

**Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний економічний університет**

**А.М. Алілуйко, Н.В. Дзюбановська, О.Ф. Лесик, В.М. Неміш,
І.Я. Новосад, М.І. Шинкарик**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ ДЛЯ
ЕКОНОМІСТІВ**

**Тернопіль
ТНЕУ
2017**

Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. – Тернопіль: ТНЕУ, 2017. – 148 с.

У посібнику подано теоретичний матеріал та задачі економічного змісту для успішного оволодіння матеріалом курсу. Структура посібника така: спочатку наведені необхідні теоретичні відомості з відповідного розділу і приклади розв'язування задач, далі подано задачі для аудиторної та самостійної роботи.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Автори:

Алілуйко Андрій Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів;

Дзюбановська Наталія Володимирівна, кандидат економічних наук, старший викладач кафедри економіко-математичних методів;

Лесик Оксана Федорівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів;

Неміш Василь Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів;

Новосад Іван Ярославович, кандидат технічних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів;

Шинкарик Микола Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів

Рецензенти:

Гуцайлюк Зеновій Володимирович – доктор економічних наук, професор кафедри туризму Національного університету «Львівська політехніка»

Марчук Михайло Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу моделювання композитних структур і складних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Приймак Микола Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя

*Розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні Вченої ради Навчально-наукового інституту інноваційних освітніх технологій
(протокол № 9 від 25.04. 2017 р.)*

© Колектив авторів, 2017

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник “Вища математика у прикладах і задачах для економістів” для студентів економічних спеціальностей розроблений враховуючи сучасні зростаючі вимоги до економістів, як висококваліфікованих фахівців, здатних провести дослідження та прогнозування економічних явищ, змодельовати ту чи іншу економічну ситуацію.

Враховуючи необхідність в хороших спеціалістах в галузі прикладної математики, оволодіння даним матеріалом повинно виробити у студентів навички практичного використання математичних методів, формул та таблиць в процесі розв’язання економічних задач.

Виховання майбутніх економістів неможливо без досконалого володіння математичним апаратом.

Даний посібник має на меті допомогти студентам економічних спеціальностей здобути ґрунтовну освіту з чітким розумінням практичного використання вищої та прикладної математики для розв’язування різноманітних задач в галузі економіки.

Навчальний посібник “Вища математика у прикладах і задачах для економістів” укладено відповідно до програми курсу вищої математики для економічних спеціальностей вузу.

Перелік економічних задач охоплює основні розділи дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей:

- ЛІНІЙНА АЛГЕБРА;
- ВЕКТОРНА АЛГЕБРА;
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ;
- МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ;
- ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ;
- ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

Даний навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, велику кількість прикладів економічних задач з аналізом розв’язку. Значна кількість економічних задач пропонується для самостійного розв’язування студентів, що передбачає розвиток практичних навичок розв’язування задач, направлених на глибоке та

грунтовне вивчення основ вищої математики, сприяє розвитку логічного мислення студентів.

Навчальний посібник “ Вища математика у прикладах і задачах для економістів ” можна рекомендувати як студентам денної, так і заочно-дистанційної форм навчання для всіх економічних спеціальностей.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Матриці і визначники

1. *Визначником другого порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. *Визначником третього порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

3. Визначник n -го порядку має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, одержаний із попереднього після викреслювання i -го рядка і j -го стовпчика.

5. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається мінор для цього елемента, взятий зі знаком “+”, якщо число $(i+j)$ – парне, та зі знаком “-”, якщо воно непарне. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

6. *Визначником n -го порядку* називається число, що дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпчика) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Тобто

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

7. *Матрицею* називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, що містить m рядків та n стовпчиків, взятих у квадратні (або круглі) дужки.

Сумою (різницею) двох матриць A і B одного розміру $m \times n$ називається матриця C , елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B .

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добуток елементів матриці A на число k .

Добутком $A \cdot B$ матриці A розміру $m \times n$ і матриці B розміру $n \times p$ називається матриця C розміром $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпчика матриці B .

8. *Рангом матриці* називається найбільший порядок її мінорів, що не дорівнюють нулю.

9. Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею* до матриці A , якщо виконуються рівності $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

* *

*

Задача 1. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею A подано об'єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею B – за другий місяць:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти: а) об'єм продукції за два місяці; б) приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\lambda = 27$ – курс долара по відношенню до гривні.

Розв'язування. а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць A та B :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \text{ де } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - \text{об'єм продукції}$$

j -го виду, який виготовлений i -м заводом за два місяці.

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим визначається різницею матриць:

$$D = B - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Додатні елементи d_{ij} показують, що на заводі i об'єм виробництва j -ї продукції збільшився; від'ємні d_{ij} — зменшився; нульові d_{ij} — не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток λC .

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів: P_1 , P_2 , P_3 і використовує сировину двох видів: S_1 і S_2 . Норми витрат сировини задані матрицею A , де кожен елемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) показує витрати кількості одиниць сировини j -го виду на виготовлення одиниці продукції i -го виду. План виробництва заданий матрицею-рядком C , ціна одиниці кожного виду сировини — матрицею-стовпцем B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = [100 \quad 150 \quad 200], B = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Знайти витрати сировини, які необхідні для планового виробництва продукції, і загальна вартість сировини.

Розв'язування. Витрати сировини можна задати матрицю $S = C A$, де елементи $s_{1j} = \sum_{k=1}^3 c_{1k} a_{kj}$ — це витрати сировини j -го виду на виготовлення продукції i -го виду. Тоді

$$S = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix}.$$

Загальна вартість сировини P визначається як добуток матриць $P = SB$ або $P = CAB$. У даному випадку отримали

$$P = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} = 800 \cdot 20 + 1450 \cdot 30 = 59500.$$

Задача 3. Робоча бригада виготовляє контролери, 60% яких вимагають додаткового налаштування при встановленні, а 40% не потребують налаштування. Відповідно до статистичних досліджень, ті з контролери, які потребували налаштування, вимагатимуть повторного налаштування через рік в 45% випадках, а в 55% через рік будуть працювати добре. Ті контролери, які не потребували початкового налаштування, будуть потребувати його через рік в 20% випадках і продовжують добре працювати в 80% випадках. Яка частка контролерів будуть працювати добре або потребуватимуть налаштування через 2 та 3 роки після встановлення?

Розв'язування. В момент після встановлення частка добре працюючих контролерів становить 0,6, а частка тих, які потребують налаштування – 0,4. Через рік частка тих добре працюючих складе: $0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,55 = 0,65$. Частка тих, які вимагатимуть налаштування: $0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,3$.

Введемо позначення:

$X_t = \begin{bmatrix} x_{1t} & x_{2t} \end{bmatrix}$ – матриця-рядок стану в момент часу t , де x_{1t} – частка добре працюючих контролерів, а x_{2t} – частка контролерів, які потребують налаштування в момент часу t ;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – матриця переходу, де a_{ij} – частка контролерів,

які в даний момент знаходяться в стані i (1 – потребують налаштування, 2 – не потребують налаштування), а через рік – в стані j .

Враховуючи позначення, маємо:

$$X_0 = [0,4 \quad 0,6], \quad A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,55 & 0,45 \end{bmatrix}.$$

Тоді через рік

$$X_1 = X_0 A = [0,4 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,55 & 0,45 \end{bmatrix} = [0,65 \quad 0,35];$$

через 2 роки

$$X_2 = X_1 A = X_0 A A = X_0 A^2 = \\ = [0,4 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,55 & 0,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,55 & 0,45 \end{bmatrix}^2 = [0,713 \quad 0,287];$$

через 3 роки

$$X_3 = X_2 A = X_0 A^3 = [0,4 \quad 0,6] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,55 & 0,45 \end{bmatrix}^3 = [0,728 \quad 0,272].$$

Задача 4. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 4 підприємств промислового холдингу, який виробляє 3 види продукції з використанням 2 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Денна продуктивність підприємств				Витрати видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
1	2	3	6	5	1	4
2	2	0	4	1	3	2
3	1	2	0	3	2	3
	Кількість робочих днів за рік				Ціна видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
	200	120	150	170	100	200

Знайти:

- 1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;
- 2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;
- 3) річний об'єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

Розв'язування. Спочатку з приведеної таблиці випишемо матрицю продуктивності підприємств A , матрицю витрат сировини B та матрицю-рядок цін сировини P .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, P = [100 \quad 200].$$

1) Кожному стовпцю матриці A відповідає денна продуктивність окремого підприємства. Якщо помножити елементи кожного стовпця на кількість робочих днів у році для відповідного підприємства, то отримаємо матрицю річної продуктивності кожного підприємства по кожному виду продукції A_N . Або інакше для обчислення A_N спочатку запишемо діагональну матрицю кількості робочих днів підприємств

$$N = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 170 \end{bmatrix},$$

і тоді

$$A_N = AN = \begin{bmatrix} 400 & 360 & 900 & 850 \\ 400 & 0 & 600 & 170 \\ 200 & 240 & 0 & 510 \end{bmatrix}.$$

2) Річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини B_N можна задати матрицею

$$B_N = BA_N = \begin{bmatrix} 2000 & 840 & 2700 & 2380 \\ 3000 & 2160 & 4800 & 5270 \end{bmatrix}.$$

3) Вартість річного об'єму сировини для кожного підприємства отримаємо, якщо помножимо матрицю P на B_N :

$$P_N = PB_N = [800000 \quad 516000 \quad 123000 \quad 1292000].$$

Вправи

1.1. Мале підприємство виробляє 4 види продукції А, В, С та Д, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількість робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці:

Вироби	А	В	С	Д
Одиниці матеріалу, X	250	300	170	200
Одиниці матеріалу, Y	160	230	75	0
Кількість робочих годин	80	85	120	100

Охарактеризувати зміст кожного рядка та стовпчика матриці, впорядкованої з цих чисел.

1.2. У таблиці задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості:

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	78	180

Визначити матрицю потреб–пропозицій А.

1.3. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. У таблиці задані витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеху, трудомісткість у людино-годинах на одиницю продукції. Потрібно знайти сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програм виробництва.

Показники	Норми витрат цехів		
	1	2	3
Сировина а)	1,4	2,4	0,8
Сировина в)	0	0,6	1,6
Паливо	2	1,8	2,2
Трудомісткість	10	20	20

Відомо, що плани валового випуску продукції такі: для першого

цеху – 238, для другого – 186, для третього – 400.

1.4. Магазин здійснює роздрібний, оптовий продаж, а також продаж по лінії посилторгу товарів. Дані про денний продаж записано в таблиці:

Продаж	Товар (ціна)		
	Костюм (1 тис. грн.)	Пальто (2 тис. грн.)	Плаття (0,5 тис. грн.)
Роздрібний	45	30	50
Оптовий	38	25	40
Посилторг	20	15	20

Обчислити денний прибуток від продажу кожного товару окремо.

1.5. Три заводи випускають чотири види продукції. Знайти: а) матрицю випуску продукції за квартал, якщо задані матриці щомісячних випусків A_1 , A_2 і A_3 ; б) матриці приростів випуску продукції за другий і третій місяці та проаналізувати отримані результати:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.6. Три фірми виробили чотири види продукції A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 18 шт.; 11 шт.; 15 шт.; 24 шт.; друга – 16; 14; 13; 50; третя – 13; 10; 12; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7,7 грн., 3,6 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3,7; 2,4; 2,9; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.7. Три фірми виробили чотири види продукції A_1 , A_2 , A_3 , A_4 . Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 81 шт.; 80 шт.; 66 шт.; 114 шт.; друга – 95; 45; 93; 50; третя – 222; 90; 32; 89. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 27 грн., 13 грн., 12,1 грн., 3,1 грн., в B_2 – 3; 7,8; 2,3; 1,3; в B_3 – 7; 7,8; 3,9; 7,6. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.8. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4 . Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 8 шт.; 0 шт.; 16 шт.; 14 шт.; друга – 5; 5; 33; 50; третя – 3; 0; 2; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 1,7 грн., 3 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3; 2,4; 2,3; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.9. Підприємство виготовляє чотири види продукції, об'єми виготовлення якої задані матрицею A . Ціна реалізації одиниці i -го типу продукції в j -м регіоні задана матрицею B , де число стовпчиків матриці B відповідає кількості регіонів, в яких реалізується продукція.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти C – матрицю сумарного прибутку по регіонам та вказати, який з трьох регіонів найбільш вигідний для реалізації продукції.

1.10. Швейна фабрика здійснює продаж трьох моделей чоловічих костюмів в чотирьох магазинах. Матриця

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ задає ціну продажу (у доларах) одиниці}$$

костюмів i -го виду в j -м магазині. Визначити: а) сумарний прибуток кожного магазину, якщо продаж костюмів за місяць (за моделями)

$$\text{задано матрицею } A = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}; \text{ б) сумарний прибуток кожного магазину}$$

(у гривнях), якщо курс долара по відношенню до гривні становить 1 дол. = 27 грн.

1.11. Галузь складається з чотирьох підприємств: матриця коефіцієнтів прямих витрат і матриця-стовпець виготовлення продукції мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Знайти матрицю-стовпець об'ємів кінцевої продукції.

1.12. Підприємство виготовляє три види продукції, використовуючи для цього два види сировини. Норми витрат сировини i -го виду на виробництво одиниці j -го виду задані матрицею витрат A , виготовлення продукції за квартал – матрицею X , вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P . Знайти: 1) матрицю S повних витрат сировини кожного виду; 2) повну вартість всієї затраченої сировини.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.13. Підприємство за деякий проміжок часу виготовило два види продукції, використавши для цього три види сировини. Норми витрат сировини i -го виду на виробництво одиниці j -го виду задані матрицею витрат A , виготовлення продукції за даний проміжок часу – матрицею X , вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P . Знайти матрицю S повних витрат сировини кожного виду та повну вартість всієї затраченої сировини за даний проміжок часу.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$

1.14. Магазин побутової техніки може закупити від 1 до 4 телевізорів по ціні 2000 грн. і продати по 2400 грн. кожний. Скласти матрицю прибутку магазину в залежності від кількості закуплених телевізорів (стрічка матриці) та від результату їх продажі (стовпчик матриці).

1.15. В сервісний центр поступають мобільні телефони, 80% яких потребують незначного ремонту, 15% – середнього ремонту, 5% – складного ремонту. Статистичні дослідження показали, що 20% з тих телефонів, які пройшли незначний ремонт будуть потребувати

через рік повторного незначного ремонту, 50% – середнього, а 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли середній ремонт, 10% потребують через рік незначного ремонту, 60% – середнього, 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли складний ремонт, через рік 10% потребують незначного ремонту, 40% – середнього, 50% – складного ремонту. Які частки із відремонтованих на початку року телефонів будуть потребувати того чи іншого видів ремонту: через 1 рік; 2 роки; 3 роки.

1.16. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 5 підприємств промислового холдингу, який виробляє 4 види продукції з використанням 3 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Продуктивність підприємств					Витрати видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	3	5	6	7	2	5	4
2	2	1	3	2	3	3	3	4
3	0	1	0	2	2	1	3	1
4	3	3	5	5	4	4	2	3
	Кількість робочих днів за рік					Ціна видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	200	170	120	10	20	30

Знайти:

1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;

2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річний об'єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

1.17. Підприємство виготовляє щодобово три види продукції, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці.

Вид продукції	Кількість виробів	Витрати сировини	Норми часу виготовлення	Ціна виробу
1	100	2	5	20
2	200	4	10	30
3	150	5	15	25

Використовуючи поняття матриці за даними таблиці скласти нову таблицю відповідно до умов:

- а) кількість виробів кожного виду збільшилася на 20%;
- б) норми часу виготовлення кожного виробу зменшилися на 10%;
- в) ціна на всі види виробів зменшилася на 10%.

§ 2. Системи лінійних рівнянь

1. Система алгебраїчних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – невідомі, a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи; b_k ($k=1,2,3,\dots,n$) – вільні члени.

Якщо всі $b_k=0$, тоді систему називається *однорідною*. Якщо хоча б один вільний член b_k не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається *неоднорідною*.

Розв'язком системи називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне рівняння у тотожність.

2. *Правило Крамера*. Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k=1,2,\dots,n,$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його k -го стовпчика стовпчиком вільних членів системи.

3. Якщо позначити

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

то згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі: $AX = B$. Якщо матриця A квадратна порядку n і її визначник $\Delta(A)$ не дорівнює нулю, тоді існує обернена до A матриця A^{-1} , і матричний розв'язок системи знаходиться за формулою $X = A^{-1}B$.

4. Довільна система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ де } m \neq n.$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ цієї системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Теорема Кронекера – Капеллі. Система m лінійних рівнянь з n невідомими має розв'язок, тобто сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\tilde{A}$, тобто $\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A})$.

5. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо вона має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих, тобто $\text{rang}(A) = n$, то система має єдиний нульовий розв'язок. Якщо $\text{rang}(A) < n$, то задана система має ненульові розв'язки.

* *

*

Задача 1. Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік заплановано збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, щоб загальний прибуток виріс в 1,4 рази. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

Розв'язування. Нехай x та y – прибутки першого і другого відділень в минулому році. Тоді умови задачі можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 1,6x + 1,3y = 210 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Гаусса.

Виключимо невідому величину x із другого рівняння. Для цього перше рівняння помножимо на “– 1,6” і додамо до другого рівняння:

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ -0,3y = -30 \end{cases}.$$

Звідси $y = 100$, а $x = 150 - y = 50$.

Отже, а) прибуток в минулому році першого відділення – 50 тис. грн., другого – 100 тис. грн.;

б) прибуток в цьому році першого відділення – 80 тис. грн., другого – 130 тис. грн.

Задача 2. Підприємство отримало річний прибуток 100000 грн., 10% якого відраховано до благодійного фонду, 7% сплачено у вигляді податку до пенсійного фонду (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до пенсійного фонду). Знайти суми виплат до благодійного фонду, пенсійного фонду та державного бюджету.

Розв'язування. Нехай x , y , z – благодійний внесок, пенсійні виплати та виплати до державного бюджету, відповідно. Тоді чистий прибуток становить $100000 - (y + z)$, а благодійний внесок – $x = 0,1(100000 - (y + z))$. Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$x + 0,1y + 0,1z = 10000.$$

Об'єм виплат до пенсійного фонду становитимуть $y = 0,07(100000 - x)$, або

$$0,07x + y = 7000.$$

Об'єм виплат до державного бюджету становлять $z = 0,2[100000 - (x + y)]$, або

$$0,2x + 0,2y + z = 20000.$$

Отримали неоднорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} x + 0,1y + 0,1z = 10000 \\ 0,07x + y = 7000 \\ 0,2x + 0,2y + z = 20000 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Крамера.

Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,0014 - 0,02 - 0,007 = 0,9744 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10000 & 0,1 & 0,1 \\ 7000 & 1 & 0 \\ 20000 & 0,2 & 1 \end{vmatrix} = 10000 + 140 - 2000 - 700 = 7440,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10000 & 0,1 \\ 0,07 & 7000 & 0 \\ 0,2 & 20000 & 1 \end{vmatrix} = 7000 + 140 - 140 - 700 = 6300,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0,1 & 10000 \\ 0,07 & 1 & 7000 \\ 0,2 & 0,2 & 20000 \end{vmatrix} = 20000 + 140 + 140 - 2000 - 1400 - 140 = 16740.$$

Тепер знаходимо

$$x = \frac{7440}{0,9744} = 7635,468; \quad y = \frac{6300}{0,9744} = 6465,517; \quad z = \frac{16740}{0,9744} = 17179,803.$$

Отже, до благодійного фонду внесено 7635,468 грн., до пенсійного фонду – 6465,517 грн., до державного бюджету – 17179,803 грн.

Задача 3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1 , P_2 , P_3 , P_4 використовують три види сировини S_1 , S_2 , S_3 . Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	200	1	3	2	1
S_2	330	2	5	3	4
S_3	280	2	4	3	5

Визначити кількість продукції P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – це кількість одиниць продукції P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , тоді математичну модель даної економічної задачі можна записати у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 200 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 330 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 280 \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Перепишемо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на “-2”. Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

№	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
1	<u>1</u>	3	2	1	200
	2	5	3	4	330
	2	4	3	5	280
2	1	3	2	1	200
	0	<u>-1</u>	-1	2	-70
	0	-2	-1	3	-120
3	1	0	-1	7	-10
	0	1	1	-2	70
	0	0	<u>1</u>	-1	20
4	<u>1</u>	0	0	6	10
	0	<u>1</u>	0	-1	50
	0	0	<u>1</u>	-1	20

Табл. 2. В другому рядку за ключовий елемент вибираємо другий елемент “-1”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “-3”, а потім на “2” та додавши отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримаємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2 .

Табл. 3. В третьому рядку коефіцієнтом “1” при невідомій x_3 є ключовим елементом, тому цей рядок з третьої таблиці переписуємо третім рядком четвертої таблиці. Виключимо невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок додаємо спочатку до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на “-1” і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином в результуючій четвертій таблиці кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_4 = 10 \\ x_2 - x_4 = 50 \\ x_3 - x_4 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \\ x_2 = 50 + x_4 \\ x_3 = 20 + x_4 \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_i \geq 0$. А тому

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \geq 0 \\ x_2 = 50 + x_4 \geq 0 \\ x_3 = 20 + x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 5/3 \\ x_4 \geq -50 \\ x_4 \geq -20 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq 5/3.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 5/3]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 50$, $x_3 = 20$ – базовий розв'язок.

Вправи

2.1. Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, що в загальному складе 200 тис. грн. прибутку. Через рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 70%, другого – на 40% у порівнянні з минулим роком, що в загальному складе 300 тис. грн. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

2.2. Швейна фабрика протягом трьох днів виготовила костюми, пальта і куртки. Відомі об'єми виготовлення продукції за три дні і витрати (у грн.) на виготовлення продукції:

День	Об'єм виготовлення продукції (одиниць)			Витрати (тис. грн.)
	Костюми	Пальта	Куртки	
1	40	10	20	100
2	30	30	25	120
3	40	20	30	120

Знайти собівартість продукції кожного виду.

2.3. Університет виділив 250 тис. грн. для закупівлі 30 предметів для обладнання електронної бібліотеки: кількох комп'ютерів по 4 тис. грн., столів по 1 тис. грн. і стільців по 0,4 тис. грн. Пізніше з'ясувалося, що комп'ютери та столи можна придбати дешевше по ціні 3,8 тис. грн. та 0,9 тис. грн. за штуку відповідно. У наслідок цього на ту ж суму вдалося придбати на один стіл більше. Знайти кількість одиниць кожного виду товару, який було закуплено.

2.4. Підприємство отримало річний прибуток 50000 грн., 5% якого відраховано до благодійного фонду, 10% сплачено у вигляді податку до місцевого бюджету (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до місцевого бюджету). Знайти суми виплат до благодійного фонду, місцевого бюджету та державного бюджету.

2.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3 . Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4 , яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблицях:

1.	Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
			P_1	P_2	P_3	P_4
	S_1	110	1	4	2	1
	S_2	80	2	1	3	2
	S_3	94	3	2	2	1

2.	Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
			P_1	P_2	P_3	P_4
	S_1	80	2	3	2	2
	S_2	80	1	4	2	3
	S_3	120	3	2	4	2

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор X називається *вектором валового виробництва*; вектор Y – *вектором кінцевого продукту*; матриця A – *матрицею прямих витрат*.

3. Вектор валового виробництва X при відомій матриці прямих витрат A і заданому векторі кінцевого продукту Y за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} Y = BY.$$

4. Матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*, кожен елемент b_{ij} якої показує об'єм виробленої продукції i -ї галузі, який необхідний для виготовлення одиниці продукції j -ю галуззю.

5. Матриця $C = B - A$ називається *матрицею непрямих (посередницьких) витрат*.

6. Матриця A називається *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ ($y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) існує розв'язок $X \geq 0$ ($x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) рівняння $X = A \cdot X + Y$.

Економічний зміст непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання окремих галузей перевищує їх валове виробництво.

Критерії продуктивності матриці:

1) Матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $B = (E - A)^{-1}$ існує і її елементи невід'ємні.

2) Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів по будь-якому стовпцю (рядку) не перевищує одиниці та для хоча б одного стовпця (рядка) ця сума строго менша одиниці.

7. *Запасом продуктивності* продуктивної матриці A називається число $\alpha > 0$, таке що всі матриці λA , де $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивні, а матриця $(1 + \alpha)A$ – непродуктивна.

8. *Модель рівноважних цін* (двоїста модель Леонтева) описується системою балансових рівнянь

де a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – коефіцієнти прямих витрат; p_i – ціна одиниці продукції i -ї галузі; v_i – норма доданої вартості, яка показує величину доданої вартості (частина доходу, яка йде на виплату зарплати та податків, підприємницький прибуток та інвестиції) на одиницю виробленої продукції.

$$P = A^T \cdot P + V,$$
$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор рівноважних цін P при відомій транспонованій матриці прямих витрат A^T і заданому векторі норм доданої вартості V за деякий період часу знаходиться за формулою:

де $B^T = (E - A^T)^{-1}$ – транспонована матриця повних витрат.

* *

26

Задача 1. Прямі витрати двох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати		Кінцевий продукт
	1	2	
1	0,11	0,06	154
2	0,21	0,11	157

Знайти:

а) матрицю повних витрат та перевірити її на продуктивність; б) вектор кінцевого продукту; в) вектор валового виробництва; г) міжгалузеві витрати; д) матрицю непрямих витрат.

Розв'язування. а) З таблиці видно, що матриця прямих витрат буде:

$$A = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,06 \\ 0,21 & 0,11 \end{bmatrix}.$$

Сума елементів кожного стовпця (рядка) менша одиниці, тому, згідно другого критерію продуктивності матриці, матриця A є продуктивною.

б) $Y = \begin{bmatrix} 154 \\ 157 \end{bmatrix}$ є вектором кінцевого продукту.

в) Знайдемо вектор валового виробництва за формулою $X = (E - A)^{-1}Y$.

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,11 & 0,06 \\ 0,21 & 0,11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,89 & -0,06 \\ -0,21 & 0,89 \end{bmatrix}.$$

Для знаходження матриці $B = (E - A)^{-1}$, обчислимо визначник:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,89 & -0,06 \\ -0,21 & 0,89 \end{vmatrix} = 0,7921 - 0,0126 = 0,7795 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці $E - A$:

$$A_{11} = (-1)^2 |0,89| = 0,89; \quad A_{12} = (-1)^3 |-0,21| = 0,21;$$

$$A_{21} = (-1)^3 |-0,06| = 0,06; \quad A_{22} = (-1)^4 |0,89| = 0,89.$$

Обернена матриця (матриця повних витрат) має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,7795} \begin{bmatrix} 0,89 & 0,06 \\ 0,21 & 0,89 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,14 & 0,08 \\ 0,27 & 1,14 \end{bmatrix}.$$

Остаточню маємо:

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1,14 & 0,08 \\ 0,27 & 1,14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 157 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 188 \\ 221 \end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво першої галуззі становить 188 у. од., а другої – 221 у. од.

г) Міжгалузеві витрати знайдемо за формулами $x_{ij} = a_{ij}x_j$:

$$x_{11} = a_{11}x_1 = 0,11 \cdot 188 = 20,68, \quad x_{12} = a_{12}x_2 = 0,06 \cdot 221 = 13,26,$$

$$x_{21} = a_{21}x_1 = 0,21 \cdot 188 = 39,48, \quad x_{22} = a_{22}x_2 = 0,11 \cdot 221 = 24,31.$$

д) Запишемо матрицю непрямих витрат C :

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 1,14 & 0,08 \\ 0,27 & 1,14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,11 & 0,06 \\ 0,21 & 0,11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,02 \\ 0,06 & 0,03 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Перевірити на продуктивність матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 0,4 \end{bmatrix}$$

та знайти її запас продуктивності.

Розв'язування. Використаємо перший критерій продуктивності матриці. Для цього знайдемо матрицю $E - A$ та обернену до неї:

$$E - A = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}.$$

Видно, що матриця $(E - A)^{-1}$ існує і має невід'ємні елементи. Отже, A продуктивна.

Для знаходження запасу продуктивності знову будемо користуватися першим критерієм продуктивності матриці. У даному випадку

$$E - \lambda A = \begin{bmatrix} 1 - 0,3\lambda & -0,5\lambda \\ -0,8\lambda & 1 - 0,4\lambda \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta = |E - \lambda A| = (1 - 0,3\lambda)(1 - 0,4\lambda) - 0,4\lambda^2 = -0,28\lambda^2 - 0,7\lambda + 1.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$(E - \lambda A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-0,3\lambda}{\Delta} & \frac{0,5\lambda}{\Delta} \\ \frac{0,8\lambda}{\Delta} & \frac{1-0,4\lambda}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Матриця λA буде продуктивною, якщо всі елементи матриці $(E - \lambda A)^{-1}$ будуть невід'ємними. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - 0,3\lambda \geq 0 \\ 1 - 0,4\lambda \geq 0 \\ \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3,515 < \lambda < 1,015 \\ \lambda < 10/3 \\ \lambda \leq 2,5 \\ \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in (1; 1,015).$$

При $\lambda \in (1; 1,015)$ матриця λA продуктивна, а при $\lambda = 1,015$ – непродуктивною. Отже, запас продуктивності матриці A дорівнює 0,015.

Задача 3. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	Промисловість	Сільське господарство		
Промисловість	11	12	77	100
Сільське господарство	21	24	155	200

Знайти об'єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо кінцевий продукт за галузями збільшився вдвічі.

Розв'язування. Знайдемо матрицю прямих витрат:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,06 \\ 0,21 & 0,12 \end{bmatrix}.$$

Матриця повних витрат:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,89 & -0,06 \\ -0,21 & 0,88 \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1,14 & 0,08 \\ 0,27 & 1,15 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до умови задачі вектор кінцевої продукції повинен бути рівним

$$Y = 2 \cdot \begin{bmatrix} 77 \\ 155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix}.$$

Вектор валового виробництва становить

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1,14 & 0,08 \\ 0,27 & 1,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво в промисловості потрібно збільшити на 53,6 у. од., а в сільському господарстві – на 182,8 у. од.

Задача 4. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай транспонована матриця прямих витрат та вектор норм доданої вартості мають вигляд

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в першій галузі на 10%.

Розв'язування. Спочатку знайдемо транспоновану матрицю повних витрат:

$$B^T = (E - A^T)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1,64 & 1,15 & 0,98 \\ 0,43 & 2,1 & 0,66 \\ 0,46 & 0,72 & 1,48 \end{bmatrix}.$$

Тоді рівноважні ціни становлять

$$P = B^T V = \begin{bmatrix} 11,48 \\ 10,98 \\ 7,21 \end{bmatrix}.$$

Після зміни норми доданої вартості, тобто $V = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, новий

вектор рівноважних цін становитиме $P_1 = \begin{bmatrix} 11,97 \\ 11,11 \\ 7,35 \end{bmatrix}$, а вектор зміни

цін буде мати вигляд $\Delta P = P_1 - P = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,13 \\ 0,14 \end{bmatrix}$.

Таким чином, продукція першої галузі подорожчала на 4,27%, другої – на 1,18%, третьої галузі – на 1,94%.

Вправи

З'ясувати, чи продуктивні матриці:

3.1. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{bmatrix}$. 3.2. $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$.

3.3. $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$. 3.4. $\begin{bmatrix} 0,3 & 1,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$.

3.5. $\begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$. 3.6. $\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$.

З'ясувати, який запас продуктивності мають матриці:

3.7. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,3 \end{bmatrix}$. 3.8. $\begin{bmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}$.

3.9. Економічна система складається з двох галузей, яка характеризується наступними даними (у грошових одиницях):

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт
	I	II	
I	150	200	150
II	200	100	100

Обчислити матрицю прямих витрат.

3.10. Наведено данні про роботу системи двох галузей в минулому місяці і план виробництва кінцевої продукції в наступному місяці Y_1 (у грошових одиницях)

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт, Y_0	Кінцевий продукт, Y_1
	I	II		
I	100	200	250	300
II	50	150	200	200

Знайти матриці прямих і повних витрат, а також вектор валового виробництва в наступному місяці, який забезпечить виробництво кінцевої продукції Y_1 .

3.11. Задано матрицю A прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор кінцевої продукції Y , який відповідає вектору валового виробництва X :

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 1,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 1,1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

3.12. Задано матрицю A прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор валового виробництва X , який відповідає вектору кінцевої продукції Y :

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 1,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 1,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

3.13. Задано матрицю A прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX ;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY :

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}; \text{ а) } \Delta X = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}; \text{ б) } \Delta Y = \begin{bmatrix} 92 \\ 138 \end{bmatrix}.$$

3.14. Задано матрицю A прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX ;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY :

$$A = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 1,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 1,5 \end{bmatrix}; \text{ а) } \Delta X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}; \text{ б) } \Delta Y = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

3.15. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт
	I	II	
I	0,5	0,4	300
II	0,2	0,3	200
III	0,2	0,2	250

Знайти об'єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо об'єм кінцевої продукції для першої галузі збільшився на 10%, для другої – збільшився на 20%, а для третьої – зменшився на 5%.

3.16. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай матриця прямих витрат та вектор норм доданої вартості мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в другій галузі на 5%.

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки?
2. Яка основна задача міжгалузевого балансу?
3. Як визначають матрицю прямих витрат?
4. Як визначають матрицю повних витрат?
5. Як визначають матрицю посередницьких витрат?
6. Який існує критерій продуктивності моделі Леонтьєва?
7. Як будується економічна модель рівноважних цін?
8. В чому полягає модель міжнародної торгівлі?

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Дії над векторами.

1. Для векторів $\vec{a}(x_1; y_2; z_3)$ та $\vec{b}(x_1; y_2; z_3)$:

- розклад вектора $\vec{a}$ за одиничними векторами (ортами)

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

- абсолютна величина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_3^2}$
- сума та різниця векторів $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_1; y_2 \pm y_2; z_3 \pm z_3)$
- множення вектора на число $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_2; \lambda z_3)$
- скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_1 + y_2 y_2 + z_3 z_3$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$
- умова перпендикулярності $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
умова колінеарності $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

2. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають *простором товарів*, де x_i ($i=1, \dots, n$) – обсяг i -го товару. Тоді $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – *вектор цін*, де p_i ($i=1, \dots, n$) – ціна одиниці i -го товару. Скалярний добуток $\vec{x} \cdot \vec{p}$ визначає *ціну набору товарів*.

* * *

Задача 1. Комерційний банк бере участь у фінансуванні трьох інвестиційних проектів. Вартість проектів становить 100, 200, 300 тис.грн. Банком надано кредити на ці суми на один рік під 30%, 25% та 20% річних. Визначити, яку суму потрібно заплатити наприкінці року за кредитами, взяту у банку.

Розв'язування. Позначимо вектор кредитів $\vec{s} = (100; 200; 300)$ і вектор відсоткових ставок $\vec{p} = (1,3; 1,25; 1,2)$. Тоді сума повернення:

$$S = \vec{p} \cdot \vec{s} = 1,3 \cdot 100 + 1,25 \cdot 200 + 1,2 \cdot 300 = 740 \text{ тис. грн.}$$

Вправи

1.1. Підприємство випустило продукцію вищого (400 шт.), першого (750 шт.), другого (200 шт.) і третього (300 шт.) сортів. Ціни в одних і тих же грошових одиницях задані у відповідному порядку: 3; 2,1; 1,2; 0,5. Визначити вартість усієї продукції.

1.2. Магазин за день продає 45 шт. деякого товару, по 1 грн. за штуку, 30 шт. – по 2 грн. і 50 шт. – по 0,5 грн. Обчислити денний прибуток від продажу всіх товарів.

1.3. Підприємство випускає три види продукції по 15, 20, 35 одиниць кожного виду і продає за цінами 30, 40, 50 у.о. відповідно. Знайти дохід підприємства від продажу продукції і його зміну при зміні цін продукції відповідно на $+4$, $+2$, -3 .

§ 2. Власні вектори і власні значення матриць.

Модель міжнародної торгівлі

1. Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається *власним вектором* матриці A , якщо знайдеться таке число λ , що

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x},$$

де число λ називається *власним значенням* матриці A , яке відповідає вектору $\vec{x}$.

2. Рівняння

$$|A - \lambda E| = 0$$

називається *характеристичним рівнянням* матриці A .

3. Власні значення матриці A є коренями її характеристичного рівняння.

4. Система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

є моделлю міжнародної торгівлі (лінійною моделлю торгівлі), де x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – національний дохід i -ї держави; a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – частка національного доходу, яку j -а держава витрачає на покупку товарів у i -й державі.

Вважаємо, що весь національний дохід витрачається на закупку товарів або всередині держави, або на імпорт із інших держав, тобто

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Модель міжнародної торгівлі можна записати у матричному вигляді

$$A \cdot X = X,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матриця A , з властивістю, що сума елементів її довільного стовпчика дорівнює 1, називається *структурною матрицею торгівлі*,

X – матриця-стовпчик складена з координат *вектора* $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ національних доходів.

Отже, вектор $\vec{x}$ національних доходів є власним вектором структурної матриці торгівлі A , який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

5. Максимальне по модулю власне значення невід'ємної матриці A називається *числом Фробеніуса* матриці A , а невід'ємний власний вектор який йому відповідає – *вектором Фробеніуса* для A .

6. *Критерій продуктивності матриці*: Невід'ємна квадратна матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли її число Фробеніуса менше одиниці.

*

*

*

Задача 1. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв'язування. Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2, x_3 . Тоді знаходимо власний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язавши рівняння

$$(A - E)X = 0 \text{ або систему рівнянь } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Неважко знайти загальний розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases},$$

тому за власний вектор можна взяти вектор $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$.

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі цих трьох країн досягається при співвідношенні доходів $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1$ або $3 : 3 : 2$.

Задача 2. З'ясувати при яких значеннях $a > 0$ матриця

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

буде продуктивною.

Розв'язування. Запишемо характеристичне рівняння матриці A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & 3a & 0 \\ 3a & a - \lambda & 0 \\ 6a & 6a & 9a - \lambda \end{vmatrix} = (9a - \lambda)((2a + \lambda)^2 - 9a^2) = \\ = (9a - \lambda)(2a + \lambda)(\lambda - 4a) = 0.$$

Корені цього рівняння (власні значення):

$$\lambda_1 = 9a, \lambda_2 = 4a, \lambda_3 = -2a.$$

Матриці A буде продуктивною, якщо виконується умова $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} < 1$, тобто $9a < 1$.

Отже, для будь-якого $a \in (0; 1/9)$ матриця A буде продуктивною.

Вправи

Визначити у якому співвідношенні повинні бути національні доходи трьох країн для збалансування торгівлі, якщо задано структурну матрицю торгівлі A :

$$2.1. A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}. \quad 2.2. A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0,25 \\ 0,75 & 1/3 & 0,25 \\ 0,25 & 1/3 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Знайти рівноважний вектор національних доходів в моделі міжнародної торгівлі для структурної матриці A , якщо відомо, що сумарний дохід цих країн становить 380 млрд. у. о.:

$$2.3. A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}. \quad 2.4. A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

$$2.5. A = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}. \quad 2.6. A = \begin{bmatrix} 3/10 & 3/10 & 4/5 \\ 3/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 3/5 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

Знайти усі значення параметра $a > 0$, при яких матриця A буде продуктивною:

$$2.7. A = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}. \quad 2.8. A = a \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке вектор?
2. Що таке координати вектора?
3. Як визначають скалярний добуток векторів?
4. Як визначають скалярний добуток двох векторів через координати векторів співмножників?
5. Що таке орт вектора?
6. Який простір називають простором товарів?
7. Що таке вектор цін?
8. Як обчислюють ціну набору товарів?

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ І МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 1. Задачі економічного змісту, що розв'язуються із використанням елементів аналітичної геометрії

1. Рівнянням лінії (кривої) на площині **Oxy** називається рівняння, якому задовольняють координати x і y кожної точки, що знаходиться на цій лінії і не задовольняють координати іншої точки, що не знаходиться на цій лінії.

2. Рівняння прямої лінії, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}\{A; B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

3. Загальне рівняння прямої лінії:

$$Ax + Bx + C = 0.$$

4. Рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

Тут кутовий коефіцієнт

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α – кут нахилу прямої до осі OX , b – відрізок, що відтинає пряма на осі OY .

Кутовий коефіцієнт для прямої, що проходить через дві заданих точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, дорівнює:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

5. Рівняння в'язки (пучка) прямих, що проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

6. Рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

7. Кут між двома прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ ($A_1x + B_1y + C = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \left(\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right).$$

8. Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2 \quad \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \right).$$

9. Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0).$$

10. Відстань від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

11. *Кривими другого порядку* називаються лінії, рівняння яких є рівняння другого степеня відносно біжучих координат. Загальний вигляд рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

До кривих другого порядку відносяться коло, еліпс, гіпербола і парабола.

12. *Колом* називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центом у точці $O(a; b)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

13. *Еліпсом* називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, більшою за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

де a – довжина великої півосі; b – довжина малої півосі (рис. 1).

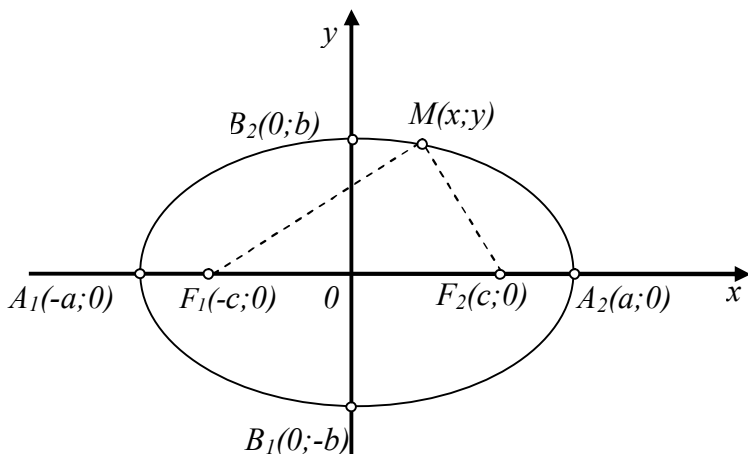


Рис. 1. Еліпс.

14. *Гіперболою* називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, що називається фокусами, є величина стала ($2a$), менша за відстань між фокусами ($2c$) (рис. 2).

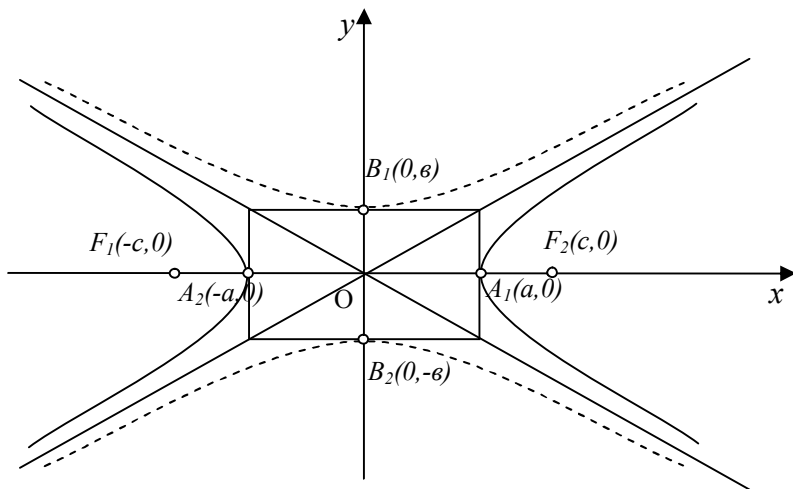


Рис. 2. Гіпербола.

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі на осі Ox , має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a – довжина дійсної півосі; b – довжина уявної півосі.

15. *Параболою* називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox , має вигляд:

$$y^2 = 2px,$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то вітки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то вітки напрямлені вліво (рис. 3).

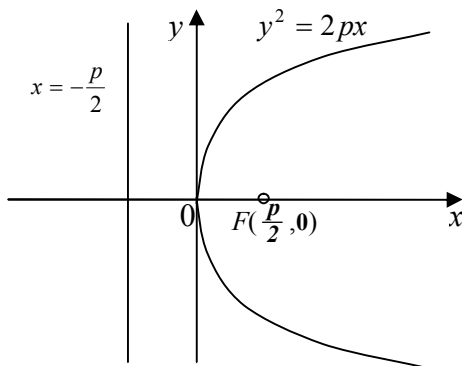


Рис. 3. Парабола.

*

*

*

Задача 1. (Дослідження впливу розширення кількості інвестиційних проектів на зростання прибутку банку). В 2010 р. банк мав 120 інвестиційних проектів і одержував прибуток 9 млн. грн. В 2016 р. банк мав 490 інвестиційних проектів і одержував прибуток 17 млн. грн.

Розв'язування. Позначимо час – x , кількість інвестиційних проектів – y ; прибуток позначимо – z (млн. грн.).

За умовою задачі маємо чотири точки:

$$A_1(x_1, y_1): x_1 = 2010, y_1 = 120;$$

$$A_2(x_2, y_2): x_2 = 2016, y_2 = 490;$$

$$B_1(x_1, z_1): x_1 = 2010, z_1 = 9;$$

$$B_2(x_2, z_2): x_2 = 2016, z_2 = 17;$$

Знайдемо рівняння прямих – графіків зростання кількості інвестиційних проектів на зростання прибутку банку за 2010-2016 роки у вигляді $y = kx + b$ у – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки A_1 і A_2 , одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{x - 2010}{2016 - 2010} &= \frac{y - 120}{490 - 120} \Rightarrow \frac{x - 2010}{6} = \frac{y - 120}{370} \Rightarrow \\ 370x - 370 \cdot 2010 &= 6y - 6 \cdot 120 \Rightarrow 370x - 743700 = 6y - 720 \Rightarrow \\ 6y &= 370x - 742980 \Rightarrow y = \frac{185}{3}x - 123830;\end{aligned}$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання кількості інвестиційних проектів буде:

$$k_1 = \frac{185}{3} \approx 61,67.$$

Використовуючи точки B_1 та B_2 , аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання прибутку банку:

$$\begin{aligned}\frac{x - 2010}{2016 - 2010} &= \frac{z - 9}{17 - 9} \Rightarrow \frac{x - 2010}{6} = \frac{z - 9}{8} \Rightarrow 8x - 8 \cdot 2010 = 6z - 6 \cdot 9 \Rightarrow \\ 8x - 16080 &= 6z - 54 \Rightarrow 6z = 8x - 16026 \Rightarrow z = \frac{4}{3}x - 2671;\end{aligned}$$

Отже, її кутовий коефіцієнт буде:

$$k_2 = \frac{4}{3} \approx 1,3.$$

З умов задачі можна зробити висновок, що при зростанні кількості інвестиційних проектів прибуток банку зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості інвестиційних проектів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання прибутку

банку. Таким чином, зростання кількості інвестиційних проектів сприяє зростанню прибутку банку, але не пропорційно.

Зростання кількості інвестиційних проектів не є основним фактором при збільшенні прибутку.

Задача 2. (Визначення рентабельності інвестиційних вкладів). Витрати на інвестиції в грошових одиницях (y) акційний портфель A та акційний портфель B на термін x (вимірюється місяцями) знаходять за формулами відповідно:

$$y = 2x \text{ та } y = x + 5.$$

З'ясувати, при яких умовах більш рентабельним буде вкладення в акційний портфель A чи B .

Розв'язування. Графіки прямих перетинаються в точці $A(5, 10)$ (рис. 4). Для перевірки координат точки A знайдемо точку перетину аналітично:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = x + 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 2x = x + 5; \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 10.$$

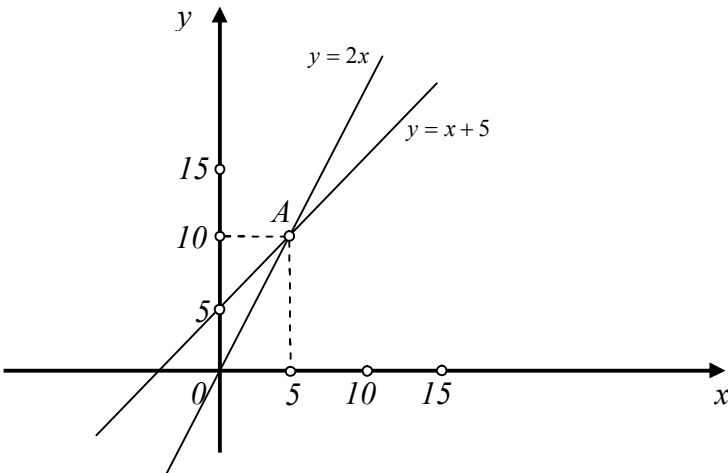


Рис. 4. Графіки витрат на інвестиції в акційний портфель A та акційний портфель B на термін x .

Графіки витрат дозволяють зробити висновок:

а) коли $x \in [0; 5)$, тобто $x < 5$ місяців, витрати на інвестиції в акційний портфель A нижче витрат на інвестиції в акційний портфель B ;

б) коли $x \geq 5$, тобто $x \geq 5$ місяців, більш рентабельним буде вкладення в акційний портфель B .

Задача 3. (Визначення витрат на електроенергію при виробництві продукції підприємством). Дослідженням виявлено, що витрати на електроенергію зростають пропорційно квадрату кількості виготовленої продукції. Треба знайти аналітичну залежність між витратами електроенергії q та кількістю виготовленої продукції n , враховуючи, що при $n = 1400$ одиниць товару витрачено 500 кВт електроенергії, а також визначити витрати електроенергії потрібної для виготовлення 2200 одиниць продукції.

Розв'язування. Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді:

$$n^2 = kq,$$

де k – деякий коефіцієнт пропорційності.

Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дозволяє зробити висновок, що витрати палива змінюються за параболічним законом. При $q = 0$ кількістю виготовленої продукції $n = 0$, тобто парабола проходить через початок системи координат qOn . Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $A_0(500, 1400)$, тому її координати задовольняють рівняння параболи:

$$1400^2 = k \cdot 500 \Rightarrow k = 3920.$$

Таким чином, аналітична залежність між витратами електроенергії q та кількістю виготовленої продукції n буде:

$$n^2 = 3920q \Rightarrow q = \frac{n^2}{3920}.$$

Графік цієї залежності зображено на рис. 5. З останньої формули випливає, що для виготовлення 2200 одиниць товару витрати електроенергії (у кВт) повинні дорівнювати

$$q = \frac{2200^2}{3920} \approx 1235 \text{ (кВт)}.$$

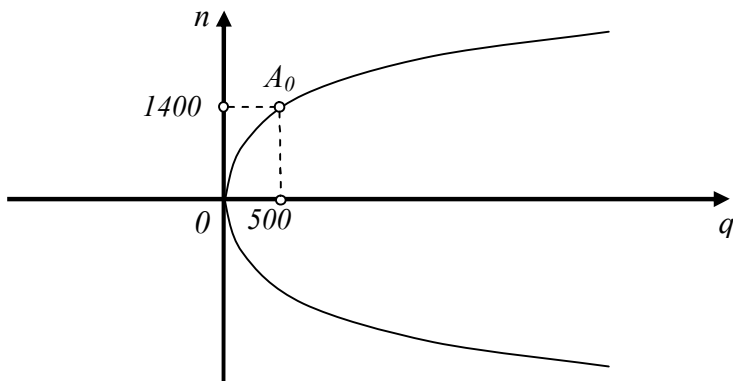


Рис. 5. Графіки залежності між витратами електроенергії та кількістю виготовленої продукції

Вправи

1.1. В 2000 р. інвестиційна компанія мала 92 портфелі акцій і одержувала прибуток 6 млн. грн. В 2014 р. компанія мала 346 портфелів акцій і одержувала прибуток 15,6 млн. грн. Дослідити вплив збільшення кількості акційних портфелів на зростання прибутку компанії.

1.2. В 1996 р. фірма мала 105 автобусів і одержувала дохід від перевезення пасажирів 8,3 млн. грн. В 2015 р. фірма мала 460 автобусів і її дохід склав 17,4 млн. грн. Дослідити вплив збільшення кількості автобусів на зростання доходу фірми від перевезення пасажирів.

1.3. В 2006 р. підприємство мало 165 тис. станків і одержувало прибуток від виробництва товару 18 млн. грн. В 2016 р. підприємство мало 530 тис. станків і одержувало прибуток 31,2 млн. грн. Дослідити вплив збільшення кількості (в тис.) станків на зростання прибутку підприємства.

1.4. В 1998 р. країна мала 10 машинобудівних заводів і одержувала дохід від експорту 14,1 млн. грошових одиниць. В 2016 р. країна мала 42 машинобудівних заводи і її дохід від експорту склав 26 млн. грошових одиниць. Дослідити вплив збільшення кількості машинобудівних заводів на зростання доходу країни від експорту.

1.5. В 2002 р. тканинна фабрика мала 164 ткацьких верстатів і одержувала дохід від реалізації продукції 12 млн. грн. В 2016 р. фабрика мала 777 ткацьких верстатів і її дохід склав 36,7 млн. грн. Дослідити вплив збільшення кількості ткацьких верстатів на зростання доходу фабрики від реалізації продукції.

1.6. Витрати на обладнання в грошових одиницях (y) виробника A та виробника B із гарантійним терміном термін x (вимірюється роками) знаходять за формулами відповідно: $y = x$ та $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Визначити рентабельність вкладених коштів у виробництво.

1.7. Витрати на перевезення товару в грошових одиницях (y) наземним транспортом та повітряним транспортом на відстань x (вимірюється тис. км) знаходять за формулами відповідно: $y = x + 2$ та $y = \frac{4}{5}x + 3$. Визначити рентабельність перевезення товару.

1.8. Витрати фірми на доставку товару покупцям в грошових одиницях (y) автомобільним транспортом та залізничним транспортом на відстань x (вимірюється тис. км) знаходять за формулами відповідно: $y = \frac{2}{3}x + 10$ та $y = \frac{1}{3}x + 15$. Визначити рентабельність доставки товару.

1.9. Витрати підприємства на закупівлю сировини в грошових одиницях (y) у постачальника A та постачальника B для виготовлення обсягу продукції x (вимірюється у тис. одиниць) знаходять за формулами відповідно: $y = x + 6$ та $y = \frac{1}{2}x + 12$. Визначити рентабельність виробництва.

1.10. Витрати держави на вивезення експортованих товарів за межі митної території в грошових одиницях (y) морським транспортом та сухопутним на відстань x (вимірюється тис. км) знаходять за формулами відповідно: $y = \frac{5}{3}x$ та $y = \frac{2}{3}x + 3$. Визначити рентабельність вивезення експортних товарів.

1.11. Дослідженням виявлено, що витрати на паливо зростають пропорційно квадрату швидкості автотранспорту. Треба знайти аналітичну залежність між витратами палива n та швидкістю

автотранспорту V , враховуючи, що при $V = 60$ км/год витрачено 8 л палива за годину, а також визначити витрати палива потрібного для швидкості 75 км/год.

1.12. Дослідженням встановлено, що витрати на перевезення продукції зростають пропорційно квадрату обсягу транспортованого товару. Треба знайти аналітичну залежність між витратами на перевезення r та обсягом транспортованого товару N , враховуючи, що на перевезення $N = 600$ тис. одиниць продукції витрачено 1,5 млн. грошових одиниць, а також визначити витрати на транспортування 840 тис. одиниць товару.

1.13. При аналізі статистичних даних тканинної фабрики встановлено, що витрати на сировину зростають пропорційно квадрату кількості ткацьких верстатів. Треба знайти аналітичну залежність між витратами на сировину S та кількістю ткацьких верстатів n , враховуючи, що при $n = 765$ тис. одиниць витрачається 1,3 млн. рулонів тканини за день, а також визначити витрати фабрики на тканину протягом дня, якщо кількість ткацьких верстатів становитиме 980 тис. одиниць.

1.14. Аналітики виробничого підприємства виявили, що витрати на експорт товарів зростають пропорційно квадрату кількості сировини, затраченої на виробництво даних товарів. Треба знайти аналітичну залежність між витратами на експорт p та кількістю сировини M , затраченої на виробництво товарів, враховуючи, що на експорт продукції, виготовленої із $M = 420$ тис. одиниць сировини витрачено 2,7 млн. грошових одиниць, а також визначити витрати на експорт товарів, виготовлених із 735 тис. одиниць сировини.

1.15. Дослідженням виявлено, що витрати хлібопекарського заводу на використання природного газу зростають пропорційно квадрату кількості випечених хлібопекарських виробів. Треба знайти аналітичну залежність між витратами на використання природного газу d та кількістю випечених хлібопекарських виробів N , враховуючи, що при $N = 290$ тис. одиниць виробів витрачається 65 тис. грошових одиниць за використання природного газу, а також визначити витрати на споживання природного газу потрібного для випікання 500 тис. одиниць хлібопекарських виробів.

§ 2. Задачі лінійного програмування

Іноді для пошуку мінімального чи максимального значення деякої лінійної функції за цілого ряду умов будують таку математичну модель, яка зводиться до розв'язування задач лінійного програмування та здійснюють перетворення у декілька етапів, щоб отримати екстремальні значення даної функції.

В загальному вигляді нехай задано систему:

[illegible]

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2)$$

Систему рівностей і нерівностей (1) називають системою обмежень.

А лінійну форму (2) – цільовою функцією або функцією мети.

До системи (1) можуть входити як рівності, так і нерівності обох знаків і їхні комбінації. Якщо виконуються певні умови, то шляхом перетворень систему обмежень можна звести до вигляду, коли до неї входять лише рівності або лише нерівності.

Задачі, у яких цільова функція і функції-обмеження записані у лінійному вигляді називаються *задачами лінійного програмування*.

Розглянемо основні типи задач, що приводять до загальної задачі лінійного програмування.

Задача про розподіл сировини.

Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$ використовують m видів сировини $S_1, S_2, \dots, S_m$. Відомо, що запаси сировини обмежені і дорівнюють відповідно $b_1, b_2, \dots, b_m$ одиниць. Для виготовлення продукції однієї одиниці P_j ($j = \overline{1, n}$) необхідно затратити a_{ij} одиниць сировини S_i ($i = \overline{1, m}$). Від реалізації одиниці продукції P_j ($j = \overline{1, n}$) можна отримати дохід c_j ($j = \overline{1, n}$) грошових одиниць. Скласти такий

план випуску продукції $P_j (j = \overline{1, n})$, щоб отримати максимальний дохід від її реалізації.

Занесемо дані до таблиці:

Сировина	Запас	Кількість одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Дохід від реалізації		c_1	c_2	...	c_n

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно кількість одиниць продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$, яку потрібно виготовити. Тоді на виготовлення продукції буде витрачено:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$ – одиниць сировини S_1 ;

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$ – одиниць сировини S_2 ;

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$ – одиниць сировини S_m .

Окрім того, відомо, що запаси сировини обмежені, тому справедливими будуть нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2;$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_n.$$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які повинні бути невід'ємними $x_i \geq 0 (i = \overline{1, n})$. І відповідно, якщо деякий вид продукції P_i не виробляється, то відповідний йому $x_i = 0$.

Для обчислення прибутку складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Для розв'язування задачі потрібно знайти максимальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

[illegible]

Задача про суміші.

Задачі про суміші – це задачі, в яких змішують задану кількість різних речовин для отримання суміші, що має певні властивості. При цьому, потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною. До задач про суміші належать задачі про дієту, задачі про кормовий раціон тварин, задачі про отримання суміші для різних марок бензину тощо.

Нехай задано m видів сировини, запаси якої відповідно становлять $k_1, k_2, \dots, k_m$. Із цієї сировини необхідно утворити суміш, що містила б n речовин, які визначають технічні характеристики суміші. Відомі величини $a_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ будуть вказувати на кількість j -ої речовини в одиниці i -ого виду сировини. Відомою також є вартість i -ого виду сировини, яку позначимо через $c_i (i = \overline{1, m})$. Окрім того, в задачі задано обмеження на кількість j -ої речовини, позначимо як $b_j (j = \overline{1, n})$ – мінімально допустима кількість j -ої речовини в суміші. Отримати суміш із заданими властивостями при мінімальних витратах на задані види сировини.

Занесемо дані до таблиці:

Вид речовини Сировина	1	2	...	n	Обсяг сировини	Ціна сировини
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	k_1	c_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	k_2	c_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	k_m	c_m
Мінімальна кількість речовини в суміші	b_1	b_2	...	b_n		

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_m$ відповідно кількість сировини i -ого виду, яка буде входити в суміш. Окрім того, задано обмеження на кількість j -ої речовини, тому справедливими будуть нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2;$$

.....

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n.$$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які повинні бути невід'ємними і обмеженими певним обсягом речовини, тобто $0 \leq x_i \leq k_i$ ($i = \overline{1, m}$).

Для обчислення витрат складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m.$$

Для розв'язування задачі потрібно знайти мінімальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2; \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n; \\ 0 \leq x_i \leq k_i \quad (i = \overline{1,m}). \end{array} \right.$$

Задачі про раціональний розкрій матеріалу.

Задача про раціональний розкрій матеріалу полягає у знаходженні найоптимальнішого способу розкрою матеріалу, при якому буде отримано найбільшу кількість заготовок або одержано найменшу кількість відходів.

Нехай маємо a одиниць матеріалу одного виду, з якого потрібно отримати комплекти, кожен з яких міститиме n видів виробів в кількостях, що будуть дорівнювати числам $b_1, b_2, \dots, b_n$. Існує m способів розкрою даного матеріалу, отже, кількість одиниць j -их виробів при i -ому способі розкрою одиниці матеріалу позначимо через a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). При цьому ми будемо отримувати певні відходи, які позначимо через c_i ($i = \overline{1, m}$). Потрібно скласти план розкрою, отримавши при цьому мінімальну кількість відходів.

Занесемо дані до таблиці:

Вид виробу Спосіб розкрою	1	2	...	n	Відходи
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m
Кількість виробів	b_1	b_2	...	b_n	

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_m$ відповідно кількість одиниць матеріалу, що буде розкrojений i -им способом. Тоді кількість виробів першого виду буде дорівнювати:

Враховуючи умову задачі про отримання певної кількості виробів, одержимо:

Такі ж рівняння отримаємо і для виробів інших видів. Окрім того, враховуючи умову невід’ємності для змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$, матимемо систему обмежень:

Цільовою функцією задачі буде мінімізація відходів, тобто

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

У випадку, коли кількість невідомих дорівнює 2, для її розв'язування зручно застосовувати графічний метод. Виходячи з умови невід'ємності x_1 і x_2 , розв'язок ЗЛП завжди лежатиме в I-ій чверті.

Відшукування розв'язку проводять за таким алгоритмом:

1. За заданими обмеженнями із системи обмежень будують багатокутник розв'язків, який утвориться із перетину півплощин, якщо до системи обмежень входять нерівності і прямих, якщо в системі рівняння. Якщо не вдалося знайти спільні точки, які утворюються при побудові багатокутника розв'язків, то говорять, що у ЗЛП немає жодного розв'язку.

55

3. Переміщують лінію рівня вздовж напрямку вектора нормалі $\vec{N}$. Остання точка, яка зустріється при перетині лінії рівня і многокутника розв'язків буде точкою max. Якщо переміщувати лінію рівня у напрямі протилежному напрямку вектора нормалі $\vec{N}$, то остання точка буде точкою min.

4. Обчислюють координати точки перетину і підставивши їхні значення у рівняння цільової функції, обчислюють max та min цільової функції.

Зауваження:

1) Якщо вдалося побудувати многокутник розв'язків, то він обов'язково буде опуклим.

2) Многокутник розв'язків може бути замкнутим або не замкнутим. Якщо він замкнутий, то існує числове значення max та min. Якщо не замкнений, то max та min, або одне з цих значень лежить у нескінченності.

3) В загальному випадку точками перетину лінії рівня і многокутника розв'язків будуть деякі вершини многокутника розв'язків. Як часткові випадки можуть бути відрізок, промінь.

4) Для зручності обчислень вибирають точки перетину з осями чи шукають координати вершин многокутника як точки перетину двох прямих, що їх утворюють.

5) Для побудови вектора нормалі для нас важлива не його абсолютна величина, а його напрямок, а це означає, що координати кінця вектора можна пропорційно змінювати.

Інколи можна досить просто розв'язати ЗЛП, якщо задані змінні x_1 , x_2 , x_3 . В цьому випадку необхідно змінити позначення півплощина – на півпростір, многокутник розв'язків – на многогранник розв'язків, лінія рівня – на площина, вектор нормалі – трьохвимірний.

В загальному випадку графічний метод може використовуватися в n -вимірному просторі.

* *

*

Задача 1. Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3 . Відомо, що запаси сировини відповідно дорівнюють 30, 25, 20 одиниць. Для виготовлення продукції однієї одиниці P_1 необхідно затратити 5 одиниць сировини S_1 , 8 одиниць сировини S_2 і 4 одиниці сировини S_3 . Для виготовлення одиниці продукції P_2 необхідно затратити $6S_1$, $7S_2$ і $3S_3$. Від реалізації одиниці продукції P_1 можна отримати дохід 20 грошових одиниць, а від реалізації одиниці продукції P_2 – 45 грошових одиниць. Скласти такий план випуску продукції P_1 і P_2 , щоб отримати максимальний дохід від її реалізації.

Занесемо дані до таблиці:

Сировина	Запас	Кількість одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	30	5	6
S_2	25	8	7
S_3	20	4	3
Дохід від реалізації		20	45

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через x_1 і x_2 відповідно кількість одиниць продукції P_1 і P_2 , яку потрібно виготовити. Тоді на виготовлення продукції буде витрачено:

$5x_1 + 6x_2$ – одиниць сировини S_1 ;

$8x_1 + 7x_2$ – одиниць сировини S_2 ;

$4x_1 + 3x_2$ – одиниць сировини S_3 .

Окрім того, відомо, що запаси сировини обмежені, тому справедливими будуть нерівності:

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30;$$

$$8x_1 + 7x_2 \leq 25;$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 20.$$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих x_1, x_2 , які повинні бути невід'ємними $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Для обчислення прибутку складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$$f = 20x_1 + 45x_2.$$

Для розв'язування задачі потрібно знайти максимальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

$$f = 20x_1 + 45x_2 \rightarrow \max, \quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 30; \\ 8x_1 + 7x_2 \leq 25; \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 2. Денна дієта повинна містити не менше 8 одиниць вітаміну А, 10 одиниць вітаміну В і 6 одиниць вітаміну С. Для дієти використовують два різні продукти. В першому міститься 2 одиниці вітаміну А, 1 одиниця вітаміну В і 1 одиниця вітаміну С. В одиниці другого продукту міститься 1 одиниці вітаміну А, 3 одиниця вітаміну В і 1 одиниця вітаміну С. Скласти дієту так, щоб вона задовольняла мінімальну денну потребу в вітамінах за умови найменшої вартості. Якщо ціна однієї одиниці першого продукту складає 0,1 грошових одиниць, а другого – 0,5 грошових одиниць.

Занесемо дані до таблиці:

Вітаміни Продукти	Вітамін А	Вітамін В	Вітамін С	Ціна продуктів
1	2	1	1	0,1
2	1	3	1	0,5
Мінімальна денна потреба в вітамінах	8	10	6	

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через x_1, x_2 відповідно кількість одиниць першого і другого продуктів, які використовують для дієти. Одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 10; \\ x_1 + x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі буде мінімізація витрат на продукти харчування:

$$f = 0,1x_1 + 0,5x_2 \rightarrow \min .$$

Задача 3. В цеху здійснюється розріз металевго дроту для подальшого збору із отриманих частин готової продукції. На складі є заготовки стандартної ширини по 9 м. Для подальшого використання потрібен металевий дріт нестандартної ширини: 4 штуки довжиною 4 м, 3 штуки довжиною 3,5 м та 6 штук довжиною 1,5 м.

Занесемо дані до таблиці, перебравши всі можливі варіанти розрізу металевго дроту шириною 9 м:

Вид виробу Спосіб розрізу	4 м	3,5 м	1,5 м	Відходи
1	2	0	0	1
2	1	1	1	0
3	1	0	3	0,5
4	0	2	1	0,5
5	0	1	3	1
6	0	0	6	0
Кількість виробів	4	3	6	

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_m$ відповідно кількість частин металевго дроту стандартної ширини, що будуть розрізані i -им способом. Тоді матимемо систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 3; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 6x_6 = 6; \\ x_i \geq 0 (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі буде мінімізація відходів, тобто

$$f = x_1 + 0,5x_3 + 0,5x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

Задача 4. Меблева фабрика “Нова” випускає дві моделі підставок під телевизор. Підставки обох моделей обробляють на першому та другому станках. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї підставки кожної моделі подано в таблиці.

Станки	Тривалість обробки підставки (хв.) за моделями	
	<i>A</i>	<i>B</i>
1	18	20
2	21	29

Час обробки першого та другого станків відповідно дорівнює 30 і 32 години на тиждень. Прибуток фабрики від реалізації однієї підставки моделі *A* дорівнює 80 грн., а моделі *B* – 60 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на підставки моделі *A* ніколи не перевищує попиту на модель *B* не більше, ніж на 20 одиниць, а попит на підставки моделі *B* не перевищує 50 одиниць на тиждень. Визначити обсяги виробництва підставок під телевизор обох моделей, які максимізують прибуток фабрики. Побудувати економіко-математичну модель задачі та розв’язати її графічно.

Розв’язування. Нехай x_1 – кількість підставок моделі *A*, виготовлених фабрикою за тиждень, а x_2 – відповідна кількість підставок моделі *B*.

Цільова функція – максимізація прибутку фабрики від реалізації продукції, тобто

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \quad (max).$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи станків (першого та другого) для обробки продукції та попит на підставки для телевизорів обох моделей. Обмеження на час роботи першого та другого станків матимуть вигляд:

$$18x_1 + 20x_2 \leq 30 \cdot 60 = 1800 \text{ хв. — для первого станка,}$$

$$21x_1 + 29x_2 \leq 32 \cdot 60 = 1920 \text{ хв. — для второго станка.}$$

Обмеження на попит $x_1 - x_2 \leq 20, x_2 \leq 50$.

Отже, економіко-математичну модель задачі запишемо так:

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 \leq 1800 \\ 21x_1 + 29x_2 \leq 1920 \\ x_1 - x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \text{ (max).}$$

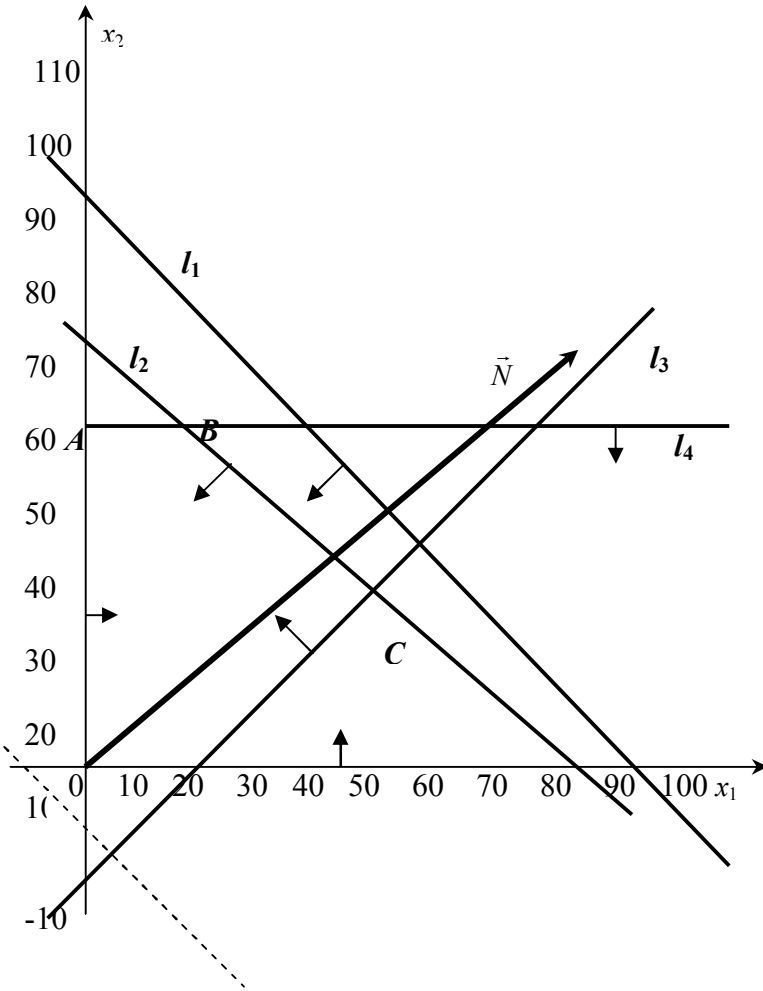
Задачу розв'язуємо графічним методом за відомим алгоритмом.

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \text{ (max).}$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 = 1800, & l_1(0;90);(100;0); \\ 21x_1 + 29x_2 = 1920, & l_2\left(0;66\frac{6}{29}\right);\left(91\frac{3}{7};0\right); \\ x_1 - x_2 = 20, & l_3(0;-20);(20;0); \\ x_2 = 50, & l_4 - \text{пряма} \parallel \text{осі } OX_1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Будуємо багатокутник розв'язків.

Утворився багатокутник розв'язків $OABCD$. Вектор нормалі $\overline{N}(80;60)$ і перпендикулярно до нього лінія рівня.



За дослідженням (паралельним перенесенням лінії рівня в напрямку вектора нормалі) точка C є точкою максимуму. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва підставок під телевізор моделей A та B , що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки $C(l_2 \cap l_3)$ знайдемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 21x_1 + 29x_2 = 1920 \\ x_1 - x_2 = 20 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо $x_1 = 20 + x_2$. Підставимо цей результат у перше рівняння. Маємо:

$$21(20 + x_2) + 29x_2 = 1920;$$

$$420 + 21x_2 + 29x_2 = 1920;$$

$$50x_2 = 1500; x_2 = 30, a \ x_1 = 50.$$

$$\text{Отже, } Z = 80x_1 + 60x_2 = 80 \times 50 + 60 \times 30 = 5800.$$

Це означає, що якщо фабрика щотижня вготовлятиме 50 підставок під телевизор першої моделі (А) та 30 – другої моделі (В), то вона отримає максимальний прибуток у розмірі 5800 грн. При цьому тижневий фонд роботи станків буде використано повністю.

Вправи

2.1. Графічним методом розв'язати задачі лінійного програмування:

$$a) \quad z = -3x_1 + 3x_2 - 4 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -4x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$б) \quad z = x_1 + 4x_2 - 9 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$в) \quad z = -6x_1 + x_2 + 4 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$з) \quad z = -x_1 + 2x_2 - 5 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$д) \quad z = -x_1 - 3x_2 + 5 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$е) \quad z = -3x_1 + 3x_2 - 4 \quad (extr)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \leq 56 \\ 6x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Які є види рівнянь прямої та площини?
2. Які є види рівнянь площини?
3. Які є види рівнянь прямої в просторі?
4. Що таке еліпс, гіпербола, парабола?
5. Як записують канонічне рівняння еліпса, гіперболи параболі?
6. Як розміщується пряма і площина в просторі?
7. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги ринку?
8. Що таке рівноважна ціна?
9. Що таке точка рівноваги?
10. Як знаходиться рівноважна ціна?
11. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги та збитків компанії?
12. Як визначається бюджетна множина, її межа і лінії бюджетного обмеження?

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

§ 1. Границя функції

1. Число a називається *границею числової послідовності* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N , що при $n \geq N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

У цьому випадку записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

2. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для довільної числової послідовності $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) значень аргумента x відповідна послідовність

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$$

значень функції y має границею число b .

Аналогічно записують $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

3. Якщо існують $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0 \right).$$

4. Перша визначна границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. Друга визначна границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,72.$$

6. При розв'язуванні задач використовують формули:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^k.$$

7. Приріст аргументу і функції:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

* *

*

Задача 1. Б'юро економічного аналізу ВАТ “Ватра” встановило, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою

$$V(x) = 20\,000 + 40x \text{ (гривень)},$$

а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції виражається формулою

$$D(x) = 100x - 0,001x^2 \text{ (гривень)}.$$

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A , але прагне збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язування. Запланований приріст продукції буде
 $\Delta x = 3200 - 3100 = 100$ (одиниць продукції A).

Приріст витрат:
 $\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = (20000 + 40 \cdot 3200) -$
 $- (20000 + 40 \cdot 3100) = 148000 - 144000 = 4000.$

Приріст доходу:
 $\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (100 \cdot 3200 - 0,01 \cdot 3200^2) -$
 $- (100 \cdot 3100 - 0,01 \cdot 3100^2) = 217600 - 213900 = 3700.$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді
 $P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0,01x^2 - (20000 + 40x) =$
 $= -20000 + 60x - 0,01x^2.$

Приріст прибутку буде:

$\Delta P(x) = P(3200) - P(100) = (-20000 + 60 \cdot 3200 - 0,01 \cdot 3200^2) -$
 $- (-20000 + 60 \cdot 3100 - 0,01 \cdot 3100^2) = 69600 - 69900 = -300,$ тобто
зменшиться на 300 гривень. Середня величина прибутку на одиницю
приросту продукції буде

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta(x)} = \frac{-300}{100} = -3.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3
гривні.

Задача 2. Зміна кількості населення деякого міста за час t , що
вимірюється роками, здійснюється за формулою
 $P(t) = 9000 + 850t - 90t^2$. Визначити середню швидкість зростання
населення в період між часом: а) $t = 2$ та $t = 6$; б) $t = 2,5$ та $t = 4$.

Розв'язування. Середню швидкість зростання населення міста за
час t знайдемо за формулою

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

а) $\Delta t = 6 - 2 = 4$

$$\Delta P(t) = P(6) - P(2) = (9000 + 5100 - 3240) - (9000 + 1700 - 360) =$$
$$= 10860 - 10340 = 520$$

Середню швидкість зростання населення міста в цей період буде
 $520:4=130$

б) $\Delta t = 4 - 2,5 = 1,5$

$$\Delta P(t) = P(4) - P(2,5) = (9000 + 3400 - 1440) -$$
$$- (9000 + 2125 - 5625) = 10960 - 5500 = 5460$$

Середню швидкість зростання населення міста в цей період
буде $5460:1,5=3640$.

Вправи

1.1. Мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення
 x окремих виробів задовольняють таку закономірність:

$$V(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 40x + 1000.$$

Знайти приріст витрат, коли кількість виробів збільшиться з 50

до 100, та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, якщо їх кількість зростає з 50 до 60.

1.2. Загальний щотижневий дохід D у гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлених x одиниць виробів, має таку закономірність:

$$D(x) = 500x + 2x^2.$$

Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість x збільшиться з 100 до 120.

1.3. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару ($2x + 40$) грн., якщо продано товару менше, ніж 60 од., і доплачує 20% комісійних, якщо товару продано 60 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою, отриманою продавцем, і побудувати графік.

§ 2. Задачі фінансової математики

1. Формули зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t = K_0 (1 + i)^t,$$

де K_t – сума вкладу, нагромаджена через t років; K_0 – початкова сума вкладу; p – щорічний відсотковий приріст; t – період зростання в роках; $i = \frac{p}{100}$, $1 + i = r$ – коефіцієнт складних відсотків.

2. Неперервне зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}t} = K_0 \cdot e^{it}.$$

Якщо $p > 0$, формула називається показниковим законом зростання, а при $p < 0$ – показниковим законом спадання.

3. Кінцеву величину K_t початкової суми K_0 через t років у випадку, коли питома відсоткова ставка – i , а проценти

нараховуються m разів у рік, обчислюють за формулою:

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt}.$$

4. Рахунки накопичення:

$$S = P \cdot S_{n/i}.$$

Тут S – величина рахунку накопичення; P – початковий внесок; $S_{n/i}$ – знаходиться в розрахунковій таблиці Д1 (в додатках).

5. Розрахунки ренти:

$$A = P \cdot a_{n/i},$$

де $a_{n/i} = i^{-1} [1 - (1+i)^{-n}]$ табульована для різних значень $i = \frac{R}{100}$ та n .

Тут A – величина внеску на рентний рахунок; P – щорічна виплата протягом n років; R – величина щорічного відсоткового зростання.

6. Погашення боргу:

$$P = \frac{A}{a_{n/i}}.$$

Тут A – величина внеску взятого в борг; P – сума регулярного повернення; $a_{n/i}$ – знаходиться в розрахунковій таблиці Д1 (в додатках).

* *

*

Задача 1. У місті проживає 249 тис. мешканців. Щорічно народонаселення збільшується на 1,7%. Яка кількість жителів буде в цьому місті через 12 років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними процентами:

$$K_{12} = 249 \left(1 + \frac{1,7}{100} \right)^{12} \approx 305.$$

Отже, через 12 років у місті буде 305 тис. жителів.

Задача 2. Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки з умовою їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперервного зростання за складними відсотками:

$$K_4 = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0,12} \approx 3,2322 \text{ тис. грн.}$$

Задача 3. Сума $K_0 = 200$ тис. грн. вкладена під складні відсотки з розрахунку 12% річних терміном на 4 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються в кінці кожного місяця.

Розв'язування. Відомо, що $K_0 = 200$ тис. грн., $i = 0,12$, $m = 12$, $t = 4$. Отже,

$$K_4 = 200 \left(1 + \frac{0,12}{12} \right)^{12 \cdot 4} = 200 \cdot 1,01^{48} = 322,4 \text{ тис. грн.}$$

Задача 4. Кожного місяця студент вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку 5% щомісячно. Обчислити величину його накопичення після здійснення 12 внеску.

Розв'язування. Оскільки табличне значення $S_{n/i}$ рівне $S_{n/i} = S_{12/0,05} = 15,917127$, то $S = 100 \cdot 15,917127 \approx 1591,71$ грн.

Задача 5. В день 55-річчя працівниця фірми “Остер” відкрила рахунок ренти в страховій компанії “УНІВЕРСАЛЬНА” за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв'язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д1 і рівний $a_{15/0,05} = 10,379658$. Значить $A = 1000 \cdot 10,379658 \approx 10379,66$ грн.

Отже, працівниця фірми повинна покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

Задача 6. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом 15 років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язування. Шукана величина P щорічної сплати боргу студентом знаходиться за формулою $P = \frac{A}{a_{n/i}}$. В даному випадку борг $A = 8000$ грн., час його повернення $n = 15$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \frac{R}{100} = 0,08$. Із таблиці Д 1 знаходимо $a_{15/0,08} = 8,559479$. Тому

$$P = \frac{8000}{a_{15/0,08}} = \frac{8000}{8,559479} \approx 934,64 \text{ грн.}$$

Отже, для погашення боргу студент повинен в кінці кожного року сплачувати фонду навчання 934,64 грн.

Величину $V_{сер} = \frac{V(x)}{x}$ називають *середніми витратами* на одиницю випуску продукції.

Вправи

2.1. Бригада, яка складається з x робітників-ремонтників і бригадира, виконуючи певне замовлення, щомісяця одержувала загалом 3000 грн. заробітної плати. Подати заробітну плату члена бригади виразом, коли відомо, що вона в усіх однакова і 50 грн. з належної кожному суми становлять різні відрахування.

2.2. У банк на терміновий внесок під 10% річних вкладена сума 10 тис. грн. Яку суму отримає клієнт через 5 років?

2.3. У страховій компанії були куплені чотири акції вартістю 100 грн., кожна з яких дає 20% приросту річних. Яку суму отримає клієнт через 3 роки?

2.4. За п'ять років обсяг продукції повинен зрости на 100%. Яким повинен бути середній темп зростання щорічно?

2.5. В ощадну касу зроблено внесок на 10 років у сумі 100000 грн. Яку суму виплатить ощадна каса після закінчення цього терміну при процентній ставці 3%?

2.6. Обладнання вартістю 10 тис. гривень внаслідок експлуатації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

- а) вираз для вартості цього обладнання через t років;
- б) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

2.7. Обчислити кінцеву суму для початкової суми $K_0 = 100000$ грн., вкладеної під складні проценти із $p = 6\%$, що нараховуються неперервно протягом 3 років.

2.8. Яким повинен бути середній темп випуску синтетичної смоли і пластмас за 5 років, якщо загальний обсяг випуску повинен зрости на 35%?

2.9. Населення міста зростає щорічно на 3% порівняно з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться у 1,5 рази?

2.10. Ділянка лісу містить $1,44 \cdot 10^5 \text{ м}^3$ деревини. Обчислити, на скільки кубометрів збільшиться кількість деревини за 15 років, якщо середній щорічний приріст деревини становить 2,8%.

2.11. Сума $K_0 = 1000$ гривень вкладена під складні проценти з $p = 6\%$ річних терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо проценти нараховуються в кінці кожного місяця.

2.12. Кожного року батьки вносять P гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

- а) $P = 600$, $R = 2\%$, $n = 12$; б) $P = 500$, $R = 2\%$, $n = 12$;
- в) $P = 300$, $R = 3\%$, $n = 18$; г) $P = 200$, $R = 3\%$, $n = 18$;
- д) $P = 100$; $R = 5\%$, $n = 24$.

2.13. Батьки бажають відкрити рахунок на ім'я сина у страховій компанії "ОРАНТА", яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків.

Його умова – сплачувати на початку кожного року P гривень протягом n років починаючи з наступного року. Яку суму коштів він повинен внести на рахунок ренти?

- а) $P = 500, R = 3\%, n = 6$; б) $P = 800, R = 3\%, n = 8$;
в) $P = 1000, R = 5\%, n = 10$; г) $P = 600, R = 5\%, n = 12$;
д) $P = 700, R = 8\%, n = 15$.

2.14. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A гривень, Цей кредит йому надано із R % щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом n років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

- а) $A = 8000, R = 8\%, n = 5$; б) $A = 9000, R = 8\%, n = 8$;
в) $A = 10000, R = 5\%, n = 10$; г) $A = 11000, R = 5\%, n = 12$;
д) $A = 12000, R = 3\%, n = 15$.

Питання для самоконтролю

1. Що таке числова послідовність?
2. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
3. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
4. Який економічний зміст границі числової послідовності?
5. У чому полягає суть павутинної моделі ринку?
6. Наведіть приклади використання функції в економічних дослідженнях?
7. Що таке функція?
8. Які функції використовуються в економічній теорії?
9. Як формулюються означення границі функції в точці?

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. Похідна функції

1. *Похідною* функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли Δx довільно прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то вона позначається: y' , або $f'(x)$, або y'_x , або $\frac{dy}{dx}$, або $\frac{df(x)}{dx}$.

Математично похідна функції визначається за формулою:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. *Геометричний* зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x .

Механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S = S(t)$.

Економічний зміст похідної: похідна $V'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$ дорівнює граничним витратам виробництва $V = V(x)$ однорідної продукції як функції кількості продукції x та наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Похідну $V'(x)$ називають маржинальними (або граничними) витратами виробництва при умовах хоча би простого відтворення виробництва продукції. Аналогічно можна розглядати маржинальний дохід, маржинальний прибуток, маржинальну продуктивність праці, маржинальний обсяг продукції, маржинальну корисність тощо.

Таким чином, похідна функції характеризує швидкість зміни функції (деякого економічного чи фізичного процесу, досліджуваного фактора відносно часу).

3. Величину $V_{сер} = \frac{V(x)}{x}$ називають *середніми витратами* на одиницю випуску продукції.

Якщо функція $q(t)$ виражає об'єм виготовленої продукції q за час t , то похідна $q'(t_0)$ в момент часу t_0 є *продуктивністю праці* в момент t_0 .

4. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $(n-1)$ порядку, диференційовану в деякій точці x інтервалу $[a; b]$, то похідна від $f^{(n-1)}(x)$ називається n -ою похідною, або похідною n -го порядку і позначають:

$$f^{(n)}(x), \text{ або } y^{(n)}, \text{ або } y_x^{(n)}, \text{ або } \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ або } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Тому, n -на похідна функції $y = f(x)$ визначається рівністю:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

5. Основні формули диференціювання:

- | | |
|---|--|
| 1) $y = u(x) \pm v(x),$ | $y' = u' \pm v';$ |
| 2) $y = u(x) \cdot v(x),$ | $y' = u'v + uv';$ |
| 3) $y = c, \quad c = const,$ | $y' = 0;$ |
| 4) $y = c \cdot u(x),$ | $y' = cu';$ |
| 5) $y = \frac{u(x)}{v(x)},$ | $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$ |
| 6) $y = f(u), u = \varphi(x), y = f(\varphi(x)),$ | $y' = y'_u \cdot u'_x;$ |
| 7) $y = u^\alpha(x),$ | $y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u';$ |
| 8) $y = \sqrt{u(x)},$ | $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$ |
| 9) $y = \sin u(x),$ | $y' = \cos u \cdot u';$ |
| 10) $y = \cos u(x),$ | $y' = -\sin u \cdot u';$ |

11) $y = \operatorname{tgu}(x),$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u};$
12) $y = \operatorname{ctgu}(x),$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$
13) $y = a^{u(x)},$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$
14) $y = e^{u(x)},$	$y' = e^u \cdot u';$
15) $y = \log_a u(x),$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \ln a};$
16) $y = \ln u(x),$	$y' = \frac{u'}{u};$
17) $y = \arcsin u(x),$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
18) $y = \arccos u(x),$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
19) $y = \operatorname{arctgu}(x),$	$y' = \frac{u'}{1+u^2};$
20) $y = \operatorname{arcctgu}(x),$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

6. Нехай $V(x)$ – функція споживання (частина доходів, які витрачаються), а $S(x)$ – функція збереження, де x – національний дохід. Тоді

$$V(x) + S(x) = x.$$

Диференціюємо останнє рівняння, і отримаємо

$$V'(x) + S'(x) = 1,$$

де $V'(x)$ – гранична схильність до споживання, $S'(x)$ – гранична схильність до зберігання.

7. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x , тобто має у цій точці скінченну похідну y' , то її приріст

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Диференціалом функції (dy) називається головна частина $f'(x)\Delta x$ приросту Δy функції, лінійна відносно Δx .

Диференціалом функції називається добуток її похідної на диференціал незалежної змінної: $dy = f'(x)dx$.

8. Формула наближеного обчислення значень функції:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

9. Рівняння *дотичної* у точці $M_0(x_0; y_0)$ на кривій $y = f(x)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

10. Рівняння *нормалі* в точці $M_0(x_0; y_0)$ на кривій $y = f(x)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ або}$$

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

11. *Правило Лопітала*. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні і мають похідні в околі точки $x = x_0$, а в точці x_0 дорівнюють нулю

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0; \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0 \right)$$

або нескінченності. Тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тут $\varphi(x) \neq 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ в околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

12. *Еластичність попиту* Q відносно ціни p :

$$E_p(Q) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}, \text{ або } E_p(Q) = p \cdot T_Q(p),$$

де

$$T_Q(p) = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dp}$$

– відносна швидкість зміни (темп) функції.

Якщо $E_p(Q) < -1$ (підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту більше, ніж на 1%), то попит еластичний.

Якщо $E_p(Q) = -1$ – попит нейтральний.

Якщо $E_p(Q) > -1$ – попит нееластичний.

13. Еластичність пропозиції $S(p)$ відносно ціни p :

$$E_p(S) = E_p = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{S} \frac{dS}{dp}.$$

14. Якщо аргумент x обчислений з відносною похибкою $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, то функція $y = f(x)$ – з відносною похибкою

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = |E_x(y)| \delta_x.$$

* *

*

Задача 1. Залежність між витратами виробництва V і об'ємом виготовленої продукції x виражаються функцією $V = 100x - 0,06x^3$ (у.о.). Визначити середні та маржинальні витрати при об'ємі продукції 20 одиниць.

Розв'язування. Функція середніх витрат (на одиницю продукції) має вигляд: $V_{\text{сер}} = \frac{V}{x} = 100 - 0,06x^2$. При $x = 20$ середні витрати становлять $V_{\text{сер}}(20) = 100 - 0,06 \cdot 20^2 = 76$ (у.о.). Функція маржинальних витрат: $V'_{\text{сер}} = 100 - 0,18x^2$. При $x = 20$ маржинальні витрати становлять $V'_{\text{сер}}(20) = 100 - 0,18 \cdot 20^2 = 28$ (у.о.). Отже, середні

витрати на виробництво одиниці продукції складають 76 у.о., а додаткові витрати на виготовлення додаткової одиниці продукції при заданому рівні виробництва ($x = 20$) складають 28 у.о.

Задача 2. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з яких – p , причому $p = 100 - 2x$, а функція витрат $V(x) = 2000 + 10x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 10 та 25 виробів.

Розв'язування. Функція доходу має вигляд

$$D(x) = xp = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Тоді функція прибутку підприємства:

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 2x^2 - (2000 + 10x) = 90x - 2x^2 - 2000.$$

Знайдемо маржинальний прибуток:

$$P'(x) = (90x - 2x^2 - 2000)' = 90 - 4x.$$

Тоді при $x = 10$ та $x = 25$ отримаємо:

$$P'(10) = 90 - 4 \cdot 10 = 50, \quad P'(25) = 90 - 4 \cdot 25 = -10.$$

Отже підприємство буде мати збитки розміром 10 гривень за кожний виріб, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

Задача 3. Функція споживання деякої країни має вигляд $V(x) = 0,36x^{5/4} + 0,25x + 20$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 16 млн. грош. од.

Розв'язування. Спочатку знайдемо граничну схильність до споживання:

$$V'(x) = 0,45x^{1/4} + 0,25.$$

$$\text{При } x = 16 \text{ маємо } V'(16) = 0,45\sqrt[4]{16} + 0,25 = 1,15.$$

Гранична схильність до споживання та гранична схильність до зберігання пов'язані рівністю $V'(x) + S'(x) = 1$. Тому гранична схильність до зберігання має вигляд

$$S'(x) = 1 - V'(x) = 0,75 - 0,45x^{1/4}.$$

$$\text{При } x = 16 \text{ маємо } S'(16) = 1 - 1,15 = -0,15.$$

Задача 4. Валовий продукт деякої держави є функція $ВП = 50 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення – $K = 80 + 3t$ (мільйонів), які залежать від часу t . Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язування. Нехай функція

$$ВП_{сер}(t) = \frac{ВП}{K} = \frac{50 + t}{80 + 3t}$$

– частина валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина. Тоді швидкість зміни частини валового продукту є похідна

$$\begin{aligned} ВП'_{сер}(t) &= \frac{(50 + t)'(80 + 3t) - (50 + t)(80 + 3t)'}{(80 + 3t)^2} = \frac{80 + 3t - 150 - 3t}{(80 + 3t)^2} = \\ &= \frac{80 + 3t - 150 - 3t}{(80 + 3t)^2} = \frac{-70}{(80 + 3t)^2}. \end{aligned}$$

Оскільки похідна від'ємна, то частина валового продукту, що припадає на кожного громадянина, з часом зменшується.

Задача 5. Обсяг випущеної продукції q заданий функцією

$$q = -\frac{7}{9}t^3 + 7t^2 + 98t + 50, \quad t \in [0; 8], \quad \text{де } t \text{ – робочий час. Обчислити}$$

продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 годину після початку роботи й за годину до її завершення.

Розв'язування. Спочатку знайдемо продуктивність праці

$$z(t) = q'(t) = -\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98.$$

Тоді знайдемо швидкість і темп зміни продуктивності праці, які виражаються похідною $z'(t)$ та логарифмічною похідною

$$T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} \quad \text{відповідно:}$$

$$z'(t) = -\frac{14}{3}t + 14, \quad T_z(t) = \frac{-\frac{14}{3}t + 14}{-\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 42}.$$

В задані моменти часу $t_1=1$ і $t_2=8-1=7$ відповідно матимемо: $z(1)=109,67$, $z'(1)=37,33$, $T_z(1)=0,09$ та $z(7)=81,67$, $z'(7)=-9,33$, $T_z(7)=0,23$.

Отже, наприкінці робочого дня продуктивність праці знижується; зміна знака $z'(t)$ та $T_z(t)$ з «+» на «-» вказує на те, що швидкість і темп зміни продуктивності праці в перші години робочого дня збільшується і знижується в останні години.

Задача 6. При відомій функції попиту $Q=Q(p)=7-p$ і пропозиції $S=S(p)=p+1$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

- рівноважну ціну;
- еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;
- зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p)=S(p)$; $7-p=p+1$; $p=3$ грн.

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q)=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \quad E_p(S)=\frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q)=\frac{p}{7-p}\cdot(-1)=-\frac{p}{7-p}; \quad E_p(S)=\frac{p}{S}\cdot 1=\frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p=3$ маємо $E_{p=3}(Q)=-0,75$; $E_{p=3}(S)=0,75$.

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

в) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5\cdot 0,75=3,75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

Задача 7. Залежність попиту Q від ціни p задана функцією

$Q = 50(15 - \sqrt{p})$. Знайти еластичність попиту. Визначити, при яких значеннях ціни попит буде: а) еластичним; б) нейтральним; в) нееластичним. Які рекомендації відносно ціни за одиницю продукції можна дати керівникам підприємства при $p = 50$ і $p = 150$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_p(Q) = \frac{p}{50(15 - \sqrt{p})} (50(15 - \sqrt{p}))' = -\frac{\sqrt{p}}{2(15 - \sqrt{p})}.$$

Попит нейтральний, якщо $E_p(Q) = -\frac{\sqrt{p}}{2(15 - \sqrt{p})} = -1$.

Розв'язком останнього рівняння є $p = 100$. Оскільки $p > 0$ і $Q = 50(15 - \sqrt{p}) > 0$ (тобто $p < 225$), то при $0 < p < 100$ попит є нееластичним, а при $100 < p < 225$ – еластичним.

Якщо ціна одиниці продукції 50 грош. од., то попит є нееластичним і можна підвищити ціну. При цьому дохід зросте. При ціні продукції 150 грош. од. попит є еластичним. У такому випадку бажаним є зниження ціни, що приведе до збільшення доходу в результаті збільшення попиту на продукцію.

Задача 8. Витрати палива автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості руху v (км/год) описується функцією $V(v) = 15 - 0,4v + 0,002v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат палива за швидкості $v = 80$ км/год, визначену з точністю 5%.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_v(V) = v \frac{V'(v)}{V(v)} = \frac{v(-0,4 + 0,004v)}{15 - 0,4v + 0,002v^2}.$$

При $v = 80$ отримаємо $|E_{80}(V)| = 1,52$. Тоді відносна похибка $\Delta_V = 1,52 \cdot 5 \approx 7,6\%$.

Вправи

1.1. Тіло рухається по прямій OX за законом $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$.

Визначити швидкість і прискорення руху. В які моменти тіло змінює

напряму руху?

1.2. Точка рухається прямолінійно так, що $v^2 = 2ax$, де v – швидкість, x – пройдений шлях і $a = \text{const}$. Визначити прискорення руху.

1.3. Дана функція $V(x)$ повних витрат виробництва. Побудувати криві повних, середніх та граничних витрат виробництва.

1) $V(x) = x^3 + 2x^2 + 5x$;

2) $V(x) = \frac{x^2}{6} + x + 100$;

3) $V(x) = 100 + \frac{x^2}{25}$.

1.4. Залежність між витратами виробництва V і об'ємом виготовленої продукції x виражаються функцією $V = 50x - 0,04x^3$ (у.о.). Визначити середні та маржинальні витрати при об'ємі виробництва продукції 5 одиниць.

1.4. Для функції витрат $V(x) = 3000 + 10x - 0,2x^2 + 0,001x^3$ (у гривнях) знайти маржинальні витрати випуску продукції $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $x_3 = 120$ одиниць продукції.

1.5. Для функції витрат підприємства (у гривнях) $V(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 40x + 1000$ знайти маржинальну вартість як функцію x і обчислити її значення, коли вироблено $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 150$ одиниць продукції.

1.6. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x) = 0,002x^3 - 0,1x^2 + 10x + 2000$ (тисяч гривень). Знайти маржинальну вартість при $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 120$.

1.7. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них дорівнює p , причому $p = 80 - 0,2x$, а функція витрат $V(x) = 3000 + 10x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 50 виробів.

1.8. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них $p = 80 - 0,1x$, а функція прибутку $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

1.9. Функція ціни залежно від попиту на певний товар можна визначити формулою $p = 20 - x$, де x – попит, p – ціна. Визначити граничну виручку, якщо попит становить 3 одиниці.

1.10. Функція прибутку фірми залежно від ціни p на одиницю виготовленої продукції характеризується формулою $f(p) = -20p^2 + 400p + 150$. Визначити граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p = 5$, $p = 10$, $p = 12$.

1.11. Знайти маржинальний дохід виробництва 100 одиниць продукції, якщо обсяг продукції заданий функцією $x = 2000 - 100p$ від ціни одиниці продукції p .

1.12. Визначити маржинальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів можна знайти за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – роздрібна вартість одного виробу.

1.13. Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p зв'язані рівністю $x = 4000 - 2p$.

1.14. Підприємство може виготовляти та продавати кожну одиницю продукції з прибутком 10 грн. При витраті x гривень на рекламу кількість проданих товарів становитиме $q = 10000(1 - e^{-0,001x}) - x$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ грн. і $x = 3000$ грн.

1.15. Валовий продукт деякої держави є функція $ВП = 200 + t$, а кількість населення – $K = 240 + 2t$, які залежать від часу t . Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

1.16. Обсяг випущеної продукції q (грош. од.) бригадою робітників протягом робочого дня заданий функцією

$q = -t^3 - 4t^2 + 50t + 300$, де t – час (год.). Обчислити продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

1.17. Обсяг випущеної продукції q заданий функцією $q = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{13}{2}t^2 + 50t + 30$, $t \in [0; 8]$, де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 годину після початку роботи й за годину до її завершення.

1.18. Об'єм виробництва зимового одягу q заданий функцією $q = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$, де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни на початку року ($t = 0$), в середині року ($t = 6$), в кінці року ($t = 12$).

1.19. Функція споживання деякої країни має вигляд $V(x) = 0,3x^{4/3} + 0,2x + 10$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 8 млн. грош. од.

1.20. Функція збереження деякої країни має вигляд $S(x) = -0,25x^{4/5} - 0,2x + 15$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 32 млн. грош. од.

1.21. Витрати виробництва $K(x)$ залежать від обсягу продукції x : $K(x) = 15x - \frac{1}{10}x^2$. Визначити граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить 5 і 10 одиниць.

1.22. Знайти еластичність функції попиту при заданій ціні p :
а) $Q + 10p = 70$, $p = 2$; б) $3Q + 7p = 48$, $p = 10$;
в) $p^2 + p + Q = 21$, $p = 3$.

1.23. Для наступних функцій попиту знайти значення ціни p , при якій попит буде еластичним:

а) $5p + 3Q = 70$; б) $Q = 18 - \sqrt{p}$;

$$\text{в) } Q = \sqrt[3]{2500 - p^2}; \quad \text{г) } Q = 2e^{-3p^2}.$$

1.24. Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;

2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

$$\text{а) } Q(p) = \frac{47p+1}{47p-1}, S(p) = 47p+2;$$

$$\text{б) } Q(p) = \frac{48p+2}{48p-2}, S(p) = 48p+4;$$

$$\text{в) } Q(p) = \frac{49p+3}{49p-3}, S(p) = 49p+6;$$

$$\text{г) } Q(p) = \frac{50p+4}{50p-4}, S(p) = 50p+8.$$

1.25. Витрати палива автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості руху v (км/год) описується функцією $V(v) = 10 - 0,2v + 0,025v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат палива за швидкості $v = 85$ км/год, визначену з точністю 4%.

1.26. З якою точністю може бути обчислений об'єм кулі, якщо її радіус обчислений з точністю до 1%.

1.27. На скільки процентів збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшиться на 2%.

1.28. З якою відотною похибкою допускається виміряти радіус кулі, щоб його об'єм можна було визначити з точністю 8%.

1.29. На скільки відсотків збільшиться величини $y = x^{0,75}$, якщо x збільшиться на: а) 1%; б) 2%; в) 3%.

1.30. Залежність між собівартістю продукції y і об'ємом x її виробництва задана формулою $y = 50 - 0,5x$. Знайти еластичність собівартості при випуску продукції $x = 30$.

1.31. Повні витрати y (грош. од.) залежні від об'єму x (тис. шт.) виробленої продукції задані функцією $y = x^3 - x^2 + 30x$. При якому об'ємі виробництва граничні та середні витрати співпадають? Знайти коефіцієнти еластичності граничних та середніх витрат при даному об'ємі.

1.32. Залежність попиту Q від ціни p задана функцією $Q = 30(12 - \sqrt{p})$. Знайти еластичність попиту. Визначити, при яких значеннях ціни попит буде: а) еластичним; б) нейтральним; в) нееластичним. Які рекомендації відносно ціни за одиницю продукції можна дати керівникам підприємства при $p = 100$ і $p = 150$.

1.33. Залежність між кількістю виготовлених деталей x (тис. шт.) та витратами на їх виготовлення y (грош. од.) задана рівнянням $y = \frac{8}{x} + 2$. Знайти еластичність витрат для виготовленої кількості деталей 10 тис. шт.

1.34. Знайти еластичність попиту і вказати стан доходу відповідного підприємства при $p = 5$ і $p = 15$, якщо дано рівняння кількості виготовлених і проданих виробів x з вартістю кожного виробу p .

а) $x = 100(5 - p)$, б) $x = 50(4 - \sqrt{p})$, в) $x = 200\sqrt{9 - p}$.

§ 2. Екстремум функцій

1. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою (спадною)* у проміжку (a, b) , якщо більшому значенню аргументу в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ – зростаюча, а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ – спадна.

Якщо диференційована функція зростає (спадає) у деякому проміжку, то похідна цієї функції невід’ємна (недодатня) у цьому проміжку.

2. Функція $f(x)$ має при $x = x_0$ *максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл точки x_0 , для усіх точок x якого виконується нерівність:

$$f(x_0) > f(x) \text{ для максимуму,}$$

$$f(x_0) < f(x) \text{ для мінімуму.}$$

Узагальненим терміном понять максимуму і мінімуму є екстремум.

3. *Необхідна умова екстремуму функції.*

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 і має у цій точці екстремум, то її похідна при $x = x_0$ дорівнює нулю ($f'(x_0) = 0$) або не існує.

Корені рівняння $f'(x_0) = 0$ і значення x , в яких $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними точками першого роду*.

4. *Перша достатня умова екстремуму функції.*

Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 або не існує і при переході через x_0 змінює свій знак, то функція $f(x)$ має у цій точці екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-”, і мінімум, якщо знак змінюється з “-” на “+”.

Друга достатня умова екстремуму функції.

Якщо в точці x_0 перша похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль, а її друга похідна $f''(x)$ не дорівнює нулю, то в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум: максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

5. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) $f''(x_0) > 0$, то крива $y = f(x)$ є *угнутою* на цьому інтервалі; якщо $f''(x_0) < 0$ на деякому інтервалі, то крива $y = f(x)$ *опукла* на цьому інтервалі. Точка кривої, в якій крива переходить від угнутості до опуклості або навпаки,

називається *точкою перегину* кривої.

6. *Необхідна умова існування точки перегину.*

Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну і $A(x_0, f(x_0))$ – точка перегину кривої $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ або не існує.

Значення x , при яких $f''(x) = 0$ або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

7. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має першу похідну $f'(x_0)$, а друга похідна $f''(x_0)$ у цій точці дорівнює нулю або не існує і при переході через x_0 змінює знак, то $A(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

8. *Загальна схема дослідження функції $y = f(x)$ і побудова її графіка.*

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.
2. Знаходимо інтервали неперервності та точки розриву.
3. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат.
4. Досліджуємо функцію на парність або непарність (осьова або центральна симетрія графіка).
5. Досліджуємо функцію на періодичність.
6. Знаходимо асимптоти графіка функції (горизонтальні, вертикальні або похилі).
7. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання і спадання функції.
8. Знаходимо точки екстремумів та екстремальні значення функції.
9. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції.
10. Знаходимо точки перегину і значення функції в точках перегину.
11. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат графік функції.

9. Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на $[a, b]$ потрібно:

- а) знайти всі критичні точки першого роду;
- б) обчислити значення функції на кінцях відрізка, тобто знайти $f(a)$ і $f(b)$, а також у тих критичних точках, які належать відрізку;
- в) із одержаних чисел вибрати найбільше і найменше значення функції на відрізку.

* *

*

Задача 1. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300$, $p = 40 - \frac{1}{10}x$ - залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції x , яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P = D - V$.

$$\text{В нас дохід} - D = p \cdot x = \left(40 - \frac{1}{10}x\right) \cdot x = 40x - \frac{1}{10}x^2,$$

$$\text{сумарні витрати} - V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300,$$

$$\text{прибуток} - P = 40x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^2 - 8x - 300 = -\frac{2}{15}x^2 + 32x - 300.$$

$$\text{Знайдемо маржинальний прибуток} - P' = -4/15 \cdot x + 32.$$

$$\text{Максимальний прибуток буде тоді, коли } P' = 0, \text{ оскільки } P'' = -4/15 < 0.$$

$$\text{При цьому } -4/15 \cdot x + 32 = 0; -4x + 480 = 0; x = 120.$$

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

$$\text{Маржинальні витрати} - V'(120) = \frac{1}{15} \cdot 120 + 8 = 16,$$

сумарні витрати

$$V(120) = \frac{1}{30} \cdot 120^2 + 8 \cdot 120 + 300 = 480 + 960 + 300 = 1740.$$

Максимальний прибуток

$$P(120) = -\frac{2}{15} \cdot 120^2 + 32 \cdot 120 - 300 = 1620.$$

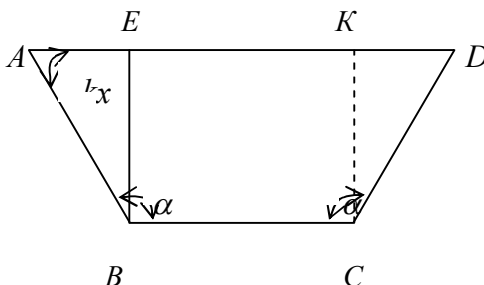
Задача 2. Під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапійний жолоб найбільшої місткості.

Розв'язування. Найбільшу місткість буде мати жолоб тоді, коли поперечний переріз буде найбільшим. У цій задачі поперечний переріз має форму рівносторонньої трапеції.

Позначимо через $x = \angle BAD$ і врахуємо, що ширина кожної дошки дорівнює a ($AB = BC = CD = a$). Тоді висота трапеції

$BE = a \sin x$. Окрім цього, $AE = a \cdot \cos x$, тому

$$AD = AE + EK + KD = a \cos x + a + a \cos x = a + 2a \cos x.$$



Площа трапеції дорівнює

$$S(x) = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{a + a + 2a \cos x}{2} \cdot a \sin x = a^2 (1 + \cos x) \sin x$$

$$(0 \leq x \leq \pi/2).$$

Похідна функції

$$\begin{aligned} S'(x) &= a^2 (-\sin^2 x + \cos x(1 + \cos x)) = a^2 (-\sin^2 x + \\ &+ \cos x + \cos^2 x) = a^2 (1 + \cos x)(2 \cos x - 1). \end{aligned}$$

Оскільки похідна на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ перетворюється в нуль

тільки при $x = \frac{\pi}{3}$, а $S(0) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2$, $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, то S приймає найбільше значення при $x = \frac{\pi}{3}$, тобто при $\alpha = 120^\circ$.

Крім цього,

$$S'' = a^2(-2\sin x \cos x - \sin x - 2\cos x \sin x) = -a^2 \sin x(4\cos x + 1).$$

При $x = \frac{\pi}{3}$ маємо $S'' = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, тобто $S'' < 0$. Це означає, що

при $x = \frac{\pi}{3}$ функція $S(x)$ досягає максимуму. Отже, якщо три дошки збити під кутом $\alpha = 120^\circ$, то водонапійний жолоб матиме найбільшу місткість.

Вправи

2.1. Знайти максимальний прибуток, який може отримати фірма, якщо відомі ціна одиниці продукції p грош. од. і функція витрат $V(x)$:

а) $V = x^3 + 3x$, $p = 15$;

б) $V = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 20$, $p = 10,5$;

в) $V = 0,1e^{0,5x} + 2x$, $p = 30$

2.2. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V(x)$, а $p(x)$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x , яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

а) $V = \frac{1}{12}x^2 + 5x + 300$, $p = 38 - \frac{1}{10}x$;

б) $V = \frac{1}{14}x^2 + 5x + 300$, $p = 30 - \frac{1}{11}x$;

$$\text{в) } V = \frac{1}{11}x^2 + 12x + 124, \quad p = 33 - \frac{1}{10}x;$$

$$\text{г) } V = \frac{1}{15}x^2 + 7x + 300, \quad p = 22 - \frac{1}{10}x.$$

2.3. Обсяг видобування кам'яного вугілля y (т/год) від кількості праці x (людино-год) заданий співвідношенням $y = \sqrt{x}$. Ціна 1 тонни вугілля – 800 грн., заробітна плата робітника – 30 грн./год. Знайти оптимальну кількість праці (кількість робітників), якщо інших витрати крім заробітної плати відсутні.

2.4. Нехай з кожної проданої одиниці товару y бюджет відрховується 8 грош. од. Задано $D(x) = 16x - x^2$ – функцію доходу та $V(x) = x^2 + 1$ – функція витрат фірми. Яку кількість товару необхідно виробити, щоб отримати максимальний прибуток фірми.

2.5. Сіткою довжиною 200 м потрібно обгородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

2.6. Визначити розміри відкритого басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

2.7. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу – 18 м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

2.8. Із квадратних бляшаних листів зі стороною 60 см виготовляють коробки без кришок, вирізаючи по кутах чотири квадратики і загинаючи смужки, що залишились. При яких розмірах вирізаних квадратиків виготовлять коробки найбільшого об'єму?

2.9. Із відходів основного виду виробництва, якими є бляшані листи прямокутної форми з сторонами 80 см і 50 см, роблять відкриті зверху ящики найбільшого об'єму, вирізавши по кутах рівні квадратики і загнувши бляху, щоб отримати бічні стінки. Якої довжини мають бути сторони вирізаних квадратиків?

2.10. Прямокутну земельну ділянку площею 90000 м^2 потрібно обкопати вздовж усієї межі ровом. Які повинні бути розміри ділянки, щоб витратити мінімум засобів на копання рову?

2.11. Потрібно побудувати канал, що має у перерізі форму

рівнобедреної трапеції, основа і бічні сторони якої мають по 8 м. Яка повинна бути ширина каналу, щоб він уміщав найбільшу кількість води?

2.12. Які мають бути розміри циліндричної посудини об'ємом $\pi \text{ м}^3$, відкритої зверху, щоб на її виготовлення пішло найменше матеріалу?

2.13. Бак для перевезення рідини має форму циліндра об'ємом V . Якими мають бути розміри циліндра, щоб кількість матеріалу, використаного для його виготовлення, була найменшою?

2.14. Залізний стержень довжиною l зігнутий у прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо площа його найбільша?

2.15. Бак об'ємом 4 м^3 , що має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

2.16. Полотняний намет об'ємом V має форму прямого кругового конуса. При якому співвідношенні висоти конуса до радіуса основи потрібна найменша кількість полотна для намету?

2.17. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецієподібної форми дорівнюють 16 м кожна. Знайти її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

2.18. Земельну ділянку прямокутної форми, розміщену вздовж прямого берега річки, потрібно огородити з трьох сторін. Обчислити мінімальну вартість огорожі, якщо її погонний метр коштує 10 гривень, а площа земельної ділянки становить 0,45 га.

2.19. Потрібно покрити фарбою зовнішню поверхню циліндричного бака об'ємом 785 м^3 . Які повинні бути розміри бака, щоб витратити мінімальну кількість фарби? Обчислити вартість фарбування бака, якщо вартість фарби та фарбування 1 м^2 коштує 60 коп.

2.20. Потрібно виготовити відкритий циліндричний бак об'ємом V . Матеріал, з якого виготовляють дно, коштує p_1 гривень за 1 м^2 , а вартість матеріалу бічної поверхні – p_2 за 1 м^2 . При якому співвідношенні радіуса дна до висоти бака витрати на матеріал будуть найменшими?

2.21. Кількість хворих під час епідемії грипу в 2006 році змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом

$$P(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}.$$

Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання і спадання епідемії.

2.22. Промислова продукція держави протягом t років після 2000 року змінювалась за законом $y = 500(1 + 215e^{-0,07t})^{-1}$.

Коли випуск продукції зростає, а коли – спадає?

2.23. Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом $P(t) = \frac{A}{1 + Be^{-t}}$, де A і B – постійні величини. Чому дорівнює максимальна швидкість зміни населення?

2.24. Завод виробляє x одиниць продукції на місяць, а сумарні витрати виробництва становлять $K = \frac{1}{30}x^2 + 20x + 500$. Залежність між питомою ціною p і кількістю одиниць продукції x , яку можна продати за цією ціною, становить $p = 30 - \frac{1}{10}x$. За яких умов прибуток буде максимальним?

2.25. Функція середніх витрат – $\Pi(x) = 4x$, а функція попиту – $p = 12 - 2x$. При якому обсязі виробництва прибуток буде найбільшим?

2.26. Крива повних витрат – $K = x^3 - 4x^2 + 10x$. При якому обсязі виробництва (x) середні витрати будуть мінімальними?

2.27. Витрати виробництва K залежать від обсягу продукції x за формулою $K(x) = -0,05x^3 + 3375x + 200$. При яких значеннях x витрати виробництва почнуть спадати?

2.28. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x - відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до

$x^2 \ln \frac{1}{x}$. Показати, що найбільша швидкість досягається, коли $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2.29. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею 216 м^2 , а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

2.30. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку даної площі. Якщо частину вже зведеної кам'яної стіни взяти за одну зі сторін паркана, то якими мають бути розміри ділянки, щоб будівництво обійшлося найдешевше?

2.31. Які найбільш економічно вигідні розміри циліндричного парового котла даної місткості?

2.32. Потрібно побудувати намет у формі правильної чотирикутної піраміди. Знайти відношення висоти намету до сторони основи, за якою при даній площині бічної поверхні об'єм намету є найбільшим.

2.33. Довжина і периметр поперечного перерізу поштової посилки у сумі мають становити 60 см. Знайти найбільший об'єм посилки:

- 1) якщо посилка має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним поперечним перерізом;
- 2) посилка має форму циліндра.

2.34. Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є 200 плит довжиною 0,5 м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

2.35. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якій повна поверхня дорівнює 30 м^2 .

2.36. Канал, ширина якого 27 м, під прямим кутом впадає в другий канал, шириною 64 м. Якої найбільшої довжини стовбур можна сплавити цією системою каналів?

2.37. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764 \text{ см}^3$, якщо сторони основи відносяться, як 3: 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

2.38. Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м^3 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

2.39. На сторінці друкований текст повинен займати $S \text{ см}^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по $a \text{ см}$, праве і ліве – по $b \text{ см}$. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу.

2.40. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см . Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим?

2.41. Знайти розміри такого циліндричного бака, який би мав найбільший об'єм при заданій повній поверхні S .

Питання для самоконтролю

1. Що таке похідна функції однієї змінної?
2. У чому полягає економічний зміст похідної?
3. У чому полягає економічний зміст функції?
4. Що таке еластичність функції?
6. Що виражає коефіцієнт еластичності?
7. В чому полягає геометричний зміст еластичності?
8. Яку функцію називають еластичною?
9. Яку функцію називають нееластичною?
10. Яку функцію називають цілком еластичною?
11. Яку функцію називають цілком нееластичною?
12. Який існує зв'язок між еластичністю і доходом?
13. Як визначається оптимальний розв'язок задачі фірми?
14. Як знайти граничний прибуток, якщо відомо дохід і витрати фірми?
15. Яке співвідношення між середніми і граничними витратами фірми?
16. Які необхідні і достатні умови екстремуму функції?

РОЗДІЛ 6. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. Поняття функцій багатьох змінних

1. Якщо змінна величина z залежить від n незалежних змінних $x, y, t, \dots, u, v$, то вона називається *функцією* цих змінних і позначається:

$$z = f(x, y, t, \dots, u, v).$$

Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи $x, y, t, \dots, u, v$, і при яких функція z має певні дійсні значення, називається *областю визначення* функції.

Лінією рівня функцій двох змінних $z = f(x, y)$ називається сукупність усіх точок на площині XOY , для яких виконується умова $f(x, y) = C$.

2. Частинний приріст функції z по змінній x :

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Частинний приріст функції z по змінній y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

3. *Частинною похідною* від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x = f'_x(x, y),$$

знайдена при сталому значенні y .

Частинною похідною від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній y називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

знайдена при сталому значенні x .

4. Еластичність функції попиту $Q(p_1, p_2)$ по ціні p_1 та по ціні p_2 :

$$E_{p_1}(Q) = \frac{p_1}{Q} Q'_{p_1} \quad E_{p_2}(Q) = \frac{p_2}{Q} Q'_{p_2}$$

5. Виробнича функція Кобба-Дугласа:

$y = AK^\alpha L^\beta$, де A, α, β - невід'ємні константи, причому $\alpha + \beta \leq 1$;

K – об'єм фондів у вартісному, або натуральному вираженні;

L – об'єм трудових ресурсів – число працівників, число людино-днів;

y – випуск продукції у вартісному, або натуральному вигляді;

α – еластичність випуску по фондах;

β – еластичність випуску по праці.

Величина $l = \frac{y}{L}$ називається *середньою продуктивністю праці*

(кількість продукції, виробленої одним робітником).

Величина $k = \frac{y}{K}$ називається *середньою фондовіддачею*

(кількість продукції, виробленої одним верстатом).

Величина $f = \frac{K}{L}$ називається *середньою фондоозброєністю*

(вартість фондів, які припадають на одиницю трудових ресурсів).

6. Рівняння обміну Фішера:

$$MV = PY.$$

Тут:

M – загальна кількість грошей, наявних в обороті;

V – швидкість їх обороту (скільки раз кожна гривня бере участь в розрахунках в середньому за рік);

P – рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів і послуг, що визначені відносно базового показника, прийнятого за одиницю);

Y – національний продукт або дохід (*національний продукт* – це всі готові товари і послуги, що виготовлені в економічній системі у вартісному виразі; *національний дохід* – це всі виплати, одержані домашніми господарствами: заробітна плата, рента, прибуток; національний продукт і національний дохід чисельно рівні).

*

*

*

Задача 1. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2006 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондovіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд:
 $y = AK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$$2000 \cdot 1000 = A \cdot (4 \cdot 10^6)^{\frac{1}{2}} (1000)^{\frac{1}{3}}, \text{ тобто}$$

$$2000 \cdot 1000 = A \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10; A = \frac{2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 10} = 100.$$

Отже, шукана виробнича функція $y = 100 \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$. Середня фондovіддача дорівнює $k = \frac{y}{K} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000$, $E_K(y) = \alpha = \frac{1}{2}$, $E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Економіка країни характеризується наступними показниками:

- а) реально-товарна маса дорівнює 600 млрд. грн.;
- б) час обороту гривні дорівнює 4 місяці;
- в) рівень дефляції 2%.

Визначити обсяг грошової маси.

Розв'язування. Із рівняння обміну Фішера $MV = PY$ знаходимо $M = \frac{PY}{V}$. Використавши дані із умови задачі, одержимо:

$$P = \frac{100\% - 2\%}{100\%} = 0,98, \quad V = \frac{t_{const}}{t_{обороту}} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$M = \frac{0,98 \cdot 6000 \cdot 10^9}{3} = 196 \cdot 10^9 \text{ грн.}$$

Задача 3. Задано функцію попиту $Q(p_1, p_2) = 500 - 6p_1^2 + 3p_2$ на товари A та B , де p_1 і p_2 – ціни цих товарів відповідно. Знайти коефіцієнти еластичності попиту відносно цін p_1 і p_2 , якщо $p_1 = 5$, $p_2 = 30$.

Розв'язування. Використовуючи формули еластичності функції попиту, отримаємо

$$E_{p_1}(Q) = \frac{p_1}{Q} Q'_{p_1} = \frac{p_1}{500 - 6p_1^2 + p_2} (-12p_1) = \frac{-12p_1^2}{500 - 6p_1^2 + p_2},$$

$$E_{p_2}(Q) = \frac{p_2}{Q} Q'_{p_2} = \frac{p_2}{500 - 6p_1^2 + p_2} \cdot 3 = \frac{3p_2}{500 - 6p_1^2 + p_2}.$$

При $p_1 = 5$, $p_2 = 30$ маємо $E_{p_1}(Q) = -0,68$, $E_{p_2}(Q) = 0,2$.

Вправи

1.1. Обсяг витрат на продаж нового продукту x залежить від часу t (у тижнях) та витрат A (у гривнях) підприємства на рекламу і характеризується залежністю:

$$x = 200(5 - e^{-0,002A})(1 - e^{-t}).$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t = 1$, $A = 400$.

1.2. Задана функція попиту на товар A :

$$X_A = 500 + 3P_B - 6P_A^2,$$

де P_A і P_B – вартість одиниці товарів A і B відповідно. Визначити

еластичність функції попиту відносно P_A і P_B , коли $P_A = 5$, $P_B = 30$.

1.3. Знайти еластичність функції пропозиції S при заданих цінах p_1 , p_2 :

а) $S = p_1 + 4p_1p_2 + p_2^2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$;

б) $S = 2p_1^3p_2 + p_2^2 + p_1^3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$;

в) $S = p_1^2 + 5p_1p_2^2 + 2p_2^3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$;

г) $S = 5p_1p_2^2 + p_2^3 + 3p_2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 5$.

1.4. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. З метою збільшення випуску продукції на $a\%$, необхідно збільшити фонди на $b\%$, або чисельність працівників на $c\%$. В 2016 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M = 3000 \text{ грн}$, а всього робітників L . Основні фонди оцінюються в $K \text{ млн. грн}$. Записати виробничу функцію y , величину середньої фондівіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

а) $a = 23\%$, $b = 46\%$, $c = 69\%$, $L = 125$, $K = 5 \text{ млн. грн}$.

б) $a = \frac{47}{2}\%$, $b = 47\%$, $c = \frac{148}{2}\%$, $L = 250$, $K = 9 \text{ млн. грн}$.

в) $a = 24\%$, $b = 48\%$, $c = 72\%$, $L = 375$, $K = 9 \text{ млн. грн}$.

г) $a = \frac{49}{2}\%$, $b = 49\%$, $c = \frac{147}{2}\%$, $L = 500$, $K = 9 \text{ млн. грн}$.

д) $a = 25\%$, $b = 50\%$, $c = 75\%$, $L = 625$, $K = 9 \text{ млн. грн}$.

1.5. Економіка країни характеризується показниками: а) реально-товарна маса рівна 8000 млрд. грн.; б) час обороту гривні 6 місяців; в) рівень дефляції 3 %. Визначити обсяг грошової маси.

§ 2. Екстремум функції багатьох змінних

1. Необхідні умови існування екстремуму.

Якщо функція $f = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

або не існують.

2. Достатні умови існування екстремуму.

Нехай у точці $M_0(x_0, y_0)$ виконуються необхідні умови існування екстремуму та існують неперервні частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C.$$

Розглянемо число $D = AC - B^2$.

Тоді:

- 1) функція $z = f(x, y)$ має максимум, якщо $D > 0$, $A < 0$;
- 2) функція $z = f(x, y)$ має мінімум, якщо $D > 0$, $A > 0$;
- 3) функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму, якщо $D < 0$;
- 4) якщо $D = 0$, тоді екстремум в точці $M_0(x_0, y_0)$ може існувати, а може і не існувати.

3. Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції, досягнутий при умові, коли змінні x і y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння зв'язки).

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа потрібно:

- 1) записати функцію Лагранжа:

$$U(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y);$$

- 2) знайти критичні точки $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

3) перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) якщо в точці $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & U''_{xx}(M_k) & U''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & U''_{xy}(M_k) & U''_{yy}(M_k) \end{vmatrix} \text{ додатний, то точка } M_k \text{ є точкою}$$

максимуму:

$$z_{\max} = f(M_k) = f(x_k, y_k);$$

б) якщо визначник $\Delta < 0$, тоді точка M_k є точкою мінімуму:

$$z_{\min} = f(M_k) = f(x_k, y_k).$$

4. Метод найменших квадратів.

а) лінійна залежність: $y = ax + b$, де a і b знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

Невідомі a і b можна знайти також використовуючи метод найменших квадратів у матричній формі, який полягає у виконанні наступних кроків:

1-й крок – знаходження добутку матриць $X'X$,

$$\text{де } X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \text{ і } X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix};$$

2-й крок – знаходження оберненої матриці $[X'X]^{-1}$;

3-й крок – знаходження добутку матриці X' і вектора Y , де

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix};$$

4-й крок – знаходження добутку результатів кроку 2 і кроку 3

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = [X'X]^{-1} \cdot (X'Y).$$

б) параболічна залежність: $y = ax^2 + bx + c$, де a , b , c знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

* *

*

Задача 1. Мале підприємство виробляє товари A і B . Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2 + 0,1y^2$.

Визначити кількість одиниць товарів A і B , яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2 + 0,1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів x товару A і y товару B , необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні I-го порядку
$$\begin{cases} V'_x = -14 + 0,4x \\ V'_y = -10 + 0,2y. \end{cases}$$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -14 + 0,4x = 0 \\ -10 + 0,2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні II порядку: $A = V''_{xx} = 0,4$, $B = V''_{xy} = 0$, $C = V''_{yy} = 0,2$.

Обчислимо $D = AC - B^2 = 0,4 \cdot 0,2 - 0 = 0,08 > 0$ і $A = 0,4 > 0$.

Отже, функція витрат при $x = 35$, $y = 50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару A і 50 одиниць товару B .

Задача 2. Компанія виробляє два види взаємозамінної продукції виду A і B . Аналітики фірми експертно визначили функцію сумарних витрат, які необхідні для випуску продукції

$$Z(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2.$$

Відомо, що сумарний обсяг продукції обох видів буде дорівнювати 42 одиницям. Перед менеджерами компанії поставлене завдання: визначити обсяги продукції A і B , при яких сумарні затрати на виробництво будуть мінімальними.

Розв'язування. Введемо позначення: x – кількість продукції виду A (одиниць), y – кількість продукції виду B (одиниць).

Математична модель задачі набуває вигляду: знайти мінімум сумарних витрат

$$Z(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2 \rightarrow \min$$

за обмежень:

а) стосовно необхідного сумарного обсягу продукції обох видів

$$x + y = 42 ;$$

б) стосовно невід'ємності змінних

$$x \geq 0, y \geq 0 .$$

Задачу розв'язуємо з допомогою методу множників Лагранжа. Для цього зробимо перетворення першого обмеження, представивши його таким чином: $42 - x - y = 0$.

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, y, \lambda) = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda \cdot (42 - x - y) .$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку та прирівнюємо їх до нуля.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 16x - y - \lambda, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -x + 24y - \lambda, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 42 - x - y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ 42 - x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ x + y = 42. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему трьох рівнянь із трьома невідомими за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -1 & -1 \\ -1 & 24 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 24 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 16 - 0 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0 + 1 + 1 + 24 + 16 - 0 = 42,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 24 & -1 \\ 42 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 24 \cdot 42 = 25 \cdot 42 = 1050,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 42 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 16 \cdot 42 = 17 \cdot 42 = 714,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 42 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 42 - 42 = 383 \cdot 42 = 15286,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25 \cdot 42}{42} = 25,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{17 \cdot 42}{42} = 17,$$

$$\lambda = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{383 \cdot 42}{42} = 383.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 16; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 24; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1.$$

$$A = 16, \quad B = -1, \quad C = 24.$$

Обчислюємо $D = AC - B^2 = 383$.

Оскільки $D > 0$, $A > 0$, то знайдена точка екстремуму з координатами $(25; 17)$ є точкою мінімуму функції.

Отже, компанія понесе мінімальні сумарні затрати, якщо випускатиме продукції виду $A - 25$ одиниць, продукції виду $B - 17$ од. Ці затрати становитимуть:

$$Z_{\min} = Z(25; 17) = 8 \cdot 25^2 - 25 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 = 5000 - 425 + 3468 = 8043 \text{ (грн)}.$$

Задача 3. Величина товарообміну x (тисяч гривень) і витрати на обіг y (гривень) подані у таблиці

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	788,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x .

Розв'язування. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки.

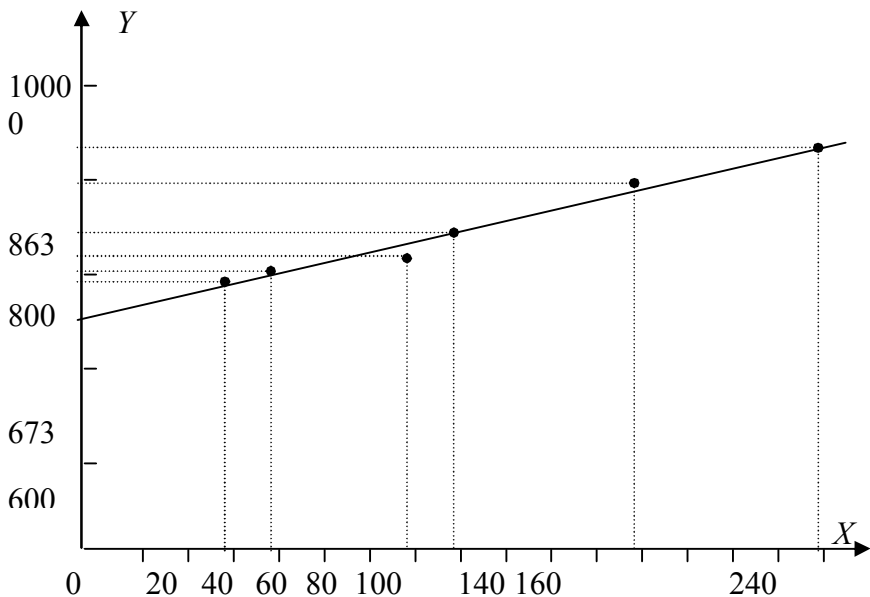


Рисунок дає змогу зробити висновок про існування лінійної залежності між y і x , тобто у вигляді $y = ax + b$. Параметри a , b знаходимо із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Будуємо розширену таблицю:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
60	551	33060	3600
80	576	46080	6400
140	628,5	87990	19600
160	673	107680	25600
240	788,5	184440	57600
320	863	276160	102400
Σ 1000	4080	735410	215200

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n = 6$:

$$\begin{cases} 215200a + 1000b = 735410 \\ 1000a + 6b = 4080 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 215,2a + b = 735,1 \\ 166,67a + b = 680 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a \approx 1,13$, $b \approx 489,71$. Одержали функціональну залежність вигляду $y = 1,13x + 489,71$.

Задача 4. Бюро економічного аналізу фабрики “Світоч” оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок. Для такої оцінки вони мають досвід праці у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарного знака і т. ін.). У цих зонах вони зафіксували протягом однакового періоду обсяги продажів (y , млн. коробок), витрати (x , млн. грн.) фірми, наведені в таблиці. Припустивши, що між y і x існує лінійна залежність $y = ax + b$, знайти її вигляд методом найменших квадратів у матричній формі.

y_i	25	30	35	45	65
x_i	5	6	9	12	18

Розв'язування.

1) Знаходимо добуток матриць

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & 610 \end{bmatrix}.$$

2) Знаходимо обернену матрицю

$$\left[X^T X \right]^{-1} = \frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Знаходимо добуток матриці X^T і вектора Y :

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 45 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix}.$$

4) Знаходимо добуток

$$\frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Одержали функціональну залежність вигляду $y = 3x + 10$.

Вправи

2.1. Мале підприємство виробляє товари A і B . Загальні щоденні витрати $V(x)$ (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі. Визначити кількість одиниць товарів A і B , яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

- а) $V(x) = 398 - 12x - 3y + 0,5x^2 + 0,1y^2$; б) $V(x) = 441 - 14x - 4y + 0,7x + 0,1y$;
 в) $V(x) = 299 - 2x - 11y + 0,1x^2 + 0,2y^2$; з) $V(x) = 33 - 3x - 12y + 0,1x^2 + 0,5y^2$.

2.2. Прибуток фірми визначається наступною формулою $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$, де $f(x_1, x_2)$ – виробнича функція фірми, p_0 – ринкова ціна продукції, яку випускає фірма, p_1 , p_2 – ринкова ціна 1-го і 2-го ресурсів, x_1 , x_2 – кількість 1-го і 2-го ресурсів, які затрачає фірма.

Визначити оптимальну кількість ресурсів, при якій фірма отримає найбільший прибуток, і максимальний прибуток, якщо

$$f(x_1, x_2) = 0,5\sqrt{x_1 x_2} - 0,5x_2^2 + 3,5x_2, \quad p_0 = 2, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 1.$$

2.3. Фірма планує витрати 20000 грн. на рекламу. Одна хвилина реклами на телебаченні коштує 1000 грн., а на радіо – 500 грн. Аналітики фірми прогнозують збільшення приросту доходу фірми від використання рекламних засобів за такою функцією:

$$Z(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y,$$

де $Z(x,y)$ – приріст доходу фірми (тис. грн.) від реклами; x – тривалість (хв.) рекламного ролика на телебаченні; y – тривалість (хв.) рекламного ролика на радіо. Яким чином потрібно поєднати рекламу на телебаченні та радіо, щоби отримати максимальне значення приросту доходу фірми, економно використавши при цьому наявні грошові засоби на рекламу?

2.4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією

$P(x_1, x_2) = 8000 - x_1^2 - x_2^2 + 40x_1 + 60x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

2.5. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією

$P(x_1, x_2) = 25000 - x_1^2 - x_2^2 + 30x_1 + 100x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 155$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2 , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

2.6. У таблиці задані величини товарного обігу x (тис. гривень) і витрати обігу y (гривень).

x	60	80	120	160	240	320
y	5510	5760	6235	6750	7685	8635

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

2.7. У таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га (x) та урожай пшениці (y) у центнерах.

x	1	2	3	5	7	9	11	12
y	24	26,5	28	37	40	46	49	50,5

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити параметри цієї залежності, використовуючи метод найменших квадратів через систему нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

2.8. У таблиці наведені дані, що характеризують зв'язок між висотою дерева h і його діаметром d на фіксованому рівні:

Діаметр (у см)	8	12	16	20	24	28	32	36
Висота (у м)	10,5	12,0	15,0	16,4	17,0	22,0	23,0	35,0

Припустивши, що залежність лінійна, встановити її аналітичну форму.

2.9. Методом найменших квадратів знайти лінійну залежність між живою вагою свиней і їх віком за такими даними:

Вік (у тижн.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Жива вага (у кг)	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

2.10. Експлуатаційні витрати на утримання автоматичних телефонних станцій залежно від потужності АТС подані у таблиці:

Потужність АТС (у тис. абонентів)	1	2	3	4	5	6	7	8
Експлуат. витрати на рік (у тис. грн.)	330	340	350	359	364	371	378	383

Вивести емпіричну формулу, що відповідає цій залежності.

2.11. У таблиці задані витрати пального на 100 км (y) залежно від пробігу автомобіля (x) тис. км.

x	1	5	15	30	50	60	70	100	120	150
y	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6	22,9	25	27,4	32,5

Обрати вигляд залежності між x та y і визначити параметри цієї залежності.

2.12. Виробництво цементу x_i (у сотнях тонн) і витрати електроенергії y_i (на 1 тону цементу в рік) за визначений період роботи цементної промисловості склали величини, які зведені у наступній таблиці:

x_i	8	10	12	13,5
y_i	80	72	65	70

Знайти пряму, яка відображає залежність y від величини x , використовуючи метод найменших квадратів через систему

нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

2.13. Середній урожай люцерни (за один укіс) в залежності від глибини зрошення характеризується таблицею:

Глибина зрошення (в дюймах)	0	12	18	24	30	36	48	60
Середній урожай (в т/акр)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0	8,4

Побудувати квадратичну інтерполяційну формулу для цієї залежності (1 дюйм = 25,4 мм, 1 акр = 4046,86 м² = 0,404686 га – неметричні одиниці англomовних країн).

2.14. Продуктивність праці робітника фабрики меблів „Нова” за певну годину робочого дня характеризується табл.:

Година робочого дня (x)	1	2	3	4	5	6	7
Продуктивність праці (y)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0

Знайти залежність між змінними y та x та обчислити продуктивність праці робітника y при $x=8$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають функцією багатьох змінних?
2. Що називають функцією двох змінних?
3. Що таке лінії рівня?
4. Які функції багатьох змінних використовуються в економічній теорії?
5. Що таке частинні і повні прирости функції багатьох змінних?
6. Що називається частинними похідними функції багатьох змінних?
7. Що називають градієнтом функції?
8. Що характеризує градієнт функції багатьох змінних?
9. Який зв'язок між градієнтом функції багатьох змінних та її лінією рівня?

10. Що таке точки локального екстремуму функції багатьох змінних?
11. Як формуються необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
12. Як формуються достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
13. Як знаходиться найбільше і найменше значення функції багатьох змінних в області?
14. Яка основна ідея методу найменших квадратів?
15. Як обчислити коефіцієнти в методі найменших квадратів у випадку лінійної залежності?
16. Як обчислити коефіцієнти в методі найменших квадратів у випадку квадратичної залежності?
17. Що таке умовний екстремум функції багатьох змінних?
18. Як знаходиться умовний екстремум функції багатьох змінних?
19. В чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа для знаходження точок умовного екстремуму?
20. Наведіть приклади економічних функцій?
21. Яка функція називається виробничою?
22. Яку виробничу функцію називають функцією Кобба-Дугласа?
23. Як знаходити середню продуктивність праці?
24. Як знаходиться середня фондовіддача?
25. Як знаходиться середня фондоозброєність?
26. Яке рівняння називається рівнянням обміну Фішера?
27. Як визначається еластичність виробництва?
28. Як визначається коефіцієнт еластичності попиту товару відносно його ціни?

РОЗДІЛ 7. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

§ 1. Невизначений інтеграл

1. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для заданої функції $f(x)$, якщо для довільного x з області визначення $f(x)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

2. Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для заданої функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається $\int f(x)dx$.

Отже $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Таблиця основних інтегралів:

$$1) \quad \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1);$$

$$2) \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$3) \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$4) \quad \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$5) \quad \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$6) \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$7) \quad \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$

$$8) \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, \quad (-\arccos \frac{u}{a} + C);$$

$$9) \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

- 10) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \quad (-\frac{1}{a} \operatorname{arccctg} \frac{u}{a} + C);$
- 11) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$
- 12) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$
- 13) $\int e^u du = e^u + C;$
- 14) $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$
- 15) $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C;$
- 16) $d \int f(u) du = f(u) du;$
- 17) $\int dF(u) = F(u) + C;$
- 18) $\int kf(u) du = k \int f(u) du;$
- 19) $\int [f_1(u) \pm f_2(u)] du = \int f_1(u) du \pm \int f_2(u) du.$

3. Інтеграл $\int f(x) dx$ обчислюється за допомогою підстановки $x = \varphi(t)$, тобто має місце рівність:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Тут $x = \varphi(t)$ – диференційована функція нової змінної t має обернену $t = \varphi(x)$.

При заміні $t = \varphi(x)$ отримуємо формулу:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

4. Формула інтегрування частинами

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Тут за u беруть функцію, що при диференціюванні спрощується, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, що має множник dx , інтеграл від якої відомий або може бути знайдений.

*

*

*

Задача 1. Заданий граничний дохід фірми $D'(x) = 200 - 2x$, де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x) = \int (200 - 2x)dx = 200x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 200x - x^2 + C.$$

Якщо врахувати, що $D(0) = 0$, то $D(0) = 0 = 200 \cdot 0 - 0^2 + C$.
Звідси $C = 0$.

Отже, сумарний дохід фірми $D(x) = 200x - x^2$.

Задача 2. Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x) = 12 - 0,04x$. Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$\begin{aligned} D(x) &= \int D'(x)dx = \int (12 - 0,04x)dx = 12 \int dx - 0,04 \int xdx = \\ &= 12x - 0,04 \frac{x^2}{2} + C = 12x - 0,02x^2 + C. \end{aligned}$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0 = 12 \cdot 0 - 0,02 \cdot 0^2 + C$, $C = 0$.

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x) = 12x - 0,02x^2$.

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P) проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x) = P \cdot x = 12x - 0,02x^2$.

Звідси $P = 12 - 0,02x$.

Вправи

Використовуючи невизначений інтеграл, розв'язати задачі

економічного змісту:

1.1. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50$, де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

1.2. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0,04x$. Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

1.3. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0,04x$. Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

1.4. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0,03x$. Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

1.5. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \frac{x}{100} \sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

§ 2. Застосування визначених інтегралів

1. *Визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя інтегральної суми при умові, що довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(\alpha_i) \Delta x_i.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то границя інтегральної суми існує і не залежить від способу ділення відрізка $[a; b]$ на частини і від вибору точок α_i .

2. Основні властивості визначеного інтеграла:

$$2.1. \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

$$2.2. \quad \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

$$2.3. \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b .$$

$$2.4. \quad \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx .$$

$$2.5. \quad \int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx .$$

$$2.6. \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b .$$

2.7. Якщо m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізьку $[a; b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

$$2.8. \quad \text{Якщо } f(x) \leq \varphi(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx, \quad x \in [a; b].$$

3. Правила обчислення визначених інтегралів:

3.1. Формула Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

3.2. Заміна змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на

відрізку $\alpha \leq t \leq \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функція неперервна на $[\alpha; \beta]$.

3.3. Інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неперервно диференційовані функції на відрізку $[a; b]$.

3.4. Якщо $f(x)$ – непарна функція, тобто $f(-x) = -f(x)$, то:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, тобто $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

4. *Економічний зміст визначеного інтеграла*: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством з продуктивністю праці $y = f(t)$ за інтервал часу $[0; t]$, тобто

$$q = \int_0^t f(t) dt.$$

5. *Площа криволінійної трапеції*, обмеженої кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), двома ординатами $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a; b]$ на осі OX , обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

6. *Площа фігури*, обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) та двома прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

7. Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ на осі OX і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі OX , то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Аналогічно, об'єм тіла обертання навколо осі OY знаходиться за формулою:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

8. Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) та прямими $x = a$, $x = b$, обертається навколо осі OX , то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

9. Нехай $V(x)$ – функція загальних видатків на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маржинальних видатків. $P'(x)$, $D'(x)$ – функції, відповідно, маржинальних прибутку та доходу. Тоді при зростанні кількості одиниць продукції від a до b , зміна загальних видатків обчислюється за формулою $\int_a^b V'(x) dx = V(x) \Big|_a^b = V(b) - V(a)$.

При зростанні реалізації продукції зміни прибутку і доходу визначимо за формулами: $\int_a^b P'(x) dx = P(x) \Big|_a^b = P(b) - P(a)$,

$$\int_a^b D'(x) dx = D(x) \Big|_a^b = D(b) - D(a).$$

10. Якщо $V(t)$, $P(t)$, $D(t)$ відповідно функції витрат, прибутку та доходу від часу, то їх *середні значення витрат, прибутку, доходу* підприємства за інтервал часу $t \in [t_1; t_2]$ обчислюються за формулами:

$$V_{\text{сер.}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt, \quad P_{\text{сер.}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt, \quad D_{\text{сер.}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} D(t) dt.$$

11. Метою всякого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Тоді $P(t) = D(t) - V(t)$. Функція досягає свого екстремуму, якщо її похідна рівна 0. Тобто $P'(t) = D'(t) - V'(t) = 0$. Тобто $D'(t) = V'(t)$. Визначимо момент t_k в який швидкість зміни доходу та видатків зрівнюються. Загальний прибуток за час t_k можна знайти за формулою

$$P(t_k) = \int_0^{t_k} P'(t) dt = \int_0^{t_k} (D'(t) - V'(t)) dt.$$

12. Якщо капітал $K(t)$ збільшується за одиницю часу t на обсяг чистих інвестицій $I(t)$, то чисті інвестиції – це похідна від капіталу за часом t , тобто $I(t) = K'(t)$. Приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2 знаходиться так:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

13 Графік функції $y = f(x)$, яка описує дійсний розподіл доходів населення держави, називається *кривою Лоренца*.

Коефіцієнтом нерівності розподілу доходів кривої Лоренца (*коефіцієнтом Джіні*) називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y = x$ до площі фігури, яка лежить нижче прямої $y = x$ (прямокутний трикутник: $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $y = x$). Коефіцієнт Джіні (k) показує нерівність в розподілі доходів населення і завжди задовольняє співвідношення: $0 \leq k \leq 1$. Коли $k = 0$, доходи населення розподілено рівномірно, а

коли $k = 1$, нерівномірність розподілу доходів найбільша. Аналогічні міркування і в задачі про розподіл прибуткового податку.

14. Величина початкового вкладу K_0 при умові, що відомий вклад $K_t = g(t)$, одержаний при неперервному нарахуванні відсотків через t років за річної ставки p становить $K_0 = g(t)e^{-\frac{p}{100}t} = g(t)e^{-it}$. Тоді повна дисконтна сума за T років знаходиться за формулою

$$K_d = \int_0^T g(t)e^{-it} dt$$

15. Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$ (рис. 1), де p – ціна одиниці товару, а q – обсяг товару. p_0 – рівноважна ціна, а q_0 – обсяг товару, який реалізується за ціною p_0 .

Надлишок споживача S_H – це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0. \quad (1)$$

Розглянемо криву пропозиції деякого товару $p = g(q)$ (рис. 2.) *Додаткова вартість* виробника – це різниця між вартістю створеного продукту і вартістю факторів виробва:

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 s_0 - \int_0^{s_0} g(s) ds. \quad (2)$$

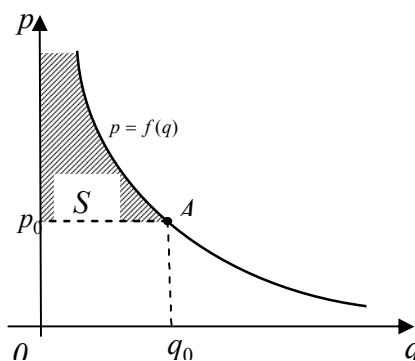


Рис. 1.

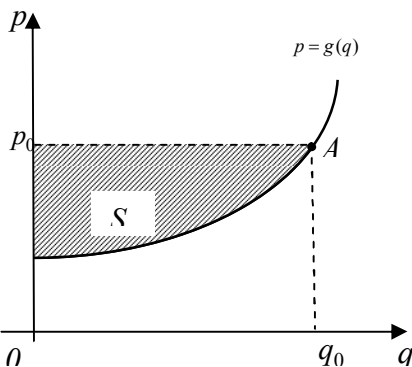


Рис. 2.

*

*

*

Задача 1. Продуктивність праці робітника задано функцією $f(t) = 6t - t^2$. Робочий день працівника становить 6 год. Визначити обсяг виробленої продукції: а) за робочий день; б) за дві останні години роботи.

Розв'язування.

$$\text{а) } q_1 = \int_0^6 f(t) dt = \int_0^6 (6t - t^2) dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^6 = 36 \text{ од. пр.};$$

$$\text{б) } q_2 = \int_4^6 f(t) dt = \int_4^6 (6t - t^2) dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_4^6 = 9\frac{1}{3} \text{ од. пр.}$$

Задача 2. Знайти обсяг продукції, виробленої підприємством за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1 + 0,05t)e^{2t}$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} q &= \int_0^4 (1 + 0,05t)e^{2t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + 0,05t, \quad du = 0,05dt \\ dv = e^{2t} dt, \quad v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right| = \frac{1 + 0,05t}{2} e^{2t} \Big|_0^4 - \\ &- \frac{1}{40} \int_0^4 e^{2t} dt = 0,6e^8 - 0,5e^0 - \frac{1}{80} e^{2t} \Big|_0^4 = 0,6e^8 - 0,5 - \frac{1}{80} (e^8 - e^0) = \\ &= 0,5875e^8 - 0,4875 \text{ (од.пр.)}. \end{aligned}$$

Задача 3. Знайти середній прибуток за 8 місяців поточного року, якщо функція прибутку фірми має вигляд $P(t) = 3t^2 - 2t - 1$, де t час у місяцях.

Розв'язування. Середній прибуток фірми потрібно знайти за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 8$.

$$P_{\text{сер.}} = \frac{1}{8} \int_0^8 (3t^2 - 2t - 1) dt = \frac{1}{8} (t^3 - t^2 - t) \Big|_0^8 = \frac{1}{8} (8^3 - 8^2 - 8) = 55 \text{ ум. грош. од.}$$

Задача 4. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}, \quad D'(t) = 17 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$:

$$5 + 2\sqrt[3]{t^2} = 17 - \sqrt[3]{t^2}, \quad 3\sqrt[3]{t^2} = 12, \quad \sqrt[3]{t^2} = 4, \quad t = 8.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^8 [D'(t) - V'(t)] dt = \int_0^8 (17 - \sqrt[3]{t^2} - 5 - 2\sqrt[3]{t^2}) dt = \\ &= \int_0^8 (12 - 3t^{2/3}) dt = \left(12t - 3 \cdot \frac{t^{5/3}}{5/3} \right) \Big|_0^8 = 96 - \frac{9}{2} \cdot 32 = 38,9 \text{ (млн. грн.)}. \end{aligned}$$

Задача 5. За даними чистими інвестиціями $I(t) = 30000\sqrt{t}$ знайти приріст капіталу з першого по четвертий рік і визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 20000000 умов. грош. од.

Розв'язування. Приріст капіталу знайдемо за інтервал часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$.

$$\Delta K = K(4) - K(1) = \int_1^4 30000\sqrt{t} dt = 20000\sqrt{t^3} \Big|_1^4 = 140000 \text{ умов. грош. од.}$$

За умовою задачі

$$\Delta K = K(t_k) - K(0) = \int_0^{t_k} 30000\sqrt{t} dt = 20000\sqrt{t^3} \Big|_0^{t_k} = 20000000,$$

тобто $\sqrt{t_k^3} = 1000$, звідки $t_k = 10$. Отже, потрібно 10 років, щоб

приріст капіталу досяг 20 млн. умов. грош. од.

Задача 6. Нехай $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де x – відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язування. З малюнка видно, що $k = \frac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

$$S_{OAm} = \int_0^1 (x - 2 + \sqrt{4 - x^2}) dx = \int_0^1 x dx - 2 \int_0^1 dx + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Для знаходження $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$ введемо заміну $x = 2 \sin t$, тоді нижня

межа $t = 0$, а верхня $t = \frac{\pi}{6}$.

Обчислюємо

$$\begin{aligned} S_{OAm} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 - \sin^2 t} 2 \cos t dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,41. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.$$

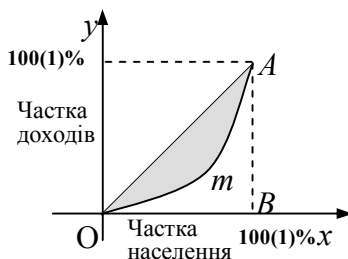
Тому $k = \frac{0,41}{0,5} = 0,82$. Великий коефіцієнт k показує

нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

Задача 7. Визначити дисконтний дохід за 3 роки за процентної ставки 10%, якщо початкові капіталовкладення становили 20 млн. грн., а очікуване щорічне зростання капіталу – 2 млн. грн.

Розв'язування. Капіталовкладення задаються функцією $g(t) = 20 + 2t$, а $i = p/100 = 0,1$.

Дисконтна сума капіталовкладень:



$$\begin{aligned}
K_d &= \int_0^3 (20 + 2t)e^{-0,1t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 20 + 2t, \quad du = dt \\ dv = e^{-0,1t} dt, \quad v = \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} \end{array} \right| = \\
&= -10e^{-0,1t} (20 + 2t) \Big|_0^3 + 10 \int_0^3 e^{-0,1t} dt = 200 - 260e^{-0,3} - 100e^{-0,1t} \Big|_0^3 = \\
&= 300 - 360e^{-0,3} \approx 33 \text{ млн. грн.}
\end{aligned}$$

Задача 8. Знайдемо надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p = f(q) = 45 - 4q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 3$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0 = 3$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 45 - 4 \cdot 3^2 = 9.$$

Використовуючи формулу (1), матимемо:

$$\begin{aligned}
S_H &= \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 = \int_0^3 (45 - 4q^2) dq - 9 \cdot 3 = \\
&= \left(45q - \frac{4q^3}{3} \right) \Big|_0^3 - 27 = 45 \cdot 3 - 36 - 27 = 72.
\end{aligned}$$

Задача 9. Знайдемо додаткову вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією $p = f(q) = 12 + 5q^3$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 4$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0 = 4$ у функцію пропозиції, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 12 + 5 \cdot 4^3 = 12 + 320 = 332.$$

Використовуючи формулу (2), матимемо:

$$\begin{aligned}
S_{\text{дод. вар.}} &= p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq = 332 \cdot 4 - \int_0^4 (12 + 5q^3) dq = \\
&= 1328 - \left(12q + \frac{5q^4}{4} \right) \Big|_0^4 = 1328 - (12 \cdot 4 + 320) = 1328 - 368 = 960.
\end{aligned}$$

Задача 10. Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції мають вигляд $p = 64 - 2q^2$, $p = 16 + 4q$ відповідно.

Розв'язування. Розв'язавши систему $\begin{cases} p = 64 - 2q^2, \\ p = 16 + 4q; \end{cases}$ знайдемо

точку рівноваги: $p_0 = 32$, $q_0 = 4$. Тоді, використовуючи формули (1) і (2), одержимо:

$$\begin{aligned} S_H &= \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 = \int_0^4 (64 - 2q^2) dq - 32 \cdot 4 = \left(64q - \frac{2q^3}{3} \right) \Big|_0^4 - 128 = \\ &= 64 \cdot 4 - \frac{128}{3} - 128 = 128 - \frac{128}{3} = \frac{256}{3} = 85\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{дод. вар.}} &= p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq = 32 \cdot 4 - \int_0^4 (16 + 4q) dq = 128 - \left(16q + 2q^2 \right) \Big|_0^4 = \\ &= 128 - (16 \cdot 4 + 32) = 128 - 96 = 32. \end{aligned}$$

Вправи

2.1. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, якщо об'єм продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць, і вказати об'єм продукції, при якому витрати мають середнє значення.

2.2. Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ і доходу $D'(t)$ підприємства. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

а) $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t}$, $D'(t) = 14 - \sqrt{t}$;

б) $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t}$, $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t}$;

в) $V'(t) = 7 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt{t}$;

г) $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 31 - \sqrt[3]{t^2}$;

д) $V'(t) = 22 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут t вимірюють у роках, а витрати $V(t)$ і дохід $D(t)$ – у млн.

гривень.

2.3. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією $y = -0,0033t^2 - 0,08t + 20,96$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити об'єм випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

2.4. Продуктивність праці протягом дня описується функцією

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \leq 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2 + 13t - 40, & 5 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

де t – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

2.5. Знайти обсяг випуску продукції фірми за 5 років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (2t + 1)e^{3t}$.

2.6. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

2.7. Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0,006t^2 - 0,3t + 75$, а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0,003t^2 - 0,4t + 56$, де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

2.8. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Тут x відсоток населення, а y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

2.9. Нехай $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, крива Лоренца визначена

дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку. Тут y – відсоток загального прибуткового податку; x – відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джіні).

2.10. Капітальні інвестиції фірми “БІОС” характеризуються функцією $I(t) = 9000t^{1/2}$. Знайдіть:

- 1) приріст капіталу за три роки;
- 2) проміжок часу, за який приріст становитиме 150000 у.о.

2.11. Під будівництво задано неперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млрд. грн./рік) протягом 10 років із річною процентною ставкою $p = 5\%$. Знайти дисконтну вартість цього потоку.

2.12. Визначити дисконтний дохід за 5 років за процентної ставки 10%, якщо початкові капіталовкладення становили 40 млн грн., а очікуване щорічне зростання капіталу – 2 млн грн.

2.13. Функція маржинальних витрат має вигляд: $V'(x) = 23,5 - 0,01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

2.14. Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = 9 - q^2$, де q – обсяг товару (у шт.), p – ціна одиниці товару, а рівновага на ринку даного товару досягається при $p_0 = 5$. Визначити споживчий надлишок.

2.15. Відомо, що попит на деякий товар описується функцією $q = \frac{64000}{p^3}$, а пропозиція даного товару характеризується функцією $q = 250p$. Знайти величину надлишку споживача при покупці даного товару.

2.16. Відомо, що крива пропозиції деякого товару має вигляд $p = 3q^3 + 5$, а рівновага на ринку даного товару досягається при обсязі

продажів $q_0 = 2$. Визначити додаткову вартість виробників при продажі даного обсягу продукції.

2.17. Відомо, що крива пропозиції деякого товару має вигляд $p = 4q^3 + 3q^2 + 2q + 6$, а рівновага на ринку даного товару досягається при обсязі продажів $q_0 = 2$. Визначити додаткову вартість виробників при продажі даного обсягу продукції.

2.18. Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції задані відповідно $p = 201 - 2q^2$ та $p = 61 + 6q$.

Питання для самоконтролю

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом даної функції?
3. Які є методи обчислення невизначених інтегралів?
4. Що таке визначений інтеграл функції на проміжку $[a;b]$?
5. Який геометричний та економічний зміст визначеного інтегралу?
6. Що таке криволінійна трапеція?
7. Як знайти площу плоскої фігури з допомогою визначеного інтеграла?
8. Як знайти об'єм тіла обертання навколо вісі OX (OY)?
9. Як обчислюється обсяг виробленої продукції?
10. Як обчислюється середні значення економічних функцій?
11. Як обчислюється приріст капіталу за відомими інвестиціями?
12. Що таке коефіцієнт Джіні?
13. Що характеризує крива Лоренца?

РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y=f(x)$ і її похідні або диференціали різних порядків, тобто рівняння

$$F(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

2. Розв'язком диференціального рівняння (1) називається така функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у рівняння (1) перетворює його в тотожність.

3. Рівняння вигляду

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx, \quad (2)$$

де $f_1(y)$ і $f_2(x)$ – задані функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*.

Щоб розв'язати рівняння (2), треба проінтегрувати обидві його частини:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C.$$

4. Функція двох змінних $f(x,y)$ називається *однорідною n -го виміру*, якщо виконується умова

$$f(x, y) = f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

5. Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ однорідна нульового виміру.

В загальному випадку змінні в однорідному рівнянні не відокремлюються зразу. Але, якщо ввести допоміжну невідому функцію $u=u(x)$ за формулою

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або} \quad y = xu,$$

то ми зможемо перетворити однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними.

6. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння, яке містить шукану функцію і її похідну у першому степені без їх добутку:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (3)$$

Тут $P(x)$, $Q(x)$ – відомі функції незалежної змінної x .

Якщо $Q(x)=0$, то рівняння (3) називається *лінійним однорідним* і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння (3) називається *лінійним неоднорідним*.

Розв'язок диференціального рівняння (3) за методом Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = u(x) v(x) \text{ або } y = uv, \quad (4)$$

де $u(x)$, $v(x)$ невідомі функції. Одну з цих функцій можна взяти довільну, а інша визначається із рівняння (3).

Із рівності $y = uv$ знаходять похідну y' :

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставляють y та y' в рівняння (3):

$$u'v + uv' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x) \text{ або } u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Вибирають функцію v такою, щоб $v' + P(x)v = 0$.

Тоді знаходять функцію u із одержаного рівняння $u'v = Q(x)$.

Знайдені функції u та v підставляють в (4) і одержують загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння.

* *

*

Задача 1. Відомо, що еластичність попиту Q визначається за формулою $\eta = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$, де x – кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює -1 .

Розв'язування. За умовою задачі: $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = -1$; $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{p}$;

$$\ln|Q| = -\ln|p| + \ln|C|; \ln|Q| = \ln\left|\frac{C}{p}\right|; Q = \frac{C}{p}; p = \frac{C}{Q}.$$

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

Задача 2. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній

вартості. Початкова вартість – A_0 . Якою буде вартість використання впродовж t років?

Розв'язування. Нехай A_0 – вартість обладнання в момент t . Зміна вартості (знецінювання) виражається різницею $(A_0 - A_t)$. Швидкість знецінювання $\frac{d(A_0 - A_t)}{dt}$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t . Одержуємо рівняння

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = kA_t$$

з початковою умовою $A_t(0) = A_0$.

Розв'язавши його, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{-dA_t}{dt} = kA_t &\Rightarrow \int \frac{dA_t}{A_t} = -\int k dt \Rightarrow \ln|A_t| = -kt + \ln|C| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left|\frac{A_t}{C}\right| = -kt \Rightarrow \frac{A_t}{C} = e^{-kt} \Rightarrow A_t = Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

Для визначення довільної сталої C використаємо початкову умову при $t = 0$:

$$A_0 = Ce^{-k \cdot 0}; \quad C = A_0.$$

Одержаний частинний розв'язок має вигляд

$$A_t = A_0 e^{-kt}.$$

Задача 4. Кількість населення $y(t)$ є функцією часу t , тобто з часом кількість населення змінюється. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості. Знайти формулу для визначення кількості населення у будь-який момент часу t .

Розв'язування. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Це записуємо так $\frac{dy}{dt} = ky(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

В одержаному диференціальному рівнянні відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = k dt.$$

Далі будемо мати:

$$\ln|y| = kt + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = kt \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right) = kt \Rightarrow y = ce^{kt}.$$

Отже, ми отримали формулу для визначення кількості населення.

Задача 5. У 1990 році населення на Землі становило 5 млрд. Знайти чисельність населення Землі у 2010 році, якщо відомо, що населення у 2000 році становило 6 млрд.

Розв'язування. Почнемо відлік із 1990 року, тобто $t_0 = 0$.

В 2000 році населення Землі 6 млрд., $t = 10$ років.

Отримаємо рівняння $6 = 5e^{k10}$. Звідси $k = \frac{1}{10} \ln \frac{6}{5}$.

Враховуючи це запишемо розв'язок $y = 5e^{\frac{1}{10} \ln \frac{6}{5} t}$.

Використовуючи одержану формулу знайдемо кількість населення, яка б мала бути в 2010р., $t=20$.

$$y = 5e^{\frac{1}{10} \ln \frac{6}{5} 20} = 5e^{\ln \left(\frac{6}{5}\right)^2} = 5\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 7,2 \text{ млрд. осіб.}$$

Згідно статистичних даних населення Землі 7,204 млрд. осіб. Отримане значення є наближене до статистичного.

Задача 6. Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової ($t = 0$) інвестиції I_0 .

Розв'язування. Побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $I(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція). Тоді $\frac{dI(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції,

$$i = \frac{r}{100}.$$

За умовою задачі отримали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = iI(t), \\ I(t)|_{t=0} = I_0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння є:

$$I(t) = e^{it+c} = e^c e^{it}$$

Згідно з початковою умовою при $t = 0$ маємо $I_0 = e^c$.

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $I(t) = I_0 e^{it}$.

Це означає, що при умовах задачі інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

Вправи

1.1. Стосовно попиту кількості одиниць Q певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яку визначають формулою $E = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$, постійна і дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

1.2. Еластичність попиту на певний товар постійна і дорівнює -2 . Визначити функцію попиту вигляду $p = f(Q)$, якщо $p = \frac{1}{2}$, коли $Q = 4$.

1.3. Еластичність попиту на певні вироби змінюється разом зі зміною вартості кожного виробу за законом $E = \frac{p}{p-10}$. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(Q)$, якщо $0 < p < 10$ і $p = 7$, коли $Q = 15$.

1.4. Еластичність попиту товару – $E = \frac{Q-200}{Q}$. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(Q)$, якщо $0 < Q < 200$ і $p = 5$, коли $Q = 190$.

1.5. Кількість населення певного міста $y(t)$ (t вимірюють у

роках) задовольняє диференціальне рівняння $y' = 0,1y(1 - 10^{-6}y)$. Через скільки років кількість населення цього міста збільшиться зі 100000 до 500000?

1.6-1.14. Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$ (t вимірюють у днях), якщо відома модель росту в умовах конкурентного ринку і початкові умови (див. табл. 1).

Таблиця 1

№ завдання	Модель росту в умовах конкурентного ринку, y'	Початкові умови, $y(0)$
1.6	$ty - 2y' = 0$	$y(0) = 4$
1.7	$y' - \frac{y}{t+1} = yt^2$	$y(0) = 6$
1.8	$y' + t^3 = 1$	$y(0) = 5$
1.9	$(1 + e^t)yy' = e^t$	$y(0) = 1$
1.10	$(t^2 - 1)y' + 2ty^2 = 0$	$y(0) = 1$
1.11	$y' - y \cos t = -\sin 2t$	$y(0) = 3$
1.12	$t\sqrt{1-y^2} + yy'\sqrt{1-t^2} = 0$	$y(0) = 1$
1.13	$(t^2y - y)y' + ty^2 + t = 0$	$y(0) = 1$
1.14	$y' - \frac{2y}{t+1} = (t+1)^3$	$y(0) = \frac{1}{2}$

1.15-1.18. Прибуток деякої компанії $p(t)$ (t – вимірюється у роках) задовольняє диференціальне рівняння (див. табл. 2). Знайти закон зростання прибутку.

Таблиця 2

№ завдання	Прибуток компанії	№ завдання	Прибуток компанії
1.15	$p' - 2p = 2t$	1.17	$(2t - p)p' = t + 2p$
1.16	$p' = \frac{t(p^2 + 1)}{p(t^2 + 1)}$	1.18	$p' + 2pt = 3t^3p^3$

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що таке інтегральна лінія?
3. Як формулюється залежність розв'язків диференціального рівняння?
4. В чому полягає задача Коші для диференціальних рівнянь I-го порядку?
5. В чому полягає задача Коші для диференціальних рівнянь II-го порядку?
6. Які є види диференціальних рівнянь I-го порядку?
7. Як розв'язуються диференціальних рівнянь I-го порядку з відокремлювальними змінними?
8. Як розв'язуються лінійні диференціальних рівнянь I-го порядку?
9. Як розв'язуються однорідні диференціальних рівнянь I-го порядку?
10. В яких економічних моделях застосовуються методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь?

ДОДАТКИ

Д1. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{[1 - (1+i)^{-i}]}{i}$$

<i>i=0,5%= 0,005</i>				<i>i=1%= 0,01</i>			
<i>n</i>	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	<i>n</i>	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,093368	8,566018	9,368527
10	1,05114	9,730412	10,228026	100	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23,194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25,716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{[1 - (1+i)^{-i}]}{i}$$

(продовження)

$i=2\%= 0,02$				$i=3\%= 0,03$			
N	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	n	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,192274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475-	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{[1 - (1+i)^{-i}]}{i}$$

(продовження)

<i>i=5%= 0,05</i>				<i>i=8%= 0,08</i>			
<i>n</i>	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	<i>n</i>	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,164	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	9,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,851369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2,52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13,798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Розділ 1

$$\begin{array}{ll}
 \text{1.2.} \begin{bmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{100}{30} & \frac{120}{36} & \frac{180}{36} \\ \frac{100}{100} & \frac{120}{120} & \frac{180}{180} \end{bmatrix} & \text{1.3.} \begin{bmatrix} 1100 \\ 752 \\ 1692 \\ 1412 \end{bmatrix} \quad \text{1.4.} \begin{bmatrix} 130 \\ 108 \\ 60 \end{bmatrix} \quad \text{1.6.} \begin{bmatrix} 255 & 165,3 & 344,5 \\ 296,9 & 191,8 & 538,5 \\ 320,4 & 207,2 & 708 \end{bmatrix} \\
 \text{1.7.} \begin{bmatrix} 4366,9 & 1164,7 & 2310,9 \\ 4417,3 & 907,1 & 1750,9 \\ 7824 & 1556 & 3049,6 \end{bmatrix} & \text{1.8.} \begin{bmatrix} 73 & 767 & 174,5 \\ 191,5 & 165,5 & 508,5 \\ 175,4 & 114,6 & 573 \end{bmatrix} \\
 \text{3.7. } 0,13 \quad \text{3.8. } 0,035.
 \end{array}$$

Розділ 2

1.1. 3165. **1.2.** 130 грн. **2.7.** (0;1/9). **2.8.** (0;1/5).

Розділ 5

1.1. $\frac{dx}{dt} = t^2 - 4t + 3$; $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. **1.2.** $2v \frac{dv}{dt} = 2a \frac{dx}{dt} = 2av$, звідси
 $w = \frac{dv}{dt} = a$. **1.5.** $v'(50) = 17,5$; $v'(100) = 10$; $v'(150) = 17,5$.
1.6. $v'(50) = 35$; $v'(100) = 90$; $v'(120) = 120,4$.
1.8. $P'(150) = 30$; $P'(400) = -20$. **1.9.** 14. **1.10.** $f'(5) = 200$, $f'(10) = 0$,
 $f'(12) = -80$. **1.12.** $D'(300) = 4$. **1.13.** $500 - x$.
1.24. а) $E_{p \approx 0,04}(Q) \approx -1,48$, $E_{p \approx 0,04}(S) \approx 0,48$.
б) $E_{p \approx 0,06}(Q) \approx -2,68$, $E_{p \approx 0,06}(S) \approx 0,42$.
в) $E_{p \approx 0,08}(Q) \approx -3,69$, $E_{p \approx 0,08}(S) \approx 0,4$.
г) $E_{p \approx 0,09}(Q) \approx -8,47$, $E_{p \approx 0,09}(S) \approx 1$.
2.1. а) 2. **2.3.** $x = 100$. **2.4.** 2. **2.5.** $50_{\text{м}} \times 100_{\text{м}}$. **2.6.** $4_{\text{м}} \times 4_{\text{м}} \times 2_{\text{м}}$.
2.7. $\frac{18}{\pi + 4} \approx 2,5$. **2.8.** $\frac{a}{6}$. **2.9.** $10_{\text{см}}$. **2.10.** $300_{\text{м}} \times 300_{\text{м}}$. **2.11.** $16_{\text{м}}$.
2.12. $r = h = 1_{\text{м}}$. **2.13.** Висота повинна до-рівнювати діаметру основи

циліндра. **2.14.** $\frac{l}{4} \times \frac{l}{4}$. **2.15.** $2\text{ м} \times 2\text{ м} \times 1\text{ м}$. **2.16.** $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$. **2.17.** 32 м. **2.18.**

600 грн. **2.19.** $r = 5\text{ м}$, $h = 10\text{ м}$; 282 грн. 65 коп. **2.20.** $\frac{r}{h} = \frac{p_2}{p_1}$.

2.24. $x \approx 38$, $p = 26,2$. **2.25.** $x = 1$, $p = 10$, $z = U - k = 6$. **2.26.** $k = 2$, $\pi = 6$.

2.27. $x > 150$. **2.29.** 12 і 18 м. **2.30.** Сторона, паралельна стіні, має бути вдвоє довшою за кожну з двох інших сторін. **2.31.** Діаметр дорівнює довжині котла.

2.32. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.33.** 1) 2000 см^3 ; 2) $\frac{800}{\pi} \text{ см}^3$.

2.34. $50\text{ м} \times 25\text{ м}$. **2.35.** $V = 10\sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ м}^3$. **2.36.** 125 м .

2.37. $14\text{ см} \times 10,5\text{ см} \times 12\text{ см}$. **2.38.** $12\text{ м} \times 6\text{ м} \times 4\text{ м}$. **2.39.** $(2a + \sqrt{\frac{a}{6}}S)\text{ см}$,

$(2b + \sqrt{\frac{b}{a}}S)\text{ см}$. **2.40.** $h = \frac{20}{3}\sqrt{3}\text{ см}$. **2.41.** $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $h = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

Розділ 7

1.1. $P(x) = x^2 + 50x + 1400$. **1.2.** $V(x) = 100x - 0,02x^2$, $V(1000) = 12 \cdot 10^4$.

1.3. $D(x) = 80x - 0,02x^2$. **1.4.** $D(x) = 6x - 0,015x^2 - 420$, $P(125) = 95625$

гривень. **1.5.** $V(x) = \frac{\sqrt{(x^2 + 360)^3}}{3000} + 143141$.

2.1. а) 9 років, 36 млн. грн.; б) 8 років, 16 млн. грн. в) 25 років, 166,67 млн. грн.; г) 8 років, 76,8 млн. грн.; д) 1 рік, 15/7 млн. грн.. **2.2.** 346518 од., прибуток – 34651848 гривень. **2.6.** 15067 грн. 20 коп. **2.7.** 1536

ум.од. **2.8.** $\approx 0,57$. **2.9.** $\approx 0,31$. **2.10.** 1) $6000 \cdot 3^{3/2}$ у.о. 2) $\approx 8,55$ років.

2.13. 5500 грн.

Розділ 8

1.1. $Q = \frac{C}{\sqrt{p}}$. **1.2.** $p = \frac{1}{\sqrt{Q}}$. **1.3.** $p = 10 - \frac{Q}{5}$. **1.4.** $p = 100 - 0,5Q$. **1.5.**

$t = 20 \ln 3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 110 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
3. Бугір М. К. Математика для економістів: Навч. посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
4. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.;-К.: КНЕУ, 2002.-Ч.2.- 451с.
5. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
6. Вища математика. Підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С. та ін.; за редакцією Шинкарика М. І. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
7. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
8. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
9. Карасев А. И., Аксютин З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. – Ч. I. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1982. – 272 с.
10. Комплексні практичні індивідуальні завдання з вищої математики. Навчальний посібник / Алілуйко А.М., Неміш В.М., Шинкарик М.І. — Тернопіль: Економічна думка, 2013. – 116 с.
11. Крынский Х. Э. Математика для экономистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.

12. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 57 с.
13. Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Шинкарик М.І. — Тернопіль: ТНЕУ, 2016. – 90 с.
14. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник, 3-тє видання. – Тернопіль: ТНЕУ в-во «Економічна думка» 2010. – 304 с.
15. Петров В. А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980. – 64 с.
16. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навч. посібник / Домбровський І.В., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М. та ін.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 208с.
17. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика: Пер. с англ. со 2-го изд. – М.: “Дело ЛТД”, 1993. – 864 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	5
§ 1. Матриці і визначники	5
§ 2. Системи лінійних рівнянь	16
§ 3. Модель Леонтева багатогалузевої економіки	24
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	34
§ 1. Дії над векторами.	34
§ 2. Власні вектори і власні значення матриць. Модель міжнародної торгівлі	35
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ І МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	40
§ 1. Задачі економічного змісту, що розв’язуються із використанням елементів аналітичної геометрії	40
§ 2. Задачі лінійного програмування	50
РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ	65
§ 1. Границя функції	65
§ 2. Задачі фінансової математики	68
РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	74
§ 1. Похідна функції	74
§ 2. Екстремум функції	87
РОЗДІЛ 6. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	98
§ 1. Поняття функції багатьох змінних	98
§ 2. Екстремум функції багатьох змінних	103
РОЗДІЛ 7. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	116
§ 1. Невизначений інтеграл	116
§ 2. Застосування визначених інтегралів	119
РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	133
ДОДАТКИ	140
ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ	143
ЛІТЕРАТУРА	145

Навчальне видання

**Алілуйко Андрій Миколайович
Дзюбановська Наталія Володимирівна
Лесик Оксана Федорівна
Неміш Василь Миколайович
Новосад Іван Ярославович
Шинкарик Микола Іванович**

ВИЩА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Підписано до друку 01.05.2017 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Зам. № 3-229
Умов.-друк. арк. 13,9. Обл.-вид. арк. 14,1.
Тираж 100 прим.

Віддруковано ФО-П Шпак В. Б.
Свідоцтво про державну реєстрацію В02 № 924434 від 11.12.2006 р.
Свідоцтво платника податку: Серія Е № 897220
м. Тернопіль, вул. Просвіти, 6.
тел. 8 097 299 38 99
E-mail: toooms@ukr.net