

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Конспект лекцій

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем»
спеціальності 126 Інформаційні системи та технології

Укладачі: В.К. Анікін, Є.В. Крилов, В.П. Пасько

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент

*Корнага Я.І., д.т.н., проф.,
професор кафедри інформаційних систем та технологій
КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний
редактор

Ткач М.М., к.т.н., доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 26.10.2023 р.)
за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки
(протокол № 2 від 19.09.2023 р.)*

Посібник надає моделі і методи теорії прийняття рішень для оволодіння теоретичними знаннями та практичними навичками прийняття оптимальних рішень. Розглянуті загальні положення прийняття рішень. Надані види рішень та їх класифікація. Описані різноманітні шкали вимірювання для оцінювання ступеня переваг на множині альтернатив. Розглянуті організація експертного оцінювання та методи суб'єктивних вимірів. Надані методи рангової кореляції. Наведені моделі і методи багатокритерійних задач прийняття рішень. Розглянуті методи прийняття рішень в умовах невизначеності, за умов лінгвістичної невизначеності та нечіткості.

Посібник призначений для здобувачів ступеня магістр за спеціальністю 126 «Інформаційні системи та технології» освітньо-професійної програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем» факультету інформатики та обчислювальної техніки всіх форм навчання.

Реєстр. № 23/24-115. Обсяг 6,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестейський проспект, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

Зміст

Розділ 1. Загальні аспекти прийняття рішень.....	5
1.1. Загальна проблема прийняття рішення.....	5
1.1.1. Види рішень	5
1.1.2. Класифікація рішень	8
1.2. Послідовність і зміст основних етапів процесу прийняття рішень	8
1.3. Структура задачі та види моделей прийняття рішень.....	14
1.3.1. Формальна постановка задачі прийняття рішень.....	14
1.3.2. Класифікація моделей і задач прийняття рішень	16
Розділ 2. Експертна інформація і шкали	23
2.1. Застосування шкал вимірювання переваг	23
2.2. Шкали: номінальна, порядку, інтервальна, відносин	24
2.2.1. Якісні шкали.	24
2.2.2. Кількісні шкали.....	26
Розділ 3. Організація експертного оцінювання	29
3.1. Формування експертної групи.....	29
3.2. Визначення відносних коефіцієнтів компетентності експерта	30
3.3. Одержання експертної інформації.....	31
3.4. Опитування експертів.....	32
3.5. Обробка і аналіз результатів опитування	34
3.6. Аналіз суперечливості думки експерта узагальненій думці всіх експертів	35
Розділ 4. Методи суб'єктивних вимірів	37
4.1. Ранжування	37
4.2. Метод парних порівнянь.....	41
4.3. Метод безпосередньої оцінки.....	42
4.4. Метод послідовних порівнянь.....	43
4.4.1. Метод Черчмена-Акоффа	43
4.4.2. Алгоритм методу Черчмена -Акоффа	44
Розділ 5. Методи рангової кореляції	47
5.1. Коефіцієнт Кендалла	47
5.2. Коефіцієнт Спірмена	49
Розділ 6. Бінарні відношення, функції вибору.	51
6.1. Основні поняття бінарних відношень.	51
6.2. Операції над бінарними відношеннями.....	52
6.3. Властивості та основні типи бінарних відношень	53
6.4. Функції вибору, породжені БВ.....	55

6.5. Вибір «кращих» альтернатив за допомогою бінарних відносин.	58
6.6. Метод Неймана-Моргенштерна.....	61
6.7. Р- і R-оптимальності. К-оптимальність.	64
Розділ 7. Багатокритерійність. Оптимальність за Парето.....	67
7.1. Загальні проблеми пошуку оптимальних рішень	67
7.2. Оптимальність за Парето та Слейтером	68
7.3. Необхідні та достатні умови оптимальності за Парето	72
7.4. Метод прямого перебору побудови множини Парето	73
7.5. Принципи прийняття рішень у багатокритеріальних задачах	75
Розділ 8. Прийняття рішень в умовах невизначеності	77
8.1. Поняття та джерела невизначеності	77
8.2. Невизначеності в задачах прийняття рішень	78
8.3. Вибір в умовах невизначеності.....	80
Розділ 9. Метод аналітичної ієрархії.....	84
9.1. Ієрархії та пріоритети.....	84
9.2. Обґрунтування методу аналітичної ієрархії	86
9.3. Побудова ієрархії МАІ	90
Розділ 10. Прийняття рішень в умовах ризику.....	95
10.1. Вибір в умовах ризику.....	95
10.2. Побудова функції корисності	101
Розділ 11. Прийняття рішень за умов лінгвістичної невизначеності та нечіткості	102
11.1. Лінгвістична невизначеність та нечіткість.....	102
11.1.1. Слабоструктуровані проблеми та їх невизначеності	102
11.1.2. Нечіткі множини і операції над ними.	104
11.2. Нечіткі відношення	110
11.2.1. Означення нечіткого відношення. Операції над нечіткими відношеннями	110
11.2.2. Властивості нечітких відношень	114
11.2.3. Завдання досягнення нечіткої мети	114
11.3. Прийняття рішень у разі нечіткого відношення переваги.....	120
11.3.1. Нечіткі відношення переваги.....	120
11.3.2. Прийняття рішень за нечітким відношенням переваги	124
11.3.3. Прийняття рішень у разі кількох нечітких відношень переваги	130
11.4. Раціональний вибір на нечіткій множині альтернатив	133

Розділ 1. Загальні аспекти прийняття рішень

1.1. Загальна проблема прийняття рішення

Проблема прийняття рішень лежить в основі будь-якої цілеспрямованої людської діяльності. Водночас вона достатньо універсальна, попри все різноманіття можливих умов і ситуацій вибору. Формалізація власне процесу прийняття рішень - достатньо складна проблема, але частково розв'язна за допомогою сучасних математичних методів. Проте, залишається відкритим очевидне питання: яке рішення вважати найкращим, або правильним? Для цього потрібно обрати за певними ознаками один із варіантів дій. Таке рішення має бути в певному сенсі найкращим для конкретної ситуації.

У процесі прийняття рішення особа, яка приймає рішення (децидент) [1], має обрати один або кілька варіантів рішень (дій, планів, поведінки). Потреба в такому виборі зумовлена певною проблемною ситуацією, у якій є два стани: бажаний і дійсний, - а способів досягнення бажаної мети не менше ніж два. Отже, децидент у такій ситуації має свободу вибору між кількома варіантами дій, кожен із яких зумовлює певний результат. У децидента є власні уявлення про переваги та вади окремих результатів, своє ставлення до них, а отже, і до варіантів рішень. Словом, він має власну систему переваг, у якій можна виділити статичну та динамічну складові.

1.1.1. Види рішень

Рішення - це вибір з кількох варіантів (альтернатив) .

На початку може не бути навіть множини альтернатив, серед яких потрібно зробити вибір. Наприклад, ми бажаємо обміняти квартиру. У цьому разі передусім доведеться дібрати варіанти обміну. Це і є формування множини варіантів рішень - альтернатив. Спочатку множина альтернатив найчастіше аморфна, тобто не має структури, і ми не можемо відразу сказати, яка альтернатива краща, а яка гірша. Справді, задачу вибору можна розв'язати, якщо певним способом структурувати множину альтернатив [1].

Організаційне рішення - це вибір, який має зробити децидент, щоб виконати обов'язки згідно з посадою, яку він займає. Тому найефективніше організаційне рішення - це вибір, який буде реалізований і дасть найбільший внесок у досягнення остаточної мети.

Програмоване рішення - це результат реалізації певної послідовності кроків або дій, подібних до тих, які приймають у ході розв'язання математичного рівняння. Визначивши, яким має бути рішення, керівництво зменшує ймовірність помилки, а також економить час, який

було б витрачено на обрання альтернатив. Такі рішення застосовують для проблем, що повторюються з певною регулярністю та виникають здебільшого в технічних галузях.

Непрограмоване рішення потрібне в ситуаціях, які певною мірою нові, внутрішньо не структуровані чи пов'язані з невідомими чинниками. Оскільки наперед неможливо уявити собі конкретну послідовність потрібних кроків, децидент має ухвалювати рішення, виходячи з інших критеріїв. Він повинен стимулювати ініціативність у підлеглих, які ухвалюватимуть рішення згідно з їх компетенцією. До непрограмованих належать рішення такого типу: визначення цілей організацій, поліпшення якості продукції, удосконалення структури управлінських підрозділів, посилення мотивації підлеглих.

Ухвалити добре рішення важко. Ухвалення рішень - це також і психологічний процес. Для ухвалення рішень децидент використовує різні засоби: від спонтанних до високологічних. Проте головне, що допомагає децидентові ухваленні рішень - це знання та досвід.

Інтуїтивне рішення. Повністю інтуїтивне рішення - це вибір, зроблений лише на основі відчуття того, що він правильний. Те, що ми називають «осаянням», або «шостим відчуттям», і є інтуїтивним рішенням. У складній організаційній ситуації можливі тисячі варіантів вибору. У децидента, який покладається лише на інтуїцію, шанси на правильний вибір без будь-якої логіки з погляду статистики невисокі.

Рішення, що ґрунтується на міркуваннях - це вибір, зумовлений знаннями чи на- громадженням досвідом. Децидент використовує знання про те, що трапилося в подібних ситуаціях раніше, щоб спрогнозувати результат альтернативних варіантів вибору в конкретній ситуації. Спираючись на здоровий глузд, він обирає альтернативу, яка була успішною в минулому (тобто мислить за аналогією). Міркування за аналогією як основа організаційного рішення корисні, тому що багато ситуацій в організаціях повторюються. У цьому разі ухвалене раніше рішення знову може працювати не гірше, ніж раніше (це основна перевага програмованих рішень).

Раціональне рішення. Головна відмінність між раціональним рішенням і тим, що ґрунтується на міркуваннях, полягає в тому, що раціональне рішення не залежить від минулого досвіду. Його обґрунтовують у ході об'єктивного аналітичного процесу.

Ситуації, у яких відбувається вибір рішень, мають такі структурні елементи:

- **Проблемна ситуація.** Її виникнення - стимулятор-рушій процесу прийняття рішення. Проблемна ситуація спонукає на пошуки способів її вирішення.

- *Децидент* - це особа чи група осіб, які приймають (ухвалюють) рішення та впроваджують його. Децидент відповідає за реалізацію прийнятого рішення, тому в нього мають бути навички організаційного управління. Є певна різниця між ухваленням і прийняттям рішень, хоча це майже синоніми. Якщо йдеться про одну особу-децидента, то доцільно вживати термін «прийняти рішення»; якщо ж децидентів декілька (особливо, коли застосовують процедуру голосування), то прийнятніший термін «ухвалити рішення».
- *Мета*. Проблема прийняття рішення ґрунтується на телеологічному підході, тобто має бути головною метою системи. Рішення, яке ухвалюють або приймають, має бути скероване на досягнення поставленої мети. Якщо мети немає, то не виникає і потреби ухвалювати рішення.
- *Керування*. Надзвичайно важливо, чи може децидент впливати на певний процес, у перебігу якого він зацікавлений. Якщо децидент відчуває проблемність ситуації та може ідентифікувати її, але не має важелів впливу на неї, то проблеми прийняття рішення немає, і децидент по суті перетворюється на пасивну сторону, яка лише спостерігає за тим, що відбувається.
- *Варіанти рішень*. Цей структурний елемент є похідним від керованості: якщо є керованість, то існує і проблема вибору між кількома варіантами дій децидента з більш-менш передбачуваними наслідками. Рішення приймають тоді, коли існує більше ніж один спосіб досягнення поставленої мети. Кожен зі способів можна характеризувати різною ймовірністю досягнення мети і витратами.
- *Обмеження*. Наявність обмежувальних чинників природна для ситуацій прийняття рішення. Децидент ніколи не може мати необмежених ресурсів для впливу на ситуацію, що склалася, чи перебіг певного процесу. Природно, що можливості децидента скінченні.
- *Зовнішнє середовище*. Це все те, що безпосередньо впливає на ситуацію, а також те, на що впливає розв'язання проблеми прийняття рішення. Якщо всі дії середовища можна однозначно прогнозувати, то ситуація детермінована; коли ж це неможливо, і на середовище не впливають дії децидента, то залежно від ступеня невизначеності виникають стохастичні ситуації та ситуації з невизначеністю. Якщо ж середовище цілеспрямовано реагує на дії децидента, то ситуація ігрова, і процедури пошуку найкращих у певному розумінні рішень значно ускладнюються.

Мета — одна з найскладніших і водночас найдавніших категорій. Вона певною мірою завжди є у свідомості людини, яка займається якоюсь діяльністю та переносить її на багато

природних і штучних систем. Пізнання мети допомагає зрозуміти сутність досліджуваних систем, тому інтерес до змісту цього поняття неперервне зростає.

Мета відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим. Воно може розвиватися в часі, і не обов'язково єдиним способом. Призначення — це біхевіористичне поняття. У соціальних і економічних системах поведінка людей — потужна сила, яка не завжди достатньо зрозуміла. Мета — одна з найскладніших і водночас найдавніших категорій. Вона відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим. Мета конкретизується за допомогою аспектів і цілей. Цілі в часовому аспекті поділяють на тактичні, макроцілі і ідеали.

1.1.2. Класифікація рішень

1. *За масштабом об'єкта:* - глобальні; - локальні.
2. *За характером мети:* - стратегічні; - тактичні.
3. *За джерелом виникнення:* - по розпорядженню; - ініціативні; - за замовленням.
4. *За способом доведення:* - усні; - письмові.
5. *За суб'єктом прийняття:* - колегіальні; - індивідуальні; - колективні.
6. *За ступенем новизни:* - традиційні; - новаційні.
7. *За методами розробки:* - кількісні; - евристичні.
8. *За наявністю інформації:* - визначені; - ймовірнісні; - невизначені.
9. *За цільовою направленістю:* - одноцільові; багатоцільові.
10. *За змістом рішень:* - економічні; - технічні; - соціальні; - організаційні.
11. *За періодом дії:* - довготривалі; - оперативні.
12. *За станом свідомості:* - усвідомлені; - мало усвідомлені; - неусвідомлені.

1.2. Послідовність і зміст основних етапів процесу прийняття рішень

Під **процесом прийняття рішення (ППР)** розуміють послідовність процедур, що приводять до знаходження рішення [1]. ППР складається з декількох основних етапів. Різні автори з різним ступенем деталізації розглядають послідовність етапів, але в загальному зберігається наступна послідовність дій.

1. Виявлення проблемної ситуації та постановка задачі прийняття рішення.
2. Формулювання поняття якості рішення та його структуризація до рівня критеріїв.

3. Описання характеристик зовнішнього середовища, прогнозування можливих результатів дій ППР із подальшим виявленням або конструюванням альтернативних варіантів рішень.
4. Оцінювання якості варіантів рішень, порівняння їх між собою та вибір одного чи декількох найвідповідніших меті.
5. Аналіз рішень, опрацювання плану реалізації та впровадження рішення.

Потреба у виділенні окремих етапів у ППР і їх зміст залежить здебільшого від характеру проблеми, що розв'язується. Нижче подано послідовність етапів деталізованого ППР [1], а також відповідність між застосуванням методів системного аналізу, теорії прийняття рішень, дослідження операцій і окремими підмножинами етапів ППР.

На рис. 1.1 подано послідовність етапів деталізованого ППР.

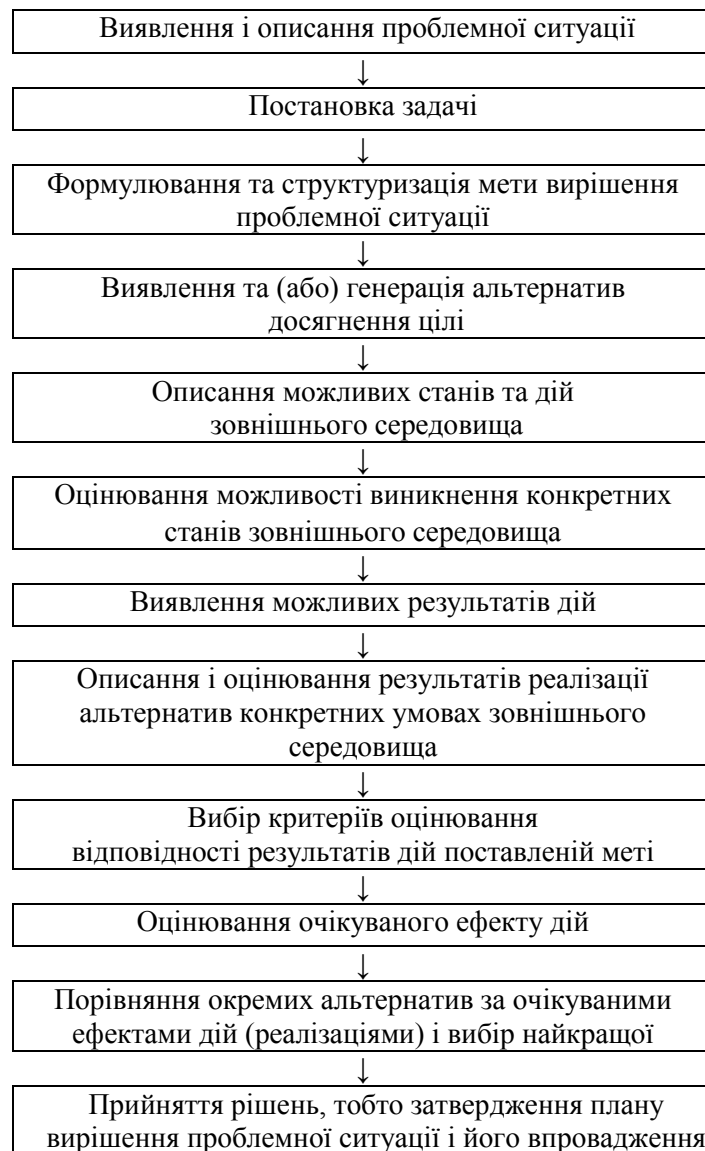


Рис. 1.1. Деталізована схема процесу прийняття рішень

Виявлення і описання проблемної ситуації - це виокремлення та формулювання проблеми на основі попереднього аналізу.

Проблемною вважають ситуацію, коли не досягнуто поставлених цілей, тобто децидент дізнається про проблему тому, що не сталося те, що мало бути. Потім, після ухвалення певних рішень, відхилення від норми згладжуються.

Діагностуючи складну проблему, спочатку потрібно усвідомити і визначити симптоми. Щоб визначити причини виникнення проблеми, потрібно зібрати і проаналізувати необхідну внутрішню та зовнішню (стосовно організації) інформацію. Це можна реалізувати за допомогою формальних методів, застосовуючи, наприклад, зовнішній аналіз ринку, а всередині - комп'ютерний аналіз фінансових звітів, інтерв'ювання, залучення консультантів з управління чи опитування працівників. Інформацію можна збирати і неформально, ведучи бесіди про ситуацію, що склалася, і роблячи особисті спостереження.

Постановка задачі. Етап постановки задачі має дати відповідь на наступні запитання.

- Яку проблему та за яких умов потрібно розв'язати?
- Коли потрібно це зробити?
- Якими силами і засобами відбудуватиметься розв'язання проблеми? На цьому етапі виконують такі дії.
- Виділяють і описують проблемну ситуацію, яку потрібно розв'язати.
- Визначають, який час потрібний і припустимий для прийняття рішень.
- Визначають, які матеріальні та трудові ресурси потрібні для прийняття рішень.

Уже саму постановку задачі можна розглядати як специфічний ППР. На цьому етапі прийняття рішень ідеться про подальшу «долю» проблеми: її можна скерувати на вирішення чи тимчасово призупинити розв'язування до сприятливішого моменту. Рішення приймають на основі вивчення часових, матеріальних, інформаційних і поведінкових обмежень на ППР.

Формулювання та структуризація мети розв'язання проблемної ситуації. Одним зі способів розкриття внутрішньої структури мети є побудова дерева цілей, яке використовується в системному аналізі. Теорія прийняття рішень не може підказати керівникові мету діяльності. Вона допомагає йому подолати чи зменшити суперечливість системи цілей і забезпечити прийняття рішень, що якнайкраще відповідають поставленим цілям.

Обираючи варіанти рішень, слід брати до уваги конкретні місце та час. Теорія прийняття рішень не вивчає істотні питання виявлення чи генерації альтернатив. У ній варіанти

рішень розглядають як наперед задані і потрібно обрати лише найкраще з них. Проте зробити це ефективно можна лише в тому разі, коли найкращий (чи близький до нього) варіант є в переліку альтернатив. На думку фахівців, помилки в управлінні виникають переважно через нездатність знайти найкращі способи розв'язання задачі.

Описання можливих станів і дій зовнішнього середовища. Цей етап за змістом аналогічний визначенню альтернатив і тісно пов'язаний із ним. Якщо в ході пошуку альтернатив увагу сконцентровано на керованих із погляду децидента факторах, то як зовнішнє середовище розглядають чинники, якими не можна керувати, але під дією яких також формуються результати розв'язання проблемної ситуації.

Поділ факторів на керовані та некеровані багато в чому залежить від керованості та тривалості періоду реалізації прийнятих рішень. Аналогічно до визначення альтернатив у теорії прийняття рішень усі значення стану зовнішнього середовища для прийнятого рішення вважають передбаченими, тобто суттєві проблеми їх виявлення не розглядаються. Аналіз зовнішнього середовища охоплює виявлення всіх некерованих факторів, що суттєво впливають на формування проблемної ситуації та спробу її розв'язання, а також прогнозування рівня і інтенсивності впливу факторів у період реалізації прийнятого рішення.

Оцінювання можливості виникнення конкретних станів зовнішнього середовища.

Теорія прийняття рішень вивчає особливості побудови процесу обрання найкращої альтернативи залежно від ступеня знання розподілу об'єктивних або суб'єктивних ймовірностей виникнення конкретних станів зовнішнього середовища, а також за умов невизначеності і активності зовнішнього середовища (ігрові моделі). Характеристики відповідних розподілів у теорії прийняття рішень не визначаються, і це є предметом попередньо виконуваних статистичних досліджень.

Виявлення можливих результатів дій. Результат реалізації альтернативи - це узагалі кажучи багатогранне явище, яке внаслідок різноманітних причинно-наслідкових ланцюжкових зв'язків може виявлятися в різних місцях і у різні періоди часу. Тому потрібно не лише виявляти всі компоненти вектора результатів реалізації альтернатив, але і передбачити місце та час їх виникнення. При цьому не можна обмежуватися лише основними результатами, пов'язаними з поставленою метою.

Побічні результати подекуди можуть бути так важливі, що від них залежить припустимість або неприпустимість обраного варіанта дій. Особливо важливо зважати на фактор

часу, оцінюючи наслідки дій, оскільки від тривалості періоду реалізації прийнятого рішення суттєво залежать показники результативності.

Описання і оцінювання реалізації альтернатив у конкретних умовах зовнішнього середовища. На цьому кроці для кожного окремого варіанта дії та стану зовнішнього середовища конкретизуються результати якісного аналізу з попередніх етапів, тобто для кожної альтернативи в довільному стані зовнішнього середовища потрібно описувати якісні та кількісні характеристики результатів.

Добір критеріїв оцінювання відповідності результатів дій поставленим цілям.

Цей етап у теорії прийняття рішень зазвичай виділяють відразу після етапу конкретизації мети. У межах такого підходу вже під час постановки мети можна повністю передбачити якісну структуру результатів реалізації альтернатив, які в цей час іще невідомі. Таке спрощення зумовлене сучасним рівнем розвитку теорії.

Зі змісту попередніх етапів випливає, що структура кортежу результатів стає зрозумілою тільки після глибокого аналізу процесів. Лише знаючи якісні властивості об'єкта, можна добрати прийнятні критерії визначення відповідності його стану поставленій меті.

Численні вади управління спричинені тим, що критерії якості рішення не дають змоги охопити всі аспекти оцінюваного явища. Унаслідок цього після проведення запланованих заходів часто виявляється, що окремі аспекти результатів навіть не відповідають поставленій меті, не кажучи вже про негативні побічні наслідки в інших галузях економіки, суспільстві та природі. Кількість критеріїв залежить від складності як самої мети, так і кортежу результатів дії. У теорії прийняття рішень центральною проблемою є узгодження системи цілей.

Оцінювання відповідності результатів дій поставленій меті.

На цьому кроці застосовують два підходи:

- попарне впорядкування результатів дії суб'єкта управління без виявлення об'єктивного підґрунтя для надання переваги;
- розроблення методики об'єктивного оцінювання корисності кожного окремого кортежу результатів у конкретних умовах зовнішнього середовища.

У першому підході слід використовувати рекомендації, які відповідають одиночним перевагам, щоб процес прийняття рішень був несуперечливим і давав змогу розв'язати поставлену задачу. Мета дослідження - визначити умови (аксіоми), які мають задовольняти оцінки суб'єкта управління, щоб забезпечити існування кардинальної функції корисності. Така функція корисності дає прийнятнішим результатам дій вищу оцінку корисності. Задача

пошуку самої функції корисності не ставиться. Цей підхід застосовують для стандартних рішень з обмеженою кількістю порівняльних альтернатив і станів зовнішнього середовища, він є наслідком дескриптивної теорії прийняття рішення.

Другий підхід спрямовано на розробку функції корисності на основі дослідження об'єктивних закономірностей функціонування керованого процесу без вивчення суб'єктивної поведінки та суб'єктивних переваг децидента в процесі управління. Подібна постановка задачі відповідає нормативній теорії прийняття рішень з об'єктивним обґрунтуванням управлінських рішень: насамперед нас цікавить не те, які рішення приймає децидент за даних конкретних умов, а те, чому перевагу надано певним результатам.

Оцінювання очікуваного ефекту дій. Оцінка відповідності результатів передбачуваних дій поставленим цілям не може бути основою для обрання найкращої альтернативи, тому що в ній не враховано невизначеність стану зовнішнього середовища. У теорії прийняття рішень розроблено певні правила, які дають змогу оцінити очікувану корисність альтернатив. Виділяються два основні питання дослідження:

- об'єктивне врахування різного рівня невизначеності в ході оцінювання корисності альтернатив;
- урахування ставлення суб'єкта управління до ризику прийняття рішення (схильність або несхильність до ризику).

Друге питання пов'язане здебільшого з дескриптивною теорією.

У нормативній теорії ми припускаємо, що відношення суб'єкта управління до ризику є нейтральним, і рішення приймають на основі об'єктивного врахування невизначеності.

Порівняння альтернатив за очікуваними ефектами дій (реалізаціями) та вибір найкращої. Визнання того, що альтернативи слід оцінювати з різних поглядів, робить проблему оцінки реалістичнішою, але ставить складне питання про повноту переліку аспектів.

У ході оцінювання варіантів рішень децидент намагається спрогнозувати те, що відбудеться в майбутньому, а майбутнє завжди є невизначеним. Безліч чинників, зокрема змінення зовнішнього оточення та неможливість реалізації рішення, можуть завадити втіленню бажаного. Тому важливий момент в оцінюванні - визначити можливості реалізації кожного припустимого рішення відповідно до намірів. Якщо наслідки певного рішення сприятливі, але шанс його реалізації невеликий, то воно може виявитися не найбажанішим варіантом вибору.

Якщо проблему визначено правильно, а альтернативні рішення ретельно зважено і оцінено, то зробити вибір порівняно просто. Децидент обирає альтернативу за найсприятливішими загальними наслідками. Коли ж проблема складна і доводиться брати до уваги множину компромісів, або інформація і аналіз суб'єктивні, то може трапитися, що всі альтернативи незадовільні.

Прийняття рішення. Виокремлення цього етапу пов'язане якісним характером прийняття рішення. На цьому етапі децидент доповнює результат формалізованого аналізу неформалізованими знаннями про об'єкт управління, зумовленими його досвідом та інтуїцією.

Реалізація рішення. Просте обрання альтернативи чи напрямку дій має невелику цінність для організації. Для розв'язання проблеми чи отримання вигоди з наявної можливості потрібно реалізувати рішення. Ефективність впровадження рішення підвищиться, якщо його визнають ті, кого воно стосується. Проте визнання рішення далеко не завжди відбувається автоматично, навіть якщо воно непогане. Інколи децидент може доручити ухвалення рішення тим, хто повинен буде його виконувати. Найчастіше ж він вимушений переконувати в правильності своїх поглядів інших людей в організації.

1.3. Структура задачі та види моделей прийняття рішень

1.3.1. Формальна постановка задачі прийняття рішень

Кожна окрема задача прийняття рішень являє собою елемент логічної схеми розроблення плану вирішення складної проблемної ситуації, а від процесу її розв'язання залежить технологія, інформація та значною мірою - організація функціонування цього елемента. Між такими задачами існує багато прямих і зворотніх зв'язків, тому їх зазвичай розв'язують із застосуванням ітеративних циклів, що інколи можуть зумовлювати переформулювання умов або нову постановку певної задачі. Формальна постановка задачі прийняття рішень має самостійну цінність, тому що забезпечує початкові умови для розроблення нових класів методів і моделей прийняття рішень.

Одна з найзагальніших моделей задачі прийняття рішень Z_R має вигляд сімки [1]

$$Z_R = (S, S^P, I, T^P, F^P, A, P)$$

де S — множина можливих ситуацій, S^P — множина проблемних ситуацій $S^P \subseteq S$, I - ідентифікатор проблемної ситуації (якщо $I = 1$, то конкретна ситуація $S_i \in S^P$, якщо ж $I = 0$, то немає потреби приймати рішення, оскільки ситуація не проблемна; для проміжних значень задається порогове значення, від якого і залежить належність чи неналежність

ситуації до множини проблемних); T^P — множина постановок (типів) задач прийняття рішень; $F^P: S^P \rightarrow T^P$ — відображення множини проблемних ситуацій у множину постановок задач прийняття рішень; A - множина можливих варіантів рішень; P - система переваг децидента.

Задача полягає в тому, щоб за наявності цих структурних елементів обрати таке рішення з множини A можливих (припустимих) варіантів, що максимально відповідає системі переваг децидента P .

Систему переваг децидента P можна формально подати наступним чином:

$$P = (A, Q, K, F^Q, R)$$

де Q - множина критеріїв оцінювання якості рішень; K - множина шкал критеріїв, $F^Q: A \rightarrow Q$ - відображення множини альтернатив A в множину критеріїв; R - вирішуюче правило, що дає змогу на основі образів множини альтернатив A в області критеріїв Q розв'язати задачу прийняття рішень відповідно до її типу T^P , тобто обрати одну найкращу альтернативу, або знайти всі альтернативи, які відповідають поставленим умовам, або впорядкувати альтернативи за якістю.

Ця модель відповідає застосуванню математичних методів на багатьох етапах прийняття рішень. Множина $A = \{x_i\}$ можливих (припустимих) варіантів рішень — це сукупність наявних альтернатив, що відповідають можливим способам досягнення мети і не порушують певних обмежень, властивих конкретній задачі прийняття рішень. Множина критеріїв $Q = \{Q_i\}$ відображає різні суттєві для децидента аспекти мети функціонування системи; вона є одним із результатів системного аналізу ситуації. Множина шкал критеріїв K ставить у відповідність кожному критерію множини Q шкалу (найменувань, порядкову, інтервалів або відношень), у якій вимірюються значення критеріїв. Відображення $F^Q: A \rightarrow Q$ ставить у відповідність кожній альтернативі множини A (що описується зазвичай кортежем різнорідних змінних і параметрів) точку в просторі критеріїв; це відображення гомоморфне, тому що різні альтернативи можуть мати однакову якість.

Система переваг P — це один із неформальних елементів, який значною мірою зумовлює слабку структурованість задач прийняття рішень. Апроксимація системи переваг децидента в більшості випадків дає змогу за певних припущень спростити умови, щоб побудувати вирішуюче правило R або описати механізм обрання альтернативи з множини A .

В залежності від охоплення окремих етапів ППР застосовують різні формальні моделі задачі прийняття рішень. Якщо структурні складові задачі переважно визначено, задачу прийняття рішень Z_S можна описати як трійку

$$Z_S = (A, Q, R)$$

У цій постановці неявно передбачено, що вирішуюче правило визначає поняття кращої альтернативи, тобто формально скорочена модель відповідає задачі вибору.

1.3.2. Класифікація моделей і задач прийняття рішень

У процесах прийняття рішень застосовують **моделі таких типів** [1]:

- дескриптивні та нормативні;
- індуктивні та дедуктивні;
- проблемно-орієнтовані та формальні;
- статичні та динамічні.

Дескриптивні та нормативні моделі. Вивчаючи ППР, розрізняють два основні підходи — дескриптивний і нормативний.

Основа *дескриптивного* підходу — емпіричне дослідження рішень, спрямоване насамперед на описання проблемної ситуації, поведінки окремих децидентів у ППР. Отже, мета цього підходу полягає у виявленні та вивченні закономірностей формування рішень у процесі взаємодії децидента з проблемою.

Нормативний підхід виходить з потреби в теоретичному обґрунтуванні принципів раціонального вибору та раціональної послідовності етапів - «норми» - у перебігу формування рішень. Він ставить дуже високі вимоги до децидента. Нормативні моделі застосовують для керування ППР, формування його елементів і зміни його перебігу.

У практичних системах прийняття рішень застосовують як результати дескриптивних досліджень, так і теорії нормативного підходу. Такий проміжний варіант називають «прескриптивним» підходом. Він рекомендує, як повинен діяти децидент із середніми можливостями і інтелектом, якщо він здатний систематизовано працювати над проблемою. У цьому разі не гарантується знаходження найкращих у певному розумінні рішень; натомість обирається «непогане», доволі послідовне та несуперечливе рішення.

Індуктивні та дедуктивні моделі. В *індуктивному* підході модель отримують, спостерігаючи за одиничними фактами, важливими для прийняття рішень. Індуктивним методом

розробляють моделі для розв'язання конкретних проблем. Такі моделі містять специфічні, історично сформовані властивості процесу, що моделюється.

Основна проблема побудови індуктивних моделей - це вибір із сукупності одиничних спостережень тих, що дають змогу побудувати адекватну модель задачі прийняття рішень, і формалізоване подання їх структури та зв'язків. Значення індуктивних моделей полягає в тому, що за допомогою простішого опису взаємозв'язків наочно та стисло подається інформація, що міститься у великій сукупності спостережень.

Дедуктивний підхід до побудови моделей виходить не з конкретних фактів, а зі спрощеної системи гіпотетичних ситуацій. Основою моделювання при цьому є замкнена та спрощена абстрактна проблема. У реальності виникають переважно конкретні проблеми, тимчасом як теорія прийняття рішень виходить з абстрактних ситуацій керування. За допомогою якісного аналізу об'єктивну реальність редукують і агрегують у спрощену гіпотетичну абстрактну проблему, що описується у вигляді дедуктивної моделі.

Проблемно-орієнтовані та формальні моделі. Цей поділ відображає на застосування певних методів побудови моделей або методів експериментування з орієнтацією децидента. На ґрунті нових (уперше розроблених або запозичених з інших галузей науки та практики) методів моделювання будують нові (*проблемно-орієнтовані*) моделі проблеми. На наступних етапах вивчають можливості застосування таких моделей і їх специфічних властивостей для розв'язання задач прийняття рішень.

У прийнятті рішень для *формальних* моделей прийняття рішень використовують наявні методи розв'язання проблем. Аналіз алгоритмів цих методів дає змогу сформулювати конкретні вимоги до структури та властивостей моделей. При цьому можливі труднощі з пристосуванням подібних моделей (зокрема, забезпеченням їх інформацією). Окрім того, формальна модель може не відповідати структурі та властивостям реальних параметрів проблемної ситуації. У практиці наукових досліджень достатньо часто шукають проблемні ситуації, для розв'язування яких застосовні розроблені моделі та методи експериментування з ними, а не навпаки.

Одноперіодні (статичні) та багатоперіодні (динамічні) моделі. В *одноперіодних* моделях виходять із припущення, що сума оптимальних окремих рішень у окремих періодах їх реалізації є оптимальним розв'язком для всієї послідовності періодів. Адекватність цього припущення зазвичай не підтверджується, тому що короточасний ефект часто приводить до великих втрат у перспективі. Приймаючи рішення, слід збалансовувати короткотермінові та довготермінові аспекти оцінювання оптимальності.

Урахування довготермінових ефектів реалізації рішень - це не лише проблема формування системи цілей одноперіодної моделі прийняття рішень. Процес управління об'єктивно піддається декомпозиції на певні періоди, на кожному з яких потрібно формувати нові рішення для подальших дій. Періодичність прийняття рішень залежить від періодичності надходження нової суттєвої інформації про внутрішні та зовнішні параметри процесу керування, що сигналізують виникнення потреби в корегуванні управлінських впливів. Приймаючи рішення, завжди слід зважати на можливий подальший перебіг подій і передбачити способи глибокого реагування на зміни умов. Отже, одноперіодні моделі загалом можна розглядати як елементи *багатоперіодної* моделі. Якщо можна узгодити ці моделі, то формалізована процедура узгодження одноперіодних моделей є багатоперіодною моделлю ППР.

Задачі прийняття рішень класифікують за багатьма ознаками, основні з яких наступні:

- рівень структурованості проблеми, що розв'язується;
- властивості зовнішнього середовища та децидента;
- кількість децидентів;
- спосіб подання мети;
- можливості отримання потрібної інформації (обсяг, складність і тип експертної інформації, потрібної для прийняття рішень).

За *рівнем структурованості* розрізняють структуровані, слабкоструктуровані та неструктуровані проблеми прийняття рішень.

Структуровані проблеми зазвичай дають змогу побудувати формальну постановку задачі прийняття рішень, що належить до відомого класу задач, для яких існують алгоритми їх розв'язання.

Слабкоструктуровані проблеми є найцікавішими. Для їх розв'язання застосовують як теорію прийняття рішень, так і інші дисципліни (системний аналіз, психологію тощо). Вони мають міждисциплінарний характер.

Неструктуровані проблеми вивчаються у суспільних дисциплінах.

В багатьох випадках існує спокуса використати відомі формальні задачі та методи для розв'язання слабкоструктурованих проблем. Якщо такі дії серйозно не обґрунтовані, то ми можемо розв'язати не реальну проблему, а ту, яку вигадали для того, щоб мати змогу застосувати відому нам модель і розв'язати відому задачу, хоча вони зовсім не відображають суті реальної проблеми.

За властивостями зовнішнього середовища та децидента розрізняють детерміновані задачі, стохастичні задачі прийняття рішень та задачі з невизначеністю і активною протидією.

Ці задачі поділяються за ступенем врахування невизначеності в процесі прийняття рішень. У *детермінованих* задачах усі фактори, що суттєво впливають на керовані процеси, визначені; їх точні числові значення відомі суб'єктові управління. Подібні ситуації на практиці зустрічаються рідко. Детерміновані задачі використовують як спрощення реальних задач керування, коли, наприклад, найімовірніше значення чинника розглядають як визначене постійне. Детермінована модель, узагалі кажучи є, спрощеною щодо реальної ситуації.

У *стохастичних* задачах описано розподіл вірогідностей за різними числовими значеннями факторів, тобто взято до уваги стохастичну невизначеність. Такі моделі ближчі до реальних умов рішень, але для їх побудови і експериментування з ними потрібні суттєво більші витрати на інформаційне, математичне, технічне та кваліфікаційне забезпечення.

У *задачах з невизначеністю* статистичних даних немає, або вони невідомі децидентові. Потрібну інформацію (значення суб'єктивних вірогідностей, параметрів лінгвістичних змінних та ін.) доводиться отримувати, опитуючи експертів, а якщо це неможливо, то застосовувати методи прийняття рішень в умовах невизначеності.

У *задачах з активною протидією* невизначеність розглядають не як байдужу до наших прагнень «природу», а активного суперника чи множину суперників, що можуть і протидіяти, і в певних ситуаціях сприяти децидентові. Такі задачі належать до ігрового типу.

За *кількістю децидентів* розрізняються задачі з одним, кількома рівноправними та кількома децидентами з власними інтересами та важливістю.

Якщо децидент один, то з певними спрощеннями після формалізації ми отримаємо одно- чи багатокритерійну задачу оптимізації з обмеженнями (коли кількість децидентів - нуль, одержимо описову, тобто дескриптивну модель ситуації). Коли є *кілька рівноправних децидентів*, то маємо клас задач голосування, у яких альтернативи обираються за допомогою різноманітних процедур голосування. У разі *нерівноважливих децидентів* отримуємо задачі експертного оцінювання чи ігрового типу.

За *способом подання мети* розрізнятимемо однокритерійні, багатокритерійні з кількісними та якісними критеріями задачі та багатокритерійні з ієрархією критеріїв. До *однокритерійних* належать як задачі з одним критерієм, так і модифіковані багатокритерійні, у яких один критерій одержано згортанням усіх наявних критеріїв у один або

обґрунтуванням існування та побудови відповідної функції корисності. У *багатокритерійних* задачах оптимальне рішення за одним із критеріїв буде не оптимальним за іншим.

На практиці найчастіше можна реалізувати лише одне рішення, оптимальність якого пов'язана з можливістю однозначно впорядкувати рішення за рівнем досягнення генеральної мети. Цю задачу загалом розв'язують із використанням одного узагальненого критерію оцінки. Отже, багато практичних моделей прийняття рішень переважно однокритерійні, тому вони лише в найпростіших випадках адекватні дійсності. При цьому суть об'єктивних суперечностей і характер їх проявів у конкретному керованому процесі приховують, і виникає лише видимість розв'язання проблеми.

Рішення багатокритерійних задач із кількісними критеріями, узагалі кажучи, є множиною Паретто-оптимальних альтернатив. Тому для розв'язування таких задач широко застосовують діалогові методи, які у відкритій або прихованій формі спрямовані на те, щоб виявити додаткову інформацію про систему переваг децидента і знайти в кращому випадку одне рішення або принаймні обмежитися підмножиною множини Парето.

Якщо існує кілька критеріїв, то це означає, що в межах певної системи знань і понять вони є невзаємозамінними, непоєднуваними та неузгоджуваними. Тому кількісні зміни окремих критеріїв, що відображають мету системи, непорівнянні між собою.

Багатокритерійні задачі з ієрархією критеріїв виникають унаслідок якісного аналізу структури мети з використання дерева цілей та інформації про домінування на множині критеріїв у конкретній проблемній ситуації. Лише якісний аналіз структури мети може бути основою розроблення способів розв'язання достатньо складної проблеми. Слід виявити, якщо це можливо, формальні зв'язки між критеріями оцінювання якості розв'язання проблеми. Узагальненим критерієм оцінювання може бути один (найважливіший) критерій або синтетичний показник (згорнутий критерій), що виник унаслідок переведення задачі в клас однокритерійних або побудови ядра перспективних альтернатив із поступовим його звуженням. Слід проаналізувати також можливість переведення частини критеріїв у обмеження, завдяки чому іноді вдається суттєво спростити проблему.

Якщо вдається побудувати відношення домінування на множині критеріїв, то множина Паретто-оптимальних рішень суттєво звужується. У разі ж використання дерева цілей або його піддерева, коли множина альтернатив відома, для розв'язання задач такого типу з успіхом застосовують метод аналізу ієрархій, який дає змогу за результатами опитування експертів у вигляді системи бінарних відношень не лише отримати остаточне впорядкування можливих варіантів рішень, але і оцінити ступінь несуперечливості тверджень експертів.

Розглянуті вище класифікаційні ознаки та відповідні класи задач прийняття рішень наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1. Класифікація задач прийняття рішень

№	Класифікаційна ознака	Класи задач прийняття рішень
1	Рівень структурованості розв'язуваної проблеми	Структуровані
		Слабкоструктуровані
		Неструктуровані
2	Властивості зовнішнього середовища та децидента	Детерміновані
		Стохастичні
		З невизначеністю
		З активністю (протидія чи сприяння)
3	Кількість децидентів	Один
		Кілька рівноправних (задачі голосування)
		Кілька з власними інтересами (експертне оцінювання чи ігрові ситуації)
4	Спосіб подання мети	Однокритерійні (включно зі згортками критеріїв)
		Багатокритерійні з кількісними та якісними критеріями
		Багатокритерійні з ієрархією критеріїв (без чітких або нечітких відношень переваг у просторі критеріїв та з ними)
5	Можливості отримання потрібної інформації	Без експертної інформації!
		Інформація про переваги на множині критеріїв
		Інформація про важливість альтернатив
		Інформація про переваги на множині критеріїв і наслідки альтернатив

Упровадження методологічних і методичних розробок теорії прийняття рішення в практику суттєво полегшується, якщо чітко означено поняття керованості, сформульовано

первинні припущення, визначено структурну специфіку і інші характеристики моделі прийняття рішень. Численні непорозуміння, а також розчарування виникають внаслідок застосування моделей, неадекватних реальній ситуації прийняття рішень.

Будуючи моделі, необхідно, без сумніву, окрім об'єктивного аспекту, зважати на можливість використання моделі із суб'єктивного погляду. Цей аспект можна розглядати як суб'єктивну адекватність моделі, тобто її відповідність поставленим вимогам, знанням, навичкам, характеристикам децидента. Суб'єктивний аспект відображається в постановці задачі, підході до інформаційного відображення об'єкта управління, доборі методів синтезу моделей і експериментування з ними.

Отримані внаслідок застосування різних підходів, на основі різної інформації моделі різняться між собою. Вони мають свої сильні та слабкі сторони і доповнюють одна одну в ППР. У теорії прийняття рішень розробляються алгоритми та вивчаються формальні проблеми, які можна розв'язати за допомогою алгоритмів, але не досліджується, чи існують у практиці керування ситуації, яким вони б відповідали (тобто проблема адекватності формальних моделей і методів не досліджується чи досліджується недостатньо). Завдяки поєднанню відповідного апарату теорії прийняття рішень і досвіду прийняття практичних рішень виникає можливість удосконалювати рішення на основі збалансованих підходів до формалізації проблем управління.

Розділ 2. Експертна інформація і шкали

2.1. Застосування шкал вимірювання переваг

Для оцінювання ступеня переваг на множині альтернатив застосовують різноманітні шкали вимірювання [1], кожній з яких властиві свої допустимі перетворення. Метризовані бінарні відношення дають змогу брати до уваги ступінь переваги для кожної пари альтернатив, тобто точніше, ніж звичайні бінарні відношення врахувати силу переваги. Щоб оцінити ступінь подібності, визначають на метризованих бінарних відношеннях міри близькості. Це особливо важливо, якщо потрібно оцінити близькість міркувань — кількох експертів. Емпіричні системи відображають результати опитування експертів і дають змогу, використовуючи міри близькості, апроксимувати емпіричні відношення тими, що мають задані властивості та в певному розумінні найближчі до них. Емпіричні відношення являють собою результат опитування реальних експертів, а тому важливо правильно організувати експертне опитування, спираючись на загальні методи. Для оцінювання переваг застосовують низку методів, які мають свої переваги та вади, залежно від особливостей конкретної експертизи. Однак навіть за найкращої організації процедур експертного оцінювання успіх залежить від експертів, послідовності їхніх міркувань. Перевірити це можна за допомогою методів оцінювання компетентності експертів.

Звичайні бінарні відношення дозволяють зробити висновок про те, чи краща одна з альтернатив за іншу, але не дозволяють оцінити «силу» такої переваги. Вивчення видів шкал вимірювання дозволяє оцінити межі їх обґрунтованого використання.

У процесі прийняття рішень децидент порівнює варіанти і обирає той, що здається йому найліпшим. Звичайно ж, постає питання: якою мірою він користується? У яких одиницях децидент може оцінити ступінь переваги однієї альтернативи над іншою, і наскільки обґрунтовані подальші операції агрегування оцінок кількох експертів. Відповіді на ці і інші питання дає теорія вимірювань (ТВ), що являє собою складову частину статистики об'єктів нечислової природи. Результат оцінювання експерта - це не що інше, як вимірювання.

2.2. Шкали: номінальна, порядку, інтервальна, відносин

2.2.1. Якісні шкали.

Шкала найменувань (номінальна шкала) – якісна, у ній значення числової системи визначаються з точністю до взаємо-однозначних перетворень $f(a)$. Логічна основа шкали визначається аксіомами A1 – A3.

Побудувати шкалу найменувань – це значить використовувати число як назву. Шкала формується довільно, до неї можна застосувати будь-яке перетворення чисел, що зберігають аксіоми тотожностей.

Суть виміру альтернатив у номінальній шкалі – розбивка їх на класи еквівалентності по тій або іншій ознаці, тобто: $a_i S a_j \leftrightarrow a_i \text{ і } a_j$ – нерозрізнені. Таким чином, відображення

$$f: N \rightarrow M$$

є вимір якщо:

$$a_i S a_j \leftrightarrow f(a_i) = f(a_j)$$

Усім альтернативам того самого класу приписується то саме число, а альтернативам різних класів – різні числа.

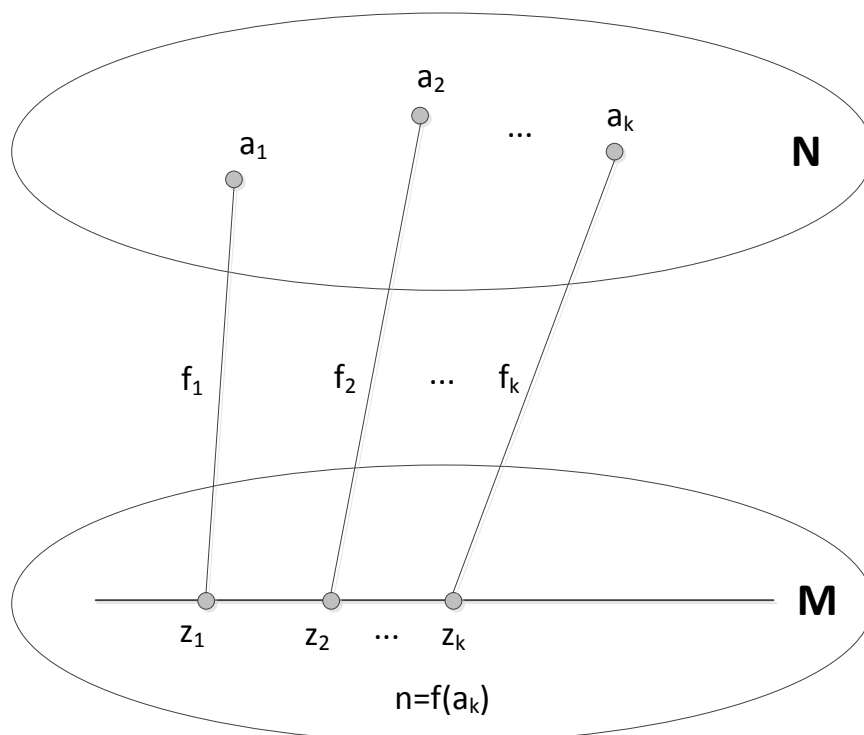


Рис. 2.1. Шкала найменувань

Вирішення проблеми відображення полягає у виявленні, якими властивостями повинне задовольняти відношення S щоб існував вимір f . Відношення нерозрізненості (однаковості) є відношення еквівалентності (**рефлексивність+симетричність+транзитивність**).

Числове відношення, відповідне до відношення нерозрізненості, є відношення рівності чисел. Отже, у цьому випадку, числова система це пари $\langle Z; R \rangle = \langle Z; = \rangle$.

Шкала дозволяє:

- Пізнавати, розрізняти, класифікувати об'єкти;
- Визначати частоти (число елементів приналежних кожному класу), моди (найбільш численний клас).

Шкала не має масштабу і початку відліку (нульової точки).

Шкала порядку (рангова)

Досить часто при порівняльній оцінці об'єктів, ми визначаємо лише порядок переваги об'єктів.

Таким чином, порядкова шкала задається у вигляді переваги.

У ній чисельні значення числової системи визначається з точністю до будь-яких монотонних перетворень $\varphi(a)$.

Функція називається монотонно-зростаючою, якщо $f(a_1) > f(a_2) \rightarrow a_1 > a_2$.

Числове відношення, відповідне до відношення переваги, є бінарне відношення «не менше ніж» ($\geq$).

Відображення $f: H \rightarrow M$ є вимір, якщо $a_i S a_j \rightarrow f(a_i) \geq f(a_j)$.

Числова система в цьому випадку $\langle Z; \geq \rangle$. Щоб існував вимір f необхідно і достатньо, щоб S було **рефлексивним+транзитивним+лінійним (повним)**.

Шкала показує, що один об'єкт за якоюсь ознакою порівняння краще іншого або рівноцінний йому.

Шкала не має ні початку відліку, ні масштабу.

Ранговий порядок дозволяє одержувати:

- Частоти і моди;
- Медіану;
- Коефіцієнт рангової кореляції.

Інші статистичні характеристики неможливі, тому що об'єкти розташовані не рівномірно.

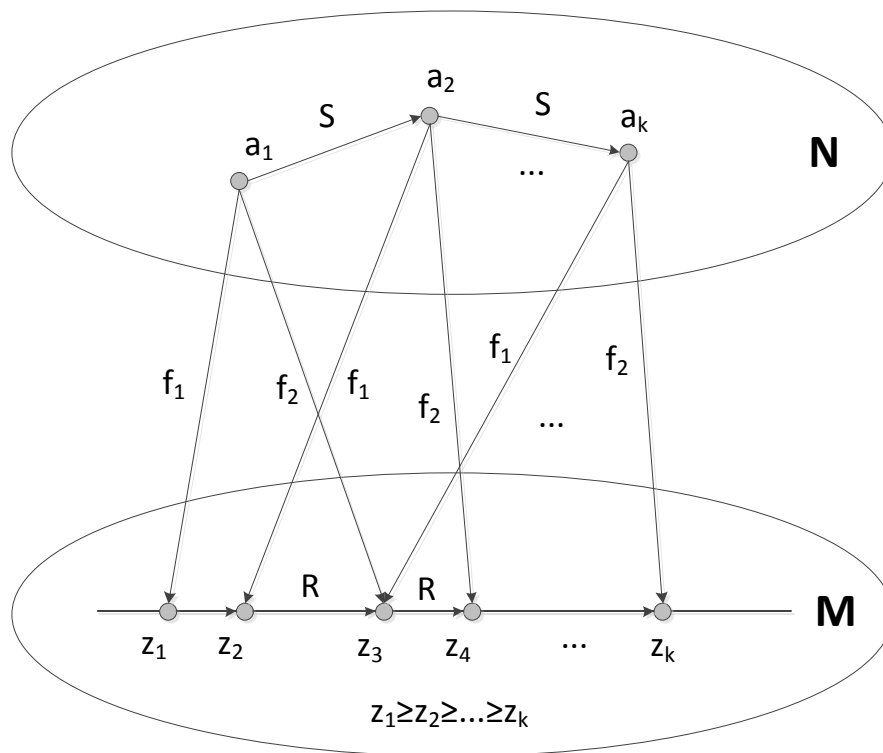


Рис. 2.2. Шкала порядку

Згідно з аксіомою відношення порядку R – асиметричне. Шкала порядку – якісна.

2.2.2. Кількісні шкали

Інтервальна шкала – у ній чисельні значення числової системи визначаються з точністю до лінійних перетворень: $\varphi(a) = \alpha a + \beta$, $\alpha > 0$.

Перетворення визначається вибором двох констант:

- β – показує нове місце розташування нуля, тобто точку відрахування;
- α – масштаб.

Довжина інтервалів постійна (властивість шкали).

Шкала інтервалів не має властивість аддитивності. Це приводить до неможливості, у загальному випадку, застосувати на даній шкалі жодне з арифметичних дій, тому що вирахування, множення і розподіл являють собою лише окремий випадок додавання.

Однак якщо допускати можливість угоди про довільний нуль, то різниці на шкалах інтервалів можна розглядати, як абсолютні величини, що володіють властивістю аддитивності.

У шкалі інтервалів відношення оцінок альтернатив не зберігається (немає аддитивності), але зберігається відношення різниці оцінок.

Нехай альтернативам $a_1; a_2; \dots a_n$, в одній числовій системі (M_1), відповідають числа $f(a_1); f(a_2) \dots f(a_n)$, а в іншій числовій системі (M_2), у яку гомоморфно відображається емпірична система, система чисел: $\varphi[f(a_1)]; \varphi[f(a_2)]; \dots \varphi[f(a_n)]$, $\text{где } \varphi(a_i) = \alpha a_i + \beta$. Тоді:

$$\frac{\varphi[f(a_1)] - \varphi[f(a_2)]}{\varphi[f(a_3)] - \varphi[f(a_4)]} = \frac{\alpha[f(a_1)] + 1 - \alpha[f(a_2)] + 1}{\alpha[f(a_3)] + 1 - \alpha[f(a_4)] + 1} = \frac{f(a_1) - f(a_2)}{f(a_3) - f(a_4)}$$

Тобто незалежність відносини двох різниць від одиниці виміру і нульової точки.

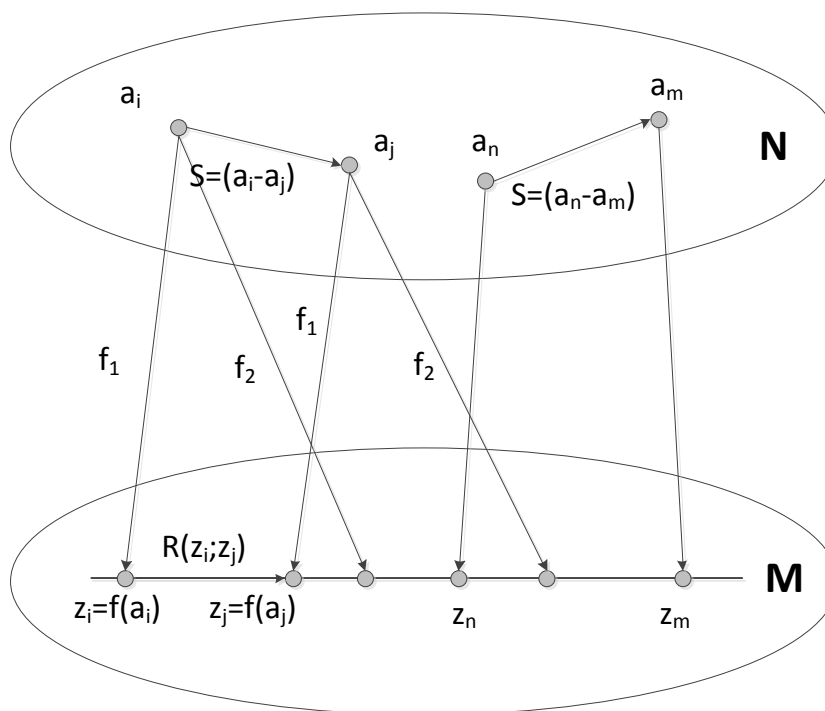


Рис. 2.3. Інтервальна шкала

Шкала застосовується для відображення величини відмінності між властивостями об'єктів, тобто вимірювати «відстань» між об'єктами (привабливість професії).

Крім вище перерахованих статистичних характеристик, шкала дозволяє обчислювати:

- Математичне очікування, Середньо квадратичне відхилення;
- Змішані моменти.

Не має змісту визначати коефіцієнт варіації, тому що математичне очікування залежить від угоди про нульову точку.

Інтервальні шкали припускають можливість трансформації оцінок, отриманих по одній шкалі в оцінки по іншій шкалі.

Інтервальна шкала – кількісна.

Шкала відносин—частковий випадок шкали інтервалів при виборі нульової точки звіту в $\beta = 0$. Для даних шкал той самий емпіричний об'єкт відображається в «0».

У ній, чисельні значення числової системи визначаються з точністю до перетворення подоби: $\varphi(a) = \alpha a$, тобто з точністю до вибору одиниці виміру – зміна одиниці виміру

приводить до множення всіх результатів на деяке позитивне число $\alpha > 0$. Іншими словами припустимо перетворення – множення показника на постійну константу.

Цей факт і визначає можливість порівняння в скільки раз один об'єкт краще іншого: $f(a) > f(b)$, тобто відношення $\frac{\alpha f(a)}{\alpha f(b)}$ не залежить від α . А якщо масштаб зафіксований, то і на скільки $f(a)$ більше $f(b)$. Таким чином, різниця $\alpha f(a) - \alpha f(b)$ може змінюватися тільки при зміні α а α – константа;

$$\frac{\varphi[f(a_1)]}{\varphi[f(a_2)]} = \frac{\alpha f(a_1)}{\alpha f(a_2)} = \frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \text{const}$$

Шкала має нульову точку і масштаб. Шкала має всі властивості перерахованих вище шкал, а також властивістю аддитивності.

У висновку відзначимо, що шкала вважається кількісною, якщо припустимі перетворення визначені з точністю до двох числових параметрів («0»; масштаб), тоді як у якісних шкалах припустимо перетворення не виділяється однозначно ніяким кінцевим набором числових параметрів.

Приклад: токарь і-го розряду Іванов виробив за зміну 30 деталей. Віднесення Іванова до класу токарів проводиться по номінальній шкалі (класифікатор професії). Присвоєння токареві і-го розряду (тарифного) здійснюється по порядковій шкалі класифікації довідником. Вимір змінного виробітку токаря припускає наявність Інтервальної шкалі класифікації відповідно до тарифно-класифікаційного довідника.

Вимір змінного виробітку токаря припускає наявність Інтервальної шкали, по якій визначається інтервал «зміна» і номінальній шкалі найменувань деталей. Число 30 шт. встановлюється по абсолютній шкалі.

Абсолютна шкала – числові значення задані з точністю до тотожних перетворень, тобто допустиме перетворення має вигляд $\varphi(x) = x$. Єдиним припустимим перетворенням є тотожне перетворення. Інакше кажучи, це шкала, за допомогою якої ми одержуємо однозначно певні шкальні значення. В абсолютній шкалі фіксовані масштаб і початок відліку. Лише для абсолютної шкали результати вимірювань являють собою звичайні числа. Як приклад – кількість студентів в групі.

Такі фактори, як витрати, прибуток, час, можуть бути оцінені по порядковій або Інтервальної шкалі (у гривнях; декадах; умовних одиницях). Строк окупності, порівняльна ефективність варіантів, може бути оцінена по Інтервальній шкалі.

Якісні або соціальні фактори можуть бути оцінені по порядкових або номінальним шкалам.

Розділ 3. Організація експертного оцінювання

Першим етапом організації робіт із проведення експертного оцінювання є підготовка і видання керівного документа (опитувальника, анкети), у якому формується мета експертизи і основні положення по її виконанню.

Практика показує, що наявність чітко сформульованої мети і ясно зрозумілих потреб є зобов'язаною умовою забезпечення надійного результату експертизи.

Основою для вибору цілей експертизи є опис передісторії і поточного стану проблеми. Потім формується група експертів-аналітиків, найважливішими завданнями якої є розробка методу і моделі опитування, відбір експертів, проведення опитування, аналіз і узагальнення інформації.

Організація експертного оцінювання включає:

1. Добір експертної групи і визначення часткового состава експертів по кожній області діяльності.
2. Визначення кількості експертів у групі.
3. Аналіз якості експертів і уточнення кількості експертів у групі.
4. Організація і методика проведення опитування експертів.
5. Методика обробки експертної інформації.
6. Аналіз експертного опитування: погодженість думок експертів, визначення взаємозв'язку ранжировок.

3.1. Формування експертної групи

Формування експертної групи розуміють як проблему вибору з деякої множини фахівців осіб найбільш компетентних у розглянутому комплексі питань.

Усі методи експертних оцінок є певною мірою суб'єктивними, тому їх результати суттєво залежать від правильного добору состава експертів, їх компетентності, сумлінності, креативності і інших характеристик.

Особливих наукових рекомендацій для визначення числа експертів у групі немає. Тому керуються міркуваннями здорового глузду залежно від цілей експертизи, вимогами вірогідності і витратами на експертизу.

Метод «сніжного» кому.

Число початкових відомих заздалегідь осіб: M_0 .

Перший з них назвав $m_1(1)$ нових осіб і всього нових кандидатів стало $M_0 + m_1(1)$.

Після опитування осіб з M_0 , кількість осіб стане:

$$M_0 + \sum_{j=0}^{M_0} m_1(j_1)$$

У підсумку, після першого туру опитування маємо:

$$M_1 = M_0 + \sum_{j=0}^{M_0} m_1(j_1)$$

Після другого туру:

$$M_2 = M_0 + \sum_{j=0}^{M_0} m_1(j_1) + \sum_{j=0}^{M_1} m_2(j_2)$$

Процедура закінчитися на певній ітерації. Потрібно враховувати витрати часу і засобів.

Складною проблемою процедури добору експертів є формування системи характеристик експерта, що суттєво впливають на хід і результати експертизи.

Для опису експертів з погляду якості розв'язку проблеми, уводять наступні характеристики експертів: компетентність, креативність, конформізм, аналітичність, самокритичність, широта мислення, відношення до експертизи, наполегливість, керована агресивність, і інші.

Компетентність повинна бути не тільки змістовно описана, але і визначена, обмірювана. Це означає, що перераховані характеристики повинні піддаватися виявленню, спостереженню, надійному виміру.

Для виміру компетентності, що і виражають її характеристик застосовуються наступні основні методи: самооцінка експерта, суддівський метод, документальний метод, тестовий метод, ігровий метод.

3.2. Визначення відносних коефіцієнтів компетентності експерта

Оцінка компетентності експертів – центральне завдання відбору. Використовують два підходи до цього завдання.

Перший – апіорний, полягає в оцінці компетентності до початку експертизи і націлений на вибір експертів і формуванні робочої експертної групи.

Другий – апостеріорний, полягає у визначенні компетенції за результатами експертизи і націлений на облік компетентності при обробці даних опитування.

У другому підході компетентність експерта повинна оцінюватися по ступеню погодженості його оцінки із груповою оцінкою.

Крок 1

Обчислюється групова оцінка i -ї альтернативи:

$$x_i^1 = \sum_{j=1}^m x_{ij} k_j^{t-1} \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}$$

x_{ij} – оцінка i -ї альтернативи, даної j -м експертом;

t – параметр процесу.

Тут початкові значення коефіцієнтів компетентності ухвалюються однаковими, які дорівнюють $k_j^1 = \frac{1}{m}$, і оцінки x_i^1 першого наближення, які дорівнюють середнім арифметичним значенням оцінок експертів:

$$x_i^1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}$$

Крок 2

Обчислюють

$$\lambda^1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} x_i^1$$

Крок 3

Значення відносних коефіцієнтів компетентності 1-го наближення:

$$k_j^1 = \frac{1}{\lambda^1} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_i^1$$

Знайшовши k_j^1 , повторюємо весь процес і одержуємо друге наближення величин x_i^2 ; λ^2 ; k_j^2 ; і так далі.

Звичайно помилки експертів, як убік їх перебільшення, так і убік зменшення, зв'язані зі складом розуму і точкою зору експертів. Це так звані систематичні помилки.

Відомо, що дисперсія більш показова для здатностей того або іншого експерта давати правильну оцінку. І тому рекомендується віддавати перевагу експертові з більш ефективними оцінками і систематичними зсувами експертові з незміщеними оцінками, але з малою ефективністю.

3.3. Одержання експертної інформації.

Досвід, інтуїція, знання допомагають експертові вирішувати багато проблем невизначеності, що виникають у ситуаціях ризику та невизначеності, і робити оцінку значущості альтернатив.

Під груповою оцінкою будемо розуміти результат об'єднання індивідуальних думок експертів, про порядок переваги розглянутих об'єктів у єдину оцінку «колективної» переваги.

Традиційні методи одержання групових оцінок за допомогою середніх величин виявляються прийнятними тільки тоді, коли колектив експертів однорідний у змісті характеру відповідей. У випадку неоднорідності колективу середні оцінки втрачають зміст і можуть виявитися в певному змісті «*гірше*», чим індивідуальні оцінки, на основі яких вони отримані. При аналізі існуючих процедур одержання інформації виділяється два основні фактори:

- 1) Характер взаємодії експертів у ході опитування;
- 2) Наявність «**зворотного зв'язку**» – інформування експертів о попередніх турах опитування.

Представники першого типу: процедура «**метод штурму**»; процедура «**дискусія за круглим столом**». У ході дискусії кожний експерт має можливість неодноразовості висловлювати судження, змінювати і уточнювати свою точку зору.

Найбільш перспективні процедури другого типу. Перевага – оперативний зворотний зв'язок, швидке подолання нерозуміння між експертами. Представник даного типу – **метод «Делфі»**.

3.4. Опитування експертів

Опитування – головний етап спільної роботи груп аналітиків і експертів.

Група аналітиків розробляє метод і модель опитування. Важливе значення має правильне формулювання анкет, яке повинне забезпечувати їхнє єдине тлумачення і вираження відповідей на кожне питання у вигляді кількісної оцінки.

Крім того, крім анкет експертам повинна бути дана пояснювальна записка, що має метою перед опитом орієнтування експертів і отримання інформації про цілі експертизи, завданнях опитування, об'єктах експертизи, необхідні організаційні дані і інструкція із заповнення анкет.

Анкетування є найбільш ефективним і найпоширенішим видом опитування.

Анкета – це структурно організований набір питань, кожний з яких логічно пов'язаний із головним завданням експертизи.

Залежно від характеру інформації, що вимагається, можливостей її одержання і інтерпретації, що існують, методи опитування діляться на:

- Індивідуальні і групові;
- Особисті (інтерв'ю) і заочні (пересилання анкет).

Вибір форми опитування визначається необхідною вірогідністю результатів, часом проведення експертизи і витратами на експертизу.

При **груповій експертизі** використовуються наступні види опитування:

- Дискусія;
- Анкетування;
- Мозкова атака.

Дискусію доцільно проводити для розв'язку завдань, що не вимагають точної кількісної оцінки альтернатив.

Опитування – анкетування; тут питання повинне бути сформульоване так, щоб не допускати неоднозначного тлумачення. Анкетування може проводитися зі зворотним зв'язком або без неї.

Опитування типу інтерв'ю припускає бесіду з експертом, у ході якої аналітик ставить питання відповідно до заздалегідь розробленої програми. Цей метод вимагає від експерта вміння швидко, фактично експромтом, давати якісні оцінки (поради) на поставлені питання.

За формою, питання-анкети діляться на:

- Відкриті;
- Закриті;
- З «віялом» відповідей;
- Прямі;
- Непрямі.

Відкриті питання доцільні в першому турові опитування, тому що дозволяють широко охопити аналізовану проблему, з'ясувати спектр думок і точок зору експертів. Недолік – занадто широкий діапазон і неконкретність відповідей, що може привести до непорівнянності відповідей експертів, що досить ускладнює обробку результатів опитування.

Закрите питання – припускає три відповіді: «так»; «ні»; «не знаю».

Імовірність неоднозначного трактування закритих питань і питань із «віялом» відповідей – значно менше ніж відкритих.

Непряме запитання використовується, коли є побоювання, що експерт ухиляється від відповіді на пряме запитання. Зокрема, якщо доцільно сховати від експерта ціль використання його відповіді.

Залежно від **методу опитування**, експертні оцінки підрозділяються на:

- Прямі експертні оцінки;
- Експертні оцінки зі зворотним зв'язком.

Прямі експертні оцінки будуються за принципом одержання і обробки незалежного узагальненої думки колективу експертів, при відсутності впливів на думку кожного експерта і думка колективу. За **ознакою апарата реалізації** вони діляться на два види:

- Експертного опитування;
- Експертного аналізу.

Експертні оцінки зі зворотним зв'язком, у тому або іншому виді, втілюють принцип зворотного зв'язку шляхом впливу на оцінку експерта і експертної групи думкою, отриманим раніше від цієї групи. Експертні оцінки зі зворотним зв'язком у своєму апараті реалізації мають три види:

- Експертне опитування;
- Генерація ідей;
- Ігрове моделювання.

3.5. Обробка і аналіз результатів опитування

Отже, судження експертів зібрані і тепер необхідно обробити і проаналізувати їх для одержання підсумків по поставленій проблемі.

Метою обробки є одержання узагальнених (групових) даних і нової інформації, що міститься в схованій формі в експертних оцінках. На основі результатів обробки формулюється експертне рішення проблеми.

Наявність, як числових даних, так і змістовних висловлень експертів приводить до необхідності застосування якісних і кількісних методів обробки результатів групового експертного оцінювання.

Залежно від цілей експертного оцінювання і обраного методу виміру при обробці і аналізі результатів опитування виникають наступні завдання:

- Аналіз індивідуального судження експерта (наприклад, несуперечність, тобто що він послідовний). Перехід до наступних етапів можливий лише при досить високій несуперечності суджень експертів.
- Побудова групової оцінки по індивідуальним ранжировкам експертів.
- Побудова групової оцінки на основі парного порівняння альтернатив кожним експертом.
- Визначення відносних ваг альтернатив.
- Визначення погодженості думок експертів.
- Визначення залежностей між ранжировками.

- Оцінка надійності результатів обробки.

3.6. Аналіз суперечливості думки експерта узагальненій думці всіх експертів

Нехай думка X_k експерта k є «крайньою» серед думок m експертів.

Аналіз суперечливості думки експерта k проведемо з використанням оцінки аномальності результатів при невідомій генеральній дисперсії.

1. Знаходимо узагальнену оцінку експертів

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j$$

2. Обчислюємо дисперсію:

$$D(x) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\hat{x}_3 - x_j)^2$$

3. Знаходимо величину

$$t = \frac{x_k - \hat{x}_3}{\sqrt{D(x)}}$$

и імовірність того, що ця величина перевершить деяку задану межу β

$$\alpha = P\{(x_k - \hat{x}_3) > \beta \sqrt{D(x)}\}$$

Якщо ймовірність велика:

$$\alpha > 0.05 \div 0.1,$$

то гіпотеза про аномальність оцінки X_k відкидається, а якщо ні, то – ухвалюється.

Отже, суперечливою будемо вважати думку експерта X_k , для якого виконується нерівність $(x_k - \hat{x}_3) > \beta \sqrt{D(x)}$ з імовірністю меншою деякої межі α' .

Виконання цієї нерівності за умови $(\alpha < \alpha')$ є математичною ознакою наявності суперечливої думки серед даної групи експертів.

Відзначимо, що виконання умови несуперечності може залежати від величини ймовірності α' .

До крайніх оцінок необхідно ставитися досить уважно, ретельно вивчивши виводи експертів на користь своїх оцінок.

Існують два підходи до аналізу експертних даних:

- Статистичний;
- Алгебраїчний.

Статистичний – ґрунтується на припущенні про те, що існує єдине дійсне вірне, але не відоме заздалегідь, судження, а судження кожного експерта – є його викривлений варіант.

Статистичні методи дозволяють визначити погодженість думок експертів, значимість отриманих оцінок і таке інше.

Алгебраїчний – тут кожне з експертних суджень – рівноправно. Результуюче судження – це компромісне, найбільш близьке одночасно до всіх наявних суджень. Для виміру близькості аксіоматично вводиться «відстань» між судженнями. Міра близькості дозволяє визначити, наскільки близькі або далекі точки зору експертів.

Оскільки експерти вказують на множині розглянутих альтернатив відносини різного типу, міри близькості повинні бути введені на основних типах відношень.

Так, якщо є m різних бінарних відносин R_1, R_2, R_m на множині альтернатив A , де R_i – індивідуальна перевага, то потрібно вказати відношення $R \subseteq A \times A$ у деякому розумінні погоджене із заданими відносинами. Це відношення R – називається груповим.

Особливістю мір близькості є аксіоматичний спосіб їх введення.

Традиційні аксіоми метрики:

Метрика $d(R_1, R_2)$, як відстань між 1-й і 2-й ранжировками визначається єдиним чином:

$$d(R_1, R_2) = \sum_{i,j=1}^m |r_{ij}^1 - r_{ij}^2|$$

При виконанні аксіом метрики:

1. $d(R_1, R_2) \geq 0$ рівність досягає при тотожності ранжировки
2. $d(R_1, R_2) = d(R_2, R_1)$
3. $d(R_1, R_2) + d(R_2, R_i) = d(R_1, R_i)$ – правило «трикутника»

Рівність досягається якщо ранжировка *знаходиться між* ранжировками R_1 і R_i .

Найпростіший спосіб одержання групової оцінки – обчислення середніх

$$\hat{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j.$$

Іноді дають три оцінки: **max**, **min**, і найбільш імовірну.

Для отримання реальної «нерівності» експертів вводять коефіцієнти компетенції

$$\hat{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij} k_j$$

Завдання побудови узагальненої оцінки альтернатив за індивідуальними оцінками експертів виникає при груповому експертному оцінюванні. Рішення цього завдання залежить від використання експертами методу виміру. Якщо вимір об'єктів проводиться методом ранжування, тобто використовувалася шкала порядків, то групова оцінка об'єктів визначається як узагальнена ранжировка.

Якщо вимір проводився в кількісних шкалах, то завдання побудови групової оцінки полягає у визначенні узагальнених кількісних оцінок за кількісними оцінками експертів.

Розділ 4. Методи суб'єктивних вимірів

Для здійснення суб'єктивних вимірів застосовуються різні методи, з яких найбільше використовують наступні:

- Ранжування;
- Парне порівняння;
- Безпосередня оцінка;
- Послідовне порівняння.

При описі кожного з них будемо припускати, що є кінцеве число альтернатив і сформульовано один або кілька ознак порівняння. Таким чином, методи виміру будуть відрізнятися тільки процедурою порівняння альтернатив. Ця процедура включає побудову відносин між об'єктами емпіричної системи, вибір функції, що відображає φ , і визначення типу шкали виміру.

Методи, які використовували для одержання ЕО, є дуже різноманітні. Вони багато в чому визначаються характером інформації, що аналізується.

Якщо використовуються якісні оцінки переваги альтернатив, або розбивка їх на класи по якісним ознакам, то використовуються:

- Ранжування;
- Метод парних порівнянь;
- Класифікація.

Якщо доцільно одержати чисельні оцінки порівняльної переваги альтернатив, то використовують той або інший метод чисельної оцінки:

- Безпосередня оцінка;
- Метод послідовного порівняння.

ЕО часто проводиться в бальних шкалах (зовнішній вигляд виробу). На відміну від кількісних оцінок, бальні оцінки характеризуються суб'єктивними вимірами. Бальна оцінка проводиться або за об'єктивним критерієм, або по еталону.

4.1. Ранжування

Ранжування являє собою процедуру впорядкування альтернатив відповідно до зменшення їх переваги.

Природа переваги.

Співвідношення $a_{ij} = 1$ означає, що $i \succ j$. Таке відношення переваги повинне бути: асиметричним і транзитивним:

- 1) Якщо $a_{ij} = +1$, то $a_{ji} = -1$;
- 2) Якщо $a_{ij} = +1$ і $a_{jk} = +1$, то $a_{ik} = +1$.

Співвідношення $a_{ij} = 0$, означає, що i і j – рівноцінні. Таке відношення еквівалентності повинне бути рефлексивним, симетричним і транзитивним:

- 3) $a_{ii} = 0$;
- 4) Якщо $a_{ij} = 0$, то $a_{ji} = 0$;
- 5) Якщо $a_{ij} = 0$ і $a_{jk} = 0$, то $a_{ik} = 0$;

Упорядкування повинне бути зв'язковим (повним)

- 6) Для будь-яких i і j : або $a_{ij} = +1$, або $a_{ij} = -1$, або $a_{ij} = 0$;

$\|a_{ij}\| = A$ – матриця переваги (Ранжування)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \geq j \\ 0, & \text{якщо } i < j \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i > j \\ -1, & \text{якщо } j > i \\ 0, & \text{якщо } i = j \end{cases}$$

або матриця парних порівнянь

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i > j \\ 1, & \text{якщо } j \sim i \\ 0, & \text{якщо } i < j \end{cases}$$

Відсутність (порушення) транзитивності не дозволяє здійснити загальне впорядкування об'єктів і оцінити погодженість результатів експертизи, методом рангової кореляції.

На підставі своїх знань, досвіду і т.п. експерт припускає альтернативи в порядку їх переваги, керуючись одним або декількома показниками порівняння.

Ранжування дозволяє вибрати з досліджуваної сукупності альтернатив найбільш істотну (переважну).

Залежно від виду відносин між об'єктами можливі різні варіанти впорядкування.

1. Нехай серед об'єктів немає однакових за порівнюваними показниками.

У цьому випадку між об'єктами існує тільки відношення строгого порядку.

$$A_1 > A_2 > \dots A_n \quad (1)$$

Отримана емпірична система $\langle A; \rangle$ з відношенням строгого порядку утворює серію.

Доведене, що для серії існує числова система, елементами, якої є числа, а **відносини** $>$ є «більше ніж». Це означає, що існує числове представлення $f(a_1)$ таке, що послідовності (1) відповідає послідовність чисел:

$$f(A_1) > f(A_2) > \dots f(A_n) \quad (2)$$

Ізоморфізм, або гомоморфізм послідовностей (1) і (2) можна здійснити, вибираючи будь-які числові послідовності, тобто припустимо перетворення φ повинне мати властивість монотонності. Таку властивість має шкала порядку.

У практиці експертного ранжування застосовують числові представлення послідовності (1) у вигляді натуральних чисел:

$$x_1 = f(A_1) = 1; x_2 = f(A_2) = 2; x_n = f(A_n) = n$$

Числа x_i , $i = \overline{1, n}$ називаються **рангами**. Найбільш кращому об'єкту приписують перший ранг і так далі. Ранги необхідно призначати як місце об'єктів, у вигляді натуральних чисел $1, 2, \dots, n$.

Якщо призначати ранги довільним образом, як числа в шкалі порядку, то сума рангів, загалом кажучи, не зберігає умови монотонності перетворення φ , отже, можна одержати різні узагальнені ранжировки при різних відображеннях об'єктів на числову вісь.

2. Серед об'єктів є однакові.

У цьому випадку, крім відношення строгого порядку між об'єктами можливе відношення еквівалентності.

Упорядкування (1) може мати вигляд:

$$A_1 > A_2 \sim A_5 > A_3 \sim A_4 \sim A_6$$

Система $\langle A; \succsim \rangle$ є квазісерія («не менш переважніше»).

Для однакових об'єктів призначають однакові ранги, рівні середньому арифметичному із суми місць, поділених між собою об'єктами з однаковими рангами. Це так звані зв'язні ранги.

Таблиця 4.1

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	3	2	3

Об'єктам **2** і **5**, що поділили між собою місця **№2** і **№3**, приписуємо зв'язковий ранг, рівний

$$\frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

А об'єктам **№3**, **№4** і **№6** – зв'язковий ранг

$$\frac{4 + 5 + 6}{3} = 5$$

У підсумку одержуємо:

Таблиця 4.2

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2.5	5	5	2.5	5

Зручність зв'язних рангів полягає в тому, що сума рангів n об'єктів дорівнює сумі натуральних чисел від 1 до n :

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Коли порівняння проводиться декількома експертами $j = \overline{1, m}$, кожний експерт приписує кожному i -му об'єкту ранг x_{ij} .

У результаті проведення експертизи одержуємо матрицю рангів (матриця ЕО, матриця переваг) розмірності $n \times m$:

Таблиця 4.3

Експерт Об'єкт	E_1	E_2	E_j	E_m	$S_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}$
a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}	...
a_i	...	...	x_{ij}	...	...
a_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}	...

Для кожного об'єкта підраховують суму рангів S_{ij} , отриману від усіх експертів, а за тим, виходячи із цієї величини, встановлюють результуючий ранг для кожного об'єкта.

Математичне представлення впорядкування представляється квадратною матрицею $\|x_{ij}\|$ експерта, де:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \geq j \\ 0, & \text{якщо } i < j \end{cases}$$

Відзначимо, що ранги об'єктів визначають тільки порядок розташування об'єктів по показниках порівняння. А ранги, як числа, не дають можливості зробити висновок про те, наскільки або в скільки разів один об'єкт переважніше в порівнянні з іншим.

Точність і надійність процедури ранжування в значній мірі залежить від кількості порівнюваних об'єктів.

При збільшенні об'єктів, кількість зв'язків між ними росте пропорційно квадрату числа об'єктів.

Метод ранжування рідко використовується в чистому виді. Часто він поєднується з іншими методами.

4.2. Метод парних порівнянь

Цей метод застосовується звичайно, щоб виявити переваги експертів в «чистому» виді.

Вважається, що якісне порівняння двох об'єктів зробити набагато легше, чим виражати свої переваги в бальній або ранговій (порядкової) шкалі.

Цей метод оцінки не нав'язує експертові апріорних умов, на відміну від інших. Наприклад, вимоги транзитивності переваг.

Парне порівняння являє собою процедуру встановлення переваги альтернатив при порівнянні всіх можливих пар.

Загальне число всіляких пар:

$$K = \frac{1}{2} n(n - 1) = \frac{n!}{m! (n - m!)}$$

При порівнянні пари альтернатив можливе відношення строгого порядку, або відношення еквівалентності.

Результати парного порівняння, як правило, представляють у вигляді бінарного відношення R.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i R a_j \Rightarrow a_i \geq a_j \\ 0, & \text{якщо } a_i < a_j; a_j > a_i \notin R \end{cases}$$

Відзначимо, що при парному порівнянні вибір обов'язково буде виражати перевагу експерта.

Порівняння об'єкта у всіх можливих парах не дає повного впорядкування об'єктів, тому виникає питання ранжування об'єктів на основі їх парного порівняння. Вагомою властивістю парних порівнянь є можливість виявлення протиріч у судженнях експертів (виникнення циклічних тріад):

$$A_1 > A_2; A_2 > A_3; A_3 > A_1.$$

Результат парного порівняння найбільше точно відображає суб'єктивну перевагу, тому що на вибір тут накладають менші обмеження, чим на інші види оцінок.

У деяких випадках спочатку проводиться попереднє ранжування, а потім, за допомогою парних порівнянь, – уточнення їх переваги.

При порівнянні методу парних порівнянь із методом ранжування перший виявляється більш точним (але трудомістким при числі об'єктів $n > 15$), тому що при ранжируванні

експерти прагнуть вибудувати об'єкти в лінійний ряд навіть тоді, коли природно вони в лінійний ряд не вибудовуються.

Обидва методи дають майже ідентичні результати.

4.3. Метод безпосередньої оцінки

Експертові пред'являється набір альтернатив:

$$a_1, a_2 \dots a_n.$$

Ціль експертизи – оцінка їх порівняльної переваги.

Експерт ставить у відповідність кожній альтернативі a_i число $f(a_i)$ – точку на безперервній числовій осі – наприклад, на відріжку $[0,1]$, яке характеризує перевагу альтернативи. Знаючи чисельну оцінку кожної альтернативи, можна одержати порівняльну оцінку переваги для кожної пари альтернатив, тобто можна визначити, на скільки умовних одиниць або в скільки раз одна альтернатива перевершує іншу.

Процедура приписування альтернативам числових значень здійснюється в шкалі інтервалів.

Якщо за початок відліку обрана нульова точка – то вимір проводиться в шкалі відносин. Вимір у шкалі інтервалів може бути здійснене з достатньою точністю при повній інформатизації експертів про властивості альтернатив.

Ці умови на практиці зустрічаються рідко, тому для виміру застосовують **бальну оцінку**. Це еквівалентно квантуванню числової осі на відріжку, кожному з яких приписується бал. Кожній альтернативі в обраній системі балів (бальні шкали – $[(0 - 5); (0 - 100)]$) приписують бал, що відповідає її оцінці.

Більш кращій альтернативі приписується більш високий бал. Це трохи зменшує точність виміру, тому що замість безперервної осі розглядають більшу оцінку.

Коли в експертизі беруть участь кілька експертів, звичайно прагнуть одержати **усереднену оцінку** (вага) для кожної альтернативи. Для цього оцінки нормуються. Нормування полягає в тому, що оцінки по всіх об'єктах підсумуються, а потім кожна з них ділиться на отриману суму. Далі нормовані оцінки кожного об'єкта підсумуються і діляться на число експертів. Отримані в такий спосіб нормовані оцінки (усереднені) можуть бути проранжировані.

Альтернативи

Таблиця 4.4

Екс.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\sum_{i=1}^n x_{ij}$
1	10	7	9	3	4	5	38
2	8	6	10	4	2	7	37

x_{ij} – оцінка, дана i -ой альтернативі, j -тим експертом..

$$x_1 = \frac{\frac{10}{38} + \frac{8}{37}}{2} = 0.24$$

$$x_2 = \frac{\frac{7}{38} + \frac{6}{37}}{2} = 0.173$$

4.4. Метод послідовних порівнянь

4.4.1. Метод Черчмена-Акоффа

Метод являє собою процедуру, що полягає в систематичній перевірці суджень про відносини оцінюваних величин на базі послідовних порівнянь.

Основні допущення, на яких заснований метод:

- 1) Кожній альтернативі $a_i (i = \overline{1, n})$ ставиться у відповідність дійсне ненегативне число $f(a_i)$, яке розглядається як оцінка «дійсної» значимості a_i .
- 2) Якщо a_i переважніше a_k (тобто якщо результат a_i більш важливий чим a_k), то $f(a_i) > f(a_k)$; якщо вони рівноцінні, то $f(a_i) = f(a_k)$.
- 3) Властивість адитивності:

Якщо $f(a_i)$ і $f(a_k)$ – оцінки відповідних альтернатив, то оцінка $[f(a_i) + f(a_k)]$ відповідає загальному здійсненню $(a_i + a_k)$ (спільний результат).

Якщо $a_i > a_k$, а $a_k > a_l$, то загальний результат (здійснення) a_i і a_k переважніше a_l ; тобто $(a_i + a_k) > a_l$. Якщо загальний результат $(a_i + a_k)$ еквівалентний a_l , то $f(a_i) = 0$.

Експертові пред'являються два тести, кожний з яких подає інформацію про те, на скільки важливими з його погляду є результати.

У ході першого тесту експерт призначає (вказує) попередні оцінки альтернатив (оцінки «дійсної значимості») по шкалі (наприклад, кількісна шкала або метод безпосередньої оцінки або бали).

Далі, перед експертом ставляться певні питання (тести); стосовні до різних комбінацій результатів, і висловлювані їм переваги подають додаткову інформацію про альтернативу.

При послідовному порівнянні експерт виконує наступні операції:

- Ранжирує альтернативи $a_1, a_2 \dots a_n$ по перевазі.
- Робить виміри переваг у кількісній шкалі (безпосередня оцінка або бальна (якісна)).
- Вирішує, чи буде перша альтернатива перевершувати по перевазі всі інші разом узяті $a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Якщо так, то експерт коректує оцінку альтернативи a_1 так, щоб:

$$f(a_1) > \sum_{i=2}^n f(a_i)$$

Після того, як альтернатива a_1 виявилася переважніше суми альтернатив, вона виключається.

- Вирішує, чи буде a_2 переважніше, чим усі наступні разом узяті, и коректує оцінку $f(a_2)$ так само, як це було зроблено для $f(a_1)$.
- Продовжує операцію порівняння по перевазі, аж до $(n - 1)$ альтернатив, тобто робить порівняння a_{n-2} з $(a_{n-1} + a_n)$.

4.4.2. Алгоритм методу Черчмена -Акоффа

1. Ранжирувати альтернативи відповідно до їхньої важливості (переваги). Нехай

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n.$$

2. Приписати найбільший бал альтернативі a_1 і інші бали всім іншим альтернативам (або зробити виміри в інтервалі $[0,1]$).
3. Порівняти a_1 з $a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

а. Якщо

$$a_1 > \sum_{i=2}^n a_i,$$

змінити якщо буде потреба значення $f(a_1)$ так, щоб

$$f(a_1) > \sum_{i=2}^n f(a_i),$$

залишивши по можливості без зміни оцінки інших альтернатив, перейти до кроку (4).

b. Якщо експерт вважає, що

$$a_1 = \sum_{i=2}^n a_i,$$

то змінити, якщо буде потреба значення $f(a_1)$ так, щоб виконувалося

$$f(a_1) = \sum_{i=2}^n f(a_i)$$

і перейти до кроку (4).

с. Якщо експерт вважає, що

$$a_1 < \sum_{i=2}^n a_i,$$

то змінити якщо буде потреба значення $f(a_1)$ так, щоб виконувалася нерівність

$$f(a_1) < \sum_{i=2}^n f(a_i).$$

Далі порівняти

$$a_1 \geq \sum_{i=2}^{n-1} a_i,$$

тобто вибрати

$$a_1 \text{ або } \sum_{i=2}^{n-1} a_i.$$

І повторити описану процедуру доти, поки a_1 буде переважніше або рівноцінна всім іншим альтернативам.

4. Порівняти a_2 з $a_3 + a_4 + \dots + a_n$ і виконати весь крок (3).

5. Продовжити крок (4) доти, поки не буде виконане порівняння:

$$a_{n-2} \geq (a_{n-1} + a_n).$$

6. Зрівняти отримані оцінки $f(a_i)$ с оцінками «дійсної» значимості крок (2).

Якщо протиріч немає, то проранжувати оцінки.

Якщо виявитися невідповідність, то змінити в мінімально можливому ступені числові оцінки так, щоб вони задовольняли логічним нерівностям першого кроку.

Приклад:

1) $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

2) $7 > 4 > 2 > 1.5 > 1$

3) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

4) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$

5) $x_1 > x_2 + x_3$

6) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$

7) $x_2 > x_3 + x_4$

8) $x_3 > x_4 + x_5$

Зрівняємо отримані нерівності із числовими оцінками, починаючи з останньої нерівності:

$$x_3 > x_4 + x_5 \Leftrightarrow 2 > 1.5 + 1$$

Бачимо, що числа суперечать цій нерівності. Побільшаємо оцінку результату (8) x_3 до 3.

Тепер виявляється протиріччя (7) з цією нерівністю. Змінимо оцінку результату x_2 на 5 і так далі.

Остаточнo:

$$f(a_1) = 8.5; f(a_2) = 5; f(a_3) = 3; f(a_4) = 1.5; f(a_5) = 1$$

Відзначимо, що якісна інформація більш стійка, ніж кількісна.

Розділ 5. Методи рангової кореляції

При розв'язку багатьох практичних завдань часто виявляється, що фактори, що визначають кінцеві результати, не піддаються безпосередньому виміру. Розташування цих факторів (альтернатив) у порядку зростання або спадання якої-небудь властивості називається ранжуванням.

Нерідко розглянуті явища мають різну природу і у зв'язку із цим непорівнянні. У цих випадках установлення їх відносної значимості за допомогою експертів і присвоєння чисел натурального ряду, що визначають порядок (місце) кожного явища в досліджуваній сукупності, полегшує вибір найбільш кращої з альтернатив.

Слід мати на увазі, що ранги, привласнені об'єктам, не є числовою мірою якості. Ранги являють собою тільки символи, що вказують переваги одного об'єкта перед іншим. Тому до математичних операцій з ними треба підходити з великою обережністю.

Для оцінки погодженості двох експертних ранжировок можна використовувати коефіцієнти рангової кореляції

5.1. Коефіцієнт Кендалла

При ранжируванні об'єктів експерти звичайно розходяться в думках з розв'язуваної проблеми. У зв'язку із цим виникає необхідність кількісної оцінки ступені погодженості експертів.

Нехай має місце дві послідовності рангів

1)

Таблиця 5.1

Об'єкт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r1	7	4	3	10	6	2	9	8	1	5
r2	5	7	3	10	1	9	6	2	8	4

Чи існує залежність між ними?

Як видно чіткої відповідності між ними не спостерігаємо. Наявність або відсутність зв'язку між ними стане більш очевидною, якщо ми розглянемо ранги першої ранжировки в порядку зростання.

2)

Таблиця 5.2

Об'єкт	IX	VI	III	II	X	V	I	VIII	VII	IV
--------	----	----	-----	----	---	---	---	------	-----	----

r1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r2	8	9	3	7	4	1	5	2	6	10

Ступінь відповідності (чи ні) між цими оцінками вимірюємо за допомогою коефіцієнта рангової кореляції Кендалла.

Властивості коефіцієнта τ :

- при повній відповідності в оцінках, тобто якщо кожний об'єкт займає те саме місце в обох ранжировках, $\tau = +1$;
- при повній негативній залежності, тобто якщо оцінки однієї ранжировки розташовані у зворотному порядку в порівнянні з інший, $\tau = -1$;
- в інших випадках τ лежить між граничними значеннями: $-1 \leq \tau \leq +1$.

Розглянемо Таблицю 5.1.

Візьмемо в першій ранжировці яку-небудь пару об'єктів, наприклад 1 і 2; і їхні значення 7 і 4 утворюють зворотний порядок величин. Парам, що утворюють зворотний порядок, приписуємо значення -1 , для пар, що утворюють прямий порядок $+1$. Значення $+1$ або -1 приписуємо залежно від того, погоджений або неузгоджений між собою порядок пар в обох ранжировках (послідовностях).

Суму значень рівних $+1$ позначимо через P , а суму значень рівних -1 позначимо Q . Склавши ці суми, одержимо загальну суму приписаних значень S .

$S = P + Q$ – дійсна сума приписаних значень.

Якби у всіх парах спостерігався однаковий порядок, то максимально можлива сума приписаних значень, була рівна

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Тоді:

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2S}{n(n-1)}$$

Або

$$\tau = \frac{P-Q}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{2Q}{n(n-1)} = \frac{2P}{n(n-1)} - 1$$

Для знаходження S , а, отже, P і Q , існує більш простий метод.

Розглянемо Таблицю 5.2. У тих випадках, коли одна послідовність рангів являє собою натуральний ряд, оцінки, приписувані кожній парі значень цього ряду, позитивні – +1.

Отже, значення +1, що входять у доданок Р, буде приписуватися тільки тем парам другого ряду, які утворюють прямий порядок.

Друга послідовність рангів має вигляд:

8; 9; 3; 7; 4; 1; 5; 2; 6; 10

Розглянемо пари, які з першим елементом 8 утворюють інші елементи послідовності. Праворуч від 8 розташовано два числа, які перевершують 8 по величині, це 9 і 10. Отже, перші суми, що складаються, Р становлять +2. Розглянемо пари, які утворюють із елементом 9 інші елементи послідовності (при цьому пари 8, 9 не розглядається, тому що була врахована раніше). Пари збільшують Р на +1. Продовжуючи розглядати пари, приходимо до того, що

$$P = 2 + 1 + 5 + 1 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 = 21$$

Тоді

$$\tau = \frac{2P}{\frac{n(n-1)}{2}} - 1 = \frac{42}{\frac{10(10-1)}{2}} - 1 = \frac{42}{45} - 1 = -0.066$$

Ця величина близька до 0, звідки випливає, що кореляція між двома послідовностями рангів дуже мала.

5.2. Коефіцієнт Спірмена

Величина τ визначається досить таки просто, при цьому, кожній парі значень розглянутих змінних приписується оцінка, рівна одиниці, не залежно від того, на скільки віддалені один від одного ранжируємі елементи.

При розрахунках коефіцієнта ρ , різницям між елементами приписуються ваги, які збільшуються в міру віддалення елементів один від одного.

Повернемося до нашого прикладу:

Таблиця 5.3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_1	7	4	3	10	6	2	9	8	1	5
r_2	5	7	3	10	1	9	6	2	8	4
d_1	2	-3	0	0	5	-7	3	6	-7	1
d_2	4	9	0	0	25	49	9	36	49	1

Коефіцієнт Спірмена визначається виразом:

$$\rho = \frac{K_{12}}{\sqrt{D_1 \cdot D_2}} \quad (1)$$

Взаємний кореляційний момент першої і другої ранжировок:

$$K_{12} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{1i} - \bar{r}_1)(r_{2i} - \bar{r}_2)$$

Дисперсія ранжировок:

$$D_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{1i} - \bar{r}_1)^2$$

$$D_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{2i} - \bar{r}_2)^2$$

Дві ранжировки можуть відрізнятися друг від друга тільки перестановкою рангів, але сума натуральних чисел і їх квадратів не залежить від порядку доданків, отже, дисперсії для будь-яких двох ранжировок будуть однакові і дорівнюють:

$$D = D_1 = D_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{ji} - \bar{r}_i)^2$$

Підставивши в (1) значення для K_{12} і D , і зробивши перетворення, одержимо наступний вираз:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} S(d^2) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (r_{1i} - r_{2i})^2$$

Тут r_{1i} і r_{2i} – ранги в першій і другій ранжировках.

Для нашого прикладу:

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 182}{990} = -0.103$$

Коефіцієнт ρ дає більш точний результат ніж τ , тому що він є оптимальною оцінкою за критерієм $\min$ СКВ коефіцієнта кореляції. Тобто потужність критерію ρ трохи вище, чим критерію τ .

Це говорить про те, що імовірність відкинути гіпотезу про незалежність, коли ознаки є дійсно залежними, при використанні коефіцієнта ρ вище, чим при використанні τ .

Розділ 6. Бінарні відношення, функції вибору.

Бінарні відношення - теоретичне підґрунтя теорії прийняття рішень, оскільки для дослідження переваг децидента використовують основні типи бінарних відношень, а властивості бінарних відношень інтерпретуються якісно в термінах системи переваг децидента.

6.1. Основні поняття бінарних відношень.

Апарат попарних відношень у теорії прийняття рішень є теоретичним підґрунтям для оцінювання переваг альтернатив шляхом попарних порівнянь [1].

Відношення - твердження, що відображає взаємний зв'язок між двома чи більшою кількістю об'єктів.

Означення 1. Бінарним відношенням на множині A називають підмножину $A \times A$, тобто $R \subseteq A \times A$.

Якщо пара знаходиться у відношенні R , то цей факт позначається як xRy або $(x, y) \in R$. Множина A називається носієм відношення R .

Означення 2. Областю визначення бінарного відношення R називають множину $\delta_R = \{a \in A \mid \exists(b \in A): (a, b) \in R\}$, тобто до області визначення R належать ті елементи множини-носія A , для яких знайдеться хоча б один елемент цієї множини, з якими елементи множини R перебувають у відношенні $a R b$.

Означення 3. Областю значень бінарного відношення R називають множину $\rho_R = \{b \in A \mid \exists(a \in A): (a, b) \in R\}$, тобто до області значень належать ті елементи множини-носія A , для яких знайдеться хоча б один елемент цієї множини, з якими елементи множини R перебувають у відношенні $a R b$.

Означення 4. Верхнім перетином $R^+(x)$ бінарного відношення R множиною-носієм відносно елемента x називають множину

$$R^+(x) = \{y \in A \mid (y, x) \in R\}.$$

Означення 5. Нижнім перетином $R^-(x)$ бінарного відношення R множиною-носієм відносно елемента називають множину

$$R^-(x) = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}.$$

Елементарні типи бінарних відношень (порожнє, повне, діагональне і антидіагональне).

Означення 6. Порожнім називають відношення R (позначають $\emptyset$), яке не виконується для жодної пари $(x, y) \in A \times A$, тобто

$$R = \emptyset: (\forall (x, y) \in A \times A) (\neg (x, y) \in R).$$

Означення 7. Повним називають відношення U , що виконується для всіх пар (x, y) , тобто

$$R = U: (\forall (x, y) \in A \times A) ((x, y) \in R).$$

Означення 8. Діагональним називають відношення E , що виконується для однакових елементів, тобто

$$R = E: ((\forall (x, y) \in A \times A) \cap (x = y)) ((x, y) \in R),$$

$$b_{ij}(E) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

Означення 9. Антидіагональним називають відношення $\overline{E}$, що виконується для всіх пар $(x, y) \in A \times A$, але $x \neq y$, тобто

$$b_{ij}(\overline{E}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j \\ 1, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

6.2. Операції над бінарними відношеннями

Над бінарними відношеннями можна виконувати такі основні операції: перетин, об'єднання, знаходження різниці, симетричної різниці, доповнення, оберненого відношення, композиції, звуження, включення.

Означення 10. Перетином відношень P і Q (позначають $P \cap Q$) називають відношення, якому належать пари (x, y) , спільні для відношень P і Q .

Означення 11. Об'єднанням відношень P і Q (позначають $P \cup Q$) називають відношення, яке утворюють пари (x, y) , що входять до відношення P або до Q .

Означення 12. Різницею відношень P і Q (позначають $P \setminus Q$) називають відношення, яке складається з пар (x, y) , що входять до відношення P , але не належать Q .

Означення 13. Симетричною різницею відношень P і Q (позначають $P \Delta Q$) називають відношення, яке складається з пар відношення $P \cup Q$, що не належать $P \cap Q$.

Означення 14. Доповненням відношення P (позначають $\overline{P}$) називають відношення, яке складається з пар $(x, y) \notin P$, тобто

$$\overline{P} = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \notin P\} \text{ або } \overline{P} = \{A \times A\} \setminus P.$$

Означення 15. Оберненим до відношення $P \subseteq \{A \times A\}$ (позначають P^{-1}) називають відношення, до складу якого пара (x, y) входить тоді і тільки тоді, коли $(y, x) \in P$, тобто

$$P^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in P\}$$

Означення 16. Композицією відношень P і Q (позначають $P \circ Q$) називають відношення, яке утворюють усі пари $(x, y) \in A \times A$, для яких існує таке $z \in A$, що правильні твердження: $(x, z) \in P$ та $(z, y) \in Q$

Означення 17. Звуженням відношення P на підмножину $D \subseteq A$ називають відношення (позначають P_D), до складу якого входять такі пари $(x, y) \in P$, що $x \in D$ і $y \in D$

Означення 18. Відношення P міститься у відношенні Q , якщо всі пари $(x, y) \in P$ належать також відношенню Q тобто

$$P \subseteq Q: (\forall (x, y) \in P) \Rightarrow (x, y) \in Q$$

Зв'язок між відношеннями, означеними на різних множинах, описують у термінах **ізоморфізму та гомоморфізму**.

Означення 19. Відношення P з носієм A ($P \subseteq A \times A$) та відношення Q з носієм C ($Q \subseteq C \times C$) називають **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення

$\psi: A \rightarrow C$, що xPy виконується тоді і тільки тоді, коли $\psi(x) Q \psi(y)$,

де $x \in A, y \in A, \psi(x) \in C, \psi(y) \in C$

Означення 20. Гомоморфним називають однозначне відображення φ множини A в множину C і воно відображає $\varphi: A \rightarrow C$ таким чином, що із xPy випливає $\varphi(x) Q \varphi(y)$

Означення 21. Двоїстим до відношення P називають відношення

$$P^D = \overline{P^{-1}} = (\overline{P})^{-1}$$

6.3. Властивості та основні типи бінарних відношень

Означення 22. Рефлексивним називають таке відношення P , для якого виконується твердження $E \subseteq P$, де E - діагональне відношення.

Означення 23. Антирефлексивним називають таке відношення P , для якого $P \cap E = \emptyset$

Означення 24. Симетричним називають таке відношення P , для якого $P \subseteq P^{-1}$.

Означення 25. Асиметричним називають таке відношення P , для якого $P \cap P^{-1} = \emptyset$, тобто якщо $(x, y) \in P$, тоді $(y, x) \notin P$.

Означення 26. Антисиметричним називають таке відношення P ,

для якого $P \cap P^{-1} = E$, де E - діагональне відношення.

Приклад. Розглянемо відношення P, Q, R :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Відношення P симетричне та рефлексивне, Q — антирефлексивне і асиметричне, R — антисиметричне, що перевіряється безпосередньо за означенням цих властивостей:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$E \cap Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$Q \cap Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$R \cap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 27. Транзитивним називають таке відношення P , для якого $P \circ P \subseteq P$ тобто, якщо xPz і zPy , тоді xPy .

Означення 28. Ациклічним називають таке відношення P , для якого $P^{k-1} \cap P^{-1} = \emptyset$ для будь-якого k .

Означення 29. Зв'язним називають таке відношення P , для якого $P \cup P^{-1} \setminus E = U \setminus E$, де P^{-1} – обернене до P відношення, U – повне, E – діагональне.

Деякі властивості бінарних відношень

1. Відношення P симетричне тоді і тільки тоді, коли $P = P^{-1}$.
2. Якщо відношення P асиметричне, тоді воно також і анти рефлексивне.
3. Якщо відношення P та Q симетричні, тоді є також симетричні відношення $P \cup Q, P \cap Q$
4. Композиція симетричних відношень P та Q симетрична тоді і тільки тоді, коли $P \circ Q = Q \circ P$
5. Відношення P^{-1} , обернене до транзитивного відношення P , є також транзитивним.
6. Перетин будь-якої кількості транзитивних відношень з одним і тим самим носієм є транзитивним відношенням.
7. Якщо два відношення транзитивні і одне з них транзитивне відносно іншого, тоді об'єднання всіх цих відношень є також транзитивне.
8. Для транзитивного відношення P його симетрична складова P_S і асиметрична складова P_A є транзитивні, причому P_A транзитивна відносно P_S .

Означення 30. Толерантністю (байдужістю) називають таке відношення P (позначають I , яке є водночас рефлексивним і симетричним.

Приклад відношення толерантності - відношення нерозрізняльності, що виникає у випадку вимірювання характеристик об'єктів: два об'єкти нерозрізненні за деякою ознакою, якщо різниця її значень не перевищує похибки вимірювання. Відношення толерантності не транзитивне (нагромадження похибки при послідовних порівняннях об'єктів не дає підстав для висновку про нерозрізненість першого і останнього об'єктів ланцюжку порівнянь).

Означення 31. Еквівалентність - відношення P , яке є водночас рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Отже, еквівалентність - це толерантність, що має властивість транзитивності.

Означення 32. Квазіпорядок - відношення P , яке є водночас рефлексивним та транзитивним.

Таке відношення виникає у випадку порівняння декількох альтернатив за векторним критерієм якості.

Означення 33. Порядок - відношення P , яке є водночас рефлексивним, антисиметричним та транзитивним.

Означення 34. Строгий порядок - відношення P , яке є водночас асиметричним та транзитивним.

Означення 35. Лінійний порядок - відношення P , яке є водночас рефлексивним, асиметричним, транзитивним та зв'язним.

Означення 36. Досяжність для довільного відношення P (позначають $\tilde{P}$) називають найменше з відношень квазіпорядку, що містить у собі відношення P .

Матриця досяжності має 1 на головній діагоналі, а відповідний граф - петлі при кожній вершині, оскільки будь-яка вершина графа досяжна сама з себе, тобто відношення досяжності рефлексивне.

Означення 37. Взаємною досяжністю для довільного відношення P (позначають $\vec{P}$) називають симетричну складову відповідного відношення досяжності

$$\tilde{P}: \vec{P} = P \cap \tilde{P}^{-1}$$

6.4. Функції вибору, породжені БВ

Бінарні відносини є теоретичною основою теорії прийняття рішень, оскільки властивості БВ якісно інтерпретуються в термінах системи переваг децидента.

Деякі властивості БВ.

Нехай на множині X задане відношення переваги $R \subseteq X \times X$. Тоді має місце тільки одне з наступних умов:

- 1) $(xRy; yRx) \Leftrightarrow (xRy) \cap (yRx) \Rightarrow x \text{ і } y - \text{байдужні} \Rightarrow xIy$
- 2) $(xRy; y\bar{R}x) \Leftrightarrow (xRy) \cap (y\bar{R}x) \Rightarrow x \text{ домінує } y \Rightarrow xPy$;
- 3) $(x\bar{R}y; yRx) \Leftrightarrow (x\bar{R}y) \cap (yRx) \Rightarrow y \text{ домінує } x \Rightarrow yPx$;
- 4) $(x\bar{R}y; y\bar{R}x) \Leftrightarrow (x\bar{R}y) \cap (y\bar{R}x) \Rightarrow x \text{ і } y - \text{непорівнянні} \Rightarrow xNy$.

Відношення R негативно транзитивне (неготранзитивне), якщо його доповнення $\bar{R}$ – транзитивне, у той час, як R необов'язково повинне бути транзитивним. У такий Спосіб:

$$x\bar{R}y \cap y\bar{R}z = x\bar{R}z$$

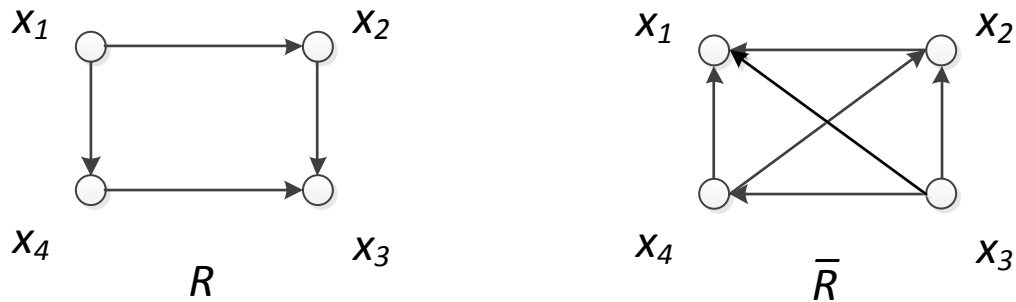


Рис. 6.1. Доповнення відношення

Відношення R^d , двоїсте до R , є відношення додаткове до зворотного: $R^d = \bar{R}^{-1}$

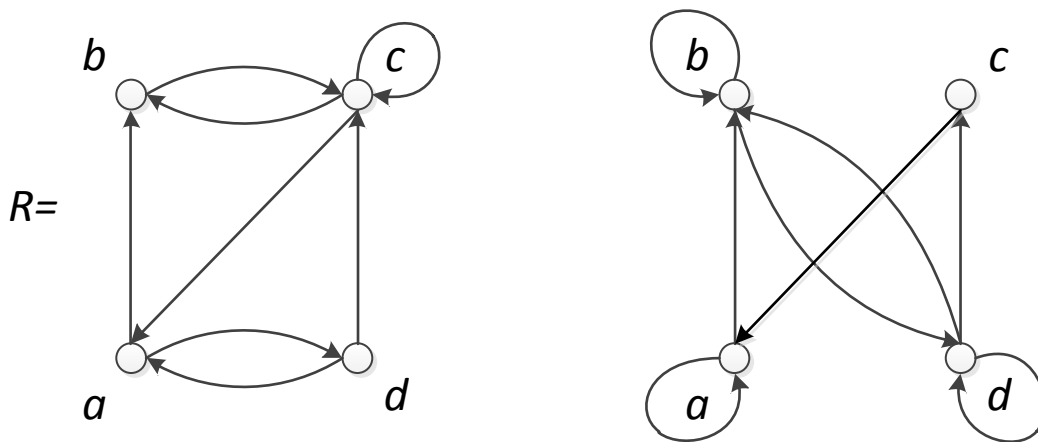


Рис. 6.2. Двоїсте відношення

Відношення R – неготранзитивне тоді і тільки тоді, коли R^d – транзитивне.

Відношення R – цілкове (повно), якщо воно рефлексивне + антисиметричне + транзитивне + зв'язне:

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

Відношення R_1 називається звуженням відносини R , певного на X на підмножині X_1 , якщо $X_1 \subseteq X$ і $R_1 = R \cap X_1$, тобто елементи відношення R_1 є елементи $(x, y) \in R$, для яких $x, y \in X_1$.

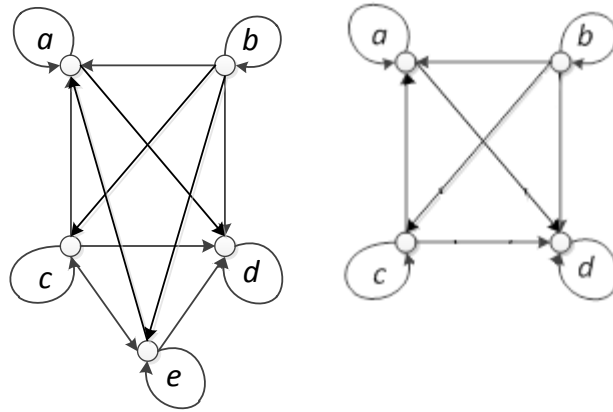


Рис. 6.3. Звуження відношення

Граф $G(X_1)$ відношення R_1 є підграф графа $G(X)$, породжений множиною вершин $X_1 \subseteq X$.

Верхній зріз відношення R у точці x – це множина елементів $y \in X$ таких, що $(y, x) \in R$, тобто $R^+(x) = \{y \in X / yRx\}$ – множина елементів y які перебувають у відношенні R з x .

$$R^+(x_2) = \{x_1, x_3\}$$

$$R^+(x_3) = \emptyset$$

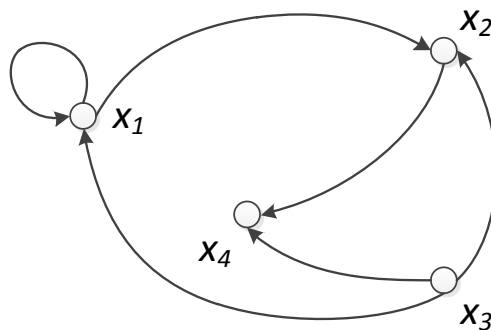


Рис. 6.4. Зрізи у відношенні

Нижній зріз відношення R у точці x :

$R^-(x) = \{y \in X / xRy\}$ – є множина елементів y , з якими елемент x перебуває у відношенні R . $R^-(x_1) = x_2$ $R^-(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$

Відношення R – ациклічне, якщо

$$xRz_1, z_1Rz_2, \dots, z_nRy \Rightarrow x \neq y$$

Тобто відсутня дуга (x, y) .

Аксиома вибору: якщо X – об'єднання непустих множин X_i , які не перетинаються, то існує, принаймні, одна підмножина $Y \subseteq X$, перетинання якого з кожною підмножиною X_i – одноелементно.

Вивчаючи відношення переваги між альтернативами можна виділити в ньому два аспекти: один розглядає перевагу (домінування) одного об'єкта над іншим (P -відношення

домінування, строгий порядок), а іншої – байдужність альтернатив (I-відношення байдужності, толерантність).

Таким чином, відношення нестрогої переваги $\succsim$ є відношення:

$$R = P \cup I; \quad R = (xPy) \cup (xIy)$$

У загальному випадку, для домінування, як транзитивність, так і ациклічність можуть не мати місця.

6.5. Вибір «кращих» альтернатив за допомогою бінарних відносин.

Основне завдання децидента у процесі прийняття рішень – це виділення однієї альтернативи або підмножини «кращих» альтернатив.

Якщо необхідно виділити одну альтернативу, то кращій альтернативі відповідає поняття максимального елемента відношення переваги $\succsim$; при виділенні множини «кращих» альтернатив, але непорівнянних між собою, використовують поняття мажоранти (міноранти).

Нехай на множині X задане відношення R .

- Елемент $x \in X$ називається **максимальним**, якщо

$$\forall y \in X: xRy; \quad (X^+(R) = \{x \in X / \forall y \in X: xRy\})$$

- Елемент $x \in X$ називається **мінімальним**, якщо

$$\forall y \in X: yRx; \quad (X^-(R) = \{x \in X / \forall y \in X: yRx\})$$

Тут R – рефлексивно.

Від максимального і мінімального елементів слід відрізнити поняття мажоранти і міноранти.

- Елемент $x \in X$ називається **мажорантою**, якщо

$$\forall y \in X: y\bar{R}x; \quad (X_+(R) = \{x \in X / \forall y \in X: y\bar{R}x\})$$

Тобто $y\bar{R}x$ для всіх елементів множини X .

- Елемент $x \in X$ називається **мінорантою**, якщо

$$\forall y \in X: x\bar{R}y; \quad (X_-(R) = \{x \in X / \forall y \in X: x\bar{R}y\})$$

Тут $\bar{R}$ – доповнення до відношення R .

Тут відношення R – антирефлексивне $R \setminus E$.

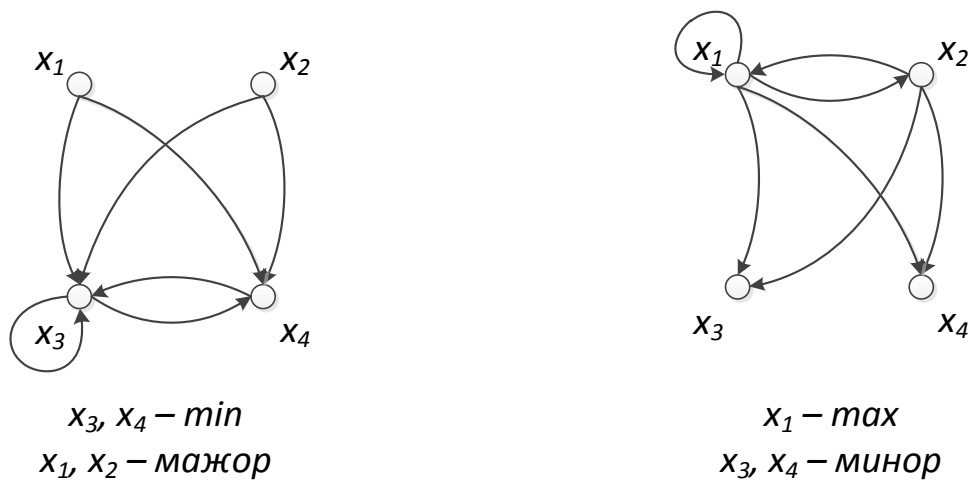


Рис. 6.5. Мажоранта та міноранта

За допомогою механізму вибору з множини X пред'явлених альтернатив вибирають одну або декількох. Механізм вибору, це пари $\langle$ структура і правило $\rangle$.

Структура – це бинарне відношення або орграф.

Правило вибору – як використовуючи структуру, виділити з X підмножину обраних альтернатив.

Звичайно розглядають механізм вибору «кращих» альтернатив по відносинах переваги: строгому P , або нестрогому R .

Відношення $P \Rightarrow xPy$: x краще y . Воно антирефлексивно і транзитивно.

Відношення R має два трактування:

- 1) $xRy \Rightarrow x$ не гірше y . Це повне відношення;
- 2) $xRy \Rightarrow x$ настільки ж гарний як y . Це рефлексивне відношення, але деякі альтернативи можуть бути непорівнянні.

На множині G задане відношення переваги R .

Нехай для вибору пред'явлена довільна підмножина $X \subseteq G$. Відношення R звужується на множині X і функцію вибору можна визначити двома способами.

З одного боку, це всі елементи $x \in X$ з якими не перебувають у відношенні R жоден елемент $y \in X$, тобто це мажоранта множини X зі звуженим відношенням R на X

$$(\forall y \in X: y \bar{R} x)$$

З іншого боку, це ті елементи $x \in X$, для яких виконується xRy для всіх $y \in X$, тобто максимуми множини X за звуженим відношенням R на X .

Таким чином, існує два принципи вибору (дві функції вибору) «кращої» альтернативи за результатами парних порівнянь:

1. $C_R(X) = \{x \in X / \forall y \in X: y \bar{R} x\}$ (мажоранти)

2. $C^R(X) = \{x \in X / \forall y \in X: yRx\}$ (максимуми)

Якщо R_1 – звуження відношення R на $X \subseteq G$, то $C_{R_1}(X) = X_+(R_1)$, а $C^{R_1}(X) = X^+(R_1)$.
множина $C_{R_1}(X)$ складається з мажорант $X_+(R_1)$, а множина $C^{R_1}(X)$ – з максимумів $X^+(R_1)$.

- множина мажорант $X_+(R_1 \setminus E)$, тобто $(R_1 \setminus E) = P$;
- множина максимумів $X^+(R_1 \cup E)$, тобто R_1 – рефлексивне.

Таким чином, якщо необхідно побудувати (знайти) «кращу» альтернативу, то необхідно визначити максимуми $X^+(R)$; якщо ж необхідно виділити альтернативи, для яких не існує «кращих», то необхідно побудувати мажоранти $X_+(R)$.

Вираз 1) називається правилом заборони (блокування)

$$1) C_R(X) = \{x \in X / \forall y \in X: y\bar{R}x\} = \{x \in X / \nexists y \in X: yPx\}$$

$$\text{Або } x \in C(X) \Rightarrow (x \in X \cap \nexists y \in X) \Rightarrow yPx$$

Це правило говорить про те, що у вибір з X включаються ті і тільки ті варіанти, які не забороняються жодним варіантом з X . Тобто альтернатива x не може бути обрана, якщо існує така альтернатива y , що yPx ; і повинна вибиратися, якщо такої альтернативи немає.

Вираз 2) називається правилом дозволу

$$2) C^R(X) = \{x \in X / \forall y \in X: yRx\}$$

$$\text{Або } x \in C(X) \Rightarrow (x \in X \cap \forall y \in X) \Rightarrow yRx$$

У вибір з X включаються ті, і тільки ті варіанти, які дозволяються всіма варіантами з X . Тобто якщо $x \in C(X)$ вибирається, а y належить пред'явленню і може бути також обране.

Одночасний вибір x і y , тобто xRy , yRx – інтерпретується, як рівноправний. Отже, для БВ, який визначається функцією $C_R(X)$, завжди виконується або xRy , або yRx . Отже, R – повно.

Дане правило відноситься до рефлексивних відносин і пропонує вибір тих альтернатив, які «не гірше, чим» усі інші альтернативи.

На графі дозволу (домінування) правило (2) означає вибір вершин $x \in X$, з яких виходять дуги до всіх вершин цього підграфа. Це максимум.

На графові заборони (блокування) правило (1) означає вибір з підграфа відповідного до пред'явлення тих вершин $x \in X$, до яких не підходять дуги від інших вершин цього підграфа. Ці вершини – мажоранти.

Блокування і домінування не завжди можна інтерпретувати в термінах «кращий», «кращий».

На практиці частіше використовують правило блокування.

6.6. Метод Неймана-Моргенштерна

Він використовується для знаходження підмножини «гарних» об'єктів.

Нехай G – множина альтернатив, на якому визначено (задане) відношення R .

Підмножина $X \subseteq G$ називається внутрішньо стійким, якщо для будь-яких двох різних альтернатив з X ні одна з них не домінує (не надає перевагу) над іншою:

$$1) \forall x, y \in X; x \neq y: \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow (x \bar{R} y \cap y \bar{R} x) \Rightarrow x N y$$

Підмножина $S \subseteq G$ називається зовні стійким, якщо для кожного елемента поза S знайдеться такий елемент в S , який його домінує:

$$2) \forall y \in G \setminus S; \exists x \in S: \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow x P y$$

Принцип Неймана-Моргенштерна: за підмножину «гарних» об'єктів, береться таке, яке одночасно внутрішньо і зовні стійке. Така множина елементів називається **ядром**.

Відзначимо, що у визначенні ядра (рішення) анітрошки не виключається можливість існування альтернатив, що не входять у ядро і домінуючих над однією або декількома альтернативами, що входять у ядро.

Властивість зовнішньої і внутрішньої стійкості можна ввести для будь-якого бінарного відношення, а отже і графа.

Нехай заданий граф $G(X, R)$. Розглянемо таку підмножину його вершин $Y \subseteq X$, у якому дві будь-які зовнішні несуміжні. Ця підмножина внутрішньо стійка і для нього виконується:

$$R_Y \cap Y = \emptyset$$

Якщо $S \subseteq X$ для кожної вершини з $X \setminus S$ виконується $R_X \cap S \neq \emptyset$ то підмножина таких вершин є зовні стійким.

Існує кілька методів визначення ядра. **Метод МАГУ** заснований на використанні булевих рівнянь.

Пошук числа вершин зовнішньої стійкості зводиться до складання системи булевих рівнянь по матриці суміжності графа, з наступним її розв'язком.

Результатом розв'язку системи є всі максимальні внутрішньо стійкі множини вершин графа.

У загальному випадку пошук числа внутрішньо стійких вершин графа зводиться до перебору всіх максимальних внутрішньо стійких множин вершин графа і вибору серед них множини з максимальною потужністю. Вони вибираються в такий спосіб: для кожної кон'юнкції визначаються вершини графа, які в неї входять. Серед них вибирається множина із максимальною потужністю.

Аналогічно знаходиться зовні стійка множина.

Серед елементів диз'юнкції береться та кон'юнкція, яка має мінімальну потужність.

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	1	0	1

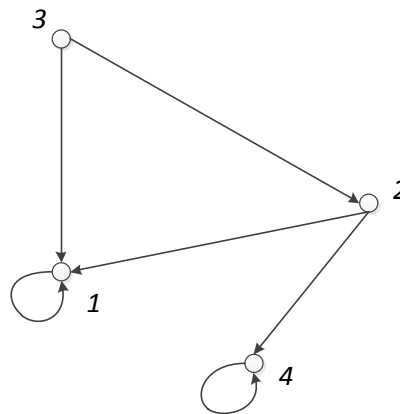


Рис. 6.6. Граф відношення

1. Проглядаються рядки матриці.

Для всіх кліток з одиницями, які стоять на перетинанні рядка i і стовпця j , при цьому $i \neq j$, тобто без діагоналі записується диз'юнкція виду $i \vee j$. Наприклад $(2 \vee 1)$ і потім береться кон'юнкція всіх диз'юнкцій. Це кон'юнктивне представлення матриці. Для нашого прикладу:

$$(2 \vee 1)(3 \vee 1)(3 \vee 2)(4 \vee 2) = [(2 \cdot 3 \vee 1 \cdot 3 \vee 2 \cdot 1 \vee 1 \cdot 1)][(3 \cdot 4 \vee 2 \cdot 4 \vee 3 \cdot 2 \vee 2 \cdot 2)] = \\ = (2 \vee 1 \vee 1)(3 \cdot 4 \vee 2) = 2 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \cdot 3 \cdot 4 \vee 2 \cdot 3 \vee 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \vee 1 \cdot 3 \cdot 4 \vee 2 \cdot 3$$

Максимальна потужність отриманих множин рівна двом і число внутрішньої стійкості рівно двом: $\{(3,4), (1,4)\}$.

2. Для всіх кліток з одиницями, які стоять на перетинанні розглянутого стовпця j з усіма рядками, записується вираження

$$j \vee i \vee k \vee \dots \vee m$$

Тут $\vee$ – диз'юнкція, j – номер стовпця, i, m – рядка.

Дане вираження записується для кожного стовпця, а потім береться кон'юнкція всіх отриманих диз'юнкцій.

$$(1 \vee 1 \vee 2 \vee 3)(2 \vee 3 \vee 4)(3)(4 \vee 4) = (2 \vee 3 \vee 1 \cdot 4)(3 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \vee 3 \cdot 4 \vee 1 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \cdot 4$$

Мінімальна потужність рівна двом, це і є число зовнішньої стійкості.

Знайдемо ядро.

Для цього серед множини зовнішньої і внутрішньої стійкості знайдемо вершини графа, які одночасно зовні і внутрішньо стійкі.

Для нашого прикладу ядро становлять (3,4).

Згідно з визначенням ядра:

$$3,4 \in \{1,2,3,4\} \text{ і } 3 \neq 4 \Leftrightarrow \langle 3,4 \rangle \notin R$$

$$1 \notin (3,4) \text{ але } 3 \in \{1,2,3,4\} \text{ і } 3R1$$

Розглянемо **метод визначення ядра графа**, який пов'язаний з поняттям ступеня вершинності графа, яке введемо так.

Позначимо вершини нульового ступеня, для яких немає вхідних у них дуг, через S_0 .

Побудуємо множину S_k за допомогою відносин:

$$S_0 = \{x \in X / R^+(x)\} = \emptyset$$

$$S_k = S_{k-1} \cup \{x \in X / R^+(x) \subset S_{k-1}\}$$

Ці множини утворюють послідовність S_k вкладених друг у другу підмножин.

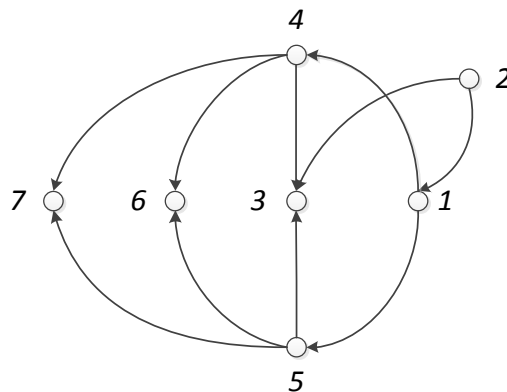
$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k \subset \dots$$

Тобто для всякого графа визначена послідовність множин, що розширюється. Тому що X – кінцеве, то з ациклічності R випливає, що знайдеться таке l , при якому $S_l = X$.

Побудуємо послідовність підмножин $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$, таких, що:

$$\Omega_0 = S_0; \quad \Omega_k = \Omega_{k-1} \cup \{x \in X / x \in S_k \setminus S_{k-1} : R^+(x) \cap \Omega_{k-1} = \emptyset\}$$

Підмножина Ω_k – є ядро.



ядро $\{2,4,5\}$

Рис. 6.7. Ядро в графі відношення

6.7. P- і R-оптимальності. K-оптимальність.

Одна із центральних тем теорії прийняття рішень – вибір альтернатив на основі бінарних відносин. Для вибору варіантів, оптимальних по тому або іншому БВ, розглянемо різні визначення оптимальності з бінарних відносинах: строгому P і нестрогому R.

Якщо не враховувати специфіки окремих класів відносин, то можна ввести тільки одне визначення P - оптимальності і два відношення R - оптимальності.

Нехай на множині альтернатив X визначене строге відношення переваги P

1. Елемент $x^* \in X$ називається **максимальним** по P,

якщо $x^* \in X / \forall y \in X: y \bar{P} x^* \nexists y \in X: y P x^*$

Нехай на X визначене нестроге відношення переваги R

2. Елемент $x^* \in X$ називається **найбільшим** по R, якщо $x^* \in X / \forall y \in X: x^* R y$;
3. Елемент $x^* \in X$ називається **максимальним** по R, якщо $z R x^* \Rightarrow$ впливає $x^* R y$.

Вираз 1 і 3 відповідають принципу блокування, а 2 – принципу домінування.

Таким чином, обчислення максимального елемента по R називається **оптимальним по блокуванню**, а найбільшого – **оптимальним по домінуванню**.

Максимальний елемент по P і найбільший елемент по R – двоїсті поняття. Тобто множина максимальних елементів по строгому відношенню P збігається з множиною найбільших елементів по R, тоді і тільки тоді, коли P і R – двоїсті відношення. Тобто $P = R^d$.

Розглянемо принцип оптимальності по БВ для нециклічного відношення нестрогого порядку.

Множина оптимальних по відносинах P і R елементів можуть бути виражені через верхні і нижні зрізи введених вище відносин у точки $x \in X$.

1. Множина елементів, що строго надають перевагу над x

$$H^+p(x) = \{y \in X / y R x \cap x \bar{R} y\} \Rightarrow y \in X / y P x$$

2. Множина елементів строго підпорядкованих x

$$H^-p(x) = \{y \in X / x R y \cap y \bar{R} x\} \Rightarrow y \in X / x P y$$

Доповнимо ці множини: множиною елементів еквівалентних x по R; не строго

підпорядкованих x по R; непорівнянних x по R; що нестрого надають перевагу x по R.

3. Множина елементів еквівалентних x по R

$$H_I^+(x) = H_I^-(x) = \{y \in X / x R y \cap y R x\}$$

4. Множина елементів непорівнянних з x по R

$$H_N^+(x) = H_N^-(x) = \{y \in X / x \bar{R} y \cap y \bar{R} x\}$$

5. Множина елементів, що надають перевагу x по R

$$H_R^+(x) = H_P^+(x) \cup H_I^+(x)$$

6. Множина елементів не строго підпорядкованих x по R

$$H_R^-(x) = H_P^-(x) \cup H_I^-(x)$$

Відзначимо: $x \notin H_P^+(x)$ і $x \notin H_P^-(x)$, тому що P – асиметрично;

$x \in H_I^+(x)$ і $x \in H_I^-(x)$, тому що I – рефлексивно рефлексивно;

$x \notin H_N^+(x)$ і $x \notin H_N^-(x)$, тому що N – антирефлексивно.

Розглянемо множини, побудовані шляхом об'єднання деяких з перерахованих вище множин:

$$1. S_R^1(x) = H_P^-(x) \cup H_I^-(x) \cup H_N^-(x)$$

$$2. S_R^2(x) = H_P^-(x) \cup H_N^-(x)$$

$$3. S_R^3(x) = H_P^-(x) \cup H_I^-(x)$$

$$4. S_R^4(x) = H_P^-(x)$$

Множини $S_R^k(x)$; $k = \overline{1,4}$ породжують чотири множини:

$$M_R^k(x) = \{y \in X / S_R^k(x) \subset S_R^k(y)\}$$

Тут $\subset$ – знак строгого включення, і тому $x \notin M_R^k(x)$. Зафіксуємо деяку множину $\Omega \subseteq X$. Назвемо точку $x^* \in \Omega$

k –максимальним елементом по відношенню R на Ω , якщо $S_R^k(x^*)$ є максимальним по включенню елементом сімейства:

$$\{S_R^k(x), x \in \Omega\}$$

Іншими словами, якщо $\nexists z \in \Omega: S_R^k(x^*) \subset S_R^k(z)$ множини $S_R^k(x^*)$; $1 \leq k \leq 4$ являють собою множини «підпорядковані» елементу x відношенням R в інтуїтивно прийнятному змісті. При цьому «максимальним» $S_R^k(x)$ відповідають «мінімальні» $X \setminus S_R^k(x)$.

Порівнюючи дане визначення оптимальності із традиційними визначеннями (1,2,3) можемо сформулювати наступні твердження:

- елемент x^* – максимальний по R , є одне максимальний елемент по R , для якого:

$$S_R^1(x^*) = H_P^-(x^*) \cup H_I^-(x^*) \cup H_N^-(x^*) = X$$

- елемент $x^* \in X$ – найбільший по R , є тричі максимальний елемент по R , для якого

$$S_R^3(x) = H_P^-(x^*) \cup H_I^-(x^*) = X$$

- елемент x – строго найбільший по R , є чотиричі максимальний елемент по R , для якого

$$S_R^4(x) = H_P^-(x^*) = X \setminus \{x^*\}$$

k – оптимальність, яка зводиться до оптимальності по включенню множини $S_R^k(x^*)$, суттєво більш широке поняття, чому традиційна P і R – оптимальність.

k – максимальний по R елемент x^* виявляється оптимальним у традиційному змісті ($\leq$, тобто без «включення») якщо $S_R^k(x^*)$ збігаються з X або з $X \setminus \{x^*\}$.

Вибір по відношенню, що має цикли, може виявитися порожнім.

Завдання по довільних відносинах R можуть не містити оптимум по R . У цьому випадку під оптимізацією по R розуміють обчислення максимального елемента для якого-небудь значення $k = \overline{1,4}$

- 1) для строгих порядків поняття найбільшого і максимального елемента по відношенню R на X – збігаються;
- 2) x^* – найбільший по R (нестрогий порядок) – тоді і тільки тоді, коли воно повно, а транзитивне замикання його асиметричної частини R^a є строгим приватним порядком (антирефлексивність + асиметричність + транзитивність).
- 3) x^* – строго найбільший по R – тоді і тільки тоді, коли R – лінійний порядок.
- 4) x^* – максимальний по R , коли транзитивне замикання асиметричної частини $R(R^a)$ є строго частковим порядком.
- 5) x^* – строго максимальний по R тоді і тільки тоді, коли транзитивне замикання R – нестрогий частковий порядок.

Строгий порядок – слабозв'язаний строгий частковий порядок.

Строгий частковий порядок – антирефлексивний + транзитивний

По характеру відношення R можна зробити висновок про можливість вибору рішення, тобто про вид функції вибору:

- а) Якщо R – лінійний (повний) строгий порядок, то здійснюємо вибір єдиного рішення (антирефлексивність)
- б) Якщо R – лінійний (повний) нестрогий порядок (рефлексивність), то можливий вибір множини найкращих рішень.
- в) Якщо R – нелінійний нестрогий порядок (множина ранжировок за різними показниками з еквівалентними об'єднаннями), то можливо визначити множину максимальних елементів.

Розділ 7. Багатокритерійність. Оптимальність за Парето

7.1. Загальні проблеми пошуку оптимальних рішень

Серед методів пошуку оптимальних рішень найбільше розвинутими є методи розв'язання детермінованих однокритерійних задач, які мають вигляд: $Q(a, x) \rightarrow \max, x \in X$ де X — множина допустимих варіантів рішень, a - вектор відомих детермінованих значень параметрів задачі, x - вектор значень керованих змінних, значення яких може обирати децидент. Загальний розв'язок задачі має вигляд $x^* = \arg \max Q(a, x)$, тобто це таке значення вектора змінних, для якого досягається максимальне значення критерію якості. Це рішення називається оптимальним. Задачі такого типу розглядають у дослідженні операцій, але проблеми, пов'язані зі способами формування глобального критерію якості там оминаються, вважаючи, що такий критерій задано. Проте, як ми вже знаємо, навіть коли немає невизначеностей, пов'язаних із неповнотою знань децидента про навколишнє середовище (характеристики «природи») та можливі дії суперників або партнерів, невизначеність мети залишається.

Попри корисність ідеї оптимізації і однокритерійності слід достатньо обережно користатися нею внаслідок таких причин.

1. Оптимальне рішення часто виявляється нестійким - на перший погляд незначні зміни в умовах задачі можуть зумовити вибір суттєво різних альтернатив. Останнім часом у теорії оптимізації поняття оптимальності модифікують так, щоб отримані рішення були стійкими.
2. Оптимізація завжди спирається на припущення, що наявний критерій з достатньою точністю відображає мету. Навіть якщо це і так, то зазвичай система, що розглядається, є частиною надсистеми, і локально оптимальне рішення може не бути оптимальним з точки зору надсистеми. Тому необхідною є координація критеріїв системи з критеріями її підсистем.
3. Обчислення максимального значення критерію якості не можна ототожнювати з метою, тому що мета та критерії перебувають у такому ж відношенні, як оригінал і модель. Тому, коли складно кількісно описати мету (а в складних системах це абсолютна більшість випадків), кількісні критерії є лише сурогатом мети.
4. Одним з найважливіших аспектів оптимізації є адекватне описання обмежень, тому що навіть невеликі зміни в значеннях параметрів обмежень можуть суттєво вплинути на оптимальне рішення. Якщо не взято до уваги всі суттєві обмеження, то впроваджуючи

рішення, якому формально відповідає максимальне значення критерію, ми можемо одержати вкрай небажані наслідки, тому що дійсна область допустимих рішень може виявитися порожньою.

Щоб уникнути таких проблем, у ході оптимізації слід виконувати аналіз на чутливість, застосовувати стійкі (робастні) процедури оцінювання значень параметрів оптимізаційних задач, виділяти множину оптимальних за Парето рішень із подальшим її звуженням на основі отриманої від децидента додаткової інформації, використовувати кілька видів згорток критеріїв і т. ін.

Ідея оптимальності надзвичайно плідна стосовно систем, які можна адекватно математично формалізувати, однак її не можна безпосередньо переносити на складні системи. Оптимізаційні задачі, які вдається побудувати в процесі дослідження складних систем, майже завжди часткові (у разі описання добре структурованих підсистем) або ж є суттєвим наближенням (у разі описання системи загалом).

Висока ефективність оптимізації в технічних системах не має породжувати ілюзії, що такий самий ефект зумовить оптимізація складних систем - у них формалізація та однокритерійна оптимізація веде до наближених результатів, які найчастіше ненадійні через суттєві спрощення.

7.2. Оптимальність за Парето та Слейтером

На практиці задачі без невизначеностей - скоріше виняток, аніж правило. Будемо розглядати методи прийняття рішень у детермінованих ситуаціях із невизначеністю мети, що формально відображається за допомогою множини критеріїв. Отже, виникає детермінована багатокритерійна задача прийняття рішень, загальний вигляд якої є наступний [1]:

$$Q_1(a, x) \Rightarrow \max, Q_2(a, x) \Rightarrow \max, \dots, Q_n(a, x) \Rightarrow \max, x \in X.$$

Надалі в разі потреби записуватимемо умову цієї задачі в скороченому вигляді (X, Q) . Знайти рішення, яке було би найкращим водночас за всіма критеріями, неможливо, тому що в загальному випадку поліпшення значення одного з критеріїв призводить до погіршення значення іншого. Для ілюстрації цього положення наведемо декілька прикладів умов багатокритерійних задач.

Приклад 7.1. Необхідно придбати автомобіль, узявши до уваги кілька аспектів, що відображаються критеріями якості. Важливими критеріями в цьому разі є витрати пального, максимальна швидкість, комфортність, прохідність, зовнішній вигляд, вартість, гарантійний термін, наявність сервісного обслуговування, ціна. Звичайно, придбати авто, яке б витратало

найменше пального та водночас було б при цьому найдешевшим, найкомфортнішим і найшвидшим, неможливо.

Приклад 7.2. Мандрівники мають обрати місце для зупинки в горах. Важливими критеріями є наявність джерела чи річки, палива, можливість купання, відсутність комарів, хижих звірів, близькість до населених пунктів. Зрозуміло, що знайти таке місце, яке відповідало б всім цим вимогам водночас, дуже важко.

Проілюструємо геометрично задачу оптимізації за двома критеріями. При цьому вважатимемо, що критерії якості максимізуються (це припущення не обмежує загальності викладу, оскільки вираз $Q(x) \rightarrow \min$ еквівалентний $-Q(x) \rightarrow \max$). Розглянемо загальну задачу оптимізації за двома критеріями з двома змінними:

$$Q_1(x_1, x_2) \Rightarrow \max, Q_2(x_1, x_2) \Rightarrow \max, x = (x_1, x_2), x \in X.$$

Зобразимо область допустимих рішень у просторі змінних (x_1, x_2) . Значення критеріїв Q_1 , та Q_2 відображатимемо в просторі критеріїв (Q_1, Q_2) . Кожній конкретній точці множини допустимих рішень (x_1^k, x_2^k) відповідає одне і лише одне значення кожного з критеріїв $Q_1(x_1^k, x_2^k)$, $Q_2(x_1^k, x_2^k)$, тобто точка в просторі критеріїв; обернене ж твердження неправильне. Це пояснюється тим, що можуть існувати різні альтернативи, які еквівалентні чи рівноцінні щодо значень критеріїв якості, тобто відповідне відображення - гомоморфне. Виконавши таку операцію для всіх точок допустимої області в просторі змінних, отримаємо її образ у просторі критеріїв. На рис.7.1 наведено шість можливих альтернатив, які відображено з двовимірного простору змінних у двовимірний простір критеріїв. Точка i в просторі змінних має координати (x_1^i, x_2^i) , а її образ у просторі критеріїв - $(Q_1(x_1^i, x_2^i), Q_2(x_1^i, x_2^i))$.

Альтернативи 4 та 5 відображаються в одну і ту саму точку в просторі критеріїв, тобто вони еквівалентні з погляду їх якості. Крім того, вони гірші, ніж альтернатива 2, у якій значення кожного з критеріїв більші, ніж для альтернатив 4 та 5. Альтернатива 6 гірша за альтернативи 1 і 2 з тих самих причин. Рішення 1, 2, та 3 не порівняльні, тобто без додаткової інформації неможливо визначити, який із них кращий, тому що значення одного критерію в них більші, а іншого - менші. Отже, виходячи з природних міркувань, ми відкинули неперспективні альтернативи.

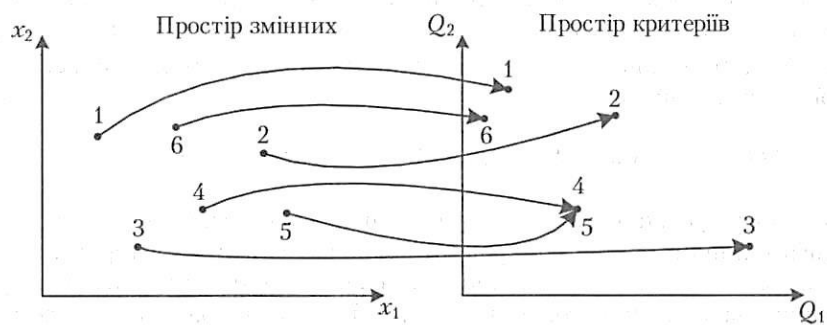


Рис. 7.1. Відображення дискретної множини альтернатив у простір критеріїв

Розглянемо тепер неперервну множину альтернатив (рис. 7.2).

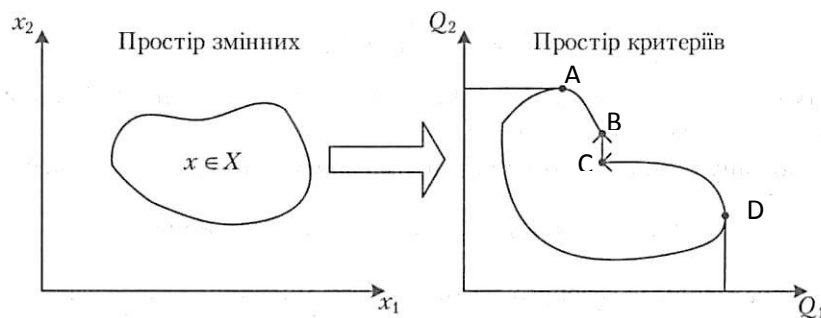


Рис. 7.2. Відображення безперервної множини альтернатив із простору змінних у простір критеріїв

Кожну точку допустимої області $x \in X$ відображаємо в точку області критеріїв; одержуючи таким чином образ множини допустимих альтернатив у просторі критеріїв. Проаналізувавши альтернативи за якістю так само, як у попередньому випадку, виявимо, що для неперервної області доцільно розглядати альтернативи, розташовані на фрагменті кривої A - B, включаючи точки A та B, та на фрагменті C - D виключаючи точку C, тому що альтернативи, які відповідають відрізку прямої C - B (з точкою C та без точки B), гірші, ніж альтернатива, що відповідає точці B. Така множина включає лише недоміновані альтернативи - тобто такі, для яких немає жодної альтернативи з допустимих, яка була б ліпшою. Принцип відбору для подальшого розгляду недомінованих альтернатив називають принципом Еджворта - Парето за прізвищами вчених, які вперше застосували цей підхід до аналізу економічних проблем.

Згідно з **принципом Еджворта - Парето** відношення домінування на множині допустимих альтернатив формально визначають так. Розглянемо відношення « $\geq$ » в просторі критеріїв. Будемо вважати, що $Q(x) = (Q_1(x), \dots, Q_n(x))$ і що $Q(y) = (Q_1(y), \dots, Q_n(y))$ - векторні оцінки відповідно альтернатив x та y . Також вважатимемо, що $Q(x) \geq Q(y)$, якщо виконано умову

$$Q(x) \geq Q(y) \Rightarrow \forall (i = \overline{1, n}): (Q_i(x) \geq Q_i(y)) \wedge \exists (i = \overline{1, n}): (Q_i(x) > Q_i(y))$$

тобто значення всіх критеріїв для альтернативи x не гірші, ніж для альтернативи y , і, крім того, знайдеться хоча б один критерій, за яким альтернатива x виявиться кращою за альтернативу y . У цьому випадку альтернатива x домінує альтернативу y **за Парето**, $x \succ_P y$.

Множину оптимальних за Парето (чи ефективних) рішень $eff(X)$ визначимо як

$$P(x) = eff(X) = \{y \in X | \nexists (x \in X): (x \succ_P y)\}$$

тобто альтернатива y належить до множини Парето-оптимальних, якщо серед усіх допустимих альтернатив не знайдеться жодної, яка б домінувала її в сенсі відношення « $\geq$ » в просторі критеріїв.

Розглянемо відношення « $>$ » в просторі критеріїв. Вважатимемо, що $Q(x) > Q(y)$, якщо виконано умову

$$Q(x) > Q(y) \Rightarrow \forall (i = \overline{1, n}): (Q_i(x) > Q_i(y))$$

тобто за всіма критеріями альтернатива x краща за альтернативу y . У цьому випадку альтернатива x домінує альтернативу y **за Слейтером**, $x \succ_S y$.

Означимо множину слабо ефективних (оптимальних за Слейтером) рішень як

$$S(x) = seff(X) = \{y \in X | \nexists (x \in X): (x \succ_S y)\}$$

Так, для відображення, наведеного на рис. 7.2, до множини слабоефективних рішень належать точки, що розташовані на лінії А - В - С - D. Для відображення, проілюстрованого на рис. 7.1, множина Парето-оптимальних рішень збігається з множиною рішень, оптимальних за Слейтером.

Приклад 7.3. Задано образ множини з семи альтернатив у просторі двох критеріїв: $\{Q^{(1)} = (8, 2), Q^{(2)} = (6, 2), Q^{(3)} = (7, 1), Q^{(4)} = (5, 5), Q^{(5)} = (1, 8), Q^{(6)} = (1, 7), Q^{(7)} = (4, 3)\}$.

Потрібно визначити множину альтернатив, оптимальних за Парето та Слейтером. Подамо образ альтернатив у просторі критеріїв графічно (рис. 7.3).

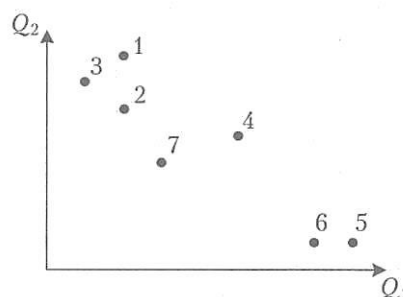


Рис. 7.3. Представлення альтернатив в просторі критеріїв

Альтернатива 3 строго домінується альтернативою 1, а альтернатива 7 - альтернативою 4. Отже, альтернативи 1, 2, 4-6 - оптимальні за Слейтером (слабоефективні). В сенсі відношення « $\geq$ » альтернатива 1 домінує альтернативу 2, а альтернатива 5 - альтернативу 6.

Тому множину ефективних альтернатив (оптимальних за Парето) утворюють альтернативи 1, 4, 5.

Таким чином, між множинами допустимих альтернатив X , слабоефективних $S(X)$ і ефективних альтернатив $P(X)$ існує очевидне співвідношення

$$P(X) \subseteq S(X) \subseteq X$$

Звичайно, головне завдання в ході дослідження та розв'язання багатокритерійних задач - побудувати множину оптимальних за Парето рішень. Безпосередньо зробити це вдається лише для найпростіших задач, а тому зазвичай прагнуть знайти рішення, що належить до множини оптимальних за Парето та найбільше відповідає системі переваг децидента.

Запровадження поняття слабоефективних рішень пояснюється тим, що не завжди вдається отримати рішення, що належать до множини Парето-оптимальних, і хоча рішення, оптимальні за Слейтером, не такі цікаві, доводиться досліджувати випадки, коли внаслідок оптимізації за кількома критеріями одержані рішення, які можуть належати до множини слабоефективних.

7.3. Необхідні та достатні умови оптимальності за Парето

Множину оцінок векторного критерію в задачі багатокритерійної оптимізації часто використовують для геометричної інтерпретації поняття оптимальності за Парето. Нехай множина значень векторного критерію, який складається з двох критеріїв, має вигляд, зображений на рис. 7.4, а. Зауважимо, що множина значень векторного критерію, яка домінує за Парето значення $Q(x)$, збігається з невід'ємним ортантом $C(x)$, вершину якого перенесено до точки $Q(x)$.

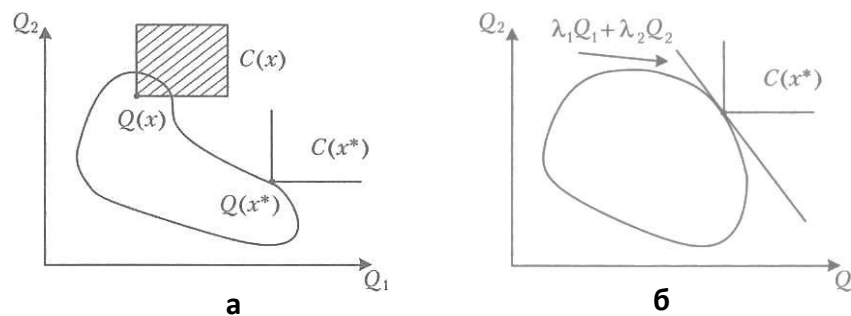


Рис. 7.4. Геометрична інтерпретація оптимальності за Парето

Справді, для довільної точки $a \in C(x)$ цього ортанту виконуються нерівності $a_i \geq Q_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, причому якщо $a \neq C(x)$, то хоча б одна з нерівностей строга, тобто довільна точка множини $C(x) \cap Q$, крім точки $Q(x)$, домінує $Q(x)$ за Парето. Тому на рис. 7.4, а значення

векторного критерію $Q(x)$ (тобто альтернатива x) не належить до множини оптимальних за Парето, а альтернатива x^* оптимальна за Парето, оскільки виконано умову $C(x) \cap Q = \{Q(x^*)\}$, тобто перетин утворює одна точка - $Q(x)$. Аналіз геометричних властивостей множини оцінок векторного критерію надзвичайно корисний для виведення необхідних і достатніх умов Парето-оптимальності. Найпростіший тип умов оптимальності за Парето пов'язаний із ситуацією, коли через будь яку оцінку векторного критерію в n -вимірному просторі можна провести опорну гіперплощину F .

Нагадаємо, що опорною гіперплощиною до опуклої множини називається така гіперплощина, яка має щонайменше одну точку цієї множини, і всі точки цієї множини знаходяться в одному з півпросторів цієї гіперплощини. Строго опуклою множиною називають множину, до якої належать усі точки відрізка, що сполучає дві довільні точки цієї множини. Отже, якщо множина значень векторного критерію строго опукла, то наступна теорема, яку довів С. Карлін, дає умови оптимальності за Парето (рис. 7.3, б).

ТВЕРДЖЕННЯ 4.1. Нехай множина значень векторного критерію Q є строго опуклою, обмеженою та замкненою. Для того, щоб альтернатива $x^* \in X$ була оптимальною за Парето, необхідно та достатньо, щоб існували невід'ємні коефіцієнти,

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

що

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i(x)$$

для будь-якої альтернативи $x \in X$.

7.4. Метод прямого перебору побудови множини Парето

Нехай є n допустимих варіантів рішень. Вибираємо довільне рішення a , з яким послідовно починають порівнювати всі інші рішення.

Якщо децидент вважає, що $a \geq b$, і, принаймні, один із децидентів вважає, що $a > b$, то рішення b не може бути ефективним. Тому b виключається.

Якщо ж частина децидентів вважає, що $a \geq b$, а частина, що $a < b$, то рішення b запам'ятовується у разі можливого кандидата на включення в множину Парето.

Послідовно порівнюючи рішення і виключаючи з подальшого розгляду ті рішення, для яких є домінуючі рішення, визначаємо множину недомінуючих рішень – множину Парето.

Нехай є чотири варіанти: y_1, y_2, y_3, y_4 ; що складають множину припустимих варіантів рішень.

Децидент складається із двох членів з функціями переваги f_1 і f_2 відповідно.

Обоє децидентів проранжували рішення в такий спосіб:

$$f_1: y_2 > y_3 > y_1 > y_4$$

$$f_2: y_3 > y_1 > y_2 \sim y_4$$

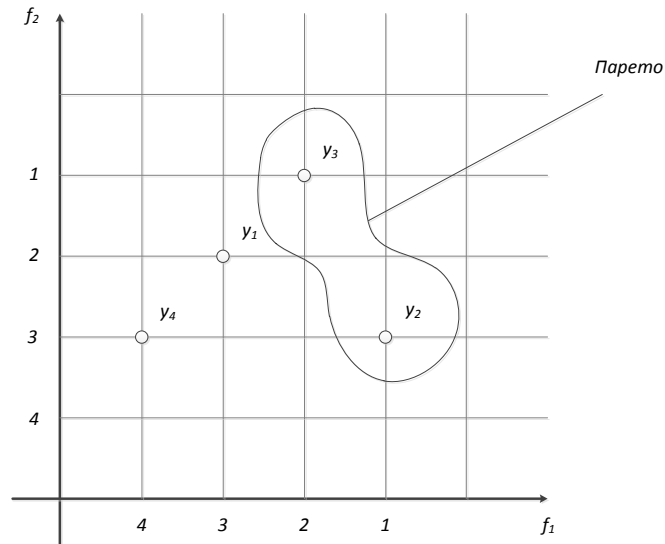


Рис. 7.5. Рішення, оптимальні за Парето

Порівнюємо пари по перевазі, починаючи з y_1 :

- 1) Перший децидент вважає, що $y_2 > y_1$; другий, що $y_1 > y_2$.
Тобто y_1 і y_2 – непорівнянні, і залишаються кандидатами на включення в множину Парето.
- 2) обидва з децидентів вважають, що рішення y_1 і y_3 перебувають у відношенні $y_3 > y_1$ і тому рішення y_1 не може бути ефективним.
- 3) Далі перший вважає, що $y_2 > y_4$; другий, що $y_2 \sim y_4$; рішення y_4 – неефективно.

Таким чином, обидва вважають, що рішення $(y_2; y_3)$ не гірше, чим будь-які інші:

$$(y_2; y_3) \succcurlyeq (y_1; y_4)$$

7.5. Принципи прийняття рішень у багатокритеріальних задачах

Розглянемо деякі найпоширеніші принципи прийняття рішень для багатокритерійних задач в умовах визначеності (детермінованості).

Згідно з **принципом Джофріона** рішення задачі визначається співвідношенням

$$W_p(X, Q) = \{x \in X | Q(x) = Q^*, \forall (i = \overline{1, n}): Q_i^*(x) = \max_{x \in X} Q_i(x)\}$$

де компоненти вектора $Q^* = (Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*)$ - рішення n однокритерійних задач оптимізації за кожною складовою векторного критерію.

Відповідно до принципу Джофріона оптимальним вважають рішення, для якого максимально досягається мета в сенсі оптимізації кожного окремо взятого критерію. Однак для більшості задач це призводить до порушення умови раціональності, тобто найчастіше не існує допустимих розв'язків, для яких максимум досягається водночас за всіма критеріями.

Так, на рис. 4.9, а не існує допустимого розв'язку, який був би оптимальним у сенсі принципу Джофріона, а на рис. 4.9, б - існує.

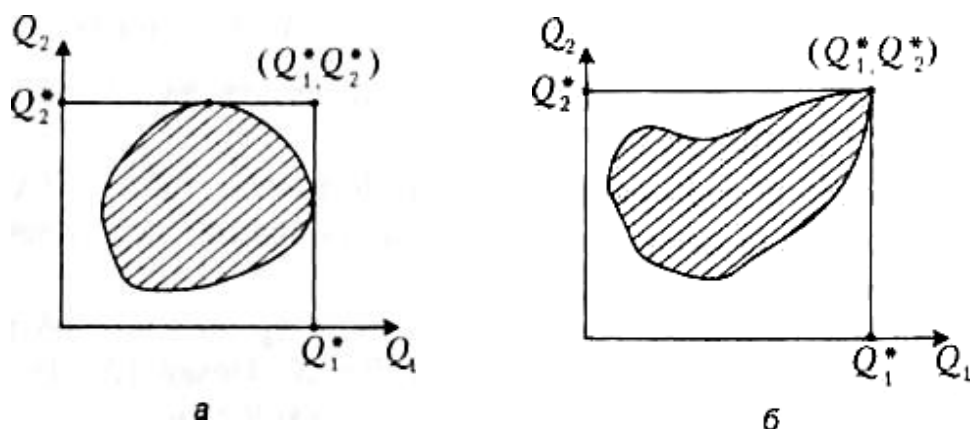


Рис. 7.6. Оптимальні розв'язки за принципом Джофріона

Принцип повного розв'язку, запроваджений **Дінкельбахом**, визначає рішення задачі як

$$W_v(X, Q) = P(x)$$

тобто розв'язком задачі вважається множина Парето-оптимальних рішень. Однак, оскільки постановку багатокритерійної задачі прийняття рішень орієнтовано на повне чи часткове розв'язання конфлікту, повне рішення теж вважають нераціональним. Отже, принципи Джофріона та повного рішення - це певні граничні випадки, зумовлені лише виглядом задачі прийняття рішення. Тому інші можливі принципи впорядковані в цих межах, тобто для довільного принципу прийняття рішень справедливі співвідношення

$$W_p(X, Q) \subset W(X, Q) \subset W_v(X, Q)$$

а в разі існування рішення, оптимального за Джофріоном,

$$W_p(X, Q) \neq \emptyset \Rightarrow W_p(X, Q) = W(X, Q) = W_v(X, Q)$$

Принцип корисності визначає оптимальне рішення, виходячи з припущення про існування відношення повного порядку на множині альтернатив, що залежить від складових критеріїв векторного критерію оптимальності (він раціональний, коли це відношення монотонне та неперервне на R^*).

Цей принцип веде до співвідношення

$$W_k(X, Q) = \left\{ x \in X \mid u(Q(x)) = \max_{y \in X} u(Q(y)) \right\},$$

тобто оптимальним є те рішення, для якого значення функції корисності максимальне.

Принцип ідеального рішення ґрунтується на припущенні про існування «ідеального» (можливо, недопустимого) рішення та метрики, за допомогою якої можна виміряти «віддаль» від довільного допустимого рішення до ідеального. Вважають, що координати ідеального рішення та метрики може визначити децидент. Множина оптимальних рішень згідно з цим принципом є наступною

$$W_d(X, Q) = \left\{ x \in X \mid \rho(Q(x), Q^*) = \min_{y \in X} \rho(Q(y), Q^*) \right\},$$

де $\rho(Q(x), Q^*)$ - віддаль в просторі критеріїв між ідеалом Q^* та довільною альтернативою x , виміряна за допомогою метрики ρ . Оптимальними вважають рішення, найближчі до ідеального.

Розділ 8. Прийняття рішень в умовах невизначеності

У більшості випадків рішення доводиться приймати за умов, коли існують невизначеності різних типів, що зумовлює потреби в розробленні відповідних моделей і алгоритмів. Основні групи невизначеностей - невідомість, недостовірність і неоднозначність. Прийняття рішень у випадку невизначеності нерозривно пов'язане з ризиком, тому за цих умов потрібно ідентифікувати, оцінювати і контролювати ризики різних типів.

8.1. Поняття та джерела невизначеності

Головні джерела невизначеності - це економічне, нормативно - законодавче, техніко-технологічне та внутрішнє середовища.

З погляду часу вирізняють перспективну невизначеність (виникають непередбачені чинники) та ретроспективну (брак інформації про поведінку об'єкта в минулому). У разі ретроспективної невизначеності можливі три варіанти: інформацію можна відновити, можна замінити перспективною, не можна ні відновити, ні замінити.

Задачу прийняття рішень в умовах невизначеності аналізують у такій послідовності [1].

1. Складають перелік доступних можливостей збирання інформації, проведення експериментів і виконання дій.
2. Складають перелік подій, які, скоріше за все, можуть трапитися.
3. Визначають послідовність у часі подій, які надають доступну інформацію, і послідовні дії, які можна виконати.
4. Вирішують, наскільки влаштовують наслідки різних дій.
5. Оцінюють шанси кожної конкретної невизначеної події.

Методологія аналізу рішень змушує децидента розглядати завдання як органічне ціле, кількісно оцінювати взаємодію різних аспектів проблеми. Систематичне вивчення цінності отримуваної інформації в контексті прийняття рішень надає основу для збирання, опрацювання і організації даних із нових джерел інформації. Такий метод дає змогу розмежовувати суб'єктивні переваги вже на початку процесу прийняття рішення, оцінювати ставлення децидента до ризику невизначеності різних факторів, стимулює його активно знаходити нові реальні альтернативи поведінки.

8.2. Невизначеності в задачах прийняття рішень

У формулюванні задачі прийняття рішень реальна ситуація відображається за допомогою певної мови (в основному, мови децидента). Найважливіші види невизначеності, що виникають у задачах прийняття рішень, зображають у вигляді дерева класифікації.

Невизначеності в задачах прийняття рішень:

I. Невідомість

II. Недостовірність

1. Неповнота
2. Недостатність
3. Недовизначеність
4. Неадекватність

III. Неоднозначність

1. Фізична невизначеність

А) Випадковість

Б) Неточність

2. Лінгвістична невизначеність

А) Невизначеність значень слів (полісемія)

- Омонімія
- Нечіткість

Б) Невизначеність змісту фраз

- Прагматична
- Семантична, яка у свою чергу буває поверхневою та глибинною
- Синтаксична

3. Невизначеність мети

4. Багатоособовість

На першому рівні розташовані основні фактори, від яких залежить вид невизначеності: невідомість, недостовірність і неоднозначність.

У ситуації **невідомості** фактично відсутня інформація про задачу, це можливо на початковій стадії дослідження. Якщо в процесі збирання інформації на певному етапі виявляється, що зібрано не всю інформацію чи одержати її з певних причин неможливо, то невизначеність трансформується в **недостовірність**. Вона може набирати вигляду неповноти чи недостатності (є не вся потрібна інформація), для деяких задач є неточні описи

(недовизначеність), певні елементи задачі описано лише за аналогією з уже розв'язуваними (неадекватність).

Причини можливої **неоднозначності** опису - зовнішнє середовище (фізична невизначеність) і фахова мова, що використовується децидентом (лінгвістична невизначеність).

Фізична невизначеність може бути пов'язана як із наявністю в зовнішньому середовищі кількох можливостей, кожна з яких реалізовується випадково (ситуація випадковості або стохастичної невизначеності), так і з неточністю вимірювань величини за допомогою фізичних приладів (ситуація неточності).

Лінгвістична невизначеність виникає внаслідок використання природної мови (в окремому випадку - фахової мови децидента) для описання задачі прийняття рішень. Цей вид невизначеності зумовлений необхідністю оперувати скінченною кількістю слів і обмеженим набором структурних фраз (речень, абзаців, текстів) для описання за скінченний час нескінченної множини різноманітних ситуацій, що виникають у процесі прийняття рішень. Лінгвістична невизначеність породжена, з одного боку, множинністю значень слів (понять і відношень) мови (полісемією), а з іншого - неоднозначністю змісту фраз.

У прийнятті рішень доцільно виділити два види полісемії: омонімію та нечіткість. Якщо об'єкти задачі прийняття рішень, що відображаються одним і тим же словом, суттєво різняться, то така ситуація належить до омонімії, наприклад: коса - вид узбережжя, сільськогосподарський інструмент, вид зачіски. Коли ж ці об'єкти подібні, то це нечіткість, наприклад: невеликий запас пального на складі - 1т, 1.1т і т.д.; множина чисел, значно менших за тисячу.

Щодо джерел неоднозначності змісту фраз, вирізняють синтаксичну, семантичну та прагматичну неоднозначність. У першому випадку, уточнивши синтаксис, можна зрозуміти зміст фрази, наприклад, «залізні болти та гайки» - болти залізні, а гайки можуть бути з іншого металу; чи і болти, і гайки залізні; «стратити не можна помилувати» - стратити не можна, помилувати або ж стратити, не можна помилувати. В іншому випадку в разі поверхової семантичної невизначеності змісту фраз окремі слова зрозумілі, але неясний зміст усієї фрази, наприклад: «блакитні зелені думки люто сплять». Коли є глибинна семантична невизначеність, незрозумілі окремі слова, але загальний зміст зберігається. Класичний приклад - «глокая куздра штеко будланула бокра і курдючит бокренка». Можна припустити, що речення написано мовою і означає, що особа жіночої статі щось учинила з особою чоловічої статі і щось робить із його нащадком. Нарешті, прагматична невизначеність

спричинена неоднозначністю використання синтаксично та семантично зрозумілої інформації для досягнення певних цілей діяльності.

Невизначеність може виникати і через **невизначеність мети** (це веде до виникнення задач із багатьма критеріями), а також у **багатоособових** задачах прийняття рішень. У випадку активної протидії в одних ситуаціях чи активного сприяння в інших невизначеність моделюється методами теорії ігор. Урахування фізичної невизначеності може ускладнитися виникненням лінгвістичної невизначеності в описанні розподілу ймовірностей. Інакше кажучи, ці види невизначеності можуть накладатися один на інший.

8.3. Вибір в умовах невизначеності

Розрізняють два класи процедур розв'язку ЗПР – **алгоритмічний** і **евристичний**. Процедура, що не відповідає умові результативності, називається евристичною. Вона може бути однозначною або неоднозначною, але не гарантує одержання відповіді (метод проб і помилок, здогад і т.п.).

Часто доводиться ухвалювати рішення в умовах невизначеності.

Це пов'язане з необхідністю ухвалити рішення, не знаючи в якій ситуації воно буде реалізовано при відсутності інформації про ймовірність настання (виникнення) ситуації.

Знаючи можливі ситуації і повний набір можливих результатів (рішень), можна скласти матрицю. Елементи її a_{ij} можна інтерпретувати як корисність результатів з погляду децидента.

a_{ij} – чисельна оцінка переваги i -й альтернативи (результату) за умови, що настала подія (ситуація j).

Це так звана платіжна матриця. Наявність альтернативних ситуацій породжує невизначеність вибору оптимального рішення.

Для усунення цієї невизначеності, необхідно врахувати вплив усіх ситуацій на вибір оптимального рішення.

Можливі різні способи обліку цього впливу, які відрізняються між собою характером прийнятої стратегії децидента і вибором конкретного критерію оптимальності.

Розрізняють наступні види стратегій:

- пессимистична ($maxmin$)
- оптимистична ($maxmax$)
- узагальнена $maxmin$ (Гурвиц)
- $minmax$ втрат (Севідж).

Вибір того або іншого виду стратегії децидента здійснюється на основі розв'язуваної проблеми, сформульованих цілей (мети) і індивідуальних особливостей свого мислення.

Кожному виду стратегії можна поставити у відповідність сукупність критеріїв вибору оптимального результату (рішення). Таким чином, для досягнення однієї і тієї ж мети залежно від вибору стратегії і конкретного критерію може бути визначений різний оптимальне рішення.

Призначення критерію не в тому, щоб «замінити» мета, а в тому, щоб перевірити перевага!

Під перевагою розуміють будь-яку форму усунення невизначеності у виборі альтернатив.

Якщо перевага обмірювана (виражене) у кількісній шкалі – то це корисність.

Корисність є щось, що ставиться до споглядання, представлення, у той час як перевага одержує своє представлення у вигляді реальної поведінки, виборі.

Критерій Вальда (песимізму).

Його девіз «розраховуй на гірше».

$$Y = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \min_j f(x, S)$$

Під результатом рішення a_{ij} будемо розуміти чисельну оцінку, відповідну до варіанта S_i і ситуації x_j , яка характеризує корисність результатів і чисельну оцінку переваги.

Таблиця 8.1

	Результат				min	max	maxmin	maxmax	Пессим. Ранг	Оптим. Ранг
	x_1	x_2	x_3	x_4						
S_1	1	4	5	9	1	9		9	3	1
S_2	3	8	4	3	3	8	3		1	2
S_3	4	6	6	2	2	6			2	3

По критерію Вальда: $S_2 > S_3 > S_1$

Крайній оптимізм $S_1 > S_2 > S_3$

Критерій Гурвіца.

При виборі рішення він рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом, тобто критерій вибирає альтернативу з максимальним середнім результатом (при цьому діє негласне припущення, що кожне з можливих станів середовища може наступити з рівною ймовірністю).

$$S \Rightarrow \max_i \{ \alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij} \}$$

Значення α характеризує ступінь оптимуму децидента. Він призначає α із суб'єктивних міркувань і одержує α тем ближче до 0, чим більше він прагне підстрахуватися в неприємних і небезпечних ситуаціях. При $\alpha = 0$, це критерій Вальда.

Таблиця 8.2

					Min	max	$\alpha \max$	$(1-\alpha) \min$	Max ₀ Гурвіц	Ранг
S_1	1	4	5	9	1	9	5,4	0,4	5,8	2
S_2	3	8	4	3	3	8	4,8	1,2	6,0	1
S_3	4	6	6	2	2	6	3,6	0,8	4,4	3

Ступінь оптимізму $\alpha = 0,6$

Критерій Севіджа.

Цей критерій теж дуже песимістичний, але при виборі оптимальної стратегії радить орієнтуватись не на виграш, а на ризик прогашу, або "жаль". Обирається в якості оптимальної та стратегія, за якої величина гарантованого жалю мінімальна.

Вихідна матриця $\|a_{ij}\|$ замінюється на $\|r_{ij}\|$:

$$r_{ij} = \max_k a_{kj} - a_{ij}$$

Для цього з елемента кожного стовпця віднімається його max-й елемент.

Матриця «жалю» або втрат – елементи її показують, скільки децидент втрачає при виборі рішення через незнання дійсного стану.

Таблиця 8.2

					матриця втрат				max	minmax	Ранг
S_1	1	4	5	9	3	4	1	0	4	4	1
S_2	3	8	4	3	1	0	2	6	6		2
S_3	4	6	6	2	0	2	0	7	7		3
max	4	8	6	9							

Далі до матриці «жалю» застосовуємо minmax критерій:

$$\min_i \max_j (r_{ij})$$

Виберемо в кожному рядку матриці «жалю» найбільше за абсолютним значенням і знайдемо рядок з найменшим з них.

Якщо при ПР навіть *min*-й ризик неприпустимий, то слід застосувати критерій Вальда.

Якщо, навпаки, певний ризик цілком застосуємо, то вибирають критерій Седвиджа. Іншими словами, якщо ризик цілком прийнятний і замовник має намір вкласти в деяке підприємство стільки засобів, щоб потім він не шкодував, що вклав занадто мало, то вибирають критерій Седвиджа.

Ухвалюючи рішення, відповідне до цього рядка, ми певен, що в найгірших умовах можливий збиток не перевищить знайденого значення, а в інших випадках виявиться ще менше.

Критерій Лапласа.

Це критерій недостатньої підстави (підстави виділити які-небудь стани природи як більш імовірні). Тут, начебто, усі стани природи рівноімовірні.

Якщо жодна з можливих наслідків прийнятих рішень не можна назвати більш ймовірним, ніж інші, тобто якщо вони є приблизно рівно ймовірними, то рішення можна приймати за допомогою критерію Лапласа наступного виду:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij} = \theta$$
$$x^* = \max_i \theta$$

На підставі наведеної формули оптимальним треба вважати те рішення, якому відповідає найбільша сума виплат.

Розділ 9. Метод аналітичної ієрархії

Метод аналітичної ієрархії ґрунтується на принципах декомпозиції та синтезу, реалізація яких дає змогу зменшити кількість можливих помилок у процесі отримання інформації від експерта. За допомогою МАІ отримують структуру у вигляді ієрархії, що дозволяє уникнути складних порівнянь, замінивши їх попарними [1]. Цей метод дає змогу перевіряти послідовність (несуперечливість) тверджень експерта.

9.1. Ієрархії та пріоритети

Означення. Ієрархія - певна абстракція структури системи, призначена для вивчення функціональної взаємодії її компонентів і їх дій на систему загалом.

Означення. Метод аналітичної ієрархії (МАІ) - систематична процедура, що ґрунтується на ієрархічному поданні елементів, які визначають суть проблеми.

Проблему піддають декомпозиції на простіші складові з подальшим оцінюванням децидентом відносного ступеня взаємодії елементів отриманої ієрархічної структури. Метод будується на принципі ідентичності та декомпозиції, згідно з яким структурування проблем у вигляді ієрархії чи мережі містить процедури синтезу множинних тверджень, оцінювання пріоритетності критеріїв та знаходження альтернативних рішень

Рівні ієрархії мають наступне призначення.

1. В результаті ідентифікації загального призначення розв'язання проблеми виявляють єдиний елемент або фокус (проблему загалом) і розміщують його у вершині ієрархії.
2. На другому рівні відображають економічні, політичні та соціальні сили, що впливають на результат.
3. Третій рівень утворюють актори, що маніпулюють цими силами.
4. Четвертий рівень утворюють цілі кожного із акторів.
5. На п'ятому рівні описують можливі сценарії або результати, яких прагнуть досягнути кожен із акторів, застосовуючи свої політики. Тому між четвертим і п'ятим рівнем може бути проміжний рівень політик.

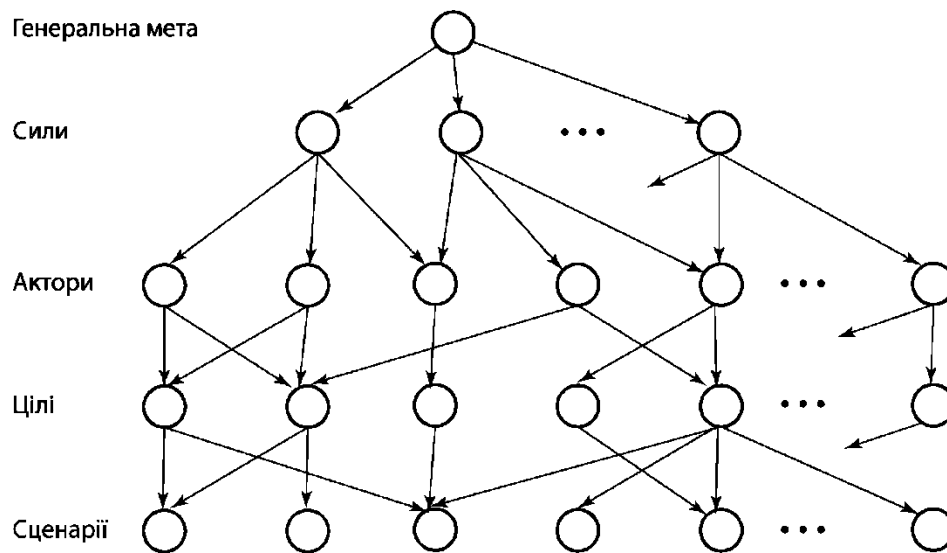


Рис. 9.1. Структура ієрархії MAI

Основне завдання в ієрархії - оцінити вищі рівні, виходячи з взаємодії різних рівнів, а не з безпосередньої залежності від елементів на цих рівнях. При застосуванні MAI для децидента корисними є такі рекомендації.

- Якщо є множина дій (альтернатив), серед яких потрібно зробити вибір, і є сумніви щодо критеріїв, за якими оцінюєте альтернативи, порівняйте попарно критерії щодо коротко- та довгострокових дій, ризику і переваг, а також побудуйте матрицю попарних порівнянь щодо ефективності і успіху.
- Порівняйте обрані дії за значеннями кожного критерію на найнижчому рівні, обчисліть ваги ієрархічно і оберіть дію з вищим пріоритетом.
- Якщо розглянули достатню кількість альтернатив та тверджень і є впевненість, що всі істотні чинники взято до уваги, то зроблено все, що було в силах для того, щоб обрати найкращу альтернативу за наявних умов.

Послідовність етапів MAI

1. Формулювання проблеми, яку потрібно розв'язати.
2. Постановка проблеми загалом - включення її (якщо це необхідно) до великої системи, у якій є інші зацікавлені дійові особи (актори), розгляд їх ідей та бажаних результатів.
3. Ідентифікація критеріїв, за якими буде оцінено якість розв'язання проблеми.
4. Побудова ієрархії спільних критеріїв, окремих критеріїв, властивостей альтернатив і самих альтернатив. У проблемі з багатьма учасниками рівні можуть стосуватися навколишнього середовища акторів, їхніх цілей, політик і результатів, за допомогою яких

буде одержано узагальнений результат (стан сфери дій). Щоб усунути неясності слід ретельно визначити кожен елемент в ієрархії.

5. Завдання пріоритетів первинних критеріїв (сил) щодо їх впливу на генеральну мету.
6. Чітке формулювання питання для попарних порівнянь у кожній матриці. Звернути увагу на орієнтацію кожного питання (наприклад, вартість має зменшуватись, а ефективність збільшуватись).
7. Завдання пріоритетів часткових критеріїв щодо загальних. Збір результатів попарних порівнянь.
8. Опрацювання зібраних даних згідно з алгоритмом МАІ для обчислення глобальних пріоритетів і глобальної узгодженості результатів.
9. У разі вибору серед альтернатив - обрання тієї, що має найбільше значення глобального пріоритету. У разі розміщення ресурсів оцінювання вартості альтернативи, обчислення відношення ефективності до вартості та відповідний розподіл ресурсів: повністю або пропорційно. Якщо потрібно визначити пріоритети вартості - розподіляють ресурси пропорційно пріоритетам.

9.2. Обґрунтування методу аналітичної ієрархії

У МАІ порівнюють пари елементів задачі попарно щодо їх впливу (дії, ваги, інтенсивності) на спільну для них характеристику.

Матриця має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Після отримання кількісних тверджень про пари (B_i, B_j) у числовому вигляді a_{ij} потрібно кожному елементові множини $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ поставити у відповідність числові ваги чи пріоритети.

У разі ієрархічного подання проблем матрицю складають для порівняння відносної важливості критеріїв другого рівня відносно загальної мети першого рівня (кореня ієрархії), а потім будують такі ж самі матриці попарних порівнянь наступного рівня відносно елементів попереднього.

Попарні порівняння виконують у шкалі відношень за бальною системою.

Таблиця 9.1

Бал, k	Визначення	Примітка
1	Однакова важливість	Однаковий внесок двох видів діяльності в мету
3	Помірна перевага	Легка перевага одного виду діяльності над іншим
5	Суттєва перевага	Відчутна перевага одного виду діяльності над іншим
7	Значна перевага	Важлива перевага одного виду діяльності над іншим
9	Дуже велика перевага	Очевидна перевага - домінування одного виду діяльності над іншим
2, 4, 6, 8	Проміжні значення	Їх використовують у перехідних ситуаціях
1/k	Обернені величини	Їх використовують для оцінювання не переважаючих видів діяльності

Приклад. Наявні чотири моделі комп'ютерів (**A,B,C,D**) . Експерт дав такі оцінки:

1. Модель **C** помірно переважає **A** .
2. Модель **B** помірно поступається моделі **C**.
3. Модель **A** значно переважає **D** .
4. Перевага моделі **C** над моделлю **D** між дуже великою та значною.
5. Модель **A** помірно поступається моделі **B**.
6. Модель **B** помірно переважає **D** .

За даними оцінки матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 7 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 8 \\ 1/7 & 1/3 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

В шкалі відношень обрано значення від 1 до 9, оскільки такій кількості точок відповідає психологічна межа 7 ± 2 предмети для одночасного порівняння. Якщо важко розрізнити, скільки існує проміжних градацій - можна застосувати шкалу із меншою кількістю градацій.

Локальні пріоритети отримують, визначивши множину головних власних векторів для кожної з обернено симетричних матриць ієрархії та нормалізувавши результат.

Наближене обчислення пріоритетів проводять визначаючи середнє геометричне рядків матриці попарних порівнянь з подальшою нормалізацією всіх складових отриманого вектора за формулою

$$x_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} / \sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \right)$$

Отримані значення власного вектора $x = (x_1, \dots, x_2, \dots, x_n)$ використовують для подальших обчислень.

Для оцінювання індексу узгодженості оцінок експерта використовують формулу

$$I_u = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j \sum_{i=1}^n a_{ij}) - n}{n-1} = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

де $\lambda_{max} = \sum_{j=1}^n (x_j \sum_{i=1}^n a_{ij})$ максимальне власне значення матриці.

Значення індексу узгодженості для випадкових матриць наведено нижче в таблиці.

Таблиця 9.2

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Випадкова узгодженість	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Відношення узгодженості обчислюють за формулою

$$I_0 = \frac{I_u}{M(I_u)}$$

де $M(I_u)$ — випадкова узгодженість. Якщо отримане значення I_0 менше 10% - рівень узгодженості можна вважати задовільним (інколи доводиться задовольнятися значенням 20%).

Значення індексу узгодженості, отримане з матриці попарних порівнянь, потрібно помножити на пріоритет властивості, якої стосувалось порівняння, і до цього числа додати аналогічні результати для ієрархії загалом. Після цього отримане значення слід порівняти з відповідним значенням індексу, яке дорівнює сумі випадкових значень, зважених за відповідними пріоритетами.

Зауваження. Власні числа та власні вектори. Нехай задано квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ і вектор-стовпчик } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Означення. Ненульовий вектор X називають *власним вектором* матриці A , якщо існує таке число λ (власне число матриці), що

$$AX = \lambda X \tag{9.1}$$

Матричне рівняння (9.1) записують у вигляді

$$(A - \lambda E)X = 0$$

або у розгорнутому вигляді

[illegible]

Для того, щоб однорідна система мала ненульове рішення, необхідно і достатньо, щоб її детермінант дорівнював нулеві, тобто

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} \quad (9.3)$$

детермінант $\det(A - \lambda E)$ є многочленом ступеня n відносно λ , і він називається *характеристичним многочленом* матриці A , рівняння (9.3) - *характеристичним рівнянням*, а його корені - *власними числами* матриці A . Всього існує n власних чисел, серед яких можуть бути рівні. Кожному власному числу відповідає свій власний вектор.

Приклад знаходження власних чисел і векторів. Знайти власні числа і власні вектори для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 4, \text{ тому маємо } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

При $\lambda_1 = -1$ система (9.2) має вигляд

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0, \\ 2x_1^{(1)} + (1 - \lambda_1)x_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0, \\ 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2^{(1)} = -x_1^{(1)} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} t_1 \\ -t_1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda_2 = 3$ система (9.2) має вигляд

$$\begin{cases} -2x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} = 0, \\ 2x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2^{(2)} = x_1^{(2)} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

9.3. Побудова ієрархії МАІ

Головне завдання МАІ - визначення глобальних пріоритетів альтернатив, тобто їх пріоритетів відносно кореня ієрархії. Як вихідні дані при цьому використовують результати опитування експертів у вигляді матриць попарних порівнянь при всіх вузлах ієрархії, окрім листя - альтернатив.

Для ілюстрації розглянемо *приклад*. Родина із середнім статком хоче придбати автомобіль. Внаслідок аналізу було виявлено наступні критерії, які варто брати до уваги: престижність, вартість, питомі витрати пального, комфортність, надійність, максимальна швидкість, розміри, витрати на технічне обслуговування, гарантійні зобов'язання.

Подальший розгляд дає змогу обрати як «кандидатів» три моделі та подати задачу у вигляді ієрархії.

Первинну множину критеріїв після аналізу було звужено до таких суттєвих: Q_1 —комфортність; Q_2 — надійність; Q_3 — швидкість; Q_4 — вартість; Q_5 — престижність; Q_6 — обслуговування; Q_7 — гарантії; Q_8 — витрати пального. За допомогою опитування членів родини побудовано таку матрицю попарних порівнянь для рівня 2 - критеріїв.

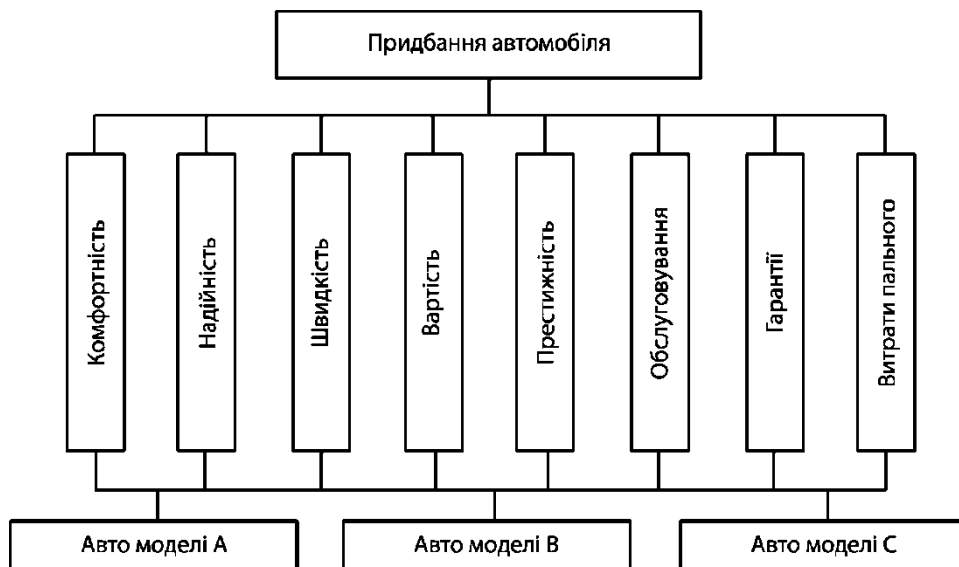


Рис. 9.2. Ієрархічна структура задачі придбання автомобіля

Таблиця 9.3. Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерій	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
Q_1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Q_2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Q_3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5

Q_4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Q_5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Q_6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Q_7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
Q_8	4	7	5	8	6	6	2	1

Після цього, порівнюючи попарно три автомобілі (A , B , C) за кожним із критеріїв (рівень 3), отримано вісім матриць (для кожного із критеріїв) розміром 3×3 (за кількістю альтернатив до вибору).

Таблиця 9.4. Матриці попарних порівнянь альтернатив A , B , C за критеріями

Q_1	A	B	C	Q_2	A	B	C	Q_3	A	B	C	Q_4	A	B	C
A	1	6	8	A	1	7	1/5	A	1	8	6	A	1	1	1
B	1/6	1	4	B	1/7	1	1/8	B	1/8	1	1/4	B	1	1	1
C	1/8	1/4	1	C	5	8	1	C	1/6	4	1	C	1	1	1

Q_5	A	B	C	Q_6	A	B	C	Q_7	A	B	C	Q_8	A	B	C
A	1	5	4	A	1	8	6	A	2	1/2	1/2	A	1	1/7	1/5
B	1/5	1	1/3	B	1/8	1	1/5	B	2	1	1	B	7	1	3
C	1/4	3	1	C	1/6	5	1	C	2	1	1	C	5	1/3	1

Приклад. Оцінювання послідовності тверджень експерта та визначення локальних пріоритетів ієрархії.

Обчислити локальні вектори пріоритетів, індекс узгодженості та відношення узгодженості для матриці попарних порівнянь критеріїв (таблиця 9.3) та матриць попарних порівнянь альтернатив A , B , C за критеріями $Q_1 - Q_8$ (таблиця 9.4).

Наведемо нижче результати визначення вектора пріоритетів, індексу узгодженості та відношення узгодженості для матриці попарних порівнянь критеріїв (таблиця 9.5). Вектор пріоритетів отримано як результат обчислення головного власного вектора з подальшою його нормалізацією. Одержане значення відношення узгодженості завелике, але вважатимемо його прийнятним. У відносно великих матрицях ($n = 7, 8, 9$) досягнення

високого рівня узгодженості проблематичне, але у цьому випадку слід зважати на збільшення ризику через неузгодженість.

Таблиця 9.5. Визначення узгодженості матриці критеріїв

Критерій	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Вектор пріоритетів
Q_1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0,173
Q_2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0,054
Q_3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	0,188
Q_4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0,018
Q_5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0,031
Q_6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0,036
Q_7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	0,167
Q_8	4	7	5	8	6	6	2	1	0,333
								I_u	0,238
								I_0	0,169

Обчислимо відповідні характеристики для множини таблиць наступного рівня - оцінювання альтернатив.

Таблиця 9.6. Обчислені значення локальних пріоритетів для альтернатив

Q_1	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q_2	A	B	C	Вектор пріоритетів
A		6	8	0,754	A	1	7	1/5	0,233
B	1/6	1	4	0,181	B	1/7	1	1/8	0,005
C	1/8	1/4	1	0,065	C	5	8	1	0,713
			I_u	0,068				I_u	0,124
			I_0	0,117				I_0	0,213

Q_3	A	B	C	Вектор пріоритетів	Q_4	A	B	C	Вектор пріоритетів
I_0	1	8	6	0,745	A	1	1	1	0,333

<i>B</i>	1/8	1	1/4	0,065	<i>B</i>	1	1	1	0,333
<i>C</i>	1/6	4	1	0,181	<i>C</i>	1	1	1	0,333
			I_u	0,068				I_u	0,000
			I_0	0,117				I_0	0,000

Q_5	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Вектор пріоритетів	Q_6	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Вектор пріоритетів
<i>A</i>	1	5	4	0,674	<i>A</i>	1	8	6	0,747
<i>B</i>	1/5	1	1/3	0,101	<i>B</i>	1/8	1	1/5	0,060
<i>C</i>	1/4	3	1	0,226	<i>C</i>	1/6	5	1	0,193
			I_u	0,043				I_u	0,099
			I_0	0,074				I_0	0,170

Q_{17}	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Вектор пріоритетів	Q_8	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Вектор пріоритетів
<i>A</i>	2	1/2	1/2	0,200	<i>A</i>	1	1/7	1/5	0,072
<i>B</i>	2	1	1	0,400	<i>B</i>	7	1	3	0,650
<i>C</i>	2	1	1	0,400	<i>C</i>	5	1/3	1	0,278
			I_u	0,000				I_u	0,032
			I_0	0,000				I_0	0,056

Що стосується інтерпретації результатів, то в цьому прикладі витрати пального є найважливішими у виборі автомобіля, друге місце посідає комфортність, а третє - швидкість руху. У реальній ситуації за результатами такого аналізу несуттєві критерії можна було б відкинути і повторити опитування експерта, але із ілюстративною метою залишено всі.

Приклад. Обчислення глобальних пріоритетів альтернатив. Потрібно визначити глобальні пріоритети альтернатив на основі результатів наведених прикладів.

Глобальні пріоритети обчислюють на наступному етапі МАІ - **ієрархічного синтезу**. Із цією метою для виявлення складених, або глобальних, пріоритетів автомобілів виконаємо зворотній хід: із передостаннього рівня рухаємось до кореня ієрархії, збираючи вектори

локальних пріоритетів у матриці та множачи їх на вектори локальних пріоритетів безпосередніх предків, доки не досягнемо кореня ієрархії. У наведеному прикладі ця процедура зводиться до збирання матриці з векторів локальних пріоритетів альтернатив за критеріями ($s = 2$):

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,754 & 0,233 & 0,745 & 0,333 & 0,674 & 0,747 & 0,200 & 0,072 \\ 0,181 & 0,055 & 0,065 & 0,333 & 0,101 & 0,060 & 0,400 & 0,650 \\ 0,065 & 0,713 & 0,181 & 0,333 & 0,226 & 0,193 & 0,400 & 0,278 \end{pmatrix}$$

вектор локальних пріоритетів відносно кореня дерева

$$x_1^{(1)} = (0,173 \ 0,054 \ 0,188 \ 0,018 \ 0,031 \ 0,036 \ 0,167 \ 0,333)^T.$$

Знак транспонування вжито для зручності його запису. Тоді

$$p_1^{(1)} = P_1^{(1)} \times x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,396 \\ 0,341 \\ 0,263 \end{pmatrix}$$

Оскільки оновлене значення $i = 0$, то роботу алгоритму на цьому завершено. Отже, за загальним показником (попри найгірші показники за критерієм витрат пального) обрано автомобіль А, тому що інші показники є ліпшими порівняно з конкурентами.

Зауваження. Матриці A розміру $m \times r$ і B розміру $k \times n$ називаються узгодженими для множення, якщо кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої, тобто $r = k$.

Добутком матриці A розміру $m \times k$ на B розміру $k \times n$ називається матриця,

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Наприклад, для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ добуток має вигляд:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Розділ 10. Прийняття рішень в умовах ризику

10.1. Вибір в умовах ризику

Ризик, на відміну від небезпеки, не можна розглядати окремо від можливих наслідків його прояву. *Ризик* - кількісна міра небезпеки з урахуванням її наслідків. Наслідки прояву небезпеки завжди призводять до збитку, який може бути економічним, соціальним, екологічним і т. ін. Тому оцінка ризику має бути пов'язана з оцінкою збитку. Що більший очікуваний збиток, то вищий ризик. Окрім того, ризик тим вищий, чим більша ймовірність прояву відповідної небезпеки. Отже, поняття «ризик» об'єднує два поняття - «імовірність небезпеки» та «збиток».

ПР в умовах ризику засноване на теорії корисності.

Дійсна функція U на впорядкованій множині X називається **функцією корисності** (ФК), якщо вона монотонна, тобто $\forall x, y \in X$

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \succsim y$$

Це, так звана, лінійна ФК.

Усі твердження, що стосуються ФК, здійснюють можливість принципового переходу від якісних порівнянь об'єктів до їхніх кількісних оцінок.

Для вибору потрібно знати співвідношення між альтернативами G і результатами X .

Альтернативи – це те, що ми вибираємо, а **результати** – те, до чого ми приходимо.

Розглянемо завдання ПР коли кожна альтернатива приводить до одного з декількох результатів, кожний з яких має певну імовірність появи.

Децидента просять установити переваги між альтернативами a_1 і a_2 ; де:

- 1) дія (альтернатива) a_1 приводить до результату x_i з імовірністю p_i^1 ($i = \overline{1, n}$);
- 2) дія a_2 приводить до результату x_i з імовірністю p_i^2 .

Введемо визначення:

- детермінована альтернатива – одержати x_i напевно;
- альтернатива, пов'язана з ризиком – одержати x^* (кращий результат) з імовірністю p і x^0 (гірший результат) з імовірністю $(1 - p)$.

Для ухвалення рішення необхідно побудувати ФК, яка приписує корисність $U(x)$ кожному можливому результату x на безперервній множині можливих варіантів.

Корисність x дорівнює очікуваній корисності лотереї. **Лотерея** – випадкова змінна з відомим розподілом імовірностей

$$U(x) = pU(x^*) + (1 - p)U(x^0) \quad (10.1)$$

Очікувана корисність – найважливіший випадок лінійної корисності, коли альтернативами є випадкові величини або події.

Будь-якій альтернативі з випадковими результатами можна поставити у відповідність деяку імовірнісну міру і вважати, що множина X складається з імовірнісних мір.

Імовірність інтерпретується в суб'єктивному, як би особистому, змісті.

Грубо кажучи, імовірність розуміється при цьому як чисельне вираження впевненості децидента в істинності твердження «якщо я виберу альтернативу (почну дію) a_1 , то в результаті настане результат (подія) x_1 ».

Таким чином, використовуючи (10.1), установлюємо значення корисності всіх результатів x .

Продемонструємо використання теорії корисності на прикладі.

Наймач пропонує працівникові оплатити виконану роботу з одного з варіантів вибору:

- a_1 – просто заплатити зароблені **100** гривень (детермінована альтернатива);
- a_2 – розіграти жереб кидання монети:
 - якщо випаде «*герб*» ($p = 0.5$), то заплатити **150** гривень;
 - якщо випаде «*решка*» ($p = 0.5$), заплатити лише 50 гривень.

У другому випадку, маточиківання дорівнює:

$$0.5 \cdot 150 + 0.5 \cdot 50 = 100$$

Тобто при великій кількості випадків повторення гри середній виграш дорівнює заробленій сумі. Однак жереб пропонується кинути однократно, і при цьому з'являється ризик втратити або одержати додатково **50** гривень.

Згідно з теорією корисності людина, що одержала цю пропозицію, повинна вважати, що корисність одержання додаткових **50** гривень менше корисності своїх **50** гривень. Тому треба відмовитися від пропозиції ризикнути й вибрати перший варіант.

Отже, працівник не прагне ризикувати. Однак наймач міняє умови гри: він припускає заплатити працівникові при виграші («*орел*») **160** грн., а при програші («*решка*») – ті ж **50** грн.

Гра стає більш вигідною для працівника (маточиківання ставати **105** грн.), але ризик втратити **50** грн. залишається. Якщо працівник відмовляється знову, наймач продовжує збільшувати можливість виграшу, послідовно пропонуючи такі результати гри: **180 і 50; 200 і 50** і так далі. Ясно, що дець настане такий момент, коли працівник порохує умови гри рівноцінними з першим варіантом оплати. Говорять, що з'являється точка байдужності, коли більш високий розкид (дисперсія) компенсується більш високим маточиківанням.

Усі варіанти із ще більш високим маточикунням краще, ніж впевнений дохід при дисперсії, яка дорівнює 0.

Чим більше дисперсія, тим при більшому середньому доході (маточикунні) наступає точка байдужності. Сукупність усіх точок байдужності, відповідних до рівноцінних варіантів, називаються кривою байдужності.

Збільшення ризику на $D_1 - D_2$ дає байдужний варіант при росту доходу на $M_1 - M_2$ і так далі:

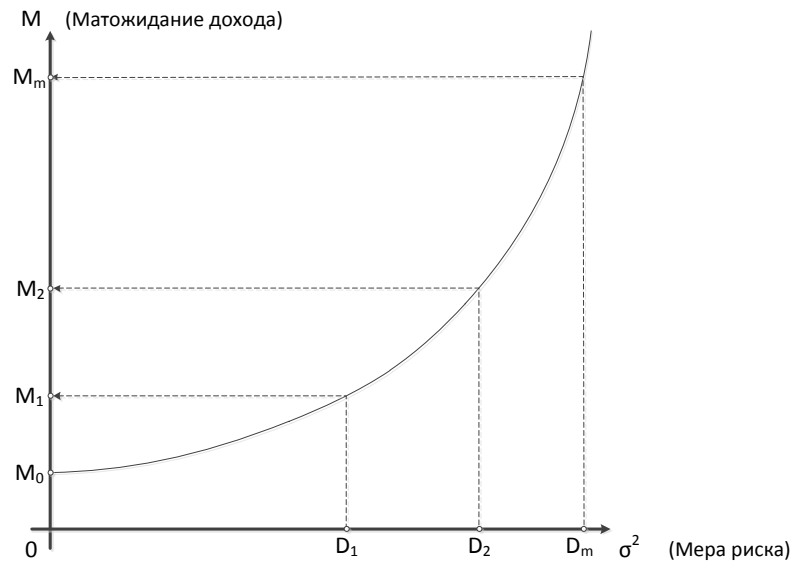


Рис. 10.1. Залежність збільшення доходу від міри ризику

Додатковий очікуваний дохід $M_1 - M_2$ є як би «платою» за додатковий ризик й становить «ціну» цього ризику.

Чим більше ризик D_m , тим швидше росте ціна ризику і при дуже високому ступені ризику ціна повинна бути нескінченно великий.

Введемо поняття детермінованого еквівалента.

Нехай лотерея приводить до виграшів (результатів) $x_1, \dots, x_n$ з імовірностями $p_1, \dots, p_n$ відповідно.

Позначимо невизначений виграш (тобто випадкову змінну), що дається лотереєю через $\tilde{x}$, а очікуваний виграш (маточикуння) через $\bar{x}$.

$$\bar{x} = M(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{x}_i$$

Очікувана корисність цієї лотереї дорівнює:

$$M[U(\tilde{x})] = \sum_{i=1}^n p_i U(\tilde{x}_i)$$

i є показником, який при виборі лотерей слід максимізувати.

Детермінованим еквівалентом лотереї називається величина $\hat{x}$ така, що децидент байдужний у виборі між участю в лотереї або одержанні $\hat{x}$ напевно.

$$U(\hat{x}) = M[U(\tilde{x})] \quad \text{або} \quad \hat{x} = U^{-1}MU(\tilde{x})$$

$U(\hat{x})$ – корисність лотереї.

$M[U(\tilde{x})]$ – очікувана корисність лотереї.

Для монотонної ФК детермінований еквівалент будь-якої лотереї визначається єдиним образом.

Нехай $U(x) = x^2$; $x \geq 0$ (зростаюча ФК). Нехай децидент має справу з лотереєю 50×50 (тобто, що приводить із рівними ймовірностями або до x_1 , або до x_2), позначуваної як $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Очікуваний виграш:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^2 P_i x_i$$

Розрахуємо детермінований еквівалент для лотерей $\langle 0, 10 \rangle$ і $\langle 10, 20 \rangle$. Очікуваний виграш складає:

$$\frac{0 + 10}{2} = 5; \quad \frac{10 + 20}{2} = 15$$

Детермінований еквівалент знаходиться з розв'язку рівняння:

$$U(\hat{x}^2) = M[U(\tilde{x})] = \frac{1}{2}U(0^2) + \frac{1}{2}U(10^2) = 50$$

$$\text{Звідки } \hat{x} = \sqrt{50} = 7.07$$

Це означає, що дециденту байдуже, одержати $x = 7.07$ напевно або вгадувати в лотереї $\langle 0, 10 \rangle$.

Аналогічно для другої лотереї:

$$x^2 = \frac{10^2 + 20^2}{2} = 250; \quad \hat{x} = 15.8$$

Децидент неохочий до ризику, якщо він воліє одержати напевно очікуваний виграш $U[M(\tilde{x})]$ у будь-якій лотереї, замість участі в цій лотереї $M[U(\tilde{x})]$ (очікувана корисність лотереї):

$$U[M(\tilde{x})] > M[U(\tilde{x})] \Leftrightarrow U[P\tilde{x}_1 + (1 - P)\tilde{x}_2] > PU(\tilde{x}_1) + (1 - P)U(\tilde{x}_2)$$

Децидент схильний до ризику, якщо очікуваний виграш менше, чим очікувана корисність лотерей:

$$U[M(\tilde{x})] < M[U(\tilde{x})]$$

Надбавкою за ризик (зростаюча ФК) лотереї $\tilde{x}$ називається різниця між очікуваним виграшем і детермінованим еквівалентом.

Надбавка за ризик

$$HP(\tilde{x}) = \bar{x} - \hat{x} = M(\tilde{x}) - M[U(\hat{x})]$$

По фізичному змісту надбавка за ризик – це сума, яку децидент згодний «поступитися» із середнього виграшу (тому що ця сума менше маточиккування виграшу).

При зростаючої ФК децидент схильний до ризику тоді й тільки тоді, коли його детермінований еквівалент для будь-якої лотереї більше, ніж очікуваний виграш у цієї лотереї (тобто надбавка – негативна).

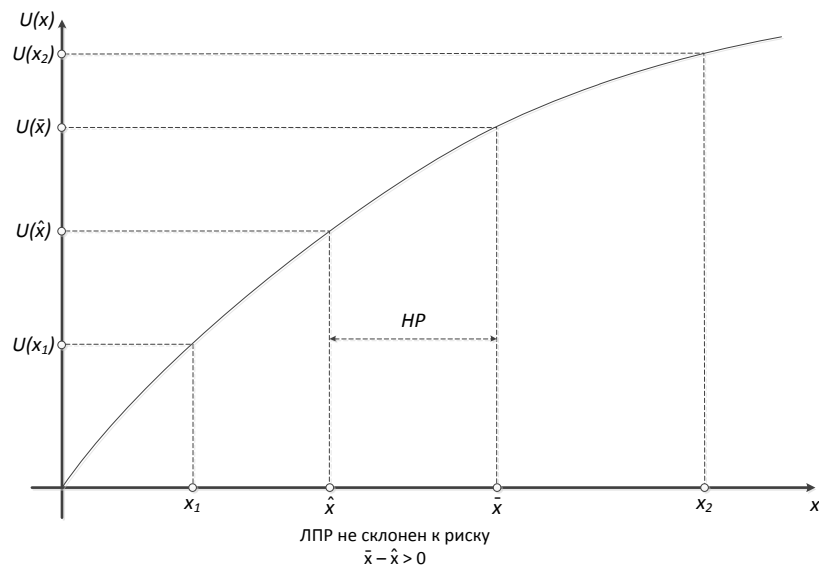


Рис. 10.2. Децидент не схильний до ризику

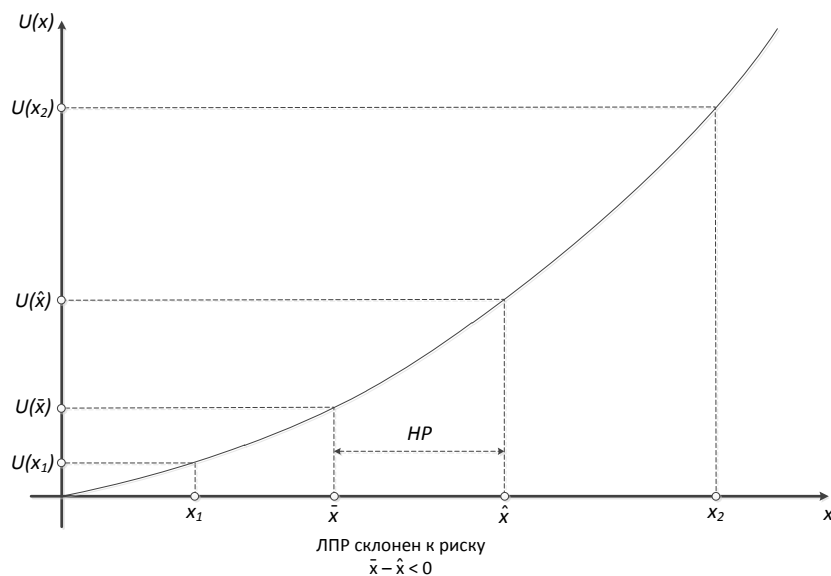


Рис. 10.3. Децидент схильний до ризику

Нехай ФК $U(x) = 0.2x^2$.

Знайдемо очікуваний виграш і детермінований еквівалент, а потім $HP(x)$ для лотереї $< 4, 12 >$:

1. обумовлений виграш: $\bar{x} = \frac{4+12}{2} = 8$;

2. очікувана корисність лотереї:

$$M[U(\tilde{x})] = \frac{1}{2}U(4) + \frac{1}{2}U(12) = \frac{1}{2}(0.2 \times 4^2) + \frac{1}{2}(0.2 \times 12^2) = 16$$

3. детермінований еквівалент $\hat{x}$ знаходимо з рівняння

$$U(\hat{x}) = M[U(\tilde{x})]$$

$$0.2(\hat{x})^2 = 16; \quad 0.2\left(\frac{16 + 144}{2}\right) = 16; \quad \hat{x} = 8.94$$

$$(\hat{x})^2 = \frac{16}{0.2} = 80 \quad \hat{x} = \sqrt{80} = 8.94$$

4. надбавка за ризик:

$$HP(x) = \bar{x} - \hat{x} = -0.94$$

10.2. Побудова функції корисності

Тому що функція корисності нормалізована, оскільки $U(x^0) = 0$ і $U(x^*) = 1$, то її побудова практично починається з визначення точки суб'єктивно середньої по цінності в інтервалі від x^0 до x^* .

Іншими словами повинне бути знайдене таке значення $x^{0.5}$, для якого $U(x^{0.5}) = 0.5$. Після визначення точки $x^{0.5}$ здійснюється пошук точок $x^{0.25}$ і $x^{0.75}$, середніх по цінності в інтервалах $(x^0, x^{0.5})$ і $(x^{0.5}, x^*)$ відповідно. Наявність п'яти точок:

$$(x^0; x^{0.25}; x^{0.5}; x^{0.75}; x^*)$$

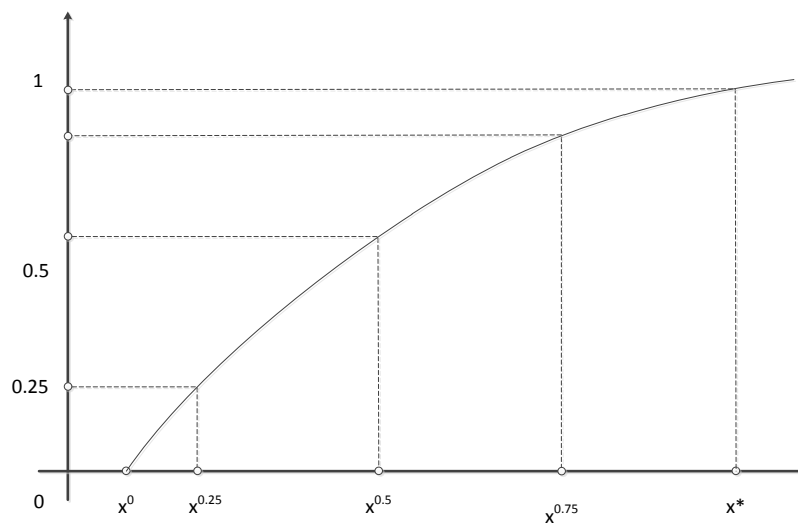


Рис. 10.4. Побудова функції корисності

Розділ 11. Прийняття рішень за умов лінгвістичної невизначеності та нечіткості

У більшості випадків рішення доводиться приймати за умов різноманітних невизначеностей різних типів, що зумовило потребу у відповідних моделях і алгоритмах. Один дуже важливий напрям - теорію нечітких множин - започаткував Лотфі А. Заде. У центрі цієї теорії - поняття нечіткої множини. Його запропоновано як засіб моделювання нечітких понять, якими оперує децидент, описуючи свої уявлення про реальну систему, власні побажання та цілі. Основним в підході Беллмана - Заде до розв'язання задач нечіткого математичного програмування є те, що в ньому критерії прийняття рішення та множину альтернатив розглядають як рівноправні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. За допомогою експертних опитувань виявляють нечітке відношення переваги на множині альтернатив, і кожній парі альтернатив ставлять у відповідність число, що описує ступінь переваги. Задача з нечіткою множиною допустимих альтернатив зводиться до задачі з чіткою множиною альтернатив і додатковим відношенням переваги.

11.1. Лінгвістична невизначеність та нечіткість

11.1.1. Слабоструктуровані проблеми та їх невизначеності

До слабоструктурованих належать проблеми прийняття рішень, насамперед стратегічні (прогнозування та планування наукових досліджень, розвиток вищої освіти в країні, розроблення стратегії економічного та політичного розвитку). Ці проблеми мають наступні спільні риси [1].

- Вони є проблемами унікального вибору в тому розумінні, що кожен раз виникає нова для децидента проблема чи відома проблема набуває нових рис, і це не дає змоги застосувати рутинні процедури для її розв'язання.
- Оцінки альтернативних варіантів розв'язання проблеми формулюють словесно, і вони якісні. Унаслідок цього оцінки альтернатив за окремими аспектами мети можна отримати лише чи переважно із залученням експертної інформації. У цьому разі експерти можуть достатньо надійно оцінити альтернативи лише за окремими критеріями, тобто немає об'єктивних шкал вимірювань за більшістю критеріїв.
- Існує невизначеність в оцінках альтернативних варіантів розв'язання проблеми через об'єктивний брак інформації, потрібної в момент прийняття рішення.
- Вирішальне значення мають суб'єктивні переваги децидента, оскільки лише на їх основі можна побудувати вирішуючі правила і отримати загальну оцінку альтернатив.

Особливості децидента при опрацюванні слабоструктурованої інформації

Методи прийняття рішень для розв'язання слабоструктурованих проблем орієнтовані насамперед на врахування суб'єктивних переваг децидента, а також його можливостей і притаманних йому обмежень. Саме тому в таких ситуаціях методи дослідження операцій не дають ефекту, що очікують. Слід зважати на такі особливості децидента в опрацюванні інформації.

- Людина не може одночасно працювати над багатьма аспектами складної проблеми через обмежений обсяг короткострокової пам'яті. Тому децидент прагне свідомо спростити ситуацію (за допомогою фільтрації - відсіювання альтернатив, що видаються неперспективними, кластеризації множини альтернативних варіантів, переведення частини критеріїв у обмеження тощо).
- Експерт - не вимірювальний пристрій. Він не може виконувати точних кількісних вимірювань, що призводить до суперечностей в його твердженнях.
- У процесі аналізу проблем децидентом виникають помилки та суперечності, зумовлені різними причинами (неуважністю, втомою, економією зусиль).

Оскільки слабоструктуровану проблему описують якісно, слід брати до уваги насамперед лінгвістичну невизначеність. Вона виникає тому, що доводиться застосовувати вербальний (описовий) підхід з широким використанням неточно описаних понять, лінгвістичних змінних, які є не числами, а словами чи словосполученнями певної природної мови.

Інформаційна взаємодія в прийнятті рішень

Спектр інформаційних взаємодій у прийнятті рішень надзвичайно широкий. Він містить фізичну, сигнальну, лінгвістичну, семантичну та прагматичну компоненти. Інформаційні взаємодії поділяють за об'єктами на такі класи:

- ♦ взаємодія штучних (технічних) систем;
- ♦ взаємодія мішаних систем;
- ♦ взаємодія природних (живих) систем.

Інформаційні взаємодії в технічних системах реалізуються у різних формах: від найпростіших регуляторів до глобальних комп'ютерних мереж, у мішаних - як систему «людина - комп'ютер», «живий організм - штучний орган», «живий дослідник - неживий об'єкт досліджень» і т. ін. Інформаційні взаємодії природних систем дуже різноманітні: від молекулярно-генетичних до соціальних співтовариств.

11.1.2. Нечіткі множини і операції над ними.

Означення нечіткої множини

Більшість понять, що використовуються людьми в повсякденному житті, нечіткі. Якщо ми говоримо, що «до роботи нам близько 20 хвилин пішки, менеджер у комерційній фірмі виконує вказівку керівництва «суттєво збільшити обсяги продажів», - усе це вислови, сформульовані неформально розмовною мовою. Навіть формально чіткі поняття, що використовуються в буденному житті, люди сприймають як нечіткі.

Один із дуже важливих кроків у цьому напрямі - теорія нечітких множин Лотфі А. Заде. У її центрі - поняття нечіткої множини як засобу моделювання нечітких понять, якими оперує особа, описуючи свої уявлення про реальну систему, свої побажання, цілі та ін.

Нечітка множина - це математична модель класу з нечіткими (інакше кажучи, розмитими) множинами. Кожному її елементу відповідає ступінь належності до множини, проміжній між повною належністю та повною неналежністю.

Так, якщо задано якусь базову множину X , то її підмножиною (чіткою підмножиною) A називають будь-яку множину, до якої належать елементи множини X (можливо, не всі). Будь-яку підмножину A множини X можна описати її функцією належності $X \rightarrow \{0, 1\}$, значення якої для елемента $x \in X$ дорівнює 1 тоді і лише тоді, коли він належить множині A , а в іншому випадку - 0.

Відповідність між підмножинами множини X і довільними функціями належності $\mu_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ взаємно однозначна, тобто, визначивши певну підмножину, ми можемо задати її функцію належності, і, навпаки, якщо задано функцію $\mu_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, то цим самим однозначно задано і підмножину множини X .

Отже, будь-який елемент може належати чи ні до чіткої множини, тому функція належності має лише два значення - 0 або 1. Якщо X - універсальна множина, то для всіх її елементів $x \in X$ виконується рівність $\mu_X(x) = 1$.

У нечіткій множині A (точніше, у нечіткій підмножині A базової множини X будь-який елемент $x \in X$ може належати до множини з якоюсь мірою достовірності, що набуває значень від 0 (елемент напевно не належить множині) до 1 (він напевно належить множині). Функція належності нечіткої множини також може мати будь-яке значення з інтервалу $[0, 1]$. Означимо поняття нечіткої множини за допомогою її функції належності. Нехай X - якась універсальна (чітка) множина. Надалі ми розглядатимемо її нечіткі підмножини.

Означення 11.1. Нечіткою множиною A в X називається сукупність пар вигляду $(x, \mu_A(x)), : X \rightarrow \{0, 1\}, x \in X$, функція $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$, яка кожному з елементів множини X ставить у відповідність ступінь його належності нечіткій множині A .

Приклад 11.1. Нехай X - множина всіх дійсних чисел. Потрібно побудувати функцію належності для множини A додатних дійсних чисел.

Це чітка підмножина A множини X із функцією належності

$$(x, \mu_A(x)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Приклад 11.2. Задано три множини: множину чисел $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ та нечіткі множини чисел $C = \{x \mid \text{число } x \text{ близьке до } 2\}$, $D = \{x \mid \text{число } x \text{ дуже близьке до } 2\}$. Потрібно побудувати графіки функцій належності для множин B, C, D .

Відповідні графіки функцій належності наведено нижче (рис. 11.1).

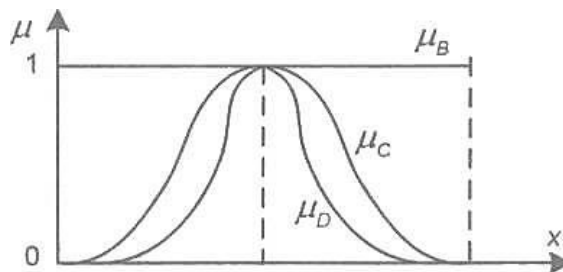


Рис. 11.1. Графіки функцій належності множин B, C, D

Означення 11.2. Нечітка множина називається порожньою, якщо її функція належності $\mu_\emptyset$ дорівнює 0 на всій множині X , тобто $\forall (x \in X): \mu_\emptyset(x) = 0$.

Означення 11.3. Носієм нечіткої множини A з функцією належності $\mu_A(x)$ називають множину (у звичайному розумінні) $\text{sup } A = \{x \mid (x \in X) \wedge \mu_A(x) > 0\}$.

Означення 11.4. Нечітка множина A називається нормальною, якщо $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$. В інших випадках вона називається субнормальною.

Операції над нечіткими множинами

Для побудови змістовної теорії нечітких множин одного означення недостатньо. Потрібно хоча б означити операції (об'єднання, перетин тощо) над нечіткими множинами, аналогічні операціям над звичайними чіткими множинами. Використаємо аналогію між поданням чітких і нечітких множин у вигляді їх функцій належності. Більшість операцій над звичайними множинами можна сформулювати через операції над їх функціями належності. Водночас функція належності звичайної множини є окремим випадком функції належності нечіткої множини, що дає змогу безпосередньо узагальнювати формули для чітких множин

на нечіткій множині. При цьому в разі застосування до чітких множин операція повинна давати звичайний результат.

Означення 11.5. Нечітка множина A в X є підмножиною нечіткої множини B в X (A міститься в B , $A \subseteq B$) якщо для всіх $x \in X$ справедливе співвідношення $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Так, у прикладі 11.2 $D \subseteq C$. У теорії множин вважають, що порожня множина $\emptyset$ міститься в будь-якій множині. За означенням нечітка порожня множина з функцією належності $\mu_\emptyset = 0$ також міститься в будь-якій нечіткій множині.

Означення 11.6. Об'єднанням нечітких множин A та B в X називається нечітка множина $A \cup B$ з функцією належності

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X$$

Означення 11.7. Перетином нечітких множин A та B в X називається нечітка множина $A \cap B$ з функцією належності

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X$$

На рис. 11.2 заштриховані області відповідають функціям належності перетину та об'єднання множин відповідно до означень 11.6 і 11.7.

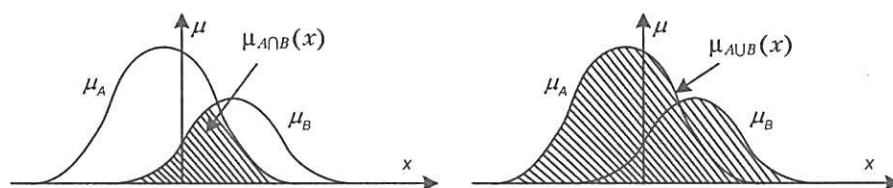


Рис. 11.2. Перетин та об'єднання функцій відповідності за означеннями 11.6 і 11.7

Означення 11.8. Доповненням нечіткої множини A в X називається нечітка множина A' із функцією належності $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

За такого визначення доповнення, узагалі кажучи, $A \cap A' \neq \emptyset$ для обох означень перетину.

Приклад 11.3. Нехай X - множина всіх дійсних чисел. Потрібно побудувати функцію належності для множини дійсних чисел, значно більших за 0, а також її доповнення та функцію належності перетину цих нечітких множин.

Відповідні функції належності показано на рис. 11.3.

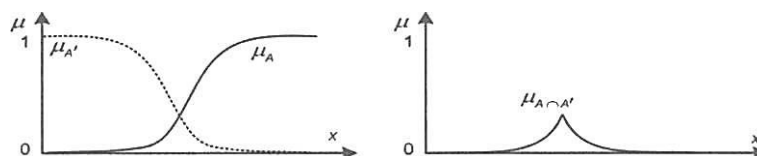


Рис. 11.3. Функції належності нечіткої множини, її доповнення та перетину

Змістовно $A \cap A'$ можна інтерпретувати як нечітку множину чисел, які значно більші за 0 і водночас не дуже більші, ніж 0. Те, що ця множина не порожня, впливає з того, що

поняття «бути значно більшим» описано нечітко, і в певному розумінні множину $A \cap A'$ можна розглядати як «нечітку межу» між множиною A та її доповненням.

Доповнення нечіткої множини - окремий випадок операції різниці двох нечітких множин.

Означення 11.9. Різницею нечітких множин A та B в X називається нечітка множина $A \setminus B$ з функцією належності $\mu_{A \setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{при } \mu_A(x) \geq \mu_B(x); \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$

Означення 11.10. Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ нечітких множин A_i в $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ є нечітка множина A в декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ із функцією належності

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

Означення 11.11. Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ в X називається нечітка множина A з функцією належності

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{A_i}(x), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Опуклі комбінації нечітких множин застосовують у задачах прийняття рішень з декількома нечіткими обмеженнями. Для звичайних множин ця операція не має сенсу.

Означення 11.12. Множиною рівня α нечіткої множини A в X називається множина в звичайному розумінні, складена з елементів $x \in X$, ступінь належності яких до нечіткої множини A не менша, ніж α . Отже, множина рівня A_α нечіткої множини A означають як $A_\alpha = \{x | (x \in X) \wedge \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Множини рівня використовують для формулювання та аналізу деяких задач прийняття рішень.

Принцип узагальнення Л. Заде

Узагальнимо поняття відображення на нечіткі множини. Спочатку розглянемо суть принципу узагальнення.

У багатьох задачах прийняття рішень потрібно розширити область визначення X заданого відображення чи відношення, включивши до нього крім елементів множини X довільні нечіткі підмножини цієї множини.

Нехай на множині керувань X задано відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, яке описує функціонування керованої системи. Образ $y = \varphi(x)$ керування $x \in X$ буде реакцією цієї системи на вибір керування. Якщо обране керування описано нечітко, наприклад у вигляді нечіткої підмножини $\mu(x)$ множини керувань X , то для знаходження реакції системи на таке

керування потрібно визначити образ $\mu(x)$ для відображення φ . Отже, виникає проблема розширення області визначення цього відношення на клас усіх нечітких підмножин множини X . Аналогічна проблема розширення області визначення нечіткого відношення виникає в аналізі загальної задачі нечіткого математичного програмування.

Спосіб розширення області визначення на клас нечітких множин можна отримати за допомогою принципу узагальнення. Л. Заде запропонував принцип узагальнення, який ґрунтується на означенні поняття образу нечіткої множини за умов звичайного (чіткого) відображення. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ - задане відображення, а A - деяка нечітка підмножина множини X із функцією належності $\mu_A(x)$. Згідно з принципом узагальнення Л. Заде образ A за відображення φ - це нечітка підмножина множини Y що є сукупністю пар

$$(y, \mu_B(y) = (\varphi(x), \mu_A(x)), x \in X,$$

де $\mu_B: Y \rightarrow [0,1]$ - функція належності образу. Отже, функцію належності μ_B можна записати у вигляді

$$\mu_B(y) = \sup_{\varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), y \in Y, \quad (11.1)$$

де множина $\varphi^{-1}(y)$ для довільного фіксованого $y \in Y$ має вигляд

$$\varphi^{-1}(y) = \{x | (x \in X) \wedge \varphi(x) = y\},$$

тобто є множиною всіх елементів $x \in X$, образ кожного з яких за відображення φ є елементом y .

Застосуємо принцип узагальнення у вигляді 11.1 для розширення області визначення нечіткого відображення. Потреба в розгляді нечітких відображень може виникнути в процесі аналізу задач прийняття рішень, у яких результат вибору конкретного елемента з множини альтернатив відомий нечітко (наприклад, коли його описано за допомогою нечіткої множини в універсальній множині результатів). Для проблеми керування це відповідає ситуації, коли функціонування системи описано нечітко.

Нечітке відображення подають як таке, за якого кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність не конкретний елемент множини Y , а, узагалі кажучи, нечітку підмножину множини Y . Нечітке відображення описують за допомогою функції $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0,1]$.

Отже, нехай $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0,1]$ - задане нечітке відображення, а $\mu_A(x)$ - нечітка множина в X . Застосувавши принцип узагальнення у вигляді (11.1) для знаходження образу цієї нечіткої множини для відображення μ_φ , отримаємо сукупність пар $(\mu_\varphi(x, y), \mu_A(x))$, $x \in X$, де $\mu_\varphi(x, y)$ для кожного фіксованого $x \in X$ (тобто в кожній такій парі) - нечітка підмножина множини Y . Виявляється, що образ нечіткої множини μ_A - доволі складний об'єкт, а саме

нечіткий підклас класу всіх нечітких підмножин множини Y . Зрозуміло, що використовувати такі об'єкти в аналізі реальних систем складно. Тому сформулюємо принцип узагальнення інакше.

Означення 11.13. Образом B нечіткої множини A в X за нечіткого відображення $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ називається нечітка множина, що має функцію належності

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\}$$

Прямою перевіркою впевнимися, що в окремому випадку, коли μ_φ - звичайне відображення на кшталт $\varphi: X \rightarrow Y$ (тобто $\mu_\varphi(x, y) = 1$, якщо $y = \varphi(x)$, та $\mu_\varphi(x, y) = 0$ для інших пар)

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

що відповідає наведеному вище означенню образу, на якому ґрунтується принцип узагальнення Л. Заде.

Багатовимірні нечіткі відображення та прообрази

Якщо задане нечітке відображення μ_φ залежить від n змінних, тобто має вигляд $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$, де $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ - декартовий добуток відповідних множин, і на множині X задано нечітку підмножину μ_A , то її функція належності має вигляд

$$\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n), \nu(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

де μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) та ν - задані нечіткі підмножини відповідних множин X_1 та X . Цей запис по суті означає, що множина є «сукупністю» усіх таких наборів $x_1, x_2, \dots, x_n$, що x_i «належить» нечіткій множині μ_i а $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - нечіткій множині ν .

Застосувавши принцип узагальнення, одержимо такий вираз для функції належності нечіткої множини

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X} \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n), \nu(x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)\} \quad (11.2)$$

Означення 11.14. Прообразом A нечіткої множини B в множині Y для нечіткого відображення $\mu_\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких для цього відображення є підмножинами нечіткої множини B . Позначимо образ нечіткої множини α за відображення μ_φ як $\alpha \circ \mu_\varphi$. Тоді відповідно до означення прообраз нечіткої множини B - це об'єднання всіх множин, для яких $\alpha \circ \mu_\varphi \subseteq B$.

Теорема 11.1. Нечітка множина A - прообраз множини B - має функцію належності

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf_{y \in N_x} \mu_B(y), & \text{при } x \in X^0; \\ 1, & \text{при } x \in X \setminus X^0 \end{cases}$$

де множини N_x та X^0 задано співвідношеннями

$$N = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x, y) > \mu_B(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y, (x, y) \in N\},$$

$$N_y = \{x | x \in X, (x, y) \in N\},$$

$$X^0 = \{x | x \in X, N_x \neq \emptyset\},$$

Означення прообразу нечіткої множини для нечіткого відображення використовується надалі в аналізі задачі виконання нечітко визначеної мети.

11.2. Нечіткі відношення

11.2.1. Означення нечіткого відношення. Операції над нечіткими відношеннями

Розглянемо загальні властивості нечітких відношень і нечіткі відношення переваги, що використовуються в задачах прийняття рішень. Водночас до відношень переваги застосовні всі операції, означені тут для звичайних нечітких відношень, і вони мають усі їх властивості. Нечіткі відношення є окремим класом відношень, які зручно застосовувати в задачах прийняття рішень.

Якщо згадати, що звичайні відношення є підмножинами декартового добутку, то зрозуміло, що перехід (узагальнення) від звичайного відношення до нечіткого, у принципі, є такий самий, як перехід від звичайної множини до нечіткої. Опис нечіткого відношення, отже, має містити не лише всі пари результуючої множини, але і числа з інтервалу $[0, 1]$, які відповідають ступеню виконання нечіткого відношення для цих пар. Для того, щоб описати відношення, потрібно визначити множину, на якій його задано, тобто множину-носі. Вона також може бути нечітка, до того ж на нечіткій множині можна задати і звичайне відношення.

Означення нечіткого відношення

Розглядатимемо надалі нечіткі відношення на звичайній множині.

Означення 11.15. Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, що характеризується функцією належності $\mu_R: X \times X \rightarrow [0, 1]$.

Значення функції належності $\mu_R(x, y)$ слід розуміти як суб'єктивну міру чи ступінь виконання відношення xRy . Звичайне бінарне відношення - особливий вид нечіткого відношення, функція належності котрого може набувати значення 1 або 0. Якщо множина X , на якій задано нечітке відношення R , скінченна, то його функцію належності μ_R можна описати квадратною матрицею. Ця матриця схожа на матрицю звичайного чіткого відношення, але її елементами є не лише 0 та 1, але і проміжні значення, що належать інтервалу $[0, 1]$. Аналогічно звичайному відношенню, нечітке відношення можна описати за допомогою орієнтованого (нечіткого) графа, кожна дуга котрого має числову оцінку з інтервалу $[0, 1]$.

Означення 11.16. Носієм нечіткого відношення R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, що має вигляд

$$\text{sup } R = \{(x, y) | ((x, y) \in X \times X), \mu_R(x, y) > 0\}$$

Отже, носій нечіткого відношення - звичайне відношення на множині X , яке пов'язує всі такі пари (x, y) , що ступінь виконання цього відношення додатний. У разі скінченної множини X матрицю носія можна отримати, замінивши в матриці первісного нечіткого відношення всі ненульові елементи на 1.

Для порівняння на рис. 11.4 показано функції належності чіткого відношення «більше» та нечіткого відношення «значно більше» для інтервалу чисел від 0 до 400.

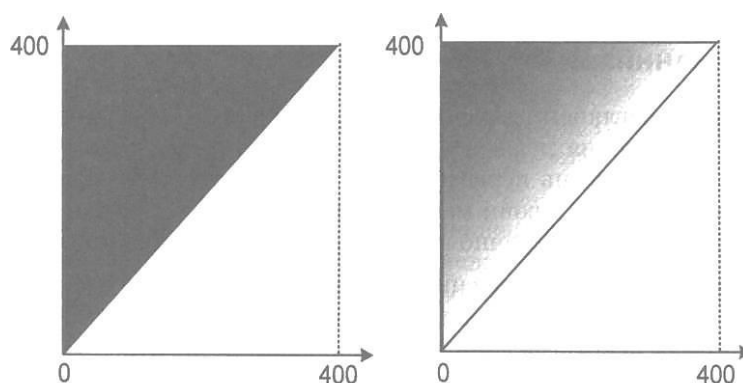


Рис. 11.4. Функції належності чіткого та нечіткого бінарного відношення

Аналізуючи задачі прийняття рішень із нечіткими відношеннями, зручно користуватися множинами рівня нечіткого відношення. Оскільки нечітке відношення є нечіткою множиною, то і її множини рівня мають вигляд

$$R_\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in X \times X, \mu_R(x, y) \geq \alpha\}$$

Отже, множина рівня α нечіткого відношення R на множині X є звичайним відношенням на X , до складу якого входять усі пари (x, y) , для яких ступінь належності до

відношення не менший за α . Матрицю множини рівня отримують заміною в матриці нечіткого відношення елементів, значення яких не менші за α , 1, а інших - 0.

Приклад 11.4.

Матриця нечіткого бінарного відношення R на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ має вигляд

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,4	0,2	0,9
x_2	0,8	1	0,7	0,3
x_3	0	0,4	0,3	0
x_4	0,1	0,1	0,9	0,1

Потрібно побудувати множину рівня, якщо $\alpha = 0,7$. За означенням множини рівня одержимо.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	1
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0

Операції над нечіткими відношеннями

Деякі операції над нечіткими множинами є аналогами відповідних операцій над звичайними відношеннями, а інші властиві лише нечітким відношенням. Як і для нечітких множин, операції об'єднання та перетину нечітких відношень можна означити кількома способами.

Означення 11.17. Нехай на множині X задано нечіткі відношення A та B . Нечіткі множини $C = A \cup B, D = A \cap B$ називаються відповідно об'єднанням і перетином нечітких відношень A та B , якщо їх функції належності мають вигляд

$$\mu_C(x, y) = \max\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\},$$

$$\mu_D(x, y) = \min\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\},$$

Означення 11.18. Нехай на множині X задано нечіткі відношення A та B . Нечітке відношення B містить у собі нечітке відношення A , якщо для них виконується співвідношення $A \subseteq B$, тобто $\mu_A(x, y) \geq \mu_B(x, y)$ для всіх $x, y \in X$.

Означення 11.19. Доповненням нечіткого відношення R на множині X називається нечітке відношення R' із функцією належності $\mu_{R'}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$.

Означення 11.20. Оберненим до нечіткого відношення R на множині X відношенням називається нечітке відношення R^{-1} з функцією належності

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x), \forall x, y \in X$$

У прикладних задачах прийняття рішень велике значення має добуток (композиція) нечітких відношень, який визначають кількома способами.

Означення 11.21. Максимінним добутком $A \circ B$ нечітких відношень A та B на множині X називають нечітке відношення з функцією належності:

$$\mu_{A \circ B}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\} \quad (11.4)$$

У разі скінченної множини X матриця нечіткого відношення $A \circ B$ дорівнює максимінному добутку матриць нечітких відношень A та B , тобто її можна отримати за допомогою тих самих операцій, що і матрицю добутку звичайних відношень.

Означення 11.22. Мінімаксним добутком нечітких відношень A та B на множині X називають нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{A \circ B}(x, y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\} \quad (11.5)$$

Означення 11.23. Максимумнопликативним добутком нечітких відношень A та B на множині X називають нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{A \circ B}(x, y) = \sup_{z \in X} \{\mu_A(x, z) \times \mu_B(z, y)\} \quad (11.6)$$

Для порівняння введених операцій добутку розглянемо приклад.

Приклад 11.5. Матриці нечітких відношень A та B на скінченній множині X є наступними:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

Потрібно визначити максимінний, мінімаксний і максимумнопликативний добутки зазначених відношень.

Застосувавши формули (11.4)-(11.6), одержимо:

$$(0,2 \quad 0,6) \circ (0,5 \quad 0,7) = \begin{cases} (0,3 & 0,6) \\ (0,3 & 0,5) \\ (0,5 & 0,7) \\ (0,5 & 0,7) \\ (0,18 & 0,6) \\ (0,25 & 0,8) \end{cases} \begin{matrix} \text{Максимінний добуток} \\ \text{Мінімаксий добуток} \\ \text{Максимумльтиплікативний добуток} \end{matrix}$$

11.2.2. Властивості нечітких відношень

Нечіткі відношення можуть бути рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, транзитивними.

Означення 11.24. Нечітке відношення R на множині X називається рефлексивним, якщо для довільного $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 1$.

Для скінченної множини X головна діагональ матриці рефлексивного нечіткого відношення складається з 1 (наприклад, для відношення «приблизно рівні» на множині чисел).

Означення 11.25. Нечітке відношення R на множині X називається антирефлексивним, якщо для довільного $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, x) = 0$. Відношення «набагато більше» на множині чисел антирефлексивне.

Означення 11.26. Нечітке відношення R на множині X називається симетричним, якщо для довільного $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$.

Матриця симетричного нечіткого відношення, заданого на скінченній множині, симетрична відносно головної діагоналі. Наприклад, нечітке відношення «дуже відрізнятись» на множині чисел симетричне.

Означення 11.27. Нечітке відношення R на множині X називається антисиметричним, якщо для довільного $x \in X$ виконується співвідношення $\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$.

Означення 11.28. Нечітке відношення R на множині X називається транзитивним, якщо $R \circ R \subseteq R$.

Властивість транзитивності залежить від способу означення добутку нечітких відношень.

Надалі під «транзитивністю нечіткого відношення» розумітимемо максимінну транзитивність, яка означає, що для довільних $x, y \in X$ на множині X виконується умова

$$\mu_R(x, y) \geq \sup_{x \in X} \min\{\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)\}$$

11.2.3. Завдання досягнення нечіткої мети

Загальні підходи до розв'язання задачі нечіткого математичного програмування

Завдання прийняття рішень, у яких систему переваг децидента подано у вигляді одного критерію, а множину допустимих рішень задано системою обмежень, належать до математичного програмування. Раціональним є рішення, що належить до множини допустимих, та для якого досягається максимум критерію, що відображає якість рішення.

Нечіткість у постановці задачі математичного програмування може бути в описі як множини альтернатив, так і критерію якості. Розглянемо ситуацію, у якій множину альтернатив описано нечітко, а критерій - чітко. Аналіз загальніших задач із нечітко описаним критерієм спирається на апарат нечітких відношень переваги, які розглянуто в наступному підрозділі.

Аналізуючи задачі нечіткого математичного програмування, виділяють два основні підходи. Згідно з першим, який запропонували Р. Беллман і Л. Заде, формують задачу досягнення нечітко визначеної мети, рішенням якої вважають перетин нечітких множин мети і обмежень (допустимих альтернатив).

У другому підході, рішення обирають подібно до того, як у задачах багатокритерійної оптимізації. До рішення включають ті і лише ті альтернативи, які строго не доміновані іншими. У цьому випадку децидент може більшою мірою послуговуватися власними суб'єктивними уявленнями про реальну ситуацію, які не було формалізовано в математичній постановці задачі.

Формулювання та визначення рішення задачі

У підході Беллмана - Заде до рішення задачі нечіткого математичного програмування головним є те, що критерії прийняття рішення та множину альтернатив (обмеження, що задають множину допустимих альтернатив) розглядають як рівноправні нечіткі підмножини певної універсальної множини альтернатив. Це дає змогу визначити рішення задачі в доволі простому вигляді.

Нехай X - універсальна множина альтернатив, тобто універсальна сукупність можливих результатів вибору децидента. Нечіткий критерій (мета) в X - нечітка підмножина множини X . Будемо вважати, що критерій має функцію належності $\mu_Q: X \rightarrow [0, 1]$.

Якщо, наприклад, X являє собою числову вісь, то нечітким критерієм прийняття рішень може бути нечітка множина «значення x має приблизно дорівнювати 100» чи «бажано, щоб значення x було значно більшим за 50». Припустімо, що відповідні нечіткі поняття достатньо точно описані функціями належності відповідних нечітких множин.

Чим більшим є значення функції належності $\mu_Q(x)$, тим вищим є ступінь досягнення мети за умови обрання альтернативи x як рішення задачі. Нечіткі обмеження (множини допустимих альтернатив) також можна описувати нечіткими підмножинами множини X (наприклад, «значення x має бути не дуже велике»).

У загальнішому формулюванні задачі нечіткі критерії та нечіткі обмеження є підмножинами різних універсальних множин. Нехай X - універсальна множина альтернатив, і задано однозначне відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, значення якого (елементи множини Y) розумітимемо як реакцію системи на вхідні дії $x \in X$ чи як деякі оцінки результатів вибору децидентом певних альтернатив. Нечіткий критерій в цьому випадку є нечіткою підмножиною універсальної множини оцінок значень критерію Y із функцією належності $\mu_Q: X \rightarrow [0, 1]$.

Тому задачу можна звести до попереднього формулювання (коли ціль - нечітка підмножина множини X) наступним способом. Визначимо нечітку множину альтернатив $\tilde{\mu}_Q$, що забезпечить досягнення мети μ_Q . Це прообраз нечіткої множини μ_Q за відображення φ , тобто за означенням прообразу нечіткої множини

$$\tilde{\mu}_Q(x) = \mu_Q(\varphi(x)), x \in X$$

Тепер маємо задачу досягнення нечіткої мети $\tilde{\mu}_Q$ із заданими нечіткими обмеженнями. Сформулюємо задачу досягнення нечіткої мети. Загалом, розв'язати задачу означає досягнути мети (максимального значення критерію якості) і не порушити обмежень. Однак у цьому конкретному нечіткому формулюванні слід говорити не просто про досягнення мети, а і про її досягнення з певним ступенем належності, беручи до уваги також ступінь виконання обмежень.

У підході Беллмана - Заде ці фактори враховано так. Нехай, наприклад, альтернатива x забезпечує досягнення мети (чи відповідає меті) зі ступенем належності $\mu_Q(x)$, і для неї виконуються обмеження зі ступенем належності $\mu_C(x)$. Тоді вважають, що ступінь належності цієї альтернативи дорівнює мініимальному з цих двох значень. Так, альтернатива, допустима зі ступенем належності 0,4, якщо ступінь належності мети становить 0,9, належать до нечіткого рішення зі ступенем 0,4. Отже, маємо таке означення.

Означення 11.29. Нечітким рішенням задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин цілі (критерію) і обмежень; відповідну функцію належності рішень μ_D визначають як $\mu_{D(x)} = \min\{\mu_Q(x), \mu_C(x)\}$. Коли є декілька критеріїв і декілька обмежень, функція належності рішень є наступною:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{Q_1}(x), \mu_{Q_2}(x), \dots, \mu_{Q_n}(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x), \dots, \mu_{C_{n1}}(x), x \in X\}$$

Приклад 11.6.

Нехай $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, а нечітку мету та два обмеження задано таблицею

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_Q(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1,0	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{C^1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1,0	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
$\mu_{C^2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2

Потрібно знайти нечітке рішення, якщо словесно критерій і обмеження сформульовано так: Q = «значення x має бути близьким до 5»; C_1 = «значення x має бути близьким до 4»; C_2 = «значення x має бути близьким до 6».

За допомогою означення 11.29, отримаємо рішення

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

D = «число x має бути близьке до 5».

Приклад 11.7. Розглянемо завдання, з яким зустрічається кожен студент, а саме підготовку до іспиту. Нехай множина $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, задає можливі рівні підготовки до іспиту (більше значення відповідає інтенсивнішій підготовці), а множина $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, описує можливі результати іспиту (оцінки). Нехай студента однаково влаштовують як оцінки 4 і 5 (наш студент не «чистий» відмінник), але категорично не влаштовують оцінки 1 або 2. Оцінка 3 задовольняє його лише частково. Тоді мету студента можна описати нечіткою множиною Q , функцію належності якої наведено в таблиці

y	1	2	3	4	5
$\mu_Q(y)$	0	0	0,5	1	1

Через брак часу чи здібностей студент не дуже добре підготувався до іспиту, і якщо можливість підготовки на рівнях 1 і 2 не викликає сумнівів, то великі рівні підготовленості вже є сумнівнішими. У наступній таблиці наведено функцію належності нечіткої множини обмежень C .

x	1	2	3	4	5
$\mu_C(y)$	1	1	0,7	0,6	0,3

Припустімо, що відображення, які переводять дії в результат, тотожні, тобто оцінка на іспиті однозначно залежить від рівня підготовки: рівень підготовки 1 зумовлює оцінку 1, рівень 2 - оцінку 2 і т. д. Потрібно дати рекомендації щодо підготовки до іспитів.

У разі тотожності зазначеного відображення задача обрання дії, що дає змогу досягти мети з огляду на обмеження, зводиться до знаходження перетину $D = Q \cap C$ множини мети і обмежень. Визначимо відповідну функцію належності:

x	1	2	3	4	5
$\mu_D(y) = \min\{\mu_Q(y), \mu_C(y)\}$	0	0	0,5	0,6	0,3

Отже, рішення задачі досягнення нечіткої мети теж виявився нечітким. Ця нечіткість - безпосередній наслідок нечіткості у формулюванні завдання, яку можна інтерпретувати як нечітку рекомендацію «готуватися приблизно на 4».

Але ж у реальності люди приймають єдине рішення! Слід окремо розглянути питання про конкретну дію, що ґрунтується на нечіткій рекомендації. Часто як рішення задачі досягнення нечіткої мети пропонують вибрати дію, що має максимальний ступінь належності нечіткому рішення - множині D . Так, у розглянутому прикладі чітка рекомендація полягає в тому, щоб готуватися «на четвірку». Обґрунтованішим видається підхід, у якому децидентові надають лише нечітку інструкцію, а подальший вибір децидент виконує самостійно, ґрунтуючись, можливо, на інформації, не відображеній у моделі.

Приклад 11.8. Тут відображення φ не тотожне. Розглянемо завдання як для попереднього прикладу, якщо множини мети і обмеження ті самі, а функцію належності відображення φ задано наступною таблицею, і відображення φ змістовно відображає ризик отримати гіршу оцінку, ніж обраний рівень підготовки.

X	1	2	3	4	5
Y					
1	1	0,6	0	0	0
2	0	1	0,6	0	0
3	0	0	1	0,7	0,1
4	0	0	0	1	0,5
5	0	0	0	0	1

Для вирішення завдання необхідно за теоремою 11.1 знайти прообраз нечіткої множини мети при нечіткому відображенні. Пошук прообразу ілюструється наступною таблицею:

X	1	2	3	4	5
Y					
1	1	0,6	0	0	0
2	0	1	0,6	0	0
3	0	0	1	0,7	0,1
4	0	0	0	1	0,5
5	0	0	0	0	1

У ній сірим виділено елементи множини N . Очевидно, що дія $x = 5$ не належить до множини X^0 , тобто, за $\mu_A(5) = 1$. Для обчислення значення функції належності будь-якої іншої дії треба знайти мінімум функції належності мети Q на виділених елементах стовпців таблиці, що відповідають цій дії. Остаточний рішення дорівнює перетину множини прообразу з множиною обмежень C . Отримаємо таку функцію належності:

x	1	2	3	4	5
$\mu_D(y) = \min\{\tilde{\mu}_Q(x), \mu_C(y)\}$	0	0	0	0,5	0,3

Бачимо, що ризик одержати гіршу оцінку посилює нечіткі рекомендації - для досягнення мети вже потрібно «готуватися як мінімум на 4». І навіть при цьому достовірність досягнення мети в разі вибору рівня підготовки 4 виявляється нижчою, ніж у попередньому прикладі. Отже, невизначеність, що залишається в отриманому рішенні, - це наслідок нечіткості первісної задачі. Потрібно визначити, яким чином реалізувати нечітку інструкцію, тобто вирішити, яку альтернативу обрати. Один із найпоширеніших способів рекомендує обирати ту, що має найбільший ступінь належності до нечіткої множини:

$$x^* = \arg \max_{x \in X} \min\{\mu_Q(x), \mu_C(x)\}$$

Таке рішення називають максимізуючим.

11.3. Прийняття рішень у разі нечіткого відношення переваги

11.3.1. Нечіткі відношення переваги

Один з найважливіших етапів у процесі дослідження реальної ситуації прийняття рішення - це виявлення альтернатив (множини допустимих рішень). Залежно від наявної інформації таку множину можна описати з тим чи іншим ступенем чіткості.

Проблеми вибору за відношенням переваги

Нехай X -універсальна множина альтернатив, а $\mu_C(x)$ - нечіткий опис її підмножини допустимих альтернатив за допомогою функції належності.

Якщо немає жодної інформації, то раціональним вважають вибір довільної альтернативи з множини

$$X^D = \{x | (x \in X) \cap (\mu_C(x) = \sup_{y \in X} (\mu_C(y)))\}$$

Таким чином вибирають альтернативу з найбільшим значенням допустимості, тому що немає інших підстав для того, щоб віддати перевагу будь-якій іншій альтернативі.

Коли ж до цієї моделі введено додаткову інформацію, то раціональним може виявитися вибір із вузької підмножини множини X^C . Цю інформацію можна задавати різними способами. У розглянутому раніше способі є критерій якості, згідно з функціями належності якого та функціями належності обмежень виконується вибір.

Однак такий спосіб описання можливий не завжди, і універсальнішим є описання інформації в формі відношення переваги на множині альтернатив. Основний метод отримання цієї інформації - опитування експертів або консультації з децидентом (якщо експерти чи децидент мають знання про досліджуваний об'єкт, які не можна формалізувати внаслідок складності такого процесу чи з інших причин).

Припустімо, що за результатами опитувань виявлено чітке відношення нестрогої переваги (порядку) R на множині допустимих альтернатив X . Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ висловлено одне з припущень:

- 1) « x не гірша, ніж y », тобто $x \succcurlyeq y$, або $(x, y) \in R$;
- 2) « y не гірша, ніж x », тобто $y \succcurlyeq x$, або $(y, x) \in R$;
- 3) « x та y непорівняльні між собою», тобто $((x, y) \notin R) \cap ((y, x) \notin R)$.

Якщо є така інформація, то множину альтернатив можна звужити, побудувавши множину недомінованих Парето-оптимальних альтернатив. Виділимо відповідні до R відношення строгої переваги (повного порядку) R^S і відношення байдужості R^I . Нагадаємо, що для відношення повного порядку виконується умова $((x, y) \in R) \cap ((y, x) \notin R)$, для

оберненого до R відношення R^{-1} - умова $((x, y) \notin R^{-1}) \equiv ((y, x) \in R)$. Отже, відношення строгої переваги можна записати як $R^S = R \setminus R^{-1}$. Відповідне відношення байдужості визначають як таке, для якого водночас не виконується ні умова $x \succcurlyeq y$, ні $y \succcurlyeq x$, або ж вони виконуються водночас. Інакше кажучи, це відношення виконується, якщо наявної інформації в формі переваги недостатньо для того, щоб зробити вибір між x та y .

Відношення R^I записується в наступному вигляді:

$$R^I = ((X \times X) \setminus (R \cup R^{-1})) \cup (R \cap R^{-1})$$

Якщо $(x, y) \in R^S$, то вважатимемо, що альтернатива x домінує альтернативу y ($x \succ y$). Альтернатива $x \in X$ недомінована, коли $(y, x) \in R^S$ для будь-якої альтернативи $y \in X$. Отже, інформація у формі відношення переваги дає змогу звужити клас раціональних виборів до множини недомінованих альтернатив.

У реальних ситуаціях експерти чи децидент не можуть із повною впевненістю стверджувати, що альтернатива x не гірша за y . Якщо ж експерт вимушений чітко визначитися, то така модель може виявитися неадекватною до реальної ситуації. Гнучкіший спосіб формалізації наявних у експертів знань про реальну ситуацію полягає в тому, що експерти можуть зазначати ступінь своєї впевненості про переваги між альтернативами у вигляді числа з інтервалу $[0, 1]$. В цьому випадку за допомогою експерта можна побудувати, взагалі кажучи, нечітке відношення переваги на множині альтернатив, і кожній парі альтернатив поставити у відповідність число, що описує ступінь переваги.

Цей спосіб дозволяє повніше, порівняно з чіткою перевагою, ввести в математичну модель знання та уявлення експертів, тобто в певному розумінні наблизити модель до дійсності. Далі розглянемо, яким чином використовується подана в такому вигляді інформація для раціонального вибору альтернатив.

Нечіткі відношення переваги та їх властивості

Як уже було зазначено, нечітке відношення можна розглядати як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$, тому нечітке відношення переваги R на множині X описуватимемо функцією належності $\mu_R: X \times X \rightarrow [0, 1]$, що має властивість рефлексивності.

Означення 11.30. Нечітким відношенням нестрокої переваги R на заданій множині альтернатив X називається довільне задане на ній рефлексивне нечітке відношення. Якщо μ_R - нечітке відношення нестрокої переваги, то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_R(x, y)$ інтерпретують як ступінь виконання переваги « x не гірша за y », чи $x \succcurlyeq y$. Рівність $\mu_R(x, y) = 0$ означає одне з двох: або $\mu_R(y, x) > 0$, або альтернативи непорівняльні,

тобто $\mu_R(y, x) = 0$. Рефлексивність відображає той факт, що будь-яка альтернатива $x \in X$ не гірша за саму себе.

За заданим нечітким відношенням R нестрогої переваги на множині X можна однозначно визначити три відповідні до нього відношення: байдужості, квазієквівалентності та строгої переваги. Вони аналогічні відповідним звичайним чітким відношенням, а для отримання функції належності використовують означення операцій перетину, об'єднання та різниці нечітких множин.

Означення 11.31. Нечітким відношенням байдужості R^I називається відношення $R^I = ((X \times X) \setminus (R \cup R^{-1})) \cup (R \cap R^{-1})$ з функцією належності

$$\begin{aligned}\mu_{R^I}(x, y) &= \max\{1 - \max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}, \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}\} \\ &= \max\{\min\{1 - \mu_R(x, y), 1 - \mu_R(y, x)\}, \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}\}\end{aligned}$$

Означення 11.32. Нечітким відношенням квазієквівалентності R^E називається відношення $R^E = R \cap R^{-1}$ із функцією належності

$$\mu_{R^E}(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}$$

По суті, відношення квазієквівалентності описує нечітку еквівалентність, однак термін «відношення еквівалентності» вживають щодо нечітких відношень, які є рефлексивними, симетричними та транзитивними.

Означення 11.33. Нечітким відношенням строгої переваги R^S називається відношення $R^S = R \setminus R^{-1}$ із функцією належності

$$\mu_{R^S}(x, y) = \begin{cases} \mu_R(x, y) - \mu_R(y, x) & \text{при } \mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x) \\ 0 & \text{при } \mu_R(x, y) < \mu_R(y, x) \end{cases}$$

Приклад 11.9. Вважатимемо, що переваги студента на множині оцінок задано таким нечітким відношенням переваги:

R	y	1	2	3	4	5
x						
1		1	0	0	0	0
2		0	1	0,1	0	0
3		1	1	1	0,2	0
4		1	1	0,8	1	0,3
5		1	1	1	0,7	1

Потрібно побудувати відношення строгої переваги та байдужості. Використавши наведені вище співвідношення, отримаємо

R^S y	1	2	3	4	5	R^I y	1	2	3	4	5
x						x					
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	2	1	1	0,1	0	0
3	1	0,9	0	0	0	3	0	0,1	1	0,2	0
4	1	1	0,6	0	0	4	0	0	0,2	1	0,3
5	1	1	1	0,4	0	5	0	0	0	0,3	1

Отже, оцінки 1 і 2 байдужі студентів, тому що у відношенні переваги немає інформації про їх взаємну перевагу чи можливо, у нього немає досвіду їх одержання.

Наведемо основні властивості введених нечітких відношень, які легко доводяться самостійно.

1. Нечіткі відношення R^I і R^E є рефлексивними та симетричними.
2. Нечітке відношення R^S є антирефлексивним та антисиметричним.
3. Якщо нечітке відношення переваги R транзитивне, то транзитивним є і відповідне відношення квазіеквівалентності R^E .
4. Якщо нечітке відношення переваги R є транзитивним, то транзитивним буде і відповідне відношення строгої переваги R^S .

Лінійність нечітких відношень

Важлива властивість відношення переваги на множині X - це лінійність. Нагадаємо, що відношення називають лінійним, якщо воно чи обернене до нього відношення пов'язує будь-які два елементи (альтернативи) множини X , тобто немає непорівняльних альтернатив. Лінійність звичайного відношення еквівалентна умові $R \cup R^{-1} = X \times X$. Ще одна форма запису цієї властивості - $x\bar{R}y \Leftrightarrow yRx$, де $\bar{R}$ - доповнення до відношення R на множині $X \times X$, або з використанням функції належності чіткої множини - $\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$.

Для нечіткого відношення переваги можна однозначно означити лише повну відсутність лінійності: нечітке відношення μ_R не є лінійним тоді і лише тоді, коли існують такі альтернативи $x, y \in X$, для яких $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0$. Властивість лінійності нечіткої

множини можна узагальнити стосовно чіткої множини, запровадивши поняття ступеня лінійності відношення.

Означення 11.34. Нехай λ - певне число з інтервалу $[0, 1]$. Нечітке відношення R із функцією належності μ_R називається λ -лінійним, якщо для його функції належності виконується умова

$$\max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} > \lambda$$

Означення 11.35. Нечітке відношення R із функцією належності μ_R називається сильно лінійним, якщо для його функції належності для всіх $x, y \in X$ виконується умова $\max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = 1$.

Властивість сильної лінійності еквівалентна виконанню для всіх $x, y \in X$ умови

$$\mu_R(x, y) = 1 - \mu_R^S(x, y), \text{ де } \mu_R^S(x, y) - \text{функція належності відповідного відношення}$$

строого порядку. Цю умову можна записати і у вигляді $R^{-1} = (X \times X) \setminus R^S$.

Зміст поняття сильної лінійності наступний. Якщо, наприклад, альтернативи $x, y \in X$ такі, що $x \succ y$, тобто x строго краща (зі ступенем 1) за y , то $(y, x) \notin R^{-1}$. Коли ж що $x \prec y$, то $(y, x) \in R^{-1}$ тобто $y \succcurlyeq x$ зі ступенем 1.

З означення сильної лінійності випливає, що для сильно лінійного нечіткого відношення R на множині X і будь-яких двох альтернатив $x, y \in X$ виконується хоча б одна з умов $\mu_R(x, y) = 1, \mu_R(y, x) = 1$. Слабку, чи 0-лінійність, відповідно до означення 11.34 нечіткого лінійно відношення R на множині X можна означити так: відношення називається 0-лінійним, якщо для всіх $x, y \in X$ виконується умова $\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0$

Приклад 11.10. Визначити, якими є наступні нечіткі відношення переваги щодо лінійності, якщо $\lambda = 0,1$.

$$\mu_{R_1}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0,55 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & 0,3 & 1 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \mu_{R_2}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

Шляхом безпосередньої перевірки впевнюємося, що R_1 - 0,5-лінійне нечітке відношення, а R_2 - нечітке сильно лінійне відношення переваги.

11.3.2. Прийняття рішень за нечітким відношенням переваги

Звернімося до задачі раціонального вибору альтернатив із множини X , на якій задано нечітке відношення переваги $\mu_R: X \times X \rightarrow [0, 1]$. Зрозуміло, що для чіткої множини, коли немає будь-якої іншої інформації, доцільно обрати множину невідомінованих альтернатив як

підмножину допустимих. Спробуємо застосувати аналогічний підхід до задачі прийняття рішень у разі нечітко описаного відношення переваги на множині допустимих альтернатив. Спочатку розглянемо задачі, у яких саму множину альтернатив описано чітко, тобто у вигляді звичайної множини, а потім розглянемо загальніший випадок із нечіткою множиною альтернатив.

Нехай X - звичайна (чітка) множина допустимих рішень, μ_R - задане на ній у вигляді функції належності нечітке відношення нестрогої переваги. Нехай, окрім того, μ_R^S - відповідне до μ_R відношення строгої переваги. Спробуємо визначити підмножину недовідомованих альтернатив множини (X, μ_R) . Оскільки первісне відношення переваги нечітке, то і відповідна підмножина недовідомованих альтернатив також нечітка.

Процедура побудови підмножини недовідомованих альтернатив ґрунтується на таких положеннях. Згідно з означенням відношення μ_R^S , для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ значення μ_R^S - ступінь, з яким альтернатива y домінується альтернативою x . У цьому випадку за фіксованого значення $y \in X$ функцію $\mu_R^S(y, x)$ можна розглядати як функцію належності нечіткої множини «всіх» альтернатив x , строго домінованих альтернативою y . Нехай, наприклад, ступінь належності альтернативи x_0 до цієї множини, що відповідає якомусь фіксованому значенню y , становить 0,4. Це означає, що альтернатива x_0 домінується альтернативою y зі ступенем 0,4.

Отже, множина «всіх» альтернатив x , що не домінуються альтернативою y , є доповненням на X введеної множини $\mu_R^S(y, x)$. Згідно з означенням доповнення цю нову нечітку множину можна описати функцією належності $1 - \mu_R^S(y, x), x \in X$. Зрозуміло, що для виділення в X підмножини «всіх» недовідомованих альтернатив, потрібно взяти перетин таких нечітких множин за всіма $y \in X$. Він є нечіткою підмножиною недовідомованих альтернатив; позначимо його μ_R^{Par} .

Означення 11.36. Нехай X - множина альтернатив, - задане на ній нечітке відношення переваги. Нечітка підмножина недовідомованих альтернатив множини (X, μ_R) описується функцією належності

$$\mu_R^{Par}(x) = \inf_{y \in X} \{1 - \mu_R^S(y, x)\}, x \in X, \text{ чи } \mu_R^{Par}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x), x \in X. \quad (11.7)$$

Значення $\mu_R^{Par}(x)$ - це ступінь, з яким альтернативу x не домінує жодна з альтернатив множини X . Нехай $\mu_R^{Par}(x) = \alpha$ для деякої альтернативи x_0 . Тоді x_0 можуть домінувати інші альтернативи, але зі ступенем, не більшим за $1 - \alpha$. Справді, при цьому

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x_0) = 1 - \alpha$$

і $\mu_R^S(y, x_0) \leq 1 - \alpha$ - а для будь-якої альтернативи $y \in X$.

Теорема 11.2. Функція належності μ_R^{Par} нечіткої підмножини недомінованих альтернатив (X, μ_R^{Par}) пов'язана з функцією належності відповідного нечіткого відношення переваги співвідношенням

$$\mu_R^{Par}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \{ \mu_R(y, x) - \mu_R(x, y) \} \quad (11.8)$$

Приклад 11.13. На скінченній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задано нечітке відношення переваги

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,2	0,3	0,1
x_2	0,5	1	0,2	0,6
x_3	0,1	0,6	1	0,3
x_4	0,6	0,1	0,5	1

Потрібно побудувати функцію належності множини недомінованих альтернатив.

За означенням відношення строгої переваги спочатку обчислимо функцію належності строгого відношення переваги, що відповідає заданому нечіткому відношенню переваги.

Одержимо її у вигляді матриці

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0,2	0
x_2	0,3	0	0	0,5
x_3	0	0,4	0	0
x_4	0,5	0	0,2	0

Тепер за співвідношенням (11.8) визначимо функцію належності множини недомінованих рішень:

x_1	x_2	x_3	x_4
0,5	0,6	0,8	0,5

Найбільше значення ступеня недовіри має альтернатива x_3 , тому в межах аналізованого в цьому розділі підходу, її слід уважати раціональним вибором.

Властивості чітко недовірих альтернатив

Розглянемо задачу раціонального вибору альтернатив, коли для функції належності підмножини недовірих альтернатив виконується умова

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{Par}(x) = 1$$

Тоді для кожної альтернативи, що належить множині X^{Par} максимально недовірих альтернатив, $\mu_R^{Par}(x) = 1$, тобто ступінь недовірихості для кожної такої альтернативи дорівнює 1.

Означення 11.37. Підмножина чітко недовірих альтернатив множини альтернатив X - це множина альтернатив, для якої значення ступеня недовірихості дорівнює 1:

$$X^{ParG} = \{x | x \in X, \mu_R^{Par}(x) = 1\}.$$

Чітко недовірихі альтернативи є в певному розумінні чітким рішенням нечіткої задачі раціонального вибору, тому їх виявлення особливо актуальне в задачах прийняття рішень. Звичайно, не кожна задача має таке рішення, тому розглянемо властивості чітко недовірих альтернатив і сформулюємо деякі достатні умови їх існування.

У задачах раціонального вибору важливим є питання про еквівалентність чітко недовірих альтернатив. Їх можна порівнюватися лише щодо квазіеквівалентності. Якщо ж альтернативи не еквівалентні, то для обґрунтованого вибору доводиться залучати додаткову інформацію, зовнішню стосовно цієї математичної моделі. Якщо ж усі чітко недовірихі альтернативи еквівалентні зі ступенем 1, то додаткової інформації не потрібно, і раціональним буде вибір довільної їх кількості.

Еквівалентність альтернатив із проміжним між 0 і 1 значенням ступеня є проміжною ситуацією, у якій для обґрунтованого вибору конкретної альтернативи потрібно менше додаткової інформації порівняно з повною нееквівалентністю чисто недовірих альтернатив.

Із теореми 11.2 і означення 11.37 випливає співвідношення

$$\forall (x \in X^{ParG}): \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = 0 \quad (11.9)$$

де μ_R^S — нечітке відношення строгої переваги, що відповідає первісному нечіткому відношенню переваги μ_R . Наслідок зі співвідношення (11.9) - виконання умови

$$\forall (x_1, x_2 \in X^{ParG}): \mu_R^S(x_1, x_2) = \mu_R^S(x_2, x_1) = 0,$$

яка згідно з означенням відношення еквівалентна рівності $\mu_R^S(x_1, x_2) = \mu_R^S(x_2, x_1)$, і таким чином отримуємо:

$$\mu_R^I(x_1, x_2) = \max\{1 - \mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)\} \geq 0,5$$

тобто будь-які дві чітко недовізовані альтернативи пов'язані відношенням байдужості зі ступенем, більшим за 0,5.

Сформулюємо властивості чітко недовізованих альтернатив у вигляді теорем.

Теорема 11.3. Якщо μ_R - сильно лінійне нечітке відношення переваги на множині X , то для будь-якої альтернативи $x_0 \in X^{ParG}$ рівність $\mu_R(x_0, x) = 1$ виконується також і для будь-якої альтернативи $x \in X$.

Теорема 11.4. Якщо μ_R - сильно лінійне транзитивне нечітке відношення переваги на множині X та $y \notin X^{ParG}$, то для будь-якої альтернативи $x \in X$ виконується умова $\mu_R^E(x, y) > 0$.

Наслідок теорем 11.4. Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X сильно лінійне та транзитивне, $x_0 \in X^{ParG}$ та для деякої альтернативи $x \in X$ виконується умова $\mu_R^E(x, y) = 1$, то $x \in X^{ParG}$.

Цей наслідок дає змогу стверджувати, що за умови сильно лінійного транзитивного нечіткого відношення переваги μ_R на множині X чітко недовізовані альтернативи утворюють клас еквівалентності зі ступенем належності, що дорівнює 1, і будь-яка альтернатива, яка належить до цього класу, домінує будь-яку іншу альтернативу, що не належить до цього класу, із додатним ступенем належності.

Умови існування чітко недовізованих альтернатив

Існує два типи умов існування чітко недовізованих альтернатив. В умовах першого типу задане нечітке відношення переваги не вважають транзитивним, однак на функцію належності цього нечіткого відношення переваги та на множину X накладено певні топологічні умови і вимоги опуклості. Умови іншого типу сформульовано лише для скінченної множини X і транзитивного нечіткого відношення переваги μ_R .

Перед теоремами, у яких сформульовано умови існування чітко недовізованих альтернатив, нагадаємо в них поняття сідлової точки та антисиметричної функції, що в них використовуються.

Означення 11.38. Пара $(x_0, y_0) \in X \times X$ називається сідловою точкою функції $\varphi(x, y)$ (максимум за x , мінімум за y), якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконано нерівності $\varphi(x_0, y) \geq \varphi(x_0, y_0) \geq \varphi(x, y_0)$

Означення 11.39. Функція $\varphi(x, y)$ називається антисиметричною, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується рівність $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.

Наступні теорема та наслідок із неї стосуються умов існування першого типу.

Теорема 11.5. Якщо $\mu_R: X \times X \rightarrow [0, 1]$ - нечітке відношення переваги на множині альтернатив X , то $x_0 \in X$ є чітко недовіряваною альтернативою на множині (μ_R, X) тоді і лише тоді, коли пара (x_0, y_0) є сідловою точкою функції $\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x)$ на множині $X \times X$.

Із цієї теореми та властивостей антисиметричної функції безпосередньо впливає такий наслідок.

Наслідок із теореми 11.5. Елементи $x_0, y_0 \in X$ є чітко недовіряваними альтернативами на множині (μ_R, X) тоді і лише тоді, коли пара (x_0, y_0) - сідлова точка функції $(\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x))$ на множині $X \times X$.

Отже, будь-які умови, достатні для існування сідлової точки функції $\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x)$ на множині $X \times X$, достатні і для існування чітко недовіряваних альтернатив на множині (μ_R, X) .

Наступна умова існування чітко недовіряваних альтернатив належить до умов другого типу.

Теорема 11.6. У скінченній множині X із заданим на ній транзитивним нечітким відношенням переваги μ_R існує щонайменше одна чітко недовірявана альтернатива.

Із теорем 11.5 і 11.6 впливає, що транзитивність нечіткого відношення переваги є достатньою умовою існування сідлової точки функції $\mu_R(x, y) - \mu_R(y, x)$ на скінченній множині $X \times X$.

Розглянемо ілюстративний приклад транзитивного нечіткого відношення переваги на скінченній множині X .

Приклад 11.14. На скінченній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задано нечітке відношення переваги

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,7	0,8	0,5	0,5
x_2	0	0	0,3	0	0,2
x_3	0	0,7	1	0	0,2
x_4	0,6	1	0,9	1	0,6
x_5	0	0	0	0	1

Потрібно побудувати функцію належності множини недомінованих альтернатив.

Використавши означення відношення строгої переваги, визначимо спочатку функцію належності строгого відношення переваги, що відповідає заданому нечіткому відношенню переваги, у

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,7	0,8	0	0,5
x_2	0	0	0	0	0,2
x_3	0	0,4	0	0	0,2
x_4	0,1	1	0,9	0	0,6
x_5	0	0	0	0	0

За означенням функції належності нечіткої множини недомінованих альтернатив маємо

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,9	0	0,1	1	0,4

Отже, серед альтернатив множини (μ_R, X) є єдина чітко недомінована альтернатива x_4 , для якої $\mu_R^{Par}(x) = 1$. Вона з додатним значенням функції належності домінує над усіма іншими альтернативами. Якщо є додаткова (можливо, неформальна чи неструктурована) інформація, доцільно також розглянути і альтернативу x_1 .

11.3.3. Прийняття рішень у разі кількох нечітких відношень переваги

Задача вибору за кількома відношеннями переваги

Розглянемо задачу вибору альтернатив за кількома відношеннями переваги, поширивши результати на нечіткі відношення. Нехай задано множину альтернатив X , і якість кожної альтернативи характеризується кількома критеріями, при цьому не оцінено безпосередньо значенням того чи іншого критерію, а подано як відношення переваги на множині альтернатив.

Отже, потрібно зробити раціональний вибір, коли є інформація $(X, R_1, \dots, R_m)$ де X - множина альтернатив, $R_1, \dots, R_m$ - множина відношень переваги.

Спочатку розглянемо найпростішу ситуацію, коли відношення описано заданими функціями-критеріями $: X \rightarrow R_1$, де R_1 - числова вісь. Значення функції $Q_j(x)$ - це числова оцінка альтернативи x за критерієм Q_j . Альтернатива з більшим значенням критерію є

кращою в сенсі цього критерію. Завдання полягає в тому, щоб обрати раціональну альтернативу за декількома критеріями. Раціональним вибором у цьому разі є, як відомо, множина недовітованих альтернатив (тобто альтернатив, оптимальних за Парето).

З іншого боку, кожен критерій описує звичайне відношення переваги на множині X , що має вигляд $R_j = \{(x, y) | x, y \in X, Q_j(x) \geq Q_j(y)\}$. Нехай

$$U_1 = \bigcap_{j=1}^m R_j$$

У цьому випадку множина рішень, оптимальних за Парето (тобто множина всіх недовітованих альтернатив) збігається з множиною ефективних альтернатив для набору функцій, що відображають критерії якості.

Наведемо **алгоритм прийняття рішення для загальної задачі**, коли на множині альтернатив задано m нечітких відношень переваги $R_1, \dots, R_m$ та задано вагові коефіцієнти λ_j відносної важливості цих відношень.

1. Будуємо нечітке відношення U_1 (перетин первісних відношень):

$$\mu_{U_1}(x, y) = \min\{\lambda_1\mu_1(x, y), \lambda_2\mu_2(x, y), \dots, \lambda_m\mu_m(x, y)\}$$

та визначаємо нечітку підмножину недовітованих альтернатив у множині (X, μ_{U_1}) :

$$\mu_{U_1}^{Par}(x) = 1 - \sup_{y \in X} (\mu_{U_1}(y, x) - \mu_{U_1}(x, y))$$

2. Будуємо нечітке відношення U_2 (згортку відношень зі збереженням властивості рефлексивності):

$$\mu_{U_2}(x, y) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j(x, y)$$

та визначаємо нечітку підмножину недовітованих альтернатив у множині (X, μ_{U_2}) :

$$\mu_{U_2}^{Par}(x) = 1 - \sup_{y \in X} (\mu_{U_2}(y, x) - \mu_{U_2}(x, y))$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{U_1}^{Par} \cap \mu_{U_2}^{Par}$

$$\mu^{Par}(x) = \min\{\mu_{U_1}^{Par}(x), \mu_{U_2}^{Par}(x)\}$$

4. Раціональним вибором буде вибір альтернатив з множини

$$X^{Par} = \{x | x \in X, \mu^{Par}(x) = \sup_{y \in X} \mu^{Par}(y)\}.$$

Залежно від типу задачі раціональним можна вважати вибір не лише альтернатив, що належать до множини X^{Par} , але і у певному розумінні слабодомінованих альтернатив (чи не дуже сильно недомінованих), тобто таких, що належать до множини μ^{Par} зі ступенем, не меншим за певне задане граничне значення.

Приклад 11.15. На скінченній множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задано три рівноважливі відношення переваги:

R_1	x_1	x_2	x_3	R_2	x_1	x_2	x_3	R_3	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	0	x_1	1	1	1	x_1	1	1	0
x_2	1	1	0	x_2	0	1	1	x_2	1	1	0
x_3	0	0	1	x_3	0	0	1	x_3	1	0	1

Потрібно побудувати множину недомінованих альтернатив.

Розв'яжемо задачу за вищенаведеним алгоритмом.

1. Будуємо відношення $U_1 = R_1 \cap R_2 \cap R_3$:

$$\mu_{U_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{U_1}) :

$$\mu_{U_1}^{Par}(x_i) = \{1 \ 0 \ 1\}.$$

2. Будуємо відношення $U_2 = 1/3(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j) + \mu_3(x_i, x_j))$:

$$\mu_{U_2}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{U_2}) :

$$\mu_{U_2}^{Par}(x_i) = \{1 \ 2/3 \ 1/3\}.$$

3. Знаходимо результуючу множину недомінованих альтернатив як перетин $\mu_{U_1}^{Par} \cap \mu_{U_2}^{Par}$:

$$\mu^{Par}(x_i) = \{1 \ 0 \ 1/3\}.$$

4. Раціональний вибір у цьому прикладі - це обрання альтернативи x_1 яка має максимальний ступінь недомінованості.

11.4. Раціональний вибір на нечіткій множині альтернатив

У задачах, розглянутих у цьому розділі, була чітка множина альтернатив X , а відношення переваги - нечіткі. Однак на практиці можливі також ситуації, коли множина альтернатив також нечітка. Коротко розглянемо, як розв'язувати такі задачі, тому що вони врешті-решт зводяться до задачі прийняття рішення на чіткій множині альтернатив.

Узагальнена задача формулюється наступним чином. Нехай X - універсальна множина альтернатив. На ній задано нечітку підмножину допустимих альтернатив $\nu : X \rightarrow [0,1]$. Задане на X нечітке відношення переваги позначимо як $\mu_R(x, y)$.

Чим ця задача відрізняється від попередніх? У задачах зі звичайною множиною допустимих альтернатив раціональний вибір залежить лише від заданих на множині X нечітких відношень переваги. Натомість у загальній задачі окрім переваг на множині альтернатив слід також зважати на різницю в ступені допустимості альтернатив. Зрозуміло, що слід надавати перевагу альтернативам із більшим значенням ступеня допустимості, тобто тим, яким відповідає більше значення функції $\nu(x)$.

Отже, розглядаючи проблему раціонального вибору за умов нечіткої множини альтернатив, потрібно також брати до уваги відношення переваги, індуковане на множині X функцією ν :

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } \nu(x) \geq \nu(y) \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Завдяки цьому додатковому відношенню задачу з нечітко описаною множиною допустимих альтернатив можна звести до задачі з чіткою множиною альтернатив і додатковим відношенням переваги, для розв'язання якої можна застосувати розглянутий алгоритм.

Список рекомендованої літератури

1. Катренко А.В. Теорія прийняття рішень / А.В. Катренко, В.А. Пасічник, В.П. Пасько. – К.: Видавнича група BVH, 2009. – 448 с.
2. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.
3. Групове експертне оцінювання та компетентність експертів / [О. М. Величко, Л. В. Коломієць, Т. Б. Гордієнко та ін.]; за загал. ред. д-ра техн. наук О. М. Величка. – Одеса: ФОП Бондаренко М.О., 2015. – 286 с.
4. Теорія прийняття рішень. Підручник / [М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко та ін.]; за заг. ред. М. П. Бутка. – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
5. Кушлик-Дивульська О.І. Основи теорії прийняття рішень. Навчальний посібник / О.І. Кушлик-Дивульська., Б.Р. Кушлик. – К., 2014. – 94 с.
6. Яровий А. Т. Багатовимірний статистичний аналіз : начально-методичний посібник для студентів математичних та економічних фахів / А. Т. Яровий, Є. М. Страхов. – Одеса: Астропринт, 2015. – 132 с.

Список використаної літератури

1. Ackoff R. The art of problem solving / Russel L. Ackoff. – New York: John Wiley & Sons, 1978. – 214 p.
2. Fishburn P. Utility Theory for Decision Making / Peter C. Fishburn. –New York: Wiley, 1970. – 274 p.
3. Neumann J. Theory of Games and Economic Behavior / John Von Neumann, Oskar Morgenstern – J. Wiley, 1967. – 641 p.
4. Dubois D. Fuzzy sets and systems: Theory and aplication / D. Dubois, H. Prade. –New York: Acad Press, 1980.
5. Kickert W.Y.M. Fuzzy theories on decision-making. / Kickert W.Y.M. — Martinus Nijhoff Social Sciences Division, Netherlands, 1978.
6. Kitainik L. Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations. Towards a Unified Theory / Kitainik L. — Kluwer, Boston, 1993.