Інститут спеціального зв’язку та захисту інформації
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського

Самборський І.І., Шолохов С.М., Юрченко О.В.,
Ніколаєнко Б.А.

ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Навчальний посібник

Вченою радою ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти ступенів «бакалавр»
та «магістр»
за спеціальностями 172 Електронні комунікації та радіотехніка та
122 Комп'ютерні науки

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 621.391 (076.5)
ББК 32.811

Гриф надано Вченою радою ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 12 від 26 грудня 2021)

Рецензенти***: Павленко П.М.***, *д.т.н., професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор Інституту інформаційно-діагностичних систем Національного авіаційного університету;*
Кононов О.А., *д.т.н., доцент, заступник начальника Державного науково-дослідного інституту авіації;*
Соколов В.В. *к.т.н., доцент, доцент кафедри Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».*

Самборський І.І., Шолохов С.М., Юрченко О.В., Ніколаєнко Б.А., Основи цифрової обробки сигналів: навчальний посібник. Київ: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с.

У навчальному посібнику викладено основні поняття теорії цифрової обробки сигналів, акцентовано увагу на її основних операціях. Наведено типові задачі щодо практичної реалізації цих операцій в імітаційних моделях процесів цифрової обробки сигналів з використанням середовища моделювання MATLAB.

Для студентів та курсантів які навчаються за спеціальностями «Телекомунікації та радіотехніка», «Комп'ютерні науки», «Безпека інформаційних і комунікаційних систем».

Матеріал навчального посібника представлений в систематизованому вигляді, що сприяє засвоєнню навчального матеріалу.

ЗМІСТ

ВСТУП

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) сьогодні є головний напрям розвитку таких ключових галузей, як телекомунікації, цифрове телебачення, біомедицина та цифровий звукозапис. Сьогодні ЦОС є головним видом новітніх електронних розробок у різних застосуваннях інформаційного суспільства (наприклад, цифровий мобільний зв'язок, цифрові відеокамери, телебачення, системи звукозапису). У сучасному світі від інженерів-програмістів та фахівців-зв'язківців все більше вимагається уміння працювати з технологіями ЦОС.

Стосовно до задач зв'язку і управління цифрова обробка сигналів необхідна для побудови нових поколінь апаратури передачі та обробки інформації, впровадження цифрових методів у телекомунікаційних системах.

Даний посібник розглядає теоретичні основи базових операцій цифрової обробки сигналів та алгоритмів їх реалізації, демонструючи їхню сутність, взаємозв'язок та області застосування. Для підтримки тісного зв'язку теорії з практикою викладені теми супроводжуються наданням практичних прикладів. У посібнику стисло розглядається більшість аспектів даного предмету, які зустрічаються в курсах електротехніки, електроніки та техніки зв'язку. Особлива увага приділяється практичним аспектам.

Навчальний посібник призначений для курсантів (студентів), які навчаються за спеціальностями зв'язку та мають набути теоретичних та практичних знань у галузі цифрової обробки сигналів.

Посібник допоможе тим, хто вивчає телекомунікаційні засоби, оволодіти загальними курсами навчання, у підготовці курсових робіт та при подальшому вивченні дисциплін за спеціальністю..

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ЦОС – цифрова обробка сигналу;
ТКС – телекомунікаційна система;
ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач;
АЦП – аналого-цифоровий перетворювач;
АКФ – автокореляційна функція;
ASK – amplitude shift keying;
PSK – phase shift keying;
FSK – frequency shift keying;
PCM – pulse code modulation.

1. ОСНОВИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ОБРОБКИ СИГНАЛІВ У СУЧАСНИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ЗАСОБАХ

1.1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ ТА ОБЛАСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ЦОС

Для реалізації взаємодії систем ЦОС із реальним світом показана необхідність аналогового інтерфейсу вводу-виводу, що здійснює перехід від аналогового формату до цифрового.

Матеріал розділу дозволяє зрозуміти умови успішної розробки систем цифрової обробки сигналів реального часу з аналоговим входом/виходом, сприяє розумінню питань проектування зазначеного інтерфейсу.

Також з практичної точки зору розглядається обробка сигналів на різних швидкостях. Розглянуті питання перетворення частоти дискретизації дозволяють забезпечити прикладне розуміння принципів зменшення та збільшення частоти дискретизації, теорії перетворення частоти в декілька етапів, задач визначення параметрів конверторів та їхньої подальшої реалізації

На протязі останніх років ЦОС активізує свій вплив на такі ключові технологічні галузі як телекомунікації, цифрове телебачення, засоби інформатизації тощо.

Сьогодні ЦОС є основою новітніх цифрових розробок та різних додатків в інформаційному суспільстві (наприклад, цифровий мобільний зв’язок, телебачення).

1.1.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ ЦОС

Обробка цифрового сигналу зазвичай потрібна для усунення інтерференції чи шуму, отримання спектра даних чи перетворення сигналу у більш зручну форму.

ЦОС застосовується в будь-якій області, де інформація надається у цифровому вигляді чи контролюється цифровим процесором. До таких областей можна віднести:

- обробка зображень (розпізнавання образів, машинний зір, покращення зображення, супутникові системи);
- інструментальні засоби, інструментальний контроль (спектральний аналіз, контроль положення і швидкості, зниження шуму, стискання інформації);
- мова/аудіо (розпізнавання мови, синтез мови, озвучення тексту, цифрові аудіо системи, вирівнювання);

- військові цілі (безпечний зв'язок, робота з радарами та сонарами, управління ракетами);
- телекомунікації (усунення відлуння, адаптивне вирівнювання, транскодери ADPCM (пристрій ущільнення та зворотного розущільнення потоку даних з адаптивною імпульсно-кодовою модуляцією – ADaptive Pulse Code Modulation), розширення спектру, відеоконференцзв'язок, передача даних);
- біомедицина;
- споживчі цілі (цифрові стільникові мобільні телефони, універсальна мобільна система зв'язку, цифрове телебачення, цифрові камери, телефонний зв'язок, музика та відео через Internet, цифрові автовідповідачі, факси та модеми, системи голосової пошти, інтерактивні розважальні системи, активна підвіска в автомобілях) тощо.

ЦОС - одна з ключових технологій в області мобільного зв'язку. ЦОС інтенсивно використовується для обробки сигналів та інформації на базових станціях і в самих мобільних телефонах.

У мобільному зв'язку ЦОС використовується для кодування мови, вирівнювання сигналів після багатопроменевого розповсюдження, виміру сили та якості сигналу, передачі мовних повідомлень, кодування з виправленням помилок, модуляції та демодуляції.

А у системі GSM кодек мови заснований на системі збудження регулярними імпульсами з лінійним кодуванням з передбаченням (Regular Pulse Excitation, Linear Predictive Coding - RPE-LPC). На відміну від системи PSTN, в якій мова кодується зі швидкістю 64 чи 32 Кбіт/с (адаптивна диференціальна імпульсно-кодова модуляція ADPCM), в мобільному радіотелефонному зв'язку кодування мови здійснюється з відносно невисокою швидкістю 13 Кбіт/с з метою ефективного використання спектра радіочастот. Алгоритм кодування мови для систем GSM реалізований в самих розповсюджених процесорах ЦОС (таких як Motorola C56000, Texas Instrument TMS320C50). Даний кодек замінює 13-розрядні лінійні ЦАП та АЦП.

Розглянемо ефект багатопроменевого розповсюдження, який призводить до флуктуації амплітуди та фази сумарного сигналу в приймачі, можна знизити, використавши цифрове вирівнювання в приймачі.

Для цього через регулярні проміжки передається відома послідовність сигналів довжиною 26 біт. По закінченню прийому еквалайзер, використовуючи цю опорну послідовність, визначає коефіцієнти цифрового фільтра, оцінює характеристики отриманого радіосигналу і, таким чином, усуває ефект багатопроменевого розповсюдження із отриманих даних. Якщо відома передаточна функція, приймач може визначити найбільш імовірну послідовність бітів, що передаються, та демодулювати сигнал.

Методи ЦОС також застосовуються для цифрової модуляції, зокрема, для обробки на декількох швидкостях.

Також ЦОС дає можливість виміряти силу отриманого сигналу, щоб перемкнути зв'язок, та регулювати через базову станцію рівень вихідної потужності мобільного телефону. В мережі GSM мобільний телефон слідкує за сигналами від оточуючих базових станцій. Рішення про зміну потужності, що передається, приймається на основі рівня та якості сигналу, що приймається.

При мобільному радіозв'язку виникає багато помилок, наприклад, обумовлених випадковою інтерференцією чи затуханням. В системі GSM для зменшення впливу цих помилок використовується метод згорточного кодування.

У цифровому телебаченні ЦОС відіграє ключову роль в обробці сигналу, кодуванні та модуляції/демодуляції відео- та аудіо сигналів від точки сприйняття сигналу до моменту його появи на екрані телевізора. Наприклад, ЦОС лежить в основі алгоритмів кодування MPEG, які використовуються для стиснення відео- та аудіо інформації перед їхньою передачею (для ефективного використання ширини смуги). Головний елемент алгоритму MPEG - це дискретне косинус-перетворення.

У системах зв'язку з різних причин може виникати ефект відлуння. Якщо телефонний дзвінок робиться із великої відстані (наприклад, через навколоземний супутник), то відлуння може затриматися на 540 мс та викликати завади, що дратують користувачів. Для вирішення цієї проблеми в мережі встановлюються пари компенсаторів відлуння.

Компенсація здійснюється за допомогою оцінки відлуння та віднімання його із поверненого сигналу.

1.1.2. СПЕЦИФІКА РЕАЛІЗАЦІЇ ЦОС

Привабливість ЦОС обумовлена такими основними *перевагами*:

- гарантована точність (визначається тільки числом задіяних бітів);
- досконале відтворення (можна ідентично відтворити кожен елемент, оскільки відсутні відхилення, що обумовлені стійкістю окремих складових; наприклад, використовуючи методи ЦОС, цифрові записи можна копіювати та відтворювати багаторазово без погіршення якості сигналу);
- відсутність спотворення характеристик через температуру чи старість;
- напівпровідникові технології дозволяють підвищити надійність, зменшити розміри, знизити вартість, понизити енергоспоживання та збільшити швидкість роботи;
- велика гнучкість (системи ЦОС можна запрограмувати та перепрограмувати на виконання різних функцій без зміни обладнання);
- відмінна продуктивність (ЦОС можна використовувати для виконання функцій, які неможливі при аналоговій обробці сигналів; наприклад, можна отримати лінійну фазову характеристику та реалізувати складні алгоритми адаптивної фільтрації);

- в деяких випадках інформація вже може бути записана в цифровому вигляді, і обробити її можна тільки методами ЦОС.

ЦОС має і свої недоліки, проте завдяки сучасним технологіям значення цих недоліків постійно зменшується:

- швидкість та витрати (проекти ЦОС можуть бути коштовними при великій ширині смуги сигналу; зараз швидкісні АЦП/ЦАП або надто коштовні, або не володіють достатньою роздільною здатністю для великої ширини смуги – спеціалізовані мікросхеми для обробки сигналів в мегагерцовому діапазоні достатньо коштовні, а сигнали з шириною порядку 100 МГц в основному обробляються аналоговими методами);
- час на розробку (без наявності методик ЦОС та необхідних ресурсів, наприклад, програмних пакетів, розробка засобів ЦОС буде займати дуже багато часу, а в деяких випадках майже неможлива);
- проблема скінченої розрядності (в реальних ситуаціях з економічних міркувань використовують в алгоритмах ЦОС обмежену кількість бітів; якщо для представлення певної змінної задіяна недостатня кількість бітів, в деяких системах ЦОС це приводить до суттєвого зниження якості роботи системи).

1.1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ОПИС СИГНАЛІВ

Під сигналом ми розуміємо будь-яку змінну, яка передає чи містить деякий вид інформації, та з якою можна виконувати деякі дії. У телекомунікаціях особливий інтерес являють такі типи сигналів:

- звукові, наприклад, при розмові по телефону, прослуховуванні радіо, у повсякденному житті;
- відео- та телезображення тощо.

Більшість сигналів, що існують у природі, є за своєю суттю аналоговими, що часто означає неперервну зміну в часі, та описують зміни фізичних величин (наприклад, звукові хвилі). Сигнали, що застосовуються в ЦОС, зазвичай отримуються з аналогових сигналів, які дискретизовані через рівні інтервали часу та перетворені в цифровий вид (тобто у вигляді бінарних кодових слів).

Якщо неперервний в часі (аналоговий) сигнал подається як неперервна функція у часі $x(t)$, то отриманий з аналогового дискретний сигнал є послідовністю чисел – послідовних вибірок аналогового сигналу, взятих через рівні проміжки часу T. Період T називають *періодом дискретизації*, а величину $F_s = 1/T$ – *частотою дискретизації*.

Отже, дискретний сигнал можна записати як послідовність $x(nT)$, де $n = 0,1,2,...$, або просто $x(n)$.

1.1.4. ВІДОМОСТІ ПРО ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Для всіх алгоритмів ЦОС застосовуються одні і ті ж основні операції:

a) згортка;

b) кореляція;

c) фільтрація;

d) перетворення;

e) модуляція.

Для всіх основних операцій ЦОС потребується виконання тільки простих арифметичних дій – добутку, додавання, віднімання та операції зсуву.

Системи ЦОС характеризуються виконанням операцій в реальному часі, причому акцент робиться на високій пропускній спроможності, а використання алгоритмів потребує інтенсивних арифметичних операцій, особливо множення та додавання чи множення-накопичення. Це призводить до великого потоку інформації через процесор.

Структура стандартних мікропроцесорів не задовольняє характеристикам ЦОС. Це стало поштовхом для розвитку нового виду процесорів, структура і набір команд яких призначені спеціально для операцій ЦОС. Нові процесори ЦОС мають наступні *особливості*:

- вбудовані множники, що дозволяють швидко виконувати операції множення (нові чіпи ЦОС містять однотактові команди множення-накопичення, а в деяких є декілька множників, що працюють паралельно);
- окремі шини/області пам'яті для програм і даних (добре відома гарвардська архітектура, яка дозволяє перекриватися в часі процесам вилучення команд із пам'яті та їхнього виконання);
- команди, що містять цикли, які використовуються для розгалуження утворення циклів;
- дуже велика швидкість (наприклад, тактова частота процесора TMS320C25 дорівнює 40 МГц, а час одного такту - 100 нс);
- використання конвеєрної обробки, що скорочує час, необхідний для виконання команд, та збільшує швидкість.

Згортка. Згортка – одна з операцій, що найбільше використовується. Це основна операція цифрової фільтрації. Для двох даних скінченних та причинних послідовностей $x(n)$ та $h(n)$ з довжиною N_1 та N_2 відповідно їхня згортка визначається як

$$y(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k),$$
$$n = \overline{0,1,\dots M-1},$$

де символ $\circledast$ використовується для позначення згортки, $M = N_1 + N_2 - 1$.

Згортка в часових координатах еквівалентна множенню в частотній області. В частотній області вихід системи на частоті f дорівнює

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

де $H(f)$ – частотна характеристика системи на частоті f, $X(f)$ – Фур'є-образ входу $x(t)$.

Кореляція. Якщо два сигнали схоже змінюються при переході від точки до точки, то міру їхньої кореляції можна обчислити, взявши суму добутків відповідних пар точок.

Взаємно-кореляційна функція (ВКФ) – це показник збіжності чи загальних властивостей двох сигналів.

Для двох послідовностей $x(k)$ та $y(k)$ довжини N з нульовими середніми значеннями ВКФ визначається за формулою

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де $r_{xy}(n)$ – оцінка взаємної коваріантності, визначається як

$$r_{xy}(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-n-1} x(k)y\,(k+n), & n = 0,1,2,\ldots \\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N+n-1} x(k-n)y\,(k), & n = 0,-1,-2,\ldots \end{cases}$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[x(k)]^2, r_{yy}(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[y(k)]^2.$$

Автокореляційна функція (АКФ) передбачає існування тільки одного сигналу та дає інформацію про структуру сигналу та його поведінку в часі. Для послідовності $x(k)$ довжини N з нульовим середнім значенням визначається за формулою

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де $r_{xx}(n)$ – оцінка автоковаріантності, визначається як

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-n-1} x(k)x\,(k+n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Цифрова фільтрація. Визначається як

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k), \qquad n=\overline{0,1,\ldots N-1}\,,$$

де $h(k)$ – коефіцієнти фільтра, $x(n)$ – вхід фільтра, $y(n)$ – вихід фільтра.

Фільтрація – це, по суті, згортка сигналу з імпульсною характеристикою фільтра в часових координатах.

Як правило, метою фільтрації є усунення чи зниження шуму в корисному сигналі. Цифровий фільтр використовується в основному для мінімізації спотворень внутрішньосмугових компонентів сигналу.

Дискретні перетворення. Дискретне перетворення дозволяє описувати сигнали з дискретним часом в частотних координатах чи переходити від опису в часовій області до опису в частотній. Для отримання спектра сигнал розкладається на частотні складові за допомогою дискретного перетворення. Знання такого спектру неоціниме, наприклад, при визначенні ширини смуги, яка необхідна для передачі сигналу. Перехід від часових координат до частотних необхідний в багатьох додатках ЦОС. Він дозволяє більш ефективно реалізувати такі алгоритми ЦОС, як цифрова фільтрація, згортка та кореляція.

Існує багато дискретних перетворень. Самим розповсюдженим є *дискретне перетворення Фур'є* (ДПФ), яке визначається наступним чином

$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)W^{kn}, \qquad W^{kn}=e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}.$$

Приклад використання ДПФ наведено на рис. 1.1. За допомогою ДПФ імпульсна характеристика фільтра перетворюється в частотну.

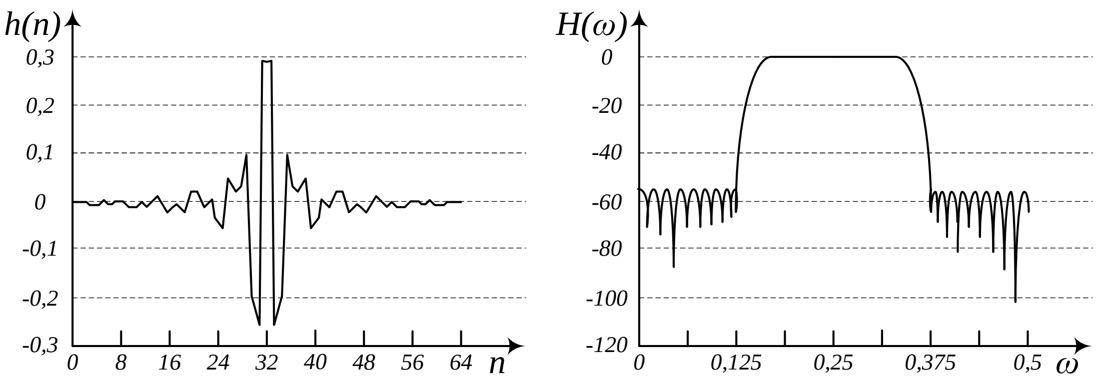


Рис. 1.1. Опис цифрового фільтра в часових та частотних координатах

Модуляція. Цифрові сигнали не передаються на великі відстані чи зберігаються у великому об’ємі в необробленому вигляді. Зазвичай сигнали модулюються таким чином, щоб їхні частотні характеристики співпадали з характеристиками засобів передачі та/чи зберігання для мінімізації спотворень сигналу, ефективного використання доступної ширини смуги та надання сигналам деяких бажаних властивостей. Найбільш інтенсивно модуляція сигналу використовується у зв’язку та цифрових аудіосистемах.

Процес модуляції часто призводить до зміни властивостей високочастотного сигналу, відомого як несівна частота, у відповідності з сигналом, який потрібно передати чи зберегти, що називається модулюючим сигналом. Три самі розповсюджені схеми цифрової модуляції для передачі цифрової інформації по широкосмуговому каналу (наприклад, радіорелейній лінії) – це амплітудна (*англ.* amplitude shift keying – ASK), фазова (phase shift keying – PSK) та частотна маніпуляції (*англ.* frequency shift keying – FSK). Якщо цифрові дані передаються по повністю цифровій мережі, зазвичай користуються схемою, відомою як імпульсно-кодова модуляція (*англ.* pulse code modulation – PCM). Для цифрових аудіосистем було розроблено декілька інших схем модуляції.

1.2. ОСНОВИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ У ТКС

У багатьох реальних застосуваннях сигнали мають аналогову форму, а ЦОС оперує з цифровими даними. Тому є необхідним аналоговий інтерфейс вводу-виводу, який дозволяє здійснювати перехід від аналогового формату до цифрового та навпаки. В системах ЦОС реального часу аналоговий інтерфейс вводу-виводу є слабким ланцюгом, оскільки він вносить неусувну погрішність та обмежує швидкість роботи.

Блок-схема типової системи ЦОС, що працює в реальному часі, зображена на рис. 1.2.

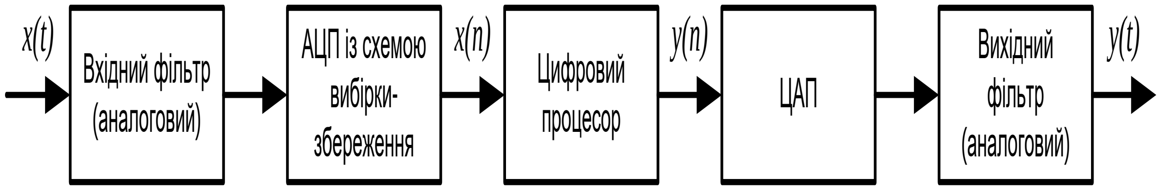


Рис. 1.2. Спрощена структурна схема системи ЦОС

Аналоговий вхідний фільтр використовується для обмеження смуги частот вхідного аналогового сигналу перед його оцифровуванням, щоб зменшити накладення.

АЦП трансформує аналоговий вхідний сигнал в цифрову форму.

Якщо у сигналу широка смуга частот чи застосовується низькошвидкісний АЦП, то перед оцифровуванням сигналу потрібно скористатися схемою вибірки-сховища, в новітніх АЦП такі схеми вже вбудовані.

Цифровий процесор може виконувати один із декількох алгоритмів ЦОС, наприклад, цифрову фільтрацію, та відображати вхід $x(n)$ у вихід $y(n)$.

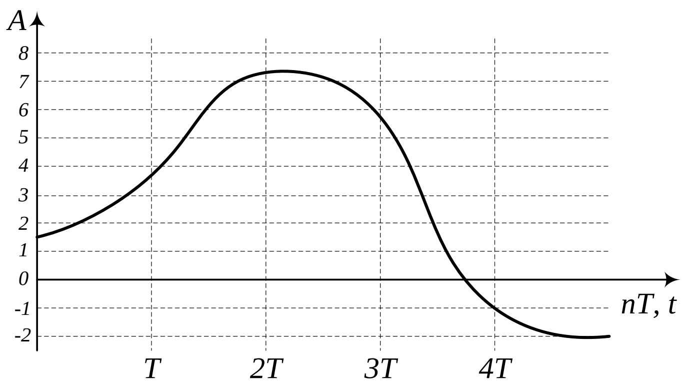
Після цифрової обробки ЦАП знову перетворює оброблений сигнал в аналогову форму.

Вихідний фільтр згладжує вихід ЦАП та усуває небажані високочастотні компоненти.

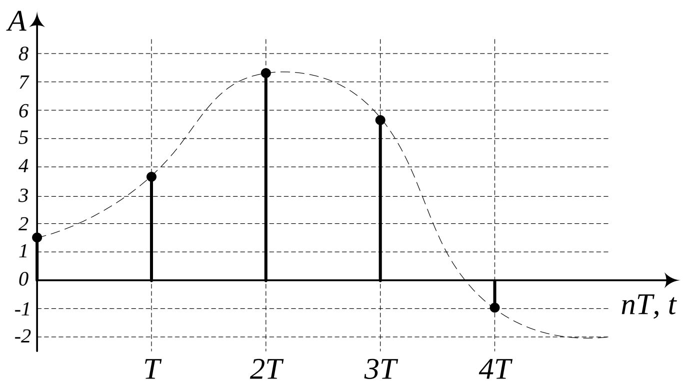
1.2.1. ПРОЦЕС АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Етапи перетворення та типи сигналів. Процес представлення аналогового сигналу у цифровому вигляді називають аналого-цифровим перетворенням, а пристрій, що його реалізує, – аналого-цифровим перетворювачем (АЦП, цифро-аналоговий перетворювач – ЦАП). Цей процес складається з наступних етапів:

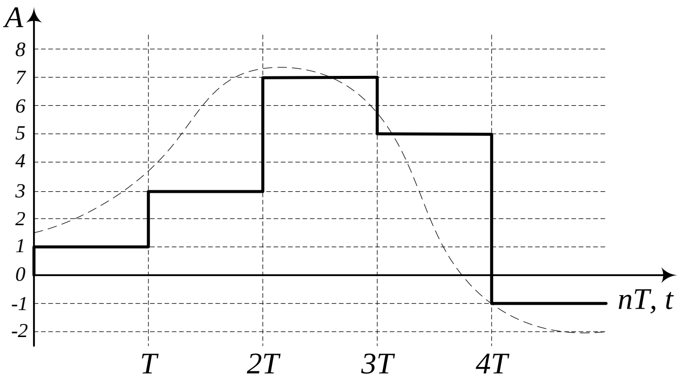
1. Сигнал з обмеженою смугою частот (рис. 1.3, а) дискретизується, тобто аналоговий сигнал перетворюється у дискретний за часом з неперервною амплітудою (рис. 1.3, б).



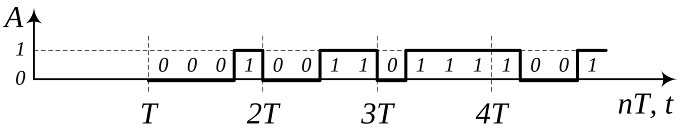
а)



б)



в)



г)

Рис. 1.3. Аналого-цифрове перетворення сигналів:
а) аналоговий сигнал;
б) дискретний за часом сигнал з неперервною амплітудою;
в) дискретний квантований сигнал, заморожений на період дискретизації;
г) цифровий сигнал – кодове слово.

2. Амплітуда кожного дискретного елемента сигналу квантується в один із 2^B рівнів, де B – число бітів, якими амплітуда дискретної вибірки представлена в АЦП. За необхідності квантована амплітуда дискретної вибірки сигналу може заморожуватися на період дискретизації (рис. 1.3, в).

3. Дискретні рівні амплітуди надаються чи кодуються у вигляді різних бінарних слів, кожне з яких має довжину B біт (рис. 1.3, г).

На рисунку можна виділити три різних типи сигналу:

аналоговий вхідний сигнал неперервний як за часом, так і за амплітудою;

дискретний сигнал, неперервний за амплітудою, але визначений тільки в дискретні моменти часу;

цифровий сигнал $x(n)$ $(n = 0,1,\ldots)$ існує тільки в дискретних точках за часом та в кожній часовій точці може мати одне з 2^B значень (дискретний за часом сигнал з дискретною амплітудою).

Дискретний за часом і цифровий сигнали можна передати у вигляді послідовностей чисел $x(nT)$, чи просто $x(n)$ $(n = 0,1,\ldots)$.

Дискретизація. Дискретизація – це визначення значень неперервного сигналу в дискретні моменти часу.

На практиці частіше за все зустрічається два види дискретизації – дискретизація низькочастотних сигналів та смугових сигналів. Дискретизацію смугових сигналів можна розглядати як частковий випадок більш загальної низькочастотної дискретизації.

Дискретизація низькочастотних сигналів.

Теорема про дискретне представлення відома також як теорема Котельникова, теорема Найквіста, теорема відліків. Якщо f_{max} – самий високочастотний компонент сигналу, то, щоб елементи вибірки повністю описували сигнал, дискретизація сигналу повинна здійснюватися з частотою не нижче $2f_{max}$:

$$F_s \geq 2f_{max} ,$$

де F_s – частота дискретизації.

Дискретизація з частотою, меншою за ту, що дає теорема, приведе до перегинів чи накладенню дзеркальних частот в частотній області, яка нас цікавить. Якщо захочеться перетворити дискретну інформацію назад в аналогову, сигнал буде вже неможливо відновити. Важливо пам'ятати, що значна доля енергії сигналу може попадати за межі частотної області, що нас цікавить, та/чи сигнал може містити шум, ширина смуги якого завжди буде більшою. Наприклад, в телефонному зв'язку сама висока із важливих частот складає приблизно 3,4 кГц, але частоти звукового сигналу можуть перевищувати 10 кГц. Тому, якщо не видалити зайвий сигнал чи шум за межі смуги частот, що нас цікавлять, теорема про дискретне представлення виконуватися не буде. На практиці це досягається шляхом попереднього пропускання сигналу через аналоговий фільтр захисту від накладення спектрів.

Припустимо, ми виконали дискретизацію сигналу в певній часовій області з інтервалом T (в секундах) (частота дискретизації дорівнює $1/T$ в герцах). Видно, рис. 1.4, що в початковому сигналі є ще одна частотна складова з таким же набором дискретних значень. Отже, цей частотний компонент можна помилково прийняти за компонент з нижчою частотою. Це і є накладення.

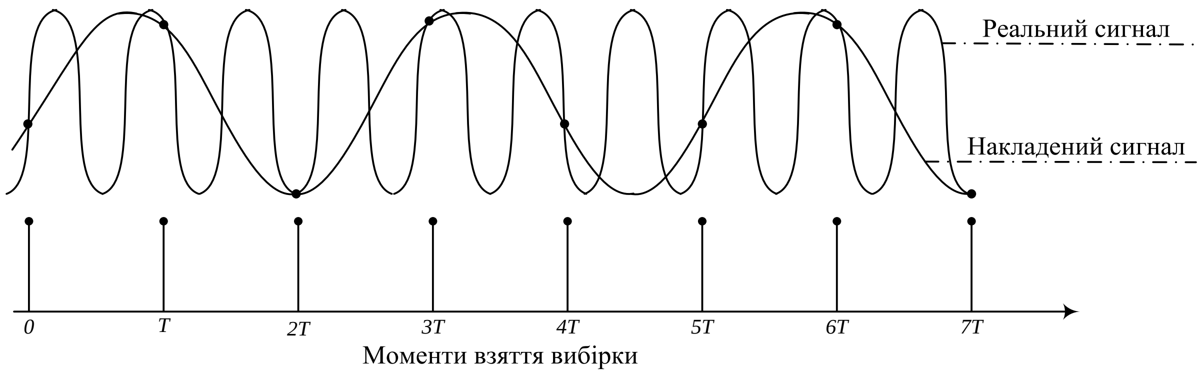


Рис. 1.4. Приклад накладення сигналів у часових координатах

Однорідне квантування та кодування (імпульсно-кодова модуляція,

ІКМ).

При однорідному квантуванні і кодуванні кожній аналоговій вибірці присвоюється одне з 2^B значень, де B – кількість бітів АЦП. Цей процес, званий квантуванням, вносить неусувну погрішність. Рівень цієї погрішності є функцією числа бітів АЦП, яке приблизно дорівнює половині мінімального значення бітів (передбачаючи округлення).

Для АЦП з B двійковими цифрами кількість рівнів квантування дорівнює 2^B, а відстань між рівнями, тобто розмір кроку квантування q, задається як

$$q = V_{f_s}/(2^B - 1) \approx V_{f_s}/2^B,$$

де V_{f_s} – повний діапазон АЦП із входом у вигляді біполярного сигналу. Максимальна помилка квантування, коли значення округлюється до найближчого більшого чи меншого числа, дорівнює $\pm q/2$.

Помилка квантування для кожної вибірки e зазвичай покладається випадковою та однорідно розподіленою на відрізку $\pm q/2$ з нульовим середнім значенням. В такому випадку, потужність шуму квантування, чи дисперсія, задається як

$$\sigma_e^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 P(e) de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}.$$

Для синусоїдального входу середня потужність сигналу дорівнює $\frac{A^2}{2}$. Відношення сигнал/шум квантування дорівнює (в децибелах)

$$SNR(q) = 10 \log\left(\frac{A^2/2}{q^2/12}\right) = 10 \log\left(\frac{3 \cdot 2^{2B}}{2}\right) = 6{,}02B + 1{,}76.$$

Це теоретичний максимум. На практиці, коли використовуються реальні вхідні сигнали, досяжне відношення сигнал-шум квантування менше, ніж теоретичне значення. Однак із збільшенням кількості розрядів B це відношення збільшується. Кількість бітів, що використовуються, обмежують практичні фактори, такі, як швидкість, внутрішнє відношення сигнал-шум аналогового сигналу та витрат.

Потім цифрові вибірки $x(n)$, які у багатьох випадках надані у двійковій формі, перекодуються у форму, зручну для подальших маніпуляцій. Це кодування полягає у присвоєнні квантованим елементам дискретних кодів. Самі розповсюджені форми кодування в ЦОС – це надання в форматі з фіксованою комою (доповнення до двох), комою, що плаває, та блочне надання в форматі з комою, що плаває. Можна одночасно виконувати всі три операції – дискретизацію, квантування та кодування. Це буває у тих випадках, коли використовуються АЦП без схеми вибірки-збереження.

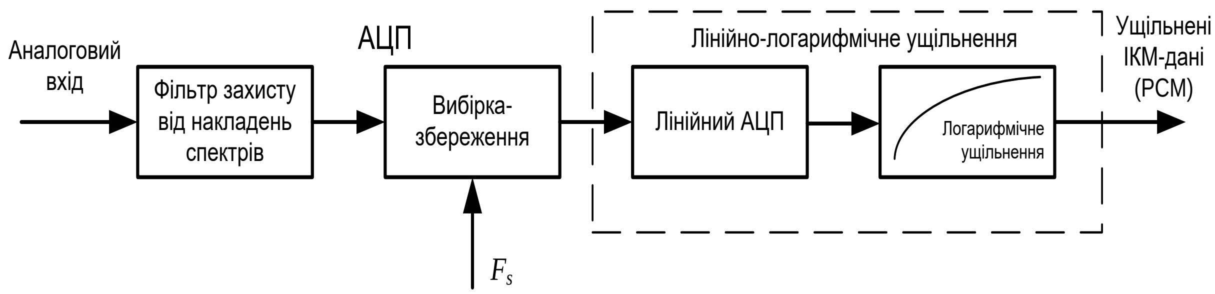
Неоднорідне квантування і кодування. У перетворювачах, що реалізують ІКМ, рівень шуму квантування безпосередньо пов’язаний з числом бітів АЦП. Подібні перетворювачі добре підходять для застосувань, в яких амплітуда сигналу з деяких причин розподілена однорідно, чи в яких довжина слова АЦП не має першоступеневого значення. В застосуваннях, де амплітуда сигналу розподілена неоднорідно (наприклад, телефонний зв’язок), для точної передачі інформації може знадобитися велика кількість бітів, а це не завжди ефективно.

Неоднорідне квантування може дати більше рівнів квантування для сигналу з невисоким рівнем, ніж однорідне квантування з такою ж кількістю бітів, а в телефонному зв’язку це означає, що система успішніше може підбудуватися під абонента і з гучним, і з тихим голосом.

Стандартне неоднорідне квантування, яке використовується в телефонному зв’язку, визначається за відомим розподілом амплітуди мови. Звуковий сигнал дискретизується з частотою 8 кГц, кожний елемент вибірки квантується і кодується 8-ма бітами, що складають систему із швидкістю передачі 64 кбіт/с. Амплітуди елементів звукового сигналу перед передачею стискаються логарифмічно в 8 біт. Після прийому ущільнені сигнали розширюються.

Процес стискання мовного сигналу та його розширення називають компаундуванням.

Цей процес зображено на рис. 1.5.



а)

б)

Рис. 1.5. Неоднорідне АЦП (а) та ЦАП (б)

На практиці компаундування здійснюється за допомогою *кодеків* чи *комбі-кодеків* (комбінації кодека ІКМ та фільтрів захисту від накладення спектрів та придушення дзеркальних частот), які підбираються до кожного мовного сигналу в цифрових системах телефонного зв'язку.

У сучасній цифровій телефонії із кодеками є необхідним зворотній компаундуванню процес в ланцюгу, щоб дані могли оброблятися методами ЦОС. Ущільнені ІКМ-дані перетворюються в лінійні ІКМ-дані, а після ЦОС ці дані перетворюються назад в неоднорідну ІКМ. Операції обернення компаундування можуть виконуватися мікросхемами ЦОС як пошук в таблиці чи шляхом реалізації алгоритмів стискання та розширення в реальному часі.

Для неоднорідного квантування в телефонії використовують два міжнародних стандарти:

- стандарт з μ-характеристикою (США та Японія);
- стандарт з А-характеристикою (Європа).

Обидва стандарти стискають мову у 8-бітові вибірки, які еквівалентні приблизно 14 біт лінійних АЦП.

Стандарт з *μ-характеристикою* для опису кожного елементу вибірки використовує різні за знаком 8-розрядні слова. Характеристики компаундування приблизно описуються набором з восьми прямолінійних відрізків, рис. 1.6.

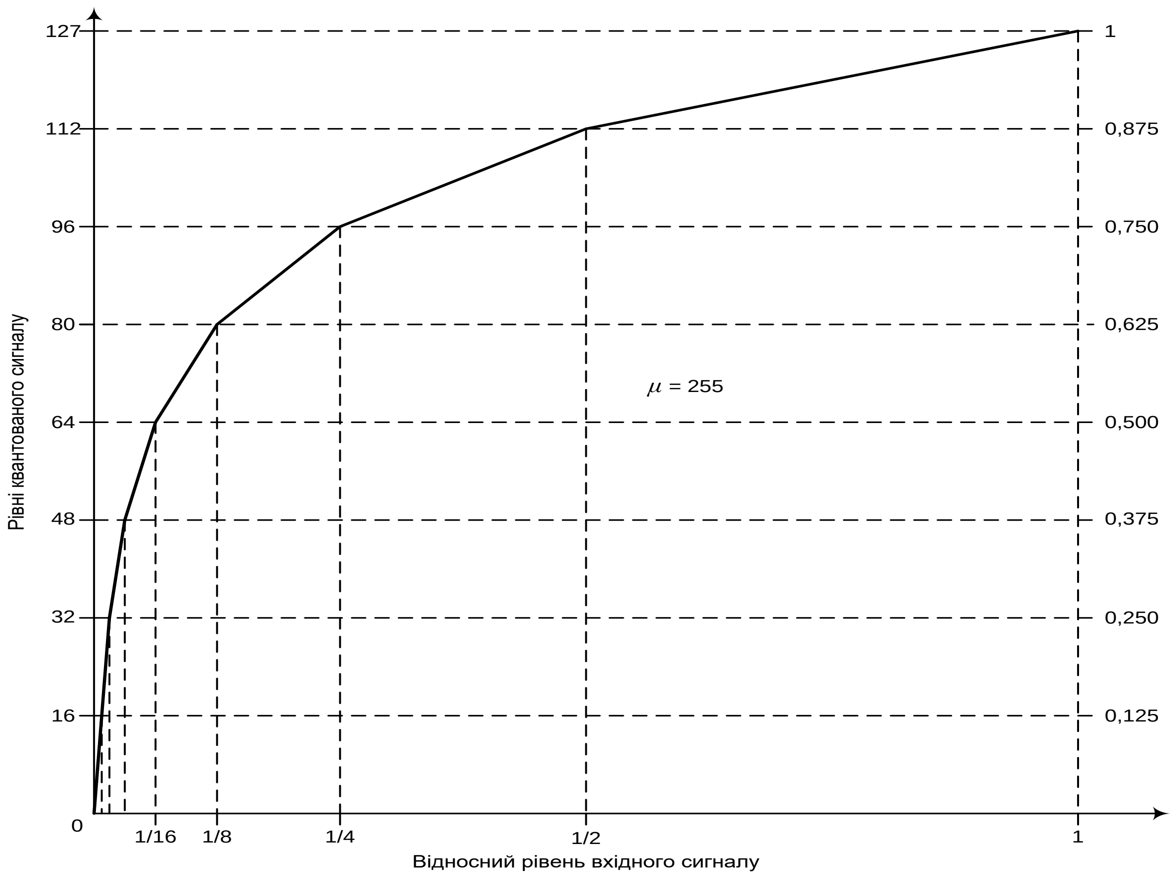


Рис. 1.6. μ-характеристики компаундування

Характеристики компресії підпорядковуються рівнянню

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)},$$

де μ=255, $x = \frac{x(n)}{x_{max}}$ – нормований вхідний сигнал, sgn – знак сигналу, $F(x)$ – стиснений вихідний сигнал.

Експандер реалізує відповідну зворотну функцію

$$F^{-1}(x) = \operatorname{sgn}[F(x)]\frac{(1+\mu)^{|F(x)|}-1}{\mu}.$$

Елементи вхідного сигналу, що послідовно зростають, формують на виході однорідний масштаб. Величина кроку вхідного сигналу при переході від одного відрізку до іншого постійно подвоюється. Це полегшує перетворення лінійної ІКМ в неоднорідну. Старший значущий розряд означає знак, наступні 3 розряди – номер відрізку, останні 4 – положення на ньому.

На практиці до передачі біти інвертуються, щоб збільшити щільність одиниць, так як це полегшує відновлення синхронізації та виправлення помилок.

Значення константи μ зазвичай дорівнює 30, 100, 255.

Даний процес – необхідний, оскільки мова – це сигнал з невеликою енергією. Як правило, відношення сигналу до шуму квантування при неоднорідному квантуванні можна порівняти з тим же відношенням для 14-бітового лінійного АЦП.

Характеристики А-типу за своїми властивостями схожі з μ-характеристиками, рис. 1.7. *А-характеристики* дають меншу точність для невеликих сигналів, але володіють видатною характеристикою динамічного діапазону.

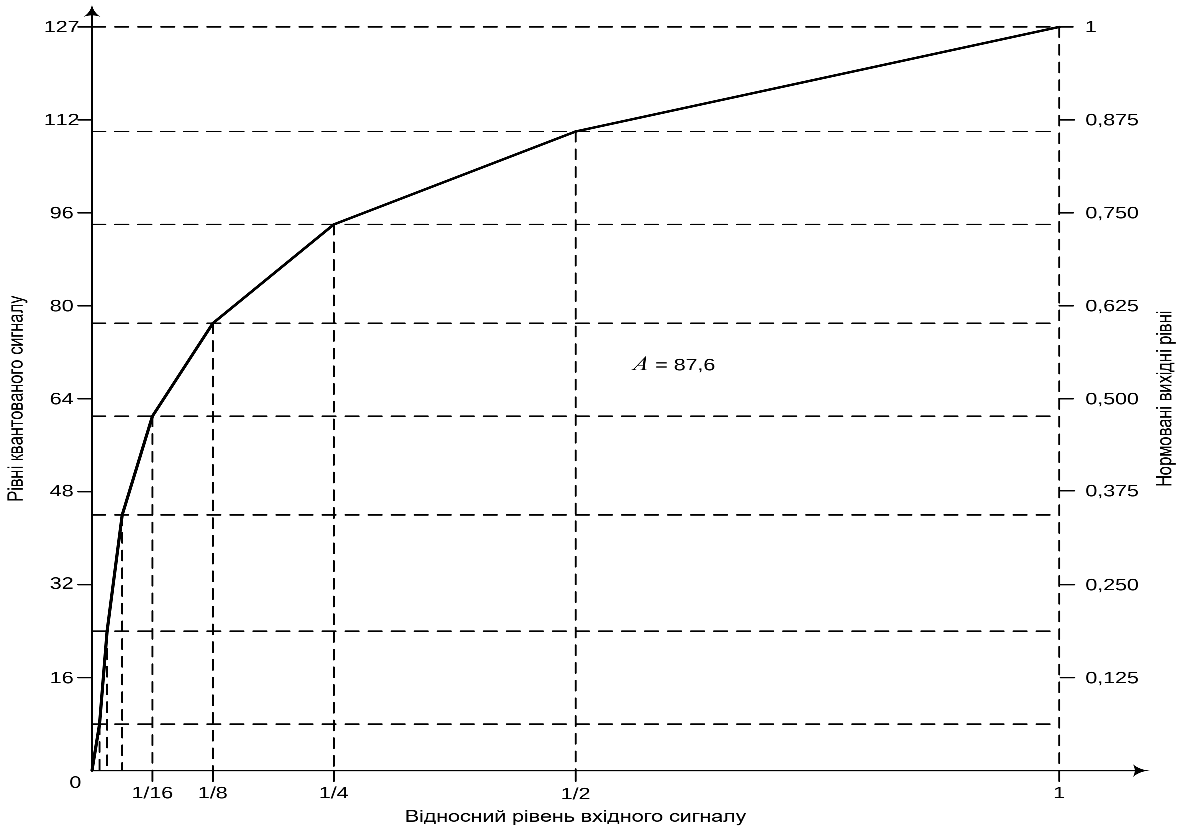


Рис. 1.7. A-характеристики компаундування

Характеристики підпорядковуються рівнянню

$$F(x) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\mathrm{A}|x|}{1+\ln(\mathrm{A})}, 0 \le |x| < 1/\mathrm{A},$$
$$F(x) = \mathrm{sgn}(x)\frac{1+\ln(\mathrm{A}|x|)}{1+\ln(\mathrm{A})}, 1/\mathrm{A}, \le |x| < 1,$$

де x – нормований вхдний сигнал, sgn – знак сигналу, $F(x)$ – стиснений вихідний сигнал.

Спектри дискретних сигналів. На рис. 1.8 показано процес дискретизації, який можна розглядати як множення аналогового сигналу $x(t)$ на вибіркову функцію $p(t)$. Функція $p(t)$ складається з імпульсів одиничної амплітуди з шириною dt (нескінченно малою величиною) та періодом T. Зазначимо, що $X'(f)$ – це згортка $X(f)$ та $P(f)$, отже, множення в часових координатах еквівалентне згортці в частотних координатах.

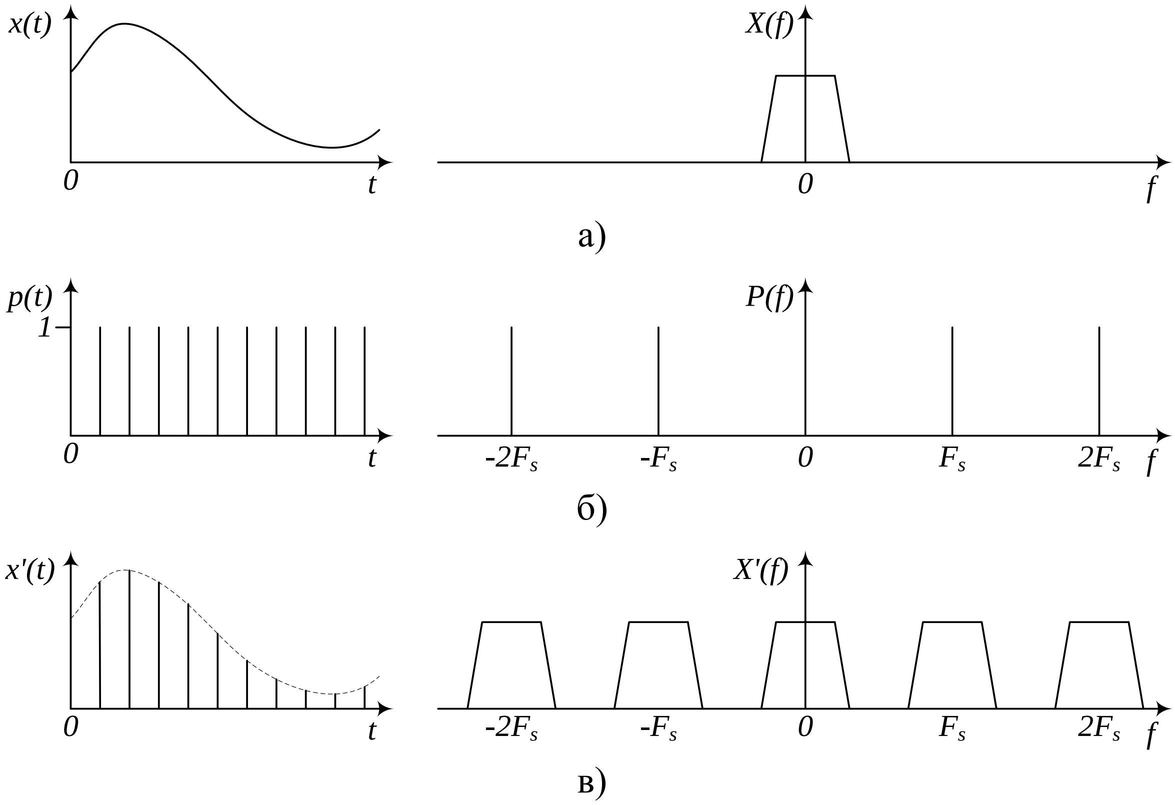


Рис. 1.8. Процес дискретизації в часовій та частотній областях:
а) сигнал та його спектр до дискретизації;
б) вибіркова функція та її спектр;
в) сигнал та його спектр після дискретизації.

Для дискретного сигналу слід відзначити такі моменти:

- спектр ідентичний початковому аналоговому спектру, тільки повторюється в точках, кратних частоті дискретизації F_S. Компоненти більш високого порядку з центрами в точках, кратних F_S, звуться дзеркальними частотами;
- якщо частота дискретизації F_S недостатньо висока, то дзеркальні частоти з центром в F_S будуть, наприклад, накладатися на частоти основної смуги (рис. 1.9) – в цьому випадку корисну інформацію, що міститься в сигналі, неможливо відрізнити від його образу в області накладення;
- перекриття (чи накладення) відбувається в точці F_N, рівній половині частоти дискретизації; цю точку називають максимальною частотою сигналу, частотою Найквіста, частотою Котельникова.

На практиці накладення існують завжди через шум чи наявність енергії сигналу за межами смуги частот, яка являє інтерес. Тому задача розробників – визначити рівень припустимого накладення, створити підходящі фільтри захисту від накладення спектрів та обрати підходящу для цього частоту дискретизації.

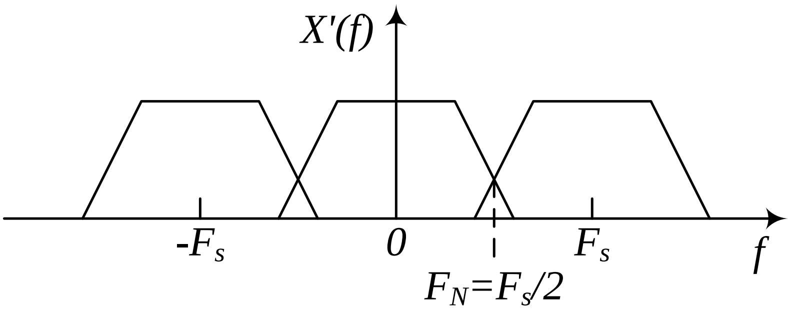
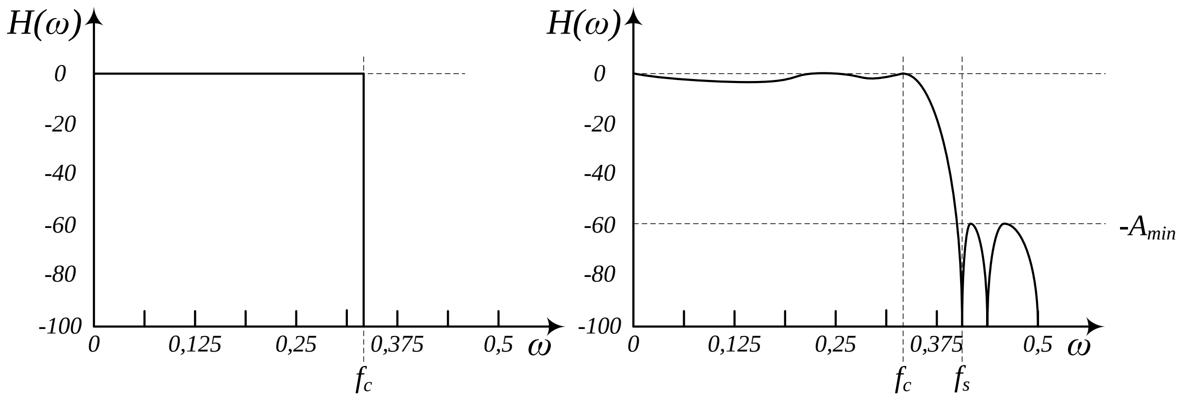


Рис. 1.9. Спектр сигналу після дискретизації з накладенням

Для зменшення ефекту накладення зазвичай використовують фільтри захисту з різким зрізом, які обмежують смугу частот сигналу, та/чи збільшують частоту дискретизації, щоб відсунути спектр сигналу та дзеркальний спектр подалі один від одного. В ідеалі фільтр захисту від накладення повинен усувати всі частотні компоненти з частотою, що перевищує частоту накладення, тобто його частотна характеристика повинна бути схожа на ту, що зображена на рис. 1.10, а. Більш реальна характеристика показана на рис. 1.10, б, де f_c та f_s – це відповідно частота зрізу та частота смуги придушення. Із рис. 1.10, б видно, що характеристика спотворює амплітуду сигналу, оскільки її смуга пропускання не плоска. Крім того, компоненти сигналу, що перевищують f_s, будуть придушуватися на A_{min}, а амплітуди компонентів, які лежать між f_c та f_s (ширина смуги переходу), будуть спадати монотонно.



а) б)

Рис. 1.10. Ідеальна та реальна амплітудно-частотні характеристики фільтрів захисту від накладень спектрів

Фільтр захисту від накладень спектрів повинен забезпечувати достатнє придушення характеристики на частотах, що перевищують частоту Найквіста. Через неідеальності характеристик тих фільтрів, що застосовуються на практиці, в якості ефективної частоти Найквіста береться

f_s (частота зрізу). При специфікації фільтра захисту від накладення спектрів корисно також враховувати вимоги до роздільної здатності АЦП. Фільтр захисту від накладення спектрів слід розробляти так, щоб частоти, які перевищують частоту Найквіста, придушувалися до рівня, який не відрізняється для АЦП, наприклад, до рівня, меншого за шум квантування. Так, для системи, в якій використовується B-бітовий лінійний АЦП, мінімальне згасання у смузі придушення фільтра, як правило, буде дорівнювати

$$A_{min} = 20 \lg \left(\sqrt{1{,}5} \times 2^B \right)$$

де B – число бітів АЦП.

Застосування для попередньої обробки даних системи ЦОС аналогового фільтра накладає ще одне обмеження, так звану умову фазового спотворення. Реальна фазова характеристика залежить від частоти нелінійно, так що компоненти шуканого сигналу будуть мати зміщену фазу чи затримуватися на величину, не пропорційну їхнім частотам. Величина спотворення залежить від характеристик фільтра, включаючи те, наскільки круто спадає його АЧХ. У більшості випадків, чим крутіше спад (тобто чим вужче смуга пропускання), тим більше фазове спотворення вносить фільтр, і тим важче узгодити амплітуду та групову затримку сигналів у каналі в багатоканальній системі. Однак застосування фільтрів з крутим зрізом дозволяє використовувати низьку частоту дискретизації та менш швидкісні АЦП.

При обробці сигналів в реальному часі спостерігається тенденція до використання високої частоти дискретизації, тобто вибірці з запасом по частоті. По-перше, так можна використовувати прості фільтри захисту від накладення спектрів. По-друге, вибірка з запасом по частоті в сполученні з додатковою ЦОС приводить до покращення відношення сигнал-шум.

На практиці миттєва вибірка, показана на рис. 1.9, в, неможлива; замість цього функція відліків має скінченну ширину. Це призводить до виникнення проблеми, що називається апертурним ефектом. Ненульовий апертурний час обмежує точність та максимальну частоту сигналу, який можна оцифрувати, оскільки сам сигнал може змінитися під час дискретизації. Величину апертурного ефекту можна знайти, припустивши, що вхідна напруга на протязі апертурного відрізку часу може змінитися, скажімо, не більше ніж на $\frac{1}{2}$ МЗБ (меншого значущого біта). Таким чином, для синусоїдального вхідного сигналу максимальна частота, яка може бути оцифрована з точністю до $\frac{1}{2}$ МЗБ, в системі з B-бітовим АЦП задається як

$$f_{max} = \frac{1}{\pi 2^{B+1} \tau},$$

де τ – апертурний час (ширина вибіркового імпульсу).

На практиці перед АЦП стоїть пристрій вибірки-збереження, який може заморожувати елемент сигналу на час перетворення та дає можливість точно оцифрувати сигнал з частотою, збільшеною на декілька порядків.

Розглянемо приклад. В системі ЦОС реального часу використовується 12-бітовий АЦП з часом перетворення (апертурним часом) 35 мкс без схеми вибірки-збереження. Яка найбільша частота, що піддається оцифровці в межах точності 1/2 МЗБ, якщо система є бінарною з однорідним квантуванням?

Розглянемо синусоїдальний сигнал з максимальною амплітудою, який дорівнює половині повного діапазону АЦП V_{f_s}: $\frac{V_{fs}}{2}\sin(\omega t)$. За апертурний час τ сигнал зміниться на величину Δv. Найбільша зміна відбувається в точках $t = 0 \pm \frac{2\pi n}{\omega}$. У точці $t = 0$

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right| = \pi f V_{f_s} = \frac{\Delta v}{\tau}\ \left[\frac{\text{В}}{\text{с}}\right].$$

Для точності $\frac{1}{2}$ МЗБ $\Delta v = \frac{q}{2}$, де $q = \frac{V_{fs}}{2^B}$. Отже $\frac{V_{fs}}{\tau \cdot 2 \cdot 2^B} = \pi f V_{f_s}$, звідки $f_{max} = \frac{1}{\pi 2^{B+1}\tau}$.

Для наведеної системи ЦОС $B = 12, \tau = 35$ мкс, отже $f_{max} = 1{,}11$ Гц.

Очевидно, що від АЦП, який може перетворити максимальну частоту 1,11 Гц, користі мало. На практиці перед АЦП зазвичай ставлять пристрій вибірки-збереження, який заморожує елемент сигналу на час перетворення. Наприклад, якщо перед таким же АЦП стоїть схема вибірки-збереження з апертурним часом 25 нс та часом захоплення сигналу 2 мкс, то відповідно до теореми Котельникова, максимальна частота, яку можна перетворити, буде дорівнювати

$$2f_{max} = F_s, \text{ отже } f_{max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T_s} = \frac{10^6}{2(35+2+0{,}025)} = 13{,}5 \cdot 10^3\ [\text{Гц}] = 13{,}5\ \text{кГц}.$$

У цьому випадку період дискретизації буде складатися з часу захоплення сигналу та апертурних часів схеми вибірки-збереження та АЦП.

Особливо акцентуємо увагу на дискретизації смугових сигналів**.** У деяких застосуваннях, наприклад системах зв’язку, корисний сигнал займає тільки вузьку частину доступної смуги частот.

В таких випадках ширина смуги сигналу ΔF часто дуже мала в порівнянні з нижньою та верхньою граничними частотами смуги (f_L та f_H), тому використовувати теорему про низькочастотну дискретизацію неекономно. Щоб побороти це ускладнення, можна використати теорему про смугову дискретизацію

$$\frac{2f_H}{n} \le F_s \le \frac{2f_L}{n-1},$$

де $n = \frac{f_H}{\Delta F}$ – значення, округлене до найближчого більшого цілого числа.

Теорема дозволяє виконувати дискретизацію вузькосмугових високочастотних сигналів із значно зниженою частотою та при цьому уникати накладень. Існує два загальних метода смугової дискретизації без накладень з недостатньою вибіркою. Один з них – так звана дискретизація цілочисельної смуги, а в іншому використовується квадратурна модуляція.

Якщо для даного сигналу граничні частоти смуги (f_L та f_H) – цілі числа, кратні ширині смуги сигналу, сигнал можна оцифрувати без накладення з теоретичною мінімальною частотою $2\Delta F$:

$$F_{s_{min}} = 2\Delta F.$$

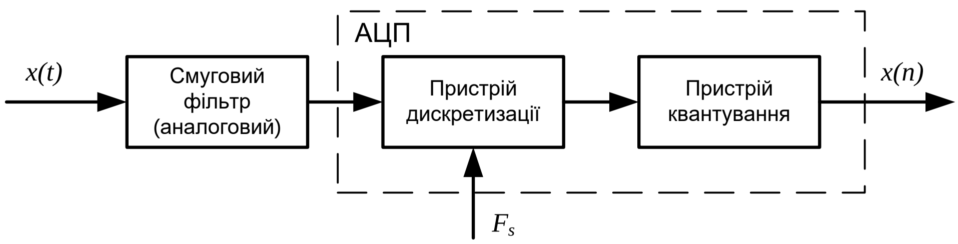
Рівняння справедливе, якщо відношення низькочастотного краю смуги до ширини смуги сигналу та/чи високочастотного краю до ширини смуги сигналу – цілі числа. Тоді смугу сигналу називають цілочисельно розміщеною. Якщо смуга сигналу не цілочисельна, граничні частоти смуги можна змістити таким чином, щоб ефективна смуга стала цілочисельною.

Розглянемо приклад. На рис. 1.11, а показано пристрій попередньої обробки даних приймача багатоканальної системи зв'язку. На рис. 1.11, б показано спектр сигналу, що приймається, із наведенням номеру каналу. Для виділення сигналу у потрібному каналі служить аналоговий смуговий фільтр.

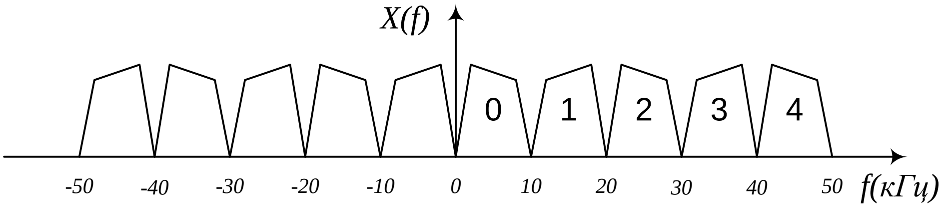
Припустимо, що смуговий фільтр – ідеальний, налаштований на 3-й канал і має наступні характеристики

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 30\text{ кГц} \le f \le 40\text{ кГц}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

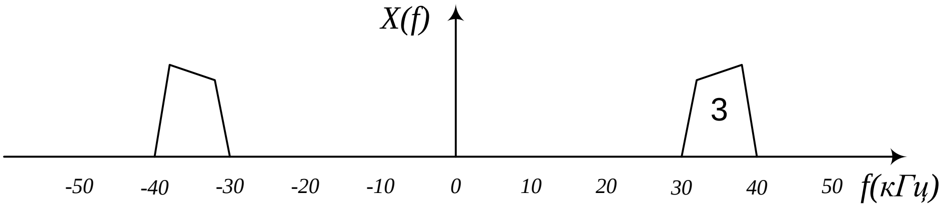
Ширина смуги частот каналу дорівнює $\Delta F = 10$ кГц. Мінімальна теоретична частота дискретизації дорівнює $2 \cdot 10 = 20$ кГц (для порівняння, теорема Котельникова дає 80 кГц). Після дискретизації спектр сигналу можна знайти, виконавши згортку сигналу на виході смугового фільтра (рис. 1.11, в) із спектром функції дискретизації, наведеним на рис. 1.11, г. Результат наведено на рис. 1.11, д.



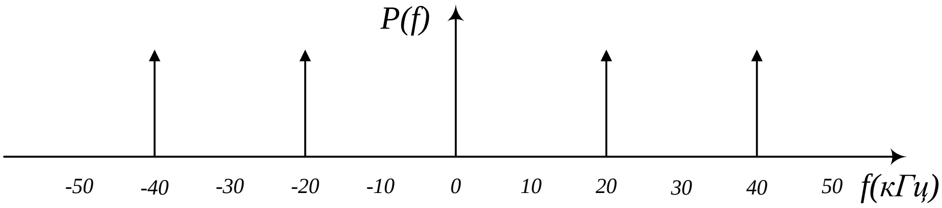
а)



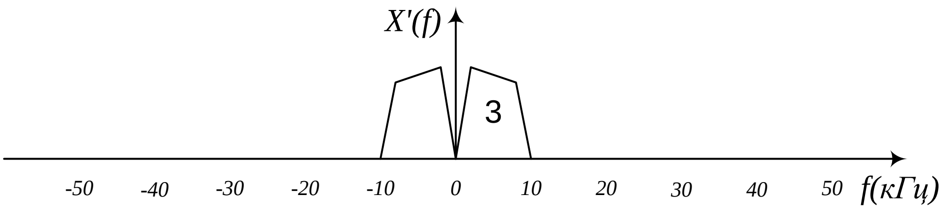
б)



в)



г)



д)

Рис. 1.11. Смугова дискретизація сигналу:
а) пристрій попередньої обробки багатоканальної системи;
б) спектр прийнятого сигналу;
в) спектр сигналу виходу смугового фільтра 3-го каналу;
г) спектр функції дискретизації (вибіркової функції);
д) спектр сигналу виходу пристрою дискретизації.

Відповідно, важливим параметром цілочисельної дискретизації смугових сигналів є відношення верхньої границі смуги до ширини цієї смуги ΔF (чи, що еквівалентно, відношення нижнього краю смуги до ширини смуги)

$$n = \frac{f_H}{\Delta F} \text{ чи } n = \frac{f_L}{\Delta F}.$$

У будь-якому з цих випадків дискретизація буде здійснюватися з частотою $2\Delta F$ без накладень. Якщо це відношення дорівнює парному цілому числу, спектр дискретного сигналу в області смуги частот вихідного сигналу буде перевернутим (рис. 1.11, д).

Якщо значення n – неціле число, то спостерігається накладення. Накладення можна уникнути, змістивши граничні частоти чи центральну частоту таким чином, щоб n стало цілим. Наприклад, можна перенести нижню граничну частоту з f_L в f_1, так що

$$f_1 \le f_L,$$

$$f_H = n(f_H - f_1) = n\Delta F'.$$

З попередніх рівнянь можна записати

$$f_1 = \left(\frac{n-1}{n}\right) f_H,$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) f_H \le f_L,$$

$$n \le \frac{f_H}{f_H - f_L} = \frac{f_H}{\Delta F}.$$

Отже, щоб досягти бажаного зв’язку між граничними частотами смуги та її шириною, можна змістити нижню граничну частоту. Із останнього рівняння знаходимо n – найближче менше ціле число.

Можна показати, що бажаної мети можна досягти також, змістивши верхню граничну частоту.

Розглянемо приклад.

Дано вузькосмуговий сигнал з умовами $\Delta F = 4$ кГц, $\frac{f_H}{\Delta F} = 6{,}5$.

Спочатку знайдемо $f_H = 6{,}5 \cdot 4 = 26$ кГц. Якщо взяти n як найближче менше ціле число, то $n = 6$. Нижню граничну частоту можна знизити до нового значення

$$f_L' = \frac{n-1}{n} f_H = 21{,}66 \text{ кГц}.$$

Тепер ширина смуги $\Delta F'$ та частота дискретизації F_s' набувають значень

$$\Delta F' = f_H - f_L' = 26 - 21{,}66 = 4{,}34 \text{ кГц},$$
$$F_s' = 2 \cdot \Delta F' = 8{,}68 \text{ кГц}.$$

Розрахована частота дискретизації дозволяє запобігти накладенням.

Приклад. Дана система ЦОС реального часу. Припустимо, що смуга частот, яка нас цікавить, займає від 0 до 4 кГц. Використовується біполярний 12-бітовий АЦП.

Знайти:

1. Мінімальне затухання у смузі придушення A_{min} для фільтра захисту від накладення спектрів.
2. Мінімальну частоту дискретизації F_s.
3. Рівень спотворень від накладення спектрів відносно рівня сигналу у смузі пропускання для оцінених A_{min} та F_s.

Рішення:

Фільтр захисту від накладень повинен обмежувати смугу частот сигналу таким чином, щоб видалити частотні компоненти, які перевищують частоту Найквіста.

Ідеального фільтра не існує. На практиці фільтр придушує зазначені частотні компоненти до рівня, меншого за середньоквадратичний рівень шуму квантування АЦП.

Типова АЧХ фільтра наведена на рис. 1.12

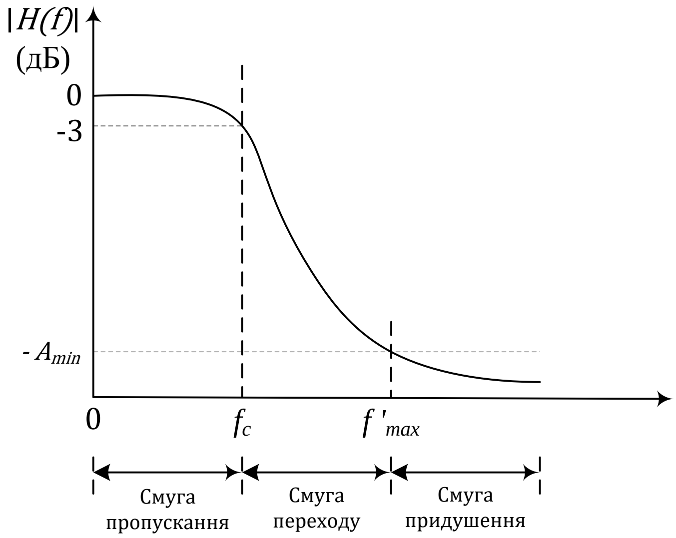


Рис. 1.12. Типова АЧХ реального ФНЧ

Ефективна частота Найквіста є f'_{max}, а ефективна частота дискретизації

$$F_s \geq 2f'_{max}.$$

Величина кроку квантування задається як

$$q = \frac{V_{f_s}}{2^B - 1} \approx \frac{V_{f_s}}{2^B}.$$

Середньоквадратичний рівень шуму квантування задається як

$$\sqrt{\frac{q^2}{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Якщо припустити, що сигнал синусоїдальний з максимальною амплітудою A, то максимальний рівень сигналу смуги пропускання буде

$$V_{f_s} = 2A = q \times 2^B.$$

Отже середньоквадратичне значення вхідного сигналу

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{q \times 2^B}{2\sqrt{2}}.$$

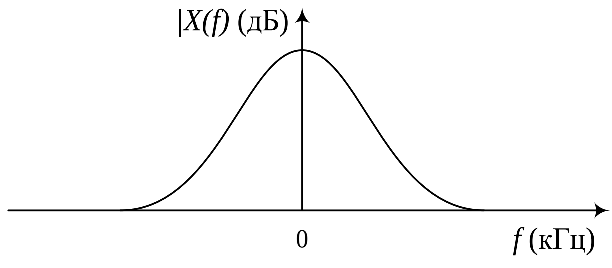
Відношення максимального рівня сигналу у смузі пропускання до рівня сигналу у смузі придушення показує міру максимального затухання сигналу у смузі придушення фільтра

$$\frac{q \times 2^B/2\sqrt{2}}{q/2\sqrt{3}} = \sqrt{1{,}5} \times 2^B.$$

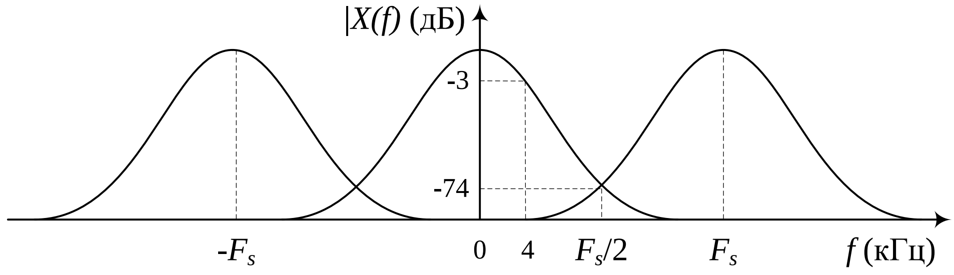
1. В системі ЦОС мінімальне затухання у смузі придушення задається як

$$A_{min} = 20\log\left(\sqrt{1{,}5} \times 2^B\right) \text{ [дБ]} = 74 \text{ дБ}.$$

2. Спектр сигналу до і після дискретизації показано на рис. 1.13



а)



б)

Рис. 1.13. Спектри сигналу:
а) на виході аналогового фільтра;
б) після дискретизації.

Амплітудна характеристика фільтра задається як характеристика фільтра Баттерворта

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^6}}.$$

$$A_{min} = 74 = 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{f'_{max}}{f_c}\right)^6}\right) \text{ [дБ]}.$$

$$\left(\frac{f'_{max}}{f_c}\right)^6 = (5011{,}87)^2 - 1.$$

$$f'_{max} = 68{,}45 \text{кГц}.$$

$$F_s = 136{,}9 \text{ кГц}.$$

3. На частоті 4 кГц рівень накладень складає

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{136{,}9 - 4}{4}\right)^6}} = 2{,}73 \times 10^{-5}.$$

Рівень накладення спектрів відносно рівня сигналу на частоті 4 кГц

$$\frac{2{,}73 \times 10^{-5}}{\sqrt{2}} = 1{,}93 \times 10^{-5}.$$

Якщо потрібно придушити граничну частоту смуги пропускання настільки, щоб вона точно була нижче рівня шуму квантування, частоту дискретизації можна знизити до 68,45+4=72, 45 кГц.

1.2.2. ПРОЦЕС ВІДНОВЛЕННЯ ЦИФРОВОГО СИГНАЛУ

Процес цифро-аналогового перетворення, або відновлення сигналу дозволяє трансформувати цифровий сигнал в аналогову форму після його цифрової обробки, передачі чи збереження в цифровій формі. Самий розповсюджений з пристроїв складається з двох головних елементів: ЦАП та ФНЧ, який іноді називають фільтром відновлення, згладжування чи фільтром придушення дзеркальних частот, інтегруючим фільтром.

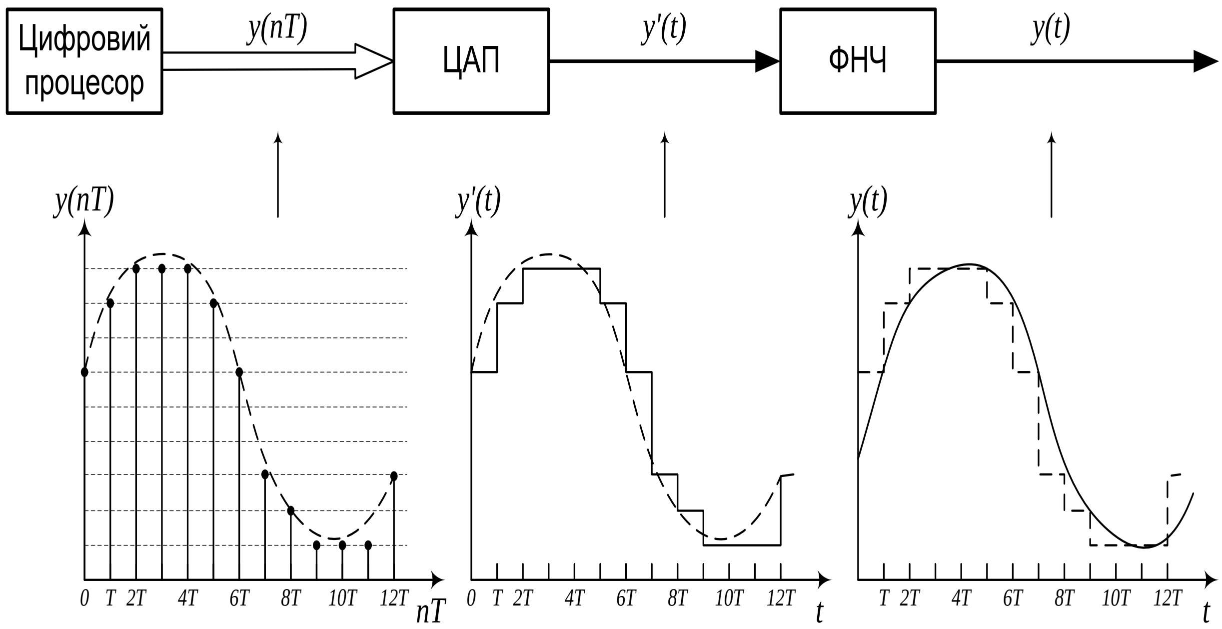


Рис. 1.14. Процес відновлення сигналу

Розглянемо процес відновлення сигналу**.** Стандартний ЦАП приймає паралельні цифрові дані та створює ступінчатий аналоговий вихідний сигнал. Щоб вихід ЦАП залишався без змін, доки ЦАП приймає наступну порцію цифрового входу, використовується регістр.

ЦАП, зображений на рис. 1.14, називають ЦАП *з* затримкою нульового порядку – для кожного цифрового коду, що вводиться в ЦАП, його вихід затримується на час *T*. У результаті отримується ступінчаста вихідна характеристика ЦАП. В частотних координатах затримуючий вплив ЦАП вносить деяке спотворення, відоме як спотворення за законом $\sin(x)/x$, чи *апертурне спотворення*, де $x = \omega T/2$.

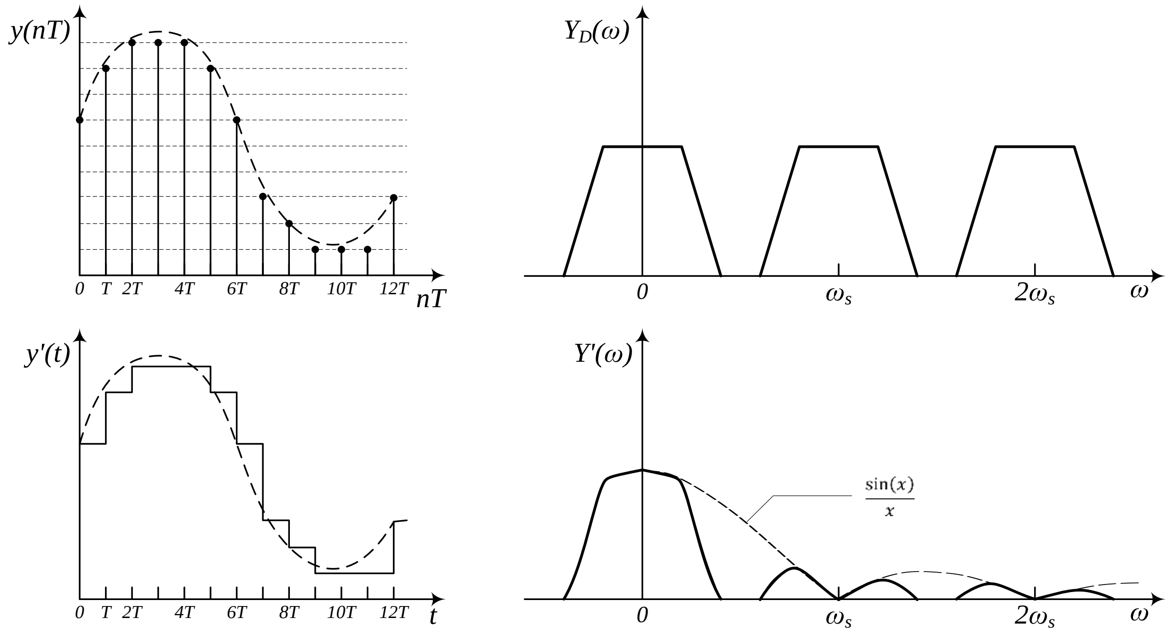


Рис. 1.15. Вхідний та вихідний сигнали ЦАП в часових та частотних координатах

ЦАП з затримкою нульового прядку характеризується:

1. Вхідний та вихідний сигнали ЦАП мають широку смугу частот. Кожна з них складається із спектру оцифрованого сигналу плюс нескінчене число дзеркальних зображень вихідного спектра, центрованих на частотах, кратних частоті дискретизації.

2. Амплітуда спектра вхідного сигналу помножується на функцію $\sin(x)/x$, яка діє як фільтр нижніх частот, значно послаблюючи дзеркальні частоти.

Спотворення за законом $\sin(x)/x$ обумовлено затримуючою дією ЦАП і при відновленні сигналу є причиною амплітудного спотворення. Середня помилка, обумовлена цим спотворенням, при заданій частоті можна виразити у відсотковому відношенні

$$[1 - \sin(x)/x] \times 100\%.$$

Для затримки нульового порядку функція $\sin(x)/x$ спадає приблизно до 4 дБ на половині частоти дискретизації $(F_S/2)$, що дає середню помилку приблизно в 36,4%. Апертурну помилку можна виключити за допомогою вирівнювання. На практиці для цього сигнал до його перетворення в аналогову форму пропускають через цифровий фільтр, АЧХ якого дорівнює $\sin x/x$.

В деяких застосуваннях для вставок додаткових вибірок між вибірками ЦАП використовується цифровий процесор (процес називається *інтерполяцією*). Це допомагає згладжувати аналоговий сигнал краще, ніж з затримкою нульового порядку.

Вихід ЦАП наряду з необхідними частотними компонентами містить і небажані високочастотні компоненти, чи дзеркальні зображення, центровані на частотах, кратних частоті дискретизації (тобто частоті оновлення). В залежності від застосування високочастотні компоненти можуть викликати небажані побічні ефекти.

Роль вихідного фільтра (тобто фільтра придушення дзеркальних частот) полягає у згладжуванні кроків виходу ЦАП та усунення таким чином небажаних високочастотних компонентів. В загальних рисах вимоги до фільтра придушення дзеркальних частот схожі на вимоги до фільтра захисту від накладення спектрів.

1.3. ОСНОВИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧАСТОТИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ СИГНАЛУ

Потреби в сучасних цифрових системах обробки даних з більше ніж однією частотою дискретизації привела до розвитку нової області ЦОС – обробки даних при декількох швидкостях. При такій обробці використовуються дві основні операції – децимація та інтерполяція.

Децимація зменшує частоту дискретизації, ефективно стискаючи дані та залишаючи тільки необхідну інформацію.

Інтерполяція збільшує частоту дискретизації.

В усіх застосуваннях використовується відомий факт: якщо аналоговий сигнал дискретизується з частотою, яка значно перевищує частоту, визначену теоремою Котельникова, то для обмеження смуги частот дискретного сигналу потрібен значно простіший аналоговий фільтр захисту від накладень спектрів. Після переведення сигналу в цифрову форму його можна швидко стиснути до бажаної швидкості передачі.

1.3.1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧАСТОТИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ПРИ УМОВІ ВАРІАБЕЛЬНОСТІ КРОКУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ

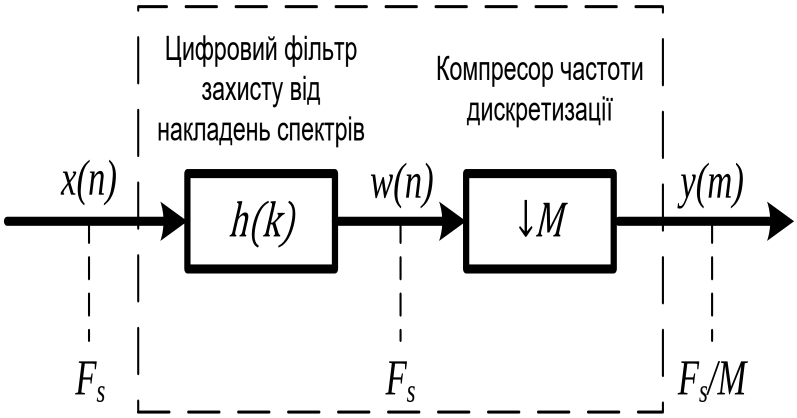
Переваг обробки даних при декількох швидкостях велика кількість і число переваг постійно зростає. Це дозоляє уникнути дорогих аналогових фільтрів захисту від накладень спектрів та ефективно обробляти сигнали з різними ширинами смуг частот та частотами дискретизації.

Простий спосіб змінити частоту дискретизації – перетворити цифровий сигнал в аналоговий та повторно оцифрувати його з іншою частотою. Цьому процесу притаманні помилки квантування та накладення спектрів, що значно спотворюють сигнал. Оскільки сигнал вже в цифровій формі, його краще обробляти цифровим чином.

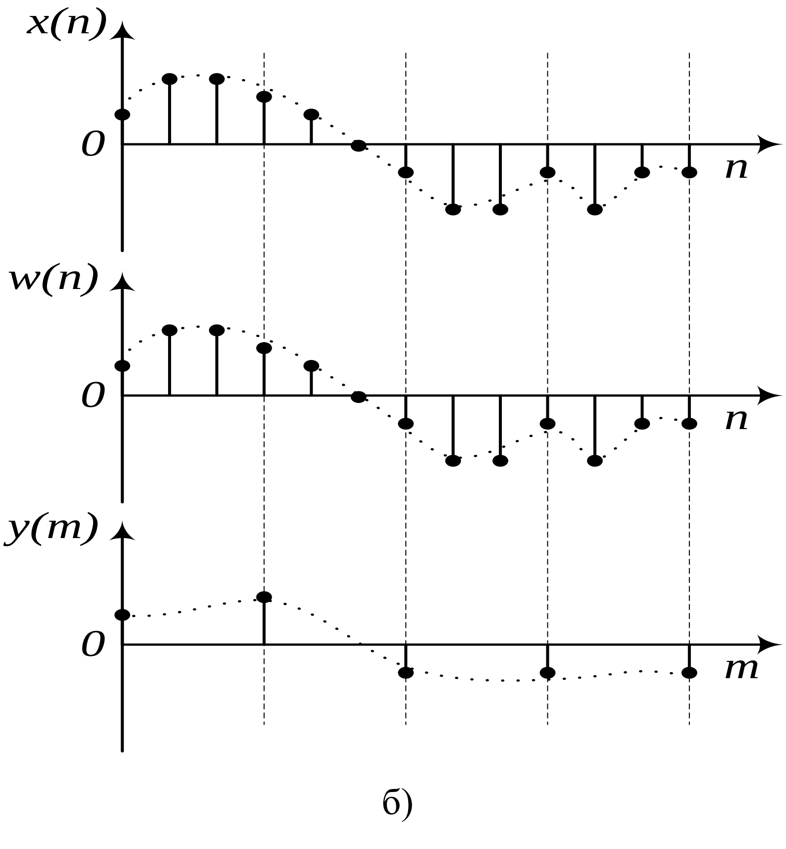
Зменшення частоти дискретизації – децимація з цілим кроком.

На рис. 1.16 надана блок-схема процесу децимації сигналу з цілим кроком M. Компресор частоти дискретизації знижує частоту дискретизації з F_s до F_s/M. Для відвернення накладень при більш низькій частоті вибірки застосовується цифровий фільтр, що обмежує смугу вхідного сигналу до $F_s/2M$. Зниження частоти досягається тим, що з кожних M вибірок фільтрованого сигналу відкидається $M-1$ вибірка. Вхід та вихід процесу децимації пов'язані наступним співвідношенням:

$$y(m) = w(mM) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(mM-k).$$



а)



б)

Рис. 1.16. Децимація з цілим кроком:

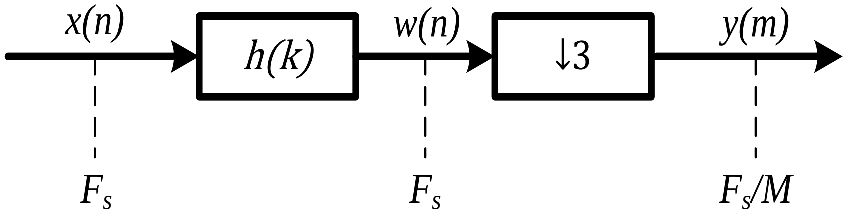
а) блок-схема децимації з кроком M;

б) ілюстрація децимації з кроком $M = 3$.

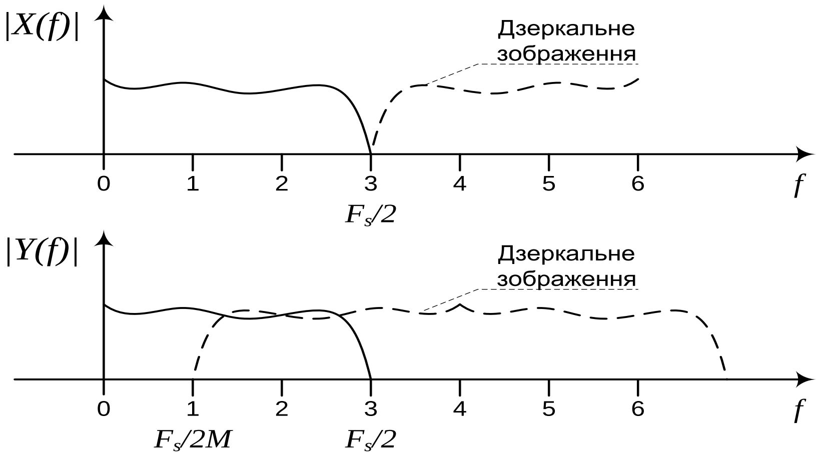
По суті децимація – операція стиснення даних.

Спектральне представлення процесу децимації наведено на рис. 1.17, де передбачається, що на вхід подається широкосмуговий сигнал $x(n)$, але необхідна інформація міститься лише в його низькочастотній частині.

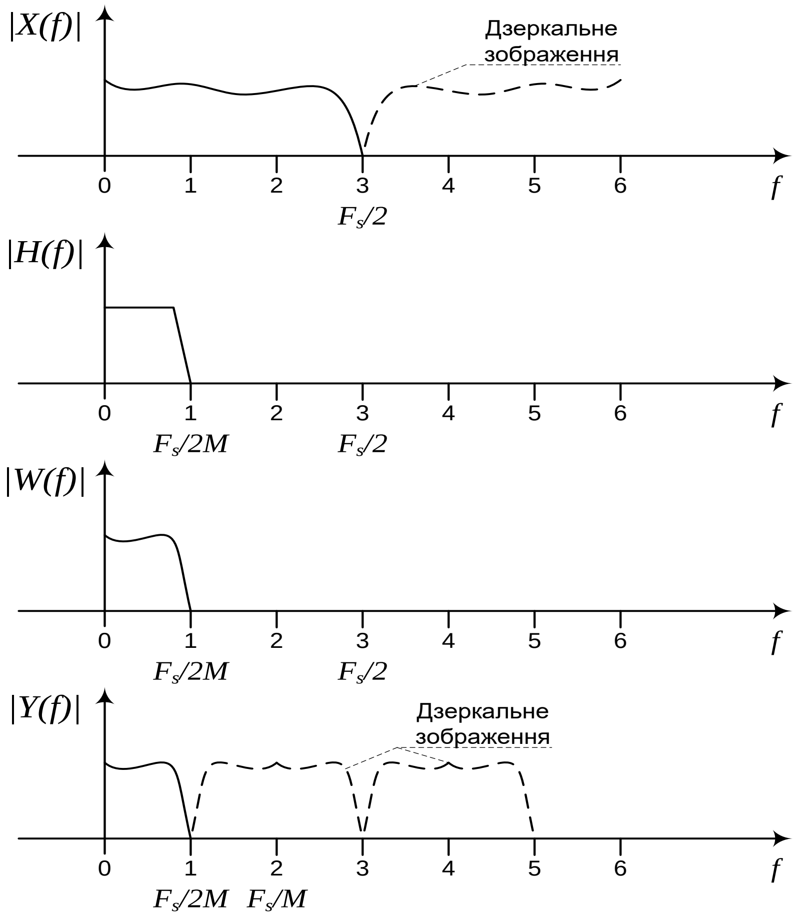
Збільшення частоти дискретизації – інтерполяція з цілим кроком. Для даного сигналу з частотою дискретизації F_s процес інтерполяції збільшує частоту дискретизації в L разів, тобто до LF_s. Схема інтерполятора наведена на рис. 1.18.



а)

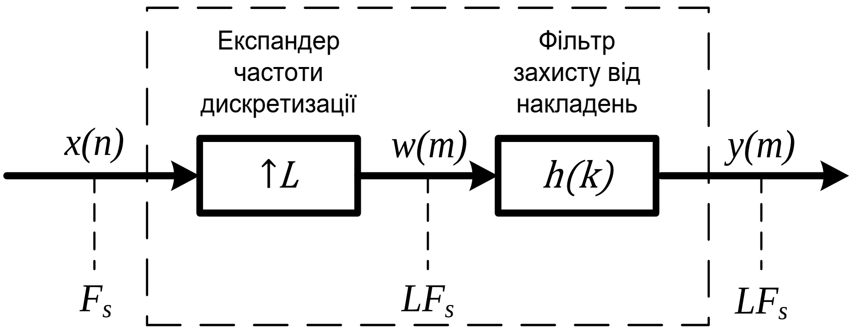


б)

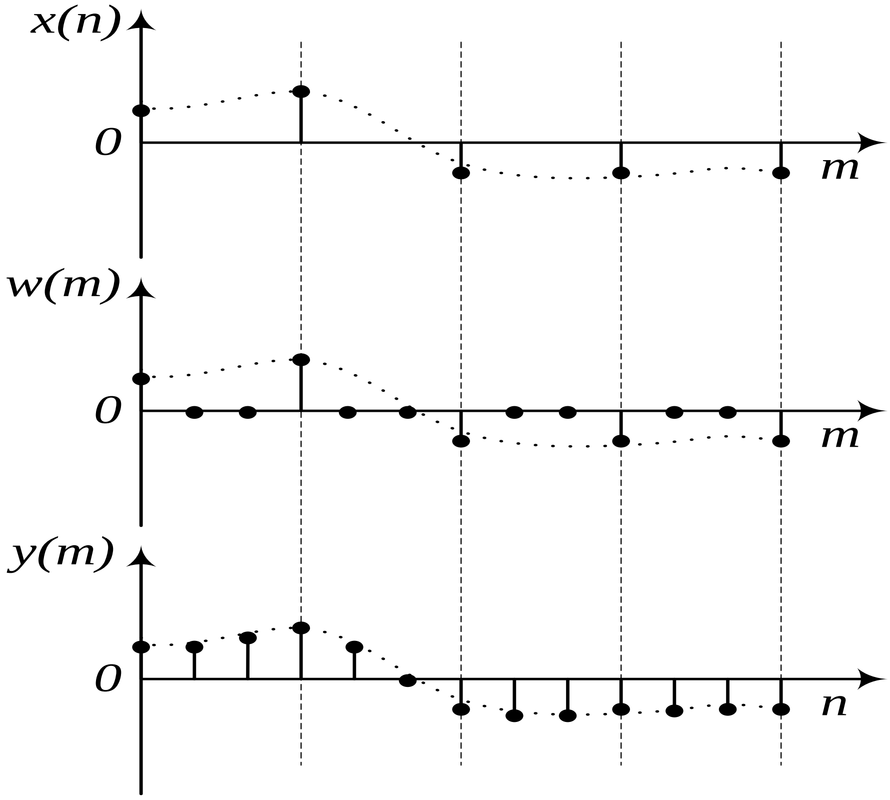


в)

Рис. 1.17. Спектральна інтерпретація децимації сигналу:
а) блок-схема;
б) децимація без ЦФ (накладення спектрів);
в) децимація з ЦФ (накладення відсутні).



а)



б)

Рис. 1.18. Інтерполяція з цілим кроком:
а) блок-схема інтерполяції з кроком L;
б) ілюстрація інтерполяції з кроком $L = 3$.

Вона складається з експандера частоти дискретизації. Для кожної вибірки сигналу експандер вводить $L - 1$ нульову вибірку, в результаті чого формується новий сигнал з частотою дискретизації LF_s. Далі цей сигнал пропускається через ФНЧ для видалення дзеркальних частот. Введення $L - 1$ вибірок призводить до розповсюдження енергії кожної вибірки сигналу по L вихідним вибіркам, тобто кожна вибірка ослаблюється в L раз. Для компенсації цього ефекту можна помножити кожну вибірку на L. Процес інтерполяції характеризується зв'язком входу та виходу

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)w(m-k),$$

де

$$w(m) = \begin{cases} x(m/L), & m = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & m \neq 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \end{cases}$$

Інтерпретація процесу в частотній області наведена на рис. 1.19. Кожна вибірка вхідного сигналу породжує три вихідні вибірки.

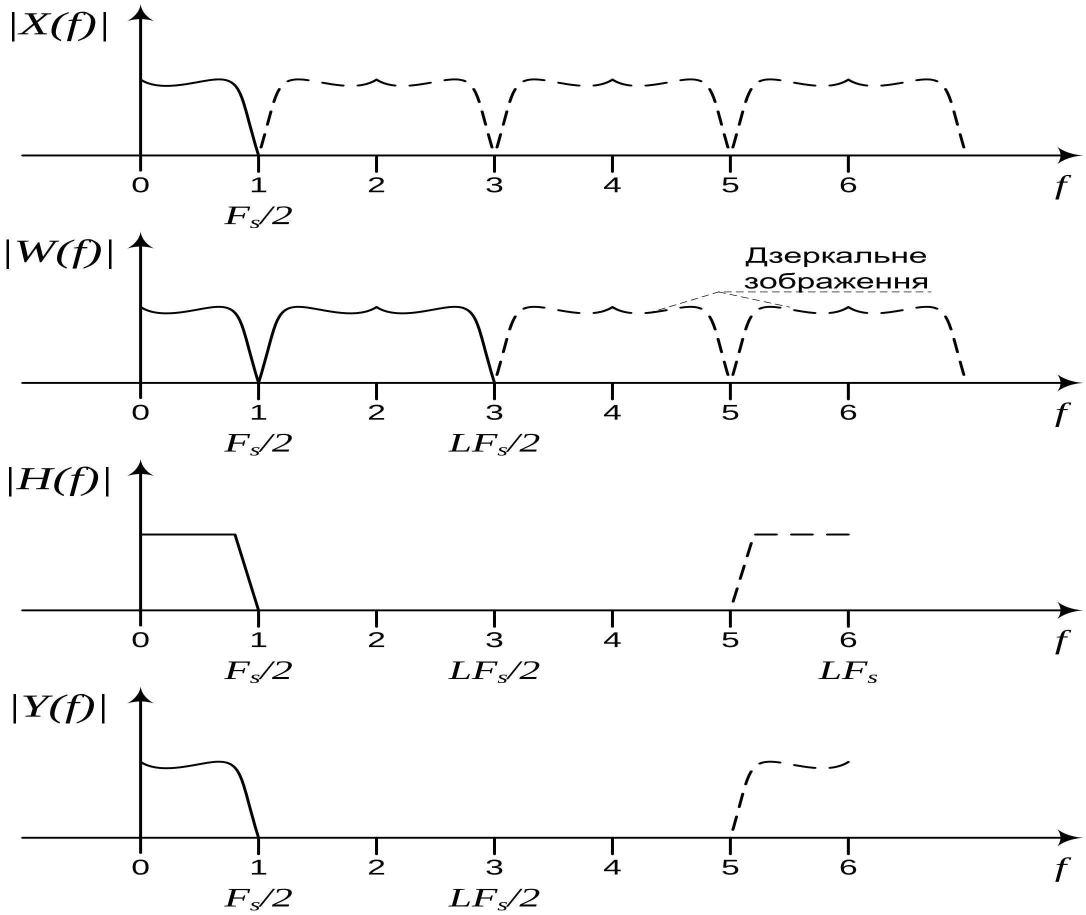
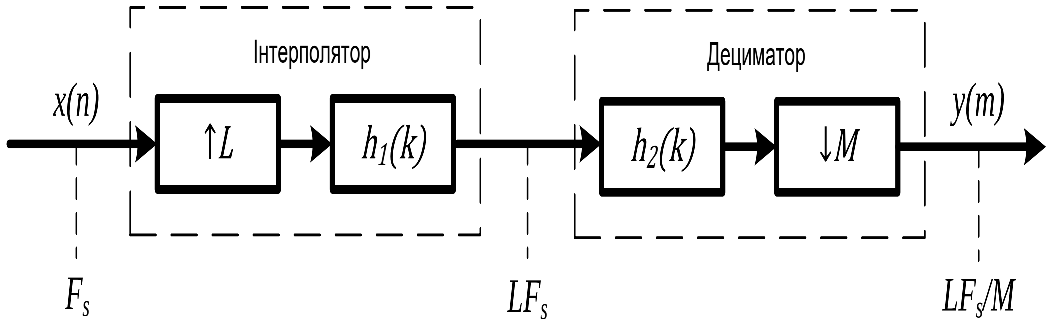


Рис. 1.19. Спектральна інтерпретація інтерполяції сигналу

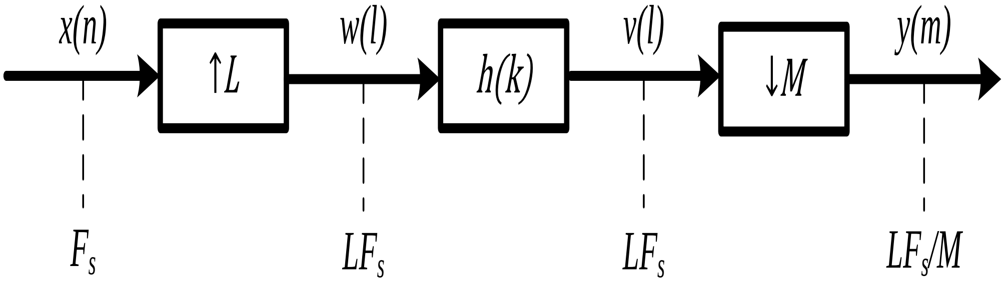
$H(f)$ – амплітудна характеристика фільтра придушення низьких частот, необхідного для видалення дзеркальних компонентів. Процеси децимації та інтерполяції взаємо-зворотні.

1.3.2. Перетворення частоти дискретизації із використанням багатокаскадності засобів обробки сигналів

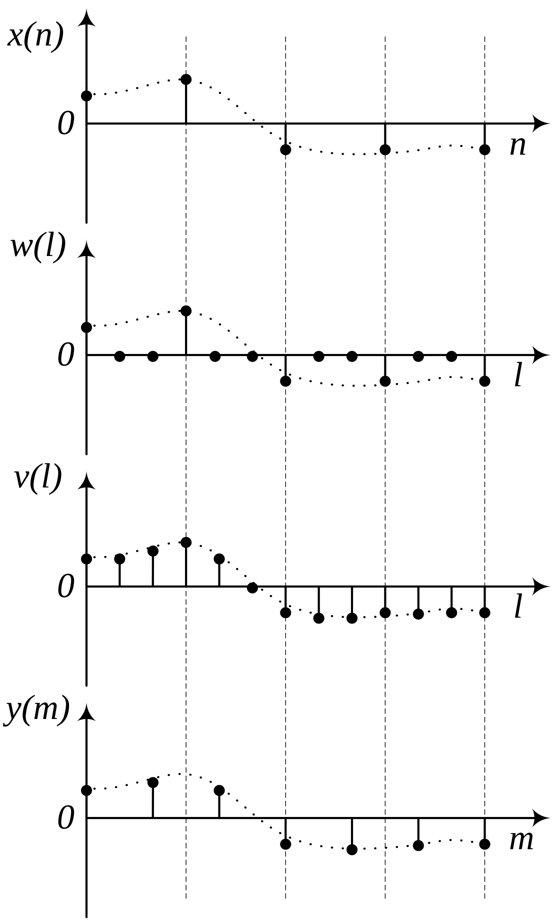
Ілюстрація інтерполяції з раціональним кроком наведена на рис. 1.20.



а)



б)



в)

Рис. 1.20. Ілюстрація інтерполяції з раціональним кроком:
а) каскадно включені інтерполятор та дециматор;
б) узагальнений конвертер;

в) ілюстрація процесу для $L = 3$ та $M = 2$.

Якщо потрібно змінити частоту дискретизації в неціле число раз, такі множники надаються раціональним числом, наприклад відношенням двох цілих чисел L/M. Необхідне перетворення частоти здійснюється в два етапи: 1) інтерполяція даних з кроком L та 2) децимація з кроком M. Необхідно, щоб процес інтерполяції передував процесу децимації, інакше при децимації щезнуть деякі необхідні частотні компоненти.

Оскільки на рис. 1.20, а два ФНЧ $h_1(k)$ та $h_2(k)$ з'єднані каскадно та мають загальну частоту дискретизації, їх можна об'єднати в фільтр $h(k)$ і отримати узагальнений конвертер.

На рис. 1.20,в частота дискретизації спочатку збільшується у три рази (до кожної вибірки вхідного сигналу $x(n)$ додаються дві нульові вибірки). Потім сигнал пропускається через ФНЧ. Далі відфільтровані дані скорочуються у два рази, тобто з кожних двох вибірок залишається одна.

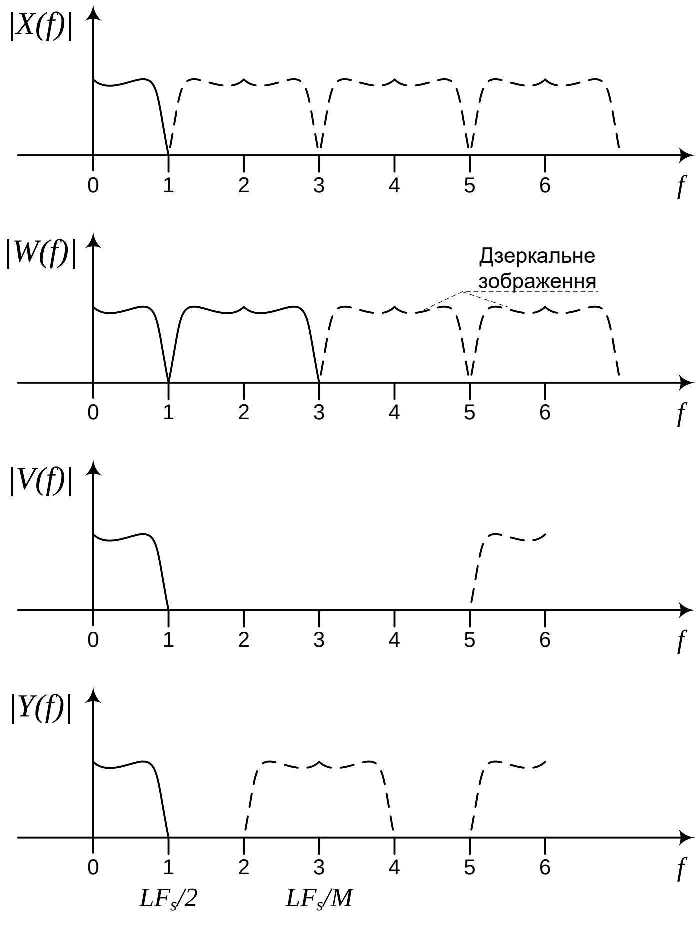


Рис. 1.21. Спектральна інтерпретація інтерполяції з нецілим кроком

Якщо потрібно значно змінити частоту, перетворення здійснюють у кілька етапів. Фактично багато каскадний підхід прийнятий у більшості практичних схем обробки на декількох швидкостях.

Приклад трьохкаскадного дециматора наведено на рис. 1.22.

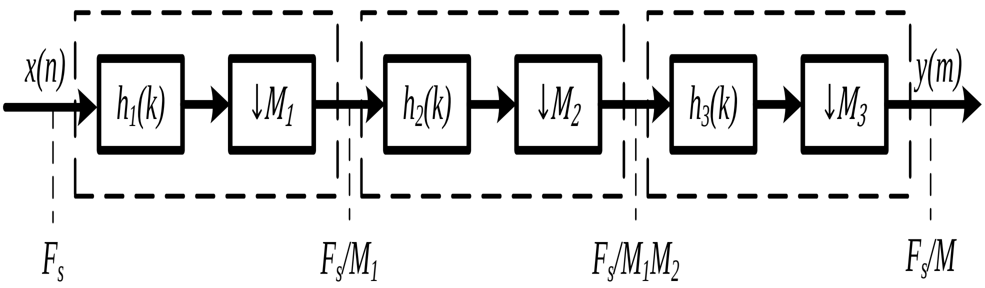


Рис. 1.22. Приклад трьохкаскадного дециматора

Для I-каскадного процесу децимації загальний крок децимації виражається як добуток менших кроків

$$M = M_1 M_2 \dots M_I.$$

Якщо $M \gg 1$, багатокаскадний підхід приводить до значного зниження вимог до обчислень та пам'яті, послаблює характеристики фільтрів.

Основна проблема – визначення оптимального числа каскадів I та кроків децимації для кожного каскаду.

Число каскадів потрібно мінімізувати, оскільки при цьому потрібен мінімальний обсяг обчислень, виміряний у числі операцій множення в секунду (МВС) чи загальній потрібний пам'яті (ЗПП) для збереження коефіцієнтів. Вибір числа каскадів – задача нетривіальна.

$$\text{МВС} = \sum_{i=1}^{I} N_i F_i,$$

$$\text{ЗПП} = \sum_{i=1}^{I} N_i,$$

де N_i – число коефіцієнтів фільтра i-го каскаду;

F_i – частота дискретизації на виході i-го каскаду.

На практиці майже не обирають більше 3-4 каскадів. Крім того, для заданого значення M існує тільки обмежений набір цілих кроків-множників. Доцільно визначити всі можливі множники M та відповідні їм МВС чи ЗПП. Потім за методом перебору визначити найбільш ефективне рішення.

Взагалі, щоб досягти оптимального значення параметрів МВС чи ЗПП, кроки децимації повинні відповідати наступному співвідношенню

$$M_1 > M_2 > \dots > M_I,$$

де M_i – постійні.

В той же час, якщо множники – цілі числа, то задовольнити останнє рівняння можна не завжди.

Розглянемо приклад. Необхідно понизити частоту дискретизації з 3072 кГц до 48 кГц за допомогою трьохкаскадного дециматора. Визначити кроки дискретизації M_1, M_2, M_3, виконуючи умову досягнення оптимального значення ЗПП.

Умова досягнення оптимального значення ЗПП $M_1 > M_2 > M_3$.

Кроки дискретизації повинні бути цілими числами, кожен крок не менше 2. Визначаються перебором варіантів.

$$M = M_1 M_2 M_3 = \frac{3072}{48} = 64.$$

Покладемо $M_3 = 2$. Тоді із умови $M_2 > M_3$ покладемо $M_2 = 4$ (так як $M_1 M_2 = \frac{64}{2} = 32$ не ділиться на 3), отже $M_1 = 8$. Інших варіантів серед цілих чисел немає.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Наведіть основні області застосування цифрової обробки сигналів.
2. Наведіть основні переваги та недоліки цифрової обробки сигналів.
3. Що розуміється під сигналом у телекомунікація?
4. Що являють собою аналогові, дискретні та цифрові сигнали?
5. Перерахуйте основні операції цифрової обробки сигналів.
6. Наведіть етапи аналого-цифрового перетворення сигналів.
7. Що являє собою процес дискретизації сигналу?
8. Наведіть зміст теореми відліків/Найквіста/Котельникова.
9. Що таке накладення сигналів при дискретизації?
10. Що означає однорідне квантування і кодування вибірки сигналу?
11. Як залежить потужність шуму квантування від кроку квантування при однорідному квантуванні?
12. Що означає неоднорідне квантування і кодування вибірки сигналу?
13. Що таке процес стискання та розширення звукового сигналу?
14. Наведіть відомі характеристики неоднорідного квантування, їх загальний зміст.
15. Назвіть основні характекристики спектру дискретного сигналу.
16. Що таке накладення спектрів та частота Найквіста?
17. Що являє собою фільтр захисту від накладення спектрів, які його основні риси?
18. Як пов’язане мінімальне згасання у смузі придушення фільтра захисту від накладення спектрів з розрядністю кодового слова АЦП?
19. Що таке апертурний час АЦП?
20. Які особливості дискретизації сигналів?
21. Які основні елементи пристрою для цифро-аналогового перетворення?
22. Що таке апертурне спотворення ЦАП?
23. Що являє собою фільтр захисту від дзеркальних частот?
24. Що означають процеси децимації та інтерполяції?
25. Що здійснює компресор частоти дискретизації?
26. Що здійснює експандер частоти дискретизації?
27. У якому порядку здійснюється перетворення частоти дискретизації у неціле число раз?
28. Навіщо застосовують багатокаскадний підхід до зміни частоти дискретизації?
29. Яке загальне правило оптимального вибору кроків перетворення частоти дискретизації в багатокаскадних перетворювачах?

2. ОСНОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ ОСНОВНИХ ОПЕРАЦІЙ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ У ТКС

Розглянемо питання трансформації початкового сигналу, щоб задовольнити, наприклад, вимоги до займаної сигналом смуги частот або до об'єму ресурсів для зберігання. Рішення зазначених проблем досягається при використання цифрової модуляції, суть якої викладено в подальшому матеріалі. Також роз'яснюється природа і інших операцій – згортки, кореляції та фільтрації, які ілюструються прикладами обчислення згортки, функцій автокореляції та взаємної кореляції. Окрема увага приділена дискретним перетворенням. Коротко викладено виведення широко розповсюдженого дискретного перетворення Фур'є, а також описані дискретне косинус-перетворення, перетворення Уолша та Адамара. Також стисло викладені відомості про вейвлетне перетворення, яке набуває широкого розповсюдження при очищенні сигналів від шумів, спектральному аналізі сигналів та детектуванні сингулярностей. У завершальній частині розділу надані важливі аспекти самого зручного засобу опису, аналізу та проектування сигналів та систем дискретного часу – z-перетворення.

2.1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО МОДУЛЯЦІЮ СИГНАЛІВ В ТКС

Зараз все більша частина інформації, що передається різними каналами зв'язку, існує в цифровому вигляді. Це означає, що передачі підлягає не неперервний аналоговий сигнал, а послідовність цілих чисел, які можуть приймати значення з деякої фіксованої скінченої множини. Ці числа називаються *символами* і надходять від джерела інформації з періодом T_s, а відповідна частота $f_r = 1/T_s$ називається *символьною швидкістю*. Символи фактично є квантованими, отже такий сигнал можна назвати цифровим.

Типовим підходом при здійсненні передачі дискретної послідовності символів є співставлення кожному з можливих значень символу деякого набору параметрів несівного коливання. Ці параметри підтримуються постійними на протязі інтервалу T_s. Фактично це означає перетворення послідовності чисел в ступінчатий сигнал, який надалі використовується звичайним способом як модулюючий.

2.1.1. ВИЗНАЧЕННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МОДУЛЯЦІЇ ТА МАНІПУЛЯЦІЇ СИГНАЛІВ

У залежності від виду сигналу, що модулює, та несівного коливання можна визначити наступні типи модуляції (рис. 2.1).

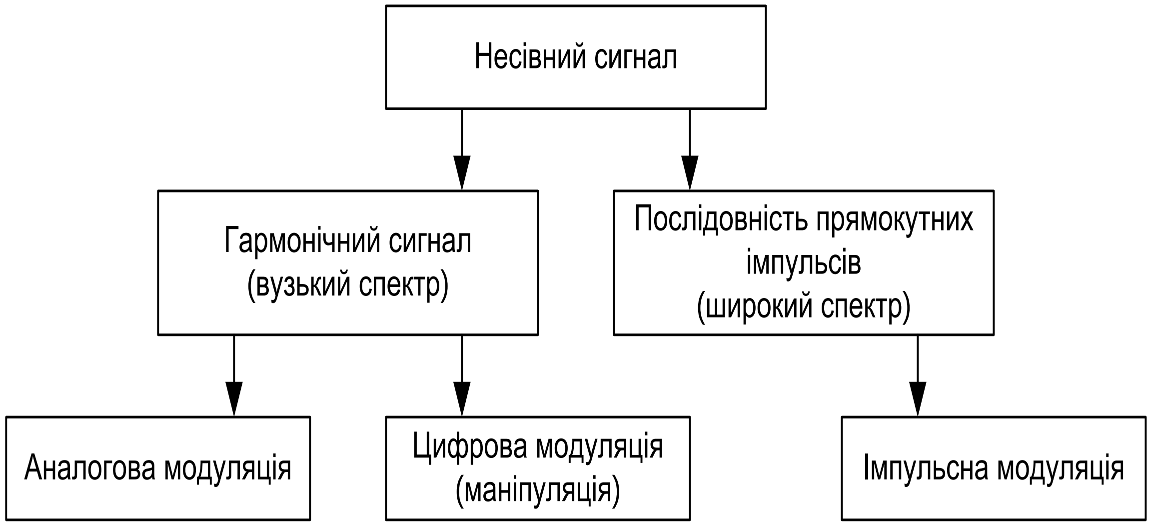


Рис. 2.1. Типи модуляції

Спосіб модуляції, коли параметри несівного коливання змінюються стрибкоподібно, називається маніпуляцією. Розрізняють три основних види маніпуляції сигналів:

- амплітудну (АМн, *англ*. Amplitude-shift keying – ASK),
- фазову (ФМн, *англ.*. Phase-shift keying – PSK),
- частотну (ЧМн, *англ*. Frequency-shift keying – FSK).

Окремо інколи виділяють квадратурну (КАМн, *англ*. Quadrature amplitude modulation – QAM) маніпуляцію.

Крім того, при передачі інформації може використовуватися несівне коливання, відмінне за формою від гармонічного. При використанні в якості несівного коливання послідовності прямокутних імпульсів можливі амплітудно-імпульсна (АІМ), широтно-імпульсна (ШІМ) та часово-імпульсна (ЧІМ) модуляція.

Види цифрової модуляції наведені на рис. 2.2.

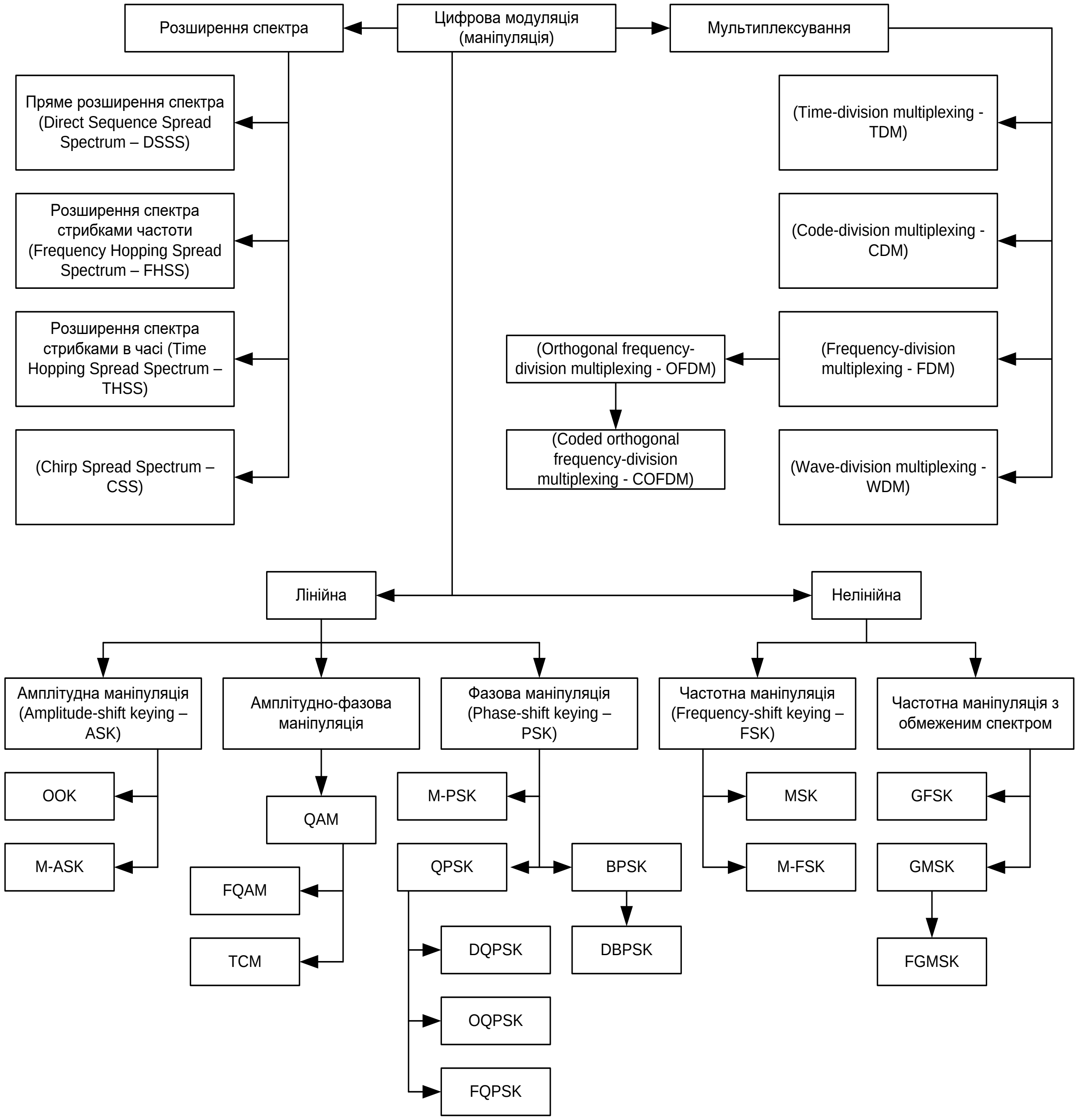


Рис. 2.2. Види маніпуляції

2.1.2. ЧАСТОТНА МАНІПУЛЯЦІЯ СИГНАЛІВ

При частотній маніпуляції (ЧМн, *англ*. frequency shift keying – FSK) кожному можливому значенню символу, що передається, співставляється своя частота. На протязі кожного символьного інтервалу передається гармонічне коливання з частотою, яка відповідає поточному символу.

Сигнал, що передається, можна записати в наступному вигляді

$$s(t) = A\sum_{k=0}^{K-1} U_{T_s}(t - kT_s)\cos(2\pi f_i t),$$

де A – амплітуда гармонічного коливання;

U_{T_s} – імпульс прямокутної форми довжиною T_s та одиничною енергією;

f_i – частота несівного коливання, яка приймає значення із множини

$$\{f_0 + (2i - 1 - M)f_d\};$$

$2f_d$ – відстань між сусідніми частотними позиціями.

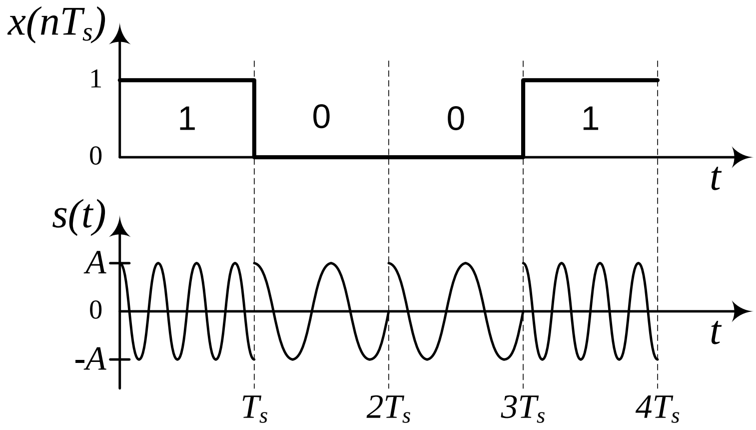


Рис. 2.3. Частотно-маніпульований сигнал

Оскільки кожна символьна посилка формується незалежно, то сформований сигнал має стрибки. Відомо, що чим більше гладким є сигнал, тим швидше убуває його спектр.

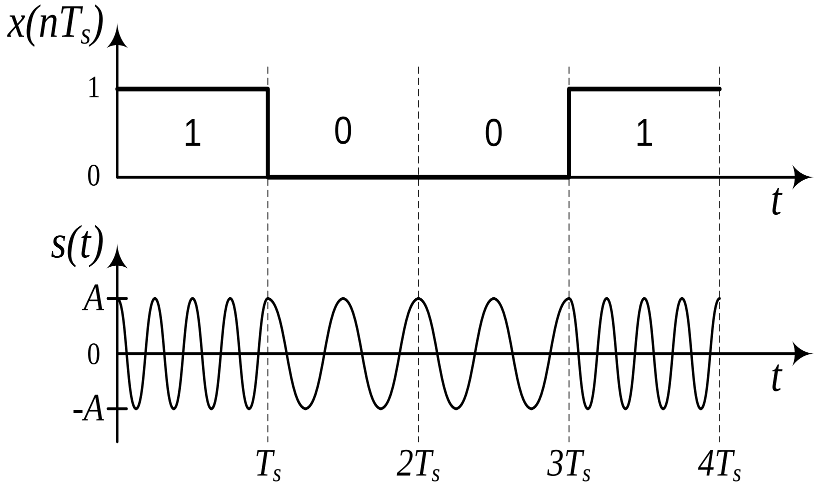
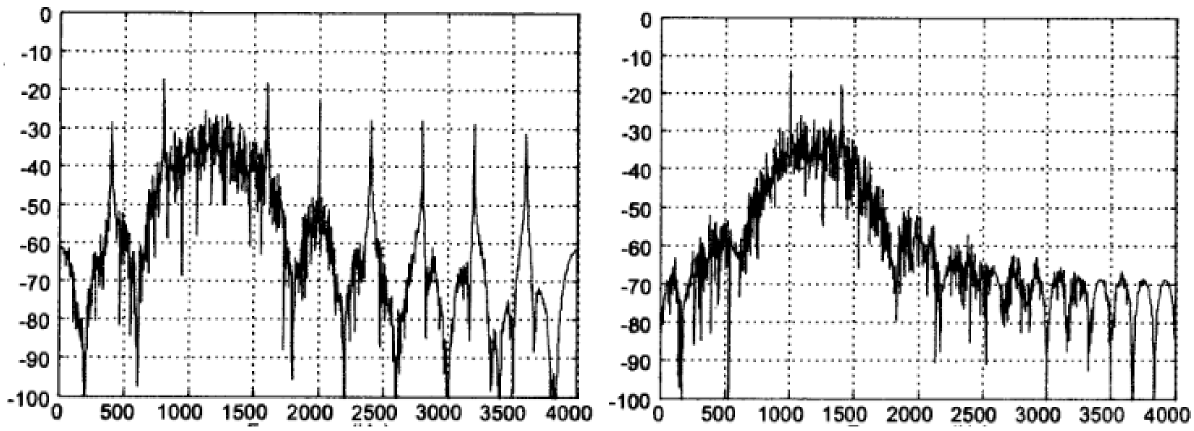


Рис. 2.4. ЧМн-сигнал з неперервною фазовою функцією

Спосіб зробити спектр ЧМн-сигналу компактніше називається частотною маніпуляцією з неперервною фазовою функцією (CPFSK – *англ.* continuous phase frequency shift keying). При цьому формується повна фаза коливання, що лінійно змінюється, а символи, які передаються, керують швидкістю її зміни.

Спектри потужності при двох варіантах формування ЧМн-сигналу наведені на рис. 2.5.



а) б)

Рис. 2.5. Спектр потужності ЧМн-сигналу:
а) при наявності розривів у фазовій функції;
б) при відсутності розривів у фазовій функції.

При наявності стрибків фази у спектрі присутні яскраво виражені піки на частотах, кратних символьній швидкості. У сигналу з неперервною фазовою функцією ці піки відсутні.

Для підвищення завадостійкості ЧМн бажано, щоб посилки, які відповідають різним символам, були некорельовані. Якщо вважати початкові фази посилок нульовими, ЧМн-сигнали для символів 0 та 1 можна записати:

$$s_0(t) = A\cos\omega_0 t,\ s_1(t) = A\cos\omega_1 t,\ 0 \le t \le T_s.$$

Їх взаємокореляційна функція (ВКФ) при нульовому часовому зсуві дорівнює

$$B_{01}(0) = \int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt = A^2\int_0^{T_s} \cos\omega_0 t\cos\omega_1 t\,dt =$$
$$= \frac{A^2\sin(\omega_1+\omega_0)T_s}{2(\omega_1+\omega_0)} + \frac{A^2\sin(\omega_1-\omega_0)T_s}{2(\omega_1-\omega_0)}.$$

Якщо $(\omega_1 + \omega_0)T_s \gg 1$, то перший доданок значно менше другого і ним можна знехтувати:

$$B_{01}(0) \approx \frac{A^2 \sin(\omega_1 - \omega_0)T_s}{2(\omega_1 - \omega_0)}.$$

Це значення дорівнює нулю при $(\omega_1 - \omega_0)T_s = \pi k$, де k – ціле число, не рівне нулю. Таким чином, мінімальне значення відстані між частотами маніпуляції, при якій посилки, що відповідають різним символам, виявляються некорельованими, складає

$$\Delta\omega_{min} = \frac{\pi}{T_s}\ , \Delta f_{min} = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_r}{2}\ .$$

Двохпозиційна (бінарна) ЧМн, частоти якої обрані за даним принципом, називається мінімальною частотною маніпуляцією (МЧМн, *англ*. minimum shift keying – MSK).

2.1.3. АМПЛІТУДНА МАНІПУЛЯЦІЯ СИГНАЛІВ

Амплітудна маніпуляція (АМн, *англ*. amplitude shift keying – ASK), при якій стрибкоподібно змінюється амплітуда несівного коливання, в загальному випадку є частковим випадком квадратурної маніпуляції.

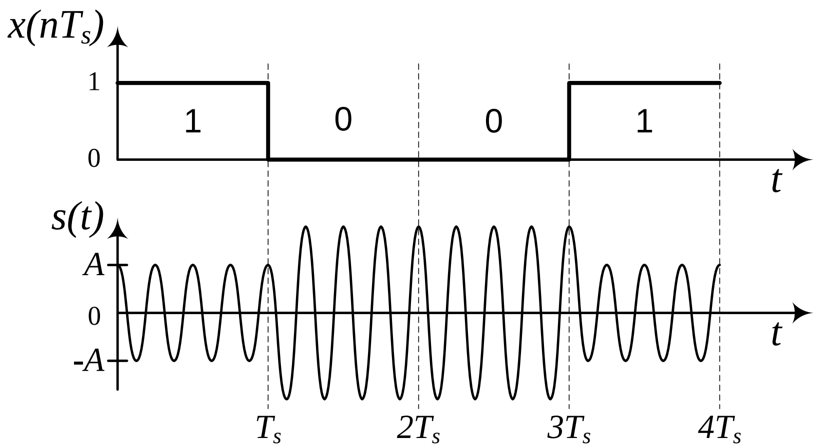


Рис. 2.6. Сигнал з амплітудною маніпуляцією

АМн-сигнал можна записати в наступному вигляді

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k U_{T_s}(t - T_s) \cos(2\pi f_0 t),$$

де d_k – випадкова величина, що приймає значення із множини

$$\{a_i, i = \overline{1, M}\},$$

$$a_i = (2i - 1 - M)\frac{d}{2}, i = \overline{1, M};$$

$M = 2^m$ – кількість можливих двійкових послідовностей, що створюються джерелом дискретних повідомлень;

$U_{T_s}(t - T_s)$ – імпульс прямокутної форми довжиною T_s та одиничною енергією.

2.1.4. ФАЗОВА МАНІПУЛЯЦІЯ СИГНАЛІВ

Фазова маніпуляція (ФМн, *англ.* phase shift keying – PSK), при якій стрибкоподібно змінюється фаза несівного коливання, також є частковим випадком квадратурної модуляції.

ФМн-сигнал можна записати в наступному вигляді

$$s(t) = A\sum_{k=0}^{K-1} U_{T_s}(t - kT_s)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_k) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) + \\ + Q(t)\cos(2\pi f_0 t),$$

де

$$I(t) = A\sum_{k=0}^{K-1} U_{T_s}(t - kT_s)\cos(\varphi_k) - \text{сигнал у синфазному каналі,}$$

$$Q(t) = A\sum_{k=0}^{K-1} U_{T_s}(t - kT_s)\sin(\varphi_k) - \text{сигнал у квадратурному каналі,}$$

φ_k приймає значення з множини $\left\{\frac{2\pi}{M}(i - 1) + \varphi_0, i = \overline{1, M}\right\}$;

φ_0 – довільна початкова фаза.

На практиці фазова маніпуляція використовується при невеликому числі можливих значень початкової фази – як правило, 2, 4 чи 8.

Двійкова ФМн (*англ.* BPSK - binary phase-shift keying) - найпростіша форма фазової маніпуляції. Робота схеми двійкової ФМн полягає у зміщенні фази несівного коливання на одне з двох значень, нуль або 180°. Двійкову ФМн можна також розглядати як окремий випадок квадратурної маніпуляції (QAM-2). Часові діаграми прикладу роботи BPSK-модулятора наведені на рис. 2.7.

При квадратурній маніпуляції (КАМн, *англ.* quadrature amplitude modulation – QAM, рідше quadrature amplitude shift keying – QASK) кожному з можливих значень дискретного символу C_k ставиться у відповідність пара величин – амплітуди синфазної і квадратурної складових чи, що еквівалентно, амплітуда та початкова фаза несівного коливання:

$$C_k \to (a_k,\ b_k), \qquad s(t) = a_k \cos\omega_0 t + \ b_k \sin\omega_0 t\,, kT_s \le t < (k+1)T_s$$

чи

$$C_k \to (A_k,\ \varphi_k), \qquad s(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \ \varphi_k)\,, kT_s \le t < (k+1)T_s.$$

Параметри аналогового коливання, що співставлені дискретному символу C_k, зручно надавати у вигляді комплексного числа в алгебраїчній $(a_k + j\,b_k)$ чи експоненціальній $(A_k e^{-j\,\varphi_k})$ формі. Сукупність цих комплексних чисел для всіх можливих значень дискретного символу називається *сигнальним сузір'ям (constellation).* У вітчизняній літературі також використовується термін *«сигнально-кодова конструкція».*

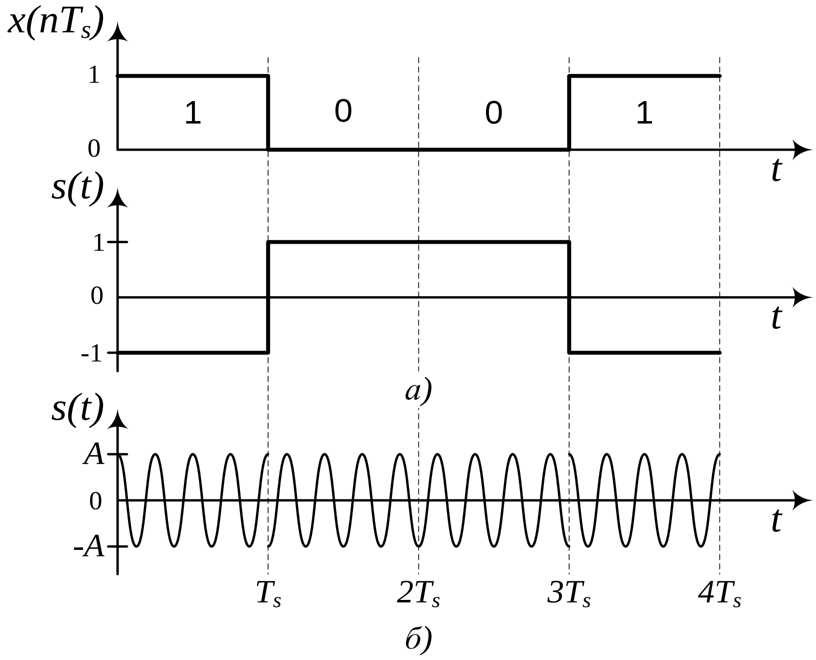


Рис. 2.7. Часові діаграми прикладу роботи BPSK-модулятора:
а) на несівній частоті $f_0 = 0$;
б) на несівній частоті $f_0 \neq 0$.

Прі квадратурній ФМн (*англ*. QPSK - quadrature phase shift keying або 4-PSK) використовується сузір'я із чотирьох точок, розміщених на рівних відстанях на колі. Використовуючи чотири фази, в QPSK на символ доводиться два біти, як показано на рис. 2.8. Швидкість передачі може бути збільшена в два рази відносно BPSK при тій же смузі сигналу, або залишитися тією ж при зменшеній вдвічі смузі.

QPSK можна вважати квадратурною маніпуляцією (QAM-4), але іноді її простіше розглядати у вигляді двох незалежних модульованих несівних, зміщених на 90°. При такому підході парні (непарні) біти використовуються для модуляції синфазної складової, а непарні (парні) – квадратурної складової несівної. Несівні можуть бути демодульовані незалежно.

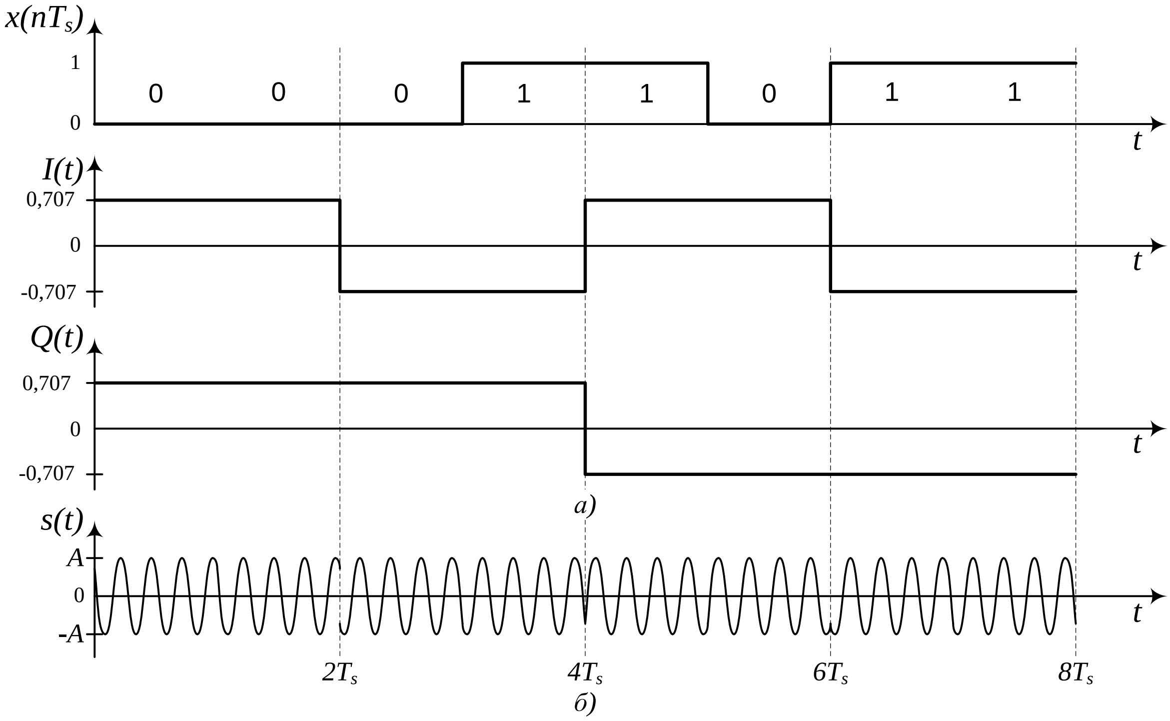


Рис. 2.8. Часові діаграми прикладу роботи QPSK-модулятора:
а) на несівній частоті $f_0 = 0$;
б) на несівній частоті $f_0 \neq 0$.

При прийомі сигналу складно виміряти абсолютне значення початкової фази, значно простіше визначити відносний фазовий зсув між двома сусідніми символами. Тому зазвичай використовується фазорізницева маніпуляція (диференціальна, відносна ФМн, *англ.* differential phase shift keying – DPSK).

На рис. 2.9 наведені сигнальні сузір’я для різних видів ФМн з використанням кодування Грея.

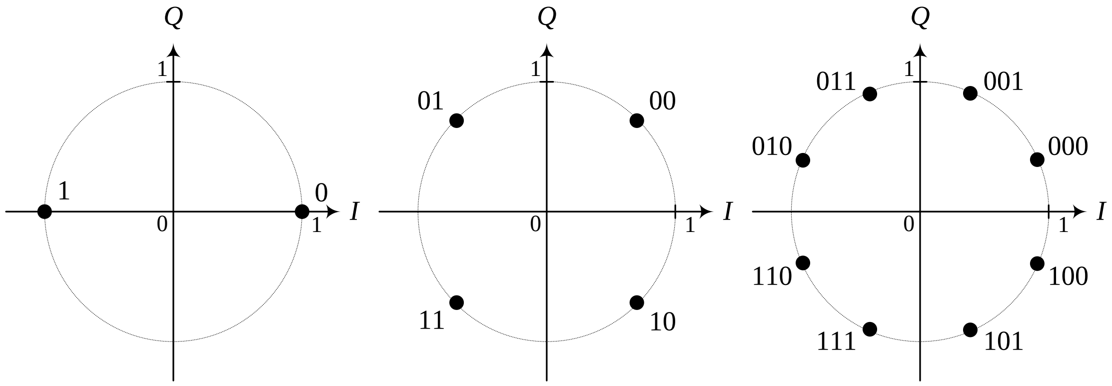


Рис. 2.9. Сигнальні сузір’я:
а) BPSK;
б) QPSK;
в) 8-PSK.

2.1.5. РЕАЛІЗАЦІЯ КВАДРАТУРНОЇ МАНІПУЛЯЦІЇ

Сигнал з квадратурною маніпуляцією (КАМн, *англ.* quadrature amplitude modulation – QAM, рідше quadrature amplitude shift keying – QASK) можна записати наступним чином:

$$s(t) = \mathrm{Re}[C_k \exp(-j\omega_0 t)], \qquad kT_s \le t < (k+1)T_s,$$

або якщо надати $C_k \to (a_k,\ b_k)$

$$s(t) = a_k \cos\omega_0 t + \ b_k \sin\omega_0 t\,, kT_s \le t < (k+1)T_s,$$

де $a_k,\ b_k$ – сигнали модуляції.

Графік сигналу з квадратурною маніпуляцією виявляється не дуже наочним через змішаний (амплітудно-фазовий) характер модуляції. Зміни амплітуди і фази при переході від символу до символу можуть бути невеликими і погано помітними на графіку.

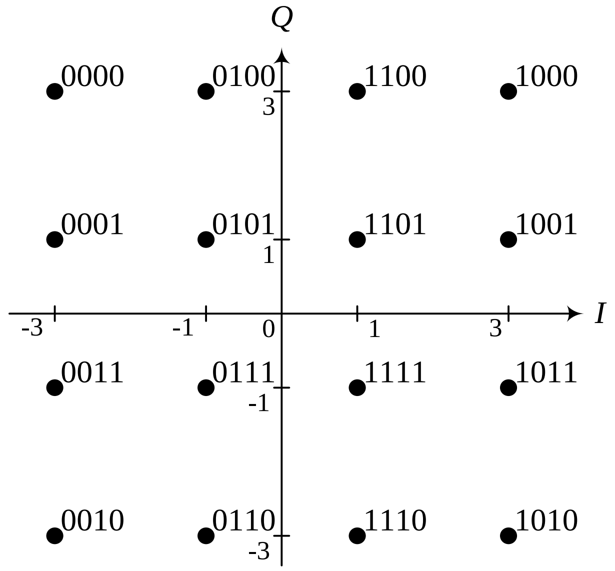


Рис. 2.10. Сигнальне сузір’я 16-QAM

За рахунок використання двохмірного характеру гармонічного несівного коливання квадратурна маніпуляція забезпечує більшу завадостійкість, ніж АМн чи ФМн. Завадостійкість тим вища, чим більше відстань між найближчими точками сузір’я на комплексній площині. При цьому для коректності порівняння різних сузір’їв у них повинні бути однаковими, окрім числа точок, середньоквадратичні амплітуди:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|C_k|^2}\,.$$

На рис. 2.11 наведено порівняння завадостійкості 16-позиційних амплітудної, фазової та квадратурної маніпуляцій.

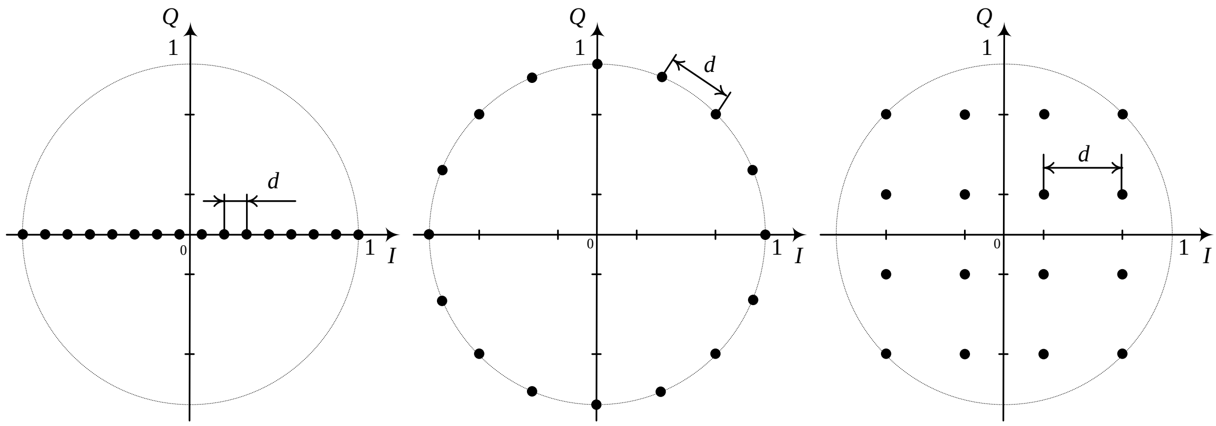


Рис. 2.11. Порівняння завадостійкості 16-позиційних амплітудної, фазової та квадратурної маніпуляцій

Якщо параметри модуляції аналогового сигналу підтримуються постійними на протязі символьного такту та в початку нового такту змінюються стрибкоподібно, це призводить до появи стрибків і у сформованому сигналі. Спектр сигналу, який містить стрибки, вщухає із зростанням частоти повільно – пропорційно $1/\omega$. Щоб зробити спектр більш компактним, необхідно забезпечити гладкість сигналу, що в свою чергу означає гладкість функції, що маніпулює. Замість стрибкоподібної зміни параметрів модуляції необхідно виконати інтерполяцію між точками сузір'я, що відповідають послідовним символам.

Згідно з теоремою Котельникова, ми можемо з'єднати відліки, що слідують із символьною швидкістю F_d, плавною функцією, яка займає смугу частот від нуля до $F_d/2$. У цьому випадку квадратурно-маніпульований сигнал буде займати смугу частот шириною F_d. Найбільше розповсюдження при інтерполяції відліків для цифрової модуляції отримав SQRT-варіант фільтра з косинусоїдальним згладжуванням АЧХ (*англ.* square root raised-cosine filter). Фільтр визначає форму спектра КАМн сигналу, тому його називають *формуючим фільтром*, а сам процес інтерполяції – *формуванням спектра*.

На рис. 2.12 наведені спектри щільності потужності сигналу з КАМн при відсутності та наявності формуючого фільтра.

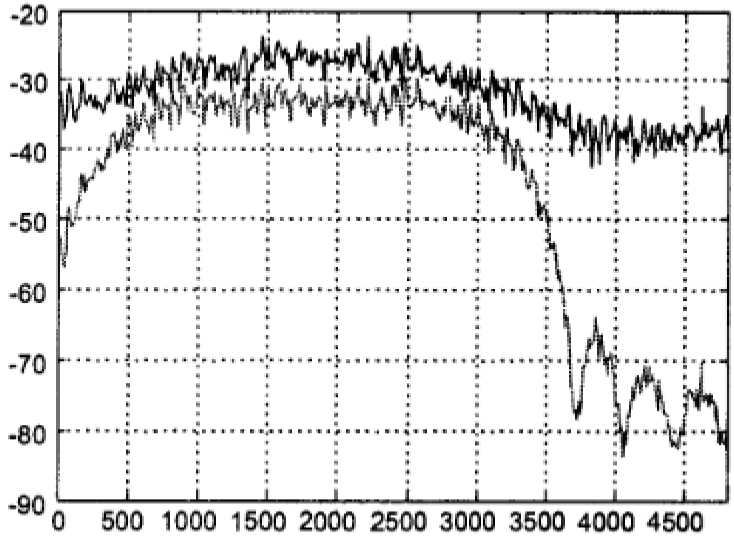


Рис. 2.12. Спектри щільності потужності сигналу з КАМн при відсутності та наявності формуючого фільтра

При прийомі такого сигналу в якості ФНЧ необхідно використовувати такий же фільтр, як і для формування спектра.

2.2. ОСНОВИ РЕАЛІЗАЦІЙ ОПЕРАЦІЙ ЗГОРТКИ, ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ, КОРЕЛЯЦІЇ ТА АВТОКОРЕЛЯЦІЇ СИГНАЛІВ У ТКС

2.2.1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗГОРТКА

Згортка – одна з операцій, що найбільше використовується. Це основна операція цифрової фільтрації. Для двох даних скінченних та причинних послідовностей $x(n)$ та $h(n)$ з довжиною N_1 та N_2 відповідно їх згортка визначається як

$$y(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k),$$
$$n = \overline{0,1,\ldots M-1},$$

де символ $\circledast$ використовується для позначення згортки, $M = N_1 + N_2 - 1$.

Згортка в часових координатах еквівалентна множенню в частотній області. В частотній області вихід системи на частоті f дорівнює

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

де $H(f)$ – частотна характеристика системи на частоті f, $X(f)$ – Фур’є-образ входу $x(t)$.

Застосовуючи зворотне перетворення Фур'є до обох частин рівняння, маємо

$$F^{-1}[Y(f)] = y(t) = h(t) \circledast x(t) = F^{-1}[H(f)X(f)].$$

Можна показати, що існує співвідношення, дуальне наведеному, тобто згортка в частотній області еквівалентна множення в часовій

$$Y(\omega) = H(f) \circledast X(f) = F[y(t)] = F[h(t)x(t)],$$

де $\omega = 2\pi f$ – циклічна частота.

Властивості згортки:

1. Закон комутативності

$$x_1(t) \circledast x_2(t) = x_2(t) \circledast x_1(t).$$

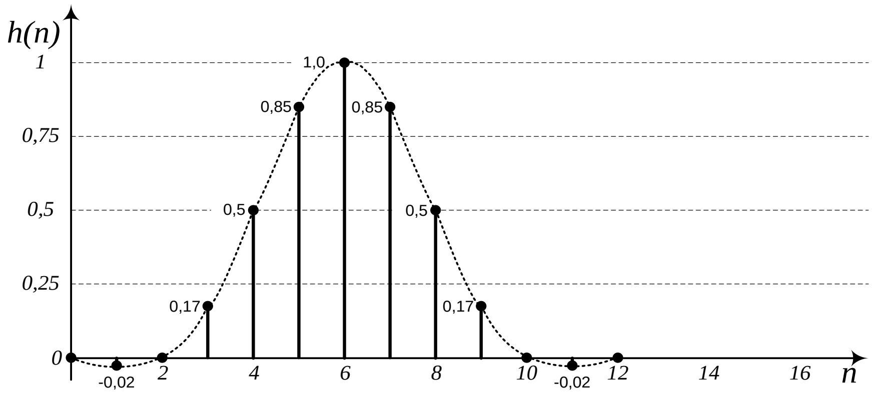
2. Закон дистрибутивності

$$x_1(t) \circledast [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \circledast x_2(t) + x_1(t) \circledast x_3(t).$$

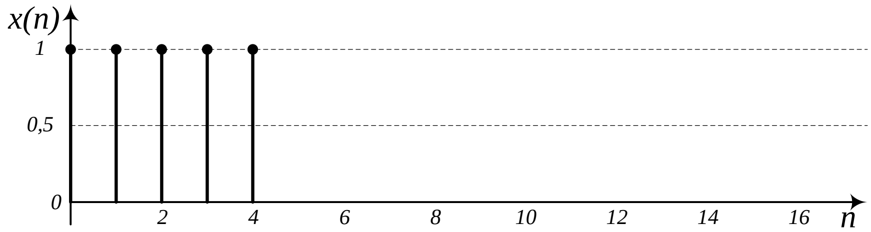
3. Закон асоціативності

$$x_1(t) \circledast [x_2(t) \circledast x_3(t)] = [x_1(t) \circledast x_2(t)] \circledast x_3(t).$$

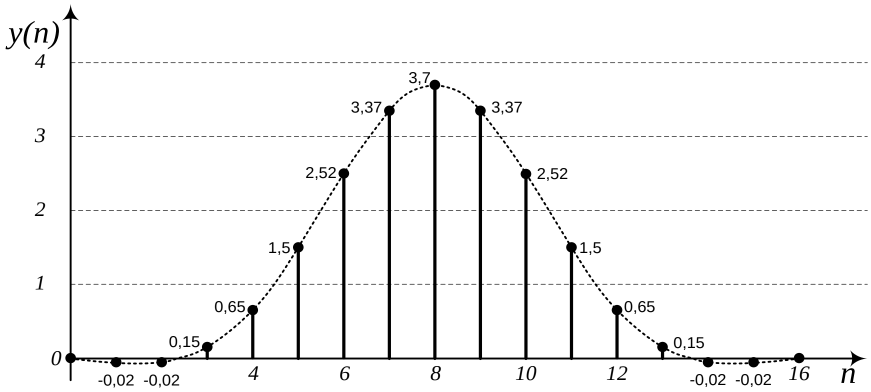
Виробники пристроїв ЦОС розробили процесори для обробки сигналів, які ефективно виконують операції множення з накопиченням, задіяні в згортці.



а)



б)



в)

Рис. 2.13. Приклад згортки двох послідовностей:
а) імпульсна характеристика системи;
б) вхідний сигнал системи;
в) вихідний сигнал системи.

Розглянемо приклад. На рис. 2.13 послідовність $h(n)$ можна розглядати як імпульсну характеристику системи, послідовність $x(n)$ – як вхідний сигнал. Тоді $y(n)$ – це вихід системи при вході $x(n)$.

Чисельні значення згортки отримані шляхом прямої оцінки рівняння.

У відповідності з рівнянням згортки $y(1)$ отримується наступним чином

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + \cdots + h(12)x(-11) =$$
$$= 0 \times 1 + (-0{,}02) \times 1 + 0 \times 0 + \cdots + 0 \times 0 = -0{,}02.$$

Дані дві кінцеві і причинні послідовності $x(n) = \{-1; 1\}$ та $h(n) = \{0{,}3; 0{,}4; 0{,}3\}$. Визначити їх згортку.

$N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $M = 2 + 3 - 1 = 4$.

$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + h(3)x(-3) = h(0)x(0) = 0{,}3 \cdot (-1) = \quad = -0{,}3;$

$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + h(3)x(-2) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot (-1) = -0{,}1;$

$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot (-1) = 0{,}1;$

$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(-03) = 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}3.$

2.2.2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Визначається як операція згортки

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k), \qquad n = \overline{0,1,\dots N-1},$$

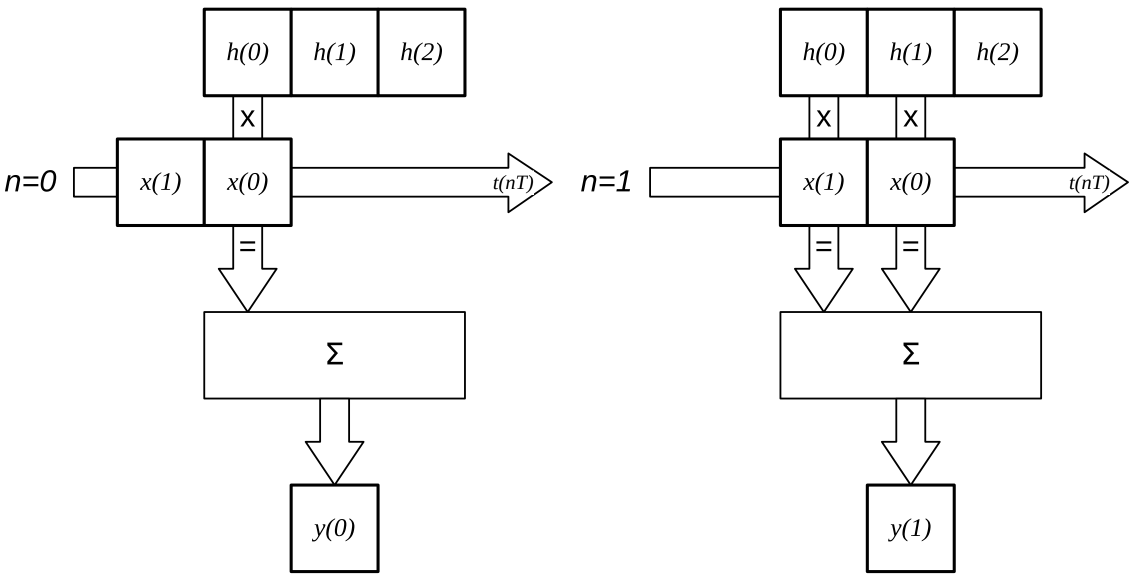
де $h(k)$ – коефіцієнти фільтра, $x(n)$ – вхід фільтра, $y(n)$ – вихід фільтра.

Для заданого фільтра коефіцієнти, що визначають характеристики цього фільтра, однозначні. Для причинних (фізичних) систем при $k < 0$ $h(k) = 0$ та при $n < 0$ $x(n) = 0$.

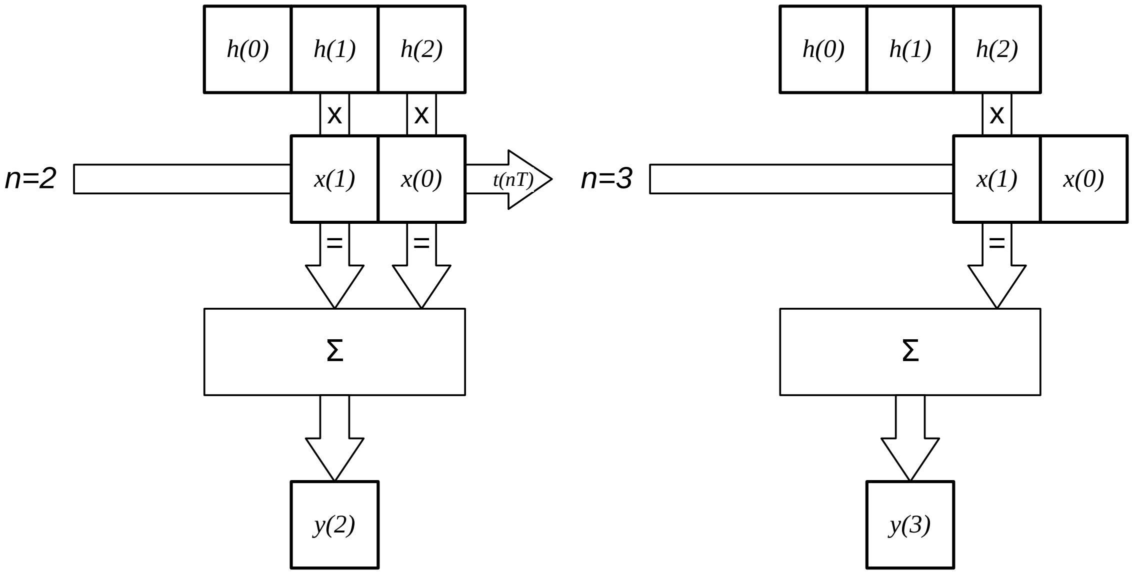
Фільтрація – це, по суті, згортка сигналу з імпульсною характеристикою фільтра в часових координатах.

Як правило, метою фільтрації є усунення чи зниження шуму в корисному сигналі. Взагалі, в подібних сферах цифровий фільтр використовується в основному для мінімізації спотворень внутрішньосмугових компонентів сигналу.

На рис. 2.14 наведено графічну ілюстрацію процесу фільтрації сигналу $x(n)$ фільтром, який представлений набором коефіцієнтів $h(k)$.



а) б)



в) г)

Рис. 2.14. Процес фільтрації для значень дискретного часу:
а) $n = 0$;
б) $n = 1$;
в) $n = 2$;
г) $n = 3$.

2.2.3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ ТА КОРЕЛЯЦІЇ

Якщо два сигнали схоже змінюються при переході від точки до точки, то міру їх кореляції можна обчислити, взявши суму добутків відповідних пар точок. Якщо розглянути дві незалежні випадкові послідовності даних, то сума добутків прагне до зникаюче малого випадкового числа в міру зростання пар точок. Це пояснюється тим, що всі числа, додатні та від'ємні, є рівно імовірними, так що пари добутків компенсуються при складанні.

Таке визначення кореляції дає результат, який залежить від числа взятих точок. Тому результат нормується на число точок (усереднення суми добутків).

У той же час, якщо сума скінченна, це вказує на наявність кореляції. Від'ємна сума вказує на від'ємну кореляцію, тобто збільшення однієї змінної пов'язане із зменшенням іншої.

У випадку, якщо два однакових сигнали ідуть у протифазі, результат обчислення кореляції є нульовим. На практиці фазовий зв'язок між сигналами скоріше за все невідомий. Щоб подолати невідомий фазовий здвиг, зазвичай другу послідовність зміщують вліво (еквівалентна альтернатива – зміщення першої послідовності вправо). В результаті кореляцію знаходять для декількох різних затримок, а найбільше значення кореляції вважається істинним.

Взаємно-кореляційна функція (ВКФ) – це показник збіжності чи загальних властивостей двох сигналів. До числа областей застосування ВКФ входять: взаємний спектральний аналіз, детектування (відновлення) сигналів, що скриті в шумі, підбір за зразком та вимір затримки.

Для двох послідовностей $x(k)$ та $y(k)$ довжини N з нульовими середніми значеннями ВКФ визначається за формулою

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де $r_{xy}(n)$ – оцінка взаємної коваріантності, визначається як

$$r_{xy}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-n-1} x(k) y\,(k+n), & n = 0,1,2, \ldots \\ \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N+n-1} x(k-n) y\,(k), & n = 0, -1, -2, \ldots \end{cases}$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)]^2, r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(k)]^2.$$

Розрахуємо ВКФ для двох послідовностей з нульовими середніми значеннями: $x(k) = \{0{,}1; -0{,}3; 0{,}2\}$ та $y(k) = \{1; 0{,}5; -1{,}5\}$.

N=3.

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{3}((0{,}1)^2 + (-0{,}3)^2 + (0{,}2)^2) = \frac{1}{3}(0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}04) \approx$$
$$\approx 0{,}047;$$

$$r_{yy}(0) = \frac{1}{3}((1)^2 + (0{,}5)^2 + (-1{,}5)^2) = \frac{1}{3}(1 + 0{,}25 + 2{,}25) \approx 1{,}17;$$

$$r_{xy}(0) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot 1 + (-0{,}3) \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot (-1{,}5)\big) =$$
$$= \frac{1}{3}(0{,}1 - 0{,}15 - 0{,}3) \approx -0{,}12;$$

$$r_{xy}(1) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot 0{,}5 + (-0{,}3) \cdot (-1{,}5)\big) = \frac{1}{3}(0{,}05 + 0{,}45) \approx 0{,}17;$$

$$r_{xy}(2) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot (-1{,}5)\big) = \frac{1}{3}(-0{,}15) = -0{,}05;$$

$$\rho_{xy}(0) = \frac{-0{,}12}{\sqrt{0{,}047 \cdot 1{,}17}} = \frac{-0{,}12}{\sqrt{0{,}055}} \approx \frac{-0{,}12}{0{,}23} \approx -0{,}52;$$

$$\rho_{xy}(1) = \frac{0{,}17}{\sqrt{0{,}055}} \approx \frac{0{,}17}{0{,}23} \approx 0{,}74;$$

$$\rho_{xy}(2) = \frac{-0{,}05}{\sqrt{0{,}055}} \approx \frac{-0{,}05}{0{,}23} \approx -0{,}22.$$

Автокореляційна функція (АКФ) передбачає існування тільки одного сигналу та дає інформацію про структуру сигналу та його поведінку в часі. Це частковий випадок ВКФ, їх сфери застосування східні. АКФ особливо корисна для виявлення скритої періодичності.

Для послідовності $x(k)$ довжини N з нульовим середнім значенням визначається за формулою

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де $r_{xx}(n)$ – оцінка автоковаріантності, визначається як

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k) x\,(k+n), \qquad n = 0{,}1{,}2, \dots$$

Важлива властивість: $r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)]^2 = S$, де S – нормована енергія сигналу.

Зазначений математичний апарат використовується при детектуванні та ідентифікації сигналів у шумі, організації технічного контролю для спостереження за впливами входу на вихід, ідентифікації двійкових кодових слів у системі з імпульсно-кодовою модуляцією тощо.

Кореляція також є невід'ємною частиною процесу згортки, який по суті є тією ж кореляцією двох послідовностей даних, одна з яких обернена в часі. Для обчислення кореляції та згортки можуть використовуватися одні і ті ж алгоритми.

Розрахувати АКФ для послідовності з нульовими середніми значеннями: $x(k) = \{0{,}1; -0{,}15; 0{,}2; -0{,}15\}$.

N=4.

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{3}\left((0{,}1)^2 + (-0{,}15)^2 + (0{,}2)^2 + (-0{,}15)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(0{,}01 + 0{,}0225 + 0{,}04 + 0{,}0225) \approx 0{,}032;$$

$$r_{xx}(1) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot (-0{,}15) + (-0{,}15) \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot (-0{,}15)\big) =$$

$$= \frac{1}{3}(-0{,}015 - 0{,}03 - 0{,}03) = -0{,}025;$$

$$r_{xx}(2) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot 0{,}2 + (-0{,}15) \cdot (-0{,}15)\big) = \frac{1}{3}(0{,}02 + 0{,}0225) \approx$$
$$\approx 0{,}014;$$
$$r_{xx}(3) = \frac{1}{3}\big(0{,}1 \cdot (-0{,}15)\big) = \frac{1}{3}(-0{,}015) = -0{,}005;$$
$$\rho_{xy}(0) = \frac{0{,}032}{0{,}032} = 1;$$
$$\rho_{xy}(1) = \frac{-0{,}025}{0{,}032} \approx -0{,}78;$$
$$\rho_{xy}(2) = \frac{0{,}014}{0{,}032} \approx 0{,}44;$$
$$\rho_{xy}(3) = \frac{-0{,}005}{0{,}032} \approx -0{,}16.$$

Визначення відношення сигнал-шум для періодичного зашумованого сигналу.

Запишемо сигнал як $V_s(i)$, шум – як $V_n(i)$, зашумований сигнал виражається наступним чином:

$$V(i) = V_s(i) + V_n(i).$$

Періодичний сигнал з періодом n інтервалів дискретизації запишемо як

$$V(i) = V(i + n).$$

Коваріація, вона ж – автокореляційна функція з нульовим середнім та затримкою n визначається наступним чином:

$$cov[V(i)] = cov[V(i), V(i+n)] =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\{V(i) - \bar{V}(i)\}\{V(i+n) - \bar{V}(i+n)\}],$$

де $\bar{V}(i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V(i)$ – середнє $V(i)$.

Далі звичайним чином визначаємо коефіцієнт автокореляції

$$\rho[V(i)] = \frac{cov[V(i)]}{\sqrt{\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big(V(i) - \bar{V}(i)\big)^2\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big(V(i+n) - \bar{V}(i+n)\big)^2\right\}}} =$$
$$= \frac{cov[V(i)]}{\sigma[V(i)]\sigma[V(i+n)]},$$

де $\sigma[V(i)] = \sqrt{\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V(i) - \bar{V}(i)\right)^2\right\}}$ – середньоквадратичне відхилення $V(i)$.

Нормування на коефіцієнт $\frac{1}{N}$ дає зміщені оцінки, незміщені оцінки отримуються заміною N на $N-1$.

Такі члени, як

$$\sigma^2[V_x(i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{V}(i)\right)^2 = var[V_x(i)]$$

називаються дисперсією та являють потужність, віднесену до $V_x(i)$.

Врахуємо той факт, що кореляція між зашумованими сигналами прагне до нуля при збільшенні числа вибірок. Таким чином

$$cov[V(i), V(i+n)] = cov\left[\left(V_s(i) + V_n(i)\right), \left(V_s(i+n) + V_n(i+n)\right)\right] = \\ = cov[V_s(i), V_s(i+n)] = var[V_s(i)].$$

Для достатньо довгих послідовностей $\sigma[V_n(i)] = \sigma[V_n(i+n)]$, тому

$$\sigma[V(i)]\sigma[V(i+n)] = \sigma^2[V(i)] = var[V(i)] = var[V_s(i) + V_n(i)] = \\ = var[V_s(i)] + var[V_n(i)] + 2cov\left[\left(V_s(i), V_n(i)\right)\right] = \\ = var[V_s(i)] + var[V_n(i)],$$

оскільки $cov\left[\left(V_s(i), V_n(i)\right)\right] = 0$.

Коефіцієнт автокореляції дорівнює

$$\rho[V(i)] = \frac{var[V_s(i)]}{var[V_s(i)] + var[V_n(i)]} = \frac{1}{1 + \frac{var[V_n(i)]}{var[V_s(i)]}}.$$

Відношення сигнал-шум $\frac{S}{N}$ (дБ) визначається як $10\lg\left(\frac{\text{потужність сигнала}}{\text{потужність шума}}\right)$, що виглядає як

$$\frac{S}{N} = 10\lg\left|\frac{var[V_s(i)]}{var[V_n(i)]}\right| = 10\lg\left|\frac{\rho[V(i)]}{1 - \rho[V(i)]}\right| \text{ дБ.}$$

Таким чином, відношення сигнал-шум зашумованого періодичного сигналу легко обчислюється за його коефіцієнтом кореляції. Зазначимо

$$var[V_s(i)] + var[V_n(i)] \equiv S + N = var[V(i)],$$

звідки

$$S = \rho[V(i)]var[V(i)], N = (1 - \rho[V(i)])var[V(i)].$$

2.3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ

Дискретне перетворення дозволяє описувати сигнали з дискретним часом в частотних координатах чи переходити від опису в часовій області до опису в частотній. Для отримання спектра сигнал розкладається на частотні складові за допомогою дискретного перетворення. Знання такого спектру неоцініме, наприклад, при визначенні ширини смуги, яка необхідна для передачі сигналу. Перехід від часових координат до частотних необхідний в багатьох застосуваннях ЦОС. Наприклад, він дозволяє ефективніше реалізувати такі алгоритми ЦОС, як цифрова фільтрація, згортка та кореляція.

При перетворенні дискретних даних з часової області в частотну залежність напруги від часу прийнято виражати через залежність амплітуди складових сигналу (чи фази) від частоти. Навпаки здійснюється перетворення з частотної області в часову. Ці два описи (представлення) в різних областях дають інформацію, що доповнює одна одну, про одні і ті ж дані.

Дискретні перетворення, зокрема, дискретне косинус-перетворення, використовуються також для стискання звукових та відеосигналів, що дозволяє передавати їх з меншою шириною смуги. Крім того, вони застосовуються при обробці зображень (розпізнаванні образів) для скорочення набору ознак. Перетворення корисні і як математичний засіб прискорення обчислень в інших областях обробки сигналів, таких як находження кореляції чи при згортці для визначення взаємозв’язку між системою та її вхідними і вихідними даними.

Взагалі, ця тема сугубо математична, але сьогодні можна з упевненістю сказати, що в більшості застосувань дискретні перетворення стали стандартною процедурою, так що інженерам-розробникам навряд чи знадобиться глибоке математичне пізнання чи знання спеціальних теорем. Виключенням є спектральний аналіз сигналів. Тут кожну задачу потрібно розглядати в своєму контексті, при цьому важливо добре розбиратися в предметі.

2.3.1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР’Є

Аналіз Фур’є існує з моменту опублікування роботи Фур’є в 1822 році, і з тих пір став широко відомий, заслужив увагу та розвився разом з рядом областей свого застосування. Із усіх можливих перетворень самими відомими, та вважай, самими важливими є дискретне перетворення Фур’є

(ДПФ) та алгоритм його швидкого обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

Цьому є кілька причин:

- перетворення дозволяють адекватно описувати в частотних координатах усе, крім самих короткочасних (менше 1 с) сигналів;

- усічені за частотою Фур'є-компоненти описують дані більш правдоподібно, ніж будь-які інші ступеневі ряди.

Окремі компоненти являють собою синусоїди і не спотворюються при передачі через лінійні системи, що дозволяє використовувати їх як гарні пробні сигнали. Нарешті, ШПФ можна порахувати дуже швидко.

Головна область застосування перетворення Фур'є – це швидке обчислення при обробці сигналів, де застосовується ШПФ, та спектральний аналіз.

Розглянемо ряд Фур'є. Будь-який періодичний сигнал $f(t)$ можна представити у вигляді суми нескінченого числа синусоїдальних та косинусоїдальних членів та одного постійного члена. Це представлення називається *рядом Фур'є* та задається наступним чином:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega T)\,, \qquad (1)$$

де t – незалежна змінна, яка часто означає час, але може означати, наприклад, відстань чи будь-яку іншу величину;

$f(t)$ часто означає функцію залежності напруги від часу, але може означати і будь-який сигнал;

$\omega = 2\pi/T_p$ називають циклічною частотою першої (чи основної) гармоніки, пов'язаною з основною частотою f співвідношенням $\omega = 2\pi f$;

T_p – період повторення сигналу.

Через

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)dt$$

позначається постійна, що дорівнює усередненому за часом сигналу $f(t)$ за один період, яка може являти, наприклад, рівень постійної напруги.

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

та

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

Частоти $n\omega$ називають n–ми гармоніками частоти . Отже, нескінчений ряд (1) містить синусоїдальні та косинусоїдальні члени, що залежать від частоти, з різними амплітудами a_n та b_n на позитивних частотах гармонік $n\omega$. Цей ряд можна записати компактніше за допомогою експоненціального представлення, крім того, в такому вигляді набагато спрощується виконання математичних операцій:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t},$$

де

$$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \qquad (2)$$

є комплексними числами, а $|d_n|$ – величини, що вимірюються в вольтах.

При сумуванні враховуються і від'ємні значення n, так що половину ряду складають від'ємні частоти $-n\omega$. Вони не мають фізичного значення та є чисто математичним поняттям, але внаслідок цього модулі $|d_n|$ комплексних амплітуд d_n чисельно зменшені в два рази. Це означає рівний розподіл амплітуди за відповідними від'ємними та додатними частотами. Отже, правильне значення амплітуди на частоті $n\omega$ можна знайти, подвоївши розраховану величину. Комплексна та тригонометрична форма пов'язані наступними співвідношеннями:

$$|d_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

та

$$\phi_n = -arctg(b_n/a_n),$$

де ϕ_n – зсув фази компонента n-ї гармоніки, який також задається як арктангенс відношення уявної та дійсної частин d_n. Отже, кожна гармоніка сигналу характеризується своїм фазовим зсувом та амплітудою.

Розглянемо періодичний однополюсний імпульсний сигнал, у якого навмисно зміщений початок відліку відносно центра.

$$d_n = \frac{1}{T_p}\int_{-(\tau-x\tau)}^{x\tau} Ae^{-in\omega t}dt = \frac{A}{T_p}\cdot\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\bigg|_{-(\tau-x\tau)}^{x\tau} =$$

$$= \frac{A}{n\omega T_p}\cdot\frac{e^{-in\omega x\tau} - e^{-in\omega(\tau-x\tau)}}{-i} =$$

$$= \frac{A}{n\omega T_p}\cdot e^{-in\omega x\tau}\left[\frac{e^{in\omega\tau}-1}{i}\right] =$$

$$= \frac{2A}{n\omega T_p}\cdot e^{-in\omega x\tau}\left[\frac{e^{in\omega\tau/2}-e^{-in\omega\tau/2}}{2i}\right]e^{in\omega\tau/2} =$$

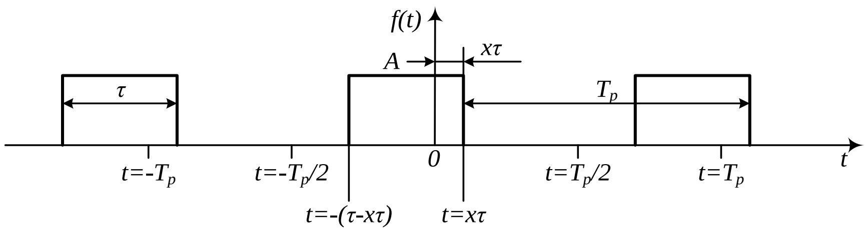
$$= \frac{2A}{n\omega T_p}\cdot e^{in\omega(\tau/2-x\tau)}\cdot\sin\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) = \frac{2A}{n\omega T_p}\cdot\frac{n\omega\tau}{2}\cdot e^{in\omega(\tau/2-x\tau)}\cdot\frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2} =$$

$$= \frac{A\tau}{T_p}\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)e^{in\omega(0,5-x)\tau},$$

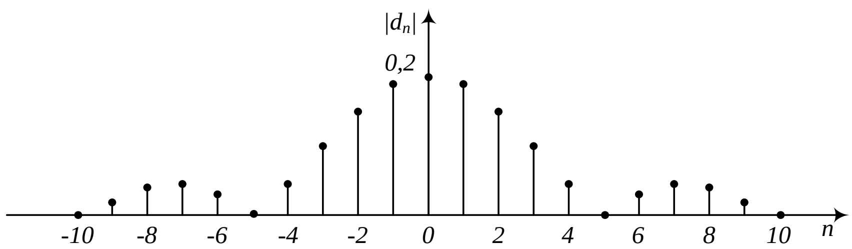
де $\operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) = \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2}$ – *функція відліків* аргументу $n\omega\tau/2$.

$$|d_n| = \frac{A\tau}{T_p}\cdot\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)\right|.$$

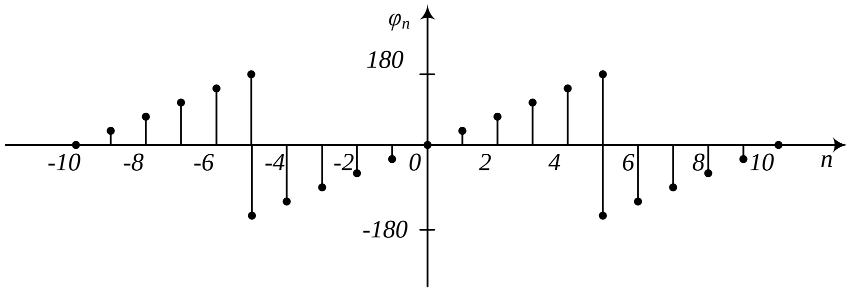
Величина $n\omega(0,5-x)\tau$ являє собою фазу ϕ_n (в радіанах), пов'язану з n-ю гармонікою.



а)



б)



в)

Рис. 2.15. Ряд Фур'є:

а) сигнал в часовій області;

б) амплітудний спектр сигналу;

в) фазовий спектр сигналу.

Сигнал, його амплітудний та фазовий спектр для випадку $\tau = T_p/5$ наведено на рис. 2.15. Амплітудний спектр виглядає як парна функція, фазовий – як непарна.

Розглянемо перетворення Фур'є. Якщо сигнал неперіодичний, то метод розкладення в ряд Фур'є злегка модифікується. Для ілюстрації підходу використаємо одиночний прямокутний імпульс, який можна отримати з періодичного сигналу, збільшивши період T_p до нескінченності. При збільшенні T_p відстань між гармоніками $1/T_p = \omega/2\pi$ зменшується до $d\omega/2\pi$ та в кінці кінців перетворюється в нуль. Це відповідає переходу від дискретної частотної змінної $n\omega$ до неперервної змінної ω, а фазовий та амплітудний спектри стають неперервними. Отже, $d_n \to d(\omega)$ при $T_p \to \infty$. З цими замінами рівняння (2) набуває вигляду

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Для зручності нормуємо цю формулу, поділивши її на $d\omega/2\pi$, та отримаємо

$$\frac{d(\omega)}{d\omega/2\pi} = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Тут комплексне число $F(i\omega)$ називається *інтегралом Фур'є* чи просто *Фур'є-образом*. Якщо покласти

$$F(i\omega) = Re(i\omega) + iIm(i\omega) = |F(i\omega)| e^{i\phi(\omega)},$$

то

$$|F(i\omega)| = \sqrt{Re^2(i\omega) + Im^2(i\omega)},$$

а вимірюватися дана величина буде вже в В/Гц, а не в вольтах. Отже, $|F(i\omega)|$ – це *щільність амплітуди*, яку ще називають *спектральною щільністю амплітуди* чи *амплітудним спектром*. Відповідний зсув фаз $\phi(\omega)$ дорівнює

$$\phi(\omega) = arctg[Im(i\omega)/Re(i\omega)].$$

Величина $|F(i\omega)|^2$ вимірюється в В^{2}Гц$^{-2}$. Оскільки нормована електрична потужність, тобто потужність, що розсіяна опором 1 Ом, вимірюється в В^2, що еквівалентно Дж/с чи Дж·Гц, то В^{2}Гц$^{-2}$ дорівнює Дж·Гц× Гц$^{-2}$= Дж·Гц$^{-1}$. Отже, $|F(i\omega)|^2$ вимірюється в одиницях енергії на Гц$^{-1}$, тобто $|F(i\omega)|^2$ – це *спектральна щільність енергії*. Площа під кривою $|F(i\omega)|$ на графіку залежності від f між частотами $f_0 - df$ та $f_0 + df$ виражає середню напругу на частоті f_0, а площа під відповідною кривою $|F(i\omega)|^2$ на графіку залежності від f виражає середню енергію на частоті f_0. Крім того, при спектральному аналізі доволі часто будують графіки залежності спектральної щільності енергії від частоти.

Розглянемо приклад.

Для сигналу з рис. 2.15 обчислимо амплітудний спектр за допомогою перетворення Фур'є:

$$F(i\omega) = \int_{-(\tau - x\tau)}^{x\tau} Ae^{-i\omega t}dt = A\tau e^{i\omega(0,5-x)\tau}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Звідси видно, що результат перетвореня Фур'є в T_p раз більше, ніж значення коефіцієнтів ряду Фур'є. Це відповідає тому факту, що $|F(i\omega)|$ вимірюється в В/Гц.

Розглянемо ДПФ та зворотне ДПФ. На практиці Фур'є-компоненти сигналу отримуються як результат цифрових обчислень, а не внаслідок аналогової обробки. Оскільки аналоговий сигнал складається з нескінченого числа точок, що співторкаються, описати всі їхні значення практично неможливо. Отже, для використання в цифровій системі аналогові значення слід дискретизувати через рівні проміжки часу, а потім вибірки перетворити в цифровий бінарний вигляд. Будемо вважати, що розглядаються цифрові значення, які піддаються перетворенню.

Існує алгоритм перетворення, який можна застосувати до дискретних даних, – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

Припустимо, що сигнал дискретизований через рівні проміжки часу T, в результаті отримана дискретна послідовність $\{x(nT)\} = x(0), x(T), \dots, x[(N-1)T]$ з N вибірок, де $n = \overline{0,\ N-1}$ – номер вибірки. Значення $x(nT)$ будуть дійсними тільки тоді, коли вони являють собою значення такого часового ряду, як спектр напруги. В подібному випадку

ДПФ послідовності $x(nT)$ можна визначити як послідовність комплексних значень $\{X(k\Omega)\} = X(0), X(\Omega), \ldots, X[(N-1)\Omega]$ в частотній області, де Ω – частота першої гармоніки, яка задається як $\Omega = 2\pi/(N-1)T \approx 2\pi/NT$ для $N \gg 1$. Отже, $X(k\Omega)$ в загальному випадку має дійсні та вдавані компоненти, так що для k-ї гармоніки

$$X(k) = Re(k) + iIm(k)$$

та

$$|X(k)| = [Re^2(k) + Im^2(k)]^{1/2},$$

а зсув фази $X(k)$

$$\phi(k) = arctg[Im(k)/Re(k)],$$

де під $X(k)$ розуміють $X(k\Omega)$. Приведені рівняння аналогічні рівнянням для перетворення Фур'є.

Зазначимо, що N дійсних значень (в часовій області) перетворюються в N комплексних значень ДПФ (в частотній області). Значення ДПФ $X(k)$ задаються як

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega \mathrm{n}T},$$

$$k = 0,1, \ldots, N-1,$$

де через F_D позначено ДПФ. В цьому рівнянні k – номер гармоніки компонента перетворення. При заміні $x(nT) = f(t)$, $k\Omega = \omega$ та $nT = t$ видно, що це рівняння переходить в перетворення Фур'є при $f(t) = 0$ для $t < 0$ та $t > (N-1)/T$, так що можна очікувати, що ці два перетворення будуть мати загальні властивості.

В той же час ці перетворення не рівнозначні. Так, зробивши зазначені заміни та поклавши $dt = T$, а також замінивши інтеграл сумою, отримаємо частоти гармонік kf_s, де $f_s = 1/(N-1)T = 2\pi/\Omega$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, e^{-ik\Omega nT} = F(i\omega)$$

для $0 \leq t \leq (N-1)T$. Отримаємо

$$F(i\omega) = TX(k),$$

звідки видно, що компоненти перетворення Фур'є пов'язані з компонентами ДПФ через інтервал дискретизації, та їх можна знайти, помноживши компоненти ДПФ на інтервал дискретизації.

Розглянемо приклад. Дано чотири послідовних значення напруги, записаних з часовим інтервалом T у послідовність $x(nT) = \{1; 0; 0; 1\}$. Знайти ДПФ заданої послідовності.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik2\pi n/N}.$$

$N = 4$.

$$X(0) = x(0)e^{-i0} + x(T)e^{-i0} + x(2T)e^{-i0} + x(3T)e^{-i0} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

$$X(1) = x(0)e^{-i0} + x(T)e^{-\frac{i2\pi}{4}} + x(2T)e^{-\frac{i2\pi2}{4}} + x(3T)e^{-\frac{i2\pi3}{4}} =$$
$$= 1 + 0e^{-\frac{i2\pi}{4}} + 0e^{-\frac{i2\pi2}{4}} + 1e^{-\frac{i2\pi3}{4}} = 1 + e^{-\frac{i3\pi}{2}} =$$
$$= 1 + \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + i.$$

$$X(2) = x(0)e^{-i0} + x(T)e^{-\frac{i2\pi2}{4}} + x(2T)e^{-\frac{i2\pi4}{4}} + x(3T)e^{-\frac{i2\pi6}{4}} = 1 + e^{-i3\pi} =$$
$$= 1 + \cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi) = 1 - 1 = 0.$$

$$X(3) = x(0)e^{-i0} + x(T)e^{-\frac{i2\pi3}{4}} + x(2T)e^{-\frac{i2\pi6}{4}} + x(3T)e^{-\frac{i2\pi9}{4}} =$$
$$= 1 + e^{-\frac{i2\pi9}{4}} = 1 + \cos\left(-\frac{2\pi9}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi9}{4}\right) = 1 - i.$$

ДПФ прийнято представляти у вигляді графіків $|X(k)|$ від $k\Omega$ та $\phi(k)$ від $k\Omega$. Це можна зробити через гармоніки Ω чи частоти, якщо Ω відоме. Щоб знайти Ω, необхідно знати значення інтервалу дискретизації T.

Слід зазначити, що графік "амплітуди" симетричний відносно компонента гармоніки з номером $\frac{N}{2}$ за умови, що графік містить нульову та $(N+1)$-у гармоніки, а фазовий зсув є непарною функцією з центром в цій гармоніці.

Якщо на протязі t секунд беруться $2f_{max}$ елементів вибірки сигнала в секунду, то $2f_{max}t = N$, так що $1/t = 2f_{max}/N$ – це частота першої гармоніки. Частоту f_{max} називають *частотою перегину*.

Якщо порівнювати k-й компонент ДПФ $X(k)$ з $(k+N)$-м компонентом $X(k+N)$, можна вивести важливу властивість ДПФ. Таким чином,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik2\pi n/N}$$

$$X(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N} e^{-iN2\pi n/N} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N} e^{-i2\pi n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N} = X(k),$$

оскільки n – ціле, то $e^{-i2\pi n} = 1$.

Із $X(k+N) = X(k)$ витікає, що ДПФ-образ повторюється з періодом N. Це властивість *циклічності* ДПФ, тобто значення компонентів ДПФ повторюються.

Часто виникає необхідність виконати дискретне перетворення із частотної області в часову. Це можна зробити за допомогою зворотного дискретного перетворення Фур'є (ЗДПФ), яке визначається як

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{ik\Omega nT},$$
$$n = 0,1,\dots,N-1,$$

де через F_D^{-1} позначається ЗДПФ.

Розглянемо приклад. *З*а допомогою зворотного ДПФ знайти часовий ряд $\boldsymbol{x(nT)}$ за його Фур'є-образом $\boldsymbol{X(k) = [2; 1+i; 0; 1-i]}$.
$N = 4$.

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{ik2\pi n/N}.$$

$$x(0) = \frac{1}{4}\left(2e^{i0} + (1+i)e^{i0} + 0e^{i0} + (1-i)e^{i0}\right) = \frac{1}{4}(2+1+i+1-i) =$$
$$= 1.$$

$$x(T) = \frac{1}{4}\left(2e^{i0} + (1+i)e^{i2\pi/4} + 0e^{i4\pi/4} + (1-i)e^{i6\pi/4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + (1+i)e^{i\pi/2} + (1-i)e^{i3\pi/2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + (1+i)i + (1-i)(-i)\right) = \frac{1}{4}(2+i-1-i-1) = 0.$$

$$x(2T) = \frac{1}{4}\left(2e^{i0} + (1+i)e^{i4\pi/4} + 0e^{i8\pi/4} + (1-i)e^{i12\pi/4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + (1+i)e^{i\pi} + (1-i)e^{i3\pi}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - (1+i) - (1-i)\right) =$$
$$= 0.$$

$$x(3T) = \frac{1}{4}\left(2e^{i0} + (1+i)e^{i6\pi/4} + 0e^{i12\pi/4} + (1-i)e^{i18\pi/4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + (1+i)e^{i3\pi/2} + (1-i)e^{i9\pi/2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(2 - (1+i)(-i) - (1-i)i) = \frac{1}{4}(2 - i + 1 + i + 1) = 1.$$

Розглянемо властивості ДПФ.
ДПФ має низку математичних властивостей, якими можна користуватися, щоб спростити задачу чи побудувати вдалі додатки.

1. *Симетрія*.

$$Re[X(N-k)] = ReX(k),$$

де Re означає дійсну частину. Дана формула виражає симетрію амплітудного спектра, а формула

$$Im[X(N-k)] = -ImX(k),$$

виражає анти симетрію фазового спектра. Дана властивість корисна при визначенні значень компонентів.

2. *Парність функції*. Якщо $x(nT)$ – парна функція, тобто $x(nT) = x(-nT)$, то

$$F_D\ [x(nT)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) cos(k\Omega nT).$$

3. *Непарність функції*. Якщо $x(nT)$ – парна функція, тобто $x(nT) = -x(-nT)$, то

$$F_D\ [x(nT)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) sin(k\Omega nT).$$

4. *Теорема Парсеваля*. Нормована енергія сигналу дорівнює

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Права частина – це середньоквадратична спектральна амплітуда, ліва – сума квадратів амплітуд часового ряду.

5. *Дельта-функція*.

$$F_D[\delta(nT)] = 1.$$

6. За допомогою ДПФ можна знайти лінійну взаємну кореляцію двох послідовних даних чи рядів. *Лінійна взаємна кореляція* двох скінчених послідовностей $x_1(nT)$ та $x_2(nT)$, кожна довжиною N, визначається як

$$r_{x_1,x_2}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n+j), -\infty \le j \le \infty.$$

Кругову кореляцію періодичних послідовностей скінченої довжини $x_{1\text{P}}(nT)$ та $x_{2\text{P}}(nT)$ можна визначити як

$$r_{\text{c}x_1,x_2}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_{1P}(n)x_{2P}(n+j), j-0,\ldots,N-1$$

(оскільки кругова кореляція визначається за допомогою ДПФ). Отже

$$r_{cx_1x_2}(j) = F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)].$$

Це рівняння теореми про кореляцію. Кругову кореляцію можна перетворити в лінійну за допомогою нолів, що доповнюють. Тоді для послідовностей $x_1(nT)$ з довжиною N_1 та $x_2(nT)$ з довжиною N_2 їх лінійна кореляція буде мати довжину $N = N_1 + N_2 - 1$. Для цього послідовність $x_1(nT)$ замінюється послідовністю $x_{1_0}(nT)$, яка складається з послідовності $x_1(nT)$ з доданими $N_2 - 1$ нулями, а послідовність $x_2(nT)$, доповнена $N_1 - 1$ нулями, перетворюється в $x_{2_0}(nT)$.

7. ДПФ може використовуватися для обчислення *кругової* та (з додаванням нулів) *лінійної згортки*. Ці згортки можуть бути як в часовій, так і в частотній області.

$$x_{1P}(nT)\odot x_{1P}(nT) = F_D^{-1}[X_1(k)X_2(k)].$$

Аналогічно можна записати

$$x_{1P}(nT)\odot x_{1P}(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1P}(m)x_{2P}(n-m).$$

Формулювання теореми про згортку в частотній області

$$\frac{1}{N}X_1(k)\odot X_2(k) = F_D[x_1(nT)x_2(nT)],$$

де $X_1(k) \odot X_2(k) = \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2(k-m)$. Це рівняння дає змогу стверджувати, що згортка в часовій області еквівалентна множенню в частотній, а згортка в частотній області еквівалентна множенню в часовій.

2.3.2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Внутрішню надлишковість обчислень ДПФ можна використати для зменшення числа операцій і, тим самим, збільшити швидкість обчислення ДПФ. Відповідні алгоритми отримали назву швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Якщо цей алгоритм застосовується в часовій області, його називають ШПФ з проріжуванням в часовій області (часовою децимацією), в частотній області – ШПФ з проріжуванням в частотній області (частотною децимацією).

Спростимо запис та встановимо деякі математичні співвідношення. Можна записати

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N},\ k = 0,1,\dots,N-1.$$

Крім того, запишемо

$$W_N = e^{-2\pi i / N}.$$

Тоді попереднє рівняння приймає вигляд

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn},\ k = 0,1,\dots,N-1.$$

Слід звернути увагу на деякі співвідношення, що містять W_N.

$$W_N^2 = \left(e^{-2\pi i/N}\right)^2 = e^{-i2\pi 2/N} = e^{-i2\pi/(N/2)} = W_{N/2}.$$
$$W_N^{(k+N/2)} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-(i2\pi/N)(N/2)} = W_N^k e^{-i\pi} = -W_N^k.$$

При використанні зазначеної обчислювальної надлишковості послідовність даних поділяють на дві рівні послідовності, одна складається з елементів з парними порядковими номерами, інша – з непарними. Довжина обох послідовностей повинна бути однаковою. Якщо початкова послідовність складається з непарного числа елементів, до неї додають доповнюючий нуль. Це дозволить записати ДПФ $X_1(k)$ через два ДПФ,

$X_{11}(k)$ та $X_{12}(k)$, які будуть відповідати ДПФ-образам з парними та непарними значеннями. Отже, N-точкове ДПФ перетворюється в два $N/2$-точкових ДПФ. Цей процес повторюється до тих пір, доки $X_1(k)$ не розпадеться на $N/2$ 2-точкових ДПФ.

Таким чином, на практиці здійснюється переупорядкування початкових даних та обчислюється $N/2$ 2-точкових ДПФ, які отримують початкові дані парами. Результат цих ДПФ об'єднується в четвірки, всього $N/4$ 4-точкових ДПФ, які обчислюються і об'єднуються, відповідно, в $N/8$ 8-точкових ДПФ і т.д., доки не отримується кінцеве N-точкове ДПФ. На кожному етапі для зниження кількості операцій використовується загальний множник W_N у деякому ступені.

Сказане доводиться наступним чином

$$X_1(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk}}_{\text{парна послідовність}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)k}}_{\text{непарна послідовність}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{2nk},$$
$$k = 0,1, \dots, N-1.$$

Враховуючи $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$, перепишемо

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk}, \qquad k = 0,1, \dots, N-1.$$

У свою чергу

$$X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k), \qquad k = 0,1, \dots, N-1.$$

Отже, ДПФ-образ $X_1(k)$ можна виразити через два ДПФ-образи: $X_{11}(k)$ та $X_{12}(k)$. При цьому коефіцієнт $W_{N/2}^k$з'являється і в $X_{11}(k)$, і в $X_{12}(k)$, отже обчислювати його потрібно лише один раз.

Розглянемо процес обчислення 8-точкового ДПФ.

Табл. 2.1

Структура 8-точкового ДПФ

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Зміст строки</td><td>Діапазон зміни k</td><td>Діапазон зміни N</td></tr>
<tr><td>Послідовність даних</td><td colspan="2">$x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$</td><td></td><td>0,…,7
(0,…, N-1)</td></tr>
<tr><td>8-точкове ДПФ</td><td colspan="2">$X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k)$</td><td>0,…,7
(0,…, N-1)</td><td>0,…,7
(0,…, N-1)</td></tr>
<tr><td>Переупорядкування у 2 послідовності</td><td>$x_0 x_2 x_4 x_6$</td><td>$x_1 x_3 x_5 x_7$</td><td></td><td>0,…,3
(0,…, N/2-1)</td></tr>
</table>

4-точкове ДПФ	$X_{11}(k) =$ $= X_{21}(k) + W_{N/2}^{k} X_{22}(k)$		$X_{12}(k) =$ $= X_{23}(k) + W_{N/2}^{k} X_{24}(k)$		0,…,3 (0,…, N/2-1)	0,…,3 (0,…, N/2-1)
Переупорядкування у 4 послідовності	$x_0 x_4$	$x_2 x_6$	$x_1 x_5$	$x_3 x_7$		0,1 (0,…, N/4-1)
2-точкове ДПФ	$X_{21}(k) =$ $x_0+W_{N/4}^{k} x_4$	$X_{22}(k) =$ $x_2+W_{N/4}^{k} x_6$	$X_{23}(k) =$ $x_1+W_{N/4}^{k} x_5$	$X_{24}(k) =$ $x_3+W_{N/4}^{k} x_7$	0,1 (0,…, N/4-1)	0,1 (0,…, N/4-1)

Із табл. 2.1 видно

$$X_{21}(k) = x_0 + W_{N/4}^{k} x_4, \qquad k = 0, \ldots N/4 - 1, \qquad \text{тобто } k = 0{,}1.$$

Отже

$$X_{21}(0) = x_0 + x_4,$$

тоді як

$$X_{21}(1) = x_0 + W_{N/4}^{k} x_4 = x_0 + W_2 x_4 = x_0 + e^{-i2\pi/2} x_4 = x_0 - x_4.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} X_{22}(0) &= x_2 + x_6, \qquad & X_{22}(1) &= x_2 - x_6, \\ X_{23}(0) &= x_1 + x_5, \qquad & X_{23}(1) &= x_1 - x_5, \\ X_{24}(0) &= x_3 + x_7, \qquad & X_{24}(1) &= x_3 - x_7, \end{aligned}$$

звідки видно, що значення при $k = 0$ відрізняються від значень при $k = 1$ тільки знаком. Тепер

$$X_{11}(k) = X_{21}(k) + W_{N/2}^{k} X_{22}(k),$$

так що

$$\begin{aligned} X_{11}(0) &= X_{21}(0) + W_{N/2}^{0} X_{22}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0), \\ X_{11}(1) &= X_{21}(1) + W_{N/2}^{1} X_{22}(1) = X_{21}(1) + e^{-i\pi/2} X_{22}(1) = \\ &= X_{21}(1) - iX_{22}(1), \\ X_{11}(2) &= X_{21}(2) + W_{N/2}^{2} X_{22}(2) = X_{21}(2) + e^{-i2\pi/2} X_{22}(2) = \\ &= X_{21}(2) - X_{22}(2). \end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned} X_{21}(2) &= x_0 + W_{N/4}^{2} x_4 = x_0 + W_2^{2} x_4 = x_0 + x_4 = X_{21}(0), \\ X_{22}(2) &= x_2 + W_{N/4}^{2} x_6 = x_2 + W_2^{2} x_6 = x_2 + x_6 = X_{22}(0). \end{aligned}$$

Звідси можна записати

$$X_{11}(2) = X_{21}(0) - X_{22}(0),$$
$$X_{11}(3) = X_{21}(3) - W_{N/2}^{3} X_{22}(3).$$

Тепер

$$X_{21}(3) = x_0 + W_{N/4}^{3} x_4 = x_0 + e^{-i2\pi 3/2} x_4 = x_0 - x_4 = X_{21}(1),$$
$$X_{22}(3) = x_2 - x_4 = X_{22}(1).$$

Отже, маємо ще одне еквівалентне рівняння

$$X_{11}(3) = X_{21}(1) + e^{-3i2\pi/4} X_{22}(1) = X_{21}(1) + iX_{22}(1).$$

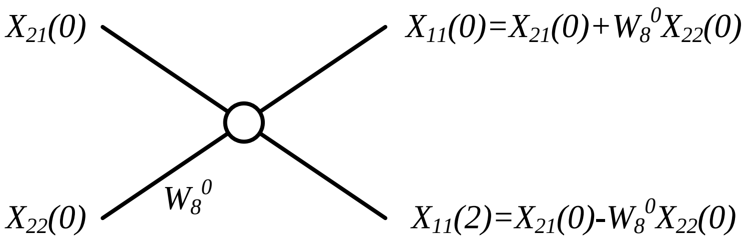
Зведемо всі результати разом

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0) = X_{21}(0) + W_8^0 X_{22}(0),$$
$$X_{11}(2) = X_{21}(0) - X_{22}(0) = X_{21}(0) - W_8^0 X_{22}(0),$$
$$X_{11}(1) = X_{21}(1) - iX_{22}(1) = X_{21}(1) - W_8^2 X_{22}(1),$$
$$X_{11}(3) = X_{21}(1) + iX_{22}(1) = X_{21}(1) + W_8^2 X_{22}(1).$$

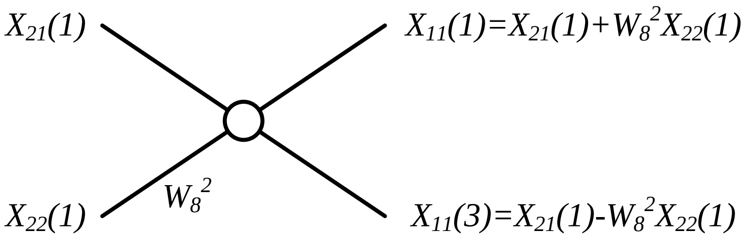
Рівняння, що подібні цим, називаються *рекомпозиційними*, оскільки, взявши пари даних та формуючи $X_{21}(k)$, $X_{22}(k)$, $X_{23}(k)$ та $X_{24}(k)$, можна знайти $X_{11}(k)$ та $X_{12}(k)$, а, отже, і $X_1(k)$.

При цьому кількість необхідних операцій комплексного складання та множення зменшується. Цей алгоритм відомий під назвою *алгоритму Кулі-Тьюкі*.

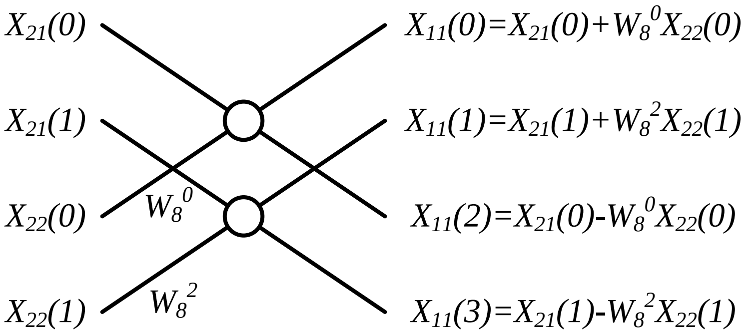
Рекомпозиційні рівняння можна представити на діаграмі, взявши їх попарно і скориставшись симетрією знаків. Така структура діаграми тримала назву «*метелик*». На рис. 2.16 зображені «метелики» для наведених рекомпозиційних рівнянь.



а)



б)



в)

Рис. 2.16. «Метелики» ШПФ:
а) результати рекомпозиції $X_{11}(0)$ та $X_{11}(2)$;
б) результати рекомпозиції $X_{11}(1)$ та $X_{11}(3)$;
в) зіставна діаграма.

ЗШПФ відрізняється від ШПФ лише коефіцієнтом $1/N$ та знаком показника ступеня експоненти. Тому для обчислення ЗШПФ можна використати алгоритм ШПФ із невеликими зазначеними змінами.

При застосуванні N-точкового алгоритму ШПФ у порівнянні з безпосереднім використанням ДПФ обчислювальні затрати (кількість операцій) зменшуються в $N/\log_2 N$ разів. При великих N це відношення стає дуже великим, наприклад, при $N = 1024$ прискорення складає 102,4 рази.

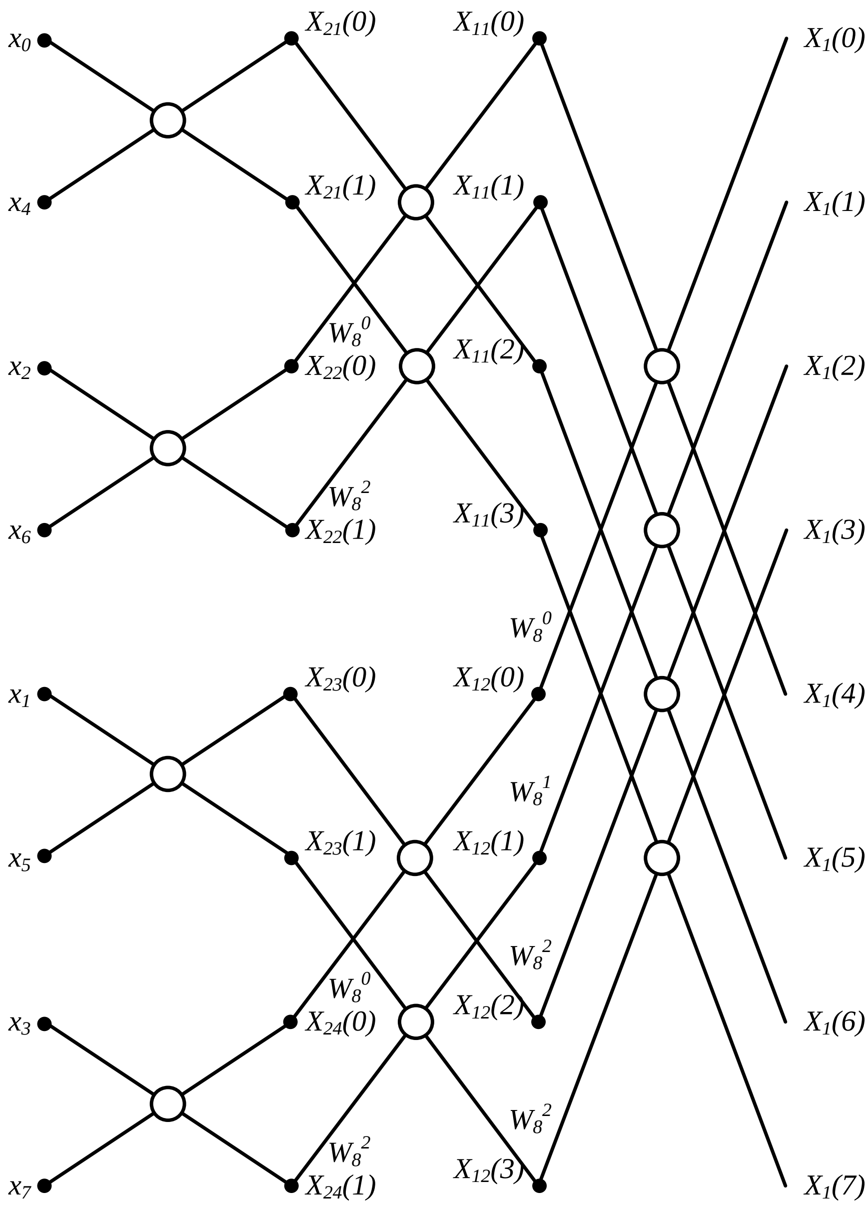


Рис. 2.17. «Метелик» 8-точкового ШПФ

Розглянемо приклад. Знайти ДПФ послідовності $x(nT) = \{1; 0; 0; 1\}$ за допомогою алгоритму ШПФ. Перевпорядкована послідовність x_0, x_2, x_1, x_3.Скористаємося верхнім лівим кутом рис. 2.17, де точки x_0, x_4, x_2, x_6 замінимо точками x_0, x_2, x_1, x_3. Шуканими значеннями ДПФ будуть $X_{11}(0)$, $X_{11}(1)$, $X_{11}(2)$ та $X_{11}(3)$. Отже

$X_{21}(0) = x_0 + x_2 = 1,$

$X_{21}(1) = x_0 - x_2 = 1,$

$X_{22}(0) = x_1 + x_3 = 1,$

$X_{22}(1) = x_1 - x_3 = -1,$

$X_{11}(0) = X_{21}(0) + W_8^0 X_{22}(0) = 1 + 1 = 2,$

$X_{11}(1) = X_{21}(1) + W_8^2 X_{22}(1) = 1 + e^{-i\pi/2}(-1) = 1 + i,$

$X_{11}(2) = X_{21}(0) - W_8^0 X_{22}(0) = 1 - 1 = 0,$

$X_{11}(3) = X_{21}(1) - W_8^2 X_{22}(1) = 1 - e^{-i\pi/2}(-1) = 1 - i.$

2.3.3. РЕАЛІЗАЦІЯ ТИПОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ У ТКС

Існує множина інших перетворень. Перетворення Фур'є та алгоритм первинного множника являють собою оригінальні, проте надто складні методи підвищення швидкості обчислення ШПФ. Дискретне косинус-перетворення надто підходить для стиснення даних. При перетворенні Уолша сигнал розкладається на прямокутні імпульси, а не на синусоїди, і воно обчислюється швидше за ШПФ. Перетворення Адамара, побудоване за допомогою перестановки послідовності Уолша, обчислюється ще швидше. Проте, перетворення Уолша та Адамара мають ряд недоліків, які обмежують область їх застосування. Перетворення Хаара особливо корисне для визначення країв при обробці зображень. В 90-х роках зріс інтерес до вейвлетних перетворень.

Дискретне косинус-перетворення. При стисненні даних задіяні лише значущі компоненти перетворень. В результаті знижується кількість бітів, необхідних для їх кодування, що дозволяє прискорити передачу, використовувати лінії передачі з більш вузькою смугою, а також полегшує розпізнавання шаблонів. З точки зору стиснення даних ідеальним є перетворення Карунена-Лоева, але його неможливо задати у вигляді алгоритму. Дискретне косинус-перетворення (ДКП) володіє фактично тими ж властивостями і його можна надати у вигляді алгоритму. По суті це дійсна частина ДПФ. Це твердження справедливе тому, що ряд Фур'є із дійсних та парних функцій містить тільки косинусоїдальні члени. У свою чергу, при використанні дискретних значень напруги дані є дійсними і їх можна зробити симетричними – подвоїти шляхом додавання їхнього дзеркального зображення. ДКП як дійсна частина ДПФ є

$$X_c(k) = Re[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \qquad k = 0,1,\dots,N-1.$$

Більш загальний вид формули ДКП

$$X_c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n cos\left(\frac{k2\pi n + k\pi}{2N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n cos\left(\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right),$$
$$k = 0,1,\dots,N-1.$$

Існує швидке ДКП, засноване на ШПФ, а також швидке ДКП, швидкість якого у 6 разів вища прямих перетворень. Ще одна версія – С-матричне перетворення, яке набагато простіше реалізувати на апаратному рівні.

У стандарті JPEG (*англ*. Joint Photographic Experts Group – об’єднана група експертів з обробки фотозображень) застосовується основна схема стиснення для передачі даних, наведена на рис. 2.18.

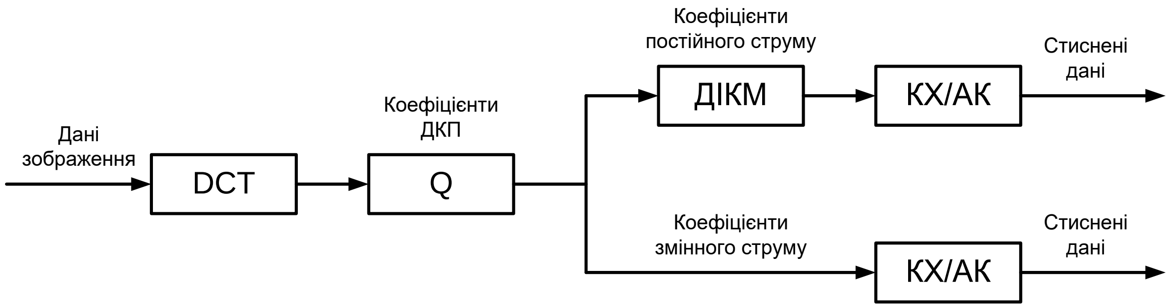


Рис. 2.18. Основна схема стиснення стандарту JPEG:
DCT – дискретне косинус-перетворення;
Q – пристрій квантування;
ДІКМ – диференціальна імпульсно-кодова модуляція;
КХ/АК – кодер Хаффмана чи арифметичний кодер.

Спочатку обчислюється двомірне ДПК зображення. Потім коефіцієнти ДКП квантуються і знаходиться їх порогове значення. Далі коефіцієнти нульової частоти послідовно підлягають ДІКМ, а отриманий в результаті потік бітів кодується за допомогою коду Хаффмана чи арифметичного коду. Інші частотні коефіцієнти також кодуються за допомогою коду Хаффмана чи арифметичного коду. Довгі серії нулів кодуються методом серійного кодування. В результаті отримується два потоки стиснених даних, що складаються із закодованих коефіцієнтів постійного та змінного струму.

Для перетворення необхідно розділяти зображення на ряд менших ділянок з більш чи менш схожими статистичними характеристиками, що прилягають одна до одної. Базовий блок стандарту JPEG складається з квадрату 8×8 пікселів. Ці блоки двомірні, для їх перетворення використовується двомірне ДКП. Його можна отримати, якщо спершу обчислити ДКП кожної горизонтальної строчки пікселів, потім замінити горизонтальні строчки пікселів компонентами ДКП, обчислити ДКП стовбців та замінити кожний стовбець його ДКП.

Оскільки частоти компонентів горизонтального ДКП збільшуються зліва направо, а вертикального – зверху вниз, то в двомірному ДКП самі низькі частоти знаходяться в його верхній лівій частині, а самі високі – в нижній правій. Амплітуди низькочастотних компонентів, як правило, більші, ніж у високочастотних.

У стандарті JPEG двомірне ДКП задається як

$$S(v,u) = \frac{1}{4}C(v)C(u)\sum_{x=0}^{7} s(y,x)\cos\{(2x+1)u\pi/16\}\cos\{(2y+1)v\pi/16\},$$

де $S(v,u)$ – коефіцієнти двомірного ДКП;

$$C(v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & v = 0, \\ 1, & v > 0; \end{cases}$$

$$C(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & u = 0, \\ 1, & u > 0; \end{cases}$$

$s(y,x)$ – значення пікселя з блоку 8×8.

Зворотне ДКП, необхідне для відновлення зображення, задається як

$$s(v,u) = \\ = \frac{1}{4}\sum_{u=0}^{7}\sum_{v=0}^{7} C(u)C(v)S(v,u)\cos\{(2x+1)u\pi/16\}\cos\{(2y+1)v\pi/16\}.$$

Кожний із 64 коефіцієнтів ДКП кантується окремо за допомогою пристрою однорідного квантування. У кожного із 64 пристроїв різний крок квантування. Кожний коефіцієнт нормується на крок квантування та округлюється до найближчого цілого числа. В результаті процедури визначається масив цілих чисел, що містить деяку кількість нулів, переважно в нижній правій частині масиву.

Верхній лівий коефіцієнт в масиві 8×8 описує середній рівень сигналу і його значення не дуже сильно змінюється при переході від блоку до блоку. Він кодується за допомогою ДІКМ і йому присвоюється значення різності між його значенням і значенням коефіцієнту постійного струму попереднього блоку. В результаті отримуються відносно невеликі значення. Коефіцієнти змінного струму розташовані послідовно в зигзагоподібному порядку, після чого обидва набори коефіцієнтів кодуються.

Розглянемо приклад. За допомогою ДКП, яке задане у вигляді нормованої дійсної частини дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), здійснити стискання даних $x_n = \{1; 2; 0; 3\}$ з пороговим значенням 0,375.

Дійсна частина ДПФ записується як

$$X_c(k) = \frac{1}{N}Re[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \qquad k = 0,1,\dots,N-1.$$

$N = 4$.

$$X_c(0) = \frac{1}{4}\left(x_0 cos(0) + x_1 cos(0) + x_2 cos(0) + x_3 cos(0)\right) = \\ = \frac{1}{4}(1+2+0+3) = 1{,}5;$$

$$X_c(1) = \frac{1}{4}\left(x_0 cos(0) + x_1 cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + x_2 cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + x_3 cos\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + 3x_3 cos\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) = 0{,}25;$$

$$X_c(2) = \frac{1}{4}\left(1cos(0) + 2cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + 3cos\left(\frac{12\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\right) = -1;$$

$$X_c(3) = \frac{1}{4}\left(1cos(0) + 2cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + 3cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0) = 0{,}25.$$

Перевіряємо умову $|X_c(k)| > 0{,}375$.

Залишаються значення $X_c(0) = 1{,}5$ та $X_c(2) = -1$.

Перетворення Уолша. Набагато швидше обчислюються перетворення, засновані на імпульсоподібних сигналах, які приймають значення тільки ± 1. Вони більше підходять для опису сигналів з порушенням неперервності, але менш придатні для неперервних сигналів і не можуть бути інваріантними за фазою. Дискретне перетворення Уолша (ДПУ) засноване на наборі гармонійних прямокутних імпульсів, які називаються функціями Уолша. Замість терміну "частота" вживається термін "послідовність" – половина середнього числа переходів через нуль за одиницю часу.

Функція Уолша з часом t та порядком n позначається $WAL(n,t)$. Існує рівна кількість парних і непарних функцій Уолша, так само, як і косинусоідальних та синусоїдальних компонентів ряду Фур'є. Парні функції $WAL(2k,t)$ записуються як $CAL(k,t)$, а непарні $WAL(2k+1,t)$ як $SAL(2k+1,t)$, де $k = 1,2,\dots,\frac{N}{2} - 1$.

Будь-який сигнал $f(t)$ можна розкласти за набором функцій Уолша як

$$f(t) = a_0 WAL(0,t) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} [a_i SAL(i,t) + b_i CAL(j,t)],$$

де a_i та b_i – коефіцієнти ряду.

Для будь-яких двох функцій Уолша

$$\sum_{t=0}^{N-1} WAL(m,t)\, WAL(n,t) = \begin{cases} N, & n = m \\ 0, & n \neq m' \end{cases}$$

Тобто функції Уолша ортогональні.

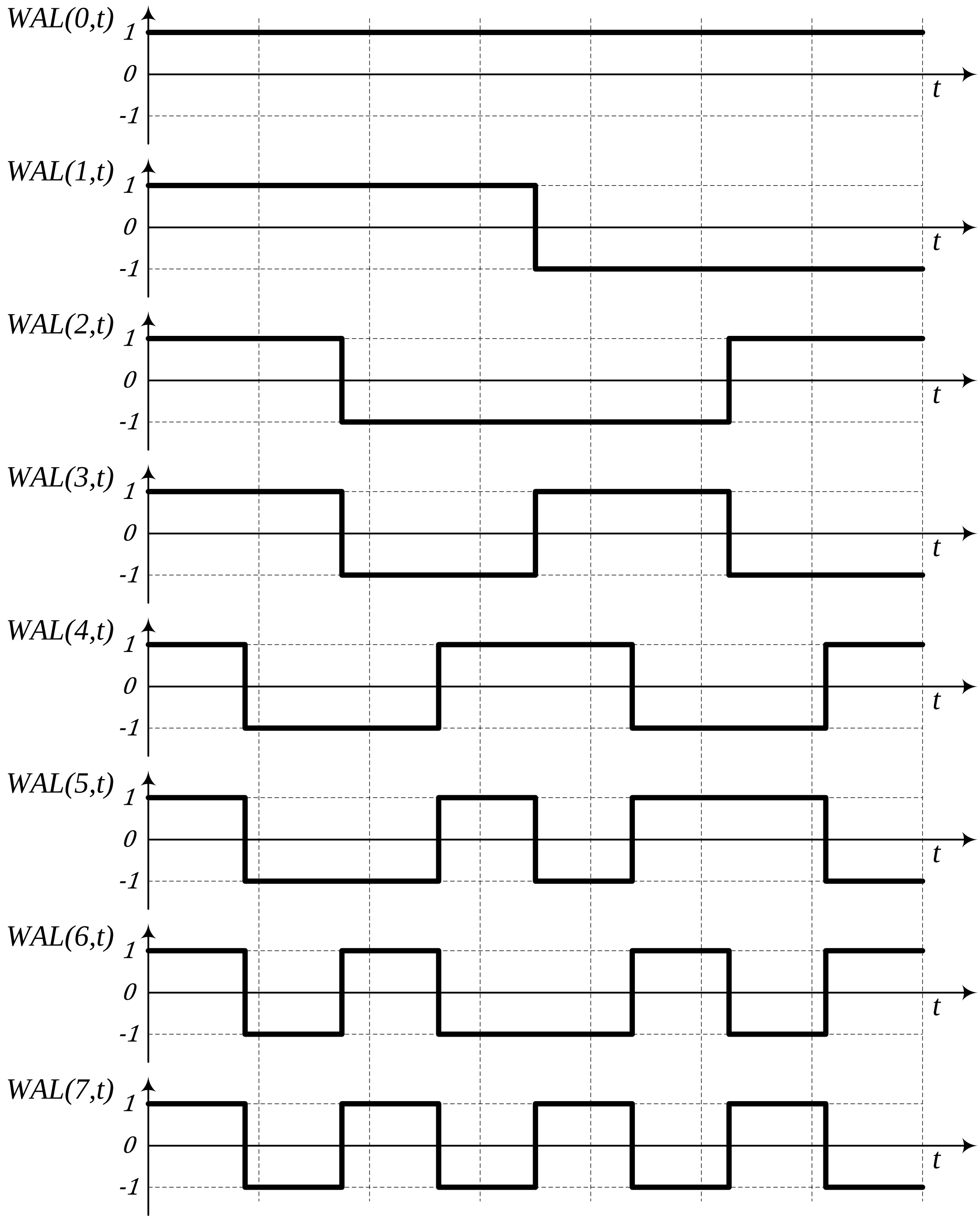


Рис. 2.19. Функції Уолша до порядку $N = 8$, упорядковані за Уолшем (у порядку зростання)

Пара дискретних Уолш-образів є

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(k,i)\,, k = 0,1,\dots,N-1,$$

$$x_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_k WAL(k,i)\,, k = 0,1,\dots,N-1,$$

де слід зазначити, що, не беручи до уваги множник $\frac{1}{N}$, зворотне перетворення (ЗДПУ) ідентичне прямому, та $WAL(k,i) = \pm 1$. Отже, пару образів можна знайти простим перемноженням матриць за допомогою цифрових методів. Однак відсутність фазової інваріантності означає, що ДПУ не підходить для обчислення швидких кореляцій та згорток.

k-й елемент ДПУ можна отримати, помноживши кожний дискретний елемент сигналу x_i на функцію Уолша послідовності k та просумувавши по $k = 0,1,\dots,N-1$. Для всіх елементів k це можна записати у матричному вигляді

$$\mathbf{X}_k = \boldsymbol{x_i}\mathbf{W}_{\boldsymbol{ki}},$$

де $\boldsymbol{x_i} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ – послідовність даних, $\mathbf{W}_{\boldsymbol{ki}}$ – матриця перетворень Уолша порядку $N \times N$, $\boldsymbol{X_k} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$ – компоненти ДПУ.

Отже, якщо є N точок перетворення, то потрібно розглядати перші N упорядковані функції Уолша. k-та строчка матриці $\mathbf{W}_{\boldsymbol{ki}}$ відповідає N дискретним значенням k-го компоненту послідовності.

Розглянемо приклади.

Розрахувати ДПУ для послідовності даних $x_i = \{1; 2; 0; 3\}$.

ДПУ складається з $N = 4$ точок. У матричному вигляді записується як $X_k = \frac{1}{N} x_i W_{ki}$, де W_{ki} – матриця перетворення Уолша 4x4.

$$W_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X_k = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$X_0 = 1{,}5.$
$X_1 = 0.$
$X_2 = 0{,}5.$
$X_3 = -1.$

Розрахувати ЗДПУ для послідовності даних $X_k = \{1{,}5; 0; 0{,}5; -1\}$.

ЗДПУ складається з $N = 4$ точок. У матричному вигляді записується як $x_i == X_k W_{ki}$, де W_{ki} – матриця перетворення Уолша 4x4.

$$W_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$x_i = [1{,}5 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 3].$$

$x_0 = 1.$
$x_1 = 2.$
$x_2 = 0.$
$x_3 = 3.$

Перетворення Адамара. Перетворення Адамара (Уолша-Адамара) – це по суті те ж перетворення Уолша, але з іншим порядком функцій Уолша. За такої перестановки отримана матриця Адамара містить підмасиви матриць другого порядку. Наприклад, матриця Адамара порядку 8×8

$$^{8}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

може бути записана через матриці

$$^{2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ та } -{}^{2}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Будь яку матрицю Адамара порядку $2N$ можна рекурсивно отримати з $^{2}\mathbf{H}$ як

$$^{2N}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} ^{N}\mathbf{H} & ^{N}\mathbf{H} \\ ^{N}\mathbf{H} & -{}^{N}\mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

Із цієї рекурсивної властивості витікає, що швидке дискретне перетворення Уолша-Адамара (ДПУА), отримане при розташуванні функцій Уолша в порядку, визначеному Адамаром, можна обчислити швидше, ніж ДПУ.

Послідовність Адамара отримується із послідовності Уолша наступним чином:

а) порядок розташованих по Уолшу функцій Уолша надається в двійковій системі;

б) біти переставляються у зворотному порядку;

в) двійкові значення перетворюються в код Грея;

г) отримані значення перетворюються в десятинні.

Вейвлетне перетворення. Принцип невизначеності Гейзенберга за допомогою рівняння Ейнштейна можна перенести в область обробки сигналів і записати як

$$\Delta f T \geq 0,$$

де Δf та T описують розрішення за частотою та в часі.

Принцип вказує на те, що неможливо одночасно з будь-якою точністю визначити час та частоту. Отже, може виявитися достатньо складно одночасно виміряти з необхідним ступенем точності частоту компонента сигналу та час його появи або розділити в часі різні частотні компоненти. Це може відбутися, якщо сигнал містить короткочасні частотні компоненти, які розташовані надто близько до більш тривалих компонентів в часовій області та виникають в різні моменти часу.

Такі сигнали неперіодичні. Для розв'язання цієї загальної проблеми частотно-часового аналізу використовується *вейвлетне* перетворення (*англ.* Wawelet transform), яке являє собою засіб аналізу нестаціонарних сигналів.

Вейвлетне перетворення також застосовується для:
- фільтрації сигналів;
- усунення шумів;
- визначення місцезнаходження сингулярностей та їхнього розподілу.

У вейвлетному перетворенні в якості вагових коефіцієнтів значень сигналу виступають вейвлетні функції.

Усі вейвлетні функції отримуються із основної (материнської, базової) вейвлетної функції. Існує ряд можливих материнських функцій, які повинні:
- осцилювати;
- не містити компонентів постійного струму;
- бути смуговими;
- швидко спадати в часі до нуля;
- бути оборотними (гарантує однозначність перетворення).

Наприклад, морлетівська чи модифікована гаусова материнська вейвлетна функція (*вейвлет Морле*) – це

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

її Фур'є-образ є

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}.$$

Інші (дочірні) функції отримують шляхом такої зміни масштабу материнської, щоб утворилося сімейство функцій. Кожну дочірню функцію можна записати як

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right),$$

де a – змінний коефіцієнт масштабування;
τ – константа переносу.

Якщо масштаб a збільшується, то амплітуда і аргумент функції зменшуються. Збільшення масштабу відповідає збільшенню частоти, тому функція розширюється в часовій області. За допомогою коефіцієнта масштабування і константи переносу можна створювати функції з більшими чи меншими амплітудами, з вищими чи нижчими частотами та розміщувати їх в різні моменти часу. Таким чином, нестаціонарні сигнали з різними частотними компонентами, розташовані в різних проміжках часу, можна описати як суму різних вейвлетних функцій.

Є декілька варіантів вейвлетного перетворення, які утворюють природну прогресію із дискретизацією, що зростає. Передбачається, що сигнал $s(t)$ є квадратично інтегруємим

$$\int s^2\,(t)dt < \infty,$$

що справедливо для всіх короткочасних сигналів з кінцевою амплітудою. Синусоїдальні сигнали та сигнали постійного струму не задовольняють цій умові та виключаються з подальших розмірковувань.

Неперервне вейвлетне перетворення НВП(a,τ) можна визначити як

$$\text{НВП}(\alpha,\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int s(t)\ \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt.$$

Параметри цього рівняння можна дискретизувати, що дасть *вейвлетне перетворення з дискретними параметрами* ВПДП(m,n), яке визначається як

$$\text{ВПДП}(m,n) = a_0^{-m/2}\int s(t)\ \psi\left(\frac{t-n\tau_0 a_0^m}{a_0^m}\right)dt,$$

де зроблені наступні заміни: $a = a_0^m$, $\tau = n\tau_0 a_0^m$;
a_0 і τ_0 – інтервали дискретизації відповідно для a та τ;
m та n – цілі числа.

Доволі часто обирають $a_0 = 2, \tau_0 = 1$. Тоді

$$\text{ВПДП}(m,n) = 2^{-m/2} \int s(t)\ \psi\left(\frac{t - n2^m}{2^m}\right) dt =$$
$$= 2^{-m/2} \int s(t)\ \psi(2^{-m}t - n) dt.$$

Це розширює часову вісь в 2^{-m} рази, а вейвлетна функція переноситься в додатну сторону за часом на $2^m n$.

Дискретизація за часом дає *вейвлетне перетворення з дискретним часом* ВПДЧ(m,n), яке визначається як

$$\text{ВПДЧ}(m,n) = a_0^{-m/2} \sum_k s(k)\psi(a_0^{-m}k - n\tau_0).$$

Якщо знову покласти $a_0 = 2, \tau_0 = 1$, то ВПДЧ(m,n) стане таким

$$\text{ВПДЧ}(m,n) = 2^{-m/2} \sum_k s(k)\psi(2^{-m}k - n),$$

що відоме як *дискретне вейвлетне перетворення*.

НВП(α,τ)описує взаємну кореляцію $s(t)$ та $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t}{a}\right)$ з затримкою $\frac{-\tau}{a}$. Точно такою ж операцією описується взаємна кореляція масштабованого сигналу $s(at)$ та $\sqrt{a}\psi(t)$ з затримкою $\frac{-\tau}{a}$. НВП(α,τ) може також описувати вихід смугового фільтра з імпульсною характеристикою $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{-t}{a}\right)$ та часом $\frac{\tau}{a}$ при вхідному сигналі $s(t)$. Це ж перетворення описує вихід смугового фільтра з імпульсною характеристикою $\sqrt{a}\psi(-t)$ з часом $\frac{\tau}{a}$ при вхідному сигналі $s(at)$. Таким чином, вейвлетне перетворення може розглядатися як дія смугового фільтра чи взаємна кореляція. Зміна масштабу дозволяє відфільтрувати різні частотні компонентти.

При фільтрації сигналів останні спочатку розкладаються на компоненти, а потім ідентифікуються та видаляються компоненти шуму. Нарешті, очищений від шумів сигнал відновлюється за вейвлетними функціями компонентів. При використанні неперервного вейвлетного перетворення формула для відновлення (зворотного перетворення) має вигляд

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a>0}^{\infty} \text{НВП}(a,\tau) \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \left\{\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right\} da dt,$$

де

$$C_\psi = \int_0^\infty \{|H(\omega)|^2/\omega\}\, d\omega < \infty,$$

$H(\omega)$ – Фур’є-образ основного імпульсу $\psi(t)$.

2.4. ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Самим зручним засобом опису, аналізу та проектування сигналів та систем дискретного часу є z-перетворення. У системах дискретного часу воно відіграє таку ж роль, як перетворення Лапласа в системах неперервного часу.

До числа областей застосування z-перетворення входять:

- опис сигналів та систем дискретного часу, який дозволяє досить просто регулювати ступінь їхньої стійкості та візуалізувати частотні характеристики;
- аналіз помилок квантування цифрових фільтрів та обчислення частотних характеристик систем дискретного часу.

2.4.1. МОДЕЛІ СИСТЕМ ДИСКРЕТНОГО ЧАСУ

Значення дискретного сигналу визначаються при дискретних значеннях часу. Такий сигнал можна отримати в результаті дискретизації сигналу неперервного часу, взятого через рівні відрізки – період дискретизації. Амплітуда сигналу дискретного часу може бути чи також дискретною, чи неперервною.

Система дискретного часу – це, по суті, математичний алгоритм, входом якого є дискретна послідовність $x(n)$, а виходом – дискретна послідовність $y(n)$.

Системи дискретного часу можуть бути лінійними та нелінійними, інваріантними відносно часу чи змінними в часі. Лінійні інваріантні відносно часу (ЛІЧ) системи являють значний клас систем, що використовуються в ЦОС. Приклад – цифрові фільтри.

Система дискретного часу *лінійна*, якщо вона підпорядковується принципу суперпозиції: відгук системи на декілька входів дорівнює сумі відгуків цієї системи на кожен вхід окремо при відсутності усіх інших вхідних сигналів

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \to a_1y_1(n) + a_2y_2(n),$$

де $x_1(n)$, $x_2(n)$ – входи системи;
$y_1(n)$, $y_2(n)$ – відповідні виходи системи;
a_1, a_2 – довільні константи.

Система дискретного часу *інваріантна відносно часу* (інваріантна відносно здвигу), якщо її вихід не залежить від часу прикладення входу

$$x(n) \to y(n),$$
$$x(n-k) \to y(n-k),$$

де $x(n)$, $y(n)$ – відповідно вхід та вихід системи;

$x(n-k)$, $y(n-k)$ – затримані на k тактів відповідно вхід та вихід системи.

Взаємозв'язок між входом та виходом ЛІЧ-системи задається згорткою

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k),$$

де $h(k)$ – імпульсна характеристика системи.

Значення $h(k)$ повністю визначає систему дискретного часу в часовій області.

ЛІЧ-система стійка, якщо її імпульсна характеристика задовольняє умові

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

Ця умова справедлива, якщо $h(k)$ має кінцеву довжину, чи якщо прагне до нуля при збільшенні k.

Фізично реалізуємою є система, яка дає вихід тільки при наявності сигналу на вході. У загальному випадку фізично реалізуема послідовність дискретного часу $x(n)$ чи імпульсна характеристика системи $h(k)$ дорівнюють нулю до нульового моменту часу, тобто для $n < 0$ $x(n) = 0$ чи для $k < 0$ $h(k) = 0$.

2.4.2. ЗАСТОСУВАННЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Зміст z-перетворення полягає в тому, що послідовності чисел $x(n)$ ставиться у відповідність функція комплексної змінної z. Визначимо z-перетворення (дискретне перетворення Лапласа) послідовності $x(n)$, дійсне для всіх n

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

де z – комплексна змінна.

У системах $x(n)$ може бути ненульовим лише в інтервалі $0 < n < \infty$, тому рівняння зводиться до одностороннього z-перетворення

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}.$$

z-перетворення – це ступеневий ряд з нескінченим числом членів, тому він може не збігатися для всіх значень z. Область, у якій z-перетворення збігається, називається *областю збіжності*, в цій області значення $X(z)$ скінчені. Область збіжності визначається властивостями $x(n)$.

Значення z, для яких $X(z) = \infty$, називаються *полюсами* функції $X(z)$.

Значення z, для яких $X(z) = 0$, називаються *нулями* функції $X(z)$.

Для причинних послідовностей кінцевої довжини z-перетворення збігається всюди, за винятком точки $z = 0$. Для причинних послідовностей нескінченої довжини z-перетворення збігається всюди за межами найбільшого кола, обмеженого радіусом, рівним полюсу функції.

Область збіжності стійких причинних систем завжди являє собою коло одиничного радіусу. Ця важлива властивість дозволяє описувати системи їх частотними характеристиками.

Розглянемо приклади. Дискретним аналогом дельта-функції Дірака є одинична імпульсна функція, яка являє собою одиничний відлік з одиничним значенням:

$$x_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Розрахуємо її z-перетворення:

$$X_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Функція $X_0(z)$ збігається на всій комплексній площині.

Дискретний одиничний стрибок за змістом повністю відповідає своєму аналоговому прототипу і є причинною послідовністю нескінченної довжини:

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Розрахуємо його z-перетворення:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n}.$$

Цей ряд є сумою нескінченої геометричної прогресії з першим членом $1 \cdot z^{-0} = 1$ та знаменником z^{-1}. Такий ряд збігається при $|z^{-1}| < 1$, тобто при $|z| > 1$ та його сума дорівнює

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

У цьому випадку z-перетворення дійсне всюди за межами кола одиничного радіусу з центром в початку координат на комплексній площині.

Табл. 2.2.

z-образи деяких розповсюджених послідовностей

Послідовність дискретного часу $x(n), n \geq 0$	z-образ $X(z)$	Область збіжності
$k\delta(n)$	k	Всюди
k	$\frac{kz}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
kn	$\frac{kz}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
kn^2	$\frac{kz(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
$ke^{-\alpha n}$	$\frac{kz}{z - e^{-\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
$kne^{-\alpha n}$	$\frac{kze^{-\alpha}}{(z - e^{-\alpha})^2}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
$1 - e^{-\alpha n}$	$\frac{z(1 - e^{-\alpha})}{z^2 - z(1 + e^{-\alpha}) + e^{-\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
$\cos(\propto n)$	$\frac{z(z - \cos\alpha)}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\propto n)$	$\frac{z\sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$e^{-\alpha n}\sin(\propto n)$	$\frac{ze^{-\alpha}\sin\alpha}{z^2 - 2e^{-\alpha}z\cos\alpha + e^{-2\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$

$e^{-\alpha n}\cos(\propto n)$	$\dfrac{ze^{-\alpha}(ze^{-\alpha}-\cos\alpha)}{z^2-2e^{-\alpha}z\cos\alpha+e^{-2\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
$\cosh(\propto n)$	$\dfrac{z^2-z\cosh\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > \cosh\alpha$
$\sinh(\propto n)$	$\dfrac{z\sinh\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > \sinh\alpha$
$k \propto^n$	$\dfrac{kz}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \alpha$
$kn \propto^n$	$\dfrac{k\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert > \alpha$
$2\lvert c\rvert\lvert p\rvert^n\cos(n\angle p + {} + \angle c)$	$\dfrac{cz}{z-p}+\dfrac{c^*z}{z-p^*}$	

Тут k та $\propto$ - постійні, c, p – комплексні числа, c^*, p^* - комплексно-спряжені числа.

2.4.3. ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЕРНЕНОГО Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Зворотне z-перетворення дозволяє відновити послідовність дискретного часу $x(n)$ за її z-образом. Зворотне перетворення особливо корисне в операціях ЦОС, наприклад, при пошуку імпульсної характеристики цифрових фільтрів.

У символічній формі зворотне z-перетворення можна визначити як

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)],$$

де $X(z)$ - z-образ послідовності $x(n)$;

Z^{-1} – символ зворотного z-перетворення.

У припущенні, що послідовність причинна, z-образ $X(z)$ можна розкласти у ступеневий ряд

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

Значення послідовності $x(n)$ – це коефіцієнти z^{-n}, тому їх можна знайти безпосередньо. На практиці $X(z)$ часто виражається через відношення двох багаточленів від z^{-1} (чи, що еквівалентно, від z):

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}.$$

У цьому вигляді зворотне z-перетворення можна знайти за допомогою одного з багатьох методів, наприклад:

- метода розкладення в ступеневий ряд;
- метода розкладення на елементарні дроби;
- метода лишків.

З точки зору математичної чіткості метод віднімань самий елегантний. Метод ступеневих рядів краще всього підходить для комп’ютерних розрахунків.

Метод ступеневих рядів. Якщо дано z-перетворення $X(z)$ причинної послідовності, його можна розкласти у нескінчений ряд відносно z^{-1} чи z шляхом ділення у стовпчик (*синтетичне* ділення):

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Nz^{-N}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Mz^{-M}}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots.$$

У цьому методі чисельник і знаменник функції $X(z)$ спочатку виражаються або через показник ступеня z, що зменшується, або через показник ступеня z^{-1}, що збільшується, а потім шляхом ділення у стовпчик знаходиться частка.

Розглянемо приклад.
Дано z-образ причинної ЛІЧ-системи:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0{,}3561z^{-2}}.$$

Знайти Z^{-1}, розклавши у ступеневий ряд шляхом ділення у стовпчик.

$1+2z^{-1}+z^{-2}$	$1-z^{-1}+0{,}3561z^{-2}$
$\underline{1+2z^{-1}+z^{-2}}$	$1+3z^{-1}+3{,}6439z^{-2}+$
$3z^{-1}+0{,}6439z^{-2}$	$+2{,}5756z^{-3}+\cdots$
$\underline{3z^{-1}-3z^{-2}+1{,}0683z^{-3}}$	
$3{,}6439z^{-2}-1{,}0683z^{-3}$	
$\underline{3{,}6439z^{-2}-3{,}6439z^{-3}+1{,}2975927z^{-4}}$	
$2{,}5756z^{-3}-1{,}2975927z^{-4}$	

z-образ розкладається в ступеневий ряд

$$X(z)=1+3z^{-1}+3{,}6439z^{-2}+2{,}5756z^{-3}+\cdots$$

Можна безпосередньо записати зворотне z-перетворення

$$x(0)=1;x(1)=3;x(2)=3{,}6439;x(4)=2{,}5756;\ldots$$

Метод розкладення на елементарні дроби. Спочатку z-перетворення розкладається на суму простих дробів. Потім за табл. 2.2 знаходиться зворотне z-перетворення кожного елементарного дробу. Ці образи підсумовуються та отримується загальне зворотне z-перетворення.

Якщо полюси функції $X(z)$ першого порядку і $N = M$, то $X(z)$ можна розкласти як

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}} =$$
$$= B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} =$$
$$= B_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \frac{C_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{C_M z}{z - p_M} = B_0 + \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k z}{z - p_k},$$

де p_k – полюси функції $X(z)$;

C_k – коефіцієнти елементарних дробів,

$$B_0 = \frac{b_N}{a_M}.$$

C_k також називають *лишками* функції $X(z)$.

Коефіцієнт C_k, пов’язаний з полюсом, можна знайти, помноживши праву та ліву частину рівняння на $(z - p_k)/z$ та зробивши заміну $z = p_k$:

$$C_k = \frac{X(z)}{z}(z - p_k)\Big|_{z = p_k}.$$

Якщо $N < M$, то $B_0 = 0$.

Якщо $N > M$, то $X(z)$ спочатку потрібно скоротити, щоб отримати $N \leq M$, шляхом ділення у стовпчик багаточленів чисельника та знаменника, записаних через показник ступеня z^{-1}, що зменшується. Залишок виражається так, як записано в наведеному для $N = M$ рівнянні.

Якщо функція $X(z)$ має один чи кілька полюсів більше першого порядку, наприклад, має полюс m-го порядку у точці $z = p_k$, то у розкладення на елементарні дроби повинні входити члени виду

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z - p_k)^i}.$$

Коефіцієнти D_i можна знайти із залежності

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \cdot \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left[(z-p_k)^m \frac{X(z)}{z} \right] \Bigg|_{z=p_k}.$$

Розглянемо приклад. Функція $X(z)$ містить прості полюси першого порядку.

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0{,}25z^{-1} - 0{,}375z^{-2}}.$$

Для зручності виразимо z-перетворення через додатні показники ступеня z:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0{,}25z - 0{,}375} = \frac{z}{(z-0{,}75)(z+0{,}5)}.$$

$X(z)$ має полюси першого порядку в точках $z = 0{,}75$ та $z = -0{,}5$. Оскільки порядок чисельника менше порядку знаменника $(N < M)$, розкладення на елементарні дроби виглядає як

$$X(z) = \frac{z}{(z-0{,}75)(z+0{,}5)} = \frac{C_1 z}{z-0{,}75} + \frac{C_2 z}{z+0{,}5}.$$

Для спрощення пошуку C_k розділимо праву та ліву частину на z:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z(z-0{,}75)(z+0{,}5)} = \frac{C_1}{z-0{,}75} + \frac{C_2}{z+0{,}5}.$$

Щоб знайти C_1, просто помножимо праву та ліву частини рівняння на $z - 0{,}75$ та зробимо заміну $z = 0{,}75$:

$$\frac{(z-0{,}75)X(z)}{z} = \frac{(z-0{,}75)}{(z-0{,}75)(z+0{,}5)} = C_1 + \frac{C_2(z-0{,}75)}{z+0{,}5}.$$

$$C_1 = \frac{1}{z+0{,}5} \Bigg|_{z=0{,}75} = \frac{1}{0{,}75+0{,}5} = \frac{4}{5}.$$

Аналогічно знаходимо C_2:

$$C_2 = \frac{(z+0{,}5)X(z)}{z} \Bigg|_{z=0{,}5} = \frac{(z+0{,}5)}{(z-0{,}75)(z+0{,}5)} = \frac{1}{-0{,}75-0{,}5} = -\frac{4}{5}.$$

Підставимо значення C_1 та C_2 в рівняння для $X(z)$ та отримаємо

$$X(z) = \frac{(4/5)z}{(z-0{,}75)} + \frac{(-4/5)z}{(z+0{,}5)}.$$

Згідно з табл. 1 зворотне z-перетворення кожного члена правої частини даного рівняння задається як

$$Z^{-1}\left[\frac{(4/5)z}{(z-0{,}75)}\right] = \frac{4(0{,}75)^n}{5},$$

$$Z^{-1}\left[-\frac{(4/5)z}{(z+0{,}5)}\right] = \frac{4(-0{,}5)^n}{5}.$$

Отже, шукане зворотне z-перетворення $x(n)$ – це сума двох зворотних z-перетворень:

$$x(n) = \frac{4}{5}[(0{,}75)^n - (-0{,}5)^n], n > 0.$$

Метод лишків. У цьому методі z^{-1} знаходиться шляхом обчислення контурного інтеграла

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz,$$

де C – контур інтегрування, який охоплює всі полюси функції $X(z)$. Для раціональних многочленів контурний інтеграл знаходиться за допомогою фундаментального результату теорії комплексних змінних, який називається *теоремою Коші про лишки* (чи *теоремою лишків*):

$$x(n) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz = \text{сумі лишків } z^{n-1}X(z) \text{ в усіх полюсах всередині C.}$$

Раніше згадувалося, що C_k також називають *лишками* функції $X(z)$, та наводився спосіб їх обчислення. Головне, що потрібно запам'ятати, – це те, що кожен лишок C_k пов'язаний з полюсом p_k. У даному методі лишки функції $z^{n-1}X(z)$ в полюсі p_k задаються як

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-p_k)F(z)]\Big|_{z=p_k},$$

де $F(z) = z^{n-1}X(z)$, m – порядок полюса в точці p_k, $\mathrm{Res}[F(z), p_k]$ – лишок $F(z)$ в точці $z = p_k$.

Для простого (окремого) полюса рівняння зводиться до

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = (z - p_k)F(z) = (z - p_k)z^{n-1}X(z)\bigg|_{z = p_k}.$$

Розглянемо приклад. За допомогою лишків знайти сигнал дискретного часу, який відповідає образу

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0{,}75)(z + 0{,}5)}.$$

Припустимо, що C – коло $|z| = 1$.

Якщо припустити, що $F(z) = z^{n-1}X(z)$, то

$$F(z) = \frac{z^{n-1}z}{(z - 0{,}75)(z + 0{,}5)} = \frac{z^n}{(z - 0{,}75)(z + 0{,}5)}.$$

Функція $F(z)$ має полюси в точках $z = 0{,}75$ та $z = -0{,}5$. Обидва полюси лежать всередині контуру інтегрування (одиничного кола).

Зворотне z-перетворення задається як

$$x(n) = \mathrm{Res}[F(z), 0{,}75] + \mathrm{Res}[F(z), -0{,}5].$$

Таким чином

$$\mathrm{Res}[F(z), 0{,}75] = (z - 0{,}75)F(z)\bigg|_{z = 0{,}75} =$$
$$= \frac{(z - 0{,}75)z^n}{(z - 0{,}75)(z + 0{,}5)}\bigg|_{z = 0{,}75} =$$
$$= \frac{(0{,}75)^n}{0{,}75 + 0{,}5} = \frac{4}{5}(0{,}75)^n.$$
$$\mathrm{Res}[F(z), -0{,}5] = (z + 0{,}5)F(z)\bigg|_{z = -0{,}5} =$$
$$= \frac{(z + 0{,}5)z^n}{(z - 0{,}75)(z + 0{,}5)}\bigg|_{z = 0{,}75} = -\frac{4}{5}(-0{,}5)^n.$$

Зворотне z-перетворення – це сума лишків в точках $z = 0{,}75$ та $z = -0{,}5$:

$$x(n) = \frac{4}{5}[(0{,}75)^n - (-0{,}5)^n].$$

Порівняємо ці методи. Метод розкладення в ступеневий ряд не дає аналітичного рішення, проте він простий та придатний для обчислення за допомогою комп'ютера. Але через його рекурсивну природу потрібно слідкувати за можливим наростанням чисельних помилок при великому числі заданих точок z-перетворення.

Метод розкладення на елементарні дроби та метод лишків дають результат в аналітичному вигляді. Головний недолік цих методів – необхідність розкладати на множники многочлен знаменника. Якщо функція $X(z)$ має полюси високого порядку, то обидва методи можуть включати диференціювання високого порядку.

Метод розкладення на елементарні дроби особливо корисний для генерації коефіцієнтів паралельних структур для цифрових фільтрів. Метод лишків знайшов широке застосування в аналізі помилок квантування в системах дискретного часу.

Розглянемо властивості z-перетворення

1. *Лінійність*. Якщо послідовності $x_1(n)$ та $x_2(n)$ мають z-образи $X_1(z)$ та $X_2(z)$, то z-образ їх лінійної комбінації буде

$$ax_1(n) + bx_2(n) \to aX_1(z) + bX_2(z).$$

2. *Затримка чи зміщення*. Якщо z-образ послідовності $x(n)$ дорівнює $X(z)$, то z-образ послідовності з затримкою на m елементів буде $z^{-m}X(z)$.

Ця властивість широко використовується для перетворення передаточної функції z системи дискретного часу у різницеві рівняння в часовій області, та навпаки:

$$x(n) \to X(z),$$
$$x(n-m) \to z^{-m}X(z).$$

Множник z^{-m} є *оператором затримки* дискретної послідовності на m тактів.

3. *Згортка*. Дана ЛІЧ-система дискретного часу із входом $x(n)$ та імпульсною характеристикою $h(k)$. Вихід системи задається як

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,x(n-k).$$

Виражені через z-образи входи та виходи пов'язані співвідношенням

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

де $X(z)$, $H(z)$ та $Y(z)$ – відповідно z-образи послідовностей $x(n)$, $h(k)$ та $y(n)$.

Операція згортки перетворилася в процес множення в z-області.

Функцію $H(z)$ часто називають *передаточною функцією системи*.

При заданих $X(z)$ та $H(z)$ вихід $y(n)$ можна знайти за допомогою зворотного z-перетворення $Y(z)$.

4. *Диференціювання*. Якщо $X(z)$ – z-образ послідовності $x(n)$, то z-образ $nx(n)$ можна знайти як

$$nx(n) \to z\frac{dX(z)}{dz}.$$

5. *Взаємозв'язок з перетворенням Лапласа*. Системи чи сигнали неперервного часу, як правило, описуються за допомогою перетворення Лапласа. Якщо $z = e^{sT}$, де s – комплексна змінна Лапласа, яка задається як

$$s = d + i\omega,$$

то

$$z = e^{(d+i\omega)T} = e^{dT}e^{i\omega T},$$

$$|z| = e^{dT}, \angle z = \omega T = 2\pi f/F_s = 2\pi\omega/\omega_s\,,$$

де ω_s – частота дискретизації [рад/с].

Оскільки ω пробігає значення від $-\infty$ до ∞, s-площина відбивається у z-площину так, як показано на рис. 2.20.

Вся вісь $i\omega$ на s-площині відбивається в одиничне коло. Ліва сторона s-площини відбивається всередину кола одиничного радіусу, а права сторона – на зовнішню сторону кола одиничного радіусу.

Для частотної характеристики вісь $i\omega$ має саме велике значення на s-площині. В цьому випадку $d = 0$ і частотні точки на s-площині пов'язані з точками одиничного кола на z-площині співвідношенням

$$z = e^{i\omega T}.$$

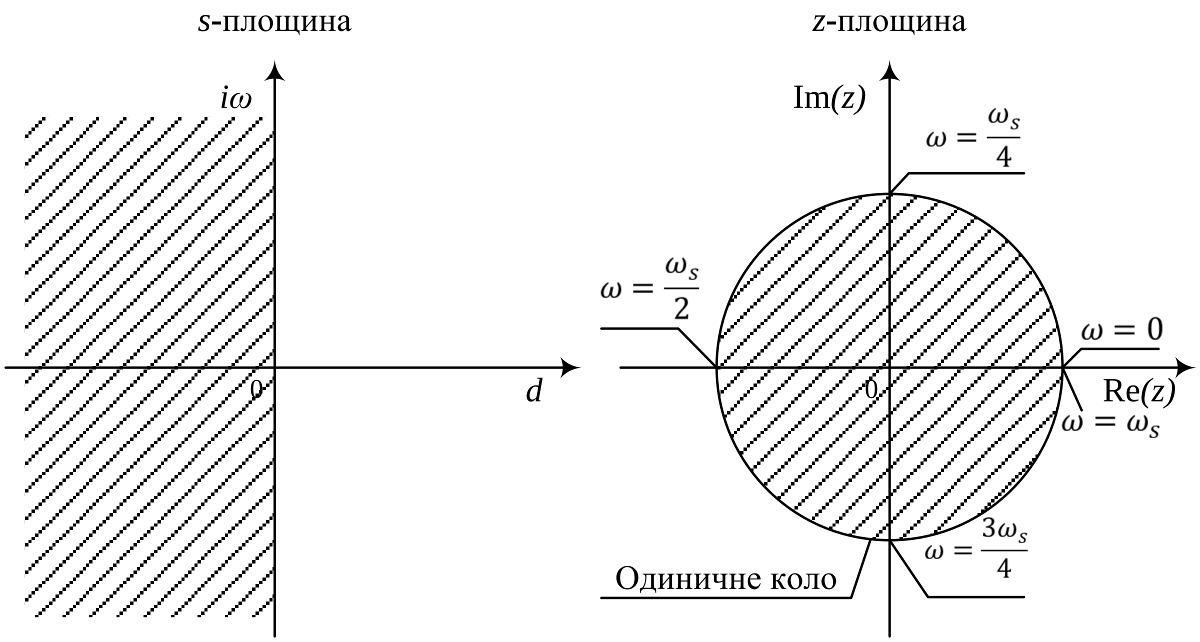


Рис. 2.20. Відображення s-площини у z-площину

У табл. 2.3 наведено, як деякі особливі частоти відбиваються із s-площини в z-площину. Таке відображення неоднозначне, оскільки, наприклад, дві частоти $\omega = \omega_s$ та $\omega = 2\omega_s$ на s-площині відбиваються в одну і туж точку одиничного кола.

Табл. 2.3

Відображення частот з s-площини у z-площину

s-площина: ω [рад/с]	z-площина: ωT [рад]
0	0
$\omega_s/4$	$\pi/2$
$\omega_s/2$	π
$3\omega_s/4$	$1{,}25\pi$
ω_s	2π
$1{,}25\omega_s$	$\pi/2$
$1{,}5\omega_s$	π
$1{,}75\omega_s$	$1{,}25\pi$
$2\omega_s$	2π

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Що таке символьна швидкість?
2. Які типи модуляції виділяють в залежності від використовуваного несівного коливання та сигналу, що модулює?
3. У якому випадку модуляцію називають маніпуляцією?
4. Які основні види маніпуляції сигналів?
5. У чому полягає зміст частотної маніпуляції?
6. Навіщо використовується частотна маніпуляція з неперервною фазовою функцією?
7. Що називається мінімальною частотною маніпуляцією?
8. У чому полягає зміст амплітудної маніпуляції?
9. У чому полягає зміст фазової маніпуляції?
10. У чому полягає зміст квадратурної маніпуляції?
11. Що таке «сигнально-кодова конструкція» чи «сигнальне сузір'я»?
12. Для чого використовуються формуючі фільтри при маніпуляції?
13. У чому полягає операція згортки?
14. Назвіть властивості згортки.
15. У чому полягає операція цифрової фільтрації?
16. У чому полягає операція кореляції?
17. Що таке взаємно-кореляційна функція?
18. Що таке автокореляційна функція?
19. У чому полягає основний зміст дискретних перетворень?
20. Що таке інтеграл Фур'є?
21. Що таке «спектральна щільність амплітуди» («амплітудний спектр») і в яких одиницях вимірюється ця величина?
22. Що таке «спектральна щільність енергії» і в яких одиницях вимірюється ця величина?
23. Що таке дискретне перетворення Фур'є?
24. Що таке частота перегину?
25. Наведіть властивості дискретного перетворення Фур'є.
26. У чому пролягає основний зміст алгоритмів швидкого перетворення Фур'є?
27. Що таке алгоритм з часовою/частотною децимацією?
28. Що таке «рекомпозиційні рівняння» та яка структура діаграми «метелик»?
29. Що таке дискретне косинус-перетворення?
30. Що таке функції Уолша, які їхні основні риси?
31. Що таке перетворення Уолша?
32. Що таке перетворення Адамара?
33. Що таке вейвлет?
34. Що таке вейвлетне перетворення?
35. Що таке дискретне вейвлетне перетворення?
36. Що таке система дискретного часу?

37. Яка роль z-перетворення у системах дискретного часу?
38. Яка ознака лінійної системи?
39. Що таке лінійна інваріантна відносно часу система?
40. Яка лінійна інваріантна відносно часу система називається стійкою?
41. У чому полягає зміст z-перетворення?
42. Що таке «нулі» та «полюси» для z-перетворення?
43. Які найпоширеніші методи обчислення зворотного z-перетворення?
44. Назвіть властивості z-перетворення.

3. ЦИФРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ СИГНАЛІВ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЇ У СУЧАСНИХ ТКС

Розглянемо загальні принципи побудови цифрових фільтрів. Розділ містить відомості про основний зміст етапів розробки цифрових фільтрів. Розглянуті альтернативи та фактори, що впливають на вибір фільтра з двох класів: із кінцевою імпульсною характеристикою та нескінченою імпульсною характеристикою. Матеріал розкриває теоретичні основи проектування цифрових фільтрів та кроки практичної реалізації процесу. Також у розділі описані ключові аспекти автоматичної адаптації фільтра до змін вхідних сигналів, які є предметом адаптивної обробки сигналів. Тема розкрита на основі алгоритмів схеми найменших квадратів та рекурсивної схеми найменших квадратів, які найбільш часто реалізуються при адаптивній обробці сигналів.

3.1. **ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ФІЛЬТРІВ**

3.1.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ФІЛЬТРІВ

По суті фільтр – це система чи мережа, яка вибірково змінює форму сигналу. Основними цілями фільтрації є:

- поліпшення якості сигналу;
- добування інформації;
- розділення декількох сигналів, об’єднаних раніше.

Цифровий фільтр (ЦФ) – це математичний алгоритм.

Спрощена блок-схема ЦФ реального часу з аналоговими входами та виходами наведена на рис. 3.1.

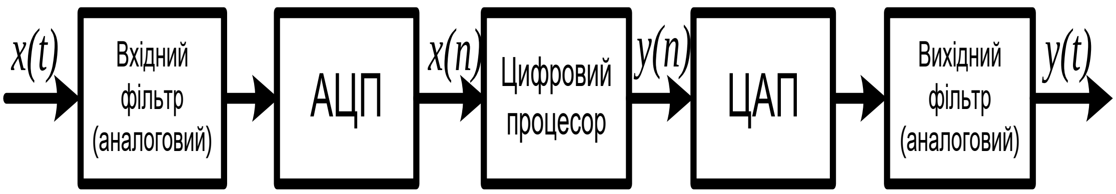


Рис. 3.1. Спрощена блок-схема ЦФ реального часу

Вузькосмуговий аналоговий сигнал періодично вибирається та конвертується в набір цифрових вибірок $x(n), n = 0,1, \ldots$ цифровий процесор (ЦП) здійснює фільтрацію, відбиваючи вхідну послідовність $x(n)$ у вихідну $y(n)$ згідно з обчислювальним алгоритмом фільтра. ЦАП конвертує відфільтрований цифровим чином вихід в аналогові значення, які потім проходять аналогову фільтрацію для згладжування і усунення небажаних високочастотних компонент.

ЦФ відіграють важливу роль в ЦОС. У порівнянні з аналоговими фільтрами вони переважають у багатьох областях (наприклад, стиснення даних, біомедична обробка сигналів, обробка мови, обробка зображень, передача даних, цифрове аудіо), так як володіють рядом переваг:

- ЦФ можуть мати характеристики, отримання яких на аналогових фільтрах неможливе, наприклад, дійсно лінійну фазову характеристику;
- продуктивність ЦФ не залежить від змін середовища, наприклад, коливань температури, отже ЦФ не потребують періодичного калібрування;
- якщо ЦФ побудований з використанням програмованого процесора, його частотні характеристики можуть налаштовуватися автоматично;
- один ЦФ може обробляти декілька вхідних сигналів чи каналів без дублювання апаратних блоків;
- фільтровані та не фільтровані дані можна зберегти для подальшої обробки;
- можна отримувати невеликі ЦФ з пониженим споживанням потужності та більш низькою ціною;
- на практиці точність аналогових фільтрів обмежена, точність ЦФ обмежена тільки довжиною слова, що використовується;
- продуктивність ЦФ однакова для всіх пристроїв серії;
- ЦФ можуть використовуватися при дуже низьких частотах, а також у великому діапазоні частот, для чого достатньо змінити частоту дискретизації.

У порівнянні з аналоговими фільтрами, ЦФ мають і ряд недоліків:

- обмеження швидкості – максимальна ширина смуги сигналів, які в реальному часі здатні обробляти ЦФ, значно вужча, ніж у аналогових;
- вплив скінченої розрядності – ЦФ схильні до впливу шуму АЦП;
- значний час розробки і впровадження – розробка і впровадження ЦФ може виконуватися набагато довше, ніж аналогових фільтрів, проте вже розроблені ЦФ можуть використовуватися в інших задачах з незначною модифікацією чи взагалі без змін.

ЦФ розділені на два класи:

- ЦФ з *нескінченою імпульсною характеристикою* (НІХ-фільтри);
- ЦФ із *кінцевою імпульсною характеристикою* (КІХ-фільтри).

У стандартній формі ЦФ кожного типу можна представити через коефіцієнти його імпульсної характеристики $h(k), k = 0,1, \ldots$ Вхідний та вихідний сигнали пов’язані через операцію згортки. Для НІХ-фільтра

$$y(n) = \sum_{k-0}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Для КІХ-фільтра

$$y(n) = \sum_{k-0}^{N-1} h(k)x(n-k).$$

Із рівнянь зрозуміло, що для НІХ-фільтрів імпульсна характеристика має нескінчену тривалість, для КІХ-фільтрів вона обмежена. На практиці обчислити вихід НІХ-фільтра за наведеною формулою неможливо, замість цього рівняння НІХ-фільтра переписується у рекурсивній формі

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k),$$

де a_k та b_k – коефіцієнти фільтра.

У останньому рівнянні поточна вихідна вибірка $y(n)$ є фікцією попередніх входів, а також поточної та попередньої вхідних вибірок, так що НІХ-фільтр є в деякому сенсі системою із зворотнім зв’язком.

3.1.2. Математичні моделі та структурні схеми цифрової фільтрації

Вибір між КІХ та НІХ фільтрами залежить від відносних переваг обох типів.

1. КІХ-фільтри можуть мати строго лінійну фазову характеристику. Отже такий ЦФ не вводить фазового спотворення в сигнал, що важливо при передачі даних, обробці аудіо та зображень. Фазова характеристика НІХ-фільтрів нелінійна, особливо на краях смуги.

2. КІХ-фільтри реалізовані нерекурсивно і вони завжди стійкі. Гарантувати стійкість НІХ-фільтрів вдається не завжди.

3. Для реалізації фільтрів використовується скінчене число біт. Практичні наслідки цього значно менш суттєві для КІХ-фільтрів.

4. Щоб отримати імпульсну характеристику за допомогою фільтрів з різкими зрізами характеристики, знадобиться більше коефіцієнтів, ніж для отримання нескінченої імпульсної характеристики.

5. Аналогові фільтри легко перетворюються у НІХ-фільтри, що задовольняють подібним специфікаціям. Для отримання КІХ-фільтрів таке перетворення неможливе.

6. Синтез КІХ-фільтрів алгебраїчно складніший.

7. НІХ-фільтри рекурентні, пропустивши через фільтр один і той же сигнал, але із зворотнім ходом часу, отримаємо різні результати.

Загальний принцип вибору можна сформулювати наступним чином:

- використовувати НІХ-фільтр, якщо єдиною важливою вимогою є характеристика з різкими зрізами та висока пропускна здатність;

- використовувати КІХ-фільтр, якщо число коефіцієнтів не дуже велике і, зокрема, якщо потрібно, щоб фазове спотворення було відсутнє чи мінімальне.

Очевидно, що НІХ-фільтри економніші за КІХ-фільтри. При однакових специфікаціях амплітудної характеристики число коефіцієнтів КІХ-фільтра зазвичай у шість разів перевищує порядок передаточної функції НІХ-фільтра.

Розглянемо етапи розробки фільтра

Розробка ЦФ проходить у п’ять етапів:

1. Специфікація вимог до фільтра.
2. Обчислення підходящих коефіцієнтів фільтра.
3. Представлення фільтра підходящою структурою.
4. Аналіз впливу скінченої розрядності на продуктивність фільтра.
5. Реалізація фільтра на програмному чи апаратному рівні.

Названі етапи не завжди незалежні, крім того не завжди розташовуються у вказаному порядку.

Специфікація вимог включає специфікації:

1. Характеристик сигналів (тип джерела та отримувача сигналу, інтерфейс вводу-виводу, швидкість передачі даних, найвища частота, що являє практичний інтерес).
2. Характеристик фільтра (бажана амплітудна та/чи фазова характеристика, наскільки строгі дані вимоги, швидкість роботи та режими фільтрації – реальний чи модельний час).
3. Принципу реалізації (комп’ютерна програма чи на базі процесора).
4. Інших вимог до структури (наприклад, вартість).

Перераховані вище вимоги уточнюються в залежності від конкретної задачі.

Характеристики ЦФ часто задаються в частотній області для фільтра (такі як ФНЧ чи СФ), специфікації часто формулюються у вигляді схем допусків. Приклад схеми для ФНЧ наведено на рис. 3.2.

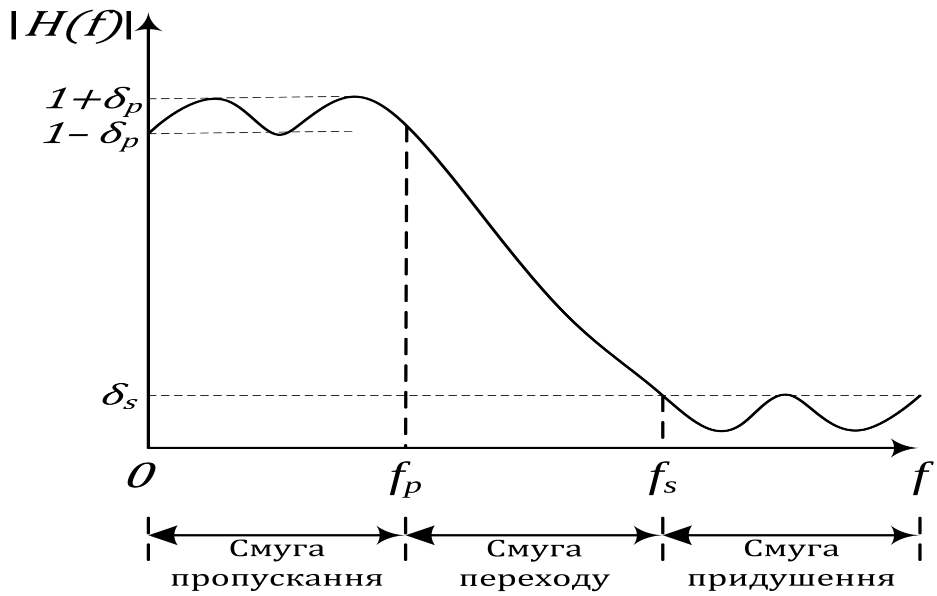


Рис. 3.2. Схема допусків для фільтра нижніх частот

Штрихові горизонтальні лінії означають межі припустимих відхилень. У смузі пропускання амплітудна характеристика має пікове відхилення δ_p, а у смузі придушення – максимальне відхилення δ_s.

Ширина смуги переходу визначає, наскільки різкою є характеристика фільтра. У цій області амплітудна характеристика монотонно зменшується від смуги пропускання до смуги придушення. Ключовими є наступні параметри:

δ_p – відхилення у смузі пропускання;

δ_s – відхилення у смузі придушення;

f_p – гранична частота смуги пропускання;

f_s – гранична частота смуги придушення.

Граничні частоти часто представляються у нормованій формі, тобто як доля частоти дискретизації f/F_s.

Схема допусків для розробки СФ наведена на рис. 3.3.

Розглянемо приклад**.** Дані специфікації частотної характеристики СФ для роботи на частоті дискретизації F_s =10 кГц:

- смуга пропускання 0,18-0,33;
- ширина смуги переходу 0,04.

Виразити граничні частоти смуги пропускання та смуги придушення фільтра в стандартних одиницях.

Значення смуги пропускання та ширини смуги переходу надані у нормованій формі, тобто як доля частоти дискретизації f/F_s.

У стандартних одиницях смуга пропускання $(0{,}18 - 0{,}33) \cdot F_s = 1{,}8 - 3{,}3$ кГц.

Ширина смуги переходу $0{,}04 \cdot F_s = 0{,}4$ кГц.

Смуга придушення $0 - 1{,}4$ кГц та $3{,}7 - 5$ кГц. Верхня частота смуги придушення визначається частотою Найквіста (половина частоти дискретизації).

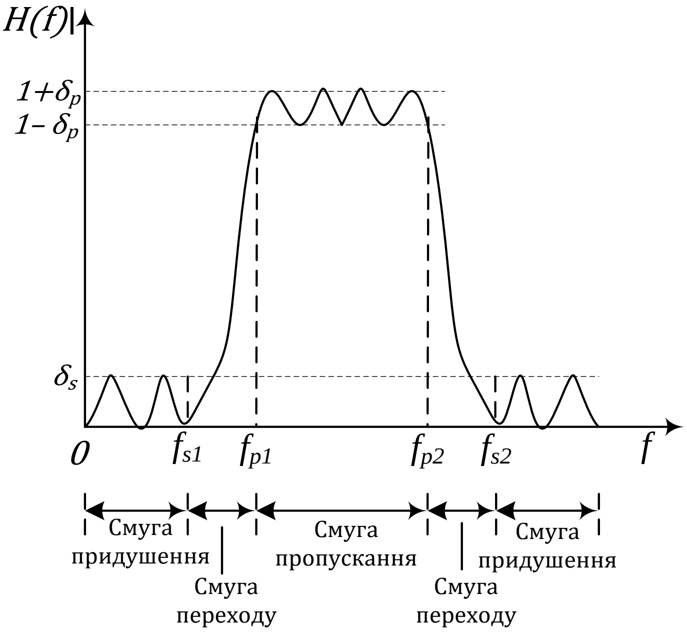


Рис. 3.3. Схема допусків для розробки СФ

Відхилення у смузі пропускання і смузі придушення можуть бути виражені як звичайні числа чи в децибелах. Для КІХ-фільтрів мінімальне затухання у смузі придушення A_s та максимальна нерівномірність у смузі пропускання A_p в децибелах можуть бути записані

$$A_s = -20\log\delta_s,$$
$$A_p = 20\log\left(1+\delta_p\right).$$

Дані специфікації частотної характеристики СФ:
- відхилення у смузі придушення 0,001;
- відхилення у смузі пропускання 0,05.

Виразити в децибелах затухання у смузі придушення та нерівномірність у смузі пропускання.

Мінімальне затухання у смузі придушення

$A_s = -20\log\delta_s = -20\log(0{,}001) = -20\cdot(-3) = 60$ дБ.

Максимальна нерівномірність у смузі пропускання

$A_p = 20\log\left(1+\delta_p\right) = 20\log(1{,}05) = 20\cdot 0{,}021 = 0{,}42$ дБ.

При специфікації фазової характеристики у багатьох випадках достатньо вказати, що фазове спотворення суттєве чи що бажана лінійна фазова характеристика. У випадках, коли фільтри використовуються для вирівнювання чи компенсації фазової характеристики системи чи як фазообертачі, фазову характеристику слід задавати.

Розглянемо розрахунок коефіцієнтів. Обирається один з методів апроксимації та обчислюються значення коефіцієнтів, при яких задовольняються умови специфікації вимог.

Обчислення коефіцієнтів НІХ-фільтрів традиційно базується на перетворенні характеристик аналогових фільтрів у характеристики еквівалентних цифрових. Використовуються два підходи:

- метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики;
- метод білінійного перетворення.

У якості альтернативного методу обчислення коефіцієнтів НІХ-фільтрів застосовується ще метод розміщення нулів та полюсів.

Коефіцієнти КІХ-фільтрів також можна обчислити декількома способами, серед яких:

- метод вирізаня (зважування);
- метод частотної вибірки;
- оптимальних метод (алгоритм Паркса – Мак-Кліллана).

На вибір методу впливає декілька факторів, зокрема, критичні вимоги у специфікаціях. Взагалі, основним є вибір між НІХ та КІХ. Для КІХ варто використовувати оптимальний метод, для НІХ у більшості випадків достатньо білінійного.

Представлення фільтра у вигляді певної структури включає перетворення заданої передавальної функції $H(z)$ у підходящу фільтруючу структуру. Для відображення структури фільтра часто використовуються блок-схеми чи функціональні схеми, на яких для полегшення реалізації ЦФ показується хід обчислень.

Для КІХ-фільтрів найбільше використовується пряма структура, оскільки її простіше всього реалізувати. У цій формі КІХ-фільтр іноді називають лінією затримки з відводами чи трансверсальним фільтром. Трансверсальна структура 4-точкового КІХ-фільтра наведена на рис. 3.4.

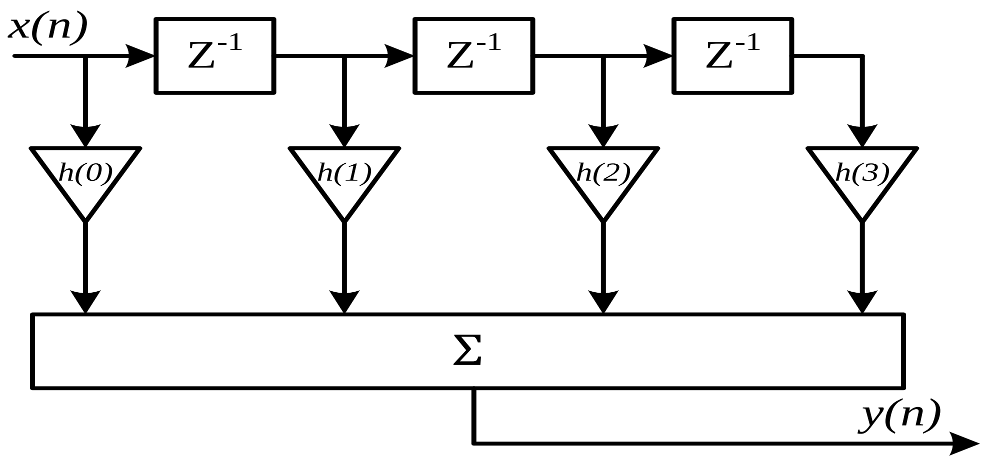


Рис. 3.4. Трансверсальна структура 4-точкового КІХ-фільтра

Використовують ще дві структури:

- структура частотної вибірки;
- схема швидкої згортки.

У порівнянні з трансверсальною структурою реалізація за схемою частотної вибірки може бути обчислювально більш ефективною, оскільки потребує розрахунку меншого числа коефіцієнтів. Але її буває не так просто реалізувати та вона може вимагати більше пам'яті.

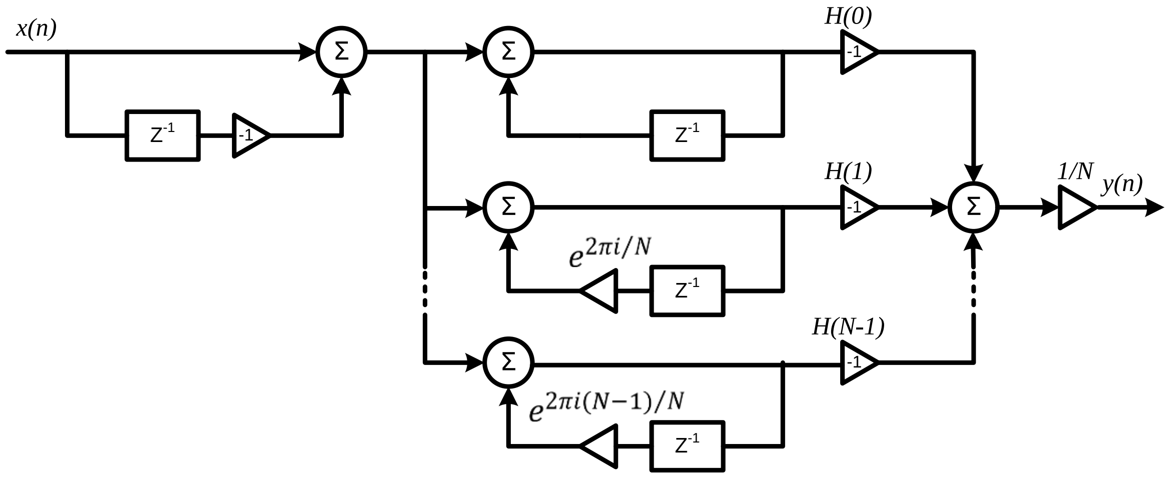


Рис. 3.5. Структура частотної вибірки

При швидкій згортці використовуються обчислювальні переваги ШПФ, вона особливо приваблива в ситуаціях, коли додатково потрібно обчислити спектр сигналу, рис. 3.6.

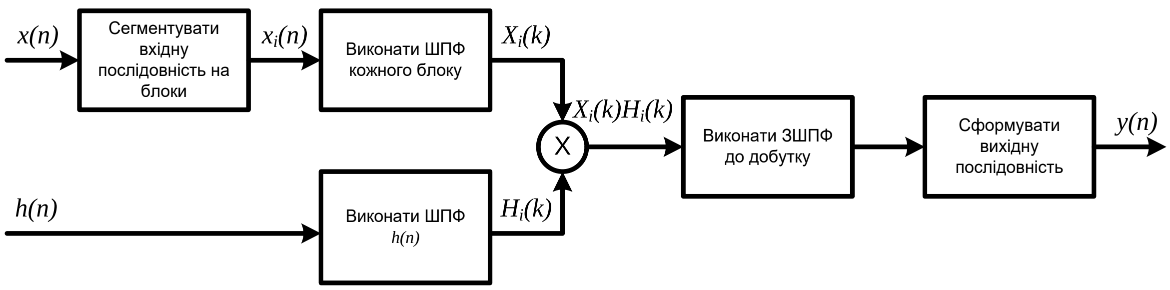


Рис. 3.6. Схема швидкої згортки

Існує множина інших практичних структур ЦФ, але більшість із них популярні лише у визначених сферах. Так у сфері обробки мови та лінійного передбачення використовується решітчаста структура. Вона може використовуватися як для НІХ-, так і для КІХ-фільтрів і в стандартній формі характеризується єдиним входом та парою виходів.

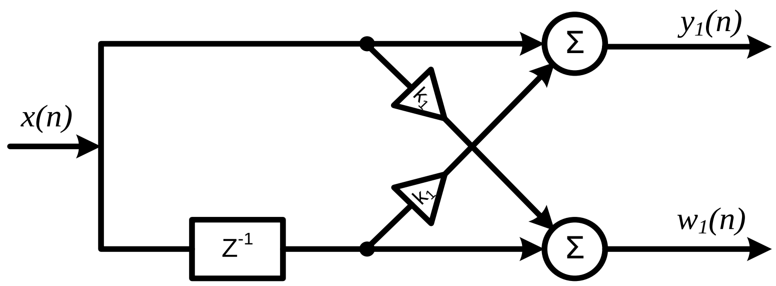


Рис. 3.7. Решітчаста структура

Виведена з неї решітчаста структура описує N-точковий КІХ-фільтр.

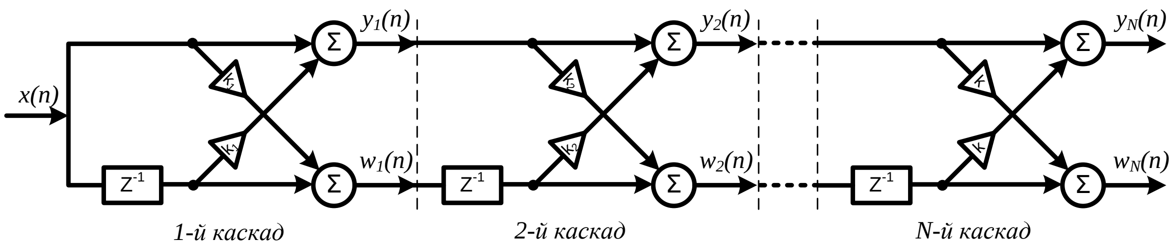


Рис. 3.8. N-точковий КІХ-фільтр

Для НІХ-фільтра другого порядку із всіма заданими полюсами (для якого вказані лише коефіцієнти знаменника) структура представлена на рис. 3.9.

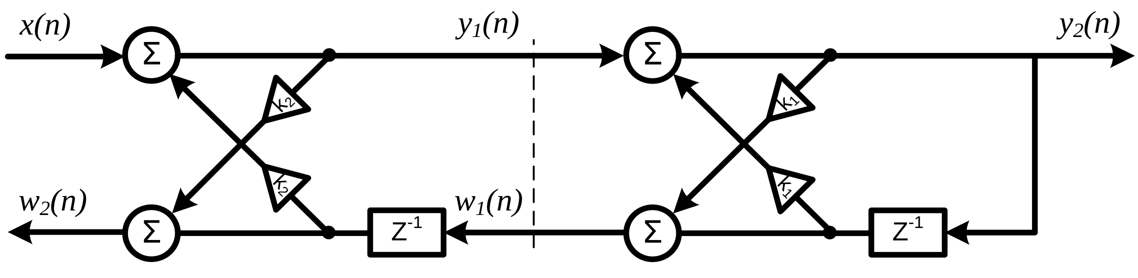


Рис. 3.9. Двокаскадна решітчаста структура із всіма заданими полюсами

Для НІХ-фільтрів широко використовуються три структури:
- пряма форма;
- каскадна форма;
- паралельна форма.

Пряма форма – це безпосереднє представлення передаточної функції НІХ-фільтра.

Найбільш широко використовуються паралельна і каскадна структури, оскільки вони являють більш прості алгоритми фільтрації та менше чутливі до ефектів реалізації з використанням скінченого числа бітів.

В каскадній формі передаточна функція НІХ-фільтра

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}$$

факторизується і виражається як добуток ланок другого порядку.

У паралельній формі $H(z)$ розкладається за допомогою елементарних дробів на суму ланок другого порядку.

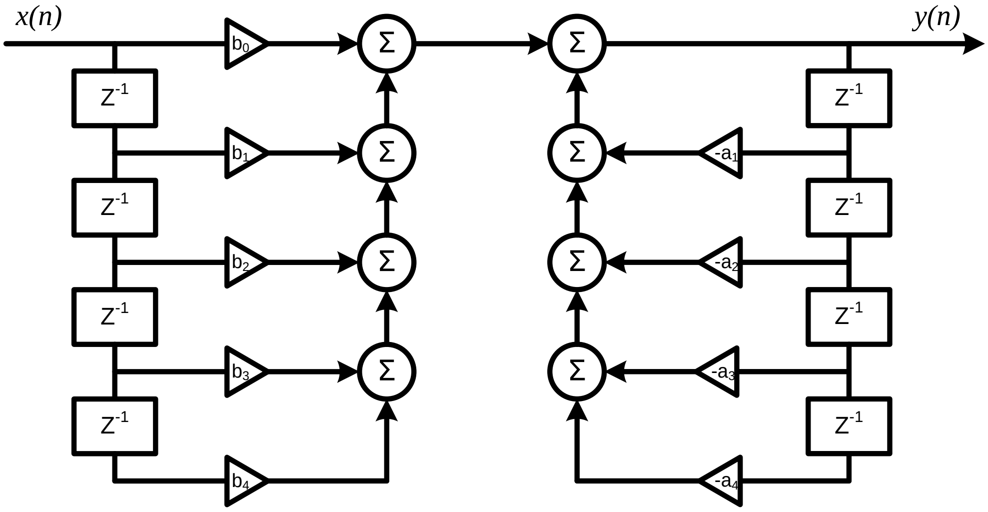


Рис. 3.10. Блок-схема фільтра четвертого порядку в прямій формі

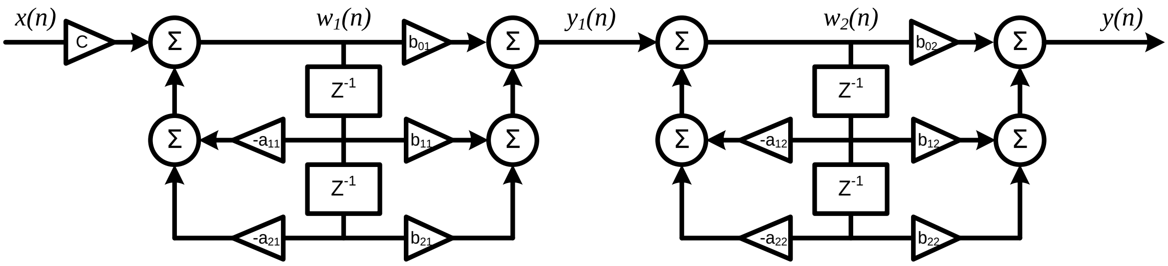


Рис. 3.11. Блок-схема фільтра четвертого порядку в каскадній формі

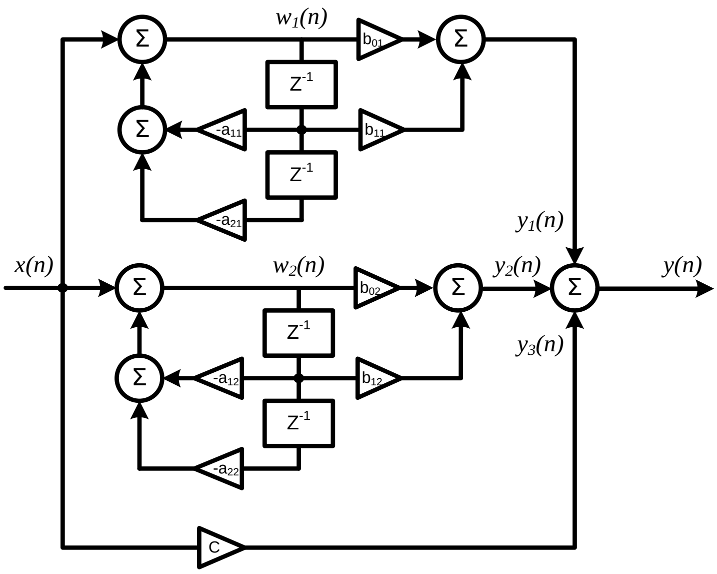


Рис. 3.12. Блок-схема фільтра четвертого порядку в паралельній формі

Вибір між структурами залежить від наступних факторів:

1. Яка потрібна характеристика (НІХ, КІХ).
2. Простота реалізації.
3. Наскільки структура чутлива до ефектів скінченої розрядності.

Етапи апроксимації та реалізації передбачають роботу з нескінченою чи дуже високою точністю. У справжніх реалізаціях часто потребується представляти коефіцієнти фільтра скінченим числом бітів (зазвичай від 8 до 16). Крім того, арифметичні операції, що вказані в різницевих рівняннях, виконуються з використанням арифметики скінченої точності.

Вплив скінченого числа бітів проявляється у зниженні продуктивності фільтра, в деяких випадках фільтр може стати нестійким. Розробник повинен проаналізувати дані ефекти та обрати довжину слова, яка підходить для представлення коефіцієнтів фільтра, змінних фільтра та виконання арифметичних операцій у фільтрі.

Основні джерела погіршення продуктивності фільтра:

- квантування сигналу, зокрема шум АЦП;

- квантування коефіцієнтів, що спотворює частотні характеристики та може призвести до нестійкості фільтра;

- помилки округлення, через що виникає шум округлення – можлива нестійкість фільтра;

- переповнення, призводить до невірних вихідних вибірок та можливої нестійкості фільтра.

Ступінь погіршення фільтра залежить від:

1. Довжини слова та типу арифметики, що використовуються для фільтрації.
2. Методу квантування коефіцієнтів фільтра та змінних до обраних розмірів.
3. Структури фільтра.

3.2. ОСНОВИ СИНТЕЗУ КОЕФІЦІЄНТІВ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

3.2.1. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДЛЯ ОТРИМАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Метод вирізання (зважування). Нагадаємо, що імпульсною характеристикою фільтра $h(n)$ є його реакція на вхідний сигнал у вигляді дельта-функції Дірака

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0, \\ 0, \;\; x \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Передаточною характеристикою фільтра є відношення z-образів вихідного сигналу $Y(z)$ до вхідного сигналу $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Імпульсна характеристика фільтра є оригіналом (у сенсі перетворення Лапласа) для передаточної характеристики.

У методі вирізання використовується факт, що частотна характеристика фільтра $H_D(\omega)$ і відповідна їй імпульсна характеристика $h_D(n)$ пов'язані зворотнім перетворення Фур'є

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Індекс D використовується для позначення практичної імпульсної характеристики.

Припустимо, що потрібно розробити ФНЧ. Починати можна з ідеальної імпульсної характеристики, відповідна до якої частотна характеристика наведена на рис. 3.13, де ω_c – частота зрізу, а шкала частот нормована ($T = 1$).

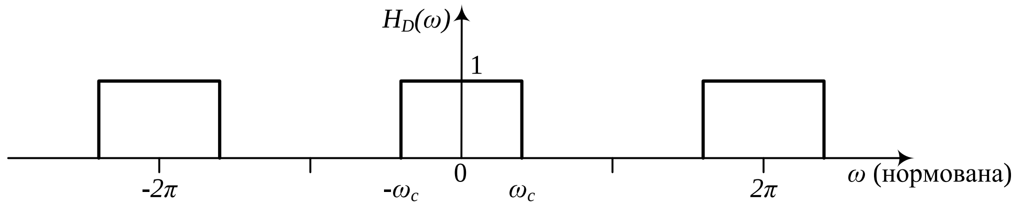


Рис. 3.13. Ідеальна частотна характеристика ФНЧ

Припустивши, що характеристика йде від $-\omega_c$ до ω_c, спрощуємо інтегрування та отримаємо наступну імпульсну характеристику

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega\tau}d\omega = \begin{cases} \dfrac{2f_c\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, & n \neq 0, \\ 2f_c, & n = 0. \end{cases}$$

Імпульсна характеристика ФНЧ наведена на рис. 3.14. Бачимо, що $h_D(n)$ симетрична відносно $n = 0$, так що фільтр буде мати лінійну (у даному випадку – нульову) фазову характеристику.

Для даного підходу найважливішою проблемою є те, що характеристика $h_D(n)$ теоретично продовжується до нескінченості, а значить отриманий фільтр не є КІХ-фільтром.

Очевидним є рішення усікти ідеальну імпульсну характеристику, поклавши $h_D(n) = 0$ для n, більших деякого *M*, але при цьому вводиться небажана нерівномірність та викиди – має місце *ефект Гіббса*.

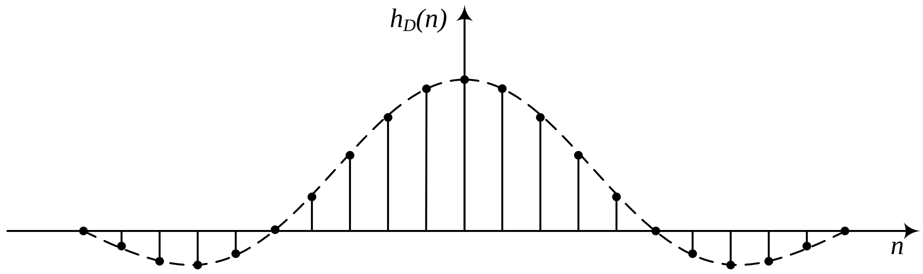


Рис. 3.14. Імпульсна характеристика ідеального ФНЧ

Чим більше залишається коефіцієнтів, тим ближче реальна характеристика до ідеальної.

Пряме усічення імпульсної характеристики рівносильне множенню ідеальної імпульсної характеристики на прямокутну *вагову функцію* виду

$$w(n) = \begin{cases} 1, & |n| = 0,1,\dots,(M-1)/2, \\ 0, & |n| > (M-1)/2\,. \end{cases}$$

В частотній області це еквівалентно згортці $H_D(\omega)$ з $W(\omega)$, де $W(\omega)$ – Фур'є-образ $w(n)$. Таким чином, отримана імпульсна характеристика гладко затухає до нуля.

$$h(n) = h_D(n)w(n), \qquad |n| = 0,1,\dots,(M-1)/2.$$

На практиці ідеальна імпульсна характеристика множиться на підходящу вагову функцію $w(n)$ з кінцевою тривалістю. Отримана таким чином імпульсна характеристика фільтра гладко затухає до нуля. Ширина смуги переходу фільтра визначається шириною основного пелюстка вагової функції. Бокові пелюстки призводять до появи нерівномірностей у смугах пропускання і придушення.

Було запропоновано кілька вагових функцій (функцій вікна). Однією з найбільш поширених є вагова функція Хеммінга, яка визначається наступним чином

$$w(n) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi n/N), & \begin{cases} -(N-1)/2 \le n \le (N-1)/2\,, & N - \text{непарне}, \\ -N/2 \le n \le N/2 & N - \text{парне}, \end{cases} \\ 0, & \text{інші випадки}. \end{cases}$$

У часовій області функція Хеммінга у порівнянні з прямокутною більш плавно виходить на нуль з обох боків. У частотній області її головний пелюсток майже вдвічі ширший, а її бокові пелюстки менші у порівнянні з головним (приблизно 40 дБ у порівнянні з 14 дБ для прямокутної функції). Функція Хеммінга дає фільтр з більшою смугою переходу, але з більшим затуханням у смузі придушення.

Зв’язок ширини смуги переходу фільтра на основі вагової функції Хеммінга з довжиною фільтра виражається формулою

$$\Delta f = 3{,}3/N,$$

де N – розрядність фільтра, Δf – нормована ширина смуги переходу.

Максимальне затухання у смузі придушення, можливе при використанні функції Хеммінга, складає близько 53 дБ, а мінімальна амплітуда нерівномірності у смузі пропускання складає біля 0,0194 дБ.

Розглянемо приклади**.** Потрібно на основі КІХ-фільтра з трансверсальною структурою розробити ФНЧ за такими специфікаціями:

- гранична частота смуги пропускання 1 кГц;
- ширина смуги переходу 1 кГц;
- затухання у смузі придушення >50 дБ;
- частота дискретизації 2 кГц.

Для ФНЧ ідеальна імпульсна характеристика записується як:

$$h_D(n) = \begin{cases} \dfrac{2f_c \sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, & n \ne 0, \\ 2f_c, & n = 0. \end{cases}$$

Слід звернути увагу на симетричність імпульсної характеристики відносно $n = 0$. Граничні частоти часто представляються у нормованій формі як доля частоти дискретизації f/F_s.

Потрібне затухання у смузі придушення може забезпечити вагова функція Хеммінга, Блекмена чи Кайзера. Найпростішою з них є вагова функція Хеммінга, яка записується як:

$$w(n) =$$
$$= \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi n/N), & \begin{cases} -(N-2)/2 \le n \le (N-1)/2\,, & N - \text{непарне}, \\ -N/2 \le n \le N/2 & N - \text{парне}, \end{cases} \\ 0, & \text{інші випадки.} \end{cases}$$

Для цієї функції зв'язок довжини фільтра та ширини смуги переходу (нормованої) встановлено як:

$$\Delta f = 3{,}3/N.$$

Для обраного прикладу $\Delta f = 1\ \text{кГц}/2\ \text{кГц} = 0{,}5$.

$N = 3{,}3/\Delta f = 6{,}6 \approx 7$.

З урахуванням симетрії імпульсної характеристики фільтра його коефіцієнти будуть дорівнювати

$$h(n) = h_D(n)w(n), \qquad |n| = 0{,}1{,}2{,}3.$$

Внаслідок ефекту змазування характеристик фільтра, який вводиться ваговою функцією, частота зрізу отримуваного фільтра буде відрізнятися від наданої у специфікації. Щоб врахувати цей факт, як частота зрізу використовується центр смуги переходу

$$f_c' = f_c + \Delta f/2 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\ [\text{кГц}] = 1{,}5\ \text{кГц}/2\ \text{кГц} = 0{,}75.$$

Розрахуємо коефіцієнти фільтра:

1. $n = 0$: $h_D(0) = 2f_c' = 2 \times 0{,}75 = 1{,}5$;
   $w(0) = 0{,}54 + 0{,}46 \times \cos(0) = 1$;
   $h(0) = 1{,}5 \times 1 = 1{,}5$.

2. $n = 1$: $h_D(1) = 2f_c' \sin(2\pi f_c')/2\pi f_c' = \sin(1{,}5\pi)/\pi \approx -0{,}32$;
   $w(1) = 0{,}54 + 0{,}46 \times \cos(2\pi/7) \approx 0{,}83$;
   $h(1) = -0{,}32 \times 0{,}83 \approx -0{,}26$.

3. $n = 2$: $h_D(1) = 2f_c' \sin(4\pi f_c')/4\pi f_c' = \sin(3\pi)/2\pi \approx 0$;
   $w(1) = 0{,}54 + 0{,}46 \times \cos(4\pi/7) \approx 0{,}44$;
   $h(1) = 0 \times 0{,}44 \approx 0$.

4. $n = 3$: $h_D(1) = 2f_c' \sin(6\pi f_c')/6\pi f_c' = \sin(4{,}5\pi)/3\pi \approx 0{,}11$;
   $w(1) = 0{,}54 + 0{,}46 \times \cos(6\pi/7) \approx 0{,}13$;
   $h(1) = 0{,}11 \times 0{,}13 \approx 0{,}013$.

Індекси коефіцієнтів фільтра пробігають значення від $n = -3$ до $n = 3$. Необхідною умовою реалізації є те, щоб фільтр був причинним. Для цього коефіцієнти фільтра перенумеровуються від $n = 0$ до $n = 6$:

$h(0) = 0{,}013;$
$h(1) = 0;$
$h(2) = -0{,}26;$
$h(3) = 1{,}5;$
$h(4) = -0{,}26;$
$h(5) = 0;$
$h(6) = 0{,}013.$

Отримана імпульсна характеристика фільтра наведена на рис. 3.15.

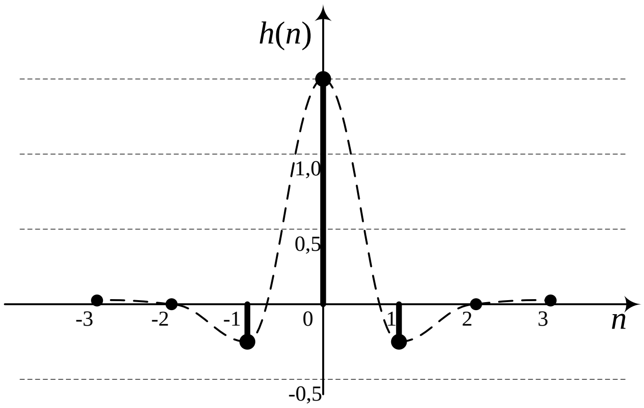


Рис. 3.15. Імпульсна характеристика розробленого фільтра

Прямим ДПФ від імпульсної характеристики фільтра є комплексна частотна характеристика, модуль якої є АЧХ фільтра, а аргумент – ФЧХ:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-i2\pi\frac{kn}{N-1}},$$

а частота першої гармоніки $(k = 1)$ дорівнює

$$F = \frac{1}{(N-1)T} = \frac{F_s}{N-1} = \frac{2\ \text{кГц}}{3} \approx 0{,}33\ \text{кГц}.$$

Результат перетворення дає:

$|H(0)| = 1{,}006;$
$|H(1)| = 1{,}214;$
$|H(2)| = 1{,}786;$
$|H(3)| = 1{,}994;$
$|H(4)| = 1{,}786;$

$|H(5)| = 1{,}214;$
$|H(6)| = 1{,}006.$

Щоб побудувати АЧХ фільтра, знову потрібно змінити нумерацію гармонік від $k = -3$ до $k = 3$. Результат побудови АЧХ фільтра наведено на рис. 3.16.

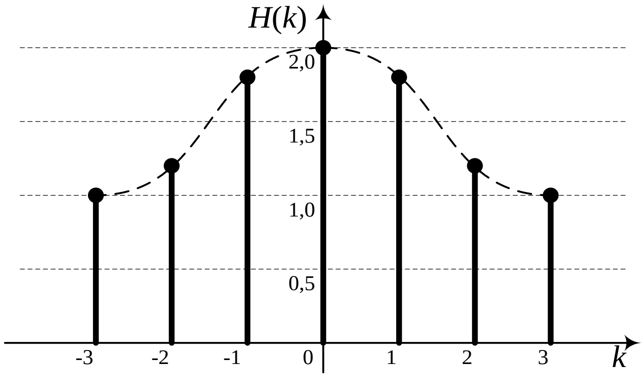


Рис. 3.16. АЧХ розробленого фільтра

Вікно Кайзера має параметр β, який управляє нерівномірністю амплітуди, що дозволяє розробнику грати на компромісах між шириною переходу та нерівномірністю. Функція Кайзера задається формулою

$$w(n) = \begin{cases} I_0\left(\beta\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{2n}{N-1}\right)^2\right]}\right)\Big/ I_0(\beta), & -(N-1)/2 \le n \le (N-1)/2, \\ 0, & \text{інші випадки.} \end{cases}$$

де $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Управляючий параметр β відповідає за спад функції на краях в часовій області.

Для обчислення $I_0(x)$ зазвичай використовують наступне розкладення в ступеневий ряд

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{L}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2,$$

зазвичай $L < 25$.

При $\beta = 0$ функція Кайзера відповідає прямокутній ваговій функції, а при $\beta = 5{,}44$ функція схожа на функцію Хеммінга. Значення β визначає вимоги до затухання у смузі придушення і його можна оцінити за допомогою одного з наведених нижче емпіричних співвідношень

$$\beta = 0, \text{якщо } A \leq 21 \text{ дБ},$$

$$\beta = 0{,}5842(A-21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A-21), \text{якщо } 21 \text{ дБ } < A < 50 \text{ дБ},$$

$$\beta = 0{,}1102(A-8{,}7), \text{якщо } A \geq 50 \text{ дБ},$$

де $A = -20\log(\delta)$ – затухання у смузі придушення, $\delta = \min(\delta_p, \delta_s)$, оскільки нерівномірності у смузі пропускання і у смузі придушення приблизно рівні; δ_p – бажана нерівномірність у смузі пропускання, δ_s – бажана нерівномірність у смузі придушення.

Число коефіцієнтів фільтра підлягає залежності

$$N \geq \frac{A - 7{,}95}{14{,}36\Delta f},$$

де Δf – нормована ширина смуги переходу.

Значення N та β використовуються для обчислення коефіцієнтів функції Кайзера.

Етапи реалізації методу зважування:

1. Задати «ідеальну» чи бажану частотну характеристику фільтра $H_D(\omega)$.
2. Отримати імпульсну характеристику $h_D(n)$ бажаного фільтра, знайшовши для цього Фур'є-образ частотної характеристики.
3. Обрати вагову функцію, яка задовольняє вимогам до смуги пропускання чи затухання, а потім визначити число коефіцієнтів фільтра з використанням підходящого виразу для зв'язку довжини фільтра з шириною переходу.
4. Отримати значення обраної вагової функції $w(n)$ та значення коефіцієнтів реального фільтра $h(n)$, помноживши $h_D(n)$ на $w(n)$.

Фільтр, отриманий таким способом, не є оптимальним – у багатьох випадках інші методи дозволяють отримати аналогічний фільтр з меншим числом коефіцієнтів.

Оптимізаційний метод. Метод обчислення оптимальних (за Чебишовим) коефіцієнтів КІХ-фільтра є надзвичайно потужним, завдяки програмним розробкам його просто застосовувати. Він широко використовується у багатьох сферах.

При використанні методу вирізання виникає проблема вибору вдалої апроксимації бажаної чи ідеальної частотної характеристики. Якщо коливання амплітуди розподілені більш рівномірно у смузі пропускання чи смузі придушення, можна отримати кращу апроксимацію бажаної частотної характеристики.

Оптимізаційні методи засновані на понятті смуг рівних коливань. У смузі пропускання реальна характеристика осилює між значеннями $1-\delta_p$ та $1+\delta_p$. У смузі придушення характеристики фільтра знаходяться між 0 та

δ_s. Відмінність характеристик ідеального та реального фільтрів можна розглядати як функцію помилок

$$E(\omega) = W(\omega)[H_D(\omega) - H(\omega)],$$

де $H_D(\omega)$ – ідеальна чи бажана характеристика, $W(\omega)$ – вагова функція, яка дозволяє визначити відносну помилку апроксимації між різними смугами.

Мета оптимального метода – визначення коефіцієнтів фільтра $h(n)$, при яких значення максимальної зваженої помилки $|E(\omega)|$ мінімізується у смузі пропускання і у смузі придушення:

$$\min\left(\max|E(\omega)|\right)$$

за смугами пропускання і придушення.

Було встановлено, що при мінімізації $\max|E(\omega)|$ характеристики фільтра будуть мати рівні коливання в межах смуг пропускання і придушення, причому модуль максимального відхилення буде постійним, і характеристика буде проходити між двома рівнями амплітуди з чергуванням знаку відхилення.

Наприклад, у ФНЧ з лінійною фазовою характеристикою є $r+1$ чи $r+2$ екстремумів, де $r = (N+1)/2$ для фільтрів типу 1 чи $r = N/2$ для фільтрів типу 2. Частоти екстремумів зображені маленькими кружечками на рис. 3.17.

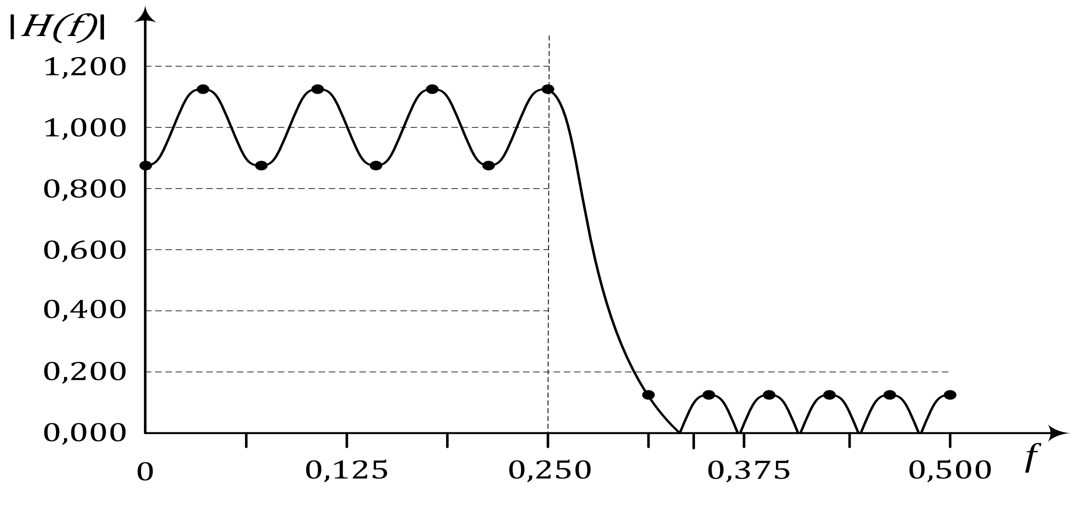


Рис. 3.17. Частоти екстремумів частотної характеристики ФНЧ

При даному наборі специфікацій розміщення екстремальних частот, крім тих, що розміщені на межі смуг (тобто $f = f_p$ та $f = F_s/2$), не відомі апріорі.

Основна задача оптимального метода – знайти положення екстремальних частот. Для рішення цієї задачі розроблено потужний метод на основі алгоритму заміни Ремеза (*англ.* Remez exchange algorithm).

Оптимальний метод включає наступні ключові етапи:

- використати алгоритм заміни Ремеза, щоб знайти оптимальний набір екстремальних частот;
- визначити частотну характеристику, використавши положення екстремумів;
- отримати коефіцієнти імпульсної характеристики.

Для визначення екстремальних частот фільтра використовується ітеративна процедура. Даний етап залежить від теореми про диз'юнкцію, яка визначає число екстремальних частот, які можуть існувати при даному значенні N.

Спрощена функціонально схема оптимального метода наведена на рис. 3.18.

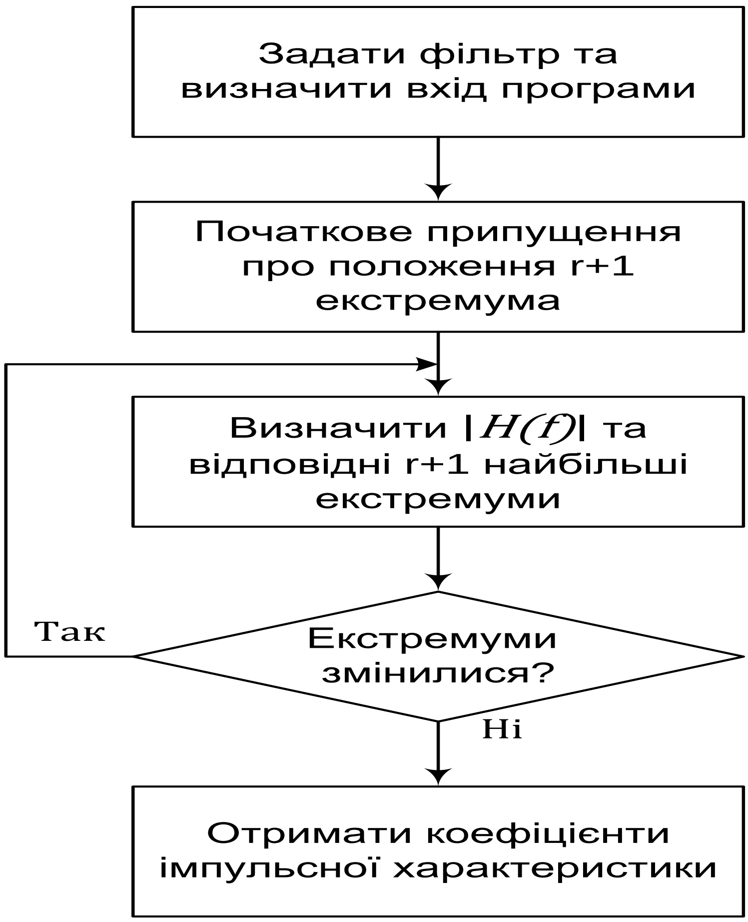


Рис. 3.18. Спрощена функціонально схема оптимального метода

Коефіцієнти фільтра на практиці можна оцінити за наступними співвідношеннями. Для ФНЧ

$$N \approx \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F} - f(\delta_p, \delta_s)\Delta F + 1,$$

де ΔF – ширина смуги пропускання, нормована на частоту дискретизації,

$$\begin{gathered}D_\infty(\delta_p,\delta_s)=\\=\log\delta_s\left[a_1(\log\delta_p)^2+a_2\log\delta_p+a_3\right]+\\+\left[a_4(\log\delta_p)^2+a_5\log\delta_p+a_6\right],\\f(\delta_p,\delta_s)=11{,}01217+0{,}51244[\log\delta_p-\log\delta_s],\\a_1=5{,}309\times10^{-3},a_2=7{,}114\times10^{-2},\\a_3=-4{,}761\times10^{-1},a_4=-2{,}66\times10^{-3},\\a_5=-5{,}941\times10^{-1},a_6=-4{,}278\times10^{-1}.\end{gathered}$$

Для смугового фільтра (СФ)

$$N\approx\frac{C_\infty(\delta_p,\delta_s)}{\Delta F}-g(\delta_p,\delta_s)\Delta F+1,$$

де

$$\begin{gathered}C_\infty(\delta_p,\delta_s)=\\=\log\delta_s\left[b_1(\log\delta_p)^2+b_2\log\delta_p+b_3\right]+\\+\left[b_4(\log\delta_p)^2+b_5\log\delta_p+b_6\right],\\g(\delta_p,\delta_s)=-14{,}61\log\left(\frac{\delta_p}{\delta_s}\right)-16{,}9,\\b_1=0{,}01201,b_2=0{,}09664,\\b_3=-0{,}51325,b_4=0{,}00203,\\b_5=-0{,}5795,b_6=-0{,}44314.\end{gathered}$$

Етапи реалізації оптимального методу:

1. Задати граничні частоти смуг, нерівномірність у смузі пропускання та затухання у смузі придушення, частоту дискретизації.
2. Нормувати кожну граничну частоту та ширину смуги переходу, розділивши їх на частоту дискретизації.
3. Використовуючи нерівномірність у смузі пропускання та затухання у смузі переходу оцінити розрядність фільтра N. Зазвичай значення N береться на 2-3 більше, ніж значення, отримане із рівнянь.
4. Отримати вагові коефіцієнти для кожної смуги із відношення коливань у смузі пропускання і придушення, виражені у звичайних одиницях. Вагові коефіцієнти кожної смуги зручно надавати цілими числами.
5. За допомогою алгоритму заміни Ремеза за значеннями N, граничних частот та вагових коефіцієнтів для кожної смуги отримати

підходящу щільність сітки.

6. Перевірити нерівномірність у смузі пропускання та затухання у смузі придушення на відповідність специфікаціям.

7. Якщо специфікації не задовольняються, збільшити значення N та повторити етапи 5 і 6, доки відповідність не буде досягнута. Отримати та перевірити частотну характеристику, щоб вона задовольняла специфікаціям.

3.2.2. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТІВ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Білінійний метод є самим важливим методом отримання коефіцієнтів НІХ-фільтра. В ньому для перетворення характеристики аналогового фільтра $H(s)$ в характеристику еквівалентного цифрового фільтра застосовується наступна білінійна заміна:

$$s = k\frac{z-1}{z+1}, k = 1 \text{ чи } \frac{2}{T}.$$

Наведене перетворення відбиває аналогову передаточну функцію $H(s)$, записану у s-площині, в дискретну передаточну функцію $H(z)$ комплексної площини.

На жаль, пряма заміна s в $H(s)$, як це наведена у формулі вище, може призвести до отримання ЦФ з небажаною характеристикою. Якщо провести заміну $z = e^{i\omega T}$ та $s = i\omega'$, знаходимо, що аналогова частота ω' та цифрова частота ω пов’язані співвідношенням

$$\omega' = k\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right), k = 1 \text{ чи } \frac{2}{T}.$$

Ця залежність схематично зображена на рис. 3.19.

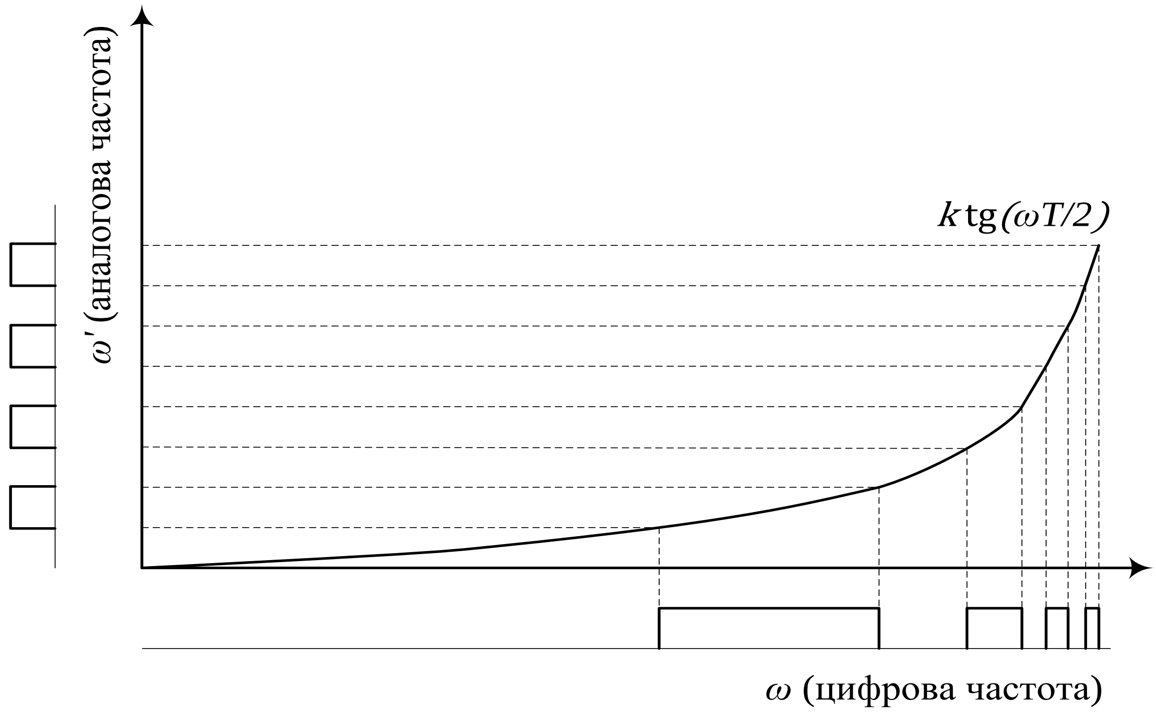


Рис. 3.19. Зв'язок між аналоговими та цифровими частотами

Зв'язок аналогової частоти з цифровою майже лінійний при малих значеннях, але стає виражено нелінійним при великих значеннях частоти, що призводить до деформації цифрової частотної характеристики. Для компенсації цього ефекту аналоговий фільтр зазвичай попередньо деформують перед застосуванням білінійного перетворення. Наприклад, при розробці ФНЧ попередній деформації частота зрізу чи гранична частота

$$\omega_p' = k\tan\left(\frac{\omega_p T}{2}\right), k = 1 \text{ чи } \frac{2}{T},$$

де ω_p – задана частота зрізу, ω_p' – попередньо деформована частота зрізу, T – період дискретизації.

Для стандартних НІХ-фільтрів можна наступним чином узагальнити етапи використання білінійного z-перетворення:

1. На основі специфікації цифрового фільтра визначити підходящий нормований аналоговий фільтр-прототип з передаточною функцією $H(s)$.

2. Визначити та деформувати граничні чи критичні частоти потрібного фільтра. Для ФНЧ та ФВЧ існує єдина гранична частота – частота зрізу. Для СФ та РФ маємо верхню та нижню граничні частоти смуги пропускання ω_{p1} та ω_{p2}, кожну з яких потрібно деформувати:

$$\omega_{p1}' = k\tan\left(\frac{\omega_{p1} T}{2}\right), \omega_{p2}' = k\tan\left(\frac{\omega_{p2} T}{2}\right).$$

3. Деформувати аналоговий фільтр-прототип, замінивши s в передаточній функції за допомогою одного з наступних перетворень:

$$s = \frac{s}{\omega_p'} \text{ (аналоговий ФНЧ в ЦФНЧ)},$$
$$s = \frac{\omega_p'}{s} \text{ (аналоговий ФНЧ в ЦФВЧ)},$$
$$s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{W_s} \text{ (аналоговий ФНЧ в ЦСФ)},$$
$$s = \frac{W_s}{s^2 + \omega_0^2} \text{ (аналоговий ФНЧ в ЦРФ)}.$$

Тут $\omega_0^2 = \omega_{p2}' \omega_{p1}'$, $W_s = \omega_{p2}' - \omega_{p1}'$.

4. Застосувати білінійне z-перетворення та отримати передаточну функцію потрібного ЦФ $H(z)$, наступним чином замінивши s у масштабованій передаточній функції $H'(z)$:

$$s = \frac{z-1}{z+1}.$$

Потрібно розробити ЦФНЧ, що апроксимує наступну передаточну функцію:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Використовуючи метод білінійного z-перетворення, отримати передаточну функцію $H(z)$ ЦФ, якщо частота зрізу по рівню 3 дБ дорівнює 150 Гц, а частота дискретизації дорівнює 1,28 кГц.

Рішення:

Використовуючи критичну частоту $\omega_p = 2\pi \times 150$ рад/с та $F_s = 1/T = 1{,}28$ кГц, отримаэмо наступну деформовану критичну частоту:

$$\omega_p' = \tan\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) = 0{,}3857.$$

Масштабований аналоговий фільтр характеризується функцією

$$H'(s) = H(s)|_{s=s/\omega_p'} = \frac{1}{\left(s/\omega_p'\right)^2 + \sqrt{2}\left(s/\omega_p'\right) + 1} = \frac{{\omega_p'}^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_p' s + {\omega_p'}^2} =$$
$$= \frac{0{,}1488}{s^2 + 0{,}5455s + 0{,}1488}.$$

Після застосування білінійного перетворення отримаємо такий результат:

$$H(z) = H'(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0{,}0878z^2 + 0{,}1756z + 0{,}0878}{z^2 - 1{,}0048z + 0{,}3561} =$$
$$= \frac{0{,}0878(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1{,}0048z^{-1} + 0{,}3561z^{-2}}.$$

3.3. ОСНОВИ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ

3.3.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

По суті, адаптивний фільтр (АФ) – це ЦФ із характеристиками, що самоналаштовуються. Такий фільтр автоматично адаптується до зміни вихідних сигналів та притаманний області адаптивної обробки сигналів.

У багатьох застосуваннях часто виникає така проблема, як забруднення корисного сигналу небажаним сигналом чи шумом. Для їх розділення застосовується звичайна лінійна фільтрація, але коли спектри сигналу та шуму перекриваються, коли смуга шумових частот невідома чи змінна, коефіцієнти фільтра теж повинні змінюватися.

Найбільш типові застосування АФ в телекомунікації є:

1. У цифровому зв’язку існує метод розширення спектру, який використовується в умовах, коли сильна активна завада може корелюватися з корисним сигналом. Інтерференція часто виникає у вузькій, але невідомій смузі частот в широкосмуговому спектрі, і єдиним ефективним рішенням цієї проблеми є АФ.

2. Цифрова передача даних телефонними каналами на високій швидкості. Спотворення сигналу, викликане поганими амплітудною та фазовою характеристикою каналів, призводить до того, що імпульси, які представляють різні цифрові коди, взаємопов’язані між собою (міжсимвольна інтерференція), що ускладнює надійне детектування кодів у приймачі. Для компенсації внесеного каналом спотворення, яке може бути змінним чи невідомим, використовують адаптивне вирівнювання.

АФ отримується наступним чином: його частотна характеристика автоматично регулюється чи модифікується для покращення продуктивності фільтра у відповідності з деяким критерієм, що дозволяє фільтру адаптуватися до змін характеристик вхідного сигналу.

АФ складається з двох різних частин: ЦФ з коефіцієнтами, що регулюються, та адаптивного алгоритму, який використовується для налаштування чи зміни коефіцієнтів фільтра (рис. 3.20).

На АФ одночасно подаються два сигнали, y_k та x_k. Сигнал y_k забруднений і містить корисний сигнал s_k і шум n_k, причому передбачається, що ці сигнали не корелюють. Сигнал x_k – це міра забруднення сигналу, який корелює з шумом n_k. У ЦФ сигнал x_k обробляється для отримання оцінки шуму $\hat{n}_k$. Потім корисний сигнал оцінюється як різниця зашумованого сигналу y_k та виходу ЦФ:

$$\hat{s}_k = y_k - \hat{n}_k = s_k + n_k - \hat{n}_k.$$

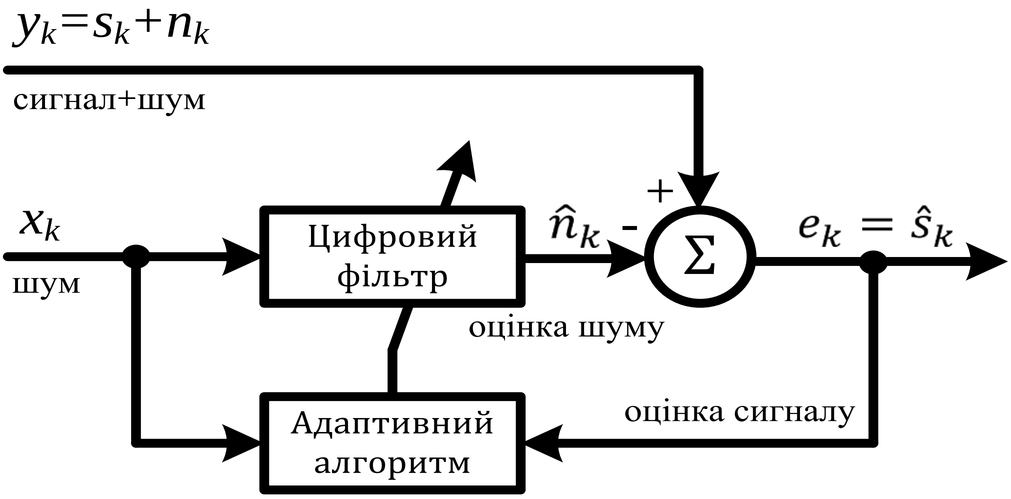


Рис. 3.20. Блок-схема адаптивного фільтра

Основна мета шумопридушення полягає в отриманні оптимальної оцінки шуму в зашумованих сигналах, отже, оптимальної оцінки бажаного сигналу. Для цього $\hat{s}_k$ подається в ланцюг зворотного зв'язку і на основі цього сигналу та підходящого адаптивного алгоритму регулюються коефіцієнти ЦФ для мінімізації шуму в сигналі $\hat{s}_k$.

Вихідний сигнал $\hat{s}_k$ використовується двояко:
1) як оцінка бажаного сигналу;
2) як сигнал помилки, який застосовується для регулювання коефіцієнтів фільтра.

У більшості адаптивних систем такий фільтр реалізований з використанням трансверсальної структури чи схеми КІХ-фільтра. Вихід такого N-точкового фільтра виражається наступним чином

$$\hat{n}_k = \sum_{i=0}^{N-1} w_k(i) x_{k-i},$$

де $w_k(i)$, $i = 0,1,\ldots$ - коефіцієнти фільтра, що регулюються (вагові коефіцієнти), x_{k-i}, $\hat{n}_k$ – вхід та вихід фільтра відповідно.

Для налаштування коефіцієнтів фільтра використовуються адаптивні алгоритми, в яких сигнал помилки e_k мінімізується відповідно деякому критерію, наприклад, за схемою МНК.

Найбільшого розповсюдження отримали алгоритми за схемою МНК, рекурсивною схемою чи фільтр Калмана. Схема МНК найбільш ефективна з точки зору обчислювальної складності та вимог до пам'яті. Також для неї несуттєва проблема чисельної нестійкості. Але рекурсивна схема має кращу збіжність.

3.3.2. ОСНОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Багато які адаптивні алгоритми можна розглядати як апроксимацію дискретного фільтра Вінера (рис. 3.21).

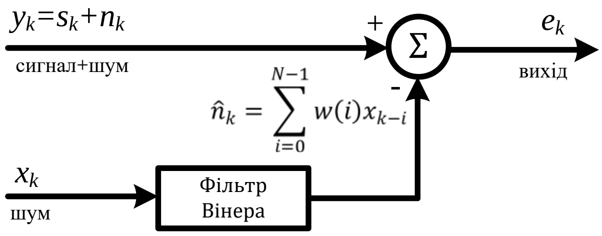


Рис. 3.21. Стандартна форма фільтра Вінера

Фільтр Вінера видає оптимальну оцінку тієї частини y_k, яка корелює з x_k, потім ця оцінка віднімається від y_k та отримується e_k.

Припустимо, що використовується КІХ-фільтр з N коефіцієнтами. Помилка e_k між виходом фільтра Вінера та початковим сигналом y_k записується як

$$e_k = y_k - \hat{n}_k = y_k - \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}_k = y_k - \sum_{i=0}^{N-1} w(i) x_{k-i},$$

де $\boldsymbol{X}_k$ та $\boldsymbol{W}$ – вектор вхідного сигналу та вектор коефіцієнтів відповідно, які мають вид

$$\boldsymbol{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-(N-1)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix}.$$

Квадрат помилки дорівнює

$$e_k^2 = y_k^2 - 2 y_k \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{W}.$$

Щоб отримати середньоквадратичну помилку, потрібно знайти математичне сподівання обох частин рівняння, припустивши, що вектор входу $\boldsymbol{X}_k$ та сигнал y_k сумісно стаціонарні:

$$E[e_k^2] = E[y_k^2] - 2E[y_k \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{W}] + E[\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{W}] = \sigma^2 + 2\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{W},$$

де $E[\cdot]$ – знак математичного сподівання, $\sigma^2 = E[y_k^2]$ – дисперсія y_k, $\boldsymbol{P} = E\left[y_k \boldsymbol{X}_k\right]$ – N-компонентний вектор взаємної кореляції, $\boldsymbol{R} = E[\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{X}_k^T]$ – автокореляційна матриця $N \times N$.

Графік залежності середньоквадратичної помилки від коефіцієнтів $\boldsymbol{W}$ – це чашоподібна поверхня з однозначно визначеною нижньою точкою. Дана поверхня зветься *поверхнею продуктивності* і вона невід’ємна (рис. 3.22). Її градієнт записується як

$$\nabla = \frac{dE[e_k^2]}{d\boldsymbol{W}} = -2\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{W}.$$

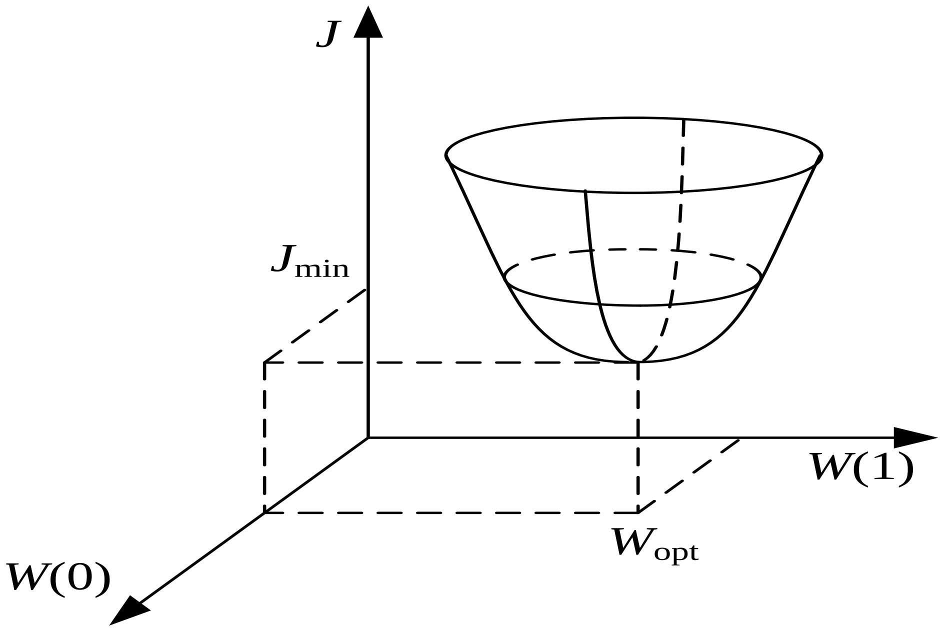


Рис. 3.22. Поверхня продуктивності

Кожний набір коефіцієнтів $w(i)$, $i = 0,1,\dots,N-1$ відповідає точці на поверхні. В точці мінімуму градієнт дорівнює нулю і вектор вагових коефіцієнтів фільтра досягає оптимального значення $\boldsymbol{W}_{opt}$:

$$\boldsymbol{W}_{opt} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{P}.$$

Ця формула називається рівнянням Вінера-Хопфа. Задача адаптивної фільтрації полягає в налаштуванні вагових коефіцієнтів $w(0)$, $w(1)$, … за допомогою підходящого алгоритму до досягнення оптимальної точки на поверхні продуктивності.

Практичне використання вінерівських фільтрів обмежене наступними недоліками:

- необхідно застосування автокореляційної матриці $\boldsymbol{R}$ та вектора взаємної кореляції $\boldsymbol{P}$, причому обидві величини апріорі невідомі;
- фільтри включають обернення матриць, що є працевитратним процесом;
- якщо сигнали нестаціонарні, то $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$ будуть змінюватися з часом, так що $\boldsymbol{W}_{opt}$ доведеться обчислювати багатократно.

У додатках реального часу $\boldsymbol{W}_{opt}$ потрібно перераховувати в міру надходження вибірок. Використання адаптивних алгоритмів дозволяє не обертати при цьому матриці та не обчислювати явно $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$.

Розглянемо адаптивні алгоритми фільтрації

Алгоритм найменших квадратів. Одним з найбільш вдалих адаптивних алгоритмів є алгоритм найменших квадратів. Замість обчислення $\boldsymbol{W}_{opt}$ за один крок коефіцієнти налаштовуються при послідовній обробці вибірок з мінімізацією середньоквадратичної помилки. Результат рівносильний спуску по поверхні рис. 3.22 до її дна.

Схема найменших квадратів заснована на алгоритмі найскорішого спуску, в якому вектор вагових коефіцієнтів наступним чином оновлюється при обробці вибірок:

$$\boldsymbol{W}_{k+1} = \boldsymbol{W}_k - \mu\nabla_k,$$

де $\boldsymbol{W}_k$ та ∇_k – вектори вагових коефіцієнтів та дійсного градієнта відповідно в k-й момент вибірки; параметр μ визначає стійкість та швидкість збіжності.

Цей алгоритм теж потребує знання $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$, оскільки ці величини необхідні для отримання ∇_k. Алгоритм найменших квадратів – це практичний метод оцінки вагових коефіцієнтів фільтра $\boldsymbol{W}_k$ в реальному часі без обернення матриць чи прямого обчислення авто кореляційної матриці та вектору взаємної кореляції. Алгоритм найменших квадратів Уодроу-Хопфа послідовного оновлення вагових коефіцієнтів записується як:

$$\boldsymbol{W}_{k+1} = \boldsymbol{W}_k + 2\mu e_k \boldsymbol{X}_k,$$

де

$$e_k = y_k - \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}_k.$$

Очевидно, що алгоритм найменших квадратів не потребує апріорних знань статистик сигналу (тобто кореляції $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$), а використовує їхні миттєві оцінки. Вагові коефіцієнти, отримані за допомогою алгоритму найменших квадратів, - це тільки оцінки, які поступово покращуються в міру того, як налаштовуються коефіцієнти та фільтр вивчає характеристики сигналів. В кінці кінців вагові коефіцієнти збігаються до якихось значень. Умова збіжності:

$$0 < \mu > \frac{1}{\lambda_{\max}},$$

де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне значення коваріаційної матриці даних.

На практиці $\boldsymbol{W}_k$ ніколи не досягне теоретичного максимуму (рішення Вінера), а флуктує навколо цього значення (рис. 3.23).

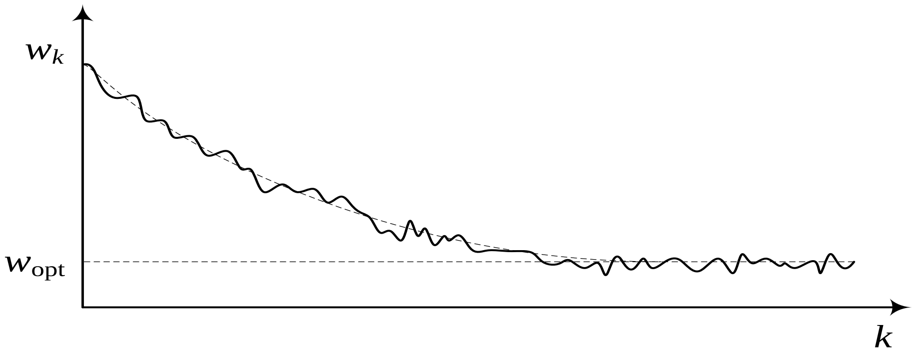


Рис. 3.23. Зміна вагових коефіцієнтів фільтра

Схема обчислень, прийнята в схемі найменших квадратів:

1. Кожному ваговому коефіцієнту $w(i)$, $i = 0,1, \ldots, N-1$ присвоюється довільне фіксоване значення, наприклад 0.
2. Обчислюється вихід фільтра

$$\hat{n}_k = \sum_{i=0}^{N-1} w_k(i) x_{k-i}.$$

3. Обчислюється оцінка помилки

$$e_k = y_k - \hat{n}_k.$$

4. Оновлюється набір вагових коефіцієнтів

$$w_{k+1}(i) = w_k(i) + 2\mu e_k x_{k-i}.$$

Описаний алгоритм потребує $2N + 1$ операцій множення та $2N + 1$ операцій складання для кожного нового набору вхідних та вихідних вибірок.

Функціональна схема алгоритму найменших квадратів наведена на рис. 3.24.

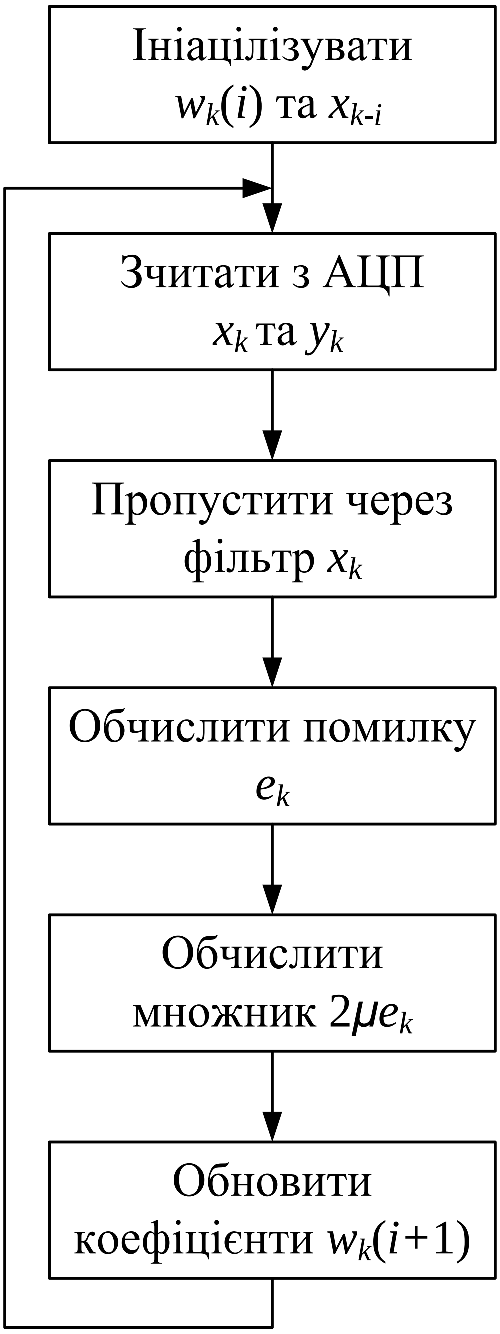


Рис. 3.24. Функціональна схема адаптивної фільтрації за схемою найменших квадратів

Припустимо, що використовується КІХ-фільтр з N коефіцієнтами. Припустимо N=3.

Нехай маємо 12 реалізацій шуму:

$$x_k = (-0{,}4;\ -0{,}2;\ -0{,}4; 0{,}1;\ -0{,}3; 0{,}4; 0{,}2; 0{,}1;\ -0{,}1; 0{,}3;\ -0{,}5; 0{,}1).$$

Нехай маємо відповідні їм 12 реалізацій корисного сигналу + шуму:

$$y_k = (0,6; 1,8; \ -0,4; 3,1; 0,7; 2,4; 0,2; 3,1; 0,9; 2,3; \ -0,5; 3,1).$$

Для наступного порівняння 12 реалізації незашумованого корисного сигналу:

$$y_k - x_k = (1; 2; 0; 3; 1; 2; 0; 3; 1; 2; 0; 3).$$

$$\hat{n}_k = \sum_{i=0}^{N-1} w_k(i) x_{k-i} \,,$$

$$e_k = y_k - \hat{n}_k,$$

$$w_{k+1}(i) = w_k(i) + 2\mu e_k x_{k-1}.$$

Починаємо з моменту часу $k = 0$.
Присвоюємо початкові значення коефіцієнтів фільтра, наприклад :

$w_0(0) = 0,$
$w_0(1) = 0,$
$w_0(2) = 0.$

Для прикладу вважаємо, що параметр збіжності алгоритму $\mu = 0{,}05$.
Обчислюємо вихід фільтра за формулою

$$\hat{n}_0 = \sum_{i=0}^{N-1} w_0(i) x_{0-i}.$$

$$\hat{n}_0 = 0 \cdot (-0{,}4) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Обчислюємо оцінку помилки $e_0 = y_0 - \hat{n}_0$.

$$e_0 = 0{,}6 - 0 = 0{,}6.$$

Перераховуємо вагові коефіцієнти $w_1(i) = w_0(i) + 2\mu e_0 x_{0-i}$.

$w_1(0) = 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot (-0{,}4) = -0{,}024,$
$w_1(1) = 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 0 = 0,$
$w_1(2) = 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 0 = 0.$

Переходимо до наступного дискретного відліку часу $k = 1$.

Обчислюємо вихід фільтра за формулою

$$\hat{n}_1 = \sum_{i=0}^{N-1} w_1(i) x_{1-i}.$$

$$\hat{n}_1 = -0{,}024 \cdot (-0{,}2) + 0 \cdot (-0{,}4) + 0 \cdot 0 = 0{,}0048.$$

Обчислюємо оцінку помилки $e_1 = y_1 - \hat{n}_1$.

$$e_0 = 1{,}8 - 0{,}0048 = 1{,}7952.$$

Перераховуємо вагові коефіцієнти $w_2(i) = w_1(i) + 2\mu e_1 x_{1-i}$.

$$w_2(0) = -0{,}024 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}7952 \cdot (-0{,}2) = -0{,}0599,$$
$$w_2(1) = 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}7952 \cdot (-0{,}4) = -0{,}0718,$$
$$w_2(2) = 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}7952 \cdot 0 = 0.$$

Результати послідовного оновлення вагових коефіцієнтів зведемо в табл. 3.1

Табл. 3.1

k	$y_k - x_k$	x_k	y_k	$\hat{n}_k$	e_k	$w_k(0)$	$w_k(1)$	$w_k(2)$
						0	0	0
0	1	-0,4	0,6	0	0,6	-0,024	0	0
1	2	-0,2	1,8	0,0048	1,7952	-0,0599	-0,07181	0
2	0	-0,4	-0,4	0,038323	-0,43832	-0,04237	-0,06304	0,017533
3	3	0,1	3,1	0,017473	3,082527	-0,01155	-0,18634	-0,04412
4	1	-0,3	0,7	0,002477	0,697523	-0,03247	-0,17937	-0,07202
5	2	0,4	2,4	0,03362	2,36638	0,062184	-0,25036	-0,04835
6	0	0,2	0,2	-0,0732	0,2732	0,067648	-0,23943	-0,05655
7	3	0,1	3,1	-0,06374	3,163742	0,099285	-0,17616	0,069999
8	1	-0,1	0,9	-0,01354	0,913544	0,09015	-0,16702	0,08827
9	2	0,3	2,3	0,052574	2,247426	0,157572	-0,18949	0,110744
10	0	-0,5	-0,5	-0,14671	-0,35329	0,175237	-0,20009	0,114277
11	3	0,1	3,1	0,151854	2,948146	0,204718	-0,3475	0,202721
				-0,13611	0,136111	0,204718	-0,34614	0,195916
				0,019592	-0,01959	0,204718	-0,34614	0,19572

Рекурсивний алгоритм найменших квадратів. Алгоритм заснований на добре відомій схемі найменших квадратів (рис. 3.25).

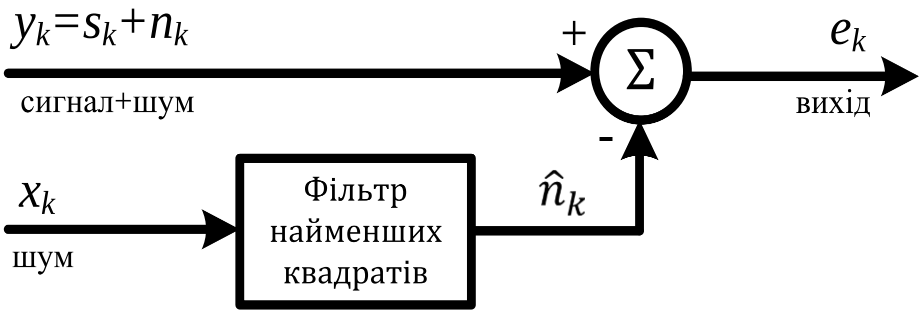


Рис. 3.25. Основна ідея методу найменших квадратів

Вхідний та вихідний сигнали зв'язані регресійною моделлю:

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)x_k(i) + e_k,$$

де e_k – помилка вимірів та інші дефекти, які не можна врахувати; $w(i)$ – доля i-го входу в первинному сигналі y_k.

Задача найменших квадратів формулюється як отримання за даними $x_k(i)$ та y_k оцінок величин від $w(0)$ до $w(n-1)$.

Оптимальні оцінки вагових коефіцієнтів фільтра $w(i)$ визначаються виразом:

$$\boldsymbol{W}_m = [\,\boldsymbol{X}_m^T \boldsymbol{X}_m]^{-\mathbf{1}}\, \boldsymbol{X}_m^T \boldsymbol{Y}_m,$$

де $\boldsymbol{Y}_m$, $\boldsymbol{W}_m$, $\boldsymbol{X}_m$ записуються як

$$\boldsymbol{Y_m} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_m = \begin{bmatrix} x^T(0) \\ x^T(1) \\ \vdots \\ x^T(m-1) \end{bmatrix}, \boldsymbol{W_m} = \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(n-1) \end{bmatrix}.$$

Індекс m вказує, що кожна з наведених вище матриць обчислюється для всіх m інформаційних точок, а через T позначено транспонований вектор.

Оптимальну оцінку $\boldsymbol{W}_m$ можна отримати за допомогою будь-якого зручного методу обернення матриць.

Вихід фільтра записується як

$$\hat{n}_k = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{w}(i)x_{k-i}\,, k = 0,1, \dots, m-1.$$

Обчислення $\boldsymbol{W}_m$ потребує працевитратного обернення матриці, тому алгоритм не підходить для фільтрації в реальному часі. На практиці при отриманні неперервних даних, коли необхідно покращити оцінку $\boldsymbol{W}_m$ за допомогою нових даних, переважно використовують рекурсивні методи. При рекурсивному методі найменших квадратів оцінки $\boldsymbol{W}_m$ можна поновлювати для кожного нового отриманого набору даних без прямого повторного працевитратного обернення матриці.

Рекурсивний алгоритм отримується, якщо враховувати дані з ваговими коефіцієнтами, що експоненціально затухають, щоб поступово усунути вплив старих даних на $\boldsymbol{W}_m$ та дозволити відслідковувати характеристики сигналу, що повільно змінюються.

Таким чином,

$$\boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{W}_{k-1} + \boldsymbol{G}_k e_k.$$

Вводиться

$$\boldsymbol{P}_k = \frac{1}{\gamma}[\boldsymbol{P}_{k-1} - \boldsymbol{G}_k x^T(k)\boldsymbol{P}_{k-1}],$$

де

$$\boldsymbol{G}_k = \frac{\boldsymbol{P}_{k-1}x(k)}{\alpha_k},$$
$$e_k = y_k - x^T(k)\boldsymbol{W}_{k-1},$$
$$\alpha_k = \gamma + x^T(k)\boldsymbol{P}_{k-1}x(k).$$

По суті, введення $\boldsymbol{P}_k$ дозволяє рекурсивно обчислювати зворотну матрицю $[\,\boldsymbol{X}_m^T\boldsymbol{X}_m]^{-\mathbf{1}}$.

Аргумент k використовується, щоб підкреслити той факт, що величини обчислюються в кожний момент отримання вибірки; γ називається *коефіцієнтом забування*.

Якщо покласти $\gamma = 1$, наведена схема зводиться до методу найменших квадратів. Значення γ зазвичай обирається між 0,98 та 1. При менших значеннях найбільш свіжим даним присвоюються надто великі вагові коефіцієнти, що призводить до сильної флуктуації оцінок. Число попередніх вибірок, що вносять значний вклад у $\boldsymbol{W}$ в кожний момент вибірки, називається асимптотичною довжиною та виражається наступною формулою:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Даний вираз ефективно визначає пам’ять фільтра, реалізованого з використанням рекурсивної схеми найменших квадратів. При $\gamma = 1$ фільтр володіє нескінченою пам’яттю.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Які існують два класи цифрових фільтрів?
2. Що таке рекурсивна форма рівнянь зв’язку входу і виходу НІХ-фільтра?
3. Які відносні переваги КІХ- та НІХ-фільтрів?
4. У чому полягає загальний принцип вибору КІХ- чи НІХ-фільтра?
5. Назвіть основні етапи розробки цифрового фільтра.
6. Які основні відомості містить схема допусків фільтра?
7. Наведіть основні широковідомі методи обчислення коефіцієнтів фільтра.
8. Наведіть найважливіші структури КІХ-фільтрів.
9. Наведіть найважливіші структури НІХ-фільтрів.
10. Розкрийте загальний зміст метода вирізання (зважування).
11. Що таке «вагова функція» («функція вікна»), наведіть самі широковживані з них.
12. У чому полягає суть оптимізаційного методу?
13. У чому полягає суть білінійного методу?
14. Як пов’язані аналогова та цифрова частоти при розробці цифрових фільтрів?
15. Що таке адаптивний цифровий фільтр?
16. Із яких основних частин складається адаптивний фільтр?
17. Що являє собою стандартна форма дискретного фільтра Вінера?
18. Що таке «поверхня продуктивності»?
19. Що таке рівняння Вінера-Хопфа?
20. Наведіть загальний зміст алгоритму найменших квадратів Уодроу-Хопфа.
21. Наведіть загальний зміст рекурсивного алгоритму найменших квадратів.
22. Що таке асимптотична довжина вибірки?

4. ПОБУДОВА ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ MATLAB

Система MATLAB (або коротко MATLAB) – це інтерактивна система, призначена для комп’ютерного моделювання практично у будь-якій сфері науки і техніки. Вона була створена в США компанією The MathWorks, Inc., і її розробка для персональних комп’ютерів була представлена на початку 80-х років.

Потужний програмний комплекс MATLAB складається із *чотирьох компонент*: MATLAB, *Simulink*, *Toolbox* и *Blockset*.

Компонент *MATLAB* – це ядро системи — *ядро MATLAB*.

Компонент *Simulink* є підсистемою (розширенням) MATLAB, призначеною для блочного моделювання, однак, завдяки своїм унікальним можливостям, цей компонент часто сприймають як самостійну систему и називають *ядром Simulink*. Слово "simulink" утворено із комбінації перших чотирьох букв слова "simulation" (моделювання) и "link" (поєднувати).

Компоненти *Toolbox* (Набір інструментів) и *Blockset* (Набір блоків) – це *пакети розширення* MATLAB і Simulink відповідно, згруповані за спеціалізованими застосуваннями, призначення яких відображається в їхніх назвах.

4.1. Засоби моделювання в MATLAB R2014b

Специфіка Simulink.

Для моделювання об’єктів та/або процесів в MATLAB передбачені такі засоби:

1. Програмні засоби.

Моделювання *програмними засобами*, під якими розуміють засоби алгоритмічної мови MATLAB, виконується в режимі прямих обчислень або в програмному режимі MATLAB.

Програмні засоби є універсальними, як і інші засоби, що розроблені на їхній основі.

2. Стандартні програми GUI (Graphical User Interface — Графічний інтерфейс користувача).

Моделювання засобами GUI виконується в режимі *інтерактивного спілкування* в середовищі конкретного GUI. Засоби GUI створені на основі програмних засобів MATLAB, але дозволяють виключити використання мови MATLAB у явному вигляді, що істотно спрощує технологію створення моделей, у тому числі і з метою їхнього подальшого використання в командному або програмному режимі MATLAB.

Засоби GUI передбачають знайомство з програмними засобами MATLAB, хоча б, на концептуальному рівні.

3. Засоби Simulink.

Моделювання в Simulink виконується засобами блочного моделювання.

Засоби Simulink створені на основі програмних засобів MATLAB, але дозволяють виключити або мінімізувати використання мови MATLAB у явному вигляді, що істотно спрощує технологію моделювання.

Специфіка моделювання в Simulink визначається його основним призначенням — *моделювання динамічних систем* (Dynamic Systems).

Технологія моделювання в Simulink полягає в побудові моделі системи із стандартних блоків і дозволяє слідкувати за її роботою за допомогою стандартних засобів спостереження, тому моделювання в Simulink часто називають "візуальним".

У більшості застосувань динамічну систему можна фактично або умовно подати як *систему обробки сигналів*, вважаючи, що поняття "сигнал" і "система" мають широке тлумачення, а саме:

під *сигналом* розуміють вплив будь-якої фізичної природи або послідовність даних;

під *системою* розуміють фізичний пристрій або математичне перетворення, що виконує необхідне перетворення впливу.

Комп’ютерна модель динамічної системи будується на основі математичних моделей сигналів та систем.

4.2. УСТАНОВКА І ЗАПУСК SIMULINK

Simulink автоматично встановлюється при встановленні MATLAB R2014b.

При встановленні MATLAB користувач може самостійно формувати комплектацію MATLAB на своєму комп’ютері із тих пакетів розширення, що його цікавлять, помітивши їх прапорцем у вікні **Product and Folder Selection** (Вибір пакетів і папок) у списку **Select Products to install** (Вибір пакетів для інсталяції).

Виключення складають обов’язкові ядро MATLAB і ядро Simulink.

При бажанні можна легко розширити склад системи. Для цього потрібно повторити процедуру установки, помітивши прапорцем додаткові пакети розширення.

Для широкого кола задач, що вирішуються методами цифрової обробки, окрім ядер MATLAB і Simulink, рекомендується встановити пакети розширення MATLAB (*Toolbox*) і *Simulink* (Blockset), перераховані в табл. 4.1. Пакети, що стосуються *Simulink*, виділені сірим кольором.

Таблиця 4.1. *Пакети розширення, що рекомендуються для встановлення MATLAB*

Назва пакета	**Призначення пакета**
Communications Blockset	Системи зв’язку
Communications Toolbox	Системи зв’язку
Control System Toolbox	Системи управління
Curve Fitting Toolbox	Наближення кривих та даних
Filter Design Toolbox	Проектування цифрових фільтрів
Fixed Point Toolbox	Обробка даних з фіксованою точкою

Gauges Blockset	Вимірювальні пристрої
Neural Network Toolbox	Нейронні мережі
Optimization Toolbox	Методи оптимізації
Real-Time Windows Target	Цільові засоби Windows для реального часу
Real-Time Workshop	Лабораторія реального часу
Signal Processing Blockset	Обробка сигналів
Signal Processing Toolbox	Обробка сигналів
Simulink Control Design	Системи управління
Simulink Fixed Point	Обробка даних з фіксованою точкою
Spline Toolbox	Сплайн-функції
Statistics Toolbox	Методи математичної статистики
Symbolic Math Toolbox	Обробка символьних даних
System Identification Toolbox	Методи ідентифікації
Wavelet Toolbox	Вейвлет-функції

Після завершення установки MATLAB на **Робочому столі** автоматично створюється ярлик MATLAB. Для запуска MATLAB достатньо клікнути на цьому ярлику.

Після заставки автоматично відкривається вікно **MATLAB**, що представляє собою *комбінацію вікон* (рис. 4.1), завдяки чому забезпечується оперативність дій користувача при роботі.

Інтерфейс **MATLAB** створюють такі вікна:

Command Window (Командне вікно) — основне вікно інтерактивної Системи MATLAB с активізованим командним рядком;

Current Folder (Поточна папка) — в цьому вікні виводиться вміст папки, ім’я якої відображається в списку **Current Folder** на панелі інструментів вікна **MATLAB**. За замовчуванням поточною вважається папка зі стандартним іменем work, призначена для зберігання файлів та папок, які створюються користувачем;

Workspace (Робоча область пам’яті) — в цьому вікні виводиться список поточних змінних, які зберігаються в робочій області пам’яті Workspace до виходу із MATLAB;

Command History (Історія команд) — в цьому вікні виводиться порядковий список об’єктів мови MATLAB, що вводяться під час поточної та попередніх сесій.

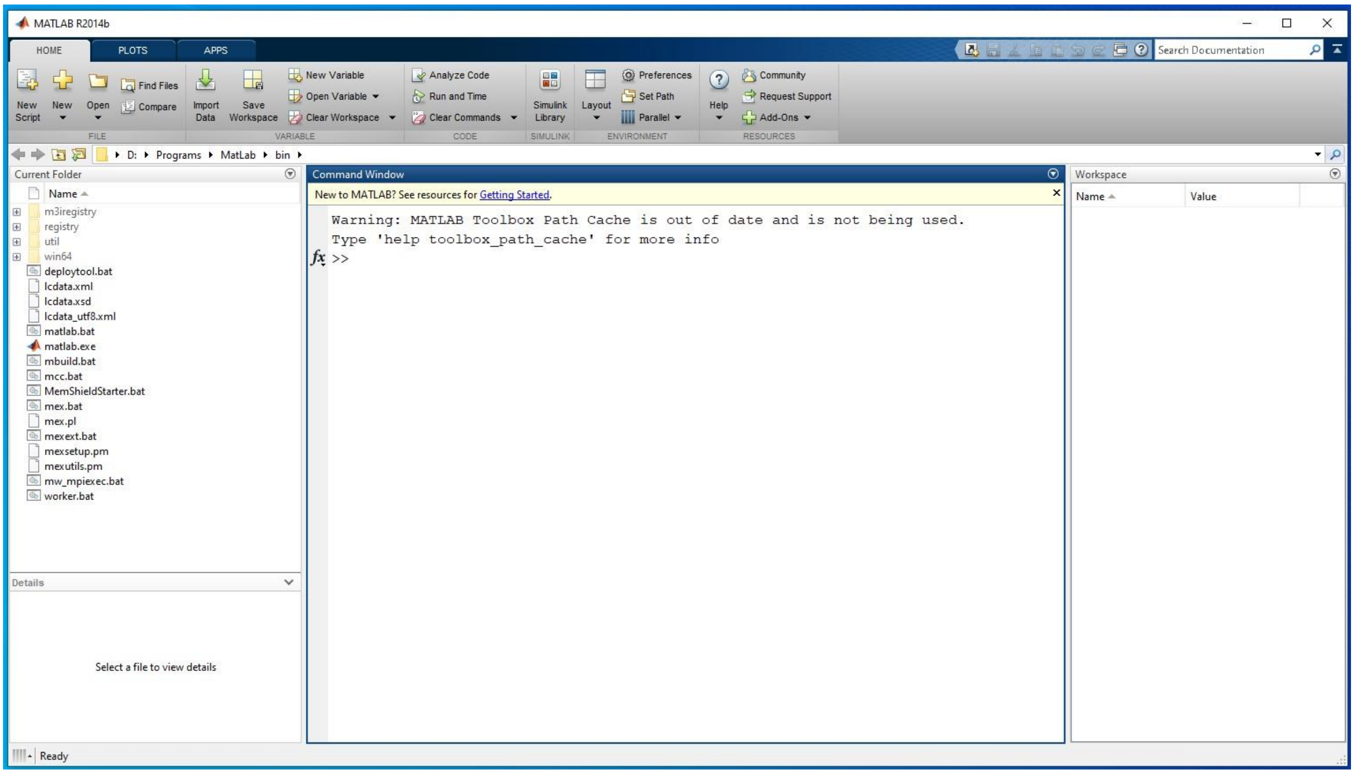


Рис. 4.1. Вікно **MATLAB**

Користувач може довільно змінювати склад активних вікон за допомогою команд пункту меню **Layout**.

Встановлення Simulink призводить до появи кнопки **Simulink Library** на панелі інструментів вікна **MATLAB**.

Запуск Simulink здійснюється одним із способів:

1. За допомогою кнопки **Simulink Library** на панелі інструментів вікна **MATLAB**.

2. По команді в вікні **Command Window**:

Simulink.

4.3. БІБЛІОТЕКА SIMULINK

При запуску Simulink за допомогою кнопки **Simulink Library** або командою Simulink відкривається вікно **Simulink Library Browser** (Каталог Бібліотеки Simulink) (рис. 4.2).

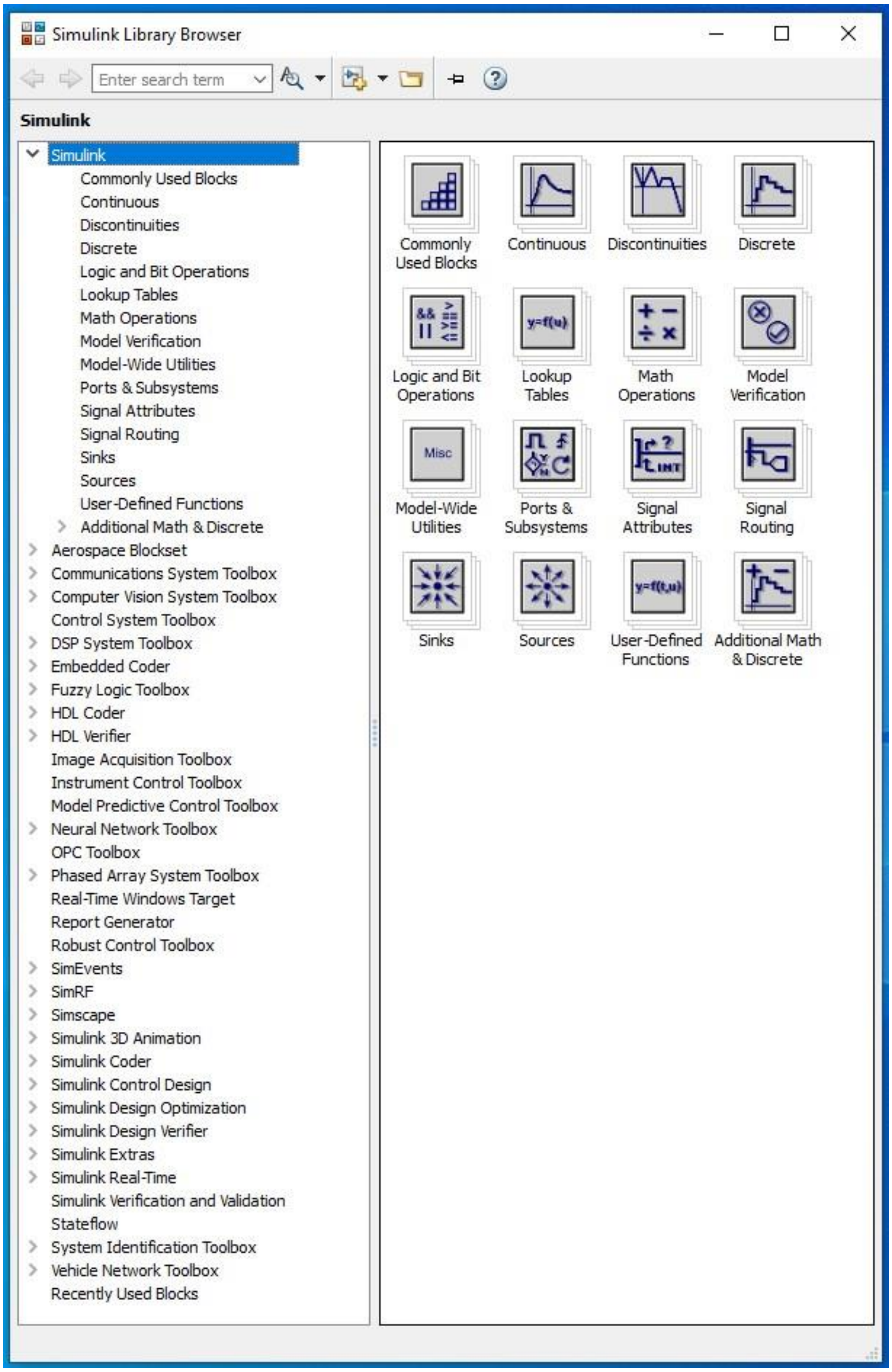


Рис. 4.2. Вікно **Simulink Library Browser**

Інтерфейс даного вікна створюють такі елементи:

- ліва панель Libraries — з каталогом Бібліотеки Simulink (Simulink Library);
- права панель зі значками груп блоків.

Бібліотека Simulink має ієрархічну структуру, подану у вигляді дерева.

На відкритій вкладці **Library…** відображається склад бібліотеки або группи блоків, виділених на лівій панелі **Libraries**. Піктограми *групи* блоків виділяються кольором, а піктограми *блоків* чорно-білі.

Якщо на правій панелі відображаються *групи* блоків, то склад будь-якої з них можемо відкрити подвійним кліком лівої кнопки миші на її піктограмі.

Якщо на правій панелі відображаються *блоки*, то подвійний клік лівої кнопки миші на піктограмі *блока* відкриває вікно його *параметрів* з неактивними полями.

На відкритій вкладці **Search Results** відображаються результати пошуку.

- панель інструментів з кнопками, що дублюють основні команди пунктів головного меню;
- поле введення **Enter search term** (Введіть компонент пошуку),— використовується для пошуку блока за іменем.

Для пошуку *блока* потрібно в поле введення ввести його назву (повну або будь-яку його частину) і натиснути кнопку **Enter**.

На рис. 4.3 показано результати пошуку за введеним словом "filter". Виведені усі блоки та групи блоків, в імені яких присутнє це слово.

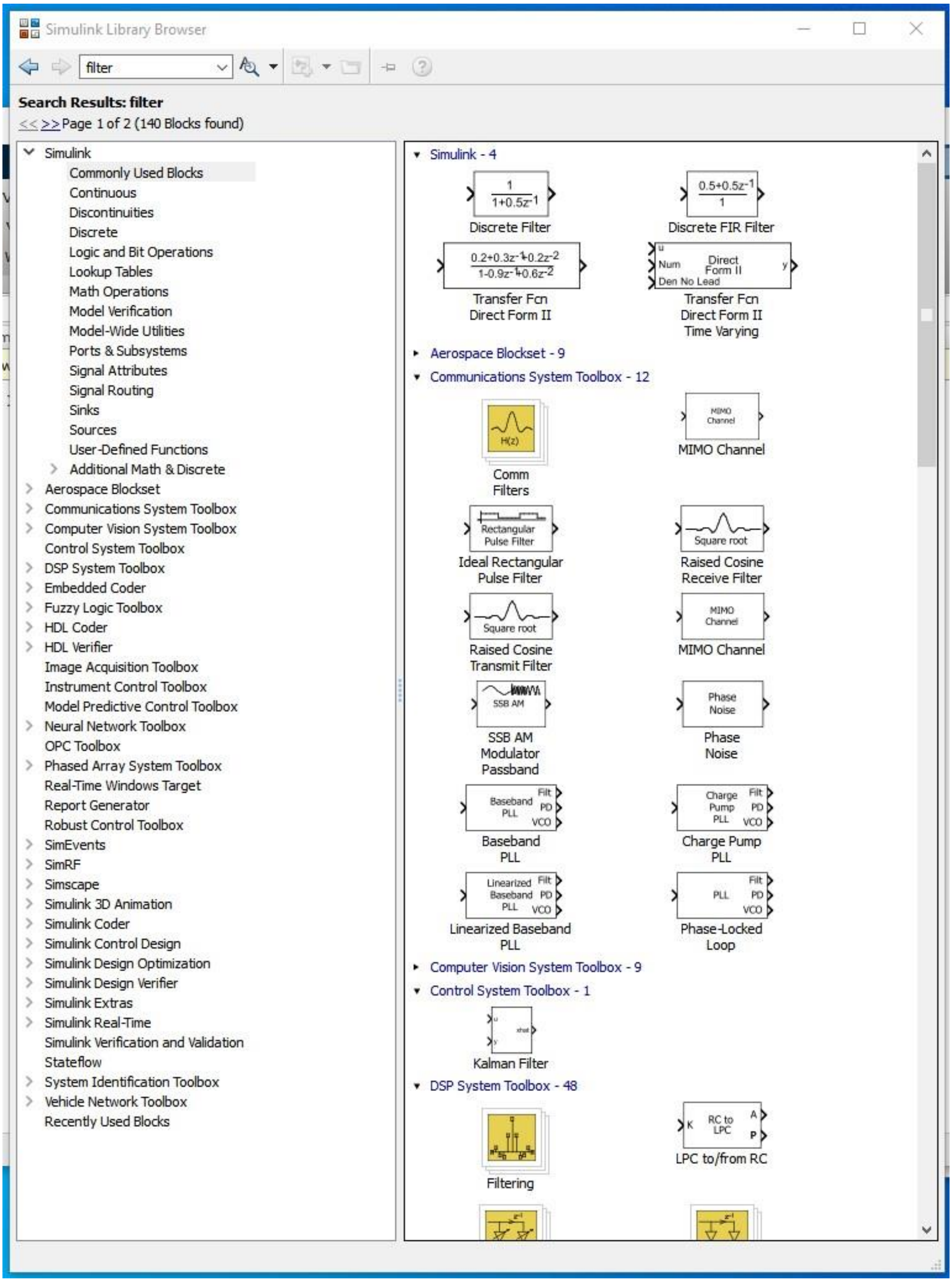


Рис. 4.3. Результати пошуку за словом "filter"

Технологія створення S-моделі Системи

Комп'ютерну модель Системи, яка створена засобами Simulink, називають *S-моделлю Системи* — скорочення від Simulink-модель.

В україномовній літературі в теорії аналогових, дискретних і цифрових систем під поняттям "моделювання Системи" за замовчуванням розуміють моделювання процесу її роботи.

В довідковій системі MATLAB по Simulink поняття "моделювання Системи" (Modeling a System) відноситься більше до *створення* S-моделі Системи (тобто до опису *статичної* Системи засобами Simulink), а для моделювання *процесу роботи* Системи добавляють уточнення - "моделювання *динамічної* Системи" (Modeling a Dynamic System).

Будемо користуватися україномовною термінологією, і в технології моделювання Системи в Simulink розрізнятимемо дві частини:

1. Створення S-моделі Системи.
2. Моделювання Системи.

4.4. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І S-МОДЕЛЬ СИСТЕМИ

Математичною моделлю Системи називають її співвідношення вхід/вихід, яке встановлює зв'язок між вхідним і вихідним сигналами, і в загальному випадку має вигляд операторного рівняння (рис. 4.4):

$$Y=F(X) \tag{4.1}$$

де, X і Y — вектори вхідних і вихідних сигналів відповідно (впливів та реакцій), в окремому випадку — один вхідний і один вихідний сигнали;
F — оператор, який визначає математичне перетворення (лінійне або нелінійне, алгебраїчне або диференційне тощо).

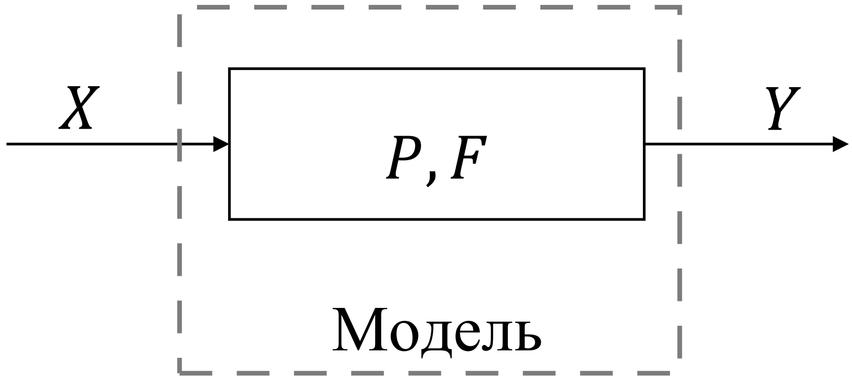


Рис. 4.4. Загальний вигляд математичної моделі

Вид математичної моделі (4.4) визначають два фактора:

1) **Тип Системи**.

Тип Системи визначається типом сигналів, які обробляються. Розрізняють три основних типи систем:

- *аналогові Системи*, які перетворюють аналогові вхідні сигнали в аналогові вихідні сигнали. Аналоговим називають сигнал, неперервний за часом і станом. Такий сигнал описується неперервною або кусочно-неперервною функцією;
- *дискретні Системи*, які перетворюють дискретні вхідні в дискретні вихідні сигнали. Дискретним називають сигнал, дискретний за часом і неперервний за станом. Такий сигнал описується числовою послідовністю;
- *цифрові Системи,* які перетворюють цифрові вхідні в цифрові вихідні сигнали. Цифровим називають сигнал, дискретний за часом і квантований за станом.

Такий сигнал описується квантованою послідовністю.

2) **Математична форма подання оператора *F***.

Математична форма подання оператора F визначається типом системи — *аналогова* або *дискретна*, а також тим, *лінійна* вона чи *нелінійна*.

В *лінійних аналогових* системах оператор *F* має дві універсальні форми подання — згортка (інтеграл) або лінійне диференційне перетворення, а математична модель (4.4) приймає відповідно вигляд формули згортки (інтегрального рівняння) або лінійного диференційного рівняння.

В *лінійних дискретних* системах оператор *F* має також дві універсальні форми подання — згортка (сума) або лінійне різницеве перетворення, а математична модель (4.1) приймає відповідно вигляд формули згортки (лінійного рівняння) або лінійного різницевого рівняння.

В залежності від вигляду математичної моделі *лінійної* Системи параметри оператора *F* однозначно визначаються:

- *імпульсною характеристикою* — для математичної моделі у вигляді формули згортки;
- *передавальною функцією* — для математичної моделі у вигляді диференційного або різницевого рівняння.

В *нелінійних* аналогових і дискретних системах оператор *F* має кілька універсальних форм подання, а математична модель (4.4) набуває вигляду відповідного нелінійного рівняння.

На кінець, мова може йти про систему, що виконує якесь *математичне перетворення* сигналів, коли оператор *F* не має універсальної форми подання, а визначається конкретним перетворенням.

S-модель Системи створюється на основі математичної моделі (4.4).

Для створення S-моделей лінійних систем використовується математична модель, у якій параметри *оператора F* однозначно визначаються *передавальною функцією*, а математична модель Системи (4.4) набуває вигляду *лінійного рівняння*: диференційного для аналогових і різницевого — для дискретних систем.

В *математичній моделі лінійної* Системи можемо виділити три основні складові:

- вхідний сигнал *X*;
- структуру лінійної Системи, яка визначається виглядом її *передавальної функції*;
- вихідний сигнал *Y*.

В *S-моделі лінійної Системи* їм відповідатимуть три різних за своїм функціональним призначенням компоненти:

- S-модель вхідного сигналу *X*;
- S-модель структури лінійної Системи;
- S-модель засобів аналізу вихідного сигналу *Y*.

4.5. ОСНОВНІ ЕТАПИ СТВОРЕННЯ S-МОДЕЛІ Системи

В загальному випадку технологія створення S-моделі Системи включає в себе такі основні етапи:

Відкриття вікна S-моделей.

За командою **New Model** вікна **Simulink Library Browser** (рис. 4.5) відкривається вікно S-моделей **untitled** (безіменне) для створення нової S-моделі Системи (рис. 4.6).

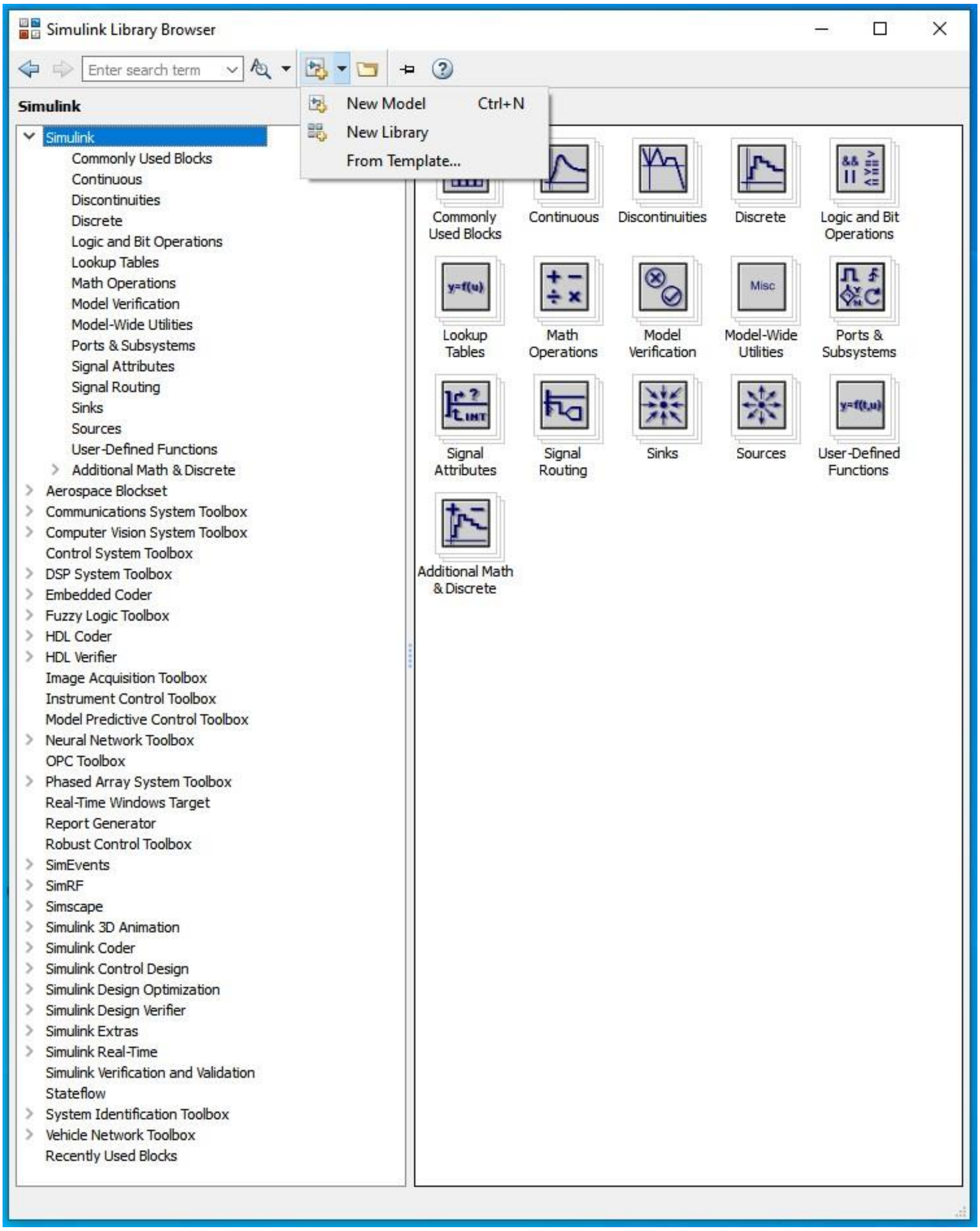


Рис. 4.5. Порядок створення нової S-моделі

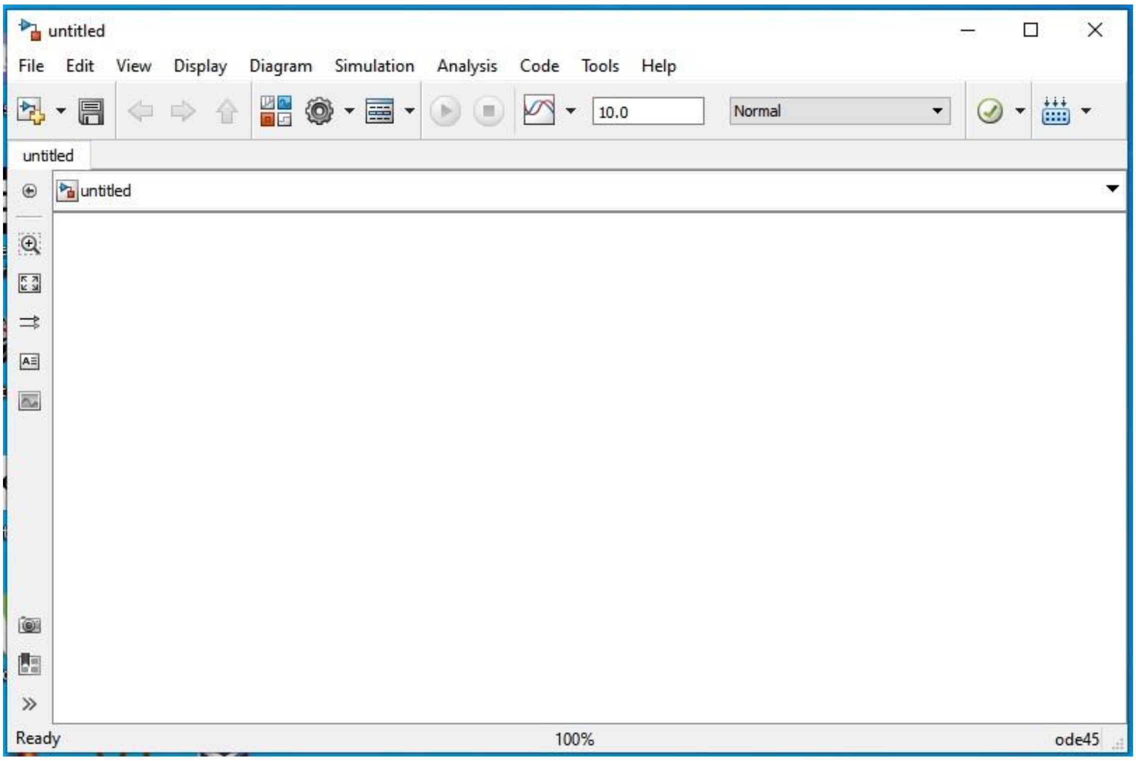


Рис. 4.6. Вікно **untitled** для створення нової S-моделі

Інтерфейс вікна S-моделей відповідає інтерфейсу Windows-додатків.

В рядку стану вікна S-моделей (нижній рядок) відображаються (зліва направо) (див. рис. 4.6):

- стадія моделювання — Ready (Завершено) або Running (Виконання), а в статичному стані при зверненні до команд меню — коротка інформація про обрану команду;

- масштаб S-моделі, за замовчуванням — 100%;

- індикатор процесу моделювання (активний при запуску моделі); - індикатор поточного часу моделювання (активний при запуску моделі);

- вибраний вирішувач.

Перетаскування блоків (компонентів S-моделі Системи) із бібліотеки Simulink.

У вікні **untitled** нова S-модель Системи створюється із блоків бібліотеки Simulink за допомогою технології drag-and-drop ("перетягнути і відпустити"). Вона полягає в послідовному перетягуванні потрібних блоків в вікно S-моделей **untitled** при нажатій левій кнопці миші з правої панелі вікна **Simulink Library Browser**.

Розглянемо приклад.

Перетягнемо у вікно **untitled** блоки, які нам потрібні для створення S-моделей двох найпростіших систем:

- *лінійної аналогової* першого порядку.

Математична модель Системи має вигляд лінійного *диференційного* рівняння першого порядку.

Для прикладу візьмемо найпростішу структуру — *RC*- або *RL*-ланцюг з передавальною функцією:

$$H(S) = \frac{1}{S+1} \qquad (4.2)$$

У якості S-моделі структури Системи виберемо блок Transfer Fcn із групи блоків Continuous;

- *лінійної дискретної першого порядку.*

Математична модель Системи має вигляд лінійного *різницевого* рівняння першого порядку.

Для прикладу візьмемо найпростішу структуру — базову ланку 1-го порядку з передавальною функцією:

$$H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}} \qquad (4.3)$$

У якості S-моделі структури Системи виберемо блок Discrete Filter із групи блоків Discrete.

У якості *S-моделі вхідного сигналу* виберемо блок Step із групи блоків Sources, який генерує *одиничний стрибок* для аналогової Системи і *цифровий одиничний стрибок* для дискретної. При перетаскуванні двох блоків Step для створення в одному вікні **untitled** одночасно двох S-моделей систем, аналогової та дискретної, один із блоків буде мати ім'я Step, а другий — Step1.

У загальному випадку імена усіх блоків S-моделі мають бути унікальними. За замовчуванням однакові блоки розрізняються номерами, що автоматично добавляються до імені в порядку перетаскування блоків.

У якості *S-моделей засобів аналізу вхідного і вихідного сигналів* виберемо блок Scope (осцилограф) із групи блоків Sinks. Аналогічно, при перетаскуванні двох блоків Scope для створення двох S-моделей систем, аналогової і дискретної, один із блоків матиме ім'я Scope, а другий — Scope1.

Блоки, які підготовані для створення S-моделей аналогової і дискретної систем, показані на рис. 4.7.

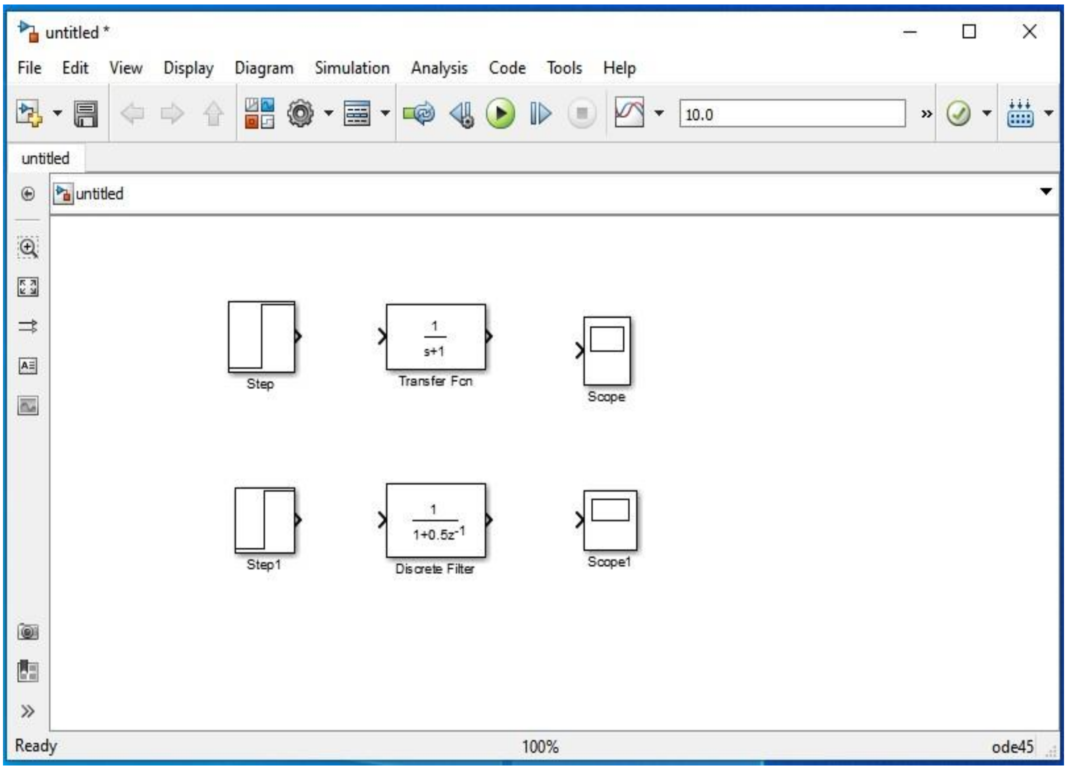


Рис. 4.7. Вікно **untitled** з блоками для створення S-моделей аналогової та дискретної системи

Задавання параметрів блоків.

Параметри блоку, які визначають вигляд сигналу на його виході або налаштування засобів аналізу сигналу, задаються у вікні **Parameters** (Параметри), яке відкривається подвійним кліком лівої кнопки миші на піктограмі блока.

Параметри блока Step для S-моделі аналогової Системи задаємо за замовчуванням, а один із параметрів блока Step1 для S-моделі дискретної Системи змінимо: період дискретизації **Sample Time:** 0.2.

Параметри блока Transfer Fcn задаємо згідно передавальної функції (4.2), а інші — за замовчуванням.

Параметри блока Discrete Filter задаємо згідно передавальної функції (4.3), період дискретизації **Sample Time:** –1, що відповідає наслідуванню періоду дискретизації від блока Step1, інші — за замовчуванням.

Для кожного із блоків Scope и Scope1 встановимо такі параметри:

• **Number of axis** (Кількість осей) рівна 2 для відображення вхідного і вихідного сигналів на двох незалежних графіках (натиснувши на кнопку **Properties** у вікні Scope, рис.4.8);

• **Y-min** і **Y-max** (Границі осей ординат) рівні –1 и 2 відповідно у вкладці Axis properties (рис.4.9), яка викликається правої кнопки миші, підведеної до осі.

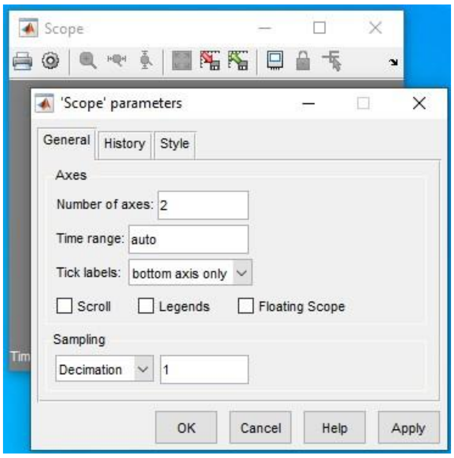


Рис. 4.8. Вікно **Scope parameters**

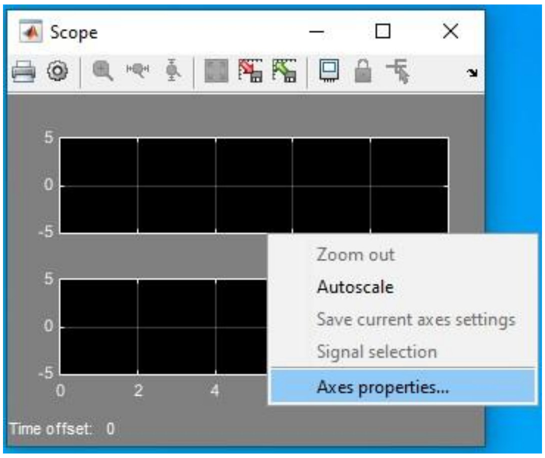


Рис. 4.9. Вкладка **Axis properties**

З’єднання блоків.

З’єднання блоків можемо виконувати вручну або автоматично.

При *ручному* з’єднанні блоків потрібно підвести курсор до виходу блока, який хочемо з’єднати, і, після того як з’явиться хрестик, при нажатій лівій кнопці миші провести прямую лінію до входу відповідного блока. При проведенні ламаної лінії кнопку миші в точках згинів треба відпускати.

При *автоматичному* з’єднанні блоків потрібно виділити блок (клацнувши лівою кнопкою миші), який містить вхід, і при нажатій клавіші <Ctrl> виділити блок, який містить вихід, після чого автоматично буде виконано з’єднання блоків.

Збереження вмісту вікна S-моделей.

Збереження вмісту вікна S-моделей в файл виконується командою меню **File | Save** (Файл | Зберегти). В випадаючому вікні **Save as** (Зберегти як) файлу S-моделей присвоюється ім’я з розширенням slx.

Ім’я файлу може складатися з будь-якої послідовності латинських букв, цифр і символу підкреслювання, та починатися з букви.

Нашому файлу, що містить S-моделі лінійних аналогової та дискретної систем зі з’єднанням блоків, присвоюємо ім’я analog_discrete (рис. 4.10).

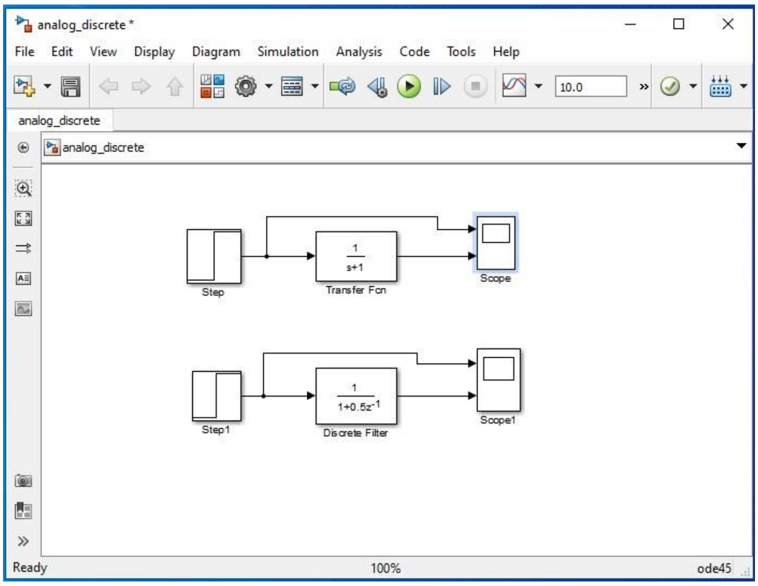


Рис. 4.10. Вікно файлу **analog_discrete** з S-моделями аналогової і дискретної систем

4.6. РЕДАГУВАННЯ S-МОДЕЛІ СИСТЕМИ

Редагування S-моделі Системи виконується в вікні S-моделей.

Операції редагування S-моделі Системи зручно об'єднати у дві групи:

1. Операції з компонентами S-моделі Системи.
2. Операції по оформленню S-моделі Системи.

4.6.1. Операції з компонентами S-моделі Системи

Компонентами S-моделі Системи будемо називати *блоки* і *з'єднання*.

Групою компонентів будемо називати їхню компактну комбінацію.

Групою блоків будемо називати їхню компактну комбінацію *без з'єднань*.

Основні операції в вікні S-моделей з компонентами, групами компонентів і блоків — *операндами* — показано в табл. 4.1. Як зазвичай, основні команди головного меню дублюються в контекстному меню та кнопками на панелі інструментів.

Редагування компонента (групи компонентів або блоків) виконується після його *виділення* кліканням лівої кнопки миші на його зображенні.

Таблиця 4.1. *Основні операції з компонентами, групами компонентів і блоків*

№	Операція	Операнд	Виконання
1	Видалення	Компонент Група компонентів та блоків	Натисненням клавіші Delete або за командою меню Edit | Delete
2	Переміщення	Блок Група компонентів та блоків	Курсором при нажатій лівій кнопці миші Дубльовані блоки автоматично іменуються з номерами 1, 2, …

3	Дублювання	Блок Група компонентів та блоків	Курсором при нажатій правій кнопці миші
4	Вставлення у з’єднання	Блок з одним входом/виходом	Перетаскуванням блока із бібліотеки Simulink (або дублюванням блоку) і встановленням його на з’єднання
5	Відміна операції	Компонент Група компонентів та блоків	За командою Edit | Undo Не відміняє операції зміни розмірів
6	Повернення відміненої операції	Компонент Група компонентів та блоків	За командою Edit | Redo
7	Зміна розмірів	Блок	Курсором, підведеним до одного з маркерів блоку, після появи двонапрямленої діагональної стрілки при нажатій лівій кнопці миші Розмір імені блока не змінюється

4.6.2 Налаштування S-моделі

Налаштування S-моделей проводиться у вікні **Configuration Parameters** (рис.4.11), яке відкривається натисненням на кнопку **Model Configuration Parameters**

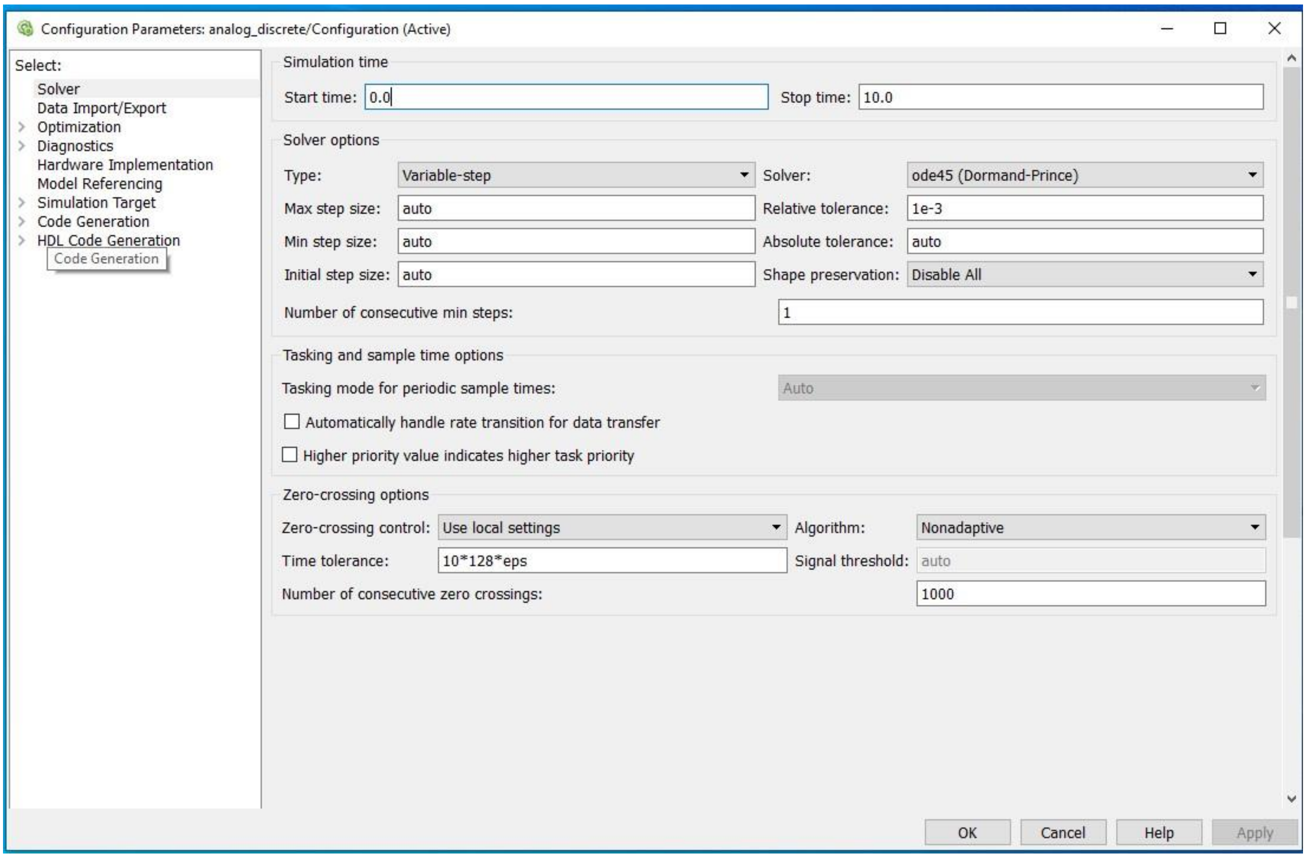


Рис.4.11. Вікно **Configuration Parameters**

4.6.3 Моделювання системи - запуск

Запуск моделювання системи здійснюється натисненням кнопки **Run** на панелі інструментів вікна S-моделей або командою меню **Simulation | Run** (Ctrl+T).

У результаті отримаємо на осцилографі результати моделювання аналогової та дискретної систем (рис. 4.12).

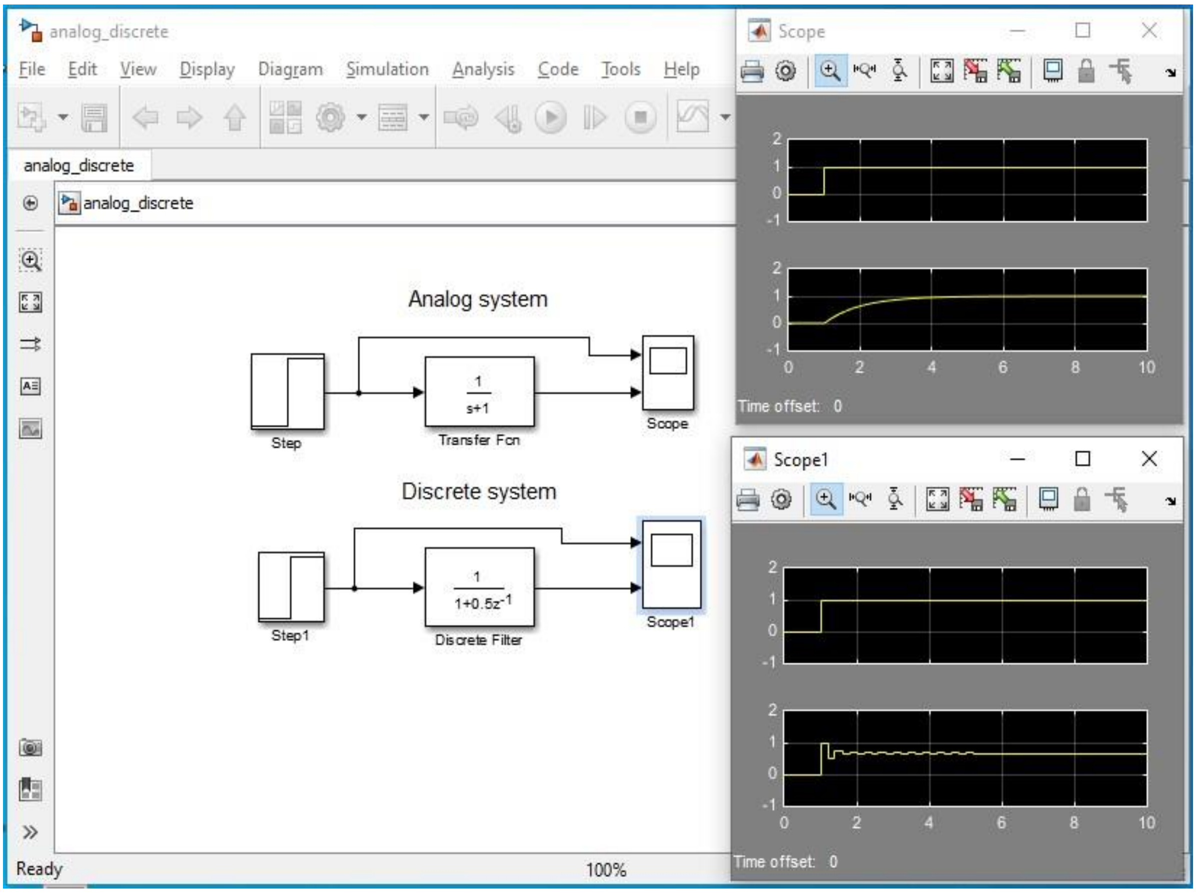


Рис. 4.12. Результати моделювання аналогової та дискретної систем

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

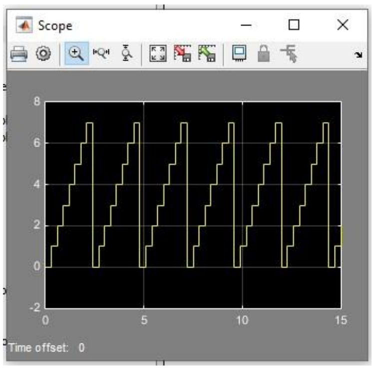
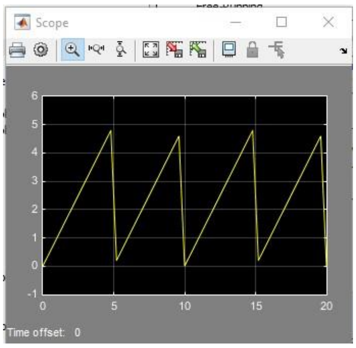
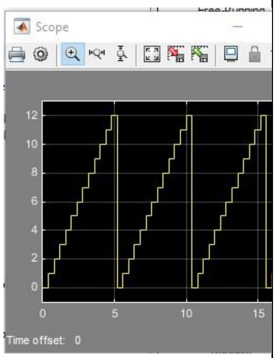
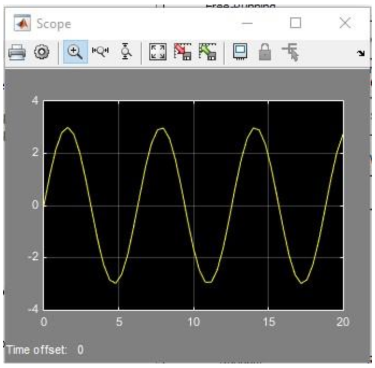
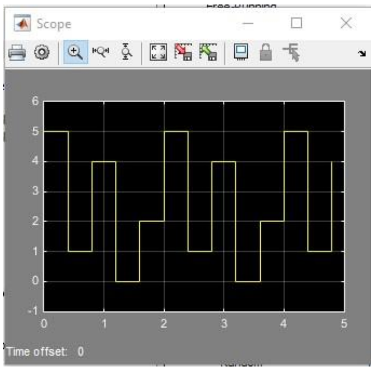
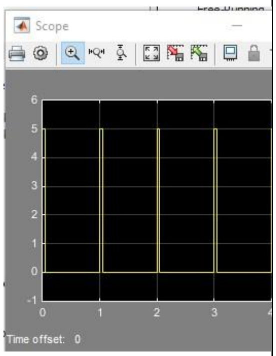
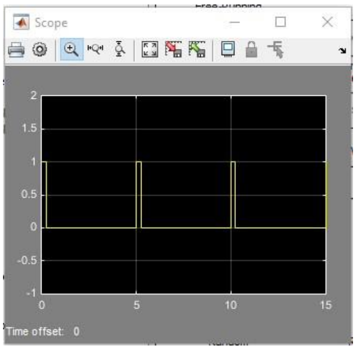
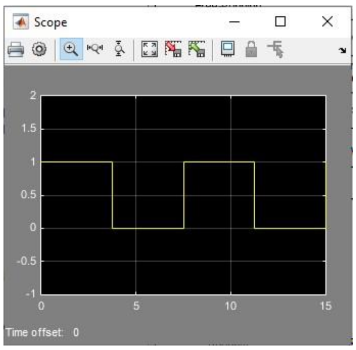
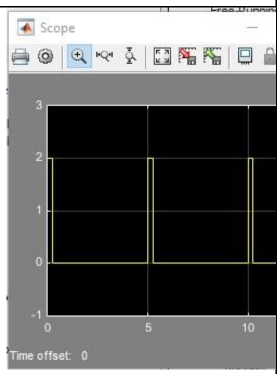
1. **Створити S-модель** системи, вихідні сигнали якої зображено.

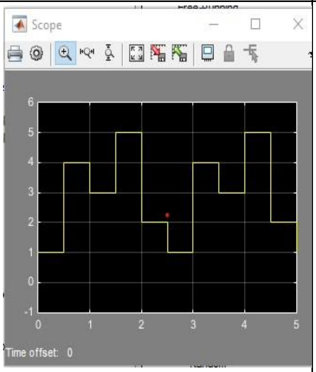
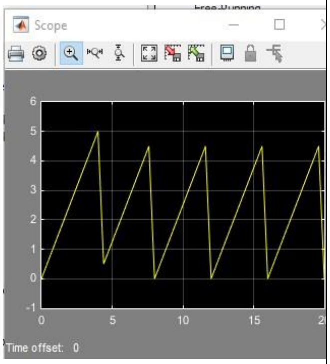
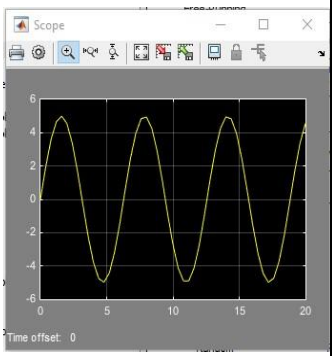
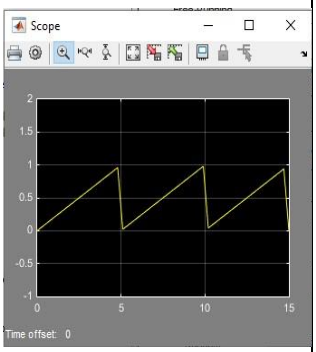
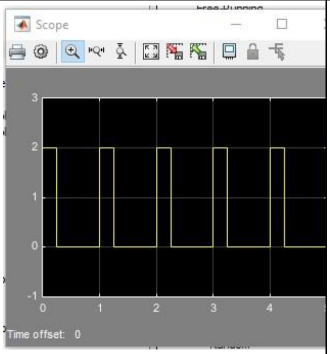
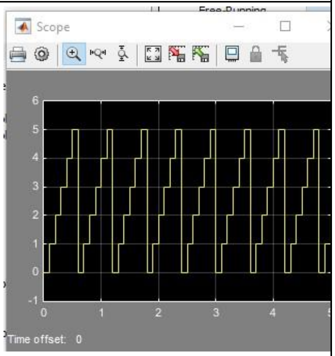
   Усі джерела сигналів знаходяться в групі блоків **Sources**.

   Параметри осей та час моделювання **мають співпадати** з зображеними.

2. **Підписати моделі**, де зазначити прізвище виконавця.

3. **Подати у вигляді .slx-файлу** з іменем С62_XX, де замість XX вказати свій порядковий номер у списку групи.

Варіант	01	02	03
Зображення			
Варіант	04	05	06
Зображення			
Варіант	07	08	09
Зображення			

<table>
<tr><td>Варіант</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Варіант</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дікарев О.В. Цифрова обробка сигналів: Учбово-методичний посібник.- К.:ДУІКТ, 2014. – 115с.
2. Цифрова обробка сигналів в телекомунікаційних системах: підручник / Г. Г. Бортник, В. М. Кичак. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 232 с
3. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 308 с.
4. Жураковський Ю.П., Полторак В.П. Теорія інформації та кодування. –К.: Вища школа, 2001. – 225 с.
5. Фриз М.Є., Стадник М. А Обробка сигналів та зображень / Конспект лекцій з дисципліни.- Тернопіль: ТНТУ, 2015. – 97 с.
6. Заболотній С. В. Цифрове оброблення сигналів: Посібник для студентів напряму підготовки 6.050901 "Радіотехніка" усіх форм навчання [Електронний ресурс] / Авт.-укл. С. В.Заболотній ; За ред. проф. Ю. Г. Леги ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2010. – 119 с.
7. Цифрова обробка інформації: Методичний посібник до лабораторного практикуму для студентів радіофізичного факультету / Колєнов С. О. – Київ: Радіофізичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2008. – 56 с.
8. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Самборський І.І.,
Шолохов С.М.,
Юрченко О.В.
Ніколаєнко Б.А.,

ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Навчальний посібник

Підписано до друку . .2022 р. Зам. _______
Друк. арк. ___ Ум.-друк. арк. ___ Обл.-вид. арк. ___
Формат паперу 60×84 1/16. Тираж 50 прим.