)\forall(x \in (a, b))((|x - c| < \eta) \to (|f(c) - f(x)| < \varepsilon));$$

в) функція $f(x)$ рівномірно неперервна на інтервалі $(a, b) \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\eta > 0)\forall(c \in (a, b))\forall(x \in (a, b))((|x - c| < \eta) \to (|f(c) - f(x)| < \varepsilon)).$$

6). Означення основних теоретико-множинних операцій і відношення включення для множин можна записати так:

$x \in A \cup B \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \vee (x \in B)$ або $\forall x((x \in A \cup B) \equiv ((x \in A) \vee (x \in B)));$

$x \in A \cap B \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge (x \in B)$ або $\forall x((x \in A \cap B) \equiv ((x \in A) \wedge (x \in B)));$

$x \in A \setminus B \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge (x \notin B),\quad A \subseteq B \overset{\text{озн}}{\Leftrightarrow} \forall x((x \in A) \to (x \in B))$

тощо.

1. Записати символікою логіки предикатів таке твердження:

(а) Існує не більше ніж один предмет x, що має властивість P.

(б) Існує рівно один предмет x, що має властивість P.

(в) Існує принаймні два предмети, які мають властивість P.

(г) Існує не більше ніж два предмети, які мають властивість P.

(д) Існує рівно два предмети, які мають властивість P.

(е) Існує рівно три предмети, що мають властивість P.

2. Записати символікою логіки предикатів твердження, що існує не більше двох предметів, які за наявності певної властивості P мають також і властивість Q, хоча немає жодного предмета, який не мав би принаймні однієї з властивостей P або Q.

3. Записати логіко-математичною символікою твердження, що кожне рівняння виду $ax + b = 0$ має:

(а) не більше ніж один корінь;

(б) рівно один корінь при $a \neq 0$.

4. Записати логіко-математичною символікою:

(а) Означення необмеженої послідовності.

(б) Твердження, що число a не є границею числової послідовності $\{x_n\}$.

(в) Означення границі функції в точці.

(г) Означення границі функції на нескінченності.

5. Проаналізувати відміну між означенням функції, неперервної на інтервалі (a, b), і функції, рівномірно неперервної на інтервалі (a, b), записавши ці означення логіко-математичною символікою.

6. Записати логіко-математичною символікою твердження, що кожне рівняння другого степеня, в якого дискримінант більший від 0, має рівно два дійсні корені.

7. Записати логіко-математичною символікою теорему Вієта для квадратного рівняння виду $x^2 + px + q = 0$.

8. Визначити, чи є запропоноване твердження істинним (універсальна множина — множина R дійсних чисел).

(а) $\forall x \forall y(((x = 0) \vee (y = 1)) \to (y^x = 1))$;

(б) $\forall x \forall y((y^x = 1) \to ((x = 0) \vee (y = 1)))$;

(в) $\forall p \exists q \forall x(x^2 + px + q > 0)$;

(г) $\forall q \exists p \forall x(x^2 + px + q > 0)$;

(д) $\exists q \forall p \forall x(x^2 + px + q > 0)$;

(е) $\exists p \forall q \forall x(x^2 + px + q > 0)$.

9. Оцінити істинність математичного твердження.

1) $\forall x \forall y \exists z(((x < z) \wedge (z < y)) \vee ((y < z) \wedge (z < x)))$,

2) $\forall x \forall y \exists z((x < y) \to ((x < z) \wedge (z < y)))$

у випадку, коли універсальною множиною є:

(а) N;

(б) Z;

(в) Q;

(г) R.

Яку властивість універсальної множини виражає твердження 2?

10. Записати запропоноване твердження символікою логіки предикатів і визначити його значення істинності.

(а) Для кожного додатного числа існує менше додатне число.

(б) Неправильно, що для кожного невід'ємного числа існує менше невід'ємне число.

(в) Для довільної пари натуральних чисел a, b знайдеться така пара натуральних чисел q і r, що $a = bq + r$.

(г) Жоден точний квадрат не є простим числом, проте деякі числа, що не є простими, є точними квадратами.

11. Записати символікою логіки предикатів твердження, що:
(а) d є найбільший спільний дільник натуральних чисел p і q;
(б) m є найменше спільне кратне натуральних чисел p і q.

12. Універсальна множина — це множина N натуральних чисел. Записати логіко-математичною символікою твердження: “11 є найменшим числом, яке при діленні на 7 дає в остачі 4”.

13. Записати символікою логіки предикатів, що задані натуральні числа p і q є взаємно простими.

14. Записати символікою логіки предикатів таке твердження (якщо для певного предиката немає загальновживаного позначення, то позначити його якоюсь предикатною буквою):
(а) Кожне число, кратне 10, кратне 5 і кратне 2.
(б) Усі числа, кратні 48, кратні 8 і кратні 6, але не всяке число, кратне 8 і кратне 6, є кратним 48.
(в) Усі трансцендентні числа — ірраціональні, але не всі ірраціональні числа — трансцендентні.
(г) Кожний квадрат є ромбом, але неправильно, що всякий ромб є квадратом.

15. Записати символікою логіки предикатів таке твердження:
(а) Деякі алгебричні числа — раціональні, а деякі — ірраціональні.
(б) Існує просте число, яке є парним.
(в) Деякі вписані в коло чотирикутники є квадратами.
(г) Не існує числа, яке кратне 6 і водночас не кратне 3.

16. Виразити символікою логіки предикатів таке твердження:
(а) Кожне раціональне число є алгебричним, однак існують алгебричні числа, що не є раціональними.
(б) Жодне раціональне число не є трансцендентним і жодне трансцендентне число не є раціональним, водночас деякі раціональні числа не є цілими і додатними.

17. Для алгебри $A = \langle N, \{+, \times\}\rangle$ записати символікою логіки предикатів твердження, що:
(а) операція + всюди визначена;
(б) операція × всюди визначена;
(в) операція + асоціативна;

(г) операція + комутативна;
(д) операція × асоціативна;
(е) операція × комутативна;
(є) операція × дистрибутивна щодо +;
(ж) операція + недистрибутивна щодо ×.

18. Використовуючи символічну мову логіки предикатів, записати твердження про те, що результат віднімання двох натуральних чисел може не бути натуральним числом.

19. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення:
(а) об'єднання;
(б) перетину;
(в) різниці;
(г) симетричної різниці;
(д) декартового добутку
множин A і B.

20. Записати логіко-математичною символікою факт існування множини всіх підмножин (булеана) для кожної множини.

21. За допомогою символіки логіки предикатів записати означення відповідності між множинами A і B.

22. Записати символікою логіки предикатів твердження, що відповідність C між множинами A і B:
(а) всюди визначена;
(б) функціональна;
(в) сюр'єктивна;
(г) ін'єктивна;
(д) бієктивна (взаємно однозначна).

23. За допомогою символіки логіки предикатів записати означення бінарного відношення на множині M.

24. Записати символікою логіки предикатів твердження, що відношення R на множині M:
(а) рефлексивне;
(б) антирефлексивне;
(в) симетричне;
(г) антисиметричне;
(д) транзитивне;
(е) толерантне.

25. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати означення:

(а) відношення еквівалентності;

(б) відношення часткового порядку;

(в) відношення лінійного порядку

на множині M.

26. Нехай M — частково впорядкована множина, A — її непорожня підмножина. Записати логіко-математичною символікою означення:

(а) мінімального елемента множини M;

(б) максимального елемента множини M;

(в) найменшого елемента множини M;

(г) найбільшого елемента множини M;

(д) нижньої грані множини A;

(е) верхньої грані множини A;

(є) точної нижньої грані множини A;

(ж) точної верхньої грані множини A.

27. Нехай P — одномісний предикат на множині N натуральних чисел. Записати логіко-математичною символікою аксіому математичної індукції для P.

28. Нехай R — повний порядок на множині M, P — довільний одномісний предикат на M. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати аксіому трансфінітної індукції для P.

29. Записати символікою логіки предикатів таке твердження:

1) Існує таке x, що $P(x)$ — хибне.

2) “Існує таке x, що $P(x)$” — хибне.

Проаналізувати ці твердження. Яке з тверджень — 1 або 2 — сильніше?

30. Записати символікою логіки предикатів таке твердження:

1) “Для кожного x $P(x)$” — хибне.

2) $P(x)$ — хибне для кожного x.

Яке з тверджень — 1 або 2 — є сильнішим?

31. Записати символікою логіки предикатів доведення теоретико-множинної рівності:

(а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

(б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є.* Дискретна математика. — К.: Вища шк., 2002.
2. *Гиндикин С. Г.* Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972.
3. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. — М.: Наука, 1973.
4. *Калужнін Л. А., Королюк В. С.* Алгоритми і математичні машини. — К.: Вища шк., 1964.
5. *Калужнин Л. А.* Что такое математическая логика. — М.: Наука, 1964.
6. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973.
7. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975.
9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Мир, 1976.
10. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.
11. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение.– 1968.
12. *Трохимчук Р. М.* Дискретна математика. — К.: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008.
13. *Хромой Я. В.* Математична логіка. — К.: Вища шк., 1983.
14. *Хромой Я. В.* Збірник задач і вправ з математичної логіки.– К.: Вища шк., 1978.

ЗМІСТ

Book contains well-selected and systematized collection of known and original tasks and exercises from classical and formal parts of mathematical and formal logic: algebraical expression, calculus of expression and logic of predicate.

Each chapter follows shot theoretical introduction with the main definitions and terms. This book can be used for class work as well as for organization of individual students work.

For students of universities, high educational establishments and for everybody who is interested in gaining of fundamental modern information technologies knowledge.

Навчальне видання

Трохимчук Ростислав Миколайович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ
З МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Educational edition

Trohymchuk, Rostyslav M.

COLLECTION OF MATHEMATICAL LOGIC

Educational supplier

Відповідальний редактор *С. Г. Рогузько*
Редактор *Л. В. Логвиненко*
Комп'ютерне верстання *Т. Г. Замура*
Оформлення обкладинки *О. О. Стеценко*

Підп. до друку 29.01.08. Формат $60\times84/_{16}$. Папір офсетний.
Друк ротаційний трафаретний.
Ум. друк. арк. 6,74. Обл.-вид. арк. 6,38. Тираж 1300 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

ДП «Видавничий дім «Персонал»
03039 Київ-39, просп. Червонозоряний, 119, літ. XX

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 8 від 23.02.2000