МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. І. Жученко, Л. Р. Ладієва,

М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

*Рекомендовано Вченою радою НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»
як навчальний посібник для студентів
спеціальності 133 «Галузеве машинобудування».
Освітня програма: Інжиніринг та комп'ютерно-інтегровані технології
проектування інноваційного галузевого обладнання
спеціальності 131: «Прикладна механіка».
Освітня програма: Інжиніринг паковань та пакувального обладнання*

Київ
НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»
2021

Рецензенти:	*Ладанюк, А. П.,* д-р техн. наук, проф. (Національний університет харчових технологій) *Казак, В. М.,* д-р техн. наук, проф. (Національний авіаційний університет) *Шкарапута, Л. М.*, д-р техн. наук, проф. (Інститут біоорганічної хімії і нафтохімії НАН України)
Відповідальний редактор	*Ковалюк, Д. О.*, канд. техн. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № від . .2021 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № від . .2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Жученко Анатолій Іванович, д-р техн. наук, проф.
Ладієва Леся Ростиславівна, канд. техн. наук, доц.
Піргач Микола Соловейович, канд. техн. наук, ст. наук. співроб., доц.
Жураковський Ярослав Юрійович

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Математичне моделювання процесів і систем [Електронний ресурс] : Навч. посіб. / А. І. Жученко, Л. Р. Ладієва, М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 5,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 351 с.

Наведено типи фізичних систем і процесів (одновимірні і багатовимірні) та сучасні методи їхнього представлення (математичного описання) в неперервній і дискретній формах. Розглянуто методи побудови математичних моделей одновимірних систем (нитковий, пружинний і затухаючий пружинний маятники, сушильні і холодильні камери) та багатовимірних систем (змішувачі гарячої і холодної води, напірні ящики з повітряною подушкою). Наведено конкретні приклади дослідження статичних і динамічних властивостей таких систем і показано шляхи їх використання для розробки оптимальних конструктивних параметрів різноманітних апаратів і систем, а також систем автоматичного керування на базі вбудованих мікропроцесорів.

Для студентів спеціальності 133: Галузеве машинобудування. Освітня програма: Інжиніринг та комп'ютерно-інтегровані технології проектування інноваційного галузевого обладнання та спеціальності 131: Прикладна механіка. Освітня програма: Інжиніринг паковань та пакувального обладнання.

Зміст

Список скорочень і буквених позначень

АСІ	– адаптивна система з ідентифікатором
АСК	– автоматизована система керування
АЦП	– аналогово-цифровий перетворювач
АКФ	– автокореляційна функція
АР	– автоматичний регулятор
БВОК	– багатовимірний об’єкт керування
БВР	– багатовимірний регулятор
БВС	– багатовимірна система
ББ	– буферний басейн
ДСАК	– дискретна система автоматичного керування
ВМ	– виконавчий механізм
ЕНП	– екстраполятор нульового порядку
ЕОМ	– електронна обчислювальна машина
ЕП	– елемент порівняння
ЗКС	– зв’язана коливальна система
ЗПМ	– затухаючий пружинний маятник
ЗБ	– змішувальний басейн
ІПФ	– імпульсна перехідна функція системи (каналу)
КЕОМ	– керувальна електронна обчислювальна машина
НЯ	– напірний ящик
НЯВТ	– напірний ящик відкритого типу
НЯЗТ	– напірний ящик закритого типу
НЯПП	– напірний ящик з повітряною подушкою
ОВС	– одновимірна система
ОК	– об’єкт керування
ПМ	– пружинний маятник
ПВДП	– псевдовипадкова двійкова послідовність
ПСАК	– підсистема автоматичного керування
РО	– регулювальний орган
САК	– система автоматичного керування
САР	– система автоматичного регулювання
ТОК	– технологічний об’єкт керування
ТП	– технологічний процес

ТВ	– технологічний вентиль
ЦАП	– цифроаналоговий перетворювач
ЦСАК	– цифрова система автоматичного керування
ЦОМ	– цифрова обчислювальна машина
ЧП	– числова послідовність
A	– матриця стану системи розміру $n \times n$
$A_{\text{Н}}$	– матриця стану неперервної системи розміру $n \times n$
$A_{\text{Д}}$	– матриця стану дискретної системи розміру $n \times n$
B	– матриця керування системи розміру $n \times n$
$B_{\text{Н}}$	– матриця керування неперервної системи розміру $n \times n$
$B_{\text{Д}}$	– матриця керування дискретної системи розміру $n \times n$
C	– матриця вимірювання вихідної змінної системи розміру $m \times n$
D	– матриця зв'язку між входами і виходами багатовимірної системи розміру $m \times r$
$\underline{x}(t)$	– вектор стану неперервної одновимірної системи у функції часу t
$\underline{x}(i)$	– вектор стану дискретної одновимірної системи у функції дискретного часу i
$\underline{x}(t_0)$	– вектор початкових умов стану системи розміру $n \times 1$
$\underline{X}(t)$	– вектор стану системи багатовимірної системи розміру $n \times 1$ у функції часу t
x_i	– i-та компонента вектора стану системи
$\underline{u}(t)$	– вектор керувального діяння одновимірної системи у функції часу t
$\underline{u}(i)$	– вектор керувального діяння одновимірної системи у функції дискретного часу i
$\underline{U}(t)$	– вектор керувального діяння багатовимірної системи розміру $r \times 1$ у функції часу t
$\underline{U}(i)$	– вектор керувального діяння багатовимірної системи розміру $r \times 1$ у функції дискретного часу i
$\underline{y}(t)$	– вектор вихідної змінної одновимірної системи у функції часу t
$\underline{y}(i)$	– вектор вихідної змінної одновимірної системи у функції дискретного часу t
$\underline{Y}(t)$	– вектор вихідної змінної багатовимірної системи розміру $m \times 1$

у функції часу t

p – оператор Лапласа

$g(p)$ – передавальна функція одновимірної системи (каналу)

$x(p)$ – зображення за Лапласом параметра стану одновимірної системи

$G(p)$ – матриця передавальних функцій багатовимірної системи розміру $n \times n$

$g(z)$ – дискретна передавальна функція одновимірної системи (каналу)

$G(z)$ – матриця дискретних передавальних функцій багатовимірної системи розміру $n \times n$

$g(t)$ – імпульсна перехідна функція одновимірної системи (каналу)

ВСТУП

Широкий розвиток робіт, пов'язаних з формалізацією та побудовою математичних моделей у багатьох галузях науки, техніки та виробництва передбачає дві головні мети.

Перша з них пов'язана зі значним збільшенням можливостей стосовно вивчення складних явищ, процесів та різноманітних об'єктів за допомогою математичного моделювання. Для цього потрібно мати символічну модель, тобто формалізацію, математичне описання досліджуваного явища, процесу чи об'єкта. Отже, побудова математичної моделі є першим етапом моделювання. У зв'язку з цим процес формалізації охопив ті галузі людської діяльності, котрі недавно вважали такими, що не піддаються будь-якому математичному описанню. Це передусім біологія, екологія, соціологія і т. ін. Крім цього, моделювання стали більше використовувати у математиці, фізиці, хімії, техніці, електроніці, економіці та багатьох інших галузях науки і техніки. Природно, що при цьому інтенсивно будують нові математичні моделі, а результати моделювання дають змогу розробляти вимоги до уточнення цих моделей та використовувати їх під час створення нових матеріалів, конструкцій, машин, приладів, технологічних процесів.

Не менш значущі моделі, які використовують безпосередньо в системі автоматичного керування (САК) технологічним процесом (ТП). Створення таких математичних моделей – друга мета розширення робіт, пов'язаних з побудовою моделей технологічного об'єкта керування (ТОК) чи складної хіміко-технологічної системи (ХТС). У цьому випадку для оптимального керування ТОК використовують адаптивні системи з ідентифікатором (АСІ) у колі зворотного зв'язку САК. Пристрій або програму керувального обчислювального комплексу (КОК), що здійснює побудову математичної моделі ТОК та її періодичне уточнення, називають *ідентифікатором*. У такому випадку, модель будують на підставі використання вхідних і вихідних змінних ТОК, отриманих безпосередньо з ТОК в умовах або його нормального функціонування або під час подачі на нього спеціально організованих збурень.

Неможливість обмежитись однією математичною моделлю і потреба її періодичного уточнення пов'язані з тим, що характеристики реальних ТОК не залишаються сталими, а змінюються у часі, і ці зміни мають бути враховані у математичній моделі, згідно з якою здійснюється керування об'єктом. Отже, ці моделі потрібні для забезпечення ефективного функціонування ТОК за допомогою САК, реалізованої на цифровій обчислювальній машині (ЦОМ).

Ступінь повноти математичної моделі, її відповідність реальному ТОК залежить від мети, з якою цю модель використовують. Моделі першого типу мають *гносеологічний* характер; вони повинні мати високий ступінь «фізичності» і бути тісно пов'язаними з методами вивчення конкретної галузі знань, для якої цю математичну модель використовують.

Моделі другого типу, які ще називають *інформаційними* моделями, відповідають меті керування; вони мають забезпечувати формальний опис об'єкта керування, що встановлює зв'язок між вхідними й вихідними змінними, безпосередньо не пов'язаними з «фізикою» цього об'єкта.

Наведений поділ моделей умовний, але він зручний і відповідає меті побудови моделі та моделювання. Тобто модель пов'язана з процесом пізнання, дослідженням, пошуком залежностей, властивих конкретним явищам чи процесам; її використовують для забезпечення заданих значень вихідних змінних на підставі інформації, одержаної з об'єкта в процесі його функціонування. Тут математична модель – невід'ємна частина САК як складова самого об'єкта, оскільки об'єкт керування і САК ним являють собою єдине ціле. Використання моделі у такому випадку пов'язана з активними діяннями на об'єкт для досягнення заданої мети.

Будучи частиною САК, модель в АСІ не залишається сталою та незмінною. Удосконалення будь-якого процесу чи пізнання явища пов'язано зі зміною його моделі, її уточнення, урахуванням змін, котрі виникають в об'єкті з плином часу. Прагнення оперативно відобразити у моделі ці зміни зумовило включення моделі безпосередньо до системи керування, а це, в свою чергу, забезпечує можливість визначення потрібної дії на об'єкт для одержання заданого результату.

Ступінь ідентичності, адекватності математичної моделі реальному об'єкту в двох розглядуваних випадках може бути різною. Очевидно, для гносеологічної моделі що вищий ступінь ідентичності, то повніше вона віддзеркалює реальні умови, тим глибше вивчено явище, тим ліпше ми його знаємо й тим точніше буде результат моделювання на підставі використання цієї моделі. Процес щодо вивчення реального об'єкта, явища чи процесу буде забезпечений урахуванням додаткових факторів, повнішим описанням досліджуваного явища, використанням нових результатів моделювання і т. ін. Разом з тим ускладнення математичного опису дає і більш повну математичну модель реальної дійсності, що цілком припустимо для гносеологічної моделі, яка є дослідною, експериментальною, науковою, припускає більший ступінь ідеалізації і не потребує багаторазового чи неперервного використання. Цьому класу моделі, в принципі, не повинні бути притаманні властивості оперативності, тобто можливість швидкого одержання результату за допомогою математичної моделі.

У моделях, які використовуються безпосередньо в САК, вимога оперативності є однією з основних. Це зумовлено тим, що з кожною дією на об'єкт керування у моделі потрібно враховувати дійсні зміни, які виникли в об’єкті, та збурення, що діють на нього і на підставі яких розраховується керувальне діяння. Ця вимога оперативності часто призводить до відмови від складних математичних моделей, до розроблення спеціальних робастних алгоритмів побудови моделей.

Значна відмінність між цими двома видами математичних моделей є суттєвою і її потрібно враховувати під час побудови моделі об’єкта. Слід відзначити, що є ще багато спільного між гносеологічними й інформаційними моделями. Передусім це зумовлено тим, що вони є символьним зображенням явища або процесу чи об’єкта. Тому існує багато спільного в методах побудови гносеологічних та інформаційних моделей: нові методи побудови математичних моделей одного класу використовують в інших класах, що сприяє їх швидкому поширенню.

1. Представлення стаціонарних фізичних систем і процесів

1.1. Типи систем

Усі фізичні системи можна поділити на одновимірні й багатовимірні системи.

Одновимірними системами (ОВС) називають системи, які мають одну вихідну змінну на яку діє одне керувальне діяння. Збурювальних діянь може бути багато. Так, скажімо, збирач рідини як об’єкт керування (ОК) рівнем рідини є типовою ОВС (рис. 1.1).

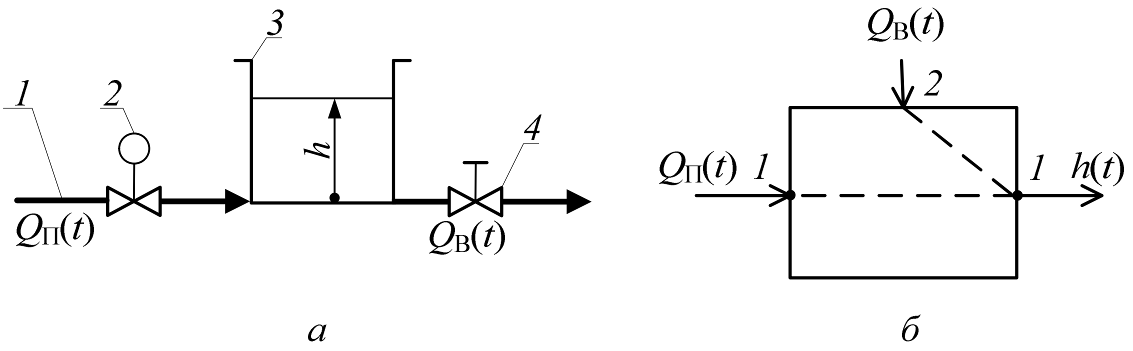


Рис. 1.1 – Збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини:

а – принципова схема; б – загальна структурна схема;
1 – трубопровід подачі рідини; 2 – регулювальний орган; 3 – збирач;
4 – технологічний вентиль

Рідина крізь регулювальний орган (РО) 2 подається у власне збирач рідини 3, а вже з нього крізь технологічний вентиль (ТВ) 4 поступає на виробництво. Якщо, скажімо, витрата рідини $Q_В(t)$ (збурювальне діяння) крізь ТВ збільшиться, то рівень води $h(t)$ (вихідна змінна) почне зменшуватися. Для повернення вихідної змінної до її попереднього усталеного значення, потрібно збільшити витрату рідини $Q_П(t)$ (керувальне діяння), яка по трубопроводу 1 подається у збирач рідини.

Канал «$Q_\text{П}(t) \to h(t)$» називають каналом керування (прямий канал 11). Канал «$Q_\text{В}(t) \to h(t)$» називають каналом збурення (перехресний канал 21).

Багатовимірними системами (БВС) називають системи, які мають більше, ніж одну вихідну змінну, на яку діє і більше, ніж одне керувальне діяння. При цьому зв'язок між ними здійснюється як по прямих, так і по перехресних каналах. Як приклад БВС, розглянемо систему змішування гарячої і холодної води з метою одержання теплої води (рис. 1.2).

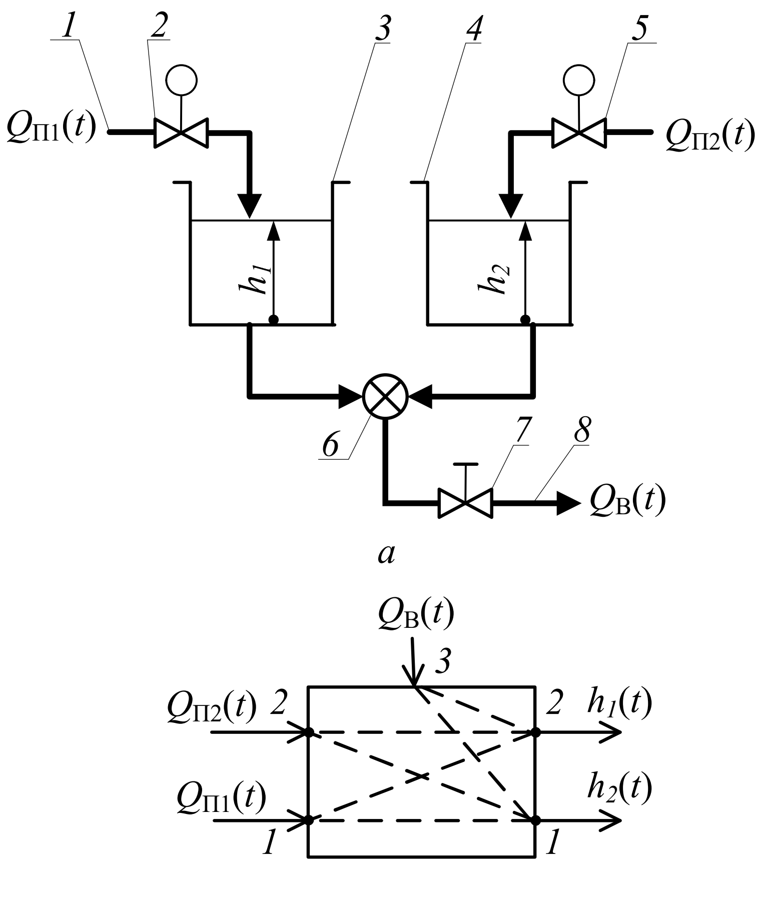


Рис. 1.2 – Система змішування гарячої та холодної води:

а – принципова схема; б – загальна структурна схема;
1 – трубопровід гарячої води; 2, 5 – регулювальні органи; 3 – збирач гарячої води; 4 – збирач холодної води; 6 – змішувач; 7 – технологічний вентиль; 8 – трубопровід теплої води

Гаряча вода по трубопроводу 1 крізь регулювальний орган (РО) 2 подається у збирач гарячої води 3, а холодна вода крізь РО 5 подається до збирача холодної води 4. Гаряча вода із збирача гарячої води і холодна вода із збирача холодної води подається до змішувача 6, де утворюється тепла вода, яка крізь технологічний вентиль (ТВ) 7 подається на виробництво.

Якщо, скажімо, витрата теплої води $Q_{\text{В}}(t)$ (збурювальне діяння) крізь ТВ збільшиться то рівень гарячої води $h_1(t)$ (перша вихідна змінна) і рівень холодної води $h_2(t)$ (друга вихідна змінна) почнуть зменшуватися. Для повернення їх до попередніх усталених значень, потрібно збільшити витрату гарячої води $Q_{\text{П1}}(t)$ (перше керувальне діяння) і витрату холодної води $Q_{\text{П2}}(t)$ (друге керувальне діяння). Одначе збільшення витрати гарячої води призводить не тільки до збільшення рівня гарячої води, а і до збільшення рівня холодної води, позаяк збільшення витрати гарячої води, яка надходить до змішувача 6, перешкоджає витоку холодної води із збирача холодної води. Аналогічна ситуація виникає і у разу збільшення витрати холодної води: рівень холодної води у збирачі холодної води збільшується, тоді як рівень гарячої води у збирачі гарячої води збільшується оскільки витоку гарячої води перешкоджає потік холодної води, що надходить до змішувача.

Канал «$Q_{\text{П1}}(t)\rightarrow h_1(t)$» називають прямим каналом керування 11 (прямий канал 11); канал «$Q_{\text{П1}}(t)\rightarrow h_2(t)$» називають перехресним каналом 12 (канал 12); канал «$Q_{\text{П2}}(t)\rightarrow h_2(t)$» називають прямим каналом керування 22 (прямий канал 22); канал «$Q_{\text{П2}}(t)\rightarrow h_1(t)$» називають перехресним каналом 21 (канал 21); канал «$Q_{\text{В}}(t)\rightarrow h_1(t)$» називають каналом збурення 31 (канал 31), а канал «$Q_{\text{В}}(t)\rightarrow h_2(t)$» каналом збурення 32 (канал 32).

1.2. Форми представлення одновимірних систем

У загальному випадку ОВС можна представити в неперервній чи дискретній формах.

У неперервній формі ОВС представляються:
- диференціальними рівняннями;
- передавальними функціями;
- імпульсними перехідними функціями;
- системою векторно-матричних рівнянь.

У дискретній формі ОВС представляються:
- різницевими рівняннями;
- дискретними передавальними функціями;
- числовими послідовностями;
- системою векторно-матричних різницевих рівнянь.

1.2.1. Неперервна форма представлення одновимірних систем

1.2.1.1. Представлення збирача рідини диференціальними рівняннями

Принципову схему збирача рідини показано на рис. 1.1, а.

Динамічний режим роботи цієї ОВС можна описати диференціальним рівнянням

$$\frac{dV}{dt} = Q_{\text{п}}(t) - Q_{\text{в}}(t), \tag{1.1}$$

де $Q_{\text{п}}(t)$ і $Q_{\text{в}}(t)$ – витрата рідини, яка подається і відводиться із збирача.

Об’єм збирача рідини

$$V=Fh,$$

де F – площа поверхні рідини у збирачі.

Будемо вважати, що $F \neq f(h)$. Отже,

$$dV = Fdh. \tag{1.2}$$

Витрата рідини крізь технологічний вентиль

$$Q_{\text{в}}(t) = S\sqrt{2gh}, \tag{1.3}$$

де S – площа технологічного вентиля;

g – прискорення сили тяжіння.

Підставимо вирази (1.2) і (1.3) у рівняння (1.1). Тоді

$$F\frac{dh}{dt} + S\sqrt{2gh} = Q_{\text{п}}(t)\,. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) – це нелінійне диференціальне рівняння, оскільки змінна h входить під знак радикала. Воно не може бути використане для подальших досліджень, а тому лінеаризуємо його.

При незначному збуренні розглядуваної ОВС, її можна представити наступним лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta Q_{\text{п}}(t) - \Delta Q_{\text{в}}(t). \tag{1.5}$$

Відхилення об’єму рідини від його усталеного значення V_0

$$\Delta V = F\Delta h(t). \tag{1.6}$$

Відхилення витрати рідини від її усталеного значення $Q_{\text{в}}^{0}$

$$\Delta Q_{\text{в}}(t) = \left(\frac{\partial Q_{\text{в}}}{\partial h}\right)_0 \Delta h(t) + \left(\frac{\partial Q_{\text{в}}}{\partial S}\right)_0 \Delta S(t).$$

Вираз (1.3) можна подати і так:

$$Q_{\text{в}}(t) = S(2gh)^{\frac{1}{2}}.$$

Отже, частинна похідна

$$\left(\frac{\partial Q_{\text{в}}}{\partial h}\right)_0 = \frac{1}{2} S_0 (2gh)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2g$$

або

$$\left(\frac{\partial Q_{\text{в}}}{\partial h}\right)_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2gS_0}{\sqrt{2gh_0}} \cdot \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{2gh_0}} = \frac{Q_{\text{в}}^0}{2h_0},$$

де h_0, $Q_{\text{в}}^0$ і S_0 – усталене значення рівня рідини у збирачі, витрати рідини крізь технологічний вентиль і його площа.

Частинна похідна

$$\left(\frac{\partial Q_{\text{в}}}{\Delta S}\right)_0 = \sqrt{2gh_0} \cdot \frac{S_0}{S_0} = \frac{Q_{\text{в}}^0}{S_0}.$$

Отже, відхилення витрати рідини

$$\Delta Q_{\text{в}}(t) = \frac{Q_{\text{в}}^0}{2h_0} \Delta h(t) + \frac{Q_{\text{в}}^0}{S_0} \Delta S(t)\,. \tag{1.7}$$

Підставивши вирази (1.6) і (1.7) у лінійне диференціальне рівняння (1.5), маємо:

$$F\frac{d\Delta h}{dt} = \Delta Q_n(t) - \frac{Q_{\text{в}}^0}{2h_0} \Delta h(t) - \frac{Q_{\text{в}}^0}{S_0} \Delta S(t).$$

У загальному випадку площу технологічного вентиля можна подати так:

$$S{=}ab,$$

де a – висота, b – ширина вентиля.

Будемо вважати, що b =*const*. Тоді

$$\Delta S(t) = b\Delta a(t).$$

Отже

$$2\frac{Fh_0}{Q_{\text{в}}^0}\cdot\frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h(t) = \frac{2h_0}{Q_{\text{в}}^0}\Delta Q_{\text{п}}(t) - \frac{2h_0}{a_0}\Delta a(t). \qquad (1.8)$$

У канонічній формі рівняння (1.8) має вигляд

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = k_{11}u(t) - k_{12}f(t), \qquad (1.9)$$

де $y(t) \sim \Delta h(t)$ – вихідні змінна системи; $u(t) \sim \Delta Q_{\text{п}}(t)$ – керувальне діяння; $f(t) \sim \Delta a(t)$ – збурювальне діяння.

$$T_{11} = 2\frac{V_0}{Q_{в}^0} \; -$$

стала часу збирача рідини;

$$k_{11} = 2\frac{h_0}{Q_{в}^0} \; -$$

коефіцієнт підсилення каналу керування 11;

$$k_{12} = 2\frac{h_0}{a_0} \; -$$

коефіцієнт підсилення каналу збурення 21.

1.2.1.2. Представлення збирача рідини передавальними функціями

Щоб мати уявлення про передавальні функції ОВС розглянемо лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку з правою частиною:

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t).$$

Введемо формальне позначення:

$$\frac{1}{dt} \equiv p,$$

де p – оператор Лапласа.

Розглядуване диференціальне рівняння з урахуванням оператора Лапласа матиме вигляд:

$$py(p) + y(p) = kx(p),$$

де $y(p) \sim y(t)$ – зображення за Лапласом вихідної змінної; $x(p) \sim x(t)$ – зображення за Лапласом вхідної змінної.

Відношення зображення за Лапласом вихідної змінної до зображення за Лапласом вхідної змінної називають *передавальною функцією* системи (каналу, об'єкта).

Перетворення функції часу до зображень їх за Лапласом наведено у додатку А.

Диференціальне рівняння (1.9) в операційній формі має вигляд:

$$(T_{11}p + 1)y(p) = k_{11}u(p) - k_{12}f(p), \tag{1.10}$$

де $y(p)$, $u(p)$ і $f(p)$ — зображення за Лапласом вихідної змінної, керувального діяння і збурення.

Отже, передавальна функція збирача рідини по каналу керування 11

$$g_{11}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k_{11}}{1 + T_{11}p}. \tag{1.11}$$

Передавальна функція збирача рідини по каналу збурення 21

$$g_{12}(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{k_{12}}{1 + T_{11}p}. \tag{1.12}$$

Таким чином, збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини представляється двома передавальними функціями: (1.11) і (1.12). У відповідності з цими передавальними функціями можна побудувати так звану структурну схему цього об'єкта (рис. 1.3).

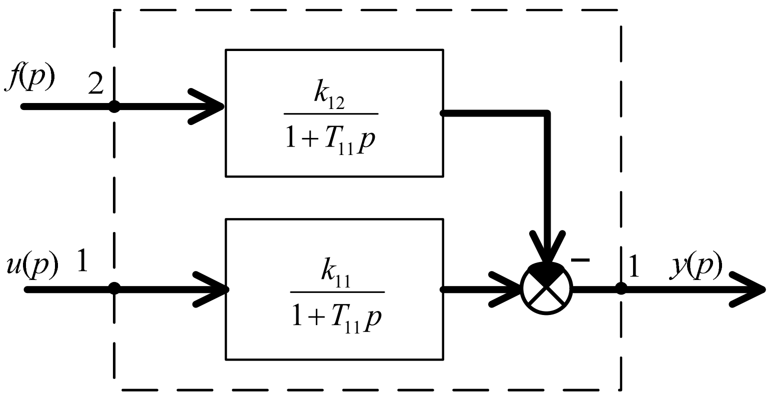


Рис. 1.3 – Структурна схема збирача рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини (аналоговий варіант)

1.2.1.3. Представлення збирача рідини імпульсними перехідними функціями

Імпульсна перехідна функція (ІПФ) ОВС – це перша похідна від перехідної функції цієї системи. В свою чергу, перехідна функція системи – це розв'язок неоднорідного диференціального рівняння права частина якого дорівнює одиниці. Так, наприклад, неоднорідне диференційне рівняння

$$T_{11}\frac{dy}{at}+y(t)=1(t)$$

має розв'язок

$$y(t)=1-e^{-\frac{t}{T_{11}}}.$$

Цей розв'язок задовольняє наведене диференціальне рівняння, позаяк

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-\frac{t}{T_0}}\left(-\frac{1}{T_{11}}\right) = \frac{1}{T_{11}}e^{-\frac{t}{T_{11}}}.$$

Справді

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = T_{11}\frac{1}{T_{11}}e^{-\frac{t}{T_{11}}} + 1 - e^{-\frac{t}{T_{11}}} = 1.$$

Перехідна функція збирача рідини по каналу керування 11 це розв'язок диференціального рівняння (1.9) якщо $f(t)$=0, тобто диференціального рівняння

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = k_{11}u(t).$$

Якщо $u(t)$=1(t), то розв'язок цього рівняння

$$y(t) = k_{11}(1 - e^{-\frac{t}{T_{11}}}).$$

Отже, ІПФ збирача рідини по каналу керування 11

$$g_{11}(t) = \frac{k_{11}}{T_{11}}\exp\left(-\frac{t}{T_{11}}\right). \qquad (1.13)$$

Перехідна функція збирача каналу збурення 21 це розв'язок диференціального рівняння (1.9) якщо $u(t) = 0$, тобто рівняння

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = -k_{12}f(t).$$

Якщо $f(t) = 1(t)$, то розв'язок цього рівняння

$$y(t) = -k_{12}(1 - e^{-\frac{t}{T_{11}}}).$$

Отже, ІПФ збирача рідини по каналу збурення 21

$$g_{12}(t) = -\frac{k_{12}}{T_{11}} \exp\left(-\frac{t}{T_{11}} \right). \qquad (1.14)$$

Таким чином, збирач рідини з «коротким» трубопроводом її подачі як об'єкт керування рівнем маси, представляється двома ІПФ: (1.13) і (1.14). Слід сказати, що таке представлення однозначне позаяк стала часу і коефіцієнти підсилення каналів 11 і 21 входять у відповідні ІПФ.

1.2.1.4. Представлення збирача рідини системою векторно-матричних рівнянь

Передавальну функцію (1.11) формально можна подати так:

$$\frac{y(p)}{k_{11}} = \frac{u(p)}{1 + T_{11} p} = x(p), \qquad (1.15)$$

де $x(p)$ – зображення за Лапласом так званого параметра стану системи, викликаного зміною керувального діяння.

Розглянемо спочатку праву частину виразу (1.15):

$$\frac{u(p)}{1 + T_{11} p} = x(p). \qquad (1.16)$$

Із виразу (1.16) випливає, що

$$(1 + T_{11} p) x(p) = u(p).$$

Оригінал цієї функції такий

$$T_{11} \frac{dx}{dt} + x = u$$

або

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T_{11}}x + \frac{1}{T_{11}}u. \tag{1.17}$$

Диференціальне рівняння (1.17) можна подати у формі Коші на фазовій площині $(x, \dot{x})$. Нехай

$$x = x_1, \text{ а } \dot{x} = x_2.$$

Тоді $\dot{x} = \dot{x}_1$ *і*, отже,

$$\dot{x}_1 = x_2. \tag{1.18}$$

Визначимо $\dot{x}_2$ із диференціального рівняння (1.17). Для цього підставимо $x = x_2$ у рівняння (1.17). Отже

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_{11}}x_2 + \frac{1}{T_{11}}u. \tag{1.19}$$

Диференціальні рівняння (1.18) і (1.19) можна об'єднати в систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 0; \\ \dot{x}_2 = 0 \cdot x_1 - \dfrac{1}{T_{11}}x_2 + \dfrac{1}{T_{11}}u. \end{cases} \tag{1.20}$$

У векторно-матричній формі систему рівнянь (1.20) подають так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} u$$

або в стандартній формі

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + b\underline{u}(t), \tag{1.21}$$

де

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1, викликаний зміною керувального діяння $u(t)$; *«T»* – транспонування.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix}^T -$$

вектор-стовпчик розміру 2×1 матриці керування B.

Розглянемо ліву частину виразу (1.15):

$$\frac{y(p)}{k_{11}} = x(p).$$

Звідси випливає, що зображення вихідної змінної

$$y(p) = k_{11} x(p).$$

Отже, оригінал цієї функції

$$y(t) = k_{11} x(t).$$

Нехай вектор-рядок розміру 1×2

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 & k_{11} \end{bmatrix}.$$

Тоді вихідну змінну розглядуваної ОВС можна визначити так:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

або

$$y(t) = \underline{c} \cdot x(t). \tag{1.22}$$

Таким чином, збирач рідини (ОВС) по каналу керування 11 представляється наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}\underline{u}(t); \\ y(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t). \end{cases} \tag{1.23}$$

Розглянемо передавальну функцію (1.123). Формально її можна подати так:

$$\frac{y(p)}{k_{12}} = -\frac{f(p)}{1+T_{11}p} = z(p), \tag{1.24}$$

де $z(p)$ – зображення за Лапласом параметра стану системи, викликаного зміною збурення $f(t)$.

Праву частину виразу (1.24) подамо так:

$$(1+T_{11}p)z(p) = -f(p).$$

Отже, оригінал цієї функції

$$T_{11}\frac{dz}{dt} + z = -f$$

або

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{T_{11}}z - \frac{1}{T_{11}}f. \tag{1.25}$$

Диференціальне рівняння (1.25) можна подати у формі Коша на фазовій площині $(z, \dot{z})$. Нехай

$$z = z_1, \text{ а } \dot{z} = z_2.$$

Тоді $\dot{z} = \dot{z}_1$, а отже,

$$\dot{z}_1 = z_2. \tag{1.26}$$

Визначимо $\dot{z}_2$ із диференціального рівняння (1.25), поклавши $z = z_2$. Тоді

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{T_{11}} z_2 - \frac{1}{T_{11}} f. \tag{1.27}$$

Диференціальні рівняння (1.26) і (1.27) можна об'єднати в одну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 0 \cdot 0; \\ \dot{z}_2 = 0 \cdot z_1 - \dfrac{1}{T_{11}} z_2 - \dfrac{1}{T_{11}} f. \end{cases}$$

або

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} f.$$

Одержане векторно-матричне рівняння у стандартній формі записують так:

$$\underline{\dot{z}}(t) = A\underline{z}(t) + \underline{b}_1 f,$$

де

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix}^T -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1, викликаний зміною збурю вального діяння $f(t)$.

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{T_{11}} \end{bmatrix} = -\underline{b} -$$

вектор-стовпчик розміру 2×1, матриці збурення.

Розглянемо ліву частину виразу (1.24):

$$\frac{y(p)}{k_{12}} = z(p).$$

Звідси випливає, що зображення вихідної змінної системи

$$y(p) = k_{12} z(p).$$

Отже, оригінал цієї функції

$$y(t) = k_{12} z(t).$$

Нехай вектор-рядок розміру 1x2 матриці вимірювання *C*

$$\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \end{bmatrix}.$$

Тоді вихідну змінну системи можна визначити так:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

або

$$y(t) = \underline{c}_1 \underline{z}(t).$$

Таким чином, збирач рідини (ОВС) по каналу збурення 21 представляється наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = A\underline{z}(t) - \underline{b}f(t); \\ y(t) = \underline{c}_1 \underline{z}(t). \end{cases}$$

Оскільки вихідна змінна по каналу керування 11

$$y(t) = k_{11} \underline{x}(t),$$

а по каналу збурення 21

$$y(t) = k_{12} \underline{z}(t),$$

то можна записати, що

$$k_{11} \underline{x}(t) = k_{12} \underline{z}(t).$$

Отже, вектор стану системи, викликаний зміною збурювального діяння

$$\underline{z}(t) = \frac{k_{11}}{k_{12}}\underline{x}(t)$$

або

$$\underline{z}(t) = d\underline{x}(t),$$

де

$$d = \frac{k_{11}}{k_{12}}.$$

Згідно з цим виразом

$$\underline{\dot{z}}(t) = d\underline{\dot{x}}(t).$$

Систему векторно-матричних рівнянь, яка описує поведінку збирача рідини цього типу у разі дії на нього збурювального діяння, можна подати так:

$$\begin{cases} d\underline{\dot{x}}(t) = dA\underline{x}(t) - \underline{b}f(t); \\ y(t) = dc_1\underline{x}(t). \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) - \dfrac{\underline{b}}{d}f(t); \\ y(t) = dc_1\underline{x}(t). \end{cases}$$

Таким чином, збирач рідини як об'єкт керування рівнем рідини, представляється системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t); \\ y_1(t) = \underline{cx}(t); \\ \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) - \dfrac{1}{d}\underline{b}f(t); \\ y_2(t) = d\underline{c}_1\underline{x}(t). \end{cases} \tag{1.28}$$

У відповідності з системою векторно-матричних рівнянь (1.28) можна побудувати і векторно-матричну структурну схему розглядуваного об'єкта керування (рис.1.4).

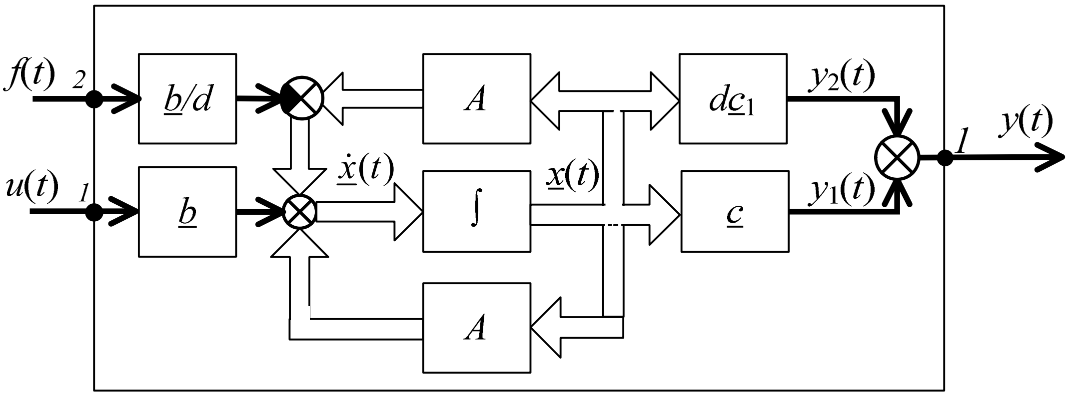


Рис. 1.4 – Векторно-матрична структурна схема збирача рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини (аналоговий варіант)

На схемі вектори зображено подвійними лініями, а скалярні величини – однією лінією.

Векторно-матрична форма представлення ОВС загальноприйнятна і вона досить зручна з математичної точки зору. Справді, всі матриці – числові, ясно видно порядок системи (n = 1), задання двох початкових умов для вектора фазових координат $\underline{x}$ повністю визначає (при заданому значенні керувального $u(t)$ чи збурювального $f(t)$ діянь) стан і подальший рух системи. Саме тому фазові координати x_1 і x_2 і називають *змінними стану* цієї системи, а представлення ОВС системою векторно-матричних рівнянь (1.28) – *представленням у просторі стану.*

Слід сказати, що хоча матриця A та вектори $\underline{b}$, $\underline{c}$, і $\underline{c}_1$ вміщують у собі в прихованому вигляді всю інформацію про властивості та поведінку ОВС, матричне представлення не має наочності. За коефіцієнтами вказаної матриці та векторами без складних обчислень, котрі вимагають використання ЕОМ, важко сказати що-небудь конкретно про властивості цієї системи.

1.2.2. Дискретна форма представлення одновимірних систем

1.2.2.1. Представлення збирача рідини різницевими рівняннями

Передавальній функції (1.11) відповідає диференціальне рівняння

$$T_{11}\frac{d(y-y_{п})}{dt}+y(t)-y_{п}=k_{11}\left[u(t)-u_{п}\right], \tag{1.29}$$

де $y_{п}$ і $u_{п}$ – початкове значення вихідної й вхідної змінних.

Будемо вважати, що $y_{п}$ і $u_{п}$ *const*. Тоді диференціальне рівняння (1.29) матиме вигляд:

$$T_{11}\frac{dy}{dt}+y(t)-y_{п}=k_{11}\left[u(t)-u_{п}\right]. \tag{1.30}$$

Диференціальному рівнянню (1.30) відповідає різницеве рівняння 1-ої різниці:

$$T_{11}\frac{y(i+1)-y(i)}{T}+y(i)-y_{п}=k_{11}\left[u(t)-u_{п}\right],\ i=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.31}$$

де T – період дискретизації неперервної вхідної $u(t)$ і вихідної $y(t)$ змінних.

На підставі різницевого рівняння (1.31) легко обчислити значення вихідної змінної системи у дискретний момент часу $i + 1$ так:

$$y(i+1)=y(i)-\frac{T}{T_{11}}\left[y(i)-y_{п}\right]+\frac{k_{11}T}{T_{11}}\left[u(i)-u_{п}\right]. \tag{1.32}$$

Таким чином, рекурентне різницеве рівняння (1.32) і представляє збирач рідини по каналу керування 11.

Передавальній функції (1.12) відповідає диференціальне рівняння

$$T_{11}\frac{d(y-y_{п})}{dt}+y(t)-y_{п}=k_{12}f(t). \tag{1.33}$$

Оскільки $y_п=const$, то рівняння (1.33) приймає вигляд:

$$T_{11}\frac{dy}{dt}+y(t)-y_п=-k_{12}f(t). \qquad (1.34)$$

Диференціальному рівнянню (1.34) відповідає різницеве рівняння 1-ої різниці:

$$T_{11}\frac{y(i+1)-y(i)}{T}+y(i)-y_п=-k_{12}f(i),\ \ i=1,2,... \qquad (1.35)$$

На підставі різницевого рівняння (1.35) можна визначити значення вихідної змінної в дискретний момент часу $i+1$:

$$y(i+1)=y(i)-\frac{T}{T_{11}}\left[y(i)-y_п\right]-\frac{T}{T_{11}}k_{12}f(i). \qquad (1.36)$$

Таким чином, рекурентне різницеве рівняння (1.36) представляє збирач рідини цього типу по каналу збурення 21.

Рекурентні різницеві рівняння (1.32) і (1.36) представляють збирач рідини як об'єкт керування рівнем рідини.

1.2.2.2. Представлення збирача рідини дискретними передавальними функціями

Якщо розглядувану систему представлено передавальною функцією $g(p)$, то з допомогою Таблиць z – перетворення функцій часу (дод. А), можна одержати *дискретну передавальну функцію* $g(z)$. Для цього потрібно скористатися формулою:

$$g(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{g(p)}{p}\right\}, \qquad (1.37)$$

де

$$z=e^{pT}=\exp(pT).$$

Передавальні функції збирача по каналу керування 11 і каналу збурення 21 мають такий вигляд:

$$g_{11}(p) = k_{11}\frac{1}{1+T_{11}p};$$

$$g_{12}(p) = -k_{12}\frac{1}{1+T_{11}p}.$$

Вираз

$$\frac{1}{1+T_{11}p} = \frac{\frac{1}{T_{11}}}{\frac{1}{T_{11}}+p} = \frac{\quad}{\quad + p}, \qquad = \frac{1}{T_{11}} \tag{1.38}$$

Поділимо вираз (1.38) на оператор p. Тоді згідно з дод. А

$$\frac{\quad}{p(\quad + p)} = \frac{(1-e^{-\quad T})}{(z-1)(z-e^{-\quad T})}.$$

Нехай

$$e^{-\alpha T} = e^{-\frac{T}{T_{11}}} = a_{\text{р}} = \exp\left(-\frac{T}{T_{11}}\right).$$

Тоді

$$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})} = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{(1-a_{\text{р}})}{1-a_{\text{р}}z^{-1}}z^{-1}.$$

Отже, дискретна передавальна функція каналу керування 11 з урахуванням коефіцієнта підсилення k_{11} за формулою (1.37) визначається так:

$$g_{11}(z) = k_{11}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{(1-g_{\text{р}})}{1-a_{\text{р}}z^{-1}}z^{-1}$$

або

$$g_{11}(z) = k_{11}\frac{(1-a_{\text{р}})}{1-a_{\text{р}}z^{-1}}z^{-1}. \tag{1.39}$$

Аналогічно визначається дискретна передавальна функція каналу збурення 21:

$$g_{12}(z) = -k_{12}\frac{(1-a_{\text{р}})}{1-a_{\text{р}}z^{-1}}z^{-1}. \qquad (1.40)$$

Таким чином, збирач рідини як об’єкт керування рівнем рідини представляється двома дискретними передавальними функціями (1.39) і (1.40). У відповідності з цими передавальними функціями можна побудувати і його структурну схему (рис. 1.5).

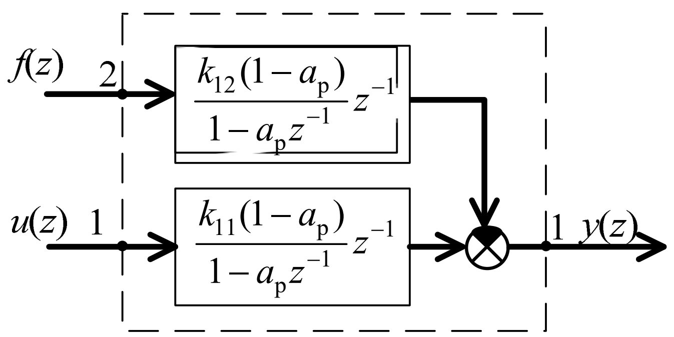


Рис. 1.5 – Структурна схема збирача рідини як об’єкта керування рівнем (дискретний варіант)

Представлення ОВС дискретними передавальними функціями однозначне позаяк стала часу T_{11} і коефіцієнту підсилення каналів 11 і 21 (k_{11} і k_{12}) присутні як у диференціальному рівнянні (1.9), так і в дискретних передавальних функціях (1.39) і (1.40).

1.2.2.3. Представлення збирача рідини числовими послідовностями

Рекурентне різницеве рівняння (1.32), яке представляє збирач рідини по каналу керування 11 можна подати так:

$$y(i+1) + a_1 y(i) = b_1 u(i), \qquad (1.41)$$

де

$$a_1 = \frac{T - T_{11}}{T_{11}}; \quad T_{11} > T;$$

$$b_1 = k_{11}\frac{T}{T_{11}}.$$

Рекурентне різницеве рівняння (1.36), яке представляє розглядуваний об’єкт керування по каналу збурення 21, можна подати так:

$$y(i+1) + a_1 y(i) = -b_2 f(i), \tag{1.42}$$

де

$$b_2 = k_{12}\frac{T}{T_{11}}.$$

Розв’язок рекурентного рівняння (1.41) чи (1.42) при нульових початкових умовах і дії на вхід ОВС *дельта-функцій Кронекера* називають *числовою послідовністю* (ЧП).

Дельта-функція Кронекера $\delta(k)$ являє собою імпульс одиничної амплітуди:

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \neq 0; \\ 1, \text{ якщо } k = 0, \end{cases} \tag{1.43}$$

де k – дискретний час.

Якщо на вхід каналу керування 11 подати дельта-функцію Кронекера

$$\delta(k) = u(k) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \neq 0; \\ 1, \text{ якщо } k = 0, \end{cases} \tag{1.44}$$

то рекурентне різницеве рівняння (1.41) матиме такий вигляд:

$$g(k+1) + a_1 g(k) = b_1 u(k). \tag{1.45}$$

Отже, числова послідовність каналу керування 11

$$\begin{cases} g(1) = b_1; \\ g(2) = -a_1 b_1; \\ \vdots \\ g(k) = (-a_1)^{k-1} b_1, \quad k = 1, 2, ..., N. \end{cases} \tag{1.46}$$

Якщо на вхід каналу збурення 21 подати дельта-функцію Кронекера

$$\delta(k) = f(k) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \neq 0; \\ 1, \text{ якщо } k = 0, \end{cases} \tag{1.47}$$

то рекурентне різницеве рівняння (1.42) матиме вигляд:

$$g(k+1) + a_1 g(k) = -b_2 f(k). \tag{1.48}$$

Отже, ЧП каналу збурення 21 розглядуваної ОВС

$$\begin{cases} g(1) = b_2; \\ g(2) = -a_1 b_2; \\ \vdots \\ g(k) = -(-a_1)^{k-1} b_2, \quad k = 1, 2, ..., N. \end{cases} \tag{1.49}$$

Числові послідовності (1.46) і (1.49) однозначно представляють розглядуваний тип збирача рідини позаяк коефіцієнти різницевих рівнянь (1.41) і (1.42) присутні в коефіцієнтах числових послідовностей.

1.2.2.4. Представлення збирача рідини системою векторно-різницевих рівнянь

Нехай, приміром ОВС представлено системою неперервних векторно-матричних рівнянь (1.28), тобто системою:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A_{\text{н}}\underline{x}(t) + \underline{b}_{\text{н}}u(t); \\ y_1(t) = \underline{c}_{\text{н}}\underline{x}(t); \\ \dot{\underline{x}}(t) = A_{\text{н}}\underline{x}(t) - \dfrac{1}{d}\underline{b}_{\text{н}}f; \\ y_2(t) = d\underline{c}_{1\text{н}}\underline{x}(t), \end{cases} \tag{1.50}$$

де $A_{\text{н}}$, $\underline{b}_{\text{н}}$, $\underline{c}_{\text{н}}$, $\underline{c}_{1\text{н}}$, – матриця стану неперервної системи, вектор-стовпець матриці керування B і вектори-рядки матриці вимірювання C.

Розглядуваний об’єкт можна представляти наступною системою векторно-матричних різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} x(i+1) = A_{\text{Д}}x(i) + \underline{b}_{\text{Д}}u(i); \\ y_1(i) = \underline{c}_{\text{Д}}x(i); \\ x(i+1) = A_{\text{Д}}x(i) - \dfrac{1}{d}\underline{b}_{\text{Д}}f(t); \\ y_2(i) = d\underline{c}_1 x(i), \end{cases} \tag{1.51}$$

де

$$A_{\text{Д}} = e^{-A_{\text{Н}}T} = I + \frac{T}{1!}A_{\text{Н}} + \frac{T^2}{2!}A_{\text{Н}}^2 + \ldots;$$

$$\underline{b}_{\text{Д}} = \underline{b}_{\text{Н}}\left[T \cdot 1 + \frac{T^2}{2!}A_{\text{Н}} + \frac{T^3}{3!}A_{\text{Н}}^2\right] + \ldots;$$

$$\underline{c}_{\text{Д}} = \underline{c}_{\text{н}};$$

$$\underline{c}_1 = \underline{c}_{1\text{н}};$$

T – період дискретизації; I – одинична матриця.

У відповідності з системою векторно-матричних різницевих рівнянь (1.51) можна побудувати векторно-матричну структурну схему розглядуваного одновимірного об’єкта керування (рис. 1.6).

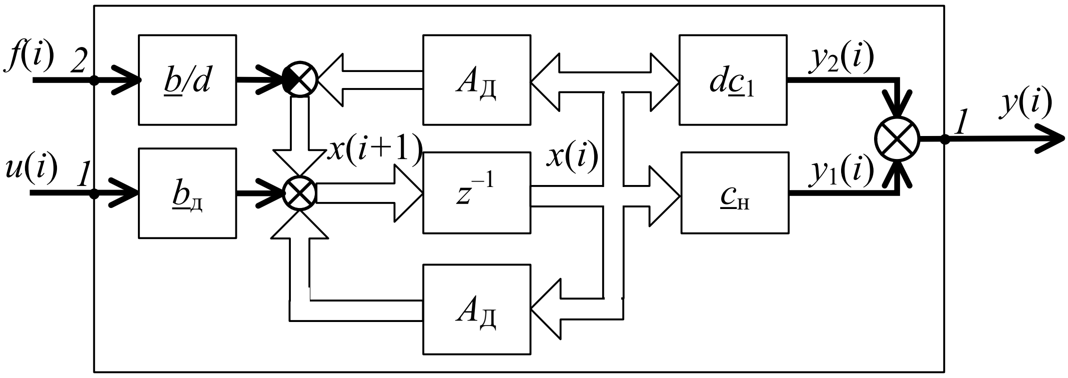


Рис. 1.6 – Векторно-матрична структурна схема збирача рідини як об’єкта керування рівнем (дискретний варіант)

1.3. Форми представлення багатовимірних систем

Багатовимірні системи (БВС) можна представити у неперервній чи дискретній формах.

У неперервній формі БВС представляються:

- системою лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку;
- матрицею передавальних функцій розміру $n \times n$;
- матрицею імпульсних перехідних функцій;
- системою неперервних векторно-матричних рівнянь.

У дискретній формі БВС представляються:

- системою різницевих рівнянь 1-ої різниці;
- матрицею дискретних передавальних функцій розміру $n \times n$;
- матрицею числових послідовностей;
- системою векторно-матричних різницевих рівнянь.

1.3.1. Неперервна форма представлення багатовимірних систем

1.3.1.1. Представлення системи змішування гарячої і холодної води системою лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку

Принципову схему системи змішування гарячої і холодної води з метою одержання теплої води показано на рис. 1.7.

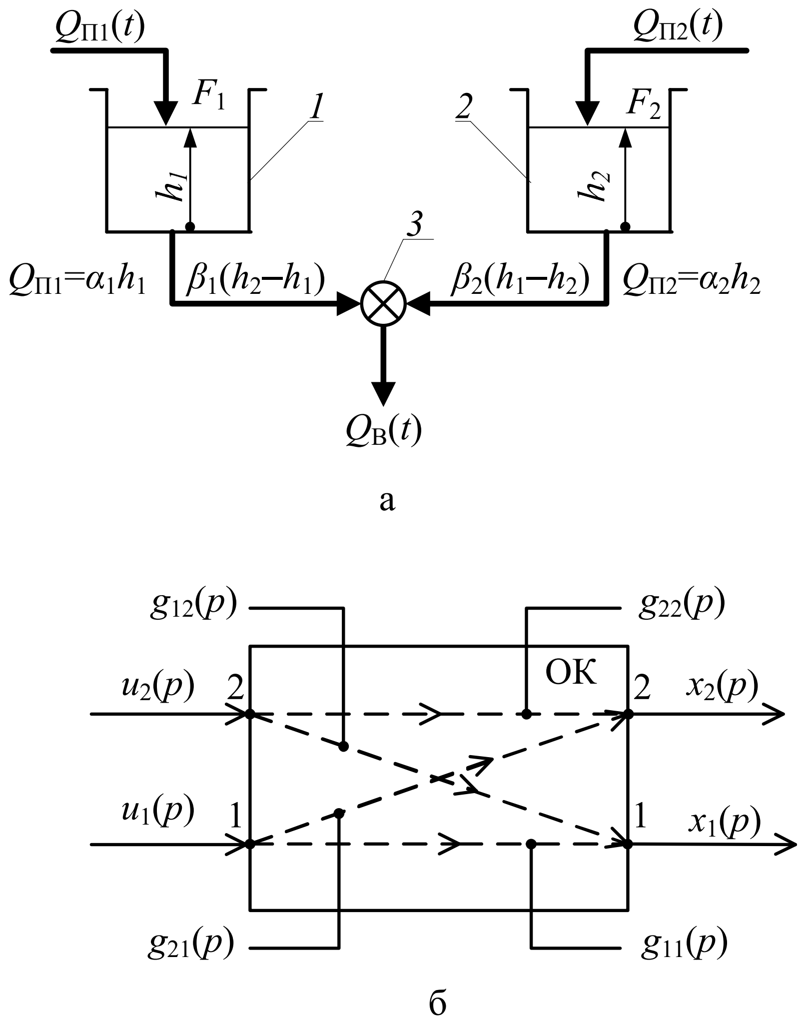


Рис. 1.7 – Система змішування гарячої і холодної води:

а – принципова схема; б – структурна схема;

1 – збирач гарячої води; 2 – збирач холодної води; 3 – змішувач

Виходячи із матеріального балансу витрат гарячої і холодної води можна скласти наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} F_1 \dfrac{dh_1}{dt} = Q_{П1}(t) - \alpha_1 h_1(t) + \beta_1 \left[h_2(t) - h_1(t) \right]; \\ F_2 \dfrac{dh_2}{dt} = Q_{П2}(t) - \alpha_2 h_2(t) + \beta_2 \left[h_1(t) - h_2(t) \right], \end{cases} \qquad (1.52)$$

де F_1 і F_2 – площа поверхні гарячої води у збирачі гарячої води і площа поверхні холодної води у збирачі холодної води, α_1, α_2, β_1 і β_2 – коефіцієнти витрати.

Будемо вважати, що $F_1 \neq f_1(h_1)$, а $F_2 \neq f_2(h_2)$. Для спрощення подальших записів, будемо вважати, що $h_1 \sim h_1(t)$; $h_2 \sim h_2(t)$; $Q_{П1} \sim Q_{П1}(t)$; $Q_{П2} \sim Q_{П2}(t)$. Тоді система диференціальних рівнянь (1.52) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{F_1} Q_{П1} - \dfrac{\alpha_1}{F_1} h_1 + \dfrac{\beta_1}{F_1} h_2 - \dfrac{\beta_1}{F_1}; \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{F_2} Q_{П2} - \dfrac{\alpha_2}{F_2} h_2 + \dfrac{\beta_2}{F_2} h_1 - \dfrac{\beta_2}{F_2} h_2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} + \left(\dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{F_1} \right) h_1 - \dfrac{\beta_1}{F_1} h_2 = \dfrac{1}{F_1} Q_{П1}; \\ \dfrac{dh_2}{dt} + \left(\dfrac{\alpha_2 + \beta_2}{F_2} \right) h_2 - \dfrac{\beta_2}{F_2} h_1 = \dfrac{1}{F_2} Q_{П2}. \end{cases} \qquad (1.53)$$

Нехай $x_1 \sim h_1$, а $x_2 \sim h_2$ – це параметри стану системи, а $u_1 \sim Q_{П1}$, $u_2 \sim Q_{П2}$ – це керувальні діяння. Тоді систему лінійних диференціальних рівнянь (1.53) можна подати так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) = b_1u_1(t); \\ \dfrac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) = b_2u_2(t), \end{cases} \tag{1.54}$$

де

$$a_{11} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{F_1};$$

$$a_{12} = -\frac{\beta_1}{F_1};$$

$$a_{21} = -\frac{\beta_2}{F_2};$$

$$a_{22} = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{F_2};$$

$$b_1 = \frac{1}{F_1}; \quad b_2 = \frac{1}{F_2}.$$

1.3.1.2. Представлення системи змішування гарячої і холодної води матрицею передавальних функцій

Нехай $Q_{П1}(t_0) = Q_{П2}(t_0) = 0$, а $h_1(t) = h_2(t) \leq 0 \ \ \forall t \leq 0$. У цьому випадку систему диференціальних рівнянь (1.54) можна подати в зображеннях Лапласа:

$$\begin{cases} px_1(p) + a_{11}x_1(p) + a_{12}x_2(p) = b_1u_1(p); \\ px_2(p) + a_{21}x_1(p) + a_{22}x_2(p) = b_2u_2(p), \end{cases} \tag{1.55}$$

де p – оператор Лапласа.

З урахуванням спрощених позначень систему операційних рівнянь (1.55) подамо так:

$$\begin{cases}(p+a_{11})x_1+a_{12}x_2=b_1u_1;\\(p+a_{22})x_2+a_{21}x_1=b_2u_2.\end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1}{p+a_{11}}u_1-\dfrac{a_{12}}{p+a_{11}}x_2;\\x_2=\dfrac{b_2}{p+a_{22}}u_2-\dfrac{a_{22}}{p+a_{22}}x_1.\end{cases}\tag{1.56}$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (1.56) має такий вигляд:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1}{p+a_{11}}u_1-\dfrac{a_{12}}{p+a_{11}}-\left[\dfrac{b_2}{p+a_{22}}u_2-\dfrac{a_{21}}{p+a_{22}}x_1\right];\\x_2=\dfrac{b_2}{p+a_{22}}u_2-\dfrac{a_{21}}{p+a_{22}}-\left[\dfrac{b_1}{p+a_{11}}u_1-\dfrac{a_{12}}{p+a_{11}}x_2\right].\end{cases}$$

Після перетворення рівнянь цієї системи маємо наступне:

$$\begin{cases}\left[1-\dfrac{a_{12}a_{21}}{(p+a_{11})(p+p_{22})}\right]x_1=\dfrac{b_1}{p+a_{11}}u_1-\dfrac{a_{12}b_2}{(p+a_{11})(p+a_{22})}-u_2;\\\left[1-\dfrac{a_{12}a_{21}}{(p+a_{11})(p+p_{22})}\right]x_2=\dfrac{b_2}{p+a_{22}}u_2-\dfrac{a_{21}b_1}{(p+a_{11})(p+a_{23})}-u_1.\end{cases}$$

Нехай

$$D(p)=(p+a_{11})(p+a_{22})-a_{12}a_{21}.$$

Тоді

$$\begin{cases}x_1(p)=g_{11}(p)u_1(p)+g_{12}u_2(p);\\x_2(p)=g_{21}(p)u_1(p)+g_{22}u_2(p).\end{cases}\tag{1.57}$$

Таким чином, передавальна функція системи змішування по прямому каналу 11

$$g_{11}(p)=\frac{x_1(p)}{u_1(p)}=\frac{b_1}{D(p)}(p+a_{22}). \tag{1.58}$$

Передавальна функція системи змішування по перехресному каналу 21

$$g_{12}(p)=\frac{x_1(p)}{u_2(p)}=-\frac{b_2}{D(p)}a_{12}. \tag{1.59}$$

Передавальна функція системи змішування по перехресному каналу 12

$$g_{21}(p)=\frac{x_2(p)}{u_1(p)}=-\frac{b_1}{D(p)}a_{21}. \tag{1.60}$$

Передавальна функція системи змішування по прямому каналу 22

$$g_{22}(p)=\frac{x_2(p)}{u_2(p)}=\frac{b_2}{D(p)}(p+a_{11}). \tag{1.61}$$

Систему операційних рівнянь (1.55) подамо у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix}$$

або, ще простіше

$$\underline{X}(p)=G(p)\underline{U}(p),$$

де

$$\underline{X}(p)=\begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{bmatrix} \;-$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$\underline{U}(p)=\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix} \;-$$

вектор керувальних діянь розміру 2×1;

$$G(p) = \begin{bmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{bmatrix} - \tag{1.62}$$

матриця передавальних функцій розміру 2×2.

На підставі передавальних функцій (1.50) – (1.61) можна побудувати структурну схему цієї системи (рис. 1.7.б).

Аналіз матриці передавальних функцій (1.62) свідчить, що вона складається із 4-х передавальних функцій: $g_{11}(p)$, $g_{12}(p)$, $g_{21}(p)$ і $g_{22}(p)$. Передавальні функції прямих каналів 11 і 22 розташовані по діагоналі (перший рядок – другий рядок), а передавальні функції каналів 21 і 12 розташовані по діагоналі (другий рядок – перший рядок).

1.3.1.3. Представлення системи змішування гарячої і холодної води матрицею імпульсних перехідних функцій

Якщо маємо, приміром, матрицю передавальних функцій (1.62), то вектор параметрів стану цієї системи можна визначити за допомогою інтеграла згортки:

$$\underline{x}(t) = \int_0^t G(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau, \quad 0 \le \tau \le t \tag{1.63}$$

або, що те саме

$$\underline{x}(t) = \int_0^t G(\tau)g(t-\tau), \quad 0 \le \tau \le t, \tag{1.64}$$

де $G(t)$ – обернене перетворення матриці передавальних функцій $G(p)$.

Таким чином, $G(t)$ – це матриця імпульсних перехідних функцій $g_{ij}(t)$ прямих і перехресних каналів. У загальному випадку, якщо система має m входів і r виходів, то розмір цієї матриці дорівнює $m \times r$. Елементи матриці $g_{ij}(t)$ – це елементи перетворених елементів $g_{ij}(p)$ матриці передавальних функцій (1.62).

1.3.1.4. Представлення системи змішування гарячої і холодної води системою векторно-матричних рівнянь

Розглянемо систему змішування гарячої і холодної води (рис. 1.7, а).

Нехай $u_1(t) \sim Q_{П1}(t)$, а $u_2(t) \sim Q_{П2}(t)$ – це керувальні діяння, а

$$y(t) = Q_{П1}(t) + Q_{П2}(t) = Q_В \ –$$

це вихідна змінна системи.

Оскільки ця система – це система 2×2, то вона має два вхідні діяння. Отже, потрібно мати і два параметри стану системи. Нехай $x_1(t) \sim h_1(t)$, а $x_2(t) \sim h_2(t)$. Тоді систему змішування гарячої і холодної води можна подати одним векторно-матричним рівнянням стану системи скориставшись системою диференціальних рівнянь (1.54):

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \qquad (1.65)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \ –$$

матриця стану системи розміру 2×2.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} -$$

матриця керування системи розміру 2×2.

Оскільки у якості вихідної змінної розглядуваної системи прийнято витрату теплої води, то

$$Q_В(t) = Q_{П1}(t) + Q_{П2}(t).$$

Витрата гарячої води

$$Q_{П1}(t) = \alpha_1 h_1(t),$$

а витрата холодної води

$$Q_{П2}(t) = \alpha_2 h_2(t).$$

Отже, витрата теплої води

$$Q_В(t) = \alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t).$$

Нехай $y(t) \sim Q_В(t)$, а $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тоді

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

У векторно-матричній формі це рівняння подамо так:

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t), \tag{1.66}$$

де

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 2×1;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

матриця вихідної змінної системи розміру 2×2.

Таким чином, систему змішування гарячої і холодної води можна представити системою векторно-матричних рівнянь, яка складається із векторно-матричного рівняння стану системи (1.65) і векторно-матричного рівняння вихідної змінної системи (1.66).

У загальному випадку, у разі наявності лінійної системи диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами, яка представляє багатовимірну систему, вона може бути представлена системою векторно-матричних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t); \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t), \end{cases} \tag{1.67}$$

де $\underline{x}(t)$ – вектор стану системи розміру $n{\times}1$;

$\underline{u}(t)$ – вектор вхідної змінної розміру $r{\times}1$;

$\underline{y}(t)$ – вектор вихідної змінної розміру $m{\times}1$;

A – матриця стану системи розміру $n{\times}n$;

B – матриця керування системи розміру $n{\times}r$;

C – матриця вихідної змінної розміру $m{\times}n$;

D – матриця зв’язку входи-виходи розміру $m{\times}r$.

На підставі системи векторно-матричних рівнянь (1.67) будується відповідна структурна схема БВС (рис. 1.8).

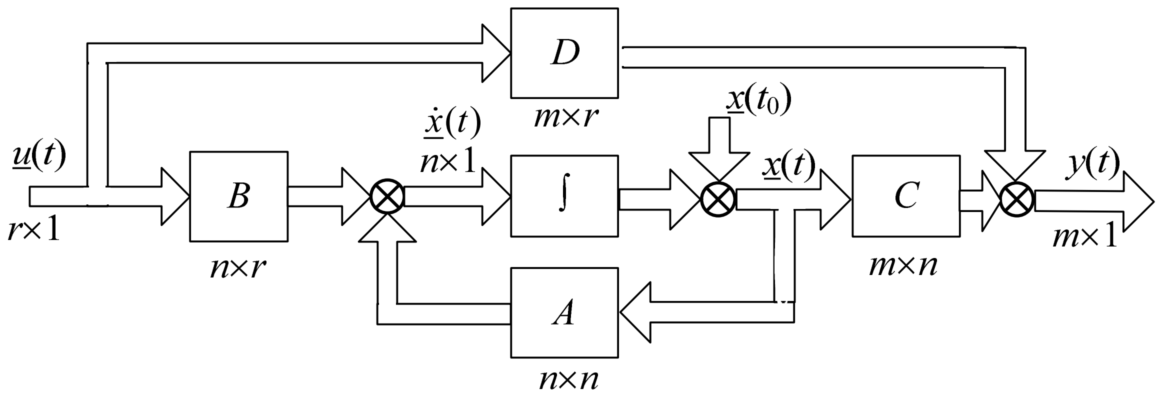


Рис. 1.8 – Векторно-матрична структурна схема багатовимірної системи

Представлення БВС системою векторно-матричних рівнянь (у просторі стану системи) не є природним у тому сенсі, що зазвичай воно виводиться з іншого представлення системи. Одначе, це досить вагомий математичний засіб, властивості якого ми розглянемо.

Основні властивості цього засобу такі:

1. Початкові умови з'являються явно, як і в будь-якому диференціальному рівнянні.
2. Матриці, які знаходяться у системі векторно-матричних рівнянь, є матрицями зі сталими елементами. Їх легко визначити згідно з законами лінійної алгебри.
3. Має місце однакове представлення як одновимірних, так і багатовимірних систем, чого не можна сказати стосовно представлення систем передавальними функціями, де виконується перехід від раціонального дробу змінної *p* до матриці раціональних дробів цієї ж змінної.

1.3.2. Дискретна форма представлення багатовимірних систем

1.3.2.1. Представлення системи змішування гарячої і холодної води системою рекурентних різницевих рівнянь

Нехай БВС представлено системою диференціальних рівнянь (1.54). Відомо, що dx_1/at і dx_2/at можна подати так:

$$\frac{dx_1}{at} = \frac{x_1(i+1) - x_1(i)}{T}; \tag{1.68}$$

$$\frac{dx_2}{at} = \frac{x_2(i+1) - x_2(i)}{T}, \tag{1.69}$$

де T – період дискретності системи.

Підставивши вирази (1.68) і (1.69) у систему диференціальних рівнянь (1.54) і виконавши відповідні перетворення маємо:

$$\begin{cases} x_1(i) = (1 - Ta_{11})x_1(i-1) - Ta_{12}x_2(i-1) + Tb_1u_1(i-1); \\ x_2(i) = (1 - Ta_{22})x_2(i-1) - Ta_{21}x_1(i-1) + Tb_2u_2(i-1); \\ y(i) = x_1(i) + x_2(i). \end{cases}$$

З метою спрощення системи різницевих рівнянь зазвичай період дискретності T не записують і тому наведену систему рекурентних різницевих рівнянь подають так:

$$\begin{cases} x_1(i) = (1 - a_{11})x_1(i-1) - a_{12}x_2(i-1) + b_1u_1(i-1); \\ x_2(i) = (1 - a_{22})x_2(i-1) - a_{21}x_1(i-1) + b_2u_2(i-1); \\ y(i) = x_1(i) + x_2(i). \end{cases} \tag{1.70}$$

Таким чином, для визначення однозначно $y(i)$ для будь-якого дискретного часу $i \geq 0$ необхідно знати $x_1(i-1)$, $x_2(i-1)$, $u_1(i-1)$ і $u_2(i-1)$.

1.3.2.2. Представлення системи змішування гарячої і холодної води матрицею дискретних передавальних функцій

Якщо розглядувану БВС представлено скажімо, матрицею передавальних функцій (1.62), то застосувавши до неї відповідне z-перетворення, можна одержати дискретні передавальні функції по відповідних каналах, а отже на підставі їх розробити і матрицю дискретних передавальних функцій.

Запитання і завдання для самоперевірки

1.1. Які фізичні системи називають одновимірними системами? Наведіть приклади таких систем.

1.2. Які фізичні системи називають багатовимірними системами? Наведіть приклади таких систем. У чому полягає основна відмінність їх від одновимірних систем.

1.3. Які форми представлення (математичного опису) одновимірних систем вам відомі?

1.4. Назвіть чотири способи представлення одновимірних систем у неперервній формі.

1.5. Назвіть чотири способи представлення одновимірних систем у дискретній формі.

1.6. Як отримати передавальні функції одновимірної системи по каналу керування і каналу збурення, якщо цю систему представлено лінійним диференціальним рівнянням?

1.7. Як отримати імпульсні перехідні функції одновимірної системи по каналу керування і каналу збурення, якщо цю систему представлено лінійним диференціальним рівнянням?

1.8. Як отримати векторно-матричне рівняння одновимірної системи по каналу керування, якщо його представлено неперервною передавальною функцією? Що таке параметр стану системи?

1.9. Як отримати різницеве рівняння одновимірної системи по каналу керування, якщо його представлено диференціальним рівнянням 1-го порядку? Що таке початкові значення вхідної і вихідної змінних системи? Що таке період дискретизації (дискретності)?

1.10. Як отримати дискретні передавальні функції одновимірної системи по каналу керування і каналу збурення, якщо цю систему представлено передавальними функціями по вказаних каналах?

1.11. Як отримати числові послідовності одновимірної системи по каналу керування і каналу збурення, якщо ці канали представлено рекурентними різницевими рівняннями?

1.12. Назвіть властивості дельта-функції Кронекера.

1.13. Назвіть чотири способи представлення багатовимірних систем у неперервній формі.

1.14. Назвіть чотири способи представлення багатовимірних систем у дискретній формі.

1.15. Як отримати матрицю передавальних функцій двовимірної системи (системи 2×2), якщо її представлено системою, яка складається з двох лінійних диференціальних рівнянь?

1.16. Назвіть основні властивості засобу представлення одно- і багатовимірних систем у векторно-матричній формі.

2. Побудова математичних моделей систем і процесів

2.1. Коливальні системи

2.1.1. Нитковий маятник

2.1.1.1. Представлення ниткового маятника диференціальними рівняннями

З метою одержання математичної моделі ниткового маятника розглянемо його принципову схему, рис. 2.1.

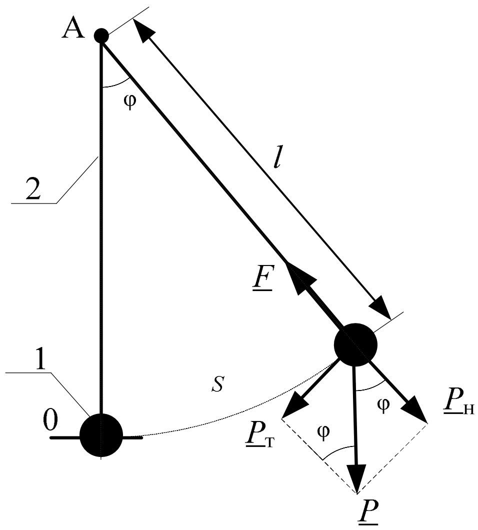


Рис. 2.1 – Принципова схема ниткового маятника:

1 – вантаж; 2 – нитка (підвіс)

Аналіз цієї схеми свідчить, що положення вантажу 1 у будь-який момент часу t визначається кутом φ, котрий нитка 2 підвісу утворює з вертикаллю АО. Цей кут будемо вимірювати в радіанах. Замість кута φ скористаємося довжиною дуги S. Тоді довжина дуги

$$S=l\varphi. \tag{2.1}$$

Знак величини S співпадає зі знаком величини φ і вказує на те, у який бік від точки 0 зміщується вантаж.

Рух вантажу виникає як наслідок дії сили тяжіння $\underline{P}$ та сили натягу нитки $\underline{F}$.

З метою аналізу цього руху розкладемо силу тяжіння $\underline{P}$ на дві складові: тангенціальну $\underline{P}_{\text{Т}}$, яка направлена по дотичній до траєкторії вантажу та нормальну $\underline{P}_{\text{Н}}$, яка направлена поздовж нитки перпендикулярно до траєкторії.

Нормальна складова $\underline{P}_{\text{Н}}$ сили тяжіння $\underline{P}$ і сила натягу нитки $\underline{F}$, створюють доцентрове прискорення $a_{\text{дц}}$ і змушують вантаж рухатися по колі, змінюючи весь час напрям швидкості вантажу. Але вказані сили не змінюють значення його швидкості. Навпаки, тангенціальна складова $\underline{P}_{\text{Т}}$ сили тяжіння $\underline{P}$ у момент, коли вантаж відхилиться на кут φ, може бути визначена так (рис. 2.1):

$$\underline{P}_{\text{Т}} = -P \sin \varphi = -mg \sin \varphi, \tag{2.2}$$

де m – маса вантажу.

Знак мінус (–) у виразі (2.2) стоїть тому, що для додатніх кутів φ (sin φ > 0), тангенціальна складова сили тяжіння направлена у від'ємний бік і навпаки, якщо кут φ буде від'ємний (sin φ < 0), то тангенціальна складова сили тяжіння буде направлена у додатний бік.

Згідно з другим законом Ньютона

$$\underline{P}_{\text{Т}} = m\, a_{\text{Т}}, \tag{2.3}$$

де $a_{\text{Т}}$ – тангенціальне прискорення.

Задля обчислення тангенціального прискорення, потрібно знайти другу похідну від шляху, який обчислюється за формулою (2.1). Отже

$$a_{\text{т}} = s'' = l\varphi''. \tag{2.4}$$

Підставимо вирази (2.2) і (2.4) у вираз (2.3). Тоді

$$-mg \sin \varphi = ml\varphi''$$

або, після ділення на ml, маємо

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{2.5}$$

Нехай

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Звідси випливає, що власна частота ниткового маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2.6}$$

Таким чином, диференціальне рівняння (2.5) можна подати так:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \sin\varphi = 0. \tag{2.7}$$

Диференціальне рівняння (2.7) – це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Воно описує коливання вантажу за досить значних значень кута відхилення вантажу від положення його рівноваги.

Якщо коливання ниткового маятника мають малу амплітуду і, отже, вантаж відхиляється на незначний кут φ, то рівняння (2.7) можна спростити, розклавши $\sin\varphi$ в тригонометричний ряд

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots (-1)^K \cdot \frac{\varphi^{2K+1}}{(2K+1)!}.$$

Якщо $0 \le \varphi \le 0{,}114$, то

$$\sin\varphi \approx \varphi \tag{2.8}$$

з точністю 0,0005.

З урахуванням виразу (2.8) нелінійне диференціальне рівняння (2.7) можна замінити рівнянням виду:

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0; \\ &0 \le \varphi \le 0{,}114. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Диференціальне рівняння (2.9) – це лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Воно описує малі коливання ниткового маятника.

Важливою властивістю цього рівняння є те, що невідома функція φ та її друга похідна φ'' входять у нього лінійно з коефіцієнтом ω_0^2, який не залежить від часу t.

2.1.1.2. Представлення ниткового маятника системою векторно-матричних рівнянь

Диференціальне рівняння (2.9) можна подати у формі Коші на фазовій площині.

Нехай

$$x_1 = \varphi, \text{ а } x_2 = \dot{\varphi}.$$

Тоді

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}.$$

Отже

$$\dot{x}_1 = x_2. \tag{2.10}$$

Із виразу (2.9) маємо:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi = -\omega_0^2 x_1.$$

Оскільки

$$\dot{\varphi} = \dot{x}_1, \quad \text{а} \quad \dot{x}_1 = x_2,$$

то

$$\dot{\varphi} = x_2, \quad \text{а} \quad \ddot{\varphi} = \dot{x}_2.$$

Отже

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1. \tag{2.11}$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Систему рівнянь (2.12) можна подати так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2; \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 + 0\,x_2. \end{cases}$$

У векторно-матричній формі ця система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

У загальному вигляді її подають так

$$\underline{\dot{x}}_1(t) = A\underline{x}(t), \tag{2.13}$$

де

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2.

Якщо у якості вихідної змінної системи прийняти y~φ~x_1, то векторне рівняння вихідної змінної системи матиме вигляд:

$$\underline{y}(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t), \tag{2.14}$$

де

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 1×2.

Отже, нитковий маятник можна представити наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t); \\ \underline{y}(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t). \end{cases} \tag{2.15}$$

2.1.2. Пружинний маятник

2.1.2.1. Представлення пружинного маятника диференціальним рівнянням

Принципову схему розглядуваного маятника представлено на рис. 2.2.

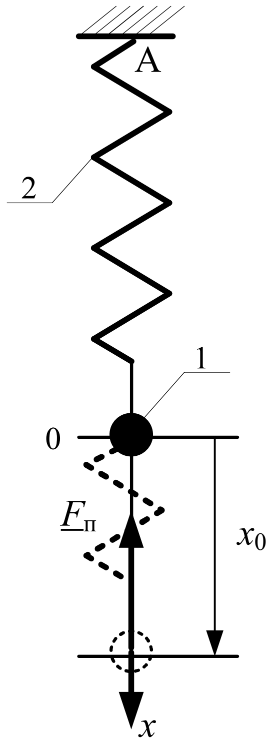


Рис. 2.2 – Принципова схема пружинного маятника:

1 – вантаж; 2 – геліоцентрична пружина

Припустимо, що вантаж масою m, пов'язаний з геліоцентричною пружиною 2, здійснює коливання поздовж осі $0x$, і точку 0 вибрано в положенні, яке відповідає стану рівноваги маятника, тобто коли x=0.

Рух вантажу здійснюється згідно з другим законом Ньютона:

$$ma = F_{\Pi}, \tag{2.16}$$

де a – прискорення вантажу.

Як відомо, сила пружності

$$F_{\Pi} = -k \cdot x, \tag{2.17}$$

де k – жорсткість пружини; x – видовження пружини (відхилення вантажу від положення рівноваги).

Будемо розглядати значення відхилення вантажу від положення рівноваги як деяку функцію від часу. Нагадаємо, що прискорення вантажу – це друга похідна від його зміщення. Отже, прискорення вантажу

$$a(t) = x''(t), \tag{2.18}$$

де $x(t)$ – зміщення вантажу (видовження пружини).

Підставимо вирази (2.16) і (2.17) у вираз (2.18). Тоді

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

або

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.19}$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad – \tag{2.20}$$

власна частота пружинного маятника.

2.1.2.2. Представлення пружинного маятника системою векторно-матричних рівнянь

Диференціальне рівняння (2.19) можна подати у формі Коші на фазовій площині.

Нехай

$$z_1 = x,$$

а

$$z_2 = \dot{x}.$$

Тоді

$$\dot{z}_1 = \dot{x},$$

а

$$\dot{z}_1 = z_2 \qquad (2.21)$$

Із виразу (2.19) маємо:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x = -\omega_0^2 z_1.$$

Оскільки

$$x = z_1, \quad \text{а} \quad \dot{z}_1 = z_2,$$

то

$$\dot{x} = z_1 = z_2, \quad \text{а} \quad \ddot{x} = \dot{z}_2.$$

Отже

$$\dot{z}_2 = -\omega_0^2 z_1. \qquad (2.22)$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = -\omega_0^2 z_1. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Систему диференціальних рівнянь (2.23) можна подати так:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2; \\ \dot{z}_2 = -\omega_0^2 z_1 + 0 \cdot z_2. \end{cases}$$

У векторно-матричній формі цю систему диференціальних рівнянь представляють так:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

У загальному вигляді це векторно-матричне диференціальне рівняння подають так:

$$\underline{\dot{z}}(t) = A\underline{z}(t), \tag{2.24}$$

де

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} -$$

вектор параметрів стану системи розміру 1×2;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2.

Якщо у якості вихідної змінної прийняти $y(t) \sim \varphi \sim z_1$, то векторне рівняння вихідної змінної цієї системи матиме вигляд:

$$y(t) = \underline{c}\,\underline{z}(t) \tag{2.25}$$

де

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 1×2.

Отже, пружинний маятник можна представити наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = A(t); \\ \underline{y}(t) = \underline{c}\underline{z}(t). \end{cases} \tag{2.26}$$

2.1.3. Затухаючий пружинний маятник

2.1.3.1. Представлення затухаючого пружинного маятника диференціальним рівнянням

Під час розгляду руху пружинного маятника було прийнято гіпотезу про те, що силою тертя маятника у навколишньому середовищі можна знехтувати. Отже, маятник працює у вакуумі. Якщо такий маятник вивести із стану спокою будь-яким способом, то він буде здійснювати гармонічні коливання вічно ($t \to \infty$). В дійсності будь-яке коливання з часом ($t \to \infty$) затухає. Отже, потрібно мати таку модель коливальної системи, за допомогою якої можна вивчати саме затухаючі гармонічні коливання. В наш час такі коливання досліджують за допомогою затухаючого пружинного маятника, рис. 2.3.

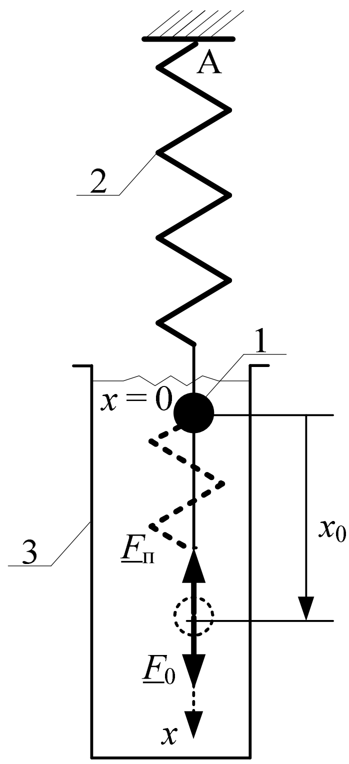


Рис. 2.3 – Принципова схема затухаючого пружинного маятника:

1 – вантаж; 2 – геліоцентрична пружина; 3 – циліндр

Маятник складається з вантажу 1, геліоцентричної пружини 2 і циліндра 3, у якому знаходиться в’язка рідина, скажімо, олива. Якщо вантаж вивести із стану спокою і плавно, без поштовху, відпустити, то вантаж почне здійснювати коливання, котрі з часом ($t \to \infty$) затухнуть.

На вантаж масою m, який рухається поздовж осі $0x$, діє дві сили: сила пружності $\underline{F}_п$ (або повертаюча сила) і сила опору $\underline{F}_0$ середовища.

Сила пружності

$$\underline{F}_п = -kx(t), \tag{2.27}$$

де k – жорсткість пружини; x – відхилення вантажу (видовження пружини) від положення рівноваги (зміщення вантажу).

Сила опору середовища для кулі

$$\underline{F}_0 = -\, 6\pi\eta R x'(t), \tag{2.28}$$

де η – в’язкість рідини, R – радіус кулі (вантаж).

Вираз (2.28) можна подати так:

$$\underline{F}_0 = -k_1 x'(t), \tag{2.29}$$

де

$$k_1 = 6\pi\eta R.$$

Згідно з другим законом Ньютона

$$mx''(t) = -kx(t) - k_1 x'(t).$$

або

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.30}$$

де

$$\delta = \frac{k_1}{2m} \;-$$

добротність затухаючого пружинного маятника.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;-$$

власна частота коливань пружинного маятника, тобто затухаючого пружинного маятника, у якому відсутнє тертя вантажу в середовищі.

Слід відмітити, що добротність затухаючого пружинного маятника пов'язана з характером затухання τ співвідношенням:

$$2\delta = \omega_0 \tau.$$

Оскільки [τ] = *c*, то [δ] = 1.

Добротність маятника визначає тип затухаючих гармонічних коливань.

1. Якщо

$$\omega_0 \tau = 2\delta > 1 \quad \to \; \delta > 0{,}5\,,$$

то виникають підкритичні затухання.

2. Якщо

$$\omega_0 \tau = 2\delta = 1 \;\to\; \delta = 0{,}5\,,$$

то це будуть так звані критичні затухання.

3. Якщо

$$\omega_0 \tau = 2\delta < 1 \;\to\; \delta < 0{,}5\,,$$

то такі коливання називають надкритичними.

2.1.3.2. Представлення затухаючого пружинного маятника системою векторно-матричних рівнянь

Диференціальне рівняння (2.30) можна подати так:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0, \tag{2.31}$$

де

$$a_1 = 2\delta, \;\; a_2 = \omega_0^2.$$

Із диференціального рівняння (2.31) випливає, що

$$\ddot{x} = -a_1 \dot{x} - a_2 x. \tag{2.32}$$

Нехай

$$x = x_1, \text{ а } \;\dot{x}_1 = x_2. \tag{2.33}$$

Тоді $\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$, а $\ddot{x} = \dot{x}_2$.

Отже, із рівняння (2.32) маємо:

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_1. \tag{2.34}$$

На підставі диференціальних рівнянь першого порядку (2.33) і (2.34) складемо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_{2;} \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Систему рівнянь (2.35) подамо так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2; \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2. \end{cases}$$

У векторно-матричній формі ця система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

У загальному вигляді наведене векторно-матричне рівняння подають так:

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t), \tag{2.36}$$

де

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2.

Якщо за вихідну змінну системи прийняти

$$x = x_1,$$

то векторне рівняння вихідної змінної системи слід подати так:

$$y(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t), \tag{2.37}$$

де

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 1×2.

Таким чином затухаючий пружинний маятник можна представити наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t); \\ y(t) = \underline{c}\,\underline{x}(t). \end{cases} \tag{2.38}$$

Аналіз системи рівнянь (2.36) і (2.38) свідчить, що вони мають однаковий вигляд, але матриці стану системи різні. Справді, матриця стану системи в системі рівнянь (2.26)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix},$$

а в системі рівнянь (2.38)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{vmatrix}.$$

2.2. Змішувальні системи

Змішувальні системи призначені для змішування, наприклад, гарячої і холодної води з метою одержання теплої води, змішування потоків речовин з різними витратами та концентраціями і т. ін.

2.2.1. Змішувальний басейн з *n* входами і *p* виходами

В процесі керування, наприклад, композицією паперової маси (далі – маси), а отже, і зміни витрати відповідних компонентів, концентрація маси в змішувальному басейні може відрізнятися від її заданого значення. Щоб такі зміни концентрації маси були мінімальними або лежали в заданих технологічним регламентом межах, наразі застосовують змішувальні басейни досить великих розмірів, що не завжди доцільно.

Як відомо, основним призначенням змішувального басейну є зниження коливань концентрації маси, яка подається на папероробну машину.

2.2.1.1. Представлення змішувального басейну диференціальними рівняннями

Для розв’язання поставленої задачі необхідно мати математичну модель басейну як об’єкта керування концентрацією маси, узагальнену схему якого наведено на рис. 2.4.

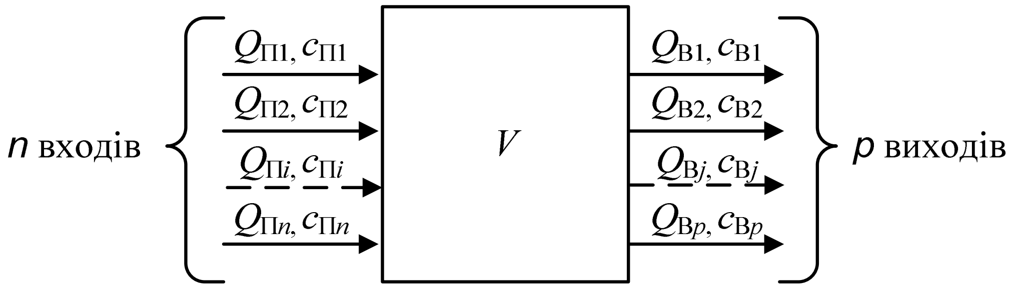


Рис. 2.4 – Узагальнена схема змішувального басейну з n входами та p виходами

Для розглядуваного змішувального басейну рівняння матеріального балансу по витраті маси можна у загальному вигляді записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{Пi} = \sum_{j=1}^{p} Q_{вj} + \sum_{j=1}^{p} \frac{dV_j}{dt}, \qquad (2.39)$$

де $Q_{Пi}$ – витрата i-ої компоненти, яка підводиться до басейну;

$Q_{вj}$ – витрата j-ої компоненти, яка відводиться від басейну;

V_j – частина об’єму басейну, яка приймає участь в перехідному процесі змішування j-го потоку маси;

n і p – відповідно, кількість потоків, що підводяться і відводяться від басейну.

Елементарну частину об’єму басейну, в якому проходить змішування j-го потоку наведено на рис. 2.5.

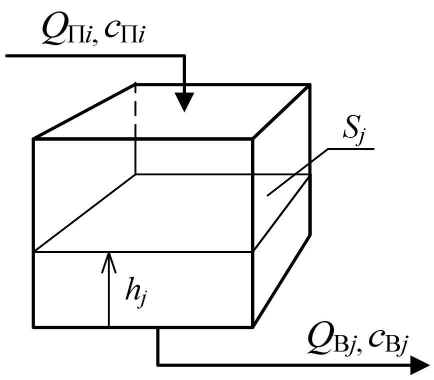


Рис. 2.5 – Елементарна частина об'єму змішувального басейну

Нехай елементарний об'єм

$$V_j = S_j h_j, \tag{2.40}$$

де S_j – площа поверхні маси елементарної частини об'єму басейну, в якому проходить процес змішування j-го потоку маси;
h_j – рівень маси j-го потоку маси.

Перша похідна від функції (2.40) має такий вигляд, якщо $S_j=const$:

$$\frac{dV_j}{dt} = S_j \frac{dh_j}{dt}. \tag{2.41}$$

Якщо у всіх частинах об'єму басейну перехідні процеси проходять одночасно, то

$$h_j = h, \text{ а } dh_j = dh,$$

де h – рівень маси у басейні, при цьому $V_j \in (1, p)$.

Отже, вираз (2.41) матиме вигляд:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{dV_j}{dt} = \sum_{j=1}^{p} S_j \frac{dh}{dt}. \tag{2.42}$$

Якщо рівень маси у басейні підтримується на заданому рівня автоматично, то

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

В силу цього, враховуючи рівняння (2.39), одержимо рівняння басейну, яке характеризує його статичний режим:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{\Pi i} = \sum_{j=1}^{p} Q_{\text{в}j} \,. \qquad (2.43)$$

2.2.1.1.1. Представлення змішувального басейну нелінійним диференціальним рівнянням

Рівняння, яке характеризує динамічний режим змішувального басейну і враховує зміну абс. сухого волокна в ньому, можна подати так:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{\Pi i} c_{\Pi i} = \sum_{j=i}^{p} Q_{\text{в}j} c_{\text{в}j} + \sum_{j=1}^{p} \frac{d(c_{\text{в}j} V_j)}{dt}, \qquad (2.44)$$

де $c_{\text{п}i}$ і $c_{\text{в}j}$ – концентрація i-го потоку, що підводиться до басейну і j-го потоку, що відводиться із нього.

Припустимо, що в басейні виконується ідеальне перемішування композиційної маси. У цьому випадку

$$c_{\text{в}j} = c_{\text{в}} \ \forall \ j \in (1, p)$$

де $c_{\text{в}}$ – концентрація маси, яка відводиться із змішувального басейну.

Об'єм змішувального басейну

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j \,.$$

Отже, права частина виразу (2.44)

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{d(c_{\text{в}j}v_j)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(c_{\text{в}}\sum_{j=1}^{p}V_j\right)=\frac{d}{dt}\left(c_{\text{в}}V\right). \tag{2.45}$$

Оскільки рівень маси в басейні сталий, то

$$\frac{dh}{dt}=0.$$

Отже, об'єм змішувального басейну сталий і таким чином

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{d(c_{\text{в}j}v_j)}{dt}=V\frac{dc_{\text{в}}}{dt}.$$

Тому вираз (2.45) можна подати так:

$$\sum_{i=1}^{n}Q_{\Pi i}c_{\Pi i}=c_{\text{в}}\sum_{j=1}^{p}Q_{\text{в}j}+V\frac{dc_{\text{в}}}{dt}. \tag{2.46}$$

В практичних умовах вказані вище два припущення часто підтверджуються.

Якщо диференціальне рівняння (2.39) є лінійним рівнянням, то диференціальне рівняння (2.46) нелінійне.

2.2.1.1.2. Представлення змішувального басейну лінійним диференціальним рівнянням

Лінеаризуємо нелінійне диференціальне рівняння (2.41) таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n}Q_{\text{п}i}\Delta c_{\text{п}i}+\sum_{i=1}^{n}c_{\text{п}i}\Delta Q_{\text{п}i}=\Delta c_{\text{в}}\sum_{j=1}^{p}Q_{\text{в}j}+c_{\text{в}}\sum_{j=1}^{p}\Delta Q_{\text{в}j}+V\frac{d(\Delta c_{\text{в}})}{dt}. \tag{2.47}$$

В деяких змішувальних системах сумарна витрата потоку, що відводиться, залишається сталою (наприклад, змішувальні насоси, проміжні басейни тощо). У цьому випадку

$$\sum_{j=1}^{p} Q_{\text{в}j} = Q_{\text{в}}, \quad \text{а} \quad \sum_{j=1}^{p} \Delta Q_{\text{в}j} = 0.$$

Саме тому лінійне диференціальне рівняння (2.47) матиме вигляд:

$$V \frac{d(\Delta c_{\text{в}})}{dt} + Q_{\text{в}} \Delta c_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{n} Q_{\text{п}i} \Delta c_{\text{п}i} + \sum_{i=1}^{n} c_{\text{п}i} \Delta Q_{\text{п}i} \,. \qquad (2.48)$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{\text{п}i} = \sum_{j=1}^{p} Q_{\text{в}j} = Q_{\text{в}}^{0},$$

то диференціальне рівняння (2.48) у канонічній формі матиме вигляд

$$T_0 \frac{d\Delta c_{\text{в}}}{dt} + \Delta c_{\text{в}} = k'_{ij}\, \Delta c_{\text{п}i} + k''_{ij}\, \Delta q_{\text{п}i}, \qquad (2.49)$$

де

$$T_0 = \frac{V}{Q_{\text{в}}^{0}} \; -$$

стала часу змішувального басейну;

$$k'_{ij} = \frac{1}{Q_{\text{в}}^{0}} \sum_{i=1}^{n} Q_{\text{п}i} \; -$$

коефіцієнти підсилення каналів ij ($\Delta c_{\text{п}i} - var$);

$$k''_{ij} = \frac{1}{Q_{\text{в}}^{0}} \sum_{i=1}^{n} c_{\text{п}i} \; -$$

коефіцієнти підсилення каналів ij ($\Delta Q_{\text{п}i} - var$).

Таким чином, припущення сталості об’єму змішувального басейну і ідеального перемішування потоків з різними концентраціями, дозволяє представити змішувальний басейн з n входами і p виходами лінійним диференціальним рівнянням, коефіцієнти підсилення якого залежать від загальної витрати суміші, що відводиться з басейну.

2.2.2. Змішувальний басейн з двома входами і одним виходом

Змішувальний басейн призначений для змішування потоків речовин з різними концентраціями для отримання речовини із заданою концентрацією. Принципову схему змішувального басейну для змішування двох речовин зображено на рис. 2.6.

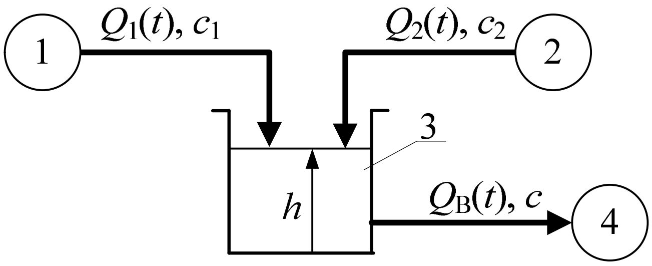


Рис. 2.6 – Принципова схема змішувального басейну двох речовин:

1 – трубопровід першої речовини; 2 – трубопровід другої речовини; 3 – змішувальний басейн; 4 – трубопровід суміші

Перша речовина, концентрація якої c_1, трубопроводом 1 надходить до змішувального басейну 3. Друга речовина з концентрацією c_2, подається до змішувального басейну трубопроводом 2. Після змішування цих речовин утворюється третя речовина з концентрацією c, яка трубопроводом 4 надходить на виробництво.

2.2.2.1. Представлення змішувального басейну системами нелінійних і лінійних диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння матеріального балансу по витраті речовини має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = Q_1(t) + Q_2(t) - Q_{\text{в}}(t), \qquad (2.50)$$

де $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ і $Q_{\text{в}}(t)$ – миттєва витрата першої, другої і третьої речовин; V - об'єм змішувального басейну.

Диференціальне рівняння матеріального балансу по витраті абс. сухих речовин має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left[Vc(t)\right] = c_1 Q_1(t) + c_2 Q_2(t) - c(t) Q_{\text{в}}(t), \qquad (2.51)$$

де c_1, c_2 і $c(t)$ – концентрація першої, другої і третьої речовин.

Миттєва витрата суміші речовин

$$Q_{\text{в}}(t) = \alpha\sqrt{2gh(t)}$$

або

$$Q_{\text{в}}(t) = k\sqrt{h(t)},$$

де $h(t)$ – рівень суміші у басейні; α – коефіцієнт витрати; g – прискорення сили тяжіння; $k = \alpha\sqrt{2g}$.

Якщо змішувальний басейн має сталу площу S поверхні суміші речовин, яка не залежить від висоти рівня $h(t)$ у басейні, то його об'єм

$$V(t) = Sh(t).$$

Звідси випливає, що

$$h(t)=\frac{1}{S}V(t).$$

Отже, миттєва витрата суміші речовин

$$Q_{\text{в}}(t)=k\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}\,. \qquad (2.52)$$

Підставивши вираз (2.52) у вихідні диференціальні рівняння (2.50) і (2.51), отримаємо нелінійні диференціальні рівняння, які представляють змішувальний басейн як ОК (двовимірну систему) витратою і концентрацією суміші речовин:

$$\frac{dV}{dt}=Q_1(t)+Q_2(t)-k\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}\,; \qquad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt}\big[c(t)V(t)\big]=c_1Q_1(t)+c_2Q_2(t)-c(t)k\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}\,. \qquad (2.54)$$

Рівняння (2.53) і (2.54) не можна використати для розроблення системи керування змішувальним басейном з огляду на те, що вони нелінійні. А тому лінеаризуємо їх. Для цього спочатку розглянемо випадок усталеного стану системи, тобто випадок, коли усі змінні системи – сталі величини і позначимо їх так: Q_1^0, Q_2^0 і $Q_{\text{в}}^0$ – усталені значення витрат відповідно першого, другого і загального потоків речовин; V_0 – усталений об’єм змішувального басейну; c_0 – усталене значення концентрації суміші речовин у басейні.

Тоді виконуються такі співвідношення при $t\to\infty$:

$$0=Q_1^0+Q_2^0-Q_{\text{в}}^0; \qquad (2.55)$$

$$0 = c_1^0 Q_1^0 + c_2^0 Q_2^0 - c_0^0 Q_{\text{в}}^0; \tag{2.56}$$

$$Q_{\text{в}} = k\sqrt{\frac{1}{S} V_0}\ . \tag{2.57}$$

Якщо задано значення витрат Q_1^0 і Q_2^0, а також концентрації першої і другої речовин c_1^0 і c_2^0 то алгебраїчні рівняння (2.55) – (2.57) можна розв'язати відносно усталених значень $Q_{\text{в}}^0, V_0$ і c_0.

Справді

$$\begin{aligned} &Q_{\text{в}} = Q_1^0 + Q_2^0; \\ &V_0 = \frac{1}{k^2} Q_{\text{в}}^2 S; \\ &c_0 = \frac{1}{Q_{\text{в}}^0}(c_1 Q_1^0 + c_2^0 Q_2^0). \end{aligned}$$

Тепер уявімо, що виникло незначне за величиною збурення в системі. Тоді в перехідному режимі роботи системи

$$\begin{aligned} &Q_1(t) = Q_1^0 + \Delta Q_1(t); \\ &Q_2(t) = Q_2^0 + \Delta Q_2(t); \\ &V(t) = V_0 + \Delta V(t); \\ &c(t) = c_0 + c(t), \end{aligned}$$

де $\Delta Q_1(t), \Delta Q_2(t), \Delta V(t)$ і $\Delta c(t)$ – відхилення змінних $Q_1(t), Q_2(t), V(t)$ і $c(t)$ від усталених значень Q_1^0, Q_2^0, V_0 і c_0.

Якщо припустити, що ці відхилення змінних незначні, то лінеаризація нелінійних диференціальних рівнянь (2.53) і (2.54) приводить до лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta Q_1(t) + \Delta Q_2(t) - \frac{k}{2V_0}\sqrt{\frac{1}{S_0} V_0}\,\Delta V(t); \tag{2.58}$$

$$V_0 \frac{d\Delta c}{dt} + c_0 \frac{d\Delta V}{dt} = c_1 \Delta Q_1(t) + c_2 \Delta Q_2(t) -$$
$$-c_0 \frac{k}{2V_0} \sqrt{\frac{1}{S_0} V_0} \Delta V(t) - k \sqrt{\frac{1}{S_0} V_0} \Delta c(t). \tag{2.59}$$

Нехай

$$\Delta Q_1(t) \sim u_1(t);$$
$$\Delta Q_2(t) \sim u_2(t);$$
$$\Delta V(t) \sim x_1(t);$$
$$\Delta c(t) \sim x_2(t).$$

Тоді рівняння (2.58) і (2.59) після відповідних перетворень, складуть систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{1}{2T_0} x_1(t) = u_1(t) + u_2(t); \\ V_0 \dfrac{dx_2}{dt} + Q_0 x_2(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) - c_0 \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{c_0}{2T_0} x_1(t), \end{cases} \tag{2.60}$$

де

$$T_0 = \frac{V_0}{Q_{в}^0} \; -$$

стала часу змішувального басейну, с.

2.2.2.2. Представлення змішувального басейну системою векторно-матричних рівнянь

Виключення змінної $x_1(t)$ із системи диференціальних рівнянь (2.60) призводить до векторно-матричного рівняння стану системи:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2T_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_0} \end{bmatrix} \underline{x}(t)+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{c_1-c_0}{V_0} & \dfrac{c_2-c_0}{V_0} \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

або у стислій формі

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t), \tag{2.61}$$

де

$$A=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2T_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_0} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{c_1-c_0}{V_0} & \dfrac{c_2-c_0}{V_0} \end{bmatrix} -$$

матриця керування розміру 2×2;

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$\underline{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор керувальних діянь розміру 2×1.

Для визначення векторно-матричного рівняння вихідної змінної системи скористаємося такими рівняннями:

$$y_1(t) \sim \Delta Q(t)=(Q_1+Q_2)t-Q_{\text{в}}(t);$$
$$y_2(t) \sim \Delta c(t)=c(t)-c_0.$$

Оскільки витрата суміші речовин

$$Q_{\text{в}}(t) = \alpha\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{S}V(t)} = \alpha\sqrt{2g}\left(\frac{1}{S}V(t)\right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\Delta Q_{\text{в}}(t) = \alpha\sqrt{2g}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S}V(t)\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{S}\Delta V(t).$$

Отже

$$\Delta Q_{\text{в}}(t) = \frac{\alpha\sqrt{2g}}{2S}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}}{\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{S}V(t)}}\Delta V(t)$$

або

$$\Delta Q(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_0}{V_0}\Delta V(t).$$

Оскільки $\Delta Q(t) \sim y_1(t)$, а $\Delta c(t) \sim y_2(t)$, то

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{1}{2T_0}x_1(t) + 0\cdot 0; \\ y_2(t) = 0\cdot 0 + 1\cdot x_2(t). \end{cases} \tag{2.62}$$

Систему рівнянь (2.62) можна подати одним векторно-матричним рівнянням виду:

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t), \tag{2.63}$$

де

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 2x1;

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2T_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

матриця вимірювання вихідної змінної системи розміру 2×2.

Таким чином, змішувальний басейн, призначений для змішування потоків двох речовин з різними витратами та концентраціями, можна представити наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t); \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t). \end{cases} \tag{2.64}$$

2.2.3. Буферний басейн

Буферний басейн призначений для зберігання підготовленої відповідним чином речовини заданої концентрації. Принципову схему буферного басейну показано на рис. 2.7.

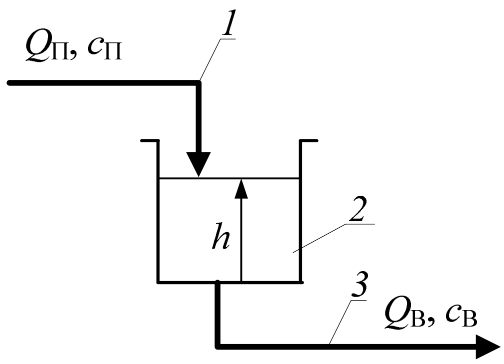


Рис. 2.7 – Принципова схема буферного басейну:

1 – трубопровід подачі речовини; 2 – басейн; 3 – трубопровід відведення речовини

2.2.3.1. Представлення буферного басейну лінійним диференціальним рівнянням

Якщо у диференціальному рівнянні (2.49) покласти $\Delta c_{в}$~$y(t)$, $\Delta c_{пi}$~$x(t)$ і прийняти $\Delta Q_{пi} = 0$, а $n = 1$, то матимемо наступне

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \tag{2.65}$$

де

$$T_0 = \frac{V_0}{Q_{в}^0} -$$

стала часу буферного басейну.

2.2.3.2. Представлення буферного басейну передавальною функцією

Диференціальне рівняння (2.49) в операційній формі має вигляд:

$$(T_0 p + 1) y(p) = x(p),$$

де $y(p)$ і $x(p)$ – зображення за Лапласом концентрації маси на вході і виході буферного басейну.

Отже, передавальна функція басейну

$$g(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{1 + T_0 p}. \tag{2.66}$$

2.2.3.3. Представлення буферного басейну імпульсною перехідною функцією

Передавальній функції (2.66) відповідає диференціальне рівняння:

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t). \tag{2.67}$$

Розв’язок диференціального рівняння (2.67) такий:

$$y(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{T_0}).$$

Отже, імпульсна передатна функція

$$g(t) = \frac{1}{T_0}\exp(-\frac{t}{T_0}). \tag{2.68}$$

2.2.3.4. Представлення буферного басейну системою векторно-матричних рівнянь

Передавальну функцію (2.66) формально можна подати так:

$$\frac{y(p)}{1} = \frac{x(p)}{1 + T_0 p} = z(p), \tag{2.69}$$

де $z(p)$ – зображення за Лапласом так званого параметра стану системи.

Розглянемо спочатку праву частину виразу (2.69):

$$\frac{x(p)}{1 + T_0 p} = z(p). \tag{2.70}$$

Із виразу (2.70) випливає, що

$$(1+T_0 p)z(p)=x(p).$$

Отже, оригінал цієї функції такий:

$$T_0\frac{dz}{dt}+z=x$$

або

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{T_0}z+\frac{1}{T_0}x. \tag{2.71}$$

Диференціальне рівняння (2.71) подамо у формі Коші на фазовій площині. Нехай

$$z=z_1\text{, а }\ \dot{z}=z_2.$$

Отже, $\dot{z}=\dot{z}_1$.

Тоді

$$\dot{z}_1=z_2. \tag{2.72}$$

Визначимо z_2 із диференціального рівняння (2.71). Для цього потрібно підставити $z = z_2$ у рівняння (2.71).

Отже

$$\dot{z}_2=-\frac{1}{T_o}z_2+\frac{1}{T_o}x. \tag{2.73}$$

Диференціальні рівняння (2.72) і (2.73) можна об'єднати у систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{z}_1=0\cdot z_1+1\cdot z_2+0\cdot 0;\\ \dot{z}_2=0\cdot z_1-\dfrac{1}{T_o}z_2+\dfrac{1}{T_o}x.\end{cases} \tag{2.74}$$

У векторно-матричній формі систему рівнянь (2.74) подають так:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{T_o}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{T_o}\end{bmatrix}x.$$

У загальному вигляді це рівняння записують у стислій формі:

$$\underline{\dot{z}}(t) = A\underline{z}(t) + \underline{b}x(t), \tag{2.75}$$

де

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix}^T -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_o} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{T_o} \end{bmatrix} -$$

вектор-стовпчик розміру 2×1.

Розглянемо ліву частину виразу (2.69):

$$y(p) = z(p).$$

Звідси випливає, що оригінал цієї функції

$$y(t) = z(t).$$

Нехай вектор-рядок розміру 1×2

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді вихідну змінну розглядуваної системи можна визначити так:

$$y(t) = \underline{c}\,\underline{z}(t). \tag{2.76}$$

Таким чином, буферний басейн як об’єкт керування концентрацією маси представляється системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = A\underline{z}(t) + \underline{b}\,\underline{x}(t); \\ y(t) = \underline{c}\,\underline{z}(t). \end{cases} \tag{2.77}$$

2.3. Складні технологічні системи

2.3.1. Напірний ящик з повітряною подушкою

Принципову схему напірного ящика з повітряною подушкою, який ще називають напірний ящик закритого типу, показано на рис. 2.8.

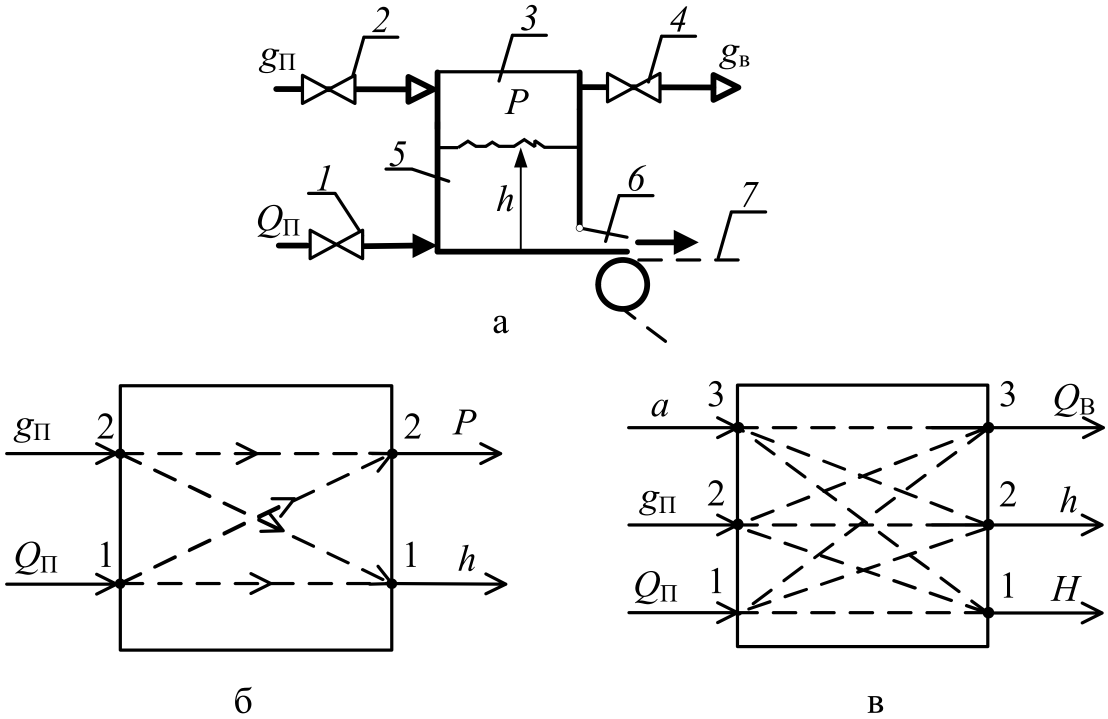


Рис. 2.8 – Напірний ящик з повітряною подушкою:

а – принципова схема; б – загальна структурна схема (система 2×2); в – загальна структурна схема (система 3×3);

1, 2, 4 – регулювальні органи; 3 – повітряна подушка; 5 – напускна камера; 6 - випускальна щілина; 7 – сітка

Паперова маса (далі – маса) крізь регулювальний орган (РО) 1 подається у напускну камеру 5, а вже з неї крізь випускальну щілину 6 витікає на сітку 7 де формується мокре паперове полотно. Рівень маси у напускній камері, згідно технологічних вимог, не має перевищувати 1 м вод. ст. Якщо ж папероробна машина має працювати, скажімо, зі швидкістю 600 м/хв. (10 м/с), то напір маси у випускальній щілині, який відповідає швидкості маси крізь випускальну щілину (у даному випадку 10 м/с), має бути рівним 5 м вод. ст. Це можна забезпечити, якщо у повітряну подушку 3 подати повітря з надлишковим тиском 0,4 кгс/см^2, тобто 4 м вод. ст.

2.3.2. Неперервна форма представлення напірного ящика

2.3.2.1. Представлення напірного ящика системою лінійних диференціальних рівнянь

Припустимо спочатку, що у цій двовимірній системі (системі 2×2, рис. 2.8, б) потрібно керувати рівнем маси h у напускній камері і тиском повітря P у повітряній подушці. Приймемо у якості керувальних діянь витрату маси $Q_п$, що надходить до напускної камери та витрату повітря $g_п$, яке подається у повітряну подушку. У розглядувальній двовимірній системі прослідковується чотири канали: «$Q_п \to h$» (прямий канал 11); «$Q_п \to P$» (перехрестний канал 12); «$g_п \to P$» (прямий канал 22) і «$g_п \to h$» (перехрестний канал 21).

Математична модель динаміки зміни рівня маси у напускній камері має вигляд

$$F\frac{dh}{dt} = Q_п(t) - Q_в(t), \tag{2.78}$$

де F – площа поверхні маси у напускній камері.

Математичну модель динаміки зміни тиску повітря у повітряній подушці подамо так

$$\frac{dg^*}{dt} = g_\text{п}(t) - g_\text{в}(t), \tag{2.79}$$

де g^* – кількість повітря у повітряній подушці; $g_\text{в}$ – витрата повітря, що виходить із повітряної подушки.

Витрату повітря, яке виходить із повітряної подушки, визначають так. Якщо тиск повітря у повітряній подушці

$$P < \frac{3}{3-k} P_\text{C},$$

то витрата повітря визначається за формулою

$$g_\text{в} = f_\text{в} \sqrt{\frac{2g}{R\Theta}} \cdot \sqrt{(P - P_\text{C})\left(\frac{3}{2k} P_\text{C} - \frac{3-2k}{2k} P\right)}, \tag{2.80}$$

де k – показник адіабати; $f_\text{в}$ – площа поперечного перерізу регулювального органу для випуску повітря із повітряної подушки; P_C – тиск навколишнього середовища; P – тиск повітря у повітряній подушці; Θ – температура повітря у повітряній подушці; R – газова стала; g – прискорення сили тяжіння.

Якщо тиск повітря у повітряній подушці

$$P \geq \frac{3}{3-k} P_\text{C},$$

то витрата повітря визначається за формулою:

$$g_\text{в} = f_\text{в} \sqrt{\frac{kg}{R\Theta}} \cdot P. \tag{2.81}$$

Витрата маси, що протікає крізь випускальну щілину напірного ящика

$$Q_{\text{в}} = ab\sqrt{2gH}, \tag{2.82}$$

де a і b – висота і ширина випускальної щілини.

Напір маси у випускальній щілині

$$H=h + mP, \tag{2.83}$$

де m – коефіцієнт перерахунку надлишкового тиску повітря у повітряній подушці (кг/см^2) у м вод. ст.

Згідно з рівнянням Мендєлєєва – Клапейрона

$$PV_{\Pi}=g^{*}P\Theta.$$

Звідси випливає, що кількість повітря у повітряній подушці

$$g^{*} = \frac{PV_{\Pi}}{R\Theta},$$

де V_{Π} – об'єм повітряної подушки.

Об'єм повітряної подушки

$$V_{\Pi}=V_{\text{о}} - V_{\text{м}}=V_{\text{о}} - Fh,$$

де $V_{\text{о}}$ – загальний об'єм напірного ящика, що складається із об'єму повітряної подушки V_{Π} й об'єму маси $V_{\text{м}}$, що знаходиться у напускній камері.

Отже, кількість повітря у повітряній подушці

$$g^{*} = \frac{1}{R\Theta}(V_{\text{о}} - Fh)P. \tag{2.84}$$

Нелінійне диференціальне рівняння (2.78) можна лінеарізувати, записавши його так:

$$F\frac{d\Delta h}{dt} = \Delta Q_{\Pi}(t) - \Delta Q_{\text{в}}(t), \tag{2.85}$$

де $\Delta h(t)$, $\Delta Q_П(t)$ і $\Delta Q_в(t)$ – відхилення поточних значень рівня маси $h(t)$, витрати маси $Q_П(t)$та витрати маси $Q_в(t)$ від їхніх усталених значень h_0, $Q_П^0$ і $Q_в^0$.

Згідно з виразом (2.82)

$$\Delta Q_в(t) = \left(\frac{\partial Q_в}{\partial H}\right)_0 \Delta H(t), \tag{2.86}$$

де $\Delta h(t)$ – відхилення поточного значення сумарного напору маси $H(t)$ від його усталеного значення H_0.

Відхилення напору маси від його усталеного значення можна визначити згідно з виразом (2.83):

$$\Delta H(t) = \Delta h(t) + m\Delta P(t). \tag{2.87}$$

Частинну похідну, що входить у вираз (2.86), визначають згідно з виразом (2.82), який слід записати так:

$$Q_в = ab(2gH)^{\frac{1}{2}}.$$

Отже, частинна похідна

$$\left(\frac{\partial Q_в}{\partial H}\right)_0 = \frac{1}{2}ab(2gH_o)^{\frac{1}{2}-1}2g$$

або

$$\left(\frac{\partial Q_в}{\partial H}\right)_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_в^0}{H_0}. \tag{2.88}$$

Підставивши вираз (2.88) у вираз (2.86) маємо:

$$\Delta Q_в(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_в^0}{H_0}\Delta h(t) + \frac{m}{2}\cdot\frac{Q_в^0}{H_0}\Delta P(t). \tag{2.89}$$

Підставивши вираз (2.89) у лінійне диференціальне рівняння (2.85) і поділивши його на коефіцієнт $Q_в^o / 2H_o$ маємо:

$$T_{11} \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h(t) = k_{11} \Delta Q_П(t) - k_{12} \Delta P(t). \tag{2.90}$$

де

$$T_{11} = \frac{2FH_0}{Q_в^0} -$$

стала часу напускної камери;

$$k_{11} = \frac{2H_0}{Q_в^0} -$$

коефіцієнт підсилення каналу керування 11;

$$k_{12} = m -$$

коефіцієнт підсилення каналу 12.

Нехай $\Delta h(t) \sim y_1(t)$; $\Delta P(t) \sim y_2(t)$; а $\Delta Q_П(t) \sim u_1(t)$. Тоді в канонічній формі лінійне диференціальне рівняння (2.90) можна подати так:

$$T_{11} \frac{dy_2}{dt} + y_1(t) = k_{11} u_1(t) - k_{12} y_2(t). \tag{2.91}$$

Нелінійне диференціальне рівняння (2.79) можна лінеарізувати так:

$$\frac{d\Delta g^*}{dt} = \Delta g_П(t) - \Delta g_в(t), \tag{2.92}$$

де $\Delta g^*(t)$, $\Delta g_П(t)$ і $\Delta g_в(t)$ – відхилення поточного значення кількості повітря $g^*(t)$, що знаходиться у повітряній подушці; витрати повітря $g_П(t)$, що подається у повітряну подушку та витрати поточного значення повітря, яке відводиться з неї від їхніх усталених значень $g_0, g_П^0$ і $g_в^0$.

Згідно з виразом (2.84)

$$\Delta g^*(t) = \left(\frac{\partial g^*}{\partial P}\right)_0 \Delta P(t) + \left(\frac{\partial g^*}{\partial h}\right) \Delta h(t). \tag{2.93}$$

Частинні похідні, що входять у вираз (2.93) можна визначити із співвідношення (2.84) таким чином:

$$\left(\frac{\partial g^*}{\partial P}\right)_0 = \frac{V_0 - Fh_0}{R\Theta} = \frac{V_\Pi^0}{R\Theta}; \tag{2.94}$$

$$\left(\frac{\partial g^*}{gh}\right)_0 = -\frac{FP_0}{R\Theta}. \tag{2.95}$$

Підставимо частинні похідні (2.94) і (2.95) у вираз (2.93). Тоді поточне відхилення кількості повітря від його усталеного значення

$$\Delta g^*(t) = \frac{V_\Pi^0}{R\Theta} \cdot \Delta P(t) - \frac{FP_0}{R\Theta} \cdot \Delta h(t).$$

Отже, вираз (2.93) матиме вигляд:

$$\frac{d\Delta g^*}{dt} = \frac{V_\Pi^0}{R\Theta} \cdot \frac{d\Delta P}{dt} - \frac{FP_0}{R\Theta} \cdot \frac{d\Delta h}{dt}. \tag{2.96}$$

Згідно з виразом (2.81) відхилення витрати поточного значення повітря $g_в(t)$ від його усталеного значення $g_в^0$

$$\Delta g_в(t) = \left(\frac{\partial g_в}{\partial P}\right)_0 \Delta P(t). \tag{2.97}$$

Частинна похідна, що входить у вираз (2.97), згідно з виразом (2.81) визначається так:

$$\left(\frac{\partial g_{\text{в}}}{\partial P}\right)_0 = f_{\text{в}}^0 \sqrt{\frac{kg}{R\theta}} \cdot \frac{P_0}{P_0} = \frac{g_{\text{в}}^0}{P_0} \tag{2.98}$$

Таким чином, рівняння (2.97) з урахуванням частинної похідної (2.98) матиме такий вигляд:

$$\Delta g_{\text{в}}(t) = \frac{g_{\text{в}}^0}{P_0} \Delta P(t). \tag{2.99}$$

Підставимо вирази (2.96) і (2.99) у лінійне диференціальне рівняння (2.92). Тоді

$$\frac{V_{\text{П}}^0}{R\theta} \cdot \frac{d\Delta P}{dt} + \frac{g_{\text{в}}^0}{P_0} \Delta P(t) = \Delta g_{\text{П}}(t) + \frac{FP_0}{R\Theta} \cdot \frac{d\Delta h}{dt}.$$

Згідно з рівнянням Менделеєва-Клапейрона

$$P_0 V_{\text{П}}^0 = g_0^* R\Theta.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{V_{\text{П}}^0}{R\Theta} = \frac{g_0^*}{P_0},$$

а

$$\frac{FP_0}{R\Theta} = \frac{Fg_0^*}{V_{\text{П}}^0}.$$

Отже

$$\frac{g_0^*}{P_0} \cdot \frac{d\Delta P}{dt} + \frac{g_{\text{в}}^0}{P_0} \cdot \Delta P(t) = \Delta g_{\text{П}}(t) + \frac{Fg_0^*}{V_{\text{П}}^0} \cdot \frac{d\Delta h}{dt}. \tag{2.100}$$

Поділимо вираз (2.100) на коефіцієнт $g_{\text{в}}^0 / P_0$. Тоді матимемо наступне:

$$\frac{g_0^*}{g_в^0}\cdot\frac{d\Delta P}{dt}+\Delta P(t)=\frac{P_0}{g_в^0}\Delta g_П(t)+\frac{Fg_0^*P_0}{V_П^0 g_в^0}\cdot\frac{d\Delta h}{dt}$$

або після відповідних перетворень

$$T_{22}\cdot\frac{d\Delta P}{dt}+\Delta P(t)=k_{22}\Delta g_П(t)+k_{21}\cdot\frac{d\Delta h}{dt}, \qquad (2.101)$$

де

$$T_{22}=\frac{g_0^*}{g_в^0} \; -$$

стала часу повітряної подушки;

$$k_{22}=\frac{P_0}{g_в^0} \; -$$

коефіцієнт підсилення прямого каналу 22;

$$k_{21}=\frac{FP_0}{V_П^0}\cdot\frac{g_0^*}{g_в^0}=\frac{FP_0}{V_П^0}\cdot T_{22} \; -$$

коефіцієнт підсилення перехресного каналу 12.

Нехай $\Delta g_П(t)$~$u_2(t)$. Тоді диференціальне рівняння (2.101) матиме стандартний вигляд

$$T_{22}\frac{dy_2}{dt}+y_2(t)=k_{21}\frac{dy_1}{dt}+k_{22}u_2(t). \qquad (2.102)$$

Таким чином, напірний ящик закритого типу як об’єкт керування рівнем маси у напускній камері й тиском повітря у повітряній подушці, представляється системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} T_{11}\dfrac{dy_1}{dt} + y_1(t) = k_{11}u_1(t) - k_{12}y_2(t); \\ T_{22}\dfrac{dy_2}{dt} + y_2(t) = k_{21}\dfrac{dy_1}{dt} + k_{22}u_2(t). \end{cases} \qquad (2.103)$$

Аналіз диференціальних рівнянь, які входять у систему рівнянь (2.103), свідчить, що у разі зміни керувального діяння $u_1(t)$ змінюється і перша вихідна змінна системи $y_1(t)$, а також і її перша похідна dy_1/dt. Саме ця похідна, а не зміна рівня маси, призводить до відхилення тиску повітря у повітряній подушці. Для зменшення її впливу на тиск повітряної подушки, потрібно збільшувати об'єм подушки і витрату повітря, що проходить крізь неї.

2.3.2.2. Представлення напірного ящика матрицею передавальних функцій

Якщо напірний ящик представлено системою лінійних диференціальних рівнянь, скажімо, системою рівнянь (2.103), то в операційній формі вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} (T_{11}p + 1)y_1(p) = k_{11}u_1(p) - k_{12}y_2(p); \\ (T_{22}p + 1)y_2(p) = k_{21}py_1(p) + k_{22}u_2(p), \end{cases} \qquad (2.104)$$

де $y_1(p)$ і $y_2(p)$ – зображення за Лапласом першої і другої вихідних змінних системи; $u_1(p)$ і $u_2(p)$ – зображення за Лапласом першого і другого вхідного діянь; p – оператор Лапласа.

Згідно з системою операційних рівнянь (2.104) легко побудувати і структурну схему розглядуваної двовимірної системи (рис. 2.9).

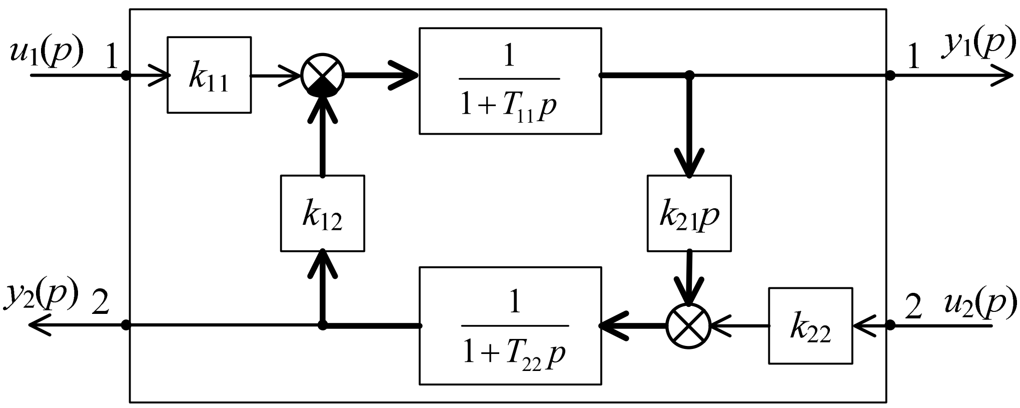


Рис. 2.9 – Структурна схема напірного ящика з повітряною подушкою як об’єкта керування рівнем маси у напускній камері і тиском повітря у повітряній подушці

Для визначення передавальної функції напірного ящика по прямому каналу керування 11 і перехресному каналу 12 підставимо перше рівняння системи рівнянь (2.104) у друге рівняння цієї системи. Після відповідних перетворень маємо:

$$\left\{\frac{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}{1+T_{22}p}\right\}y_1(p)=k_{11}u_1(p)-\frac{k_{12}k_{22}}{1+T_{22}p}u_2(p). \quad (2.105)$$

Отже, передавальна функція прямого каналу 11

$$g_{11}(p)=\frac{y_1(p)}{u_1(p)}=\frac{k_{11}(1+T_{22}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \quad (2.106)$$

Передавальна функція перехресного каналу 21

$$g_{12}(p)-\frac{y_1(p)}{u_2(p)}=-\frac{k_{12}k_{22}}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}\cdot p)+k_{12}k_{21}p}. \quad (2.107)$$

Для визначення передавальних функцій напірного ящика по прямому каналу 22 і перехресному каналу 12 потрібно друге рівняння системи рівнянь (2.104) підставити у перше рівняння цієї системи. Після відповідних перетворень маємо:

$$\left\{\frac{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}{1+T_{11}p}\right\}y_2(p)=k_{22}u_2(p)+\frac{k_{11}k_{21}p}{1+T_{11}p}-u_1(p)\,. \quad (2.108)$$

Отже, передавальна функція прямого каналу 22

$$g_{22}(p)=\frac{y_2(p)}{u_2(p)}=\frac{k_{22}(1+T_{11}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}\,. \quad (2.109)$$

Передавальна функція перехресного каналу 12

$$g_{21}(p)=\frac{y_2(p)}{u_1(p)}=\frac{k_{11}k_{21}p}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}\,. \quad (2.110)$$

Таким чином, напірний ящик закритого типу як ОК рівнем маси у напускній камері та тиском повітря у повітряній подушці представляється чотирма передавальними функціями (2.106)…(2.110).

У векторно-матричній формі розглядувану двовимірну систему можна подати так:

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix}$$

або у загальному вигляді

$$\underline{y}(p)=\left[G(p)\right]\underline{u}(p),$$

де

$$\underline{y}(p)=\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 2×1;

$$\underline{u}(p) = \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix} -$$

вектор вхідної змінної системи розміру 2×1.

2.3.2.3. Представлення напірного ящика системою векторно-матричних рівнянь

Як було показано вище, розглядуваний двовимірний об'єкт керування представляється системою лінійних диференціальних рівнянь (2.103).

Введемо параметри стану системи:

$$y_1(t) \sim x_1;$$
$$y_2(t) \sim x_2.$$

Тоді систему лінійних диференціальних рівнянь (2.103) можна подати так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{T_{11}} x_1 - \dfrac{k_{12}}{T_{11}} x_2 + \dfrac{k_{11}}{T_{11}} u_1; \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{T_{22}} x_2 + \dfrac{k_{21}}{T_{22}} x_1 + \dfrac{k_{22}}{T_{22}} u_2 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{T_{11}} x_1 - \dfrac{k_{12}}{T_{11}} x_2 + \dfrac{k_{11}}{T_{11}} u_1; \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k_{21}}{T_{11}T_{22}} x_1 - \dfrac{T_{11} + k_{12}k_{21}}{T_{11}T_{22}} x_2 + \dfrac{k_{11}k_{21}}{T_{11}T_{22}} u_1 + \dfrac{k_{22}}{T_{22}} u_2. \end{cases} \qquad (2.111)$$

Систему диференціальних рівнянь першого порядку (2.111) можна подати одним векторно-матричним рівнянням стану системи:

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \tag{2.112}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{11}} & -\dfrac{k_{12}}{T_{11}} \\ -\dfrac{k_{21}}{T_{11}T_{22}} & -\dfrac{T_{11}+k_{12}T_{22}}{T_{11}T_{22}} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{11}}{T_{11}} & 0 \\ \dfrac{k_{11}k_{21}}{T_{11}T_{22}} & \dfrac{k_{22}}{T_{22}} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} -$$

вектор керування розміру 2×1.

У відповідності з векторно-матричним рівнянням (2.112) легко побудувати й відповідну векторно-матричну структурну схему розглядуваної двовимірної системи (рис. 2.10).

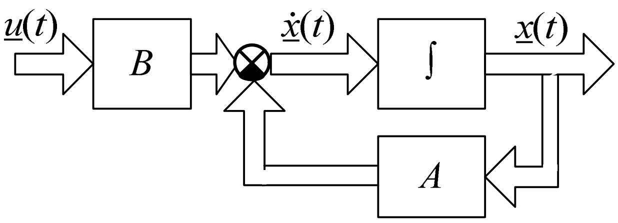


Рис. 2.10 – Векторно-матрична структурна схема напірного ящика закритого типу (аналоговий варіант)

2.3.3. Дискретна форма представлення напірного ящика

2.3.3.1. Представлення напірного ящика рекурентними різницевими рівняннями

Якщо $y_1(t) \sim x_1(t)$, а $y_2(t) \sim x_2(t)$ – параметри стану системи, то систему лінійних диференціальних рівнянь (2.103) можна подати так:

$$\begin{cases} T_{11}\dfrac{dx_1}{dt} + x_1(t) = k_{11}u_1(t) - k_{12}x_2(t); \\ T_{22}\dfrac{dx_2}{dt} + x_2(t) = k_{21}\dfrac{dx_1}{dt} + k_{22}u_2(t). \end{cases} \tag{2.113}$$

Систему диференціальних рівнянь (2.113) легко замінити чотирма рекурентними різницевими рівняннями

$$\begin{gathered} x_1(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i) + \\ + \frac{b_1}{a_0}Tu_1(i+1) + \frac{T}{a_0}(b_0T - b_1)u_1(i); \end{gathered} \tag{2.114}$$

$$x_1(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i) - b_0u_2(i); \tag{2.115}$$

$$\begin{gathered} x_2(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right)x_2(i) + \\ + \frac{b_1}{a_0}Tu_2(i+1) + \frac{T}{a_0}(b_0T - b_1)u_2(i); \end{gathered} \tag{2.116}$$

$$x_2(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right)x_2(i) + \frac{b_1}{T}\left[u_1(i+1) - u_1(i)\right], \tag{2.117}$$

де $a_0 = 1;\ a_1 = (T_{11} + T_{22} + k_{11}k_{21});\ a_2 = T_{11}T_{22};\ b_0 = k_{11};\ b_1 = k_{11}T_{22};$

$i = t/T$ – дискретний час; T – період дискретності.

2.3.3.2. Представлення напірного ящика матрицею дискретних передавальних функцій

Рекурентні різницеві рівняння (2.114) … (2.117) подано так:

$$x_1(i+2)+A_1x_1(i+1)A_0x_1(i)=B_1u_1(i+1)+B_0u_1(i); \tag{2.118}$$

$$x_1(i+2)A_1x_1(i+1)+A_0x_1(i)=-B_0u_2(i); \tag{2.119}$$

$$x_2(i+2)+A_1x_2(i+1)+A_0x_2(i)=B_1u_2(i+1)+B_0u_2(i); \tag{2.120}$$

$$x_2(i+2)+A_1x_2(i+1)+A_0x_2(i)=B_1u_1(i+1)-B_0u_1(i). \tag{2.121}$$

де

$$A_0=1-\frac{a_1}{a_0}T;\;\; A_1=-(2-\frac{a_1}{a_0}T);$$

$$B_0=\frac{1}{a_0}T(b_0T-b_1);\; B_1=\frac{b_1}{a_0}.$$

Отже, дискретна передавальна функція каналу 11

$$g_{11}(z)=\frac{x_1(z)}{u_1(z)}=\frac{B_0z^{-2}+B_1z^{-1}}{A_0z^{-2}+A_1z^{-1}+1}. \tag{2.122}$$

Дискретна передавальна функція каналу 21

$$g_{12}(z)=\frac{x_1(z)}{u_2(t)}=-\frac{B_0}{A_0z^{-2}+A_1z^{-2}+1}. \tag{2.123}$$

Дискретна передавальна функція каналу 22

$$g_{22}(z)=\frac{x_2(z)}{u_2(z)}=\frac{B_0z^{-2}+B_1z^{-1}}{A_0z^{-2}+A_1z^{-1}+1}. \qquad (2.124)$$

Дискретна передавальна функція каналу 12

$$g_{21}(z)=\frac{x_2(z)}{u_1(z)}=\frac{B_1z^{-1}-B_0}{A_0z^{-2}+A_1z^{-1}+1}. \qquad (2.125)$$

Таким чином, напірний ящик з повітряною подушкою як об’єкт керування (система 2×2) представляється чотирма дискретними передавальними функціями (2.122) … (2.125) або одним векторно-матричним рівнянням стану системи

$$\underline{x}(z)=G(z)\underline{u}(z), \qquad (2.126)$$

де

$$\underline{x}(z)=\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 2×1;

$$\underline{u}(z)=\begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix} -$$

вектор вхідної змінної системи розміру 2×1;

$$G(z)=\begin{bmatrix} g_{11}(z) & g_{12}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{bmatrix} - \qquad (2.127)$$

матриця дискретних передавальних функцій розміру 2×2.

2.3.3.3. Представлення напірного ящика векторно-матричним різницевим рівнянням

Припустимо, що цей напірний ящик має два вектори вхідних діянь $\underline{V}(t)$ і два вектори вихідних змінних $\underline{x}(t)$ і керування ним здійснюється за допомогою мікро ЕОМ (рис. 2.11).

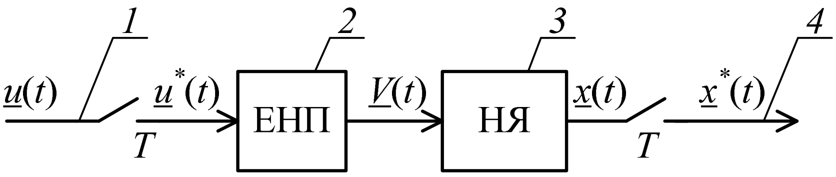


Рис. 2.11 – Керування напірним ящиком за допомогою обчислювальної машини:

1 – керувальне діяння обчислювальної машини; 2 – екстраполятор нульового порядку; 3 – напірний ящик; 4 – періодичне вимірювання вектора стану системи

Векторно-матричне рівняння стану системи (2.122), яке представляє напірний ящик у неперервній формі подамо так:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_{\text{н}}\underline{x}(t) + B_{\text{н}}\underline{V}(t), \tag{2.128}$$

де $A_{\text{н}} \sim A$; $B_{\text{н}} \sim B$; $\underline{V}(t) \sim U(t)$.

У дискретній формі векторно-матричне рівняння (2.128) подамо так:

$$\underline{x}(i+1) = A_{\text{Д}}\underline{x}(i) + B_{\text{Д}}\underline{u}(i), \tag{2.129}$$

де $A_{\text{Д}}$ і $B_{\text{Д}}$ – відповідно, матриця стану і матриця керувальних діянь дискретної системи (напірного ящика).

Згідно з визначенням екстраполятора нульового порядку для $t \in [iT, (i + 1)T]$, $\underline{V}(t) = \underline{u}(iT) = const.$

Розв'язок векторно-матричного рівняння (2.128) в момент часу t

$$\underline{x}(t) = e^{A_{\text{Н}}(t-iT)}\,\underline{x}(iT) + \int\limits_{iT}^{t} e^{A_{\text{Н}}(t-\tau)} B_{\text{Н}}\,\underline{u}(iT)\,d\tau. \qquad (2.130)$$

Стан неперервної системи в момент часу $(i+1)T$

$$\underline{x}(i+1)T = e^{A_{\text{Н}}T}\cdot \underline{x}(iT) + \left\{ \int\limits_{iT}^{(i+1)T} e^{A_{\text{Н}}[(i+1)T-\tau]}d\tau \right\} B_{\text{Н}}\,\underline{u}(i). \qquad (2.131)$$

Порівняння виразів (2.129) і (2.130) дозволяє встановити можливість використання для дискретного представлення напірного ящика вектор його стану $\underline{x}(i)$, який буде ідентичним вектору стану $\underline{x}(t)$ в момент дискретизації $t = iT$. Отже, можна співставити неперервне векторно-матричне рівняння стану системи (2.128) з дискретним векторно-матричним рівнянням стану системи (2.129) у якому

$$A_{\text{Д}} = e^{A_{\text{Н}}T}; \qquad (2.132)$$

$$B_{\text{Д}} = \left[\int\limits_{0}^{T} e^{A_{\text{Н}}(T-\tau)}\cdot d\tau \right] B_{\text{Н}} \qquad (2.133)$$

або

$$B_{\text{Д}} = A_{\text{Н}}^{-1}\left[e^{A_{\text{Н}}} - I \right] B_{\text{Н}}. \qquad (2.134)$$

Оскільки матриця (2.132) регулярна, то матрицю (2.134) можна визначити і так:

$$B_{\text{Д}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^{i+1}}{(i+1)!}\cdot A_{\text{Н}}^{i} B_{\text{Н}}. \qquad (2.135)$$

Таким чином, напірний ящик з повітряною подушкою як об’єкт керування рівнем маси і тиском повітряної подушки (система 2×2) можна представити одним векторно-матричним рівнянням стану системи (2.129). У відповідності з рівнянням (2.129) легко побудувати і векторно-матричну структурну схему цього ОК (система 2×2), рис. 2.12.

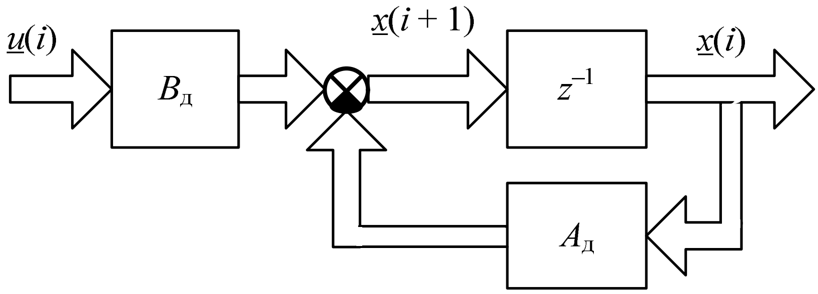


Рис. 2.12 – Векторно-матрична структурна схема напірного ящика з повітряною подушкою як об’єкта керування рівнем маси і тиском повітря у повітряній подушці

До рівняння стану системи (2.129) зробимо примітки.

Примітка 1. Оскільки матриці $A_{Н}$ і $B_{Н}$, а також період дискретності системи T є фіксованими (сталими) для заданого режиму роботи напірного ящика, то вказані матриці $A_{Д}$ і $B_{Д}$ також будуть сталими. Отже, вони можуть бути легко обчислені. З іншого боку, розроблені нами векторно-матричні рівняння стану системи (2.128) і (2.129) свідчать, що неперервне і дискретне представлення напірного ящика з повітряною подушкою строго еквівалентні одне одному. У разі заміни одного представлення іншим відсутня будь-яка апроксимація.

Примітка 2. Аналіз виразу (2.132) свідчить, що матриця стану системи $A_{Д}$ дискретного векторно-матричного рівняння (2.129), співставленого з неперервним векторно-матричним рівнянням (2.128) є регулярною (не виродженою) матрицею, оскільки перехідна матриця неперервної системи

$$\Phi(t,t_o)=e^{A_{\text{Н}}(t-t_j)}$$

регулярна для будь-якого часу *t*. Отже, перехідна матриця дискретної системи

$$\Phi(i,i_j)=A_{\text{Д}}^{i-i_j}$$

співставлена з неперервною системою, у якій відсутні запізнювання у каналах керування, також буде регулярною.

2.4. Ідентифікація систем

2.4.1. Задачі ідентифікації систем

Задачу ідентифікації систем можна сформулювати як задачу оцінювання параметрів моделі системи, яка має суттєві риси діючої чи ще проектованої системи і представляє знання про неї у зручній формі.

2.4.2. Етапи ідентифікації систем

Ідентифікація системи у загальному випадку полягає в одержанні системи рівнянь, які описують (представляють) динамічні властивості цієї системи і найкращим чином представляють її модель. Тут можна умовно відокремити два етапи ідентифікації системи.

Перший етап ідентифікації системи полягає у визначенні форми рівнянь, які входять в згадану вище систему рівнянь. Це так званий якісний етап ідентифікації системи.

Другий етап ідентифікації систем полягає у визначенні (оцінці) числових значень коефіцієнтів, які входять у вказані рівняння. Саме тому цей етап називають кількісним етапом або етапом оцінювання параметрів моделі системи. Наближення або «близькість» параметрів моделі до параметрів системи оцінюється за допомогою критерію оцінки. Надалі будемо використовувати критерій, який кількісно визначає відхилення вихідної змінної системи від вихідної змінної моделі системи, тобто критерій виду

$$C_2\left[\hat{e}(i)\right]=\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{y}(i)-y(i)\right]^2, \qquad (2.136)$$

де $y(i)$ – значення вихідної змінної системи, одержаної під час проведення експерименту в дискретний час i; $\hat{y}(i)$ – прогнозоване значення вихідної змінної, одержаної за допомогою моделі системи заданої структури в дискретний момент часу i; N – число експериментальних точок.

Таким чином, процедура визначення критерію оцінювання параметрів моделі системи може бути зображена так, як наведено на рис. 2.13.

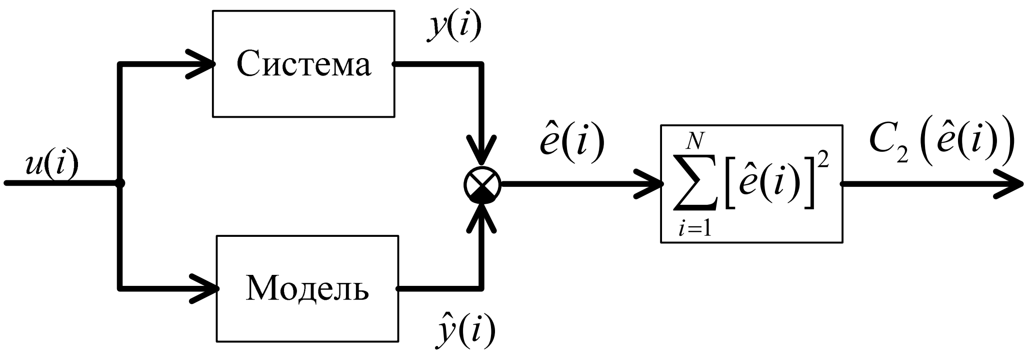


Рис. 2.13 – Процедура визначення критерію оцінювання параметрів моделі системи

Ідентифікацію систем можна виконати або на базі аналогових засобів автоматизації, які дозволяють зареєструвати вхідну $u(t)$ і вихідні $y(t)$ змінні системи, або на базі цифрових засобів автоматизації (мікропроцесорних систем), які дозволяють подати на вхід системи відповідне збурювальне діяння $u(i)$ і зареєструвати вихідну $y(i)$ змінну системи.

2.4.3. Ідентифікація одновимірних систем на базі аналогових засобів автоматизації

2.4.3.1. Принципова схема експериментальної установки

Принципову схему експериментальної установки за допомогою якої виконується реєстрування вхідної і вихідної змінних системи, наведено на рис. 2.14.

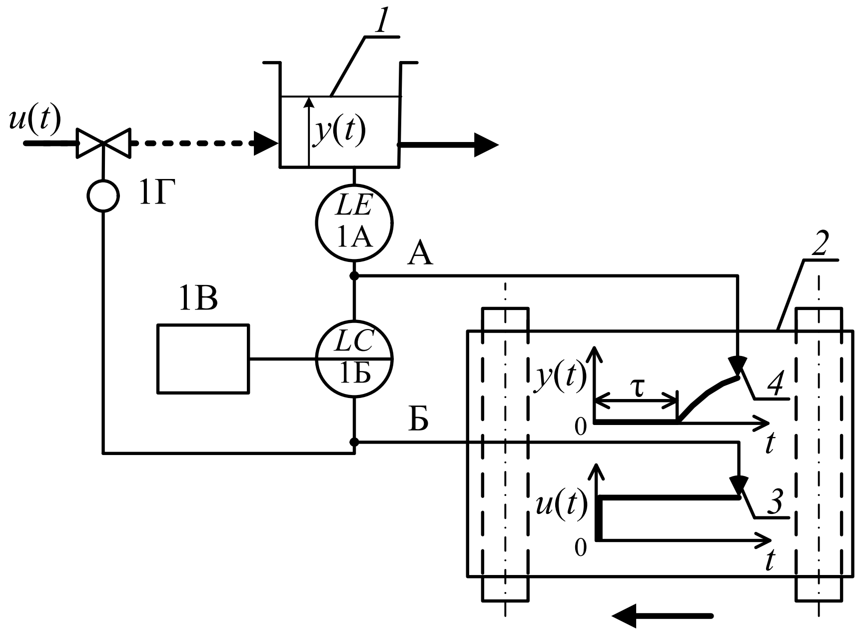


Рис. 2.14 – Принципова схема експериментальної установки для реєстрування вхідної і вихідної змінних системи:

1 – збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини; 2 – реєструвальний прилад із перами для реєстрування вхідної змінної (перо 3) і вихідної змінної (перо 4)

Будемо вважати, що системою, яка підлягає ідентифікації, є збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини 1. У даному випадку цю одновимірну систему (ОВС) будемо називати об'єктом керування (ОК) у якому потрібно керувати рівнем рідини $h(t)$ за допомогою системи автоматичного керування (САК). Така автоматична система складається з датчика рівня рідини (поз. 1А), автоматичного регулятора (поз. 1Б) з панеллю дистанційного керування (поз. 1В) і виконавчого пристрою (поз. 1Г). Як відомо для вибору і налаштування автоматичного регулятора потрібно мати математичну модель ОК. Будемо вважати, що розробити математичну модель цього ОК неможливо, а тому слід використати експериментальне його дослідження, тобто виконати його ідентифікацію. Для цього потрібно мати зареєстрований запис вхідної і вихідної змінних. Такі дані одержують за допомогою реєструвального приладу 2, у якому є пристрої (пера) для реєстрації вказаних змінних. Вказаний прилад під'єднується до системи автоматичного керування в точках А і Б.

2.4.3.2. Методика проведення експерименту

1. Систему автоматичного керування (САК) рівнем рідини розмикають, тобто відключають автоматичний регулятор (поз. 1Б) від виконавчого пристрою (поз. 1Г). В такому випадку сигнал від датчика рівня (поз. 1А) подається на реєструвальне перо 4, а сигнал від ПДК (поз. 1В) подається на виконавчий пристрій (поз. 1Г) і реєструвальне перо 3.

2. Після увімкнення реєструвального приладу стрічкопротяжний пристрій буде переміщуватися у напрямку, вказаному стрілкою. При цьому спостерігають за реєстрацією (реалізацією) вхідної і вихідної змінних системи. Будемо вважати, що це і є усталений режим роботи системи.

3. За допомогою ПДК 1В наноситься стрибкоподібне збурювальне діяння на виконавчий пристрій (поз. 1Г) і одночасно на стрічці реєструвального приладу 2 під перами 3 і 4 відмічають момент (t = 0) нанесення збурювального діяння на систему.

4. Після подання на систему збурювального діяння (стрибкоподібної зміни витрати $u(t)$ вихідна змінна (рівень рідини) $y(t)$, як правило, деякий час не змінюється, а через час $t = \tau$ розпочинається його зростання, якщо регулювальний орган (РО) було відкрито на деяку величину, або спадання, якщо РО закривався на деяку величину від усталеного режиму роботи.

5. Після виконання першої процедури ідентифікації мають зареєстровану вихідну і вхідну змінні системи (рис. 2.15).

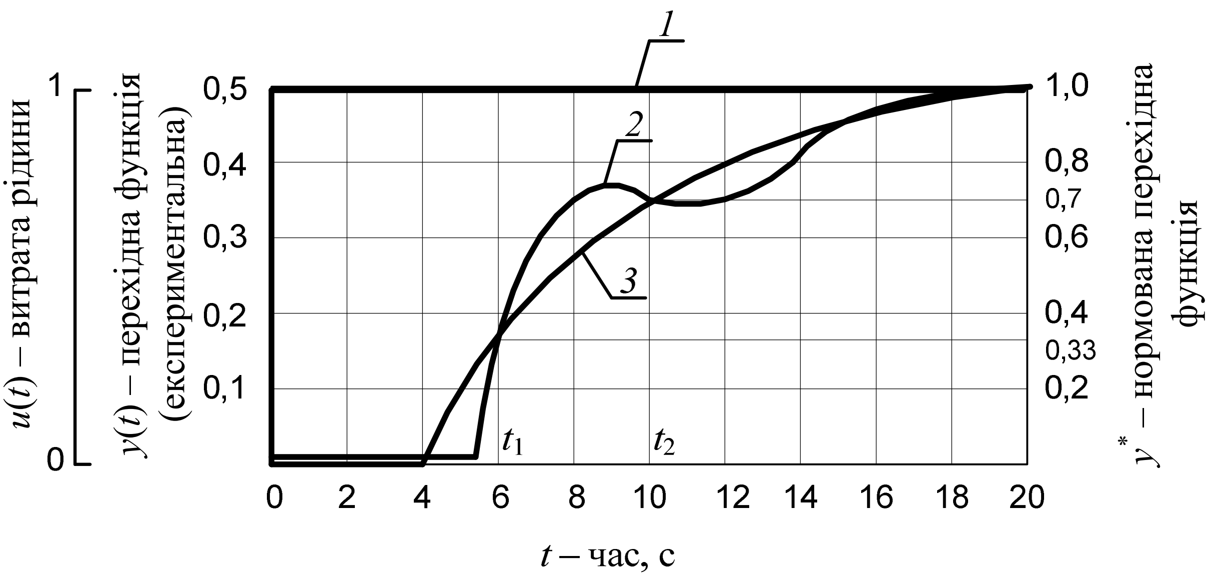


Рис. 2.15 – Експериментальна (графік 2) і нормована (графік 3) перехідні функції збирача рідини при одиничній стрибкоподібній зміні витрати рідини (графік 1)

З метою оцінки параметрів моделі розглядуваного ОК потрібно виконати так звану обробку результатів експерименту, тобто перейти до другого етапу ідентифікації.

2.4.3.3. Графо-аналітичний метод оцінювання параметрів моделі системи заданої структури. Метод Ормана

Одержані реалізації вхідної і вихідної змінних ідентифікованої системи потрібно відповідним чином опрацювати з метою одержання передавальної чи дискретної передавальної функцій системи. В наш час існує досить багато різноманітних способів і методів такого опрацювання. Наведемо тут тільки метод Ормана.

Для використання методу Ормана необхідно експериментальну перехідну функцію (ЕПФ) $y(t)$ замінити нормованою перехідною функцією (НПФ) $y^*(t)$.

Аналіз ЕПФ (рис. 2.15, графік 2) свідчить, що вона може бути представлена так:

$$y(t) = k_{11}\left[1 - \exp(-\frac{t-\tau}{T_{11}})\right], \qquad (2.137)$$

де k_{11}, T_{11} і τ – коефіцієнт підсилення каналу керування 11, стала часу об’єкта керування і запізнювання у каналі керування 11.

Коефіцієнт підсилення каналу керування 11

$$k_{11} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}, \qquad (2.138)$$

де $y(\infty)$ і $u(\infty)$ – усталене значення вихідної і вхідної змінних системи.

Оскільки згідно умови на вхід системи подавалось збурення $u(t)$=1, яке і після закінчення перехідного процесу $u(\infty)$ = 1, а НПФ $y^*(\infty)$ = 1, то k_{11} = 1. Отже НПФ

$$y^*(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_{11}}\right), \tag{2.139}$$

Для оцінки параметрів моделі ОК по його нормованій перехідній функції візьмемо на ній дві точки:

$$y_1^*(t_1) = 0,33 \quad \text{і} \quad y_2^*(t_2) = 0,7.$$

Отже, згідно з виразом (2.139) для 1-ої точки

$$1 - 0,33 = 0,67 = \exp(-0,4)$$

або

$$e^{-0,4} = e^{-\frac{t_1-\tau}{T_{11}}}.$$

Для другої точки

$$1 - 0,7 = 0,3 = \exp(-1,2)$$

або

$$e^{-1,2} = e^{-\frac{t_2-\tau}{T_{11}}}.$$

Таким чином

$$-0,4 = -\frac{t_1-\tau}{T_{11}},$$

$$-1,2 = -\frac{t_2-\tau}{T_{11}}.$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} t_1 - \tau = 0,4T_{11}; \\ t_2 - \tau = 1,2T_{11}. \end{cases} \qquad (2.140)$$

Із системи рівнянь (2.140) маємо:

Стала часу моделі системи

$$T_{11} = 1,25(t_2 - t_1). \qquad (2.141)$$

Запізнювання у каналі керування 11

$$\tau = 0,5(3t_1 - t_2). \qquad (2.142)$$

2.4.4. Ідентифікація одновимірних систем на базі мікропроцесорних систем

2.4.4.1. Принципова схема експериментальної установки

Наявність мікропроцесорних систем МПС на виробництві дозволяє підключити їх до окремої системи автоматичного керування з метою ідентифікації ОК, що входить до неї. А тому принципову схему експериментальної установки, призначеної для реєстрування вхідної і вихідної змінних системи, а також оцінювання параметрів її моделі можна зобразити так, як показано на рис. 2.16.

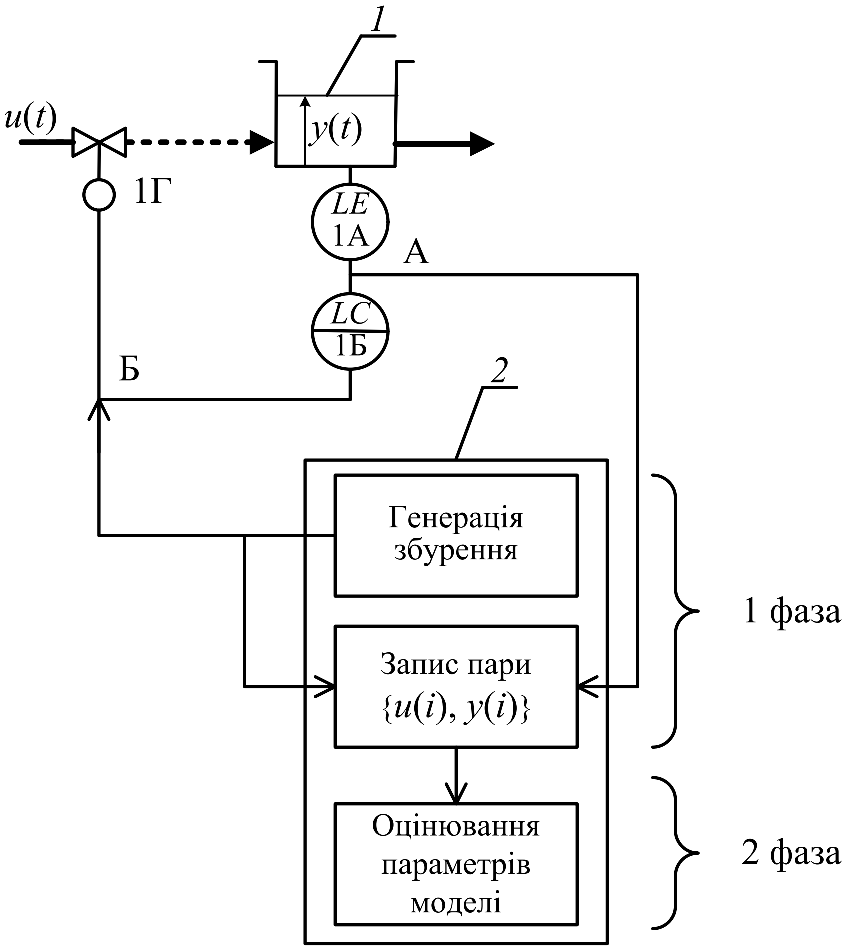


Рис. 2.16 – Принципова схема експериментальної установки для реєстрування вхідної і вихідної змінних системи і оцінювання параметрів її моделі:

1 – збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини;
2 – мікропроцесорна система

Порівнюючи цю схему зі схемою, наведеною на рис. 2.16, бачимо, що вони подібні одна одній. Мікропроцесорна система 2 (рис. 2.16) замінює не тільки реєструвальний прилад 2 (рис. 2.14), але й виконує всі процедури по оцінюванні параметрів моделі системи. Більше того, вона дозволяє сформувати і подати на об’єкт керування будь-яке збурювальне діяння – стрибкоподібне, синусоїдне, псевдопасивне тощо.

2.4.4.2. Методика проведення експерименту

Методика проведення експериментальних досліджень за допомогою установки, реалізованої на базі використання МПС, практично не відрізняється від методики яку проводять за допомогою установки, реалізованої на базі аналогових засобів автоматизації. У даному випадку МПС генерує відповідне збурювальне діяння, яке подається на виконавчий пристрій 1Г, викликаючи тим самим зміну вихідної змінної системи. Вихідна змінна системи $y(t)$ і збурювальне діяння $u(t)$ створюють так звану пару спостережень $\{u(i), y(i)\}$, яка заноситься в пам'ять МПС. Генерація збурення і запис пари спостереження називають *першою фазою ідентифікації системи*, а процедура оцінювання параметрів моделі системи – *другою фазою ідентифікації системи.*

Існує досить багато різноманітних методів оцінювання параметрів моделі ідентифікованої системи. Розглянемо один із них.

2.4.4.3. Оцінювання параметрів моделі одновимірної системи заданої структури методом найменших квадратів

Припустимо, що ідентифіковану систему по каналу керування 11 вирішено представити передавальною функцією

$$g_{11}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = k_{11}\frac{\exp(-p\tau)}{1+T_{11}p}. \tag{2.143}$$

Передавальній функції (2.143) відповідає диференціальне рівняння виду:

$$T_{11}\frac{d\left[y(t)-y_{\Pi}\right]}{dt}+y(t)-y_{\Pi}=k_{11}\left[u(t-\tau)-u_{\Pi}\right], \qquad (2.144)$$

де u_{Π} і y_{Π} – початкове значення вхідної і вихідної змінних системи.

Якщо y_{Π} і u_{Π} сталі величини, то

$$T_{11}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)-y_{\Pi}=k_{11}\left[u(t-\tau)-u_{\Pi}\right]. \qquad (2.145)$$

Диференціальному рівнянню (2.145) відповідає різницеве рівняння

$$T_{11}\frac{y(i+1)-y(i)}{T}+y(i)-y_{\Pi}=k_{11}\left[u(i-k+1)-u_{\Pi}\right], \qquad (2.146)$$

де $i = 1, 2,\ldots, N$ – дискретний час;

$$k=\frac{\tau}{T}.$$

Із рівняння (2.146) випливає, що

$$y(i+1)=y(i)-\frac{T}{T_{11}}\left[y(i)-y_{\Pi}\right]+\frac{k_{11}T}{T_{11}}\left[u(i-k+1)-u_{\Pi}\right]$$

або після перегрупування

$$y(i)=\frac{k_{11}T}{T_{11}}\left[u(i-k)-u_{\Pi}\right]-\frac{T}{T_{11}}\left[y(i-1)-u_{\Pi}\right]+y(i-1). \qquad (2.147)$$

Нехай $\hat{y}(i)$ – це прогнозоване значення вихідної змінної моделі системи, а $y(i)$ – її виміряне значення (рис. 2.13). Тоді похибка прогнозу в i-й момент часу

$$\hat{e}(i)=y(i)-\hat{y}(i). \qquad (2.148)$$

Підставивши вираз (2.147) у вираз (2.148) маємо

$$\hat{e}(i) = y(i) - \frac{k_{11}T}{T_{11}}\left[u(i-k) - u_{\Pi}\right] + \frac{T}{T_{11}}\left[y(i-1) - y_{\Pi}\right] - y(i-1)\,. \quad (2.149)$$

Критерій оцінювання параметрів моделі системи (рис. 2.13)

$$C_2 = \sum_{i=1}^{N}\left\{y(i) - \frac{k_{11}T}{T_{11}}\left[u(i-k) - u_{\Pi}\right] + \frac{T}{T_{11}}\left[y(i-1) - y_{\Pi}\right] - y(i-1)\right\}^2. \quad (2.150)$$

Критерій (2.150) в компактній формі подамо так:

$$C_2 \sum_{i=1}^{N}\left[AY(i) + BU(i) + Y'(i)\right]^2 \quad (2.151)$$

де

$$Y(i) = y(i-1) - y_{\Pi};$$

$$U(i) = u(i-k) - u_{\Pi};$$

$$Y'(i) = y(i) - y(i-1);$$

$$A = \frac{T}{T_{11}};$$

$$B = -k_{11}\frac{T}{T_{11}} = -k_{11}A.$$

Отже, стала часу моделі системи

$$T_{11} = \frac{A}{T}. \quad (2.152)$$

Коефіцієнт підсилення каналу керування 11

$$k_{11} = -\frac{B}{A}. \tag{2.153}$$

Для мінімізації критерію (2.151) необхідно та достатньо, щоб

$$\frac{\partial C_2}{\partial A} = \frac{\partial C_2}{\partial B} = 0.$$

Згідно з виразом (2.151)

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial A}\right) = 2\sum_{i=1}^{N}\left[AY(i) + BU(i) + Y'(i)\right]Y(i);$$

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial B}\right) = 2\left[AY(i) + BU(i) + Y'(i)\right]U(i).$$

Таким чином, маємо систему алгебраїчних лінійних рівнянь (САЛР):

$$\begin{cases} A\sum_{i=1}^{N}Y^2(i) + B\sum_{i=1}^{N}Y(i)U(i) + \sum_{i=1}^{N}Y(i)Y'(i); \\ A\sum_{i=1}^{N}Y(i)U(I) + B\sum_{i=1}^{N}U^2(i) + \sum_{i=1}^{N}Y'(i)U(i). \end{cases} \tag{2.154}$$

Із системи рівнянь (2.154) визначаються коефіцієнти *A* і *B*, а за формулами (2.152) і (2.153) – стала часу моделі системи і коефіцієнт підсилення її каналу керування 11.

2.4.5. Практичні приклади ідентифікації одновимірних систем

Приклад 2.1. Представити збирач рідини (систему) з «довгим» і «коротким» трубопроводами подачі рідини як об’єкт керування рівнем рідини передавальними і дискретними передавальними функціями, експериментальну перехідну функцію якого наведено на рис. 2.17, графік 1.

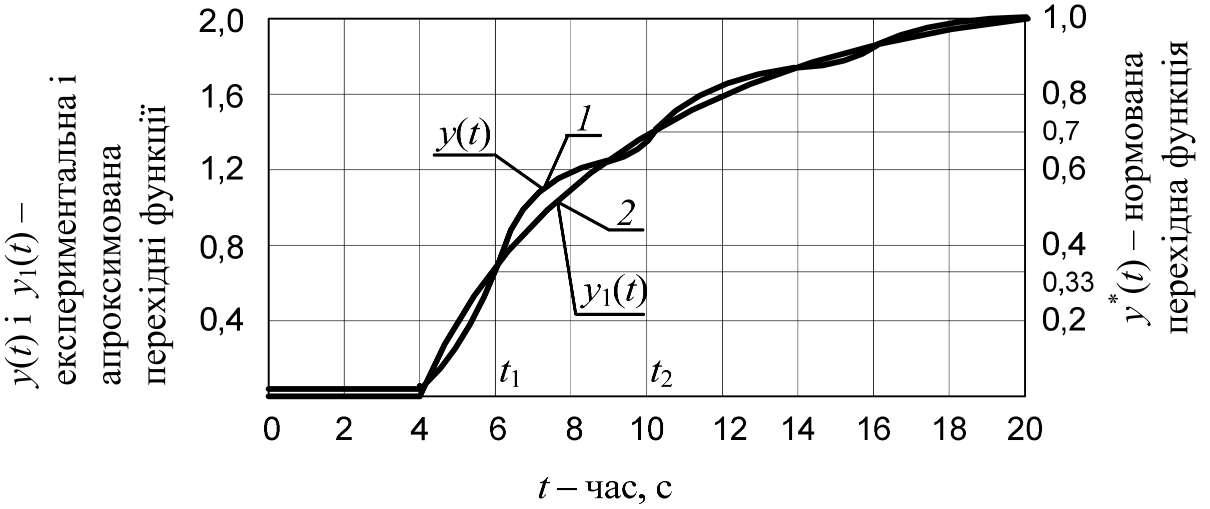


Рис. 2.17 – Експериментальна (графік 1) і апроксимована (графік 2) перехідні функції збирача рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини при одиничній стрибкоподібній зміні витрати речовини

Розв’язання.

1. На підставі графіка експериментальної перехідної функції $y(t)$ (графік 1) визначимо числові значення нормованої перехідної функції $y^*(t)$. Для цього числові значення експериментальної функції поділимо на її максимальне значення 2.0 і одержані результати нанесемо на рис. 2.17.

2. Проведемо горизонтальну лінію від осі ординат $y^*(t)$ = 0,33, до перетину її з ЕПФ і опустимо перпендикуляр на вісь абсцис. У даному випадку одержимо t_1 = 6 с. Проведемо горизонтальну лінію від осі ординат $y^*(t)$ = 0,7 до перетину її з ЕПФ і опустимо перпендикуляр на вісь абсцис. У цьому випадку одержимо t_2 = 10 с.

3. Згідно з виразом (2.141) стала часу моделі системи

$$T_{11} = 1,25(t_2 - t_1) = 1,25(10 - 6) = 5 \text{ с.} \tag{2.1.1}$$

Згідно з виразом (2.142) запізнювання у каналі керування 11

$$\tau = 0,5(3t_1 - t_2) = 0,5(3 \cdot 6 - 10) = 4 \text{ с.} \tag{2.1.2}$$

Оскільки на вхід системи було подано одиничне стрибкоподібне керувальне діяння $u(t) = 1$, а усталене значення вихідної змінної $y(t) = 2$, то коефіцієнт підсилення каналу керування згідно з виразом (2.138)

$$k_{11} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} = \frac{2}{1} = 2. \tag{2.1.3}$$

Таким чином передавальна функція моделі збирача з «довгим» трубопроводом подачі рідини

$$g_{11}(p) = \frac{2\exp(-4p)}{1+5p}, \tag{2.1.4}$$

якій відповідає перехідна функція

$$y(t) = 2\left[1 - \exp\left(-\frac{t-4}{5}\right)\right]. \tag{2.1.5}$$

Передавальна функція моделі збирача з «коротким» трубопроводом подачі рідини

$$g_{11}(p) = \frac{2}{1+5p}, \tag{2.1.6}$$

якій відповідає перехідна функція

$$y(t) = 2\left[1 - \exp(-0,2t)\right]. \qquad (2.1.7)$$

4. Дискретна передавальна функція моделі системи

$$g_{11}(z) = \frac{k_{11}(1 - a_p)}{1 - a_p \cdot z^{-1}} \cdot z^{-k}, \qquad (2.1.8)$$

де $a_p = \exp\left[-\dfrac{T}{T_{11}}\right]$, а $k = \dfrac{\tau}{T}$.

Якщо прийняти період дискретності $T = 1$ с, то

$$k = \tau/T = 4/1 = 4;$$

$$a_p = \exp\left(-\frac{T}{T_{11}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{5}\right) = 0,818;$$

$$1 - a_p = 1 - 0,818 = 0,182;$$

$$k_{11}(1 - a_p) = 2(1 - 0,182) = 0,364.$$

Отже, дискретна передавальна функція моделі системи з «довгим» трубопроводом

$$g_{11}(z) = \frac{0,364 z^{-5}}{1 - 0,818 z^{-1}}. \qquad (2.1.9)$$

5. Для побудови графіка перехідної функції системи складемо табл. 2.1 згідно з виразом (2.1.5)

Таблиця 2.1. До побудови графіка перехідної функції (2.1.5)

t, с	4	6	8	10	12	14	16
t – 4	0	2	4	6	8	10	12
x=(t – 4)/5	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
exp(–x)	1,0	0,670	0,449	0,301	0,201	0,135	0,090
z=1–exp(–x)	0	0,330	0,551	0,699	0,799	0,873	0,913
$y(t) = 2\cdot z$	0	0,660	1,102	1,398	1,598	1,747	1,827

На підставі табл. 2.1 побудовано графік перехідної функції моделі системи (рис. 2.17, графік 2). Аналіз наведених графіків свідчить про те, що вони мало відрізняються один від одного.

Приклад 2.2. Представити збирач рідини (систему) з «коротким» трубопроводом подачі рідини як об’єкт керування рівнем рідини передавальною і дискретною передавальними функціями, пару спостережень $\{u(i), y(i)\}$ якої наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Результати пари спостережень $\{u(i),\ y(i)\},\ i = 1,\ldots,100$ ідентифікованої системи

i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0,36	26	1	–0,09	51	1	1,87	76	1	–1,00
2	1	0,66	27	1	0,29	52	–1	1,17	77	1	–0,46
3	1	0,90	28	–1	–0,12	53	–1	0,59	78	1	–0,01
4	–1	0,38	29	–1	0,46	54	–1	0,12	79	1	0,35
5	–1	–0,05	30	–1	–0,74	55	–1	–0,26	80	1	0,65
6	–1	–0,41	31	1	–0,25	56	–1	–0,58	81	1	0,89
7	–1	–0,70	32	1	0,16	57	–1	–0,83	82	1	0,37

Продовдення таблиці 2.2.

i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$	i	$u(i)$	$y(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	–1	–0,93	33	1	0,49	58	–1	–1,05	83	–1	–0,06
9	–1	–1,13	34	–1	0,04	59	–1	–1,22	84	–1	–0,46
10	–1	–1,28	35	–1	–0,33	60	–1	–1,36	85	–1	0,70
11	–1	–1,41	36	–1	–0,63	61	1	–1,48	86	–1	–0,94
12	–1	–1,52	37	1	–0,15	62	–1	–1,57	87	–1	–1,13
13	1	–0,88	38	1	0,24	63	–1	–1,65	88	1	–0,56
14	1	–0,36	39	1	0,56	64	1	–0,99	89	1	–0,10
15	1	0,07	40	1	0,82	65	1	–0,45	90	1	0,28
16	1	0,42	41	1	1,03	66	1	0,00	91	–1	–0,13
17	1	0,70	42	1	1,21	67	–1	–0,36	92	–1	–0,47
18	1	0,94	43	1	1,35	68	–1	–0,66	93	–1	–0,75
19	–1	–0,41	44	1	1,47	69	–1	–0,90	94	–1	–0,95
20	–1	–0,03	45	1	1,57	70	–1	–1,10	95	–1	0,16
21	–1	–0,39	46	1	1,64	71	–1	–1,27	96	–1	0,49
22	–1	–0,68	47	1	1,71	72	–1	–1,40	97	–1	0,04
23	–1	–0,92	48	1	1,76	73	–1	–1,51	98	–1	–0,33
24	–1	–1,11	49	1	1,80	74	–1	–1,60	99	–1	0,63
25	–1	–0,55	50	1	1,84	75	–1	–1,67	100	1	–0,85

Розв’язання

1.На підставі табл. 2.2 визначимо початкові значення вхідної і вихідної змінних системи

$$u_{\Pi} = \sum_{i=1}^{100} u(i) = -0,082;$$

$$y_{\Pi} = \sum_{i=1}^{100} y(i) = -0,1449.$$

2. На підставі табл. 2.2 складемо стовпці табл. 2.3, виходячи із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.154).

Таблиця 2.3. До обчислення сум, що входять в систему рівнянь (2.154) $u_П = -0{,}082$; $y_П = -0{,}127$.

i	$u(i)$	$y(i)$	$U(i)$	$U^2(i)$	$Y(i)$	$Y^2(i)$	$Y'(i)$	$U(i)Y(i)$	$U(i)Y'(i)$	$Y(i)Y'(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0,36	1,093	1,194	0,000	0,000	0,51	0,000	0,561	0,000
2	1	0,66	1,093	1,194	0,514	0,264	0,30	0,561	0,328	0,154
3	1	0,90	1,093	1,194	0,814	0,662	0,24	0,889	0,262	0,195
4	–1	0,38	0,907	0,823	1,054	1,110	–0,52	–0,956	0,472	–0,548
5	–1	–0,05	0,907	0,823	0,534	0,285	–0,43	–0,484	0,390	–0,229
6	–1	–0,41	0,907	0,823	0,104	0,011	–0,36	–0,094	0,327	–0,037
7	–1	–0,70	0,907	0,823	–0,256	0,066	–0,29	0,233	0,263	0,074
8	–1	–0,93	0,907	0,823	–0,546	0,299	–0,23	0,496	0,209	0,126
9	–1	–1,13	0,907	0,823	–0,776	0,603	–0,20	0,704	0,181	0,155
10	–1	–1,28	0,907	0,823	–0,976	0,953	–0,15	0,886	0,136	0,146
11	–1	–1,41	1,093	0,823	–1,126	1,269	–0,13	1,022	0,118	0,146
12	–1	–1,52	1,093	0,823	–1,256	1,579	–0,11	1,140	0,100	0,138
13	1	–0,88	1,093	1,194	–1,366	1,867	0,64	–1,493	0,699	–0,874
14	1	–0,36	1,093	1,194	–0,726	0,528	0,52	–0,794	0,568	–0,378
15	1	0,07	1,093	1,194	–0,206	0,043	0,43	–0,226	0,470	–0,089
16	1	0,42	1,093	1,194	0,224	0,050	0,35	0,244	0,382	0,078
17	1	0,70	0,907	1,194	0,574	0,329	0,28	0,627	0,306	0,161
18	1	0,94	0,907	1,194	0,857	0,729	0,24	0,933	0,262	0,205
19	–1	0,41	0,907	0,823	1,094	1,196	–0,53	–0,992	0,481	–0,580
20	–1	–0,03	0,907	0,823	0,564	0,318	–0,44	–0,511	0,399	–0,248
21	–1	–0,39	0,907	0,823	0,124	0,015	–0,36	–0,112	0,327	–0,044
22	–1	–0,68	0,907	0,823	–0,236	0,056	–0,29	0,214	0,263	0,069
23	–1	–0,92	0,907	0,823	–0,526	0,277	–0,24	0,478	0,218	0,126
24	–1	–1,11	1,093	0,823	–0,766	0,587	–0,19	0,695	0,172	0,146
25	–1	–0,55	1,093	0,823	–0,956	0,915	0,56	–1,045	0,612	–0,536
26	1	–0,09	0,907	1,194	–0,396	0,157	0,46	–0,433	0,503	–0,182
27	1	0,29	0,907	1,194	0,064	0,004	0,38	0,070	0,415	0,024
28	–1	–0,12	0,907	0,823	0,444	0,197	–0,10	–0,402	0,098	–0,048

Продовдення таблиці 2.3.

i	$u(i)$	$y(i)$	$U(i)$	$U^2(i)$	$Y(i)$	$Y^2(i)$	$Y'(i)$	$U(i)Y(i)$	$U(i)Y'(i)$	$Y(i)Y'(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
29	–1	–0,46	1,093	0,823	0,336	0,113	–0,64	–0,305	0,583	–0,216
30	–1	–0,74	1,093	0,823	–0,306	0,094	–0,28	0,278	0,254	0,086
31	1	–0,25	1,093	1,194	–0,586	0,344	0,49	–0,641	0,535	–0,287
32	1	0,16	0,907	1,194	–0,096	0,009	0,41	–0,105	0,448	–0,040
33	1	0,49	0,907	1,194	0,314	0,098	0,33	0,343	0,361	0,103
34	–1	0,04	0,907	0,823	0,644	0,414	–0,45	–0,584	0,408	–0,290
35	–1	–0,33	1,093	0,823	0,194	0,037	–0,37	–0,176	0,336	–0,072
36	–1	–0,63	1,093	0,823	–0,176	0,031	–0,30	0,160	0,272	0,053
37	1	–0,15	1,093	1,194	–0,476	0,227	0,47	–0,521	0,524	–0,228
38	1	0,24	1,093	1,194	0,003	0,001	0,39	0,003	0,427	0,001
39	1	0,56	1,093	1,194	0,395	0,156	0,32	0,414	0,336	0,126
40	1	0,82	1,093	1,194	0,715	0,510	0,26	0,751	0,273	0,186
41	1	1,03	1,093	1,194	0,974	0,949	0,21	1,024	0,221	0,205
42	1	1,21	1,093	1,194	1,184	1,402	0,18	1,245	0,189	0,213
43	1	1,35	1,093	1,194	1,364	1,86	0,14	1,434	0,147	0,191
44	1	1,47	1,093	1,194	1,504	2,262	0,12	1,582	0,126	0,180
45	1	1,54	1,093	1,194	1,624	2,637	0,10	1,708	0,105	0,162
46	1	1,64	1,093	1,194	1,724	2,972	0,07	1,813	0,074	0,121
47	1	1,71	1,093	1,194	1,794	3,218	0,07	1,886	0,074	0,126
48	1	1,76	1,093	1,194	1,864	3,474	0,05	1,960	0,053	0,093
49	1	1,80	1,093	1,194	1,914	3,663	0,04	2,013	0,042	0,077
50	1	1,84	1,093	1,194	1,954	3,818	0,04	2,055	0,042	0,078
51	1	1,87	1,093	1,194	1,994	3,976	0,03	2,097	0,032	0,060
52	–1	1,17	0,907	0,823	2,024	4,097	–0,70	–1,970	0,664	–1,417
53	–1	0,59	0,907	0,823	1,324	1,753	–0,58	–1,256	0,550	–0,768
54	–1	0,12	0,907	0,823	0,744	0,554	–0,47	–0,706	0,446	–0,35
55	–1	–0,26	0,907	0,823	0,274	0,075	–0,38	–0,206	0,360	–0,104
56	–1	–0,58	0,907	0,823	–0,106	0,011	–0,32	0,101	0,304	0,034
57	–1	–0,83	0,907	0,823	–0,426	0,181	–0,25	0,404	0,237	0,107
58	–1	–1,05	0,907	0,823	–0,676	0,457	–0,22	0,641	0,209	0,149
59	–1	–1,22	0,907	0,823	–0,896	0,803	–0,17	0,850	0,161	0,152

Продовдення таблиці 2.3.

i	$u(i)$	$y(i)$	$U(i)$	$U^2(i)$	$Y(i)$	$Y^2(i)$	$Y'(i)$	$U(i)Y(i)$	$U(i)Y'(i)$	$Y(i)Y'(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
60	–1	–1,36	0,907	0,823	–1,066	1,136	0,94	1,011	–0,897	–1,008
61	–1	–1,48	0,907	0,823	–0,121	0,015	–1,20	0,114	1,143	0,145
62	–1	–1,57	0,907	0,823	–1,326	1,758	–0,09	1,258	0,085	0,119
63	–1	–1,65	0,907	0,823	–1,416	2,005	–0,08	1,343	0,076	0,113
64	1	–0,99	1,093	1,194	–1,496	2,238	0,66	–1,573	0,694	–0,987
65	1	–0,45	1,093	1,194	–0,836	0,699	0,54	–0,879	0,568	–0,451
66	1	0,00	1,093	1,194	–0,296	0,088	0,45	–0,311	0,473	–0,133
67	–1	–0,36	0,907	0,823	–0,154	0,024	–0,36	–0,146	0,341	–0,055
68	–1	–0,66	0,920	0,846	–0,215	0,046	–0,23	0,197	0,212	0,049
69	–1	–0,90	0,907	0,823	–0,506	0,256	0,24	0,48	0,228	0,121
70	–1	–1,10	0,907	0,823	–0,746	0,557	–0,20	0,708	0,190	0,149
71	–1	–1,27	0,907	0,823	–0,946	0,895	–0,17	0,897	0,161	0,161
72	–1	–1,40	0,907	0,823	–1,116	1,245	–0,13	1,058	0,123	0,145
73	–1	–1,51	0,907	0,823	–1,246	1,553	–0,11	1,182	0,104	0,137
74	–1	–1,60	0,907	0,823	–1,356	1,839	–0,09	1,286	0,085	0,122
75	–1	–1,67	0,907	0,823	–1,446	2,091	–0,07	1,371	0,066	0,101
76	1	–0,10	1,093	1,194	–1,516	2,298	0,67	–1,594	0,705	–1,016
77	1	–0,46	1,093	1,194	–0,846	0,716	1,15	–0,89	1,211	–0,975
78	1	–0,01	1,093	1,194	0,306	0,094	–0,16	0,322	–0,170	–0,05
79	1	0,35	1,093	1,194	0,144	0,021	0,36	0,148	0,371	0,052
80	1	0,65	1,093	1,194	0,504	0,254	0,30	0,520	0,309	0,151
81	1	0,89	1,093	1,194	0,804	0,646	0,24	0,829	0,247	0,193
82	–1	0,37	0,907	0,823	1,044	1,090	–0,52	–1,012	0,504	–0,543
83	–1	–0,06	0,907	0,823	0,524	0,275	–0,43	0,508	0,417	–0,225
84	–1	0,41	0,907	0,823	0,094	0,009	–0,35	–0,091	0,339	–0,033
85	–1	–0,70	0,907	0,823	–0,256	0,066	–0,29	0,248	0,281	0,074
86	–1	–0,94	0,907	0,823	–0,546	0,298	–0,24	0,529	0,233	0,131
87	–1	–1,13	0,907	0,823	–0,786	0,618	–0,19	0,762	0,184	0,149
88	1	–0,56	1,093	0,823	–0,976	0,953	0,57	–1,006	0,588	–0,556
89	1	–0,10	1,093	0,823	–0,406	0,165	0,46	–0,419	0,474	–0,187
90	1	0,28	1,093	0,823	0,054	0,003	0,38	0,056	0,401	0,021

Продовдення таблиці 2.3.

i	$u(i)$	$y(i)$	$U(i)$	$U^2(i)$	$Y(i)$	$Y^2(i)$	$Y'(i)$	$U(i)Y(i)$	$U(i)Y'(i)$	$Y(i)Y'(i)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
91	–1	–0,13	0,907	0,823	0,443	0,197	–0,41	–0,43	0,406	–0,186
92	–1	–0,47	0,907	0,823	0,024	0,001	–0,54	–0,023	0,523	–0,013
93	–1	–0,75	0,907	0,823	–0,516	0,266	–0,08	0,500	0,078	0,041
94	–1	–0,95	0,907	0,823	–0,596	0,355	–0,20	0,578	0,194	0,119
95	–1	0,16	0,907	0,823	–0,796	0,634	1,11	–0,821	0,144	–0,884
96	–1	0,49	0,907	0,823	0,315	0,099	0,33	0,348	0,363	0,104
97	–1	0,04	0,907	0,823	0,645	0,416	–0,45	–0,579	0,404	–0,290
98	–1	–0,33	–0,920	0,846	0,184	0,033	–0,37	–0,169	0,340	–0,068
99	–1	–0,63	–0,920	0,846	0,185	0,034	–0,30	0,170	0,276	0,055
100	1	–0,85	1,080	1,166	–0,48	0,23	–0,22	–0,523	–0,237	0,106

Як показали обчислення

$$\sum_{i=1}^{100} U^2(i) = 94,45;$$

$$\sum_{i=1}^{100} Y^2(i) = 82,436;$$

$$\sum_{i=1}^{100} U(i)Y(i) = 22,217;$$

$$\sum_{i=1}^{100} U(i)Y'(i) = 31,526;$$

$$\sum_{i=1}^{100} Y(i)Y'(i) = -6,105.$$

Підставивши наведені вище суми в систему рівнянь (2.154), маємо:

$$\begin{cases} 82,436A + 22,217B - 6,105 = 0; \\ 22,217A + 94,450B + 31,526 = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь такий: $A = 0,175$, $B = -0,374$.

3. Стала часу моделі системи згідно з виразом (2.152)

$$T_{11} = \frac{T}{A} = \frac{1}{0,175} = 5,714 \text{ с}, \tag{2.2.2}$$

а коефіцієнт підсилення каналу керування 11 згідно з виразом (2.153)

$$k_{11} = -\frac{B}{A} = \frac{0,374}{0,175} = 2,137. \tag{2.2.3}$$

4. Таким чином, передавальна функція моделі системи

$$g_{11}(p) = \frac{2,137}{1 + 5,714p}. \tag{2.2.4}$$

5. Дискретна передавальна функція моделі системи

$$g_{11}(z) = \frac{k_{11}(1 - a_p)}{1 - a_p z^{-1}} \cdot z^{-1}, \tag{2.2.5}$$

де

$$a_p = \exp(-\frac{T}{T_{11}}).$$

Якщо прийняти період дискретності T = 1 с, то

$$a_p = \exp\left(-\frac{T}{T_{11}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{5,714}\right) = 0,839;$$
$$1 - a_p = 1 - 0,839 = 0,161;$$
$$k_{11}(1 - a_p) = 2,137 \cdot 0,161 = 0,344.$$

6. Перехідна функція моделі системи, яка відповідає передавальній функції (2.2.4) має такий вигляд:

$$y(t) = 2{,}137\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{5{,}714p}\right)\right]. \tag{2.2.6}$$

Для побудови графіків функцій (2.2.6) і (2.1.7) складемо табл. 2.4 і 2.5.

Таблиця 2.4. До побудови графіка апроксимованої перехідної функції (2.2.6)

t, с	0	4	6	8	10	12	14
$x = 0{,}175t$	0	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45
$\exp(-x)$	1	0,496	0,349	0,246	0,173	0,122	0,086
$z = 1 - \exp(-x)$	0	0,504	0,651	0,754	0,827	0,878	0,914
$y(t) = 2{,}137 \cdot z$	0	1,070	1,391	1,611	1,767	1,876	1,953

Таблиця 2.5. До побудови графіка апроксимованої перехідної функції (2.1.7).

t, с	0	4	6	8	10	12	14
$x = 0{,}2t$	0	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80
$\exp(-x)$	1	0,449	0,301	0,201	0,135	0,090	0,060
$z = 1 - \exp(-x)$	0	0,551	0,699	0,799	0,865	0,910	0,940
$y(t) = 2 \cdot z$	0	1,102	1,398	1,598	1,730	1,820	1,880

На підставі табл. 2.4 і 2.5 побудовано відповідні графіки (рис. 2.18).

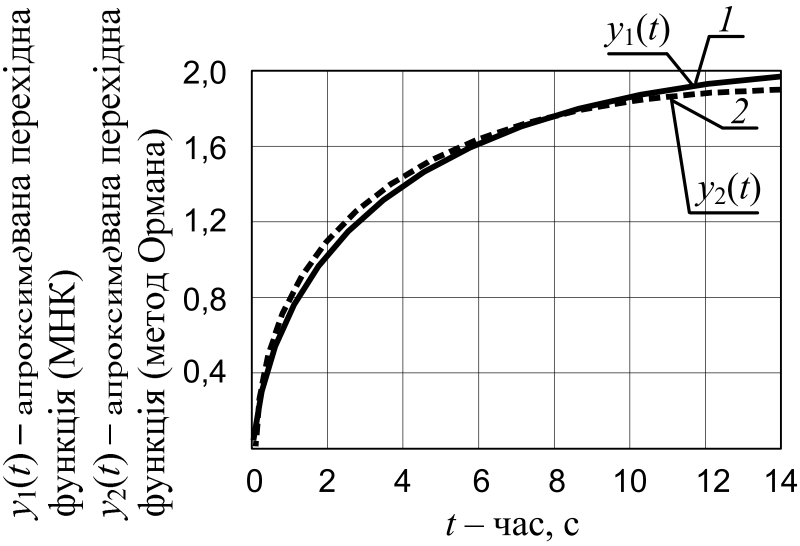


Рис. 2.18 – Графіки апроксимованих перехідних функцій збирача рідини з коротким трубопроводом подачі маси, одержаних: методом найменших квадратів (графік 1) і методом Ормана (графік 2)

Запитання і завдання для самоперевірки

2.1. Який рух називають коливальним? У чому полягає основна відмінність його від інших рухів?

2.2. Що таке період коливань. Що таке частота коливань? Який існує зв’язок між ними?

2.3. Система коливається з частотою 1 Гц. Чому дорівнює період коливань?

2.4. У яких точках траєкторії тіло, яке коливається, швидкість дорівнює нулю; прискорення дорівнює нулю?

2.5. Які величини, що характеризують коливальний рух, змінюються періодично?

2.6. Що можна сказати про силу, яка повинна діяти в коливальній системі, щоб вона здійснювала гармонічні коливання?

2.7. Яке переміщення здійснює тіло, що коливається, за період? Чому дорівнює шлях, пройдений тілом за цей самий час?
2.8. У яких точках траєкторії тіло, що коливається, має тільки потенціальну енергію?
2.9. У якій точці траєкторії тіло, що коливається, має тільки кінетичну енергію?
2.10. Для даної амплітуди коливань повна енергія тіла, яке коливається, є величина стала (з часом не змінюється). Чи можна те саме сказати про кінетичну і потенціальну енергії?
2.11. Чи залежить енергія тіла, яке коливається, від його маси?
2.12. Чому дорівнює повна енергія тіла, яке коливається, в будь-якій точці траєкторії?
2.13. У чому подібність руху тіла, прикріпленого до пружини, і руху проекції тіла, що рівномірно обертається по колу?
2.14. Від яких величин залежить період коливань тіла на пружині?
2.15. Як зміниться період коливань тіла на пружині, якщо збільшити масу тіла в 4 рази?
2.16. Як зміниться період коливань тіла на пружині, якщо замінити пружину іншою, жорсткість якої більша в 4 рази?
2.17. Які сили діють під час руху математичного маятника?
2.18. Якими повинні бути нитка і підвішений до неї вантаж, щоб маятник можна було вважати математичним?
2.19. Для яких відхилень від положення рівноваги коливання маятника будуть гармонічними?
2.20. Чому дорівнює період коливань маятника з довжиною підвісу 1 м?
2.21. Як зміниться період коливань маятника, якщо замінити вантаж іншим, вдвічі меншим за масою?
2.22. Як зміниться період коливань маятника, якщо зменшити довжину підвісу в 4 рази?
2.23. Наведіть лінійне і нелінійне диференціальні рівняння, які представляють нитковий (математичний) маятник. Котре з них описує гармонічні коливання?

2.24. Як отримати систему векторно-матричних рівнянь, що представляє нитковий маятник, якщо його представлено лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку?

2.25. Як отримати систему векторно-матричних рівнянь, що представляє пружинний маятник, якщо його представлено лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку?

2.26. Як отримати векторно-матричне рівняння, що представляє затухаючий пружинний маятник, якщо його представлено лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку?

2.27. Наведіть лінійне і нелінійне диференціальні рівняння, які представляють змішувальний басейн з n вхідними і p вихідними потоками. Які припущення було висунуто для виведення лінійного диференціального рівняння?

2.28. Наведіть лінійне і нелінійне диференціальні рівняння з двома вхідними і одним вихідним потоками. Які припущення було висунуто для виведення лінійної системи диференціальних рівнянь?

2.29. Як отримати векторно-матричне рівняння стану системи, що представляє змішувальний басейн, якщо його представлено системою лінійних диференціальних рівнянь?

2.30. Як отримати передавальну функцію буферного басейну, представленого диференціальним рівнянням 1-го порядку? Що таке стала часу буферного басейну?

2.31. Як отримати векторно-матричне рівняння стану буферного басейну, якщо його представлено на каналу керування передавальною функцією аперіодичної ланки 1-го порядку?

2.32. Наведіть і поясніть принципову і загальну структурну схеми напірного ящика з повітряною подушкою (система 2×2). Які величини характеризують параметри стану цієї системи? За допомогою яких величин можна керувати цією системою?

3. Використання математичних моделей систем і процесів для дослідження їхніх властивостей

3.1. Коливальні системи

3.1.1. Дослідження вільних коливань коливальної системи за допомогою математичної моделі пружинного маятника

Для дослідження вільних коливань коливальної системи потрібно розв’язати диференціальне рівняння, яке її представляє, і проаналізувати отриманий розв’язок. Вказане рівняння має такий вигляд

$$x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{3.1}$$

де $x(t)$ – видовження пружини; ω_0 – власна частота пружинного маятника.

Власна частота пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{3.2}$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса вантажу.

Як відомо загальний розв’язок диференціального рівняння (3.1) такий:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \tag{3.3}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Як бачимо, розв’язок рівняння (3.3), як і має бути для диференціального рівняння 2-го порядку, залежить від 2-х довільних сталих інтегрування C_1 і C_2. Якщо їм надавати різні числові значення, то будемо мати й різні частинні розв’язки рівняння (3.1).

Перевіримо, що функція (3.3) справді задовольняє диференціальне рівняння (3.1). Її диференціювання дає першу похідну, а саме:

$$x'(t) = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t. \qquad (3.4)$$

Повторне диференціювання функції (3.4) дозволяє визначити другу похідну:

$$x''(t) = -C_1\omega_0^2 \cos\omega_0 t - C_2\omega_0^2 \sin\omega_0 t. \qquad (3.5)$$

Підставивши вирази (3.4) і (3.5) у диференціальне рівняння (3.1) маємо:

$$-C_1\omega_0^2 \cos\omega_0 t - C_2\omega_0^2 \sin\omega_0 t + \omega_0^2\left(C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t\right) = 0.$$

Розв'язок (3.2) чітко показує, що рух маятника, представленого лінійним диференціальним рівнянням (3.1), являє собою гармонічні коливання з власною частотою ω_0, яка визначається за формулою (3.2). Отже, період коливань цього маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (3.6)$$

Вираз (3.3) можна подати і так:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad (3.7)$$

де A – амплітуда коливань; α – початкова фаза.

Перехід від виразу (3.3) до виразу (3.7) досить легко виконати, якщо використати формулу для синуса суми. Справді,

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha) = A\cos\alpha \cdot \cos\omega_0 t + A\sin\alpha \cdot \sin\omega_0 t.$$

Порівнявши вирази (3.3) і (3.7) бачимо, що

$$C_1 = A\cos\alpha, \quad \text{а} \quad C_2 = A\sin\alpha .$$

Якщо початкові умови такі, що

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ x'(0) = x_0' , \end{cases} \tag{3.8}$$

то сталі A і α можна визначити через x_0 і x_0'. Справді, перша похідна згідно з виразом (3.7)

$$x'(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Тоді початкові умови (3.8) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} x_0 = A\sin(\omega_0 t + \alpha); \\ x_0' = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} \sin(\omega_0 t + \alpha) = \dfrac{x_0}{A}; \\ \cos(\omega_0 t + \alpha) = \dfrac{x_0}{A\omega_0}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Піднесемо кожне із рівнянь системи рівнянь (3.9) до квадрата. Тоді матимемо наступне:

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{x_0'}{A}\right)^2 = 1.$$

Звідси амплітуда коливань

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0'}{\omega_0}\right)^2}. \tag{3.10}$$

Поділивши перше рівняння на друге рівняння системи рівнянь (3.9) маємо:

$$tg(\omega_0 t + \alpha) = \frac{x_0}{x_0'}\omega_0. \tag{3.11}$$

Із виразу (3.11) можна визначити початкову фазу α.

Сталі A і α, визначені через початкові умови x_0 і x_0' , потрібно підставити у рівняння (3.7). Тоді одержимо частинний розв’язок диференціального рівняння (3.1), який задовольняє початкові умови (3.8).

Розглянемо чотири випадки.

<u>Випадок 1. </u> Припустимо, що у деякий момент часу, який приймаємо за t = 0, вантаж маятника відведено на деяке значення x_0 і без поштовху відпущено, рис. 3.1, а.

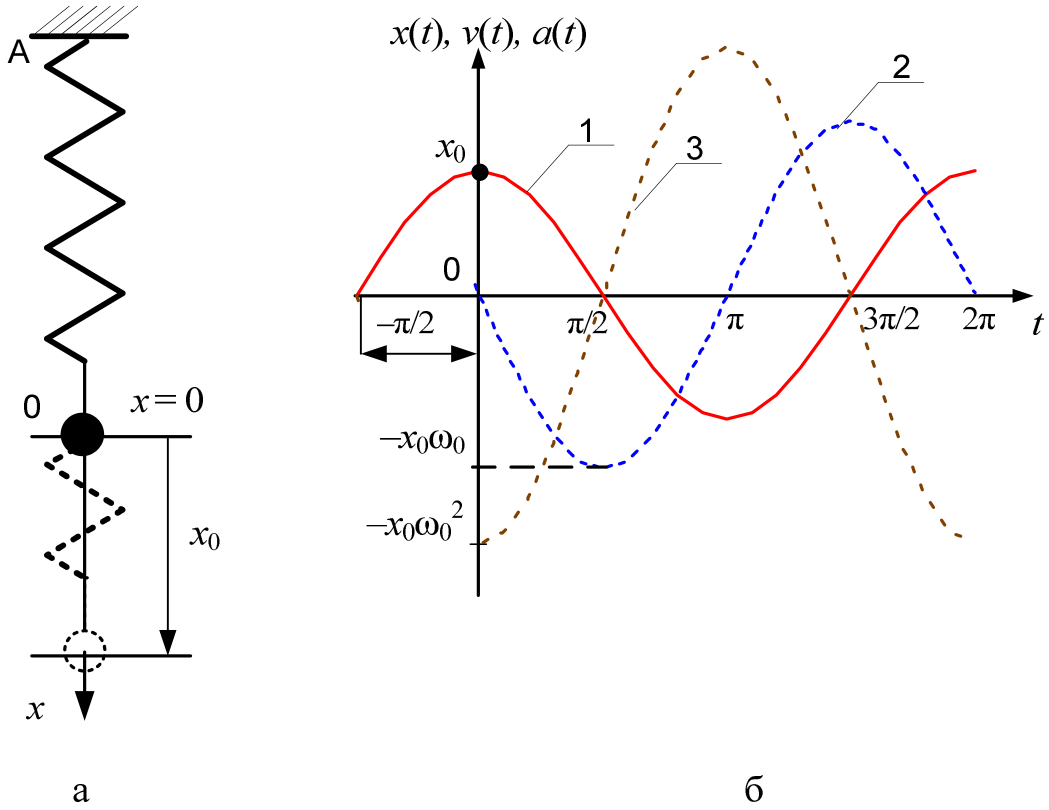


Рис. 3.1 – Вільні коливання пружинного маятника за початкових умов (3.12):

а – принципова схема маятника; б – графік зміни:

1 – відхилення вантажу від положення рівноваги; 2 – швидкості вантажу; 3 – прискорення вантажу

Такий спосіб збудження коливань пружинного маятника можна описати початковими умовами:

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Згідно з виразом (3.10) визначимо значення амплітуди коливань

$$A = x_0.$$

Співвідношення (3.11) у даному випадку не можна використати, оскільки $x_0' = 0$. Якщо ж скористатися другим рівнянням, що входить у систему рівнянь (3.9), то у цьому випадку cos α = 0 і таким чином

$$A = x_0, \text{ а } \cos\alpha = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha = \frac{\pi}{\alpha} \pm \pi n$$

і саме тому

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = x_0 \cos(\omega_0 t + \pi n).$$

Легко переконатися у тому, що частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови (3.12), має вигляд:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t. \tag{3.13}$$

Проекція миттєвої швидкості пружинного маятника згідно з виразом (3.13)

$$x'(t) = v(t) = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t$$

або

$$v(t) = -x_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{\alpha}\right). \tag{3.14}$$

Прискорення вантажу розглядуваного маятника

$$a(t) = x''(t) = -x_0\omega_0^2 \cos\omega_0 t. \tag{3.15}$$

Згідно з виразами (3.13)…(3.15) легко побудувати відповідні графіки, притаманні вільним коливанням, рис. 3.1, б.

Випадок 2. Нехай маятник перебуває у положенні рівноваги (в точці 0), (рис. 3.2, а).

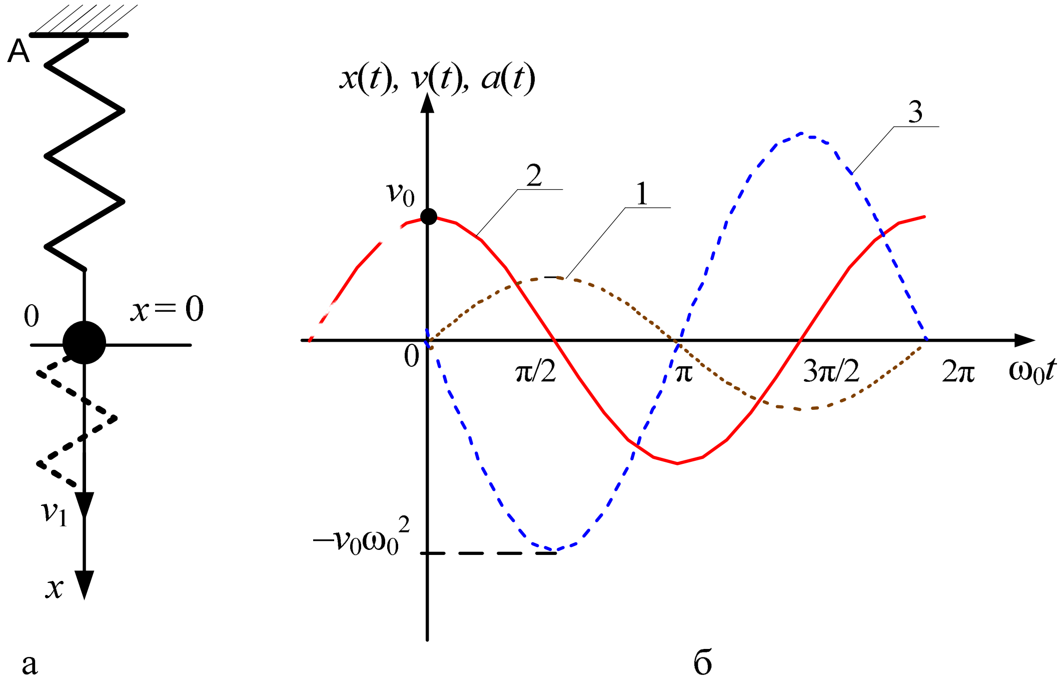


Рис. 3.2 – Вільні коливання пружинного маятника за початкових умов (3.16):

а – принципова схема маятника; б – графік зміни:

1 – відхилення вантажу від положення рівноваги; 2 – швидкості вантажу; 3 – прискорення вантажу

Припустимо, що у деякий момент часу t = 0, вантажу різким ударом надано початкову швидкість v_0. Такий спосіб збудження коливань маятника можна описати початковими умовами:

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

У цьому випадку згідно з виразами (3.10) і (3.11) маємо:

$$A = \frac{x'(0)}{\omega}, \text{ а } \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Якщо tg $\alpha = 0$, то

$$\alpha = \pi n,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Враховуючи, що

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sin \omega_0 t \cos \alpha + \cos \omega_0 t \sin \alpha$$

і що у даному випадку $\sin \alpha = 0$, а $\cos \alpha = \pm 1$, робимо висновок:
або

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega_0} - \sin \omega_0 t$$

або

$$x(t) = -\frac{x'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Другий варіант не підходить, позаяк не виконується умова: $x'(0) = x'_0$. Отже, відхилення маятника від положення рівноваги згідно з початковими умовами (3.16) визначається так:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t\ . \tag{3.17}$$

Миттєву швидкість вантажу можна визначити із виразу (3.17) так:

$$v(t) = x'(t) = v_0 \cos \omega_0 t\ . \tag{3.18}$$

Насамкінець, прискорення вантажу

$$a(t) = x''(t) = -v_0 \omega_0 \sin \omega_0 t\ . \tag{3.19}$$

У відповідності з виразами (3.17)…(3.19) побудовано відповідні графіки, рис. 3.2,б.

Випадок 3. Припустимо, що у деякий момент часу, який ми умовно приймемо за момент t = 0, вантаж відхилили від положення рівноваги на деяку величину x_1 і тут же нанесли різкий удар по ньому. Внаслідок цього вантажу надається початкова швидкість v_1, рис. 3.3, а.

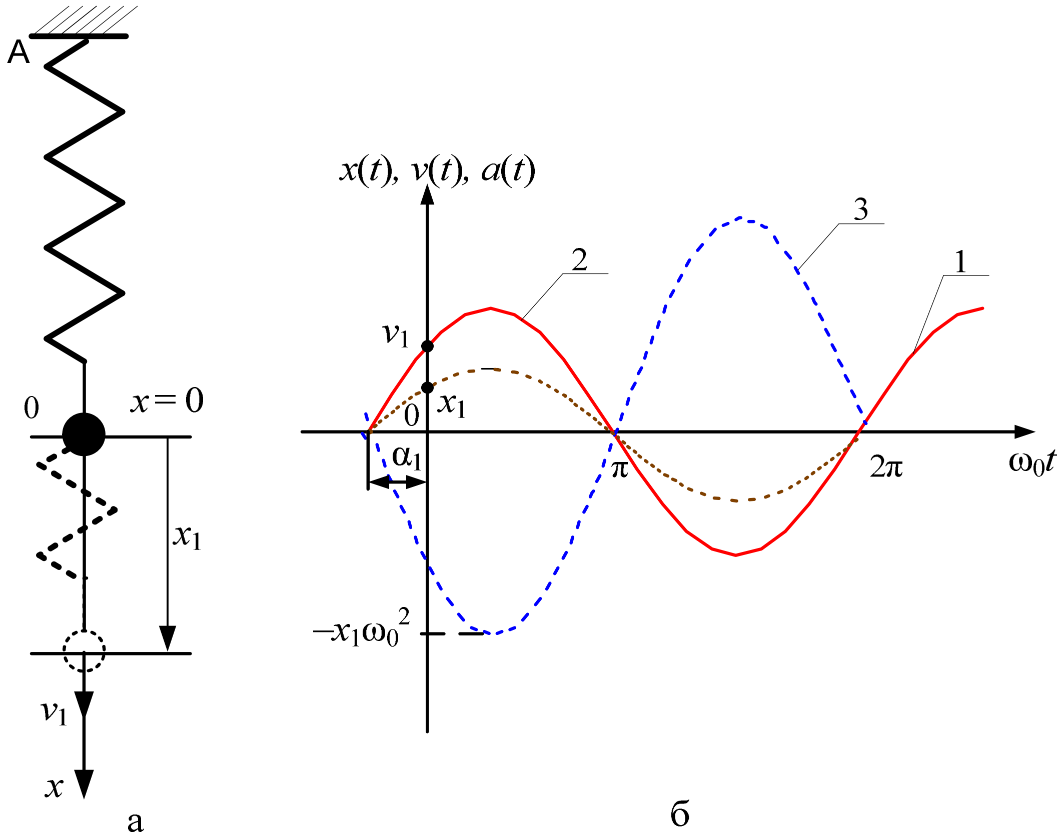


Рис. 3.3 – Вільні коливання пружинного маятника за початкових умов (3.20):

а – принципова схема маятника; б – графік зміни:

1 – відхилення вантажу від положення рівноваги; 2 – швидкості вантажу; 3 – прискорення вантажу

Такий спосіб збудження коливань пружинного маятника можна описати початковими умовами:

$$\begin{cases} x(0) = x_1; \\ x'(0) = v_1. \end{cases} \quad (3.20)$$

У такому випадку надана вантажу початкова швидкість v_1 направлена в тому ж напрямку, що і початкове відхилення x_1. Отже, амплітуда коливань згідно з виразом (3.10), визначається так:

$$A_1 = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega_0}\right)^2}\ .$$

Згідно з виразом (3.11) початкова фаза

$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{x_1\omega_0}{v_1}\right).$$

Таким чином, зміщення вантажу

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1)\ . \tag{3.21}$$

Миттєву швидкість вантажу можна визначити із виразу (3.21) так:

$$v(t) = x'(t) = A_1\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_1). \tag{3.22}$$

Прискорення вантажу

$$a(t) = x''(t) = -A_1\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha_1). \tag{3.23}$$

Згідно з виразами (3.21)…(3.23) легко побудувати відповідні графіки, рис. 3.3, б.

Випадок 4. Припустимо, що у момент часу $t=0$, вантаж відхилили від положення рівноваги на деяку величину x_2 і тут же нанесли різкий удар по ньому. Внаслідок цього вантажу надано початкову швидкість v_2, рис. 3.4, б.

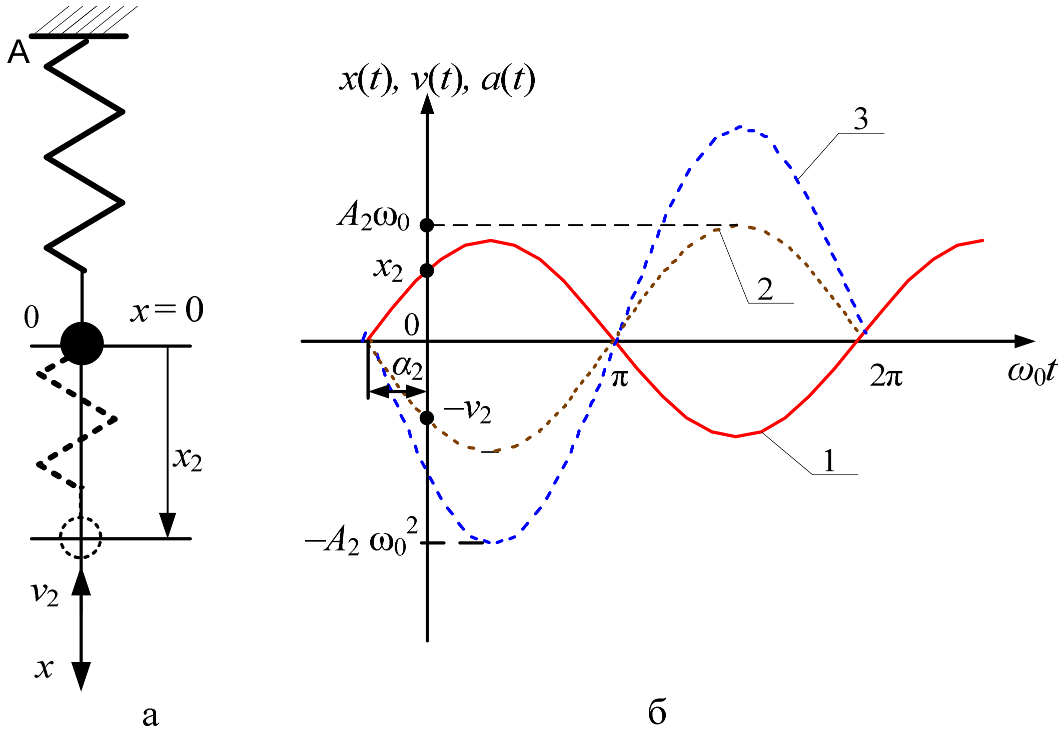


Рис. 3.4 – Вільні коливання пружинного маятника за початкових умов (3.24):

а – принципова схема маятника; б – графік зміни:
1 – відхилення вантажу від положення рівноваги; 2 – швидкості вантажу; 3 – прискорення вантажу

Такий спосіб збудження коливань пружинного маятника можна описати початковими умовами:

$$\begin{cases} x(0) = x_2; \\ x'(0) = -v_2. \end{cases} \tag{3.24}$$

У такому випадку надана вантажу початкова швидкість v_2 направлена в протилежному напрямку відносно початкового відхилення x_2. Отже, у цьому випадку амплітуда коливань згідно з виразом (3.10) визначається так:

$$A_2 = \sqrt{x_2^2 + \left(-\frac{v_2}{\omega_0}\right)^2}.$$

Згідно з виразом (3.11) початкова фаза

$$\alpha_2 = arctg\left(-\frac{x_2\omega_0}{v_2}\right)$$

або

$$\beta = \pi - \alpha_2 = arctg\left(\frac{x_2\omega_0}{v_2}\right).$$

Таким чином, зміщення вантажу

$$x(t) = A_2 \sin(\omega_0 t + \beta). \qquad (3.25)$$

Миттєву швидкість вантажу можна визначити із виразу (3.25) так:

$$v(t) = x'(t) = A_2\omega_0 \cos(\omega_0 t + \beta). \qquad (3.26)$$

Прискорення вантажу

$$a(t) = x''(t) = -A_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \beta). \qquad (3.27)$$

Згідно з виразами (3.25)…(3.27) легко побудувати відповідні графіки, рис. 3.4, б.

Аналіз наведених вище графіків (рис. 3.1…3.4) свідчить, що задаючи ті чи інші початкові умови (іншими словами збуджуючи коливання вантажу тим чи іншим способом), ми тим самим визначаємо амплітуду і початкову фази коливань. Слід також сказати, що незалежно від початкових умов період коливань (частота) залишається сталим.

Відмітимо, що гармонічні коливання характеризуються трьома параметрами (3.7): амплітудою A, початковою фазою α та частотою ω_0. Перші два параметри визначаються вибором початкових умов, останній же параметр не залежить від початкових умов, а залежить від жорсткості пружини та маси вантажу.

3.1.2. Дослідження вимушених коливань коливальної системи за допомогою математичної моделі пружинного маятника

Коливання, при яких тіло, що коливається, рухається під дією зовнішньої сили, називають *вимушеними коливаннями.*

Розглянемо випадок, коли змушувальна сила, котра діє на коливальну систему, сама змінюється згідно з синусоїдним законом, рис. 3.5.

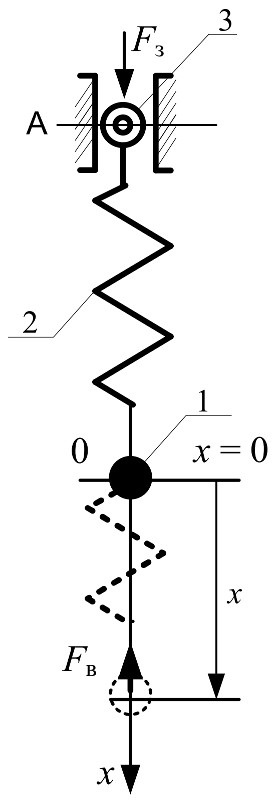


Рис. 3.5 – Принципова схема пружинного маятника з рухомою точкою підвісу:

1 – вантаж; 2 – пружина; 3 – рухома точка підвісу пружини

У даному випадку змушувальна сила $F_з$ тягне вантаж 1 то догори, то донизу. Нехай

$$\underline{F}_З = B\cos\Omega t, \tag{3.28}$$

де B – амплітуда змушувальної сили, Ω – частота змушувальної сили.

Будемо вважати, що крім цієї сили, діє і відновлююча сила $\underline{F}_в$, яка пропорційна відхиленню вантажу від положення рівноваги ($x=0$), тобто

$$\underline{F}_в = -kx(t), \tag{3.29}$$

де $x(t)$ – відхилення вантажу від положення рівноваги; k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Таким чином, загальна сила, яка діє на вантаж

$$\underline{F} = -kx(t) + B\cos\Omega t. \tag{3.30}$$

Згідно з другим законом Ньютона

$$\underline{F} = m\underline{a}(t), \tag{3.31}$$

де m – маса вантажу; $\underline{a}(t)$ – прискорення вантажу.

Оскільки

$$\underline{a}(t) = x''(t),$$

то підставивши цей вираз і вираз (3.31) у вираз (3.30), маємо:

$$mx''(t) + kx(t) = B\cos\Omega t$$

або

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{B}{m}\cos\Omega t, \tag{3.32}$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \; -$$

власна частота коливань пружинного маятника.

Диференціальне рівняння (3.32) – це лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку з правою частиною. Воно описує (представляє) вимушені коливання коливальної системи.

Для розв’язання диференціального рівняння (3.32) спочатку потрібно розв’язати однорідне диференціальне рівняння, тобто диференціальне рівняння

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,. \tag{3.33}$$

Розв’язок рівняння (3.33) відомий:

$$x_{\text{в}}(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{3.34}$$

де A і α – відповідно, амплітуда і початкова фаза вільних коливань вантажу.

Будемо шукати частинний розв’язок диференціального рівняння (3.32) у вигляді

$$x^*_{\text{вим}}(t) = -B'\cos\Omega t, \tag{3.35}$$

де B' – амплітуда коливань коливальної системи.

Тоді перша похідна згідно з виразом (3.35) має такий вигляд:

$$\left(x^*_{\text{вим}}(t)\right)' = -B'\Omega\sin t. \tag{3.36}$$

Друга похідна

$$\left(x^*_{\text{вим}}(t)\right)'' = -B'\Omega^2 \cos\Omega t. \tag{3.37}$$

Підставивши вирази (3.35) і (3.37) у вираз (3.32) маємо:

$$B'\Omega^2 \cos t + \omega_o^2 B' \cos\Omega t = \frac{B}{m}\cos\Omega t\,.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\omega_o^2 - \Omega^2\right) B' \cos\Omega t = \frac{B}{m}\cos\Omega t. \tag{3.38}$$

Отже, амплітуда коливань системи

$$B' = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}. \tag{3.39}$$

Підставимо вираз (3.39) у частинний розв'язок (3.35). Тоді вимушена складова

$$x^*_{\text{вим}}(t) = \frac{B}{m(\omega_o^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t. \tag{3.40}$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (3.32) такий:

$$x(t) = x_{\text{в}}(t) + x^*_{\text{вим}}(t)$$

або

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{B}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t. \tag{3.41}$$

Розглянемо випадок, коли до початку коливання вантажу

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.42}$$

Перша похідна згідно з виразом (3.41) має вигляд:

$$x'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) - \frac{B\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t. \tag{3.43}$$

Підставимо початкові умови (3.42) у вирази (3.41) і (3.43). Тоді при $t = 0$

$$0 = A\cos\alpha + \frac{B}{m(\omega_o^2 - \Omega^2)}; \tag{3.44}$$

$$0 = -A\omega_0 \sin \alpha. \tag{3.45}$$

Оскільки $A\omega_0 \neq 0$, то $\sin\ \alpha = 0$, а $\cos\ \alpha = 1$. Отже, амплітуда вимушених коливань вантажу згідно з виразом (3.44) визначається так:

$$A = -\frac{B}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}. \tag{3.46}$$

Тоді початкова фаза коливань

$$A = 0. \tag{3.47}$$

Таким чином, розв’язок диференціального рівняння (3.32), котре описує вимушені коливання коливальної системи за початкових умов (3.42), має вигляд:

$$x(t) = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t). \tag{3.48}$$

Використовуючи вираз (3.48) знайдемо найбільше значення амплітуди коливань вантажу. Максимального значення цей вираз набуває тоді, коли

$$\cos\Omega t - \cos\omega_0 t = 1. \tag{3.49}$$

Отже, $\cos\Omega t = 1 + \cos\omega_0 t.$

Звідси випливає, що

$$\cos\Omega t - \cos\omega_0 t = 1 + \cos\omega_0 t - \cos\omega_0 t = 1.$$

Таким чином, максимальне значення амплітуди коливань розглядуваної коливальної системи

$$x_{\max} = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}. \tag{3.50}$$

Якщо значення частоти $\mathbf{\Omega}$ змушувальної сили мало відрізняється від власної частоти ω_0 коливальної системи, тобто якщо розхитування системи здійснюється з її власною частотою, тобто якщо $\omega_0 = \mathbf{\Omega}$, то

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) = 2\omega_0(\omega_0 - \Omega). \tag{3.51}$$

Підставимо вираз (3.51) у вираз (3.50). Отже

$$x_{\max} \cong \frac{B}{2m\omega_0(\omega_0 - \Omega)}. \tag{3.52}$$

3.1.2.1. Резонанс

Особливо цікавий випадок виникає тоді, якщо частота Ω – змушувальної сили співпадає з частотою ω_0 власних коливань коливальної системи. У такому випадку не можна застосувати формулу (3.48), оскільки знаменник і чисельник цієї формули перетворюється в нуль. Але у математиці розроблено способи обчислення границь виразів, котрі мають такий вигляд. Для цього потрібно згадати, що

$$\cos\Omega t - \cos\omega_0 t = 2\sin\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t\sin\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\,. \qquad (3.53)$$

У разі малих значень величини $\omega_0 - \Omega$

$$\sin\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t \approx \frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\,. \qquad (3.54)$$

Отже, вираз (3.53) з урахуванням виразу (3.54) можна подати так:

$$\cos\Omega t - \cos\omega_0 t = 2\sin\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t\frac{\omega_0 - \Omega}{2}\,. \qquad (3.55)$$

Підставивши вираз (3.55) у вираз (3.48) і скоротивши чисельник і знаменник цього дробу на $\omega_0 - \Omega$, а також враховуючи, що $\omega_0 + \Omega = 2\omega_0$ і перейшовши до границі, коли $\Omega \to \omega_0$, маємо

$$x(t) = \frac{B}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t\,. \qquad (3.56)$$

На відміну від усіх розглянутих вище випадків, коли розмах коливань був обмежений, тут він безмежно зростає саме за наявності множника t. Зрозуміло, що це потрібно розглядати лише як математичну ідеалізацію реальних процесів – коли амплітуда коливань стає досить великою, а тому не мають сенсу спрощуючі припущення з урахуванням яких було виведено формулу (3.56), а крім того, сили які виникають під час резонансу стають такими значними, що руйнують коливальну систему.

Збільшення амплітуди, яка виникає у разі наближення частоти збуджуючої сили до власної частоти коливальної системи, називають *резонансом* Це слово по-латині означає «той, що дає відгук». Вперше явище резонансу було помічено для акустичних коливань – під час співу чи ударі по струнах гітари починав звучати відповідно налаштований камертон. Справа у тому, що акустичні коливання складаються із багатьох гармонік, і якщо частота хоча б у одній із них співпадає з частотою власних коливань камертона, він дає відгук.

Одначе досить скоро резонанс зацікавив людей, які не володіють музикальним слухом – настройщиків роялів. Коли з’явились верстати, що мають швидко обертаючі частини, парові турбіни тощо, почали виникати катастрофи, які неможливо було пояснити. Під час певної швидкості верстат здригався з такою силою, що оброблювальна деталь йшла у брак, а в гіршому випадку сам верстат, розлітався на частини. Такі катастрофи виникали з турбінами – за поганого центрування виникала центробіжна сила, яка періодично розгойдувала опори. І якщо частота зміни цієї сили, що залежить від швидкості обертання турбіни, попадала в такт власних коливань опор, розпочинались резонансні коливання. Такі коливання надзвичайно небезпечні для літаків і ракет. Саме літак складається із багатьох тисяч деталей, кожна з яких має власну частоту коливання. Робота двигунів викликає вібрацію всього літака, і якщо частота хоча б одної із гармонік цієї вібрації співпадає з частотою коливання будь-якої деталі, можуть виникнути руйнування. Зрозуміло, перед виготовленням літака деталі розраховують на стійкість відносно таких коливань, ретельно усуваючи усі можливі резонанси. Але складність конструкції літака така, що потрібно випробовувати зразки нових конструкцій у повітрі.

Дуже небезпечним є резонанс для підвісних мостів. Так, усього через кілька місяців після введення в дію зруйнувався Токомський підвісний міст (США), в якому виникли резонансні коливання під дією вітру. Випадки руйнування мостів під дією періодичної сили (наприклад, коли по мосту йдуть «у ногу» війська) траплялись нерідко. Так, у 1831 р. у Манчестері 60 осіб так само зруйнували міст через річку Ірвень. У 1868 р. в Чатамі зруйнувався міст на опорах під час проходження британської піхоти. У 1850 р. зруйнувався Анжерський підвісний міст, коли по ньому крокував батальйон французької піхоти чисельністю 500 осіб, при цьому 226 осіб загинуло.

У багатьох випадках резонанс є корисним явищем. Резонанс ми використовуємо в різноманітних типах частотомірів. Особливо важливу роль відіграє резонанс у радіотехніці.

3.1.2.2. Автоколивальна система

Автоколиваннями називають незатухаючі коливання в системі, які підтримуються внутрішніми джерелами енергії при відсутності діяння зовнішньої змінної сили.

На відміну від вимушених коливань, частота й амплітуда автоколивань визначається властивостями самої коливальної системи.

Від вільних коливань автоколивання відрізняються незалежністю амплітуди від часу й від початкової короткочасної дії, яка збуджує коливальний процес.

Автоколивальну систему зазвичай можна поділити на три основні елементи:

- коливальну систему;
- джерело енергії;
- пристрій зі зворотним зв'язком, який регулює надходження енергії від джерела у коливальну систему.

Енергія, що надходить від джерела за період, дорівнює енергії, яка витрачена у коливальній системі за той же час.

Як приклад механічної автоколивальної системи може слугувати годинник з маятником (рис. 3.6).

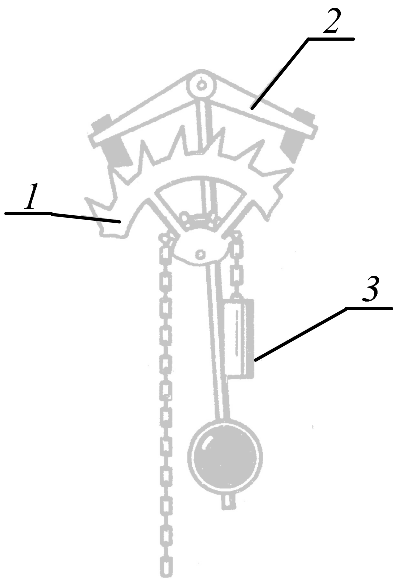


Рис. 3.6 – Годинник з маятником:

1 – храпове колесо; 2 – анкер; 3 – гиря

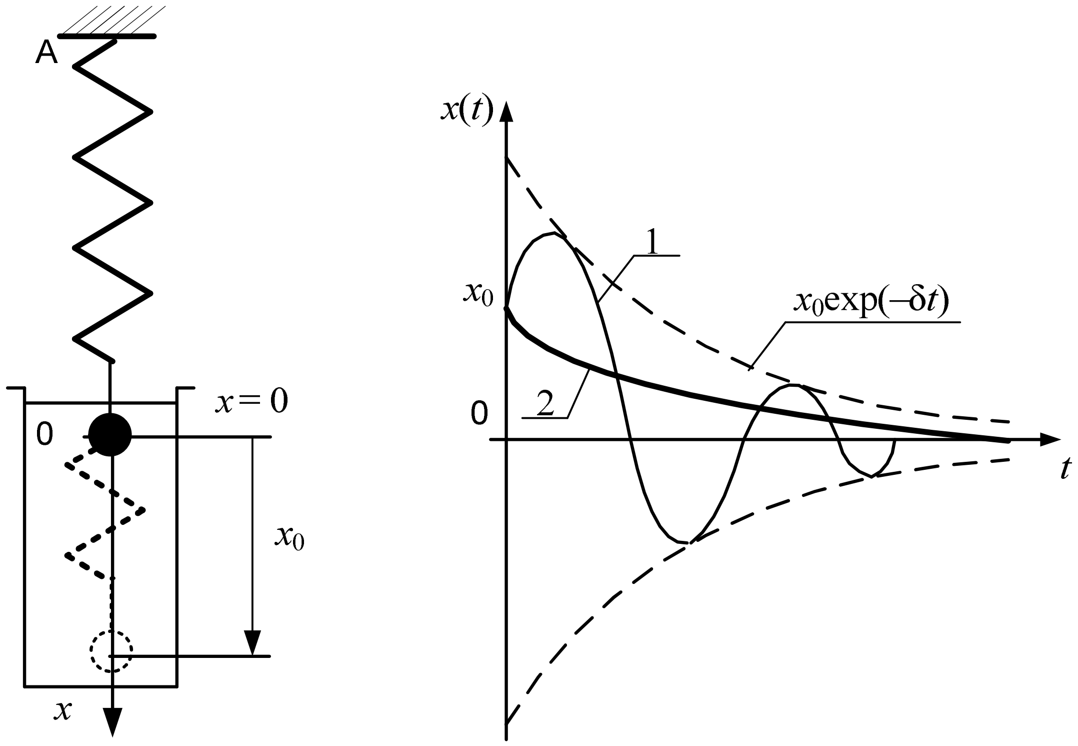
У цьому годиннику коливальною системою є маятник, джерелом енергії – гиря, яку піднято над землею, чи сталева пружина. Основними деталями пристрою, який здійснює зворотний зв'язок, слугує храпове колесо 1 і анкер 2. Гиря (чи пружина) викликає обертання храпового колеса. При кожному коливанні маятника зубець храпового колеса штовхає анкерну вилку в такому напрямку, що «розганяє» маятник. В результаті запас енергії, затрачений на тертя, поповнюється за рахунок енергії гирі, яку піднято над землею, чи закрученої пружини. Обертання стрілок годинника здійснюється за допомогою зубчатих коліс від храпового колеса.

3.1.3. Дослідження затухаючих коливань за допомогою математичної моделі затухаючого пружинного маятника

Для того, щоб виникаючі в конструкціях коливання не призводили до її руйнування, їх намагаються погасити, або, як говорять інженери, демпфірувати. Заглушати коливання потрібно автоконструкторам – позаяк коливання корпусу на ресорах продовжувалося б досить довго. Намагаються погасити акустичні коливання архітектори, позаяк в наших домашніх бесідах могли б прийняти участь сусіди, котрі живуть на декілька поверхів вище. Ще гостріше стоїть проблема демпфірування перед будівельниками в сейсмонебезпечних районах.

З метою погашення коливань застосовують різні способи: занурення тіла, що коливається у в'язку рідину (скажімо, в оливу), застосування матеріалів з високим рівнем розсіювання енергії, покриття панелей спеціальними сумішами, заміну суцільних плит пористими (у них коливання скоріше згасають), різноманітні пінопластові та гумові прокладки тощо.

У цьому посібнику розглядається лише перший спосіб демпфірування , тобто занурення тіла, що коливається, у в'язку рідину (рис. 3.7).



а б

Рис. 3.7 – Вільні коливання затухаючого пружинного маятника:

а – принципова схема маятника; б – графік зміни відхилення вантажу від положення рівноваги:

1 – при $\delta < \omega_0$; 2 – при $\delta > \omega_0$

Диференціальне рівняння, яке представляє затухаючий пружинний маятник має вигляд

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \qquad (3.57)$$

де

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \; -$$

власна частота коливань пружинного маятника; k – жорсткість пружини; m – маса вантажу (кулі);

$$\delta = \frac{k_1}{2m} -$$

добротність затухаючого пружинного маятника;

$$k_1 = 6\pi\eta R,$$

де η – в’язкість рідини; R – радіус кулі.

3.1.3.1. Вільні коливання

З метою дослідження цього виду коливань диференціальне рівняння (3.57) подамо у вигляді:

$$x'' + px' + qx = 0, \tag{3.58}$$

де

$$p = 2\delta, \quad \text{а} \quad q = \omega_0^2.$$

Будемо шукати розв’язок диференціального рівняння (3.58) у вигляді

$$x(t) = e^{rt}. \tag{3.59}$$

Підставимо вираз (3.59) у вираз (3.58). Отже,

$$r^2 e^{rt} + pre^{rt} + qe^{rt} = 0$$

або

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{3.60}$$

Із виразу (3.60) випливає, що число r має задовольняти це рівняння, яке називають *характеристичним рівнянням системи.* Мають місце три випадки.

Випадок 1

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0.$$

Отже, характеристичне рівняння (3.60) має два нерівних дійсні корені r_1 і r_2:

$$r_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

У такому випадку маємо два лінійно незалежних розв'язки:

$$x_1(t) = \exp(r_1 t) \text{ і}$$

$$x_2(t) = \exp(r_2 t).$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (3.58) такий

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \tag{3.61}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються згідно з початковими умовами.

Випадок 2

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0.$$

Отже, характеристичне рівняння системи (3.60) має два рівних корені:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} = -\delta.$$

У цьому випадку маємо два лінійно залежні розв'язки (вони співпадають):

$$x_1(t) = \exp(r_1 t) \text{ і}$$

$$x_2(t) = \exp(r_2 t).$$

Але тепер поряд з розв'язком

$$x(t) = e^{-\frac{p}{2}t}$$

існує і лінійно незалежний розв'язок

$$x(t) = t\exp\left(-\frac{p}{2}t\right).$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (3.57) має вигляд:

$$x(t) = (C_1 + C_2)e^{-\frac{p}{2}t}$$

або

$$x(t) = (C_1 + C_2)e^{-st}. \tag{3.62}$$

<u>Випадок 3</u>

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

У такому випадку характеристичне рівняння системи (3.60) має пару комплексних коренів:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Цей вираз можна подати так:

$$r_{1,2} = \alpha + \omega i$$

оскільки $p = 2\delta \to \frac{p}{2} = \delta$; $\omega = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$, а $q = \omega_0^2$. Отже,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta} -$$

циклічна частота коливань затухаючого пружинного маятника.

У такому випадку розв'язки

$$x_1(t) = \exp(r_1 t) \quad \text{і}$$

$$x_2(t) = \exp(r_2 t)$$

не мають дійсних значень при будь-якому дійсному значенні t, окрім $t = 0$. Але тепер можна використати дві функції:

$$x_1(t) = e^{-\delta t} \cos \omega t \text{ і} \tag{3.63}$$

$$x_2(t) = e^{-\delta t} \sin \omega t. \tag{3.64}$$

Підставивши вирази (3.63) і (3.64) у диференціальне рівняння (3.57) переконуємося, що кожна із вказаних функцій є розв'язком диференціального рівняння (3.57).

Оскільки розв'язки (3.63) і (3.64) лінійно незалежні, то в силу цього загальний розв'язок диференціального рівняння (3.57) має вигляд:

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \tag{3.65}$$

або в іншому вигляді

$$x(t) = e^{-\delta t} C_3 \sin(C_4 + \omega t),$$

де

$$C_3 \sin C_4 = C_1; \quad C_3 \cos C_4 = C_2.$$

Насамкінець, вираз (3.65) можна подати так:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha), \tag{3.66}$$

де

$$A = C_3 \;-$$

амплітуда коливань затухаючого пружинного маятника;

$$\alpha = C_4 \;-$$

початкова фаза затухаючих коливань.

Аналіз виразу (3.66) свідчить, що опір середовища здійснює подвійний вплив.

<u>По-перше</u>. Циклічна частота коливань зменшується, оскільки замість частоти ω_0 вона стає рівною лише $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$:

$$\omega = \sqrt{\omega_j^2 - \delta^2} .$$

<u>По-друге.</u> Оскільки у виразі (3.66) з'явився множник $\exp(-\delta t)$, розмах коливань з плином часу зменшується, позаяк $\exp(-\delta t) \to 0$, якщо $t \to \infty$. При цьому на протязі одного періоду, тобто за проміжок часу $[0, 2\pi / \omega]$, амплітуда коливань зменшується у $\exp(2\pi\delta / \omega)$ раз.

Число

$$d = \frac{2\pi\delta}{\omega} -$$

називають логарифмічним *декрементом* затухаючих коливань.

Що більший декремент, то швидше затухають коливання. Через деякий час амплітуда затухаючих коливань стає настільки малою, що навіть чутливі прилади не спроможні її зареєструвати.

Графік вільних коливань затухаючого пружинного маятника, якщо $\delta < \omega_0$, наведено на рис. 3.7, б, графік 1.

Аналіз наведеного графіку свідчить, що інформація цієї коливальної системи вміщується у обвідній лінії, тобто експоненті $\exp(-\delta t)$.

Дещо інший характер руху згасаючого пружинного маятника маємо тоді, якщо опір середовища такий великий, що $\delta > \omega_0$ (наприклад, якщо коливання вантажу здійснюється не у повітрі, а у якій-небудь рідині). У такому випадку тіло, що рухається у ній, не буде коливатися, а повільно наближатися до положення рівноваги (рис. 3.7, б, графік 2).

Вільні коливання є гармонійними, їхня амплітуда A і початкова фаза α залежать від початкових умов і від характеру збурювального діяння. На частоту вільних коливань ці фактори не впливають.

Часто для зменшення амплітуди коливань застосовують різноманітні заспокійливі пристрої – демпфери. Як приклад, наведемо амперметр магнітоелектричної системи (рис. 3.8).

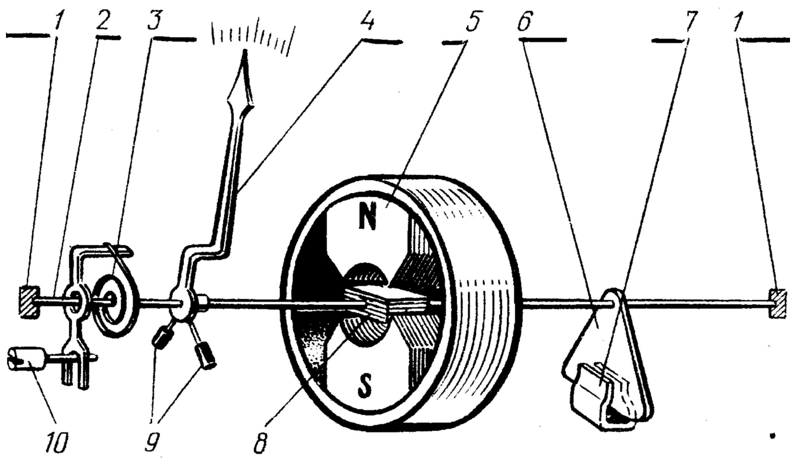


Рис. 3.8 – Амперметр магнітоелектричної системи:

1 – підп’ятник; 2 – сталева вісь; 3 – пружина; 4 – стрілка; 5 – постійний магніт; 6 – алюмінієва пластина; 7 – постійний магніт; 8 – рамка; 9 – противаги; 10 – коректор

Вимірюваний струм пропускається крізь рамку 8, розміщену в магнітному полі постійного магніту. Рамку закріплено на сталевій вісі 2.

Для зменшення сили тертя сталева вісь 2 опирається на підп’ятники 1, які виготовлено із синтетичного агату, рубіну чи корунду.

При пропусканні електричного струму крізь рамку спочатку момент сил Ампера, який викликає поворот рамки й пов’язану з нею рухому частину вимірювальної системи, буде більший, ніж момент сил пружності пружини 3, яка перешкоджає цьому повороту. Тому рухома частина обертається з прискоренням і до моменту досягнення кута повороту, при якому виникає рівність моментів сил, набирає запас кінетичної енергії обертального руху. Після зупинки рухома система під дією сил пружності здійснює поворот в обернений бік і т.д. Таким чином, рухома система не зразу зупиняється, а здійснює затухаючі коливання відносно положення рівноваги. Для усунення цих коливань в приладах використовують спеціальні заспокоювачі. У них для гальмування рухомої частини використовується тонка алюмінієва пластина 6, яку розміщено між полюсами постійного магніту 7 і закріплену на вісі обертання рухомої системи. При повороті рухомої системи алюмінієва пластина заспокоювача рухається у полі постійного магніту. Наведені в ній при цьому індукційні струми гальмують рух пластини і разом з цим обертання всієї рухомої частини електровимірювального приладу.

Для того, щоб у будь-якому положенні вказівна стрілка 4 рухома частина була урівноважена в полі сили тяжіння, використовують противаги 9. Встановлення стрілки на нульову поділку шкали виконується за допомогою коректора 10. Кут повороту стрілки в приладах магнітоелектричної системи пропорційний силі струму.

3.1.3.2. Вимушені коливання

З метою дослідження цього виду коливань розглянемо випадок, коли змушувальна сила змінюється згідно з законом:

$$F_3 = \frac{B}{m}\cos\Omega t,$$

де B – амплітуда змушувальної сили, Ω – частота змушувальної сили.
Отже, диференціальне рівняння, яке описує рух цієї коливальної системи, матиме вигляд:

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{B}{m}\cos\Omega t\,. \qquad (3.67)$$

Для розв'язання рівняння (3.67) потрібно спочатку розв'язати однорідне диференціальне рівняння, тобто рівняння

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{3.68}$$

Розв'язок рівняння (3.68) нам відомий:

$$x_{\text{в}}(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha), \tag{3.69}$$

де A і α – відповідно, амплітуда і початкова фаза затухаючих коливань; δ – добротність затухаючого пружинного маятника.

Будемо шукати частинний розв'язок диференціального рівняння (3.67) у вигляді:

$$x^*(t) = B'\cos\Omega t + A'\sin\Omega t, \tag{3.70}$$

де B' і A' – амплітуди коливань коливальної системи.

Отже, перша похідна

$$\left(x^*(t)\right)' = -B'\Omega\sin\Omega t + A'\Omega\cos\Omega t, \tag{3.71}$$

а друга похідна

$$\left(x^*(t)\right)'' = -B'\Omega^2\cos\Omega t - A'\Omega^2\sin\Omega t. \tag{3.72}$$

Підставивши вирази (3.70)…(3.72) у вираз (3.67) маємо:

$$-B'\Omega^2\cos\Omega t - A'\Omega^2\sin\Omega t + 2\delta\left[-B'\Omega\sin\Omega t + A'\Omega\cos\Omega t\right] +$$
$$+\omega_0^2\left(B'\cos\Omega t + A'\sin\Omega t\right) = \frac{B}{m}\cos\Omega t.$$

Після елементарних перетворень маємо:

$$B'(\omega^2-\Omega^2)\cos\Omega t+2\delta A'\Omega\cos\Omega t+A'(\omega_0^2-\Omega^2)\sin\Omega t-$$
$$-2\delta B'\Omega\sin\Omega t=\frac{B}{m}\cos\Omega t.$$

або

$$\left[B'(\omega_0^2-\Omega^2)+2\delta A'\Omega\right]\cos\Omega t+\left[A'(\omega_0^2-\Omega^2)-2\delta B'\Omega\right]\sin\Omega t=\frac{B}{m}\cos\Omega t.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases}(\omega_0^2-\Omega^2)B'+2\delta A'\Omega=\dfrac{B}{m};\\(\omega_0^2-\Omega^2)A'-2\delta B'\Omega=0.\end{cases}\tag{3.73}$$

Із системи рівнянь (3.73) знаходимо:

$$B'=\frac{B}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2};\tag{3.74}$$

$$A'=\frac{B}{m}\cdot\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}.\tag{3.75}$$

Підставивши вирази (3.74) і (3.75) у частинний розв’язок (3.70), маємо:

$$x^*(t)=\frac{B\left[(\omega_0^2-\Omega^2)\cos\Omega t+2\delta\Omega\sin\Omega t\right]}{m\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right]}.\tag{3.76}$$

Якщо δ = 0, то частинний розв’язок (3.76) співпадає з частинним розв’язком (3.40).

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (3.67), котре описує вимушені коливання затухаючого пружинного маятника такий:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) + \frac{B\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\Omega t + 2\delta\Omega\sin\Omega t\right]}{m\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]}. \qquad (3.77)$$

Вимушені коливання будуть гармонічними тільки в тому випадку, якщо частота збурю вального діяння **Ω** не дорівнює частоті вільних коливань ω_0. У такому випадку частота і початкова фаза вимушених коливань співпадають з частотою і початковою фазою збурювального діяння.

Якщо ж частота збурювального діяння **Ω** наближається до частоти вільних коливань ω_0 коливальної системи, то амплітуда вимушених коливань зростає і коли ці частоти співпадають, стає безкінечно великою (явище резонансу). Таким чином, при резонансі вимушені коливання уже не є гармонічними.

Явище резонансу надзвичайно небезпечне і тому його ні в якому разі не слід допускати. На практиці в механізмі завжди існують ті чи ті сили опору, радше всього пропорціональні швидкості. Одночасний вплив цих сил і відновлювального діяння, пропорціонального відхиленню швидкості, дає у підсумку затухаючий коливальний процес, амплітуда і початкова фаза якого залежать від початкових умов, а частота – ні. Сили опору в незначній мірі зменшують частоту коливань, але різко відбиваються на їхніх амплітудах, які зменшуються в геометричній прогресії.

3.2. Змішувальні системи

3.2.1. Дослідження динамічних властивостей буферного басейну у разі коливання концентрації маси у потоці, що підводиться до басейну

Як було показано у розд. 2 математична модель буферного басейну як об’єкта керування концентрацією маси може бути представлена диференціальним рівнянням

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \tag{3.78}$$

де $y(t)$ – концентрація маси на виході її із басейну; $x(t)$ – концентрація маси на вході її до басейну.

Стала часу буферного басейну

$$T_0 = \frac{V_0}{Q_{\text{в}}^0}, \tag{3.79}$$

де V_0 – об’єм басейну; $Q_{\text{в}}^0$ – витрата маси із басейну.

Розглянемо декілька випадків роботи буферного басейну.

Випадок 1. Припустимо, що концентрація маси x, яка підводиться до басейну змінюється згідно з синусоїдним законом (рис. 3.9)

Вказане діяння можна подати так:

$$x(t) = a + b\sin\omega t, \tag{3.80}$$

де a – середнє значення концентрації маси у підвідному потоці; b – максимальне відхилення концентрації маси у вхідному потоці від її середнього значення.

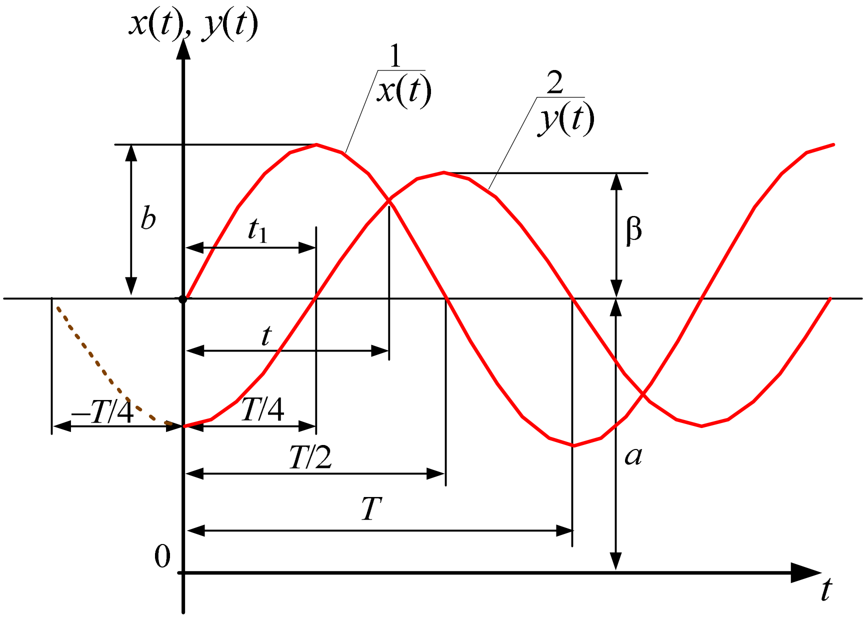


Рис. 3.9 – Графік зміни концентрації маси вхідного (графік 1) і вихідного (графік 2) потоків

Частота коливань концентрації маси, що подається до буферного басейну

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

де T – період коливань концентрації маси.

При заданому законі зміни вхідного діяння, зміну концентрації маси у вихідному потоці можна визначити так:

$$y(t) = a + \beta \sin(\omega t - \varphi), \tag{3.81}$$

де β – максимальна амплітуда концентрації маси

$$\varphi = \omega t_1 -$$

де t_1 – часовий зсув між початком зміни вхідної змінної і початком зміни вихідної змінної.

Для визначення демпфірувальних властивостей басейну при заданому вхідному діянні (3.80) підставимо вирази (3.80) і (3.81) у диференціальне рівняння (3.78). Тоді одержимо наступне:

$$T_0 \frac{dy}{dt} + \left[a + \beta \sin(\omega t - \phi) \right] = a + b \sin \omega t .$$

Звідси випливає, що

$$T_0 dy + a\, dt + \beta \sin(\omega t - \varphi) dt = a\, dt + (b \sin \omega t) dt$$

або

$$(b \sin \omega t)\, dt - \beta \sin(\omega t - \varphi) dt = T_0 dy . \tag{3.82}$$

Проінтегруємо вираз (3.82) за змінною t від $\left(-\frac{T}{4} + t\right)$ до $\left(\frac{T}{4} + t\right)$, а за змінною y від $(-\beta)$ до β. У цьому випадку

$$\beta \sin(\omega t - \varphi) = \beta ,$$

якщо $\omega t - \varphi = \pi / 2$, то звідси випливає, що

$$t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varphi}{\omega}. \tag{3.83}$$

Отже

$$b \int\limits_{-\left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\phi}{\omega}\right)}^{\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\phi}{\omega}} \sin \omega t\, dt = \beta \int\limits_{-\left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\phi}{\omega}\right)}^{\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\phi}{\omega}} \sin(\omega t - \varphi) dt + T_0 \int\limits_{-\beta}^{\beta} dy . \tag{3.84}$$

Нагадаємо, що

$$\int \sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\cos \omega t\,.$$

Нехай

$$c = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Проінтегруємо ліву частину виразу (3.84)

$$b\int_{-c}^{c} \sin \omega t\, dt = -\frac{b}{\omega}\cos \omega t \Big|_{-c}^{c} = -\frac{b}{\omega}\left[\cos \omega c - \cos \omega(-c)\right] = -2\frac{b}{\omega}\cos \omega c\,.$$

Отже,

$$b\int_{-c}^{c} \sin \omega t dt = -2\frac{b}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right). \qquad (3.85)$$

Проінтегруємо перший член правої частини виразу (3.84):

$$\beta\int_{-c}^{c} \sin(\omega t - \varphi) dt = -\frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t - \varphi)\Big|_{-c}^{c}$$

Оскільки $\omega t - \varphi = \frac{\pi}{2}$, а $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то

$$\beta\int_{-c}^{c} \sin(\omega t - \varphi) dt = 0\,. \qquad (3.86)$$

Проінтегруємо другий член правої частини виразу (3.84):

$$T_0\int_{-\beta}^{\beta} dy = T_0 y\Big|_{-\beta}^{\beta} = 2T_0\beta\,. \qquad (3.87)$$

Після інтегрування виразу (3.84) маємо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\frac{\beta}{b}T_0\omega . \qquad (3.88)$$

В момент часу $t=\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)$

$$x(t)=y(t),$$

а це означає, що

$$y(t)=a+b\sin\omega(t). \qquad (3.89)$$

Після підстановки виразу (3.83) у вираз (3.89) маємо:

$$a+\beta\sin\frac{\pi}{2}=a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right).$$

Отже

$$\beta=b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right).$$

Звідси випливає, що

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\beta}{b}. \qquad (3.90)$$

Оскільки

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1,$$

то з урахуванням виразів (3.88) і (3.90) можемо записати:

$$\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\omega^2\beta^2}{b^2}T_0^2=1.$$

Отже, степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього синусоїдного збурення має такий вигляд:

$$\frac{\beta}{b}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T_0^2}}. \tag{3.91}$$

Часовий зсув між початком зміни вхідної і початком зміни вихідної концентрації маси

$$t_1=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}=-\frac{\frac{\beta}{b}}{\frac{\beta}{b}T_0\omega}=-\frac{1}{\omega T_0}. \tag{3.92}$$

Аналіз виразу (3.91) свідчить:

1. Якщо $T_0\to 0\,(V\to 0)$, то $\beta\to b$.

Це означає, що максимальна амплітуда коливань концентрації маси на виході її із басейну буде дорівнювати максимальній амплітуді коливань концентрації маси на її вході в басейн.

2. Якщо $T_0\to\infty\,(V\to\infty)$ то $\beta\to 0$.

Звідси видно, що максимальна амплітуда коливань концентрації маси на виході її із басейну дорівнює нулеві. Отже, такий басейн повністю «гасить» максимальні відхилення концентрації маси на її вході в басейн.

3. Якщо частота коливання вхідної концентрації маси $\omega=1/T_0$, то

$$\beta = 0{,}707\ b.$$

Отже, максимальні відхилення концентрації маси, яка подається на вхід басейну, будуть зменшені приблизно на 70%.

Випадок 2. Припустимо, що концентрація маси, яка подається до буферного басейну, змінюється у вигляді прямокутної хвилі (рис. 3.10).

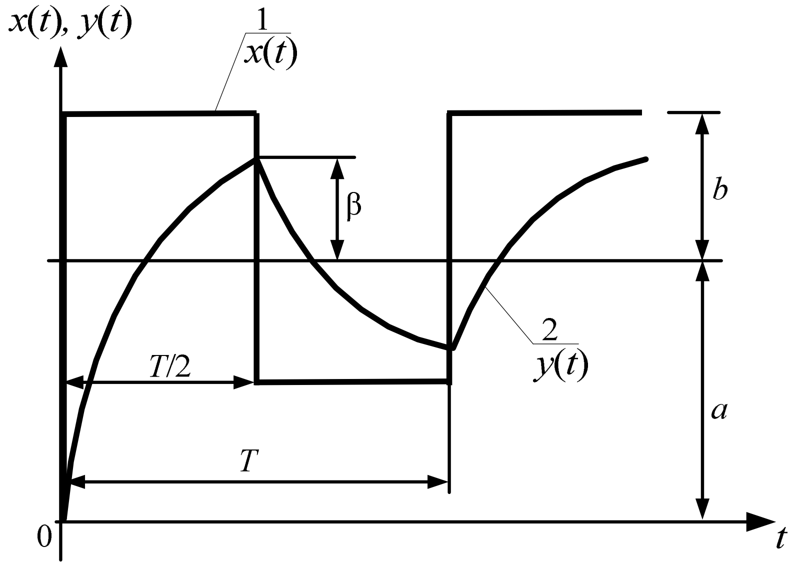


Рис. 3.10 – Графік зміни концентрації маси вхідного (графік 1) і вихідного (графік 2) потоків

Отже, у такому випадку:
a – середнє значення концентрації маси, що підводиться до басейну; *b* – максимальне відхилення концентрації від її середнього значення; *T* – період коливань концентрації маси; β – максимальне відхилення концентрації.

Розв’язок диференціального рівняння (3.78) має такий вигляд:

$$y(t) = x(t) - C\,e^{-\frac{t}{T_0}}, \qquad (3.93)$$

Цей вираз можна подати і так:

$$x(t) - y(t) = C\,e^{-\frac{t}{T_0}},$$

де

$$C = x(0) - y(0)\text{, при } t = 0.$$

Із рис. 3.10 видно, що при $t = 0$

$$C = a + b - (a - \beta) = b + \beta .$$

Отже, вираз (3.93) матиме вигляд:

$$x(t) - y(t) = (b + \beta)\exp\left(-\frac{t}{T_0}\right). \qquad (3.94)$$

Якщо

$$t = \frac{T}{2}, \text{ то} \qquad (3.95)$$

$$x(t) - y(t) = a + b - (a + \beta) = b - \beta . \qquad (3.96)$$

Підставивши вирази (3.94) і (3.96) у вираз (3.93), одержимо наступне:

$$\beta\left[1 + \exp\left(-\frac{T}{2T_0}\right)\right] = b\left[1 - \exp\left(-\frac{T}{2T_0}\right)\right]. \qquad (3.97)$$

Звідси випливає, що степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього вхідної концентрації у вигляді прямокутної хвилі, має вигляд:

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{2T_0}}}{1 + e^{-\frac{T}{2T_0}}}. \qquad (3.98)$$

Аналіз виразу (3.98) свідчить:

1. Якщо $T_0 \to 0\ (V_0 \to 0)$, то $\beta \to b$.

Це означає, що максимальна амплітуда коливань концентрації маси вихідного потоку буде дорівнювати максимальній амплітуді коливань концентрації маси на її вході в басейн.

2. Якщо $T_0 \to \infty$ $(V_0 \to \infty)$, то β → 0. Звідси можна зробити висновок про те, що більший об'єм басейну, то меншого значення набуває відхилення концентрації маси вихідного потоку.

3. Якщо, скажімо $T = T_0$, то

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1-e^{-0,5}}{1+e^{-0,5}} = \frac{1-0,606}{1+0,606} = 0,25.$$

У такому випадку

$$\beta = 0,25b.$$

Таким чином, на динамічні властивості басейну впливає не тільки власне його об'єм, але й період коливань концентрації маси вхідного потоку.

Випадок 3. Припустимо, що концентрація маси, яка подається на вхід буферного басейну змінюється стрибкоподібно (рис. 3.11).

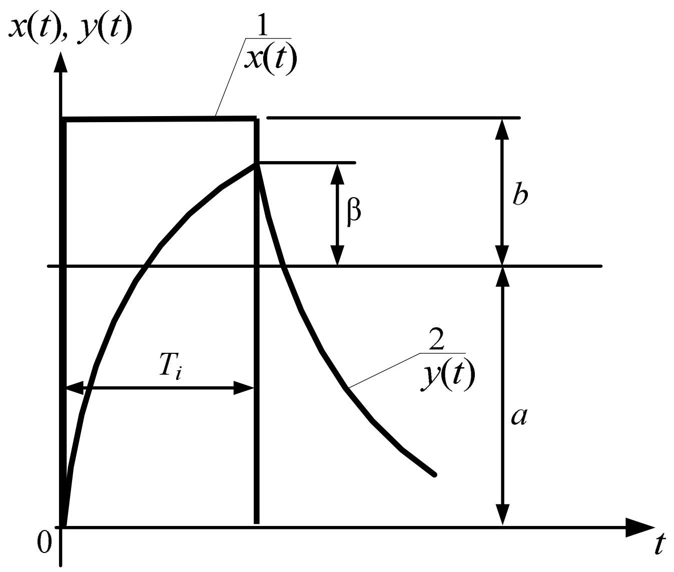


Рис. 3.11 – Графік зміни концентрації маси вхідного (графік 1) і вихідного (графік 2) потоків

Отже, у такому випадку a – середнє значення концентрації маси, що підводиться до басейну; b – максимальне відхилення концентрації від її середнього значення; $(a + b)$ – максимальне значення вхідного діяння.

Розв’язок диференціального рівняння (3.78) має такий вигляд:

$$y(t) = x(t) - C'e^{-\frac{t}{T_0}}, \tag{3.99}$$

де C' – стала інтегрування.

Для визначення сталої інтегрування розглянемо рис. 3.11. При $t = 0$

$$y(0) = 0, \text{ а } x(0) = b.$$

Отже, згідно з виразом (3.99) маємо:

$$0 = b - C' \exp\left(-\frac{0}{T_0}\right).$$

Звідси випливає, що стала інтегрування

$$C' = b.$$

За таких умов загальний розв’язок (3.99) матиме вигляд:

$$x(t) - y(t) = b \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right). \tag{3.100}$$

При $t = T_i$ (рис. 3.11)

$$x(t) = a + b, \text{ а } y(t) = a + \beta.$$

Отже

$$x(t) - y(t) = b - \beta. \tag{3.101}$$

Підставивши вираз (3.101) у вираз (3.100) маємо:

$$b - \beta = b \exp\left(\frac{-t}{T_0}\right)$$

або

$$\beta = b\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right)\right).$$

Таким чином, степінь демпфірування буферного басейну на стрибкоподібне збурювальне діяння

$$\frac{\beta}{b} = 1 - e^{-\frac{T_i}{T_0}}. \qquad (3.102)$$

Аналіз виразу (3.102) свідчить:

1. Якщо $T_0 \to 0\,(V_0 \to 0)$, то $\beta \to b$.

Отже, що менший об’єм буферного басейну, то меншою стає різниця між максимальними відхиленнями концентрації маси, яка входить і виходить із цього басейну.

2. Якщо $T_0 \to \infty\,(V_0 \to \infty)$, то $\beta \to 0$. Отже, що більший об’єм буферного басейну, то меншим стає максимальне відхилення концентрації маси в буферному басейні від її усталеного значення.

3. Якщо тривалість імпульсу збурення концентрації маси $T_i = T_0$, то

$$\frac{\beta}{b} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}367 = 0{,}633.$$

Отже,

$$\beta = 0{,}633b.$$

Насамкінець, слід сказати, що найвірогіднішим видом збурення є стрибкоподібне збурення. Таке збурення можливе під час відкривання чи закривання регулювальних органів за допомогою яких регулюється витрата кожної з компонент, які входять до складу композиційної маси.

3.2.2. Дослідження динамічних властивостей композиційного басейну у разі коливання концентрації маси у всіх потоках, що підводяться до басейну

Виконаний вище аналіз степенів демпфірування буферного басейну відносився до випадку, коли змінюється концентрація всього потоку маси, яка підводиться до цього басейну. Якщо ж потрібно дослідити степінь демпфірування композиційного басейну на кожну компоненту, що входить до складу композиційної суміші, то в такому випадку узагальнену схему композиційного басейну (рис. 2.4) потрібно подати так, як показано на рис. 3.12.

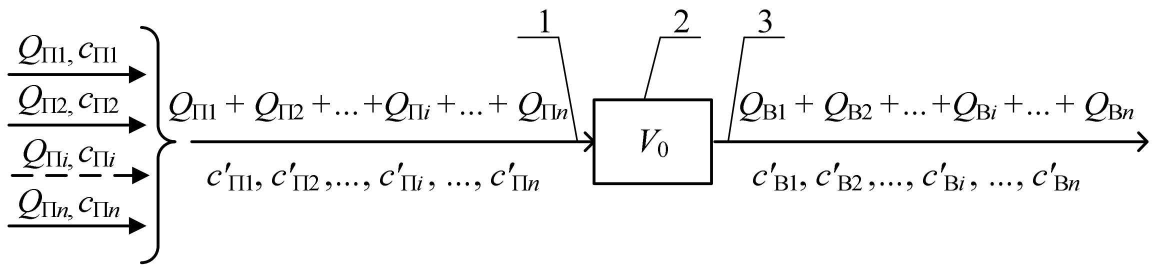


Рис. 3.12 – Узагальнена схема композиційного басейну:

1 – трубопровід композиційної суміші, що підводиться до басейну; 2 – композиційний басейн; 3 – трубопровід композиційної суміші, що відводиться із басейну

Припустимо, що концентрація компоненти 1 змінюється синусоїдно:

$$x_1(t) = a_1 + b_1 \sin \omega_1 t, \tag{3.103}$$

де $x_1(t) \sim c_{П1}$ – концентрація 1-ої компоненти; a_1 і b_1 – відповідно, середнє значення концентрації компоненти 1 і максимальне відхилення концентрації компоненти 1 від її середнього значення; ω_1 – частота коливань концентрації компоненти 1.

Як видно з наведеної схеми, усі компоненти, що входять в композиційну суміш, спочатку підсумовуються і тільки після цього подаються в композиційний басейн 2. Отже, концентрація компоненти 1 у потоці, що підводиться до басейну по трубопроводу 1

$$x_1'(t) = a_1' + b_1' \sin \omega_1 t, \tag{3.104}$$

де $x_1'(t) \sim C_{\Pi 1}'$, а a_1' і b_1' – відповідно, середнє значення концентрації компоненти 1 і максимальне відхилення концентрації компоненти 1 від її середнього значення, яке існує у трубопроводі 1.

Аналіз виразів (3.103) і (3.104) свідчить, що частота збурювального діяння не змінюється, тоді як коефіцієнти, які характеризують концентрацію компоненти 1 мають бути обчислені за формулами:

$$a_1' = \frac{Q_{\Pi 1}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{\Pi i}} a_1; \tag{3.105}$$

$$b_1' = \frac{Q_{\Pi 1}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{\Pi i}}. \tag{3.106}$$

Нехай концентрація компоненти 1 в трубопроводі 3 змінюється згідно з законом:

$$y_1(t) = a_1' + \beta_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1), \tag{3.107}$$

де $y_1(t) \sim C_{B1}$, β_1 – максимальне відхилення концентрації компоненти 1 на виході її з композиційного басейну від її середнього значення.

Тоді степінь демпфірування композиційного басейну відносно компоненти 1

$$\frac{\beta_1}{b_1} = \frac{Q_{\Pi 1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_{\Pi 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2 T_o^2}},$$

де

$$T_0 = \frac{V_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_{\Pi i}} \;-$$

стала часу композиційного басейну.

Нехай

$$R = \frac{Q_{\Pi i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_{\Pi i}},\; 0 < R \le 1.$$

Тоді

$$\frac{\beta_1}{b_1} = R\frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2 T_0^2}}. \tag{3.108}$$

Аналіз виразу (3.108) свідчить:

1. Якщо, скажімо, $R = 1/n$, то при $T_0 \to 0\;(V_0 \to 0)$, $\beta_1 \to \frac{1}{n} b_1$.

Це свідчить про те, що максимальна амплітуда коливань концентрації компоненти 1 на виході її із басейну буде зменшуватися у разі збільшення кількості вхідних потоків.

2. Якщо $T_0 \to \infty\;(V \to \infty)$, то $\beta_1 \to 0$. Звідси видно, що максимальна амплітуда коливань концентрації компоненти 1 дорівнює нулеві, незалежно від кількості вхідних потоків.

3.2.3. Ефективність роботи змішувальної системи

Виконане дослідження динамічних властивостей композиційного басейну як об’єкта керування концентрацією маси свідчить, що ефективність роботи цього об’єкту може бути визначена на підставі порівняння амплітуди коливань концентрації маси, яка відводиться із басейну з амплітудою коливань концентрації маси, яка підводиться до нього. Оскільки незадовільне перемішування маси в композиційному басейні зменшує ефективність його роботи, то саме ефективність перемішування маси в басейні може бути визначена як відношення продуктивності реального басейну до продуктивності басейну з ідеальним перемішуванням маси. Іншими словами, ефективність перемішування маси в басейні

$$E = \frac{W_p}{W_i}, \tag{3.109}$$

де W_p і W_i – продуктивність реального і ідеального композиційного басейну.

Продуктивність реального басейну може бути визначена за формулою

$$W_p = 1 - \frac{(C_{\text{в}j} - C_{\Pi i})\max}{b\bar{C}}, \tag{3.110}$$

де $C_{\text{В}j}$ – миттєве значення концентрації маси, яка відводиться із басейну; $\bar{C}$ – середнє значення концентрації маси в композиційному басейні; $C_{\Pi i}$ – миттєве значення концентрації маси, яка поступає в басейн;

b – максимальне відносне відхилення поточного значення концентрації маси, яка подається в басейн, від її середнього значення.

Отже,

$$b = \frac{C_{\Pi i} - \overline{C}}{\overline{G}}. \qquad (3.111)$$

Ефективність роботи ідеального композиційного басейну можна оцінити на підставі використання його математичної моделі, якщо на її вхід подати синусоїдне збурювальне діяння:

$$x(t) = a(1 + b\sin\omega t), \qquad (3.112)$$

де $x(t) \sim C_{\Pi i}$; $a = \overline{C}$; $\omega = 2\pi / T$; T – період збурювального діяння.

Підставивши вираз (3.112) у вираз (3.78) матимемо наступне:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T_0} y(t) = \frac{1}{T_0} a + \frac{1}{T_0} ab\sin\omega t.$$

Отже

$$dy + \frac{1}{T_0} y(t)dt = \frac{a}{T_0} dt + \frac{ab}{T_0} \sin\omega t \cdot dt. \qquad (3.113)$$

Помножимо обидві частини виразу (3.113) на $\exp(t / T_0)$. Тоді

$$e^{\frac{t}{T_0}} dy + e^{\frac{t}{T_0}} y(t) d\left(\frac{t}{T_0}\right) = e^{\frac{t}{T_0}} ad\left(\frac{t}{T_0}\right) + ab\sin\omega t \cdot d\left(\frac{t}{T_0}\right) e^{\frac{t}{T_0}}. \qquad (3.114)$$

Ліва частина виразу (3.114) являє собою диференціал від виразу $y(t)=\exp\left(\frac{t}{T_0}\right)$. Справді,

$$y(t)e^{\frac{t}{T_0}} = e^{\frac{t}{T_0}}dy(t) + y(t)\frac{1}{T_0}e^{\frac{t}{T_0}}.$$

Праву частину виразу (3.114) можна проінтегрувати по частинах. Таким чином, вираз (3.114) матиме вигляд:

$$y(t)e^{\frac{t}{T_0}} = ae^{\frac{t}{T_0}} + \frac{ab}{T_0}\int e^{\frac{t}{T_0}}\sin\omega t dt. \quad (3.115)$$

Інтеграл

$$\int e^{\frac{t}{T_0}}\sin\omega t\, dt = \frac{e^{\frac{t}{T_0}}}{\left(\frac{1}{T_0}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{1}{T_0}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right).$$

Таким чином, вираз (3.115) буде таким:

$$y(t)e^{\frac{t}{T_0}} = ae^{\frac{t}{T_0}} + \frac{ab\left(\frac{1}{T_0}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right)}{T_0\left[\left(\frac{1}{T_0}\right)^2+\omega^2\right]}e^{\frac{t}{T_0}}.$$

Оскільки $\omega = 2\pi/T$, то

$$\frac{y(t)-a}{ab} = \frac{\frac{T}{T_0}\sin\omega t - 2\pi\cos\omega t}{\frac{T}{T_0}+4\pi^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}. \quad (3.116)$$

Аналіз виразу (3.116) свідчить: максимальне значення лівої частини цього виразу – це відношення максимального відхилення концентрації маси, яка витікає із композиційного басейну до відхилення концентрації маси від середнього значення, яка подається на вхід басейну. З іншого боку воно дорівнює $1 - W_i$.

Якщо

$$\frac{T_0}{T} \geq \frac{1}{2}, \text{ а } \frac{t}{T} = \frac{1}{2}, \text{ то } 1 - W_i = \frac{\left(y(t) - a\right)\max}{ab} = \frac{1}{\dfrac{1}{2\pi\left(\dfrac{T_0}{T}\right)} + 2\pi\dfrac{T_0}{T}}. \qquad (3.117)$$

Розглянемо приклад. Припустимо, що регулятор концентрації маси піддержує концентрацію маси, яка подається до композиційного басейну з точністю ± 4%. Отже, в даному випадку b = 0,04. Нехай на цей об’єкт керування діє збурювальне діяння синусоїдної форми з періодом коливань T = 10 хв. Якщо стала часу басейну T_0 = 5 хв, то

$$\frac{T_0}{T} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Підставимо одержане значення у вираз (3.117). Тоді матимемо наступне:

$$\frac{(y - a)_{\max}}{ab} = \frac{1}{\dfrac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5} + 2 \cdot 3{,}14 \cdot \dfrac{1}{2}} = 0{,}29.$$

Одержаний результат свідчить, що коливання концентрації маси, яка подається до композиційного басейну, і рівні ± 0,04 (± 4%) будуть зменшені на 29%, тобто до ± 0,012(± 1,2%).

3.3 Складні технологічні системи

3.3.1. Напірний ящик з повітряною подушкою

3.3.1.1. Статичні характеристики напірного ящика

3.3.1.1.1. Залежність напору маси у напускній камері ящика від швидкості сітки

Напір маси у напускній камері напірного ящика

$$H = \frac{\varphi^2}{2g\mu^2} \cdot V_c^2, \tag{3.118}$$

де φ – коефіцієнт, який показує відношення швидкості струменя маси $V_{м,}$ що витікає крізь напускну щілину ящика, до швидкості сітки; μ – коефіцієнт витрати маси крізь напускну щілину; g – прискорення сили тяжіння.

Вираз (3.118) можна подати так:

$$H = kV_c^2,$$

де

$$k = \frac{\varphi^2}{2g\mu^2}.$$

Якщо φ = 0,95; μ = 0,97, а g = 9,81 м/с^2, то

$$H = 4{,}88 \cdot 10^{-2} V_c^2. \tag{3.119}$$

Для побудови графіка залежності (3.119) складемо табл. 3.1.

Таблиця 3.1. До побудови графіка залежності (3.119)

V_c, м/с	0	2	4	6	8	10
V^2_c, м^2/с^2	0	4	16	36	64	100
H, м вод. ст	0	0,19	0,78	1,75	3,10	4,88

На підставі табл.. 3.1 побудовано графік залежності (3.119), рис. 3.13.

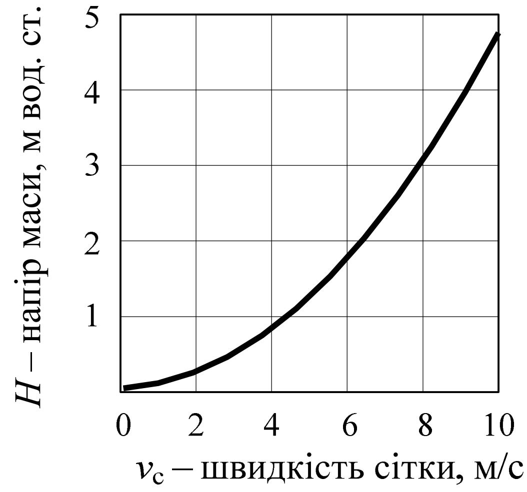


Рис. 3.13 – Залежність напору маси в напускній камері напірного ящика від швидкості сітки машини

Аналіз наведеної статичної характеристики напірного ящика свідчить, що вона нелінійна. За її допомогою можна визначити потрібний напір маси в залежності від заданої швидкості сітки. Так, скажімо, якщо швидкість сітки V_c = 8 м/с, то напір маси у напірному ящику має бути 3,1 м вод. ст.

3.3.1.1.2. Залежність тиску повітряної подушки від швидкості сітки

З технологічної точки зору, рівень маси у напускній камері напірного ящика не може бути більшим, ніж один м вод. ст. Саме тому, потрібну частину напору маси створюють за допомогою надлишкового тиску повітря, яке подається у повітряну подушку компресором. У такому випадку напір маси

$$H = h + 10P, \tag{3.120}$$

де h – рівень маси у напускній камері, м вод. ст.; P – надлишковий тиск повітря у повітряній подушці, кгс/см^2.

У напірному ящику з повітряною подушкою рівень маси у напускній камері завжди сталий і лежить в межах 0,89 – 1,0 м вод. ст. Отже, тиск повітря у повітряній подушці можна обчислити за формулою:

$$P = \frac{H - h}{10}.$$

Якщо h = 0,89 м вод. ст., то

$$P = 0{,}1(H - 0{,}89),\ H > 0{,}89. \qquad (3.121)$$

Для побудови залежності (3.121) складемо табл. 3.2.

Таблиця 3.2. До побудови графіка залежності (3.121).

V_c, м/с	0	2	4	6	8	10
H, м вод. ст.	0	0,19	0,78	1,750	3,10	4,88
P, кгс/см^2	–	–	–	0,085	0,221	0,399

На підставі табл. 3.21 побудовано графіки залежності (3.120) і (3.121), рис. 3.14.

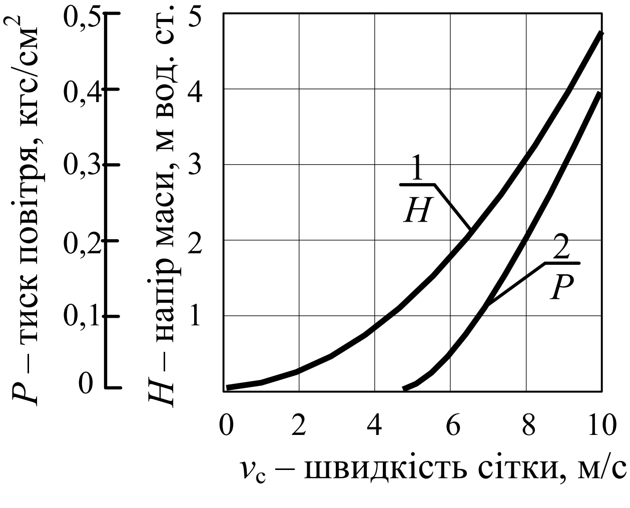


Рис. 3.14 – Залежність напору маси в напускній камері (графік 1) і надлишкового тиску (графік 2) у повітряній подушці від швидкості сітки машини

За допомогою наведених графіків можна визначити потрібний напір маси і тиск повітря у повітряній подушці в залежності від заданої швидкості сітки машини.

3.3.2. Динамічні характеристики напірного ящика

3.3.2.1. Математична модель напірного ящика як об’єкта керування рівнем маси у напускній камері і тиском повітряної подушки

Як було показано у розд. 2 НЯ із ПП представляється системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} T_{11}\dfrac{dy_1}{dt} + y_1(t) = k_{11}u_1(t) - k_{12}y_2(t); \\ T_{22}\dfrac{dy_2}{dt} + y_2(t) = k_{21}\dfrac{dy_1}{dt} + k_{22}u_2(t), \end{cases} \tag{3.122}$$

де $y_1(t)$ – рівень маси у напускній камері; $y_2(t)$ – тиск повітряної подушки; $u_1(t)$ – витрата маси, що подається до напускної камери; $u_2(t)$ – витрата повітря, що подається у напірний ящик;

$$T_{11} = 2\frac{FH_0}{Q_в^0} -$$

стала часу напускної камери;

$$k_{11} = 2\frac{H_0}{Q_в^0} -$$

коефіцієнт підсилення прямого каналу 11;

$$k_{12} = m -$$

коефіцієнт підсилення перехресного каналу 21;

$$T_{22} = \frac{g_0^*}{g_в^0} -$$

стала часу повітряної подушки;

$$k_{22} = \frac{P_0}{g_в^0} -$$

коефіцієнт підсилення прямого каналу 22;

$$k_{21} = \frac{FP_0}{V_П^0} T_{22} -$$

коефіцієнт підсилення перехресного каналу 12.

3.3.2.2. Технічна характеристика напірного ящика

- Витрата маси, що виводиться із напірного ящика $Q_в^0 = 1{,}527$ м^3/с;
- Витрата повітря, що відводиться із повітряної подушки $g_в^о = 0{,}139$ кг/с;
- Рівень маси у напускній камері $h^0 = 0{,}89$ м;
- Тиск повітряної подушки $P_0 = 0{,}289$ кгс/см^2;
- Напір маси $H_0 = 3{,}711$ м вод. ст.;
- Площа маси у напускній камері $F = 16{,}35$ м^2;
- Об’єм повітряної подушки $V_П^0 = 12{,}3$ м^3;
- Об’єм напускної камери $V_м^0 = 14{,}55$ м^3;
- Висота випускальної щілини $a_0 = 2{,}635$ см;
- Довжина випускальної щілини $b = 6{,}3$ м;
- Кількість повітря у повітряній подушці $g_0^* = 15{,}13$ кг.

3.3.2.3. Визначення сталих часу і коефіцієнтів підсилення прямих і перехресних каналів напірного ящика

Стала часу напускної камери

$$T_{11} = 2\frac{FH_0}{Q_{\text{в}}^0} = 2\frac{16,35 \times 3,711}{1,527} = 79,46 \text{ с.}$$

Коефіцієнт підсилення прямого каналу 11

$$k_{11} = 2\frac{H_0}{Q_{\text{в}}^0} = 2\frac{3,711}{1,527} = 4,86 \text{ м/м}^3\text{/с.}$$

Коефіцієнт підсилення перехресного каналу 21

$$k_{12} = m = 10 \text{ м/кг/см}^2.$$

Стала часу повітряної подушки

$$T_{22} = \frac{g_0^*}{g_{\text{в}}^0} = \frac{15,13}{0,139} = 108,84 \text{ с.}$$

Коефіцієнт підсилення прямого каналу 22

$$k_{22} = \frac{P_0}{g_{\text{в}}^0} = \frac{0,289}{0,139} = 2,07 \text{ кг/см}^2\text{/кг/с.}$$

Коефіцієнт підсилення перехресного каналу 12

$$k_{21} = \frac{FP_0}{V_{\Pi}^0}T_{22} = \frac{16,35 \times 0,289}{12,3} \cdot 108,4 = 0,11\frac{\text{кг/см}^2 \times \text{с}}{\text{м}}.$$

3.3.2.4. Визначення перехідної функції прямого каналу 11

Передавальній функції прямого каналу 11 (2.106) відповідає диференціальне рівняння

$$a_2\frac{d^2y_1}{dt^2} + a_1\frac{dy_1}{dt} + a_0y_1(t) = b_1\frac{du_1}{dt} + b_0u_1(t), \tag{3.123}$$

де

$$a_2 = T_{11}T_{22} = 79,46 \times 108,84 = 8648,42;$$

$$a_1 = T_{11} + T_{22} + k_{12}k_{21} = 79,46 + 108,84 + 10 \times 0,11 = 189,4;$$

$$a_0 = 1;\ b_1 = k_{11}T_{22} = 4,86 \times 108,84 = 528,96;$$

$$b_0 = k_{11} = 4,86.$$

Нехай $T_2^2 = a_2 = 8648,42$. Тоді $T_2 = 92,99$ с.

Нехай $T_1 = a_1 = 189,4$; $T_5 = b_1 / b_0 = 528,96 / 4,86 = 108,84$ с; $k = b_o = k_{11} = 4,86$.

Тоді диференціальне рівняння (3.123) в операційній формі матиме вигляд:

$$(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) y_1(p) = k(T_5 p + 1) u_1(p). \qquad (3.124)$$

Оскільки $T_1 > 2T_2$, то нові сталі часу T_3 і T_4 визначаються так:

$$T_3 = \frac{1}{2}\left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right);$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\left(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right).$$

Оскільки T_1 = 189,4 с, то T_1^2 = 35872,36 с^2, а T_2^2 = 8648,42 с^2. Тому $4T_2^2$ = 34593,68 с^2.

Отже

$$\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2} = \sqrt{35872,36 - 34593,68} = 1,13.$$

Таким чином, стала часу

$$T_3 = \frac{1}{2}\left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(189,4 + 1,13\right) = 95,26 \text{ с},$$

а стала часу

$$T_4 = \frac{1}{2}\left(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(189,4 - 1,13\right) = 94,13 \text{ с}.$$

Розв’язок диференціального рівняння (3.123) у разі подачі одиничного стрибкоподібного діяння $u_1(t)$ = 1(t) на вхід каналу 11 має такий вигляд:

$$y_1(t) = k_{11}\left(1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}\right), \tag{3.125}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{95,26} = 1,04 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{94,13} = 1,06 \cdot 10^{-2};$$

$$C_1 = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_4} = \frac{94,13 - 108,84}{95,26 - 94,13} = 12;$$

$$C_2 = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_4} = \frac{94,13 - 108,84}{95,26 - 94,13} = -13.$$

Підставивши одержані числові значення у розв'язок (3.125), одержимо перехідну функцію каналу керування 11

$$y_1(t) = 4,86\left(1 + 12e^{-1,04 \cdot 10^{-2} t} - 13e^{-1,06 \cdot 10^{-2} t}\right). \tag{3.126}$$

Для побудови графіка функції (3.126) складемо табл. 3.3.

Таблиця 3.3. Числові значення перехідної функції (3.126)

t, с	0	100	200	300	400
$x_1 = 0,0104t$	0	1,040	2,080	3,120	4,160
$\exp(-x_1)$	1	0,353	0,122	0,045	0,015
$z_1 = 12\exp(-x_1)$	12	4,236	1,464	0,540	0,180
$x_2 = 0,016t$	0	1,060	2,120	3,180	4,240
$\exp(-x_2)$	1	0,346	0,122	0,040	0,016
$z_2 = 13\exp(-x_2)$	13	4,498	1,586	0,520	0,208
$V = 1 + z_1 - z_2$	0	0,738	0,878	1.020	0,912
$y_1(t) = 4,86V$	0	3,586	4,267	4,950	4,723

3.3.2.5. Визначення перехідної функції перехресного каналу 21

Передавальній функції перехресного каналу 21 (2.107) відповідає диференціальне рівняння

$$a_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1(t) = -b_0 u_2(t). \tag{3.127}$$

Диференціальне рівняння (3.127) в операційній формі можна подати так:

$$\left(1 + T_3 p\right)\left(1 + T_4 p\right) y_1(p) = -k u_2(p), \tag{3.128}$$

де

$$k = b_0 = k_{12} k_{22} = 10 \times 2{,}07 = 20{,}7\,.$$

Розв’язок диференціального рівняння (3.127) у разі подачі на вхід каналу 21 одиничного стрибкоподібного діяння $u_2(t) = 1(t)$ має вигляд:

$$y_1(t) = -k\left(1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}\right), \tag{3.129}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{95{,}26} = 1{,}04 \cdot 10^{-2}\,:$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{94{,}13} = 1{,}06 \cdot 10^{-2};$$

$$C_1 = -\frac{T_3}{T_3 - T_4} = -\frac{95{,}26}{95{,}26 - 94{,}13} = -84{,}3;$$

$$C_2 = \frac{T_4}{T_3 - T_4} = \frac{94{,}13}{95{,}26 - 94{,}13} = 83{,}3\,.$$

Підставивши одержані числові значення у вираз (3.129), одержимо перехідну функцію перехресного каналу 21:

$$y_1(t) = -20{,}7\left(1 - 84{,}3 e^{-1{,}04 \cdot 10^{-2} t} + 83{,}3 \cdot e^{-1{,}06 \cdot 10^{-2} t}\right). \tag{3.130}$$

Для побудови графіка функції (3.130) складемо табл. 3.4.

Таблиця 3.4. Числові значення перехідної функції (3.130)

t, c	0	100	200	300	400
$x_1 = 0{,}0104t$	0,0	1,040	2,080	3,120	4,160
$\exp(-x_1)$	1,0	0,353	0,122	0,045	0,015
$z_1 = -84{,}3\exp(-x_1)$	–84,3	–29,750	–10,280	–3,793	–1,260
$x_2 = 0{,}0106t$	0,0	1,060	2,120	3,180	4,240
$\exp(-x_2)$	1,0	0,346	0,122	0,040	0,016
$z_2 = 83{,}3\exp(-x_2)$	83,3	28,820	10,160	3,332	1,332
$V = 1 - z_1 + z_2$	0,0	0,930	0,880	1,061	1,072
$y_1(t) = -20{,}7V$	0,0	–1,315	–9,667	–15,352	–18,318

3.3.2.6. Визначення перехідної функції перехресного каналу 12

Передавальній функції перехресного каналу 12 (2.110) відповідає диференціальне рівняння:

$$a_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2(t) = b_1 \frac{du_1}{dt}. \qquad (3.131)$$

Диференціальне рівняння (3.131) в операційній формі має такий вигляд:

$$\left(1 + T_3 p\right)\left(1 + T_4 p\right) y_2(p) = kpu_1(p), \qquad (3.132)$$

де

$$k = b_1 = k_{11}k_{21} = 4{,}86 \times 0{,}11 = 0{,}534.$$

Розв’язок диференціального рівняння (3.131) у разі подачі на вхід каналу 12 одиничного стрибкоподібного діяння $u_1(t) = 1(t)$

$$y_2(t) = kC\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right), \qquad (3.133)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{95,26} = 1,04 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{94,13} = 1,06 \cdot 10^{-2};$$

$$C = \frac{1}{T_3 - T_4} = \frac{1}{95,26 - 94,13} = 0,88.$$

Підставивши одержані числові значення у вираз (3.133) маємо:

$$y_2(t) = 0,47(1 - e^{-1,04 \cdot 10^{-2} t} - e^{-1,06 \cdot 10^{-2} t}). \qquad (3.134)$$

Для побудови графіка функції (3.134) складемо табл. 3.5.

Таблиця 3.5. Числові значення перехідної функції (3.134)

t, с	0	100	200	400	500
$x_1 = 0,0104t$	0	1,040	2,080	4,160	5,200
$z_1 = \exp(-x_1)$	1	0,353	0,125	0,017	0,051
$x_2 = 0,0106t$	0	1,060	2,120	4,240	5,300
$z_2 = \exp(-x_2)$	1	0,346	0,123	0,014	0,049
$V = z_1 - z_2$	0	0,007	–0,005	0,001	0,003
$y_2(t) = 4,47V$	0	$3,29 \cdot 10^{-3}$	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$0,47 \cdot 10^{-3}$	$0,09 \cdot 10^{-3}$

3.3.2.7. Визначення перехідної функції прямого каналу 22

Передавальній функції прямого каналу 22 (2.109) відповідає диференціальне рівняння

$$a_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2(t) = b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2(t). \qquad (3.135)$$

Диференціальне рівняння (3.135) можна в зображеннях Лапласа подати так:

$$\left(1 + T_3 p\right)\left(1 + T_4 p\right) y_2(p) = b_1 p u_2(p) + b_0 u_2(p), \qquad (3.136)$$

де

$$b_1 = k_{22}T_{22} = 2,07 \times 108,84 = 225,25;\; b_0 = k_{22} = 2,07.$$

Розв'язок диференціального рівняння (3.135) у разі подачі на вхід каналу 22 одиничного стрибкоподібного діяння $u_2(t) = 1(t)$

$$y_2(t) = k_{22}\left(1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}\right), \tag{3.137}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{95,26} = 1,04 \cdot 10^{-2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{94,13} = 1,06 \cdot 10^{-2};$$

$$C_1 = \frac{T_5 - T_3}{T_3 - T_4} = \frac{108,84 - 95,26}{95,26 - 94,13} = 12;$$

$$C_2 = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_4} = \frac{94,13 - 108,84}{95,26 - 94,13} = -13.$$

Підставивши одержані числові значення у вираз (3.137) маємо:

$$y_2(t) = 2,07\left(1 + 12e^{-1,04 \cdot 10^{-2} t} - 13e^{-1,06 \cdot 10^{-2} t}\right). \tag{3.138}$$

Для побудови графіка функції (3.138) складемо табл. 3.6.

Таблиця 3.6. Числові значення перехідної функції (3.138)

t, с	0	100	200	300	400
$x_1 = 0,0104t$	0	1,040	2,080	3,120	4,160
$\exp(-x_1)$	1	0,353	0,122	0,045	0,015
$z_1 = 12\exp(-x_1)$	12	4,236	1,464	0,540	0,180
$x_2 = 0,016t$	0	1,060	2,120	3,180	4,240
$\exp(-x_2)$	1	0,346	0,123	0,040	0,016
$z_2 = 13\exp(-x_2)$	13	4,498	1,586	0,520	0,208
$V = 1 + z_1 - z_2$	0	0,738	0,878	1,020	0,972
$y_2(t) = 2,07V$	0	1,527	1,817	2,110	2,012

3.3.2.8. Побудова динамічних характеристик напірного ящика

На підставі табл. 3.3 і 3.5 побудовано графіки зміни рівня маси і тиску повітря у напірному ящику у разі витрати маси, яка подається у напірний ящик (рис. 3.15).

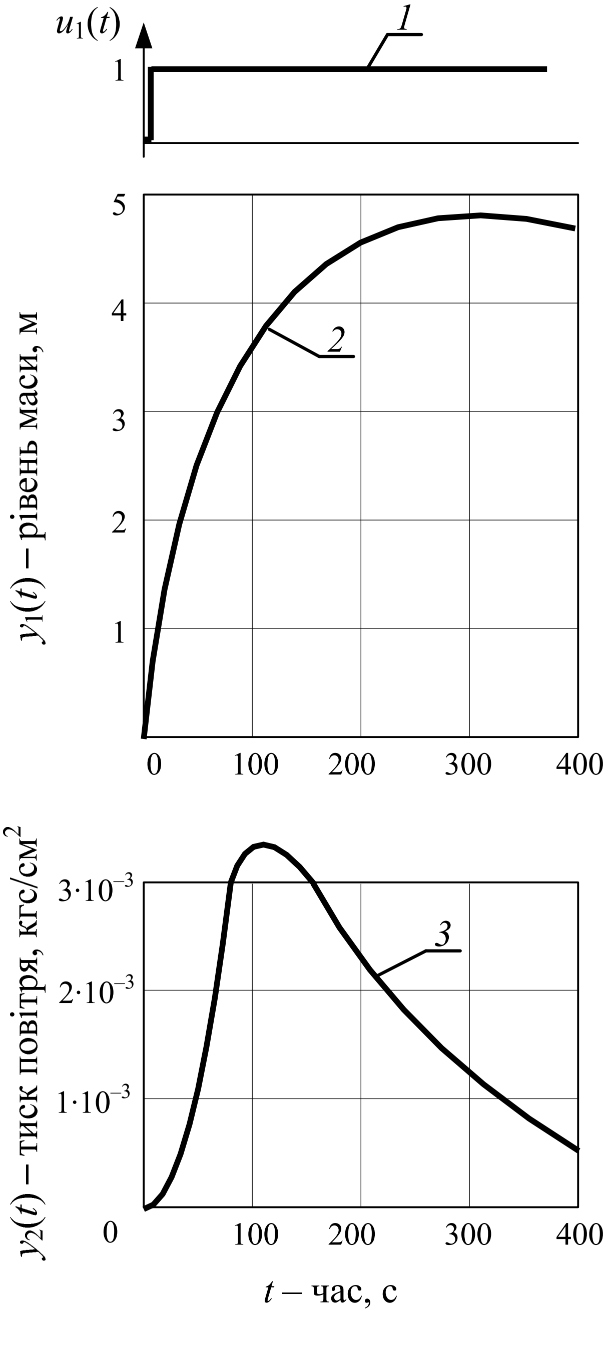


Рис. 3.15 – Графіки зміни рівня маси (графік 2) і тиску повітря (графік 3) у разі зміни витрати маси (графік 1)

Аналіз наведених графіків свідчить, що у разі стрибкоподібної зміни витрати маси (графік 1), яка подається до напірного ящика, спостерігається збільшення рівня маси (графік 2) у напускній камері, який досягає нового усталеного значення за час t = 400 с. Дещо по-іншому змінюється тиск повітря (графік 3) у повітряній подушці. Спочатку тиск повітря у повітряній подушці збільшується, оскільки зі збільшенням об'єму маси у напускній камері, зменшується об'єм повітряної подушки, а отже, збільшується тиск повітряної подушки на поверхню маси у напускній камері. В силу цього збільшується витрата повітря, яке виходить із повітряної подушки, а це призводить до зменшення тиску повітря у ній і через t=500с він досягає свого усталеного значення.

На підставі табл. 3.4 і 3.6 побудовано графіки зміни тиску повітряної подушки і рівня маси у напірному ящику у разі зміни витрати повітря, що подається у напірний ящик, рис. 3.16.

Аналіз наведених графіків свідчить, що у разі стрибкоподібної зміни витрати повітря (графік 1), що подається у повітряну подушку, спостерігається збільшення тиску у ній (графік 2), який досягає нового усталеного значення за час t = 300 с. Рівень маси у напускній камері різко зменшується і не повертається до свого попереднього значення.

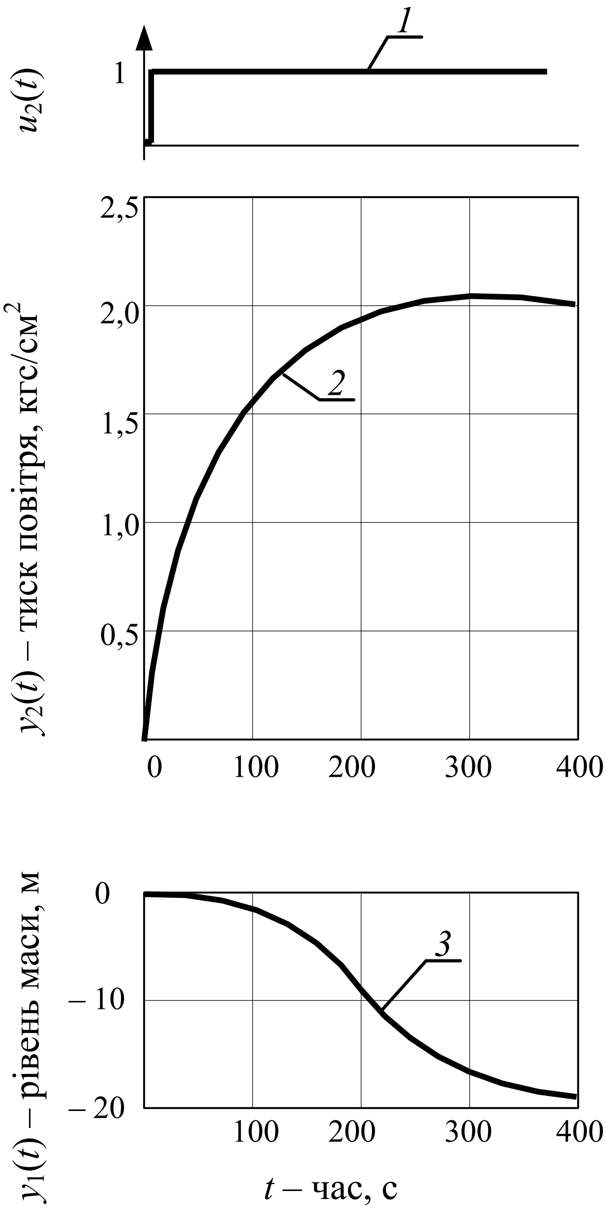


Рис. 3.16 – Графіки зміни тиску повітря (графік 2) і рівня маси (графік 3) у разі зміни витрати повітря (графік 1)

3.4. Теплообмінні процеси

3.4.1. Дослідження процесу нагрівання тіла у сушильній камері

Принципову схему сушильної камери показано на рис. 3.17.

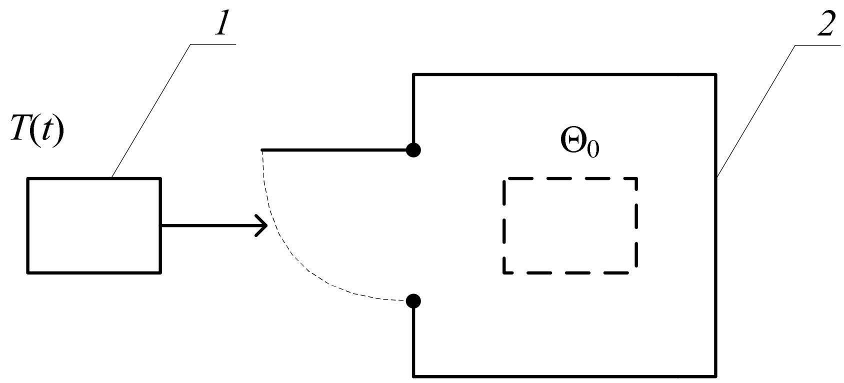


Рис. 3.17 – Принципова схема сушильної камери ($T(t) < \Theta_0$):

1 – тіло; 2 – сушильна камера

Нехай тіло 1, нагріте до температури в час t має температуру $T(t)$ і воно вноситься до сушильної камери 2, яка має сталу температуру Θ_0 з метою його нагрівання.

Відомо, що швидкість зміни температури T тіла згідно з законом Ньютона

$$\frac{dT}{dt} = k\left[\Theta_0 - T(t)\right], \tag{3.139}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Дослідимо знак похідної (3.139). Якщо

$$T(t) < \Theta_0, \text{ то } \frac{dT}{dt} > 0.$$

Отже, похідна (3.139) додатна. Це означає, що тіло нагрівається.

Загальний розв’язок диференціального рівняння (3.139) відомий

$$T(t) = \Theta_0 - Ce^{-kt}, \tag{3.140}$$

де C – стала інтегрування.

Перевіримо, що розв’язок (3.140) дійсно задовольняє диференціальне рівняння (3.139). Оскільки Θ_0 = const, то

$$\frac{dT}{dt} = -Ce^{-kt}(-k) = kCe^{-kt}. \tag{3.141}$$

Подамо вираз (3.139) таким чином:

$$\frac{1}{k}\frac{dT}{dt} + T(t) = \Theta_0. \tag{3.142}$$

Підставимо вирази (3.140) і (3.141) у вираз (3.142). Отже, бачимо, що

$$\frac{1}{k}kCe^{-kt} + \Theta_0 - Ce^{-kt} = \Theta_0.$$

Для визначення сталої інтегрування C порівняємо вирази (3.139) і (3.141):

$$k\left[\Theta_0 - T(t)\right] = kCe^{-kt}.$$

Якщо $t = 0$, то стала інтегрування $C = \Theta_0 - T(0)$.

Отже, вираз (3.140) матиме вигляд:

$$T(t) = \Theta_0 - \left(\Theta_0 - T_0\right)e^{-kt}. \tag{3.143}$$

Оскільки $T(t) < \Theta_0$, то при $t = 0$ згідно з рівнянням (3.143)

$T(0) = \Theta_0 - \Theta_0 + T_0 + T_0$, а при $t \to \infty$ $T(\infty) \to \Theta_0$.

Графік перехідного процесу зміни температури тіла у сушильній камері показано на рис. 3.18.

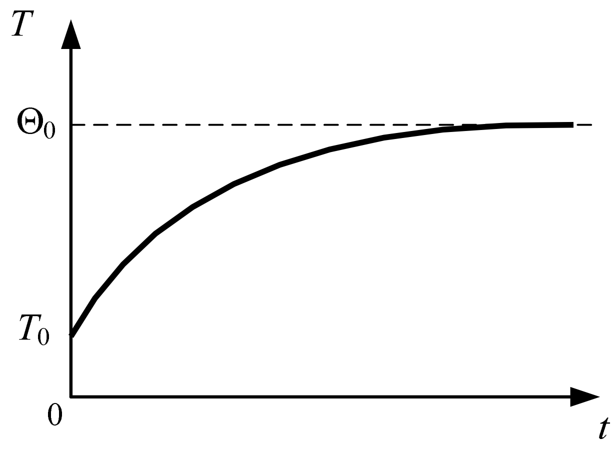


Рис. 3.18 – Залежність температури тіла T від часу t його перебування у сушильній камері

3.4.2. Дослідження процесу охолодження тіла у холодильній камері

Принципову схему холодильної камери показано на рис. 3.19.

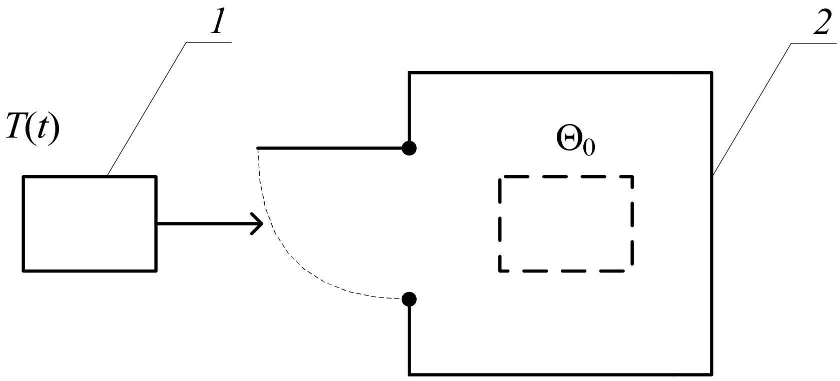


Рис. 3.19 – Принципова схема холодильної камери ($T(t) > \Theta_0$):

1 – тіло; 2 – холодильна камера

Нехай тіло 1, нагріте до температури T в час t має температуру $T(t)$ і воно вноситься до холодильної камери 2, яка має сталу температуру Θ_0 з метою його охолодження. У такому випадку $T(t) > \Theta_0$. Отже, згідно з виразом (3.143)

$$T(t) = \Theta_0 + \left(T_0 - \Theta_0\right)e^{-kt}. \qquad (3.144)$$

Якщо $t = 0$, то

$$T(0) = \Theta_0 + T_0 - \Theta_0 = T_0.$$

Якщо $t \to \infty$, то $T(\infty) \to \Theta_0$.

Графік перехідного процесу зміни температури тока у холодильній камері показано на рис. 3.20.

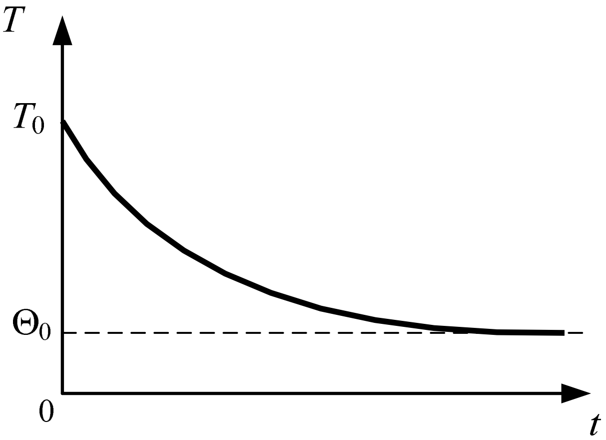


Рис. 3.20 – Залежність температури тіла T від часу t його перебування у холодильній камері

Приклад 3.1. Температура витягнутого хліба (батона) з печі на протязі 20 хв. падає від 100°С до 60°С (рис. 3.21).

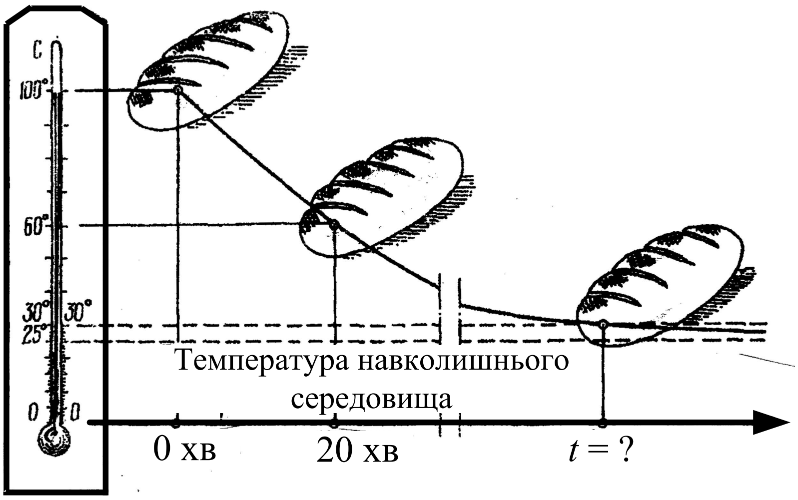


Рис. 3.21 – Залежність температури батона *T* від часу *t*

Нехай температура навколишнього середовища (повітря) дорівнює 25°С. Через який час від моменту початку охолодження температура батона понизиться до 30°С?

Розв’язання.

Швидкість охолодження тіла являє собою процес пониження температури T за одиницю часу τ і визначається похідною $dT/d\tau$. Як було показано вище згідно з законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Цей процес нерівномірний: зі зміною різниці температур змінюється і швидкість охолодження тіла.

Диференціальне рівняння охолодження тіла (3.143) у такому випадку слід подати так

$$\frac{dT}{d\tau}=k(T-t), \qquad (3.1.1)$$

де T – температура батона; t – температура навколишнього середовища; τ – шуканий час охолодження батона.

Розділимо змінні у рівнянні (3.1.1):

$$\frac{dT}{T-t}=kd\tau .$$

Для умов задачі

$$\frac{dT}{T-25}=kd\tau .$$

В силу того, що

$$\frac{dT}{T-25}=\frac{d(T-25)}{T-25},$$

то можна проінтегрувати цей вираз:

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25}=k\int d\tau .$$

Отже,

$$ln(T-25)=k\tau+lnC .$$

Пропотенціюємо обидві частини цієї рівності:

$$e^{ln(T-25)}=e^{k\tau+lnC}=e^{k\tau}\cdot e^{lnC} .$$

Оскільки

$$e^{lnC}=C,$$

то

$$T-25=Ce^{k\tau} . \qquad (3.1.2)$$

Сталу інтегрування C визначимо із початкової умови: при τ = 0 хв T = 100°C. Звідси випливає, що

$$100-25=Ce^{k\cdot 0}=C\,.$$

Отже, стала інтегрування

$$C = 75.$$

Значення функції e^k визначимо, виходячи із заданої додаткової умови, а саме: при τ = 20 хв T = 60°С.

Отже, згідно з виразом (3.1.2)

$$60-25=75(e^k)^{20}\,.$$

Звідси випливає, що

$$e^k=\left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}}=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Саме тому рівняння охолодження батона згідно умови задачі приймає досить простий вигляд:

$$T=75\left(\frac{7}{15}\right)^{\tau/20}+25\,. \qquad (3.1.3)$$

Тоді шуканий час τ при температурі T = 30°С можна визначити із виразу (3.1.3) так:

$$5=75\left(\frac{7}{25}\right)^{\tau/20}.$$

Таким чином, шуканий час

$$\tau=\frac{-20 ln 15}{ln 7-ln 15}\approx\frac{-20\cdot 2{,}7081}{-0{,}7622}\approx 71\ \text{хв.}$$

Отже, після 1 год 11 хв батон охолодиться до температури 30°С.

3.5. Радіоактивність

3.5.1. Природна і штучна радіоактивність

Здатність деяких атомних ядер довільно розпадатися з випусканням α-, β- і γ-проміння, а іноді й інших частинок (нейтронів, кретонів) називається *природною радіоактивністю.* Природну радіоактивність мають елементи, які трапляються в природних умовах.

Радіоактивність елементів, добутих штучно (через відповідні ядерні реакції), називається *штучною радіоактивністю.*

Радіоактивний розпад – це властивість самого атомного ядра, яка залежить лише від його внутрішнього стану. На швидкість течії перебігу спонтанного розпаду ядер не впливають зовнішні фактори зміни температури і тиску, електричні й магнітні поля, агрегатний стан хімічної сполуки тощо. Тому можна зробити висновок, що радіоактивний процес відбувається у більш внутрішніх (глибинних) частинах атома, тобто в атомному ядрі.

3.5.2. Період піврозпаду

Як показує дослід, різні радіоактивні речовини відрізняються швидкістю розпаду, яке характеризується періодом піврозпаду. Період піврозпаду t_o вимірюється часом, протягом якого початкове число ядер радіоактивної речовини зменшується наполовину. У природно радіоактивних елементів періоди піврозпаду змінюються у великих межах. Наприклад, в урану період піврозпаду становить близько $4{,}5 \cdot 10^9$ років, а в радону – 3,82 дня.

3.5.3. Визначення періоду піврозпаду

Відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t),$$

де $N(t)$ – загальне число ядер радіоактивної речовини на час t; λ – коефіцієнт пропорційності.

Загальний розв’язок диференціального рівняння (3.145) відомий:

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}, \tag{3.146}$$

де C – стала інтегрування.

Якщо $t = 0$, то $N(0) = C{\cdot}1 = N_0$. Якщо $t = \infty$, то $N(\infty) = C{\cdot}0 = 0$.

Графік перехідного процесу зміни кількості ядер радіоактивної речовини показано на рис. 3.22.

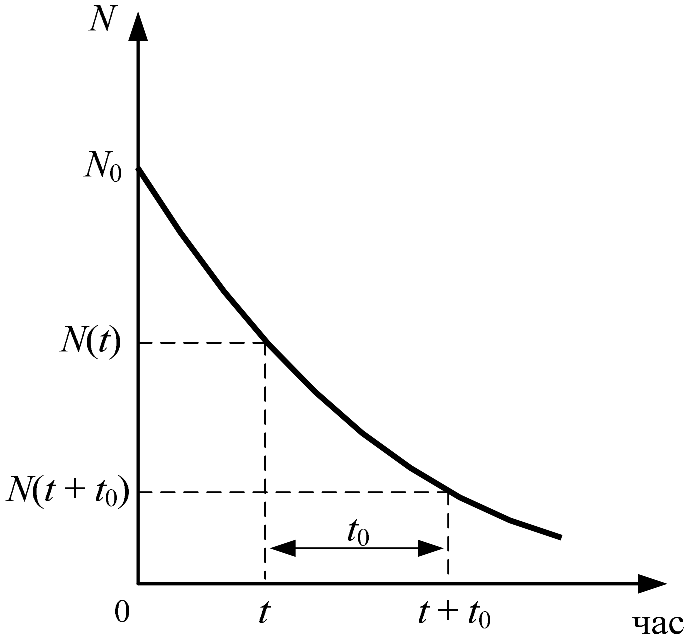


Рис. 3.22 – Залежність числа ядер радіоактивної речовини N від часу t

Згідно з виразом (3.146) число ядер радіоактивної речовини на час $t + t_o$ можна визначити так:

$$N(t+t_0) = Ce^{-\lambda(t+t_0)} \qquad (3.147)$$

Поділимо вираз (3.147) на вираз (3.146):

$$\frac{N(t+t_0)}{N(t)} = \frac{Ce^{-\lambda(t+t_0)}}{Ce^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t}}.$$

Звідси випливає, що

$$-\lambda(t+t_0) - (-\lambda t) = -\lambda t - \lambda t_0 + \lambda t = -\lambda t_0.$$

Таким чином

$$\frac{N(t+t_0)}{N(t)} = e^{-\lambda t_0}.$$

Якщо прийняти, що

$$N(t+t_0) = \frac{1}{2}N(t), \text{ то}$$

$$\frac{N(t+t_0)}{N(t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N(t)}{N(t)} = \frac{1}{2}.$$

Отже

$$e^{-\lambda t_o} = \frac{1}{2}.$$

Прологарифмуємо цей вираз:

$$lne^{-\lambda t_o} = ln1 - ln2.$$

Позаяк $ln1 = 0$, то

$$lne^{-\lambda t_o} = -ln2.$$

З іншого боку

$$lne^{-\lambda t_o} = -\lambda t_o.$$

Отже

$$\lambda t_0 = ln2.$$

Звідси випливає, що період піврозпаду радіоактивної речовини

$$t_0 = \frac{1}{\lambda} ln2 . \tag{3.148}$$

Приклад 3.2. Швидкість розпаду радію прямопропорційна його масі. Визначити який відсоток маси m_0 радію розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період піврозпаду радію дорівнює 1590 років (t_0 = 1590 років).

Розв'язання.

Швидкість розпаду радію вимірюється його кількістю, яка розпалася за одиницю часу. За малий проміжок часу Δt, що збіг з деякого моменту часу t, кількість радію, що розпався

$$\Delta m = k\, m\, \Delta\, t,$$

де m – кількість радію у даний момент часу; k – коефіцієнт пропорційності.

Ця ж кількість маси радію, узята з від'ємним знаком (маса зменшується), дорівнює приросту маси за час Δt. Іншими словами

$$\Delta m = -\, k\, m\, \Delta\, t. \tag{3.2.1}$$

Обидві частини рівності (3.2.1) поділимо на Δt і перейдемо до межі при $\Delta t \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} = -km .$$

Після розділення змінних

$$\frac{dm}{m} = -kdt . \tag{3.2.2}$$

Проінтегрувавши вираз (3.2.2) маємо

$$ln\, m = -kt + lnC$$

або після потенціювання

$$m = Ce^{-kt}, \tag{3.2.3}$$

де C – стала інтегрування.

Сталу інтегрування визначимо з початкової умови: $m = m_0$ при $t = 0$.

Підставивши ці величини у вираз (3.2.3) маємо:

$$m_0 = Ce^{-k\cdot 0}.$$

Звідси випливає, що

$$C = m_0.$$

Отже, рівняння (3.2.3) матиме вигляд

$$m = m_0 e^{-kt}. \tag{3.2.4}$$

Коефіцієнт k визначається згідно з додатковою умовою: при $t_0 = 1590$ років $m=m_0/2$. Отже, маємо співвідношення:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}.$$

Оскільки $m_0 \neq 0$, то

$$\frac{1}{2} = e^{-1590k}.$$

Після потенціювання маємо:

$$-1590k = -ln2.$$

Звідси випливає, що

$$k = \frac{ln2}{1590} = 4{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

Отже, шукана функція

$$m(t) = m_0 e^{-4{,}4\cdot 10^{-4} t}.$$

Таким чином, кількість радію, яка не розпалась за 200 років

$$m(200) = m_0 e^{-4{,}4\cdot 10^{-4}\cdot 200} = 0{,}915 m_0.$$

Звідси робимо висновок, що через 200 років розпадеться лише 8,5% радію.

Коефіцієнт k у рівнянні (3.2.2) має у багатьох випадках природний фізичний смисл. Наприклад, у випадку радіоактивного розпаду $k\,dt$ показує частку атомів, які розпалися за безкінечно малий проміжок часу $[t,\ t+dt]$.

Очевидно, що більше значення k, то швидше розпадаються атоми і тим менший час їхнього життя. Це наводить на думку, що середній час життя атомів обернено пропорційний k. Справді, розрахунки свідчать, що середній час дорівнює $1/k$. А це означає, що якщо мається деяка кількість атомів даної радіоактивної речовини, і ми складемо часи життя кожного з атомів, а суму поділимо на число усіх атомів, то у частці одержимо $1/k$.

Одержана відповідь здається дивною: виходить, що середній час життя радіоактивної речовини не залежить від того моменту, з якого розпочинається відлік. Іншими словами, якщо деякий кусок урану залишився з часу утворення земної кулі, то середній час життя атомів, що його складають, не змінився за міліарди років, які проминули. Але це дійсно так. Справа в тому, що цей кусок урану – залишок великого куска, що частково розпався за цей час, а атоми, що залишилися «не пам’ятають про своє колишнє». Таким чином, ймовірність їхнього розпаду в кожний момент часу t не залежить від того, скільки часу вони до цього існували.

3.5.4. Поділ ядер урану. Ланцюгова реакція

Відкриття поділу ядер урану і ядер деяких інших важких елементів дало можливість практично здійснити ланцюгову реакцію. Вдалося використати дві чудові властивості поділу ядер.

1. При поділі ядер вивільняється величезна енергія, близько 200 МеВ на кожне ядро, яке поділилось.

2. Поділ ядер супроводиться вилітанням вторинних нейтронів. Число вторинних нейтронів, які утворюються під час поділу одного ядра, більше за одиницю (2,5…3). Ці вторинні нейтрони вдається використати для поділу наступних ядер. Внаслідок цих поділів з’являються знову нейтрони у більшій кількості, які можуть спричинити нові акти поділу.

Ядерна реакція поділу важких ядер нейтронами, внаслідок якої число нейтронів зростає і тому може виникнути самопідтриманий процес поділу, називається *ланцюговою ядерною реакцією.*

Для мирного використання атомної енергії такий хід процесу не прийнятний – тут потрібно, щоб енергія вивільнювалась рівномірно зі швидкістю, зручною для практичного використання. Цього можна досягнути, якщо узяти до уваги, що не всі нейтрони викликають поділ ядер урану – деякі з них зовсім виходять із системи, а частина захоплюється атомами домішок, не викликаючи поділу їхніх ядер. Всуваючи чи висуваючи стержні, зроблені із матеріалу, який енергійно захоплює нейтрони, можна одержати бажаний перебіг процесу.

Але щоб керувати процесом розмноження нейтронів, потрібно вивчити його закономірності. В грубому наближенні він відбувається таким чином. За безкінечно малий час dt нейтрон проходить шлях

$$S = vdt, \tag{3.149}$$

де v – швидкість нейтрона.

На цьому шляху він може зіткнутись з ядрами урану, центр яких належить циліндру радіуса R, де R – радіус ядра урану. Об’єм цього циліндра

$$V = \pi R^2 vdt\,. \tag{3.150}$$

Будемо вважати, що в об’ємі знаходиться N ядер урану і що частка випадків, коли попадання нейтрона в ядро викликає поділ, дорівнює α. Тоді число поділу за час dt, яке випадає на частку одного нейтрона дорівнює

$$N\alpha\pi R^2 vdt\,,$$

а загальне число поділів дорівнює

$$N\alpha\pi^2 vndt\,,$$

де n – число нейтронів в усьому об’ємі.

Нехай при кожному поділу вилітає ν нейтронів і один нейтрон поглинається. Тоді число нейтронів при кожному поділу змінюється на ν - 1, і тому зміна числа нейтронів внаслідок поділу

$$dn = N(\nu - 1)\alpha\pi R^2 vndt\,. \tag{3.151}$$

За цей же проміжок часу dt деяка частина нейтронів вилітає за межі системи чи поглинається домішками.

Для спрощення розрахунків знехтуємо домішками, кількість яких можна значно зменшити шляхом ретельної хімічної очистки урану. Тоді потрібно врахувати лише кількість нейтронів, які покидають систему крізь її поверхню зі швидкістю v. Крім цього, будемо вважати, що розглядуваний кусок урану має форму кулі радіусом r.

Нейтрони, які вилетіли за межі цієї кулі за проміжок часу dt, перебували у шарі товщина якого дорівнює vdt. Об’єм цього шару

$$V_{\text{ш}} = 4\pi r^2 vdt\,.$$

Оскільки об’єм кулі

$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

то концентрація нейтронів дорівнює $n/V_{\text{к}}$.

Отже, число нейтронів у розглядуваному шарі можна визначити із співвідношення

$$\frac{n}{V_{к}} 4\pi r^2 vdt = \frac{3nv}{r}dt\,.$$

Таким чином, кількість нейтронів, які залишають кулю

$$n_1 = 3\frac{knv}{r}dt\,,$$

де k – коефіцієнт, пов'язаний з тим, що не у всіх нейтронів швидкість направлена на зовню, а деякі з них рухаються у середину кулі (досліди свідчать, що $k \approx 0{,}3$).

Таким чином, за рахунок вилітання нейтронів їхнє число зменшується на $3kvndt/r$.

Насамкінець, припустимо, що існує джерело нейтронів (наприклад, берилій, що опромінюється радієм), який за час dt дає q_0dt нейтронів. Тоді загальна зміна числа нейтронів за проміжок часу dt

$$dn = (a-b)ndt + q_o dt\,, \tag{3.152}$$

де

$$a = N(\nu - 1)2\pi R^2 \nu\,;$$

$$b = \frac{3k}{r}\nu\,.$$

Рівняння (3.152) можна подати й так:

$$\frac{dn}{dt} = (a-b)n + q_0\,. \tag{3.153}$$

3.5.5. Дослідження рівняння розмноження нейтронів

Диференціальне рівняння (3.153) представляє процес зміни числа нейтронів. Але щоб керувати процесом розмноження нейтронів потрібно не тільки скласти рівняння, але й розв'язати його.

Розглянемо випадок, коли $q_0 = 0$, тобто коли на початку процесу було n_0 нейтронів, а решта нейтронів з'явилася лише за рахунок поділу урану. Тоді рівняння (3.153) спрощується і приймає вигляд

$$\frac{dn}{dt} = (a-b)n\,. \tag{3.154}$$

Розв'язок цього рівняння відомий:

$$n(t) = n_0 e^{(a-b)t}. \qquad (3.155)$$

Якщо $a < b$, то число нейтронів зменшується, а якщо $a > в$, то воно зростає. Таким чином, якщо $a < b$, то процес поділу ядер згасає і вибуху не буде, а якщо $a > b$, то кількість ядер, які поділились збільшується лавиноподібно.

Співвідношення між a і b залежить від радіуса r. Справді, нерівність $a > b$ можна подати у вигляді

$$N(\nu - 1)\alpha\pi R^2 \nu < \frac{3k}{r}\nu. \qquad (3.156)$$

Ця нерівність дозволяє визначити *критичний радіус* $r_{кр}$, тобто такий радіус, що коли $r < r_{кр}$, то нейтрони не розмножуються, а якщо $r > r_{кр}$, то відбувається вибух:

$$r_{кр} = \frac{3k}{N(\nu - 1)\alpha\pi R^2}. \qquad (3.157)$$

Відповідне значення маси уранової кулі називають *критичною масою*.

Визначення критичної маси вимагає низки фізичних дослідів, які дозволяють знайти число нейтронів, що утворюється після розпаду кожного атома урану, радіус захвату і т. ін. Всі ці фізичні константи потрібно визначити з дуже високою точністю, позаяк навіть незначне відхилення від критичної маси змінює хід процесу.

Якщо узяти два півсферичні куски урану, маса кожного з яких менше, ніж критична, а сумарна маса більша за критичну, і швидко наблизити їх один до одного, то розпочнеться ланцюгова реакція, яка і призведе до атомного вибуху. Це закладено в принцип побудови атомної бомби.

Як уже було відмічено вище, для мирного використання атомної енергії не підходять ні затухаючі процеси, ні його лавиноподібне зростання. З метою одержання керованого процесу, потрібно увести постійне джерело нейтронів і розв’язати повне диференціальне рівняння (3.153).

Одним із розв’язків цього рівняння є число $q_0/(b-a)$. Справді, якщо $dn/dt = 0$, то

$$n = \frac{q_0}{b-a}.$$

Уведемо нову шукану функцію $y(t)$, поклавши

$$n(t) = \frac{q_0}{b-a} + y(t). \tag{3.158}$$

Підставимо вираз (3.158) у диференціальне рівняння (3.155). Тоді одержимо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = (a-b)y. \tag{3.159}$$

Розв’язок цього рівняння відомий:

$$y(t) = Ce^{-(a-b)t}, \tag{3.160}$$

де C – стала інтегрування.

Отже,

$$n(t) = \frac{q_0}{b-a} + Ce^{-(a-b)t}. \tag{3.161}$$

Значення сталої інтегрування визначається із початкових умов. Якщо в самому початку процесу не було нейтронів, тобто коли $n(0) = 0$, то

$$C = -\frac{q_0}{b-a}. \tag{3.162}$$

Підставивши вираз (3.162) у вираз (3.161) маємо:

$$n(t) = \frac{q_o}{b-a}\left(1 - e^{-(a-b)t}\right). \tag{3.163}$$

Якщо $a < b$, то у разі зростання t функція $\exp(a - b)t$ швидко наближається до нуля і тому число нейтронів в системі наближається до значення $q_0/(b - a)$. Тепер видно, що керуючи значенням числа b (тобто кількістю поглинутих нейтронів), можна одержати бажане значення розпаду ядер в секунду, тобто бажану кількість енергії. Підтримування системи у стані, близькому до критичного, здійснюється шляхом автоматичного керування. Тут виникають складні математичні задачі, для розв'язання яких використовують швидкодіючі обчислювальні машини.

Певна річ, розроблена вище схема дає лише грубе наближення до реальної дійсності. Точна теорія вимагає урахування форми реактора, розподілу швидкостей по напрямкам й величині і багатьох інших факторів. Але і грубий розрахунок дає правильну кількісну картину цього явища.

3.5.6. Процеси вирівнювання

3.5.6.1. Дослідження процесу розмноження нейтронів

Формула (3.163) свідчить, що кількість нейтронів в процесі їхнього розмноження збільшується від нульового значення до значення, яке не можна відрізнити від значення $q_0/(b - a)$. Процеси такого виду називають *процесами вирівнювання.* Вони виникають зазвичай тоді, якщо швидкість зміни якої-небудь величини пропорційна відхиленню цієї величини від її деякого значення A і має знак, обернений цьому відхиленню. Саме це мало місце у процесі розмноження нейтронів. Оскільки число нейтронів в системі

$$n = \frac{q_0}{b - a},$$

то похідну функції (3.161) з урахуванням сталої інтегрування (3.162) можна визначити так:

$$\frac{dn}{dt} = (a-b)\left(n - \frac{q_0}{b-a}\right), \ a-b<0. \tag{3.164}$$

Розв’язок диференціального рівняння (3.164) відомий:

$$n(t) = \frac{q_0}{b-a} + Ae^{-(a-b)t}.$$

Отже, при $t \to \infty$ значення величини n швидко наближається до значення

$$A = \frac{q_0}{b-a}.$$

3.5.6.2. Дослідження процесу вирівнювання температури нагрітого тіла при його охолодженні

Простий дослід з нагрітим чайником свідчить, якщо його зняти з вогню, то спочатку він охолоджується досить швидко, а потім охолодження його йде значно повільніше. Справа в тому, що швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою T чайника і температурою T_o навколишнього повітря. Поступово відбувається теплообмін між чайником і повітрям, яке його охоплює і температура вирівнюється. Закон зміни температури чайника має вигляд

$$T = T_0 + (100 - T_0)e^{-kt}. \tag{3.165}$$

Значення коефіцієнта k залежить від форми чайника, матеріалу, з якого його виготовлено, і кількості води, яка знаходиться у ньому. Повільніше охолоджується чайник, який має кулеподібну форму. Доведено, що із усіх тіл заданого об’єму, куля має найменшу площу поверхні на якій діється теплообмін у такому чайнику.

3.5.6.3. Дослідження процесу вирівнювання сили струму в електричному колі

Цікавим прикладом процесом вирівнювання, з яким приходиться мати справу, є вмикання і вимикання електричного струму. Якщо повернути вимикач, то лампочка загоряється так швидко, що цей процес здається протікає миттєво. Насправді, і тут виникає процес вирівнювання, який ускладнюється ще і тим, що в мережі протікає змінний струм.

Вивчимо, як змінюється струм, якщо вмикається джерело, яке має сталу електрорушійну силу (ЕРС) E_o. Нехай опір кола дорівнює R, а в нього включено котушку з індуктивністю L. Тоді, як відомо, має місце рівність

$$E_0 = \varphi_R + \varphi_L,$$

де φ_R і φ_L – падіння напруги на відповідних ділянках кола.

У такому випадку

$$\varphi_R = RI, \text{ а } \varphi_L = L\frac{dI}{dt},$$

де I – сила струму.

Таким чином, диференціальне рівняння зміни сили струму в колі має вигляд:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E_0}{R}\right). \tag{3.166}$$

Розв’язок цього рівняння відомий:

$$I = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Позаяк на початку ($t = 0$) сила струму $I = 0$, то стала $A = -E_0/R$ і тому

$$I = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (3.167)$$

У разі зростання часу t величина $\exp\left(-\frac{R}{L}\right)t$ зменшується і ми одержуємо для I значення, яке і визначається згідно з законом Ома:

$$I = \frac{E_0}{R}. \qquad (3.168)$$

Дуже цікавим є процес розмикання кола з індуктивністю. Якщо замкнути коло, виключивши з нього ЕРС, то сила струму в колі почне зменшуватися згідно із законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad (3.169)$$

де I_0 – сила струму в момент часу $t = 0$.

Зовсім іншим буде закон, якщо раптово розімкнути коло. В цьому випадку опір мережі швидко зміниться від значення R до безкінечності (або іншими словами до дуже великого значення). Якщо сила струму зменшиться від значення I_0 до нуля за короткий час τ, то швидкість його зміни

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} \qquad (3.170)$$

дуже велика і саме тому внаслідок самоіндукції виникає велика різниця потенціалів на пластинах рубильника, приблизно рівна – $L\, I_0/\tau$. При цьому може відбутися пробій повітряного простору між розімкнутими пластинами рубильника і між ними проскочить іскра.

Таким чином, у разі розмикання можна одержати різницю потенціалів, яка буде у багато разів перевершувати ЕРС джерела напруги. Цим широко користуються в техніці, зокрема в системі запалювання двигунів внутрішнього згорання.

Описане явище має і неприємний бік – електричні лампочки найчастіше перегорають під час вмикання чи вимикання світла. Щоб цього уникнути, в кінотеатрах вимикають світло поступово, за допомогою реостата. Тоді струм зменшується повільно і ЕРС самоіндукції незначна.

Запитання і завдання для самоперевірки

3.1. Відомо, що коливальна система (математичний чи пружинний маятники) представляється лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку. Наведіть загальний розв'язок цього рівняння у якому присутні або дві сталі інтегрування, або амплітуда коливань і початкова фаза. Чи рівнозначні ці розв'язки?

3.2. Як визначити амплітуду коливань і початкову фазу коливальної системи, якщо задано її початкові умови?

3.3. Що таке вимушені коливання? За яких умов вони виникають? З якою частотою відбуваються вимушені коливання?

3.4 Від чого залежить амплітуда вимушених коливань?

3.5. У чому полягає явище резонансу?

3.6. Яка роль сили тертя під час вимушених коливань? Чи призводить сила тертя до затухання коливань?

3.7. Від яких параметрів змішувального басейну залежить його стала часу?

3.8. Які види коливань концентрації маси вхідного потоку, що подається до буферного басейну, вам відомі?

3.9. Що таке степінь демпфірування буферного басейну?

3.10. Від яких величин залежить степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього збурювального діяння концентрації маси, що змінюється згідно з синусоїдним законом? Що можна сказати про вплив об'єму буферного басейну на степінь демпфірування?

3.11. Від яких величин залежить степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього збурювального діяння концентрації маси, що змінюється у вигляді прямокутної хвилі? Що можна сказати про вплив величини об’єму буферного басейну і періоду коливань на степінь демпфірування?

3.12. Від яких величин залежить степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього збурювального діяння концентрації маси, що змінюється стрибкоподібно? Що можна сказати про вплив величини об’єму буферного басейну на степінь демпфірування?

3.13. Від яких величин залежить степінь демпфірування буферного басейну у разі дії на нього i-го (i=1, 2, …, n) збурю вального діяння концентрації маси, що змінюється згідно з синусоїдальним законом? Що можна сказати про вплив об’єму буферного басейну і кількості вхідних потоків на степінь демпфірування?

3.14. Як можна оцінити ефективність роботи змішувальної системи?

3.15. Що таке напір маси у напірному ящику папероробної машини? Що таке швидкість сітки машини? Який існує зв’язок між ними?

3.16. Який зв’язок існує між напором маси у випускальній щілині, рівнем маси у напускній камері і тиском повітря у повітряній подушці напірного ящика закритого типу?

3.17. Від чого залежить швидкість зміни температури тіла? Наведіть залежність зміни температури тіла для випадку його нагрівання у сушильній камері.

3.18. Наведіть залежність зміни температури тіла для випадку його охолодження у холодильній камері.

3.19. Як за допомогою похідної зміни температури тіла можна визначити про зростання або спадання температури тіла?

3.20. Чи впливають на швидкість перебігу спонтанного розпаду ядер радіоактивної речовини зовнішні фактори зміни температури і тиску, електричні і магнітні поля, агрегатний стан хімічної сполуки?

3.21. Від яких величин залежить швидкість розпаду радіоактивної речовини?

3.22. Що можна сказати про період піврозпаду радіоактивних речовин? Чи він однаковий для всіх таких речовин чи він притаманний кожній із них?

4. В пошуках оптимальних рішень

4.1. Задачі на оптимізацію

Великий російський математик Пафнутій Львович Чебишев у роботі «Черчение географических карт» писав, що особливу важливість мають ті методи науки, які дозволяють розв'язати задачу, загальну для всієї практичної діяльності людства і як розпоряджатися своїми коштами для досягнення по можливості найбільшої вигоди. З такими задачами приходиться мати справу представникам найрізноманітніших спеціальностей – інженери-технологи прагнуть організувати виробництво так, щоб на даному обладнанні виробити якнайбільше продукції, конструктори прагнуть розробити найлегший прилад на космічному кораблі, економісти намагаються так спланувати закріплені заводи до джерел сировини, щоб транспортні витрати були найменшими.

Але не тільки людям приходиться розв'язувати подібні задачі. Несвідомо з ними справляються і деякі види комах і інших живих істот. Скажімо, форма комірок бджолиних стільників така, що при заданому об'ємі на них витрачається найменша кількість воску. І хоча бджоли не вивчали вищу математику, невблаганний природний відбір привів до того, що вижили лише бджоли, які витрачали найменше зусиль на будівництво стільників.

Бджолам допомагає розв'язувати свої задачі інстинкт. Людина ж відрізняється від них тим, що на допомогу приходить розум. Маркс говорив: «Але самий поганий архітектор від найліпшої бджоли з самого початку відрізняється тим, що перш ніж будувати комірку із воску, він уже побудував її у своїй голові».

Математикам поталанило розробити методи розв'язання задач на найбільше і найменше значення, або, як їх ще називають, задач на *оптимізацію* (від латинського «оптимум» найкращий).

Слід вирізняти два види задач на оптимізацію. У задачах першого виду поліпшення досягається за рахунок якісних змін (вибір нових конструктивних рішень, перехід на нову технологію виробництва даної продукції тощо). У задачах другого роду якісний бік справи залишається незмінним, але змінюються кількісні показники, скажімо, розміри приладу чи апарату, співвідношення речовин, які використовуються для хімічної реакції тощо. Ми будемо займатися здебільшого задачами другого роду. З математичної точки зору в цих задачах шукають найбільше і найменше значення функцій, які залежать від однієї чи декількох змінних.

4.2. Зростаючі й спадаючі функції. Максимуми й мінімуми

Простіше всього, звичайно, вивчати функції від одного аргументу – що більше аргументів, то складніше задача і важче визначати оптимальні значення величин. Для функцій одного аргументу пошук найбільшого і найменшого значень робиться за допомогою диференціального числення.

Розглянемо графік деякої функції, наведеної на рис. 4.1.

Аналіз графіка цієї функції свідчить, що у точці a вона має значення, яке більше з усіх сусідніх з ним значень (або, кажучи строго, усіх значень у деякого околу цієї точки). У точці ж b значення функції менше усіх сусідніх значень. Кажуть, що функція має у точці *a максимум*, а в точці *b мінімум* (від латинських слів «максимум» найбільший і «мінімум» – найменший). Обидва поняття часто об'єднують одним словом *екстремум* (від латинського слова «крайній»).

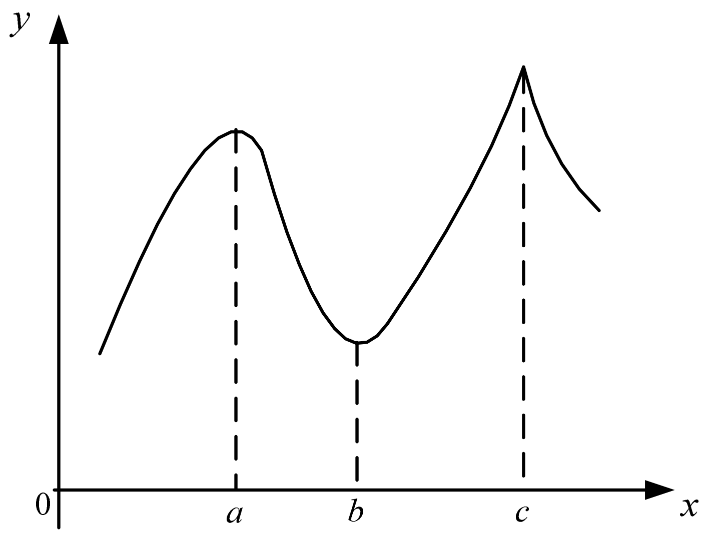


Рис. 4.1 – Функція $y = f(x)$

Як у точці a так і в точці c ця функція має максимум. Але геометрично ці точки різні – у точці a існує горизонтальна дотична до графіку функції, а у точці c графік має загострення, або, як кажуть, пік, і будь-якої дотичної провести до нього неможливо. Інших точок екстремуму не має – у будь-якій точці або дотична горизонтальна, або її зовсім не існує.

Відомо, що коефіцієнт дотичної дорівнює похідній у точці дотику. Тому *в точках екстремуму дотична або дорівнює нулю, або не існує.* Ця ознака дозволяє знаходити «підозрілі на екстремум» точки. Для цього достатньо знайти похідну даної функції й подивитись при яких значеннях аргументу вона перетворюється в нуль, а при яких не існує. Але далеко не у всіх точках, де похідна дорівнює нулю чи не існує, функція має екстремум. Справді, похідна функції

$$y = x^3$$

дорівнює

$$y' = 3x^2$$

і перетворюється в нуль, якщо $x = 0$. Але функція $y = x^3$ зростає на усій числовій осі і не має екстремуму в підозрілій точці $x = 0$. Тому потрібно знайти умови достатні для того, щоб досліджувана функція була точкою екстремуму.

Аналіз графіку функції, наведеного на рис. 4.1 свідчить, що ліворуч від точки a функція зростає, а праворуч від неї вона спадає. Отже, у самій точці a функція досягає найбільшого значення у порівнянні з сусідніми. Аналогічно, якщо при переході через деяку точку спадання функції змінюється її зростанням, то ця точка є точкою мінімуму.

Таким чином, все зводиться до того, щоб з'ясувати, де функція зростає, а де вона спадає. Саме це питання з'ясовується за допомогою похідних. Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ функція

$$y = f(t)$$

має додатну похідну. Тоді точка, яка рухається згідно із законом $f(t)$, у кожний момент часу має додатну швидкість і тому рухається у додатному напрямку (скажімо, ліворуч). Отже, якщо $t_1 < t_2$, то в момент часу t_2 точка, що рухається, опиниться правіше, ніж у момент часу t_1. Іншими словами, із $t_1 < t_2$, випливає, що $y_1 < y_2$, тобто функція $y = f(t)$ зростає на відрізку $[a, b]$. Вона буде зростаючою і у випадку, коли в деяких точках відрізку $[a, b]$ її похідна перетворюється в нуль – в цьому випадку точка, рухаючись зліва направо, в деякі моменти часу зупиниться.

Точно так же доводиться, що якщо на відрізку $[a, b]$ похідна від функції $y = f(t)$ від'ємна (в крайньому випадку перетворюється в нуль в декількох точках), то ця функція спадає на відрізку $[a, b]$.

Ми одержали достатню умову для того, щоб точка c була точкою екстремуму функції: якщо при переході через точку c похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», при цьому функція $f(t)$ неперервна в точці c, то c і є точкою максимуму для $f(t)$; точно так же зміна знаку похідної з «мінуса» на «плюс» характеризує точку мінімуму. Звідси випливає правило дослідження функції на екстремум.

Щоб знайти точку екстремуму функції, потрібно визначити її похідну і знайти точки, у яких похідна перетворюється в нуль чи не існує. Ці точки «підозрілі на екстремум». Після цього потрібно знайти знак похідної ліворуч і праворуч від кожної точки, що досліджується. Якщо при переході через таку точку похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», то в ній функція має максимум, якщо знак похідної змінюється з «мінуса» на «плюс», то мінімум, а якщо ліворуч і праворуч від точки знаки похідної одинакові, то в ній функція має максимум, якщо знак похідної змінюється з «мінуса» на «плюс», то мінімум, а якщо ліворуч і праворуч від точки знаки похідної одинакові, то наша підозра не справдилась і у тій точці екстремуму не має.

Тепер ми уже можемо розв'язувати задачі, пов'язані з пошуком оптимальних значень. При розв'язанні таких задач слід мати на увазі, що найбільшого і найменшого значення функції можуть досягати не тільки в точках екстремуму, але й на кінцях області визначення функції. Тому для розв'язання задачі на оптимізацію необхідно:

1) виразити величину, яка оптимізується, як функцію деякої змінної і знайти область визначення цієї функції;

2) знайти точки екстремуму функції;

3) обчислити значення функції в екстремальних точках і на кінцях проміжку, де визначено функцію;

4) вибрати з цих значень оптимальне.

При цьому корисно мати на увазі, що точки, в яких ми шукаємо оптимальні значення, не змінюються при наступних операціях над функцією:

а) збільшенні сталого доданку;

б) множенні на сталий множник (тільки якщо він від'ємний, то максимуми стають мінімумами і навпаки);

в) піднесенні функції до квадрату (за умови, що вона невід'ємна).

Покажемо, на деяких прикладах, як розв'язуються оптимізаційні задачі.

4.3. Пошук екстремумів функції однієї змінної

4.3.1. Визначення максимального об'єму ящика з днищем квадратної форми

Нехай маємо заготовку з листового матеріалу квадратної форми, кожна із сторін якої дорівнює a (рис. 4.2).

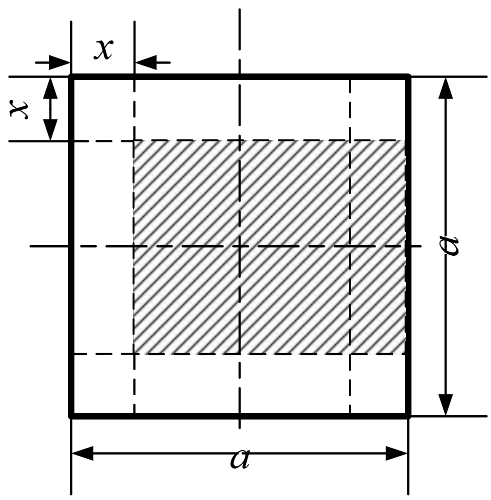


Рис. 4.2 – Розгорнута поверхня ящика з днищем квадратної форми

Якщо висоту ящика позначити через x, то його об'єм

$$V = Sx, \qquad (4.1)$$

де S – площа днища ящика.

Площа днища цього ящика

$$S=(a-2x)^2. \tag{4.2}$$

Підставивши вираз (4.2) у вираз (4.1), одержимо математичну модель ящика

$$V(x)=(a-2x)^2 x, \tag{4.3}$$

$$0<x<a/2.$$

З математичної точки зору, задача про ящик максимального об’єму з днищем квадратної форми зводиться до визначення такого значення його висоти *x*, при якій досягає свого найбільшого значення функція (4.3).

Дослідимо функцію (4.3) на максимум. Перша похідна цієї функції

$$\frac{\partial V}{\partial x}=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2$$

або

$$\frac{\partial V}{\partial x}=(a-2x)(a-6x). \tag{4.4}$$

Екстремум функції (4.3) буде тоді, коли

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

або тоді, якщо

$$(a-2x)(a-6x)=0. \tag{4.5}$$

Звідси випливає, що

$$x_1=\frac{a}{6},\ \text{а}$$

$$x_2=\frac{a}{2}.$$

Оскільки згідно умови задачі $0<x<\frac{1}{2}a$, то другий корінь не підходить. Підставивши перший корінь у вираз (4.3), одержимо вираз для визначення максимального об’єму розглядуваного ящика:

$$V_{\max} = \left(a - 2\frac{a}{6}\right)^2 \frac{a}{6}$$

або

$$V_{\max} = \frac{2}{27}a^3. \qquad (4.6)$$

Залежність об’єму розглядуваного ящика від його висоти наведено на рис. 4.3.

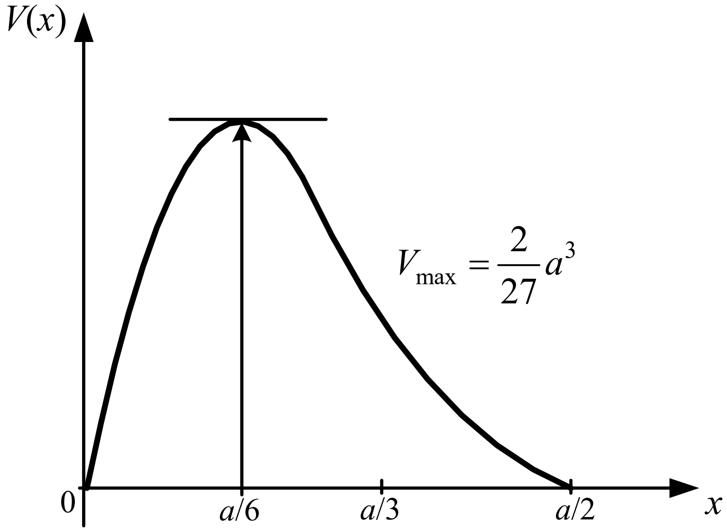


Рис. 4.3 – Залежність об’єму $V(x)$ ящика з днищем квадратної форми від його висоти x

4.3.2. Визначення максимального об’єму ящика з днищем прямокутної форми

Схему ящика з днищем прямокутної форми показано на рис. 4.4.

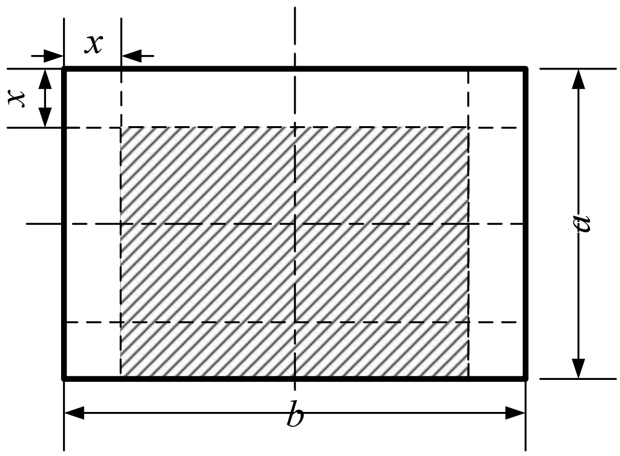


Рис. 4.4 – Розгорнута поверхня ящика з днищем прямокутної форми

Якщо висота ящика дорівнює x, то його об’єм

$$V = Sx, \tag{4.7}$$

де S – площа днища ящика.

Площа днища ящика згідно з рис. 4.4

$$S = (a - 2x)(b - 2x)\,. \tag{4.8}$$

Підставивши вираз (4.8) у вираз (4.7), одержимо математичну модель ящика з прямокутним днищем:

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x; \tag{4.9}$$

$$b > a,\ \ 0 < x < \frac{a}{2},\ 0 < x < \frac{b}{2}\,.$$

З математичної точки зору задача про ящик максимального об’єму з днищем прямокутної форми аналогічна розглянутій у п. 4.3.1. У даному випадку потрібно дослідити функцію (4.9) на максимум. Перша похідна від цієї функції

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[(a - 2x)(-2) + (b - 2x)(-2)\right]x + (a - 2x)(b - 2x)$$

або

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 12x^2 - 4(a+b)x + ab\,.$$

Екстремум функції (4.9) буде тоді, коли

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

тобто тоді, коли

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0\,. \qquad (4.10)$$

Розглянемо два випадки:

Випадок 1. $a = b$.

Якщо $a = b$, то вираз (4.10) має вигляд

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

або

$$(a-2x)(a-6x) = 0\,.$$

Цей випадок розглянуто у п. 4.3.1.

Випадок 2. $b = 2a$.

Якщо $b = 2a$, то вираз (4.10) має вигляд:

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{6} = 0\,.$$

Звідси випливає, що

$$x_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{12}}\,,\ \text{а}\ x_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{\sqrt{12}}\,.$$

Оскільки згідно з умовою задачі $0 < x < \frac{a}{2}$, то перший корінь не підходить. Отже,

$$x = \frac{a}{2} - \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a\,.$$

Таким чином, максимальне значення об’єму ящика з днищем прямокутної форми ($b = 2a$) можна визначити так:

$$V_{max} = \left[\left(a - 2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a\right)\left(2a - 2\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a\right)\right]\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a\,.$$

Виконавши відповідні перетворення маємо

$$V_{max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}a^3\,. \qquad (4.11)$$

4.3.3. Визначення оптимальних параметрів банки заданого об'єму, яка має найменшу площу поверхні

Розгорнуту поверхню банки показано на рис. 4.5, б.

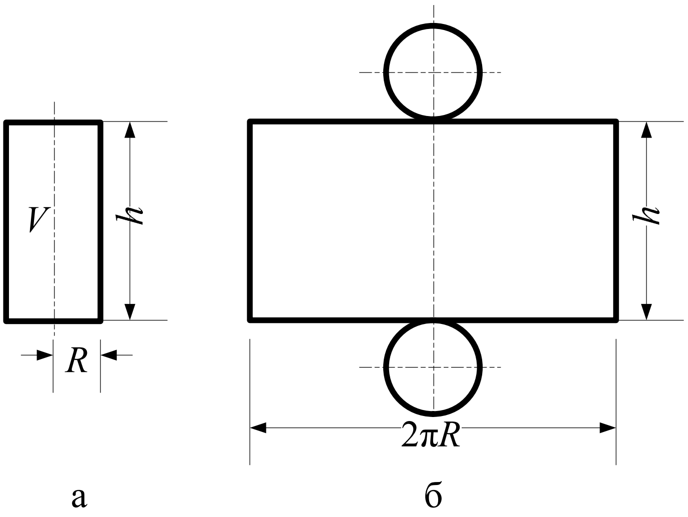


Рис. 4.5 – Банка:

а – загальний вигляд; б – розгорнута поверхня

Якщо висота банки дорівнює h, то її об'єм

$$V = \pi R^2 h\,, \qquad (4.12)$$

де R – радіус днища банки.

Площа поверхні банки

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh\,. \tag{4.13}$$

Визначимо висоту банки через радіус її днища згідно з виразом (4.12):

$$h = \frac{V}{\pi R^2}\,. \tag{4.14}$$

Підставивши вираз (4.14) у вираз (4.13) визначимо залежність площі поверхні банки від радіуса її днища

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}\,, \tag{4.15}$$

$$0 < R < \infty.$$

Таким чином, з математичної точки зору задача про «найкращу» банку зводиться до визначення такого значення R, при якому досягає свого найменшого значення функція (4.15).

Обчислимо першу похідну функції (4.15):

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

або

$$S'(R) = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V)\,. \tag{4.16}$$

Дослідимо знак похідної (4.16) тобто знак виразу

$$2\pi R^3 - V = 0\,.$$

Звідси випливає, що R_1 при якому функція (4.15) має найменше значення, можна подати так:

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 0{,}542\sqrt[3]{V}\,. \tag{4.17}$$

Якщо $0 < R < R_1$, то похідна (4.16) від'ємна і тому функція (4.15) спадає.

Якщо $R_1 < R < \infty$, то похідна (4.15) додатна і функція (4.15) зростає.

Отже, свого найменшого значення ця функція досягає у точці $R = R_1$, у якій похідна (4.16) перетворюється в нуль.

Графік функції (4.15), який ілюструє результати виконаного дослідження, показано на рис. 4.6.

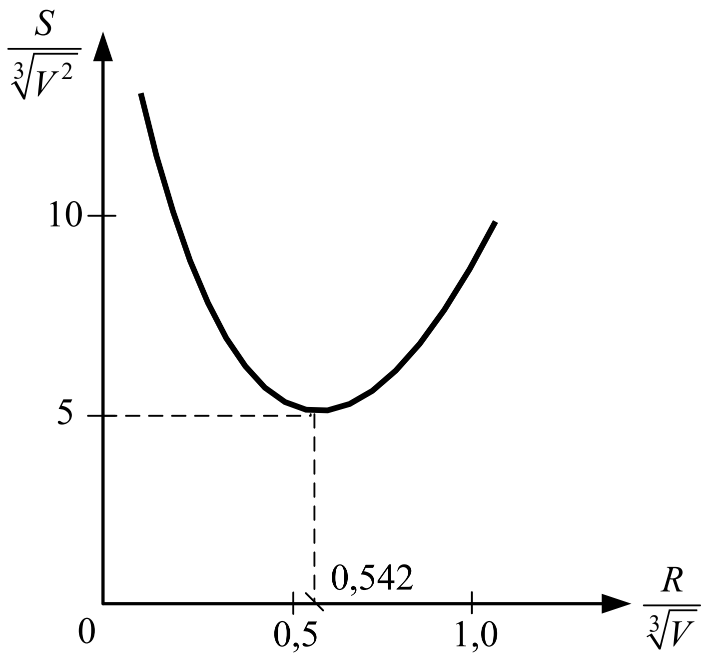


Рис. 4.6 – Залежність площі поверхні банки від радіуса її днища

Таким чином, з точки зору умови мінімальності площі поверхні банки заданого об'єму, радіус днища банки

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \tag{4.18}$$

Висоту h_1 такої банки можна визначити так. Згідно з виразом (4.12)

$$h_1 = \frac{V}{\pi R_1^2}.$$

Отже, об'єм банки

$$V = \pi R_1^2 h_1. \tag{4.19}$$

Піднісши вираз (4.18) до куба, маємо:

$$V = 2\pi R_1^3 . \tag{4.20}$$

Порівнявши вирази (4.19) і (4.20), визначимо висоту банки:

$$h_1 = 2R_1 .$$

Отже, висота банки заданого об’єму V

$$h_1 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} . \tag{4.21}$$

Підставивши вираз (4.18) у вираз (4.15), визначимо мінімальну площу поверхні банки заданого об’єму

$$S(R_1) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \le S(R) . \tag{4.22}$$

4.3.4. Визначення оптимальних параметрів банки заданого об’єму, яка має найменшу довжину зварних швів

Банку зі зварними швами показано на рис. 4.7.

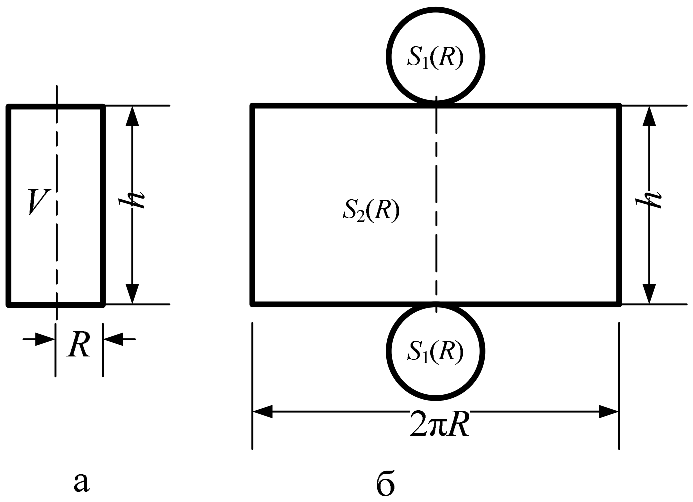


Рис. 4.7 – Банка:

а – загальний вигляд; б – довжина зварних швів

Об’єм розглядуваної банки

$$V = \pi R^2 h, \tag{4.23}$$

де R – радіус днища банки; h – висота банки.

Довжина зварних швів банки

$$l = h + 2(2\pi R)$$

або

$$l = h + 4\pi R. \tag{4.24}$$

Згідно з виразом (4.23) висота банки

$$h = \frac{V}{\pi R^2}. \tag{4.25}$$

Підставивши вираз (4.25) у вираз (4.24), одержимо математичну модель банки заданого об’єму, довжина швів якої залежить від радіуса днища банки:

$$l(R) = 4\pi R + \frac{V}{\pi R^2}, \tag{4.26}$$

$$0 < R < \infty$$

Таким чином, з математичної точки зору, задача про оптимальні параметри банки зводиться до визначення такого значення радіуса днища R, при якому досягає свого найменшого значення функція (4.26).

Обчислимо першу похідну функції (4.26):

$$l'(R) = 4\pi - \frac{2V}{\pi R^3}$$

або

$$l'(R) = \frac{2}{\pi R^3}\left(2\pi^2 R^3 - V\right). \tag{4.27}$$

Дослідимо знак похідної (4.27) тобто знак виразу

$$2\pi^2 R^3 - V = 0.$$

Звідси легко обчислити таке значення радіуса днища, при якому банка буде мати найменшу довжину швів:

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}} = 0{,}37\sqrt[3]{V}\,. \tag{4.28}$$

Якщо $0 < R < R_2$, то похідна (4.27) від'ємна і тому функція (4.26) спадає. Якщо $R_2 < R < \infty$, то похідна (4.27) додатна і отже, функція (4.26) зростає.

Саме тому свого найменшого значення ця функція досягає у точці, $R = R_2$, у якій її похідна перетворюється в нуль.

Графік функції (4.26), який ілюструє результати виконаного дослідження показано на рис. 4.8.

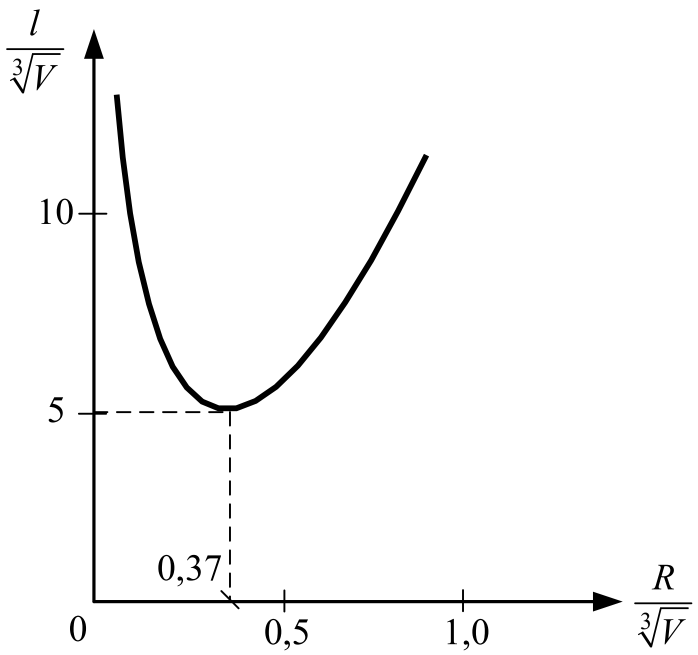


Рис. 4.8 – Залежність довжини зварних швів банки заданого об'єму від радіуса її днища

Таким чином, радіус днища такої банки з точки зору умови мінімальності довжини її зварних швів визначається так:

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}. \quad (4.29)$$

Висоту розглядуваної банки можна визначити так. Згідно з виразом (4.23) висота банки заданого об'єму

$$h_2 = \frac{V}{\pi R_2^2}.$$

Звідси випливає, що об'єм банки

$$V = \pi R_2^2 h_2. \quad (4.30)$$

Із виразу (4.29) маємо:

$$V = 2\pi^2 R_2^3. \quad (4.31)$$

Порівнюючи вирази (4.30) і (4.31), визначимо висоту банки заданого об'єму:

$$h_2 = 2\pi R_2. \quad (4.32)$$

Підставивши вираз (4.32) у вираз (4.26), визначимо мінімальну довжину зварних швів банки заданого об'єму:

$$l(R_2) = 3\sqrt[3]{4\pi V} \le l(R); \quad (4.33)$$

$$0 < R < \infty$$

4.3.5. Визначення оптимальних параметрів циліндра, вписаного в кулю заданого радіуса, який має найбільший об'єм

Схему розміщення циліндра найбільшого об'єму у кулі заданого радіуса показано на рис. 4.9.

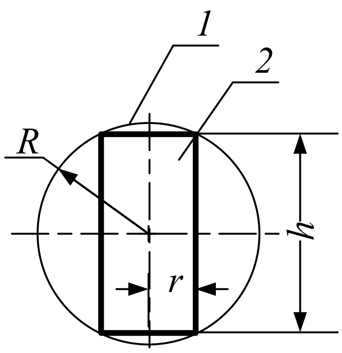


Рис. 4.9 – Схема розміщення циліндра в кулі радіусом R:

1 – куля; 2 – циліндр

Позначимо висоту, радіус днища і об'єм циліндра відповідно через h, r і V. Тоді об'єм циліндра

$$V = \pi r^2 h . \tag{4.34}$$

Позаяк

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2 ,$$

то об'єм циліндра

$$V(h) = \pi\left(R^2 - \frac{1}{4}h^2 \right)h$$

або

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3 \right). \tag{4.35}$$

Таким чином, з математичної точки зору задача про максимальний об'єм циліндра, вписаного в кулю радіусом R, зводиться до визначення такої його висоти h_0, при якій досягає свого найбільшого значення функція (4.35) у проміжку $]0, 2R[$.

Похідна функції (4.35)

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2 \right).$$

Прирівнявши $V'(h)$ до нуля, одержимо єдину критичну точку:

$$h_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} R, \tag{4.36}$$

яка належить проміжку]0, 2*R*[, у якій функція (4.35) приймає найбільше значення:

$$V(h_0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \cdot R^3. \tag{4.37}$$

Таким чином, найбільший об'єм циліндра, вписаного в кулю радіуса *R* буде тоді, якщо його висота визначена згідно з виразом (4.36).

Примітка. Якщо потрібно було вписати в кулю радіусом *R* прямокутний паралепіпед найбільшого об'єму *V*, то прийшлося б досліджувати функцію від двох змінних:

$$V(x, y) = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2},$$

де *x* і *y* – сторони основи паралепіпеду.

4.3.6. Визначення оптимальних параметрів балки найбільшої міцності

Основним елементом будь-якої будівельної конструкції є балка. Міцність балки залежить від того, яку форму має її поперечний переріз. При цьому висота перерізу відіграє значно більшу роль, ніж її ширина. Справді, важче зігнути лінійку, поставлену на ребро, а ніж лінійку, яка лежить плазом.

Із курсу «Опір матеріалів» відомо, що міцність балки з прямокутним перерізом пропорційна ширині балки *b* і квадрату її висоти *h*. Іншими словами, міцність такої балки (виміряної в деяких одиницях)

$$y=kbh^2, \tag{4.38}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від довжини балки, матеріалу із якого її виготовлено і т. ін.

Дерев'яні балки зазвичай витесують із круглих колод. У зв'язку з цим виникає наступна задача:

Із колоди, яка має радіус R, зробити балку найбільшої міцності (рис. 4.10).

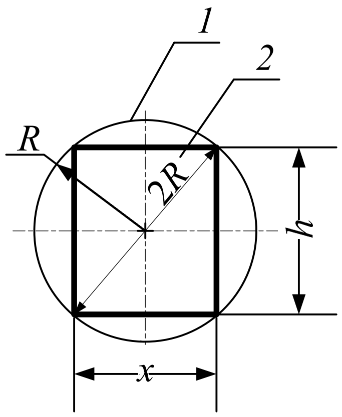


Рис. 4.10 – Поперечний переріз балки, виготовленої із деревної колоди:

а – колода; б – балка

Відомо, що міцність вирізаної балки y є функцією від її ширини x. При цьому, якщо узяти ширину досить великою (майже рівної діаметру колоди), то одержимо балку дуже малої висоти і, отже, міцність її буде малою. Малою буде міцність балки, якщо зробити її і дуже вузькою.

Щоб знайти, при яких співвідношеннях довжини й ширини міцність балки буде найбільшою, визначимо її міцність як функцію від її ширини x.

Згідно з рис. 4.10 висота балки

$$h=\sqrt{4R^2-x^2}\,, \tag{4.39}$$

а площа поперечного перерізу

$$S=x\sqrt{4R^2-x}\,. \tag{4.40}$$

Саме тому міцність балки

$$y(x) = kx(4R^2 - x^2)\,, \tag{4.41}$$

$$0 < x < 2R.$$

Функція (4.41) перетворюється в нуль, якщо $x = 0$ чи $x = 2R$ і вона додатна між цими значеннями. Отже вона має максимум, який лежить між 0 і $2R$.

Похідна функції (4.41) визначається так:

$$y'(x) = k(4R^2 - x^2) + kx(-2x)\,.$$

Отже

$$y'(x) = k(4R^2 - 3x^2)\,. \tag{4.42}$$

Похідна перетворюється в нуль на відрізку $[0, 2R]$ тоді, коли

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}R\,. \tag{4.43}$$

Це і є оптимальне значення ширини b балки. Висоту балки визначимо із виразу (4.39), підставивши в нього вираз (4.43):

$$h = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2}$$

або

$$h = \frac{2}{3}\sqrt{6}R\,. \tag{4.44}$$

Визначимо відношення h/b:

$$\frac{h}{b} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}R}{\frac{2}{3}\sqrt{3}R} = \sqrt{2} \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}\,. \tag{4.45}$$

Саме таке відношення висоти витесаної балки до її ширини приписується правилами виконання будівельних робіт.

4.3.7. Задача Дідони

Легенда про заснування Карфагену говорить, що коли фінікійський корабель пристав до берега місцеві мешканці погодились продати прибульцям стільки землі, скільки можна загородити її однією шкурою бичка. Але хитра цариця Дідона розрізала цю шкуру на ремінці, зв'язала їх і загородила одержаним ременем велику ділянку землі, яка примикає до узбережжя.

Будемо вважати, що берег моря був прямолінійним, а ділянка землі мала форму прямокутника. Тоді потрібно знайти прямокутник найбільшої площі, який обмежений з одного боку морем, а з трьох інших боків ременем заданої довжини ℓ (рис. 4.11).

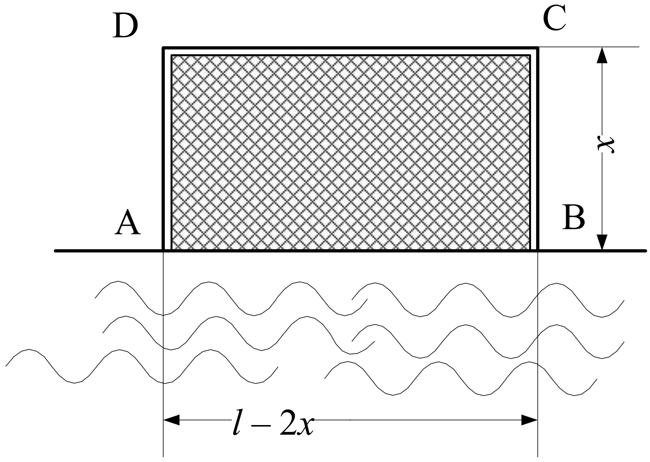


Рис. 4.11 – Ділянка землі огородженої ременем

Виберемо за аргумент x довжину відрізка [BC]. Тоді довжина відрізка [AB] дорівнює $l - 2x$. Отже, площа прямокутника

$$S = (l - 2x)x . \qquad 4.46)$$

Ця функція визначена на відрізку [0, l/2] і на його кінцях перетворюється в нуль, а всередині нього додатна. Отже, шукане оптимальне значення x лежить десь всередині цієї області.

Похідна функція (4.46)

$$S' = l - 4x \tag{4.47}$$

і вона перетворюється в нуль лише при $x=l/4$. Отже, довжина відрізка

$$\left[BC\right] = \frac{1}{4}l,$$

а довжина відрізка

$$\left[AB\right] = \frac{1}{2}l.$$

Таким чином прямокутник є половиною квадрату, який примикає довшим боком до моря.

Якщо зняти обмеження стосовно того, що границя ділянки повинна мати форму прямокутника, то можна загородити більшу ділянку землі. Для цього вона повинна мати форму півкола.

4.4. Пошук екстремумів функцій багатьох змінних

4.4.1. Ямки, горбики і сідловини

Якщо пустити по схилу котловану м'яч, то він швидко скотиться до низу і залишиться лежати на дні. В цей момент потенціальна енергія м'яча буде найменшою із можливих (за умови, звичайно, що він має знаходитися десь на поверхні котловану). Взагалі, будь-яка фізична система прагне перейти у такий стан, при якому її потенціальна енергія мінімальна (як кажуть «попасти на дно потенціальної ями»). Цей принцип дозволяє знаходити положення рівноваги складних систем.

Візьмемо, скажімо кульку 1 масою m і підвісимо її до точок А і Б за допомогою пружин 2 (рис. 4.12).

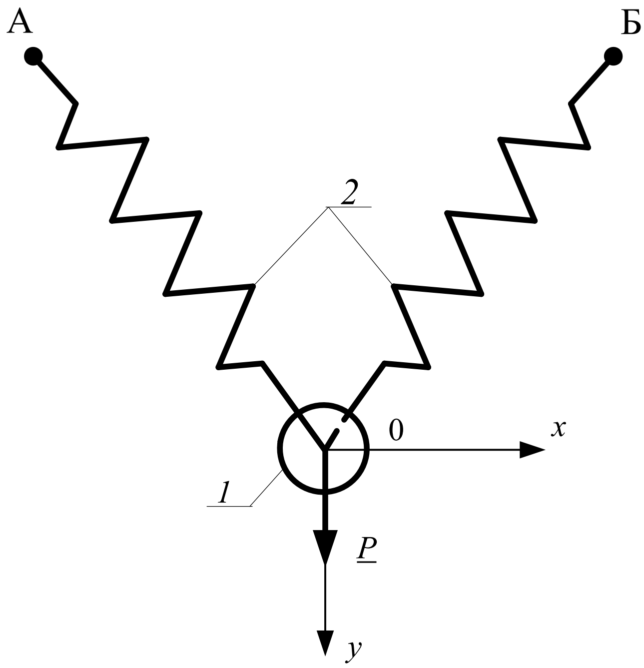


Рис. 4.12 – Коливальна система:

1 – кулька; 2 – пружини

Під дією сили тяжіння

$$\underline{P} = m\underline{g}, \tag{4.48}$$

де g – прискорення сили тяжіння, кулька почне опускатися донизу, розтягуючи обидві пружини. При цьому потенціальна енергія кульки буде зменшуватися, а пружин – збільшуватися, але потенціальна енергія цієї коливальної системи буде зменшуватися. Через деякий час система прийде в стан рівноваги – сила тяжіння буде урівноважуватися силою натягу пружин. Для того, щоб знайти положення рівноваги, достатньо знайти потенціальну енергію всієї системи і з’ясувати, коли вона буде мінімальною. Позаяк потенціальна енергія такої системи є функцією $f(x,y)$ від координат кульки, то задача звелася до пошуку мінімуму функції від двох змінних.

Звичайно, ми могли б узяти і більш складну коливальну систему, наприклад, з'єднавши дві кульки пружиною, а потім підвісити на пружинах кожну із них. Тут уже прийшлось би шукати мінімум функції чотирьох змінних (у кожної кульки маємо по дві координати). Кількість змінних зросла б, якщо ми стали б розглядати не плоскі, а просторові коливальні системи.

Пошук точок екстремуму функцій декількох змінних можна звести до випадку, коли змінюється одна із них. Справді, припустимо, що кулька вже знаходиться на дні ямки. Тоді при зміні будь-якої змінної вона буде підніматися доверху по схилу. Іншими словами, точка мінімуму функції

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4.49}$$

володіє наступними властивостями: якщо закріпити значення усіх змінних, окрім одної, то одержана функція однієї змінної буде мати мінімум при тому ж значенні цієї змінної, що і вся задана функція.

Але в точках екстремум функцій однієї змінної або дорівнює нулю, або не існує. Тому план дій дуже простий.

Спочатку будемо вважати, що усі змінні, окрім однієї, «заморожені», і знайдемо похідну одержаної функції від x_1. Таку похідну називають *частинною похідної* по x_1 і подають її так

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Після цього таким же чином знайдемо частинні похідні по x_2, по $x_3, ..., x_n$. Точками екстремуму можуть бути лише точки, у яких уся ці частинні похідні дорівнюють нулеві або не існують.

Випадки, коли похідні в точках екстремуму не існують, зустрічаються не дуже часто (такою точкою є, скажімо, вершина піраміди чи конуса). Частіше приходиться мати справу з «гладким екстремумом». А щоб знайти точку, де може з’явитися такий екстремум, потрібно розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \tag{4.50}$$

При цьому ми одержуємо рівно стільки рівнянь, скільки нам потрібно знайти невідомих. Одначе, якщо досліджувана функція залежить від високого числа змінних, то виникає система рівнянь зі стількома змінними, що її неможливо розв’язати, навіть у разі використання швидкодіючої обчислювальної техніки. Тут виникає ситуація, яку відомий американський математик Ричард Беллман назвав «прокляттям розмірності» (функції від n змінних зображуються як функції від точок n - мірного простору, і що більше у нас змінних, то вище розмірність цього простору).

Але для функцій багатьох змінних є ще одне ускладнення. У випадку функцій однієї змінної перетворення похідної в нуль, як правило, забезпечує попадання в точку екстремуму – для таких точок, коли $x = 0$ у функції

$$y = x^3$$

в нуль перетворюється не тільки перша, але й друга похідна, а це буває рідко. Саме тому у випадку однієї змінної вибір невеликий – якщо похідна дорівнює нулю, тому у нас зазвичай або максимум, або мінімум. Але для функцій двох змінних різноманітність можливостей значно більший – якщо обидві частинні похідні дорівнюють нулеві, то ми можемо опинитися не тільки в точках максимуму чи мінімуму (тобто на вершині горбика чи на дні ямки), але і на сідловині, тобто в такій точці, що при переміщенні із неї по деякій лінії значення функції зменшується, а по другій лінії – збільшується. План такої поверхні зображено на рис. 4.13.

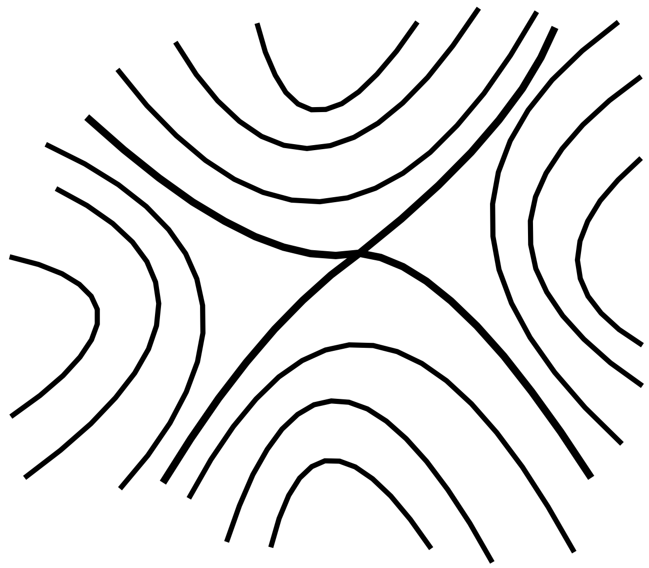


Рис. 4.13 – Лінії рівня

На топографічних картах такі лінії топографи називають горизонталями, а математики називають лініями рівня. Це лінії, на яких значення функції $z = f(x, y)$ сталі.

4.4.2. Умовний екстремум і рівняння зв'язку

Найвищою точкою Кавказу є вершина Ельбрусу (5633 м над рівнем моря). Але якщо мандрівник не захоче дертися по горах, штурмуючи відвісні стіни й обходити тріщини в льодовиках, то він може проїхати з комфортом по Воєнно-Грузинській дорозі. Тільки тоді він не попаде на Ельбрус – найвищою точкою цієї дороги буде Хрестовий перевал, який знаходиться на висоті лише 2388 м. Таким чином, накладене додаткове обмеження (проїзд лише по Воєнно-Грузинській дорозі) привело до того, що екстремальне значення висоти виявилося меншим.

В загальному випадку задачу пошуку екстремуму за наявності додаткових умов (як його називають у математиці, умовного екстремуму) можна сформулювати так: *найти екстремум* функції

$$z = f(x_1, ..., x_n),$$

якщо

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_n) = 0, \\ \quad \vdots \\ \varphi_m(x_1, ..., x_n) = 0, \end{cases} \tag{4.51}$$

де $m < n$.

Рівняння (4.51) називають *рівнянням зв'язку*. Ця назва прийшла із теоретичної механіки, де такі рівняння виникають в силу того, що окремі частини системи жорстко пов'язані одна з одною.

Щоб розв'язати задачу на умовний екстремум, можна, звичайно, спочатку із рівнянь зв'язку визначити які-небудь m змінних через $(n - m)$ змінних, що залишились (визначити можна рівно стільки змінних, скільки у нас рівнянь зв'язку), підставити одержані вирази в досліджувану функцію, а потім розв'язати задачу на звичайний екстремум. Але одержати такий вираз буває досить складно. Французький математик Лагранж запропонував інший метод розв'язання цієї задачі.

4.4.3. Метод невизначених множників Лагранжа

Метод невизначених множників Лагранжа полягає в наступному. Нехай дана функція двох змінних

$$z = f\left(x, y\right) \tag{4.52}$$

і одна умова

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{4.53}$$

Зобразимо лінії рівня функції (4.52) і лінію Г, задану рівнянням (4.53), рис. 4.14.

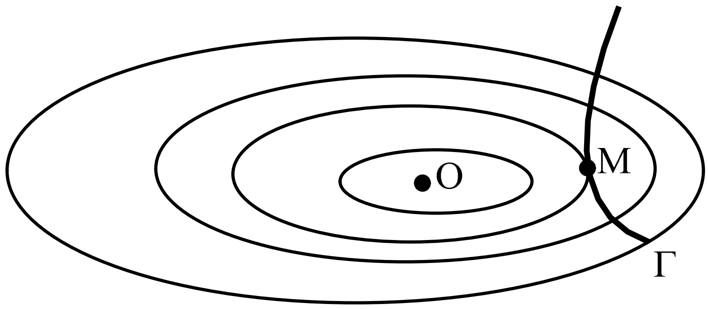


Рис. 4.14 – Лінії рівня і лінія зв'язку Г

Із рис. 4.14 видно, що рухаючись по лінії Г, ми будемо підніматися доти, доки не попадемо в точку *M*, а потім почнемо спускатися донизу. Оскільки вершина гори знаходиться у точці 0, то що ближче лінія рівня до цієї точки, то на більшій висоті знаходиться точка M. Але в точці M лінія Г торкається відповідної лінії рівня. Отже, знайти точку умовного екстремуму все одно що знайти точку торкання лінії Г з лінією рівня. А таку задачу можна розв'язати простіше. Опускаючи доведення, наведемо правило Лагранжа.

Щоб найти точку екстремуму функції (4.52) за умови (4.53), потрібно скласти функцію трьох змінних

$$z = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y), \tag{4.54}$$

де λ – невизначений множник Лагранжа і найти її екстремум.

Розглянемо приклад використання методу невизначених множників Лагранжа.

Приклад 4.1. (Задача Дідони).

Визначити набір $\{x_1, x_2\}$, який максимізує цільову функцію

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \tag{4.1.1}$$

і задовольняє обмеження

$$2x_1 + x_2 = C\,, \tag{4.1.2}$$

де x_1 і x_2 – відповідно висота і довжина прямокутника; C – довжина ременя l.

<u>Розв’язання</u>. Складемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(x,\lambda) = x_1 x_2 - \lambda(2x_1 + x_2 - C)\,.$$

Визначимо частинні похідні по x_1, x_2 і λ і створимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial x_2} = x_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} = 2x_1 + x_2 - C = 0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Визначимо x_1 і x_2 із перших двох рівнянь системи рівнянь (4.1.3) через λ:

$$x_2 = 2\lambda, \text{ а } \ x_1 = \lambda.$$

Підставимо одержані значення у третє рівняння і розв’яжемо його відносно λ:

$$2\lambda + 2\lambda = C \Rightarrow \lambda = C/4\,.$$

Підставимо найдене значення λ і перші два рівняння і розв’яжемо їх:

$$x_2 - 2\frac{C}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{C}{2} = \frac{1}{2}l;$$

$$x_1 - \frac{C}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{C}{4} = \frac{1}{4}l\,.$$

Як бачимо одержаний результат співпадає з результатом розв’язання цієї задачі, наведеної в п. 4.3.7.

4.4.4. Метод поділу області визначення функції на частини

4.4.4.1. Функція однієї змінної

Методи пошуку екстремуму, які ґрунтуються на використанні диференціального числення, безроздільно панували у XVIII і XIX століттях. У XX столітті математики зайнялись більш складними задачами, у яких неможливо було одержати виразів для досліджуваних функцій (наприклад, не існує формул, за допомогою яких можна дізнатися, скільки буде хімічної речовини при заданій температурі у реакторі.

Саме тому почали розробляти нові методи пошуку екстремальних значень, які не базуються на використанні похідних.

Нехай потрібно знайти максимум функції

$$y = f(x) \tag{4.55}$$

заданої на відрізку [a, b] причому вираз цієї функції невідомий. Звичайно, якщо замість виразу дано графік функції, то наші справи зовсім непогані – у такому випадку найбільше значення можна визначити відразу, подивившись на графік. Гірше обстоїть справа, якщо не має і графіку, а ми можемо лише визначити значення функції, ставлячи фізичні експерименти, тобто надаючи x певні значення і вимірюючи одержані значення y. Якщо при цьому кожний експеримент вимагає багато часу, а відповідь потрібно дати в короткий термін, то виникає проблема щодо оптимізації самого процесу пошуку оптимуму.

Тут потрібно вирізняти два випадки: або усі вимірювання виконуються одночасно, або одне за другим. В першому випадку у нас не має нічого кращого, як визначити значення функції (4.55) в деяких точках x_1, …, x_n і вибрати із них найбільше. Саме так ми зробили, коли потрібно було знайти максимальний об’єм ящика, який має днище квадратної форми. Якщо функція не змінюється подібно до функції Діріхле, а змінюється неперервно і навіть гладко, то багато шансів за те, що знайдене значення не дуже відрізняється від шуканого (певна річ, якщо сітка точок $x_1, \ldots, x_n$ достатньо густа).

Описаний метод досить не шановано називають «методом тику» – ми тикаємо то в одне місце, то в друге, сподіваючись попасти в точку екстремуму. При цьому вже знайдені значення ніяк не враховуються при визначенні нових випробувальних точок. Так роблять лише у випадках, коли ми нічого не знаємо про досліджувану функцію, окрім загальних припущень, що вона неперервна і, можливо, гладка. Але зазвичай ми знаємо про цю функцію значно більше. Дуже часто відомо, що вона, по-перше, має на відрізку [*a, b*] лише одну точку максимуму, а по-друге, обернена опуклістю доверху (рис. 4.15).

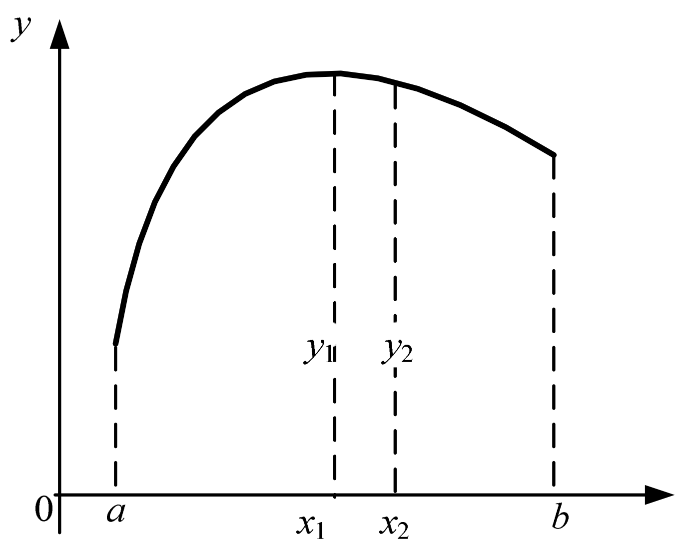


Рис. 4.15 – Опукла функція однієї змінної

У такому випадку можна вибрати значно розумнішу стратегію пошуку.

Нехай ми знаємо значення y_1 і y_2 нашої функції в точках x_1 і x_2. Якщо $y_1 > y_2$, то в силу умов, накладених на функцію, її найбільше значення лежить десь на відрізку $[a, x_2]$. Точно так же, якщо $y_1 < y_2$, то найбільше значення лежить десь на відрізку $[x_1, b]$. Невизначеність у наших пошуках звузилась з числа $b – a$ (довжина відрізку $[a, b]$ до найбільшого із чисел $x_2 – a$ і $b – x_1$. Тепер ясно, що розумніше всього так розмістити точки x_1 і x_2, щоб найбільше із цих чисел було як можна менше (така стратегія називається мінімальною, позаяк ми спочатку із двох чисел вибираємо найбільше, а потім намагаємося зробити результат як можна меншим). Але такий результат получиться тоді, якщо розмістити ці точки поблизу середини відрізка $[a, b]$ і якомога ближче одну до одної. Якщо їх відстань дорівнює 2ε, то найбільше із чисел $x_2 – a$, дорівнює

$$\frac{b-a}{2}+\varepsilon$$

тобто при малому ε складе приблизно половину першопочаткового відрізка $[a, b]$. Відмітимо, одначе, що неможна брати ε дуже малим, бо через неточність вимірювання ми не зможемо визначити у якій із точок (x_1 чи x_2) значення функції більше.

Можна довести, що добавлення третьої точки не зменшує невизначеності. Тому на кожному кроці потрібно добавляти точки парами, причому кожна нова пара складається по можливості із близько розміщених точок, але таких, що значення функції в них все ж таки різні. Залишилося з’ясувати, як же розміщувати на відрізку $[a, b]$ ці пари. Для цього спочатку візьмемо дві точки в околі середини відрізка $[a, b]$ і визначимо по них новий відрізок невизначеності. Потім візьмемо дві точки в околі середини цього відрізку і будемо продовжувати цей процес доти, поки довжина одержаного відрізка не стане настільки малою, що ми вже не зможемо відрізнити, на якому із його кінців функція більша, а на якому менша. Це і дасть шукане екстремальне значення функції з найкращою можливою точністю.

4.4.4.2. Функція багатьох змінних

Знаходити екстремуми методом поділу області на частини можна не тільки для функцій однієї змінної, але й для функцій двох, трьох чи багатьох змінних. Але тут вже виникають ускладнення, які швидко зростають у разі збільшення числа змінних, від яких залежать функції. Нехай функція залежить від ста змінних x_1, x_2, ..., x_{100}, причому x_k змінюється на відрізку $[a_k, b_k]$. Отже, якщо розділити навпіл кожний із цих відрізків і взяти лише точки, координати яких є або кінці, або середини цих відрізків, то получиться 3^{100}, тобто приблизно 10^{43} точок. Число операцій, які може зробити найшвидкіша обчислювальна машина, має порядок 10^{10}. Тому навіть мільйон таких машин не переглянуть за секунду більше, ніж 10^{16} точок. Це значить, що для перегляду усіх точок знадобиться 10^{27}с, тобто $3 \cdot 10^{20}$ років, що в багато разів більше, ніж за сучасними гіпотезами існує наш Всесвіт. Навіть якщо буде створена машина із ще більшою швидкістю, то повного перебору усіх точок ніколи не можна скінчити. Маємо надію, що читач тепер зрозумів, що має на увазі Беллман говорячи про «прокляття розмірності».

Але із сказаного не слід робити песимістичні висновки стосовно того, що математика не може справитися з пошуком екстремумів для функцій великого числа змінних. Просто «метод тику» потрібно замінити на що-небудь більш осмислене, скажімо, ураховувати не тільки значення функцій, але й напрямок їхньої зміни, і по можливості зводити багатовимірні задачі до одновимірних.

Один із способів такого зведення полягає в тому, що на першому кроці змінюють лише одну із змінних і за рахунок цього намагаються одержати найбільше значення функції (будемо зараз шукати максимум). Після цього залишають незмінним найдене значення першої змінної і змінюють другу. Потім прийде черга третьої, четвертої і т.д., допоки кожна із змінних не зіграє своєї ролі. Після цього знову змінюють першу змінну, потім другу і т.д. допоки не закінчиться другий цикл. Якщо пощастить, то через декілька циклів попадають в область великих значень функції і, можливо, опиняться недалеко від однієї із вершин (рис. 4.16).

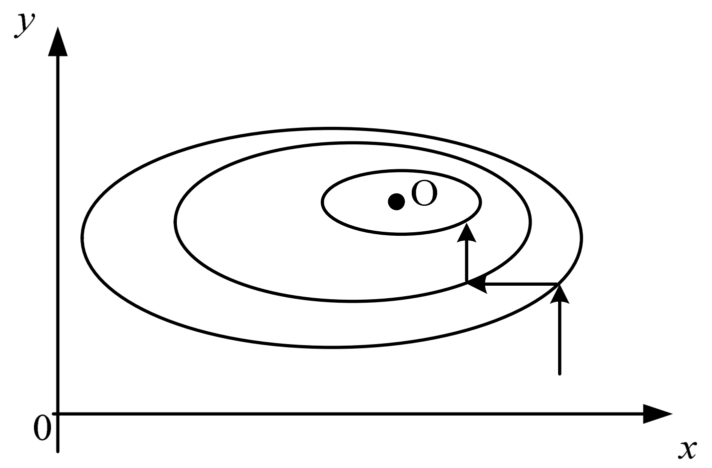


Рис. 4.16 – Метод послідовного наближення пошуку екстремуму функції багатьох змінних

Такий процес послідовних наближень може бути дуже довгим. Буває, що його можна зменшити (скоротити), рухаючись навскіс. Але із кожної точки маємо багато напрямків, і виникає питання, яке ж із них вибрати. Якщо ми піднімаємося на горб і можемо рухатися з однією і тією ж швидкістю, не дивлячись на крутизну горбу, то відповідь ясна – найвигіднішим буде шлях, який у кожній точці буде крутіший всього – тоді не прийдеться марно затрачати час на обхідні маневри.

А втім, цей шлях буде видно зразу – по ньому весною текли талі води, які збігали у кожний момент часу по самому крутому напрямку донизу.

На жаль, якщо функція задана формулою або, ще гірше цього, лише правилом визначення її значень шляхом експерименту, то талі води не допоможуть. Але якщо знайти декілька значень функції в околі цієї точки, то вона дозволить нам мати уявлення, як функція змінюється в цьому околі й знайти напрямок найбільшої кривизни. У випадку функції двох змінних він перпендикулярний до лінії рівня (рис. 4.17).

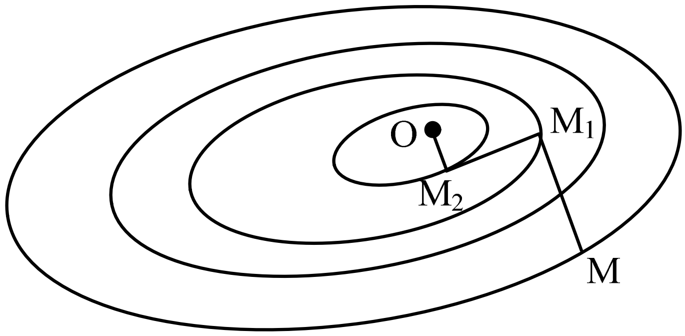


Рис. 4.17 – Метод найшвидшого підйому (спуску) пошуку екстремуму функції багатьох змінних

Після того як потрібний напрямок руху знайдено, ми замість функції багатьох змінних одержуємо функцію однієї змінної, а саме відстань від вихідної точки при русі по цьому напрямку.

Якщо ця функція приймає найбільше значення скажімо в точці M_1, то потрібно знайти напрямок градієнту в цій точці і піти по новому шляху.

Рухаючись таким чином, можна опинитися біля вершини горбу. Оскільки на кожному кроці шлях іде у напрямку найбільшої кривизни, метод називають методом найшвидшого підйому (чи найшвидшого спуску, в залежності від того, шукають найбільше чи найменше значення функції).

4.5. Апроксимація експериментально заданих табличних функцій

4.5.1. Підходи до апроксимації кривих

Існує два основних підходи до апроксимації табличних функцій відповідними кривими. В одному із них вимагають, щоб апроксимуюча крива (можливо кусково-гладенька) проходила через усі точки, котрі задані у вигляді таблиці. Це можна зробити за допомогою *інтерполяції.*

У другому підході експериментальні дані апроксимують простою функцією, яка використовується на всьому діапазоні табличних даних, але не обов'язково проходить через усі точки. Такий метод (підхід) називають *підгонкою кривої,* яку намагаються провести так, щоб її відхилення від табличних даних були мінімальні. Зазвичай прагнуть звести до мінімуму суму квадратів різниці між значеннями функції, визначеними обраною кривою та таблицею. Такий метод підготовки називається *методом найменших квадратів.*

4.5.2. Метод найменших квадратів

Нехай у таблиці маємо n + 1 точок

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

і потрібно знайти апроксимуючу криву (графік) $g(x)$ у діапазоні $x_0 \le x \le x_n$.

У такому випадку похибка у кожній табличній точці

$$\varepsilon_i = g(x_i) - y_i\,. \tag{4.56}$$

Тоді сума квадратів похибок

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \left[g(x_i) - y_i \right]^2 . \tag{4.57}$$

Зазвичай функцію $g(x)$ обирають у вигляді лінійної комбінації функцій, скажімо виду:

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots + c_k g_k(x). \tag{4.58}$$

Умова мінімуму функції (4.58) визначається рівнянням:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} = \ldots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_k} = 0\,. \tag{4.59}$$

Оскільки похибка

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \left[c_1 g_1(x_i) + \ldots + c_k g_k(x_i) - y_i \right]^2 . \tag{4.60}$$

то умова (4.59) еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[c_1 g_1(x_i) + \ldots + c_k g_k(x_i) - y_i \right] g_i(x_i) = 0; \\
\vdots \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_k} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[c_1 g_1(x_i) + \ldots + c_k g_k(x_i) - y_i \right] g_k(x_i) = 0.
\end{gathered}$$

Ці k рівнянь, вочевидь, можна подати й так:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} g_1^2(x_i) + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} g_1(x_1) g_k(x_i) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_k(x_i) + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{n} g_k^2(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} g_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_k(x_i) y_i \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

Оскільки елементи лівої частини системи рівнянь (4.61) і компоненти вектора – стовпчика у правій частині цієї системи рівнянь визначаються згідно з табличними даними, то система рівнянь (4.61) з k невідомими може бути розв’язана.

Можна обрати будь-яку функцію (4.52), аби тільки вона була лінійною відносно своїх коефіцієнтів. Фактичний вибір функції має здійснюватися з урахуванням специфіки табличних даних, під якою розуміється їхня періодичність, експоненціальний чи логарифмічний характер, властивості симетрії та асиптотики тощо. Іноді таблицю даних розбивають на декілька частин і підбирають окрему апроксимуючу криву для кожної частини, однак це потрібно робити обачливо. Такий підхід виправданий у тих випадках, коли є підстави стверджувати, що апроксимуючі дані відповідають різним фізичним станам системи чи процесу. Прикладами можуть слугувати переходи конструкції від стійкого стану до нестійкого, переходи від дозвукової течії до надзвукової або від ламінарного до турбулентного режиму роботи і т. ін.

Користуючись наближеною формулою, не слід виходити за межі інтервалу, у якому ця формула справедлива.

Таким чином, у результаті експерименту ми одержимо декілька значень функції y_i , у заданих точках x_i. Будемо апроксимувати її деякою аналітичною функцією $\varphi(x)$, до якої входить деяке число n компонент a_k. Потрібною умовою найкращого середньоквадратичного наближення буде мінімізація суми середньоквадратичного відхилення (СКВ):

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \varphi(x_i) \right]^2 , \qquad (4.62)$$

де N – кількість експериментальних точок.

У кожному конкретному випадку існує оптимальне число n, яке залежить від значень функції y_i, N і вигляду обраної аналітичної функції

$\varphi(x)$. Задавши деяке число n і визначив відповідні коефіцієнти a_k, обчислимо СКВ одержаної теоретичної кривої від експериментальної кривої. Похибка апроксимації обчислюється за формулою

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \varphi(x)\right]^2} \qquad (4.63)$$

і порівнюється з її відомою похибкою експерименту ε.

Можливі три випадки:

Випадок 1. $\delta_n >> \varepsilon$.

У такому випадку одержимо дуже грубу апроксимацію експериментальних даних, число n коефіцієнтів a_k (чи g_k – див. рівняння (4.58) для опису функції $y(x)$) недостатньо. Отже, потрібно їх збільшити.

Випадок 2. $\delta_n << \varepsilon$.

У такому випадку одержимо апроксимацію фізично недостовірну; істинна функція «сплющена», старші її коефіцієнти зайві і, отже, потрібно зменшити число n.

Випадок 3. $\delta_n \approx \varepsilon$.

У такому випадку число n оптимальне. Розглянемо конкретно задані апроксимуючі функції.

4.5.2.1. Лінійне наближення

Лінійне наближення задається формулою

$$y = b_o + b_1 x. \qquad (4.64)$$

Коефіцієнти формули (4.64) обчислюються так:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i - N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} x_i^2}; \tag{4.65}$$

$$b_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i - b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i \right). \tag{4.66}$$

4.5.2.2. Параболічне наближення

Параболічне наближення задається формулою:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \tag{4.67}$$

Коефіцієнти формули (4.67) обчислюються так:

$$b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i; \tag{4.68}$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i; \tag{4.69}$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i. \tag{4.70}$$

4.5.2.3. Приклади використання мікрокалькуляторів і програмних пакетів для визначення коефіцієнтів лінійного і параболічного наближення

Приклад 4.2. Експериментальну таблично задану функцію (табл. 4.2.1.) апроксимувати лінійним і параболічним наближенням і визначити похибку апроксимації.

Таблиця 4.2.1. Експериментальна таблично задана функція

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,90	0,90	0,40	0.00	–0,50	–1,00

Розв’язання.

1. У відповідності з табл. 4.2.1. побудуємо залежність вихідної змінної $y_i(x_i)$ від вхідної змінної x_i (рис. 4.18, графік 1).

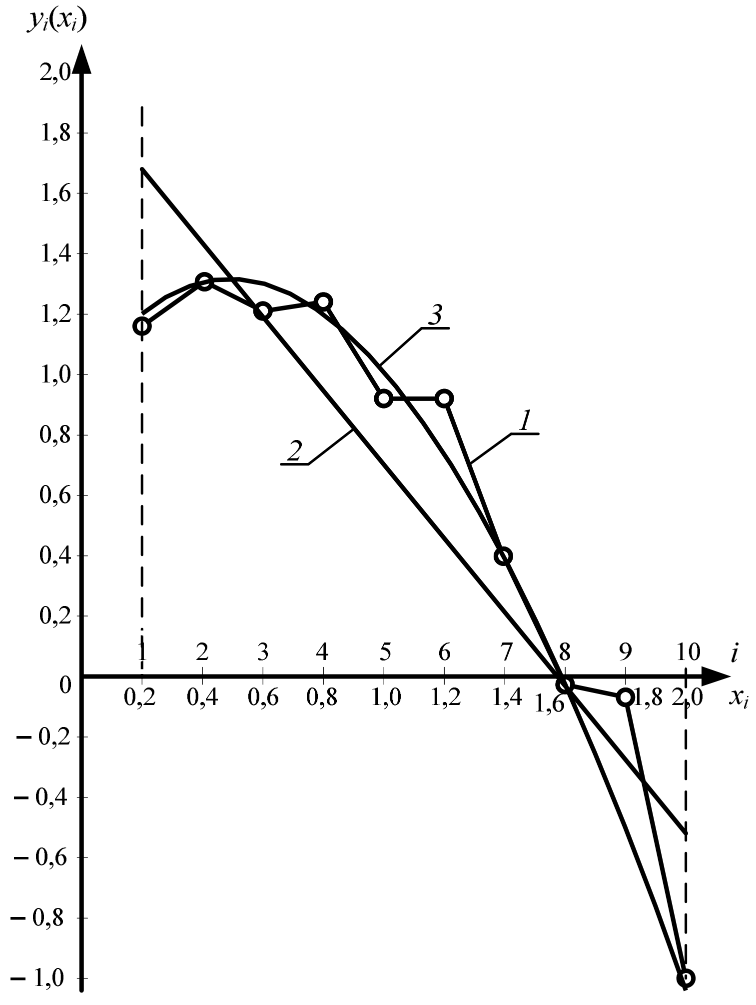


Рис. 4.18 – Залежність вихідної змінної від вхідної:

1 – експериментальна задана таблицею функція; 2 – лінійне наближення; 3 – параболічне наближення

2. Апроксимуємо експериментально задану табличну функцію (рис. 4.18, графік 1) рівнянням прямої лінії (4.64), використовуючи для визначення її коефіцієнтів b_o і b_1 мікрокалькулятор Casio *fx*-451м. Для спрощення розрахунків складемо табл. 4.2.2.

Таблиця 4.2.2. До обчислення коефіцієнтів b_o і b_1 лінійного наближення 4.2.)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,0
y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,90	0,90	0,40	0.00	–0,50	–1,0
x_i^2	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56	3,24	4,0
$x_i y_i$	0,24	0,52	0,72	0,96	0,90	1,08	0,56	0,00	–0,90	–2,0

Отже, маємо наступні суми:

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_1 = 0,2+0,4+0,6+0,8+1,0+1,4+1,6+1,8+2,0 = 11; \qquad (4.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} y_1 = 1,16+1,3+1,2+1,2+0,9+0,9+0,4+0,0-0,5-1,0 = 5,6; (4.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i y_i = 0,24+0,52+0,72+0,96+0,90+1,08+0,56+0,00-0,10-2,00 = 2,08; \quad (4.2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i^2 = 0,04+0,16+0,36+0,64+1,00+1,44+1,96+2,56+3,24+4,00 = 15,4; (4.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i \sum_{i=1}^{N=10} y_2 = 11 \times 5,6 = 61,6; \qquad (4.2.5)$$

$$N\sum_{i=1}^{N=10} x_i y_i = 10\times 2,08 = 20,8; \qquad (4.2.6)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = 11^2 = 121; \qquad (4.2.7)$$

$$N\sum_{i=1}^{N=10} x_i^2 = 10\times 15,4 = 154. \qquad (4.2.8)$$

Підставимо вирази (4.1.1)…(4.1.8) у формули (4.65) і (4.66). Тоді коефіцієнт

$$b_1 = \frac{61,6-20,8}{121-154} = -1,236, \qquad (4.2.9)$$

а коефіцієнт

$$b_o = \frac{1}{10}\left(5,6+1,236\times 11\right) = 1,919. \qquad (4.2.10)$$

Таким чином, рівняння апроксимуючої прямої має вигляд:

$$y_i(x_i) = 1,919 - 1,236x_i. \qquad (4.2.11)$$

Згідно з виразом (4.2.11) побудуємо графік лінійного наближення (рис. 4.18, графік 2).

Для обчислення похибки лінійного наближення скористаємось формулою (4.63) і складемо табл. 4.2.3.

Таблиця 4.2.3. До обчислення середнього квадратичного відхилення

y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,90	0,90	0,40	0,00	–0,50	–1,00
$\varphi(x_i)$	1,67	1,42	1,17	0,93	0,68	0,43	0,18	–0,05	–0,30	–0,55
$(y_i-\varphi(x_i))^2$	0,220	0,014	0,000	0,070	0,148	0,220	0,048	0,002	0,040	0,200

Таким чином, сума СКВ похибок лінійної апроксимуючої функції від експериментальної таблично заданої функції визначимо так:

$$S = \sum_{i=1}^{N=10} \left[y_1 - \varphi(x_i) \right]^2 = 0,220 + 0,014 + 0,000 + 0,070 + 0,048 + 0,220 +$$
$$+ 0,048 + 0,002 + 0,040 + 0,209 = 0,863.$$

Отже, похибка апроксимації лінійного наближення

$$\delta_{\text{ЛН}} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N=10} \left[y_i - \varphi(x_i) \right]^2} = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 0,863 = 0,2938}. \qquad (4.2.12)$$

Для розв’язання поставленої задачі можна, звичайно, використати, скажімо Пакет MathCAD 7 Professional.

Результати розрахунків зведено у табл. 4.2.4, куди також внесено розрахунки коефіцієнтів b_0 і b_1, одержаних за допомогою мікрокалькулятора Casio fx-451M.

Таблиця 4.2.4. Оцінка коефіцієнтів b_0 і b_1 лінійного наближення

Коефіцієнти	Обчислення за допомогою	
	MathCAD 7 Professional	МК Casio fx-451M
b_0	1,904	1,919
b_1	–1,225	–1,236

Аналіз числових значень коефіцієнтів b_0 і b_1, одержаних за допомогою використання мікрокалькулятора і програмного пакета свідчить, що значення вказаних коефіцієнтів практично збігаються.

3. Апроксимуємо експериментально задану табличну функцію (рис. 4.18, графік 1) рівнянням параболи (4.67), використовуючи для визначення її коефіцієнтів b_0, b_1 і b_2 мікрокалькулятор Casio fx-451M. З метою алгоритмізації розрахунків складемо табл. 4.2.5.

Таблиця 4.2.5. До обчислення коефіцієнтів b_0, b_1 і b_2 параболічного наближення

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,0
y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,90	0,90	0,40	0.00	–0,50	–1,0
x_i^2	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56	3,24	4,0
x_i^3	0,008	0,064	0,216	0,512	1,00	1,72	2,740	4,09	5,83	8,00
x_i^4	0,092	0,025	0,129	0,409	1,90	2,07	3,840	6,55	10,49	16,00
x_i, y_i	0,24	0,52	0,72	0,96	0,90	1,08	0,56	0,00	–0,90	–2,00
$x_i^2 y_i$	0,046	0,200	0,430	0,760	0,90	1,29	0,780	0,00	–1,62	–4,0

Отже, маємо наступні суми:

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i = 0,2 + 0,4 + 0,6 + 0,8 + 1,0 + 1,4 + 1,6 + 1,8 + 2,00 = 11; \quad (4.2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} y_i = 1,16 + 1,3 + 1,2 + 1,2 + 0,9 + 0,9 + 0,4 + 0,0 - 0,5 - 1,0 = 5,6; (4.2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i y_i = 0,24 + 0,52 + 0,72 + 0,96 + 0,90 + 1,08 + + 0,56 + 0,00 - 0,90 - 2,00 = 2,08; \quad (4.2.15)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i^2 = 0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64 + 1,00 + 1,44 + + 1,96 + 2,56 + 3,24 + 4,00 = 15,4; \quad (4.2.16)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i^2 y_i = 0,046 + 0,2 + 0,43 + 0,76 + 0,90 + 1,29 + + 0,78 - 0,00 - 1,62 - 4,0 = -1,21; \quad (4.2.17)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i^3 = 0,008 + 0,064 + 0,216 + 0,512 + 1,00 + \\ + 1,72 + 2,74 + 4,09 + 5,83 + 8 = 24,18; \qquad (4.2.18)$$

$$\sum_{i=1}^{N=10} x_i^4 = 0,002 + 0,025 + 0,129 + 1,00 + 2,07 + \\ + 3,84 + 6,55 + 10,49 + 16,00 = 40,51; \qquad (4.2.19)$$

Підставимо вирази (4.2.13) … (4.2.19) у формули (4.68) … (4.70). Тоді система рівнянь, що складається із цих рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} 10b_0 + 11b_1 + 15,4b_2 = 5,6; \\ 11b_0 + 15,4b_1 + 24,18b_2 = 2,08; \\ 15,4b_0 + 24,18b_1 + 40,51b_2 = -1,219. \end{cases} \qquad (4.2.20)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (4.2.20) за правилом Крамера.

Визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) (4.2.20)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10,0 & 11,00 & 15,40 \\ 11,0 & 15,40 & 24,18 \\ 15,4 & 24,18 & 40,51 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 15,40 & 24,18 \\ 24,18 & 40,51 \end{vmatrix} - \\ -11 \begin{vmatrix} 11,0 & 24,18 \\ 15,4 & 40,51 \end{vmatrix} + 15,4 \begin{vmatrix} 11,0 & 15,40 \\ 15,4 & 24,18 \end{vmatrix} = \\ = 10(623,85 - 584,67) - 11(445,61 - 372,37) + \\ + 15,4(265,18 - 237,16) = 29,98. \qquad (4.2.21)$$

Визначник

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5,60 & 11,00 & 15,40 \\ 2,08 & 15,40 & 24,18 \\ -1,21 & 24,18 & 40,51 \end{vmatrix} = 5,60 \begin{vmatrix} 15,40 & 24,18 \\ 24,18 & 40,51 \end{vmatrix} -$$

$$-11 \begin{vmatrix} 2,08 & 24,18 \\ -1,21 & 40,51 \end{vmatrix} + 15,4 \begin{vmatrix} 2,08 & 15,40 \\ -1,21 & 24,18 \end{vmatrix} = \tag{4.2.22}$$

$$= 5,60(623,85 - 584,67) - 11(24,26 + 29,25) +$$

$$+15,4(50,29 + 18,63) = 32,166.$$

Визначник

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10,0 & 5,60 & 15,40 \\ 11,0 & 2,08 & 24,18 \\ 15,4 & -1,21 & 40,51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,08 & 24,18 \\ -1,21 & 40,51 \end{vmatrix} -$$

$$-5,60 \begin{vmatrix} 11,0 & 24,18 \\ 15,4 & 40,51 \end{vmatrix} + 15,4 \begin{vmatrix} 11,0 & 2,08 \\ 15,4 & -1,21 \end{vmatrix} = \tag{4.2.23}$$

$$= 10(84,26 + 29,25) - 5,6(445,61 - 372,37) +$$

$$+15,4(-13,31 - 32,03) = 26,84.$$

Визначник

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10,0 & 11,00 & 5,60 \\ 11,0 & 15,40 & 2,08 \\ 15,4 & 24,18 & -1,21 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 15,40 & 2,08 \\ 24,18 & -1,21 \end{vmatrix} -$$

$$-11 \begin{vmatrix} 11,0 & 2,08 \\ 15,4 & -1,21 \end{vmatrix} + 5,6 \begin{vmatrix} 11,0 & 15,4 \\ 15,4 & 24,18 \end{vmatrix} = \tag{4.2.24}$$

$$= 10(-18,63 - 50,29) - 11(-13,31 - 32,03) +$$

$$+5,6(265,18 - 237,16) = -29,048.$$

Маючи визначники Δ, Δ_1, Δ_2 і Δ_3 визначимо коефіцієнти апроксимуючої параболи (4.67).

Коефіцієнт

$$b_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{32,166}{29,98} = 1,072.$$

Коефіцієнт

$$b_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26,84}{29,18} = 0,895.$$

Коефіцієнт

$$b_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-29,048}{29,98} = -0,968.$$

Таким чином, апроксимуючий поліном (парабола) має вигляд:

$$y_i(x_i) = 1,072 + 0,895x_i - 0,968x_i^2 . \qquad (4.2.25)$$

Згідно з виразом (4.1.25) побудуємо графік параболічного наближення, для чого складемо табл. 4.2.6.

Таблиця 4.2.6. До побудови графіка параболічного наближення

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,0
x_i^2	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56	3,24	4,00
$0,895x_i$	0,18	0,36	0,53	0,70	0,89	1,07	1,25	1,43	1,61	1,79
$0,968\,x_i^2$	0,04	0,15	0,35	0,62	0,96	1,40	1,9	2,50	3,13	3,87
$y_i(x_i)$	1,21	1,31	1,25	1,15	1,00	0,74	0,42	0,02	–0,45	–1,08

Згідно з табл. 4.2.6 побудовано графік параболічного наближення (рис. 4.18, графік 3).

Процес визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома (4.67) можна прискорити, використавши Програмний пакет MathCAD 7 Professional. Результати обчислень наведено у табл. 4.1.7, куди також внесено розрахунки коефіцієнтів b_0, b_1 і b_2, одержаних за допомогою мікрокалькулятора Casio fx-451M.

Таблиця 4.2.7. Оцінка коефіцієнтів b_0, b_1 і b_2 параболічного наближення

Коефіцієнти	Обчислення за допомогою	
	MathCAD 7 Professional	МК Casio fx-451M
b_0	1,017	1,072
b_1	0,991	0,895
b_2	–1,008	–0,968

Аналіз наведених оцінок коефіцієнтів параболічного наближення, одержаних за допомогою програмного пакета MathCAD 7 Professional і мікрокалькулятора Casio fx-451M свідчить їх задовільну збіжність. Слід сказати, що трудомісткість розрахунків на мікрокалькуляторі значно збільшується із збільшенням числа коефіцієнтів апроксимуючого поліному.

Для визначення похибки параболічного наближення скористаємося формулою (4.63) попередньо обчисливши СКВ згідно з виразом (4.62), склавши табл. 4.2.7.

Таблиця 4.2.7. До обчислення середнього квадратичного відхилення

y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,90	0,90	0,40	0,00	–0,50	–1,00
$\varphi(x_i)$	1,16	1,30	1,25	1,15	1,00	0,74	0,42	0,00	–0,43	–1,02
S	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02

Таким чином сума СКВ похибок параболічної

$$S_{\text{ПН}} = \sum_{i=1}^{N=10} \left[y_1 - \varphi(x_i) \right]^2 = 0,00 + 0,00 + 0,00 + 0,00 +$$

$$+ 0,01 + 0,02 + 0,00 + 0,00 + 0,00 + 0,02 = 0,05$$

Отже, похибка апроксимації параболічного наближення

$$\delta_{\text{ПН}} = \sqrt{\frac{1}{N}\left[y_i - \varphi(x_i)\right]^2} = \sqrt{\frac{1}{10}\cdot 0{,}05} = 0{,}0707\,. \qquad (4.2.26)$$

Оскільки $\delta_{\text{ЛН}} = 0{,}2938$, а $\delta_{\text{ПН}} = 0{,}0707$, тобто $\delta_{\text{ПН}} < \delta_{\text{ЛН}}$, то параболічне наближення краще лінійного наближення в 3,815 раз, тобто майже в 4 рази.

Запитання і завдання для самоперевірки

4.1. Наведіть математичну модель ящика з днищем квадратної форми. Які обмеження накладаються на довжину квадрата?

4.2. До чого зводиться задача про ящик максимального об’єму з днищем квадратної форми?

4.3. Як визначити оптимальну висоту ящика максимального об’єму з днищем квадратної форми?

4.4. Наведіть математичну модель ящика з днищем прямокутної форми, якщо довжина однієї сторони прямокутника більше його другої сторони у два рази. Які обмеження накладаються на розміри днища?

4.5. До чого зводиться задача про ящик максимального об’єму з днищем прямокутної форми?

4.6. Наведіть математичну модель банки заданого об’єму, яка встановлює зв’язок між площею її поверхні і радіусом днища. Які обмеження накладаються на радіус днища банки?

4.7. До чого зводиться задача про «найкращу» банку заданого об’єму, яка має мати найменшу поверхню?

4.8. Як визначити властивості похідної функції взятої від функції, що встановлює залежність площі поверхні банки заданого об’єму від радіуса її днища? Як отримати її мінімальне значення? У якому випадку вона зростає, а у якому випадку спадає?

4.9. Наведіть математичну модель банки заданого об’єму, яка встановлює зв’язок між довжиною її зварних швів і радіусом днища. Які обмеження накладаються на радіус днища банки?

4.10. До чого зводиться задача про оптимальні параметри банки заданого об’єму, яка має мати мінімальну довжину зварних швів?

4.11. Як визначити властивості похідної функції взятої від функції, що встановлює залежність довжини зварних швів від радіуса днища? Як отримати її мінімальне значення? У якому випадку вона зростає, а у якому випадку вона спадає?

5. Проектування і дослідження одно- і багатовимірних систем автоматичного керування і регулювання

5.1. Одновимірні системи

5.1.1. Система автоматичного керування рівнем рідини у збирачі рідини

Принципову схему системи автоматичного керування (САК) рівнем рідини у збирачі рідини показано на рис. 5.1.

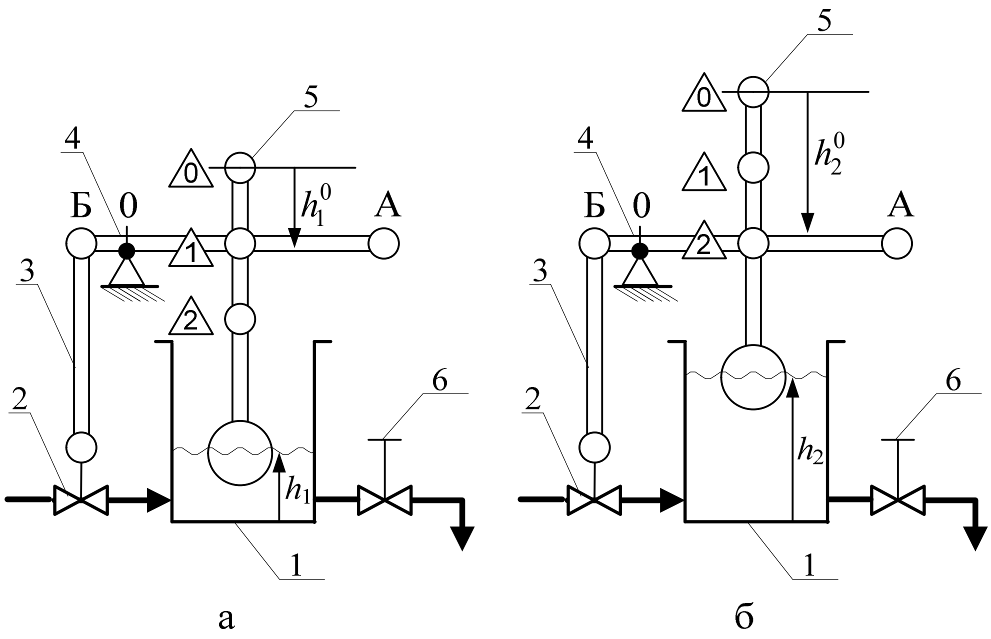


Рис. 5.1 – Принципова схема системи автоматичного керування рівнем рідини у збирачі рідини відкритого типу:

а – задавальне діяння $h_1 = h_1^0 =$ 1 м; б – задавальне діяння $h_2 = h_2^o =$ 2 м.

1 – збирач рідини; 2 – регулювальний орган; 3 – штанга; 4 – важіль; 5 – стержень з поплавком; 6 – технологічний вентиль

Система складається із об’єкта керування (збирач рідини 1) та регулятора (важіль 4). У якості вимірювального приладу використовується стержень з поплавком 5. Стержень має три отвори з позначками 0 м, 1 м і 2 м. Стержень кріпиться до важеля за допомогою штифта. Якщо, скажімо, стержень і важіль з’єднано на позначці 1, то це означає, що рівень рідини в збирачі дорівнює 1 м. Відстань від позначки 0 до позначки 1 чи 2 дорівнює заданому значенню рівня рідини в збирачі.

Припустимо, що САК рівнем рідини працює в режимі роботи, коли $h_1 = h_1^0$ = 1 м (h_1^0 – задане значення рівня рідини в режимі 1) (рис. 5.1, а). Припустимо, що оператору-технологу наказано перейти на режим роботи 2, де $h_2 = h_2^0$ = 2 м (h_2^0 – задане значення рівня рідини в режимі 2) (рис. 5.1, б). Для цього потрібно зняти стержень з положення 1 (1 – означає, що $h_1^0 = 1$ м) і поставити його в положення 2 (2 – означає, що $h_2^0 =$ 2 м), а потім спокійно, без поштовху, відпустити. Під дією сили тяжіння поплавок опуститься донизу, при цьому важіль 4 повернеться навколо точки 0 за годинниковою стрілкою. Ліве плече важеля (точка Б) також повернеться за годинниковою стрілкою й потягне штангу 3 доверху, а отже, й відкриє на більшу величину положення регулювального органа (РО) 2. Витрата рідини крізь РО збільшиться і саме тому поточне значення рівня рідини $h_2(t)$ буде прямувати до його заданого значення h_2^0.

Процес переходу САК із заданого значення рівня рідини h_1^0 у задане значення рівня рідини h_2^0 наведено на рис. 5.2.

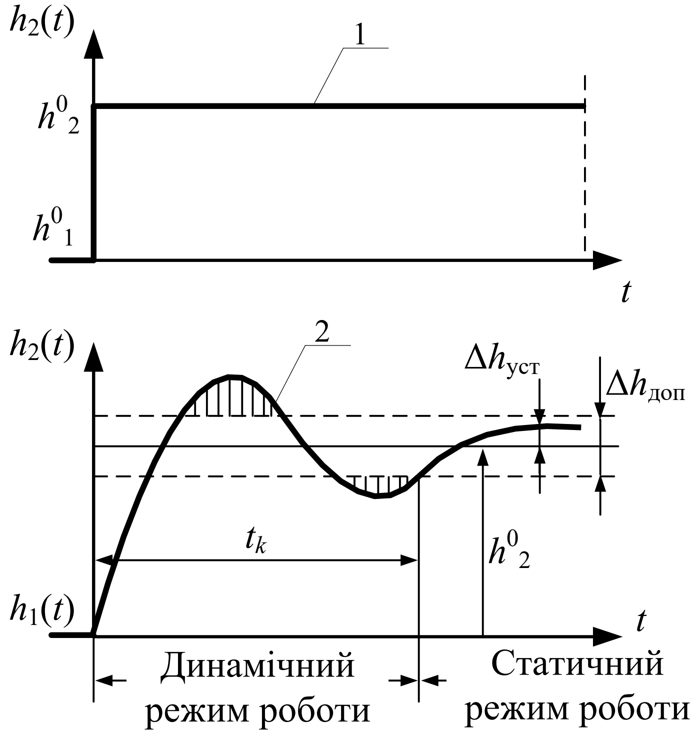


Рис. 5.2 – Перехідний процес зміни рівня рідини (графік 2) у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння (графік 1) регулятору рівня

У загальному випадку процес прямування поточного значення рівня рідини $h_2(t)$ до свого нового заданого значення h_2^0 має коливальний характер. Якщо керована змінна досягає і входить в допустиму зону керування $\pm\Delta h_{доп}$, то $t_к$ – це час керування, а $\Delta h_{уст}$ – усталена похибка керування. Якісне керування рівнем рідини буде тоді, коли

$$\Delta h_{уст} \le \Delta h_{доп}.$$

Таким чином, для САК рівнем рідини характерним є зміна задавального діяння, яке система повинна відтворювати з найбільшою або заданою точністю.

5.1.2. Система автоматичного регулювання рівня рідини у збирачі рідини

Принципову схему системи автоматичного регулювання (САР) рівня рідини у збирачі рідини показано на рис. 5.3.

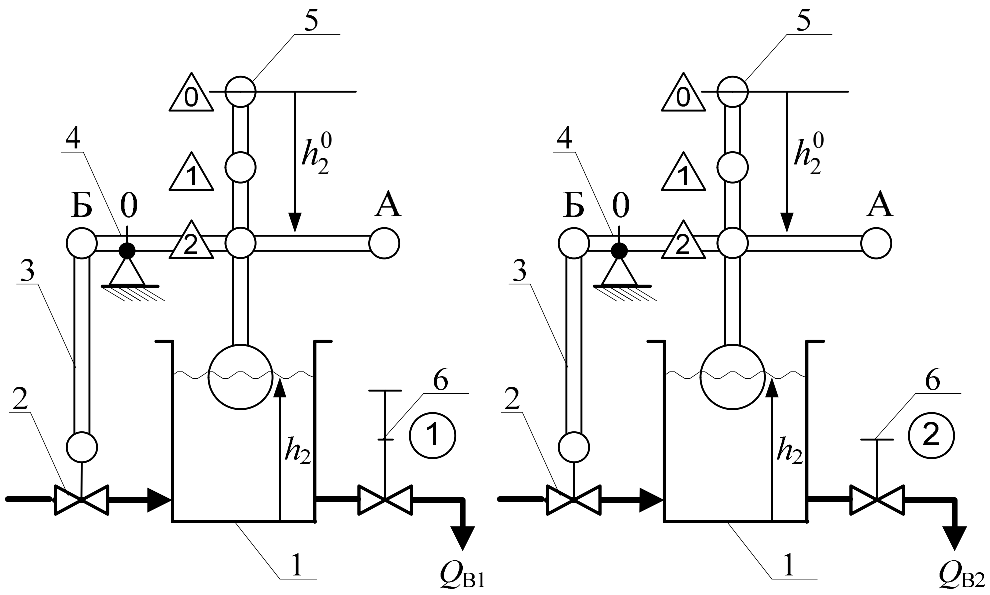


Рис. 5.3 – Принципова схема системи автоматичного керування рівнем рідини у збирачі рідини:

а – збурювальне діяння $Q_в = Q_{в1} = 2$; б – збурювальне діяння $Q_в = Q_{в1} = 1$; 1 – збирач рідини; 2 – регулювальний орган; 3 – штанга; 4 – важіль; 5 – стержень з поплавком; 6 – технологічний вентиль

Система автоматичного регулювання рівня складається із тих же самих елементів, що і САК рівнем рідини (рис. 5.1). На відміну від розглянутої САК рівнем рідини, у цій системі збурювальне діяння подається на технологічний вентиль (ТВ) 6.

Припустимо, що оператору-технологу наказано зменшити витрату рідини, яка відводиться із збирача рідини 1, при цьому рівень рідини має бути сталим. Для цього оператор-технолог переставить ТВ 6 із положення 1 в положення 2. У такому випадку витрата рідини, яка проходить крізь ТВ (рис. 5.3, б) зменшиться, а оскільки витрата рідини, яка подається у збирач не змінюється, то рівень рідини h_2 збільшиться. При цьому стержень з поплавком 5 піднімаючись доверху, поверне праве плече важеля 4 (точка А) проти годинникової стрілки. Ліве плече важеля (точка Б) зміщуючись донизу, перемістить штангу 3 і тим самим зменшить подачу рідини у збирач рідини. Саме в силу цього рівень рідини почне зменшуватися і з часом досягне свого заданого значення з деякою похибкою (рис. 5.4).

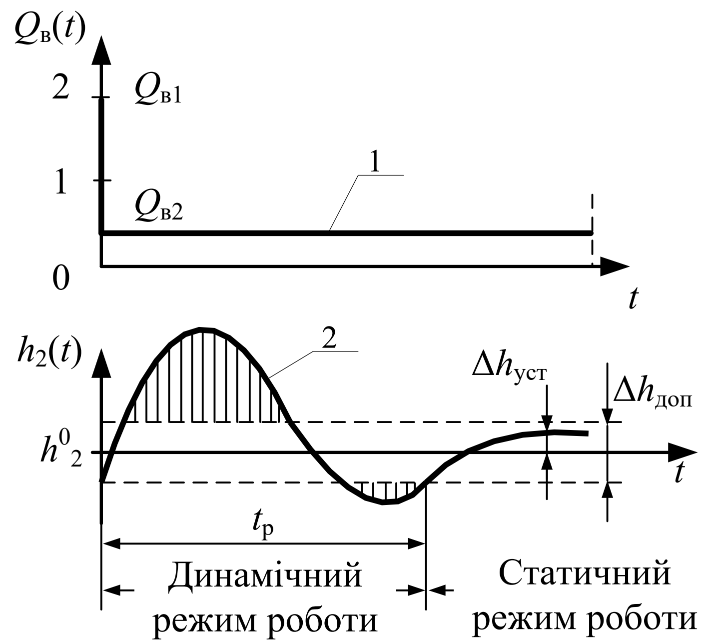


Рис. 5.4 – Перехідний процес зміни рівня рідини (графік 2) у разі стрибкоподібної зміни збурювального діяння (графік 1) викликаного переміщенням технологічного вентиля

У загальному випадку процес повернення поточного значення рівня рідини до свого заданого значення h_2^0 має коливальний характер. Якщо регульована змінна досягає і входить в допустиму зону регулювання $\pm\Delta h_{доп}$, то $t_р$ – це час регулювання, а $\Delta h_{уст}$ – усталена похибка регулювання рівня. Якісне регулювання рівня рідини буде тоді, коли

$$\Delta h_{уст} \le \Delta h_{доп}.$$

Таким чином, для САР рівнем рідини характерною ознакою є урахування збурювальних діянь, наслідок яких система має ліквідувати, при цьому усталена похибка має бути меншою або дорівнювати її допустимому значенню.

Розрізняють динамічний і статичний режим роботи автоматичної системи. Якщо керована чи регульована вихідна змінна не виходить за допустимі межі, то такий режим називають *статичним*. Якщо це не так, то такий режим роботи називають *динамічним режимом*.

5.1.3. Дослідження системи автоматичного регулювання рівня рідини

5.1.3.1. Математична модель системи

Розглядувана система (рис. 5.3) складається із об’єкта регулювання (збирач рідини 1) і автоматичного регулятора (важіль 4) рідини.

Як було показано у розд. 2 збирач рідини представляється двома передавальними функціями.

Передавальна функція каналу керування 11

$$g_{11}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k_{11}}{1 + T_{11}p}, \tag{5.1}$$

де $y(p)$ і $u(p)$ – зображення за Лапласом вихідної змінної (рівня рідини) і керувального діяння (витрати рідини, що подається у збирач); k_{11} і T_{11} – коефіцієнт підсилення і стала часу каналу керування 11; p – оператор Лапласа.

Передавальна функція каналу збурення 21

$$g_{12}(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{k_{12}}{1 + T_{11}p}, \tag{5.2}$$

де $f(p)$ – зображення за Лапласом збурювального діяння (витрати рідини, що проходить крізь технологічний вентиль); k_{12} – коефіцієнт підсилення каналу збурення 21.

Для виведення рівняння регулятора рівня розглянемо його принципову схему (рис. 5.5).

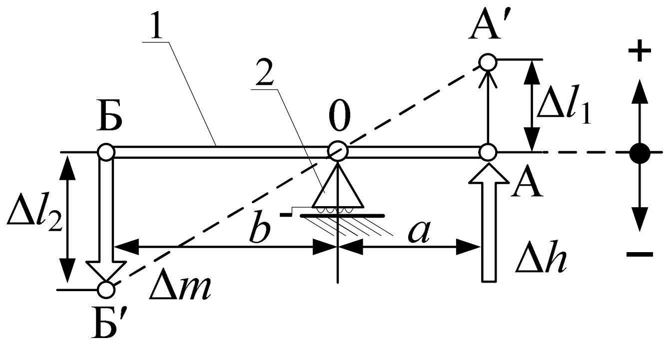


Рис. 5.5 – Принципова схема регулятора рівня:

1 – важіль; 2 – механізм налаштування регулятора

У разі збільшення рівня рідини на величину $\Delta h(t)$ точка важеля А переміститься на величину Δl_1, при цьому точка Б переміститься на величину Δl_2 яка буде дорівнювати переміщенню регулювального органа на величину $\Delta m(t)$. Отже,

$$\Delta l_1 \sim \Delta h(t),$$

а

$$\Delta l_2 \sim \Delta m(t).$$

З подібності трикутників ОА′А і ОББ′ випливає:

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{b}.$$

Отже

$$\Delta l_2 = \frac{b}{a}\Delta l_1$$

або

$$\Delta m(t) = -\frac{b}{a}\Delta h(t). \tag{5.3}$$

Якщо вважати, що регулювальний орган має прямолінійну характеристику, то приріст витрати рідини

$$\Delta Q_{\text{П}} = k_{\text{ро}}\Delta m(t). \tag{5.4}$$

де $k_{\text{ро}}$ – коефіцієнт підсилення регулювального органа.

Підставивши вираз (5.3) у вираз (5.4) одержимо рівняння регулятора у вигляді

$$\Delta Q_{\text{П}}(t) = -k_{\text{ро}}\frac{b}{a}\Delta h(t).$$

Прийнявши $k_{\text{ро}} = 1$ і замінивши $\Delta Q_{\text{П}} \sim u$, а $\Delta h \sim y$, одержимо рівняння П-регулятора. У зображеннях Лапласа воно має вигляд:

$$u(p) = -\, k_{\text{р}}\, y(p), \tag{5.5}$$

де

$$k_{\text{р}} = \frac{b}{a} \quad – \tag{5.6}$$

коефіцієнт підсилення регулятора.

Аналіз виразу (5.6) свідчить:

1. Якщо $a = b$, то $k_{\text{р}} = 1$.
2. Якщо $a \to 0$, то $k_{\text{р}} \to \infty$.

3. Якщо $b \to 0$, то $k_\text{р} \to 0$.

Таким чином, теоретично $0 < k_\text{р} < \infty$.

З практичних міркувань

$$0 < k_\text{р} < k_{\max},$$

де $k_{\max}$ – найбільше значення коефіцієнта підсилення регулятора.

Передавальні функції (5.1), (5.2) та (5.5) представляють математичну модель САР рівня рідини у збирачі рідини.

5.1.3.2. Дослідження системи автоматичного регулювання з П-регулятором

Наявність математичної моделі об’єкта регулювання (передавальні функції (5.1) і (5.2)), а також передавальної функції П-регулятора (5.5), дозволяє побудувати структурну схему розглядуваної автоматичної системи (рис. 5.6).

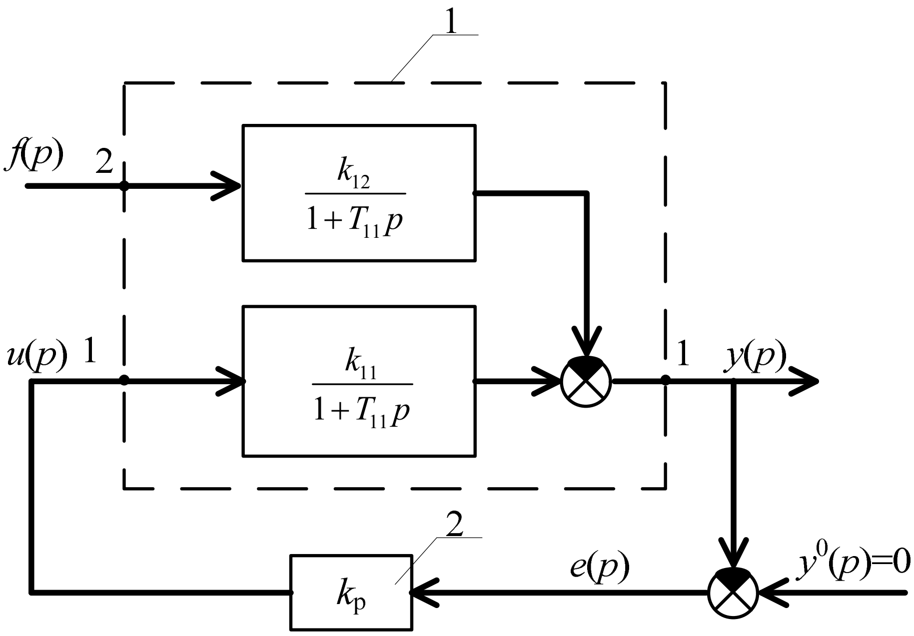


Рис. 5.6 – Структурна схема системи автоматичного регулювання рівня рідини з П-регулятором:

1 – об’єкт керування; 2 – П-регулятор

Передавальна функція системи щодо збурення $f(t)$

$$\Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{g_{12}(p)}{1 + g_{11}(p) g_{\text{р}}(p)}. \tag{5.7}$$

Підставивши вирази (5.1), (5.2) і (5.5) у вираз (5.7) одержимо наступне:

$$\Phi_f(p) = -\frac{k_{12}}{T_{11} p + (1 + k_{11} k_{\text{р}})}.$$

Нехай на вхід каналу збурення 21 подано одиничне стрибкоподібне збурення, зображення якого за Лапласом (дод. А)

$$f(p) = \frac{1}{p}.$$

Тоді зображення регульованої змінної

$$y(p) = \frac{k_{12}}{T_{11} p + (1 + k_{11} k_{\text{р}})} \cdot \frac{1}{p}$$

або

$$y(p) = k_{12} \frac{1}{T_{11}} \cdot \frac{1}{(p + \alpha) p},$$

де

$$\alpha = \frac{1 + k_{11} k_{\text{р}}}{T_{11}}.$$

Згідно з дод. А оригінал регульованої змінної

$$y(t) = k_{12} \frac{1}{T_{11}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Отже, рівняння зміни рівня рідини під час регулювання матиме вигляд:

$$y(t) = \frac{k_{12}}{1 + k_{11} k_{\text{р}}} \left(1 - e^{-\alpha t}\right). \tag{5.8}$$

Із виразу (5.8) випливає, якщо $t \to \infty$, то усталене значення регульованої змінної

$$y_{\text{уст}}\left(\infty\right) = \frac{k_{12}}{1 + k_{11}k_{\text{р}}}. \quad (5.9)$$

Час регулювання $t_{\text{р}}$ через який вихідна змінна $y(t)$ досягне значення $0{,}95y(\infty)$, можна визначити із виразу(5.8), якщо покласти $t = t_{\text{р}}$, а $y(t) = 0{,}95y_{\text{уст}}(\infty)$. Тоді

$$0{,}95y_{\text{уст}}(\infty) = y_{\text{уст}}(\infty)[1 - \exp(-\alpha\, t_{\text{р}})].$$

або

$$0{,}95 = 1 - \exp(-\alpha\, t_{\text{р}}).$$

Звідси випливає, що

$$\exp(-\alpha\, t_{\text{р}}) = 0{,}05.$$

Оскільки $0{,}05 = \exp(-3)$ то

$$e^{-\frac{1+k_{11}k_{\text{р}}}{T_{11}}t(p)} = e^{-3}.$$

Таким чином

$$\frac{1 + k_{11}k_{\text{р}}}{T_{11}}t_{\text{р}} = 3.$$

Отже, час регулювання рівня рідини

$$t_{\text{р}} = \frac{3T_{11}}{1 + k_{11}k_{\text{р}}}. \quad (5.10)$$

Аналіз виразів (5.9) і (5.10) свідчить, що для зменшення усталеного значення похибки регулювання $y_{\text{уст}}(t)$ і часу регулювання $t_{\text{р}}$ потрібно збільшувати коефіцієнт підсилення регулятора $k_{\text{р}}$.

Якщо автоматичний регулятор відключено, тобто, якщо

$$k_{\text{р}} = 0,$$

то усталене значення регульованої змінної можна визначити із виразу (5.9):

$$y_{\text{уст}}(\infty) = y_{1\text{уст}}. \qquad (5.11)$$

Час виходу регульованої змінної на нове усталене значення можна визначити за формулою (5.10):

$$t_1 = 3T_{11}.$$

Графіки зміни рівня рідини у збирачі з «коротким» трубопроводом при дії на автоматичну систему з П-регулятором збурювального діяння $f(t) = -1$ показано на рис. 5.7.

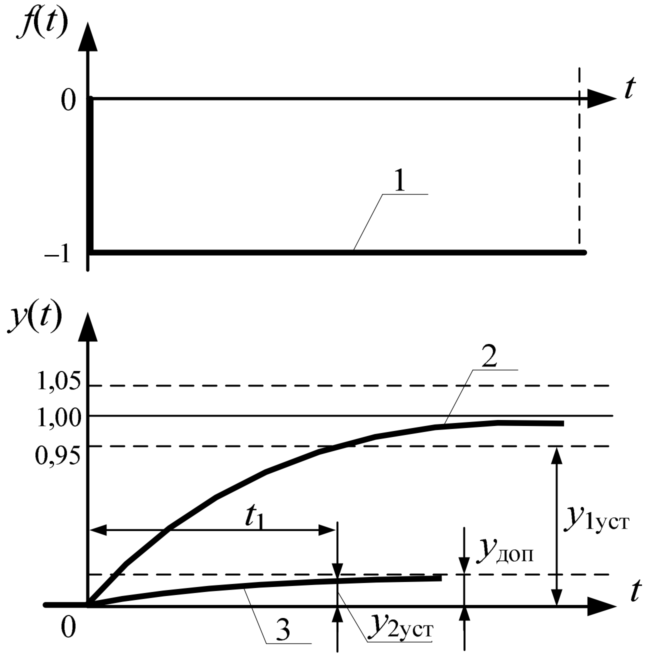


Рис. 5.7 – Перехідний процес зміни рівня рідини в системі без регулятора (графік 2) та з П-регулятором (графік 3) у разі зміни збурювального діяння (графік 1)

Автоматична система з П-регулятором володіє абсолютною стійкістю. Справді, характеристичне рівняння системи

$$T_{11}p + 1 + k_{11}\,k_{\text{р}}.$$

Отже, корінь

$$p_1 = -\frac{k_{11}k_{\text{р}} + 1}{T_{11}}.$$

Оскільки він від'ємний, то розглядувана система завжди стійка.

5.1.3.3. Дослідження системи автоматичного регулювання з ПІ-регулятором

Структурну схему САР рівня рідини з пропорційно-інтегральним (ПІ) регулятором показано на рис. 5.8.

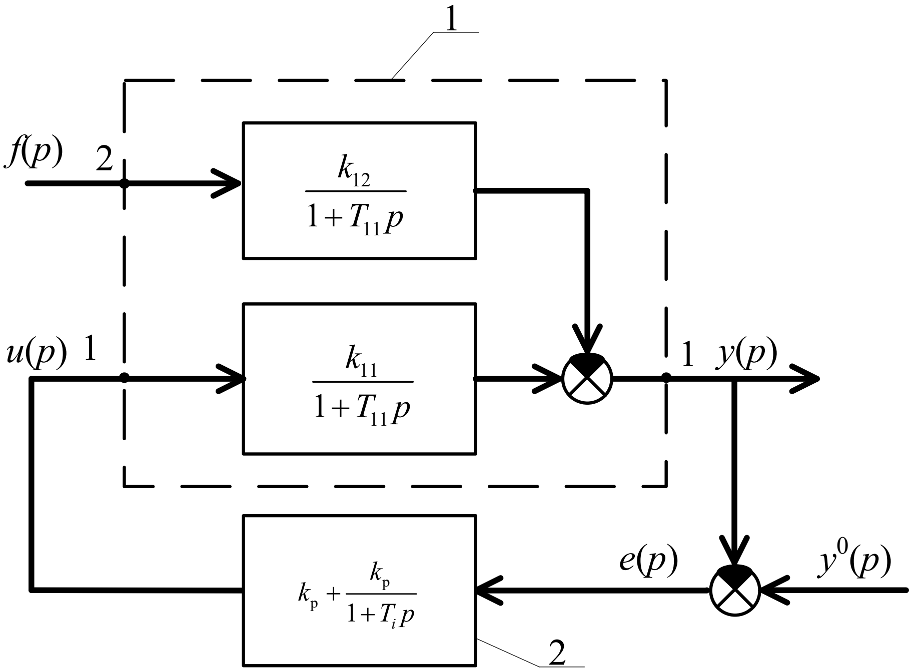


Рис. 5.8 – Структурна схема системи автоматичного регулювання рівня рідини з ПІ-регулятором:

1 – об'єкт керування; 2 – ПІ-регулятор

Передавальна функція системи щодо збурення

$$\Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = -\frac{g_{12}(p)}{1 + g_{11}(p) g_\text{р}(p)}. \tag{5.12}$$

Передавальна функція ПІ – регулятора

$$g_\text{р}(p) = \frac{u(p)}{e(p)} = \left(k_\text{р} + \frac{k_\text{р}}{T_i p} \right), \tag{5.13}$$

де $k_\text{р}$ і T_i – коефіцієнт і стала інтегрування ПІ – регулятора; $u(p)$ і $e(p)$ – зображення за Лапласом керувального діяння і розузгодження між поточним $y(t)$ і заданим $y^0(t)$ значенням вихідної змінної.

Підставивши вирази (5.1), (5.2) і (5.13) у вираз (5.12) одержимо:

$$\Phi_f(p) = -\frac{k_{12} T_i p}{T_{11} T_i p^2 + T_i (1+k) p + k}, \tag{5.14}$$

де $k = k_{11} k_\text{р}$.

Корені характеристичного рівняння цієї системи

$$p_{1,2} = \frac{-T_i(1+k) \pm \sqrt{T_i^2 (1+k)^2 - 4k T_{11} T_i}}{2 T_i T_{11}}. \tag{5.15}$$

В залежності від значення коренів $p_{1,2}$ можливі два види перехідного процесу регулювання: граничний аперіодичний або коливальний.

Випадок 1. Граничний аперіодичний процес регулювання.

Граничний аперіодичний процес регулювання буде тоді, коли дискримінант

$$T_i (1 + k)^2 - 4k\, T_{11} = 0.$$

Звідси випливає, що стала інтегрування ПІ – регулятора

$$T_i = 4 \frac{k_{11} k_\text{р}}{(1 + k_{11} k_\text{р})^2} T_{11}. \tag{5.16}$$

У такому випадку корені характеристичного рівняння кратні:

$$p_{1,2} = -\frac{1+k}{2T_{11}}. \tag{5.17}$$

Саме тому рівняння перехідної функції системи

$$y(t) = -\frac{k_{12}}{T_{11}} t \exp\left(-\frac{1+k}{2T_{11}} t \right). \tag{5.18}$$

Час t_1, який відповідає максимальному динамічному відхиленню регульованої змінної, можна визначити із виразу (5.18). Для цього потрібно знайти похідну функції (5.18) і прирівняти її до нуля:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_{12}}{T_{11}} e^{-\chi} + \frac{k_{12}}{T_{11}} t_1 e^{-\chi} \cdot \left(-\frac{1+k}{2T_{11}} \right) = 0, \tag{5.19}$$

де

$$\chi = \frac{1+k}{2T_{11}} t_1.$$

Оскільки $\exp(-x) \neq 0$, то із виразу (5.19) легко знайти шуканий час:

$$t_1 = \frac{2T_{11}}{1 + k_{11} k_{\text{р}}}. \tag{5.20}$$

Підставивши вираз (5.20) у вираз (5.18) визначимо максимальне динамічне відхилення регульованої змінної за формулою:

$$y_{\max}(t_1) = \frac{k_{12}}{1+k} \cdot \frac{2}{e} \approx \frac{0,74}{1 + k_{11} k_{\text{р}}} k_{12}. \tag{5.21}$$

Аналіз виразу (5.18) свідчить, що при $t \to \infty$

$$y_{\text{уст}}(\infty) = \frac{k_{12}}{T_{11}} (\infty) \exp\left[-\frac{1 + k_{11} k_{\text{р}}}{2T_{11}} (\infty) \right] \to 0. \tag{5.22}$$

Перехідний процес зміни рівня рідини в збирачі рідини у разі зміни витрати рідини крізь технологічний вентиль показано на рис. 5.9.

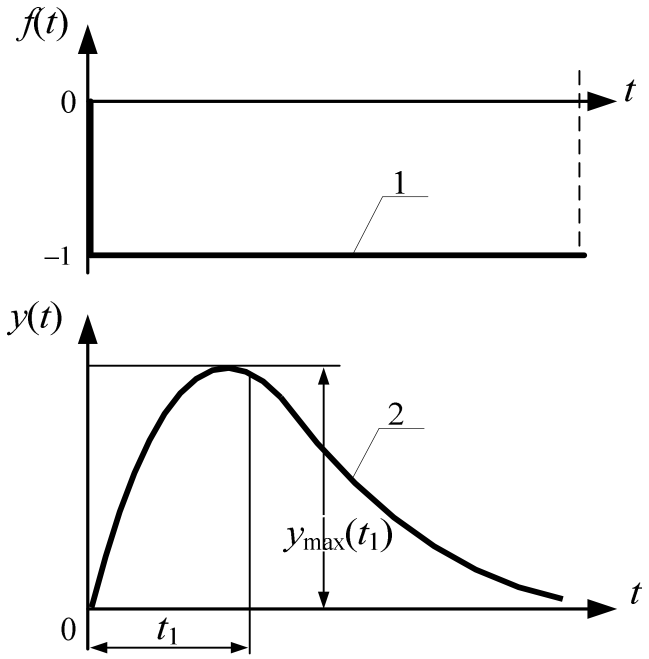


Рис. 5.9 – Аперіодичний перехідний процес зміни рівня рідини в системі з ПІ-регулятором (графік 2) у разі зміни витрати рідини (графік 1)

Випадок 2. Коливальний процес регулювання із заданим степенем коливності m.

Розглядуваний процес регулювання можна одержати при таких співвідношеннях. Корені характеристичного рівняння (5.15) подамо так:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \omega j,$$

де

$$\alpha = -\frac{1+k}{2T_{11}};$$

$$\omega = \frac{1}{T_i T_{11}} \sqrt{4kT_{11}T_i - T_i^2(1+k)^2}\ .$$

Відомо, що степінь коливності

$$m = \frac{\alpha}{\omega} = -\frac{(1+k)/2T_{11}}{\sqrt{4kT_{11}T_i - T_i^2(1+k)^2}\ /\ T_i T_{11}}$$

Отже

$$m^2 = \frac{(1+k)^2 T_i^2}{4kT_{11}T_i - T_i^2(1+k)^2}.$$

Таким чином, стала часу інтегрування ПІ – регулятора

$$T_i = 4\frac{m^2}{1+m^2}\cdot\frac{k_{11}k_\text{р}}{(1+k_{11}k_\text{р})^2}T_{11}. \quad (5.23)$$

Розв’язок диференціального рівняння, яке відповідає передавальній функції (5.14) при одиничному стрибкоподібному збурювальному діянні (іншими словами перехідна функція) має вигляд:

$$y(t) = 2m\frac{k_{12}}{1+k_{11}k_\text{р}}e^{-\alpha t}\sin\omega t. \quad (5.24)$$

Час t_1, при якому спостерігається максимальне динамічне відхилення регульованої змінної $y(t_1)$ досить легко визначити із виразу (5.24), якщо взяти від нього першу похідну і прирівняти її до нуля:

$$\frac{dy}{dt} = 2m\frac{k_{12}}{1+k_{11}k_\text{р}}\left[e^{-\alpha t}(-\alpha)\sin\omega t + e^{-\alpha t}(\cos\omega t)\right] = 0.$$

Оскільки $\exp(-\alpha t) \neq 0$, то

$$\alpha \sin \omega t = \omega \cos \omega t.$$

Звідси випливає, що

$$\text{tg}\omega t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{m}$$

або

$$\omega t = \text{arctg}\frac{1}{m}.$$

Отже, час

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\text{arctg}\frac{1}{m}. \quad (5.25)$$

Підставивши вираз (5.25) у вираз (5.24), матимемо наступне:

$$y(t_1) = 2\frac{k_{12}}{1+k_{11}k_\text{р}}\exp\left(-\alpha\frac{1}{\omega}\text{arctg}\frac{1}{m}\right)\sin\left(\text{arctg}\frac{1}{m}\right).$$

Відомо, що

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right)=\frac{m}{\sqrt{1+m}}.$$

Саме тому максимальне динамічне відхилення

$$y_{\max}(t_1)=2\frac{k_{12}}{1+k_{11}k_{\text{р}}}\cdot\frac{m}{\sqrt{1+m}}\cdot\exp\left(-m\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right). \qquad (5.26)$$

Якщо $t\to\infty$, то згідно з виразом (5.24) усталене значення рівня рідини

$$y_{\text{уст}}(\infty)\Rightarrow 0.$$

Перехідний процес зміни рівня рідини в збирачі рідини у разі зміни витрати рідини крізь технологічний вентиль 6 (див. рис. 5.3), показано на рис. 5.10.

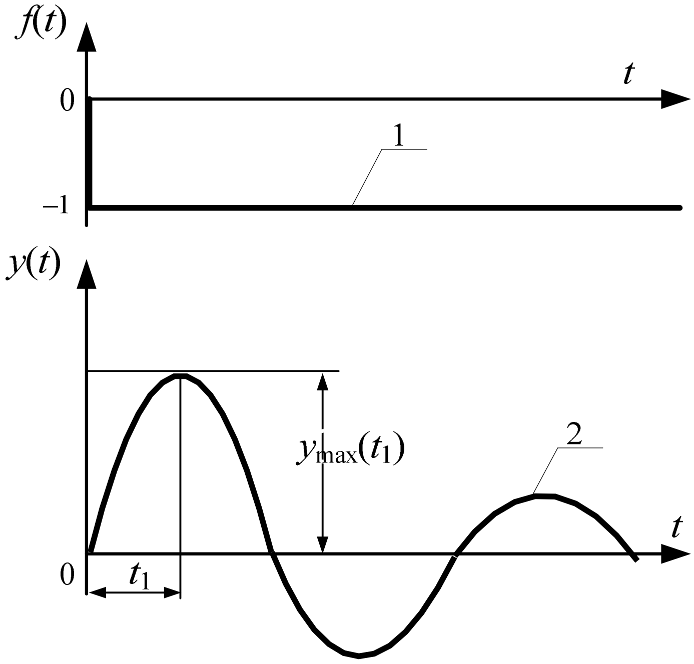


Рис. 5.10 – Коливальний перехідний процес зміни рівня рідини в системі з ПІ-регулятором (графік 2) у разі зміни витрати рідини (графік 1)

Слід сказати, що використання регулятора з ПІ-законом регулювання у разі виконання умови (5.23), може призвести до погіршення стійкості системи, позаяк у зв’язку з нестабільністю коефіцієнта підсилення каналу керування k_{11} можлива поява автоколивальних режимів у цьому випадку більш вірогідна.

5.1.3.4. Рекомендації щодо налаштування ПІ – регулятора

У розглянутих вище випадках показники якості регулювання поліпшуються, якщо збільшувати коефіцієнт підсилення регулятора $k_р$. Саме тому зазвичай його обирають близьким до максимального значення, яке має цей регулятор. Сталу часу інтегрування T_i обчислюють згідно з виразом (5.16) чи виразом (5.23), які відповідають бажаному виду перехідного процесу.

5.2. Багатовимірні системи

5.2.1. Система автоматичного керування напірним ящиком з повітряною подушкою

5.2.1.1. Вимоги до системи автоматичного керування напірним ящиком

1. Рівень маси у напускній камері напірного ящика потрібно підтримувати в заданих технологічним регламентом межах, при цьому усталена похибка регулювання чи керування не має бути більшою, ніж 10 – 20 мм. У разі виходу рівня маси за вказані межі, його коливання будуть відбиватися на зміні концентрації маси в напірному ящику і як наслідок

цього – зміні маси 1 м^2 паперового полотна на накаті папероробної машини.

2. Сумарний напір маси у напірному ящику цього типу необхідно стабілізувати з точністю не нижчою, ніж 1% від його заданого значення. У такому випадку коефіцієнт відношення швидкості струменя маси крізь випускну щілину до швидкості руху сітки машини буде лежати в заданих технологічним регламентом межах (0,8…1,02).

5.2.1.2. Математична модель напірного ящика як об’єкта керування рівнем маси у напускній камері і тиском повітряної подушки

Як було показано у розд. 2 напірний ящик з повітряною подушкою можна представити системою операційних рівнянь:

$$\begin{cases}(T_{11}p+1)y_1(p)=k_{11}u_1(p)-k_{12}y_2(p);\\(T_{22}p+1)y_2(p)=k_{21}py_1(p)+k_{22}u_2(p),\end{cases} \tag{5.27}$$

де $y_1(p)$ і $y_2(p)$ – зображення за Лапласом рівня маси у напускній камері (перша вихідна змінна) і тиску повітря у повітряній подушці (друга вихідна змінна); $u_1(p)$ і $u_2(p)$ – зображення за Лапласом витрати маси, що подається до напускної камери (перше вхідне діяння) і витрати повітря, що підводиться до повітряної подушки (друге вхідне діяння); T_{11} і T_{22} – сталі часу напускної камери і повітряної подушки; k_{11}, k_{12}, k_{21} і k_{22} – коефіцієнти підсилення каналів 11, 12, 21 і 22; p – оператор Лапласа.

Згідно з системою операційних рівнянь (5.27) будується структурна схема розглядуваної двовимірної системи (рис. 5.11).

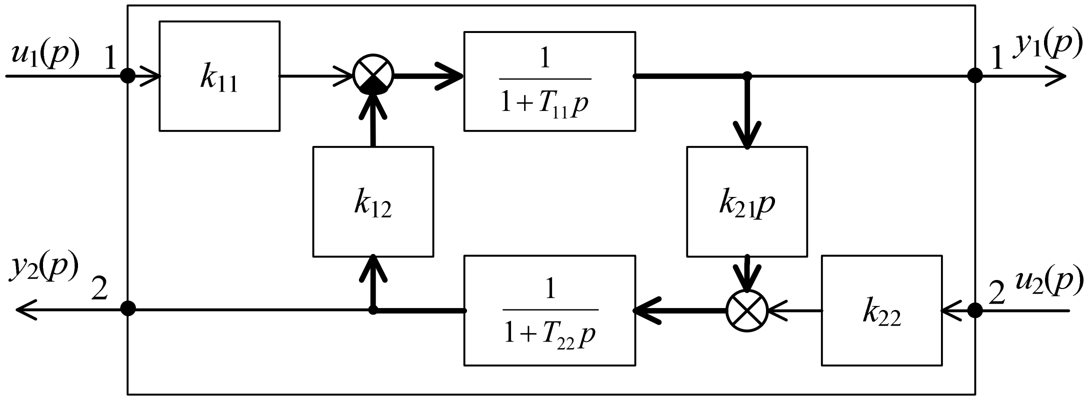


Рис. 5.11 – Структурна схема напірного ящика з повітряною подушкою як об’єкт керування рівнем маси у напускній камері і тиском повітря у повітряній подушці

5.2.1.3. Система автоматичного керування напірним ящиком з регулятором Хорнбостела

5.2.1.3.1. Принципова схема системи керування

Принципову схему системи автоматичного керування напірним ящиком з повітряною подушкою, реалізованої на базі регулятора Хорнбостела, наведено на рис. 5.12.

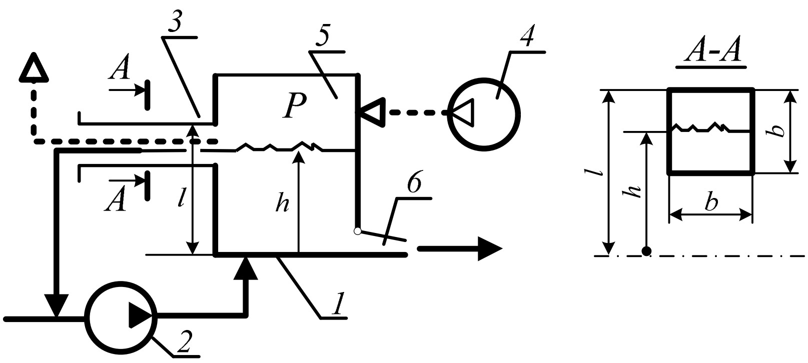


Рис. 5.12 – Принципова схема системи автоматичного керування напірним ящиком, реалізованої на базі регулятора Хорнбостела:

1 – напускна камера; 2 – змішувальний насос; 3 – переливна труба (регулятор Хорнбостела); 4 – компресор; 5 – повітряна подушка; 6 – випускальна щілина

Принцип роботи наведеної системи можна пояснити так. Усе повітря із повітряної подушки 5, куди його подає компресор 4, відводиться з неї крізь переливну трубу 3, яку називають регулятором Хорнбостела. Цю трубу розміщено так, щоб гранична поверхня поділу маси й повітря у напірному ящику проходила через центр вхідного отвору труби. Крізь неї відводиться все повітря, яке подається у повітряну подушку і частина маси, кількість якої залежить від рівня маси у напускній камері. У такому випадку повітряно-масна суміш, потрапляючи в переливну трубу буде переміщуватися в ній під тиском повітря у повітряній подушці, отже, витрата її буде залежати від тиску повітряної подушки.

Якщо через порушення усталеного режиму подачі маси чи повітря у цей технологічний об'єкт керування, викликаний скажімо, нестабільною роботою змішувального насоса 2 чи компресора 4, зміниться рівень маси h, то гранична поверхня поділу маси й повітря зміститься відносно осі вхідного отвору переливної труби. Так, у разі збільшення рівня маси у вказаній трубі, буде закриватися прохід для виходу повітря із повітряної подушки, що одразу ж зумовить збільшення тиску повітря у ній. Відповідно, якщо рівень маси знизиться, то прохід для виходу повітря крізь переливну трубу збільшиться, а отже, тиск повітря у ній зменшиться. Саме тому витрата маси, що подається у напускну камеру, збільшиться, а це призведе до збільшення і рівня маси.

5.2.1.3.2. Структурний аналіз системи керування напірним ящиком

На підставі структурної схеми (рис. 5.11) легко побудувати структурну схему САК НЯ з ПП, обладнану регулятором Хорнбостела (рис. 5.13).

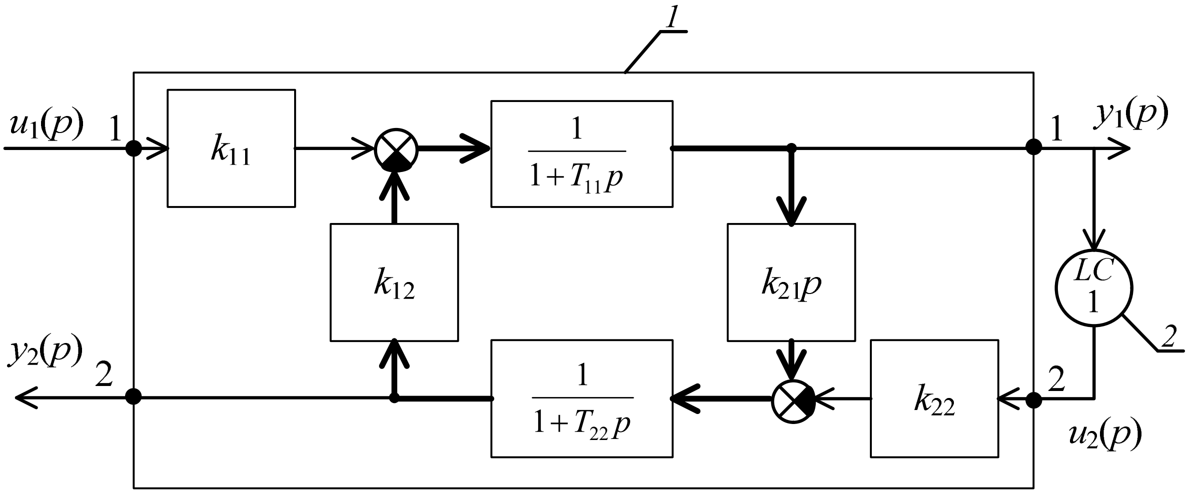


Рис. 5.13 – Структурна схема системи автоматичного керування напірним ящиком з регулятором Хорнбостела:
1 – напірна камера; 2 –регулятор Хорнбостела

Аналіз наведеної структурної схеми свідчить, що регулятор Хорнбостела 2 під'єднано паралельно лінії зв'язку, яка з'єднує вихід каналу 11 зі входом каналу 22 і який володіє диференціальними властивостями.

5.2.1.3.3. Передавальна функція регулятора Хорнбостела

З метою одержання передавальної функції регулятора Хорнбостела розглянемо залежність витрати повітря, що виходить із повітряної подушки. Нехай переливна труба має вихідний отвір у вигляді квадрата. Тоді площа поперечного перерізу цієї труби (рис. 5.12)

$$f_в = b(l - h),$$

де b – сторона квадрата; h – поточне значення рівня маси у напускній камері; l – конструктивний параметр.

Витрата повітря крізь вихідний отвір переливної труби

$$g_в = f_в \sqrt{\frac{kg}{3R\theta}} P, \qquad (5.28)$$

де θ – температура повітря у повітряній подушці; g – прискорення сили тяжіння; R – універсальна газова стала; k – коефіцієнт політропи.

На підставі виразу (5.28) можна визначити відхилення витрати повітря

$$\Delta g_{\text{в}} = \sqrt{\frac{kg}{3R\theta}} P_0 \Delta f_{\text{в}} = f_{\text{в}}^0 \frac{1}{f_{\text{в}}^0} \sqrt{\frac{kg}{3R\theta}} P_0 \Delta f_{\text{в}}.$$

Враховуючи вираз (5.28), маємо

$$\Delta g_{\text{в}} = \frac{g_{\text{в}}^0}{f_{\text{в}}^0} \Delta f_{\text{в}}.$$

Оскільки

$$\Delta f_{\text{в}} = -\, b \Delta h,$$

то

$$\Delta g_{\text{в}} = -b \frac{g_{\text{в}}^0}{f_{\text{в}}^0} \Delta h.$$

Таким чином, рівняння регулятора Хорнбостела можна подати і так:

$$\Delta g_{\text{в}} = -k_{\text{р}}^X \Delta h, \tag{5.29}$$

де

$$k_{\text{р}}^X = b \frac{g_{\text{в}}^0}{f_{\text{в}}^0} \; -$$

коефіцієнт підсилення регулятора Хорнбостела.

Якщо вважати, що $f_{\text{в}}^0 = b^2$, а $b = d$, то

$$k_{\text{р}}^X = \frac{g_{\text{в}}^0}{b} = \frac{g_{\text{П}}^0}{d}, \tag{5.30}$$

де d – діаметр переливної труби.

Будемо вважати, що

$$u_2(p) \sim \Delta g_{\text{П}}(p), \text{ а } y_1(p) \sim \Delta h(p).$$

Тоді передавальну функцію регулятора Хорнбостела (5.29) можна подати так:

$$g_{\text{р}}^X(p) = -k_{\text{р}}^X. \tag{5.31}$$

5.2.1.3.4. Дослідження властивостей системи автоматичного регулювання рівня маси

Передавальна функція розглядуваного напірного ящика по каналу 11

$$g_{11}(p) = \frac{k_{11}(1+T_{22}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \tag{5.32}$$

Передавальна функція цього напірного ящика по каналу 21

$$g_{12}(p) = -\frac{k_{12}k_{22}}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \tag{5.33}$$

На підставі передавальних функцій (5.31) – (5.33) побудовано структурну схему системи автоматичного регулювання рівня маси у НЯ з ПП з регулятором Хорнбостела (рис. 5.14).

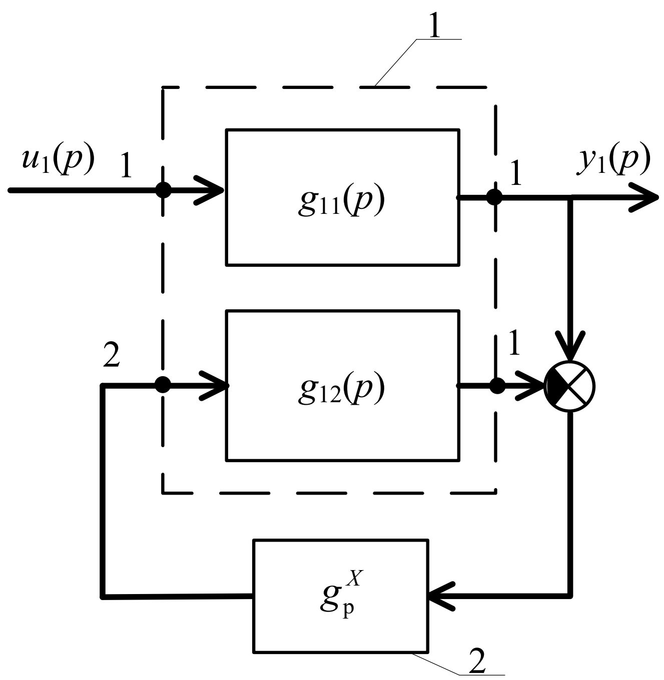


Рис. 5.14 – Структурна схема системи автоматичного регулювання рівня маси у напірному ящику з регулятором Хорнбостела:

1 – напірний ящик; 2 –регулятор Хорнбостела

Аналіз наведеної структурної схеми свідчить, якщо напірний ящик не має автоматичного регулятора рівня маси у напускній камері, тобто якщо

$$k_{\text{р}}^{X}=0,$$

то передавальна функція розімкнутої системи відносно збурення $u_1(t)$

$$\Phi_{u1}(p)=g_{11}(p)=\frac{B(p)}{A(p)} \tag{5.34}$$

де $A(p) = (1 + T_{11}p)(1 + T_{22}p) + k_{12}\,k_{21}p$; $B(p) = k_{11}(1 + T_{22}p)$.

Отже, у разі дії одиничного стрибкоподібного збурювального діяння $u_i(t)\equiv 1(t)$ усталена похибка рівня маси у напірному ящику, не обладнаному регулятором рівня

$$\underset{\text{уст}}{y_1(t)}=\lim_{p\to 0} p\frac{k_{11}(1+T_{22}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}\cdot\frac{1}{p}=k_{11}. \tag{5.35}$$

Якщо регулятор підключено до напірного ящика, то передавальна функція системи регулювання відносно збурення $u_1(t) = 1(t)$

$$\Phi u_1(p)=\frac{g_{11}(p)}{1+g_{\text{р}}^{X}(p)g_{12}(p)g_{11}(p)}. \tag{5.36}$$

Передавальну функцію (5.33) подамо так:

$$g_{12}(p)=-\frac{C(p)}{A(p)},\ \text{де}\ \ C(p) = k_{12}\,k_{22}. \tag{5.37}$$

Підставивши вирази (5.31), (5,34) і (5.37) у вираз (5.36), маємо:

$$\Phi_{u_1}(p)=\frac{\dfrac{B(p)}{A(p)}}{1+k_{\text{р}}^{X}\cdot\dfrac{C(p)}{F(p)}\cdot\dfrac{B(p)}{A(p)}}=\frac{\dfrac{B(p)}{F(p)}}{\dfrac{A^2(p)+kpB(p)C(p)}{A^2(p)}}$$

або

$$\Phi_{u_1}(p) = \frac{A(p)B(p)}{A^2(p) + kpB(p)C(p)}. \tag{5.38}$$

Якщо $k_{\text{р}}^X = 0$, то вираз (5.38) дорівнює виразу (5.34). Якщо $k_{\text{р}}^X \neq 0$, то у разі дії одиничного стрибкоподібного збурювального діяння $u_1(t) = 1(t)$, усталена похибка рівня маси у напускній камері

$$y_{1\text{уст}}(t) = \lim_{p \to 0} p \frac{A(p)B(p)}{A^2(p) + k_{\text{р}}^X B(p)C(p)} \cdot \frac{1}{p}.$$

Якщо $p \to 0$, то

$$A(p) = (1 + T_{11}p)(1 + T_{22}p) + k_{12}\, k_{21}p \to 1 \text{ Отже, } A^2(p) = 1.$$
$$B(p) = k_{11}(1 + T_{22}p) \to k_{11};\ C(p) = k_{12}\, k_{22}.$$

Таким чином, усталена похибка рівня маси у напірному ящику обладнаному регулятором Хорнбостела

$$\underset{t \to \infty}{y_{1\text{уст}}(t)} = \frac{k_{11}}{1 + k_{\text{р}}^X k_{12} k_{22}}. \tag{5.39}$$

Порівнюючи вирази (5.35) і (5.39) бачимо, що усталена похибка рівня маси обернено пропорційна коефіцієнту підсилення регулятора Хорнбостела позаяк коефіцієнти підсилення каналів 11, 12 і 22 є сталими величинами.

Коефіцієнт підсилення регулятора Хорнбостела

$$k_{\text{р}}^X = \frac{g_{\Pi}^0}{d}.$$

Аналіз цього виразу свідчить, що збільшити цей коефіцієнт можна або шляхом збільшення витрати повітря, що подається у повітряну подушку, або шляхом зменшення діаметра переливної труби. На діючих напірних ящиках цього типу витрата повітря, що подається компресором до повітряної подушки дорівнює 3,6 м^3/хв. чи 5,2 м^3/хв. Діаметр переливної труби дорівнює 35 чи 50 мм. Залежність коефіцієнта підсилення регулятора Хорнбостела від цих величин, наведено на рис. 5.15.

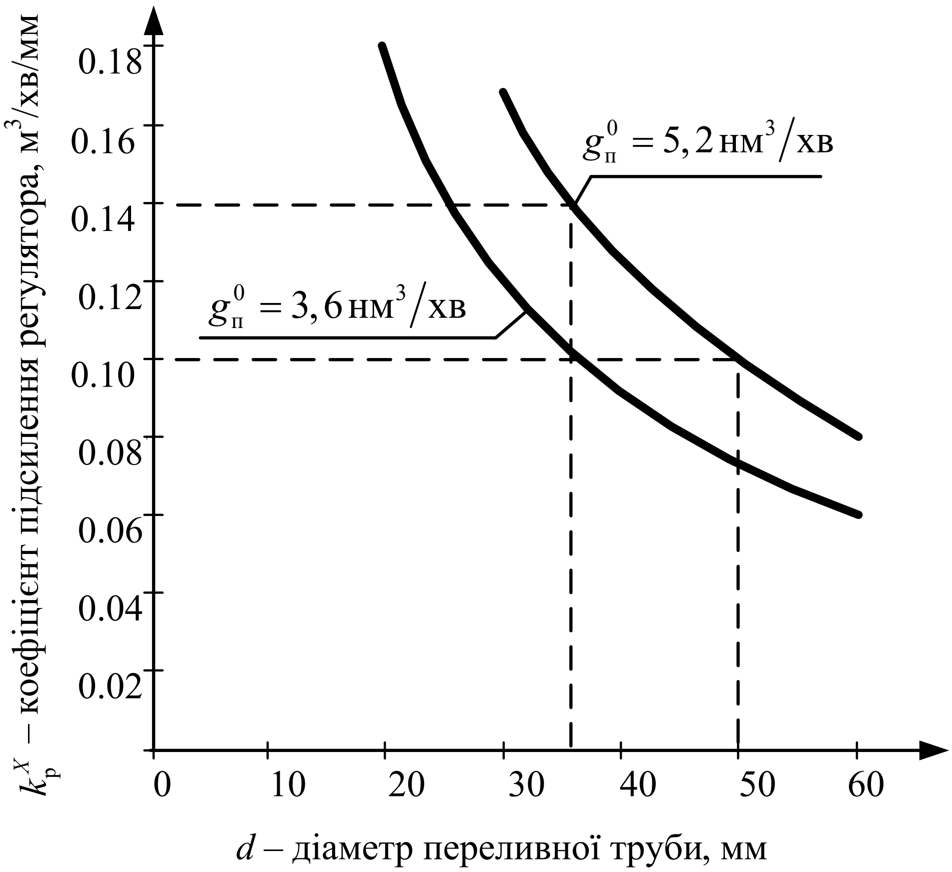


Рис. 5.15 – Залежність коефіцієнта підсилення регулятора Хорнбостела від діаметра переливної труби і кількості витрати повітря, що подається у повітряну подушку

Аналіз наведеної залежності свідчить, що коефіцієнт підсилення регулятора Хорнбостела суттєво залежить від витрати повітря, яке проходить крізь трубу Хорнбостела.

5.2.1.4. Системи автоматичного керування напірними ящиками з аналоговими регуляторами рівня маси і тиску повітря

5.2.1.4.1. Структурний аналіз автоматичних систем

На підставі структурної схеми напірного ящика з повітряною подушкою (рис. 2.9) можна побудувати два варіанти структурної схеми САК НЯ з ПП. Перший варіант такої системи показано на рис. 5.16.

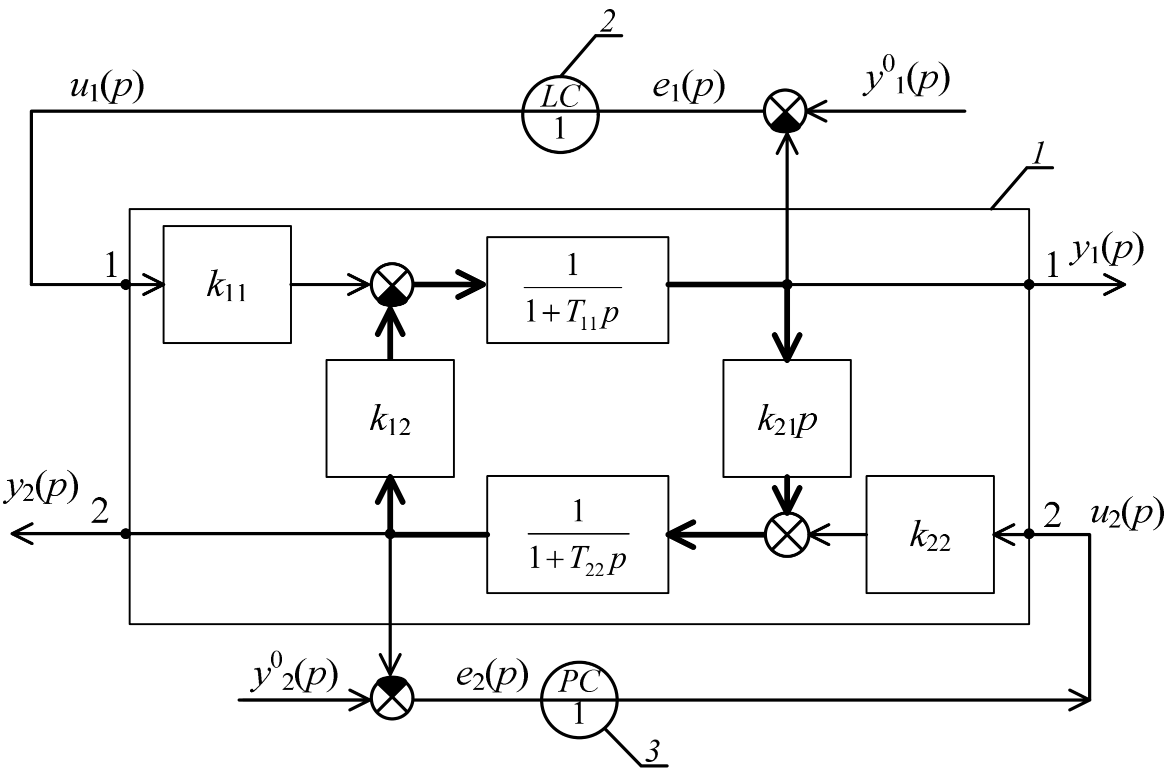


Рис. 5.16 – Структурна схема системи автоматичного керування напірним ящиком з аналоговими регуляторами рівня маси і тиску повітря (Варіант І):

1 – напірний ящик; 2 –регулятор рівня; 3 –регулятор тиску

Аналіз цієї структурної схеми свідчить, що між САК рівнем маси $y_1(t)$ і САК тиском повітря $y_2(t)$ існує взаємозв'язок, зумовлений наявністю внутрішнього контуру. Тому, скажімо, у разі відпрацювання САК рівнем маси її заданого значення $y_1^0(t)$, з'являється вплив швидкості зміни рівня маси на САК тиском повітря, яка відпрацьовує її завдання $y_2^0(t)$. Саме тому САК тиском повітря починає впливати на САК рівнем маси. Якщо ж змінити задане значення $y_2^0(t)$ САК тиском повітря, то ця система, відпрацьовуючи подане на неї задавальне діяння, починає впливати на САК рівнем маси. При цьому тривалість перехідних процесів вказаних вихідних змінних затягується, а отже якість процесу керування напірним ящиком зменшується.

Другий варіант розглядуваної САК напірним ящиком показано на рис. 5.17.

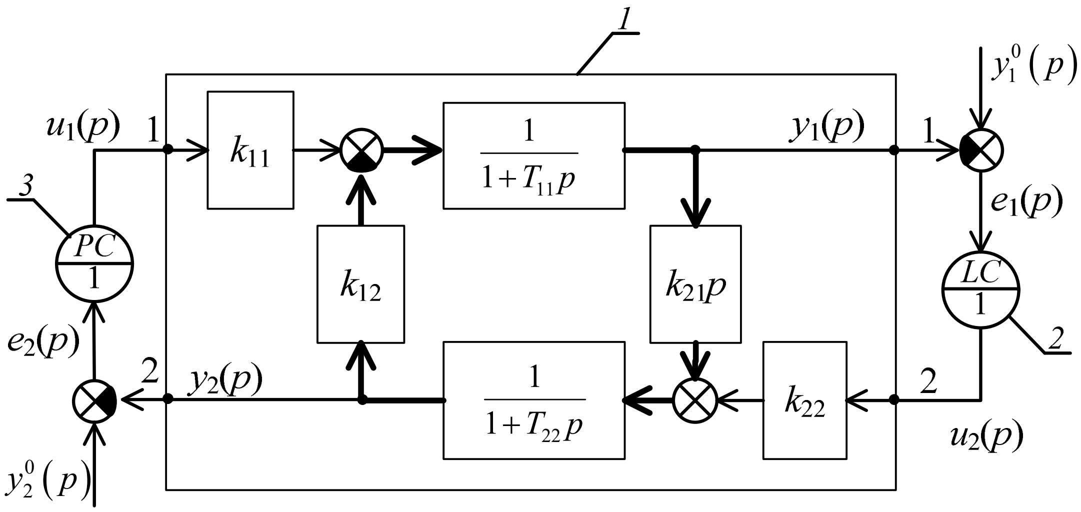


Рис. 5.17 – Структурна схема системи автоматичного керування напірним ящиком з аналоговими регуляторами рівня маси і тиску повітря (Варіант II):

1 – напірний ящик; 2 –регулятор рівня; 3 –регулятор тиску

Аналіз цієї структурної схеми свідчить, що регулятор рівня 2 підключається паралельно правій частині замкнутого контуру з коефіцієнтом підсилення $k_{21}p$, який вступає в роботу тільки у разі зміни швидкості рівня маси. Регулятор тиску 3 підключається паралельно лівій частині контуру зі сталим коефіцієнтом підсилення k_{12}. У цьому варіанті САК напірним ящиком права і ліва частини контуру зв'язку, будучи підключені паралельно регуляторам рівня маси і тиску повітря, використовуються як додаткові канали керування.

Таким чином, на підставі аналізу двох структурних схем САК НЯ з ПП можна зробити висновок: САК напірним ящиком, у якій регулятор рівня маси керує витратою повітря, що подається у повітряну подушку, а регулятор тиску повітря у повітряній подушці керує витратою маси, що подається у напускну камеру, має значні переваги у порівнянні з САК напірним ящиком, у якій регулятор рівня маси керую витратою маси, що подається у напускну камеру, а регулятор тиску повітря керує витратою повітря, яке подається до повітряної подушки.

5.2.1.4.2. Розробка алгоритмічного забезпечення системи автоматичного керування напірним ящиком, реалізованої згідно з варіантом І

Розглядувана САК складається із двох взаємопов'язаних систем автоматичного керування (САК) (рис. 5.16): САК рівнем маси у напускній камері і САК тиском повітря у повітряній подушці.

У першій із вказаних САК рівень маси $y_1(t)$ порівнюється із його заданим значенням $y_1^o(t)$ і сигнал розузгодження $e_1(t)$ подається на регулятор рівня 2, який своїм керувальним діянням $u_1(t)$ змінює витрату маси, що подається до напускної камери. Таким чином, структурну схему цієї САК можна зобразити так, як показано на рис. 5.18.

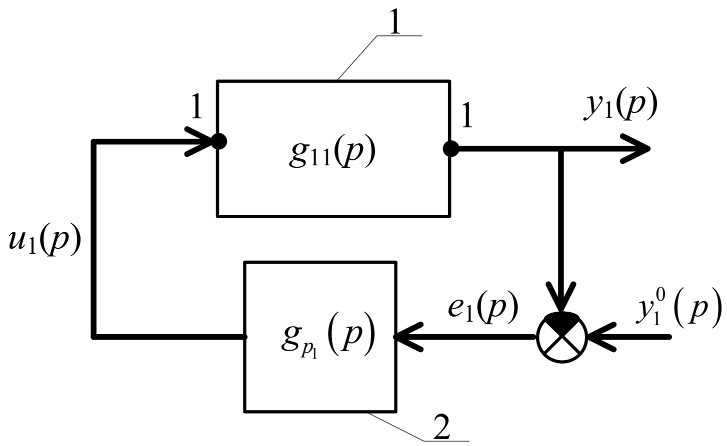


Рис. 5.18 – Структурна схема системи автоматичного керування рівнем маси у напускній камері

(Варіант І):

1 – напірний ящик (канал 11); 2 –регулятор рівня маси

Передавальна функція напірного ящика по каналу керування 11 (розд. 2)

$$g_{11}(p) = \frac{k_{11}(1+T_{22}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \tag{5.40}$$

Будемо вважати, що в каналі керування 11 існує транспортне запізнювання, яке позначимо буквою τ. Тому вираз (5.40) слід скорегувати так:

$$g_{11}(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)}e^{-p\tau}, \tag{5.41}$$

де

$$B_1(p) = k_{11}(1 + T_{22}p);$$

$$A_1(p) = T_{11}\,T_{22}\,p^2 + (\,T_{11} + T_{22} + k_{12}\,k_{21}\,)p + 1.$$

У якості регулятора рівня маси приймаємо регулятор з ПІ – законом регулювання:

$$u_1(t) = k_{\text{p}_1}\left[e_1(t) + \frac{1}{T_{i1}}\int_o^t e_1(t)dt\right], \tag{5.42}$$

де $k_{\text{p}1}$ і T_{i1} – коефіцієнт підсилення і стала інтегрування регулятора рівня.

У другій із вказаних САК (рис. 5.17) тиск повітря $y_2(t)$ порівнюється із його заданим значенням $y_2^0(t)$ і сигнал розугодження $e_2(t)$ подається на регулятор тиску 3, який своїм керувальним діянням $u_2(t)$ змінює витрату повітря, що подається у повітряну подушку. Таким чином, структурну схему розглядуваної САК можна зобразити так, як показано на рис. 5.19.

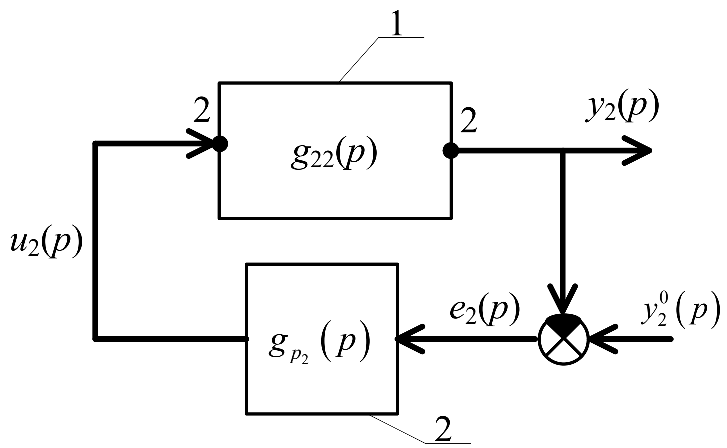


Рис. 5.19 – Структурна схема системи автоматичного керування тиском повітря у повітряній подушці
(Варіант I):

1 – напірний ящик (канал 22); 2 –регулятор тиску повітря

Передавальна функція напірного ящика по каналу керування 22 (розд. 2)

$$g_{22}(p)=\frac{k_{22}(1+T_{11}p)}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \quad (5.43)$$

Будемо вважати, що в каналі керування 22 існує транспортне запізнювання τ_2. Тому вираз (5.43) подамо так:

$$g_{22}(p)=\frac{B_2(p)}{A_1(p)}e^{-p\tau_2}, \quad (5.44)$$

де

$$B_2(p) = k_{22}(1 + T_{11}p).$$

У якості регулятора тиску повітря приймемо регулятор з ПІ – законом регулювання

$$u_2(t)=k_{р2}\left[e_2(t)+\frac{1}{T_{i2}}\int_0^t e_2(t)dt\right], \quad (5.45)$$

де $k_{р2}$ і T_{i2} – коефіцієнт підсилення і стала інтегрування регулятора тиску.

5.2.1.4.3. Розробка алгоритмічного забезпечення системи автоматичного керування ящиком, реалізованої згідно з варіантом II

Розглядувана САК складається із двох взаємозв’язаних САК (рис. 5.17): САК рівнем маси у напускній камері і САК тиском повітря у повітряній подушці.

У першій із вказаних САК рівень маси $y_1(t)$ порівнюється із його заданим значенням $y_1^0(t)$ і сигнал розузгодження $e_1(t)$ подається на регулятор рівня 2, який своїм керувальним діянням $u_2(t)$ змінює витрату повітря, що подається до повітряної подушки. Таким чином, структурну схему розглядуваної САК можна зобразити так, як показано на рис. 5.20.

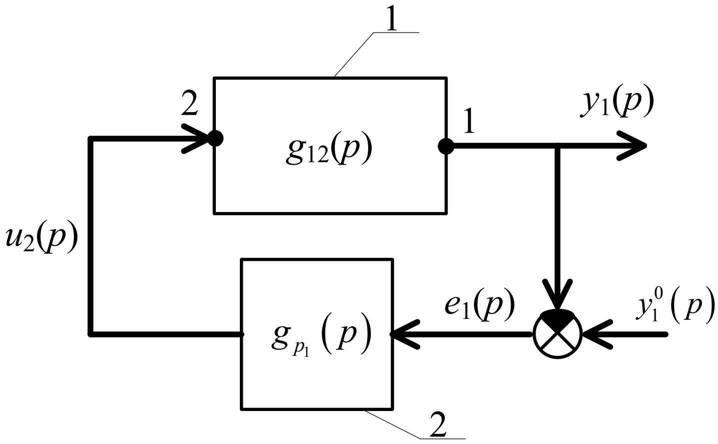


Рис. 5.20 – Структурна схема системи автоматичного керування рівнем маси у напускній камері

(Варіант ІІ):

1 – напірний ящик (канал 21); 2 –регулятор рівня маси

Передавальна функція напірного ящика по каналу керування 21 (розд. 2)

$$g_{12}(p) = -\frac{k_{12}k_{22}}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \tag{5.46}$$

Будемо вважати, що в каналі керування 21 існує транспортне запізнювання τ_1. Тому вираз (5.46) слід уточнити, записавши його так:

$$g_{12}(p) = \frac{B_3(p)}{A_1(p)}e^{-p\tau_1}, \tag{5.47}$$

де

$$B_3(p) = k_{12}\,k_{22}.$$

У якості регулятора тиску повітря приймемо регулятор з ПІ – законом регулювання:

$$u_2(t) = k_{\text{р}1}\left[e_1(t) + \frac{1}{T_{i1}}\int_o^t e_1(t)dt\right]. \tag{5.48}$$

У другій із вказаних САК тиск повітря порівнюється із його заданим значенням $y_2^0(t)$ і сигнал розузгодження $e_2(t)$ подається на регулятор тиску 3, який своїм керувальним діянням $u_1(t)$ змінює витрату маси, що подається до напускної камери. Таким чином, структурну схему розглядуваної САК можна зобразити так, як показано на рис. 5.21.

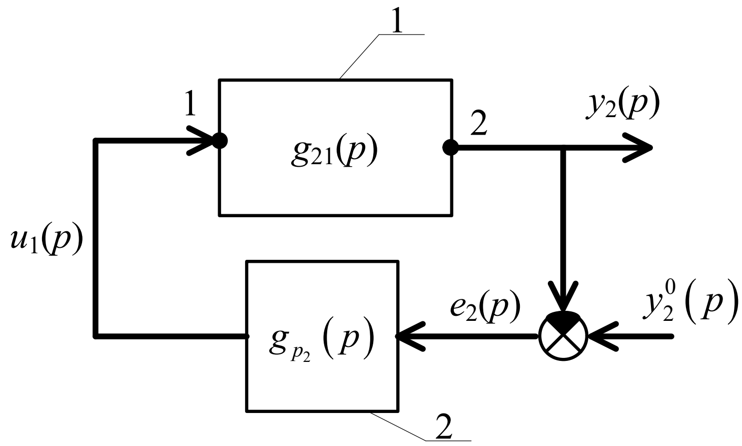


Рис. 5.21 – Структурна схема системи автоматичного керування тиском повітря у повітряній подушці

(Варіант II):

1 – напірний ящик (канал 12); 2 –регулятор тиску повітря

Передавальна функція напірного ящика каналу керування 12 (розд. 2)

$$g_{21}(p) = \frac{k_{11}k_{21}p}{(1+T_{11}p)(1+T_{22}p)+k_{12}k_{21}p}. \tag{5.49}$$

Будемо вважати, що в каналі керування 12 також існує транспортне запізнювання τ_2. Тому вираз (5.49) слід уточнити, записавши його так:

$$g_{21}(p) = \frac{B_4}{A_1(p)}e^{-p\tau_2}, \tag{5.50}$$

де

$$B_4(p) = k_{11}\, k_{21}\, p.$$

У якості регулятора тиску повітря приймемо регулятор з ПІ – законом регулювання:

$$u_1(t) = k_{р2}(p)\left[e_2(t) + \frac{1}{T_{i2}}\int_0^t e_2(t)dt\right]. \qquad (5.51)$$

5.2.1.5. Комп'ютерний розрахунок систем автоматичного керування напірними ящиками з повітряною подушкою

Комп'ютерний розрахунок САК напірними ящиками з повітряною подушкою, реалізованих згідно з I і II варіантами, виконувався за допомогою підпрограми FormMy, розробленої на кафедрі автоматизації хімічних виробництв (дод. Б).

5.2.1.5.1. Технічна характеристика напірного ящика

- стала часу напускної камери T_{11}=79,46 с;
- коефіцієнт підсилення каналу 11 k_{11}=4,86 м/м^3/с;
- коефіцієнт підсилення каналу 12 k_{12} = 10 м/кг/см^2;
- стала часу повітряної подушки T_{22} = 108,84 с;
- коефіцієнт підсилення каналу k_{22} = 2,07 $\frac{\text{кг/см}^2}{\text{кг/с}}$;
- коефіцієнт підсилення каналу 21 k_{21} = 0,11 м^2·кг/см^2·с/м^3;
- запізнення у каналах 11, 12, 21 і 22 $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

5.2.1.5.2. Дослідження САК рівнем маси у напускній камері (варіант I)

Структурну схему досліджуваної системи наведено на рис. 5.18. При стрибкоподібній зміні задавального діяння $y_1^0(t) \equiv 1$ вихідна змінна $y_1(t)$ виходить на її задане значення $y_1^0(t)$ за час керування t_k = 75 с з урахуванням 10% зони нечутливості (рис. 5.22).

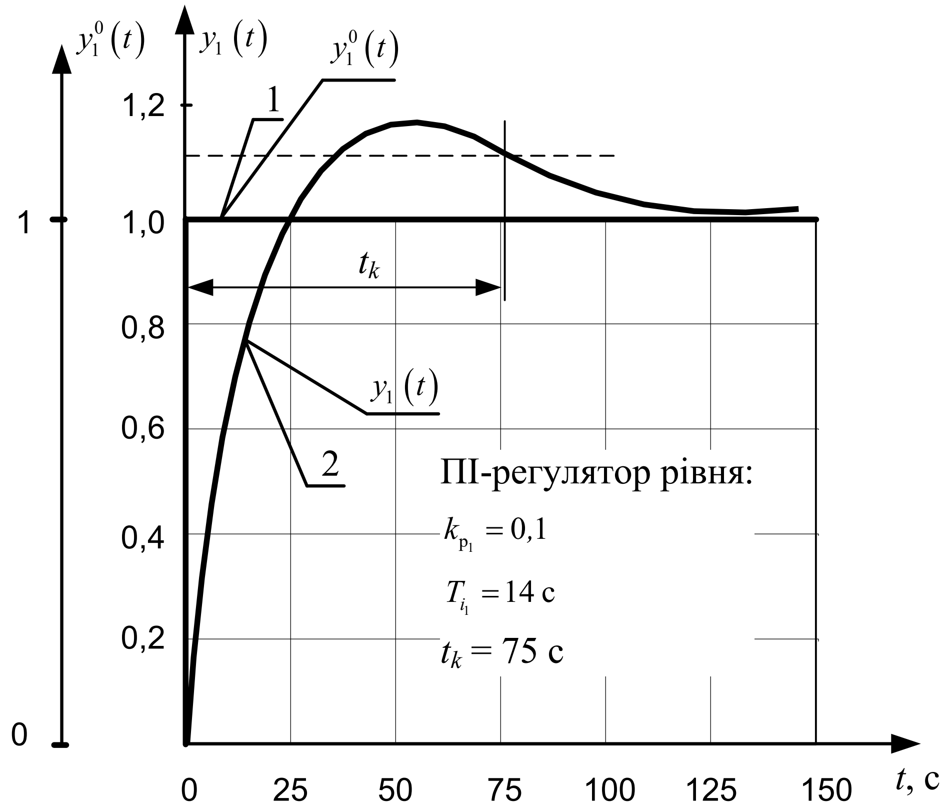


Рис. 5.22 – Графік зміни рівня маси (графік 2) у напускній камері у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння (графік 1) регулятору рівня САК напірним ящиком (Варіант I)

Як показали розрахунки оптимальні параметри налаштування ПІ – регулятора рівня були такими: k_{p1} = 0,1, а T_{i1} = 14 с.

5.2.1.5.3. Дослідження САК тиском повітря у повітряній подушці (варіант I)

Структурну схему досліджуваної системи наведено на рис. 5.19. При стрибкоподібній зміні задавального діяння $y_2^0(t)=1$ вихідна змінна $y_2(t)$ виходить на задане значення $y_2^0(t)$ за час керування t_k = 100 с з урахуванням 10% зони нечутливості (рис. 5.23).

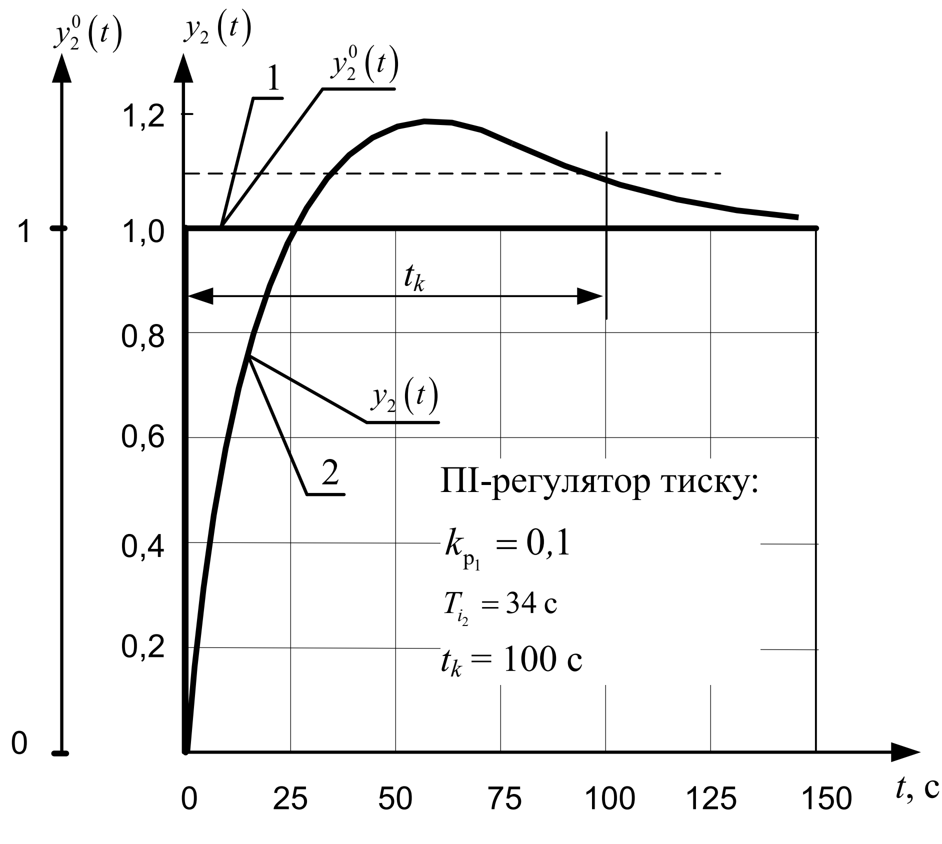


Рис. 5.23 – Графік зміни тиску повітря (графік 2) у повітряній подушці у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння (графік 1) регулятору тиску САК напірним ящиком (Варіант I)

Як показали розрахунки, оптимальні параметри налаштування ПІ – регулятора тиску були такими: $k_{\text{p}2} = 0{,}1$; $T_{i2} = 34$с.

5.2.1.5.4. Дослідження САК рівнем маси у напускній камері (варіант ІІ)

Структурну схему досліджуваної системи наведено на рис. 5.20. При стрибкоподібній зміні задавального діяння $y_1^0(t)=1$ вихідна змінна $y_1(t)$ виходить на задане значення за час керування $t_к$ = 900 с з урахуванням 10% зони нечутливості (рис. 5.24).

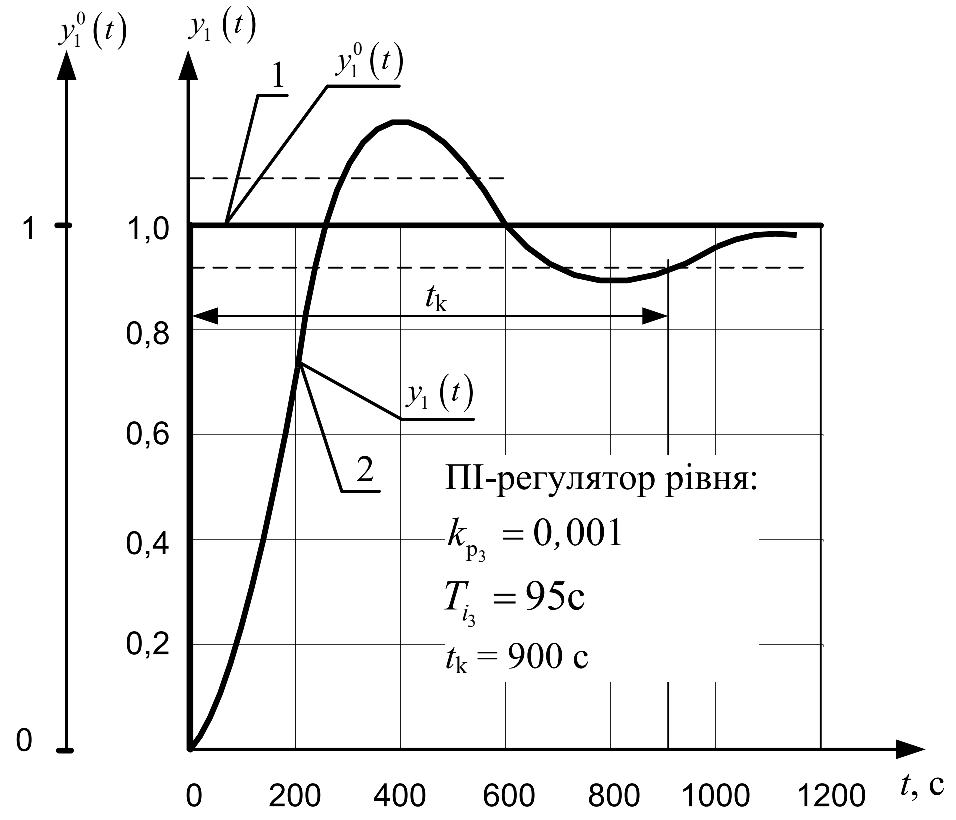


Рис. 5.24 – Графік зміни рівня маси (графік 2) у напускній камері у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння (графік 1) регулятору рівня САК напірним ящиком (Варіант ІІ):

Як показали розрахунки оптимальні параметри налаштування ПІ – регулятора рівня маси були такими: $k_{р1}$ = 0,001, а T_{i1} = 95 с.

5.2.1.5.5. Дослідження САК тиском повітря у повітряній подушці (варіант II)

Структурну схему досліджуваної системи наведено на рис. 5.21. При стрибкоподібній зміні задавального діяння $y_2^0(t)=1$ вихідна змінна $y_2(t)$ виходить на задане значення за час керування $t_к$ = 30 с з урахуванням 10% зони нечутливості (рис. 5.25).

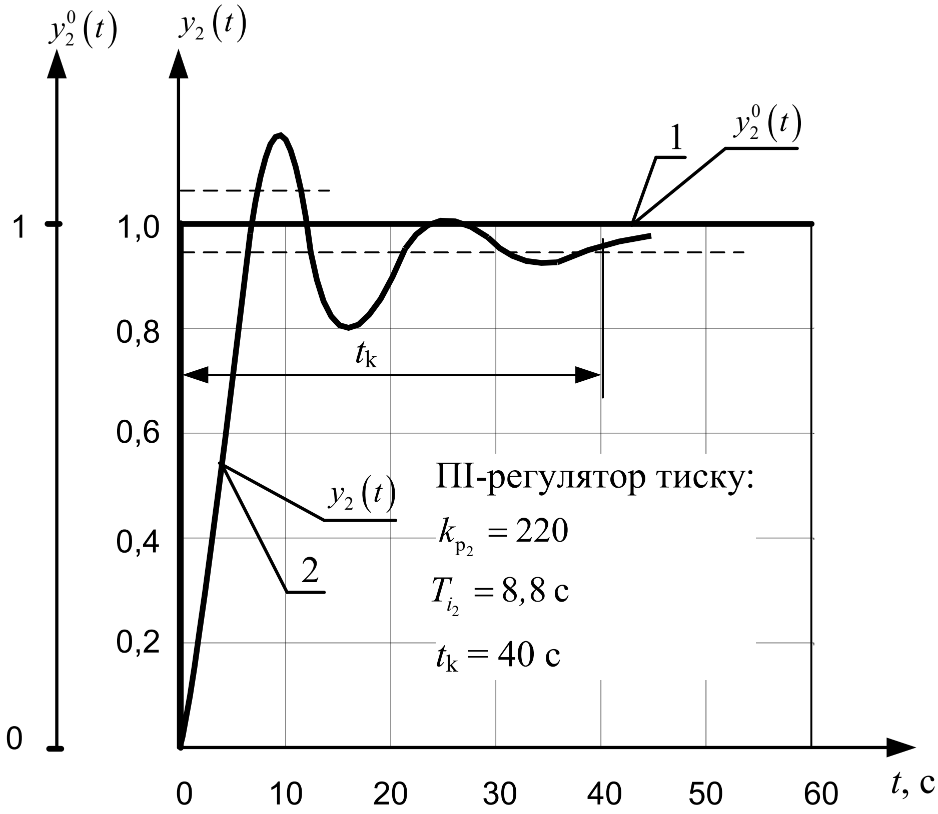


Рис. 5.25 – Графік зміни тиску повітря (графік 2) у повітряній подушці у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння (графік 1) регулятору тиску САК напірним ящиком (Варіант II)

Як показали розрахунки оптимальні параметри налаштування ПІ – регулятора тиску були такими: $k_{р2}=220$, а $T_{i2}=8{,}8$ с

5.2.1.5.6. Висновки

Графіки зміни рівня маси у напускній камері напірного ящика, обладнаного САК згідно з І-м чи ІІ-м варіантом і у разі стрибкоподібної зміни задавальних діянь регуляторам рівня, наведено на рис. 5.26.

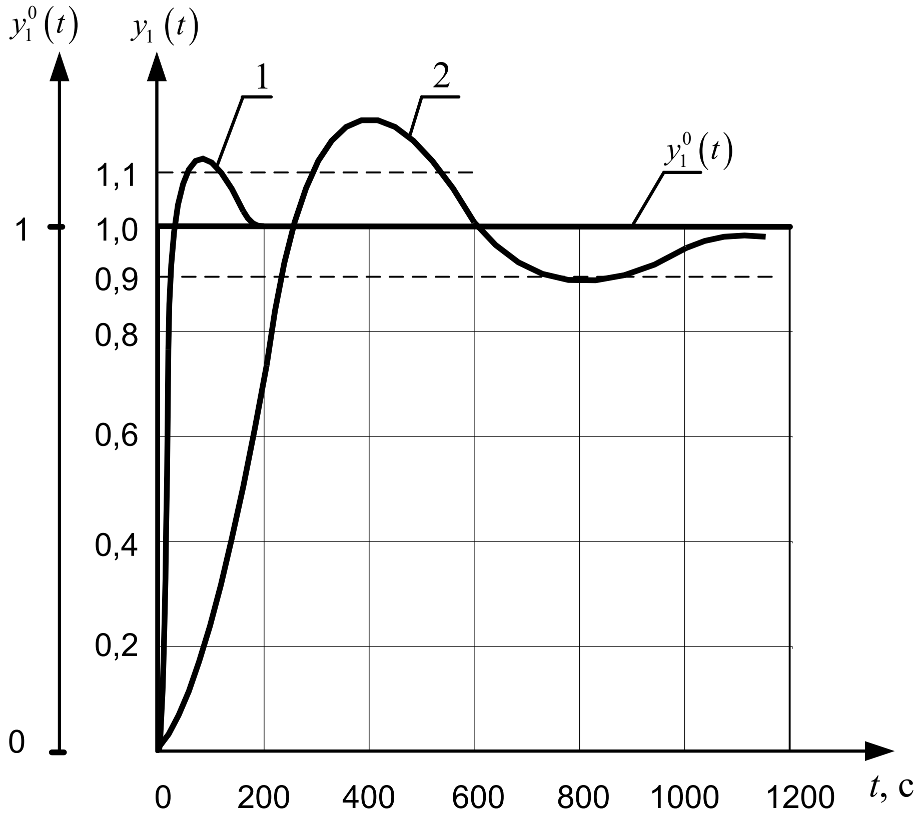


Рис. 5.26 – Графіки зміни рівня маси у напускній камері у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння регулятору рівня:

1 – варіант І; 2 – варіант ІІ

Аналіз наведених графіків свідчить, що САК напірним ящиком, реалізована згідно з І-м варіантом, реагує досить швидко на зміну задавального діяння регулятора рівня і приблизно за 100 с рівень входить в допустиму 10% зону нечутливості. У САК напірним ящиком, реалізовану згідно з ІІ-м варіантом, рівень маси виходить на задане значення з урахуванням 10% зони нечутливості приблизно за 900с. Отже, можна зробити висновок, що САК напірним ящиком, реалізована згідно з 1-м варіантом по цьому параметру володіє більшою швидкодією у порівнянні з САК напірним ящиком, реалізованої згідно з ІІ варіантом.

Графіки зміни тиску повітря у повітряній подушці напірного ящика, обладнаного САК згідно з І-м чи ІІ-м варіантом і у разі стрибкоподібної зміни задавальних діянь регулятором тиску, наведено на рис. 5.27.

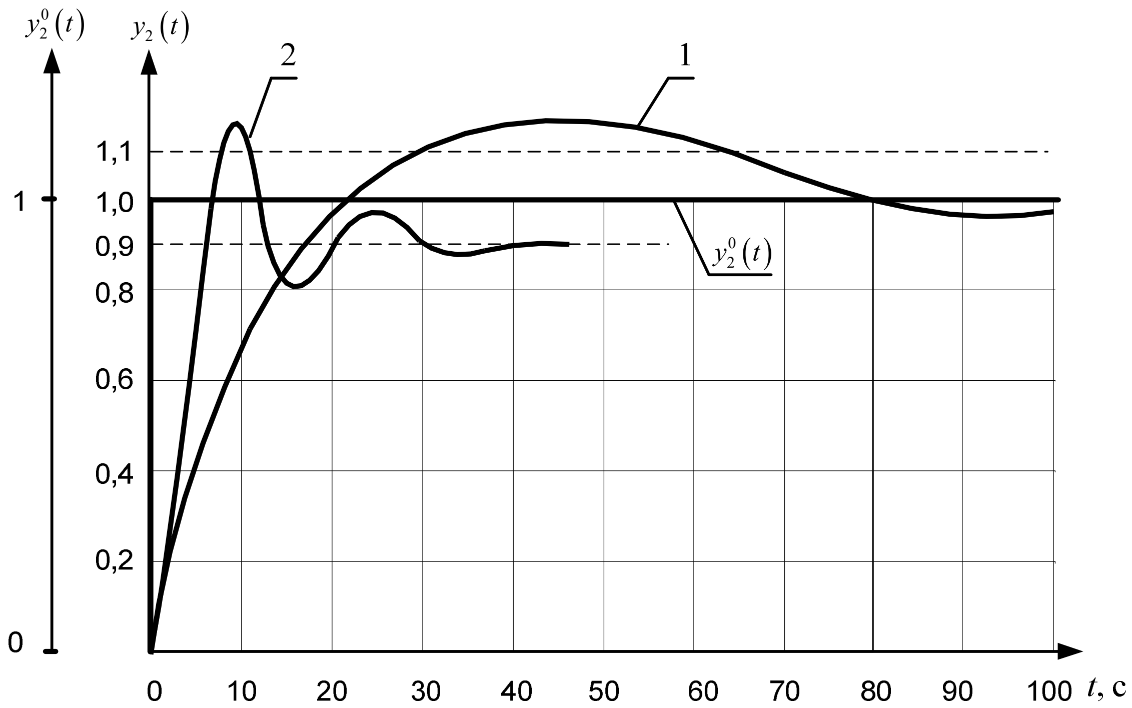


Рис. 5.27 – Графіки зміни тиску повітря у повітряній подушці у разі стрибкоподібної зміни задавального діяння регулятору тиску:

1 – варіант І; 2 – варіант ІІ

Аналіз наведених графіків свідчить, що САК напірним ящиком, реалізована згідно з ІІ-м варіантом володіє більш високою швидкодією у порівнянні з САК, реалізованої згідно з І-м варіантом.

5.2.2. Змішувальний басейн з двома входами і одним виходом

5.2.2.1. Принципова схема змішувального басейну

Принципову схему змішувального басейну наведено на рис. 5.28.

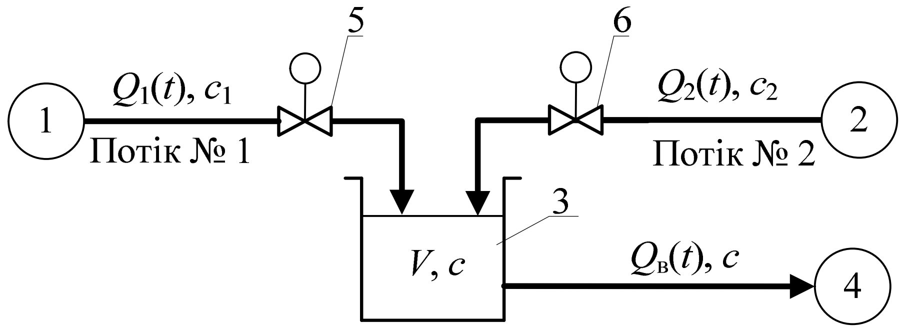


Рис. 5.28 – Змішувальний басейн:

1 – трубопровід першої речовини (потік №1); 2 – трубопровід другої речовини (потік №2); 3 – басейн; 4 – трубопровід третьої речовини; 5 і 6 – регулювальні органи

Змішувальний басейн (масний басейн, буферний басейн) – це басейн з розмішувальним пристроєм. Застосовується для створення запасу волокнинної маси на випадок зупинки окремих дільниць виробництва паперу і для вирівнювання концентрації маси.

Перша речовина, витрата якої $Q_1(t)$, а концентрація c_1 трубопроводом 1 надходить до власне змішувального басейну 3. Друга речовина, витрата якої $Q_2(t)$, а концентрація c_2 трубопроводом 2 подається також до змішувального басейну 3. Після змішування цих речовин утворюється третя речовина, витрата якої $Q_в(t)$, а концентрація c, яка трубопроводом 4 подається на виробництво.

5.2.2.2. Математична модель змішувального басейну як об’єкта керування суміші витратою і концентрацією двох речовин

Як було показано у розд. 2 змішувальний басейн як об’єкт керування витратою суміші речовин і її концентрації можна представити системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t); \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t), \end{cases} \tag{5.52}$$

де

$$\underline{x}(t) = Col\left[x_1(t),\, x_2(t)\right] -$$

вектор параметрів стану системи розміру 2×1;

$$\underline{y}(t) = Col\left[y_1(t),\, y_2(t)\right] -$$

вектор вихідної змінної системи розміру 2×1;

$$\underline{u}(t) = Col\left[u_1(t),\, u_2(t)\right] -$$

вектор керувального діяння розміру 2×1;

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2T_0} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_0} \end{bmatrix} -$$

матриця стану системи розміру 2×2;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{c_1 - c_0}{V_0} & \dfrac{c_2 - c_0}{V_0} \end{bmatrix} -$$

матриця керування розміру 2×2;

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2T_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

матриця вимірювання вихідної змінної системи розміру 2×2.

5.2.2.3. Технічна характеристика змішувального басейну

– витрата речовини 1-го потоку $Q_1^0 = 0{,}015$ м^3/с;

– концентрація речовини 1-го потоку $c_1 = 1$ кмоль/м^3;

– витрата речовини 2-го потоку $Q_2^0 = 0{,}005$ м^3/с;

– концентрація речовини 2-го потоку $c_2 = 2$ кмоль/м^3;

– витрата речовини, що витікає із змішувального басейну $Q_в = 0{,}02$ м^3/с;

– концентрація суміші речовин $c_0 = 1{,}25$ кмоль/м^3;

– об’єм змішувального басейну $V_0 = 1$ м^3;

– стала часу змішувального басейну $T_0 = 50$ с.

Підставивши вихідні дані в систему рівнянь (5.52) маємо

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0 \\ 0 & -0{,}02 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}25 & -0{,}75 \end{bmatrix} \underline{u}(t); \\ \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t). \end{cases}$$

5.2.2.4. Вимоги до системи автоматичного керування змішувальним басейном

– Змішувальним басейном можна керувати за допомогою регулювальних органів 5 і 6. (рис. 5.28).

– Концентрації речовин, що надходять до змішувального басейну припускаються сталими і не можуть змінюватися.

– Аналітичним шляхом потрібно сконструювати такий багатовимірний регулятор (БВР) за допомогою якого можна керувати витратами речовин потоків №1 і №2 так, щоб витрата суміші речовин і її концентрація на виході змішувального басейну були сталими й рівними їхнім заданим значенням. Іншими словами, згідно умови задачі спроектована САК змішувальним басейном має забезпечувати стабільну витрату розбавленої речовини $Q_в(t)$ і її концентрацію $c(t)$ таким чином, щоб їхні відхилення $e_1(t)$ і $e_2(t)$ від заданих значень $Q_в^0$ і c_0 були рівними нулеві.

5.2.2.5. Розробка критерію оптимальності

Приймемо міру похибки системи керування у вигляді:

$$H = \underline{y}^T Q \underline{y} + \underline{u}^T R \underline{u},$$

де Q і R – додатньо визначені матриці розміру $n \times n$ і $r \times r$.

Тоді критерій оптимальності

$$J = \int_0^t \left(\underline{y}^T Q \underline{y} + \underline{u}^T R \underline{u} \right). \qquad (5.53)$$

При визначенні значень елементів матриці Q будемо виходити з таких міркувань. Номінальне (усталене) значення вихідного потоку суміші речовин $Q_в^0$=0,02 м^3/с, а номінальне значення концентрації суміші речовин c_0 = 1,25 кмоль/м^3. Припустимо, що матрицю Q вибрано діагональною з діагональними елементами q_{11} і q_{22}. Отже, її можна подати так:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}. \qquad (5.54)$$

Оскільки вектор

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^T$$

то

$$\underline{y}^T(t) Q \underline{y}(t) = q_{11} y_1^2(t) + q_{22} y_2^2(t).$$

Для заданих значень $Q_{\text{в}}^{0} = 0{,}02$ м^3/с і $c_0 = 1{,}25$ кмоль/м^3 (в припущені їхнього однакового впливу), визначимо числові значення діагональних елементів q_{11} і q_{22} матриці (5.53). Припустимо, що зміна витрати суміші речовини, яка витікає із змішувального басейну на 10% (0,002 м^3/с), повинна викликати таку ж зміну критерію оптимальності (5.53), як і зміна її концентрації на 10% (приблизно 0,1 кмоль/м^3). Отже, має місце наближена рівність

$$q_{11}\,(0{,}002)^2 \approx q_{22}\,(0{,}1)^2.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{q_{11}}{q_{22}} \approx 2500.$$

Приймемо $q_{11} = 50$. Тоді $q_{22} = 0{,}02$. Таким чином діагональна матриця

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix}.$$

Щоб визначити елементи матриці R, використаємо той же самий прийом.

Зміна витрати речовини 1-го потоку $Q_1(t)$ на 10% складає 0,0015 м^3/с, тоді як зміна витрати речовини $Q_2(t)$ другого потоку на 10% складає 0,0005 м^3/с.

Нехай матриця

$$R = \operatorname{diag}(r_{11}, r_{22})\,. \qquad (5.55)$$

Тоді зміни витрат речовин 1-го і 2-го потоків на 10% викликатимуть зміни у складі критерію оптимальності (5.53). Отже, справедлива рівність

$$r_{11}\,(0{,}0015)^2 = r_{22}\,(0{,}005)^2.$$

Звідси випливає, що обидві складові вносять однакові зміни у критерії оптимальності (5.53), якщо

$$\frac{r_{11}}{r_{22}} = \frac{1}{9}.$$

Таким чином, матриця

$$R = \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (5.56)$$

де ρ – скаляр, котрий потрібно задавати, характеризує систему керування.

5.2.2.6. Розробка оптимального закону керування

Відомо, що закон оптимального керування багатовимірною системою (БВС), представленої векторно-матричним рівнянням (5.52) з урахуванням критерію оптимальності (5.53) має вигляд

$$\hat{\underline{u}}(t) = -R^{-1}B^{T}P(t)\underline{x}(t), \qquad (5.57)$$

Відмітимо, що симетрична додатньо визначена матриця $P(t)$ є розв'язком диференціально-матричного рівняння

$$\dot{P}(t) + Q + A^{T}P(t)A - P(t)BR^{-1}B^{T}P(t) = 0. \qquad (5.58)$$

Оскільки диференціальне векторно-матричне рівняння Ріккаті (5.58) нелінійне, то знайти його розв'язок у замкнутій системі, як правило, не вдається. Саме тому з метою обчислення матриці $P(t)$ потрібно використовувати ЕОМ. Процедура обчислення може бути побудована різними способами, але найчастіше вона базується на методах числового інтегрування рівняння Ріккаті.

5.2.2.7. Структурна схема системи керування багатовимірним об’єктом

На підставі закону керування (5.57) багатовимірного регулятора побудовано векторно-матричну структурну схему системи керування (рис. 5.29).

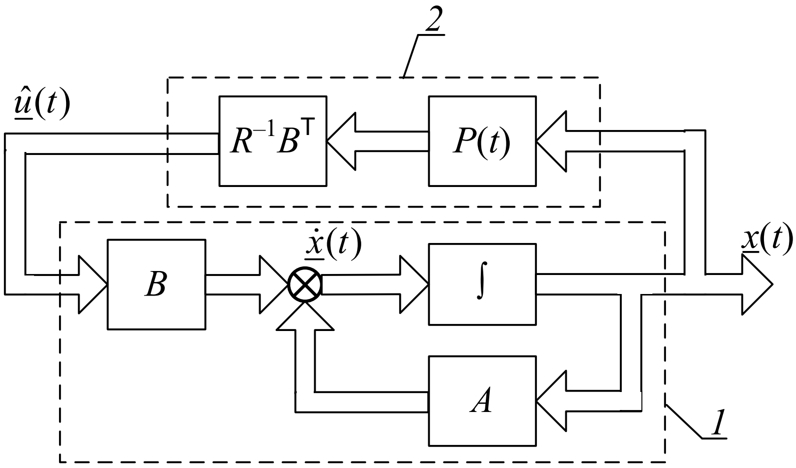


Рис. 5.29 – Векторно-матрична структурна схема системи керування багатовимірним об’єктом з багатовимірним оптимальним регулятором:

1 – багатовимірний об’єкт керування; 2 – багатовимірний оптимальний регулятор

На цій схемі вектор стану системи $\underline{x}(t)$ і вектор оптимального керування $\underline{\hat{u}}(t)$ зображуються подвійними лініями.

Як видно із наведеної структурної схеми у відповідності з законом оптимального керування (5.57) потрібно у кожний момент часу t вимірювати компоненти вектора стану системи $\underline{x}(t)$ і обчислювати елементи матриці $P(t)$, а вже потім, за допомогою лінійного перетворення $R^{-1}B^{T}P(t)$ отримати і самий вектор оптимального керування (5.57).

Відповідно до розглядуваної задачі керування змішувальним басейном подамо матрицю $P(t)$ таким чином

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Тоді оптимальний закон керування (5.57) матиме вигляд:

$$\underline{\hat{u}}(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{vmatrix} = -R^{-1}B^T P(t) y(t). \quad (5.60)$$

Підставивши вирази (5.56) B^T і (5.58) у вираз (5.60) матимемо наступний оптимальний вектор керування

$$\underline{\hat{u}}(t) = -\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -0,25 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Цей вираз після відповідних перетворень подано так:

$$\underline{\hat{u}}(t) = \begin{bmatrix} G_{11} y_1(t) & G_{12} y_2(t) \\ G_{21} y_1(t) & G_{22} y_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

де

$$G_{11} = -\frac{1}{\rho} 3(p_{11} - 0,25 p_{21}); \quad (5.62)$$

$$G_{12} = -\frac{1}{\rho} 3(p_{12} - 0,25 p_{22}); \quad (5.63)$$

$$G_{21} = -\frac{1}{\rho} 3(p_{11} + 0,75 p_{21}); \quad (5.64)$$

$$G_{22} = -\frac{1}{\rho} 3(p_{21} + 0,75 p_{22}). \quad (5.65)$$

У відповідності із законом оптимального керування (5.61) побудовано структурну схему системи керування змішувальним басейном (рис. 5.30).

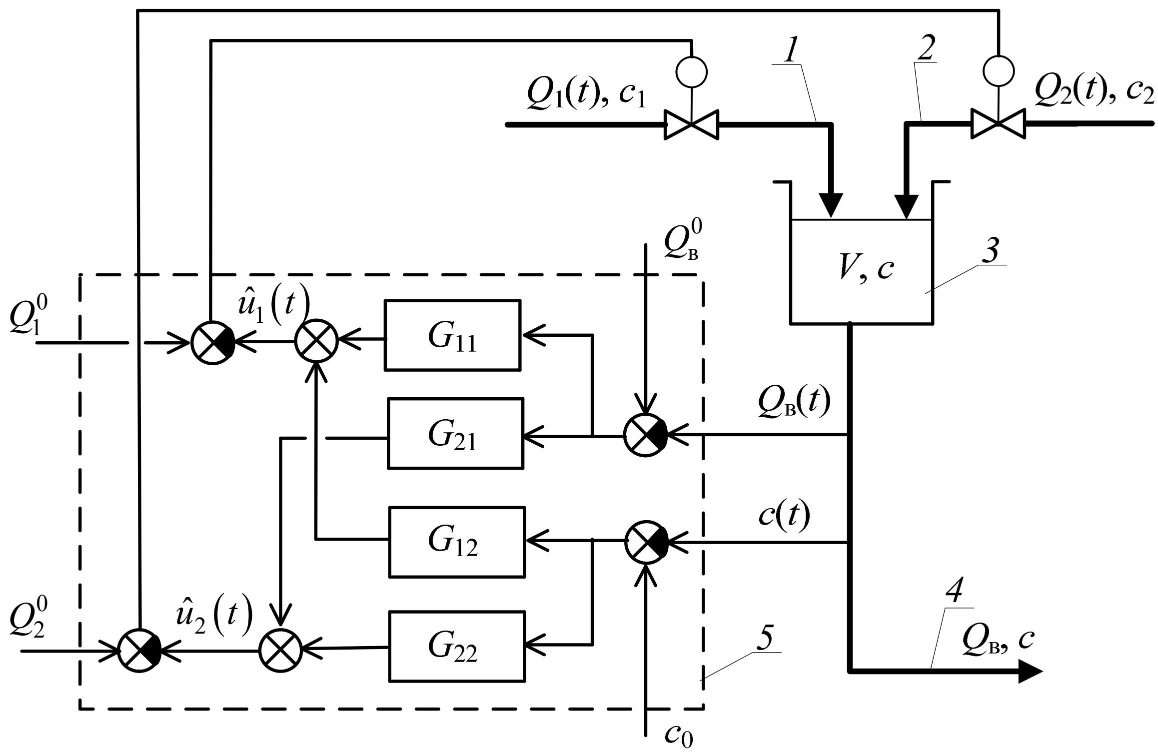


Рис. 5.30 – Структурна схема системи автоматичного керування і регулювання змішувальним басейном з оптимальним регулятором:

1 – трубопровід подачі першої речовини (потік №1); 2 – трубопровід подачі другої речовини (потік №2); 3 – змішувальний басейн; 4 – трубопровід суміші речовин; 5 – оптимальний регулятор (2×2)

5.2.2.8. Комп'ютерний розрахунок системи автоматичного регулювання (об'єму) рівня і концентрації суміші речовини у змішувальному басейні

Комп'ютерний розрахунок САР об'єму і концентрації суміші речовин, що складається із 2-х потоків у змішувальному басейні, було виконано за допомогою програми, розробленої на кафедрі автоматизації хімічних виробництв.

Графіки перехідних процесів в оптимальній системі регулювання об’єму і концентрації суміші, що складається із 2-х речовин в залежності від коефіцієнта ρ та початкового значення вектора стану системи

$$\underline{x}(0) = Col(0{,}1;\ 0)$$

показано на рис. 5.31.

Графіки перехідних процесів в оптимальній системі регулювання об’єму і концентрації суміші речовин, що утворюється із 2-х речовин в залежності від коефіцієнта ρ та початкового значення вектора стану системи

$$\underline{x}(0) = Col(0;\, 0{,}1)$$

наведено на рис. 5.32

Аналіз наведених графіків перехідних процесів свідчить, якщо коефіцієнт $\rho = \infty$, то система регулювання об’єму і концентрації суміші речовин у змішувальному басейні стає розімкнутою системою. У такому випадку, як видно із виразів (5.61) – (5.64)

$$G_{11} = G_{12} = G_{21} = G_{22} = 0.$$

Із зменшенням коефіцієнта ρ від ∞ до 0,1 зростає швидкодія системи регулювання за рахунок збільшення амплітуди керувальних діянь.

Наведені графіки перехідних процесів свідчать, що у замкнутій системі існує відносно незначний вплив роботи однієї автоматичної системи регулювання на іншу систему автоматичного регулювання, тобто реакція на початкове збурення по об’єму змішувального басейну ($x_1(0) = 0{,}1$ м^3) слабо впливає на концентрацію суміші речовин у ньому (рис. 5.31) і навпаки, реакція по зміні концентрації суміші речовин ($x_2(0) = 0{,}1$ кмоль/м^3) практично не впливає на зміну об’єму змішувального басейну.

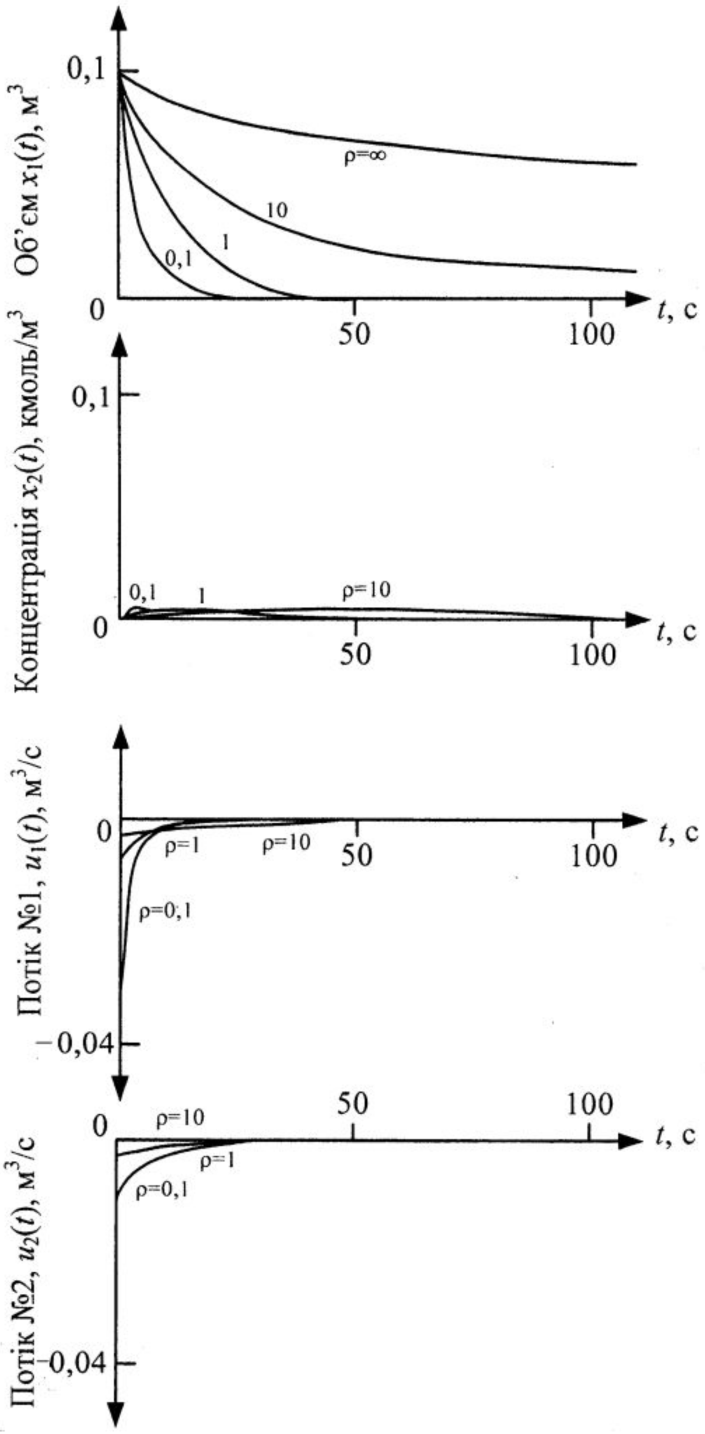


Рис. 5.31 – Графіки перехідних процесів в оптимальній системі регулювання об'єму і концентрації суміші двох речовин в залежності від коефіцієнта ρ та початкового значення вектора стану системи $\underline{x}(0) = Col(0{,}1;\, 0)$

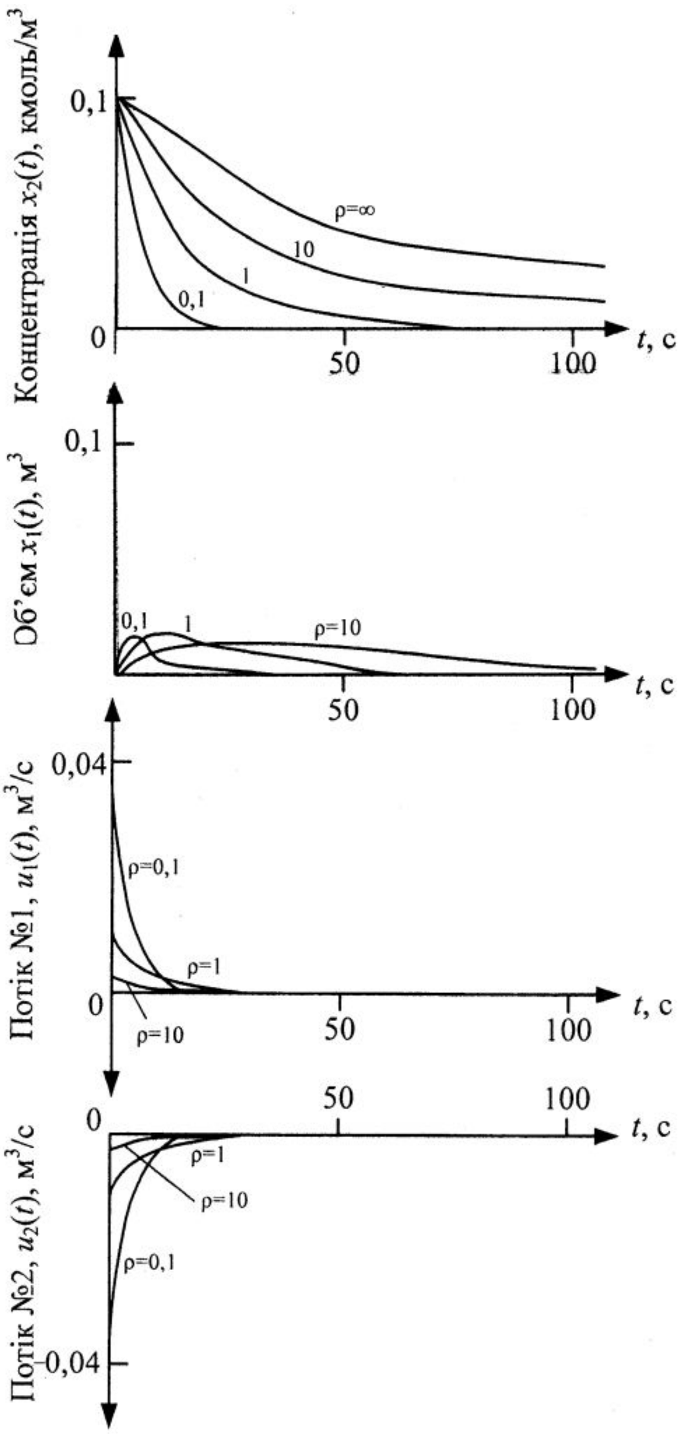


Рис. 5.32 – Графіки перехідних процесів в оптимальній системі регулювання об'єму і концентрації суміші двох речовин в залежності від коефіцієнта ρ та початкового значення вектора стану системи $\underline{x}(0) = Col(0; 0{,}1)$

Запитання і завдання для самоперевірки

5.1. Якою головною ознакою є система автоматичного керування?
5.2. Якою головною ознакою є система автоматичного регулювання?
5.3. Що таке статичний і динамічний режим роботи автоматичної системи?
5.4. Наведіть структурну схему системи автоматичного регулювання з П – регулятором. З яких елементів вона складається?
5.5. Який зв'язок існує між сталою часу об'єкта керування, коефіцієнтом підсилення каналу керування і коефіцієнтом підсилення П – регулятора? Як впливає величина коефіцієнта підсилення П – регулятора на час регулювання вихідної змінної одновимірної системи?
5.6. Чому автоматична одновимірна система з П – регулятором володіє абсолютною стійкістю?
5.7. Наведіть структурну схему системи автоматичного регулювання з ПІ – регулятором. З яких елементів вона складається?
5.8. Що таке граничний аперіодичний процес регулювання? Як визначити сталу інтегрування ПІ-регулятора на підставі використання цього процесу регулювання?
5.9. Що таке коливальний процес регулювання? Як визначити сталу інтегрування ПІ-регулятора, скориставшись динамічними параметрами одновимірного об'єкта керування та заданою степіню коливності системи?
5.10. Наведіть структурну схему напірного ящика з повітряною подушкою як двовимірного об'єкта керування рівнем маси у напускній камері і тиском повітря у повітряній подушці. Чим відрізняється напірний ящик закритого типу від напірного ящика відкритого типу?
5.11. Наведіть і поясніть принципову схему системи автоматичного керування напірним ящиком, реалізованої на базі регулятора Хорнбостела.

Як залежить витрата повітря, що виходить із повітряної подушки від рівня маси у напускній камері?

5.12. Наведіть і поясніть структурну схему системи автоматичного керування напірним ящиком з регулятором Хорнбостела.

5.13. Виведіть рівняння регулятора Хорнбостела. Від чого залежить коефіцієнт підсилення цього регулятора? Яким чином його можна збільшити?

5.14. Наведіть і поясніть структурну схему системи автоматичного керування напірним ящиком з аналоговими регуляторами рівня маси і тиску повітря, реалізованої згідно з І-м варіантом.

5.15. Наведіть і поясніть структурну схему системи автоматичного керування напірним ящиком з аналоговими регуляторами рівня маси і тиску повітря, реалізованої згідно з ІІ-м варіантом.

5.16. Наведіть і поясніть математичну модель змішувального басейну, представленого системою векторно-матричних рівнянь. Які величини у цьому об'єкті керування приймаються за змінні параметри стану?

5.17. Наведіть міру похибки системи керування змішувальним басейном.

5.18. Наведіть критерій оптимальності, який використовується для розробки оптимального закону керування змішувальним басейном. Як визначити елементи матриць, що входять у цей критерій?

5.19. З якою метою вводиться скалярний коефіцієнт ρ в матриці керування?

5.20. Наведіть і поясніть векторно-матричну структурну схему системи керування багатовимірним об'єктом з багатовимірним оптимальним регулятором.

Післямова

Математичні моделі можна поділити на два типи: гносеологічні та інформаційні.

Моделі першого типу мають гносеологічний характер; вони повинні мати високий ступінь «фізичності» і бути тісно пов'язаними з методами вивчення конкретної галузі знань, для якої цю математичну модель використовують.

Моделі другого типу мають відповідати меті керування; вони мають забезпечувати формальний опис системи, що встановлює зв'язок між вхідними й вихідними змінними, безпосередньо не пов'язаними з «фізикою» цієї системи.

Вказані відмінності між цими двома видами моделей є суттєвими й повинні враховуватися під час побудови моделі системи чи процесу. Слід відзначити, що є і багато спільного між гносеологічними й інформаційними моделями. В першу чергу це пов'язано з тим, що вони є символьним зображенням явища або процесу чи об'єкта. Тому існує також багато спільного в методах побудови гносеологічних та інформаційних моделей: нові методи побудови математичних моделей одного класу знаходять використання для обох класів, що сприяє їх швидкому поширенню. Це можна ілюструвати багатьма прикладами із області ідентифікації систем керування.

Поява ідентифікації на початку 60-х років була пов'язана з гострою необхідністю розробки методів побудови інформаційних моделей об'єктів керування. Відсутність таких моделей затримувала процес автоматизації цих об'єктів, побудови систем прямого цифрового керування та інших видів систем, використання електронних обчислювальних машин в контурі керування. Необхідність розробки нових методів побудови моделей диктувалась практичними потребами у створенні систем керування складними хіміко-технологічними об’єктами, які здійснюють оптимальне в заданому сенсі керування цими об’єктами, що мало бути забезпечено тільки шляхом застосування швидкодіючих керувальних обчислювальних машин. Однак об’єкти були непідготовленими для впровадження оптимального керування на основі обчислювальної техніки, позаяк було відсутнє їхнє математичне описання та їхні моделі. Використання загального, глобального описання об’єктів керування не приводило до мети, оскільки вимагало такого ускладнення системи керування, що її практична реалізація ставала неможливою.

Побудова інформаційних моделей методами ідентифікації направлена на ліквідацію цього розриву й розроблення методів оперативного одержання моделей об’єкта керування. При цьому методи ідентифікації передбачали використання ЕОМ та розв’язання задач побудови моделі. В багатьох країнах численні наукові установи інтенсивно займались розв’язанням задач ідентифікації, що дало можливість суттєво зменшити в цій царині прогалини. Виникла низка шкіл, які в здебільшого об’єднуються національними комітетами Міжнародної федерації автоматичного керування (ІФАК). Були досягнуті не тільки важливі теоретичні підходи й методи, але й практичні результати використання теорії інформації для численних об’єктів у металургії, хімії і нафтохімії, авіації і космонавтиці, енергетиці, целюлозно-паперовій промисловості. У кожному конкретному випадку методи ідентифікації демонстрували високу ефективність.

Список використаної літератури

1. Буйлов, Г. П. Автоматическое управление технологическими процессами целлюлозно-бумажного производства [Текст]: Учеб. пособие / Г. П. Буйлов, В. А. Доронин, Н. П. Серебряков; Ленингр. технол. ин-т целлюлоз.-бум. пром-сти. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1989. - 262 с Библиогр.: С. 258-260. ISBN 5-288-00204-5
2. Буйлов, Г. П. Автоматизация тепловых процессов целлюлозно-бумажных производств [Текст]/ Г. П. Буйлов, В. А. Доронин, В. В. Пожитков. - М. : Лесн. пром-сть, 1986. - 198 с. Библиогр.: С. 196-197.
3. Балмасов, Е. Я. Автоматическое регулирование и регуляторы [Текст]: учеб. пособие для техникумов / Е. Я. Балмасов, А. А. Астафьев, В. В. Харитонов. – М.: Лесная промышленность, 1978. — 285 с. Библиогр.: С. 281.
4. Бойков, А. К. Наладка средств автоматизации в целлюлозно-бумажном производстве [Текст]: учеб. пособ. для профтехобразования / А. К. Бойков. – М.: Лесн. пром-сть. – 1984. – 280с. Библиогр.: С. 274.
5. Бойков, А. К. Монтаж, наладка и эксплуатация автоматических устройств в целлюлозно-бумажном производстве [Текст]: учебн. для техн./ А. К. Бойков. – М.: Лесн. пром-сть. 1986.– 303 с. Билиогр.: С. 300-301.
6. Бишоп, Р. Колебания [Текст]: Пер. с англ. / Р.Бишоп. Под ред. Я. Г. Пановко. - 2-е изд., перераб. – М.: Наука. 1979, – 160с.
7. Банди, Б. Методы оптимизации : Вводный курс [Текст]/ Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 127 с. Билиогр.: С. 6.
8. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике [Текст]: Кн. для внеклас. чтения IX-X кл. – 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с. Библиогр. : отсутствует. – 110000 экз.

9. Генкин, Л. И. Определение динамических характеристик процессов в деревообрабатывающей промышленности [Текст]/ Л. И. Генкин. – М.: Лесная пром-сть, 1973. - 119 с. Билиогр.: С. 115-116.

10. Дьяконов, В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах [Текст]/ В. П. Дьяконов. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1985. – 224 с. Билиогр.: С. 221-222.

11. Єрмаков А. І. Лінійна алгебра [Текст]: навч. посіб./ А. І. Єрмаков, М. М. Крамар – Луганськ: вид-во СНУ, 2000. – 176с. Бібліогр.: С. 174.

12. Жученко А. І. Математичні моделі цифрових систем керування [Текст]: на-вч. посіб. / А. І. Жученко. – К.: ІЗМН, 1997.–240 с. Бібліогр.: С. 235. –300 пр. – ISBN 5-7762-9025-7.

13. Жученко А. І. Автоматичне керування напірними ящиками паперо- і картоноробних машин [Текст]: монографія / А. І. Жученко, М. С. Піргач, М. З. Кваско. – К.: Бізнес Медіа Консалтинг, 2014. – 232 с. Бібліогр.: С. 215–229. – 200 пр. ISBN 978-966-2425-34-5.

14. Жученко, А. І. Аналітичне конструювання дискретних регуляторів [Текст]: навч. посіб./ А. І. Жученко, Л. Р. Ладієва, М. С. Піргач. – К.: Аграр Медіа Груп, 2014. – 268 с. Бібліогр.: С. 262. ISBN 978-617-646-275-0.

15. Жученко, А. І. Неперервні форми представлення напірних ящиків з повітряною подушкою/ А. І. Жученко, М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський // Вісник НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського", Серія: Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження, 2016. №1(15) – С. 123 – 127

16. Жученко, А. І. Спеціальні розділи математики для дослідження комп’ютерних систем [Текст]: Навч. посіб./ А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2002. - 286с. Бібліогр.: - С.204-205. ISBN 966-622-084-9.

17. Жалдак, М. І. Комп'ютер на уроках математики [Текст]: Посібник для вчителів/ М. І. Жалдак.– К.: Техніка, 1997. – 303 с.

18. Кваско, М. З. Проектування і розрахунок дискретних систем автоматичного керування технологічними процесами [Текст]: навч.посіб. / М. З. Кваско, М. С. Піргач, Т. В. Аверіна. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехнік», 2000. – 248 с. Бібліогр.: С. 240 – 243. – 200 пр. – ISBN 966-622-001-6.
19. Кваско, М. З. Проектування і дослідження систем автоматичного керування технологічними процесами [Текст]: навч. посіб./ М. З. Кваско, М. С. Піргач, Т. В. Аверіна. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2003. – 360 с. – Бібліогр.: С. 60-61; С. 130; С. 192; С. 237; С. 263; С. 307-309; С. 339-340. – 200 пр. – ISBN 966-622-116-0.
20. Кваско, М. З. Математичне моделювання та ідентифікація одно- і багатовимірних систем [Текст]: навч. посіб. / М. З. Кваско, Л. Р. Ладієва, М. С. Піргач. – К.: НТУУ «КПІ», 2006, – 308с. Бібліогр.: С.277 – 278. – 200 пр. – ISBN 966-622-211-6.
21. Кваско, М. З. Динамічні властивості напірного ящика з повітряною подушкою як об'єкта керування витратою маси/ М. 3. Кваско, М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський// «Контроль і управління в складних системах». XI Міжнародна конференція. Тези доповідей. 9 – 11 жовтня 2012 р. – Вінниця: ВНТУ, 2012, – С. 190.
22. Кондрашкова, Г. А. Автоматизация технологических процессов производства бумаги [Текст]/ Г. А. Кондрашкова, В. Н. Леонтьев, О. М. Шапоров. – М.: Лесн. пром-сть, 1989, – 328 с. Библиогр.: С. 322-325. – ISBN 5-7120-0172-1.
23. Ладієва, Л. Р. Оптимальне керування системами [Текст]: навчальний посібник./ Л. Р. Ладієва. – К.: НМЦ ВО, 2000, - 187 с. Библиогр.: С. 185. ISBN 966-622-026-1.
24. Математичне моделювання систем і процесів [Текст]: Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів спеціальностей:

«Обладнання лісового комплексу»; «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів»; «Машини і технології паковання» / Уклад.: М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 42с. Гриф надано Вченою радою ІХФ (Протокол № 1 від 27 січня 2014 р.) Свідоцтво про електронну публікацію ІХФ №04/14-09, http://www.ahv.kpi.ua.

25. Маркушевич, А. И. Ряды [Текст]: элементар. очерк/ А. И. Маркушевич. - 4-е изд., испр. и доп. - Москва : Наука, 1979. - 191 с.

26. Пиргач, Н. С. Напускная камера напорного ящика открытого типа как объект управления: Сб. науч. тр. УкрНИИБ. М.: Лесн. пром-сть. – 1968. – Вып. 11. – С. 114 – 133.

27. Пиргач, Н. С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целлюлозно-бумажной, лесохимической и деревообрабатывающей промышленности [Текст]: учебн. для техн./ Н. С. Пиргач, В. С. Пиргач – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Лесн. пром-сть, 1983. – 264 с. Бібліогр.: С.245 – 246.

28. Пиргач, Н. С. Математическое описание динамики напускных камер быстроходных бумаго- и картоноделательных машин: Сб. науч. тр. УкрНИИБ. М.: Лесн. пром-сть. – 1972. – Вып. 15. – С. 103 – 113.

29. Пиргач, Н. С. Математическое описание динамики систем воздухоснабжения напорных ящиков высокого давления: Сб. науч. тр. УкрНИИБ. М.: Лесн. пром-сть. – 1970. – Вып. 13. – С. 121 – 141.

30. Пономарев, К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач [Текст]: пособ. для физ.-мат. факультетов педагогических институтов / К. К. Пономарев –М.: Учпедгиз, 1962. – 182 с. Библиогр.: С. 182.

31. Пономарев, К. К. Составление дифференциальных уравнений [Текст]: учеб. пособие / К. К. Пономарев. – Минск: Вышейшая Школа, 1973. – 560 стр. Библиогр.: С. 557.

32. Примаков, С. П. Технологія паперу і картону [Текст]: Навчальний посібник / С. П. Примаков, В. А. Барбаш. – 2-ге вид., перероб.і доп. – К. : ЕКМО, 2008. – 425с. Библиогр.: С. 419-420. ISBN 978-966-2153-06-4.

33. Ротач, В. Я. Расчет настройки промышленных систем регулирования [Текст] / В. Я. Ротач. – М.: Энергия, 1973. – 440 с. Библиогр.: С. 433-436.

34. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике [Текст]: в 2-х кн. Кн. 1 / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгстел. – М.: Мир, 1986. – 349 с. Библиогр.: С. 346-347.

35. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике [Текст]: в 2-х кн. Кн. 2 / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгстел. – М.: Мир, 1986. – 349 с. Библиогр.: С. 296-297.

36. Справочник по автоматизации целлюлозно-бумажных предприятий [Текст]/ Э. В. Цешковский, Н. С. Пиргач, Г. Д. Ерашкин и др. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 368 с. Библиогр.: С.33; С.73; С.118; С.197 – 198; С.303 – 305; С.358. -2800 экз. ISBN 7120-0166-7.

37. Смирнов, А. А. Основы автоматизации целлюлозно-бумажного и лесохимического производств [Текст]: Учеб. для техникумов / А. А. Смирнов. - 3-е изд., перераб. - М. : Лесн. пром-сть, 1983. - 359 с. Библиогр.: С. 355. – 2750 экз.

38. Смолин, А. С. Технология формования бумаги и картона [Текст]/ А. С. Смолин, Г. З. Аксельрод. - М. : Лесн. пром-сть, 1984. - 121 с. Библиогр.: С. 121.

39. Тихонов, А. Н. Вводные лекции по прикладной математике [Текст] : учебное пособие для вузов по спец. "Прикладная математика"/ А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. - Москва : Наука, 1984. - 190 с.

40. Фролов, М. В. Производство санитарно-бытовых видов бумаги [Текст] / М.В. Фролов, В.А. Горбушин. - Москва : Лесная пром-сть, 1977. - 246 с.
41. Хойер, Д. Производство картона [Текст] / Д. Хойер ; Перевод с нем. Б. М. Гуткина. – М.: Лесная пром-сть, 1977. - 383 с. Библиогр.: С. 370-374.
42. Хоров, Л Т. Автоматизация процессов производства кровельных и гидроизоляционных материалов [Текст] / Л. Т. Хоров, Ю. Д. Воробьев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л. : Стройиздат : Ленингр. отд-ние, 1985. - 223 с. Библиогр.: С. 220-221.
43. Шамсон А. С. Автоматизация напорных ящиков быстроходных бумагоделательных машин [Текст]/ А. С. Шамсон, Н. С. Пиргач. –М.: Лесн. пром-сть, 1965. – 104 с. Библиогр.: С. 103. –1100 экз.

Додатки

Додаток А

Z-перетворення функцій часу

№ з/п	Оригінал $f(t)$ безперервної функції	Зображення за Лапласом $F(p)$	Z-перетворення $F(z)$
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
6	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$
7	$1-e^{-\alpha(t-\tau)}$	$\frac{\alpha e^{-p\tau}}{p(p+\alpha)}$	$\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)z^{-(k+1)}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$
8	$1-e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}$	$\frac{\alpha\beta}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\frac{z^2}{\left(z-e^{-\alpha T}\right)\left(z-e^{-\beta T}\right)}$

Додаток Б

Комп'ютерний розрахунок динаміки системи з лінійними цифровими регуляторами

Для визначення оптимальних налаштувань системи керування за різними критеріями якості бажано мати можливість безпосередньої оцінки цієї якості за перехідною характеристикою системи, яка може бути представлена у вигляді масиву M_y або у формі графіка.

Розглянемо алгоритм формування цього масиву.

Масив M_y будемо відносити до типу *CoefL*, де

$$type\ CoefL = array[-1 \ldots 601]\ of\ real;$$

Інформація про ординати h_s ($0 \le s \le L$) перехідної характеристики системи в цьому масиві виглядає так:

– 1	0	1	2	3		L	$L + 1$
L	h_0	h_1	h_2	h_3		h_L	Dt

Нехай маємо систему автоматичного керування, структурну схему якої представлено на рис. Б-1

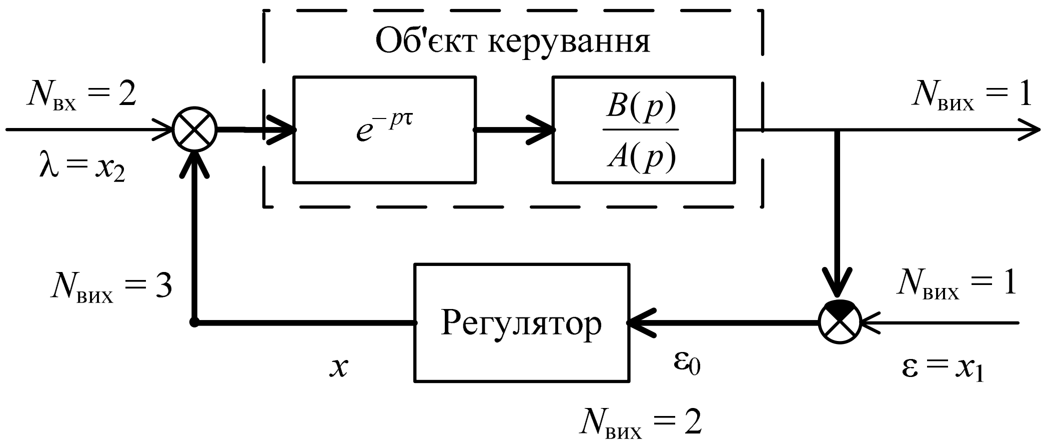


Рис. Б-1 – Схема системи автоматичного керування з аналоговим регулятором

Отже маємо два можливих входи (одночасно реалізується один з них), а саме: x_1 ($N_{вих} = 1$) – завдання регулятору або x_2 ($N_{вих} = 2$) – зовнішнє збурення, що надходить паралельно регульованому впливу x (наприклад, з боку регулювального органа).

Характер вхідного сигналу задається підпрограмою-функцією $X_{вх}$.

Як вихід системи можна розглядати або вихід об'єкта (регульовану величину) y ($N_{вих} = 1$), або сигнал відхилу ε ($N_{вих} = 2$), або регулювальний вплив x ($N_{вих} = 3$).

Початкові умови вважаємо нульовими. В якості методу інтегрування використовуємо метод Ейлера, систему зміщення використовуємо першу модифіковану:

$$\begin{cases} y'_z = y_{z+1} + b_{n-z}x - a_{n-z}y, \ 1 \le z \le n, \\ y_{n+1} = 0, \\ y = \left(y_1 + b_n x\right) / a_n. \end{cases}$$

Крок числового інтегрування за методом Ейлера для цієї системи зміщення виглядає так:

$$\begin{cases} y'_{z,v+1} = y_{z,v} + \vartheta_0 \left(y_{z+1,v} + b_{n-z} x_v - a_{n-z} y_v \right), \ 1 \le z \le n, \\ y_{n+1,v} = 0, \\ y_{0,v+1} = \left(y_{1,v+1} + b_n x_{v+1} \right) / a_n, \end{cases}$$

де $y_{z,v} = y_z \big|_{t=v\vartheta_0}$ – параметр стану системи зміщення за $t = v\vartheta_0$; $x_v = x\big|_{t=v\vartheta_0}$ – вхідний сигнал; v, ϑ – номер і величина кроку.

Регулятор реалізує один з лінійних аналогових законів регулювання, що задається значенням типізованої константи *Nzr*:*integer*, а саме:

$$x = \begin{cases} k_\text{р}\varepsilon, \quad \text{при } Nzr = 1 \text{ (П} - \text{регулятор)}, \\ k_\text{р}\int\limits_0^t \varepsilon dt, \quad \text{при } Nzr = 2 \text{ (І} - \text{регулятор)}, \\ k_\text{р}\left(\varepsilon + T_\text{д}\varepsilon'\right), \quad \text{при } Nzr = 3 \text{ (ПД} - \text{регулятор)}, \\ k_\text{р}\left(\varepsilon + \dfrac{1}{T_\text{і}}\int\limits_0^t \varepsilon dt\right), \quad \text{при } Nzr = 4 \text{ (ПІ} - \text{регулятор)}, \\ k_\text{р}\left(\varepsilon + \dfrac{1}{T_\text{і}}\int\limits_0^t \varepsilon dt + T_\text{д}\varepsilon'\right), \quad \text{при } Nzr = 5 \text{ (ПІД} - \text{регулятор)}. \end{cases}$$

Об’єкт характеризується передавальною функцією

$$W_\text{об}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-p\tau}.$$

На схемі системи автоматичного керування (рис. Б-1) множник $e^{-p\tau}$ виділено окремим блоком.

При покроковому розрахунку перехідних процесів в даній системі (з кроком *Dt/k*$_s$, ідентифікатор *Tau* тут задіяний для позначення

τ – транспортного запізнення) імітація ефекту затримки сигналу на час τ реалізується масивом-транспортером *Mz*:*CoefL*, в комірки з номером 0 якого "завантажується" вхід $e^{-p\tau}$ а з комірки з номером z_t знімається її вихід. При виконанні кожного нового кроку інтегрування (величиною v_0) масив-транспортер "протягується" на 1 комірку (z_t = round(Tau/v_0)). Описаний алгоритм формування масиву M_y:*CoefL* реалізуємо у вигляді підпрограми *FormMy*:

```
procedure FormMy; { Масив My – глобальний}
 var z, s, n, zt, v: integer; Y: Coef;
      Eps, Epsp, x, xl, x2, Integr, q: real;
       begin
My[-1]:=L; Dt:=D/L; v0:=Dt/ks; My[L+l]:=Dt;
 t:=0; n:=round(A[-l]); Y[-l]:=n; My[0]:=0;
 for s:=0 to n do Y[s]:=0;
 zt:=round(Tau/v0);
for s: =0 to zt do Mz[s]:=0;
Eps:=0; x:=0; Integr:=0;
 for z:=l to L do
 begin
     for s:=l to ks do
      begin
           Epsp:=Eps; xl:=0; x2:=0;
            case Ninp of
               1: xl:=Xinp(t);
               2: x2:=Xinp(t)
           end;
           Eps:=x1-Y[0]; Integr:=Integr+Eps* v0;
            case Nzr of
               1: x:=kr*Eps;
               2: x:=kr*Integr;
               3: x:=kr*(Eps+Td*(Eps-Epsp)/v0);
               4: x:=kr*(Eps+Integr/Ti);
```

```
          5: x:=kr*(Eps+Integr/Ti+Td*(Eps-Epsp)/v0)
         end;
        q:=Mz[zt];
          for v:=zt downto 1 do
          Mz[v]:=Mz[v-l];
          Mz[0]:=x+x2; t:=t+v0;
          EilWpm(B,A,q,Mz[zt],v0,Y)
          end;
      case Nout of
        1: My[z]:=Y[0];
        2: My[z]:=Eps;
        3: My[z]:=x
    end
  end
end;
```