

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ. ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних
кібер-фізичних систем в енергетиці»
спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення

Укладачі: О. В. Барабаш, О. В. Свинчук, А. П. Мусієнко

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Мухін В.Є.*, д.т.н., проф., завідувач кафедри системного проектування
НН ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор *Федорова Н.В.*, д.т.н., доц., професор кафедри інженерії програмного
забезпечення в енергетиці НН ІАТЕ КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 02.06.2023 р.)
за поданням Вченої ради Навчально-наукового інституту атомної та теплової енергетики
(протокол № 13 від 29.05.2023 р.)*

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем в енергетиці», кафедри інженерії програмного забезпечення в енергетиці, спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» денної (заочної) форми навчання.

Спрямований на формування у студентів системи знань та умінь для застосування математичного апарату для опрацювання математичних моделей різних систем, процесів і явищ при розв'язуванні теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, а також при дослідженні закономірностей, яким підпорядковуються реальні процеси в сфері програмування. Посібник містить основні теоретичні положення, методичні рекомендації для розв'язання задач, питання та завдання для самоперевірки, запланованих протягом семестру. Це дозволить випускникам успішно розв'язувати задачі проектування та розвитку інформаційних систем, оптимізації виробництва та багато інших.

Реєстр. № НП 22/23-757. Обсяг 6,6 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© О.В. Барабаш, О.В. Свинчук, А.П. Мусієнко
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ	6
1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ.....	6
1.1.1. Основні поняття математичного моделювання.....	6
1.1.2. Класифікація моделей	7
1.1.3. Випадковий процес.....	9
1.1.4. Класифікація випадкових процесів.....	14
1.1.5. Закони розподілу випадкових процесів та їх характеристики	16
Питання для самоперевірки	21
Задачі для самостійної роботи.....	22
1.2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ПОТОКІВ ПОДІЙ	24
1.2.1. Найпростіший потік подій	24
1.2.2. Особливості моделювання потоків подій	28
1.2.3. Пуассонівський потік	29
1.2.4. Інші відомі потоки подій.....	34
Питання для самоперевірки	36
Задачі для самостійної роботи.....	36
1.3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ НЕПЕРЕРВНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ	39
1.3.1. Поняття марковського процесу	39
1.3.2. Рівняння Колмогорова	42
1.3.3. Знаходження граничних ймовірностей станів марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом	46
Питання для самоперевірки	48
Задачі для самостійної роботи.....	49
1.4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ «ЗАГИБЕЛІ ТА РОЗМНОЖЕННЯ» НА ОСНОВІ НЕПЕРЕРВНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ	50
1.4.1. Математична модель процесу «загибелі та розмноження».....	50
1.4.2. Математична модель циклічного марковського процесу.....	56
1.4.3. Особливості імітаційного моделювання безперервних марковських процесів	63
Питання для самоперевірки	66
Задачі для самостійної роботи.....	67
1.5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ	68

1.5.1. Випадковий процес з дискретними станами та дискретним часом.....	68
1.5.2. Приклади застосування марковських процесів з дискретним часом	73
1.5.3. Особливості імітаційного моделювання марковських процесів із дискретним часом	78
Питання для самоперевірки.....	83
Задачі для самостійної роботи.....	84
РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.....	86
2.1. ПОНЯТТЯ, ЗАДАЧІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ	86
2.1.1. Основні поняття систем масового обслуговування	86
2.1.2. Класифікація систем масового обслуговування	92
Питання для самоперевірки.....	96
Задачі для самостійної роботи.....	97
2.2. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ ТА ОЧІКУВАННЯМИ.....	98
2.2.1. Одноканальна СМО з відмовами	98
2.2.2. Багатоканальна СМО з відмовами	101
2.2.3. Одноканальна СМО з очікуваннями з обмеженою чергою	105
2.2.4. Одноканальна СМО з очікуваннями з необмеженою чергою.....	112
2.2.5. Багатоканальна СМО з очікуваннями з обмеженою чергою	116
2.2.6. Багатоканальна СМО з очікуваннями з необмеженою чергою	121
2.2.7. Багатоканальна СМО з обмеженим часом очікування	123
2.2.8. Замкнуті СМО	127
Питання для самоперевірки.....	134
Задачі для самостійної роботи.....	135
2.3. ОСОБЛИВОСТІ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ	138
2.3.1. Постановка завдання імітаційного моделювання СМО	138
2.3.2. Побудова часової діаграми роботи СМО	143
2.3.3. Аналіз часової діаграми роботи СМО	145
2.3.4. Загальні принципи побудови алгоритмів для імітаційного моделювання	150
Принцип Δt	151
Принцип особливих станів	154
Принцип послідовної проводки заявок	156
Задачі для самостійної роботи.....	159
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	160

ВСТУП

На сьогодні характерним є перехід від індустріального суспільства до інформаційного. Сучасному розвитку техніки характерно: використання цифрової форми представлення усіх сигналів незалежно від форми інформації (мова, текст, зображення); використання пристроїв різних типів і поколінь; тісний зв'язок комп'ютерних технологій і технологій електрозв'язку.

У результаті інтеграції засобів зв'язку та обчислювальної техніки з'явилась інформаційна мережа – одна з найскладніших кібернетичних систем. Вона поєднує сотні мільйонів різних джерел і споживачів інформації.

Вважається, що рівень розвитку держави та її місце у світі характеризують стан інформаційно-комунікаційних технологій та систем захисту інформації.

Тому, враховуючи досвід закладів вищої освіти ЗВО розвинених держав, для підвищення конкурентної спроможності фахівців зі спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» в навчальні плани підготовки включена навчальна дисципліна **«Математичне моделювання та оптимізація процесів і систем»**.

Метою навчальної дисципліни є:

- надати знання, уміння, компетенції в області створення та використання математичних моделей різних систем, процесів та явищ;
- навчити володінню математичним апаратом чисельних методів для опрацювання математичних моделей в предметній галузі практичної діяльності фахівців;
- самостійно формувати та вирішувати практичні задачі.

Це дозволить випускникам успішно розв'язувати задачі проектування та розвитку інформаційних систем, оптимізації виробництва та багато інших.

РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

1.1.1. Основні поняття математичного моделювання

Для розв'язування прикладних задач з використанням обчислювальної техніки потрібно прикладну задачу сформулювати математично, тобто для реального об'єкта, процесу або системи потрібно побудувати відповідну математичну модель.

Слово **модель** виникло від латинського **modus** (копія, зразок, образ).

Модель – це абстракція, яка відображає лише частину властивостей. Її можна розглядати як проекцію об'єктивної реальності. В залежності від мети можна одержати декілька проекцій реального об'єкта. Це характерно для складних систем, у яких кожна проекція визначає суть певної мети [1].

Моделювання – це заміна деякого об'єкта А іншим об'єктом Б, при цьому А називають *оригіналом* або *об'єктом моделювання*, а Б називають *моделлю*. Іншими словами, *модель* – це об'єкт-замінник об'єкта оригіналу, який забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу (рис. 1.1).

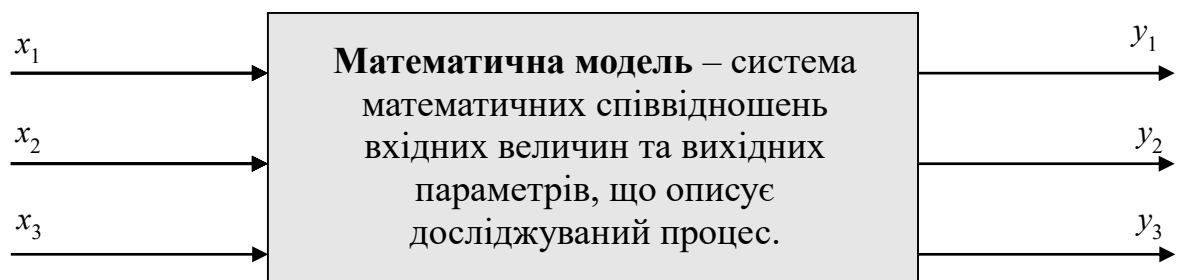


Рис. 1.1. Математична модель досліджуваного процесу

Метою моделювання є одержання, обробка, представлення та використання інформації стосовно об'єктів, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем.

Моделювання широко використовується в різних галузях людської діяльності, особливо там, де потрібно приймати ефективні рішення на основі отриманої інформації, наприклад, у проектуванні, управлінні.

Найбільш універсальним методом моделювання є математичне моделювання, оскільки воно більш сприятливе для використання обчислювальної техніки та існуючих пакетів програм MathCad, MathLab, Excel та середовищ програмування.

У загальному випадку математичну модель реального об'єкта, процесу або системи можна представити у вигляді системи функціоналів. Наприклад,

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0, i = \overline{1, m},$$

де X – вектор вхідних змінних, Y – вектор вихідних змінних, Z – вектор зовнішніх впливів, t – координата часу.

Математична модель є наближеним представленням реальних об'єктів, процесів або систем, які записані у математичних термінах, що зберігає істотні властивості оригіналу.

Математичні моделі у кількісній формі описують основні властивості об'єкта, його параметри, внутрішні і зовнішні зв'язки.

Етапи математичного моделювання:

1. Постановка задачі.
2. Побудова математичної моделі.
3. Вибір (побудова) чисельного методу рішення рівнянь математичної моделі.
4. Розробка алгоритму.
5. Програмування.
6. Тестування й налагодження програми.
7. Проведення розрахунків (моделювання).
8. Аналіз результатів й, можливо, корекція моделі.
9. Висновки та практичні рекомендації на основі результатів математичного моделювання.

1.1.2. Класифікація моделей

При моделюванні абсолютна подібність не має місця. Головні зусилля спрямовують на те, щоб модель достатньо добре відображала потрібні властивості об'єкта, що досліджується.

Існує декілька класифікацій моделей. Ознайомимось з однією з них.

Усі моделі можна поділити на **два класи: дійсні та ідеальні** [4].

Дійсні моделі можна поділити на: 1) натурні; 2) фізичні; 3) евристичні; 4) математичні.

Натурні моделі – це реальні об'єкти, процеси, над якими ставляться експерименти наукові, технічні або виробничі.

Фізичні моделі – це макети, які відображають фізичні властивості оригіналів (кінематичні, динамічні, теплові, електричні, світлові моделі).

Евристичні (інтуїтивні) моделі – це різновиди математичних моделей, що побудовані на основі багаторічного особистого досвіду.

Дійсні математичні моделі – це аналогові, структурні, геометричні, графічні, цифрові та кібернетичні моделі.

Ідеальні моделі можна поділити на: наочні, знакові, математичні.

Ідеальні наочні моделі – це схеми, карти, графіки, структурні і геометричні моделі.

Знакові моделі – це символи, алфавіт, мови програмування, впорядкований або топологічний запис.

Ідеальні математичні моделі – це аналітичні, функціональні, імітаційні, комбіновані моделі.

За принципами побудови математичні моделі поділяють на: *аналітичні, імітаційні, комп'ютерні*.

У **детермінованих моделях** вважають відсутніми випадкові впливи, змінні та математичні зв'язки можна достатньо точно визначити. При побудові детермінованих моделей найчастіше використовують алгебраїчні або інтегральні рівняння, матричну алгебру.

Стохастичні моделі враховують випадковий характер процесів у об'єктах і системах, що досліджуються. Ці моделі описують методами теорії ймовірностей і математичної статистики.

Таким чином, математичне моделювання проводиться для дослідження процесів, що протікають в технічних або організаційних системах. Метою моделювання є визначення певних характеристик та властивостей системи для подальшого її удосконалення.

Принципи побудови моделей

1. **Принцип інформаційної достатності.** За повної відсутності інформації про систему модель побудувати неможливо. За наявності повної інформації про систему її моделювати немає сенсу. Існує деякий критичний рівень апріорних відомостей про систему (рівень інформаційної достатності), після досягнення якого можна побудувати її адекватну модель.

2. **Принцип доцільності.** Модель створюється для досягнення деяких цілей, які визначаються на первинному етапі формування проблеми.

3. **Принцип здійсненності.** Модель, яка створюється, має забезпечувати досягнення мети дослідження з урахуваннями граничних ресурсів з імовірністю, суттєво відмінною від нуля, і за скінчений час. Звичайно задають деяке граничне

значення P (ступінь ризику) ймовірності досягнення мети моделювання $P(t)$, а також сам граничний термін t досягнення мети. Модель вважається здійсненою, якщо $P(t) \geq P$.

4. *Принцип множинності моделей.* Модель, яка створюється, має відображати в першу чергу ті властивості реальної системи (або явища), які впливають на вибраний показник ефективності. Відповідно під час використання будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі складові реальності. Для повного її дослідження необхідно мати ряд моделей, які дали б змогу відобразити певний процес з різних боків і з різними ступенями детальності.

5. *Принцип агрегації.* У більшості випадків складну систему можна подати такою, що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного формального моделювання.

1.1.3. Випадковий процес

Більшість процесів розвиваються під впливом випадкових факторів, тому вони є випадковими. Необхідно чітко розрізняти такі поняття як детерміновані та випадкові процеси, випадкові величини та випадкові процеси.

Теорія випадкових процесів (теорія випадкових функцій) — це розділ математичної науки, який вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їхнього розвитку [2].

Теорія випадкових процесів являється новим розділом теорії ймовірностей, який останнім часом стрімко розвивається.

Теорія випадкових функцій була заснована та отримала свій розвиток завдяки видатним математикам Маркову А.А., Хінчину О.Я., Вінеру Н., Колмогорову А.М. та ін.

При вивченні різноманітних явищ навколишнього світу ми часто стикаємося з процесами, розвиток яких наперед передбачити точно неможливо. Ця непередбачуваність виникає під впливом випадкових факторів, які впливають на хід процесу.

Приклади:

1) Напруга в електромережі, номінально постійна (220 В), фактично змінюється з часом, коливається навколо номіналу під впливом випадкових факторів – кількість включених в мережу приладів, моменти їх включення і виключення і т.д.

2) Населення міста (області) змінюється з часом випадковим чином під впливом таких факторів – народжуваність, смертність, міграція і т.д.

3) Рівень води в річці змінюється з часом випадковим чином в залежності від погоди, кількості опадів, танення снігу, інтенсивність зрошувальних заходів і т.д.

4) Частинка, яка здійснює броунівський рух в полі зору мікроскопу, змінює своє місцеположення випадковим чином в результаті зіткнення з молекулами рідини.

5) Відбувається політ космічної ракети, яку необхідно вивести в заданий момент в задану точку простору із заданим напрямком й абсолютним значенням вектору швидкості. Фактичний рух ракети не співпадає з розрахунковим із-за випадкових факторів, як турбулентність атмосфери, неоднорідність палива, помилка відпрацювання команд і т.д.

6) Комп'ютер в ході роботи може випадковим чином переходити в різні стани:

- S_1 – працює нормально;
- S_2 – має несправність, але вона ще визначена;
- S_3 – несправність визначена, ведеться пошук її джерела;
- S_4 – ремонтується і т.д.

Переходи із стану в стан відбуваються під дією випадкових факторів, таких як коливання напруги в мережі живлення комп'ютера, вихід з ладу окремих елементів, момент виявлення несправності, час їх усунення і т.д.

Отже, в природі не існує абсолютно не випадкових (детермінованих) процесів, але є процеси, на хід яких випадкові фактори впливають так слабо, що ними можна знехтувати (*наприклад*, процес обертання планет навколо Сонця). Також існують і такі процеси, де випадковість грає основну роль (*наприклад*, броунівський рух). Між цими двома крайніми випадками лежить цілий спектр процесів, в яких випадковість грає більшу чи меншу роль. Враховувати чи не враховувати випадковість процесу залежить також і від того, яку практичну ми вирішуємо.

Випадковий процес, який відбувається в будь-якій системі S , представляє собою випадкові переходи системи із стану в стан. Стан може бути охарактеризований за допомогою числових змінних: в найпростішому випадку – одна змінна, а в більш складних – декілька.

У прикладі 1 напруга U , яка випадковим чином змінюється з часом, є функцією часу $U(t)$. У прикладі 2 населення N , яке змінюється випадково з часом, є функцією часу $N(t)$. У прикладі 3 рівень води в річці H , який змінюється випадково з часом, є функцією часу $H(t)$. Отже, всі три функції $U(t)$, $N(t)$, $H(t)$ є випадковими функціями часу t . При постійному t кожна з них перетворюється в звичайну випадкову величину.

У прикладі 4 стан частинки описується двома випадковими функціями $X(t)$ та $Y(t)$, які є координатами частинки. Такий процес називається векторним і він описується змінним випадковим вектором, який, в свою чергу, залежить від функцій $X(t)$ та $Y(t)$, які змінюються з часом. Для фіксованого значення часу t випадковий процес перетворюється в систему двох випадкових величин.

У прикладі 5 стан ракети в момент часу t характеризується не тільки трьома координатами $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ центру маси ракети, а ще й трьома складовими її швидкості, трьома кутами орієнтації ракети, кутовими швидкостями руху навколо центра маси, запасом палива і т.д. Це приклад багатовимірного випадкового процесу.

У прикладі 6 стан системи не характеризується числовими величинами (або вектором), а він описується словами («якісно»), а випадковий процес зводиться до «блукання по станам», які можна пронумерувати в довільному порядку й інформація про процес в числовій формі не обов'язково потрібна.

Також є випадкові процеси, які не завжди залежать від часу t . Наприклад, тиск P газу в газопроводі може змінюватися випадковим чином зі зміною відстані l до точки, де вимірюється тиск, від джерела, яке живить газопровід, і представляє собою випадкову функцію аргументу l . Тиск $P(l)$ до зі збільшення відстані має тенденцію зменшуватися. Під впливом випадкових факторів (засмічення газопроводу, нерівності його внутрішньої поверхні, різний температурний режим на різних ділянках) тиск буде змінюватися в залежності від l випадковим нерегулярним чином.

Випадковим процесом $X(t)$ називається процес, значення якого при будь-якому фіксованому значенні аргументу $t=t_0$ є випадковою величиною $X(t_0)$.

Випадкова величина $X(t_0)$, в яку перетворюється випадковий процес при $t=t_0$, називається **перерізом випадкового процесу**, який відповідає даному значенню аргументу t .

Реалізацією випадкового процесу називається детермінована функція $x(t)$, на яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ внаслідок випробування, тобто його траєкторія.

Кілька реалізацій певного випадкового процесу зображено на рисунку 1.2.

Нехай переріз цього процесу при даному t є неперервною випадковою величиною. Тоді випадковий процес $X(t)$ при даному t визначається щільністю ймовірності $f(x, t)$, де $t \in T$ – час, T – область значень аргументу функції, $x \in \Omega$ – елементарна подія, Ω – простір елементарних подій.

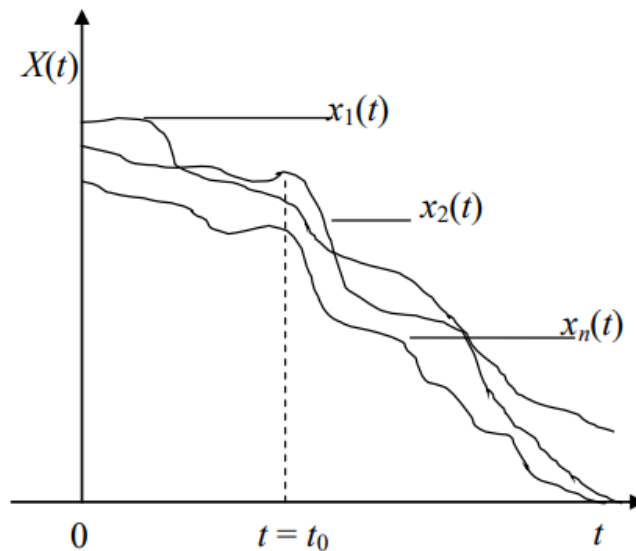


Рис. 1.2. Реалізації випадкового процесу

Випадковий процес $X(t)$ являє собою сукупність усіх перерізів (*сімейство*) за всіх можливих значень t , тому для його задання необхідно розглядати багатовимірну випадкову величину $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$, утворену з усіх перерізів цього процесу.

Таких перерізів нескінченно багато, але для задання випадкового процесу вдається обмежитись порівняльно невеликою кількістю перерізів.

Випадковий процес має **порядок n** , якщо він повністю визначається щільністю спільного розподілу $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ n довільних перерізів процесу, тобто щільністю n -вимірної випадкової величини $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$, де $X(t_j)$ — переріз випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

У деяких практичних задачах випадкові процеси зручно виражати через найпростіші (або «елементарні») випадкові функції.

Елементарною випадковою функцією називається функція аргументу t , де залежність від t представлена звичайною не випадковою функцією, в яку як параметри входять одна або кілька звичайних, не залежних від t випадкових величин. Наприклад:

1. $Y(t) = Xe^{-t}$, ($t > 0$), де X — неперервна випадкова величина, розподілена рівномірно в інтервалі $[-1; 1]$. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t)$ представлено на рисунку 1.3.



Рис. 1.3. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t) = Xe^{-t}$

2. $Y(t) = X + at$, де X – неперервна випадкова величина, a – не випадкова величина. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t)$ представлено на рисунку 1.4.

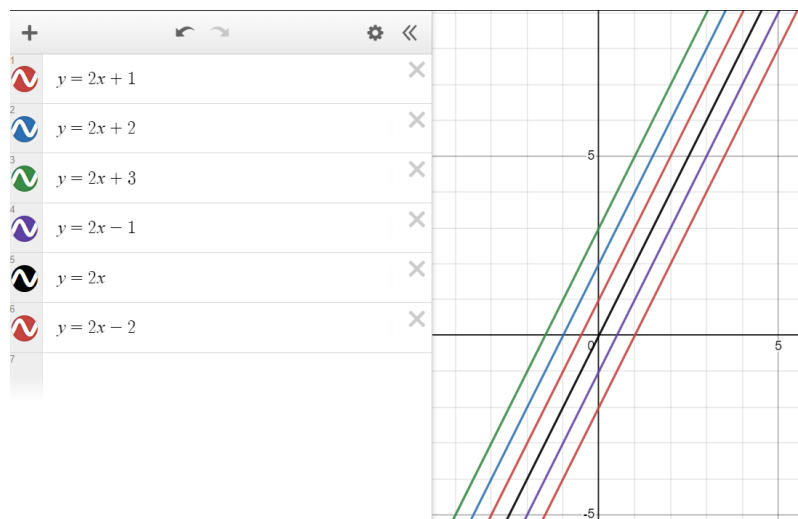


Рис. 1.4. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t) = X + at$

3. $Y(t) = X \cos(at)$, де X – неперервна випадкова величина, a – не випадкова величина. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t)$ представлено на рисунку 1.5.

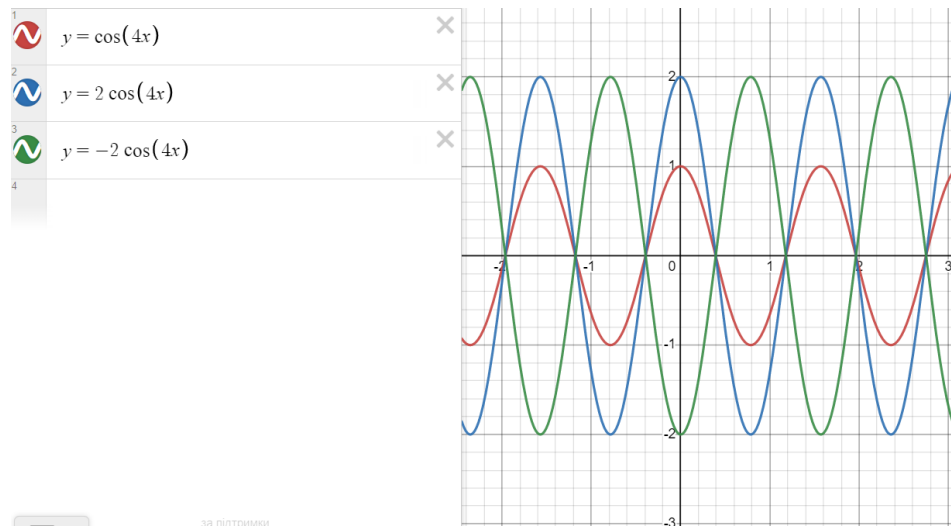


Рис. 1.5. Сімейство реалізацій випадкового процесу $Y(t) = X \cos(at)$

Приклад 1.1. Заданий випадковий процес випадковою функцією $X(t) = U(t^3 + 1)$, де U – випадкова величина. Знайти перерізи випадкового процесу $X(t)$ при всіх цілих значеннях $t \in [1; 5]$.

Розв’язання. Нагадаємо, що перерізом випадкового процесу називається випадкова величина $X(t_0)$, в яку перетворюється випадковий процес при $t=t_0$. Перерізами даного випадкового процесу є:

$$X(1) = U(1^3 + 1) = 2U, \quad X(2) = U(2^3 + 1) = 9U, \quad X(3) = U(3^3 + 1) = 28U, \\ X(4) = U(4^3 + 1) = 65U, \quad X(5) = U(125 + 1) = 126U.$$

Приклад 1.2. Заданий випадковий процес випадковою функцією $X(t) = U \cos t$, де U – випадкова величина. При першому випробуванні випадкова величина U набула значення 2, а при другому випробуванні – 5. Знайти реалізації випадкової функції $X(t)$.

Розв’язання. Нагадаємо, що реалізацією випадкового процесу називається детермінована функція $x(t)$, на яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ внаслідок випробування. Реалізаціями заданої випадкової функції є такі не випадкові функції: $x_1(t) = 2 \cos t$, $x_2(t) = 5 \cos t$.

1.1.4. Класифікація випадкових процесів

Теоретично випадкові процесів прийнято класифікувати за певними ознаками, враховуючи плавність або стрибкоподібність реалізації, фіксованість або випадковість моментів, в які можуть відбуватися скачки і т. д., вид закону розподілу окремого перерізу процесу або сукупності його перерізів і т. д. Познайомимося з

найпростішою елементарною класифікацією випадкових процесів – «за часом» і «за станами» [3].

Випадковий процес $X(t)$ називається **процесом з дискретним часом**, якщо система, в якій він відбувається, змінює стани тільки в моменти $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$, число яких скінченне або зліченне. Множина T є дискретною.

Приклади випадкових процесів з дискретним часом:

1) процес роботи технічного приладу, яке оглядається в моменти $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$, і переводиться в результаті огляду з одної категорії в іншу;

2) процес обстрілу цілі в моменти $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$, під час якого ціль може змінювати свої стани (не пошкоджена, частково виведена з ладу, перестала функціонувати, повністю зруйнована і т.д.).

Якщо розглядається одновимірний випадковий процес $X(t)$ з дискретним часом (моменти $t_1, t_2, \dots$), то його перерізи в ці моменти утворюють *послідовність випадкових величин*: $X(t_1), X(t_2), \dots$. Як аргумент послідовності може бути обраний номер значення моменту переходу: $X(1), X(2), \dots$.

Випадковий процес $X(t)$ називається **процесом з неперервним часом**, переходи системи із стану в стан можуть відбуватися в будь-який момент часу t спостережуваного періоду τ . Для процесу з неперервним часом безліч T моментів, коли система змінює свій стан, незліченна кількість (вони безперервно заповнюють аналізовану ділянку осі абсцис).

Приклади випадкових процесів з неперервним часом:

1) $X(t)$ – кількість відмов технічного пристрою від початку роботи до моменту t ;

2) броунівський рух частки у полі зору мікроскопа;

3) число $N(t)$ хворих у даному місті в ході розвитку епідемії на момент t .

Одновимірний випадковий процес $X(t)$ називається **процесом з неперервними станами**, якщо його переріз в будь-який момент t неперервною випадковою величиною i , отже, множина її значень є незліченною. Аналогічно для багатовимірного випадкового процесу.

Приклади випадкових процесів з неперервними станами:

1) напруга $U(t)$ живлення комп'ютера на момент t ;

2) тиск газу $P(t)$ у заданому резервуарі у момент t ;

3) координати частки, що здійснює броунівський рух $X(t), Y(t)$, у момент t (двовимірний випадковий процес з неперервними станами);

4) параметри, що характеризують у момент t стан космічної ракети, що виводиться на орбіту (багатовимірний випадковий процес з неперервними станами).

Випадковий процес, що протікає в системі S , називається **процесом з дискретними станами**, якщо в будь-який момент часу t множина станів скінченна чи зліченна (якщо його переріз у будь-який момент t характеризується дискретною випадковою величиною $X(t)$).

Зрозуміло, що всі випадкові процеси з «якісними» станами відносяться до категорії процесів із дискретними станами; переріз такого процесу є випадковою подією — аналогом дискретної випадкової величини.

Таким чином, в залежності від характеру множини T значень аргументу t , в які можливі переходи системи зі стану в стан, а також множини самих станів, всі випадкові процеси можна розділити на чотири класи:

1а. Процеси з дискретними станами та дискретним часом.

1б. Процеси з дискретними станами та неперервним часом.

2а. Процеси з неперервними станами та дискретним часом.

2б. Процеси з неперервними станами та неперервним часом.

Приклади різних типів процесів

1а. Хтось купив m квитків виграшної позики, які можуть вигравати та погашатися заздалегідь відомі моменти тиражів $t_1, t_2 \dots$. Випадковий процес $X(t)$ – число квитків, які виграли до моменту t .

1б. Технічний пристрій складається з n вузлів, які можуть під час роботи пристрою відмовляти (виходити з ладу). Випадковий процес $X(t)$ – кількість вузлів, що відмовили до моменту t .

2а. У певні моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_n$ реєструється температура повітря $T(t)$ у заданій точці простору. Послідовність значень цієї величини – випадковий процес $T(t)$ з неперервними станами та дискретним часом.

2б. Процес зміни напруги $U(t)$ в електромережі живлення комп'ютера є випадковим процесом з неперервними станами та неперервним часом.

1.1.5. Закони розподілу випадкових процесів та їх характеристики

Оскільки випадковий процес при фіксованих значеннях аргументу є випадковою величиною, то для його опису використовують такі самі способи, що й для випадкових величин. Відомо [10], що основною характеристикою випадкової величини є її закон розподілу, який може бути представлений різними формами:

- дискретна ВВ – ряд розподілу, багатокутник розподілу, функція розподілу $F(X)$;

- неперервна ВВ – функція розподілу $F(X)$ та функція щільності $f(x)$.

Універсальною характеристикою для дискретної та неперервної випадкової величини є функція розподілу $F(X)$, яка задає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, менше за x . Аналогічно розглядається поняття функції розподілу випадкового процесу.

Нехай заданий випадковий процес $X(t)$. Відомо, що переріз випадкового процесу при фіксованому значенні t являє собою випадкову величину, яка має закон розподілу:

$$F(t, x) = P(X(t) < x).$$

Ця функція залежить від двох аргументів:

- від значення t , для якого береться переріз;
- від значення x , менше якого повинен бути $X(t)$.

Функція $F(t, x)$ називається **одновимірним законом розподілу випадкового процесу**. Ця функція характеризує лише властивості одного окремо взятого перерізу $X(t)$, але не дає поняття про спільний розподіл двох (або більше) перерізів випадкового процесу. Тому випадковий процес ще характеризують за допомогою числових характеристик.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається не випадкова (детермінована) функція $m_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $m_x(t) = M[X(t)]$ (рис. 1.6).

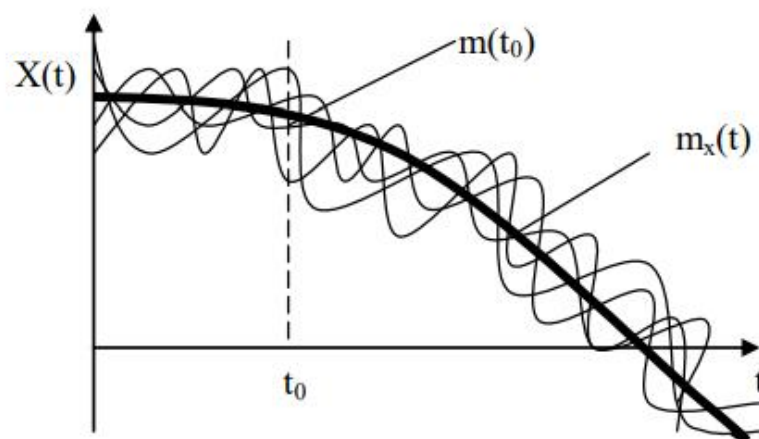


Рис. 1.6. Графіки математичного сподівання випадкової функції $X(t)$ та її реалізацій.

Для дискретного випадкового процесу:

$$m_x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) p_i(t). \quad (1.1)$$

Для неперервного випадкового процесу:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(t, x) dx. \quad (1.2)$$

Властивості математичного сподівання:

- математичне сподівання невинпадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій невинпадкової функції:

$$M(\varphi(t)) = \varphi(t);$$

- невинпадкову функцію можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(\varphi(t) X(t)) = \varphi(t) M(X(t)) = \varphi(t) m_x(t);$$

- якщо при всіх значеннях аргументу t перерізи випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є незалежними випадковими величинами, то математичне сподівання суми цих процесів дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X(t) + Y(t)) = m_x(t) + m_y(t);$$

- якщо при всіх значеннях аргументу t перерізи випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є незалежними випадковими величинами, то математичне сподівання добутку цих процесів дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X(t) \cdot Y(t)) = m_x(t) \cdot m_y(t).$$

Приклад 1.3. Заданий випадковий процес випадковою функцією $X(t) = U \cos 5t$, де U – випадкова величина, $M(U) = 10$. Знайти математичне сподівання даного випадкового процесу.

Розв’язання. За властивостями математичного сподівання невинпадкову функцію можна винести, отримаємо:

$$m_x(t) = M(X(t)) = M(U \cos 5t) = \cos 5t \cdot M(U) = 10 \cos 5t.$$

Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція $D_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює дисперсії відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $D_x(t) = D[X(t)] = M[X - M(X)]^2$.

Для дискретного випадкового процесу:

$$D_x = M(X^2(t)) - [m_x(t)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) p_i(t) - \left(\sum_{i=1}^n x_i(t) p_i(t) \right)^2. \quad (1.3)$$

Для неперервного випадкового процесу:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(t, x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(t, x) dx \right]^2. \quad (1.4)$$

Властивості дисперсії:

- дисперсія невинпадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює нулю:

$$D(\varphi(t)) = 0;$$

- невинпадкову функцію можна виносити за знак дисперсії в квадраті:

$$D(\varphi(t) X(t)) = \varphi^2(t) D(X(t)) = \varphi^2(t) D_x(t);$$

- якщо при всіх значеннях аргументу t перерізи винпадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є незалежними винпадковими величинами, то дисперсія суми цих процесів дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X(t) + Y(t)) = D_x(t) + D_y(t).$$

Приклад 1.4. Заданий винпадковий процес винпадковою функцією $X(t) = U(t^4 + 1)$, де U – винпадкова величина, $D(U) = 4$. Знайти дисперсію даного винпадкового процесу.

Розв’язання. За властивостями дисперсії невинпадкову функцію можна винести, отримаємо:

$$D_x(t) = D(X(t)) = D(U(t^4 + 1)) = (t^4 + 1)^2 \cdot D(U) = 4(t^4 + 1)^2.$$

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x(t)$ винпадкового процесу $X(t)$ називається арифметичне значення квадратного кореня з його дисперсії, тобто $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Математичне сподівання винпадкового процесу характеризує *середню траєкторію всіх можливих його реалізацій*, а його дисперсія та середнє квадратичне відхилення – *розсіювання реалізацій відносно середньої траєкторії*.

Кореляційною функцією винпадкового процесу (коваріація) $X(t)$ називається детермінована функція двох змінних t_1 і t_2 :

$$K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))] \quad (1.5)$$

Властивості кореляційної функції:

- кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1);$$

- кореляційна функція винпадкового процесу $X(t)$ при рівності аргументів є дисперсією цього процесу:

$$K_x(t_1, t_1) = D_x(t_1);$$

- кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ не змінюється при додаванні не випадкової функції $\varphi(t)$, тобто якщо $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2);$$

- при множенні випадкового процесу $X(t)$ на не випадкову функцію $\varphi(t)$, тобто якщо $Y(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) \cdot \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2);$$

- модуль кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ не є більшим середнього геометричного дисперсій відповідних перерізів цього процесу:

$$|K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1) \cdot D_x(t_2)}.$$

Кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ може набувати всіх дійсних значень. Вона характеризує ступінь близькості лінійної залежності між двома перерізами та розсіювання цих перерізів відносно математичного сподівання $m_x(t)$.

Приклад 1.5. Заданий випадковий процес випадковою функцією $X(t) = U \cos 5t$, де U – випадкова величина, $M(U) = 4$, $D(U) = 8$. Знайти кореляційну функцію даного випадкового процесу.

Розв'язання. За означенням:

$$K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))].$$

Обчислимо математичне сподівання для аргументів t_1 та t_2 :

$$m_x(t_1) = M(X(t_1)) = M(U \cos 5t_1) = \cos 5t_1 \cdot M(U) = 4 \cos 5t_1,$$

$$m_x(t_2) = M(X(t_2)) = M(U \cos 5t_2) = \cos 5t_2 \cdot M(U) = 4 \cos 5t_2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[(U \cos 5t_1 - 4 \cos 5t_1)(U \cos 5t_2 - 4 \cos 5t_2)] = \\ &= M[\cos 5t_1 (U - 4) \cos 5t_2 (U - 4)] = \cos 5t_1 \cos 5t_2 M[(U - 4)^2] = \\ &= \cos 5t_1 \cos 5t_2 D(U). \end{aligned}$$

Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається функція:

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)} = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)} \sqrt{K_x(t_2, t_2)}}. \quad (1.6)$$

Нормована кореляційна функція $r_x(t_1, t_2)$ характеризує тісноту лінійної залежності між двома перерізами.

Властивості нормованої кореляційної функції:

- нормована кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ симетрична відносно своїх аргументів:

$$r_x(t_1, t_2) = r_x(t_2, t_1);$$

- модуль нормованої кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ не перевищує одиниці:

$$|r_x(t_1, t_2)| \leq 1;$$

- при рівності аргументів модуль нормованої кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ дорівнює 1:

$$|r_x(t, t)| = 1.$$

Приклад 1.6. Випадковий процес визначається формулою $Y(t) = X \cos \omega t$, де X — випадкова величина. Знайти основні характеристики цього процесу, якщо $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$m_x(t) = M[Y(t)] = M[X \cos \omega t] = \cos \omega t M(X) = a \cos \omega t;$$

$$D_x(t) = D[Y(t)] = D[X \cos \omega t] = \cos^2 \omega t D(X) = \sigma^2 \cos^2 \omega t.$$

Знаходимо далі кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[(X \cos \omega t_1 - a \cos \omega t_1)(X \cos \omega t_2 - a \cos \omega t_2)] = \\ &= \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 \cdot M[(X - a)(X - a)] = \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 \cdot D(X) = \\ &= \sigma^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2, \end{aligned}$$

а також нормовану кореляційну функцію

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2}{(\sigma \cos \omega t_1)(\sigma \cos \omega t_2)} \equiv 1.$$

Випадкові процеси можна класифікувати залежно від того, плавно чи стрибкоподібно змінюються стани системи, в якій вони відбуваються, скінченна чи нескінченна множина цих станів. Серед випадкових процесів особливе місце посідають *марковські випадкові процеси*, що становлять основу теорії масового обслуговування.

Питання для самоперевірки

1. Що називається моделлю?
2. Класифікація моделей.
3. Принципи побудови моделей.
4. Що називається випадковим процесом?

5. Наведіть приклади випадкових процесів.
6. Що називається перерізом випадкового процесу?
7. Що називається реалізацією випадкового процесу?
8. Класифікація випадкових процесів за часом.
9. Класифікація випадкових процесів за станами.
10. Що називається елементарною випадковою функцією?
11. Функція розподілу випадкового процесу.
12. Що називається математичним сподіванням випадкового процесу?
13. Основні властивості математичного сподівання.
14. Що називається дисперсією випадкового процесу?
15. Основні властивості дисперсії випадкового процесу.
16. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу?
17. Що називається кореляційною функцією випадкового процесу?
18. Основні властивості кореляційної функції випадкового процесу.
19. Що називається нормованою кореляційною функцією випадкового процесу?
20. Основні властивості нормованої кореляційної функції випадкового процесу.

Задачі для самостійної роботи

1. Випадкова функція $X(t) = U(t^2 + 1)$, де U – випадкова величина, можливі значення якої перебувають в інтервалі $(0;10)$. Знайти реалізації функції $X(t)$ під час двох випробувань, у яких величина U набула таких значень та побудувати їх графіки:

а) $U_1 = 2$;

б) $U_2 = 3,5$.

2. Випадкова функція $X(t) = U \cos t$, де U – випадкова величина. При першому випробуванні $U_1 = 5$, а при другому випробуванні – $U_2 = 1$. Знайти реалізації функції $X(t)$ під час двох випробувань та побудувати їх графіки.

3. Випадкова функція $X(t) = U(t^3 + 1)$, де U – випадкова величина. Знайти всі перерізи функції $X(t)$ при всіх цілих значеннях $t \in [1;5]$.

4. Випадкова функція $X(t) = U \sin t$, де U – випадкова величина. Знайти перерізи випадкової функції $X(t)$, які відповідають таким фіксованим значенням аргументу:

а) $t_1 = \pi/6$;

б) $t_2 = \pi/2$.

5. Задано випадковий процес $X(t) = Ut^2 - 1$, де $t \in [0; +\infty)$, U – випадкова величина, закон розподілу якої задано у вигляді таблиці. Знайти переріз випадкового процесу при $t=1$.

U	3	4
P	0,2	p_2

6. Елементарна випадкова функція має вигляд $Y(t) = e^{-tU}$, де $t > 0$, U – випадкова величина, яка набуває лише додатних значень. Побудувати множину реалізацій заданого випадкового процесу $Y(t)$.

7. Знайти математичне сподівання випадкової функції $X(t) = Ue^t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=5$. Побудувати траєкторії даного процесу.

8. Знайти математичне сподівання випадкової функції $X(t) = U \cos(2t)$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=2$. Побудувати траєкторії даного процесу.

9. Знайти математичні сподівання випадкових функцій $X(t) = Ut^2 + 2t + 1$ та $Y(t) = U \sin 4t + V \cos 4t$, де U та V випадкові величини, причому $M(U)=M(V)=1$.

10. Знайти дисперсію випадкового процесу $X(t) = U(t^3 + 1)$, де U – випадкова величина, $D(U)=4$.

11. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $X(t) = U \sin 2t$, де U – випадкова величина, $M(U)=2$, $D(U)=3$.

12. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_X(t_1, t_2) = 8 \cos(t_1 - t_2)$.

13. Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) кореляційну функцію випадкової функції: $X(t) = U \sin(3t)$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=10$, $D(U) = 0,2$.

14. Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) кореляційну функцію випадкової функції: $X(t) = U \cos(5t)$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=4$, $D(U) = 8$.

1.2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ПОТОКІВ ПОДІЙ

1.2.1. Найпростіший потік подій

Одним із важливих понять теорії випадкових процесів є поняття потоку подій [3].

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Наприклад: потік заявок, що надходить до підприємства побутового обслуговування; потік викликів до телефонної станції; потік відказів (збоїв) під час роботи на ПК; потік заяв до диспетчерського пункту з викликом таксі тощо.

Події, які утворюють потік, в загальному випадку можуть бути й неоднорідними, наприклад, в потоці автомобілів, які приїхали на заправку, можуть бути як вантажні, так і легкові.

Термін «подія» в понятті *потік подій* відрізняється по змісту від того поняття *випадкова подія*, що в теорії ймовірностей, під яким розуміється будь-який факт, який у випробуванні з випадковим наслідком може відбутися або не відбутися. Про події, які утворюють потік, так говорити не можна, тому що немає змісту говорити про ймовірність таких подій.

З потоком подій можна пов'язувати різні випадкові величини, наприклад:

- A – протягом часу від t_0 до $t_0 + \tau$ прийде хоча б 1 виклик на телефонну станцію;
- B – протягом часу від t_0 до $t_0 + \tau$ прийде рівно 2 виклики на телефонну станцію.

Ймовірність таких подій A і B можна обчислювати.

Потік подій представляє собою в загальному випадку послідовність випадкових точок $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n, \dots$ на осі часу (рис. 1.7) з поділяючими їх випадковими інтервалами $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ так, що:

$$T_1 = \Theta_2 - \Theta_1, T_2 = \Theta_3 - \Theta_2, \dots, T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n.$$

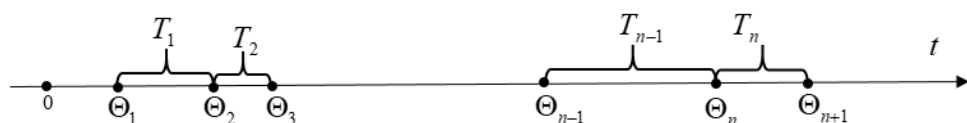


Рис. 1.7. Потік подій

Середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу, називається **інтенсивністю потоку** λ .

Потоки подій різняться між собою за їх внутрішньою структурою: за законами розподілу інтервалів $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ між подіями, їх взаємною залежністю чи незалежністю тощо.

На перший погляд, простим є потік подій, в якому інтервали між подіями строго однакові і рівні визначеній не випадковій величині τ (рис. 1.8). Такий потік називається **регулярним**. Наприклад, потік змін хвилинної цифри на вокзальному електронному годиннику, потік змін стану комп'ютера, який визначається тактом її роботи тощо.

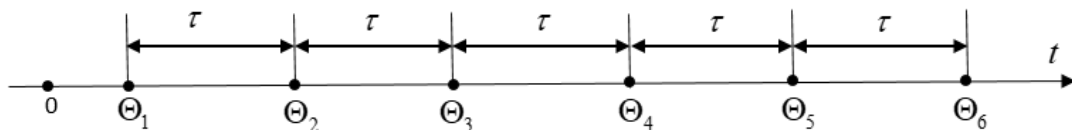


Рис. 1.8. Регулярний потік подій

Регулярний потік подій досить рідко зустрічається практично; він представляє певний інтерес як граничний випадок для інших потоків. Однак при своїй простоті, регулярний потік не має переваг при математичному аналізі, оскільки набагато поступається простотою проведення розрахунків іншим типам потоків.

Частіше доводиться зустрічатися з потоками подій, для яких і моменти появи і проміжки часу між ними випадкові.

Потік називається **найпростішим**, якщо він має такі властивості:

- **стаціонарність** – імовірність того, що за деякий проміжок часу t відбудеться та чи інша кількість подій, залежить лише від довжини проміжку τ і не залежить від початку його відліку. Звідси випливає, що інтенсивність потоку стала $\lambda = \text{const}$. Це означає, що число подій $X_1(t_1, \tau_1)$, $X_2(t_2, \tau_2)$, які попадають на 2 проміжки однакової довжини, будуть мати однакові розподіли (рис. 1.9);

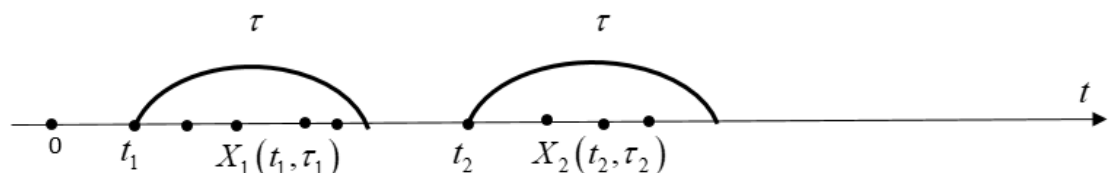


Рис. 1.9. Стаціонарний потік

- **відсутність післядії** – імовірність настання деякої кількості подій на довільному проміжку часу не залежить від того, яка кількість подій відбулась до початку цього проміжку. На рисунку 1.10 представлений потік без післядії, де для

будь-яких проміжків часу $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, що не перекриваються, число подій $X_1(t_1, \tau_1), X_2(t_2, \tau_2), \dots, X_n(t_n, \tau_n)$, що попадають на ці проміжки, представляють собою незалежні випадкові величини, тобто ймовірність попадання будь-якого числа подій на один з цих проміжків, не залежить від того, скільки їх попало на інші.

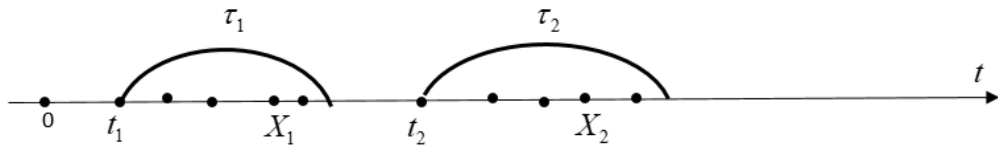


Рис. 1.10. Потік без післядії

Зауважимо, що регулярний потік не є потоком без післядії, оскільки властивість післядії породжується в ньому його регулярністю.

- **ординарність** – імовірність настання двох і більше подій за малий проміжок часу Δt істотно менша за ймовірність того, що відбудеться одна подія за малий проміжок часу Δt (рис. 1.11). Фактично ординарність означає, що події у потоці з'являються по одній, а не парами та групами.

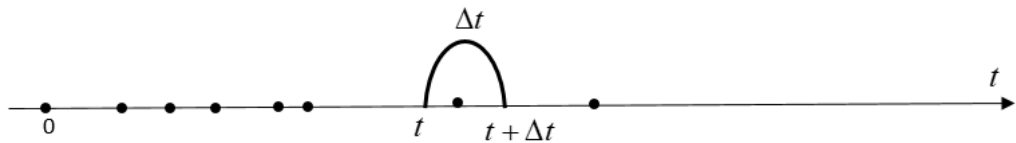


Рис. 1.11. Ординарний потік

Прикладами *ординарних потоків* подій можуть бути: потік деталей, що надходять на конвеєр для збирання, потік відмов технічного пристрою, потік автомобілів, що прибувають на станцію технічного обслуговування. Прикладом *неординарного потоку* може бути потік пасажирів, які прибувають у ліфті даний поверх.

Відсутність післядії у потоці означає, що події, які утворюють потік, з'являються у послідовні моменти часу незалежно одна від одної. Наприклад, потік пасажирів, що входять на станцію метро, можна вважати потоком без післядії.

Стаціонарність потоку означає його однорідність відносно часу: ймовірнісні характеристики такого потоку мають не змінюватися залежно від часу. Інтенсивність потоку подій – середня кількість подій в одиницю часу – для стаціонарного потоку має залишатися сталою. Це не означає, що фактична кількість подій, які з'являються в одиницю часу, стала – ні, потоки можуть мати місцеві згущення та розрідження. Важливо, що для стаціонарного потоку ці згущення та розрідження не носять характер закономірності, а середня кількість

подій, що потрапляють на одиничний проміжок часу, залишається сталою для всього періоду, що розглядається. Наприклад, потік викликів, що надходять на телефонну станцію з 12 до 13 год. можна розглядати стаціонарним, той же потік протягом доби вже не буде стаціонарним (вночі потік викликів значно менший ніж вдень).

Найпростіший потік відіграє серед інших потоків особливу роль. При суперпозиції достатньо великої кількості потоків, що мають післядію (лише б вони були стаціонарні та ординарні), утворюється сумарний потік, який можна вважати найпростішим, і тим точніше, чим більша кількість потоків додається.

Потік подій, що має властивості *відсутності післядії* та *ординарності*, називається **пуассонівським потоком**.

Таким чином, найпростіший потік є частинним випадком пуассонівського потоку (*стаціонарний пуассонівський потік*).

Якщо *потік подій найпростіший*, то ймовірність того, що за проміжок часу t подія A настане m раз, обчислюється **формулою Пуассона**:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad (1.7)$$

де λ – інтенсивність потоку, тобто середнє число подій, які відбудуться за одиницю часу [с, хв, год].

Ця формула відбиває всі властивості найпростішого потоку, а отже, є його *математичною моделлю*.

Дійсно, з формули (1.7) маємо, що ймовірність появи k подій за проміжок часу t , при заданій інтенсивності λ , є лише функцією k і t , що відображає властивість *стаціонарності* найпростішого потоку.

Формула (1.7) не використовує інформацію про появу подій до початку проміжку часу t , що відображає властивість *відсутності післядії*.

Використовуючи формулу (1.7), знайдемо ймовірність появи 1 події та більше 1 події:

$$P_t(1) = \lambda e^{-\lambda t},$$
$$P_t(m > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}].$$

Порівнюючи $P_t(1)$ та $P_t(m > 1)$ при малих значеннях t , робимо висновок, що ймовірність появи більше однієї події значно менша за ймовірність появи однієї події, що відображає властивість *ординарності* найпростішого потоку.

Найпростішим цей потік названий тому, що дослідження систем, що під впливом найпростіших потоків, проводиться найпростішим чином.

Приклад 1.7. Середня кількість заявок, які надходять до комбінату побутового обслуговування за 1 год, дорівнює 4. Знайти ймовірність того, що за 3 год надійде: 1) 6 заявок; 2) менш як 6 заявок; 3) не менш як 6 заявок.

Розв'язання. Нехай подія А – надходження однієї заявки. Потік заявок найпростіший. Тому для розв'язування задачі застосуємо формулу (1.7), в якій $\lambda = 4$, $t = 3$, $m = 6$, $m < 6$, $m \geq 6$. Обчислимо відповідні ймовірності:

$$1) \quad P_3(6) = \frac{12^6}{6!} e^{-12} \approx 0,0249;$$

$$2) \quad P_3(m_3 < 6) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + P_3(4) + P_3(5) \approx 0,0199;$$

$$3) \quad P_3(m_3 \geq 6) = 1 - P_3(m < 6) = 1 - 0,0199 = 0,9801.$$

1.2.2. Особливості моделювання потоків подій

Під час імітаційного моделювання часто доводиться моделювати випадкові події. Настання випадкової події моделюється за допомогою ГВЧ (генератора випадкових чисел). Проте, часто приходить імітувати момент настання випадкової події, тобто появу певних подій протягом часу [5].

Коли подій багато і вони сліднують одна за одною, то вони утворюють **потік**. Зауважимо, що події при цьому повинні бути *однорідними*, тобто схожими чимось одна на одну. Наприклад, поява водіїв на АЗС, які бажають заправити свій автомобіль. При цьому вважається, що статистична характеристика цього явища (інтенсивність потоку подій) задана.

Інтенсивність потоку подій вказує, скільки в середньому відбувається таких подій за одиницю часу, але коли саме відбудеться кожна конкретна подія, треба визначати методами моделювання. Важливо, що коли ми згенеруємо, наприклад, за 200 годин 1000 подій, їх кількість буде дорівнювати приблизно величині середньої інтенсивності появи подій, тобто $1000/200=5$ подій за годину. Це є статистична величина, що характеризує цей потік в цілому.

Інтенсивність потоку в певному сенсі є **математичним сподіванням** кількості подій в одиницю часу. Але реально може так виявитися, що протягом однієї години з'явиться 4 події, протягом іншої – 6, хоча в середньому виходить 5 подій за годину. Тому однієї величини для характеристики потоку недостатньо. Другою величиною, що характеризує розсіювання подій в часі відносно математичного очікування, є **дисперсія**. Власне саме ця величина визначає випадковість появи події, слабку передбачуваність моменту її появи.

Потік подій – це послідовність однорідних подій, що з'являються одна за одною у випадкові проміжки часу. На осі часу ці події виглядають так (рис. 1.12):

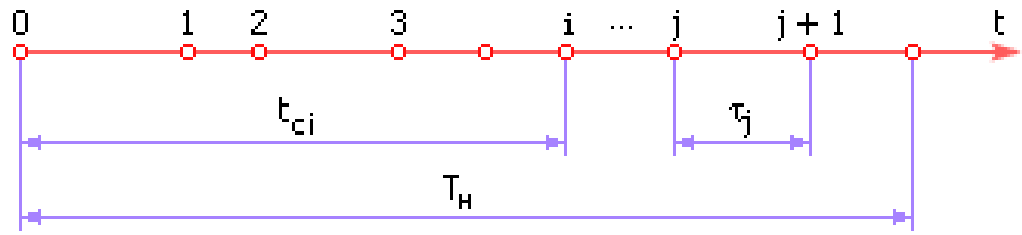


Рис. 1.12. Потік випадкових подій:

τ_j — інтервал між подіями (випадкова величина);
 t_{ci} — момент настання i -ї події (вимірюється від $t = 0$);
 T_n — загальний час спостереження.

Інтенсивність потоку λ — це середнє число подій в одиницю часу. Інтенсивність потоку можна розрахувати експериментально за формулою:

$$\lambda = \frac{N}{T_n}, \quad (1.8)$$

де N — число подій, що сталися за час спостереження T_n .

Якщо інтервал між подіями τ_j дорівнює константі або визначений якою-небудь формулою у вигляді: $t_j = f(t_{j-1})$, то потік називається **детермінованим** (не випадковим). Інакше потік називається **випадковим**.

Випадкові потоки бувають:

- *ординарні* — ймовірність одночасної появи двох і більше подій дорівнює нулю;
- *стаціонарні* — частота появи подій $\lambda(t) = \text{const}$;
- *без післядії* — ймовірність появи випадкової події не залежить від моменту появи попередніх подій.

1.2.3. Пуассонівський потік

За еталон потоку в моделюванні прийнято вважати **пуассонівський потік** — це ординарний потік без післядії [7].

Імовірність того, що за інтервал часу $(t_0, t_0 + \tau)$ відбудеться m подій, визначається за законом Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) d\tau, \quad (1.9)$$

де a — параметр Пуассона.

Якщо $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то це **стаціонарний потік Пуассона (найпростіший)**, для якого $a = \lambda \cdot t$.

Якщо потік подій не має післядії, ординарний, але не є стаціонарним, тобто $\lambda(t) = \text{var}(t)$, то це **нестационарний потік Пуассона**.

Пуассонівський потік подій (як стаціонарний, так і нестационарний) пов'язаний з розподілом Пуассона. А саме, кількість подій потоку, що випадають на будь-який проміжок часу, розподілена за законом Пуассона.

Для *найпростішого потоку* ймовірність появи m подій за час τ дорівнює:

$$P_m = \frac{(\lambda\tau)^m e^{-\lambda\tau}}{m!}. \quad (1.10)$$

Ймовірність не появи події за час τ дорівнює:

$$P_0 = \frac{(\lambda\tau)^0 e^{-\lambda\tau}}{0!} = e^{-\lambda\tau}.$$

На рисунку 1.13 представлена залежність P_0 від часу. Очевидно, що чим більше час спостереження, тим ймовірність не появи жодної події менше. Крім того, чим більше значення λ , тим крутіше йде графік, тобто швидше зменшується ймовірність.

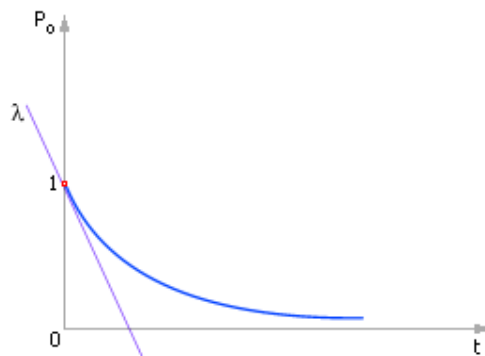


Рис. 1.13. Графік ймовірності не появи жодної події за час t

Ймовірність появи хоча б однієї події ($P_{\text{ХБ1С}}$) обчислюється за формулою:

$$P_{\text{ХБ1С}} = 1 - P_0 = 1 - e^{-\lambda\tau}. \quad (1.11)$$

Із графіка на рисунку 1.14 видно, що ймовірність появи хоча б однієї події прямує з часом до одиниці. Тобто, при тривалому спостереженні, подія обов'язково рано чи пізно станеться. Чим довше ми спостерігаємо за подією (чим більше t), тим більша ймовірність того, що подія відбудеться – графік функції монотонно зростає. Чим більше інтенсивність появи події (чим більше λ), тим швидше настає ця подія, і тим швидше функція прагне до одиниці. На графіку параметр λ представлений крутизною лінії (нахил дотичної).

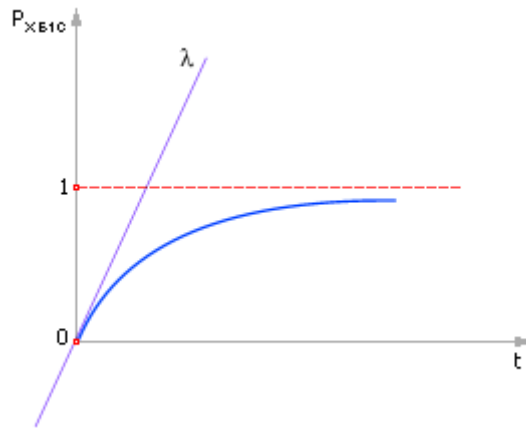


Рис. 1.14. Графік імовірності появи хоча б однієї події за час t

Показниковий (експоненціальний) закон розподілу відіграє велику роль у теорії марковських процесів і має щільність ймовірності:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (1.12)$$

Досліджуючи закон розподілу, можна визначити, що проміжок часу між сусідніми подіями у найпростішому потоці розподілений за показниковим законом, а його математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення дорівнюють $m_x = \frac{1}{\lambda} = \sigma_x$. Рівність математичного сподівання середньому квадратичному відхиленню означає, що даний потік – це *потік без післядії*.

Дисперсія такого потоку велика. Фізично це означає, що час появи події (відстань між подіями) є складно передбачуваним, та випадковим чином знаходиться в інтервалі $m_x - \sigma_x < \tau_j < m_x + \sigma_x$. Хоча ясно, що в середньому воно приблизно дорівнює: $\tau_j = m_x = \frac{T_n}{N}$.

Подія може з'явитися в будь-який момент часу, але в межах розсіювання цього моменту τ_j відносно m_x на $[-\sigma_x; +\sigma_x]$ (величину післядії). На рисунку 1.15 показані можливі положення події 2 на осі часу при заданому σ . В даному випадку говорять, що перша подія не впливає на другу, а друга на третю і так далі, тобто післядія відсутня.

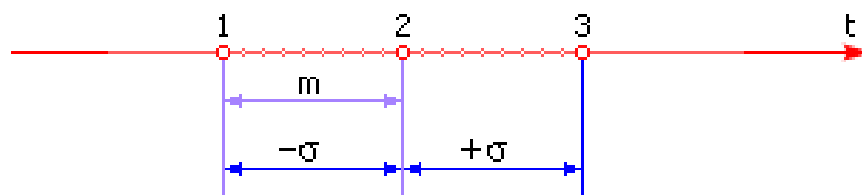


Рис. 1.15. Вплив величини σ на положення події на часовій осі

Основна формула для моделювання часу між двома послідовними подіями:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \ln(r), \quad (1.13)$$

де r – рівномірно розподілене від 0 до 1 випадкове число, яке беруть із ГВЧ;
 τ – інтервал між випадковими подіями (випадкова величина τ_j).

Приклад 1.8. Потік автомашин, що рухаються вздовж шосе у заданому напрямку – найпростіший потік подій з інтенсивністю λ . Людина виходить на шосе, щоб зупинити перший автомобіль, який рухається у вказаному напрямку. Знайти закон розподілу часу очікування T ; визначити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

Розв’язання. Оскільки найпростіший потік має властивість відсутності післядії, то “майбутнє” не залежить від “минулого”, зокрема від того, скільки хвилин тому пройшов останній автомобіль. Закон розподілу часу очікування T такий самий, як і закон розподілу проміжку часу між послідовною появою автомобілів, тобто показниковий розподіл з параметром λ :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

З урахуванням числових характеристик показникового розподілу маємо:

$$m_T = \frac{1}{\lambda}, \quad D_T = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_T = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад 1.9. Розглянемо потік заготовок, що прибувають на технологічну операцію. Заготовки приходять випадковим чином – в середньому 8 штук за добу (інтенсивність потоку $\lambda=8/24$ год⁻¹). Необхідно промоделювати цей процес протягом $T_n = 100$ год.

Розв’язання. За умовою задачі інтенсивність потоку $\lambda = 8/24$ год⁻¹. Середній час між двома сусідніми подіями

$$T_0 = m_x = 1 / \lambda = 24/8 = 3 \text{ год.}$$

Тобто в середньому прибуває одна заготовка за 3 години. Зауважимо, що для найпростішого потоку подій $\sigma_x = 3$.

На рисунку 1.16 представлено алгоритм, що генерує потік випадкових подій.

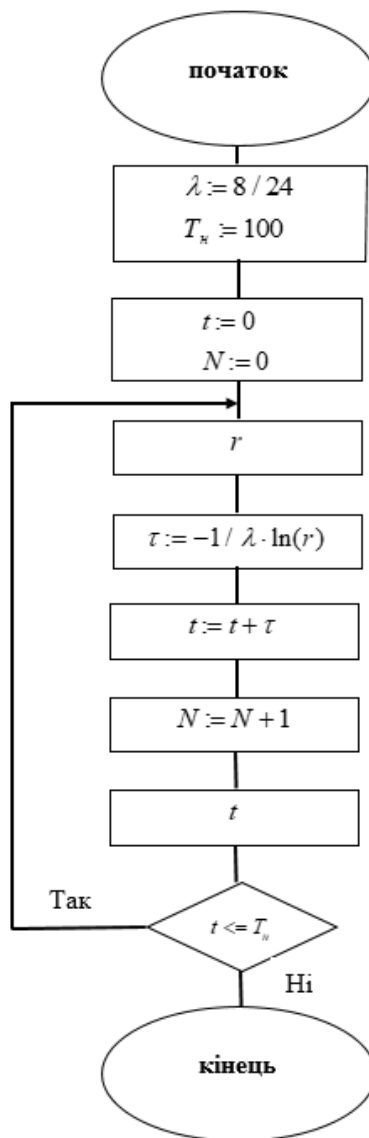


Рис. 1.16. Алгоритм, що генерує потік випадкових подій із заданою λ

На рисунку 1.17 показано результати роботи алгоритму – моменти часу, коли заготовки приходили на операцію.



Рис. 1.17. Ілюстрація роботи алгоритму, генеруючого потік випадкових подій

Як видно, всього за період $T_n = 100$ виробничий вузол обробив $N = 33$ заготовки. Якщо запустити алгоритм знову, то N може виявитися іншим, наприклад, 34, 35 або 32. Але в середньому, за K прогонів алгоритму N дорівнюватиме 33,3 ... Якщо порахувати відстані між подіями t_{ci} та моментами часу, які визначаються як $3 \cdot i$, то в середньому величина буде дорівнювати $\sigma = 3$ год.

1.2.4. Інші відомі потоки подій

Ординарний потік подій називається *потокот Пальма* (або *потокот з обмеженою післядією*), якщо інтервали часу $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ між послідовними подіями є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами [7].

Оскільки випадкові величини $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ однаково розподілені, то потік Пальма завжди *стаціонарний*.

Найпростіший потік (стаціонарний пуассонівський потік) є потокот Пальма, оскільки інтервали часу між послідовними подіями в ньому незалежні між собою та розподілені однаково за показниковим законом:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0.$$

Нестационарний пуассонівський потік не є потокот Пальма. Дійсно, в нестационарному потоці закон розподілу проміжку між послідовними подіями залежить від того, де цей проміжок починається. Оскільки для сусідніх проміжків часу T_k і T_{k+1} початок проміжку T_{k+1} співпадає з кінцем проміжку T_k , то довжини цих проміжків є залежними, а отже, нестационарний пуассонівський потік не є потокот Пальма.

Потоки Пальма мають широке застосування в *теорії надійності*, *теорії масового обслуговування* – галузі прикладної математики, де використовуються методи теорії випадкових процесів.

Теорія масового обслуговування – це розділ прикладної математики, що вивчає процеси з опрацюванням часто повторюваних однорідних подій, які з'являються в системах виробництва, обслуговування та управління. Прикладом згаданих подій є заявки на підприємствах побутового обслуговування, в банківських установах, в аудиторських фірмах, передача та опрацювання інформації, операції на автоматизованих лініях виробництва тощо.

Задачею теорії масового обслуговування є встановлення та вивчення залежностей між характером потоку заявок, кількістю каналів обслуговування, продуктивністю окремого каналу та ефективним обслуговуванням із метою відшукування найкращих способів управління процесами обслуговування.

Потоки Пальма зустрічаються у вигляді вихідних потоків систем масового обслуговування. Якщо на будь-яку систему поступає потік заявок, то система поділяє його на два потоки: потік опрацьованих та неопрацьованих заявок. Потік неопрацьованих заявок часто поступає на деяку іншу систему масового обслуговування.

Основною в теорії вихідних потоків є *теорема Пальма*.

Нехай на деяку систему масового обслуговування поступає потік заявок типу Пальма, причому заявка, яка надійшла, коли всі канали були зайняті, отримує відмову (не обслуговується). Якщо час обслуговування має показниковий розподіл, то потік неопрацьованих заявок також є потоком типу Пальма.

Багато потоки подій, що зустрічаються на практиці, хоча і не є в точності потоками Пальма, але можуть бути ними наближено замінені.

Важливими для практики зразками потоків Пальма є так звані потоки Ерланга. Ці потоки утворюються в результаті «просіювання» найпростіших потоків.

Якщо вхідний потік заявок є найпростішим, то потік неопрацьованих заявок, не будучи найпростішим, буде мати обмежену післядію. Прикладом потоків з обмеженою післядією є **потоки Ерланга**, що утворюються “просіюванням” найпростішого потоку.

Потоком Ерланга k -го порядку називається потік подій, що утворюється внаслідок “просіювання” найпростішого потоку, коли кожна k -та точка потоку (подія) зберігається, а всі проміжні точки (події) відкидаються.

Наприклад, заданий найпростіший потік з інтенсивністю λ . Якщо в цьому потоці зберігати кожну другу подію, а проміжну – відкидати, то отримаємо **потік Ерланга 2-го порядку** (рис. 1.18).

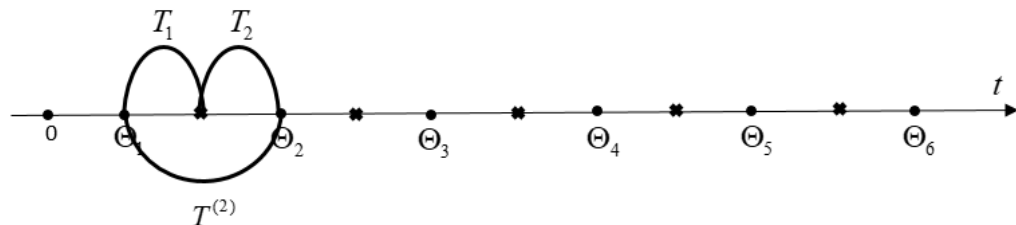


Рис. 1.18. Потік Ерланга 2-го порядку

Цей потік є потоком Пальма. Оскільки незалежними є проміжки в найпростішому потоці, то незалежними будуть і величини $T_1, T_2, \dots$ які отримані в результаті додавання проміжків найпростішого потоку по два. Інтервал $T^{(2)}$ між двома подіями в потоці Ерланга 2-го порядку – це сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за показниковим законом з параметром λ , що дорівнює інтенсивності початкового найпростішого потоку: $T^{(2)} = T_1 + T_2$.

Найпростіший потік є **потоком Ерланга 1-го порядку**.

Закон розподілу випадкової величини $T^{(k)}$ представлений щільністю розподілу

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

який називається законом Ерланга k -го порядку.

При $k=1$ маємо показниковий закон розподілу: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Потоком Ерланга k -го порядку називається потік Пальма, у якого інтервали між подіями розподілені за законом Ерланга k -го порядку ($k=2, 3, \dots$).

Питання для самоперевірки

1. Означення потоку подій.
2. Що називається регулярним потоком подій?
3. Що називається найпростішим потоком подій?
4. Означення стаціонарності потоку.
5. Означення відсутності післядії для найпростішого потоку.
6. Означення ординарності найпростішого потоку.
7. Означення інтенсивності потоку.
8. Який потік називається детермінованим?
9. Який потік називається випадковим?
10. Який потік називається пуассонівським потоком?
11. В чому полягає відмінність між стаціонарним та нестаціонарним потоками Пуассона?
12. Формула Пуассона для найпростішого потоку.
13. Основна формула для моделювання часу між двома послідовними подіями.
14. Опишіть алгоритм, що генерує потік випадкових подій із заданою λ .
15. Що називається потоком Пальма?
16. Де використовуються потоки Пальма?
17. Що називається теорією масового обслуговування?
18. Сформулюйте задачу теорії масового обслуговування.
19. Сформулюйте теорему Пальма.
20. Що називається потоком Ерланга?

Задачі для самостійної роботи

1. Середня кількість літаків, які прибувають до аеропорту за 1 хв, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що до 2 хв прибуде:

- 1) 4 літаки;
- 2) менш як 4 літаки;
- 3) не менш як 4 літаки.

Потік прибуття літаків вважається найпростішим.

2. Середня кількість викликів, які надходять на АТС за 1 хв, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 4 хв надійде:

- 1) 3 виклики;
- 2) менш як 3 виклики;
- 3) не менш як 3 виклики.

Потік викликів вважається найпростішим.

3. Середня кількість обривів ниток на ткацькому верстаті за хвилину становить 3. Знайти ймовірність того, що за 3 хв буде:

- 1) 5 обривів ниток;
- 2) менш як 5 обривів ниток;
- 3) не менш як 5 обривів ниток.

Потік подій вважається найпростішим.

4. У середньому до авіакаси звертаються з приводу придбання квитків 60 осіб за 1 год. Ураховуючи, що такі особи утворюють найпростіший потік, обчислити ймовірність того, що за 3 хв до каси надійдуть:

- 1) 3 пасажери;
- 2) не більш як 3 пасажери;
- 3) більше 3 пасажирів.

5. Інтенсивність поломки комп'ютера $\lambda = \frac{10^{-2}}{24}$, год⁻¹. Поломки розглядають як випадкові події, що утворюють найпростіший потік подій. Яка ймовірність того, що за 200 робочих днів поломок комп'ютера буде:

- 1) 2;
- 2) від 1 до 3;
- 3) більше 3.

6. Комп'ютер, що працює в реальному масштабі часу, обробляє інформацію, яка до неї надходить. Протягом 1 с на обробку надходять 4 умовні одиниці інформації. Беручи до уваги, що потік інформації є найпростішим, обчислити ймовірності таких подій:

- 1) за 2 с на комп'ютер надійдуть 5 одиниць;
- 2) за 2 с на комп'ютер надійдуть від 2 до 6 одиниць;
- 3) за 2 с на комп'ютер надійде більше 6 одиниць.

7. У години «пік» через пропускний автомат станції метро за 1 с проходить у середньому один пасажир. Яка ймовірність того, що за 5 с через пропускний автомат станції метро пройдуть:

- 1) 4 пасажери;
- 2) від 1 до 5 пасажирів;

3) не менше 5 пасажирів.

Потік пасажирів вважається найпростішим.

8. На АЗС за кожну хвилину надходять у середньому два автомобілі для заправлення паливом. Потік автомобілів для заправлення вважається найпростішим. Яка ймовірність того, що за 3 хв на АЗС для заправлення надійде:

- 1) 1 автомобіль;
- 2) не більш як 3 автомобілі;
- 3) не менш як 5 автомобілів.

9. Середня кількість несанкціонованих доступів (НСД) до локальної обчислювальної мережі підприємства за годину становить 3. Потік подій вважається найпростішим. Промоделювати потік випадкових подій згідно алгоритму (рис. 8) для часу спостереження 3 год. Здійснити 20 прогонів алгоритму. Обчислити за результатами роботи програми ймовірність того, що за 3 год буде:

- 1) рівно 5 НСД;
- 2) більше як 5 НСД;
- 3) не більше як 5 НСД.

Обчислити аналітично зазначені ймовірності та порівняти їх із ймовірностями, отриманими за рахунок імітаційного моделювання.

10. На АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 1,2$ викликів за хвилину. Промоделювати потік випадкових подій згідно алгоритму (рис. 1.16) для часу спостереження 2 хв. Здійснити 20 прогонів алгоритму.

Знайти ймовірність того, що за дві хвилини:

- 1) не надійде жодного виклику;
- 2) надійде рівно один виклик;
- 3) надійде хоча б один виклик.

Обчислити аналітично зазначені ймовірності та порівняти їх із ймовірностями, отриманими за рахунок імітаційного моделювання.

1.3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ НЕПЕРЕРВНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

1.3.1. Поняття марковського процесу

Розглядаються окремі стохастичні процеси, які є залежними від неперервного параметра. У системах, в яких відбуваються такі процеси, переходи зі стану в стан можливі в будь-які моменти часу. Указані процеси зустрічаються в природі [3].

Приклад 1.10. Система θ — лічильник у таксі. Стан системи в момент t характеризується кількістю кілометрів, пройдених автомобілем до даного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0 . Імовірність того, що в момент $t > t_0$ лічильник показуватиме ту чи іншу кількість кілометрів S_1 , залежить від S_0 , але не залежить від того, в які моменти часу змінювались покази лічильника до моменту t_0 .

Приклад 1.11. Розглянемо приклад побудови оптимального маршруту в GPS-навігаторі під час руху в великому місті при об'їзді заторів. Будемо вважати перехрестя доріг, в яких опиняється наш автомобіль, станами системи $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Для досягнення цілі функціонування системи необхідно перебратись в стан S_n . Припустимо, що ми знаходимося у стані S_6 . Навігатор побудував маршрут S_6, S_{10}, S_{14}, S_n . При цьому незалежність від минулого полягає в тому, що навігатор буде маршрут тільки із стану S_6 незалежно від того як ми потрапили в цей стан.

Приклад 1.12. Система θ — група шахістів. Стан системи характеризується кількістю фігур супротивника, що збереглися на дошці до моменту t_0 . Імовірність того, що в момент $t > t_0$ матеріальна перевага буде на боці одного із супротивників, залежить насамперед від того, в якому стані перебуває система в даний момент t_0 , а не від того, коли і в якій послідовності зникали фігури з дошки до моменту t_0 .

У наведених вище прикладах розглядаються випадкові процеси з дискретними станами та неперервним часом, для яких подальша поведінка системи S після моменту часу t залежить тільки від стану системи в цей момент і не залежить від поведінки процесу в попередній період (до моменту часу t).

Марковським випадковим процесом називається такий випадковий процес, для якого в будь-який моменту часу t_0 ймовірнісні характеристики процесу в майбутньому ($t > t_0$) залежать лише від його стану в даний момент ($t = t_0$) і не залежать від того, коли і як система набула цього стану ($t < t_0$).

Отже, марковський процес є *процесом без післядії*, тобто при фіксованому теперішньому майбутнє не залежить від минулого.

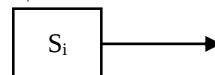
Для марковських процесів переходи системи S зі стану S_i у стан S_j відбуваються під впливом *пуассонівських потоків подій*. Саме властивість відсутності післядії в потоці Пуассона дозволяє при фіксованому теперішньому стані (стан S_i системи в момент часу t) не враховувати, як і коли система набула цього стану. Дані системи ще називають *пуассонівськими системами*.

На практиці марковські процеси у чистому вигляді зустрічаються не досить часто, але достатньо часто зустрічаються процеси, які з певним наближенням можна вважати марковськими. *Марковські процеси* є одним із важливих розділів економіко-математичного моделювання; вони визначають окремий вид ймовірнісних моделей різноманітних процесів, що відбуваються у фінансово-економічних системах.

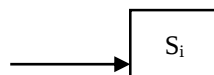
Аналізуючи марковські процеси, зручно користуватися **графами станів системи** [11]. Зазвичай стани системи зображають прямокутниками (кружечками), а можливі переходи від одного стану до іншого під впливом дії потоку з інтенсивністю $\lambda_{ij}, i \neq j$ – стрілками, що сполучають стани. Стрілки можуть зображуватися не тільки прямолінійно, а ще й бути криволінійними. Перехід із стану S_i в S_j характеризується *інтенсивністю потоку (щільністю ймовірностей переходу)* $\lambda_{ij}, i \neq j$. Якщо стрілки між станами немає, то інтенсивність переходу дорівнює 0.

Якщо стрілка виходить із стану S_i та повертається в стан S_i , то це означає *затримку* системи в цьому стані.

Стан S_i називається *джерелом*, якщо система може вийти з цього стану, але повернутися в нього вже не може.



Стан S_i називається *кінцевим*, якщо система може потрапити в цей стан, але вийти з нього вже не може.



Марковські випадкові процеси діляться **на класи за ознаками**, в залежності від того як і в які моменти система може змінювати свої стани:

- марковські процеси з неперервними або дискретними станами;
- марковські процеси з неперервним або дискретним часом.

Марковський випадковий процес називається **процесом з дискретними станами**, якщо можливі стани системи можна перелічити та пронумерувати $S_1, S_2, S_3, \dots$, а сам процес полягає в тому, що система S стрибком (миттєво) перескакує із одного стану в інший (рис. 1.19).

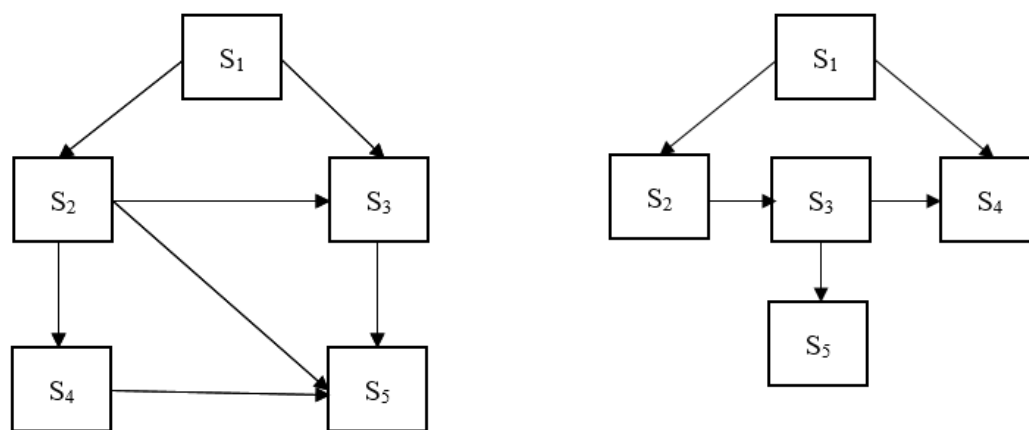


Рис. 1.19. Приклади графів стану для марковських процесів з дискретними станами

Окрім процесів з дискретними станами існують **процеси із неперервними станами**. Наприклад, напруга в мережі електроживлення змінюється поступово, плавно та неперервно. Такий випадковий процес не можна представити як марковський процес з дискретними станами.

За іншою ознакою марковські процеси можна класифікувати на:

- процеси з **неперервним часом** – переходи із стану в стан можуть відбуватись в будь-які моменти часу;
- процеси з **дискретним часом** – переходи відбуваються тільки в дискретні моменти часу.

Найрозповсюдженими математичними моделями для опису та дослідження реальних процесів є *системи з дискретними станами та неперервним часом* [1].

Марковський процес з дискретними станами та неперервним часом називається **однорідним**, якщо для будь-яких i та j $i \neq j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ інтенсивності переходу зі стану S_i в стан S_j не залежать від часу, тобто $\lambda_{ij} = \text{const}$. Якщо хоча б для однієї пари (i, j) , $i \neq j$ інтенсивність залежить від часу, то процес називається **неоднорідним**.

Надалі будемо розглядати *однорідні марковські процеси з дискретними станами та неперервним часом*.

Приклад 1.13. Побудувати граф станів такого випадкового процесу: пристрій θ утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом наперед не відомого випадкового часу.

Розв'язання. Можливі стани системи:

- θ_0 – обидва вузли справні;

- θ_1 – перший вузол ремонтується, а другий справний;
- θ_2 – другий вузол ремонтується, а перший справний;
- θ_3 – обидва вузли ремонтуються.

Граф станів системи наведено на рисунку 1.20.

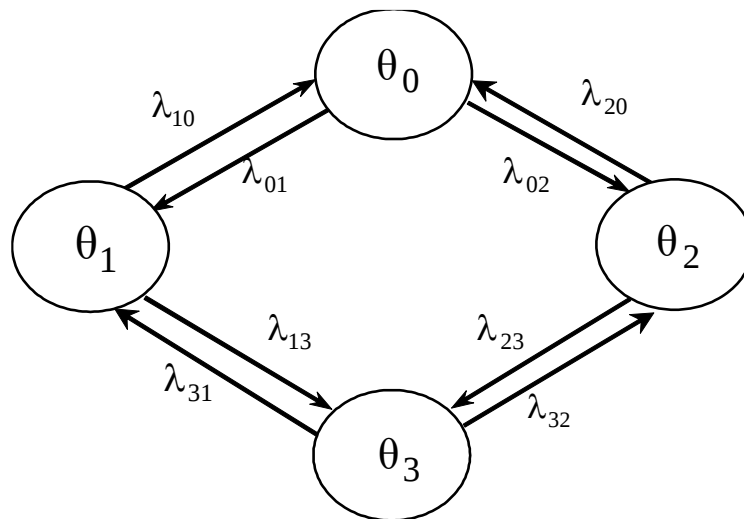


Рис. 1.20. Граф станів для системи з двох вузлів

Стрілка, що направлена із θ_0 до θ_1 , означає перехід системи в момент відмови першого вузла; стрілка із θ_1 до θ_0 – перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. Стрілки із θ_0 до θ_3 немає, оскільки припускається, що вузли виходять із ладу незалежно один від одного. Також припускається, що обидва вузли одночасно не можуть вийти з ладу.

1.3.2. Рівняння Колмогорова

Будемо вважати, що для системи, що описується марковським процесом з неперервним часом, задано граф станів та переходів.

Ймовірністю i -го стану називається ймовірність $p_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) того, що в момент t система перебуватиме у стані θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), тобто

$$p_i(t) = P(S(t) = S_i). \quad (1.14)$$

Очевидно, що для будь-якого моменту t сума ймовірностей станів дорівнює:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1. \quad (1.15)$$

Задача моделювання марковських процесів зводиться до того, що за відомими інтенсивностями переходів треба знайти ймовірності перебування системи в певних

станах. Ці ймовірності мають вагоме значення для практики. Вони обчислюються на основі розв'язання *системи диференціальних рівнянь Колмогорова* [3] (на честь академіка Колмогорова А.М., який запропонував вказаний метод аналізу марковських процесів із дискретними станами та неперервним часом):

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ji} p_j(t) - \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij} \right) p_i(t) \quad (1.16)$$

Таким чином, якщо розглядається однорідний процес Маркова, тобто λ_{ij} не залежить від t , то система (1.16) є системою n звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо ж процес Маркова є неоднорідним, тобто хоча б один із коефіцієнтів λ_{ij} залежить від t , то маємо систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова можна, користуючись правилом.

Правило побудови рівнянь Колмогорова за графом станів:

- у лівій частині кожного з рівнянь має бути похідна ймовірності i -го стану;
- у правій частині кожного з рівнянь має бути сума добутків ймовірностей усіх станів (з яких відбувається перехід до даного стану) на інтенсивності відповідних потоків подій мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із даного i -го стану, помножена на ймовірність цього стану.

Наприклад, для системи θ , яка складається з двох вузлів (рис. 1.20) і має чотири стани $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, *система диференціальних рівнянь Колмогорова* ймовірностей станів набуває вигляду:

$$\begin{cases} p'_0 = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0, \\ p'_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1, \\ p'_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2, \\ p'_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases} \quad (1.17)$$

В системі (1.17) незалежних рівнянь на одне менше від загальної кількості рівнянь. Тому для розв'язування системи необхідно додати рівняння (1.15) при $n = 3$.

Особливість розв'язання диференціальних рівнянь взагалі полягає в тому, що потрібно задавати так звані *початкові умови*, у даному випадку – ймовірності станів системи в початковий момент $t = 0$. Систему (1.17) маємо розв'язувати за умови, що в початковий момент обидва вузли справні і система перебувала у стані θ_0 , тобто за початкових умов:

$$p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0.$$

Рівняння Колмогорова дають змогу знаходити всі ймовірності станів як **функції часу** (стаціонарні функції). Особливий інтерес становить ймовірності системи $p_i(t)$ ($i=1,\dots,n$) у **граничному стаціонарному режимі** при $t \rightarrow \infty$, які називаються **граничними ймовірностями станів**. Тобто розглядаються процеси, які відбуваються в системах протягом достатньо великого проміжку часу і початкові умови вже не мають значного впливу на перебіг процесу.

В теорії випадкових процесів доведено, що *коли кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна перейти до будь-якого іншого стану, то граничні ймовірності існують*.

Гранична ймовірність стану θ_i має такий зміст – вона показує середню відносну тривалість перебування системи в цьому стані.

Наприклад, якщо гранична ймовірність стану θ_0 становить $p_0 = 0,5$, то це означає, що в середньому половину часу система перебуває у стані θ_0 .

Таким чином, для обчислення граничних ймовірностей треба перейти від системи диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь (СЛАР), замінивши похідні нулями, тобто $p_i' = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Розв'язання такої СЛАР дозволить отримати граничні ймовірності p_i .

Приклад 1.14. Знайти граничні ймовірності для системи θ з попереднього прикладу, граф станів якої наведено на рисунку 20. Інтенсивності переходів із стану в стан мають такі значення:

$$\lambda_{01} = 1, \lambda_{02} = 2, \lambda_{10} = 2, \lambda_{13} = 2, \lambda_{20} = 3, \lambda_{23} = 1, \lambda_{31} = 3, \lambda_{32} = 2.$$

Розв'язання. Система диференціальних рівнянь Колмогорова ймовірностей станів набуває вигляду:

$$\begin{cases} p_0' = 2p_1 + 3p_2 - (1+2)p_0, \\ p_1' = p_0 + 3p_3 - (2+2)p_1, \\ p_2' = 2p_0 + 2p_3 - (3+1)p_2, \\ p_3' = 2p_1 + p_2 - (3+2)p_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0' = 2p_1 + 3p_2 - 3p_0, \\ p_1' = p_0 + 3p_3 - 4p_1, \\ p_2' = 2p_0 + 2p_3 - 4p_2, \\ p_3' = 2p_1 + p_2 - 5p_3. \end{cases}$$

Система алгебраїчних рівнянь, що описує стаціонарний режим для даної системи:

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 - 3p_0 = 0, \\ p_0 + 3p_3 - 4p_1 = 0, \\ 2p_0 + 2p_3 - 4p_2 = 0, \\ 2p_1 + p_2 - 5p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що замість останнього рівняння вставили рівняння нормування:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримуємо:

$$p_0 = 0,4, \quad p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,27, \quad p_3 = 0,13.$$

Отже, у граничному стаціонарному режимі система θ в середньому 40 % часу перебуватиме у стані θ_0 , 20 % — у стані θ_1 , 27 % — у стані θ_2 , 13 % — у стані θ_3 .

Приклад 1.15. Знайти прибуток від експлуатації у стаціонарному режимі системи θ (рис. 4), коли відомо, що за одиницю часу справна робота першого та другого вузлів приносить дохід, який становить відповідно 10 і 6 ум. од., а їх ремонт потребує витрат, що становлять відповідно 4 і 2 ум. од. Оцінити економічну ефективність зменшення вдвічі середньої тривалості ремонту кожного з цих вузлів, якщо в такому разі доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт.

Розв'язання. З прикладу 1.14 випливає, що:

- *перший вузол справний* протягом частки часу, що дорівнює

$$p_0 + p_2 = 0,4 + 0,27 = 0,67,$$

- *другий вузол справний* протягом частки часу, що дорівнює

$$p_0 + p_1 = 0,4 + 0,2 = 0,6,$$

- *перший вузол перебуває в ремонті* в середньому частку часу, що дорівнює

$$p_1 + p_3 = 0,2 + 0,13 = 0,33,$$

- *другий вузол перебуває в ремонті* в середньому частку часу, що дорівнює

$$p_2 + p_3 = 0,27 + 0,13 = 0,4.$$

Тому середній прибуток за одиницю часу від експлуатації системи (різниця між доходом та витратами) буде таким:

$$\text{ПРИБУТОК} = 0,67 \cdot 10 + 0,60 \cdot 6 - 0,33 \cdot 4 - 0,40 \cdot 2 = 8,18 \text{ (ум. од)}$$

Зменшення вдвічі середнього часу ремонту кожного з вузлів згідно з $a = \sigma = 1/\lambda$ означатиме збільшення вдвічі інтенсивності потоку «закінчення ремонту» кожного вузла. Отже, у такому разі $\lambda_{10} = 4, \lambda_{20} = 6, \lambda_{31} = 6, \lambda_{32} = 4$, всі інші інтенсивності без змін і система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.17) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2; \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3; \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо нові граничні ймовірності станів системи:

$$p_0 = 0,6, \quad p_1 = 0,15, \quad p_2 = 0,2, \quad p_3 = 0,05.$$

За новими граничними ймовірностями отримуємо:

- *перший вузол справний* протягом частки часу, що дорівнює

$$p_0 + p_2 = 0,6 + 0,2 = 0,8,$$

- *другий вузол справний* протягом частки часу, що дорівнює

$$p_0 + p_1 = 0,6 + 0,15 = 0,75,$$

- *перший вузол перебуває в ремонті* в середньому частку часу, що дорівнює

$$p_1 + p_3 = 0,15 + 0,05 = 0,2,$$

- *другий вузол перебуває в ремонті* в середньому частку часу, що дорівнює

$$p_2 + p_3 = 0,2 + 0,05 = 0,25.$$

За умовою задачі нові витрати на ремонт першого та другого вузла становитимуть відповідно 8 і 4 ум. Од, тому маємо новий середній прибуток за одиницю часу:

$$(\text{ПРИБУТОК})_1 = 0,8 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6 - 0,2 \cdot 8 - 0,25 \cdot 4 = 9,9 \text{ (ум. од.)}.$$

$(\text{ПРИБУТОК})_1$ більший за ПРИБУТОК (наближено на 2,7 ум. од.), тому економічна доцільність скорочення термінів ремонту вузлів очевидна.

Отже, в результаті розв'язання математичної моделі на основі диференціальних рівнянь Колмогорова можна отримати ймовірності перебування системи в певних станах. Знання цих ймовірностей дозволяє обчислити показники ефективності роботи системи та надати практичні рекомендації щодо налаштування системи.

1.3.3. Знаходження граничних ймовірностей станів марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом

Обчислення граничних ймовірностей станів марковського процесу можна роботи на основі чисельного рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [4]:

- розв'язання СЛАР за допомогою метода Крамера;
- розв'язання СЛАР за допомогою матричного методу;
- розв'язання СЛАР за допомогою методу Гаусса (добре програмується);

- розв'язання СЛАР за допомогою наближеного ітераційного методу Гауса-Зейделя (добре програмується, результат з прийнятною точністю);
- розв'язання СЛАР за допомогою прикладних пакетів програм (Excel, MathCad, тощо).

Приклад 1.16. Система технічного захисту інформації має можливі стани S_1, S_2, S_3, S_4 . Розмічений граф станів та переходів представлено на рисунку 1.21. Біля кожної дуги графа проставлена інтенсивність переходів λ_{ij} . Обчислити граничні ймовірності станів p_1, p_2, p_3, p_4 .

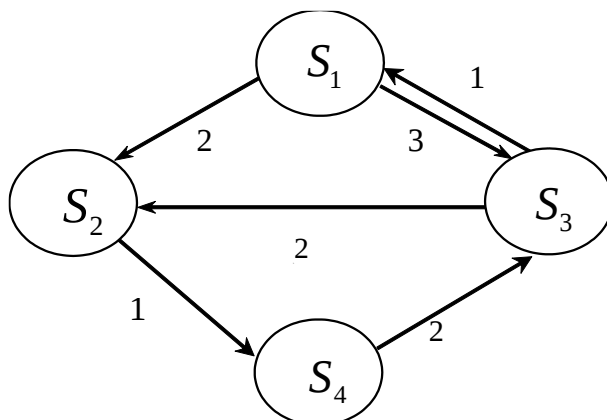


Рис. 1.21. Граф станів та переходів

Розв'язання. Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів мають вигляд:

$$\begin{cases} p'_1 = p_3 - (2 + 3)p_1, \\ p'_2 = 2p_1 + 2p_3 - p_2, \\ p'_3 = 3p_1 + 2p_4 - (2 + 1)p_3, \\ p'_4 = p_2 - 2p_4. \end{cases}$$

Граничні ймовірності треба знаходити при $t = \infty$. При цьому настане усталений режим, при якому ймовірності не будуть змінюватись. Тому приймаємо

$\frac{dp_i}{dt} = 0$. Система для граничних ймовірностей прийме вигляд:

$$\begin{cases} 0 = -5p_1 + p_3; \\ 0 = -p_2 + 2p_1 + 2p_3; \\ 0 = -3p_3 + 3p_1 + 2p_4; \\ 0 = -2p_4 + p_2. \end{cases}$$

Замість останнього рівняння слід вставити рівняння нормування:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Таким чином, необхідно рішити систему із 4 рівнянь з 4 невідомими:

$$\begin{cases} -5p_1 + p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 + 2p_3 = 0; \\ 3p_1 - 3p_3 + 2p_4 = 0; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Рішення цієї системи можна здійснити будь-яким методом. В результаті рішення отримаємо:

$$p_1 = \frac{1}{24}; \quad p_2 = \frac{1}{2}; \quad p_3 = \frac{5}{24}; \quad p_4 = \frac{1}{4}.$$

Отже, система буде працювати в стані S_2 половину від всього часу функціонування системи, а в стані S_1 – тільки $\frac{1}{24}$ частину.

Отже, для моделювання процесів та дослідження їх властивостей необхідно розробити відповідну математичну модель. Більшість процесів розвиваються під впливом випадкових факторів, тому вони є випадковими. Для математичного опису деяких випадкових процесів може бути застосовано математичний апарат, що розроблено в теорії ймовірностей та який отримав назву марковських випадкових процесів. Найбільш розповсюдженими є марковські процеси з дискретними станами та неперервним часом, математичний опис яких базується на диференціальних рівняннях Колмогорова. Основним припущенням застосування таких математичних моделей є те, що переходи із стану в стан складають найпростіший потік, або час перебування системи в певному стані розподілено за експоненціальним законом розподілу. Для дослідження марковських процесів необхідно рішення системи рівнянь Колмогорова та знайти ймовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим корисними є значення граничних ймовірностей станів. Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Питання для самоперевірки

1. Який випадковий процес називається процесом Маркова?
2. Під впливом яких потоків відбуваються переходи системи з одного стану в інший?
3. Як геометрично зображується стан системи?
4. Означення марковського процесу з дискретними станами.
5. Означення марковського процесу з неперервними станами.
6. Означення марковського процесу з дискретним часом.
7. Означення марковського процесу з неперервним часом.

8. Означення однорідного марковського процесу.
9. Що називається ймовірністю i -го стану системи?
10. Як знайти ймовірності перебування системи в певних станах?
11. Опишіть правило побудови рівнянь Колмогорова.
12. Що означає гранична ймовірність стану системи?
13. Які методи розв'язування СЛАР існують?

Задачі для самостійної роботи

1. Описати всі можливі стани та побудувати граф станів такого випадкового процесу: АЗС складається з трьох колонок, кожна з яких може бути зайнятою або вільною.

2. Описати всі можливі стани та побудувати граф станів системи θ , що являє собою електричне коло з електричною лампочкою, яка у випадковий момент часу може бути або вимкненою, або ввімкненою, або зіпсованою.

3. Знайти граничні ймовірності для систем θ , графи яких зображено на рисунках 1.22 і 1.23.

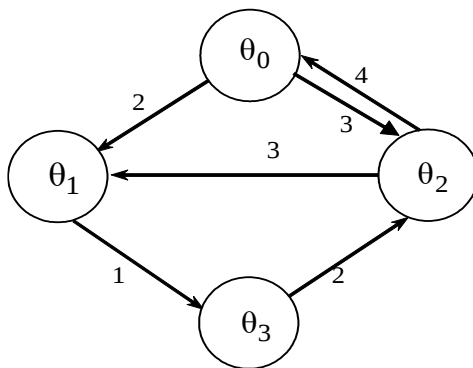


Рис. 1.22

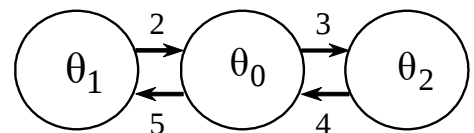


Рис. 1.23

4. Два абоненти A і B працюють із одним інформаційним центром. У кожен момент часу центр може обслуговувати тільки одного абонента. Абонент A має більш високий пріоритет, тому, якщо від A приходить заявка, то обслуговування абонента B припиняється до закінчення обслуговування абонента A .

1) Розрахуйте ймовірності можливих станів даної системи, коли відомі інтенсивності потоків подій, що переводять систему в сусідні стани.

2) З'ясуйте, чи буде система працювати ефективно, коли відомо, що для цього необхідно, аби втрати часу абонента B на очікування становили б не більше 50 % часу його обслуговування.

3) Встановіть, які параметри і яким чином повинні змінитися, щоб підвищилася ефективність обслуговування абонента B ?

1.4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ «ЗАГИБЕЛІ ТА РОЗМНОЖЕННЯ» НА ОСНОВІ НЕПЕРЕРВНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

У темі 1.3 була вивчена модель марковського випадкового процесу з дискретними станами та неперервним часом. Відмінністю таких систем є те, що переходи із одного стану до іншого стану відбуваються в будь-які випадкові моменти часу. До таких процесів відносяться:

- процес функціонування автоматизованих систем управління;
- процеси експлуатації багатомодульних інформаційних систем та систем з резервуванням;
- процес функціонування технічних систем захисту інформації;
- процес функціонування системи при відбитті атак несанкціонованого доступу.

Модель повинна забезпечувати визначення імовірностей станів. Імовірності станів системи у загальному випадку визначаються інтегруванням системи диференціальних рівнянь, які називаються рівняннями Колмогорова.

Існує широкий клас технічних та організаційних систем, які можна описувати математичними моделями на основі неперервних марковських ланцюгів [5-6]. До таких моделей відносяться процеси «загибелі і розмноження», а також циклічні процеси, які будуть розглянуті в сьогоднішній лекції.

1.4.1. Математична модель процесу «загибелі та розмноження»

Будь-яка система автоматичного керування САК працює у двох режимах, а саме:

- усталеному,
- перехідному.

Усталений режим роботи системи – це режим, в якому незмінною в часі є похибка регулювання. Цей режим устатковується по завершенні перехідних процесів.

Перехідний режим роботи системи – це такий режим роботи системи, коли вона переходить із одного встановленого режиму роботи до іншого. Цей режим настає тоді, коли змінюється задана величина й систему переводять із одного режиму роботи до іншого, або змінюються параметри системи. Перехідний процес у різних системах керування проходить по-різному. Змінюючи параметри системи, можна змінити характер перехідного режиму.

Перехідні режими – це найбільш суттєві режими роботи систем керування. Системи керування призначені для того, щоб працювати в перехідних режимах. Це зумовлює складність САК, вимагає використання складних математичних методів аналізу цих систем. Усі методи аналізу ґрунтуються на використанні диференціальних рівнянь.

Інтенсивності переходів для різних процесів можуть бути постійними або змінними. Рівняння для ймовірностей станів являють собою лінійні диференціальні рівняння, які зазвичай розв’язуються на ПК.

Для визначення ймовірностей станів у будь-який момент часу t системи з дискретними станами, в якій відбувається марковський випадковий процес з неперервним часом, необхідно знати:

- кількість можливих станів системи n ;
- початкові стани системи в момент $t = 0$;
- інтенсивності переходів λ_{ij} .

У багатьох практичних задачах існують *граничні значення ймовірностей станів*, які відповідають усталеному режиму функціонування системи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, (i = 1, 2, \dots, n).$$

У такій системі при $t \rightarrow \infty$ встановлюється деякий *граничний режим*. Він полягає в тому, що система випадковим чином змінює свої стани, але ймовірність кожного з них вже не залежить від часу: кожний із станів має постійну ймовірність. Ця ймовірність може розглядатися як *середній відносний час перебування системи у даному стані*.

Для розрахунку граничних ймовірностей станів системи $p_1, p_2, \dots, p_n$ використовують *систему рівнянь Колмогорова*, де похідні ймовірностей дорівнюють нулю. Для системи S , граф станів якої надано на рисунку 1.24.

Диференціальні рівняння перетворюються в лінійні рівняння:

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{31}p_3 = 0; \\ -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4 = 0; \\ -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2 + \lambda_{43}p_4 = 0; \\ -\lambda_{42}p_4 - \lambda_{43}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3 = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

На практиці часто вважають, що *усталений режим роботи системи* практично настає при

$$t \geq \frac{4}{(\lambda_{ij})_{\min}}. \quad (1.19)$$

Ця умова виконується для багатьох прикладних задач.

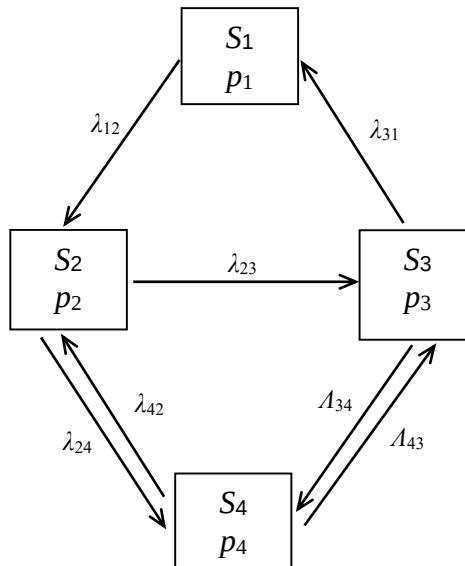


Рис.1.24. Граф станів системи S

На практиці дуже часто зустрічаються системи, стани яких утворюють **ланцюг**, в якому кожний стан S_i (крім двох крайніх S_1 та S_n) пов'язаний прямим та зворотнім зв'язком з двома сусідніми S_{i-1} та S_{i+1} , а кожний з двох крайніх зв'язаний прямими та зворотнім зв'язком тільки із сусіднім станом. Тому при моделюванні різноманітних технічних систем, широке використання знаходять дві моделі марковських процесів з дискретними станами і неперервним часом: «загибелі та розмноження» та **циклічних процесів**.

*Випадковий процес, що відбувається в системі S і визначений у неперервному часовому проміжку, називається **неперервним ланцюгом Маркова**, якщо виконується умова: для будь-якого фіксованого моменту часу ймовірності станів системи у майбутньому залежать лише від теперішнього стану системи і не залежать від того, коли і як система S набула цього стану. Переходи між станами можуть відбуватися в будь-які моменти часу і час наступного переходу теж є випадковою величиною.*

Неперервний ланцюг Маркова називається **процесом «загибелі та розмноження»**, якщо її граф станів має вигляд, показаний на рисунку 1.25, тобто всі стани можна витягнути в один ланцюг, в якому кожний із середніх станів ($S_2, \dots, S_{n-1}$) пов'язаний прямим та зворотнім зв'язком з кожним із сусідніх станів, а крайні стани (S_1, S_n) – тільки з одним сусіднім станом.

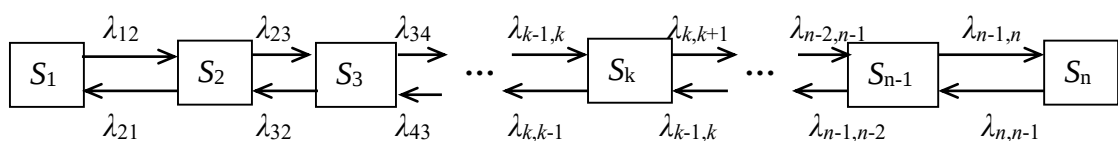


Рис. 1.25. Ланцюг процесу «загибелі та розмноження»

Термін процесу або схеми «загибелі та розмноження» взято з рішення біологічних задач, де за такою схемою описується процес зміни чисельності популяції: стрілки, які йдуть зліва направо, відповідають збільшенню чисельності (розмноження) популяції, а справа наліво – гибелі вхідних в неї осіб.

Прикладами марковських випадкових процесів «загибелі та розмноження» можуть бути:

- надходження й витрати грошей у касі;
- надходження й витрати матеріалів на складі;
- поява й обслуговування клієнтів;
- процес відмов і відновлення елементів багатомодульних систем;
- процес функціонування технологічних ліній щодо виготовлення і ремонту техніки;
- процес функціонування різних систем масового обслуговування тощо.

Приклад 1.17. Три радіоелектронних пристрої здійснюють пошук зловмисників (система S). Середній час безвідмовної роботи кожного пристрою t_6 . Пристрій, що має пошкодження, відразу починає ремонтуватися. Середній час ремонту t_p . Визначити імовірність перебування системи у кожному із можливих станів.

Розв'язання. Аналіз функціонування системи дозволяє визначити стани системи:

S_1 – всі три пристрої справні;

S_2 – один пристрій відмовив (ремонтуються), два справні;

S_3 – два пристрої ремонтуються, один справний;

S_4 – всі три пристрої ремонтуються.

Граф станів системи представлено на рисунку 1.26.

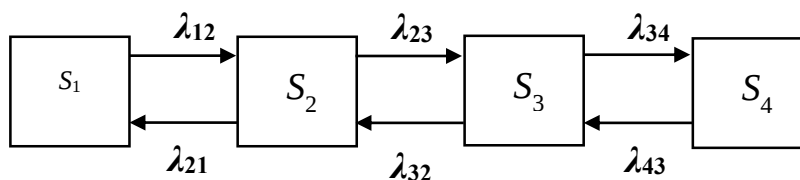


Рис. 1.26. Граф станів системи S

Схема «загибелі та розмноження» часто зустрічається в різних практичних задачах. Тому доцільно розглянути систему в загальному вигляді, яка має n станів $S_1, S_2, \dots, S_n$, інтенсивності переходів та граф станів представлені на рисунку 1.26. Доцільним вбачається розв'язати відповідну систему алгебраїчних рівнянь та визначити формули для граничних імовірностей станів.

Запишемо алгебраїчні рівняння для імовірностей станів. Рівняння складаються за правилом:

вхідні інтенсивності, помножені на відповідні ймовірності, дорівнюють вихідним інтенсивностям, помноженим на відповідні ймовірності.

Для першого стану S_1 рівняння має вигляд:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2. \quad (1.20)$$

Для другого стану S_2 рівняння має вигляд:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3. \quad (1.21)$$

Підставивши (1.20) в (1.21) та скоротивши, отримаємо:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3. \quad (1.22)$$

Аналогічно для всіх інших станів:

$$\lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (1.23)$$

Таким чином, марковський ланцюг з n станами описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2; \\ \dots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k; \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n. \end{cases} \quad (1.24)$$

Слід пам'ятати, що замість одного із рівнянь треба додати рівняння нормування:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (1.25)$$

Якщо розв'язати систему рівнянь (1.25), то отримаємо формули для визначення імовірностей станів марковського процесу «загибелі та розмноження»:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \dots + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\dots\lambda_{n,n-1}}}, \\ p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1, \\ p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1, \\ \dots \\ p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\dots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\dots\lambda_{21}} p_1, \quad k = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (1.26)$$

Таким чином, задача «загибелі та розмноження» вирішена в загальному вигляді, виведені загальні формули для граничних імовірностей станів.

Приклад 1.18. Знайти граничні ймовірності станів для процесу «загибелі та розмноження» (система S), граф якого показано на рисунку 1.27. Інтенсивності переходів вказані на рисунку поряд із стрілками.

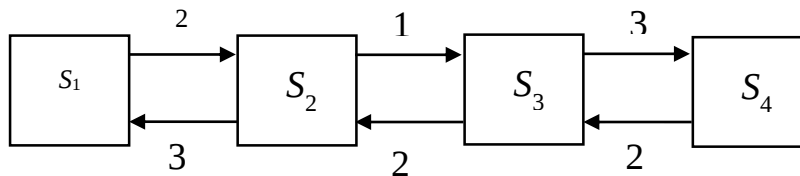


Рис. 1.27. Граф станів для процесу «загибелі та розмноження»

Розв'язання. За формулами (1.26) отримаємо:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \quad p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \quad p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 1.19. Прилад складається з трьох вузлів (система S). Потік відмов вузлів пуассонівський. Середній час безвідмовної роботи кожного вузла дорівнює t_6 . Припускається, що вузол, який відмовив, відразу починає ремонтуватися. Середній час ремонту кожного вузла дорівнює t_p . Закон розподілу цього часу – показниковий. Знайти середню продуктивність приладу, якщо при трьох робочих вузлах вона складає 100 %, при двох – 50 %, а при одному приладі взагалі не працює.

Розв'язання. Перелік станів системи:

- S_1 – всі три вузли справні;
- S_2 – один вузол відмовив (ремонтуюється), два справні;
- S_3 – два вузли ремонтуються, один справний;
- S_4 – всі три вузли ремонтуються.

Граф станів системи приведено на рисунку 1.28.

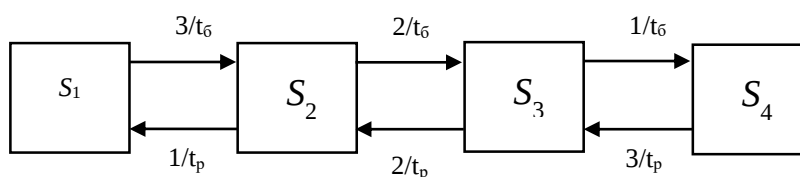


Рис. 1.28. Граф станів для процесу «загибелі та розмноження»

Так як потоки відмов та ремонтів найпростіші, то $\lambda = 1/T$, де T – середній час перебування у відповідному стані.

Якщо система знаходиться в стані S_1 , то працюють три вузли, кожний з яких може відмовити з інтенсивністю $1/t_6$. Тому інтенсивність переходу із S_1 в S_2 буде $3/t_6$. Аналогічно знайдені інші інтенсивності переходів, що розмічені на графі.

Використовуючи отримане раніше загальне рішення задачі «загибелі та розмноження» (1.26), знаходимо:

$$p_1 = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{t_p}{t_6}\right) + 3\left(\frac{t_p}{t_6}\right)^2 + \left(\frac{t_p}{t_6}\right)^3};$$

$$p_2 = 3\left(\frac{t_p}{t_6}\right) p_1; \quad p_3 = 3\left(\frac{t_p}{t_6}\right)^2 p_1; \quad p_4 = \left(\frac{t_p}{t_6}\right)^3 p_1.$$

Для визначення середньої продуктивності необхідно оперувати з конкретними значеннями t_6 та t_p .

Нехай $t_6 = 10$ годин, $t_p = 5$ годин. Тоді $t_p/t_6 = 0,5$.

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{27}; \quad p_2 = 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{8}{27} = \frac{12}{27};$$

$$p_3 = 3 \cdot 0,5^2 \cdot \frac{8}{27} = \frac{6}{27}; \quad p_4 = 0,5^3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{3}{27}.$$

Середня продуктивність приладу в усталеному режимі:

$$E = 100\% \cdot p_1 + 50\% \cdot p_2 = 51,9\%. \quad (1.27)$$

Таким чином, середня продуктивність приладу буде 51,9 % від номінальної продуктивності. Виходячи з рішення даної задачі, можна надати практичні рекомендації: для збільшення середньої продуктивності приладу необхідно зменшити час ремонту, або збільшити час безвідмовної роботи кожного вузла, або створити прилад із 4-х вузлів при умові, що при двох відмовивших та двох справних прилад буде виконувати свої функції.

Модель процесу «загибелі та розмноження» використовується для математичного опису систем масового обслуговування.

1.4.2. Математична модель циклічного марковського процесу

Марковський випадковий процес з неперервним часом, що відбувається в

системі з дискретними станами, називається **циклічним**, якщо стани системи пов'язані між собою у кільце (цикл) з односторонніми переходами (рис. 1.29).

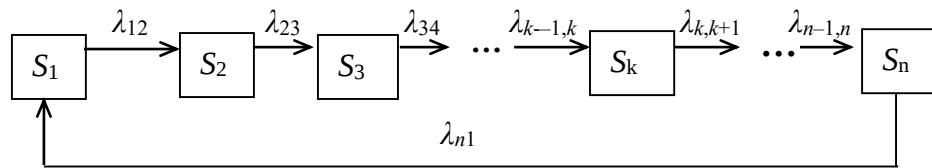


Рис. 1.29. Граф станів циклічного марковського процесу

Приклади марковських випадкових циклічних процесів:

- процес функціонування засобів захисту інформації при виявленні атак злоумисників;
- процес роботи транспортних засобів при забезпеченні матеріальними засобами.

Приклад 1.20. Підрозділ підвозу боєприпасів (система S) в ході бою може знаходитися в одному із наступних станів:

- здійснювати марш за боєприпасами (стан S_1),
- проводити завантаження боєприпасів (стан S_2),
- підвозити боєприпаси в підрозділи та розвантажувати їх (стан S_3),
- знаходитися на привалі (стан S_4), після чого здійснювати марш за боєприпасами (рис. 1.30).

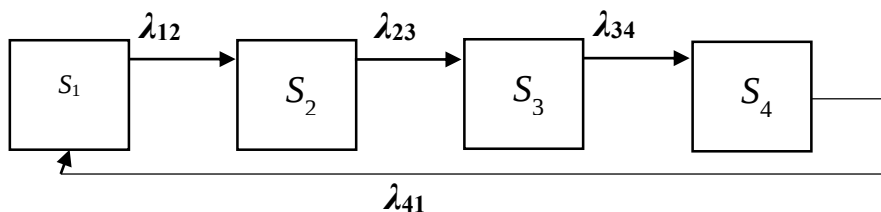


Рис. 1.30. Граф системи циклічного процесу

Визначити імовірності станів підрозділу, якщо відомі часові параметри (середній час) перебування підрозділу у різних станах t_1, t_2, t_3, t_4 .

Розв'язання. Інтенсивності переходів:

$$\lambda_{12} = \frac{1}{t_1}; \quad \lambda_{23} = \frac{1}{t_2}; \quad \lambda_{34} = \frac{1}{t_3}; \quad \lambda_{41} = \frac{1}{t_4}.$$

Система рівнянь Колмогорова для описаної системи:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \lambda_{41}p_4 - \lambda_{12}p_1; \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2; \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{23}p_2 - \lambda_{34}p_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Система алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей ($t \rightarrow \infty$):

$$\begin{cases} \lambda_{41}p_4 = \lambda_{12}p_1; \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{23}p_2; \\ \lambda_{23}p_2 = \lambda_{34}p_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Для рішення цієї системи необхідно виразити p_2, p_3, p_4 через p_1 та підставити в четверте рівняння системи:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1, \\ p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1, \Rightarrow p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{41}} p_1 = 1. \\ p_4 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{41}} p_1, \end{cases}$$

Отримаємо:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \frac{1}{\lambda_{41}} \right)}.$$

Підставивши значення інтенсивностей переходів, отримаємо:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3 + t_4)}, \\ p_2 = \frac{t_2}{t_1} p_1, \\ p_3 = \frac{t_3}{t_1} p_1, \\ p_4 = \frac{t_4}{t_1} p_1. \end{cases}$$

Узагальнене розв'язання циклічного марковського процесу

Якщо використати рішення задачі в прикладі 1.20 та розповсюдити їх на будь-яке число станів системи, в якій відбувається циклічний процес, то отримаємо загальне рішення для марковського циклічного процесу:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12} \left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n,1}} \right)}; \\ p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1; \quad p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1; \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n,1}} p_1. \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Формули (1.28) призначені для обчислення граничних імовірностей *циклічного процесу*. Їх можна привести до більш простого виду, якщо перейти від інтенсивностей до середнього часу перебування системи в стані S_i :

$$\lambda_{i,i+1} = \frac{1}{t_i}, \quad i=1,2,\dots,n-1; \quad \lambda_{n,1} = \frac{1}{t_n}. \quad (1.29)$$

Підставивши ці вирази в (1.29), після перетворень отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}; \\ p_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_n = \frac{t_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

або в загальному вигляді:

$$p_k = \frac{t_k}{\sum_{i=1}^n t_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.31)$$

Граничні імовірності станів в циклічному процесі пропорційні середньому часу перебування системи у відповідному стані.

Приклад 1.21. Радіочастотний сканер (РЧС) може знаходитись в одному із таких станів:

- S_1 – справний, працює;
- S_2 – несправний, проводиться пошук несправності;

- S_3 – несправність локалізована, виконується ремонт;
- S_4 – ремонт завершено, проводиться настройка та підготовка до пуску.

Всі потоки подій – найпростіші. Середній час безвідмовної роботи сканера дорівнює 0,5 доби. Ремонт сканера здійснюється в середньому 6 годин. Пошук несправностей в середньому займає 0,5 години. Після ремонту РЧС налаштовується та готується до пуску в середньому 1 годину. Знайти граничні імовірності станів.

Розв'язання. Граф станів має вигляд циклічного процесу (рис. 1.31).

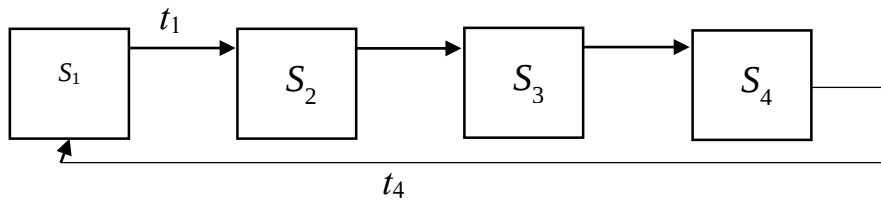


Рис. 1.31. Граф системи

Середній час перебування системи в кожному із станів:

$$t_1 = \frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{1}{48}; \quad t_3 = \frac{1}{4}; \quad t_4 = \frac{1}{24}, \text{ де одиниці виміру – доба (24 годин).}$$

За формулами (1.30) отримаємо:

$$p_1 = \frac{24}{39} = 0,615; \quad p_2 = \frac{1}{39} = 0,026; \quad p_3 = \frac{12}{39} = 0,308; \quad p_4 = \frac{2}{39} = 0,051.$$

Якщо процес зводиться до простого циклічного з односторонніми переходами, то обчислення граничних імовірностей зводиться до обчислення середнього часу t_i та використання формул (1.30).

В більшості реальних систем відбуваються **розгалужені циклічні процеси**. Вони аналогічні циклічним процесам, але граф станів в деяких вузлах розгалужується.

Приклад 1.22. РЧС може знаходитись в одному з таких станів:

- S_1 – справний, працює;
- S_2 – несправний, проводиться пошук несправності;
- S_3 – несправність виявилась незначною і усувається своїми силами;
- S_4 – несправність виявилась серйозною та усувається бригадою фахівців;
- S_5 – ремонт завершено, проводиться настройка та підготовка до пуску.

Процес, що відбувається в системі – марковський (всі потоки подій – найпростіші). Нехай:

- t_1 – середній час безвідмовної роботи сканера;
- t_2 – середній час пошуку неполадок;
- t_3 – середній час ремонту своїми силами;

- t_4 – середній час ремонту бригадою фахівців;
- t_5 – середній час налаштування та підготовки сканера до пуску.

Припустимо, що несправність РЧС може бути ліквідована своїми силами з імовірністю P . Тоді, з імовірністю $(1-P)$ необхідно буде викликати бригаду фахівців для виконання ремонту сканера. Робота бригади оплачується в розмірі k грн за годину. Необхідно знайти граничні імовірності станів та визначити середні затрати на послуги ремонтної бригади за добу.

Розв'язання. Будуємо розмічений граф станів (рис. 1.32).

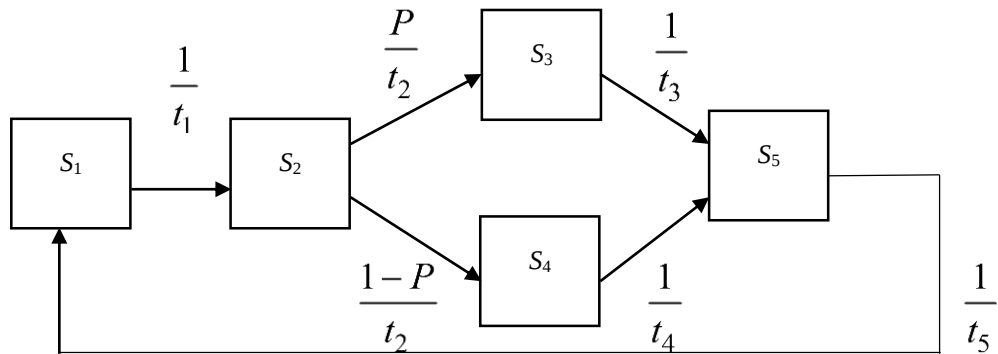


Рис. 1.32. Граф станів та переходів СМО

Якщо із певного стану виходить тільки одна стрілка, то інтенсивність переходу по цій стрілці дорівнює одиниці поділеній на середній час перебування системи в цьому стані. Якщо із певного стану виходить дві стрілки, то загальна інтенсивність виходу із цього стану буде такою ж. При цьому, інтенсивність переходу по кожній з двох стрілок буде дорівнювати інтенсивності помноженій на імовірність того, що перехід буде здійснено саме по цій стрілці. Рівняння для граничних імовірностей станів будуть такими:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} p_1 = \frac{P + (1-P)}{t_2} p_2; \\ \frac{P}{t_2} p_2 = \frac{1}{t_3} p_3; \\ \frac{1-P}{t_2} p_2 = \frac{1}{t_4} p_4; \\ \frac{1}{t_3} p_3 + \frac{1}{t_4} p_4 = \frac{1}{t_5} p_5; \\ \frac{1}{t_5} p_5 = \frac{1}{t_1} p_1. \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 - \text{умова нормування.}$$

В системі одне рівняння можна відкинути (доцільно відкинути найскладніше четверте). В інших треба виразити p_2, p_3, p_4, p_5 через p_1 та підставити в рівняння умови нормування:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 = \frac{t_2}{t_1} p_1, \\ p_3 = \frac{P \cdot t_3}{t_2} p_2 = \frac{P \cdot t_3}{t_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} p_1 = \frac{P \cdot t_3}{t_1} p_1, \\ p_4 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_2} p_2 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} p_1 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_1} p_1, \\ p_5 = \frac{t_5}{t_1} p_1, \\ p_1 \left(1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{P \cdot t_3}{t_1} + \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_1} + \frac{t_5}{t_1} \right) = 1 \end{array} \right.$$

Після перетворень отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_3 = \frac{P \cdot t_3}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_4 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_5 = \frac{t_5}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}. \end{array} \right.$$

Таким чином, середня доля часу, яку система проводить в стані S_4 (*ремонт бригадою фахівців*) дорівнює p_4 . Тому за годину система проводить в цьому стані в середньому p_4 годин. Тоді, середні затрати на бригаду будуть складати:

$$C = 24 \cdot k \cdot p_4.$$

Слід звернути увагу на структуру імовірностей p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 в схемі розгалуженого циклічного процесу, які також, як і у випадку простого циклу, являють собою відношення середнього часу перебування системи в станах до суми всіх таких часів. Але для розгалужених станів цей середній час множиться на імовірність переходу по даній стрільці (P або $1 - P$). Користуючись цим правилом

можна зразу ж записувати граничні імовірності станів для будь-якого розгалуженого циклічного процесу.

1.4.3. Особливості імітаційного моделювання безперервних марковських процесів

Модель марковського процесу представляється у вигляді графа, в якому стани (вузли) пов'язані між собою дугами, що являють собою переходами з i -го стану в j -ий стан.

Тепер кожен перехід характеризується щільністю ймовірності переходу (інтенсивністю) λ_{ij} . За означенням:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (1.32)$$

При цьому щільність розуміють як розподіл ймовірності в часі.

Перехід з i -го стану в j -ий відбувається в випадкові моменти часу, які визначаються інтенсивністю переходу λ_{ij} .

Інтенсивність переходів (тут це поняття збігається за змістом з розподілом щільності ймовірності за часом t) слід враховувати, коли процес неперервний, тобто, розподілений у часі.

Сутність імітаційного моделювання марковського процесу полягає в наступному. Знаючи інтенсивність λ_{ij} появи подій, породжуваних потоком, можна імітувати випадковий інтервал часу між двома подіями в цьому потоці:

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{\lambda_{ij}} \ln(r) \quad (1.33)$$

де τ_{ij} – інтервал часу, протягом якого система знаходиться в i -му стані до переходу в j -ий стан.

Очевидно, що система з будь-якого i -го стану може перейти в один з декількох станів $j, j+1, j+2, \dots$, пов'язаних з ним переходами $\lambda_{ij}, \lambda_{ij+1}, \lambda_{ij+2}, \dots$. В j -ий стан вона перейде через τ_{ij} ; в $(j+1)$ -й стан вона перейде через τ_{ij+1} ; в $(j+2)$ -й стан вона перейде через τ_{ij+2} і т. д.

Ясно, що система може перейти із i -го стану тільки в один із цих станів, причому в той, перехід до якого настане раніше.

Тому з послідовності часових інтервалів: $\tau_{ij}, \tau_{ij+1}, \tau_{ij+2}$ і т. д., треба вибрати мінімальний та визначити індекс j , який вказує, в який саме стан відбудеться перехід.

Приклад 1.23. Моделювання роботи верстата з числовим програмним керуванням ЧПУ. Промодельюємо роботу верстата з ЧПУ, функціонування якого можна описати графом станів і переходів (рис. 1.33).

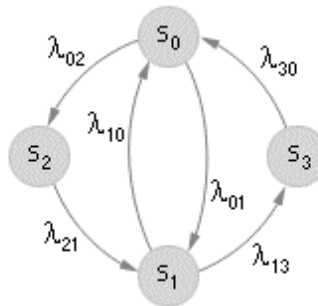


Рис. 1.33. Граф станів та переходів системи S

Верстат може знаходитися в таких станах:

- S_0 – верстат справний, вільний (простой);
- S_1 – верстат справний, зайнятий (обробка);
- S_2 – верстат справний, заміна інструменту (переналагодження) $\lambda_{02} < \lambda_{21}$;
- S_3 – верстат несправний, йде ремонт $\lambda_{13} < \lambda_{30}$.

Задамо значення параметрів λ , використовуючи експериментальні дані, одержувані у виробничих умовах:

- λ_{01} – потік на обробку (без переналагодження);
- λ_{10} – потік обслуговування;
- λ_{13} – потік відмов обладнання;
- λ_{30} – потік відновлень.

Під час імітаційного моделювання треба генерувати часові проміжки τ_{ij} , визначати мінімальний проміжок для i (i – стан, в якому знаходиться система), визначати j (j – стан, в який переходить система), фіксувати (виводити) момент переходу та стан в який переходить система. Реалізація імітування роботи верстата матиме такий вигляд (рис. 1.34).

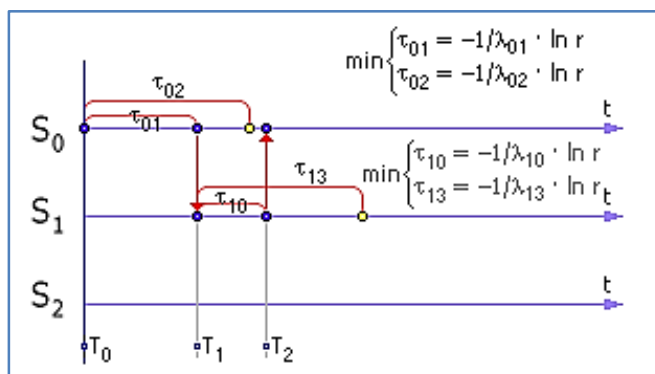


Рис. 1.34. Приклад моделювання безперервного марковського процесу з візуалізацією на часовій діаграмі (жовтим кольором вказані заборонені, синім – реалізовані стани)

Зокрема, на рисунку 1.34 видно, що отриманий ланцюг виглядає так

$$S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow \dots,$$

а переходи відбулися в такі моменти часу:

$$T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots, \text{ де } T_0 = 0, T_1 = \tau_{01}, T_2 = \tau_{01} + \tau_{10} \dots$$

Алгоритм імітаційного моделювання наведено на рисунку 35.

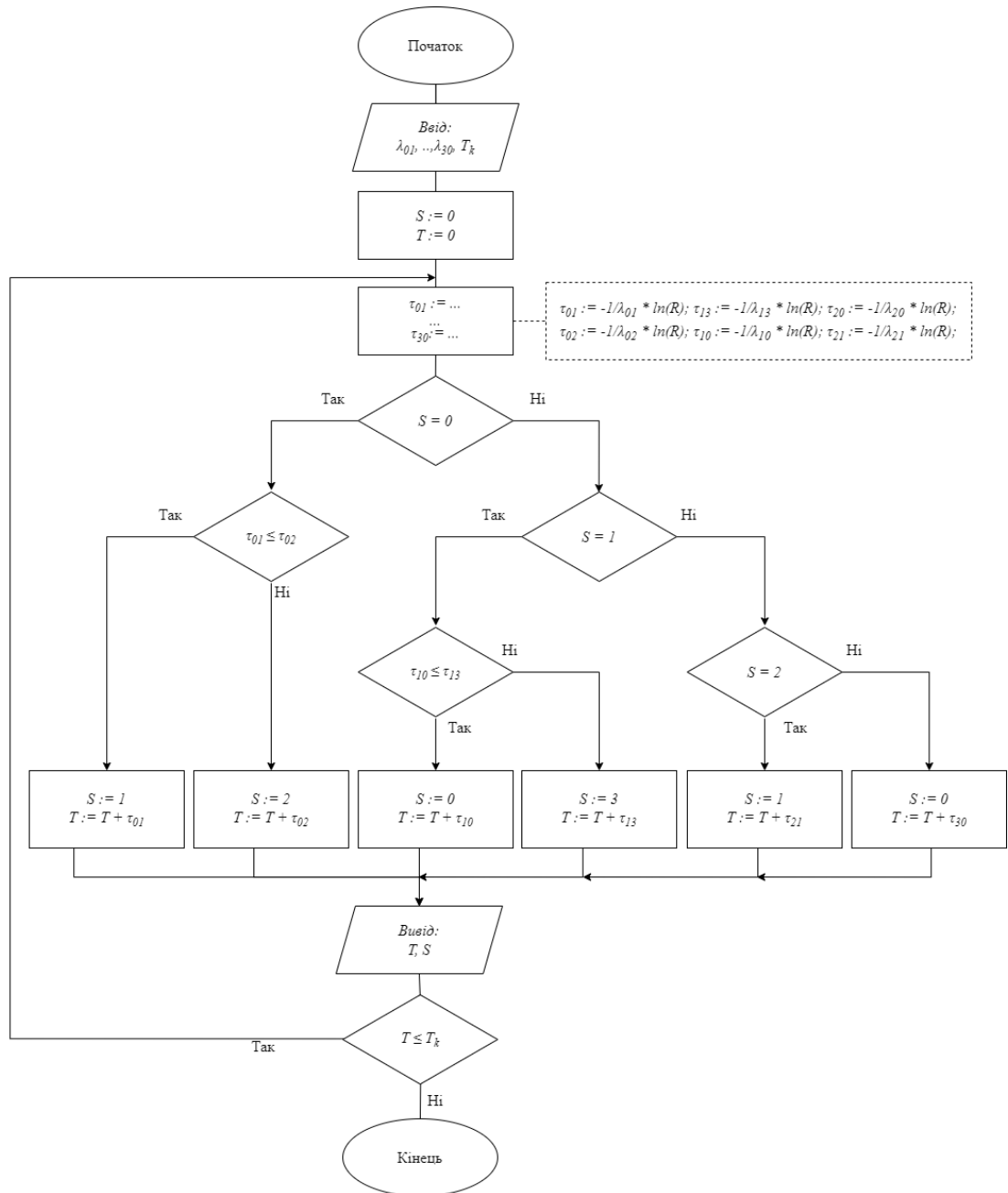


Рис. 1.35. Алгоритм імітаційного моделювання

Аналіз результатів імітаційного моделювання. У результаті моделювання отримаємо часову діаграму переходів системи. За цієї діаграми можна обчислити деякі важливі характеристики системи:

- сумарний час знаходження системи в певному стані протягом заданого проміжку часу T_n (часу спостереження);

- визначити частку часу протягом T_n знаходження системи в певному стані. Вона буде збігатись із імовірністю перебування системи в певному стані (при великих значеннях T_n).

За цими характеристиками можна визначити показники ефективності функціонування системи, наприклад: середній час простою верстата протягом доби; середній час роботи ремонтної бригади по відновленню верстата протягом місяця; середній час простою верстата під час переналагоджування, тощо.

Отже, МП з неперервним часом передбачає, що відомими є інтенсивності переходів між станами. Під час моделювання імітуються часові проміжки τ_{ij} (знаходження системи в i -тому стані до переходу в j -тий стан). Під час моделювання фіксуються моменти переходу та стани, куди система переходить. В результаті моделювання можна обчислити середній час та статистичну імовірність перебування системи в певному стані. За цими характеристиками можна порахувати показники ефективності функціонування всієї системи, які є важливими для практики. Під час розробки комп'ютерних ігор дуже часто використовується апарат марковських процесів для моделювання дій комп'ютерних героїв [5].

Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади марковських процесів.
2. Що потрібно знати для визначення імовірностей станів у будь-який момент часу?
3. Що називають граничним режимом системи?
4. Що називають середнім відносним часом перебування системи у певному стані?
5. Що таке усталений режим роботи системи?
6. Що таке перехідний режим роботи системи?
7. Для чого використовують систему рівнянь Колмогорова?
8. Що таке неперервний ланцюг Маркова?
9. Який ланцюг Маркова називається процесом «загибелі та розмноження»?
10. Наведіть приклади процесів «загибелі та розмноження».
11. Який марковський процес називають циклічним?
12. Наведіть приклади марковських випадкових циклічних процесів.
13. Які формули використовуються для розв'язання марковських циклічних процесів?
14. Що таке розгалужені циклічні процеси?

15. У чому полягає сутність імітаційного моделювання марковського процесу?

Задачі для самостійної роботи

1. Система S , у якій протікає процес загибелі й розмноження може з будь-якого свого стану безпосередньо перейти:

- а) в будь-який стан системи;
- б) тільки в один із сусідніх станів;
- в) не має переходів;
- г) тільки один раз в будь-який стан системи.

2. Знайти граничні ймовірності станів для процесу в системі S , граф якого показаний рисунку 1.36.

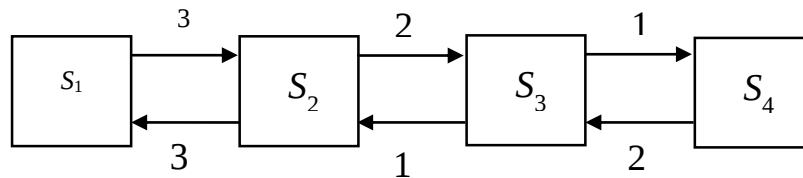


Рис. 1.36. Граф станів процесу «загибелі та розмноження»

3. Ринкова ціна однієї акції акціонерного товариства може коливатися в межах від 1000 до 2000 грн. Нехай S система, що полягає з однієї акції з можливими станами:

- S_1 – ціна однієї акції від 1000 до 1200 грн,
- S_2 – ціна однієї акції від 1200 до 1400 грн,
- S_3 – ціна однієї акції від 1400 до 1600 грн,
- S_4 – ціна однієї акції від 1600 до 1800 грн,
- S_5 – ціна однієї акції від 1800 до 2000 грн.

Процес дискретний марковський, з неперервним часом, однорідний. Розмічений граф стану має вигляд (рис. 1.37):

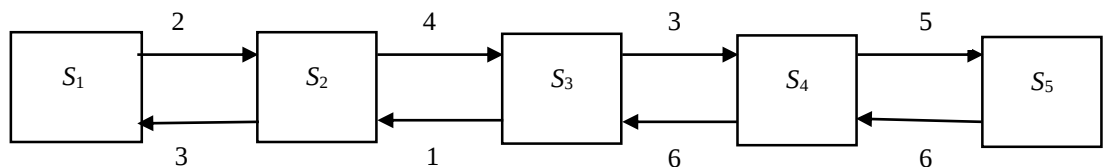


Рис. 1.37. Граф станів процесу «загибелі та розмноження»

Необхідно спрогнозувати ринкову ціну акції й визначити доцільність придбання акції за ціною 1700 грн.

1.5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ТА ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

За останні десятиріччя найширшого використання на практиці набув окремий клас випадкових процесів – марковські випадкові процеси. Марковські випадкові процеси, як математичний апарат дослідження, використовуються у багатьох галузях науки, зокрема в економіці, екології, соціології, техніці.

Способи математичного опису марковських процесів, що протікає в системі, залежать від того, в які моменти часу система здійснює переходи із стану в стан. Система з неперервним часом переходить із стану в стан в будь-який, заздалегідь невідомий момент часу.

Випадковий процес з дискретним часом – це процес, в якому переходи системи із стану в стан можливі тільки у визначені, заздалегідь фіксовані моменти часу $t_1, t_2, t_3, \dots$. В проміжки часу між цими моментами система S зберігає свій стан [2]. Саме таким випадковим марковським процесам і присвячена дана тема.

1.5.1. Випадковий процес з дискретними станами та дискретним часом

Нехай фізична система S може знаходитися в таких станах:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n.$$

При цьому переходи системи із стану в стан можливі тільки в моменти:

$$t_1, t_2, t_3, \dots$$

Будемо називати ці моменти *кроками* або *етапами процесу* та розглядати випадковий процес в системі як функцію цілочисельного аргументу $1, 2, 3, \dots$, тобто номера кроку.

Випадковий процес, що протікає в системі, полягає в тому, що в послідовні моменти часу $t_1, t_2, t_3, \dots$ система S перебуває в тому чи іншому стані та переходить в інший стан (рис. 1.38). Наприклад:

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_6 \rightarrow S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4 \rightarrow \dots$$

У загальному випадку система може не тільки переходити, а і залишатись в попередньому стані. Наприклад:

$$S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots$$

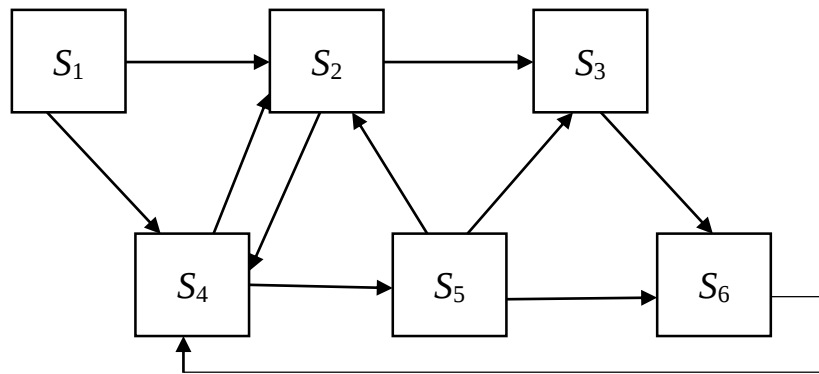


Рис. 1.38. Граф станів системи

Будемо позначати $S_i^{(k)}$ подією, що полягає в тому, що після k кроків система знаходиться в стані S_i . При будь-якому k події

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \dots, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$$

утворюють повну групу подій.

Процес, що протікає в системі, можна представити як послідовність подій. Наприклад:

$$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots$$

Така випадкова послідовність отримала назву **марковського ланцюга** – якщо для кожного кроку ймовірність переходу із S_i в стан S_j не залежить від того, коли і як система перейшла в стан S_i .

Марковський ланцюг характеризується ймовірностями станів. Нехай в будь-який момент часу (після будь-якого k -го кроку) система може бути в одному із станів:

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

тобто виконується одна із несумісних подій:

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \dots, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}.$$

Позначимо ймовірності цих подій після 1-го кроку:

$$p_1(1) = P(S_1^{(1)}); \quad p_2(1) = P(S_2^{(1)}); \dots; \quad p_n(1) = P(S_n^{(1)}). \quad (1.34)$$

Ймовірності після 2-го кроку:

$$p_1(2) = P(S_1^{(2)}); \quad p_2(2) = P(S_2^{(2)}); \dots; \quad p_n(2) = P(S_n^{(2)}). \quad (1.35)$$

Ймовірності після k -го кроку:

$$p_1(k) = P(S_1^{(k)}); \quad p_2(k) = P(S_2^{(k)}); \dots; \quad p_n(k) = P(S_n^{(k)}). \quad (1.36)$$

Очевидно, що для кожного кроку k виконується умова нормування:

$$p_1(k) + p_2(k) + p_3(k) + \dots + p_n(k) = 1. \quad (1.37)$$

Ймовірності $p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$ називаються **ймовірностями станів в системі з дискретним часом**.

Задача. Знайти ймовірності станів системи для будь-якого k .

Стани системи доцільно представляти у вигляді графа (рис. 1.39), де стрілками позначені можливі переходи із стану в стан за один крок.

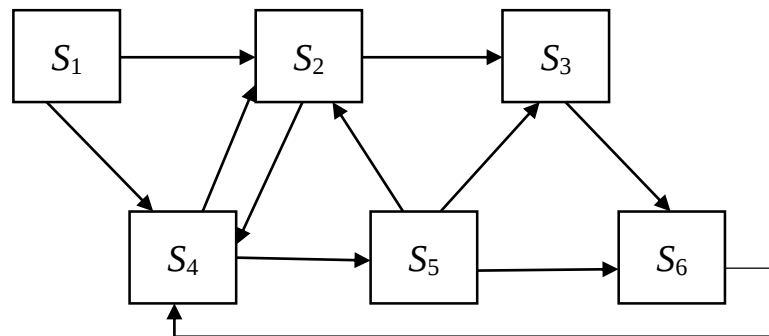


Рис. 1.39. Граф станів системи

Випадковий процес можна уявити так: уявлена точка випадково блукає по графу та переходить із стану в стан в моменти часу $t_1, t_2, t_3, \dots$, а в деякі моменти часу може залишитись в попередньому стані.

Наприклад, послідовність переходів:

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_5 \rightarrow S_6 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots$$

Можна представити на графі станів послідовність різних положень точки. На рисунку 1.40 пунктирними стрілками показані можливі переходи. Затримка системи в S_4 на третьому кроці зображена стрілкою-петлею, що виходить із S_4 та повертається в нього.

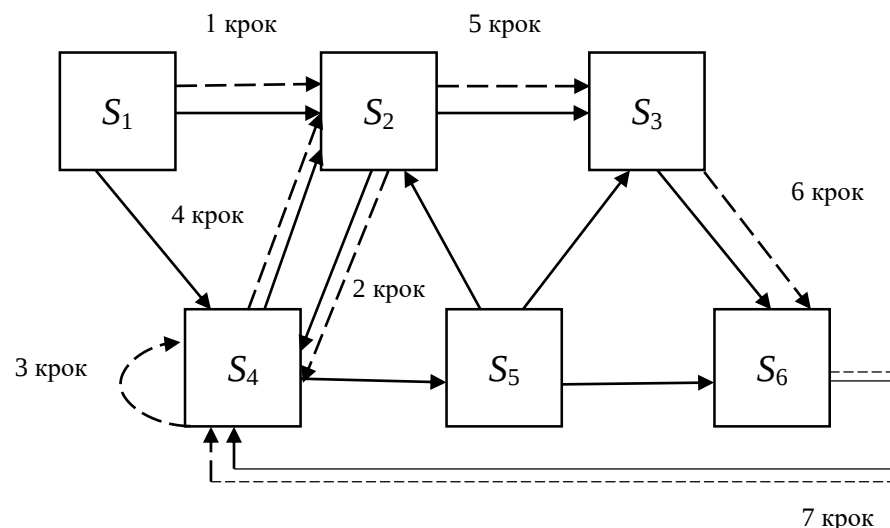


Рис. 1.40. Граф станів системи

Для будь-якого кроку (моменту часу $t_1, t_2, t_3, \dots$ (або номера k)) існують ймовірності переходу системи із будь-якого стану S_i в стан S_j – **перехідні**

ймовірності. Деякі із цих імовірностей дорівнюють нулю – там, де немає стрілки на графі станів та переходів.

Марковський ланцюг називається *однорідним*, якщо перехідні імовірності не залежать від кроку (моментів часу), тобто $P_{ij}(k) = p_{ij} = \text{const}$. В протилежному випадку – *неоднорідним*. Надалі будемо розглядати однорідні ланцюги Маркова.

Нехай система S має n можливих станів $S_1, S_2, \dots, S_n$. Припустимо, що відомі перехідні ймовірності P_{ij} переходу із стану S_i в стан S_j . Ймовірність P_{ii} – це ймовірність затримки системи в стані S_i . Запишемо всі ці ймовірності у вигляді квадратної матриці:

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.38)$$

Деякі $P_{ij} = 0$ – означає, що перехід із стану S_i в стан S_j за один крок неможливий.

Очевидним є те, що для такої матриці *сума елементів в кожному рядку дорівнює 1*, тобто матриця є *стохастичною*. Дану матрицю ще називають **матрицею однокрокового переходу**.

При використанні марковських ланцюгів часто доцільним є використання графу станів, у якого біля стрілочок проставлені відповідні ймовірності (рис. 1.41). Такий граф будемо називати **розміченим графом станів (ймовірнісний граф станів)**.

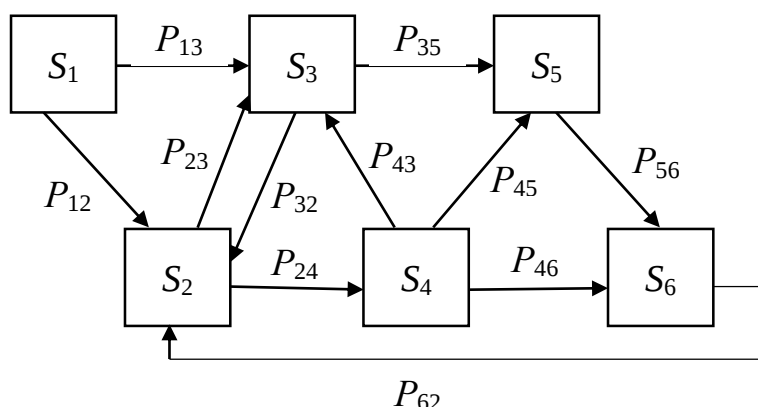


Рис. 1.41. Ймовірнісний граф станів системи

Вузол графа інформує про стан, в якому може перебувати система, а дуга графа, що сполучає два вузли, вказує на той стан, в який може перейти система з певною ймовірністю.

На графі станів не проставлені ймовірності P_{ii} , що позначають затримку для i -го стану. Їх можна обчислити за властивістю стохастичної матриці:

$$\begin{aligned} P_{11} &= 1 - (P_{12} + P_{13}); \\ P_{22} &= 1 - (P_{23} + P_{24}); \\ P_{33} &= 1 - (P_{32} + P_{35}); \\ P_{44} &= 1 - (P_{43} + P_{45} + P_{46}); \\ P_{55} &= 1 - P_{56}; \\ P_{66} &= 1 - P_{62}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Якщо із деякого стану не виходить жодної стрілки, то такий *стан* називається *тупиковим*, а ймовірність затримки для такого стану дорівнює 1.

Якщо відомо розмічений граф, то можна знайти ймовірності станів після k -го кроку:

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k).$$

Припустимо, що в початковий момент система знаходиться в якомусь визначеному стані, наприклад S_m . Тоді, в початковий момент часу будемо мати:

$$p_1(0) = 0, p_2(0) = 0, \dots, p_m(0) = 1, p_n(0) = 0.$$

Знайдемо ймовірності станів після 1-го кроку. За умовою задачі відомо, що перед першим кроком система знаходиться в *стані* S_m .

Тоді за *перший крок* система перейде в стани $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots, S_n$ з ймовірностями:

$$P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mm}, \dots, P_{mn}.$$

Ці ймовірності записані в m -му *рядку* матриці перехідних ймовірностей.

Таким чином, ймовірності станів після *першого кроку* будуть:

$$p_1(1) = P_{m1}, \quad p_2(1) = P_{m2}, \quad \dots, \quad p_m(1) = P_{mm}, \quad p_n(1) = P_{mn}. \quad (1.40)$$

Ймовірності станів після *другого кроку*:

$$p_1(2), p_2(2), \dots, p_n(2)$$

будемо обчислювати за формулою повної ймовірності з гіпотезами:

- після 1-го кроку система була в стані S_1 ;
- після 1-го кроку система була в стані S_2 ;
-
- після 1-го кроку система була в стані S_i ;
-
- після 1-го кроку система була в стані S_n .

Ймовірності гіпотез відомі. Це ймовірності $p_i(1)$.

Умовні імовірності переходу в стан S_i при кожній гіпотезі також відомі та записані у відповідному рядку матриці $\|P_{ij}\|$. За формулою повної імовірності знайдемо:

$$(p_1(1) \quad p_2(1) \quad \dots \quad p_n(1)) \cdot \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} = (p_1(2) \quad p_2(2) \quad \dots \quad p_n(2)),$$

$$p_1(2) = p_1(1)P_{11} + p_2(1)P_{21} + \dots + p_n(1)P_{n1};$$

$$p_2(2) = p_1(1)P_{12} + p_2(1)P_{22} + \dots + p_n(1)P_{n2};$$

.....

$$p_i(2) = p_1(1)P_{1i} + p_2(1)P_{2i} + \dots + p_n(1)P_{ni};$$

.....

$$p_n(2) = p_1(1)P_{1n} + p_2(1)P_{2n} + \dots + p_n(1)P_{nn},$$

або в загальній формі:

$$p_i(2) = \sum_{j=1}^n p_j(1)P_{ji}, \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.41)$$

Очевидно, що після третього кроку імовірності перебування системи в певних станах обчислюються: $p_i(3) = \sum_{j=1}^n p_j(2)P_{ji}, \quad (i=1, \dots, n).$

Для k -го кроку імовірності обчислюються:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1)P_{ji}, \quad (i=1, \dots, n). \quad (1.42)$$

Таким чином, імовірності перебування системи в певних станах після k -го моменту часу $p_i(k)$ можна обчислити за рекурентною формулою (1.42) через обчислені заздалегідь імовірності $p_i(k-1)$, які, в свою чергу, обчислюються через імовірності $p_i(k-2)$.

1.5.2. Приклади застосування марковських процесів з дискретним часом

Приклад 1.24. По деякій цілі ведеться стрільба чотирма пострілами в моменти часу t_1, t_2, t_3, t_4 . Можливі стани цілі:

- S_1 – об’єкт не уражений;
- S_2 – об’єкт отримав незначні ушкодження;
- S_3 – об’єкт має обмежену працездатність;
- S_4 – об’єкт повністю уражений.

До початку здійснення атак об’єкт знаходиться у стані S_1 . Граф станів представлений на рисунку 1.42. Визначити **кількість атак**, що забезпечать ураження об’єкта з імовірністю не менше 0,8.

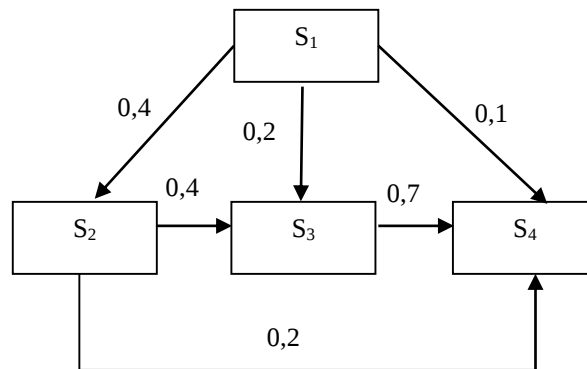


Рис. 1.42. Граф станів і переходів

Підготовка та введення вихідних даних

Із графа станів:

$$\begin{array}{llll}
 P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14}) = 0,3 & P_{12} = 0,4 & P_{13} = 0,2 & P_{14} = 0,1 \\
 P_{21} = 0 & P_{22} = 0,4 & P_{23} = 0,4 & P_{24} = 0,2 \\
 P_{31} = 0 & P_{32} = 0 & P_{33} = 0,3 & P_{34} = 0,7 \\
 P_{41} = 0 & P_{42} = 0 & P_{43} = 0 & P_{44} = 1
 \end{array}$$

Таким чином, матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Початкові ймовірності перебування системи в станах (система у початковий момент часу знаходиться в стані S_1):

$$p_1(0) = 1; p_2(0) = 0; p_3(0) = 0; p_4(0) = 0.$$

Розрахунок імовірностей **після 1-го кроку**:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix} = (0,3 \ 0,4 \ 0,2 \ 0,1),$$

$$\begin{aligned}
p_1(1) &= P_{11} \cdot p_1(0) + P_{21} \cdot p_2(0) + P_{31} \cdot p_3(0) + P_{41} \cdot p_4(0) = 0,3. \\
p_2(1) &= P_{12} \cdot p_1(0) + P_{22} \cdot p_2(0) + P_{32} \cdot p_3(0) + P_{42} \cdot p_4(0) = 0,4. \\
p_3(1) &= P_{13} \cdot p_1(0) + P_{23} \cdot p_2(0) + P_{33} \cdot p_3(0) + P_{43} \cdot p_4(0) = 0,2. \\
p_4(1) &= P_{14} \cdot p_1(0) + P_{24} \cdot p_2(0) + P_{34} \cdot p_3(0) + P_{44} \cdot p_4(0) = 0,1.
\end{aligned}$$

Таким чином, імовірності після 1-го кроку будуть такими:

$$p_1(1) = 0,3; p_2(1) = 0,4; p_3(1) = 0,2; p_4(1) = 0,1.$$

Розрахунок імовірностей *після 2-го кроку*:

$$(0,3 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad 0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix} = (0,09 \quad 0,28 \quad 0,28 \quad 0,35),$$

$$\begin{aligned}
p_1(2) &= P_{11} \cdot p_1(1) + P_{21} \cdot p_2(1) + P_{31} \cdot p_3(1) + P_{41} \cdot p_4(1) = 0,09. \\
p_2(2) &= P_{12} \cdot p_1(1) + P_{22} \cdot p_2(1) + P_{32} \cdot p_3(1) + P_{42} \cdot p_4(1) = 0,28. \\
p_3(2) &= P_{13} \cdot p_1(1) + P_{23} \cdot p_2(1) + P_{33} \cdot p_3(1) + P_{43} \cdot p_4(1) = 0,28. \\
p_4(2) &= P_{14} \cdot p_1(1) + P_{24} \cdot p_2(1) + P_{34} \cdot p_3(1) + P_{44} \cdot p_4(1) = 0,35.
\end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічні розрахунки, отримаємо значення імовірностей перебування системи у різних станах *після 5-го кроку*:

$$p_1(5) = 0,0024; p_2(5) = 0,031; p_3(5) = 0,068; p_4(5) = 0,898.$$

Так як імовірність перебування системи в стані S_4 після 5-го кроку буде більше 0,8, то припиняємо обчислення.

Таким чином, після 5 атак ціль буде повністю уражено з імовірністю 0,898, що більше заданої імовірності 0,8. Тому для ураження цілі із заданою імовірністю 0,8 необхідно здійснити 5 атак.

За результатами рішення можна зробити такі висновки:

- після 5 атак ціль залишиться не ураженою з імовірністю $P_1(5) = 0,0024$;
- після 5 атак ціль отримає незначні ушкодження з імовірністю $P_2(5) = 0,031$, що складає $\sim 3\%$;
- після 5 атак ціль отримає суттєві ушкодження та буде обмежено працездатною із імовірністю $P_3(5) = 0,068$, що складає $\sim 7\%$;
- після 5 атак ціль буде повністю ураженою з імовірністю $P_4(5) = 0,898$, що складає $\sim 90\%$;
- після 4 атак ціль буде повністю ураженою з імовірністю $P_4(4) = 0,793$, що менше заданої імовірності 0,8. Тому 4 атак недостатньо для знищення цілі із заданою імовірністю.

Особливість розрахунку на Excel полягає у використанні ітераційної формули матричного множення вектору-рядка (описує стан системи) на матрицю перехідних ймовірностей:

$$P(i+1) = P(i) \cdot P_{ij}, \quad (1.43)$$

де $P(i)$ – вектор (матриця-рядок) ймовірностей стану після кроку i .

$P(i+1)$ – вектор (матриця-рядок) ймовірностей стану після кроку $i+1$.

$\|P_{ij}\|$ – матриця перехідних ймовірностей.

Скриншот рішення задачі на Excel представлено на рисунку 1.43.

Отже, моделювання на Excel марковських процесів з дискретним часом полягає у знаходженні ймовірностей перебування системи в певних станах через певну кількість кроків. Для кожного кроку в Excel треба виконувати операцію матричного множення вектору-рядка (ймовірності в станах на попередньому кроці) на квадратну матрицю (матрицю перехідних ймовірностей).

A13											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Розв'язання прикладу 3										
2	Матриця перехідних ймовірностей:										
3	0,3	0,4	0,2	0,1		Множення матриць:					
4	0	0,4	0,4	0,2		1) визначити місце для результуючої матриці;					
5	0	0	0,3	0,7		2) ввести функцію в лівій верхній клітині =МУМНОЖ()					
6	0	0	0	1		3) Ввести масиви даних;					
7						4) натиснути Ctrl+Shift+Enter;					
8	Початкові ймовірності станів					5) якщо потрібно формулу редагувати, натиснути F2.					
9	p1	p2	p3	p4							
10	1	0	0	0							
11											
12	Ймовірності станів після 1-го кроку										
13	0,3	0,4	0,2	0,1							
14											
15	Ймовірності станів після 2-го кроку										
16	0,09	0,28	0,28	0,35							
17											
18	Ймовірності станів після 3-го кроку										
19	0,027	0,148	0,214	0,611							
20											
21	Ймовірності станів після 4-го кроку										
22	0,008	0,070	0,129	0,793							
23											
24	Ймовірності станів після 5-го кроку										
25	0,002	0,031	0,068	0,898							
26											

Рис. 1.43. Скриншот рішення прикладу 1.24 на Excel

Ми розглянули однорідний марковський процес, для якого всі перехідні ймовірності не змінюються.

Тепер розглянемо **загальний випадок** – неоднорідний марковський процес, в якому вважаються заданими матриці перехідних ймовірностей для кожного кроку. Позначимо $P_{ij}^{(k)}$ – ймовірність переходу системи із i -го стану в j -тий стан на k -му кроці. Тобто це умовна ймовірність:

$$P_{ij}^{(k)} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}).$$

Припустимо, що нам задані матриці переходів на кожному кроці. Тоді, імовірність того, що система буде знаходитись в i -тому стані після k кроків обчислюється за формулою:

$$p_i(k) = \sum_j p_j(k-1) \cdot P_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.44)$$

Дана формула відрізняється від формули (1.42) тільки тим, що на кожному кроці треба підставляти свою матрицю перехідних імовірностей $P_{ij}^{(k)}$.

Приклад 1.25. Виконується 3 постріли по цілі, яка може знаходитись в чотирьох станах (як в прикладі 1.24): S_1, S_2, S_3, S_4 .

Ймовірності переходів для трьох пострілів різні та задані трьома матрицями:

$$P_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У початковий момент часу ціль знаходиться в стані S_1 . Знайти ймовірності станів після 3-х пострілів.

Розв'язання. Початкові імовірності перебування системи в станах (система у початковий момент часу знаходиться в стані S_1):

$$p_1(0) = 1; p_2(0) = 0; p_3(0) = 0; p_4(0) = 0.$$

Ймовірності після **1-го пострілу**:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,3 \ 0,4 \ 0,2 \ 0,1),$$

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot P_{11}^{(1)} = 1 \cdot 0,3 = 0,3,$$

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot P_{12}^{(1)} = 1 \cdot 0,4 = 0,4,$$

$$p_3(1) = p_1(0) \cdot P_{13}^{(1)} = 1 \cdot 0,2 = 0,2,$$

$$p_4(1) = p_1(0) \cdot P_{14}^{(1)} = 1 \cdot 0,1 = 0,1.$$

Отже, $p_1(1) = 0,3$, $p_2(1) = 0,4$, $p_3(1) = 0,2$, $p_4(1) = 0,1$.

Ймовірності після **2-го пострілу**:

$$(0,3 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad 0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,03 \quad 0,2 \quad 0,33 \quad 0,44),$$

$$p_1(2) = p_1(1)P_{11}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03,$$

$$p_2(2) = p_1(1)P_{12}^{(2)} + p_2(1)P_{22}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,2,$$

$$p_3(2) = p_1(1)P_{13}^{(2)} + p_2(1)P_{23}^{(2)} + p_3(1)P_{33}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,33,$$

$$p_4(2) = p_1(1)P_{14}^{(2)} + p_2(1)P_{24}^{(2)} + p_3(1)P_{34}^{(2)} + p_4(1)P_{44}^{(2)} = \\ = 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 1 = 0,44.$$

Ймовірності після **3-го пострілу**:

$$(0,03 \quad 0,2 \quad 0,33 \quad 0,44) \cdot \begin{pmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,002 \quad 0,029 \quad 0,165 \quad 0,804)$$

$$p_1(3) = p_1(2)P_{11}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,05 = 0,002,$$

$$p_2(3) = p_1(2)P_{12}^{(3)} + p_2(2)P_{22}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,029,$$

$$p_3(3) = p_1(2)P_{13}^{(3)} + p_2(2)P_{23}^{(3)} + p_3(2)P_{33}^{(3)} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,33 \cdot 0,1 = 0,165,$$

$$p_4(3) = p_1(2)P_{14}^{(3)} + p_2(2)P_{24}^{(3)} + p_3(2)P_{34}^{(3)} + p_4(2)P_{44}^{(3)} = \\ = 0,03 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,33 \cdot 0,9 + 0,44 \cdot 1 = 0,804.$$

Отже, ймовірності станів після 3-х пострілів:

$$p_1(3) = 0,002; \quad p_2(3) = 0,029; \quad p_3(3) = 0,165; \quad p_4(3) = 0,804.$$

1.5.3. Особливості імітаційного моделювання марковських процесів із дискретним часом

Розглянемо граф марковського процесу з дискретним часом (рис. 1.44).

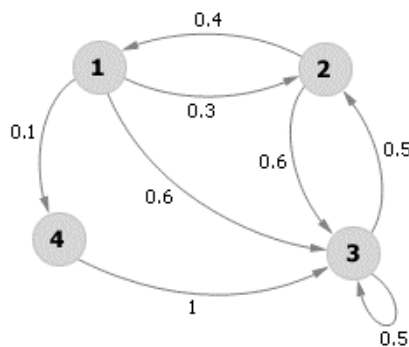


Рис. 1.44. Приклад марковського графу переходів

Слід відзначити, що сума ймовірностей переходу із першого стану в 4-й, 3-й, 2-й стани дорівнює 1. Аналогічне твердження виконується і для всіх інших станів.

В результаті імітаційного моделювання треба отримати реалізацію марковського процесу (процес його імітаційного моделювання), що являє собою обчислення послідовності (ланцюга) переходів зі стану в стан (рис. 1.45). Ланцюг є випадковою послідовністю, проте він може мати також і інші варіанти реалізації.



Рис. 1.45. Приклад марковського ланцюга, змодельованого за марковським графом на рисунку 1.44

Щоб визначити, в який новий стан перейде процес з поточного i -го стану, досить розбити інтервал $[0; 1]$ на підінтервали величиною $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \dots$ (рис. 1.46), для яких виконується умова нормування: $P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \dots = 1$.

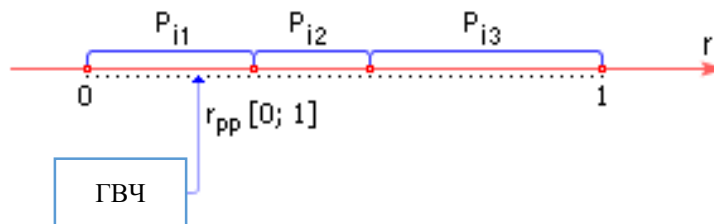


Рис. 1.46. Процес моделювання переходу з i -го стану марковської ланцюга в j -ий з використанням генератора випадкових чисел

Далі за допомогою ГВЧ треба отримати чергове рівномірно розподілене в інтервалі $[0;1]$ випадкове число r_{pp} і визначити, в який із інтервалів воно потрапляє. Якщо потрапляє в перший інтервал, то система переходить 1-й стан, якщо в другий, то 2-й стан, і т.д. Після цього здійснюється *перехід в стан*, визначений ГВЧ, і повтор описаної процедури для нового стану. Результатом роботи моделі є марковський ланцюг (рис. 1.45).

Приклад 1.26. Імітація стрільби з гармати по цілі. Для того, щоб проімітувати стрільбу з гармати по цілі, побудуємо модель марковського випадкового процесу. Визначимо наступні три стани:

- S_0 – ціль не пошкоджена;
- S_1 – ціль пошкоджена;
- S_2 – ціль зруйнована.

Задаємо вектор початкових ймовірностей: $P_{00} = 0,8$, $P_{01} = 0,2$, $P_{03} = 0$.

Значення P_{ij} для кожного із станів показує, ймовірність знаходження об'єкта в певному стані до початку стрільби.

Задамо матрицю переходу станів:

$$P = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,40 & 0,15 \\ 0 & 0,45 & 0,55 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Треба перевірити, щоб сума ймовірностей переходу з деякого стану в інші завжди дорівнює одиниці (кудиись система повинна перейти обов'язково).

Наочно модель марковського процесу можна уявити собі у вигляді розміченого графа (рис. 1.47).

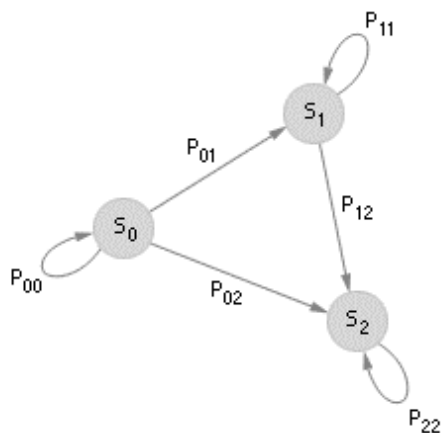


Рис. 1.47. Граф марковського процесу, який моделює стрільбу із гармати по цілі

Використовуючи модель і метод статистичного моделювання, спробуємо вирішити наступне завдання: **визначити середню кількість снарядів, необхідних для повного руйнування цілі.**

Проімітуємо, використовуючи таблицю випадкових чисел, процес стрільби. Нехай початковий стан буде S_0 .

Припустимо, що ГВЧ видає таку послідовність випадкових чисел:

0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21,...

1) **0.31**: ціль знаходиться в стані S_0 і залишається в стані S_0 , так як $0 < \mathbf{0.31} < 0.45$;

2) **0.53**: ціль знаходиться в стані S_0 і переходить в стан S_1 , так як $0.45 < \mathbf{0.53} < 0.45 + 0.40$;

3) **0.23**: ціль знаходиться в стані S_1 і залишається в стані S_1 , так як $0 < \mathbf{0.23} < 0.45$;

4) **0.42**: ціль знаходиться в стані S_1 і залишається в стані S_1 , так як $0 < \mathbf{0.42} < 0.45$;

5) **0.63**: ціль знаходиться в стані S_1 і переходить в стан S_2 , так як $0.45 < 0.63 < 1$.

Так як досягнуто стан S_2 (далі ціль переходить з S_2 в стан S_2 з ймовірністю 1), то ціль вражена. Для цього в даному експерименті знадобилось 5 снарядів.

На рисунку 1.48 наведена часова діаграма, яка отримана в результаті моделювання. Діаграма показує, як в часі відбувається процес зміни станів. Такт моделювання для даного випадку має фіксовану величину. Для нас важливим є сам факт переходу (до якого стану переходить система) і не важливо, коли це відбувається.

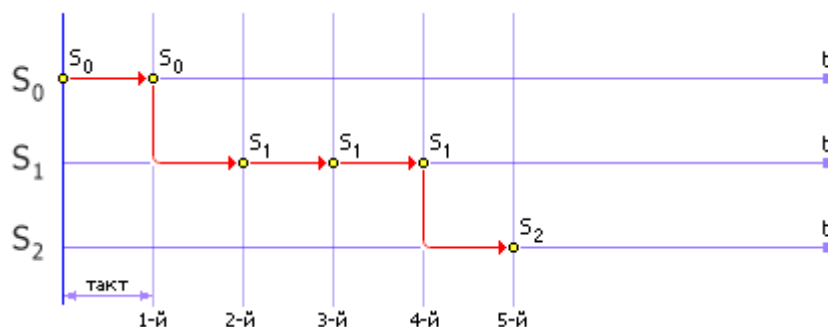


Рис. 1.48. Часова діаграма переходів в марковському графі (приклад імітації)

Процедура знищення цілі здійснена за 5 тактів, тобто марковський ланцюг цієї реалізації виглядає наступним чином:

1) $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$.

Звичайно, що відповіддю поставленої задачі це число бути не може, так як в різних реалізаціях вийдуть різні числа тактів. Тому треба оперувати із **середньою кількістю тактів**. Повторюючи цю імітацію, можна отримати, наприклад, ще такі реалізації (це залежить від того, які конкретно випадкові числа надає ГВЧ):

2) 4 такти – $(S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

3) 11 тактів – $(S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

4) 5 тактів – $(S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

5) 6 тактів – $(S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

6) 4 такти – $(S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

7) 6 тактів – $(S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$;

8) 5 тактів – $(S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2)$.

Всього знищено ціль 8 разів. Середнє число циклів в процедурі стрільби

$$\text{склало } \frac{5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5}{8} = 5,75 \approx 6.$$

Саме стільки снарядів, в середньому, рекомендується мати в бойовому запасі гармати для знищення цілі при таких імовірностях влучень.

Аналіз точності розв'язку

Саме точність може нам показати, наскільки слід довіряти даній відповіді. Для цього простежимо, як сходиться послідовність випадкових (наближених) відповідей до правильного (точного) результату.

Нагадаємо, що, згідно з центральною граничною теоремою, сума випадкових величин є величина не випадкова. Тому для отримання статистично достовірної відповіді необхідно стежити за середнім числом снарядів, одержуваних в ряді випадкових реалізацій.

На першому етапі обчислень середнє значення склало 5 снарядів, на другому етапі середнє значення склало $\frac{5+4}{2} = 4,5$ снаряда, на третьому – $\frac{5+4+11}{3} = 6,7$.

Далі ряд середніх значень, в процесі накопичення статистики, виглядає наступним чином: 6,3; 6,2; 5,8; 5,9; 5,8. Якщо зобразити цей ряд у вигляді графіка середньої величини випущених снарядів, необхідних для ураження цілі, в залежності від номера експерименту, то виявиться, що даний ряд збігається до деякої величини, яка і є відповіддю (рис. 1.49).

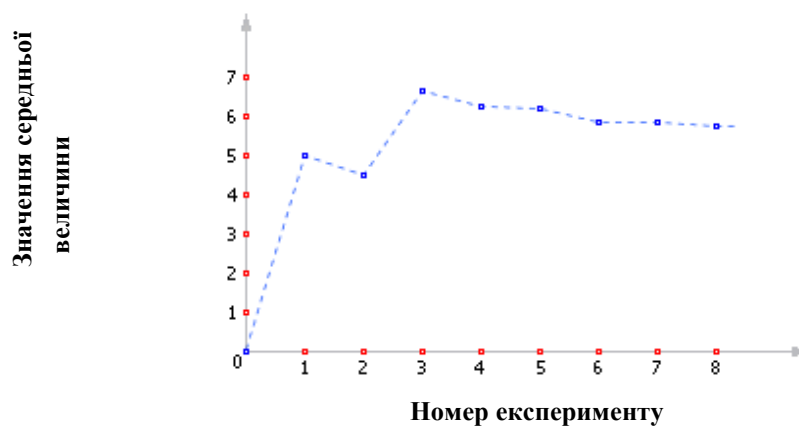


Рис. 1.49. Зміна середнього значення кількості снарядів в залежності від номера експерименту

Візуально ми можемо спостерігати, що графік «заспокоюється», розкид між обчисленою поточною величиною та її теоретичним значенням з часом зменшується, прагнучи до статистично точного результату. Тобто в певний момент графік входить в деяку «трубку», розмір якої і визначає точність відповіді.

Алгоритм імітації представлений на рисунку 1.50.

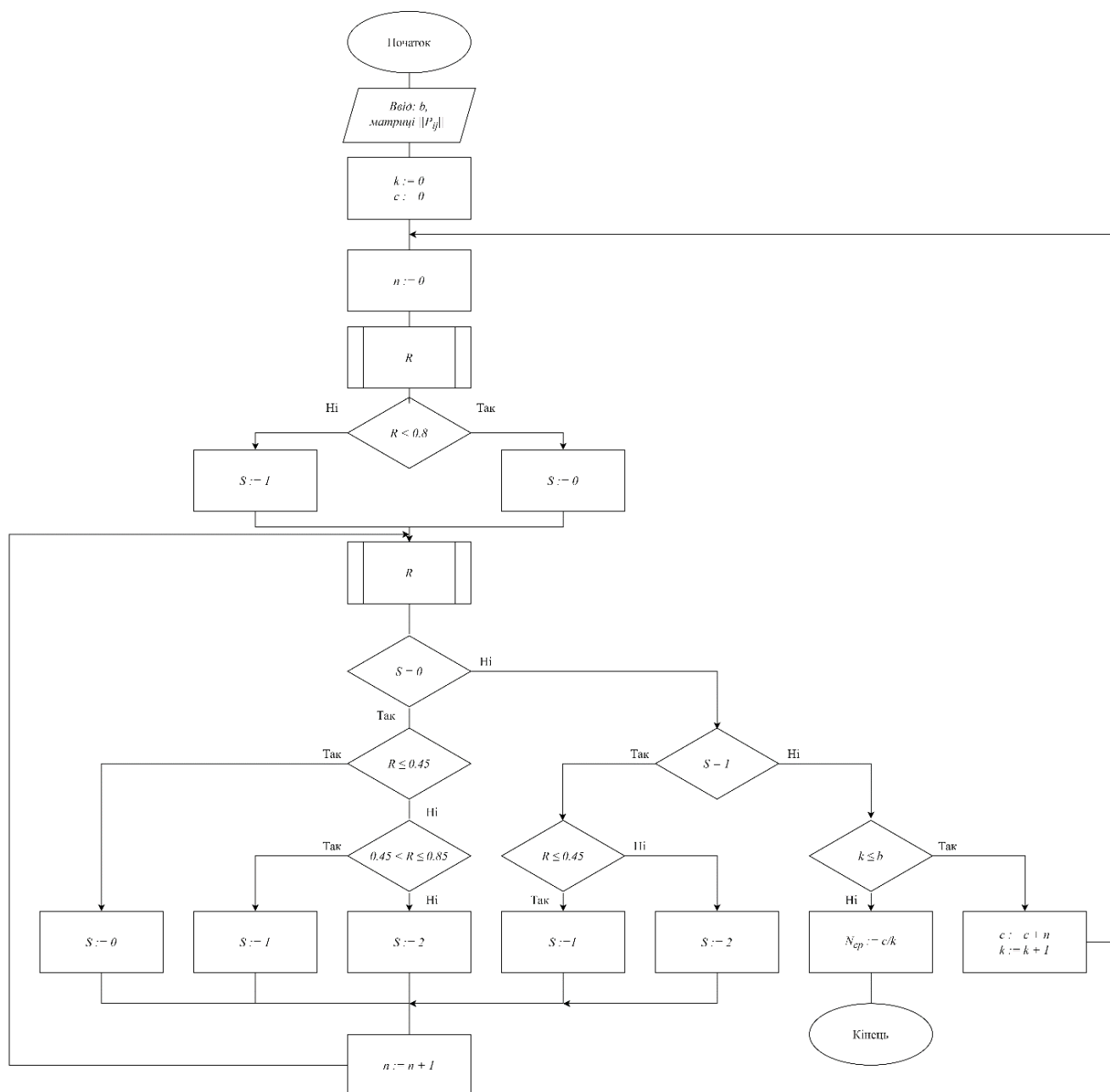


Рис. 1.50. Блок-схема алгоритму імітаційного моделювання марковського процесу з дискретним часом для розглянутого прикладу (рис. 1.47)

Ще раз зауважимо, що в розглянутому випадку нам *байдуже*, в які *моменти часу* буде відбуватися *перехід*. Переходи здійснюються такт за тактом. Якщо важливо вказати, в який саме момент часу відбудеться перехід, скільки часу система буде в кожному із станів, потрібно застосувати модель з безперервним часом.

Питання для самоперевірки

1. Який процес називається випадковим?
2. Який процес називається марковським?

3. Класифікація марковських процесів.
4. Що таке марковський ланцюг?
5. Чим характеризується марковський ланцюг?
6. Що таке ймовірності станів в системі з дискретним часом?
7. Які ймовірності називаються перехідними ймовірностями?
8. Що таке матриця перехідних ймовірностей.
9. Який марковський ланцюг називається однорідним?
10. Дайте означення розміченого графу станів системи.
11. Який стан системи називається тупіковим?
12. За якою формулою обчислюються ймовірності перебування системи в певних станах після k -го моменту часу?
13. Як змодельовати на Excel однорідний марковський процес з дискретним часом?
14. Назвіть особливості імітаційного моделювання марковських процесів із дискретним часом за допомогою генератора випадкових чисел.

Задачі для самостійної роботи

1. Визначити a, b, c так, щоб матриця була стохастичною.

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,4 & b & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & c \\ a & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2. Матриця перехідних ймовірностей ланцюга Маркова має вигляд:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Знайти кількість станів. Побудувати граф, що відповідає матриці перехідних ймовірностей.

3. Ланцюг Маркова заданий розміченим графом станів та переходів (рис. 1.51):



Рис. 1.51. Граф станів та переходів системи.

Знайти ймовірності станів на третьому кроці за умови, що в початковий момент ланцюг Маркова перебував в стані S_2 .

4. Розглянемо процес функціонування банку. Можливі стани банку характеризуються однією з процентних ставок: 2%, 3%, 4%. Ставки встановлюються на початку кожного кварталу і фіксовані протягом всього періоду. Таким чином, якщо за систему S прийняти розглянутий банк, то вона в кожен момент часу може перебувати тільки в одному з наступних станів:

- S_1 – процентна ставка 2%;
- S_2 – процентна ставка 3%;
- S_3 – процентна ставка 4%.

Аналіз роботи банку в попередні роки показав, що зміна перехідних ймовірностей із часом мала. Стохастична матриця ймовірностей переходу має вигляд:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Визначити ймовірності зазначених станів банку наприкінці 2023 року, якщо наприкінці попереднього 2022 року процентна ставка банку становила 3%.

5. В приміщенні для переговорів відділ технічної безпеки здійснює пошук закладних пристроїв. За агентурними даними відомо, що зловмисники заклали 4 електроакустичних прилади. Фахівці відділу планують здійснити п'ять послідовних тестів. Визначити ймовірності перебування системи з чотирьох приладів у наступних станах:

- S_1 – всі прилади цілі;
- S_2 – виявлено один прилад;
- S_3 – виявлено два прилади;
- S_4 – виявлено три прилади;
- S_5 – виявлено чотири прилади.

Вважається, що відомі перехідні ймовірності – ймовірності виявлення одного, або двох, або трьох, або чотирьох електроакустичних приладів при переході із стану до стану в процесі здійснення тестів: $P_{12}=0,25$; $P_{13}=0,20$; $P_{14}=0,10$; $P_{15}=0,05$; $P_{23}=0,30$; $P_{24}=0,25$; $P_{25}=0,10$; $P_{34}=0,40$; $P_{35}=0,15$; $P_{45}=0,60$. Вважається, що система починає працювати із стану S_1 .

Побудувати математичну модель системи на основі марковського процесу з дискретними станами та дискретним часом, знайти ймовірності перебування системи в зазначених станах.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

2.1. ПОНЯТТЯ, ЗАДАЧІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

2.1.1. Основні поняття систем масового обслуговування

В *теорії масового обслуговування* (ТМО) розглядаються процеси обробки інформації в складних технічних системах. Основи цієї теорії були закладені в працях датського математика, співпрацівника Копенгагенської телефонної компанії А.К. Ерланга (формулювання принципу статистичної рівноваги) і отримали подальшого розвитку в роботах багатьох вітчизняних та зарубіжних вчених, таких як Т. Енгсет, Г.О. Делл, Е. Молін, О. Колмогоров, А. Хінчин, К. Пальм, Г. Башарін, А. Маркевич, Б. Лівшиц, Ю. Корнишев та ін.

Агнер Краруп Ерланг (1878-1929) – датський математик, статистик, інженер. *Основоположник наукового напрямку по вивченню трафіка в телекомунікаційних системах і теорії масового обслуговування.* Ерлангом була отримана формула для розрахунку частки викликів, що отримують обслуговування на сільській телефонній станції і кому доведеться чекати, поки робляться зовнішні виклики. У 1909 році він опублікував свою першу роботу: «Теорія ймовірностей та телефонні розмови» (The Theory of Probabilities and Telephone Conversations). Ця робота була визнана у всьому світі і його формула була прийнята для використання в найбільшій поштової службі світу - Головному поштамті Великобританії. Двадцять років він пропрацював у Копенгагенській телефонній компанії та помер у 1929 році. У 40-х роках на його честь було названо одиницю вимірювання трафіку в телекомунікаційних системах — ерланг, а його формули досі використовуються при розрахунках пропускнуєї спроможності сучасних телекомунікаційних мереж.

Термін «*система масового обслуговування*» (СМО) об'єднує досить широке коло складних систем на виробництві, транспорті, сфері обслуговування тощо [8].

Система масового обслуговування (СМО) – це система, яка обслуговує вимоги, що надходять до неї (заявки).

Предметом вивчення СМО є процеси в системах масового обслуговування, що виникають при надходженні й обслуговуванні потоків викликів, та їх кількісні характеристики.

Основними елементами системи масового обслуговування є **заявки (вимоги)** та **сервери**, які називають **обслуговуючими приладами (каналами)**

обслуговування). Заявки надходять через дискретні (постійні або випадкові) інтервали часу та створюють вхідний потік на вході СМО, а система обслуговує ці заявки, використовуючи на кожну деякий час (постійний чи випадковий). Випадковий характер потоку заявок та часу обслуговування призводить до того, що в деякі моменти часу на вході СМО може виникнути черга, в інші моменти – канали можуть бути недозавантаженими або взагалі простоювати. Якщо у момент надходження заявки всі канали зайняті, заявка копіюється у комірку буфера і чекає там початку обслуговування. Заявки, що знаходяться в буфері, складають чергу на обслуговування. Якщо всі комірки буфера зайняті, заявка отримує відмову в обслуговуванні і втрачається. Отже, частина заявок відкидається або розміщується в чергу.

Процес роботи СМО представляє собою випадковий процес з дискретними станами та неперервним часом. Стан СМО змінюється стрибком в моменти реалізації подій (надходження нової або закінчення обслуговування вимоги, моменту, коли вимога, виходить з черги).

Отже, **теорія масового обслуговування досліджує математичну модель процесу обслуговування**, яка містить такі основні компоненти (рис. 2.1):

- джерело запитів;
- потік заявок (викликів, повідомлень), що надходить в систему;
- час обслуговування викликів;
- організація обслуговування (система і дисципліна);
- характеристики якості обслуговування вхідних заявок.

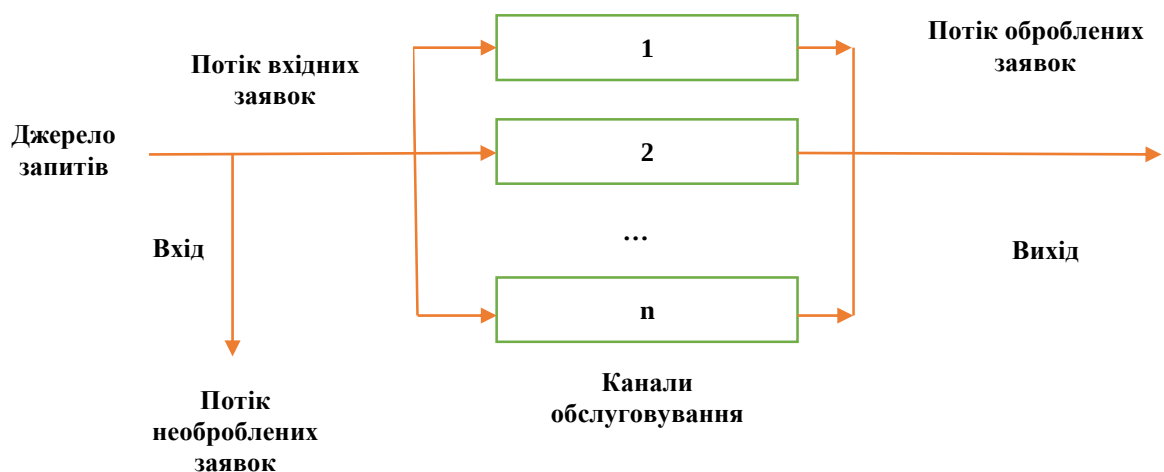


Рис. 2.1. Модель процесу обслуговування

Джерело запитів. Джерело запитів визначається як зовнішня щодо СМО система, із якої запити надходять в неї для обслуговування. Джерело називають

нескінченним або скінченним залежно від того, нескінченна чи скінченна кількість запитів міститься в ньому. Якщо джерело містить скінченну, але досить велику кількість запитів, то його зазвичай вважають *нескінченним*. Наприклад, хоча кількість користувачів інформаційно-пошукової системи Google скінченна, припускають, що вони утворюють нескінченне джерело.

Вхідний потік. Запити, що надходять з нескінченного джерела, прибувають в канал обслуговування в моменти часу $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$. Інтервали часу між послідовними моментами надходження запитів є випадковими величинами. Передбачається, що утворюється послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу. У математичній теорії масового обслуговування використовують обмежений набір законів розподілу для опису вхідних потоків. Головними є *пуассонівський (найпростіший)*, який задається формулою Пуассона.

Канали обслуговування. СМО може мати один або більше каналів (ліній, приладів) обслуговування. СМО з одним каналом називаються *одноканальними* або *однолінійними*, тоді як системи обслуговування, що містять більше каналів обслуговування, називаються *багатоканальними* або *багатолінійними*. Канали обслуговування можуть бути однорідними й неоднорідними. У СМО з однорідними каналами всі прилади обслуговують запити однаково. У СМО з неоднорідними приладами прилади відрізняються один від одного деякими параметрами, наприклад інтенсивністю обслуговування.

Дисципліна обслуговування – правило, згідно з яким запити вибираються для обслуговування, складають дисципліну обслуговування:

- *спосіб обслуговування* (без втрат повідомлень, з явними втратами, з очікуванням, з повторенням або комбінований),
- *порядок обслуговування* (за чергою, у випадковому порядку або за пріоритетом),
- *режим пошуку виходів комутаційної системи* (вільний, груповий або індивідуальний),
- *спосіб зайняття вільних каналів* (послідовний або випадковий),
- а також інша інформація, що характеризує взаємодію потоку повідомлень з системою обслуговування.

До **характеристик якості обслуговування вхідного потоку** заявок відносять:

- імовірність явної або умовної втрати повідомлень через відсутність вільних каналів обслуговування або шляхів встановлення з'єднання,
- середній час затримки початку обслуговування вхідного повідомлення,

- імовірність втрати первинного або повторного виклику,
- інтенсивність обслугованого навантаження,
- пропускна здатність системи обслуговування та ін.

При дослідженні СМО можуть вирішуватися такі задачі:

- **задачі аналізу СМО** – визначення, які характеристики якості забезпечить СМО із заданою структурою і параметрами для відомого вхідного потоку викликів;
- **задачі параметричного синтезу** – визначення, які параметри системи обслуговування з фіксованою структурою треба встановити, щоб забезпечити для відомого вхідного потоку викликів задану якість обслуговування;
- **задачі структурного синтезу** – визначення, яку структуру системи обслуговування з фіксованими параметрами треба встановити, щоб забезпечити для відомого вхідного потоку викликів задану якість обслуговування;
- **задачі оптимізації СМО** – визначення, яку структуру і параметри системи треба встановити, щоб забезпечити мінімальну вартість її функціонування при підтримці заданої якості обслуговування.

З розвитком елементної бази вузлів мереж зв'язку, вдосконаленням принципів та систем управління в телекомунікаціях та впровадженням нових послуг задачі, що вирішує ТМО, суттєво розширюються. Пошук найбільш економічних структур комутаційних схем, розробка принципів їх побудови пов'язуються з дотриманням умов не тільки щодо пропускної здатності та часу передачі повідомлення через комутаційне поле, але і надійності функціонування, гнучкості розвитку, модульності побудови.

Для складних систем, що можна звести до СМО, рішення задач аналізу і синтезу передбачає визначення необхідного рівня децентралізації управління (вибір оптимальної структури управління) залежно від конкретних характеристик системи (ємність, призначення та ін.), оптимального розподілу функцій та ресурсів системи управління між окремими ЕОМ та мікроЕОМ при децентралізованому та розподіленому управлінні, а також пошук оптимальних алгоритмів обробки викликів і процедур взаємодії між окремими елементами системи управління з метою підвищення її ефективності.

Математичний апарат СМО базується на теорії ймовірності, комбінаториці та математичній статистиці. Методи останньої застосовуються здебільшого для обробки даних, які отримуються при вимірюванні параметрів потоків повідомлень та показників якості обслуговування в реальних системах, а також при моделюванні таких систем на ЕОМ. Для рішення конкретних задач використовуються також інші розділи математики – лінійна алгебра, диференціальне та інтегральне обчислення, теорія графів, системний аналіз.

Основним інструментом дослідження в СМО є *метод рівнянь ймовірностей станів*, оснований на принципі статистичної рівноваги. Для системи обслуговування вводиться поняття стану. В найпростішому випадку стан системи характеризується однією випадковою змінною, наприклад числом зайнятих ліній або викликів, що знаходяться в системі (обслуговуються або чекають в черзі). При надходженні наступного виклику або закінченні обслуговування система змінює свій стан. Інтенсивності переходу з одного стану в інший звичайно відомі на основі властивостей потоків викликів і звільнень. Це дозволяє побудувати розмічений граф станів і скласти систему рівнянь, які зв'язують між собою вірогідності сусідніх станів. Систему можна вирішувати аналітично або чисельно.

Найбільш універсальним, придатним для рішення задач практично будь якої складності, є *метод статистичного моделювання*. Математична модель процесу обслуговування при цьому реалізується в вигляді програми для ЕОМ. Моделювання дозволяє отримати чисельні характеристики якості обслуговування при конкретних параметрах потоку, СМО та заданій дисципліні обслуговування. Результати моделювання використовують для перевірки гіпотез і припущень, уточнення емпіричних коефіцієнтів. При моделюванні отримують приблизну оцінку характеристик якості обслуговування.

Функціональна схема СМО (рис. 2.2) відбиває загальні принципи обслуговування вхідного потоку викликів v -канальною СМО. Виклики з деякого потоку надходять на обслуговування в СМО, займаючи вільні канали. При зайнятості всіх каналів можливе очікування викликів у черзі. Після завершення обслуговування виклики звільняють канали і лишають систему.

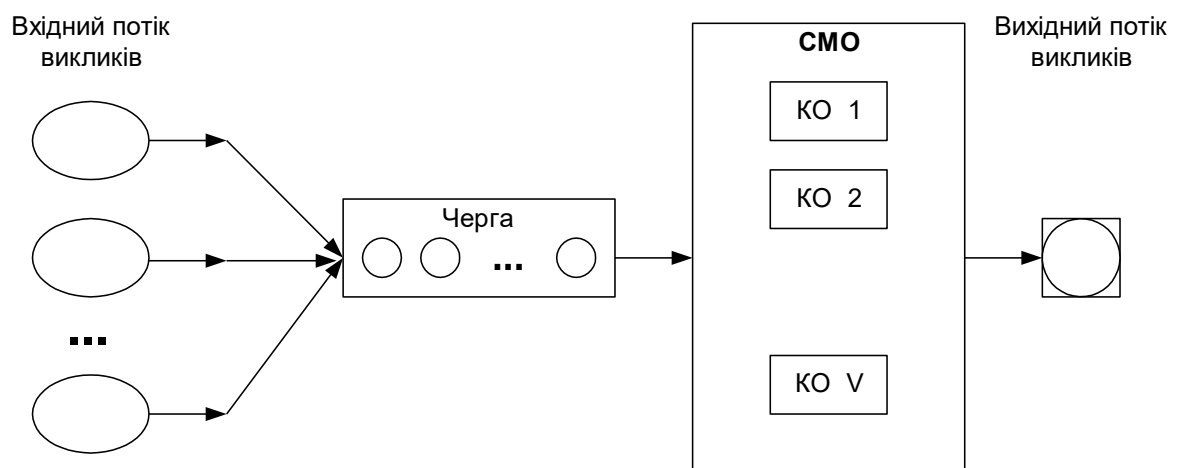


Рис. 2.2. Функціональна схема СМО (КО – канал обслуговування)

Приклади: обслуговування покупців в супермаркеті, заправка машин на АЗС, надання злітно-посадочної смуги літакам в аеропорту, контроль якості виробів на виході збирального конвеєру, ремонт та відновлення виробів та інші.

Зазвичай СМО також широко розповсюджені і в телекомунікаційних мережах: локальні (районні) та міжміські телефонні станції, комутатори та маршрутизатори обчислювальних мереж, взагалі, – будь-які комутаційні системи функціонують як СМО. Функціонування СМО в телефонних мережах має свої особливості, які і розглядає підрозділ теорії масового обслуговування – «*теорія телетрафіка*».

Теорія телетрафіка розглядає як основу всіх процесів в телекомунікаційних системах передачу та обробку *повідомлень (message)*, під якими будемо розуміти одновимірне представлення інформації з відокремленим початком і кінцем. Появу в системі повідомлення будемо ототожнювати з *вимогою (arrival)* на його передачу або обробку. Обробка або передача кожного повідомлення займає деякий кінцевий час – *час обслуговування (holding time)*.

Частину системи, що приймає участь в процесі передачі або обробки повідомлення так, що одночасно з ним ніяке інше повідомлення не може оброблятися цією частиною, назовемо *каналом обслуговування (server)*. Таким чином, *маючи рівно один КО*, система в кожний момент часу здатна обслуговувати не більше ніж одну вимогу. Якщо на таку систему, зайняту обслуговуванням, протягом інтервалу часу обслуговування надійде ще одна вимога, то вона не зможе отримати обслуговування. Це найпростіший випадок *ресурсного конфлікту* – вимоги, що надходять одна за одною, не можуть бути обслужені негайно при надходженні або, як кажуть, в реальному масштабі часу через те, що канал обслуговування не встигає обслужити вимоги за час між їх надходженнями. Конфлікт не виникне, якщо система буде мати не один, а декілька каналів обслуговування, ввімкнених так, щоб вхідні вимоги розподілялися б для обслуговування на будь-який вільний з них в даний момент.

Якщо час обробки не є нескінченно малим у порівнянні з інтервалом між надходженням вимог, то і в системі з декількома каналами може виникнути *ресурсний конфлікт* – вимога при надходженні не зможе отримати негайного обслуговування, оскільки усі канали можуть бути зайнятими на даний момент. В такому випадку система може просто проігнорувати вимогу (відмовити у обслуговуванні). Вона буде відкинута, а система, як кажуть, буде вважатися *заблокованою*. Імовірність такої події є важливою характеристикою системи. Її прийнято називати *імовірністю блокування (імовірністю відмови обслуговування) (blocking probability)*.

Для уникнення таких ситуацій, в системі може бути передбачений спеціальний буфер пам'яті, до якого будуть поміщатися вимоги, які не зможуть бути обслужені негайно при надходженні внаслідок зайнятості усіх каналів.

Таким чином в системі організовується *черга (queue) вимог* і така СМО розглядається як *система з чергами (queuing system)*. В черзі може опинитися не одна, а декілька вимог, якщо кількість вимог за певний інтервал часу перевищить кількість звільнившись за цей час каналів обслуговування. При виконанні певних умов черга не буде нескінченно зростати і усі вимоги рано чи пізно будуть обслужені, однак час їх перебування в черзі буде різним і може розглядатися як випадкова величина. Розподіл цієї випадкової величини також є суттєвою характеристикою системи обслуговування. Часто для оцінки якості використовують тільки її середнє значення – *середній час очікування обслуговування (average waiting time)*. Тому, недостатність ресурсів в обслуговуючій системі може призвести або до втрат вимог (заявок), або до затримки їх обслуговування.

2.1.2. Класифікація систем масового обслуговування

Оскільки модель системи масового обслуговування поєднує в собі сукупність багатьох елементів, класифікацію СМО можна здійснювати *за різними ознаками*.

Класифікація СМО

1. За кількістю вимог, що надходить за одиницю часу, на системи з *ординарним і неординарним потоками вимог*. Якщо імовірність надходження двох і більше вимог одночасно дорівнює нулю або має настільки мале значення, що ним можна знехтувати, то отримаємо систему з ординарним потоком вимог. Наприклад, потік вимог – літаки, що надходить на злітно-посадкову смугу аеродрому, можна вважати ординарним.

2. За зв'язком між вимогами – на системи *без післядії і з післядією*. Якщо ймовірність надходження вимог у систему в деякий момент часу не залежить від того, скільки вимог уже надійшло, тобто не пов'язана з передісторією досліджуваного процесу, то отримаємо систему без післядії, в іншому разі – із післядією. Прикладом системи з післядією може слугувати потік студентів, що здають залік викладачу.

3. За реакцією вимоги на зайнятість каналів – на системи з *відмовами й очікуваннями*. Якщо вимога, яка надійшла на обслуговування, застала всі канали зайнятими і змушена залишити систему, то отримаємо систему з відмовами.

4. Системи з очікуванням розподіляються на системи з *обмеженим* і *необмеженим очікуванням*. Якщо вимога залишає систему, коли черга набула певного розміру, то отримуємо систему з обмеженим очікуванням. Прикладом може слугувати самоскид з розчином. Якщо час очікування настільки великий, що розчин може затвердіти, то самоскид доречно розвантажити в іншому місці. Якщо вимога, яка надійшла, застала всі канали зайнятими і змушена очікувати своєї черги доти, доки вона не буде обслужена, то отримуємо систему з очікуванням без обмежень. Приклад: літак, що перебуває на аеродромі й очікує звільнення злітної смуги.

5. За способом вибору вимог на обслуговування розподіляються так:

- *із пріоритетом вимог;*
- *у процесі надходження вимог;*
- *із випадковим вибором вимог;*
- *остання вимога обслуговується першою.*

Якщо система масового обслуговування охоплює декілька категорій вимог і за якимись ознаками визначається порядок їх вибору на обслуговування, то отримуємо систему з *пріоритетом вимог*. Наприклад, під час надходження виробів на будівельний майданчик насамперед монтують ті, що обумовлені будівельною технологією.

Якщо канал, що звільнився, обслуговує вимогу, яка надійшла в систему раніше за інші, то отримуємо систему *обслуговування вимог у процесі їх надходження*. Наприклад, покупець, що підійшов першим до продавця, обслуговується першим.

Якщо вимоги з черги в канал обслуговування надходить випадково, то отримуємо систему з *випадковим вибором вимог на обслуговування*. Приклад: вибір слюсарем-сантехніком однієї з декількох заявок від мешканців, із часом надходження яких він не ознайомлений.

Якщо для обслуговування обирається *остання вимога*, що надійшла, то отримуємо систему з вибором «останній обслуговується першим». Наприклад, під час укладання будівельних виробів штабелями зручніше обирати зі штабеля (черги) виріб, покладений останнім.

6. За часом обслуговування вимоги – на системи з *детермінованим* і *випадковим часом обслуговування*. Якщо інтервал часу між моментом надходження вимоги в канал обслуговування і моментом виходу вимоги з каналу постійний, то отримуємо систему з детермінованим часом обслуговування, в іншому разі – із випадковим. Наприклад, миття автомобілів становить систему обслуговування з детермінованим часом обслуговування.

7. За кількістю каналів обслуговування – на *одноканальні й багатоканальні* системи. Наприклад, під час монтажу будинку може використовуватися один підймальний кран (один канал обслуговування) або декілька (багато каналів обслуговування).

8. За кількістю етапів обслуговування – на *однофазні й багатофазні* системи. Якщо канали обслуговування розташовуються послідовно й неоднорідні, то отримаємо багатофазну систему обслуговування. Прикладом такої системи може слугувати обслуговування автомобілів на СТО (миття, діагностика, заміна фільтрів тощо).

9. За однорідністю вимог – на системи з *однорідними й неоднорідними потоками вимог*. Наприклад, якщо під навантаження прибувають фургони однієї вантажопідйомності, то отримаємо систему з однорідним потоком вимог, якщо різної – із неоднорідним.

10. За завантаженістю каналів – на *впорядковані й невпорядковані* системи. У впорядкованих системах обслуговуючі канали завантажені нерівномірно. Вимога, що надійшла, обслуговується чіткого визначеним каналом із наявних вільних, а саме каналом з найменшим номером (вважається, що всі канали пронумеровані). У невпорядкованих системах усі канали однакові й вимога, що надійшла, обслуговується одним із вільних каналів без будь-яких переваг.

Характеристики СМО

В залежності від типу СМО можуть застосовуватись різні показники їх ефективності.

Для СМО з відмовами важливими характеристиками є:

- абсолютна пропускна спроможність – середнє число заявок, що може обслужити система за одиницю часу;
- відносна пропускна спроможність – відношення середньої долі заявок, що обслуговується системою за одиницю часу, до середнього числа заявок, що надійшли за цей час;
- середнє число зайнятих каналів;
- середній відносний час простою системи або окремого каналу;
- імовірність відмови в обслуговуванні заявки, тощо.

Для СМО з необмеженим очікуванням важливими показниками є:

- середнє число заявок у черзі;
- середнє число заявок в системі (в черзі та на обслуговуванні);
- середній час очікування в черзі;
- середній час перебування заявки в системі, тощо.

Для СМО з обмеженим очікуванням важливими є всі перелічені вище показники ефективності обслуговування.

Для аналізу СМО необхідно знати:

- число каналів v ;
- інтенсивність потоку заявок λ ;
- продуктивність кожного каналу (середнє число заявок μ , що можуть бути обслужені за одиницю часу);
- умови організації черги.

В подальшому всі характеристики ефективності будуть виражатись через вищезазначені показники.

Символіка Кендала–Башаріна

Для забезпечення універсального підходу в позначенні різних типів СМО та взаєморозуміння інженерів та науковців різних країн, які досліджують ці системи, була розроблена наступна класифікація СМО, відома під назвою «Символіка Кендала–Башаріна».

Символіка складається з шести позицій, що розділяються слешами:

1/2/3/4/5/6

Перша позиція – тип потоку, що надходить:

- M – найпростіший потік;
- M_t – пуассонівський потік із змінним параметром (залежить від часу);
- M_r – пуассонівський потік з умовним параметром;
- M_i – примітивний потік;
- D – детермінований (невипадковий) потік (Determinate);
- E^n – потік Ерланга n -ого порядку;
- Ge – довільний потік (General).

Друга позиція – закон розподілу часу обслуговування виклику:

- M – експоненціальний;
- D – детермінований;
- G – довільний.

Третя позиція – структура СМО:

- V – число каналів;
- G – неповнодоступні канали обслуговування (тобто існує алгоритм, що визначає, які канали доступні яким заявкам). Якщо не вказано, то усі канали обслуговування доступні усім викликам;

- LS – багатofазна система (Link System), якщо не вказано, то це – однофазна система, де заявка проходить тільки одну фазу обслуговування в деякому каналі.

Четверта позиція – дисципліна або спосіб обслуговування:

- LL – без втрат (Loss Less);
- L – з втратами (Loss);
- W – з очікуванням (чергою) (Wait);
- R – з повторенням (Repeat);
- WL – з умовними втратами (комбінований).

П'ята позиція – тип черги:

- I – індивідуальна, якщо не вказано – загальна черга до усіх каналів обслуговування;

- SP – рівно імовірна (Same Probability);
- FF – демократична (FIFO);
- LF – стекова (LIFO);
- PR – з пріоритетом (Priority):

1) PRR – відносний (Relative) – заявка чекає звільнення каналу,

2) PRA – абсолютний (Absolute) – заявка перериває обслуговування і займає канал.

Шоста позиція – спосіб заняття каналу:

- S – послідовне (Sequential);
- R – випадкове (Random).

Приклади:

1) M/M/10/L//R – означає 10-канальну систему з втратами, на вхід якої надходить найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом, канали займаються випадково.

2) M/G/5/W/FF/ – означає 5-канальну систему з очікуванням, на вхід якої надходить найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за довільним законом, черга демократична.

3) $M_i/M/20/LL//S$ – означає 20-канальну систему без втрат, на вхід якої надходить примітивний потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом, канали займаються послідовно.

4) M/M/5/R – означає 5-канальну систему з повторенням, яка обслуговує найпростіший потік викликів, час обслуговування розподілено за експоненціальним законом.

Питання для самоперевірки

1. Що таке теорія масового обслуговування? Хто є її основоположником?

2. Що називається системою масового обслуговування?
3. Назвіть приклади СМО.
4. Які основні елементи СМО?
5. Що таке джерело запитів?
6. Що таке вхідний потік?
7. Що таке канали обслуговування?
8. Що таке дисципліна обслуговування?
9. Які характеристики належать до якості обслуговування вхідного потоку заявок?
10. Що розв'язують задачі аналізу та синтезу?
11. Який математичний апарат СМО?
12. Що розглядає теорія телетрафіка?
13. Що є предметом вивчення СМО?
14. Назвіть класифікацію СМО за різними ознаками.
15. В залежності від типу СМО які можуть застосовуватись показники їх ефективності?
16. Яка універсальна класифікація СМО?
17. Опишіть кожну позицію універсальної класифікації СМО.

Задачі для самостійної роботи

1. Опишіть СМО за наведеною символікою:
 - 1) $M_t/M/5/LL//S$,
 - 2) $D/D/10/R/LF$,
 - 3) $M_i/G/15/L//S$,
 - 4) $E^n/D/2/PRR/S$.
2. Сформулюйте приклади СМО, де дисципліна обслуговування описується такими характеристиками:
 - із втратами, коли не обслужені виклики втрачаються,
 - з очікуванням,
 - з повторними викликами,
 - комбіновані.
3. Сформулюйте приклади СМО, де системи розподілу інформації можуть мати такі структури:
 - одноканальні або багатоканальні,
 - ординарні або неординарні,
 - однофазні або багатofазні.

2.2. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ ТА ОЧІКУВАННЯМИ

Система масового обслуговування є математичною моделлю процесу, що протікає в складних технічних та організаційних системах, які виконують функції по обслуговуванню заявок, що надходять до систем. Прикладами складних систем, що доцільно представляти у вигляді СМО, можуть бути: системи технічного захисту інформації, автозаправна станція, автоматична телефонна станція, перукарня, супермаркет, майстерня з ремонту електрообладнання, вестибюль метро, відділення банку, тощо.

Найбільш розповсюдженими видами систем масового обслуговування є СМО з відмовами та очікуванням [8].

2.2.1. Одноканальна СМО з відмовами

Розглянемо найпростішу задачу теорії масового обслуговування – *задачу про функціонування одноканальної СМО з відмовами*:

На вхід одноканальної системи масового обслуговування з відмовами подається найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . Потік обслуговування – також найпростіший з інтенсивністю μ . У початковий момент часу канал вільний. Необхідно знайти граничні ймовірності станів системи та показники її ефективності.

Така модель характеризується експоненціальним розподілом як для інтервалів часу між надходженнями вимог, так і часу обслуговування.

Нехай на одноканальну СМО поступає найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ . В загальному випадку вона залежить від часу $\lambda = \lambda(t)$. Тоді щільність для часу між надходженнями вимог визначається за формулою:

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.1)$$

Якщо заявка поступила в момент часу, коли канал зайнятий, то вона отримує відмову в обслуговуванні та покидає систему.

Будемо вважати, що обслуговування заявки продовжується в середньому t . Цей час розподілений за *показниковим законом* з параметром μ :

$$f_2(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (2.2)$$

Отже, потоки заявок та обслуговування – найпростіші.

Нехай система працює з відмовами. Необхідно знайти:

- абсолютну пропускну спроможність СМО (A);

- відносну пропускну спроможність СМО (Q).

Представимо, що система може знаходитись у двох станах:

- S_0 – канал вільний (очікування);
- S_1 – канал зайнятий (йде обслуговування заявки).

Граф станів та переходів системи представлено на рисунку 2.3.

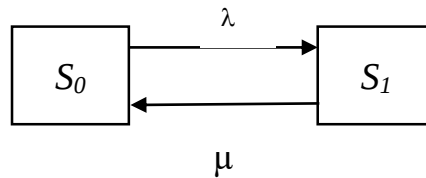


Рис. 2.3. Граф станів та переходів

Із стану S_0 в стан S_1 систему переводить потік заявок з інтенсивністю λ , а із S_1 в S_0 – потік обслуговування з інтенсивністю μ .

Ймовірності станів позначимо:

- $p_0(t)$ – ймовірність стану «канал вільний»,
- $p_1(t)$ – ймовірність стану «канал зайнятий»,

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \quad (2.3)$$

За графом складемо систему рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p'_0 = -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ p'_1 = -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Початкові умови: $p_0(0)=1$; $p_1(0)=0$.

Якщо виразити із першого рівняння (2.4) $p_1(t)$ та підставити до (2.3), то отримаємо:

$$p'_0(t) = -(\mu + \lambda) \cdot p_0(t) + \mu. \quad (2.5)$$

Рішенням цього рівняння для $\lambda = \text{const}$:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (2.6)$$

З умови нормування слідує, що

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (2.7)$$

Граничні ймовірності (при $t \rightarrow \infty$):

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (2.8)$$

де p_0 – це ймовірність обслуговування вимоги, оскільки канал є вільним, p_1 – це ймовірність відмови, оскільки канал зайнятий обслуговуванням попередньої вимоги.

Графіки $p_0(t)$ та $p_1(t)$ представлені на рисунку 2.4.

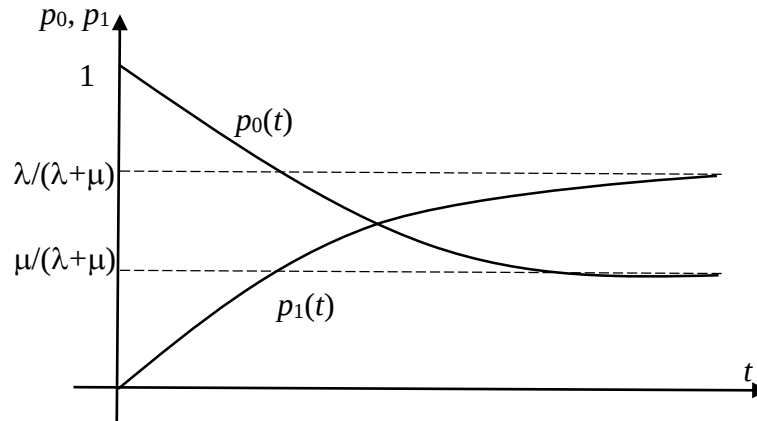


Рис. 2.4. Графіки $p_0(t)$ та $p_1(t)$

Для одноканальної СМО з відмовами ймовірність p_0 дорівнює **відносній пропускній здатності системи Q** . Це пояснюється тим, що ймовірність p_0 — це ймовірність того, що заявка, що надійшла до системи, буде обслужена. Або з іншої сторони, p_0 — це відношення числа заявок, що надійшли, до числа заявок, що були обслужені, тобто Q :

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (2.9)$$

Абсолютна пропускна здатність A — це середня кількість заявок, які може обслужити СМО в одиницю часу:

$$A = \lambda \cdot Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \quad (2.10)$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки буде дорівнювати ймовірності стану «канал зайнятий»:

$$P_{\text{ВІДМ}} = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (2.11)$$

Середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень та **середній час обслуговування каналом одного замовлення** визначаються за відповідними формулами:

$$t_\lambda = \frac{1}{\lambda}, \quad t_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.12)$$

Оскільки інтенсивність потоку замовлень λ визначають через середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень t_λ , а інтенсивність потоку обслуговувань μ через середній час обслуговування каналом одного замовлення $t_{\text{обс}}$, отримаємо:

$$p_0 = \frac{t_\lambda}{t_\lambda + t_{обс}}, \quad p_1 = \frac{t_{обс}}{t_\lambda + t_{обс}}.$$

Таким чином, граничні ймовірності p_0 і p_1 визначають середній відносний час перебування системи S у стані S_0 (канал вільний) і стані S_1 (канал зайнятий), тобто визначають *відносну пропускну здатність системи* та *ймовірність відмови*.

Отже, на основі рішення системи рівнянь Колмогорова знайдені всі показники одноканальної СМО з відмовами.

2.2.2. Багатоканальна СМО з відмовами

Розглянемо n -канальну СМО з відмовами. Будемо нумерувати стани системи по числу зайнятих каналів. Стани системи:

- S_0 – всі канали вільні,
- S_1 – зайнятий рівно один канал, інші вільні,
-
- S_k – зайняті рівно k каналів, інші вільні,
-
- S_n – зайняті всі n каналів.

Граф станів СМО представлений на рисунку 2.5. Розмітимо граф, тобто проставимо біля стрілок інтенсивності відповідних потоків подій.

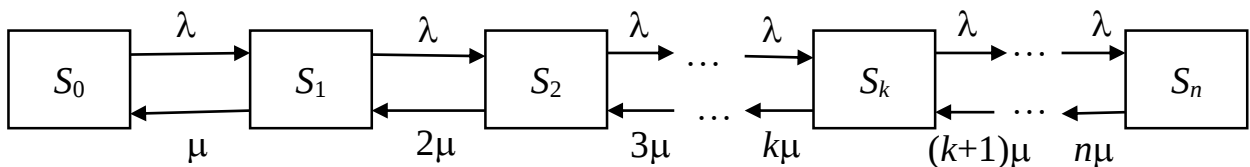


Рис. 2.5. Граф станів та переходів СМО

Стрілки зліва направо систему переводять один і той же потік – потік заявок з інтенсивністю λ . Якщо система знаходиться в стані S_k (зайнято k каналів) і прийшла нова заявка, система переходить в стан S_{k+1} .

Визначимо інтенсивності потоків подій, які переводять систему **по стрілкам справа наліво**. Нехай система знаходиться в стані S_1 (зайнятий один канал). Тоді, як тільки закінчиться обслуговування заявки, яка займає цей канал, система перейде в S_0 – потік подій, який переводить систему по стрілці $S_1 \rightarrow S_0$, має інтенсивність μ . Очевидно, якщо обслуговуванням зайнято два канали, а не один, потік обслуговувань, який переводить систему по стрілці $S_2 \rightarrow S_1$, буде вдвічі інтенсивнішим (2μ); якщо зайнято k каналів – в k разів інтенсивнішим ($k\mu$). З

Користуючись загальними правилами, можна скласти *рівняння Колмогорова* для ймовірностей станів:

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_0 = \mu p_1 - \lambda p_0, \\ p'_1 = 2\mu p_2 + \lambda p_0 - (\mu + \lambda) p_1, \\ \\ p'_k = (k+1)\mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} - (k\mu + \lambda) p_k, \\ \\ p'_n = \lambda p_{n-1} - n\mu p_n. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Природними початковими умовами для рішення (2.13) є:

$$p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=\dots=p_n(0)=0.$$

Інтегрування системи рівнянь (2.13) в аналітичному вигляді доволі складне; на практиці такі системи диференційних рівнянь зазвичай вирішуються за допомогою чисельних методів. Отримане рішення дає нам всі імовірності станів як функції часу:

$$p_0(t), p_1(t), \dots, p_k(t), \dots, p_n(t).$$

При розв'язуванні практичних задач нас більше за все будуть цікавити граничні імовірності $p_0(t), p_1(t), \dots, p_k(t), \dots, p_n(t)$, що характеризують усталений режим роботи СМО при $t \rightarrow \infty$. Для знаходження граничних ймовірностей скористаємось вже готовим рішенням задачі, отриманим для схеми загибелі та розмноження (1.26) в розділі 1. Згідно цього рішення

$$\left\{ \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}, \\ p_k &= \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \cdot \dots \cdot k\mu} p_0 = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0, \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

У цих формулах інтенсивність потоку заявок λ та інтенсивність потоку обслуговувань (для одного каналу) μ не фігурують окремо, а входять тільки своїм відношенням λ/μ . Позначимо це відношення $\lambda/\mu = \rho$ і будемо називати цю величину *приведеною інтенсивністю потоку заявок*. Фізичний зміст її такий:

величина ρ являє собою середню кількість заявок, які приходять в СМО за середній час обслуговування однієї заявки.

З урахуванням цього позначення, формули (2.14) приймуть вигляд:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}, \\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (2.15)$$

Формули (2.15) називаються **формулами Ерланга**. Вони виражають граничні імовірності всіх станів системи в залежності від параметрів λ , μ та n (λ – інтенсивність потоку заявок, μ – інтенсивність потоку обслуговувань, n – кількість каналів СМО).

Знаючи всі імовірності станів $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$, можна знайти **характеристики ефективності СМО**:

- *відносну пропускну здатність* Q – відношення середньої долі заявок, що обслуговується системою за одиницю часу, до середнього числа заявок, що надійшли за цей час;

- *абсолютну пропускну здатність* A – середнє число заявок, що може обслужити система за одиницю часу;

- *ймовірність відмови* $P_{ВІДМ}$ – ймовірність того, що заявка надійде до системи та не буде обслуженою в наслідок зайнятості всіх каналів.

Дійсно, **заявка отримує відмову**, якщо проходить в момент, коли всі n каналів зайняті, і дорівнює

$$P_{ВІДМ} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (2.16)$$

Відносна пропускну здатність Q , тобто ймовірність того, що заявка буде прийнята на обслуговування, доповнює $P_{ВІДМ}$ до одиниці:

$$Q = 1 - p_n. \quad (2.17)$$

Абсолютна пропускну здатність A системи:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - p_n). \quad (2.18)$$

Однією із важливих характеристик СМО з відмовами є **середня кількість зайнятих каналів** $\bar{k}$ (в даному випадку вона співпадає із середньою кількістю заявок, які знаходяться в системі). Величину $\bar{k}$ можна обчислити безпосередньо через ймовірності $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$ за формулою:

$$\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \dots + n \cdot p_n. \quad (2.19)$$

як математичне сподівання дискретної випадкової величини, приймаючої значення $0, 1, \dots, n$ з імовірностями $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$. Однак значно простіше виразити середню кількість зайнятих каналів через абсолютну пропускну здатність A , яку ми обчислили. Дійсно, A являється *середньою кількістю заявок, які обслуговуються за одиницю часу*. Один зайнятий канал обслуговує в середньому за одиницю часу μ заявок. Тоді середня кількість зайнятих каналів буде визначатись діленням A на μ :

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu}, \quad (2.20)$$

або, переходячи до позначення $\lambda/\mu = \rho$,

$$\bar{k} = \rho(1 - p_n). \quad (2.21)$$

Приклад 2.1. Трьохканальна СМО з відмовами представляє собою телефонну лінію. Виклики поступають з інтенсивністю $\lambda=0,8$ (викликів за хвилину). Середня тривалість розмови дорівнює 1,5 хвилини ($\mu = 0,667$). Вважається, що телефонна лінія складається з 3 ліній зв'язку. Знайти ймовірності станів, абсолютну та відносну пропускну здатності, ймовірність відмови та середню кількість зайнятих каналів.

Розв'язання. Наведена інтенсивність потоку заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{0,667} = 1,2.$$

За формулами Ерланга (2.15) отримуємо:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 1,2 + 0,72 + 0,288} = 0,312,$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1,2 p_0 = 1,2 \cdot 0,312 = 0,374,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0,72 p_0 = 0,72 \cdot 0,312 = 0,224,$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0,288 p_0 = 0,288 \cdot 0,312 = 0,090.$$

Обчислюємо ймовірність відмови:

$$P_{\text{ВІДМ}} = p_3 = 0,09.$$

Відносна та абсолютна пропускі здатності:

$$Q = 1 - p_3 = 0,910,$$

$$A = Q \cdot \lambda = 0,910 \cdot 0,8 = 0,728.$$

Середня кількість зайнятих каналів:

$$\bar{k} = \rho(1 - p_3) = 1,2 \cdot 0,91 = 1,09.$$

Отже, при усталеному режимі роботи СМО в середньому буде зайнято один канал з трьох – решта два будуть простоювати. За рахунок цього досягається достатньо високий рівень ефективності обслуговування – 91 % всіх викликів, які надійшли, буде обслужено.

2.2.3. Одноканальна СМО з очікуваннями з обмеженою чергою

Розглянемо для початку найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – *одноканальну систему* ($n=1$), на яку поступає потік заявок з інтенсивністю λ , інтенсивність обслуговування μ , тобто в середньому безперервно зайнятий канал буде видавати μ обслужених заявок за одиницю часу. Заявка, яка поступила в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу та очікує обслуговування (рис. 2.6).

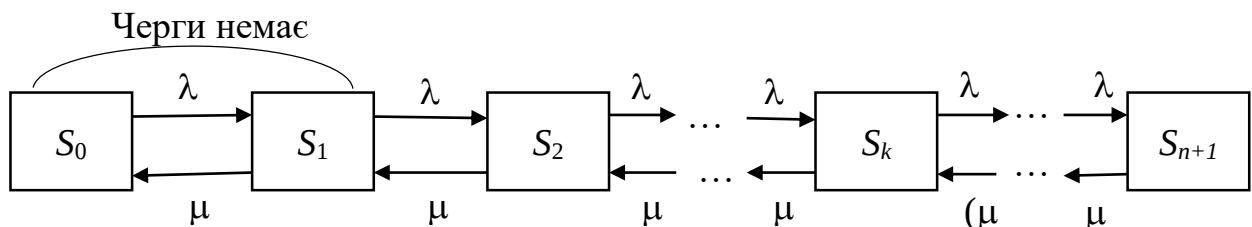


Рис. 2.6. Граф станів та переходів СМО

Припустимо спочатку, що *кількість місць в черзі обмежена кількістю n* , тобто якщо заявка прийшла в момент, коли в черзі вже стоять n заявок, вона залишає систему не обслуженою. В подальшому, спрямувавши n до нескінченності, ми отримаємо характеристики *одноканальної СМО без обмежень по довжині черги*.

Будемо нумерувати стани СМО по числу заявок, які знаходяться в системі (яких, що обслуговуються, так і тих, що очікують обслуговування):

- S_0 – канал вільний, черги немає,
- S_1 – канал зайнятий, черги немає,
- S_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть в черзі,
-
- S_k – канал зайнятий, $k-1$ заявок стоять в черзі,
-
- S_{n+1} – канал зайнятий, n заявок стоять в черзі.

Граф станів СМО показаний на рисунку 2.6. *Інтенсивності потоків подій*, які переводять в систему по стрілкам зліва направо, всі дорівнюють λ , справа наліво – μ . Дійсно, по стрілкам зліва направо систему переводить потік заявок (як тільки прийде заявка, система переходить в наступний стан), справа ж наліво – потік

«звільненень» зайнятого каналу, який має інтенсивність μ (як тільки буде оброблена чергова заявка, канал або звільниться, або зменшиться кількість заявок в черзі).

Зображений на рисунку 2.6 граф являє собою схему «загибелі та розмноження». Користуючись загальним розв'язанням, наданим для схеми загибелі та розмноження, напишемо вираз граничних імовірностей станів:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{1 + (\lambda/\mu) + (\lambda/\mu)^2 + \dots + (\lambda/\mu)^{n+1}}, \\ p_k = (\lambda/\mu)^k p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1). \end{cases} \quad (2.22)$$

Вводячи позначення $\lambda/\mu = \rho$, перепишемо формули (2.22) у вигляді:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n+1}}, \\ p_k = \rho^k p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1). \end{cases} \quad (2.23)$$

Відмітимо, що у знаменнику першої формули системи (2.23) стоїть геометрична прогресія з першим членом 1 та знаменником ρ . Підсумовуючи цю прогресію, знаходимо:

$$p_0 = \frac{1}{(1 - \rho^{n+2}) / (1 - \rho)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}}. \quad (2.24)$$

Таким чином, формули (2.23) остаточно приймуть вигляд:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}}, \\ p_k = \rho^k p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1). \end{cases} \quad (2.25)$$

Звернемо увагу на те, що формула (2.24) має місце тільки при $\rho \neq 1$ (при $\rho = 1$ вона дає невизначеність виду $0/0$), але суму геометричної прогресії зі знаменником $\rho = 1$ знайти ще простіше ніж за формулою (2.24): вона дорівнює $n + 2$, і в цьому випадку $p_0 = 1/(n + 2)$. Відмітимо, що той самий результат ми могли б отримати більш складним методом, розкриваючи невизначеність за правилом Лопітала.

Основні характеристики СМО:

- ймовірність відмови $P_{\text{ВІДМ}}$,
- відносна пропускна здатність Q ,
- абсолютна пропускна здатність A ,
- середня довжину черги $\bar{r}$,
- середня кількість заявок, пов'язаних з системою $\bar{k}$.

Очевидно, *заявка отримує відмову* тільки в тому випадку, коли канал зайнятий і всі n місць в черзі також:

$$P_{ВІДМ} = p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}. \quad (2.26)$$

Відносна пропускна здатність Q :

$$Q = 1 - P_{ВІДМ} = 1 - \frac{\rho^{n+1}(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}}. \quad (2.27)$$

Абсолютна пропускна здатність A :

$$A = Q \cdot \lambda = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+1}(1-\rho)}{1-\rho^{n+2}} \right). \quad (2.28)$$

Знайдемо *середню кількість $\bar{r}$ заявок, які знаходяться в черзі*. Визначимо цю величину як математичне сподівання дискретної випадкової величини R – числа заявок, які знаходяться в черзі:

$$\bar{r} = M[R].$$

З ймовірністю p_2 в черзі стоїть одна заявка, з ймовірністю p_3 дві заявки, взагалі з ймовірністю p_k в черзі стоїть $k-1$ заявка, нарешті, з ймовірністю p_{n+1} в черзі стоїть n заявок. Середня кількість заявок в черзі отримаємо, помноживши кількість заявок в черзі на відповідну ймовірність і склавши результати:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + (k-1) \cdot p_k + \dots + n \cdot p_{n+1} = \\ &= 1 \cdot \rho^2 p_0 + 2 \cdot \rho^3 p_0 + \dots + (k-1) \cdot \rho^k p_0 + \dots + n \cdot \rho^{n+1} p_0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Винесемо в цьому виразі $\rho^2 p_0$ за дужки:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \cdot [1 + 2 \cdot \rho + \dots + (k-1) \cdot \rho^{k-2} + \dots + n \cdot \rho^{n-1}]. \quad (2.30)$$

Виведемо формулу для суми, яка стоїть в дужках (цією формулою ми будемо часто користуватись в подальшому). Очевидно, розглянута сума є не що інше, як похідна по ρ суми

$$\Sigma = \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n.$$

А для цього виразу ми можемо скористатися формулою суми геометричної прогресії:

$$\Sigma = \frac{\rho - \rho^{n+1}}{1 - \rho}. \quad (2.31)$$

Продиференціюємо (2.31) по ρ :

$$\begin{aligned}
\Sigma'_p &= \frac{[1 - (n+1)\rho^n](1-\rho) + (\rho - \rho^{n+1})}{(1-\rho)^2} = \\
&= \frac{1 - (n+1)\rho^n - \rho + (n+1)\rho^{n+1} + \rho - \rho^{n+1}}{(1-\rho)^2} = \\
&= \frac{1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{(1-\rho)^2} = \frac{1 - \rho^n(n+1-n\rho)}{(1-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Отже, вираз для суми, яка стоїть в дужках в правій частині (2.30), знайдено:

$$1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots + n\rho^{n-1} = \frac{1 - \rho^n(n+1-n\rho)}{(1-\rho)^2}. \quad (2.32)$$

Підставляючи його в (2.30), отримаємо:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \cdot \frac{1 - \rho^n(n+1-n\rho)}{(1-\rho)^2}. \quad (2.33)$$

Враховуючи вираз для p_0 з (2.25), маємо:

$$\bar{r} = \rho^2 \cdot \frac{(1-\rho)[1 - \rho^n(n+1-n\rho)]}{(1-\rho^{n+2})(1-\rho)^2}. \quad (2.34)$$

або, остаточно,

$$\bar{r} = \frac{[1 - \rho^n(n+1-n\rho)]\rho^2}{(1-\rho^{n+2})(1-\rho)}. \quad (2.35)$$

Таким чином ми вивели вираз для середнього числа заявок, які очікують обслуговування в черзі.

Виведемо тепер формулу для **середнього числа $\bar{k}$ заявок**, що перебувають в системі (як тих, що стоять в черзі, так і тих, що знаходяться на обслуговуванні). Будемо розв'язувати задачу наступним чином: розглянемо загальну кількість заявок K , що перебувають в системі, як суму двох випадкових величин: числа заявок, які стоять в черзі, і числа заявок, які знаходяться на обслуговуванні:

$$K = R + \Omega,$$

де R – кількість заявок в черзі, Ω – кількість заявок на обслуговуванні.

За теоремою додавання математичних сподівань:

$$\bar{k} = M[K] = M[R] + M[\Omega] = \bar{r} + \bar{\omega},$$

де $\bar{r}$ – середня кількість заявок в черзі, $\bar{\omega}$ – середня кількість заявок під обслуговуванням.

Величину $\bar{r}$ ми вже знайшли (2.35). Знайдемо величину $\bar{\omega}$. Так як канал в системі один, то випадкова величина Ω може приймати тільки значення: 0 або 1. Значення 0 вона приймає, якщо канал вільний. Імовірність цього дорівнює

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Значення 1 вона приймає, якщо канал зайнятий. Імовірність цього дорівнює

$$1 - p_0 = \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}}.$$

Звідси знаходимо математичне сподівання числа заявок, які знаходяться на обслуговуванні:

$$\bar{\omega} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}}$$

Таким чином, середня кількість заявок, що перебувають в СМО, буде

$$\bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}} \quad (2.36)$$

де величина $\bar{r}$ визначається за формулою (2.35).

Виведемо вираз ще для однієї важливої характеристики СМО з очікуванням: **середнього часу очікування заявки в черзі**. Позначимо його $t_{оч}$. Нехай заявка приходить в систему в якийсь момент часу. З імовірністю p_1 вона прийде в систему під час обслуговування деякої заявки, але перед нею не буде черги, і заявка буде чекати початку свого обслуговування протягом часу $1/\mu$ (середній час обслуговування однієї заявки). З імовірністю p_2 в черзі перед заявкою, що розглядається, буде стояти ще одна, і час очікування в середньому буде дорівнювати $2/\mu$, і т.д. Взагалі, з імовірністю p_k заявка, що надійшла, застане в системі k заявок і буде чекати в середньому k/μ одиниць часу. Тут k може бути будь-яким цілим числом до n . Що стосується $k = n + 1$, тобто випадку, коли заявка, що надійшла, застає канал обслуговування зайнятим і ще n заявок в черзі (імовірність цього p_{n+1}), то час очікування в цьому випадку також дорівнює нулю, тому що заявка не стає в чергу (і не обслуговується). Тому середній час очікування буде:

$$t_{оч} = p_1 \frac{1}{\mu} + p_2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_k \frac{k}{\mu} + \dots + p_n \frac{n}{\mu}.$$

Підставляючи сюди вирази для $p_1, \dots, p_n$, отримуємо:

$$t_{oc} = p_0 \rho \frac{1}{\mu} + p_0 \rho^2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_0 \rho^k \frac{k}{\mu} + \dots + p_0 \rho^n \frac{n}{\mu} =$$

$$= \frac{p_0 \rho}{\mu} (1 + 2\rho + \dots + k\rho^{k-1} + \dots + n\rho^{n-1}).$$

Перетворимо суму в дужках, користуючись формулою (2.32):

$$t_{oc} = \frac{p_0 \rho}{\mu} \cdot \frac{1 - \rho^n (n+1 - n\rho)}{(1 - \rho)^2},$$

або, виразивши p_0 через ρ :

$$t_{oc} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{n+2}} \cdot \frac{1 - \rho^n (n+1 - n\rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho [1 - \rho^n (n+1 - n\rho)]}{\mu(1 - \rho^{n+2})(1 - \rho)}. \quad (2.37)$$

Порівнюючи цей вираз із формулою (2.35), помічаємо, що

$$t_{oc} = \frac{1}{\rho\mu} \bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \quad (2.38)$$

Отже, *середній час очікування дорівнює середньому числу заявок в черзі, поділеному на інтенсивність потоку заявок.*

Виведемо ще формулу для *середнього часу $t_{cист}$ перебування заявки в системі.* Позначимо $T_{cист}$ випадкову величину – час перебування заявки в СМО. Ця випадкова величина складається з двох доданків (також випадкових):

$$T_{cист} = T_{oc} + \Theta,$$

де T_{oc} – час очікування заявки в черзі, Θ – випадкова величина, яка дорівнює часу обслуговування $T_{об}$, якщо заявка обслуговується, і нулю, якщо вона не обслуговується (отримує відмову).

За теоремою додавання математичних сподівань:

$$t_{cист} = M[T_{cист}] = M[T_{oc}] + M[\Theta],$$

але, в наших позначеннях, $M[T_{oc}] = t_{oc}$, а $M[\Theta] = Q \cdot t_{об} = \frac{Q}{\mu}$. Звідси знаходимо:

$$t_{cист} = t_{oc} + \frac{Q}{\mu}, \text{ або, з урахуванням формули (2.38),}$$

$$t_{cист} = \left(\frac{\bar{r}}{\lambda} \right) + \frac{Q}{\mu}. \quad (2.39)$$

Приклад 2.2. Автозаправна станція (АЗС) являє собою СМО з одним каналом обслуговування (однією колонкою). Майданчик при станції допускає перебування в черзі на заправку не більше трьох автомобілів одночасно ($m = 3$). Якщо в черзі

вже знаходяться три автомобіля, черговий автомобіль, який прибув до станції, в чергу не стає, а проїжджає повз неї. Потік автомобілів, які прибувають для заправки, має інтенсивність $\lambda=1$ (автомобілів за хвилину). Процес заправки продовжується в середньому 1,25 хв. Визначити:

- імовірність відмови;
- відносну та абсолютну пропускну здатність СМО;
- середню кількість автомобілів, які чекають заправки;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться на АЗС (включно із тими, що обслуговуються);
- середній час очікування автомобіля в черзі;
- середній час перебування автомобіля на АЗС (включно із обслуговуванням).

Розв'язання. Знаходимо приведену інтенсивність потоку заявок:

$$\mu = \frac{1}{1,25} = 0,8, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0,8} = 1,25.$$

За формулами:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1-1,25}{1-3,05} = 0,122, & p_1 &= 1,25 \cdot 0,122 = 0,152, \\ p_2 &= 1,25^2 \cdot 0,122 = 0,191, & p_3 &= 1,25^3 \cdot 0,122 = 0,238, \\ p_4 &= 1,25^4 \cdot 0,122 = 0,297. \end{aligned}$$

Імовірність відмови:

$$P_{\text{відм}} = p_4 = 0,297.$$

Відносна пропускна здатність СМО:

$$Q = 1 - P_{\text{відм}} = 0,703.$$

Абсолютна пропускна здатність СМО:

$$A = Q \cdot \lambda = 0,703.$$

Середня кількість автомобілів в черзі знаходимо за формулою (2.35):

$$\bar{r} = \frac{1,25^2 \left[1 - 1,25^3 (3 + 1 - 3,75) \right]}{(1 - 1,25^5)(1 - 1,25)} = 1,56.$$

Тобто середня кількість автомобілів, які очікують в черзі на заправку, дорівнює 1,56.

Додаючи до цієї величини середню кількість автомобілів, які знаходяться під обслуговуванням:

$$\bar{\omega} = \frac{1,25 - 1,25^5}{1 - 1,25^5} = 0,88,$$

та отримуємо середню кількість автомобілів, що перебувають в АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\omega} = 2,44.$$

Середній час очікування автомобіля в черзі, за формулою (2.38) дорівнює

$$t_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1,56 \text{ (хв)}.$$

Додаючи до цієї величини $M[\Theta] = \frac{Q}{\mu} = \frac{0,703}{0,8} = 0,88$, отримаємо середній час, який автомобіль проводить на АЗС:

$$t_{сум} = 1,56 + 0,88 = 2,44 \text{ (хв)}.$$

2.2.4. Одноканальна СМО з очікуваннями з необмеженою чергою

До цих пір ми розглядали роботу одноканальної СМО з очікуванням при обмеженому числі n місць в черзі. Тепер відкидаємо це обмеження, тобто спрямуємо n до нескінченності. При цьому кількість можливих станів системи стане нескінченним, і граф станів набуде вигляду, який показаний на рисунку 2.7.

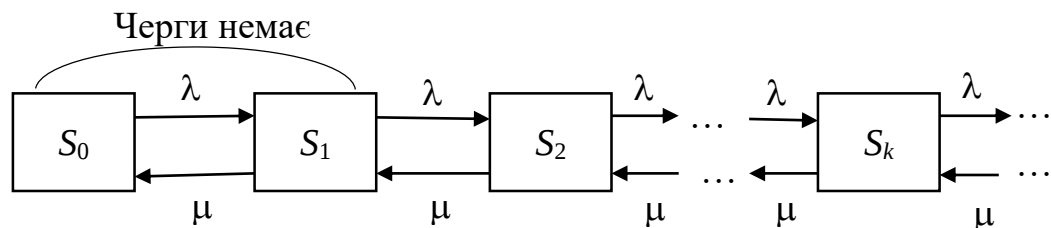


Рис. 2.7. Граф станів та переходів СМО

Спробуємо отримати імовірності станів СМО з необмеженою чергою шляхом граничного переходу (при $n \rightarrow \infty$) з формул (2.25):

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}, \\ p_k = \rho^k p_0, \quad (k=1, 2, \dots, n+1). \end{cases}$$

Відмітимо, що при цьому знаменник в першій формулі (2.23) являє собою суму нескінченного числа членів *геометричної прогресії*:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^{n+1}}, \\ p_k = \rho^k p_0, \quad (k=1, 2, \dots, n+1). \end{cases}$$

Ця сума збігається тільки, коли *прогресія нескінченно спадна*, тобто при $\rho < 1$. Якщо $\rho < 1$, то для СМО з очікуванням існує **граничний встановлений режим**, а при $\rho \geq 1$ такого режиму не існує, і черга при $t \rightarrow \infty$ зростає до нескінченності.

Припустимо, що $\rho < 1$, тобто що граничний режим існує. Спрямуємо в формулах (2.25) $n \rightarrow \infty$ і виведемо формули для граничних імовірностей станів в СМО без обмежень по довжині черги. Отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 1 - \rho, \\ p_1 = \rho(1 - \rho), \\ p_2 = \rho^2(1 - \rho), \\ \dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k(1 - \rho), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (2.40)$$

При відсутності обмежень по довжині черги кожна заявка, яка надійшла в систему, буде обслужена, тому **відносна та абсолютна пропускні здатності** дорівнюють

$$\begin{aligned} Q &= 1, \\ A &= \lambda Q = \lambda. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Середню кількість заявок в черзі отримаємо з (2.35) при $n \rightarrow \infty$:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (2.42)$$

Середня кількість заявок в системі за формулою (2.36) при $n \rightarrow \infty$ буде дорівнювати

$$\bar{k} = \bar{r} + \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (2.43)$$

Середній час очікування $t_{оч}$ отримаємо з формули (2.38) при $n \rightarrow \infty$:

$$t_{оч} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (2.44)$$

або, в іншій формі:

$$t_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (2.45)$$

Середній час перебування заявки в СМО дорівнює середньому часу очікування $t_{обс} = \frac{1}{\mu}$:

$$t_{сист} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}. \quad (2.46)$$

Приклад 2.3. На залізничну сортувальну гірку прибувають потяги з інтенсивністю $\lambda = 2$ (потяги за годину). Середній час, протягом якого гірка обробляє потяг, дорівнює 0,4 години. Потяги, які прибули в момент, коли гірка зайнята, стають в чергу і очікують в парку прибуття, де наявні три запасні колії, на кожній з яких може чекати один потяг. Потяг, який прибув в момент, коли всі три запасні колії в парку прибуття зайняті, стає в чергу на зовнішню колію. Всі потоки подій – найпростіші. Знайти:

- середню кількість потягів, які чекають в черзі (як в парку прибуття, так і поза ним);
- середній час очікування потягу в парку прибуття і на зовнішніх коліях;
- середній час перебування потягу на сортувальній станції (включно з очікуванням та обслуговуванням);
- ймовірність того, що потяг, який прибув, займе місце на зовнішніх коліях.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$\lambda = 2, \mu = \frac{1}{0,4} = 0,25, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{0,25} = 0,8 < 1$$

і СМО в середньому «справляється» з потоком заявок, який на неї поступає.

Середня кількість потягів, які чекають черги (як в парку прибуття, так і поза ним), знайдемо за формулою (2.42):

$$\bar{r} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2.$$

Середня кількість потягів, які чекають черги на зовнішніх коліях, підраховуємо так: з імовірністю p_5 поза парком прибуття буде очікувати один потяг, з імовірністю p_6 – два потяга і т.д., з імовірністю p_k ($k > 5$) – $(k - 4)$ потяга.

Середня кількість потягів, які очікують поза парком, буде:

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= 1p_5 + 2p_6 + \dots + (k-4)p_k + \dots = 1(1-\rho)\rho^5 + 2(1-\rho)\rho^6 + \dots + \\ &+ \dots + (k-4)(1-\rho)\rho^k + \dots = (1-\rho)\rho^5 [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots] \end{aligned}$$

Формулу для нескінченної суми в дужках отримуємо граничним переходом (при $n \rightarrow \infty$) з формули (2.32):

$$1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots = \frac{1}{(1-\rho)^2}. \quad (2.47)$$

Звідси

$$\bar{r}' = (1 - \rho) \rho^3 \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^3}{(1 - \rho)^2}. \quad (2.48)$$

Підставляючи сюди $\rho = 0,8$, отримаємо:

$$\bar{r}' = 1,64.$$

Імовірність того, що прибуваючий потяг займе місце на зовнішніх коліях, визначається ще простіше: вона дорівнює імовірності того, що довжина черги не менше трьох, тобто

$$\begin{aligned} p_4 + p_5 + p_6 + \dots &= (1 - \rho) \rho^4 + (1 - \rho) \rho^5 + (1 - \rho) \rho^6 + \dots = \\ &= (1 - \rho) \rho^4 (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \rho^4 = 0,8^4 = 0,41. \end{aligned}$$

Середній час очікування в парку прибуття визначаємо, розглядаючи різноманітні гіпотези про кількість потягів, які знаходяться в системі:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} p_1 + \frac{2}{\mu} p_2 + \frac{3}{\mu} [p_3 + p_4 + p_5 + \dots] &= \\ = \frac{1}{\mu} [1 - \rho(1 - \rho) + 2\rho^2(1 - \rho) + 3(\rho^3(1 - \rho) + \rho^4(1 - \rho) + \dots)] &= \\ = \frac{1}{\mu} [\rho(1 - \rho) + 2\rho^2(1 - \rho) + 3\rho^3] &= \\ = \frac{1}{\mu} [\rho - \rho^2 + 2\rho^3 - 2\rho^3 + 3\rho^3] = \frac{1}{\mu} [\rho + \rho^2 + \rho^3] = \frac{1}{\mu} \frac{\rho - \rho^4}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Для $\rho = 0,8$, $\mu = 2,5$ отримуємо, що середній час очікування в парку прибутті дорівнює

$$0,4 \cdot \frac{0,8 - 0,41}{0,2} = 0,78 \text{ год} = 47 \text{ хв.}$$

Що стосується середнього часу очікування на зовнішніх коліях, то воно дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} p + \frac{2}{\mu} p_5 + \frac{2}{\mu} p_6 + \dots &= \frac{1}{\mu} (1 - \rho) \rho^4 + \frac{2}{\mu} (1 - \rho) \rho^5 + \frac{3}{\mu} (1 - \rho) \rho^6 + \dots = \\ = \frac{(1 - \rho) \rho^4}{\mu} [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots] &= \frac{(1 - \rho) \rho^4}{\mu} \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho^4}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Для наших чисельних даних:

$$0,4 \cdot \frac{0,41}{0,2} = 0,82 \text{ год} = 49 \text{ хв.}$$

Середній час перебування потягу на сортувальній станції (рахуючи очікування і обслуговування) буде дорівнювати:

$$t_{\text{сист}} = 0,82 + 0,78 + 0,4 = 2 \text{ год}.$$

2.2.5. Багатоканальна СМО з очікуваннями з обмеженою чергою

Розглянемо *n*-канальну СМО з очікуванням, на яку поступає потік заявок з інтенсивністю λ ; інтенсивність обслуговування (для одного каналу) μ ; кількість місць в черзі m . Будемо нумерувати стани системи по кількості заявок, пов'язаних із системою. Стани системи:

- S_0 – всі канали вільні,
- S_1 – зайнятий рівно один канал, інші вільні,
-
- S_k – зайняті рівно k каналів, інші вільні,
-
- S_n – зайняті всі n каналів,
- S_{n+1} – зайняті всі n каналів, одна заявка стоїть в черзі,
-
- S_{n+r} – зайняті всі n каналів, r заявок стоять в черзі,
-
- S_{n+m} – зайняті всі n каналів, m заявок стоять в черзі.

черги немає

Граф станів наведено на рисунку 2.8. У кожній стрілці проставлені відповідні інтенсивності потоків подій. Дійсно, **по стрілкам зліва направо** систему переводить завжди один і той же потік заявок з інтенсивністю λ ; **по стрілкам справа наліво** систему переводить потік обслуговувань, інтенсивність якого дорівнює μ , помножене на кількість зайнятих каналів.

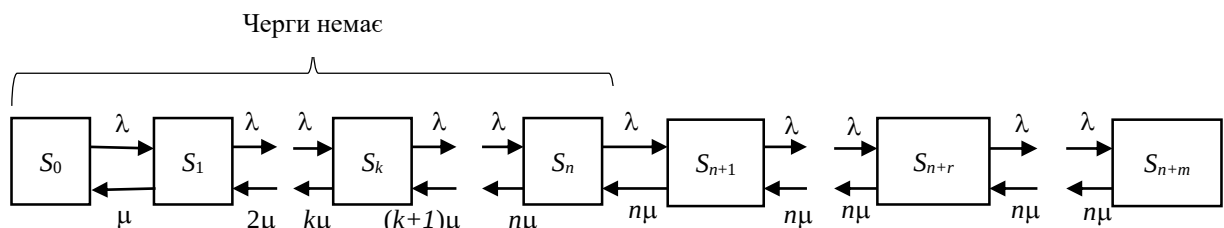


Рис. 2.8. Граф станів та переходів СМО

Граф станів являє собою схему загибелі та розмноження, для якої рішення в загальному вигляді вже отримано. Напишемо вирази граничних імовірностей, ввівши позначення *приведеної інтенсивності заявок* $\lambda/\mu=r$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}}, \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots \dots \dots \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots \dots \dots \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

або, сумуючи геометричну прогресію зі знаменником ρ/n підкреслені члени в першій формулі:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}, \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots \dots \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots \dots \dots p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Таким чином, всі граничні імовірності станів знайдені.

Знайдемо деякі характеристики ефективності обслуговування.

Заявка, яка надійшла, **отримує відмову**, якщо зайняті всі n каналів та всі m місць в черзі:

$$P_{ВІДМ} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \quad (2.51)$$

Відносна пропускна здатність СМО (частка обслужених заявок від всіх заявок, що надійшли до системи за певний період часу), як завжди, доповнює імовірність відмови до одиниці:

$$Q = 1 - P_{ВІДМ} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \quad (2.52)$$

Абсолютна пропускна здатність СМО буде дорівнювати:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right). \quad (2.53)$$

Середня кількість зайнятих каналів $\bar{z}$. Нагадаємо, що для СМО з відмовами вона співпадала з середньою кількістю заявок, що знаходяться в системі. Для СМО с чергою середня кількість зайнятих каналів не співпадає з середньою кількістю заявок в системі: остання величина відрізняється від першої на середню кількість заявок, які знаходяться в черзі.

Позначимо $\bar{k}$ – середнє число заявок, пов'язаних з системою, $\bar{z}$ – середнє число зайнятих каналів. Кожен зайнятий канал обслуговує в середньому μ заявок за одиницю часу. Тому:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right), \quad (2.54)$$

або

$$\bar{z} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right). \quad (2.55)$$

Середня кількість заявок в черзі $\bar{r}$ – можна визначити безпосередньо як математичне сподівання дискретної випадкової величини, помноживши будь-яке можливе число заявок на імовірність того, що саме це число заявок буде в черзі:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = \\ &= 1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0 + \dots + m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \left[1 + 2 \cdot \frac{\rho}{n} + 3 \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + \dots + m \cdot \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Введемо позначення $\rho/n = \gamma$ і перепишемо (2.56) у вигляді:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \left[1 + 2 \cdot \gamma + 3 \cdot \gamma^2 + \dots + m \cdot \gamma^{m-1} \right]. \quad (2.57)$$

Обчисливши суму в дужках виразу (2.57), отримаємо:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1) \cdot \gamma^m + m \gamma^{m+1}}{(1 - \gamma)^2}. \quad (2.58)$$

Додаючи середню кількість заявок в черзі та середню кількість зайнятих каналів, отримаємо **середню кількість заявок, пов'язаних із системою**:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}. \quad (2.59)$$

Середній час очікування заявки в черзі. Зробимо ряд гіпотез про те, в якому стані застане систему заявка, що надійшла, та скільки часу їй доведеться чекати обслуговування.

Якщо заявка застане не всі канали зайнятими, їй взагалі не доведеться чекати. Якщо заявка надійде в момент, коли зайняті всі n каналів, а черги немає, їй доведеться чекати в середньому час, який дорівнює $1/n\mu$ (тому що потік звільнень n каналів має інтенсивність $n\mu$). Якщо заявка застане всі канали зайнятими і одну заявку перед собою в черзі, їй доведеться в середньому чекати час $2/n\mu$ (по $1/n\mu$ на кожну заявку, яка стоїть попереду) і т. д. Якщо заявка застане в черзі $(r-1)$ заявок, їй доведеться чекати в середньому час $r/n\mu$. Якщо заявка, що знову надійшла, застане в черзі вже m заявок, то вона взагалі не буде чекати (але і обслуговуватись не буде). Середній час очікування знайдемо, помноживши кожне з цих значень на відповідну імовірність:

$$\begin{aligned} t_{оч} &= \frac{1}{n\mu} p_n + \frac{2}{n\mu} p_{n+1} + \dots + \frac{m}{n\mu} p_{n+m-1} = \\ &= \frac{1}{n\mu} \left[\frac{\rho^n}{n!} p_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + \dots + \frac{m\rho^{n+m-1}}{n^{m-1} \cdot n!} p_0 \right] = \\ &= \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \left[1 + \frac{2\rho}{n} + \frac{3\rho^2}{n^2} \dots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}} \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Так само, як і для одноканальної СМО з очікуванням, помічаємо, що цей вираз відрізняється від виразу для середньої довжини черги (2.56) тільки множником $\frac{1}{\rho\mu} = \frac{1}{\lambda}$, тобто:

$$t_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \quad (2.61)$$

Середній час перебування заявки в системі – відрізняється від середнього часу очікування на середній час обслуговування, помножений на відносну пропускну здатність:

$$t_{сист} = t_{оч} + \frac{Q}{\mu}. \quad (2.62)$$

Приклад 2.4. Автозаправна станція (АЗС) з двома колонками ($n=2$) призначена для обслуговування автомобілів. Потік автомобілів, що приїжджають на АЗС, має інтенсивність $\lambda=2$ хв⁻¹ (автомобілів за хвилину); середній час обслуговування одного автомобіля $t_{обс} = 2$ хв. Майданчик біля АЗС може вмістити чергу не більше 3 автомобілів. Автомобіль, що прибув в момент, коли всі три місця в черзі зайняті, залишає АЗС (отримує відмову). Знайти характеристики СМО:

- ймовірність відмови,
- відносну та абсолютну пропускну здатність,

- середню кількість зайнятих колонок,
- середню кількість автомобілів в черзі,
- середній час очікування та перебування автомобіля на АЗС.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$n = 2, m = 3, \lambda = 2, \mu = \frac{1}{t_{обс}} = 0,5, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 4, \gamma = \frac{\rho}{n} = 2.$$

За формулами (2.50) знаходимо:

$$p_0 = \left[1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3 \cdot (1 - 2^3)}{2 \cdot 2! \cdot (1 - 2)} \right]^{-1} = \frac{1}{125} = 0,008.$$

Ймовірність відмови:

$$P_{відм} = p_5 = \frac{4^5}{2^3 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{125} = 0,512.$$

Відносна пропускна здатність:

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - 0,512 = 0,488.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda Q = 2 \cdot 0,488 = 0,976 \text{ (авто/хв)}.$$

Середня кількість зайнятих колонок:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{0,976}{0,5} = 1,952,$$

тобто обидві колонки майже весь час зайняті.

Середня кількість автомобіля в черзі:

$$\bar{r} = \frac{4^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1 - 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4}{(1 - 2)^2} = 2,18,$$

тобто в середньому два автомобілі будуть в черзі.

Середній час очікування автомобіля в черзі:

$$t_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2,18}{2} = 1,09 \text{ (хв)}.$$

Середній час перебування автомобіля на АЗС (включно з часом обслуговування):

$$t_{сист} = t_{оч} + \frac{Q}{\mu} = 1,09 + \frac{0,488}{0,5} = 2,07 \text{ (хв)}.$$

Таким чином, ми розглянули функціонування та характеристики n -канальної СМО з очікуванням, коли в черзі одночасно можуть знаходитись не більше m заявок.

2.2.6. Багатоканальна СМО з очікуваннями з необмеженою чергою

Нехай довжина черги не обмежена якимось числом m , а може бути скільки завгодно великою. Граф станів в цьому випадку – нескінченний (рис. 2.9).

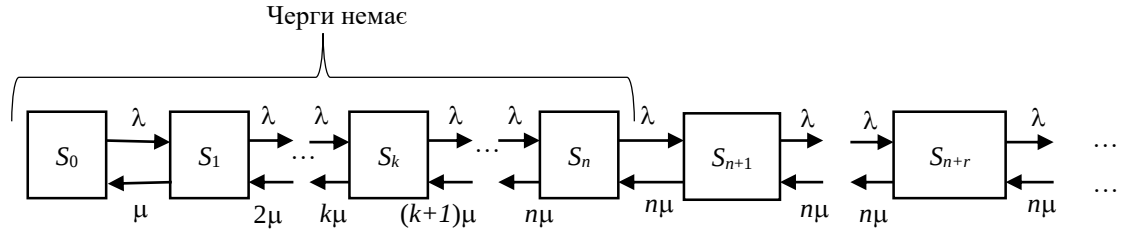


Рис. 2.9. Граф станів для n -канальної СМО з необмеженою чергою

Ймовірності станів можна отримати із формул (2.49) граничним переходом (при $m \rightarrow \infty$).

Відмітимо, що сума відповідної геометричної прогресії збігається при $\gamma < 1$ та розбігається при $\gamma \geq 1$. Тому усталений режим буде існувати при $\gamma < 1$, а при $\gamma \geq 1$ черга буде нескінченно зростати. Припустимо, що $\gamma < 1$ та спрямуємо у формулах (2.49) величину m до нескінченності. Отримаємо вирази граничних імовірностей станів:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}, \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \quad \dots \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Так як кожна заявка рано чи пізно буде обслужена, то характеристики **пропускної здатності СМО** будуть такими:

$$P_{ВІДМ} = 0. \quad (2.64)$$

$$Q = 1. \quad (2.65)$$

$$A = \lambda Q = \lambda. \quad (2.66)$$

Середня кількість заявок в черзі отримаємо із (2.58) при $m \rightarrow \infty$:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \gamma)^2}. \quad (2.67)$$

Середній час очікування заявки в черзі отримаємо з формули (2.61) при $m \rightarrow \infty$:

$$t_{оч} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \quad (2.68)$$

Середня кількість зайнятих каналів отримаємо через абсолютну пропускну здатність:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho. \quad (2.69)$$

Середня кількість заявок, пов'язаних із СМО:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}. \quad (2.70)$$

Приклад 2.5. АЗС з двома колонками ($n=2$) обслуговує потік автомобілів з інтенсивністю $\lambda=0,8$ (автомобілів за хвилину). Середній час обслуговування одного автомобіля $t_{обс} = 2\text{хв}$. В цьому районі немає іншої АЗС, тому черга автомобілів перед АЗС може зростати необмежено. Знайти характеристики ефективності СМО.

Розв'язання. Маємо: $n = 2$, $\lambda = 0,8$, $\mu = \frac{1}{t_{обс}} = 0,5$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1,6$, $\gamma = \frac{\rho}{n} = 0,8$,

оскільки $\gamma < 1$, черга не зростає безмежно та варто говорити про граничний стаціонарний режим роботи СМО. За формулами (2.63) знаходимо імовірності станів:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{1,6}{1!} + \frac{1,6^2}{2!} + \frac{1,6^3}{2!(2-1,6)}} = \frac{1}{9} = 0,111, \\ p_1 = \frac{1,6}{1!} \cdot \frac{1}{9} = 0,178, \quad p_2 = \frac{1,6^2}{2!} \cdot \frac{1}{9} = 0,142, \\ p_3 = \frac{1,6^3}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{9} = 0,114, \quad p_4 = \frac{1,6^4}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{9} = 0,091, \quad i \text{ т.д.} \end{array} \right.$$

Характеристики пропускну здатності СМО:

$$P_{ВІДМ} = 0, \quad Q = 1, \quad A = \lambda Q = 0,8.$$

Середня кількість зайнятих каналів:

$$\bar{z} = \frac{0,8}{0,5} = 1,6.$$

Ймовірність відсутності черги на АЗС:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,431.$$

Середня кількість автомобілів в черзі:

$$\bar{r} = \frac{1,6^3 \cdot 0,111}{2 \cdot 2! \cdot (1 - 0,8)^2} = 2,84.$$

Середня кількість автомобілів на АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z} = 2,84 + 1,6 = 4,4.$$

Середній час очікування автомобіля в черзі:

$$t_{оч} = \frac{2,84}{0,8} = 3,55 \text{ (хв)}.$$

Середній час перебування автомобіля на АЗС:

$$t_{сист} = t_{оч} + \frac{Q}{\mu} = 3,55 + \frac{1}{0,5} = 5,55 \text{ (хв)}.$$

2.2.7. Багатоканальна СМО з обмеженим часом очікування

Вище ми досліджували СМО з очікуванням, обмеженим тільки довжиною черги (числом m заявок, які одночасно знаходились в черзі). В такій СМО заявка, яка стала в чергу, вже не покидає її і чекає обслуговування. На практиці нерідко зустрічаються СМО іншого типу, в яких заявка чекає деякий час і йде з черги (так звані «нетерплячі» заявки).

Розглянемо СМО подібного типу, залишаючись в межах марковської схеми. Припустимо, що є n -канальна СМО з очікуванням, в якій кількість місць в черзі не обмежено, але *час перебування заявки в черзі обмежено деяким випадковим терміном* $T_{оч}$ із середнім значенням $t_{оч}$, таким чином, на кожну заявку, яка стоїть в черзі, діє начебто «потік виходів» з інтенсивністю

$$\nu = \frac{1}{t_{оч}}. \quad (2.71)$$

Якщо цей пуассонівський потік, то процес, який протікає в СМО, буде марковським. Знайдемо для нього імовірності станів. Будемо знову нумерувати стани системи по кількості заявок, пов'язаних з системою – як тих що обслуговуються, так і тих, що стоять в черзі (рис. 2.10):

- S_0 – всі канали вільні,
 - S_1 – зайнятий рівно один канал, інші вільні,
 -
 - S_k – зайняті рівно k каналів, інші вільні,
 -
 - S_n – зайняті всі n каналів,
 - S_{n+1} – зайняті всі n каналів, одна заявка стоїть в черзі,
 -
- } черги немає

- S_{n+r} – зайняті всі n каналів, r заявок стоять в черзі,
-

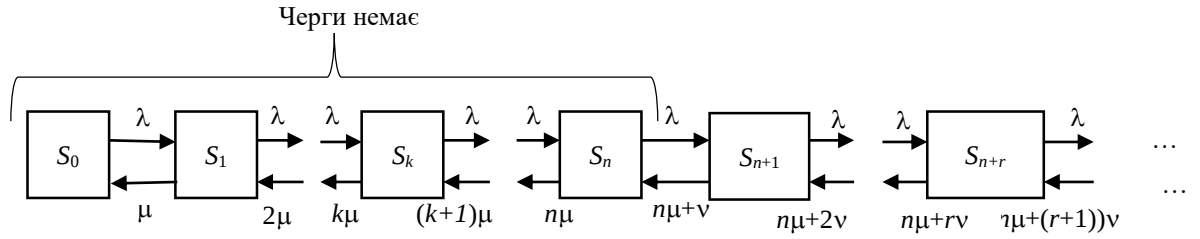


Рис. 2.10 Граф станів для СМО з чергою та обмеженим часом очікування

Розмітимо цей граф, тобто, проставимо біля стрілок відповідні інтенсивності. Знову, як і раніше, у всіх стрілок, які ведуть *зліва направо*, буде стояти інтенсивність потоку заявок λ . Для станів без черги біля стрілок, які ведуть з них *справа наліво*, буде, як і раніше, стояти сумарна інтенсивність потоку обслуговування всіх зайнятих каналів. Що стосується станів з чергою, то біля стрілок, які ведуть з них *справа наліво* буде стояти сумарна інтенсивність потоку обслуговувань всіх n каналів $n\mu$, плюс відповідна інтенсивність потоку виходів з черги. Якщо в черзі стоїть r заявок, то *сумарна інтенсивність потоку виходів* буде дорівнювати rv .

Як видно з графу на рисунку 2.10, перед нами знову схема загибелі та розмноження. Застосовуючи загальні вирази для граничних імовірностей станів в цій схемі, знайдемо ймовірності:

$$\left\{ \begin{aligned} p_0 &= \left[1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{n\mu + v} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda^2}{(n\mu + v)(n\mu + 2v)} + \dots + \frac{\lambda^r}{(n\mu + v)(n\mu + 2v)\dots(n\mu + rv)} + \dots \right) \right]^{-1} \\ p_1 &= \frac{\lambda/\mu}{1!} p_0, \dots, p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \frac{\lambda}{n\mu + v} \cdot p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot \frac{\lambda^r}{(n\mu + v)(n\mu + 2v)\dots(n\mu + rv)} \cdot p_0, \\ &\dots \end{aligned} \right. \quad (2.72)$$

або, вводячи позначення $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\nu}{\mu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n+\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \dots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} + \dots \right) \right]^{-1} \\ p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n+\beta} \cdot p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} \cdot p_0. \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.73)$$

Відмітимо деякі особливості розглянутої СМО з «нетерплячими» заявками в порівнянні з раніше розглянутою СМО з «терплячими» заявками.

Якщо довжина черги не обмежена заздалегідь ніяким числом та заявки «терплячі» (не виходять з черги), то **стаціонарний граничний режим** існує тільки у випадку $\rho < n$, а при $\rho \geq n$ відповідна геометрична прогресія розбігається, що фізично відповідає необмеженому зростанню черги при $(t \rightarrow \infty)$. Навпаки, в СМО з «нетерплячими» заявками, які виходять рано чи пізно з черги, усталений режим обслуговування при $t \rightarrow \infty$ досягається завжди, незалежно від наведеної інтенсивності потоку заявок ρ . Це слідує з того, що ряд в знаменнику першої формули (2.73) збігається при будь-яких додатних значеннях ρ і β .

Для СМО з «нетерплячими» заявками поняття **«ймовірність відмови»** не має змісту – кожна заявка стає в чергу, але може і не дочекатись обслуговування, вийшовши раніше.

Відносну пропускну здатність Q такої СМО можна обчислити так. Очевидно, що обслужені будуть всі заявки, окрім тих, які вийдуть з черги завчасно. Для цього обчислимо середню кількість заявок в черзі:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + r \cdot p_{n+r} + \dots \quad (2.74)$$

На кожному з цих заявок діє «потік виходів» з інтенсивністю ν . Отже, з середньої кількості заявок в черзі в середньому будуть виходити, не дочекавшись обслуговування, $\bar{\nu r}$ заявок за одиницю часу.

Всього за одиницю часу в середньому буде обслужено заявок – **абсолютна пропускна здатність A**:

$$A = \lambda - \nu \bar{r}. \quad (2.75)$$

Відносна пропускна здатність Q:

$$Q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\lambda - \nu \bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \bar{r}. \quad (2.76)$$

Середня кількість зайнятих каналів $\bar{z}$ отримаємо, поділивши абсолютну пропускну здатність на μ :

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda - \nu \bar{r}}{\mu} = \rho - \beta \bar{r}. \quad (2.77)$$

Це дозволяє обчислити **середню кількість заявок в черзі $\bar{r}$** без виконання операції суми нескінченного ряду (2.74):

$$\bar{r} = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\bar{z}}{\beta}. \quad (2.78)$$

Середню кількість зайнятих каналів, яка входить в цю формулу, можна знайти як математичне очікування випадкової величини Z , яка приймає значення $0, 1, 2, \dots, n$ з відповідними ймовірностями:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot [1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{n-1}] = \\ &= p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot [1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{n-1}]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ми не будемо виводити формули для **середнього часу очікування в черзі**, так як для цього потрібні складні математичні викладки.

Відмітимо, що, на відміну від формул для багатоканальних СМО з відмовами та чергами, де сума великого (або нескінченного) числа доданків «згортається за допомогою формул для суми геометричної прогресії», в формулі (2.73) фігурує сума нескінченного ряду, який не є прогресією. Однак ця сума обчислюється наближено, при тому достатньо легко, тому що члени ряду швидко спадають зі збільшенням їх номера. В якості наближеного значення для нескінченної суми береться сума кінцевого числа $r-1$ членів, а залишок оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+r\beta)} + \frac{\rho^{r+1}}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+(r+1)\beta)} + \dots \right] < \\ &< \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho^r}{\beta \cdot 2\beta \cdot \dots \cdot r\beta} + \frac{\rho^{r+1}}{\beta \cdot 2\beta \cdot \dots \cdot (r+1)\beta} + \dots \right] = \\ &= \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{(\rho/\beta)^r}{r!} + \frac{(\rho/\beta)^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Можна довести, що нескінченна сума в квадратних дужках менша, ніж $\frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{\rho/\beta}$ і вираз (2.80) менший, ніж

$$\frac{\rho^n}{n!} \frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{\rho/\beta}.$$

Також відмітимо, що якщо в формулах (2.73) перейти до границі при $\nu \rightarrow 0$ (або, що те саме, при $\beta \rightarrow 0$), то при $p < n$ виходять формули (2.61) для СМО з «терплячими» заявками. Тобто «нетерплячі» заявки стануть «терплячими».

2.2.8. Замкнуті СМО

До цих пір ми розглядали такі СМО, де заявки надходили звідкись **зовні** й інтенсивність потоку заявок не залежала від стану самої системи. Тепер розглянемо СМО іншого типу – такі, в яких інтенсивність потоку заявок, які надходять, залежить від станів самої СМО. Такі **системи масового обслуговування** називаються **замкнутими**.

В якості прикладу замкнутої СМО розглянемо наступну систему. Інженер відділу технічного захисту інформації або робітник-наладчик обслуговує n приладів. Кожен прилад може в будь-який момент вийти з ладу і потребувати обслуговування з боку наладчика. Інтенсивність потоку несправностей кожного приладу дорівнює λ . Прилад, який вийшов з ладу, зупиняється. Якщо в цей момент робітник вільний, він береться за налагодження приладу і на це він витрачає середній час:

$$t_{об} = \frac{1}{\mu}. \quad (2.81)$$

де μ – інтенсивність потоку обслуговувань (налагоджувань).

Якщо в момент виходу приладу з ладу робітник зайнятий, прилад стає в чергу на обслуговування і чекає, доки робітник не звільниться.

Вимагається знайти імовірності станів даної системи та її характеристики:

- ймовірність того, що робітник не буде зайнятим;
- ймовірність наявності черги;
- середню кількість приладів, які чекають черги на ремонт і т.д.

Перед нами – своєрідна СМО, де джерелами заявок є прилади, які наявні в обмеженій кількості і які подають або не подають заявки в залежності від свого стану: при виході приладу з ладу він перестає бути джерелом нових заявок. Отже, інтенсивність загального потоку заявок, з яким доводиться мати справу робітнику,

залежить від того, скільки є несправних приладів, тобто скільки заявок пов'язано з процесом обслуговування (безпосередньо обслуговуються або стоять в черзі).

Характерною для замкнутої СМО є наявність **обмеженої кількості джерел заявок**.

По суті, будь-яка СМО має справу тільки з обмеженою кількістю джерел заявок, але в ряді випадків кількість цих джерел настільки велика, що можна знехтувати впливом станів самої СМО на потік заявок. Наприклад, потік викликів на АТС великого міста виходить, по суті, від обмеженої кількості абонентів, але ця кількість настільки велика, що практично можна вважати інтенсивність потоку заявок незалежною від станів самої АТС (скільки каналів зайнято в даний момент). В замкнутій же СМО джерела заявок, на ряду з каналами обслуговування, розглядаються як елементи СМО.

Розглянемо сформульовану вище задачу про **робітника-наладчика в межах загальної схеми марковських процесів**.

Система, яка включає робітника і n приладів, має ряд станів, які ми будемо нумерувати по кількості несправних приладів (приладів, пов'язаних з обслуговуванням):

- S_0 – всі прилади справні (робітник вільний),
- S_1 – один прилад зайнятий, робітник зайнятий його налагодженням,
- S_2 – два прилади несправні, один лагодиться, інший чекає черги,
-
- S_n – всі n приладів несправні, один лагодиться, $n-1$ стоять в черзі.

Граф станів наведений на рисунку 2.11.

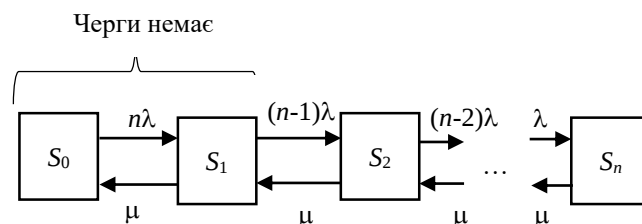


Рис. 2.11. Граф станів замкнутої СМО

Інтенсивності потоків подій, які переводять систему зі стану в стан, проставлені біля стрілок. Зі стану S_0 в S_1 систему переводить потік несправностей всіх працюючих приладів; його інтенсивність дорівнює $n\lambda$. Зі стану S_1 в S_2 систему переводить потік несправностей вже не n , а $(n-1)$ приладів (працюють всього $n-1$) і т.д. Що стосується інтенсивностей потоків подій, які переводять систему по стрілкам справа наліво, то вони всі однакові – працює весь час один робітник з інтенсивністю обслуговування μ .

Користуючись, як завжди, загальним розв'язанням задачі про граничні імовірності станів для схеми загибелі та розмноження, напишемо **граничні імовірності станів**:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + n(\lambda/\mu) + n(n-1)(\lambda/\mu)^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot (\lambda/\mu)^n}, \\ p_1 = \frac{n\lambda}{\mu} p_0, \quad p_2 = \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^2} p_0, \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \lambda^n}{\mu^n} p_0. \end{array} \right. \quad (2.82)$$

Ввівши, як і раніше, позначення $\lambda/\mu = \rho$, перепишемо ці формули у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot \rho^n}, \\ p_1 = n\rho p_0, \quad p_2 = n(n-1)\rho^2 p_0, \\ \dots\dots\dots \\ p_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \rho^n \cdot p_0. \end{array} \right. \quad (2.83)$$

Отже, імовірності станів СМО знайдені.

В силу своєрідності замкнутої СМО, характеристики її ефективності будуть відрізнятися від тих, які ми застосовували раніше для СМО з необмеженою кількістю джерел заявок.

Роль «*абсолютної пропускної здатності*» в даному випадку відіграє **середня кількість несправностей**, які усуваються робітником за одиницю часу. Обчислимо цю характеристику. Робітник зайнятий налагоджуванням з імовірністю:

$$P_{\text{зайн}} = 1 - p_0. \quad (2.84)$$

Якщо він зайнятий, він обслуговує μ приладів (ліквідує μ несправностей) за одиницю часу, отже, **абсолютна пропускна здатність системи**:

$$A = (1 - p_0) \mu. \quad (2.85)$$

Відносну пропускну здатність для замкнутої СМО ми не обчислюємо, тому що кожна заявка, в решті решт, буде обслужена: $Q=1$.

Імовірність того, що **робітник не буде зайнятий**:

$$P_{\text{віль}} = 1 - P_{\text{зайн}} = p_0. \quad (2.86)$$

Обчислимо *середню кількість несправних приладів*, інакше – середню кількість приладів, пов’язаних з процесом обслуговування. Позначимо цю середню кількість $\bar{\omega}$. В загалі, величину $\bar{\omega}$ можна обчислити безпосередньо, за формулою

$$\bar{\omega} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot p_n, \quad (2.87)$$

але простіше буде знайти її через абсолютну пропускну здатність A . Дійсно, кожен працюючий прилад породжує потік несправностей з інтенсивністю λ ; в нашій СМО в середньому працює $n - \bar{\omega}$ приладів; середній потік несправностей, який вони породжують, буде мати середню інтенсивність $(n - \bar{\omega})\lambda$; всі ці несправності усуваються робітником, отже

$$(n - \bar{\omega})\lambda = (1 - p_0)\mu,$$

звідки

$$\bar{\omega} = n - (1 - p_0)\frac{\mu}{\lambda},$$

або

$$\bar{\omega} = n - (1 - p_0)\rho. \quad (2.88)$$

Визначимо тепер середню кількість приладів $\bar{r}$, які чекають налагоджування в черзі. Будемо розмірковувати наступним чином: загальна кількість приладів W , пов’язаних з обслуговуванням, складається з кількості приладів R , які стоять в черзі, плюс кількість приладів Ω , які безпосередньо знаходяться під обслуговуванням:

$$W = R + \Omega.$$

Кількість приладів Ω , які знаходяться під обслуговуванням, дорівнює одиниці, якщо робітник зайнятий, і нуля, якщо він вільний, тобто середнє значення Ω дорівнює імовірності того, що робітник зайнятий:

$$\bar{\omega} = 1 - p_0.$$

Віднімаючи цю величину від середньої кількості $\bar{\omega}$ приладів, пов’язаних з обслуговуванням (несправних), отримаємо *середню кількість приладів, які чекають обслуговування в черзі*:

$$\bar{r} = n - \frac{1 - p_0}{\rho} - (1 - p_0) = n - (1 - p_0)\left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \quad (2.89)$$

Зупинимося ще на одній характеристиці ефективності СМО – *продуктивності групи приладів, які обслуговуються робітником*.

Знаючи середню кількість несправних приладів $\bar{\omega}$ та продуктивність l справного приладу за одиницю часу, можна оцінити середню втрату L продуктивності групи приладів за одиницю часу за рахунок несправностей:

$$L = \bar{\omega}l. \quad (2.90)$$

Приклад 2.6. Робітник обслуговує групу з трьох приладів. Кожен прилад зупиняється в середньому 2 рази за годину. Процес налагоджування займає в робітника в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО:

- імовірність зайнятості робітника;
- абсолютну пропускну здатність робітника;
- середню кількість несправних приладів;
- середню відносну втрату продуктивності групи приладів за рахунок несправностей.

Розв'язання. Маємо: $n = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{10/60} = 6$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$.

За формулами (2.83):

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2 \cdot (1/3)^2 + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1/3)^3} = 0,346.$$

Імовірність зайнятості робітника:

$$P_{\text{зайн}} = 1 - p_0 = 1 - 0,346 = 0,654.$$

Абсолютна пропускна здатність робітника (середня кількість несправностей, яку він ліквідує за годину):

$$A = (1 - p_0) \mu = 0,654 \cdot 6 = 3,94.$$

Середня кількість несправних приладів:

$$\bar{\omega} = 3 - 0,654 \cdot \frac{1}{3} = 1,04.$$

Середня відносна втрата продуктивності групи приладів за рахунок несправностей знаходиться як $\bar{\omega}/n = 0,347$, тобто за рахунок несправностей група приладів втрачає близько 35% продуктивності.

Розглянемо тепер більш загальний приклад замкнутої СМО: бригада з m робітників обслуговує n приладів ($m < n$).

Стани системи:

- | | | |
|---|---|-------------|
| <ul style="list-style-type: none"> - S_0 – всі прилади працюють, робітники вільні, - S_1 – один прилад зупинився, один робітник зайнятий, - - S_m – m приладів зупинилися, всі робітники зайняті, | } | черги немає |
|---|---|-------------|

- S_{m+1} – $m+1$ приладів зупинилися, m з них налагоджуються, один чекає черги,
-
- S_n – всі n приладів зупинилися, m з них налагоджуються, $n-m$ чекають черги.

Граф станів системи показаний на рисунку 2.12 (інтенсивності потоків подій проставлені біля стрілок).

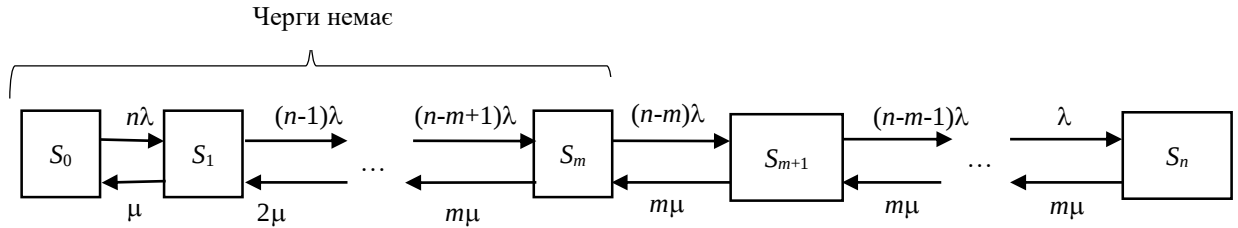


Рис. 2.12. Граф станів для замкнутої СМО (m робітників обслуговує n приладів)

Застосовуючи загальне розв'язання для схеми загигелі та розмноження, знаходимо граничні імовірності станів:

$$\left\{ \begin{aligned}
 p_0 &= \left[1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot m^{n-m}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}, \\
 p_1 &= \frac{n}{1} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \cdot p_0, \\
 &\dots \dots \dots \\
 p_m &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \cdot p_0, \\
 p_{m+1} &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot m} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} \cdot p_0, \\
 &\dots \dots \dots \\
 p_n &= \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot m^{n-m}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot p_0.
 \end{aligned} \right. \quad (2.91)$$

Позначаючи, як завжди, $\lambda/\mu=r$, приведемо формулу до вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} p_0 &= \left[1 + \frac{n}{1!} \cdot \rho + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \rho^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \cdot \rho^m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)}{m! \cdot m} \cdot \rho^{m+1} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{m! \cdot m^{n-m}} \cdot \rho^n \right]^{-1}, \\ p_1 &= \frac{n}{1!} \cdot \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \rho^2 \cdot p_0, \\ &\dots\dots\dots \\ p_m &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \cdot \rho^m \cdot p_0, \\ p_{m+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)}{m! \cdot m} \cdot \rho^{m+1} \cdot p_0, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= \frac{n(n-1)\dots 1}{m! \cdot m^{n-m}} \cdot \rho^n \cdot p_0. \end{aligned} \right. \quad (2.92)$$

Через ці імовірності виражається *середня кількість зайнятих робітників*:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + (m-1) \cdot p_{m-1} + m \cdot (p_m + p_{m+1} + \dots + p_n) = \\ &= p_1 + 2p_2 + \dots + (m-1)p_{m-1} + m(1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{m-1}).\end{aligned}\quad (2.93)$$

Середня кількість приладів, які обслуговуються бригадою за одиницю часу – ***абсолютна пропускна здатність***:

$$A = \bar{z} \cdot \mu. \quad (2.94)$$

Середня кількість несправних приладів:

$$\bar{\omega} = n - \frac{\bar{z}\mu}{\lambda} = n - \frac{\bar{z}}{\rho}. \quad (2.95)$$

Середня втрата продуктивності групи приладів за одиницю часу за рахунок несправностей – потрібно помножити кількість несправних приладів $\overline{\omega}$ на продуктивність l одного приладу за одиницю часу:

$$L = \bar{\omega} \cdot l. \quad (2.96)$$

Приклад 2.7. Два робітники обслуговують групу з шести приладів. Зупинки кожного (працюючого) прилада стаються, в середньому, через кожні півгодини. Процес налагоджування займає в робітника в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО:

- середню кількість зайнятих робітників,

- абсолютну пропускну здатність,
- середню кількість несправних приладів.

Розв'язання. Маємо: $n = 6$, $m = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{10/60} = 6$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$.

За формулами (2.92):

$$p_0 = \left[1 + \frac{6}{1!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2! \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2! \cdot 2^3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2^4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right]^{-1} = \frac{1}{6,549} = 0,153.$$

$$p_1 = \frac{6}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,153 = 0,306.$$

Середня кількість зайнятих робітників:

$$\bar{z} = 1p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 1 \cdot 0,306 + 2 \cdot (1 - 0,153 - 0,306) = 1,388.$$

Абсолютна пропускну здатність:

$$A = 1,388 \cdot 6 = 8,33 (\text{приладів/год})$$

Середня кількість несправних приладів:

$$\bar{\omega} = 6 - \frac{1,388}{1/3} = 1,84.$$

При дослідженні систем масового обслуговування використовують граф станів та переходів марковського процесу. Дослідження математичної моделі проводиться з метою вирішення задачі аналізу (визначення показників якості обслуговування для конкретної системи) або задачі синтезу (визначення структури або параметрів системи, що має задовольняти поставленим вимогам до системи з точки зору якості обслуговування). Вирішення задач аналізу та синтезу дозволить розробити практичні рекомендації для удосконалення систем технічного захисту інформації.

Питання для самоперевірки

1. Що таке теорія масового обслуговування? Хто є її основоположником?
2. Що називається системою масового обслуговування?
3. Назвіть приклади СМО.
4. Які основні елементи СМО?
5. Назвіть класифікацію СМО за різними ознаками.
6. В залежності від типу СМО які можуть застосовуватись показники їх ефективності?

7. Охарактеризуйте одноканальну СМО з відмовами.
8. Які основні характеристики одноканальної СМО з відмовами?
9. За якими формулами визначаються середній інтервал часу між надходженнями двох замовлень та середній час обслуговування каналом одного замовлення?
10. Охарактеризуйте граф станів та переходів багатоканальної СМО з відмовами.
11. Назвіть формули Ерланга.
12. Які існують характеристики ефективності для багатоканальної СМО з відмовами?
13. Охарактеризуйте одноканальну СМО з обмеженою чергою.
14. За якими формулами можна знайти граничні ймовірності станів для одноканальної СМО з обмеженою чергою?
15. Які існують характеристики ефективності для одноканальної СМО з обмеженою чергою?
16. Охарактеризуйте одноканальну СМО з необмеженою чергою.
17. За якими формулами можна знайти граничні ймовірності станів для одноканальної СМО з необмеженою чергою?
18. Які існують характеристики ефективності для одноканальної СМО з необмеженою чергою?
19. Охарактеризуйте одноканальну СМО з необмеженою чергою.
20. Охарактеризуйте багатоканальну СМО з відмовами.
21. Охарактеризуйте багатоканальну СМО з очікуванням з обмеженою чергою.
22. Охарактеризуйте багатоканальну СМО з очікуванням з необмеженою чергою.
23. Охарактеризуйте багатоканальну СМО з обмеженим часом очікування.
24. Охарактеризуйте замкнену СМО.

Задачі для самостійної роботи

1. На телефонну лінію філіалу банку, яку обслуговує один оператор, поступає найпростіший потік викликів клієнтів з інтенсивністю $\lambda=0,9$ викликів/хв. Потік обслуговувань викликів – найпростіший потік з інтенсивністю $\mu=0,8$ викликів/хв. Визначити показники ефективності роботи лінії, що впливають на підсумкову роботу філіалу.

2. У перукарні працює один майстер. Час обслуговування клієнта розподілений за показниковим законом з середнім значенням 12 хв. Клієнт, що

прийшов в перукарню, коли майстер зайнятий, не чекає обслуговування, а покидає перукарню. Потік клієнтів – простий з інтенсивністю 8 клієнтів/год. Знайти показники ефективності роботи даної перукарні.

3. В приймальній офісу встановлений телефон, на який дзвонять замовники. Якщо телефон зайнятий, то дзвінок не приймається (відбувається відмова замовлення). Дзвінки утворюють простий потік з інтенсивністю $\lambda = 30$ дзвінків/год. Час однієї розмови є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу із середньою тривалістю $t_{\text{обс}} = 3$ хв. необхідно визначити показники ефективності системи.

4. На мийці є один блок для обслуговування і місця для черги. Автомобілі прибувають згідно пуассонівського розподілу з інтенсивністю 1 автомобіль на годину. Середня тривалість обслуговування – 1,8 год. Визначити в сталому режимі граничні значення:

- відносної пропускної здатності;
- абсолютної пропускної здатності;
- ймовірності відмов.

Порівняти фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, котра була б, якби кожен автомобіль обслуговувався точно 1,8 години й автомобілі надходили один за другим без перерви.

5. Розглядається цілодобова робота пункту СТО автомашин з одним каналом. На огляд кожної машини витрачається в середньому 0,5 години. На СТО поступає в середньому 36 машин за добу. Якщо машина прибуває, коли пункт огляду зайнятий, вона покидає його не обслуженою. Визначити граничну ймовірність станів і характеристики обслуговування СМО.

6. Розглянемо телефонну лінію, на вхід якої надходить простий потік дзвінків з інтенсивністю $\lambda=0,4$ дзвінки/хв. Середня тривалість розмови становить 3 хв. Час розмови має показниковий закон розподілу. Знайти граничні ймовірності станів системи та характеристики обслуговування.

7. Нехай n -канальна СМО являє собою централізований склад ЦС по обробці вантажів в контейнерах із трьома ($n=3$) взаємозамінними навантажувачами для обробки вантажів. Потік вантажів в контейнерах, що надходять на ЦС, має інтенсивність $\lambda=1$ контейнер на годину. Середня тривалість обслуговування $\overline{t_{\text{обс}}} = 1.8$ год. Потік заявок на обробку вантажів і потік обслуговування цих вантажів найпростіший.

Визначити характеристики обслуговування в усталеному режимі СМО:

- граничні ймовірності станів;
- ймовірність відмови в обслуговуванні вантажу в контейнерах;

- відносну пропускну здатність ЦС;
- абсолютну пропускну здатність ЦС;
- середнє число зайнятих навантажувачів на ЦС.

Визначити, скільки потрібно придбати навантажувачів, щоб збільшити пропускну здатність ЦС у 10 разів. Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці.

8. На автозаправній стації АЗС є одна колонка. Майданчик при станції, на якій автомобілі очікують заправку, може вмістити не більше 3 автомобілів одночасно, і якщо вона зайнята, то черговий автомобіль, що прибув, в чергу не стає, а проїжджає на сусідню станцію. У середньому автомобілі прибувають на станцію кожні 2 хвилини. Процес заправки одного автомобіля триває в середньому 2,5 хвилини. Визначити:

- граничні ймовірності станів;
- імовірність відмови в обслуговуванні авто;
- відносну пропускну здатність АЗС;
- абсолютну пропускну здатність АЗС;
- середню кількість автомобілів, які очікують в черзі;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться в обслуговуванні;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться на АЗС;
- середній час очікування автомобіля в черзі;
- середній час, витрачений на обслуговування одного автомобіля на АЗС;
- середній час перебування автомобіля на АЗС.

9. У квитковій касі працює один касир, що обслуговує в середньому двох покупців за 1 хвилину. Щогодини в середньому приходять купувати квитки 90 відвідувачів. Знайти характеристики роботи квиткової каси.

10. Інтенсивність потоку відвідувачів їдальні становить 150 осіб за годину. Є 3 касири, кожен з яких обслуговує в середньому 1 відвідувача за хвилину. Знайти характеристики системи.

11. У порту є 2 причали для розвантаження вантажних суден. Інтенсивність потоку дорівнює $\lambda=0,8$ суден на добу. Середній час розвантаження одного судна становить 2 доби. Передбачається, що черга суден, що очікують розвантаження, може бути необмеженої довжини. Знайти середню кількість суден в порту.

12. У перукарні працюють 3 майстри. За 1 годину в перукарню приходять у середньому 10 осіб. Середній час обслуговування клієнта кожним майстром – 20 хвилин. Зал очікування розрахований на 4 місця. Середній час очікування клієнта в черзі 10 хв. Знайти характеристики ефективності роботи перукарні.

2.3. ОСОБЛИВОСТІ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Оцінка ефективності функціонування СМО в багатьох випадках не може бути здійснена аналітично, як вивчалось в попередніх темах розділу 2. В цьому разі проаналізувати систему допомагає імітаційне моделювання. За результатами імітаційного моделювання визначаються характеристики системи масового обслуговування: імовірність відмови, пропускна здатність, середнє число заявок в черзі, середній час простою каналів, тощо.

Імітаційне моделювання можна здійснювати на основі деяких принципів імітаційного моделювання. Найбільш сучасним із них є об'єктний принцип, за яким моделюються окремо всі елементи системи, що працюють паралельно. Найбільш популярним та простим є принцип послідовної проводки заявок, згідно з яким моделюється момент часу появи заявки, проміжки часу обслуговування та очікування заявки. Після цього моделюється наступна заявка. Моделювання кожної заявки супроводжується певними лічильниками, за якими потім обчислюються статистичні показники роботи системи [9].

2.3.1. Постановка завдання імітаційного моделювання СМО

Зазвичай системи масового обслуговування складно вивчити аналітичними методами. Проте, вони добре вивчаються методами імітаційного (статистичного) моделювання.

У СМО є типові **канали обслуговування**, через які в процесі обробки проходять **заявки**. Канали можуть бути різними за призначенням, характеристиками, вони можуть поєднуватися в різних комбінаціях. Заявки можуть перебувати в чергах і чекати обслуговування. Частина заявок може бути обслужена каналами, а частині заявок можуть відмовити в цьому. Важливо, що заявки, з точки зору системи, абстрактні: це те, що бажає бути обслуженою, тобто пройти певний шлях в системі. Канали є також абстракцією: це те, що обслуговує заявки.

Заявки можуть приходити нерівномірно, канали можуть обслуговувати різні заявки за різний час і так далі. Кількість заявок завжди дуже велика. Все це робить такі системи складними для вивчення і управління, і простежити всі причинно-наслідкові зв'язки в них не представляється можливим. Тому прийнято вважати, що обслуговування в складних системах носить випадковий характер.

Прикладами СМО можуть служити: автобусний маршрут і перевезення пасажирів; виробничий конвеєр з обробки деталей; ствол та різок автомата, які

«обслуговують» патрони; електричні заряди, що переміщаються в деякому пристрої тощо (табл. 1).

Таблиця 1.

Приклади систем масового обслуговування

СМО	Заявки	Канали
Автобусний маршрут та перевезення пасажирів	Пасажири	Автобуси
Виробничий конвеєр з обробки деталей	Деталі, вузли	Верстати, склади
Автомат Калашнікова	Патрони	Ствол, ріжок
Електричні заряди, що рухаються в деякому пристрої	Заряди	Каскади перетворення сигналу в пристрої

Але всі ці системи об'єднані в один клас СМО, оскільки підхід до їх вивчення єдиний.

По-перше, за допомогою ГВЧ створюються випадкові числа, які імітують *випадкові моменти появи заявок та час їх обслуговування в каналах*. Але в сукупності ці випадкові числа, зазвичай, підпорядковані статистичним закономірностям.

Наприклад: «заявки в середньому приходять в кількості 5 штук на годину». Це означає, що часи між приходом двох сусідніх заявок випадкові, наприклад: 0,1; 0,3; 0,1; 0,4; 0,2, як це показано на рисунку 2.13. Але в сумі вони дають в середньому 1 (зверніть увагу, що в прикладі це не точно 1, а 1,1, проте в інший час ця сума, наприклад, може дорівнювати 0,9); і тільки за досить великий час середнє значення цих чисел стане близьким до однієї години.

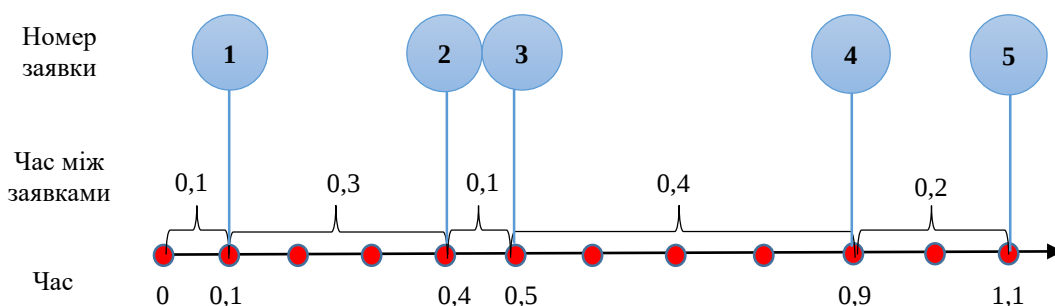


Рис. 2.13. Випадковий процес появи заявок в СМО

Результат (наприклад, пропускна здатність системи), зазвичай, теж буде випадковою величиною на окремих проміжках часу. Але виміряна на великому проміжку часу, ця величина буде вже, в середньому, відповідати точному значенню. Тобто всі характеристики СМО отримуються в результаті моделювання як **статистичні оцінки**.

Отже, систему випробовують *випадковими вхідними сигналами*, які підпорядковуються заданому статистичному закону. В якості результату приймають статистичні показники, що усереднені за часом спостереження або за кількістю дослідів. На рисунку 2.14 представлена схема статистичного експерименту для моделювання СМО.

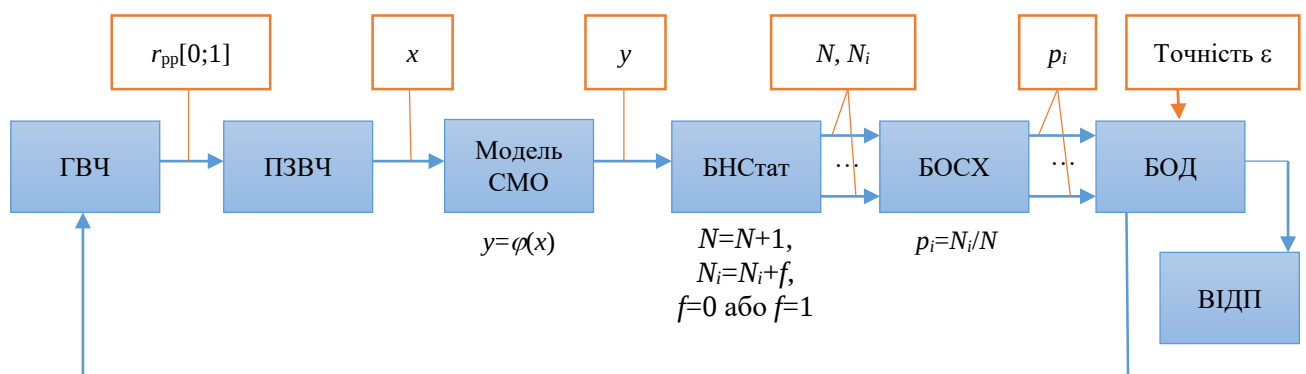


Рис. 2.14. Схема статистичного експерименту для вивчення СМО:

- ГВЧ – генератор випадкових чисел,
- ПЗВЧ – перетворювач закону випадкових чисел,
- БНСіат – блок накопичення статистики,
- БОСХ – блок обчислення статистичних характеристик,
- БОД – блок оцінки достовірності,
- ВІДП – відповідь.

По-друге, всі моделі СМО містять в собі типовий невеликий набір елементів (джерело заявок, потік заявок, канал, черга, дисципліна обслуговування, система, показники ефективності тощо). Це дозволяє імітувати ці елементи типовим чином. Для цього модель системи збирають з конструктора таких елементів. Неважливо, яка конкретно система вивчається, важливо, що схема системи збирається з одних і тих же елементів. Зрозуміло, що структура схеми буде завжди різною.

Нагадаємо деякі основні поняття СМО.

Канали – те, що обслуговує заявки. Бувають *гарячі* (починають обслуговувати заявку в момент її надходження в канал) і *холодні* (каналу для початку обслуговування потрібен час на підготовку).

Джерела заявок – породжують заявки у випадкові моменти часу, відповідно до заданого користувачем статистичному закону. Заявки, вони ж клієнти, входять в систему (породжуються джерелами заявок), проходять через її елементи (обслуговуються), залишають її обслуженими або незадоволеними. Бувають *нетерплячі заявки* – такі, яким набридло чекати або перебувати в системі і які залишають з власної волі СМО.

Заявки утворюють **потоки** – потік заявок на вході системи, потік обслужених заявок, потік відмовлених заявок. Потік характеризується кількістю заявок певного сорту, які спостерігаються в деякому місці СМО за одиницю часу (годину, добу, місяць), тобто потік є величиною статистичною.

Черги характеризуються правилами очікування в черзі (дисципліною обслуговування), кількістю місць в черзі (скільки клієнтів максимум може перебувати в черзі), структурою черзі (зв'язок між місцями в черзі). Бувають *обмежені і необмежені черги*.

Дисципліни обслуговування:

- FIFO (First In, First Out – першим прийшов, першим пішов): якщо заявка першою прийшла в чергу, то вона першою піде на обслуговування;
- LIFO (Last In, First Out – останнім прийшов, першим пішов): якщо заявка останньої прийшла в чергу, то вона першою піде на обслуговування (приклад – патрони в ріжку автомата);
- SF (Short Forward – короткі вперед): в першу чергу обслуговуються ті заявки з черги, які мають менший час обслуговування.

При аналізі результатів моделювання важливо також вказати інтереси і ступінь їх виконання. Розрізняють *інтереси клієнта* та *інтереси власника системи*. Зауважимо, що ці інтереси не завжди збігаються.

Судити про результати роботи СМО можна за **показниками ефективності СМО**. Найбільш популярні з них такі:

- ймовірність обслуговування клієнта системою;
- пропускна здатність системи;
- ймовірність відмови клієнтові в обслуговуванні;
- ймовірність зайнятості кожного з каналу і всіх разом;
- середній час зайнятості кожного каналу;
- ймовірність зайнятості всіх каналів;
- середня кількість зайнятих каналів;
- ймовірність простою кожного каналу;
- ймовірність простою всієї системи;
- середня кількість заявок, що стоять в черзі;

- середній час очікування заявки в черзі;
- середній час обслуговування заявки;
- середній час перебування заявки в системі.

Параметрами СМО (вхідна інформація) можуть бути:

- інтенсивність потоку заявок,
- інтенсивність потоку обслуговування,
- середній час, протягом якого заявка може очікувати в черзі,
- кількість каналів обслуговування,
- кількість місць в черзі;
- дисципліна обслуговування і так далі.

Отже, спеціаліст з систем повинен добре розуміти ресурси продуктивності і ефективності проєктованих їм систем, приховані в оптимізації параметрів, структур і дисциплінах обслуговування. Моделювання допомагає виявити ці приховані резерви.

Приклад автозаправної станції (АЗС).

Водії, проїжджаючи по дорозі повз АЗС, можуть заправити свій автомобіль. Припустимо, що з усього потоку машин на заправку в середньому заїжджає 5 машин на годину. На АЗС дві однакові колонки, статистична продуктивність кожної з яких відома. Перша колонка в середньому обслуговує 1 машину на годину, друга – в середньому 3 машини на годину. Власник АЗС заасфальтував для машин місце, де вони можуть очікувати обслуговування. Якщо колонки зайняті, то на цьому місці можуть очікувати обслуговування інші машини, але не більше двох одночасно. Будемо вважати, що черга загальна. Як тільки одна з колонок звільниться, то перша машина з черги може зайняти її місце на колонці (при цьому друга машина просувається на перше місце в черзі). Якщо з'являється третя машина, а всі місця (їх два) в черзі зайняті, то їй відмовляють в обслуговуванні, так як стояти на дорозі заборонено. Така машина їде геть з системи назавжди і як потенційний клієнт є втраченою для власника АЗС.

В найпростішому варіанті, шляхи руху потоків заявок по СМО можна зобразити у вигляді еквівалентної схеми, а додавши значення і позначення характеристик кожного елемента СМО, отримуємо остаточно схему, зображену на рисунку 2.15.

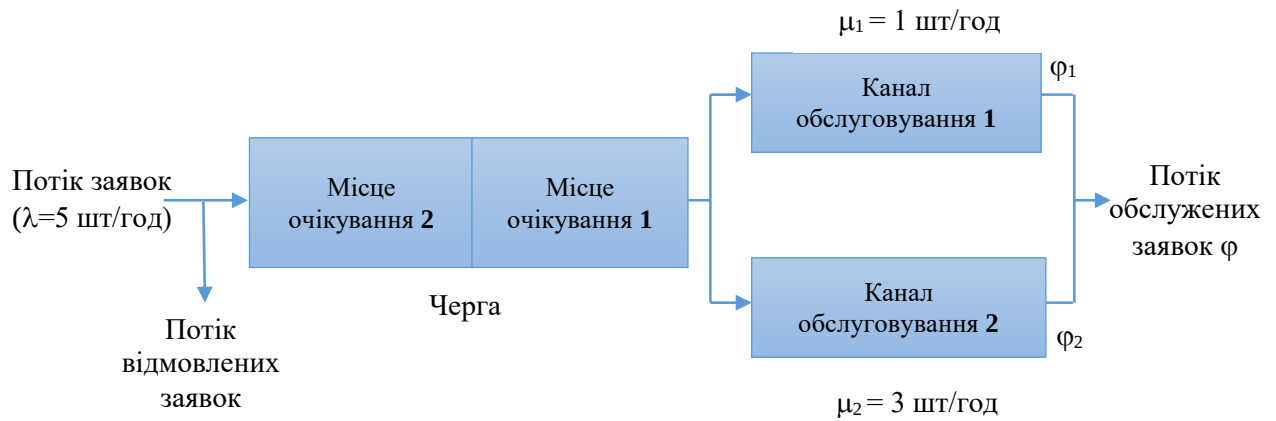


Рис. 2.15. Еквівалентна схема об'єкта моделювання

Особливістю даної схеми є різні інтенсивності обслуговування в кожному каналі. Саме внаслідок цього аналітичні розрахунки показників ефективності даної СМО є доволі складними.

2.3.2. Побудова часової діаграми роботи СМО

Розглянемо один із методів дослідження СМО. Застосуємо *принцип послідовної проводки заявок*. Його ідея полягає в тому, що заявку проводять через всю систему від входу до виходу, і тільки після цього беруться за моделювання наступної заявки.

Для наочності побудуємо часову діаграму роботи СМО, відображаючи на кожній лінійці (вісь часу t) стан окремого елемента системи. Часових лінійок будується стільки, скільки є різних місць в СМО, тобто потоків. У нашому прикладі їх 7 (потік заявок, потік очікування на першому місці в черзі, потік очікування на другому місці в черзі, потік обслуговування в каналі 1, потік обслуговування в каналі 2, потік обслужених системою заявок, потік відмовлених заявок).

Для генерації часу приходу заявок використовуємо формулу обчислення інтервалу між моментами приходу двох випадкових подій:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r). \quad (2.97)$$

У цій формулі величина потоку λ повинна бути задана, r – випадкове рівномірно розподілене число від 0 до 1 з ГВЧ.

Приклад 2.8. Згенерувати потік з 10 випадкових подій з інтенсивністю появи подій 5 шт/год.

Розв'язання. Візьмемо випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі від 0 до 1 та обчислимо їх натуральні логарифми (табл. 2).

Фрагмент таблиці випадкових чисел і їх логарифмів

$r_{pp}[0; 1]$	$\ln(r_{pp}[0; 1])$
0.0333	-3.4022
0.3557	-1.0337
0.2172	-1.5269
0.5370	-0.6218

Формула пуассонівського потоку визначає відстань між двома випадковими подіями за формулою:

$$t = -\frac{\ln(r_{pp})}{\lambda}. \quad (2.98)$$

Тоді, враховуючи, що $\lambda = 5$, маємо відстані між двома випадковими сусідніми подіями: 0,68, 0,21, 0,31, 0,12 години, тобто події настануть: перша – в момент часу $t = 0$, друга – в момент часу $t = 0,68$, третя – в момент часу $t = 0,89$, четверта – в момент часу $t = 1,20$, п'ята – в момент часу $t = 1,32$ і так далі. Події – прихід заявок, відобразимо на першій лінійці (рис. 2.16).

Береться перша заявка і, так як в цей момент канали вільні, встановлюється на обслуговування в перший канал. Заявка 1 переноситься на лінійку «1 канал».

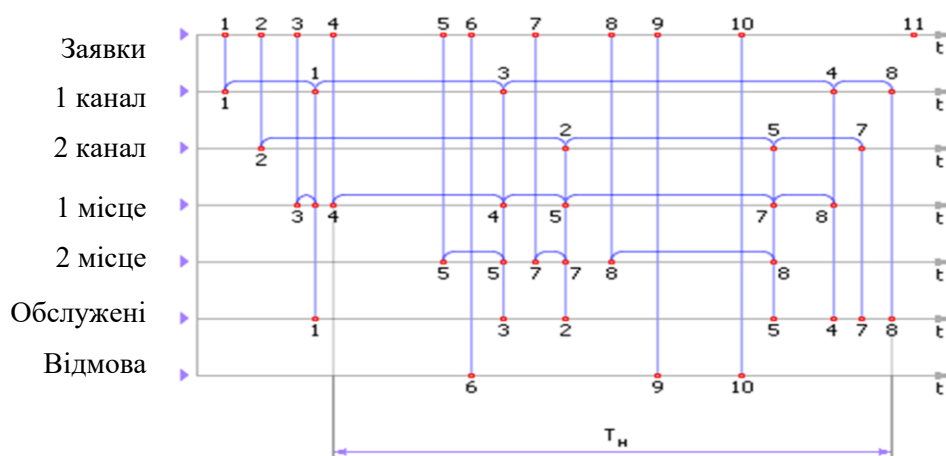


Рис. 2.16. Часова діаграма роботи СМО

Час обслуговування в каналі теж випадкове і обчислюється за аналогічною формулою:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(r). \quad (2.99)$$

де роль інтенсивності відіграє величина інтенсивності обслуговування μ_1 або μ_2 , в залежності від того, який канал обслуговує заявку. Знаходимо на діаграмі момент

закінчення обслуговування, відкладаючи згенерований час обслуговування від моменту початку обслуговування, та опускаємо заявку на лінійку «Обслужені».

Заявка пройшла в СМО весь шлях. Тепер можна, згідно з *принципом послідовної проводки заявок*, також проімітувати шлях другої заявки.

Якщо в деякий момент виявиться, що обидва канали зайняті, то слід встановити заявку в чергу. На рисунку 2.16 це заявка з номером 3. Зауважимо, що за умовами завдання в черзі, на відміну від каналів, заявки знаходяться не випадковий час, а очікують, коли звільниться якийсь із каналів. Після звільнення каналу заявка піднімається на лінійку відповідного каналу і там виконується її обслуговування.

Якщо всі місця в черзі в момент, коли прийде чергова заявка, будуть зайняті, то заявку слід відправити на лінійку «Відмова». На рисунку 2.16 це заявка з номером 6.

Процедуру імітації обслуговування заявок продовжують деякий час спостереження T_n . Чим більше цей час, тим точніше в подальшому будуть результати моделювання. Реально для простих систем вибирають T_n , що дорівнює 50 – 100 і більше годин, хоча іноді краще міряти цю величину кількістю розглянутих заявок.

2.3.3. Аналіз часової діаграми роботи СМО

Аналіз проведемо на прикладі 2.8. Спочатку потрібно дочекатися усталеного режиму. Відкидаємо перші чотири заявки, які не є характерними. Вони протікають під час процесу встановлення роботи системи. Вимірюємо час спостереження, припустимо, що в нашому прикладі воно складе $T_n=5$ год. Підраховуємо з діаграми кількість обслужених заявок $N_{обс}$, проміжки часу простою та інші величини. В результаті можемо обчислити показники, що характеризують якість роботи СМО.

Ймовірність обслуговування. Для розрахунку ймовірності обслуговування заявки в системі досить розділити число заявок $N_{обс}$, яким вдалося пройти обслуговування за час T_n (див. лінійку «обслужених»), на число заявок N , які хотіли бути обслуженими за цей же час:

$$P_{обс} = \frac{N_{обс}}{N}. \quad (2.100)$$

Для нашого прикладу:

$$P_{обс} = \frac{6}{7} = 0,857.$$

Пропускна здатність системи. Для розрахунку пропускної здатності системи досить розділити число обслужених заявок $N_{обс}$ на час T_n , за який сталося це обслуговування (див. лінійку «Обслужені»):

$$A = \frac{N_{обс}}{T_n}. \quad (2.101)$$

Для нашого прикладу:

$$A = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ (шт/год)}.$$

Ймовірність відмови. Для розрахунку ймовірності відмови заявці в обслуговуванні досить розділити число заявок $N_{\text{відм}}$, яким відмовили за час T_n (див. лінійку «Відмовлені»), на число заявок N , які надійшли в систему були обслужені:

$$P_{\text{відм}} = \frac{N_{\text{відм}}}{N}. \quad (2.102)$$

Для нашого прикладу:

$$P_{\text{відм}} = \frac{3}{7} = 0,43.$$

Зверніть увагу, що сума $P_{\text{відм}} + P_{\text{обс}}$ в теорії має дорівнювати 1, але насправді експериментально вийшло, що $P_{\text{відм}} + P_{\text{обс}} = 0,857 + 0,43 = 1,287$. Ця неточність пояснюється тим, що час спостереження значення часу спостереження T_n мале і статистика накопичена недостатня для отримання точної відповіді. Похибка цього показника зараз становить 29%.

Ймовірність зайнятості одного каналу. Обчислюється за формулою:

$$P_1 = \frac{t_{\text{зайн}}}{T_n}, \quad (2.103)$$

де $t_{\text{зайн}}$ – час зайнятості тільки одного каналу (першого або другого).

Вимірюванням підлягають часові відрізки, на яких відбуваються певні події. Наприклад, на діаграмі шукаються такі відрізки, під час яких зайняті або перший або другий канал. У даному прикладі є один такий відрізок в кінці діаграми довжиною 0,05 години. Частка цього відрізка в загальному часу розгляду ($T_n = 5$ годин) визначається діленням і становить шукану ймовірність зайнятості.

Для нашого прикладу:

$$P_1 = \frac{0,05}{5} = 0,01.$$

Ймовірність зайнятості двох каналів. Обчислюється за формулою:

$$P_2 = \frac{t_{\text{зайн}}}{T_n}, \quad (2.104)$$

де $t_{\text{зайн}}$ – час зайнятості одночасно двох каналів.

На діаграмі знаходяться такі відрізки, під час яких одночасно зайняті і перший, і другий канал. У даному прикладі таких відрізків чотири, їх сума дорівнює 4,95 години. Частка тривалості цих подій в загальному часі спостереження ($T_n = 5$ годин) визначається діленням і становить шукану ймовірність зайнятості.

Для нашого прикладу:

$$P_2 = \frac{4,95}{5} = 0,99.$$

Середня кількість зайнятих каналів. Щоб підрахувати, скільки каналів зайнято в системі в середньому, досить знати частку (ймовірність зайнятості одного каналу) і помножити на вагу цієї частки (один канал), знати частку (ймовірність зайнятості двох каналів) і помножити на вагу цієї частки (два канали) і так далі:

$$N_{\text{зайн}} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_1 = P_1 + 2P_1. \quad (2.105)$$

Для нашого прикладу:

$$N_{\text{зайн}} = 0,01 + 2 \cdot 0,99 = 1,99.$$

Отримане число 1,99 говорить про те, що з можливих двох каналів в середньому завантажено 1,99 каналу. Це високий показник завантаження, 99,5%. Система добре використовує ресурс.

Ймовірність простою хоча б одного каналу. Обчислюється за формулою:

$$P_1^* = \frac{T_{\text{простою1}}}{T_H}. \quad (2.106)$$

Для нашого прикладу:

$$P_1^* = \frac{0,05}{5} = 0,01.$$

Ймовірність простою двох каналів одночасно. Обчислюється за формулою:

$$P_2^* = \frac{T_{\text{простою2}}}{T_H}. \quad (2.107)$$

Для нашого прикладу:

$$P_2^* = 0.$$

Ймовірність простою всієї системи. Обчислюється за формулою:

$$P_c^* = \frac{T_{\text{простою системи}}}{T_H}. \quad (2.108)$$

Для нашого прикладу:

$$P_c^* = 0.$$

Середня кількість заявок в черзі. Щоб визначити середню кількість заявок в черзі, треба визначити окремо ймовірність того, що в черзі буде одна заявка $P_{1ч}$, ймовірність того, в черзі буде стояти дві заявки $P_{2ч}$ і т.д., потім з відповідними вагами їх скласти. Отже,

$$N_{\text{черг}} = 0 \cdot P_{0ч} + 1 \cdot P_{1ч} + 2 \cdot P_{0ч} + \dots + n \cdot P_{nч}. \quad (2.109)$$

Для нашого прикладу:

$$N_{\text{черг}} = 0 \cdot P_{0ч} + 1 \cdot P_{1ч} + 2 \cdot P_{2ч} = 0,34 + 2 \cdot 0,64 = 1,62 \text{ (шт.)}.$$

Ймовірність того, що в черзі буде одна заявка. Обчислюється за формулою:

$$P_{1ч} = \frac{T_{1ч}}{T_H}. \quad (2.110)$$

Всього на діаграмі чотири таких відрізка, які в сумі дають 1,7 години, тому:

$$P_{1ч} = \frac{1,7}{5} = 0,34.$$

Ймовірність того, в черзі буде стояти одночасно дві заявки. Обчислюється за формулою:

$$P_{2ч} = \frac{T_{2ч}}{T_H}. \quad (2.111)$$

Всього на діаграмі три таких відрізка, які в сумі дають 3,25 години, тому:

$$P_{2ч} = \frac{3,25}{5} = 0,64.$$

Середній час очікування заявки в черзі. Потрібно скласти всі часові інтервали, протягом яких будь-яка заявка перебувала в черзі, і розділити на кількість заявок, тобто:

$$T_{ср.оч} = \frac{\sum_{i=1}^N T_{оч.i}}{N}. \quad (2.112)$$

На часовій діаграмі таких заявок 4.

Середній час обслуговування заявки. Потрібно скласти всі часові інтервали, протягом яких будь-яка заявка перебувала на обслуговуванні в будь-якому каналі, та розділити на кількість заявок, тобто:

$$T_{ср.обс} = \frac{\sum_{i=1}^N T_{обс.i}}{N}. \quad (2.113)$$

Середній час перебування заявки в системі. Обчислюється за формулою:

$$T_{ср.сист} = T_{ср.оч} + T_{ср.обс}. \quad (2.114)$$

Середня кількість заявок в системі. Обчислюється за формулою:

$$N_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^K (N_{2i} + N_{3i} + N_{4i} + N_{5i})}{K}. \quad (2.115)$$

Далі слід оцінити **точність** кожного з отриманих результатів. Тобто відповісти на питання: наскільки ми можемо довіряти цим значенням? Якщо точність не є задовільною, то слід збільшити час експерименту і тим самим поліпшити статистику.

Після цього слід скласти таблицю результатів і оцінити значення кожного з них з точки зору клієнта і власника СМО (табл. 3). В кінці, з огляду на сказане в кожному пункті, слід зробити загальний висновок. Таблиця повинна мати приблизно такий вигляд, який показано в таблиці 3.

Таблиця 3.

Показники СМО

Показник	Формула	Значення	Інтереси власника СМО	Інтереси клієнта СМО
1	2	3	4	5
Ймовірність обслуговування	$P_{\text{обс.}} = N_{\text{обс.}}/N$	0,857	Ймовірність обслуговування мала, багато клієнтів йдуть із системи незадоволеними, їхні гроші для власника втрачені. Це «мінус». Рекомендація: збільшити ймовірність обслуговування.	Ймовірність обслуговування мала, кожен третій клієнт хоче, але не може обслужити. Це «мінус». Рекомендація: збільшити ймовірність обслуговування.
...	...	...	...	...
Середнє число заявок в черзі	$N_{\text{ср.з}} = P_{13} + 2 \cdot P_{23}$	1,62	Черга практично весь час вся забита. Всі місця в черзі використовуються досить ефективно. Вкладення на організацію черги окупають витрати на неї. Це «плюс». Клієнти, які довго стоять в черзі, можуть піти, не дочекавшись обслуговування. Клієнти, простоюючи, можуть завдати шкоди системі, ламати обладнання. Багато відмов, втрачених клієнтів. Це «мінуси». Рекомендація: збільшити число місць в черзі, збільшити пропускну здатність.	Черга практично весь час вся забита. Клієнту доводиться стояти в черзі, перш ніж він потрапить на обслуговування. Клієнт може не потрапити навіть в чергу. Це «мінус». Рекомендація: збільшити пропускну здатність, збільшити число місць в черзі.
...		..	...	...

Продовження таблиці 3.

1	2	3	4	5
Загальний висновок:			В інтересах власника: а) збільшити пропускну здатність каналів, щоб не втрачати клієнтів (правда, модернізація каналів коштує грошей); б) збільшити число місць в черзі (це теж коштує грошей), щоб затримати потенційних клієнтів.	Клієнти зацікавлені в значному збільшенні пропускну здатності для зменшення часу очікування та зменшення відмов.

Таким чином, за результатами імітаційного моделювання слід надати практичні рекомендації щодо підвищення ефективності СМО. Це, можливо буде, зміна числа каналів обслуговування, підвищення інтенсивності обслуговування, зміна дисципліни обслуговування, тощо.

2.3.4. Загальні принципи побудови алгоритмів для імітаційного моделювання

При реалізації моделюють алгоритмів на комп'ютері є певні загальні закономірності, які ми обговоримо нижче.

Основна проблема при складанні алгоритмів на комп'ютері з послідовною обробкою процесів полягає в тому, що при моделюванні необхідно відстежувати безліч процесів, які в реальному часі відбуваються паралельно. У зв'язку з цим алгоритми моделювання мають свої особливості:

- просування системи в часі, відстеження тимчасової координати;
- забезпечення синхронної роботи об'єктів, з яких складається система, що моделюється.

На даний момент відомі чотири основні принципи регламентації подій.

1. Принцип Δt («дельта-те»).
2. Принцип особливих станів.
3. Принцип послідовної проводки заявок.
4. Принцип паралельної роботи об'єктів (об'єктний принцип моделювання).

Принцип Δt

Принцип полягає в тому, що алгоритмом моделювання імітується рух, тобто зміна стану системи, в фіксовані моменти часу: t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ...

Для цього заводиться лічильник часу (годинник), який на кожному циклі збільшує своє значення t на величину кроку в часі Δt , починаючи з нуля (початок моделювання). Таким чином, зміни системи відслідковуються такт за тактом в задані моменти: t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ...

Особливості реалізації принципу Δt

Це найбільш універсальний з розглянутих принципів, так як застосовується для дуже широкого класу систем. Він же є найбільш простим в реалізації, оскільки принцип Δt збігається з розумінням людини про час, як про послідовне явище, з постійним темпом.

Однак це самий неекономічний принцип, оскільки вся система аналізується та моделює алгоритмом на кожному такті, навіть якщо в ній не відбувається ніяких змін.

Інший недолік полягає в тому, що часи подій округлюються до величини Δt , що веде до похибок у визначенні змінних, що характеризують систему.

Приклад 2.9. Моделюється склад виробів з максимальним обсягом G (рис. 2.17).

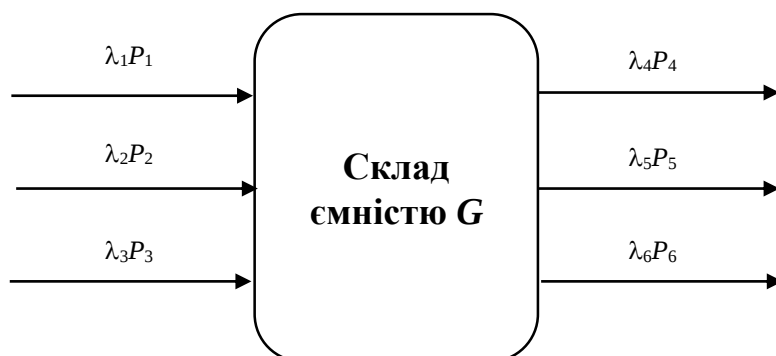


Рис. 2.17. Схема виробничої системи, що моделюється

Склад приймає вироби від трьох постачальників (позначимо номери вхідних потоків виробів 1, 2, 3) і видає їх трьом споживачам (позначимо номери вихідних потоків виробів 4, 5, 6). Прийнемо в якості характеристики кожного входу **інтенсивність i -го потоку виробів (λ_i)**. Інтенсивність характеризує в середньому відстань між двома моментами часу прибуття виробів на склад.

Позначимо через P_i **розмір партії виробів**, що йдуть або приходять на склад. Тобто цими змінними ми визначили, коли і скільки приходить або йде виробів на той чи інший вхід або вихід складу (блок 1, рис. 6).

Позначимо змінною Z **поточну кількість виробів на складі**. Якщо вироби приходять на склад (потоки 1, 2, 3), то Z збільшується на P_1 , P_2 або P_3 . Якщо вироби вилучаються зі складу (потоки 4, 5, 6), то Z зменшується на P_4 , P_5 або P_6 . Тобто Z

грає роль лічильника виробів, що знаходяться на складі в окремий момент часу t . Початковий стан складу на момент $t = 0$ приймемо $Z: = Z_0$.

Алгоритм побудуємо таким чином, щоб обчислити ймовірності подій виникнення дефіциту P_d і переповнення P_n на складі.

Для накопичення *надійної статистики експеримент повторюється* KK раз. За кількістю експериментів стежить лічильник експериментів k (блоки 2, 3, 8). Кожен експеримент триває від 0 до часу T_k (блоки 5, 7). Лічильник часу t відраховує час від 0 до T_k з дискретністю Δt (блок 11).

У кожному експерименті підраховується, скільки разів на складі в результаті дії вхідних сигналів (кількість поставлених і вилучених виробів) виникає ситуація дефіциту (блок 13). За цим стежить лічильник D , якщо на складі виникає ситуація $Z < 0$ (блок 13), значить, виникає дефіцит виробів для обробки і лічильник збільшує своє значення на 1 (блок 16). Якщо дефіцит не виникає $Z \geq 0$, то лічильник свого значення не змінює.

Оскільки всього може бути розглянуто $N = \frac{T_k}{\Delta T}$ тактів, то ймовірність виникнення дефіциту може бути приблизно оцінена частотою виникнення цих подій $P_d = \frac{D}{N}$, або з урахуванням того, що лічильник D накопичувався протягом KK експериментів, то $P_d = \frac{D/N}{KK}$. Остаточню, підставляючи N : $P_d = \frac{D \cdot \Delta t / T_k}{KK}$ (блоки 4, 6). Розрахунок ймовірності переповнення складу моделюється аналогічно (враховується, що переповнення виникає, коли Z стає більше ємності складу G) (блоки 15, 19).

Зауважимо, що оскільки на складі в реальності не може бути виробів менше нуля, то значення Z в момент виявлення цього факту має бути повернуто на найближчу границю, тобто: $Z=0$ (блок 16). Теж саме стосується ситуації переповнення ($Z = G$) (блок 19).

Алгоритм представляє собою цикл за часом від 0 до T_k з кроком Δt . Моделювання проводиться в часі. У кожній ітерації циклу (на кожному такті часу) перевіряється, чи лежить згенероване значення T_i в інтервалі часу $[T, T + \Delta t]$: $T \leq T_i < T + \Delta t$ (блок 12). Якщо подія відбувається в даний момент, то визначається, який i -ий вхідний сигнал визначив цю подію (блоки 22, 10). Обробляється ситуація (блок 17 або 18) і генерується час наступної події (блоки 20, 21). Перевірка на кожному такті відбувається за всіма можливими вхідним і вихідним сигналами.

Блок-схема алгоритму показана на рисунку 2.18.

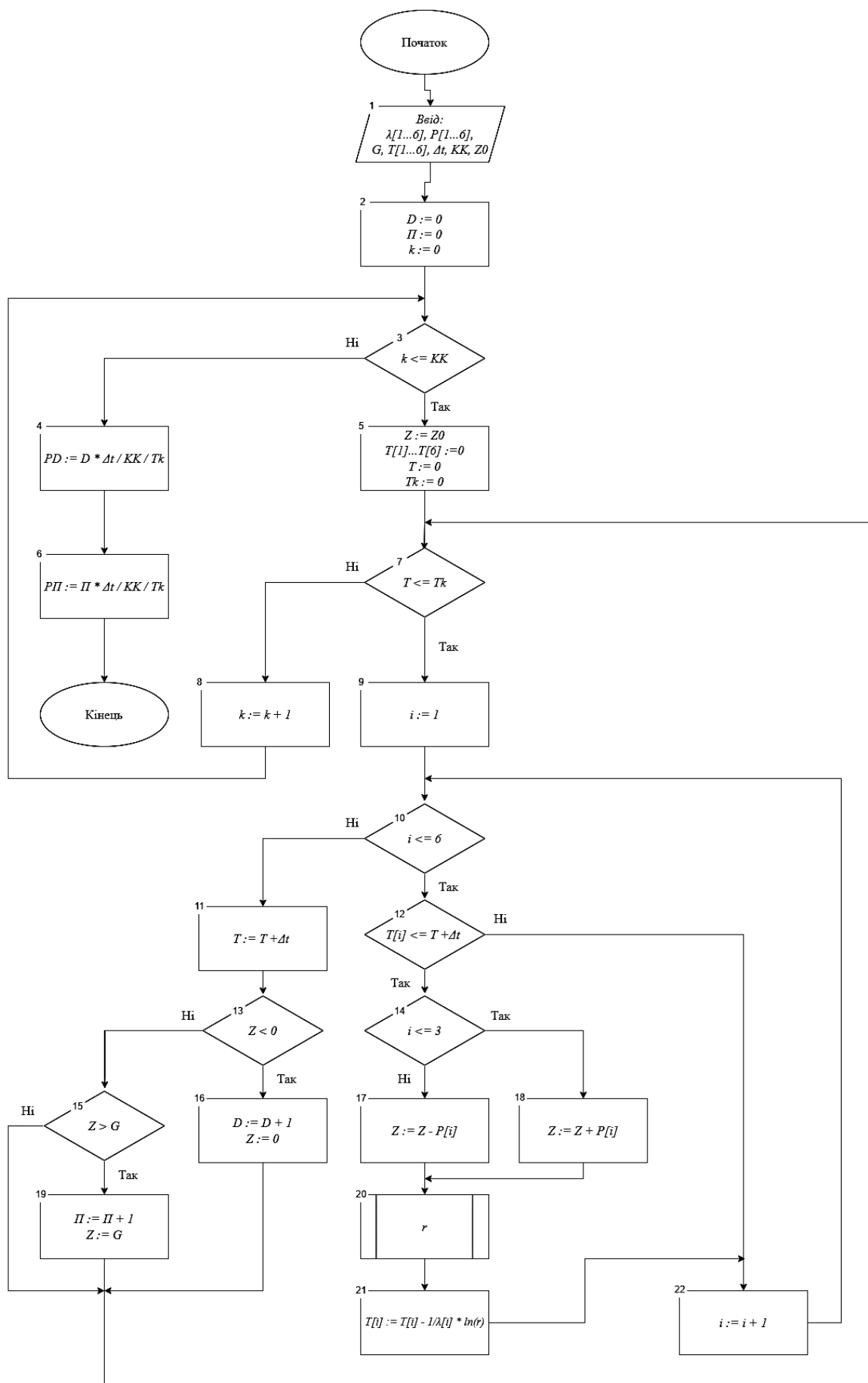


Рис. 2.18. Блок-схема алгоритму, реалізованого за принципом Δt .
Приклад – моделювання виробничого складу

Принцип особливих станів

Назвемо стан, в якому зазвичай знаходиться система, *звичайним станом*. Такі стани інтересу не представляють, хоча займають більшу частину часу.

Особливі стани – це такі стани в ізольовані моменти часу, в яких характеристики системи змінюються стрибкоподібно.

Для зміни стану системи потрібна певна причина, наприклад, прихід чергового вхідного сигналу. Ясно, що з точки зору моделювання *інтерес представляє саме зміна характеристик системи*. Тобто принцип вимагає від нас відстежувати моменти переходу системи з одного особливого стану в інше.

У порівнянні з попереднім випадком, *ми не будемо перевіряти зміну стану системи в кожен момент часу*.

Виберемо серед майбутніх моментів тільки ті, в які відбувається надходження або вивіз виробів зі складу (блок 7, рис. 2.19).

Визначивши такий момент, відразу перейдемо в нього стрибком, змінивши значення лічильника часу на величину $-\frac{\ln(r)}{\lambda_i}$ (блок 18). Всі інші блоки алгоритму є схожими на попередній алгоритм.

Зауважимо тільки, що цикл опитування вхідних сигналів ліквідовано, оскільки блок 7 чітко відповідає на питання, який із i -их сигналів мав місце.

Описана процедура суттєво економить час моделювання.

Блок-схема алгоритму показана на рисунку 2.19.

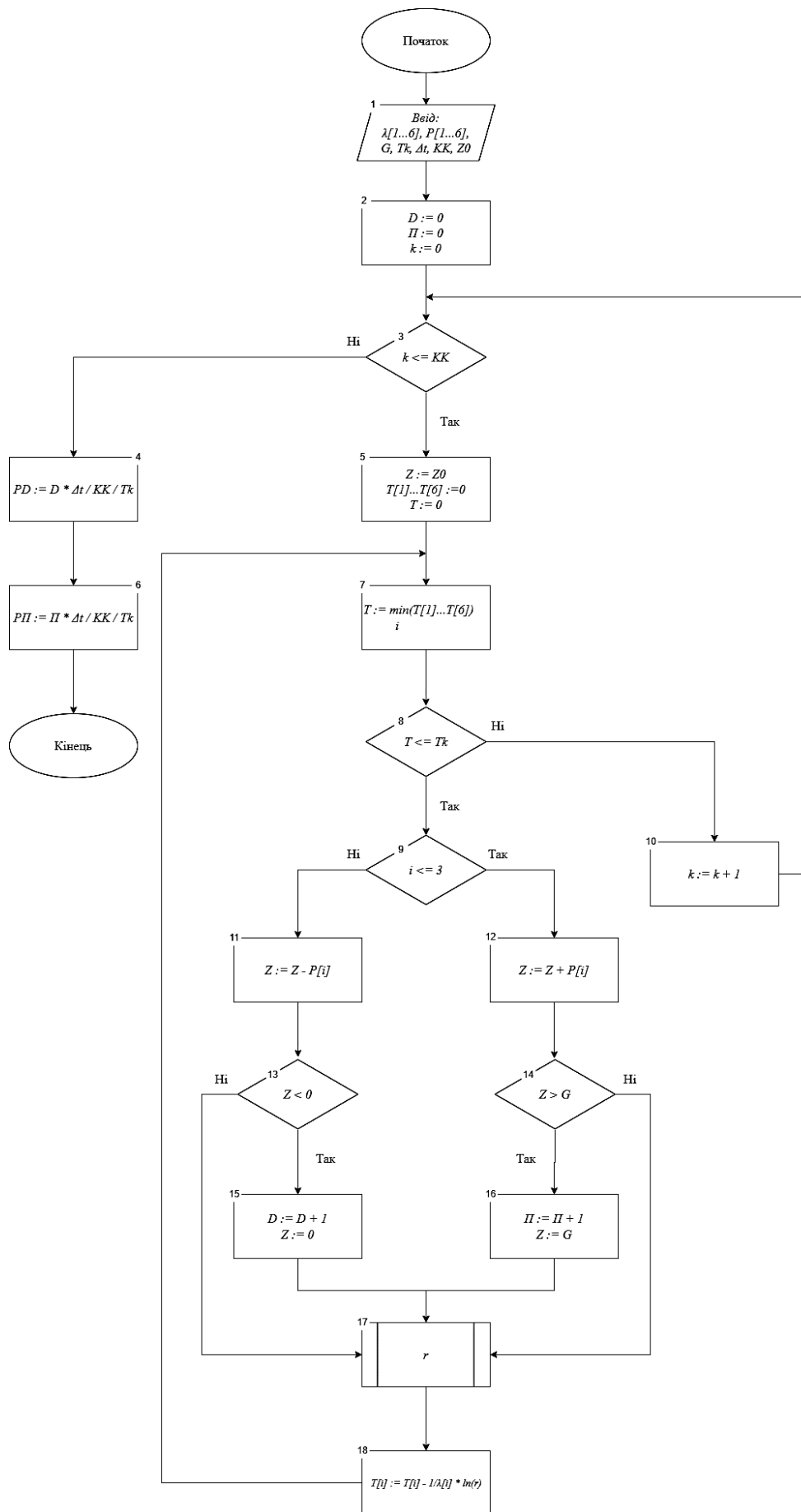


Рис. 2.19. Блок-схема алгоритму, реалізованого за принципом особливих станів. Приклад – моделювання виробничого складу

Принцип послідовної проводки заявок

Принцип полягає в тому, що кожна заявка відстежується від моменту надходження її в систему до моменту її виходу з системи. І тільки потім розглядається наступна заявка.

Розглянемо роботу алгоритму на прикладі двоканальної системи масового обслуговування з двома місцями в загальній черзі з дисципліною FIFO і відмовами при переповненні черги (рис. 2.20).

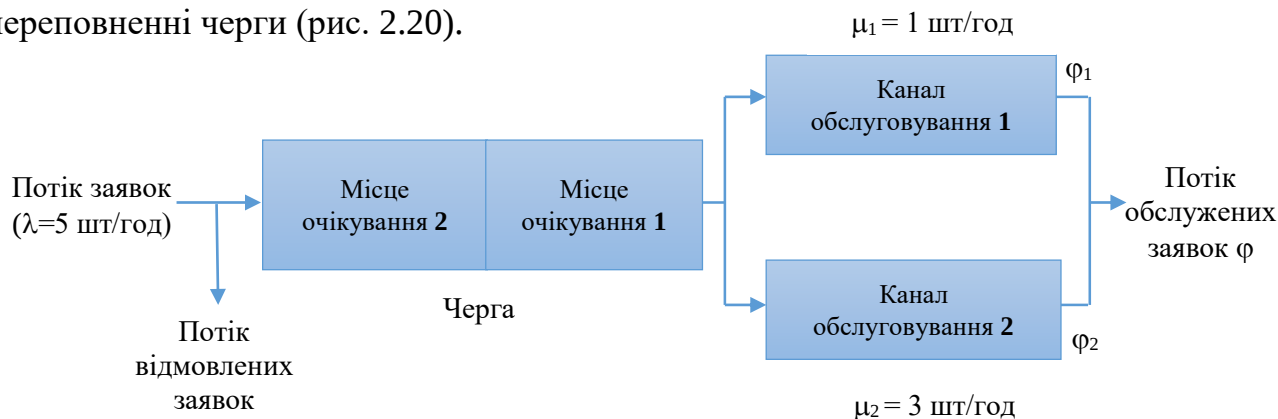


Рис. 2.20. Схема системи масового обслуговування з двома каналами і обмеженою чергою

Позначимо: λ — інтенсивність приходу заявки; μ_i — інтенсивність обслуговування заявки. Побудуємо алгоритм, який визначає ймовірності обслуговування заявок і відмови заявок, а також пропускну здатність системи.

Щоб зрозуміти роботу алгоритму, уявімо собі для наочності паралельні лінійки — осі часу для кожного з місць, в яких може опинитися заявка в процесі обслуговування (рис. 2.21).

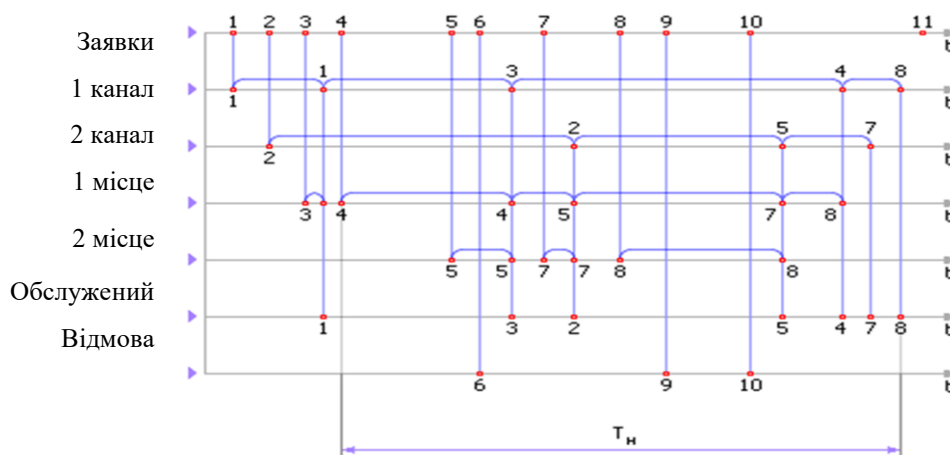


Рис. 2.21. Часова діаграма роботи СМО

Генеруємо заявку (блоки 3, 4, рис. 2.23). Випадковий момент часу, коли заявка прийшла в систему, дорівнює T_c . Час між двома випадковими заявками імітується

формулою $\tau = -\frac{1}{\lambda} \ln(r)$, яке додається до T_c попередньої заявки $T_c := T_c - \frac{1}{\lambda} \ln(r)$.

Врахуємо цей факт в лічильнику N заявок, що надійшли до системи (блок 4).

Послідовно порівнюємо T_c в порядку пріоритетів (блоки 5, 6, 7, 8) з часом звільнення T_1 каналу 1, каналу 2 – T_2 , місця в черзі 1 – T_3 , місця в черзі 2 – T_4 . Як тільки виявляється факт того, що місце в системі вільно (рис. 2.22): $T_c > T_1$, або $T_c > T_2$, або $T_c > T_3$, або $T_c > T_4$, так негайно переводимо заявку на вільне місце і імітуємо обробку її на цьому місці.

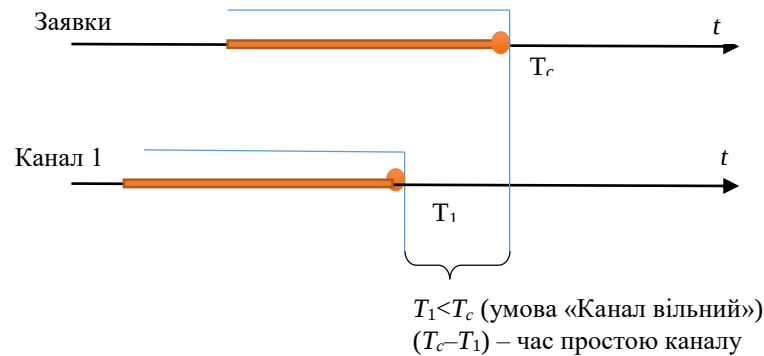


Рис. 2.22. Механізм визначення звільнення каналу

Припустимо, що звільнилося місце в першому каналі. Обробка полягає в тому, що обчислюється час простою цього каналу до приходу заявки (наприклад, $T_c - T_1$), і цей час додається в лічильник часу простою (блок 15). Обчислюється наступний час зміни стану каналу – модифікується змінна T_1 , яка вкаже нам надалі, коли знову звільниться канал. Величина T_1 змінюється на величину $\tau = -\frac{1}{\mu_1} \ln(r)$ – час

обслуговування, який відраховується від моменту початку обслуговування T_c . Лічильник обслугованих заявок $N_{об}$ збільшується на одиницю. Аналогічно обробка відбувається і в другому каналі, якщо заявка потрапить саме туди (блок 14).

Особливість обробки заявки в черзі полягає в тому, що перше місце в черзі звільняється, коли звільняється місце в одному з каналів. Природньо, що заявка йде туди, де місце звільняється раніше (блоки 5, 6). Друге місце в черзі звільняється одночасно з першим, так як заявка в черзі пересувається на перше місце, що вивільнилося (блок 12). Далі алгоритм генерує в циклі наступну заявку (блоки 3, 16). Зупинка моделювання відбувається тоді, коли кожна лінійка буде заповнена до моменту T_k (блок 16). Після цього відбувається обробка статистичних результатів, накопичених в лічильниках (блок 17). Імовірність оцінюється частотою появи події, яка обчислюється як відношення кількості подій, що з'явилися, до кількості можливих таких появ.

Блок-схема алгоритму показана на рисунку 2.23.

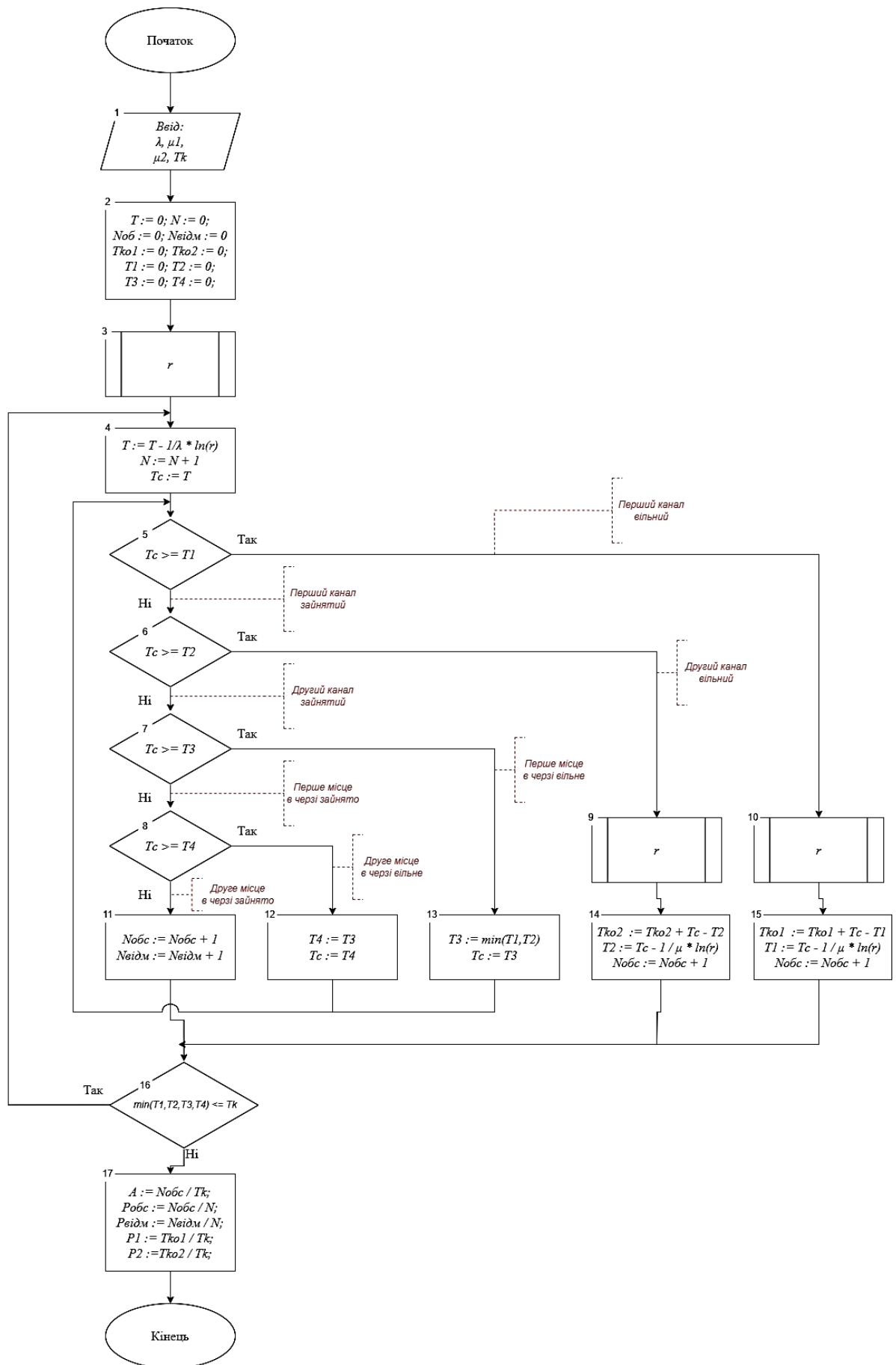


Рис. 2.23. Блок-схема алгоритму, реалізованого за принципом послідовної проводки заявок. Приклад – моделювання системи масового обслуговування

Слід нагадати, що чим більше час моделювання, тим точніше буде обчислений результат.

Примітка. На практиці зазвичай застосовують комбінації всіх трьох методів.

Питання для самоперевірки.

1. Що називається системою масового обслуговування? Назвіть приклади.
2. Які основні елементи СМО?
3. Назвіть класифікацію СМО за різними ознаками.
4. Які є показники ефективності СМО?
5. Сформулюйте задачі імітаційне моделювання СМО.
6. З чого складається схема статистичного експерименту для вивчення СМО?
7. Який типовий набір елементів містять в собі всі моделі СМО?
8. Охарактеризуйте принцип послідовної проводки заявок.
9. Яку формулу використовують обчислення інтервалу між моментами приходу двох випадкових подій для генерації часу приходу заявок?
10. Які показники характеризують якість роботи СМО?
11. Охарактеризуйте загальні принципи побудови алгоритмів для імітаційного моделювання.
12. Які особливості реалізації принципу Δt ?
13. Які особливості реалізації принципу особливих станів?
14. Які особливості реалізації принципу послідовної проводки заявок?

Задачі для самостійної роботи

1. Відділ ТЗІ має у своєму штаті 3 консультанти, які здійснюють консультації фахівців свого підприємства та віддалених філіалів за допомогою багатоканального телефона. За статистичними даними за добу поступає в середньому 240 запитів на консультації. Середня тривалість однієї консультації дорівнює 4 хв. Довжина черги не має перевищувати 5 вхідних дзвінків, які очікують своєї черги в порядку надходження. Вважається, що потоки заявок та обслуговування найпростіші.

а) Визначити характеристики обслуговування групи консультантів в усталеному режимі: ймовірність відмови в обслуговуванні; відносну пропускну спроможність; абсолютну пропускну спроможність; середнє число зайнятих каналів; середнє число заявок в черзі; середній час очікування заявки в черзі.

б) Провести імітаційне моделювання функціонування СМО. Прийняти, що середня тривалість однієї консультації не змінюється. Програму для імітаційного моделювання розробити на будь-якій мові програмування. Тривалість функціонування СМО вибрати самостійно.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Павленко П.М., Філоненко С.Ф., Чередніков О.М., Трейтяк В.В. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. Київ: НАУ, 2017. 392 с.
2. Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є.А. Лавров, Л.П. Перхун, В.В. Шендрік та ін. Суми.: Сумський державний університет, 2017. 212 с.
3. Чуйко Г.П., Дворник О.В., Яремчук О.М. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 244 с.
4. Кветний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р., Софіна О.Ю., Шушура О.М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч. 1. Вінниця: ВНТУ, 2013. 191с.
5. Кветний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р., Софіна О.Ю., Шушура О.М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч. 2. Вінниця: ВНТУ, 2013. 235с.
6. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник / за ред. М.С. Сегеди. 2-ге вид. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. 606 с.
7. Погоруй А. О. Вступ до теорії випадкових процесів: навч. посіб. Чемерис – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 70 с.
8. Литвинов А.Л. Теорія систем масового обслуговування: навч. посіб. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. 141 с.
9. Голоскоков О.Є., Голоскокова А.О., Мошко Є.О. Основи теорії експоненціальних систем масового обслуговування: навч. посіб. Харків: НТУ «ХП», 2017. 312.
10. Теорія ймовірностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем і веб-технологій» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3,7 Мбайт). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42046>.
11. Коцовський В.М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Ч.1. Ужгород: УНУ, 2016. 96 с.
12. Павленко П.М. Основи математичного моделювання систем і процесів: навч. посіб. Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2013. 201 с.