

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А.М. Сільвестров, М.Я. Островерхов, О.В. Шефер,
Н.А. Ладік, Д.К. Зіменков

**СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО
КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ
КОМПЛЕКСАМИ**

Навчальний посібник

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

УДК 621.31:681.51.01/.09](075.8)

С40

Рекомендовано, як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр» за спеціальності 141 - «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Друкується за рішенням методичної ради КПІ імені Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.), за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 10 від 17.05.2022 р.), реєстраційний номер 21/22- 446.

Рецензенти:

Бідюк П.І., доктор технічних наук, професор, професор КПІ ім. Ігоря Сікорського;

Синєглазов В.М., доктор технічних наук, професор, професор Національного авіаційного університету

Сільвестров А.М. Островерхов М.Я., Шефер О.В., Ладік Н.А., Зіменков Д.К. Системи автоматичного керування технологічними комплексами: навчальний посібник. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. – 466 с.

Подано основні положення класичної та сучасної теорії систем автоматичного керування технологічними комплексами, лінійні і нелінійні, неперервні і дискретні системи. Викладено їх математичний опис, методи дослідження усталених і перехідних режимів, аналіз стійкості і якості, методи синтезу коригуючих пристроїв та модального керування. Наведені приклади і завдання для самостійної роботи. Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти, спеціальності 141 - «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», а також буде корисними для студентів інших технічних спеціальностей і спеціалістів зі створення й експлуатації сучасних систем автоматичного керування.

УДК 621.313(07)

ISBN 978-617-95202-7-3

© А.М.Сільвестров М.Я.Островерхов,
О.В.Шефер, Н.А.Ладік, Д.К.Зіменков

ПЕРЕДМОВА

Системи автоматичного керування технологічними комплексами – це фундаментальна інженерно-технічна дисципліна, яка входить до навчальних планів технічних університетів світу і є базовим курсом та багатьох інших технічних спеціальностей.

Посібник відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Системи автоматичного керування технологічними комплексами», яка викладається студентам напрямку підготовки фахівців 141- "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

Мета дисципліни – формування у студентів знань, умінь і навичок з розв’язання завдань аналізу і синтезу систем автоматичного керування (САК) динамічними об’єктами різної природи і призначення (технологічні процеси, літальні апарати, енергетичні системи і т.ін.).

За результатами вивчення дисципліни **студент повинен знати:**

- принципи побудови САК, їх класифікацію, особливості розімкнених та замкнених систем, роль зворотного зв'язку;
- методику математичного опису САК простими об'єктами, лінеаризацію статичних характеристик елементів системи, складання рівнянь статички і динаміки;
- форми опису динамічних властивостей елементів та систем — диференціальні рівняння, передаточні функції, частотні та часові характеристики;
- властивості динамічних елементарних ланок, типові схеми їх з'єднання;
- правила перетворення структурних схем;
- методи оцінювання стійкості САК, критерії стійкості, визначення областей стійкості;
- показники та критерії якості перехідних процесів в системі;
- методи синтезу систем із заданими показниками якості та оптимізації параметрів налаштувань автоматичних регуляторів;
- методи аналізу дискретних систем, оцінки їх якості;

- особливості та характеристики нелінійних систем, застосування методу фазового простору до їх аналізу;
- властивості оптимальних систем.

Студенти повинні вміти:

- розробити структуру САК, скласти її математичну модель у вигляді диференційних рівнянь, визначити передаточні функції, частотні і часові характеристики;
- оцінити стійкість та якість перехідних процесів, вплив параметрів автоматичних регуляторів на стійкість і якість САК;
- розрахувати оптимальні настройки автоматичних регуляторів;
- застосовувати методи гармонічної та статистичної лінеаризації не лінійних САК;
- застосовувати математичні методи оптимізації при створенні автоматичних систем.

1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1 Актуальність курсу

Без САК не можливо забезпечити бажану якість роботи як простих (наприклад, терморегулятор нагрівача), так і складних об'єктів:

- атомних ЕС (перша АЕС побудована в 1954 році);
- штучних супутників та інших космічних апаратів (КА) (перший супутник створено в 1957 році);
- керування КА (м'яка посадка КА на Місяць в 1966 році);

Зараз важко знайти такий технологічний процес (ТП), де б не було автоматики. Створені і успішно працюють інтегровані АСУ, які на різних рівнях ієрархії містять САПР, АСУТП, САК та інші автоматичні системи.

1.2 Короткий історичний огляд

Автоматичні пристрої були відомі ще до нашої ери (для розваг, релігії та ін.).

В 1765 році було створено регулятор Ползунова – Уатта для підтримки рівня води у котлі.

В 1854 році Константиновим К.І. створено електромагнітний регулятор для регулювання швидкості обертання валу парової машини.

1875 рік – наукова робота Вишнеградського І.А. “Об Общей теории регуляторов”.

Суттєвий вклад в ТАК математиків А.М. Ляпунова, П.Л. Чебишева, інженера Н.Є. Жуковського, А.А. Андронova, В.С. Кулебакіна, І.М. Вознесенського, Б.В. Булгакова. М.М Крилова, М.М. Боголюбова, А.В. Михайлова.

Більш сучасні вчені: Б.М. Петров, Є.П. Попов, Г.С. Поспелов, А.В. Нетушил, А.А. Красовський, В.В. Солодовников, В.С. Пугачов,

Л.С. Голбдфарб, А.І. Лурье, О.С. Шаталов, О.О. Фельдбаум, Я.З. Ципкін, О.Г. Івахненко та ін. внесли безцінний вклад в ТАК.

1.3 Три підходи до створення САК

I підхід: *Аналіз* вже діючої САК (метод проб і похибок) :

а) Початкові дані :

- рівняння об'єкту ;
- вхід і бажаний вихід ;
- зовнішні збурення ;
- допустимі похибки $\epsilon_{\text{доп}}$ і запас стійкості ;
- показники якості перехідних процесів.

б) Алгоритм розрахунку :

- визначення коефіцієнту K підсилення за умови забезпечення допустимої усталеної похибки $\epsilon_{\text{доп.уст.}}$;
- розрахунок коригуючої ланки (КЛ) за умови забезпечення стійкості і якості САК ;
- перевірка шляхом побудови перехідного процесу бажаних якісних показників ;
- повернення до розрахунку більш складної КЛ, якщо якість не достатня.

II підхід: *Аналітичний метод* (за Н. Вінером) :

а) Початкові дані :

- рівняння об'єкту “вхід - вихід” ;
- зовнішні збурення ;
- показники якості ;
- допустимий розкид параметрів системи ;

б) Алгоритм розрахунку :

- встановлення класу системи, якщо структура САК не задана ;
- задавання показника $I(\alpha)$ якості САК , де α – вільні параметри ;
- оптимізація $I(\alpha)$ по α ;
- розрахунок за методом спектральної факторизації КЛ для отримання екстремуму $I(\alpha)$;

- перевірка і зміна вимог, якщо якість недостатня.

III підхід: Узагальнення другого підходу за Р. Калманом:

- рівняння об'єкту у змінних стану (керуючі змінні U і змінні X часу);
- накладення обмежень ;
- визначення оптимального закону керування $u(t)$, який доставляє екстремум показнику $I(x, u, a)$ якості з урахуванням початкових умов ;

I підхід – це класична ТАК, II підхід – оптимальні стаціонарні САК,

III підхід – оптимальні не стаціонарні.

1.4 Основні поняття і терміни

Керована система – об'єднання декількох керованих об'єктів підпорядкованих одній цілі .

Керуюча система – об'єднання засобів, які забезпечують виконання цілі керування.

Автоматична система – де ціль досягається без безпосередньої участі людини.

На рисунку 1.1 позначено : z – завдання керування i -им об'єктом ($i=1, 2, 3 \dots n$);

$(U_1, U_2, \dots, U_n)$ – вектор-функція керуючих впливів;

X – вектор-функція змінних стану;

f – вектор-функція зовнішніх збурень;

Y – вектор-функція спостережуваних змінних.

Завдання регулювання (САР) – спрощена задача керування, коли $U(\epsilon)$, де ϵ – похибка $x(t)$ відносно $x^*(t)$, об'єкт стаціонарний, детермінований. Це завдання першого підходу.

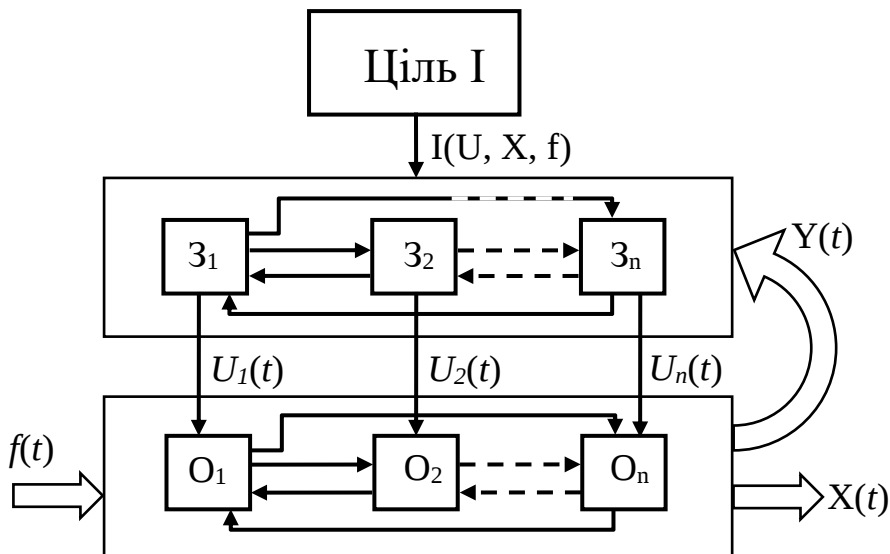


Рис. 1.1. САК

Відхилення ε регульованої величини x :

$$\varepsilon(t) = x(t) - x^*(t).$$

Вхідний сигнал $x^*(t)$ на вході елемента співставлення з сигналом $x(t)$ зворотного зв'язку.

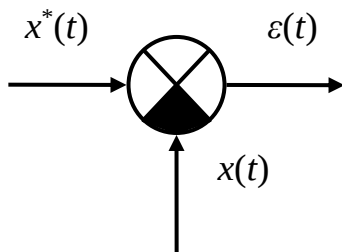


Рис. 1.2. Елемент співставлення

Основні елементи САР:

- об'єкт регулювання;
- регулюючий орган;
- чутливий або вимірюючий елемент;
- пристрій співставлення;
- задаючий пристрій;
- підсилюючий пристрій;
- виконуючий пристрій;
- коригуючий пристрій.

Закон регулювання – залежність $U(x, x^*, f)$.

1.5 Принципи регулювання

По збуренню : $U = U(f)$ (рис. 1.3):

Переваги: швидкодія, стійкість, простота.

Недоліки: потрібно точно знати залежність $x(f)$, неможливо врахувати всі складові f .

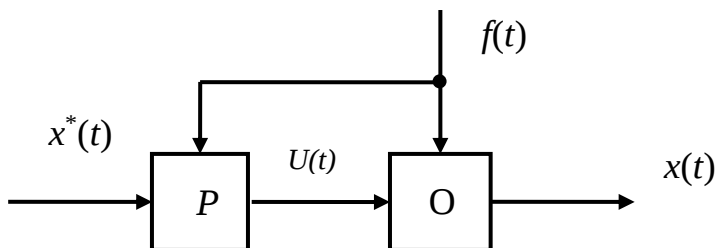


Рис. 1.3. Розімкнена САР, де P – регулятор, O – об'єкт.

Приклад. Схема компаундування генератора постійного струму (ГПС).

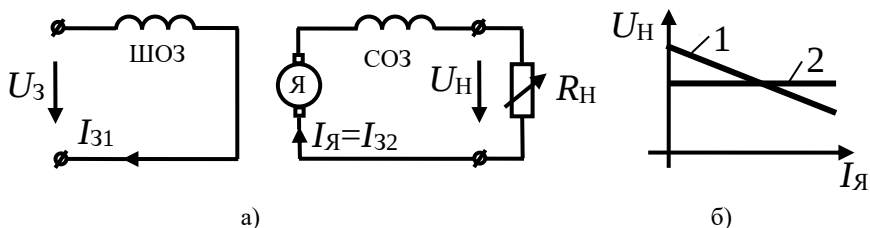


Рис. 1.4. Схема ГПС (а) , вольт-амперна характеристика (б) ГПС без СОЗ (1) та з СОЗ (2).

Дійсно якщо залежність магнітного потоку Φ від струму вважати лінійною, тобто

$$\Phi = K_1 I_{31} + K_2 I_{32} = K_1 I_{31} + K_2 I_{\text{я}} ,$$

а електрорушійну силу $E_{\text{я}}$, за сталої швидкості n обертання ротора ГПС, як

$$E_{\text{я}} = C_e n \Phi ,$$

то за законом Кірхгофа, напруга U_{H} на навантаженні R_{H} ГПС, дорівнюватиме

$$U_{\text{H}} = C_e n K_1 I_{31} + C_e n K_2 I_{\text{я}} - R_{\text{я}} I_{\text{я}} .$$

За відповідного числа витків серісної обмотки збудження (СОЗ) забезпечується умова інваріантності (незалежності) напруги U_{H} від струму $I_{\text{я}}$:

$$C_e n K_2 = R_{\text{я}} ,$$

де C_e – конструктивна стала ГПС.

Нестабільність частоти n обертання ротора ГПС та нелінійності $\Phi(I_{\text{я}})$ не дають можливості забезпечити повну інваріантність $U_{\text{H}}(I_{\text{я}})$ (крива 2 на рис. 1.4 б). Однак це набагато краще ніж без СОЗ (крива 1 на 1.4 б).

Керування $U(\varepsilon)$ по відхиленню (за похибкою ε):

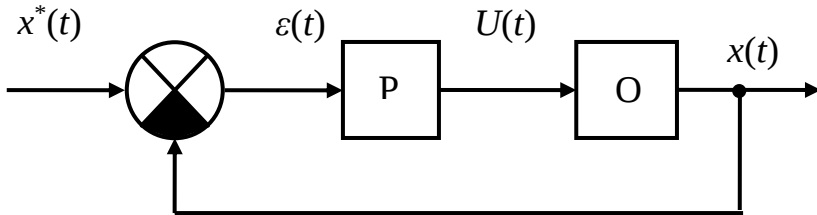


Рис.1.5. Замкнена САР по відхиленню ε x від x^*

Переваги: наявність від'ємного зворотного зв'язку (ВЗЗ) покращує точність відпрацювання x завдання x^* .

Недоліки: менша швидкодія, гірша стійкість.

Системи можуть бути прямої дії (регулятор рівня води Ползунова (1775 рік), регулятор Уатта тиску в паровому котлі) і не прямої дії (Рис. 1.6).

Приклад:

Якщо $\Phi = K_1 I_3$; $I_3 = K_2 \Delta U$, де $\Delta U = U^* - U_{33} = U^* - U_H$, а $E_\gamma = C_e n \Phi$, то (за законом Кірхгофа) $U_H = C_e n K_1 K_2 (U^* - U_H) - I_H R_\gamma$. Звідси отримуємо залежність $U_H(U^*, I_H)$:

$$U_H = \frac{C_e n K_1 K_2}{1 + C_e n K_1 K_2} U^* - \frac{R_\gamma}{1 + C_e n K_1 K_2} I_H.$$

За фізично реалізованого кінцевого коефіцієнту K_2 підсилююча похибки $\varepsilon = \Delta U$, в САР з ВЗЗ похибка ΔU повинна бути кінцева. На рис. 1.6.6 наведено ВАХ ГПС без ВЗЗ (лінія під кутом $\alpha_{роз.}$) і з ВЗЗ (лінія під кутом α_3), де

$$\alpha_{роз.} = \arctg R_\gamma, \quad \alpha_3 = \arctg \frac{R_\gamma}{1 + C_e n K_1 K_2}.$$

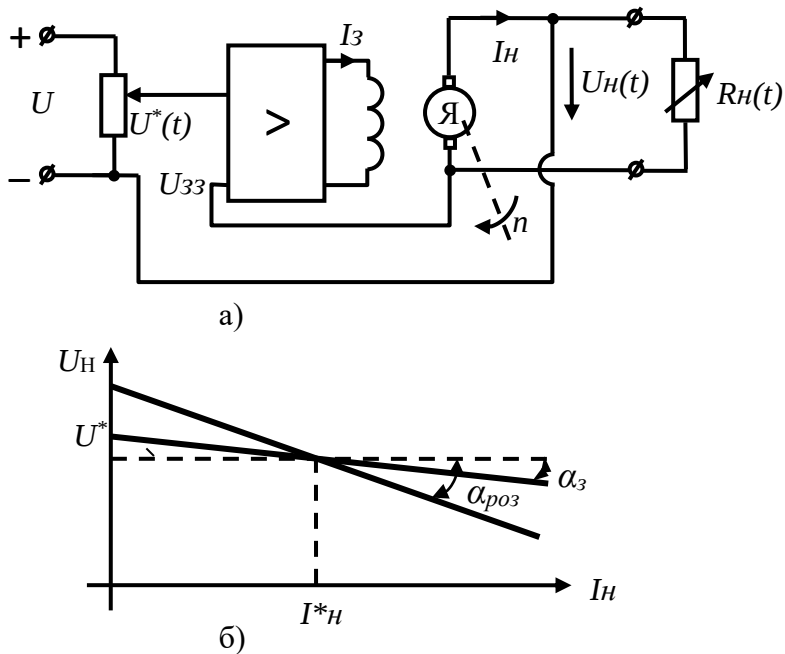


Рис.1.6. Замкнена САР напруги ГПС (а), ВАХ ГПС (б)

Отже ВЗЗ і досить сильне підсилювання похибки ΔU дозволяє суттєво зменшити вплив збурення I_H на U_H .

По відхиленню (ВЗЗ) та збуренню (DЗЗ) (комбіноване керування $U = U(\varepsilon, f)$):

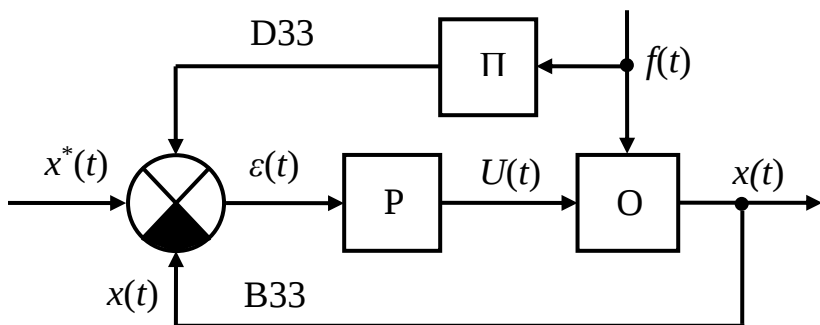


Рис.1.7. Комбінована САР

Переваги: швидкодія, краща стійкість, вища точність за меншого коефіцієнта підсилення.

Недоліки: складна, за неточної залежності $x(f)$ втрачає точність (хоча і в меншій мірі ніж САР тільки по збуренню f).

Приклад: Якщо $\Phi = K_1 I_3 + K_3 I_H$, $I_3 = K_2 \Delta U$, де $\Delta U = U^* - U_{33} = U^* - U_H$, а $E_{\gamma} = C_e n \Phi$, то за законом Кірхгофа

$$U_H = C_e n (K_1 I_3 + K_3 I_H) - I_H R_{\gamma} = C_e n K_1 K_2 (U^* - U_H) + C_e n K_3 I_H - R_{\gamma} \cdot I_H.$$

Звідси отримуємо $U_H(U^*, I_H)$:

$$U_H = \frac{C_e K_1 K_2}{1 + C_e n K_1 K_2} U^* - \frac{R_{\gamma} - C_e n K_3}{1 + C_e n K_1 K_2} I_H.$$

Тут за того ж коефіцієнта статичності

$$\gamma = \frac{U_H}{I_H} = R_{\gamma}$$

можна суттєво зменшити коефіцієнт K_1 , або за того ж K_1 зменшити в $(1 + C_e n K_1 K_2)$ разів вплив збурення I_H . Тут

$$\gamma = \frac{R_{\gamma} - C_e n K_3}{1 + C_e n K_1 K_2}.$$

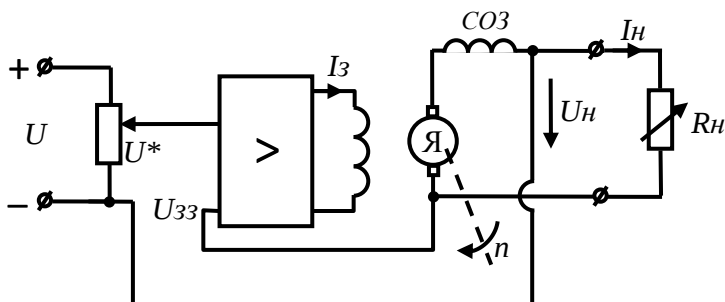


Рис.1.8. Комбінована САР напруги ГПС

ТЕСТ

1. Як за допомогою обмотки CO3 (Рис.1.4) реалізується керування за збуренням (Рис.1.3) ?
2. Як і який принцип регулювання реалізується в системі (Рис.1.6)?
3. Опишіть фізику роботи САР (рис. 1.8).
4. Які переваги комбінованого регулювання (Рис.1.7, 1.8) по відношенню до регулювання за відхиленням (Рис.1.5, 1.6) ?

1.6. Поділення САК за призначенням

а) *Стабілізації вихідної величини*: $x(t) = \text{const}$.

САР ГПС: $U = \text{const}, f = I_n$;

САР швидкістю ДПС: $\Omega = \text{const}, f = M_{\text{навант}}$;

САР швидкістю Ω теплового двигуна (ТД) (рис. 1.9):

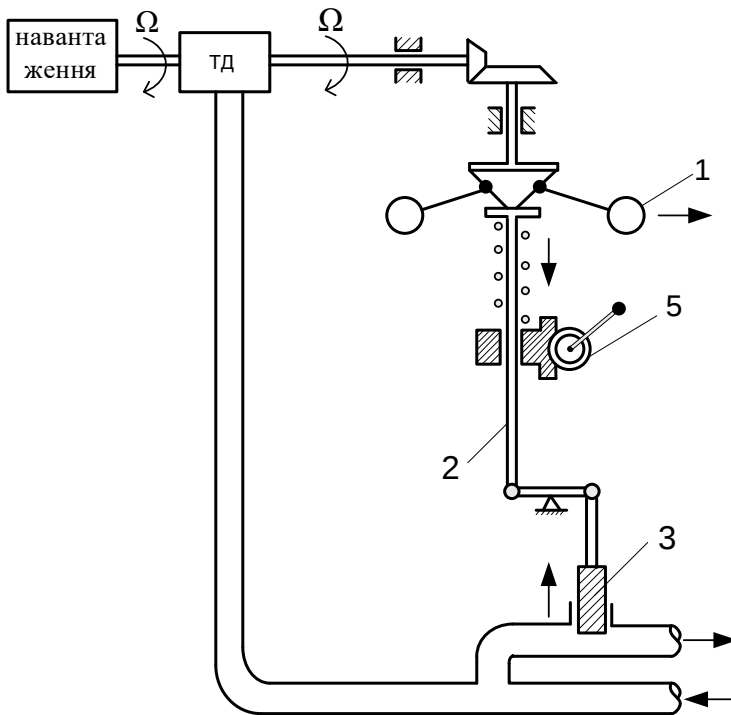


Рис.1.9 САР теплового двигуна

Логіка роботи: якщо $\Omega > \Omega^*$, то кульки (1) розходяться і шток (2) опускається, регулюючий орган (3) відкриває засувку, тиск пару в

трубі (4) зменшується, оберти Ω зменшуються; пристроєм (5) задається Ω^*

б) **Програмне регулювання:**

$x^*(t)$ – задана функція часу або $x^*(z)$ – функція параметру z .

в) **Слідкуючі САР:**

Якщо $x^*(t)$ – невідома апріорі але вимірювана.

Відтворення кута, швидкості, моменту, напруги, і т.ін.
Наприклад, САР (бустер) (рис. 1.10):

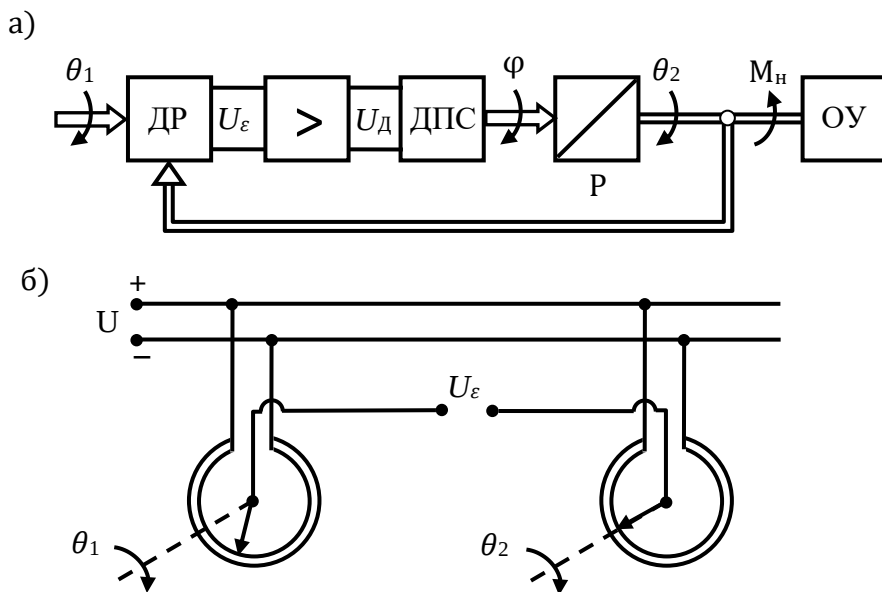


Рис.1.10 Схема САР (а), датчик розузгодження U_ϵ (б) заданого θ_1 і виконуючого θ_2 кутів, Р – редуктор, ОУ – об’єкт управління.

г) **Екстремальні САР** – апіорі невідома змінна $x(t)$, яка дрейфує в часі t і має екстремальний вигляд $x(U, t)$.

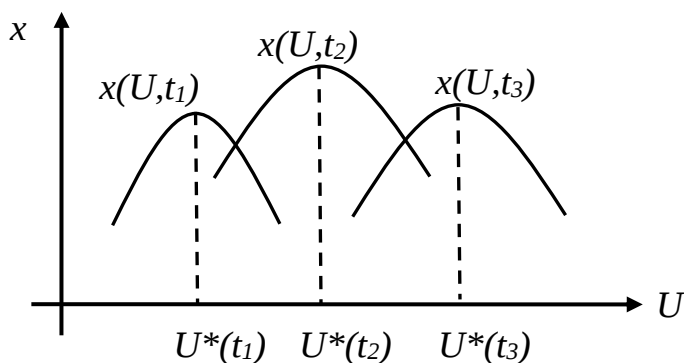


Рис. 1.11. Залежність $x(U, t)$

Задача такої САР відстежувати екстремуми $x(U)$.

1.7. Поділення САК за похибкою в усталеному режимі

а) *Статичні* (рис.1.6; 1.8) мають не нульову усталену похибку ε між X^* і X .

б) *Астатичні* (рис. 1.12):

Якщо $\Delta U = U_0 - U \neq 0$, то $\frac{dR}{dt} \neq 0$, $I_3 \neq const$, $U \neq const$,

$U = const$ тільки, якщо $\Delta U = 0$.

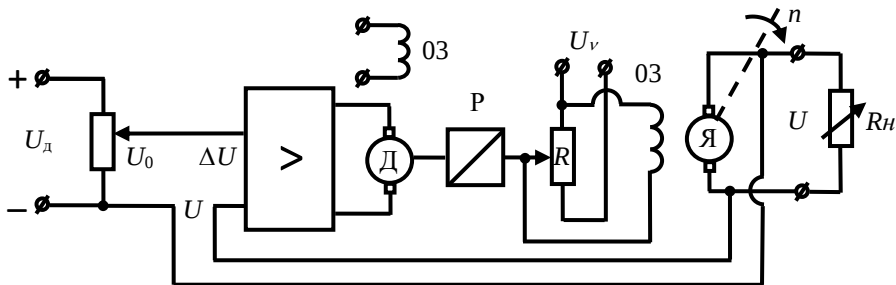


Рис.1.12. Астатична САР

в) *Ізодромні САР* – в перехідному режимі ближче до статичних, в усталеному до астатичних, наприклад, ДПС зі зворотнім зв'язком по Ω (тобто похідній від кута φ): в динаміці це інерційна ланка, в статиці – інтегратор.

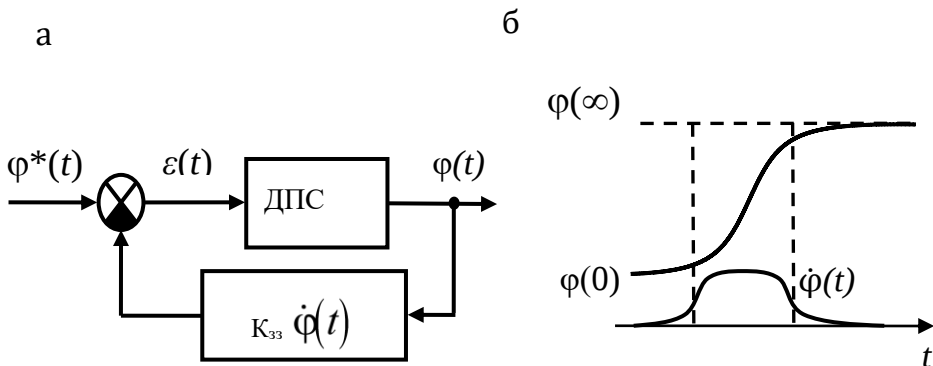


Рис. 1.13. Ізодромна САР (а), залежність (б) $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$

Приклад ізодромного зв'язку в електричних колах

Резисторний місток збалансовано, якщо $R_T = R_4(t^*)$; за відхилення t^0 від бажаної з'являється напруга U_1 розбалансування моста; вона діє на вхід U_Σ фазочутливого підсилювача – перетворювача U_Σ в змінну синусоїдальну напругу на керуючій обмотці 2-х фазного асинхронного двигуна. Обертання ротора АД через редуктор передається на засувку подачі палива і на движок реостата R_p . Засувка прикривається чи навпаки, а зміна напруги U_3 на R_p створює струм заряду чи розряду конденсатора C_i ізодрома. Чим більша швидкість Ω обертання валу АД тим більший струм в колі $R_i C_i$ і відповідно більша напруга зворотного зв'язку за Ω .

Тобто в динаміці АД, як інтегратор, охоплено від'ємним зворотнім зв'язком і система з астатичної переходить в статичну. Це зменшує її коливальність. В статиці $\Omega \rightarrow 0$, $u_2 \rightarrow 0$ і система переходить в астатичний режим з нульовою усталеною похибкою.

Розділяють системи на: одно- і багатоконтурні; одно- і багатомірні; неперервні і дискретні.

Модуляція безквантова:

- амплітудна (АІМ);
- частотна (ЧІМ);
- фазова (ФІМ);

Квантування:

- за рівнем;
- за рівнем і у часі;
- релейне;
- імпульсне.

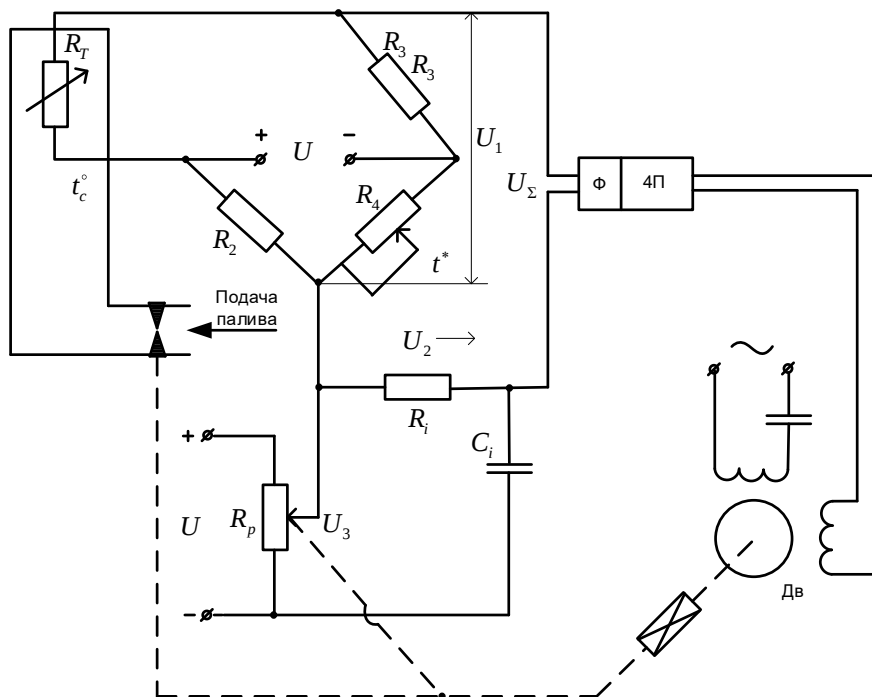


Рис.1.14. Система стабілізації температури в камері згорання палива

1.8. Класифікація регуляторів

Лінійні регулятори:

а) Пропорційний закон регулювання (*П – регулятор*) :

$$U = K\varepsilon .$$

б) Інтегральний закон регулювання (*I – регулятор*) :

$$\frac{du}{dt} = K\varepsilon .$$

в) Пропорційно – інтегральний (*ПІ – регулятор*) :

$$U + K_1 \frac{du}{dt} = K\varepsilon.$$

г) Пропорційно – інтегрально – диференціальний (ПІД – регулятор) :

$$U = K_1 \int \varepsilon \cdot dt + K_2 \varepsilon + K_3 \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Нелінійні регулятори:

а) Релейні з зоною Δ нечутливості і без зони:

$$U(\varepsilon) = \begin{cases} -U_m, & \varepsilon < -\Delta \\ 0, & |\varepsilon| \leq \Delta \\ U_m, & \varepsilon > \Delta \end{cases}$$

Приклад:

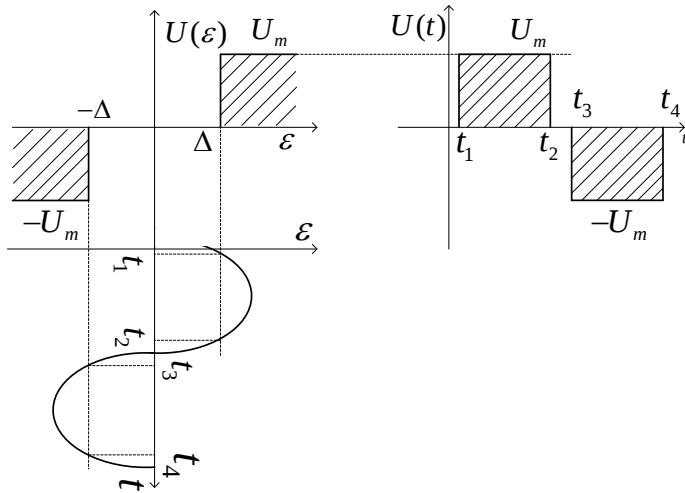


Рис. 1.15. Хрестоподібна характеристика $U(\varepsilon(t))$

Типові сигнали

а) *Поліноміальні:*

$$x_n(t) = \frac{x_n}{n!} t^n \cdot 1(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

x_n – коефіцієнти;

$1(t)$ – функція Хевісайта: $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

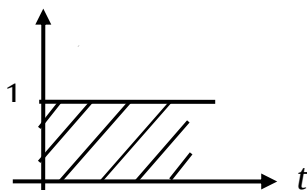


Рис. 1.16. Функція Хевісайта

$n = 0$ – типовий ступінчатий вплив:

$$x_3(t) = x_0 \cdot 1(t);$$

$n = 1$ – типовий вплив, що змінюється з постійною швидкістю V :

$$x_3(t) = x_1 \cdot t \cdot 1(t);$$

$n = 2$ – типовий вплив, що має постійне прискорення:

$$x_3(t) = \frac{x_1}{2} t^2 \cdot 1(t).$$

б) Гармонійний (синусоїдальний) вплив:

$$x_3(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t).$$

x_m – амплітуда;

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота;

φ – початкова фаза.

в) Узагальнена функція Дірака:

$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, тобто $\delta(t)$, як межа (рис. 1.17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{dt} dt = \int_0^{\infty} \frac{dx_3}{dt} dt = x_3(\infty) - x_3(0) \equiv 1,$$

якщо $t_i \rightarrow 0$, то $\frac{dx_3}{dt} \rightarrow \infty$, але $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{dt} \equiv 1$.

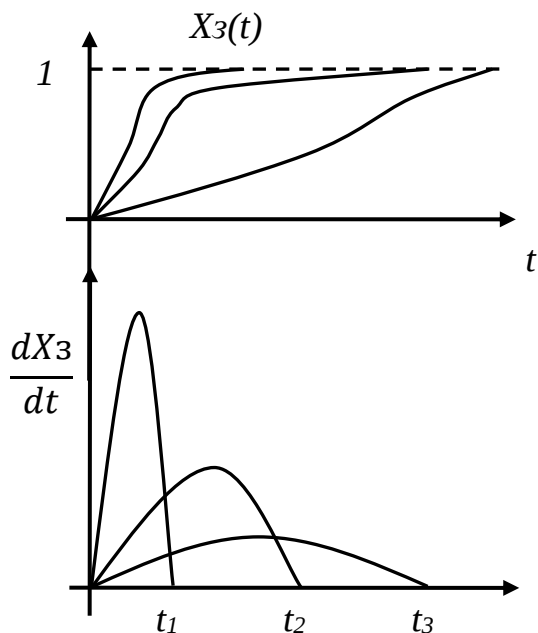


Рис. 1.17. Функція Дірака, як межа

ТЕСТ

1. За яким принципом (по відхиленню чи по збуренню) працює САР (рис. 1.9) ?
 2. В чому різниця між статичною, астатичною і ізодромною системами ?
-

2 МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС САК

САК складається з ряду взаємозв'язаних елементів:

2.1. Динамічна ланка (ДЛ) як елемент САК

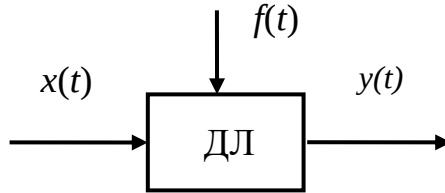


Рис.2.1. Залежність $y(x, f, t)$

2.1.1. Статика

Статика: залежність $y(x)$ – в явному вигляді;

$\varphi(x, y)$ – в не явному;

$x = x(\alpha)$; $y = y(\alpha)$ – в параметричному.

2.1.2 Лінеаризація

Лінеаризація в області заданого режиму (x_0, f_0, t_0) :

$$F(x_0, 0, \dots, 0, y_0, 0, \dots, 0; t_0, 0, \dots, 0) = 0$$

Якщо $F(x, y, t)$ неперервна і двічі диференційована, то вона розкладається в обмежений ряд Тейлора:

якщо

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad t = t_0 + \Delta t,$$

то

$$F(x, y, t) \cong F(x_0, y_0, f_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 \Delta y + \\ + \left. \frac{\partial F}{\partial f} \right|_0 \Delta f + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_0 \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_0 \Delta \dot{y} + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} \right|_0 \Delta \dot{f} + Q(\Delta\Delta).$$

Для малих Δ і гладкості $F(x, y)$ залишок $Q(\Delta\Delta) \approx 0$.

Далі переходять до нової системи координат $(\Delta x, \Delta y)$ (рис. 2.2):

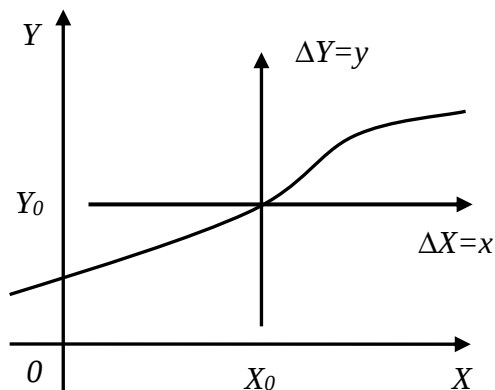


Рис. 2.2. Зв'язок $y(x)$ і $\Delta y(\Delta x)$

Позначивши похідні:

$$\frac{dF}{dx^{(j)}} = -b_j, \quad j = \overline{0, m};$$

$$\frac{dF}{dy^{(i)}} = a_i, \quad i = \overline{0, n};$$

$$\frac{dF}{df^{(e)}} = -c_e, \quad l = \overline{0, p};$$

отримаємо лінійне диференційне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_0 x + c_p f^{(p)} + \dots + c_0 f.$$

Для спрощення запису використовують *символічний* (умовний) метод, просто позначивши оператор d/dt через p :

$$(a_n p^n + \dots + a_0) y(t) = (b_m p^m + \dots + b_0) x(t) + (c_p p^p + \dots + c_0) f(t), \text{ або}$$

$$a(p)y(t) = b(p)x(t) + c(p)f(t).$$

2.1.3. Приведення до стандартного вигляду

Від вигляду загального рівняння:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) x(t)$$

треба перейти до наступного стандартного:

$$(A_0 p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1) y(t) = K(B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + 1) x(t).$$

Тобто:

$$A_i = \frac{a_i}{a_0}; \quad B_j = \frac{b_j}{b_0}; \quad K = \frac{b_0}{a_0}.$$

Приведення до безрозмірного вигляду:

$$A(p)y(t) = KB(p) \cdot x(t), \text{ або}$$

$$\underbrace{A(p)}_{A_{np}(P)} \cdot \underbrace{y_m}_{y_{np}(t)} \cdot \frac{y(t)}{y_m} = \underbrace{KB(p)}_{B_{np}(P)} \cdot \underbrace{x_m}_{x_{np}(\tau)} \cdot \frac{x(t)}{x_m},$$

тобто

$$A_{np}(p) \cdot y_{np}(t) = B_{np}(p) \cdot x_{np}(\tau),$$

$$\frac{y_{np}}{x_{np}} = K_{np} - \text{безрозмірний коефіцієнт.}$$

Або

$$(A_{0np}p^n + A_{1np}p^{n-1} + \dots + A_{1np}p + 1)y(\tau) = \\ = (B_{mnp}p^m + B_{m-1np}p^{m-1} + \dots + 1)K_{np} \cdot x_{np}(\tau).$$

Однак тут коефіцієнти мають часову розмірність. Щоб їх зробити безрозмірними, треба ввести безрозмірний час: $T = \omega_0 t$.

Тоді

$$dt = \frac{dT}{\omega_0}; \quad p = \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{dT} = \omega_0 D,$$

де $D = d/dT$. Тепер маємо:

$$(A_0\omega_0^n \cdot D^n + A_1\omega_0^n \cdot D^{n-1} + \dots + 1) \cdot y_{np}(t) \\ = (B_0\omega_0^m \cdot D^m + B_1\omega_0^{m-1} \cdot D^{m-1} + \dots + 1)K_{np} \cdot x_{np}(t)$$

Наприклад, динаміка ДПС:

$y(t)$ – кут $\mathcal{G}^0$ обертання валу ДПС (радіани або градуси),

$x(t)$ – напруга $U_{\text{я}}$ на якорі ДПС (вольти).

Введемо $y_{np} = \mathcal{G}^0 / \theta_{\text{max}}^0$, $x_{np} = U_{\text{я}} / U_{\text{max}}$, тоді

$$(A_2 p^2 + A_1 p + 1) p y(t) = \frac{b_0}{a_0} (B_1 p + 1) x(t),$$

приведемо до y_{np}, x_{np} :

$$(A_2 p^2 + A_1 p + 1) p \theta_{\text{max}}^0 \cdot y_{np} = \frac{b_0}{a_0} (B_1 p + 1) U_{\text{max}} \cdot x_{np}.$$

Далі

$$p = \frac{d}{dt} = \omega_0 D; \quad p^2 = \frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 D^2,$$

підставляємо в рівняння ДПС:

$$(A_2 \omega_0^2 D^2 + A_1 \omega_0 D + 1) \omega_0 D \theta_{\text{max}}^0 \cdot y_{np}(t) = \frac{b_0}{a_0} (B_1 \omega_0 D + 1) U_{\text{max}} \cdot x_{np}(t).$$

Або в кінцевому вигляді:

$$(C_2 D^2 + C_1 D + 1) D y_{np}(t) = (R_1 D + 1) K_{np} x_{np}(t),$$

$$\text{де } C_2 = A_2 \omega_0^2; \quad C_1 = A_1 \omega_0; \quad R_1 = B_1 \omega_0; \quad K_{np} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{U_{max}}{\omega_0 \theta_{max}^0}.$$

Отже, для подальших досліджень важливо враховувати розмірність змінних і вірно їх записати в диференційованому рівнянні.

ТЕСТ

1. Як лінеаризувати нелінійну залежність $y(x)$ (рис. 2.2)?
2. Приведіть ланку

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = kx$$

до стандартного і безрозмірного вигляду.

2.2. Побудова рівняння динаміки САК

Розглянемо електромеханічну слідкуючу систему:

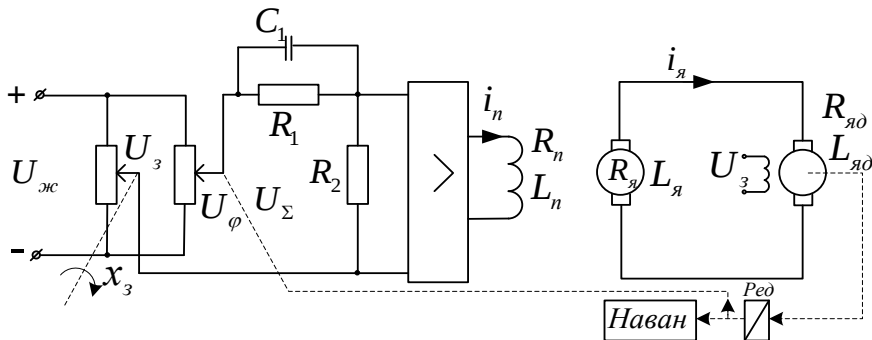


Рис. 2.3. Принципова схема

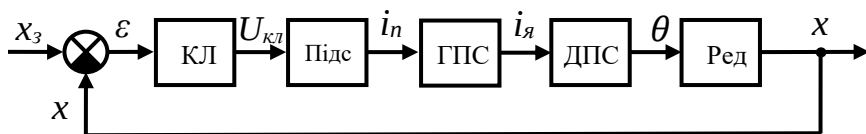


Рис. 2.4. Функціональна схема

2.2.1. Опис елементів схеми

1) Датчик розузгодження x_3 і x .

За умови, що R_1 (рис. 2.5) набагато більше опорів мостової схеми датчика

$$U_{\Sigma} \cong U_3 - U_{\varphi} = K_0(x_3 - x).$$

2) Корируюча ланка (за умови, що $R_{x\delta}$ підсилювача $\gg R_2$)

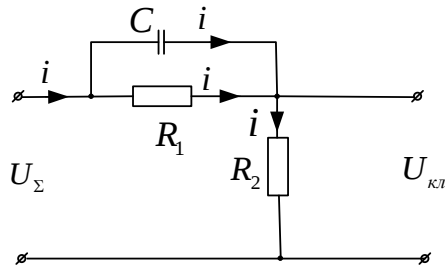


Рис. 2.5. Інтегро-диференціююча ланка

$$i = \frac{U_{\kappa\lambda}}{R_2}; \quad U_{\kappa\lambda} = i \cdot R_2; \quad i_c = C \frac{d(U_{\Sigma} - U_{\kappa\lambda})}{dt}; \quad i = i_c + i_{R_1} =$$

$$= i_c + \frac{U_{\Sigma} - U_{\kappa\lambda}}{R_1},$$

тоді

$$i = \frac{U_{\kappa\lambda}}{R_2} = C \frac{d(U_{\Sigma} - U_{\kappa\lambda})}{dt} + \frac{U_{\Sigma} - U_{\kappa\lambda}}{R_1}$$

$$\text{або} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right] U_{\kappa\lambda} + C \frac{dU_{\kappa\lambda}}{dt} = \frac{U_{\Sigma}}{R_1} + C \frac{dU_{\Sigma}}{dt};$$

Якщо $d/dt = p$, то отримаємо символічний запис диференціального рівняння:

$$(\tau_1 p + 1) U_{\kappa\lambda}(t) = K_1 (\tau_2 p + 1) U_{\Sigma}(t),$$

$$\text{де } \tau_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C; \quad \tau_2 = R_1 C; \quad K_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Це так звана «інтегро-диференціююча ланка».

3) Підсилювач-перетворювач сигналу $U_{\kappa\lambda}$ до i_n :

$$L_n \frac{di_n}{dt} + R_n \cdot i_n = K_2 \cdot U_{\kappa\lambda}(t) \quad \text{або} \quad (\tau_3 p + 1) i_n(t) = K_2 U_{\kappa\lambda}(t),$$

де

$$\tau_3 = \frac{L_n}{R_n}; \quad K_2 = \frac{K'_2}{R_n}.$$

4) Генератор постійного струму (ГПС):

$$R_{я\Sigma} = R_{я} + R_{я\partial}; \quad L_{я\Sigma} = L_{я} + L_{я\partial},$$

тоді

$$(L_{я\Sigma}p + R_{я\Sigma})i_{я}(t) = E_{\varepsilon} - E_{\partial}.$$

Якщо лінеаризувати залежність $E_{\varepsilon}(i_n)$ в точці $i_n = 0$,

$$E_{\varepsilon}(i_n) \cong \left. \frac{dE_{\varepsilon}}{di_n} \right|_{i_n=0} = K'_3 \cdot i_n,$$

а E_{∂} (двигуна) $E_d = -K'_4 \cdot p\theta$, то в символічному поданні отримаємо:

$$(L_{я\Sigma}p + R_{я\Sigma})i_{я} = K'_3 \cdot i_n - K'_4 \cdot p\theta$$

або

$$(\tau_4 p + 1)i_{я}(t) = K'_3 \cdot i_n - K'_4 \cdot p\theta,$$

$$\text{де } K_3 = K'_3 / R_{я\Sigma}, \quad K_4 = K'_4 / R_{я\Sigma}, \quad \tau_4 = L_{я\Sigma} / R_{я\Sigma}.$$

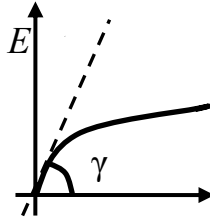


Рис.2.6. Лінеаризація

5) Двигун постійного струму (ДПС):

$$J_{\Sigma} \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{\partial} - M_{я}; \quad M_{\partial} = c'_m i_{я} = K'_5 \cdot i_{я};$$

тоді

$$M_{я} \cong K'_6 \cdot p\theta + K'_{ред} \cdot M_{нагр}.$$

$$(J_{\Sigma} \cdot p^2 K'_3 \cdot i_n + K'_6 \cdot p)\theta(t) = K'_5 \cdot i_{я} - K'_{ред} \cdot M_{нагр}.$$

$$\text{або } (\tau_5 p + 1)p\theta(t) = K'_5 \cdot i_{я} - K'_{ред} \cdot M_{нагр}.$$

6) Редуктор: $x(t) = K_{ред} \cdot \theta(t)$.

2.2.2. Диференційне рівняння системи

Шляхом виключення проміжних змінних отримаємо модель, що зв'язує вхід $x_3(t)$ – вихід $x(t)$ – збурення $M_{нагр.}(t)$.

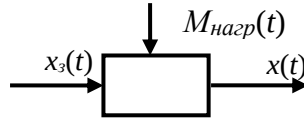


Рис. 2.7. Схема системи

Згрупуємо рівняння окремих ланок.

З метою спрощення структурних перетворень, окрім оператора $p = d/dt$, введемо оператор $W(p)$, який з'єднує “вхід-вихід” відповідних ланок розімкненої частини системи:

$$U_{кл}(t) = W_{кл}(p) \cdot U_{\Sigma}(t),$$

де

$$W_{кл}(p) = \frac{K_1(\tau_2 p + 1)}{(\tau_1 p + 1)};$$

$$i_n(t) = W_n(p) \cdot U_{кл}(t),$$

де

$$W_n(p) = \frac{K_2}{(\tau_3 p + 1)};$$

$$i_{я}(t) = W_{r1}(p) \cdot i_n(t) - W_{r2}(p) \cdot \theta(t);$$

де

$$W_{r1}(p) = \frac{K_3}{(\tau_4 p + 1)};$$

$$W_{r2}(p) = \frac{K_4 \cdot p}{(\tau_4 p + 1)};$$

$$\theta(t) = W_{\partial 1}(p) \cdot i_{я}(t) - W_{\partial 2}(p) \cdot M_{нагр.},$$

де $W_{\partial 1}(p) = K_5/p(\tau_5 p + 1)$, $W_{\partial 2}(p) = K_{ред.}/p(\tau_5 p + 1)$;

Тоді, починаючи з $\theta(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= W_{\partial 1} [W_{r1} \cdot i_n(t) - W_{r2} \theta(t)] - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр} = \\
&= W_{\partial 1} [W_{r1} W_n \cdot U_{кл}(t) - W_{r2} \cdot \theta(t)] - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр} = \\
&= W_{\partial} \{ [W_{r1} W_n \cdot W_{кл} \cdot U_{\Sigma}(t) - W_{r2} \theta] \} - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр}, \\
\text{або} \quad [1 + W_{\partial 1} W_{r2}] \theta(t) &= W_{\partial 1} W_{r1} W_n W_{кл} U_{\Sigma} - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр}.
\end{aligned}$$

Тепер підставимо залежність $\theta(x)$ і $U_{\Sigma}(x_3, x)$:

$$\begin{aligned}
&[1 + W_{\partial 1} W_{r2}] K_{ред}^{-1} \cdot x(t) = \\
&= W_{\partial 1} W_{r1} W_n W_{кл} \cdot K_0 (x_3(t) - x(t)) - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
&\left\{ [1 + W_{\partial 1} W_{r2}] \cdot \frac{1}{K_{ред}} + W_{\partial 1} W_{r1} W_n \cdot K_0 \right\} x(t) = \\
&= W_{\partial 1} W_{r1} W_n W_{кл} \cdot K_0 x_3(t) - W_{\partial 2} \cdot M_{нагр},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
&[1 + W_{\partial 1} W_{r2} + W_{\partial 1} W_{r1} W_n W_{кл} \cdot K_0 K_{ред}] x(t) = \\
&= W_{\partial 1} W_{r1} W_n W_{кл} \cdot K_0 K_{ред} x_3(t) - W_{\partial 2} \cdot K_{ред} \cdot M_{нагр},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \frac{K_5}{p(\tau_5 p + 1)} \cdot \frac{K_4 \cdot p}{(\tau_4 p + 1)} + \frac{K_5}{p(\tau_5 p + 1)} \cdot \frac{K_3}{(\tau_4 p + 1)} \cdot \frac{K_2}{(\tau_3 p + 1)} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{K_1(\tau_2 p + 1)}{(\tau_1 p + 1)} K_0 K_{ред} \right] x(t) = \\
&= \frac{K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 (\tau_2 p + 1) K_{ред}}{p(\tau_1 p + 1)(\tau_3 p + 1)(\tau_4 p + 1)(\tau_5 p + 1)} x_3(t) - \frac{K_{ред}^2}{p(\tau_5 p + 1)} M_{нагр}.
\end{aligned}$$

Далі приведемо до спільного знаменника, відкинувши який отримаємо диференційне рівняння V-го порядку:

$$\begin{aligned}
&(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) x(t) = \\
&= (b_0 p + b_1) x(t)_3 - (c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3) M_{нагр},
\end{aligned}$$

або скорочено:

$$a(p)x(t) = b(p)x_3(t) - c(p) \cdot M_{нагр}.$$

Далі, за необхідністю, це рівняння можна привести до безрозмірного стандартного виду та досліджувати статику і динаміку, маючи його математичну модель.

Однак з інженерної позиції доцільно від лінійного диференційного рівняння перейти до алгебраїчного шляхом застосування перетворення Лапласа.

ТЕСТ

1. Запишіть диференційне рівняння частини системи (рис. 2.3) від виходу коригуючої RC-ланки до виходу i_a ГПС.
 2. Запишіть диференційне рівняння для системи (рис. 1.10).
-

3 ПЕРЕДАТОЧНА ФУНКЦІЯ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

3.1. Пряме перетворення Лапласа

Якщо функція $f(t)$ неперервна або має розриви I роду, обмежена у часі, тобто:

$|f(t)| \leq M e^{p_0 t}$, $f(t) = 0$, якщо $t < 0$, де $M < \infty$, $p_0 < \infty$, то існує інтеграл $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = F(p)$, який носить назву зображення $F(p)$ по Лапласу функції $f(t)$.

3.1.1. Зображення функції Хевісайта

$$\int_0^\infty 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty 1(t) e^{-pt} (-dpt) = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{p}.$$

3.1.2. Зображення похідної $\frac{df}{dt}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt} dt &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{-\infty} - \int_0^\infty (-p) e^{-pt} \cdot f(t) dt = \\ &= p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt + f(t) e^{-pt} \Big|_0^{-\infty} = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

3.1.3. Зображення другої похідної

Нехай $df/dt = \varphi(t)$, тоді

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{d^2 f}{dt^2} e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dt} e^{-pt} dt = p\varphi(p) - \varphi(0) = \\ &= p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df(0)}{dt}.\end{aligned}$$

Узагальнюючи, отримаємо зображення n -ої похідної:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f^{(0)}(t) \cdot e^{-Pt} dt &= P^n F(p) - P^{n-1} f(0) - P^{n-2} f'(0) - \dots \\ &\dots - P f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

3.1.4. Зображення $\sin x$

Нехай $\int_0^{\infty} \sin t \cdot e^{-Pt} dt = \Psi(p)$, тоді

$$\frac{d \sin t}{dt} = \cos t \rightarrow p\Psi(p) - \sin(0) = p\Psi(p);$$

$$\frac{d \cos t}{dt} = -\sin t \rightarrow p^2\Psi(p) - \cos(0) = p^2\Psi(p) - 1.$$

Отже $-\Psi(p) = p^2\Psi(p) - 1$, звідки $\sin t \rightarrow \Psi(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$.

3.1.5. Теорема подібності

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ якщо } \alpha = \frac{1}{\beta}, \text{ то } f\left(\frac{t}{\beta}\right) \rightarrow \beta F(\beta p).$$

3.1.6. Зображення t^n

$$t \cdot f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} f(t) t \cdot e^{-pt} dt = -\frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

тобто

$$t \cdot f(t) \rightarrow -\frac{dF(p)}{dp},$$

то, якщо $F(p) \Rightarrow 1(t)$, то $t \rightarrow -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}$;

$$t^2 = t \cdot t \rightarrow -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1 \cdot 2}{p^3},$$

тоді

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3.1.7. Зображення інтеграла

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \Psi(p),$$

$$f(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow p\Psi(p) - 0 = F(p),$$

тоді

$$\Psi(p) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}.$$

Тобто

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

3.1.8. Деякі інші перетворення Лапласа

$$f(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \cdot F(p);$$

$$f \cdot e^{-\alpha t} \rightarrow \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(\alpha+p)t} dt = F(p + \alpha).$$

Приклад:

$$Ae^{-\alpha t} \rightarrow \frac{A}{p - \alpha};$$

$$\frac{B}{(n-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot t^{n-1} \rightarrow \frac{B}{(p + \alpha)^n};$$

$$e^{-\alpha t} \frac{t^n}{n!} 1(t) \rightarrow \frac{1}{(p + \alpha)^{n+1}};$$

$$\cos \beta t 1(t) \rightarrow \frac{p}{p^2 + \beta^2};$$

$$e^{-\alpha t} \cos \beta t 1(t) \rightarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2};$$

$$\frac{1}{\beta} \sin \beta t 1(t) \rightarrow \frac{1}{p^2 + \beta^2};$$

$$\left(A \cos \beta t + \frac{B}{\beta} \sin \beta t \right) 1(t) \rightarrow \frac{Ap + B}{p^2 + \beta^2};$$

$$e^{-\alpha t} \left(A \cos \beta t + \frac{B}{\beta} \sin \beta t \right) 1(t) \rightarrow \frac{A(p + \alpha) + B}{(p + \alpha)^2 + \beta^2};$$

$$\frac{1}{2\beta} t \sin \beta t \cdot 1(t) \rightarrow \frac{p}{(p^2 + \beta^2)^2};$$

$$\frac{1}{2\beta} e^{-\alpha t} t \sin \beta t \cdot 1(t) \rightarrow \frac{p + \alpha}{[(p + \alpha)^2 + \beta^2]^2};$$

$$\frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \cdot 1(t) \rightarrow \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2};$$

$$\frac{1}{2\beta^3} e^{-\alpha t} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \cdot 1(t) \rightarrow \frac{1}{[(p + \alpha)^2 + \beta^2]^2}.$$

3.2. Зворотні перетворення Лапласа

3.2.1. Перша теорема розкладання

Якщо $F(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots$ і радіус збіжності ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} z^j \neq 0,$$

то

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + \frac{a_n t^n}{n!} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!},$$

де $z = x + jy$ – комплексне число, j – уявна одиниця.

Приклад:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1};$$

тоді

$$\begin{aligned} & \frac{1,000}{-} \\ & \frac{1 + p^{-2}}{-p^{-2}} \left| \frac{p^2 + 1}{p^{-2} - p^{-4} + p^6 - p^{-8} + p^{10} \dots} \right| \Rightarrow t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \\ & - \frac{p^{-2} + p^{-4}}{-p^{-4}} \\ & \dots \\ & + \dots = \sin t. \end{aligned}$$

Інший приклад розкладання:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{p + j} + \frac{B}{p - j} + \frac{C}{(p + 1)^2} + \frac{D}{p + 1} = \\ &= \frac{A(p + j)(p + 1)^2 + B(p + j)(p + 1)^2 + C(p^2 + 1) + D(p^2 + 1)(p + 1)}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів p , отримаємо систему рівнянь:

p^3	$A + B + C = 0$
p^2	$2A - jA + 2B + jB + C + D = 0$
p	$A - 2jA + B + 2jB + D = 0$
p^0	$-jA + jB + C + D = 0$

$$-j(A - B) = 0, \text{ тобто } A = B.$$

Тоді

p^3	$2A + D = 0$
p^2	$4A + C + D = 0$
p^0	$C + D = 0$

$$\text{або} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм рішення матричної системи:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}[\]^T} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{\text{Adj}[\]^T}{\det[\]^T}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

$$\det[\] = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4; \quad A = \frac{1}{4}; C = \frac{1}{4}; B = \frac{1}{2}; D = -\frac{1}{2}$$

Переходячи до оригіналу, отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{4} [e^{-jt} + e^{jt}] - \frac{1}{2} [t + 1]e^{-t} = \frac{1}{2} [\cos t - (t + 1)e^{-t}].$$

3.2.2. Друга теорема Лапласа

Якщо $F(p)$ дробно-раціональна функція p , тобто

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

і корені $F_2(p)$ різні, то

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \frac{F_1(p_j)}{F'_{2p}(p_j)} \cdot e^{-p_j t}.$$

$$\text{Приклад: } F(p) = \frac{p-2}{(p^2+1)(p+1) \cdot p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)};$$

Корені: $p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = j$; $p_4 = -j$.

Похідна: $F'_{2p} = (p^2+1)(p+1) + 2p(p+1)p + (p^2+1)p$;

$$F'_{2p}(p_1) = 1; F'_{2p}(p_2) = -2; F'_{2p}(p_3) = -2(1+j);$$

$$F'_{2p}(p_4) = -2(1-j);$$

$$F_1(p) = -2; F_1(p_2) = -3; F_1(p_3) = j-2; F_1(p_4) = -(j+2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{-2}{1} e^0 + \frac{-3}{-2} e^{-t} + \frac{j-2}{-2(j+1)} e^{jt} + \frac{-(j+2)}{-2(j+1)} e^{-jt} = \\ &= -2 + \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{(-1+3 \cdot j) e^{jt} + (-1-3j) e^{-jt}}{2 \cdot 2} = \\ &= -2 + \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t, \end{aligned}$$

оскільки

$$\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}.$$

Для кратних коренів також існує формула зворотного перетворення¹.

¹ Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике, М.:, 1974. – 882 с.

3.3. Передаточна функція системи

Взагалі, передаточна функція $W(p)$ – це відношення зображення за Лапасом вихідної змінної $x(p)$, де p – комплексна змінна перетворення Лапласа, до зображення вхідної змінної, наприклад до $x_3(p)$ або $f(p)$, за нульових початкових умов:

$$\frac{x(p)}{x_3(p)} = W_1(p); \quad \frac{x(p)}{f(p)} = W_2(p).$$

Отримати $W(p)$ можна безпосередньо з диференціального рівняння системи

$$\begin{aligned} & a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = \\ & = b_0 x_3^{(m)}(t) + b_1 x_3^{(m-1)}(t) + \dots + b_m x_3(t) + \\ & + c_0 f^{(r)}(t) + c_1 f^{(r-1)}(t) + \dots + c_r f(t), \end{aligned}$$

якщо взяти зображення за Лапасом від кожної складової, враховуючи, що за нульових початкових умов

$$x^{(i)}(t) \rightarrow p^i x(p), i = \overline{0, n};$$

$$x_3^{(i)}(t) \rightarrow p^i x_3(p), i = \overline{0, m};$$

$$f^{(i)}(t) \rightarrow p^i f(p).$$

Тоді диференційне рівняння формально перейде в алгебраїчне

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(p) = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_3(p) + (c_0 p^r + c_1 p^{r-1} + \dots + c_r) f(p), \end{aligned}$$

звідки отримаємо передаточні функції $W_1(p)$ по входу $x_3(t)$ і $W_2(p)$ по збуренню $f(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{x(p)}{x_3(p)} = W_1(p) &= \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{b(p)}{a(p)}; \\ \frac{x(p)}{f(p)} = W_2(p) &= \frac{c_0 p^r + \dots + c_r}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{c(p)}{a(p)}. \end{aligned}$$

Отже, для визначення передаточних функцій достатньо записати диференційне рівняння системи в символічній формі, де $p = d/dt$ і, замінивши оператор d^i/dt^i , $i = 0, 1, \dots$ на комплексну змінну Лапласа p^i , $i = 0, 1, \dots$, отримати вже алгебраїчне рівняння та відповідні передаточні функції. Останні (як і диференціальні рівняння) можна привести до стандартного вигляду, наприклад, такого:

$$W_1(p) = \frac{K_v(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + 1)}{p_v(a_0 p^{n-v} + a_1 p^{n-v-1} + \dots + 1)}.$$

Знаменник передаточної функції є характеристичним поліномом диференційного рівняння. Корені $a(p) = 0$ – називають полюсами.

Корені $b(p)$ – називають нулями.

Полюсами і нулями можуть бути дійсними або комплексно-спряженими величинами, в той час як коефіцієнти a_i, b_i, c_i для фізично реалізованих систем завжди дійсні.

Залежно від значень коренів ($a(p) = 0$) системи можуть бути стійкими (корені мають від'ємну дійсну складову), не стійкими (додатна дійсна складова) і нейтральні (на межі стійкості і не стійкості (за нульової дійсної складової кореня)).

ТЕСТ

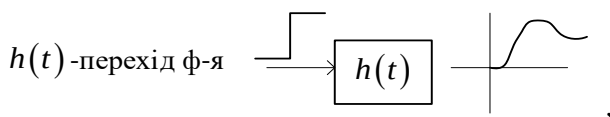
1. Запишіть передаточну функцію для коригуючої ланки (рис. 2.5).
2. Користуючись зворотнім перетворенням Лапласа визначити перехідну функцію (реакцію на $1(t)$) ланки (рис. 2.5).

Підказка до тесту. В лекції 4 для ланки (рис 2.5) отримано в символічній формі диференційоване рівняння:

$$(\tau_1 p + 1)v_{кл}(t) = K_1(\tau_2 p + 1)v_{\Sigma}(t)$$

Якщо перейти до зображень по Лапласу, тоді p – це не $\frac{d}{dt}$, а комплексна змінна перетворення, і замість t записати p , тобто $U_{\text{кл}}(p)$, $U_{\Sigma}(p)$, то за нульових початкових умов

$$W(p) = \frac{U_{\text{кл}}(p)}{U_{\Sigma}(p)} = K_1 \frac{\tau_2 p + 1}{\tau_1 p + 1}.$$



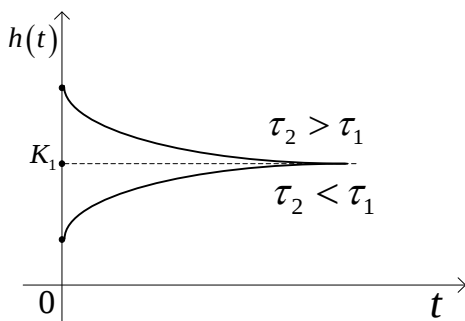
$$H(p) = \int_0^{\infty} h(p)e^{-pt} dt$$

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(p)e^{-pt} dt \quad \frac{1}{p} \longrightarrow \boxed{W} \longrightarrow H(p)$$

$$H(p) = K_1 \frac{\tau_2 p + 1}{\tau_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

$$F_1(p) = K_1(\tau_2 p + 1); \quad F_2(p) = p(\tau_1 p + 1),$$

$$h(t) = \sum_K \frac{F_1(p_K)}{F_{2p}^p(p_K)} e^{p_K t}.$$



$$\begin{aligned}
F_2(p) &= 0; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_1}, \\
F_1(p_1) &= K_1; \quad F_1(p_2) = K_1 \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} + 1 \right), \\
F_{2p}^p(p_1) &= \tau_1 p + 1 + \tau_1 p = 2\tau_1 p + 1, \\
F_{2p}^p(p_1) &= 1; \quad F_{2p}^p(p_2) = -1, \\
h(t) &= \frac{K_1}{1} e^{pt} + \frac{K_1 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)}{(-1)} e^{t/\tau_1} = K_1 \left(1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} e^{-(t/\tau_1)} \right).
\end{aligned}$$

4 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

4.1 Амплітудо-фазо-частотні характеристики

Реальні вхідні $x_3(t)$, вихідні $x(t)$ і збурюючі сигнали $f(t)$, як дійсні функції часу t , що розглядаються на обмеженому часовому інтервалі, як правило, задовольняють умові існування інтегралу $\int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)| dt$ чи $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ або $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$.

Тоді, подібно до перетворення Лапласа, для них існує пряме перетворення Фур'є, наприклад:

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

де $x(j\omega)$ є комплексним спектром сигналу $x(t)$.

Відповідно, існує і зворотнє перетворення:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Для періодичних функцій $x(t) = x(t+T)$ останній інтеграл замінюємо сумою, тобто рядом Фур'є:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_K),$$

де X_{mk} – амплітуда, Ψ_K – початкова фаза k -ої гармоніки.

Якщо в перетворенні Лапласа змінити p на $j\omega$, то ми автоматично переходимо до поняття частотних характеристик системи.

Наприклад:

$$x(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot x_3(j\omega),$$

де $W_1(j\omega)$ – комплексний коефіцієнт передачі або амплітудно-фазо-частотна характеристика (АФЧХ) системи.

Для конкретної частоти ω $W_1(j\omega)$ – це вектор на комплексній площині, який можна подати як в полярний, так і в декартовій системі координат. У декартовій його слід визначити через проєкції $U(\omega)$ на дійсну і $V(\omega)$ – на вісь уявних чисел $j = \sqrt{-1}$. Враховуючи, що j^{2i} , $i = 0, 1, 2, \dots$ буде дійсною одиницею, а j^{2i+1} – уявною, розкладемо комплексну функцію від ω на дійсну $U(\omega)$ і уявну $jV(\omega)$ складові:

$$W_1(j\omega) = \frac{(b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m)}{(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)} = \frac{(B_1(\omega) + jB_2(\omega))}{(A_1(\omega) + jA_2(\omega))},$$

де $B_1(\omega) = b_m - b_{m-2} \cdot \omega^2 + b_{m-4} \cdot \omega^4 - \dots$ – дійсна;

$B_2(\omega) = b_{m-1} \cdot \omega - b_{m-3} \cdot \omega^3 + b_{m-5} \cdot \omega^5 - \dots$ – уявна;

$A_1(\omega) = a_n - a_{n-2} \cdot \omega^2 + a_{n-4} \cdot \omega^4 - \dots$ – дійсна;

$A_2(\omega) = a_{n-1} \cdot \omega - a_{n-3} \cdot \omega^3 + a_{n-5} \cdot \omega^5 - \dots$ – уявна.

В попередньому виразі для $W_1(j\omega)$ позбавимося від уявних складових у знаменнику. Для цього знаменник і чисельник помножимо на спряжений комплекс $A_1 - jA_2$:

$$\begin{aligned} W_1(j\omega) &= \frac{B_1(A_1 - jA_2) + jB_2(A_1 - jA_2)}{(A_1 + jA_2)(A_1 - jA_2)} = \\ &= \frac{B_1A_1 + B_2A_2}{A_1^2 + A_2^2} + j \frac{B_2A_1 - B_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned}$$

де $U(\omega)$ – парна функція частоти ω ,

$V(\omega)$ – не парна функція.

Отже, в Декартовій системі координат комплексний вектор $W(j\omega)$ визначається через проєкції на дійсну і уявні осі:

$$W_1(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

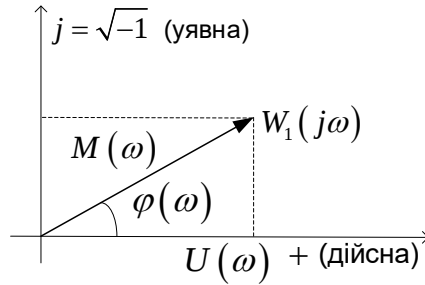


Рис. 4.1. Вектор $W_1(j\omega)$ на площині $(j, +)$

Модуль $M(\omega)$ вектору $W_1(j\omega)$, тобто його довжина на частоті ω за теоремою Піфагора дорівнює:

$$M(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

де (рис. 4.1) $U(\omega) = M(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega)$, $V(\omega) = M(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega)$,

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arcsin \frac{V(\omega)}{M(\omega)} = \arccos \frac{U(\omega)}{M(\omega)}.$$

Скориставшись формулою Ейлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j},$$

отримаємо вираз для $W_1(j\omega)$ в полярній системі координат:

$$W_1(j\omega) = M(\omega) \cdot \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} + jM(\omega) \cdot \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де $M(\omega)$ – амплітудо-частотна характеристика системи (АЧХ), за будь-яких частот дійсна, додатна і вказує на відношення амплітуд $X_m(\omega)$ сигналу $x(t)$ на виході системи до амплітуд $X_{zm}(\omega)$ сигналу $x_z(\omega)$ тієї ж частоти ω на вході системи;

$\varphi(\omega)$ – фазо-частотна характеристика системи (ФЧХ), що вказує на зсув фази вихідного синусоїдального сигналу відносно вхідного;

залежно від структури $W(j\omega)$ і частоти ω може бути як додатною так і від'ємною.

АФЧХ $W_1(j\omega)$ можна визначити також, як реакцію системи на δ -імпульс (функція Дірака). Як було раніше показано $\delta(t)$ – функція є похідною від одиничної функції Хевісайта $1(t)$. Зображення за Лапласом $1(t) \in \frac{1}{p}$, а зображення похідної $\frac{d1(t)}{dt}$ буде $p \cdot \frac{1}{p} = 1$. Тоді $x(p)$, як зображення вихідного сигналу $x(t)$ буде наступне:

$$x(p) = W(p) \cdot \delta(p) \equiv W(p).$$

Переходячи від зображень за Лапласом до Фур'є, отримаємо, що

$$x(j\omega) = W(j\omega) \cdot \delta(j\omega) = W(j\omega).$$

Тобто АФЧХ $W(j\omega)$ є зображенням Фур'є $x(j\omega)$ – реакції системи на $\delta(t)$.

Враховуючи фізичну сутність сигналів, тобто не існування від'ємних частот, перетворення Фур'є і відповідні АФЧХ, АЧХ і ФЧХ характеристики розглядаються в діапазоні частот ω від 0 до ∞ .

Траєкторія кінця вектор-функції $W(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ називається *годографом* АФЧХ:

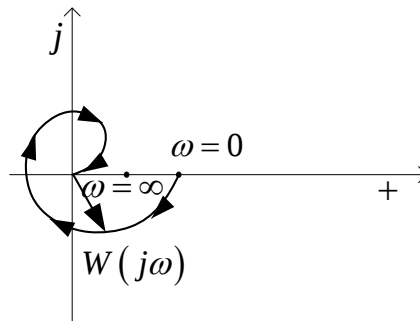


Рис.4.2. АФЧХ ланки VI порядку

Якщо маємо реальний об'єкт і на його вхід $x_3(t)$ будемо подавати синусоїдальний сигнал

$$x_3(t) = x_{zm} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1),$$

а з виходу знімати вихідний сигнал $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$, то на екрані двопроменевого осцилографа, на який подано ці сигнали отримаємо наступну картинку (рис.4.2), з якої для кожної частоти ω , розраховуємо АЧХ і ФЧХ об'єкта:

$$M(\omega) = \frac{x_{m2}(\omega)}{x_{m1}(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega),$$

за яких можна побудувати АФЧХ.

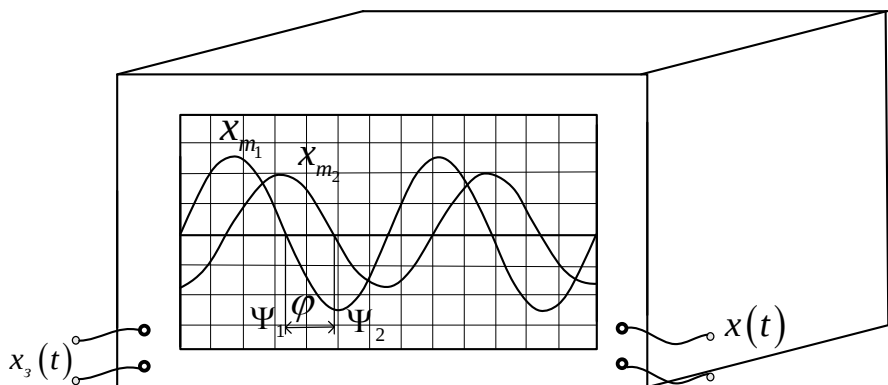


Рис.4.3. Експериментальне визначення АФЧХ

4.2. Логарифмічна амплітудо-фазо-частотна характеристика

Якщо розглядати відношення потужностей $N_{вх}$ і $N_{вих}$ вхідного і вихідного сигналів, які, як правило, пропорційні квадратам амплітуди x_{m1} і x_{m2} сигналів $x_{вх}(t)$ і $x_{вих}(t)$ (наприклад, для

електричних сигналів потужності пропорційні квадратам напруги чи струму), то доцільно розглянути квадрат АЧХ $M(\omega)$, де

$$M^2(\omega) = \frac{N_{\text{вих}}(\omega)}{N_{\text{вх}}(\omega)} = |W(j\omega)|^2.$$

Потужність $N_{\text{вих}}$ відрізняється від $N_{\text{вх}}$ на 1 бел, якщо

$$\lg \frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = 1,$$

коли $\frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = 10$, і відрізняється на один децибел, якщо

$$\lg \frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = 0,1,$$

або

$$\frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = 10^{0,1} \cong 1,259.$$

Отже система на частоті ω підсилює на 1 децибел, якщо

$$\lg M^2(\omega) = \lg \frac{N_{\text{вих.}}(\omega)}{N_{\text{вх.}}(\omega)} = 2 \lg M(\omega) = 0,$$

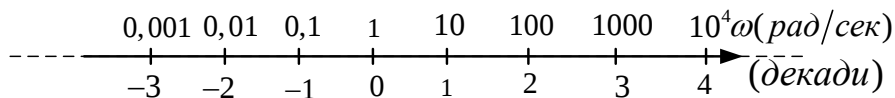
або, якщо $20 \lg M(\omega) = 1$.

Отже, $20 \lg M(\omega)$ називають логарифмічною АЧХ (ЛАЧХ) і позначають, як $L(\omega)$:

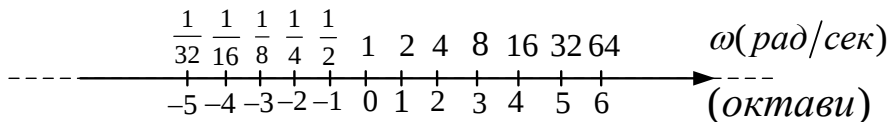
$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega).$$

Для отримання графіка $L(\omega)$, наближеного до кусково-лінійних залежностей по осі частот ω також використовуємо логарифмічний масштаб:

в декадах:



або в октавах:



Частоти ω різняться на декаду, якщо $\omega_1/\omega_2 = 10$ або $\log(\omega_1/\omega_2) = \log 10 = 1$, або на октаву, якщо $\omega_1/\omega_2 = 2$ або $\log(\omega_1/\omega_2) = \log 2 \cong 0,301$.

Графічно $L(\omega)$ відображається (рис. 4.4) в параметричному вигляді:

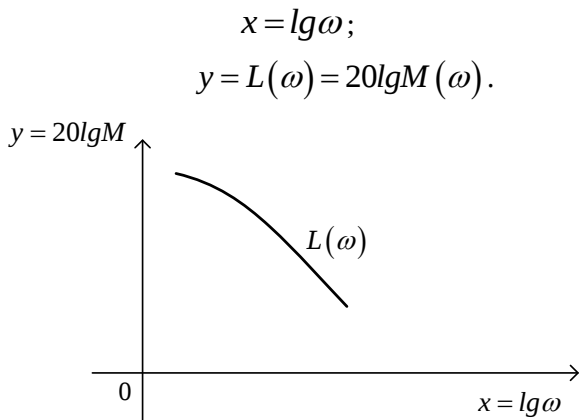


Рис.4.4. Параметричний вигляд $L(\omega)$

Для конкретності наведемо приклад:

Нехай передаточна функція $W(p)$ електродвигуна по збурюючому впливу (момент навантаження) має наступний вигляд:

$$W(p) = \frac{K_1(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)},$$

де $\tau > T$, $K_1 > 1$.

Тоді

$$W(j\omega) = \frac{K_1(j\omega\tau + 1)}{j\omega(j\omega T + 1)} = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де

$$M(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K_1 \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega \tau - \operatorname{arctg} \omega T - \left(+ \frac{\pi}{2} \right).$$

Логарифмічна АЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{K_1 \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} =$$

$$= 20 \lg K_1 + 20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}.$$

З метою спрощення в подальшому вирішенні завдань аналізу стійкості системи і синтезу регулятора, нелінійну залежність $L(\omega)$ на площині $y = L(\omega)$, $x = \lg \omega$ подають кусково-лінійними функціями $y(x) = kx + b$, які в асимптотиці (для $x = 0, x = \pm\infty$) будуть співпадати з початковими нелінійними складовими $L(\omega)$. На Рис.4.5. пунктиром подані окремі складові залежності - $L(\omega)$ і суцільні лінії - асимптоти, які розраховуються наступним чином:

- для складових $20 \lg K_1$: $20 \lg \omega$ асимптоти співпадають з початковими залежностями;
- для $20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}$ за умови, що
 $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$ (це вісь $\lg \omega = x$);
 $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ (це I квадрант).

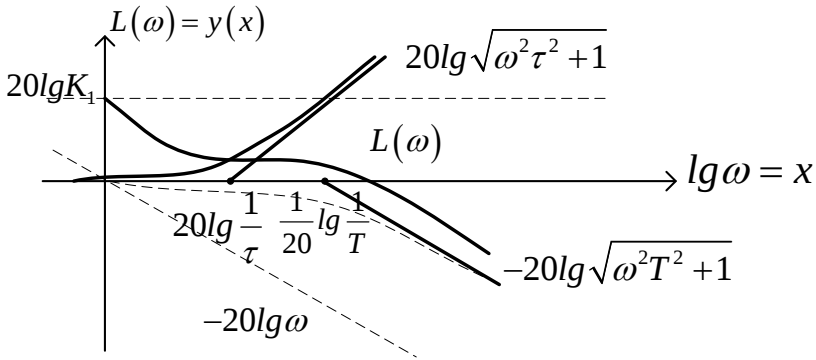


Рис.4.5. L АЧХ ланки $\frac{K_1(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)}$

Нахил асимптоти (коефіцієнт K):

$$K = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{20 \lg \omega \tau}{\lg \omega} = \frac{20 \lg \omega}{\lg \omega} + \frac{20 \lg \tau}{\lg \omega} = 20 \text{ дБ / дек.}$$

Складова b асимптоти $y = kx + b$:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} - 20 \lg \omega) = \\ &= 20 \lg \omega + 20 \lg \tau - 20 \lg \omega = 20 \lg \tau. \end{aligned}$$

Отже асимптота для $20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}$, $y = kx + b$ буде дорівнювати:

$$y = 20 \lg \omega + 20 \lg \tau.$$

Якщо $y = 0$, то $20 \lg \omega_c = -20 \lg \tau = 20 \lg \frac{1}{\tau}$, звідки отримаємо спряжену частоту ω_c :

$$\omega_{cl} = \frac{1}{\tau}.$$

Отже, для відрізка $(0, \omega_c]$ маємо $y(x) = 0$, а для відрізка (ω_c, ∞) маємо $y(x) = 20x + 20 \lg \tau$.

За аналогією для $-20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$ отримаємо асимптоту $y = kx + b$, де $b = 20\lg T, K = -20 \frac{\delta b}{\delta \omega}$:

$$y = -20\lg\omega + 20\lg T,$$

з частотою спряження $\omega_{c2} = \frac{1}{T}$.

Об'єднавши асимптотичні моделі складових $L(\omega)$ отримаємо (рис. 4.5) кусково-лінійну модель $L(\omega)$, близьку до точної залежності

$$y(x) \cong 20\lg K_1 - 20x + [20x + 20\lg\tau] \cdot 1(\omega - \omega_{c1}) - \\ - [20x + 20\lg T] \cdot 1(\omega - \omega_{c2}),$$

де $1(\omega - \omega_{ci})$ – функції Хевісайта, $i = 1, 2$.

Інший приклад. Електропривод.

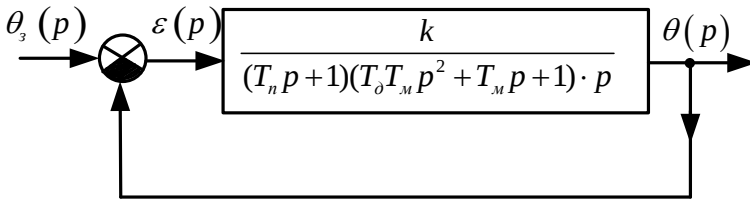


Рис. 4.6. Структурна схема слідкуючого електроприводу

Тут T_n, T_g, T_M – електрична і механічна сталі часу підсилювача двигуна; k – статичний коефіцієнт розімкненої системи.

Подано $W_p(p)$ системи (рис. 4.6) в наступному вигляді:

$$W_p(p) = \frac{k / (T_n T_g T_M)}{\left(p + \frac{1}{T_n}\right) \left(p^2 + \frac{1}{T_g} p + \frac{1}{T_g T_M}\right) p}.$$

Нехай: $\frac{1}{T_n} = 25$, $\frac{1}{T_g} = 50$, $\frac{1}{T_g T_M} = 250$, $\frac{1}{T_n T_g T_M} = 6250$, $k = 100$.

Тоді

$$W_p(p) = \frac{625000}{p^4 + 75p^3 + 1500p^2 + 6250p}.$$

Частотна характеристика:

$$W_p(j\omega) = \frac{625000}{\omega^4 - 1500\omega^2 + j(6250\omega - 75\omega^3)}$$

або

$$W_p(j\omega) = \frac{100}{\left(1 + j\frac{1}{25}\omega\right)\left(1 + j\frac{1}{5,6}\omega\right)\left(1 + j\frac{1}{44,4}\omega\right) \cdot j\omega}.$$

Звідси фазо-частотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{25} - \arctg \frac{\omega}{5,6} - \arctg \frac{\omega}{44,4} - \frac{\pi}{2}.$$

Відклавши в логарифмічному масштабі частоти спряження 25; 5,6; 44,4; 10, будуємо ЛАЧХ і ФЧХ (рис. 4.7).

За діаграмою Бode (розділ 8, 7) можна перевірити стійкість $W_3(p)$ по $L_p(\omega)$, $\varphi_p(\omega)$.

Для підсилення в одиницю, $\lg 1 = 0$ на частоті приблизно 25 рад/с. Тут зсув фаз більше (по модулю) – 180° . На частоті, де $\varphi_p = -180^\circ$, $L_p \cong 10$ або $k = 100$.

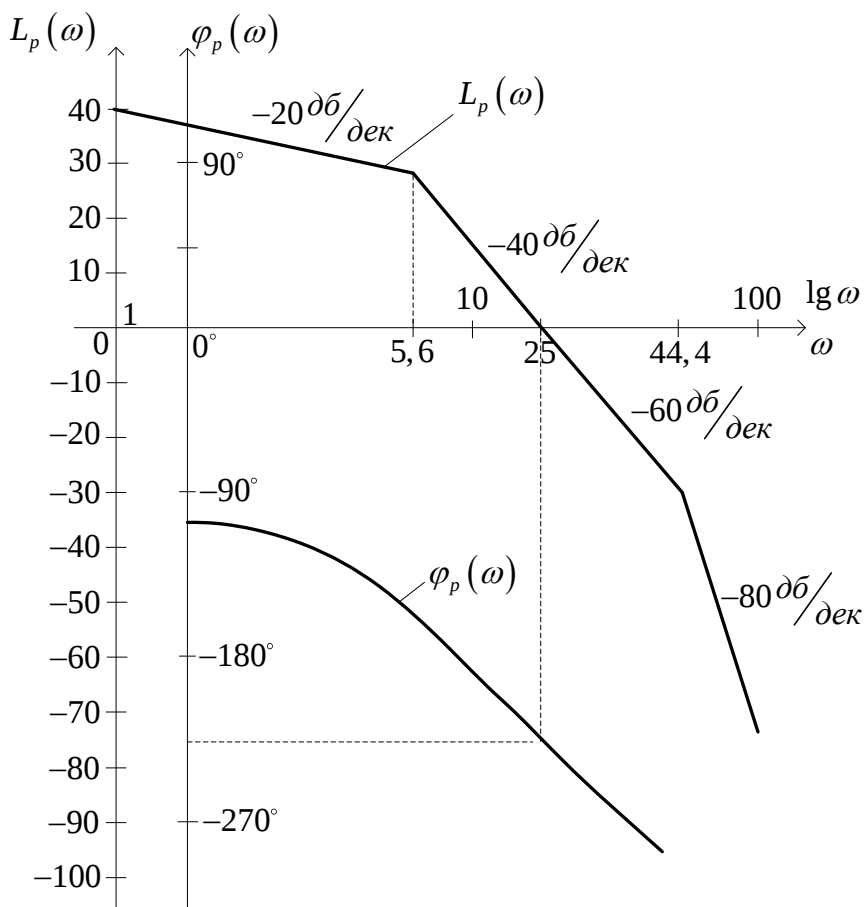


Рис. 4.7.

ТЕСТ

1. Відповідно до варіанту (табл. 1), що відповідає Вашому номеру у списку групи, побудувати усі частотні характеристики за передаточною функцією $W(p)$.

Таблиця 1

№ п.п.	П.І.Б.	Об'єкт
1		$W(p) = \frac{0,5}{p(0,2p + 1)}$
2		$W(p) = \frac{7}{p(2,5p + 1)}$
3		$W(p) = \frac{3}{(p + 1)(0,2p + 1)}$
4		$W(p) = \frac{2}{(12p + 1)(0,1p + 1)}$
5		$W(p) = \frac{4}{(4p + 1)(0,13p + 1)}$
6		$W(p) = \frac{5}{(1,5p + 1)(0,14p + 1)}$
7		$W(p) = \frac{6}{(2p + 1)(0,7p + 1)}$
8		$W(p) = \frac{8}{(4p + 1)(0,7p + 1)}$
9		$W(p) = \frac{9}{(2p + 1)(0,5p + 1)}$
10		$W(p) = \frac{10}{(2p + 1)(0,1p + 1)}$

11		$W(p) = \frac{11}{(2p+1)(0,3p+1)}$
12		$W(p) = \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)}$
13		$W(p) = \frac{4}{(0,4p+1)(0,5p+1)}$
14		$W(p) = \frac{1,5}{(5p+1)(0,6p+1)}$
15		$W(p) = \frac{2,6}{(6p+1)(0,7p+1)}$
16		$W(p) = \frac{28}{(2p+1)(0,9p+1)}$
17		$W(p) = \frac{10}{(p+1)(0,1p+1)}$
18		$W(p) = \frac{1,2}{(2p+1)(0,3p+1)}$
19		$W(p) = \frac{20}{(1,5p+1)(0,1p+1)}$
20		$W(p) = \frac{4,5}{p(0,2p+1)}$

Домашнє завдання

- 1) Записати для своєї $W(p); W(j\omega); M(\omega); U(\omega); V(\omega); \varphi(\omega); L(\omega) = 20\lg M(\omega)$.
- 2) побудувати їх графіки.

Приклади тесту до лекції №6

Приклад №12 передаточна функція – це ланка II порядку

$$W(j\omega) = \frac{3}{(3P+1)(0.4P+1)};$$

$$\text{АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{3}{(3j\omega+1)(0.4j\omega+1)};$$

$$W(j\omega) = \frac{3}{\sqrt{9\omega^2+1} \times \sqrt{0.16\omega^2+1} \times e^{i\varphi_1} \times e^{i\varphi_2}}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{3\omega}{1} = \arctg 3\omega$$

$$\varphi_2(\omega) = \arctg \frac{0.4\omega}{1} = \arctg 0.4\omega$$

Якщо чисельник і знаменник помножити на спряжені величини

$$e^{-i\varphi_1} \times e^{-i\varphi_2} \text{ то } e^{i\varphi_1} \times e^{-i\varphi_1} = e^{0\varphi_1} = 1;$$

$e^{i\varphi_2} \times e^{-i\varphi_2} = e^{0\varphi_2} = 1$, а в чисельнику з'являться спряжені величини $e^{-i\varphi_1}$ і $e^{-i\varphi_2}$.

$$\text{Тоді: } W(j\omega) = \frac{3}{\sqrt{9\omega^2+1} \times \sqrt{0.16\omega^2+1}} \times e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\text{АЧХ: } M(\omega) = \frac{3}{\sqrt{9\omega^2+1} \times \sqrt{0.16\omega^2+1}},$$

$$\text{а ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\arctg 3\omega - \arctg 0.4\omega.$$

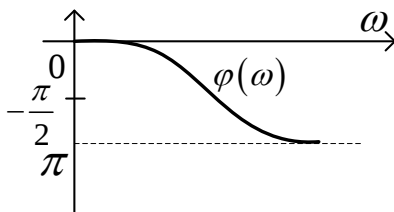
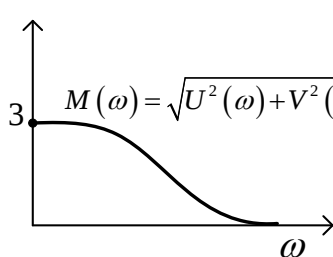
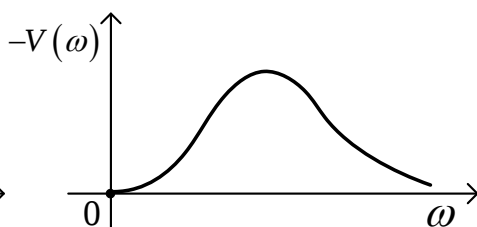
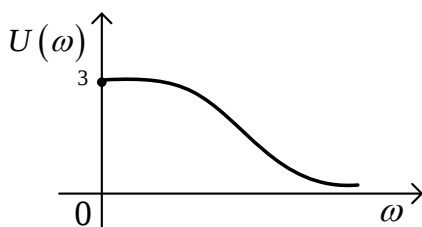
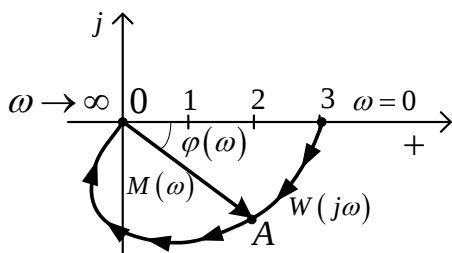
Дійсна складова $W(j\omega)$:

$$U(\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

Уявна складова $W(j\omega)$:

$$V(\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

Накреслимо ці залежності:



Логарифмічна АЧХ: $L(\omega)$

Відношення потужності вихідної і вхідної змінної пропорційне відношенню їх квадратів:

$$\frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вих}}^2}{U_{\text{вх}}^2} = M^2(\omega) = |W(j\omega)|^2.$$

Підсилення в 1 бел, якщо

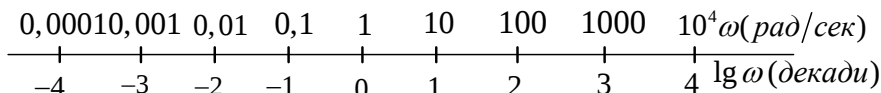
$$\lg \frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = \lg M^2(\omega) = 1 \text{ (це, коли } \frac{N_{\text{вих}}}{N_{\text{вх}}} = 10),$$

а якщо $\lg M^2(\omega) = 0.1$, то підсилення буде в 1 децибел

(це, коли $\frac{N_{вх}}{N_{вх}} = 10^{0.1} = 1.259$),

$\lg M^2(\omega) = 2 \lg M(\omega)$, тобто $2 \lg M(\omega) = 0.1$ – це підсилення в 1 децибел або $L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 1$ ЛАЧХ.

Вісь абсцис в декадах:



Вісь ординат $L(\omega) = 20 \lg M(\omega)$.

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{3}{\sqrt{9\omega^2 + 1} \times \sqrt{0.16\omega^2 + 1}} =$$

$$= 20 \lg 3 - 20 \lg \sqrt{9\omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{0.16\omega^2 + 1}.$$

Якщо $9\omega^2 \gg 1$, то $\lg(3\omega)$,

якщо $0.16\omega^2 \gg 1$, то $\lg(0.4\omega)$ асимптоти.

Нахил асимптот:

$$K = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-20 \lg(3\omega)}{\lg \omega} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-20 \lg 3 - 20 \lg \omega}{\lg \omega} = -20;$$

$$\text{Аналогічно } K = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-20 \lg(0.4\omega)}{\lg \omega} = -20.$$

Отже маємо:

НЧ асимптоту $L_{НЧ}(\omega) = 0$,

ВЧ асимптоту $L_{ВЧ}(\omega) = -20 \lg 3 - 20 \lg \omega$,

їх перетин $L_{ВЧ} = L_{НЧ}$ або $0 = -20 \lg 3 - 20 \lg \omega$.

Звідки частота спряження асимптот:

$$-20 \lg 3 = -20 \lg \omega_{c_1}, \text{ або}$$

$$-20 \lg \frac{1}{3} = -20 \lg \omega_{c_2}$$

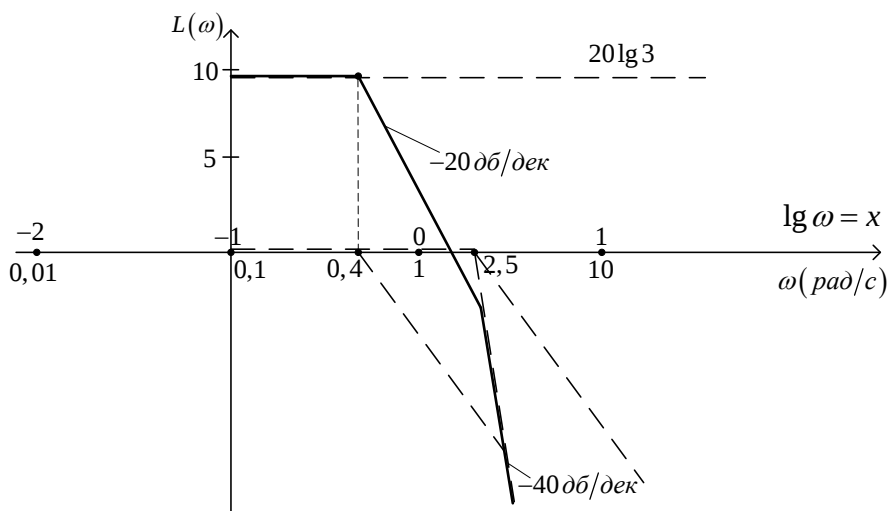
$$\omega_{c_1} = \frac{1}{3}, \text{ аналогічно}$$

$$\omega_{c_2} = \frac{1}{0.4} = 0.25.$$

Тоді кусково-лінійна модель $L(\omega)$ набуває вигляду:

$$L(\omega) = 20 \lg 3 - [20 \lg \omega + 20 \lg 3] \times \\ \times 1(\omega - \omega_{c_1}) - [20 \lg \omega + 20 \lg 0.4] \times 1(\omega - \omega_{c_2}).$$

Тепер будемо графік $L(\omega)$



5 ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Часові характеристики визначають закон зміни вихідної величини $x(t)$ в залежності від часу t за умови дії деякої стандартної вхідної величини $x_s(t)$ за нульових початкових умов.

5.1. Перехідна функція $h(t)$

Перехідна функція $h(t)$ – це рішення диференційного рівняння

$$a(p) \cdot h(t) = b(p) \cdot 1(t)$$

за нульових початкових умов для $h(t)$:

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n)}(0) \equiv 0$$

або

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \cdot h(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \cdot 1(t),$$

де $p = \frac{d}{dt}$;

$1(t)$ – сходи́нка одиничної величини – функція Хевісайта:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Якщо під p розуміти змінну перетворення Лапласа, для якого

$1(p) = \frac{1}{p}$, то зображення за Лапласом $H(p)$ перехідної функції

$h(t)$ через передаточну функцію $W(p)$ буде дорівнювати:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p},$$

де

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

За допомоги межової теореми Лапласа

$$x(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p x(p),$$

або

$$x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p x(p),$$

можна визначити початкове і кінцеве значення перехідної функції $h(t)$:

$$h(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot H(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p) = \begin{cases} 0, n > m; \\ b_0/a_0, n = m; \\ \infty, n < m, \leftarrow \text{це не буває,} \end{cases}$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} W(p) = \begin{cases} b_m/a_n, a_n \neq 0; \\ \infty, a_n = 0. \end{cases}$$

Наприклад, для раніше наведеної передаточної функції

$$W(p) = \frac{K_1(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)},$$

$$h(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K_1(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)} = 0,$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_1(\tau p + 1)}{p(Tp + 1)} = \infty,$$

оскільки $p(Tp + 1) = Tp^2 + p = a_0 p^2 + a_1 p$, а $a_2 = 0$.

5.2. Імпульсна перехідна функція

Імпульсна перехідна функція або функція ваги $w(t)$ – це рішення диференційного рівняння

$$a(p) \cdot w(t) = b(p) \cdot \delta(t),$$

де $p = \frac{d}{dt}$, $\delta(t)$ – функція Дірака, така, що $\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0, \end{cases}$ за

нульових початкових умов:

$$w(0) = w'(0) = \dots = w^n(0) \equiv 0.$$

Зображення за Лапласом $\delta(p)$, якщо враховувати що

$\delta(t) = \frac{dh}{dt}$, буде наступне:

$$\delta(p) = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-pt} dt = p \frac{1}{p} = 1.$$

Тоді зображення $w(p)$ і.п.ф. $w(t)$ буде дорівнювати передаточній функції $W(p)$ системи:

$$w(p) = W(p) \cdot \delta(p) = W(p).$$

Маючи передаточну функцію $W(p)$, і.п.ф. $w(t)$ можна обчислити, як зворотне перетворення Лапласа $\mathcal{L}^{-1}$ від $w(p)$:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(p)\}.$$

Користуючись межевою теоремою Лапласа можна визначити початкове $w(0)$ і кінцеве $w(\infty)$ значення і.п.ф.:

$$w(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot W(p) = \begin{cases} 0, n > m + 1; \\ b_0/a_0, n = m + 1; \\ \infty, n < m + 1; \leftarrow \text{не буває,} \end{cases}$$

де

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$w(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W(p) = \begin{cases} 0, a_n \neq 0, \\ b_m/a_{n-1}, a_n = 0; a_{n-1} \neq 0; \\ \infty, a_n = a_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Вказані умови для $h(\infty)$ і $w(\infty)$ справедливі, якщо система стійка або нейтральна.

Враховуючи, що $w(t) = \frac{dh}{dt}$, встановимо зв'язок:

$$\int_0^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt = pH(p) - h(0_+) = W(p) - h(0_+).$$

Звідси

$$W(p) = \int_0^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt + h(0_+),$$

а $w(t)$, як зворотне перетворення Лапласа від $W(p)$, буде наступне:

$$w(t) = \frac{dh}{dt} + h(0_+) \cdot \delta(t).$$

За умови, коли $n > m$, $h(0_+) = 0$, тоді

$$w(t) = \frac{dh}{dt}.$$

5.3. Зв'язок між вихідною величиною $x(t)$, вхідною $x_3(t)$ і функціями $h(t)$ і $w(t)$

Селективна (фільтруюча) властивість $\delta(t)$:

$$\text{оскільки } \delta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases},$$

то функція $f(t)$ в момент τ дорівнює:

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt.$$

Розглянемо так званий *інтеграл Дюамеля* або інтеграл згортки. За його допомогою, з використанням п.ф. $h(t)$ або і.п.ф. $w(t)$, обчислюється вихідний сигнал системи $x(t)$ за відомого вхідного сигналу $x_3(t)$. Для отримання необхідних формул скористаємося поняттям інтегралу, як межі часткових складових суми, якщо крок Δt прямує до нуля.

Нехай маємо довільний (аналітично заданий) вхідний сигнал $x_3(t)$ (Рис.5.1).

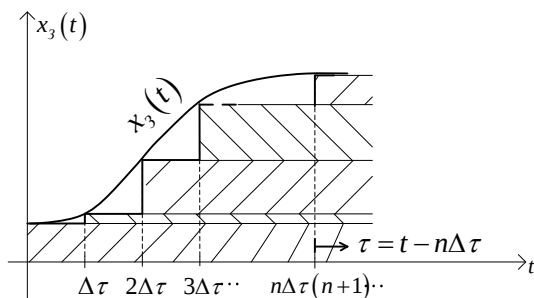


Рис. 5.1. Залежність $x_3(t)$ і його кусково-стала апроксимація

Вихідний сигнал $x(t)$, в першому наближенні, відповідно до принципу суперпозиції, можна визначити як суму реакцій $h(t)$ системи на сходинки, які подаються в моменти $n\Delta\tau$, ($n=0,1,2,\dots$), і якими апроксимовано вхідний сигнал $x_3(t)$. Амплітуда A_n сходинок наближено визначається через тангенс кута дотичної проведеної до $x_3(t)$ в момент $t = n\Delta\tau$:

$$A_n = \left. \frac{dx_3(t)}{dt} \right|_{n\Delta\tau} \cdot \Delta\tau = x_3'(n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau.$$

За досить малих $\Delta\tau$ вихідний сигнал $x(t)$ наближено дорівнюватиме:

$$x(t) \cong \sum_{n=0}^N h(t - n\Delta\tau) \cdot x_3'(n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau + x_3(0)h(t).$$

Якщо тепер перейти до межі коли $\Delta\tau \rightarrow 0$, а $N \rightarrow \infty$, то $h(t - n\Delta\tau) =$

$= h(t - \tau)$, то сума $\sum_{K=0}^N$ заміниться інтегралом $\int_0^t$, а попередня сума

перейде до інтегралу згортки:

$$x(t) = x_3(0)h(t) + \int_0^t h(t - \tau) \cdot x_3'(\tau) d\tau,$$

де реакція $x(t)$ системи на $x_3(t)$ визначається через перехідну функцію $h(t - \tau)$ системи і похідну $x_3'(\tau)$.

Якщо скористатися відомою з математики формулою інтегралу за частинами:

$$\int U dV = UV - \int V dU,$$

то можна визначити $x(t)$ через і.п.ф. $w(t)$ системи. Дійсно, нехай $h(t-\tau)=U$, $x_3'(\tau)=dV$. Тоді

$$\begin{aligned} x(t) &= x_3(0) \cdot h(t) + h(t-\tau) x_3(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \left(-\frac{dh(t-\tau)}{d\tau} \right) \cdot x_3(\tau) d\tau = \\ &= x_3(0) \cdot h(t) + h(0) \cdot x_3(t) - h(t) \cdot x_3(0) + \int_0^t w(t-\tau) x_3(\tau) d\tau = \\ &= h(0) \cdot x_3(t) + \int_0^t w(t-\tau) x_3(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

У випадку, якщо в $W(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ степінь $b(p)$ менше степені $a(p)$, то $h(0)=0$. Тоді

$$x(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_3(\tau) d\tau.$$

Отже, маючи зв'язки між $x_3(t)$, $h(t)$, $w(t)$ за отриманими формулами можна розрахувати реакцію $x(t)$ на довільний аналітично заданий сигнал $x_3(t)$.

Приклад: На систему з передаточною функцією $W(p) = \frac{K}{Tp+1}$

діє лінійно зростаючий сигнал $x_3(t) = v \cdot t$. Необхідно визначити динамічну реакцію $x(t)$ на цей сигнал.

Рішення: Визначимо перехідну функцію $h(t)$ системи, як зворотне перетворення Лапласа від зображення вихідного сигналу системи за одиничної сходишки $1(t)$ на вході:

$$H(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Корені $p(Tp+1)$ будуть $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T$. Похідна F'_{2p} від значення $p(Tp+1)$ дорівнює:

$$F'_{2p} = Tp+1 + pT = 2pT+1.$$

Зворотнє перетворення Лапласа:

$$h(t) = \sum_{K=1}^2 \frac{F_1(p_K)}{F'_{2p}(p_K)} \cdot e^{p_K t} = K + \frac{K \cdot e^{-\frac{t}{T}}}{-2T \frac{1}{T} + 1} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Маючи $h(t)$ і $x_3(t) = v \cdot t$, знаходимо $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t K \left(1 - e^{-\frac{T-\tau}{t}}\right) \cdot v d\tau = KvT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

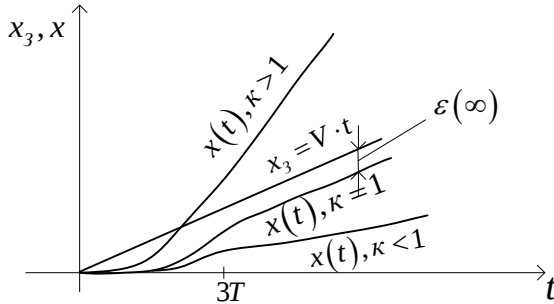


Рис. 5.2. Залежність $x(t, k)$

У випадку, якщо $K=1$, то отримаємо сталу усталену похибку $\varepsilon(\infty)$ між $x_3(t)$ і $x(t)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[x_3(p) - \frac{1}{Tp+1} x_3(p) \right] = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(Tp+1-1)v}{(Tp+1)p^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{Tp^2 \cdot v}{(Tp+1)p^2} = T \cdot v. \end{aligned}$$

Чим більша швидкість v зростання сигналу $x_3(t) = v \cdot t$ і стала T часу, тим більша усталена похибка $\varepsilon(\infty)$ слідування сигналу $x(t)$ за $x_3(t)$.

Далі на основі отриманих характеристик системи, а саме диференційних рівнянь, передаточних функцій, частотних і часових характеристик, можна вирішувати задачі аналізу і синтезу САК.

Однак, користуючись системним підходом, для початку слід розглянути ці характеристики для окремих складових САК – ланок САК.

ТЕСТ

- Відповідно до варіанту (табл. 1) визначити усі часові характеристики для Вашої $W(p)$.

Варіант №20:

$$W(p) = \frac{4,5}{p(0,2p + 1)}.$$

Імпульсна перехідна функція – це зворотне перетворення Лапласа від $W(p)$:

$$w(p) = L^{-1} \left\{ \frac{4,5}{p(0,2p + 1)} \cdot \delta(p) \right\},$$

де $\delta(p) = 1$.

За II теорією Лапласа:

$$w(p) = \sum_{K=1}^2 \frac{F_1(p_K)}{F'_{2p}(p_K)} \cdot e^{p_K t},$$

де $F_1(p_K) = 4,5$.

$$F_2(p_K) = p(0,2p + 1); \quad F'_{2p}(p_K) = 0,4p + 1.$$

$$p_K: p_1 = 0; \quad p_2 = -5.$$

Тоді

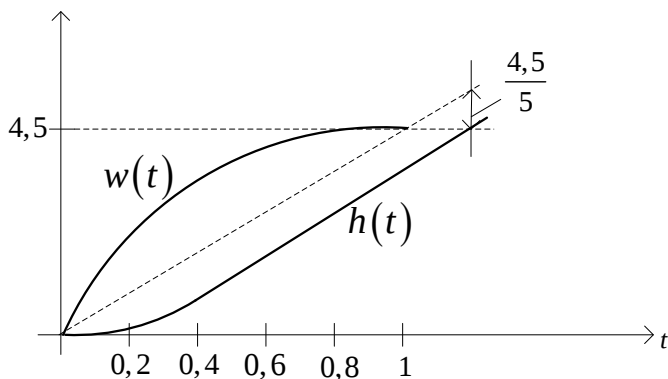
$$w(t) = \frac{4.5}{1} e^{0t} + \frac{4.5}{(-1)} e^{-5t} = 4.5(1 - e^{-5t}).$$

Перехідну функцію

$h(t)$ знайдемо як інтеграл від імпульсної $w(t)$:

$$h(t) = \int_0^t 4.5(1 - e^{-5\tau}) d\tau = 4.5t - 4.5 \int_0^t e^{-5\tau} d\tau =$$

$$4.5 \left[t - \frac{1}{5} \int_0^{(-5t)} e^{-5\tau} d(-5\tau) \right] = 4.5 \left[t - \frac{1}{5} e^{-5\tau} \Big|_0^{(-5t)} \right] = 4.5 \left[t - \frac{1}{5} (1 - e^{-5t}) \right]$$



Варіант 12:

$$W(p) = \frac{3}{(3p + 1)(0.4p + 1)}.$$

Перехідна функція $h(t)$, це реакція на $1(t)$.

Тоді

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(3p + 1)(0.4p + 1)} \cdot \frac{1}{p} \right\}.$$

За II теоремою Лапласа

$$h(t) = \sum_{K=1}^3 \frac{F_1(p_K)}{F'_{2p}(p_K)} \cdot e^{p_K t}; \quad F_1(p_K) = 3.$$

$$F_2 = p(3p + 1)(0,4p + 1) = 1,2p^3 + 3,4p^2p,$$

$$F'_{2p} = \frac{dF_2}{dp} = 3,6p^2 + 6,8p + 1$$

корені:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{3}; \quad p_3 = -\frac{1}{0,4} = -2,5.$$

$$F'_{2p}(p_1) = 1; \quad F'_{2p}(p_2) = \frac{3,6}{9} + \frac{6,8}{(-3)} + 1 = -0,866;$$

$$F'_{2p}(p_3) = 3,6 - 6,25 + 6,8(-2,5) + 1 = 6,5.$$

Імпульсна перемінна функція:

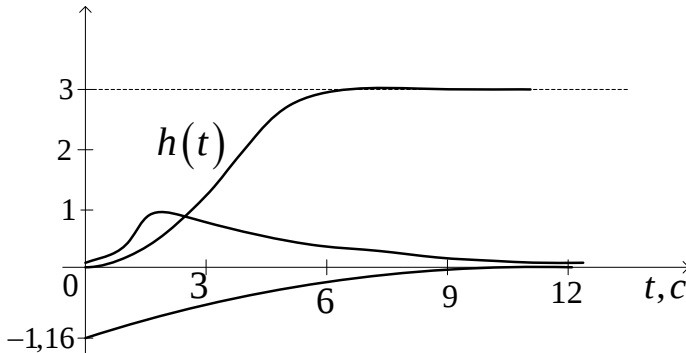
$$W(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 3 \left(1 - 1,15e^{\frac{t}{3}} + 1,15e^{-2,5t} \right) =$$

$$= 3 \frac{1,15}{3} e^{-\frac{t}{3}} - 3 \times 2,5 \times 0,15 e^{-2,5t} =$$

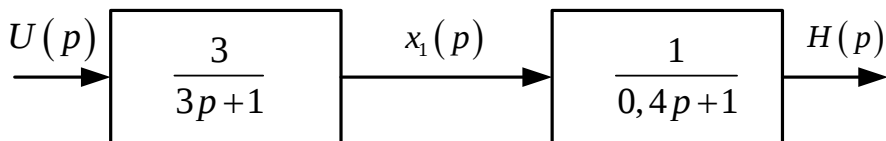
$$= 30,387e^{-\frac{t}{3}} - 30,4e^{-\frac{t}{0,4}} = 1,15e^{-\frac{t}{3}} - 1,2 \times e^{-\frac{t}{0,4}}$$

$$\tau_1 = 3с; \quad \tau_2 = 0,4с.$$

Будуємо графіки :



Розглянемо, як користуючись принципом декомпозиції, зворотнім перетворенням Лапласа і інтегралом Дюамеля, розрахувати $h(t)$ та $\omega(t)$ по $W(p) = 3/(3p + 1)(0,4p + 1)$. Отже $W(p)$ можна подати двома ланками I порядку:



Тоді, внаслідок простоти окремих ланок, можна одразу записати $x_1(t) = 3(1 - e^{-\frac{t}{3}})$.

А $h(t)$ на виході II ланки визначимо на основі інтеграла Дюамеля:

$$h(t) = \int_0^t w_2(t - \tau) \cdot x_1(\tau) d\tau,$$

де $w_2(t - \tau)$ перехідна функція II ланки

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{w_2(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{0,4p + 1}\right\}.$$

За II теоремою Лапласа

$$w_2(t) = \frac{F_1(p_1)}{F'_{2p}(p_2)} e^{p_1 t}, \quad F_2 = 0,4p + 1 = 0,$$

$$p_1 = -2,5,$$

$$F_1(p_1) = 1; \quad F'_{2p}(p) = 0,4,$$

тоді

$$w_2(t) = \frac{1}{0,4} e^{-2,5t} = 2,5e^{-2,5t}, \text{ або}$$

$$w_2(t - \tau) = 2,5e^{-2,5(t - \tau)}$$

Підставивши $w_2(t - \tau)$ і $x_1(\tau)$ в інтеграл Дюамеля (інтеграл «згортки»), отримаємо:

$$h(t) = \int_0^t 2.5e^{-2.5(t-\tau)} \times 3(1 - e^{-\frac{\tau}{3}}) d\tau = 3 \left[1 - 1.15e^{-\frac{t}{3}} + 0.15e^{-2.5t} \right].$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} h(t) &= 7.5 \int_0^t e^{-2.5(t-\tau)} d\tau - 7.5 \int_0^t e^{-2.5(t-\tau)} e^{-\frac{\tau}{3}} d\tau = \\ &= 7.5e^{-2.5t} \int_0^t e^{2.5\tau} d\tau - 7.5e^{-2.5t} \int_0^t e^{(\frac{10}{4} - \frac{1}{3})\tau} d\tau \end{aligned}$$

Розрахуємо І інтеграл:

$$\frac{6}{13} \int_0^{\frac{13}{6}t} e^{\frac{13}{6}\tau} d(\frac{13}{6}\tau) = \frac{6}{13} (e^{\frac{13}{6}t} - 1). \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{7.5}{2.5} e^{-2.5t} (e^{2.5t} - 1) - \frac{7.5}{13} e^{-2.5t} (e^{\frac{13}{6}t} - 1) = \\ &= 3 \left\{ (1 - e^{-2.5t}) - 1.15(e^{(\frac{13}{6} - 2.5)t} - e^{-2.5t}) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{7.5}{2.5} e^{-2.5t} (e^{2.5t} - 1) - \frac{7.5}{13} e^{-2.5t} (e^{\frac{13}{6}t} - 1) = \\ &= 3 \left\{ (1 - e^{-2.5t}) - 1.15(e^{(\frac{13}{6} - 2.5)t} - e^{-2.5t}) \right\} = \\ &= 3 \left\{ 1 + 0.15e^{-2.5t} - 1.15e^{-\frac{t}{3}} \right\} \end{aligned}$$

6 ТИПОВІ ЛАНКИ САК

6.1 Безінерційна ланка

Якщо розглядати напівнескінченний діапазон частот $(0, \infty)$, то в природі навряд чи існують безінерційні об'єкти.

Той же потенціометр з електричним опором R , як безінерційний об'єкт, в діапазоні надвисоких частот буде мати ємність та індуктивність. Однак, враховуючи обмеження частотного діапазону корисних сигналів вхід – $x(t)$, вихід – $y(t)$, його можна описати безінерційною ланкою.

6.1.1 Часові характеристики

Якщо $x(t)=1(t)$, то $y(t)=h(t)$ і перехідна функція буде дорівнювати:

$$h(t) = K \cdot 1(t).$$

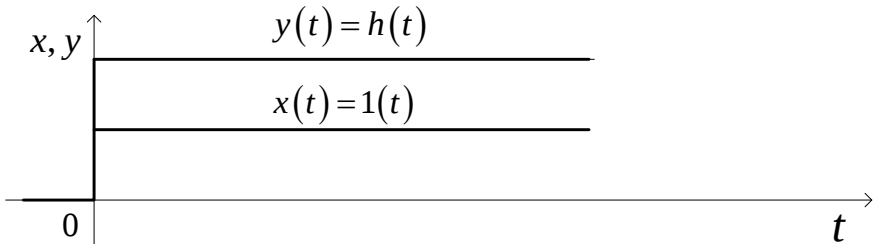


Рис. 6.1. Перехідна функція безінерційної ланки

Якщо $x(t) = \delta(t)$ - функція Дірака, то $y(t) = w(t) = K \cdot \delta(t)$ – імпульсна перехідна функція.

6.1.2. Передаточна функція

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K.$$

6.1.3. Частотні характеристики

АФЧХ:

$$W(p) \Big|_{p=j\omega} = W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K.$$

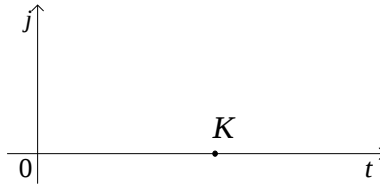


Рис. 6.2. АФЧХ безінерційної ланки

Або $W(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega); \quad U(\omega) = M(\omega) = K;$
 $V(\omega) \equiv 0; \quad \varphi = 0.$

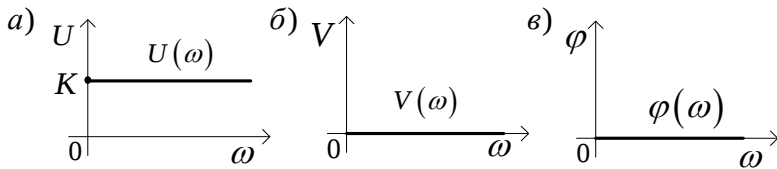


Рис. 6.3. Дійсна (а), уявна (б) і фазочастотна (в) характеристики

Логаріфмічна АЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg K.$$

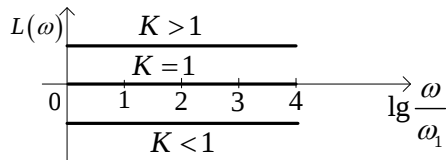


Рис. 6.4. ЛАЧФ

В системах автоматичного керування безінерційними можна вважати і інерційні елементи, якщо їх інерційність набагато менше інших інерційних елементів. Наприклад, тахогенератор на валу потужного (але інерційного) електродвигуна, електронний підсилювач керуючого сигналу в САР і т.п.

6.2 Інерційна ланка I порядку

Теплові, хімічні, механічні чи електричні процеси в системах, які мають одну суттєву відносно інших інерційність, можуть бути описані диференціальним рівнянням I порядку.

Так з рівняння теплового балансу енергій чи потужностей

$$dQ = cmd\theta^\circ + K_{T_6} \cdot S_{Ox} \Delta\theta^\circ dt ,$$

де dQ , $d\theta^\circ$, dt - диференціали теплоти, температури і часу;

c , m – коефіцієнти теплоємності і маса об'єкта, що нагрівається;

K_{T_6} , S_{Ox} - коефіцієнт тепловіддачі і поверхня охолодження,

або

$$\frac{dQ}{dt} = P = cm \frac{d\Delta\theta^\circ}{dt} + K_{T_6} \cdot S_{Ox} \Delta\theta^\circ ,$$

де P – потужність нагрівача, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\tau_T \cdot \frac{dy}{dt} + y = kx(t),$$

де теплова стала

$$\tau_T = \frac{cm}{K_{T\theta} \cdot S_{Ox}},$$

статичний коефіцієнт

$$K = \frac{1}{K_{T\theta} \cdot S_{Ox}},$$

$$y(t) = \Delta \theta^\circ(t), \quad x(t) = P(t).$$

З рівняння за II законом Ньютона для обертального руху валу двигуна постійного струму (ДПС)

$$J_\Sigma \frac{d\Omega}{dt} = c'_m \cdot I_\gamma - M_H,$$

де J_Σ – сумарний момент інерції всіх механічних частин, що пов'язані з валом ДПС; c'_m – конструктивний коефіцієнт ДПС; I_γ – струм якоря, якщо знехтувати малою індуктивністю L_γ якірного кола, дорівнює:

$$I_\gamma = \frac{U_\gamma - c'_m \cdot \Omega}{R_\gamma},$$

M_H – момент навантаження:

$$M_H = K_H \Omega + M_{H0},$$

переходячи до рівнянь у відхиленнях від усталеного режиму Ω_0 , $I_{\gamma 0}$, $U_{\gamma 0}$, M_{H0} , отримаємо диференціальне рівняння I порядку:

$$\tau \cdot \frac{d\Delta\Omega}{dt} + \Delta\Omega(t) = K\Delta U_\gamma.$$

Дійсно, якщо в рівняння за першим законом Ньютона підставити вираз для I_γ і M_H

$$J_\Sigma \frac{d\Delta\Omega}{dt} = c'_m \frac{U_\gamma - c'_m \cdot \Omega}{R_\gamma} - K_H \Omega - M_{H0},$$

і перейти до відхилення від базового режиму

$$J_{\Sigma} \cdot 0 = c'_m \frac{U_{яo} - c'_m \cdot \Omega_0}{R_{я}} - K_H \Omega_0 - M_{но},$$

то отримаємо рівняння

$$J_{\Sigma} \frac{d\Delta\Omega}{dt} = \frac{c'_m}{R_{я}} \cdot \Delta U_{я} - \left(\frac{(c'_m)^2}{R_{я}} + K_H \right) \Delta\Omega,$$

або у стандартній формі

$$\tau_M \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t),$$

де механічна стала часу

$$\tau_M = \frac{J_{\Sigma}}{\frac{(c'_m)^2}{R_{я}} + K_H},$$

статичний коефіцієнт

$$k = \frac{\frac{(c'_m)}{R_{я}}}{\frac{(c'_m)^2}{R_{я}} + K_H}.$$

Звідси видно, що інертність (у вигляді τ_M) тим більша, чим більший момент інерції J_{Σ} і тим менша, чим більші демпфіруючі складові c'_m і K_H , які, однак, зменшують статичний коефіцієнт K .

З рівняння за другим законом Кірхгофа для не навантаженої RC -ланки, як фільтра нижніх частот сигналу $u_1(t)$, з урахуванням того, що

$$i(t) = c \frac{du_2}{dt}, \text{ а } u_1 - u_2 = iR,$$

теж отримаємо диференціальне рівняння I порядку:

$$u_1(t) = RC \frac{du_2}{dt} + u_2,$$

або

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t),$$

де електрична стала часу $\tau = RC$, $K=1$.

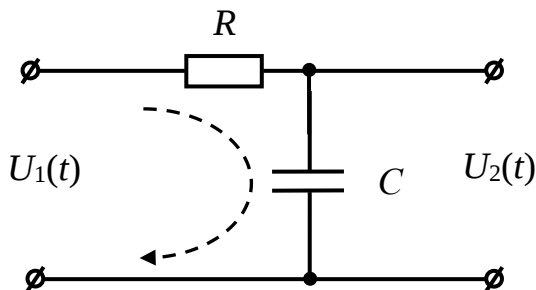


Рис. 6.5. Інерційна RC-ланка

Аналогічні процеси мають місце в хімічних реакторах, біологічних об'єктах, економічних системах та інших де домінує одна певна найбільш суттєва інертність.

6.2.1 Типова інерційна ланка I порядку та її характеристики

1) Часові характеристики:

Диференціальне рівняння зв'язку виходу $y(t)$ з входом $x(t)$ ланки:

$$\tau \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t).$$

За типового входного впливу

$$x(t) = 1(t),$$

і нульових початкових умов

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0,$$

$$x(0_-) = 0, \quad x(0_+) = 1,$$

де $0_{\pm}$ – означає нескінченно мале відхилення від нуля,

знайдемо перехідну функцію:

$$y(t) = h(t).$$

Для співставлення простоти отримання рішення розглянемо класичний метод і метод на основі перетворення Лапласа.

Класичний метод:

Рішення $h(t)$ знаходимо як суму вільної h_g і вимушеної (усталеної для $x(t)=1(t)$) $h_y(t)$ складової:

$$h(t) = h_g + h_y(t).$$

Вільна складова є рішенням однорідного рівняння

$$\tau \frac{dh_g}{dt} + h_g(t) = 0.$$

Характеристичний поліном від p :

$$\tau p + 1 = 0,$$

його корінь $p_1 = -1/\tau$ від'ємний, що гарантує існування усталеного режиму.

Загальне рішення однорідного рівняння:

$$h_g(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де A – невідома стала.

Вимушену складову $h_y(t)$ знаходимо для $x(t)=1(t)$, як усталене значення, якщо $t \rightarrow \infty$:

$$h_y(t) = K.$$

Загальне рішення неоднорідного рівняння:

$$h(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K.$$

З початкових умов знаходимо сталу A :

$$h(0) = 0 = A e^0 + K, \quad A = -K.$$

Конкретне (для даних початкових умов) рішення:

$$h(t) = K \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Операторний метод

Від диференційного рівняння

$$\tau \cdot \frac{dh}{dt} + h = K \cdot 1(t),$$

за нульових початкових умов перейдемо до алгебраїчного рівняння змінних Лапласа p :

$$(\tau p + 1)H(p) = \frac{K}{p}.$$

Звідси

$$H(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Корені $F_2(p) = 0$;

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{\tau}.$$

Похідна від $F_2(p)$ на p :

$$F_2'(p) = (\tau p + 1) + p\tau = 2\tau p + 1.$$

Її значення для p_1 і p_2 :

$$F_{2p}'(p_1) = 1; \quad F_{2p}'(p_2) = -1.$$

Зворотне перетворення Лапласа:

$$h(t) = \sum_{K=1}^2 \frac{F_1(p_K)}{F_{2p}'(p_K)} \cdot e^{p_K t} = \frac{K}{1} e^{0t} - \frac{K}{1} e^{-\frac{t}{\tau}} = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Отже для ланки I порядку обидва методи є нескладними.

Графік $h(t)$:

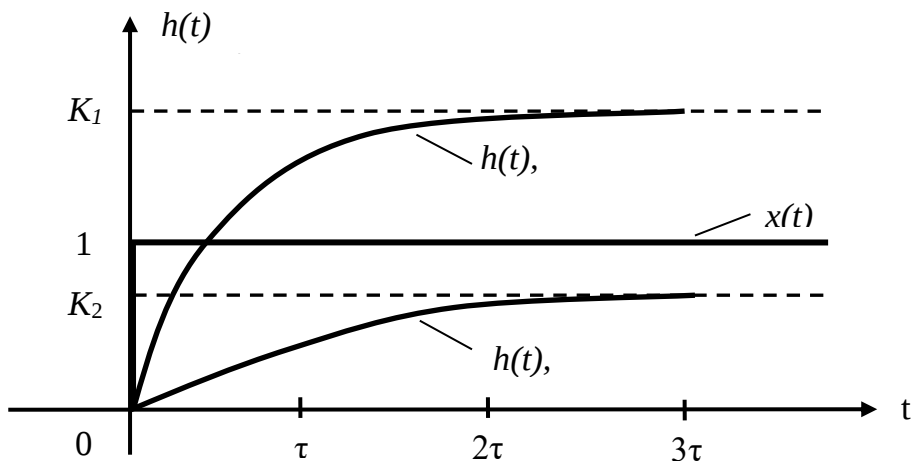


Рис. 6.6 Залежність $h(t, k, \tau)$ для різних K

За типового вхідного впливу у вигляді δ - функції Дірака,

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases},$$

знайдемо імпульсну перехідну функцію $w(t)$ (рис. 6.7) ланки I порядку:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

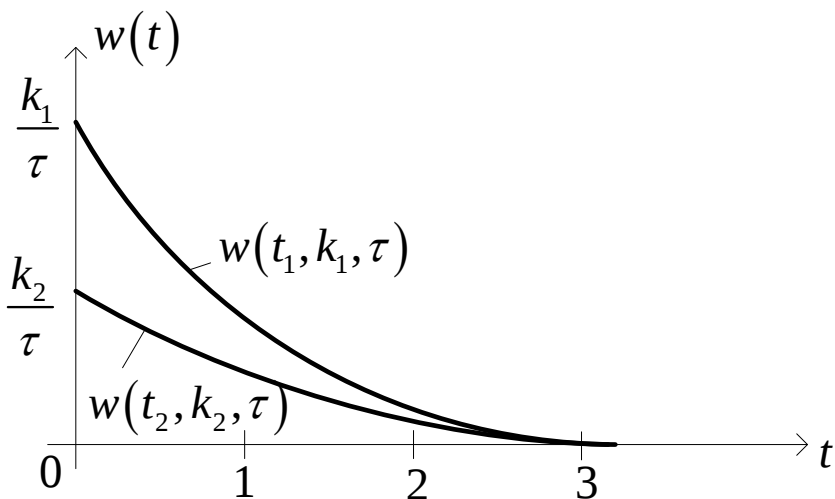


Рис. 6.7. Залежність $w(t, k, \tau)$

Частотні характеристики

Замінивши в передаточній функції p на $j\omega$, отримаємо амплітудо-фазо-частотну характеристику (АФЧХ) або комплексний коефіцієнт передачі ланки:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{K}{j\omega\tau + 1}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на спряжений комплексний $1 - j\omega\tau$, отримаємо дійсну $U(\omega)$ і уявну $V(\omega)$ складові:

$$\frac{K}{(j\omega\tau + 1)} \cdot \frac{(1 - j\omega\tau)}{(1 - j\omega\tau)} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{K \cdot \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = U + jV,$$

$$\text{де } U = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad V = \frac{-\omega\tau \cdot K}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Модуль

$$\begin{aligned}
 |W(j\omega)| &= M(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{K^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{K^2 \cdot \omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}} = K \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}} \\
 &= \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},
 \end{aligned}$$

що є амплітудо – частотною характеристикою (АЧХ) ланки. Фазочастотну характеристику (ФЧХ) обчислимо, як кут, тангенс якого дорівнює відношенню V до U :

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg \omega\tau.$$

Подамо графіки (рис. 6.8.) (а) – $W(j\omega)$, (б) – $M(\omega)$, (в) – $U(\omega)$, (г) – $V(\omega)$, (д) – $\varphi(\omega)$ для ланки.

Не складно показати, що $W(j\omega)$, як годограф (вектор – функція ω) при зміні частоти ω від 0 до ∞ , являє собою напівокружність радіуса $K/2$. Що це так, достатньо довести справедливості виразу:

$$\begin{aligned}
 V^2 + \left(U - \frac{K}{2}\right)^2 &= \frac{K^2}{4} : \\
 \frac{K^2\omega^2\tau^2}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2} + \left(\frac{K^2}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2} - 2\frac{K}{2} \cdot \frac{K}{(\omega^2\tau^2 + 1)} + \frac{K^2}{4}\right) &= \frac{K^2}{4}
 \end{aligned}$$

або

$$\frac{\omega^2\tau^2 + 1 - (\omega^2\tau^2 + 1)}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2} \equiv 0.$$

Всі характеристики (окрім $V(\omega)$ і $\varphi(\omega)$) мають значення K за нульової частоти ω і аперіодично асимптотично прямують до нуля зі зростанням частоти ω .

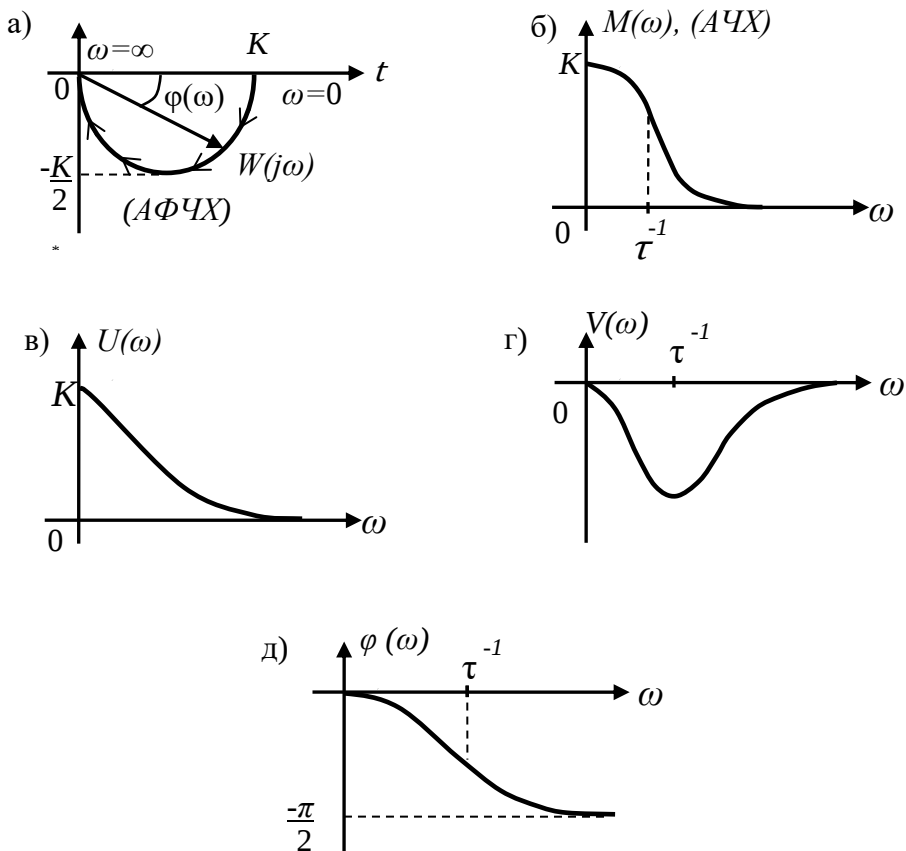


Рис. 6.8. Частотні характеристики інерційної ланки I порядку

Максимум $V(\omega)$ має місце для $\omega = \frac{1}{\tau}$. Дійсно, за необхідної умови екстремуму

$$\frac{dV(\omega)}{d\omega} = \frac{d(\omega_0 \tau) \cdot K}{d\omega(\omega_0^2 \tau^2 + 1)} = K \cdot \frac{\tau(\omega_0^2 \tau^2 + 1) - \omega_0 \tau \cdot 2\omega_0 \tau^2}{(\omega_0^2 \tau^2 + 1)^2} \equiv 0$$

отримаємо, що $\tau - \omega_0^2 \tau^3 = 0$ або $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$.

Логарифмічні частотні характеристики

Оскільки АФЧХ ланки дорівнює $w(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$, то

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}.$$

Наближено, для низьких частот, за яких $\omega\tau \ll 1$,

$$L_{HЧ}(\omega) \cong 20 \lg K.$$

Для високих частот, за яких $\omega\tau \gg 1$,

$$L_{BЧ}(\omega) \cong 20 \lg K - 20 \lg \omega\tau.$$

Щоб розрахувати нахил $L_{BЧ}(\omega)$ візьмемо $L_{BЧ}$ від ω_1 і $\omega_2 = 10\omega_1$:

$$L_{BЧ}(\omega_1) = 20 \lg K - 20 \lg \omega_1\tau,$$

$$L_{BЧ}(\omega_2) = 20 \lg K - 20 \lg 10\omega_1\tau = 20 \lg K - 20 \lg \omega_1\tau - 20 \lg 10.$$

Тоді, оскільки $\lg 10 = 1$, різниця між $L_{BЧ}(\omega_1)$ і $L_{BЧ}(\omega_2)$ складе -20 дб. Тобто нахил $L_{BЧ}(\omega)$ має -20 дб/декаду.

Знайдемо точку зустрічі $L_{BЧ}$ і $L_{HЧ}$:

$$20 \lg K = 20 \lg K - 20 \lg \omega_1\tau,$$

$$\text{або } -20 \lg \omega_1\tau = 0, \text{ це можливо коли } \omega_1\tau = 1; \text{ тобто } \omega_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Найбільша різниця в 3 дб між точною і асимптотичною характеристиками буде на частоті їх спряження (у даному випадку на ω_1). Це плата за подальше спрощення розрахунків з використанням простих асимптотичних кусково - лінійних залежностей.

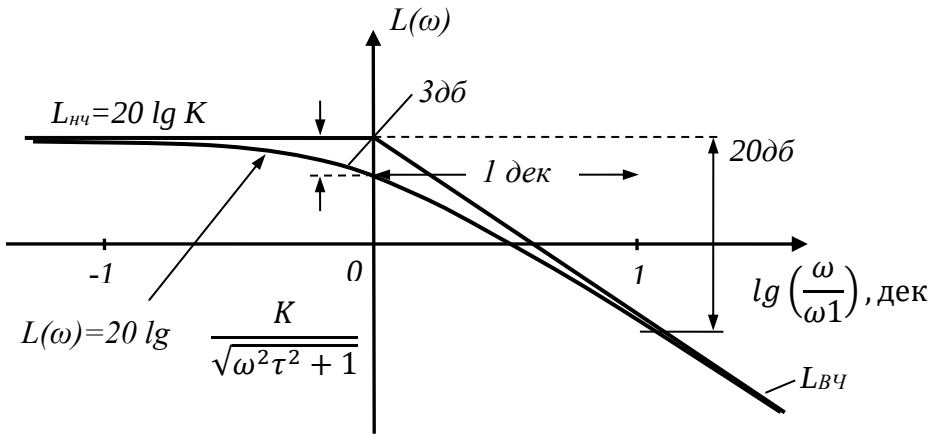


Рис. 6.9. ЛАЧХ ланки I порядку

ТЕСТ

- 1) Дослідіть і намалюйте, як зміняться усі характеристики ланки (Рис.6.5) залежно від ємності C за постійного R .

6.2.2. Ідеальна інтегруюча ланка

Прикладами майже ідеальних інтегруючих ланок можуть бути об'єкти різної природи: швидкість і шлях рухомого об'єкта, кут обертання і напруга на якорі ДПС, витрати рідини і її рівень в резервуарі, операційний електронний підсилювач зі зворотнім ємнісним зв'язком. Розглянемо останній приклад.

Схема підсилювача включає резистор R_1 на вході і конденсатор C в колі зворотного зв'язку:

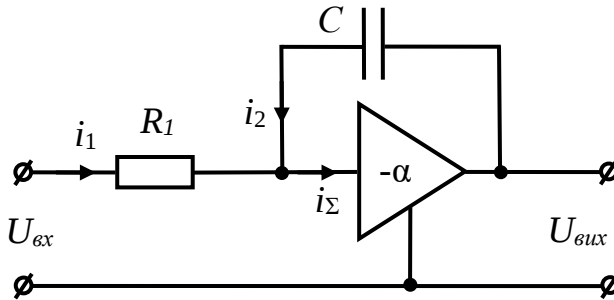


Рис. 6.10. Інтегруючий операційний підсилювач

За досить великого $\alpha = 10^3 \div 10^5$, струм i_Σ буде дорівнювати сумі вхідного струму i_1 і струму зворотного зв'язку i_2 , тоді

$$u_{\text{вих}} = -\alpha(i_1 + i_2) \cong \left(\frac{U_{\text{вх}}}{R_1} + C \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} \right) (-\alpha).$$

Або за Лапласом:

$$U_{\text{вих}}(p)[1 + \alpha Cp] = -\alpha \frac{U_{\text{вх}}(p)}{R_1}$$

або

$$U_{\text{вих}}(p) = \left(\frac{\frac{\alpha}{R_1}}{[1 + \alpha Cp]} \right) \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

За умови, що $\alpha Cp \gg 1$ (і нульових початкових умов),

$$U_{\text{вих}}(p) \cong -\frac{1}{RCp} U_{\text{вх}}(p),$$

або

$$U_{\text{вих}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{вх}}(t) dt.$$

Аналогічно, в ДПС швидкість Ω обертання валу майже пропорційна напрузі $U_{\text{я}}$ якоря, а кут θ , відповідно, інтегралу від $U_{\text{я}}$.

В прийнятому нами стандартному вигляді інтегруюча ланка “вхід $x(t)$ – вихід $y(t)$ ” може бути подана диференціальним рівнянням:

$$\frac{dy}{dt} = Kx(t)$$

або його рішенням:

$$y(t) = K \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0).$$

Перехідна функція:

$$h(t) = K \int_0^t 1(\tau) \cdot dt = Kt;$$

імпульсна перехідна функція:

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = K;$$

передаточна функція:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = W(p) = \frac{K}{p};$$

Частотні характеристики: (рис. 6.11, а)

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -\frac{K}{\omega} = -jM(\omega);$$

(рис. 6.11, б): $U(\omega) = 0$; (рис. 6.11, в): $V(\omega) = -\frac{K}{\omega}$;

(рис. 6.11, г): $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\frac{\pi}{2}$;

(рис. 6.11, д): $L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$,

$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = -20 \text{ дБ/дек.}$$

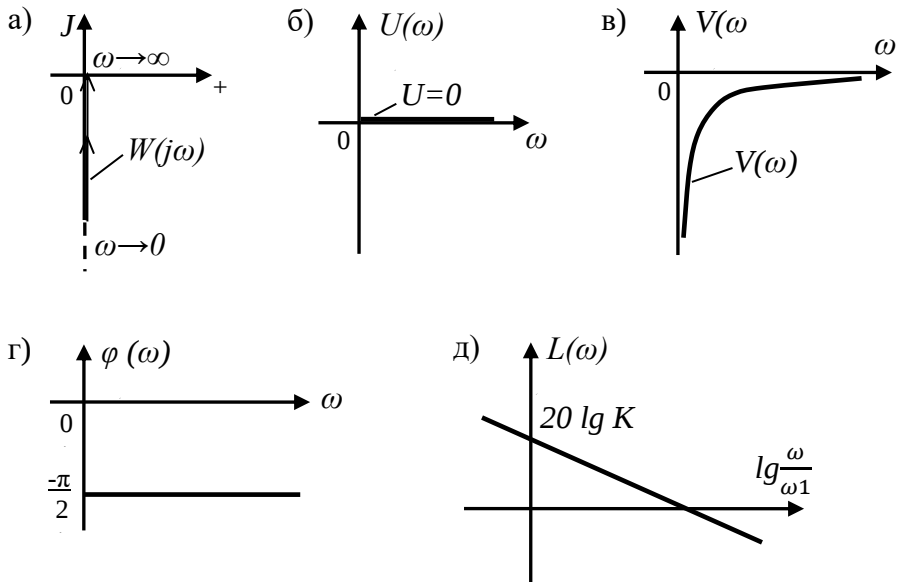


Рис. 6.11. Частотні характеристики інтегратора

6.2.3 Ідеальна диференціальна ланка

Майже ідеальною диференціальною ланкою може бути тахогенератор (датчик швидкості обертання валу), що являє собою генератор постійного струму або (за ідеальної схеми подальшого перетворення) змінної напруги; операційний підсилювач, де, на відміну від попереднього, на вхід підключають конденсатор C , а в зворотній зв'язок – резистор R_1 . Дійсно, як відомо з теорії електричних машин, електрорушійна сила $E_{\text{я}}$ ГПС дорівнює:

$$E_{\text{я}} = c'_{\text{м}} \cdot \Omega = c'_{\text{м}} \frac{d\theta}{dt},$$

де θ – кут, Ω – швидкість, $c'_{\text{м}} = \frac{pN}{2\pi a}$, Φ – постійний магнітний потік, p , N , a – конструктивні параметри ГПС.

Напруга $U_{\text{вих}}$ операційного підсилювача в режимі диференціювання:

$$U_{\text{вих}}(p) = -\frac{R_1}{\frac{1}{pC}} U_{\text{вх}}(p) = -R_1 C p u_{\text{вх}}(p)$$

або

$$u_{\text{вих}}(t) = -R_1 C \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = -\tau \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

В прийнятому нами стандарті диференціююча ланка має рівняння:

$$y(t) = K \frac{dx}{dt}.$$

Перехідна функція

$$h(t) = K \frac{d1(t)}{dt} = K \delta(t),$$

$$\text{де } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}.$$

Імпульсна перехідна функція $w(t)$ в класі звичайних функцій взагалі не існує.

Передаточна функція

$$\frac{y(p)}{x(p)} = W(p) = Kp;$$

Частотні характеристики

$$W(j\omega) = j\omega K; \quad U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = K\omega;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \frac{\pi}{2}; \quad M(\omega) = K\omega; \quad L(\omega) = 20\lg K + 20\lg \omega.$$

Графіки частотних характеристик ідеального диференціатора:

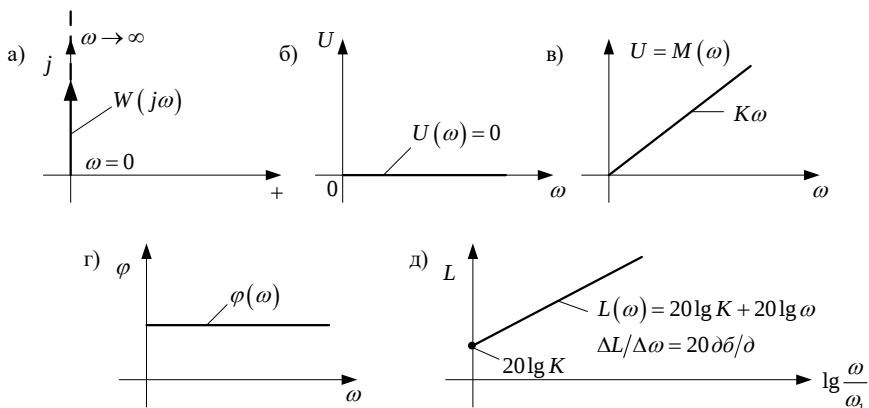


Рис. 6.12. Залежність а) - $W(j\omega)$, б) - $U(\omega)$, в) - $V(\omega) = M(\omega)$, г) - $\varphi(\omega)$, д) - $L(\omega)$.

6.2.4 Реальна диференціююча ланка

Як приклад, в електричних колах це може бути відповідно підключена RC – або RL – ланка (рис. 6.13),

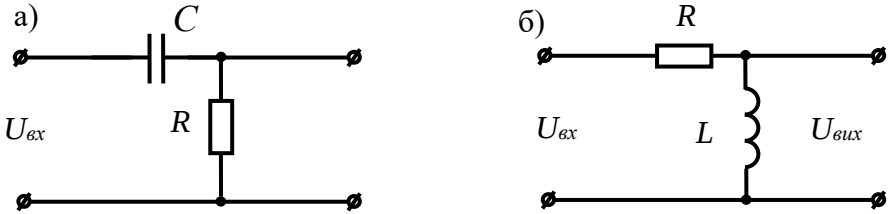


Рис. 6.13. а) RC -ланка; б) RL -ланка

яку ще називають пасивним фільтром верхніх частот. За допомогою операційного підсилювача можна побудувати її, як активний фільтр ВЧ – частот:

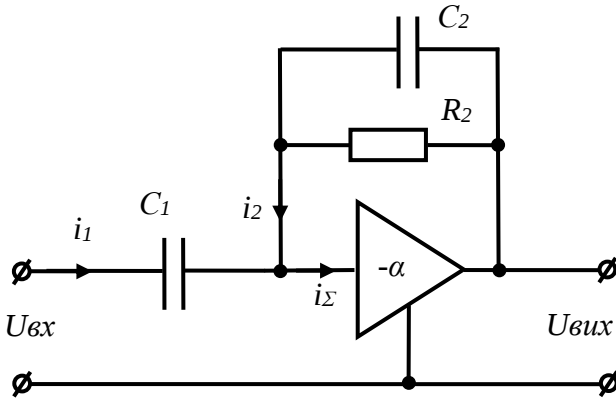


Рис. 6.14. Активний RC -фільтр

Як вже відомо (рис. 6.10), передаточна функція операційного підсилювача (ОП) наближено визначається, як відношення опору зворотного зв'язку до вхідного опору:

$$\begin{aligned}\frac{u_{\text{вих}}(p)}{u_{\text{вх}}(p)} &= -\frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}}{\frac{1}{pC_1}} = -\frac{\frac{R_2}{R_2 pC_2 + 1}}{1} \cdot pC_1 = -p \cdot \frac{R_2 C_1}{R_2 pC_2 + 1} \\ &= -p \frac{\tau_{21}}{\tau_{22}p + 1}.\end{aligned}$$

Отже такий ОП виконує операцію згладжування, як в інерційній ланці I порядку, а потім диференціювання згладженого сигналу. Чим менше C_2 , тим ближче операція до ідеального диференціювання.

Для пасивного RC - фільтра (рис. 6.13, а) за II законом Кірхгофа маємо, що:

$$u_{\text{ex}}(t) = u_c(t) + u_{\text{вих}}(t),$$

або

$$\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \frac{du_c}{dt} + \frac{du_{\text{вих}}}{dt},$$

де: $u_{\text{вих}} = i \cdot R$; $i = C \frac{du_c}{dt}$,

отже

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{RC} u_{\text{вих}} + \frac{du_{\text{ex}}}{dt}$$

або

$$\tau \frac{du_{\text{вих}}}{dt} + u_{\text{вих}} = \tau \frac{du_{\text{ex}}}{dt}, \quad \tau = RC.$$

У прийнятих нами стандартних позначеннях реальна диференціююча ланка, незалежно від її фізичної реалізації, матиме наступне диференціальне рівняння:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = \tau \frac{dx}{dt}.$$

Перехідну функцію $h(t)$ отримаємо з цього рівняння, якщо $x(t) = 1(t)$. Скористаємося перетворенням Лапласа. Зображення $1(t)$ це $1/p$.

Зображення $\frac{d1(t)}{dt}$ або $\delta(t)$ це 1.

Тоді зображення $H(p)$ функції $h(t)$ становить:

$$H(p) = \frac{\tau}{\tau p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Похідна $F'_{2p} = \tau$. Корінь $P_1 = -\frac{1}{\tau}$, $F_1 = \tau$, тоді (рис. 6.15, а):

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Імпульсна перехідна функція (рис. 6.15, б):

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \delta(0) - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

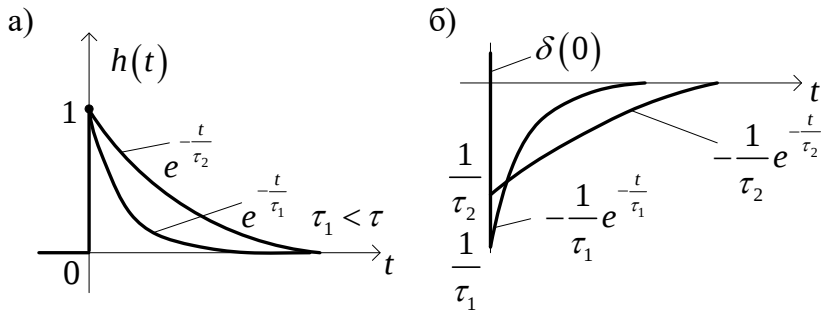


Рис. 6.15. Перехідна (а) і імпульсна перехідна (б) функції

Чим менша інерційність ланки, тобто стала часу τ , тим ближче ланка до ідеального диференціатора.

Передавальну функцію отримаємо з диференційного рівняння за нульових початкових умов, замінив оператор d/dt на комплексну змінну Лапласа p :

$$\tau p y(p) + y(p) = \tau p x(p);$$

звідки

$$W(p) = \frac{\tau p}{\tau p + 1}.$$

Амплітудо-фазо-частотна характеристика (АФЧХ) або комплексний коефіцієнт передачі:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{j\omega\tau + 1}.$$

Дійсна і уявна складові АФЧХ:

$$\frac{j\omega\tau}{j\omega\tau + 1} \cdot \frac{(-j\omega\tau + 1)}{(-j\omega\tau + 1)} = \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} + j \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Модуль $M(\omega)$ АФЧХ.

З рівняння:

$$M^2(\omega) = U^2(\omega) + V^2(\omega),$$

отримаємо

$$M(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}.$$

Дійсно,

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) = \frac{(\omega^2\tau^2)^2 + (\omega\tau)^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} = \frac{(\omega\tau)^2[\omega^2\tau^2 + 1]}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} = \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2},$$

звідки

$$M(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}.$$

Вектор АФЧХ $W(j\omega)$ можна визначити в полярній системі координат через $M(\omega)$ і кут $\varphi(\omega)$:

$$W(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{\omega\tau \cdot j}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \cdot e^{j\arctg\omega\tau}} - M(\omega) \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\arctg\omega\tau}} = \\ = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau$.

Перехід від j до $e^{j\frac{\pi}{2}}$ витікає з формули Ейлера:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}.$$

Будь-який вектор $\vec{C}$ на комплексній площині у декартовій системі визначається через проекції на дійсну і уявну осі:

$$\vec{C} = C \cdot \cos \alpha + jC \cdot \sin \alpha = C \cdot e^{j\varphi}.$$

Отже, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{C} = C \cdot j$ або $j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Логарифмічна АЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega) = 20\lg\omega\tau - 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} = 20\lg\omega\tau - 10\lg(\omega^2\tau^2 + 1).$$

Побудуємо графіки частотних характеристик ланки:

АФЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau\right)}.$$

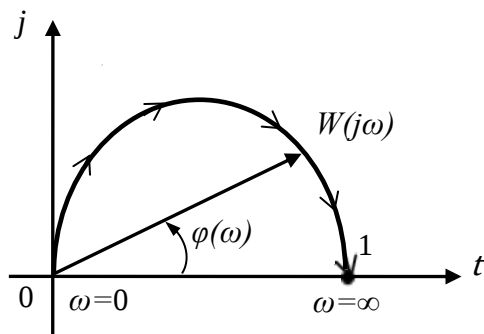


Рис. 6.16. АФЧХ ланки

Як і для інтегральної ланки I порядку, годограф $W(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ окреслює на комплексній площині напівокружність

з центром $(1/2; j=0)$ радіуса $\frac{1}{2} : \left(U - \frac{1}{2}\right)^2 + V^2 = \frac{1}{4}$ або

$$U^2 - U + V^2 = 0.$$

Дійсно,

$$\frac{\omega^4 \tau^4}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} - \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \equiv 0.$$

Дійсна $U(\omega)$ і уявна $V(\omega)$ складові:

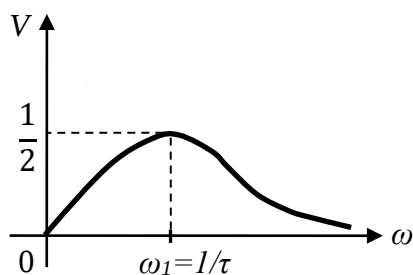
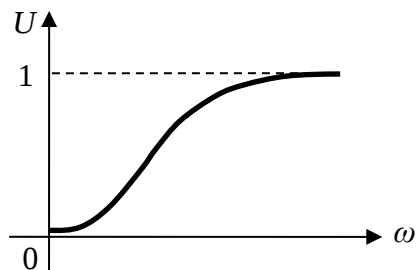


Рис. 6.17. а) $U(\omega)$; б) $V(\omega)$

Знайдемо ω_1 , за якої $V(\omega_1)$ максимальне:

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) = \frac{\tau(1 + \omega^2 \tau^2) - \omega_1^2 \cdot 2\tau^3}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} = 0.$$

Звідки, за умови $\tau + \omega_1^2 \tau^3 - \omega_1^2 \cdot 2\tau^3 = 0$, отримаємо, що $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$, а

$$V(\omega_1) = V\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2}.$$

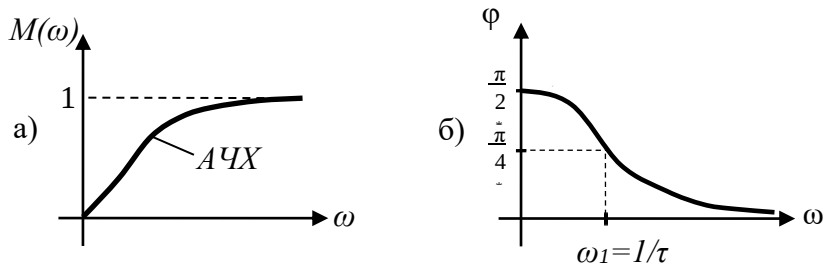


Рис. 6.18. а) $M(\omega)$; б) $\varphi(\omega)$

Амплітудо-частотна і фазо-частотна характеристики:

Випередження по $\varphi(\omega)$ вказує на зменшення інерційності, що використовується для покращення швидкодії САК.

Логарифмічна залежність $L(\omega)$ складається, як сума двох асимптот: $20 \lg \omega \tau$ і $-20 \lg \omega \tau$ для $\omega \geq \omega_1 = \frac{1}{\tau}$. Чим менша τ , тим ширше частотний діапазон майже ідеального диференціювання. Однак і інерційна складова необхідна для обмеження підсилення більш високочастотних перешкод в сигналі $u_{\text{ex}}(t)$.

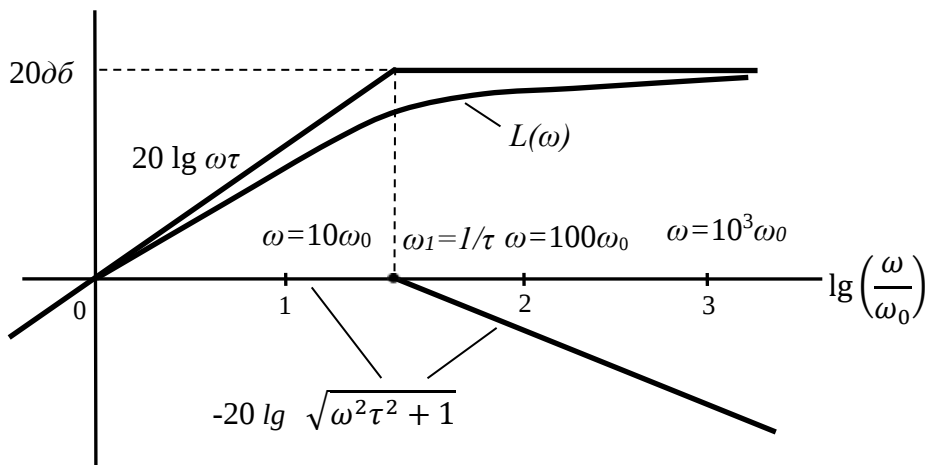


Рис. 6.19. ЛАФЧ характеристика

Практичне заняття

6.2.5. Не стійка аперіодична ланка I порядку

Не стійкі (лавина-подібні) процеси виникають в системі з інтегратором в прямому колі і додатнім зворотнім зв'язком у зворотному.

Подамо структурну схему такої системи:

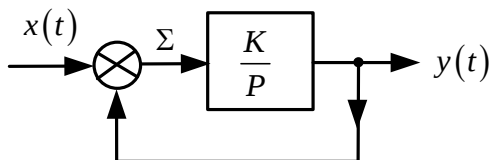


Рис. 6.20. Структура нестійкої ланки I порядку

Тут K/p – інтегратор, $p = d/dt$;

$$y(t) = \frac{K}{p}(x(t) + y(t))$$

або

$$\frac{dy}{dt} - Ky(t) = Kx(t),$$

або

$$\tau \frac{dy}{dt} - y(t) = x(t),$$

де $\tau = \frac{1}{K}$.

Часові характеристики:

$$\tau \frac{dh}{dt} - h(t) = 1(t).$$

Перетворення Лапласа:

$$(\tau p - 1)H(p) = \frac{1}{p}$$

або

$$H(p) = \frac{1}{p(\tau p - 1)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad F_1(p) = 1;$$

$$F'_{2p} = (\tau p - 1) + \tau p = 2\tau p - 1.$$

Корені: $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{\tau}$.

$$F'_{2p}(p_1) = -1; \quad F'_{2p}(p_2) = 1$$

Перехідна функція:

$$h(t) = \frac{1}{(-1)} e^{0t} + \frac{1}{1} e^{\frac{t}{\tau}} = e^{\frac{t}{\tau}} - 1.$$

Імпульсна перехідна характеристика:

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}}$$

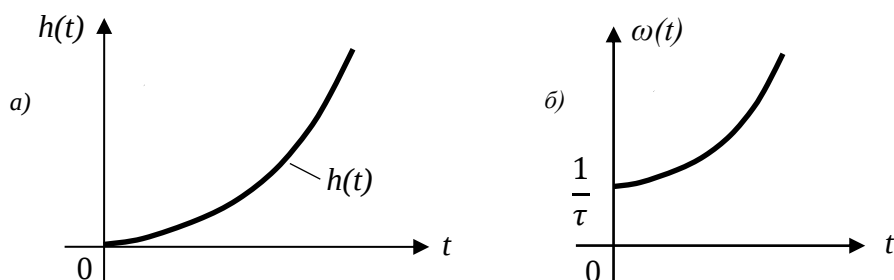


Рис. 6.21. а) $h(t)$; б) $w(t)$

Передаточна функція:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{\tau p - 1}.$$

Частотні характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau - 1} = -\frac{1}{1 - j\omega\tau}.$$

Дійсна і уявна складові від $W(j\omega)$:

$$-\frac{1}{1 - j\omega\tau} \cdot \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = -\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

або

$$U(\omega) = -\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad V(\omega) = -\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

$$M^2(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{\omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2},$$

$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ – співпадає з $M(\omega)$ для ланки стійкої I порядку

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ але, з урахуванням, що $V < 0$ і $U < 0$, це буде

III квадрантом комплексної площі $(j, +)$, тобто: $\varphi(\omega) = -\pi + \arctg \tau$ (рис. 6.22):

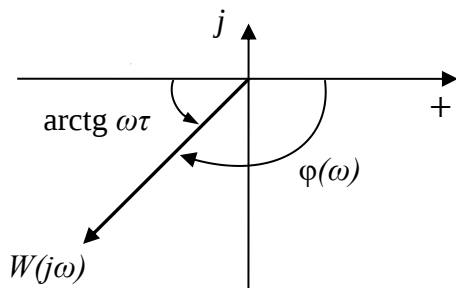


Рис. 6.22. АФЧХ

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Подамо графік частотних характеристик:

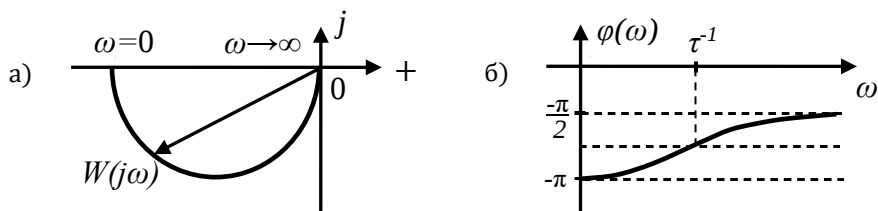


Рис. 6.23. а) $W(j\omega)$; б) $\varphi(\omega)$

Реальні нестійкі об'єкти керування потребують спеціальної системи керування ними, яка забезпечує в цілому стійкість системи з нестійкими об'єктами – даною ланкою. Отже без систем стабілізації сам по собі нестійкий об'єкт існувати не може, хіба що на час в $3 \div 5\tau$.

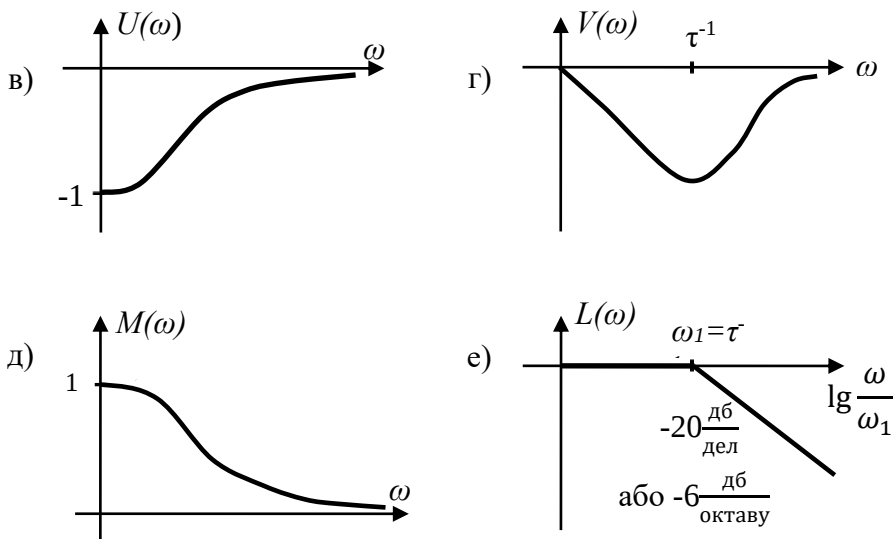


Рис. 6.24. а) $W(j\omega)$; б) $\varphi(\omega)$

ТЕСТ

1. Дослідіть, як буде поводитись не стійка ланка (рис. 6.20), якщо у вітку зворотного зв'язку увімкнути безінерційну ланку з коефіцієнтом $k_{зз}$, що змінюється від $-\infty$ до $+\infty$?
2. Запишіть всі характеристики ланки (Рис.6.10) за умови, що паралельно до ємності C підключено опір R_2 .

6.3. Ланки II порядку

6.3.1 Двигун постійного струму, як ланка II порядку в системі широтно-імпульсного керування його швидкістю Ω

На відміну від класичної схеми САК ДПС, де керуюча дія – напруга якоря $U_{\text{я}}$ ДПС виробляється керуванням по обмотці збудження магнітного потоку ГПС (схема «ГПС-ДПС»), ГПС можна замінити мостовою ключовою схемою на транзисторах з широтно-імпульсним керуванням середнього значення напруги $U_{\text{я}}$:

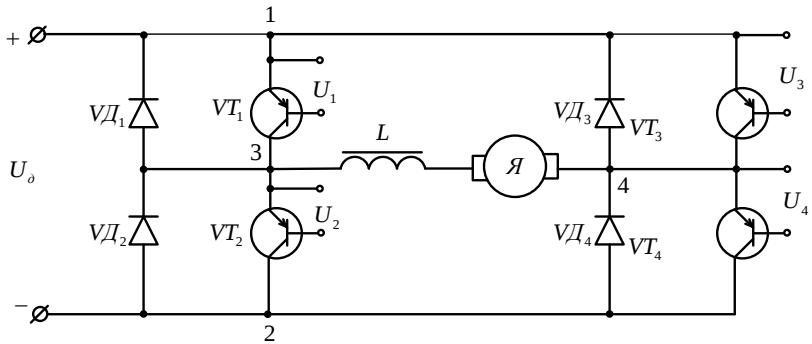


Рис. 6.24. Схема ШІМ напруги $U_{\text{я}}$

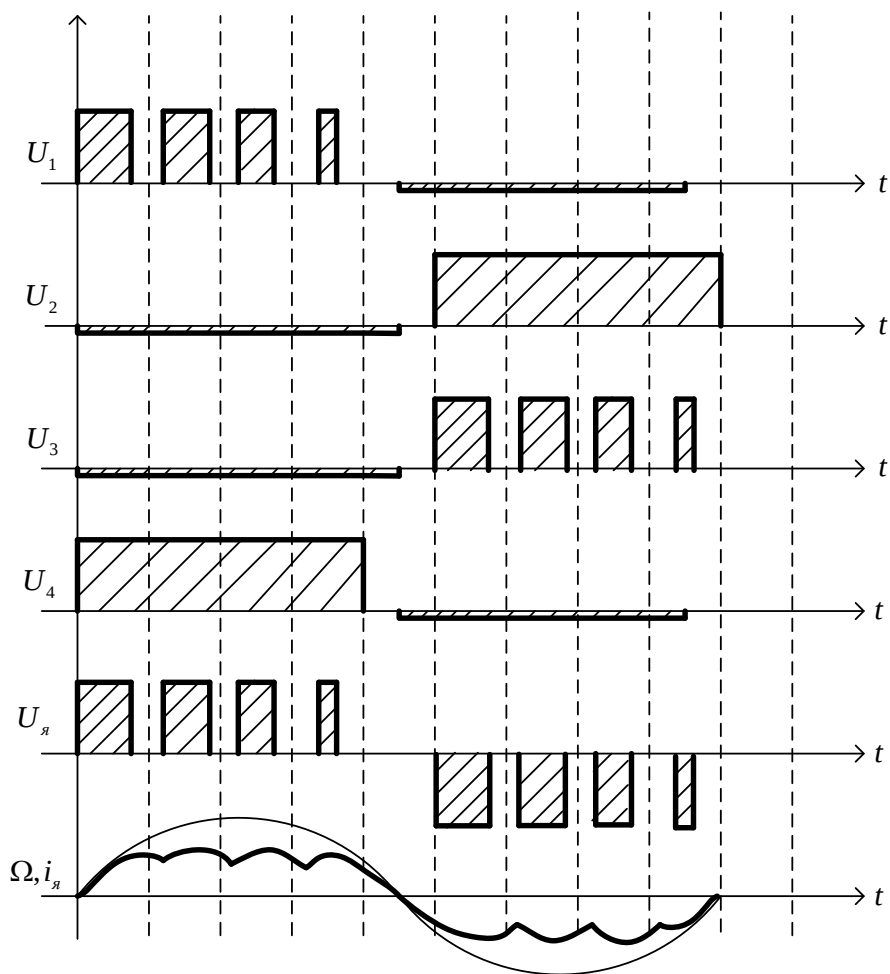


Рис. 6.25. Залежність $\Omega(t)$ і $i_{я}(t)$

Схему складено з чотирьох транзисторів VT1÷VT4, чотирьох діодів VD1÷VD4, котушки індуктивності L і ДПС. До вузлів 1, 2 підключено постійну напругу U_d джерела, до вузлів 3,4 підключено дросель L і ярів ДПС. Для обертання валу ДПС в одну сторону

($\Omega(t) > 0$) струм $I_{\text{я}}$ якоря пропускають через транзистори VT1 і VT4, в другу сторону – через VT3 і VT2. Транзистори працюють в ключовому режимі («відкрито-закрито»), який створюється керуючими напругами $U_1 \div U_4$ на їх базах. Змінюючи скважність керуючих імпульсів можна змінювати середню швидкість $\Omega(t)$ обертання валу ДПС. Завдяки індуктивності L дроселя і активному опору $R_{\text{я}}$ якоря, між вузлами 3 і 4 утворюється RL-коло, яке згладжує струм $I_{\text{я}}$, а завдяки механічній інерційності швидкість $\Omega(t)$ згладжується ще більше. Тоді, за відповідних параметрів, пульсації $\Omega(t)$ майже відсутні.

Якщо вхідною величиною брати напругу $U_{\text{я}}(t)$, а вихідною $\Omega(t)$, то будемо мати приклад типової ланки II порядку. Дійсно, за рівнянням Ньютона для обертального руху

$$J_{\Sigma} \frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{н}}$$

де J_{Σ} - сумарний момент інерції мас, приведених до валу ДПС,

$$M_{\text{д}} = C'_{\text{м}} \cdot i_{\text{я}}, \quad M_{\text{н}} = K_{\text{н}} \Omega + M_{\text{но}},$$

$C'_{\text{м}}$ і $K_{\text{н}}$ - коефіцієнти, $M_{\text{но}}$ - сталий момент навантаження.

Рівняння за II законом Кірхгофа для кола якоря:

$$U_{\text{я}}(t) = C'_{\text{м}} \Omega + i_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L \frac{di_{\text{я}}}{dt}.$$

З цих рівнянь можна отримати типові рівняння II порядку у відхиленнях $\Delta\Omega$ і $\Delta U_{\text{я}}$ від усталеного режиму:

$$(a'_0 p^2 + a'_1 p + a_2) \Delta\Omega(t) = b'_1 \Delta U_{\text{я}}(t).$$

Покажемо, як це зробити: стандартне рівняння ланки (Рис. 6.26):

$$a'(p)y(t) = b'(p) \cdot x(t).$$

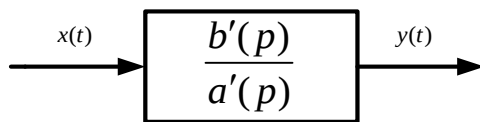


Рис. 6.26. Модель «вхід – вихід»

$$J_{\Sigma} \frac{d\Omega}{dt} = M_{\partial} - M_{\text{н}} = C'_M \cdot i'_{\text{я}} - (K_{\text{н}}\Omega + M_{\text{ном}})$$

$$U_{\text{я}}(t) = C'_M \cdot \Omega + i'_{\text{я}} \cdot R_2 + L \frac{di'_{\text{я}}}{dt}$$

Перейдемо до перетворення Лапласа:

$$\begin{cases} pJ_{\Sigma}\Omega(p) = C'_M \cdot I_{\text{я}}(p) - (K_{\text{н}}\Omega(p) + M_{\text{ном}}(p)); \\ U_{\text{я}}(p) = C'_M \cdot \Omega(p) + [R_{\text{я}} + pL]; \end{cases}$$

$$I_{\text{я}} = \frac{U_{\text{я}} - C'_M \cdot \Omega}{R_{\text{я}} + pL};$$

$$pJ_{\Sigma} = \Omega(p) = C'_M \frac{U_{\text{я}} - C'_M \cdot \Omega}{R_{\text{я}} + pL} - (K_{\text{н}}\Omega + M_{\text{ном}});$$

$$(R_{\text{я}} + pL)pJ_{\Sigma}\Omega = C'_M(U_{\text{я}} - C'_M \cdot \Omega) - (K_{\text{н}}\Omega + M_{\text{ном}})(R_{\text{я}} + pL);$$

$$\begin{aligned} [J_{\Sigma}Lp^2 + (J_{\Sigma}R_{\text{я}} + K_{\text{н}}L)p + ((C'_M)^2 + K_{\text{н}}R_{\text{я}})]\Omega \\ = C'_MU_{\text{я}} - (R_{\text{я}} + pL)M_{\text{ном}}; \end{aligned}$$

$$(a'_0p^2 + a'_1p + a_2)\Delta\Omega(t) = b'_1\Delta U_{\text{я}} - 0 = \Delta M$$

або

$$(a'_0p^2 + a'_1p + 1)\Delta\Omega(t) = b_1\Delta U_{\text{я}}(p);$$

$$a_0 = \frac{a'_0}{a'_2} = \frac{J_{\Sigma}L}{(C'_M)^2 + K_{\text{н}}R_{\text{я}}}; \quad a_1 = \frac{J_{\Sigma}R_{\text{я}} + K_{\text{н}}L}{(C'_M)^2 + K_{\text{н}}R_{\text{я}}}; \quad b_1 = \frac{C'_M}{(C'_M)^2 + K_{\text{н}}R_{\text{я}}}.$$

$$a'_0p^2 + a'_1p + 1 = 0 \begin{cases} \text{корні } p_1, p_2 \text{ дійсні;} \\ \text{корні } p_1, p_2 \text{ спряжені.} \end{cases}$$

Якщо дійсні різні, то

$$\begin{aligned} a'_0p^2 + a'_1p + 1 &= T_1T_2p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 = (T_1p + 1)(T_2p + 1) \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1}; \quad p_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Дійсно, за теоремою Вієта:

$$a'_0p^2 + a'_1p + 1 = (p - p_1)(p - p_1) = \left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) = 0.$$

Перехідна функція:

$$H(p) = K \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Знайдемо $h(t)$ методом розкладання на прості складові:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} &= \\ &= \frac{A \left(\left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) \right)}{p} + \frac{B \left(p \left(p + \frac{1}{T_2} \right) \right)}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{C \left(p \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \right)}{p + \frac{1}{T_2}} = \\ &= \frac{A((T_1 p + 1)(T_2 p + 1)) + Bp(T_2 p + 1)T_1 + Cp(T_2 p + 1)T_2}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \end{aligned}$$

Метод прирівнювання

Степінь p	Ліва частина	Права частина
p^2	$0 =$	$AT_1 T_2 + BT_1 T_2 + C \cdot T_1 T_2$
p^1	$0 =$	$A(T_1 + T_2) + B \cdot T_1 + C \cdot T_2$
p^0	$1 =$	A

Отже $A = 1$; тоді $A + B + C \equiv 0$ або $B + C = -1$. Тоді

$$\left. \begin{aligned} B + C &= -1 \\ T_1 \cdot B + T_2 \cdot C &= -(T_1 + T_2) \end{aligned} \right\} \text{ в матричному вигляді;}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix}; \text{ зворотня матриця:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj} \begin{bmatrix} T_2 & -1 \\ -T_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{bmatrix} = T_2 - T_1$$

Зворотна матриця:

$$\begin{bmatrix} \frac{T_2}{T_2 - T_1} & \frac{-1}{T_2 - T_1} \\ \frac{-T_1}{T_2 - T_1} & \frac{1}{T_2 - T_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T_2 - T_1} \\ \frac{-T_2}{-T_2 - T_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}.$$

Отже

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{C}{p + \frac{1}{T_2}} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{T_1}{T_2 - T_1}}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}{p + \frac{1}{T_2}}.$$

Зворотнє перетворення Лапласа від кожної складової:

$$h(t) = K \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right],$$

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right),$$

покладемо, що $\Delta U_{\text{я}} = x(t)$, $\Delta \Omega = y(t)$; коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 , b_1 визначимо шляхом приведення рівняння з фізичними коефіцієнтами до абстрактних:

$$a'_0 = \frac{J_{\Sigma} \cdot L}{C_{\text{м}}}, \quad a'_2 = C'_{\text{м}} + \frac{R_{\text{я}} \cdot K_{\text{н}}}{C'_{\text{м}}}, \quad b'_1 = 1.$$

Як звичай, ланку II порядку подають у такому вигляді:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + 1)y(t) = b_1 x(t),$$

де:

$$a_0 = \frac{a'_0}{a'_2}; a_1 = \frac{a'_1}{a'_2}; b_1 = \frac{b'_1}{a'_2}.$$

- рівняння Ньютона для усталеного режиму:

$$J_{\Sigma} \cdot 0 = C'_{\text{м}} I_{\text{я}0} - K_{\text{н}} \Omega_0 - M_{\text{н}0};$$

- рівняння Кірхгофа :

$$U_{\text{я}0} = C'_{\text{м}} \cdot \Omega_0 + I_{\text{я}0} \cdot R_{\text{я}};$$

- різниця між рівняннями перехідного режиму і усталеного:

$$J_{\Sigma} \frac{d\Delta\Omega}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt} = C'_{\text{м}} \cdot \Delta I_{\text{я}} - K_{\text{н}} \Delta\Omega,$$

$$\Delta U_{\text{я}}(t) = C'_\text{м} \cdot \Delta \Omega + R_{\text{я}} \Delta I_{\text{я}} + L \frac{d\Delta I_{\text{я}}}{dt};$$

- щоб виключити проміжну змінну, визначаємо $\Delta I_{\text{я}}$ з I рівняння:

$$\Delta I_{\text{я}} = \frac{1}{C'_\text{м}} I_{\Sigma} \frac{d\Delta \Omega}{dt} + \frac{K_{\text{н}}}{C'_\text{м}} \Delta \Omega$$

і підставимо в друге:

$$\Delta U_{\text{я}} = C'_\text{м} \cdot \Delta \Omega + R_{\text{я}} \left(\frac{1}{C'_\text{м}} I_{\Sigma} \frac{d\Delta \Omega}{dt} + \frac{K_{\text{н}}}{C'_\text{м}} \Delta \Omega \right) + L \left(\frac{1}{C'_\text{м}} I_{\Sigma} \frac{d^2 \Delta \Omega}{dt^2} + \frac{K_{\text{н}}}{C'_\text{м}} \Delta \Omega \right).$$

З цього рівняння, отримаємо стандартне рівняння:

$$a'(p)y(t) = b'(p)x(t).$$

Далі, залежно від коренів p_1, p_2 характеристичного поліному $a_0 p^2 + a_1 p + 1 = 0$, останнє рівняння набуває вигляду

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)y(t) = b_1 x(t),$$

якщо корені дійсні

$$(p_1 = \mp 1/T_1, p_2 = \mp 1/T_2);$$

або

$$(T^2 p^2 + 2\xi p T + 1)y(t) = b_1 x(t),$$

якщо корені комплексно-спряжені

$$(p_{1,2} = \mp \xi/T \pm 1/T \cdot j - \sqrt{1 - \xi^2}), \text{ де } j = \sqrt{-1}.$$

Для *стійких* систем дійсна складова коренів менше нуля, для *нестійких* – більше.

6.3.2. Аперіодична ланка II порядку

Диференційне рівняння:

$$(T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1)y(t) = kx(t).$$

Якщо $x(t) = 1(t)$, і $y'(0) = y(0) = 0$, то $y(t) = h(t)$.

Визначимо перехідну функцію $h(t)$ скориставшись перетворенням Лапласа з розкладанням дробно-раціональної функції комплексної змінної p на суму простих функцій:

$$(T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1)H(p) = \frac{K}{p},$$

або зображення за Лапласом $H(p)$ перехідної функції $h(t)$ з урахуванням, що за теоремою Вієта

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1),$$

буде мати наступний вигляд:

$$H(p) = K \cdot \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

де $\frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ розкладемо на прості складові з невідомими коефіцієнтами A, B, C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} + \frac{C}{p + \frac{1}{T_2}} = \\ &= \frac{A(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p} + \frac{B \cdot T_1 p(T_2 p + 1)}{T_1 p + 1} + \frac{C \cdot T_2 p(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1} = \\ &= \frac{A(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + B \cdot T_1 p(T_2 p + 1) + C \cdot T_2 p(T_1 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \end{aligned}$$

Перша і остання складові цього виразу однакові, якщо однакові їх чисельники; тобто, за умови, що

$$1 = A(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + B \cdot T_1 p(T_2 p + 1) + C \cdot T_2 p(T_1 p + 1),$$

визначаємо коефіцієнти A, B, C :

Степінь p	Ліва частина	Права частина
p^2	0=	$AT_1 T_2 + BT_1 T_2 + C \cdot T_1 T_2$
p^1	0=	$A(T_1 + T_2) + B \cdot T_1 + C \cdot T_2$
p^0	1=	A

Звідси $A=1$; $A+B+C = 0$ або

$$\begin{cases} B + C = -1; \\ T_1 \cdot B + T_2 C = -(T_1 + T_2), \end{cases} \text{ , або в матричному представленні}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix}, \text{ де } \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix}.$$

Знайдемо зворотну матрицю:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj[\]^T} \begin{bmatrix} T_2 & -1 \\ -T_1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{det[\]} (T_2 - T_1).$$

Зворотна матриця $\begin{bmatrix} \frac{T_2}{T_2-T_1} & \frac{-1}{T_2-T_1} \\ \frac{-T_1}{T_2-T_1} & \frac{1}{T_2-T_1} \end{bmatrix}$, помножена на стовпчик

$\begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix}$, дає значення B і C :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{T_2}{T_2-T_1} & \frac{-1}{T_2-T_1} \\ \frac{-T_1}{T_2-T_1} & \frac{1}{T_2-T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -(T_1 + T_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{T_2}{T_2-T_1}(-1) + \frac{1}{T_2-T_1}(T_1 + T_2) \\ \frac{T_1}{T_2-T_1} - \frac{(T_1 + T_2)}{T_2-T_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T_2-T_1} \\ -\frac{T_2}{T_2-T_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Використовуючи зворотне перетворення Лапласа для простих складових

$$\frac{1}{p} + \frac{\frac{T_1}{T_2-T_1}}{p + \frac{1}{T_1}} + \left(\frac{-\frac{T_2}{T_2-T_1}}{p + \frac{1}{T_2}} \right),$$

знаходимо оригінал $h(t)$ функції $H(p)$:

$$h(t) = K \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right].$$

Імпульсну перехідну функцію $w(t)$ визначимо, як похідну від $h(t)$:

$$w(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

У випадку, якщо $T_1 = T_2$, за іншою формулою зворотного перетворення Лапласа для кратних коренів визначаємо:

$$\begin{aligned} h(t) &= K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right)^2 e^{-\frac{t}{T}} \right], \\ w(t) &= \frac{dh}{dt} = \frac{K}{T} \left(1 + \frac{t^2}{T^2} \right) e^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

На рис. 6.27 для $T_1=1\text{с}$, $T_2=2\text{с}$, $K=1$, а на рис. 6.28 для $T_1=T_2=1$; $K=1$ зображені $h(t)$ і $w(t)$

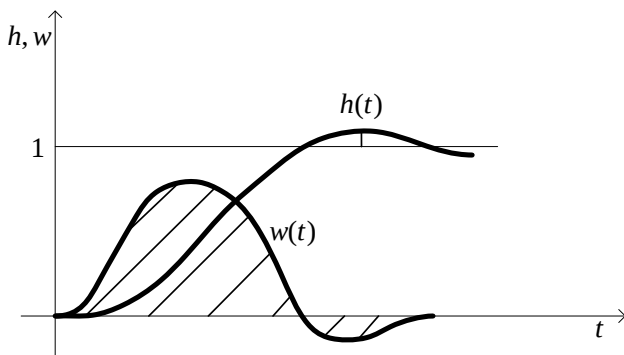


Рис. 6.27. $h(t)$ і $w(t)$ для $T_1 \neq T_2$

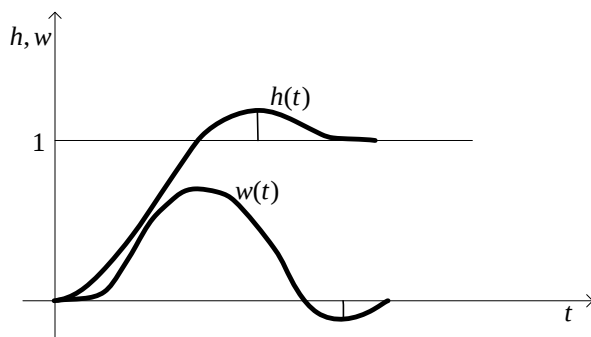


Рис. 6.28. $h(t)$ і $w(t)$ для $T_1=T_2$

Практичне заняття

Передаточна функція та частотні характеристики ланки II порядку з дійсними коренями:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)},$$

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}},$$

$$U(\omega) = \frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)},$$

$$V(\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2)\omega}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{(T_1 + T_2)\omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)},$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}.$$

Частоти спряження асимптот:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \omega_2 = \frac{1}{T_2}, \varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

Графіки характеристик аперіодичної ланки II порядку

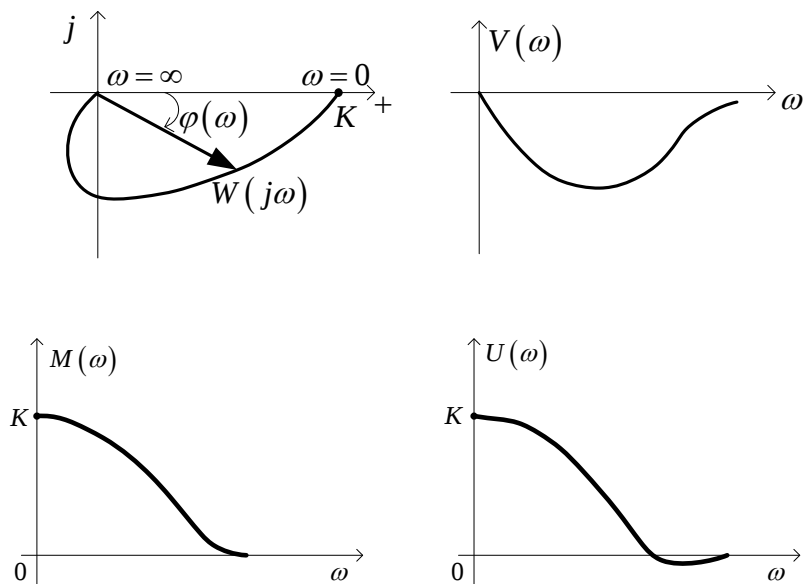


Рис. 6.29. Графік характеристик аперіодичної ланки II порядку

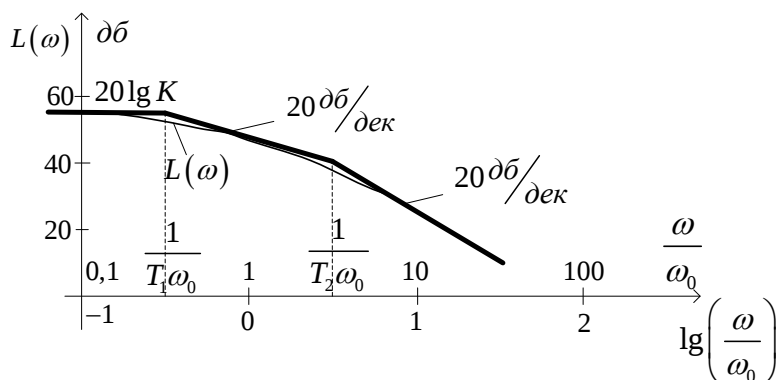


Рис. 6.30. Графік логарифмічних характеристик аперіодичної ланки II порядку

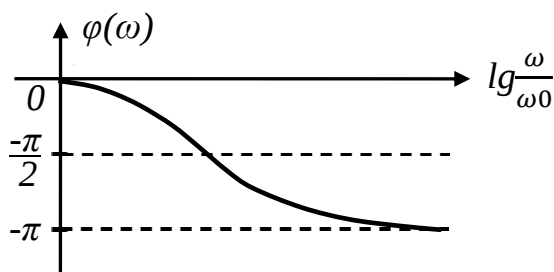
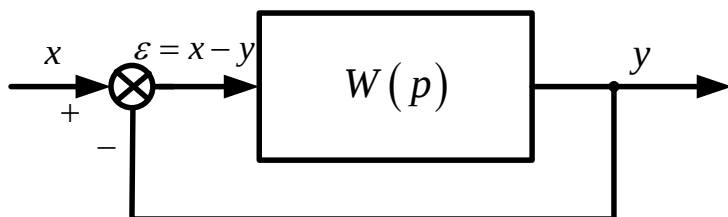


Рис. 6.31. Графік фазових характеристик аперіодичної ланки II порядку

ТЕСТ

1. Як впливає на порядок і аперіодичність чи коливальність системи (рис. 6.24) індуктивність котушки (реактора) в колі якоря ДПС?
2. Охопіть ланку $W(p)$ Вашого варіанту одиничним зворотним зв'язком і розрахуйте передаточну функцію і реакцію на вхідний вплив $l(t)$.



$$Y(p) = W(p)[x(p) - y(p)]$$

$$[1 + W(p)] \cdot y(p) = W(p) \cdot x(p)$$

$$\frac{y(p)}{x(p)} = W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{b(p)}{a(p)}$$

$$H(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

$$h(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{F_1(p_k)}{F'_{2p}(p_k)} \cdot e^{p_k t} d$$

6.3.3 Коливальна ланка II порядку

Якщо корені характеристичного поліному

$$T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1 = 0,$$

де T – період вільних коливань, коли $\zeta \neq 0$, або

$$p^2 + 2\zeta \omega_0 p + \omega_0^2 = 0,$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{T},$$

комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2} = -\alpha \pm j\beta,$$

або

$$p_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = -\alpha \pm j\beta,$$

то перехідний процес матиме коливальний характер.

Визначимо перехідну $h(t)$ і імпульсно-перехідну $w(t)$ функції з використанням II теореми Лапласа.

Оскільки початкові умови $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, то достатньо під p розуміти змінну Лапласа, щоб перейти від диференційного рівняння до алгебраїчного:

$$(T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1)H(p) = \frac{K}{p},$$

звідки

$$H(p) = \frac{K}{p(T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$
$$h(t) = \frac{\sum_{n=1}^3 F_1(p_n)}{\sum_{n=1}^3 F_{2p}(p_n)} e^{p_n t},$$

де: $F_1(p_K) = K$, p_K – корені $F_2(p)$:

$$F_2(p) = p(T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1) = 0,$$

$$p_1 = 0; p_{2,3} = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}, \zeta < 1.$$

Похідна від $F_2(p)$ по p :

$$\begin{aligned} F'_{2p}(p) &= p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) + p(T^2 p^2 + 2\xi T p) \\ &= 3T^2 p^2 + 4\xi T p + 1. \end{aligned}$$

Її значення для коренів P_K , $K=1,2,3$,

$$F'_{2p}(p_1) = 1;$$

$$\begin{aligned} F'_{2p}(p_2) &= \frac{3}{\omega_0^2} \left(-\omega_0 \xi + j\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^2 + \frac{4\xi}{\omega_0} \left(-\omega_0 \xi + j\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ &\quad + 1 = \\ &= 3 \left(\xi^2 - 2\xi \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi^2 - 1 \right) - 4\xi^2 + 4\xi \sqrt{\xi^2 - 1} + 1 = \\ &= 2\xi^2 - 2\xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 2 = 2 \left(\xi^2 - \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \right) - 2 = \\ &= 2 \left(\xi^2 - j\xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right), \\ F'_{2p}(p_3) &= 2 \left(\xi^2 + j\xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} h(t) &= K \left[1 + \frac{e^{(-\alpha+j\beta)t}}{2[(\zeta^2-1)-j\zeta\sqrt{\zeta^2-1}]} + \frac{e^{(-\alpha-j\beta)t}}{2[(\zeta^2-1)+j\zeta\sqrt{\zeta^2-1}]} \right] = \\ &= K \left[1 - e^{-\alpha t} \cdot \left(\frac{e^{j\beta t}}{2[(1-\zeta^2)+j\zeta\sqrt{1-\zeta^2}]} + \frac{e^{-j\beta t}}{2[(1-\zeta^2)-j\zeta\sqrt{1-\zeta^2}]} \right) \right]. \end{aligned}$$

Позначивши $C_1 = 1 - \zeta^2$; $C_2 = \zeta\sqrt{1 - \zeta^2}$ перетворимо вираз в дужках:

$$\begin{aligned} &\frac{e^{j\beta t} \cdot (C_1 - jC_2) + e^{-j\beta t} \cdot (C_1 + jC_2)}{2(C_1^2 + C_2^2)} = \\ &= \frac{C_1(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) - jC_2(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})}{2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cdot \cos \beta t - \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cdot \sin \beta t \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} (\cos \varphi \cdot \cos \beta t - \sin \varphi \cdot \sin \beta t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\beta t + \varphi); \end{aligned}$$

окрім цього

$$C_1^2 + C_2^2 = 1 - 2\zeta + \zeta^4$$

або

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{C_2}{C_1} = \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \arccos \frac{1 - \zeta^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \arccos \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Тоді

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\beta t + \varphi) \right],$$

$$\text{де } \alpha = \omega_0 \zeta = \frac{\xi}{T}, \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}.$$

Реакцію на δ -імпульс, тобто імпульсну-перехідну функцію $w(t)$ визначимо як зворотнє перетворення Лапласа від передаточної функції

$$\frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}$$

або як похідну від $h(t)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{K \cdot \alpha}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) + \frac{K \cdot \alpha}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) = \\ &= K e^{-\frac{\zeta}{T} t} \cdot \left[\frac{\zeta}{T \sqrt{1 - \zeta^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t + \varphi\right) + \frac{1}{T} \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t + \varphi\right) \right] \\ &= \\ &= \frac{K}{T} e^{-\frac{\zeta}{T} t} \cdot \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t + \varphi\right) \right]. \end{aligned}$$

Графіки $h(t)$ і $w(t)$ для $\zeta = 0,1$; $K=1$; $T=1$ наведено на рис. 6.32.

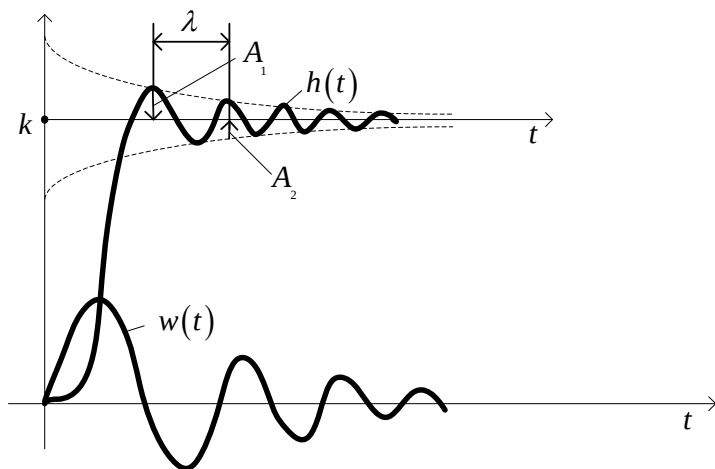


Рис. 6.32. $h(t)$ і $w(t)$

З рис. 6.32 витікає, що

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\frac{\zeta \pi}{T}},$$

тоді

$$\frac{\zeta}{T} = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}.$$

Практичне заняття

6.3.4 Передаточна функція і частотні характеристики ланки II порядку

Коливальна ланка:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2 \omega^2) + j2\zeta T \omega} =$$

$$= \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2} - j \frac{2\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2) + 4\zeta^2 T^2\omega^2} =$$

$$= U(\omega) - jV(\omega).$$

$$M(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}}.$$

Тут $M(\omega)$, як модуль $W(j\omega)$, отримана за правилом, що модуль відношення комплексів дорівнює відношенню модулів чисельника і знаменника $W(j\omega)$.

Тобто, якщо

$$W(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)},$$

то

$$M(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|F_1(j\omega)|}{|F_2(j\omega)|}.$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}.$$

Визначимо аргумент ω_1 , максимуму $M(\omega)$ та значення $M(\omega_1)$:

- необхідна умова максимуму

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega} \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega_1^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega_1^2}} =$$

$$= \frac{-K \frac{1}{2} [(1 - T^2\omega_1^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega_1^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2(1 - T^2\omega_1^2)(-2T^2\omega_1) + 8\zeta^2 T^2\omega_1]}{(1 + T^2\omega_1^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega_1^2}.$$

Нуль чисельника буде, якщо

$$[2(1 - T^2\omega_1^2)(-2T^2\omega_1) + 8\zeta^2 T^2\omega_1] \equiv 0$$

де $\zeta < 1$.

Звідси

$$\omega_1 = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

Відповідно

$$\max M(\omega) = M(\omega_1) = \frac{K}{2\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Частота ω_2 , за якої модуль $V(\omega) = 0$: $\omega_2 = 1/T$; частота ω_3 , за якої модуль $|V(\omega)|$ максимальний, обчислюється за умови:

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{2\zeta T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2} \right) \equiv 0.$$

Для спрощення розрахунків позначимо $T \cdot \omega = \alpha$ і будемо шукати похідну по α

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2\zeta\alpha}{(1-\alpha^2)^2 + 4\zeta^2\alpha^2} \right) &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2\zeta\alpha}{1-2\alpha^2+\alpha^4+4\zeta^2\alpha^2} \right) = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2\zeta\alpha}{1-2(1-2\zeta^2)\alpha^2+\alpha^4} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Ця умова виконується, якщо чисельник похідної по α буде нульовим, тобто:

$$2\zeta \cdot [1 - 2(1 - 2\zeta^2)\alpha^2 + \alpha^4] - 2\zeta\alpha \cdot [-4(1 - 2\zeta^2)\alpha + 4\alpha^3] \equiv 0$$

скоротимо на 2ζ :

$$[1 - 2(1 - 2\zeta^2)\alpha^2 + \alpha^4] - \alpha[-4(1 - 2\zeta^2)\alpha + 4\alpha^3] \equiv 0.$$

Розкривши дужки і змінивши знак, отримаємо бікватратне рівняння:

$$\alpha^4 - \frac{2}{3}(1 - 2\zeta^2)\alpha^2 - \frac{1}{3} \equiv 0.$$

Звідси

$$\alpha^2 = \frac{1}{3}(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\frac{(1 - 2\zeta^2)^2}{9} + \frac{3}{9}},$$

або

$$\omega_3 = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2}{3} + \frac{\sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 3}}{9}}$$

або

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot T} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 3}}.$$

Побудуємо графіки:

Годограф $W(j\omega)$ за умови, що $\omega \in [0; \infty)$:

$$\omega_1 = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T}$$

$$M(\omega_1) = \frac{K}{2\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

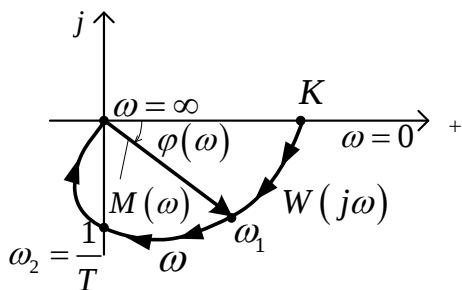


Рис. 6.33. Годограф АФЧХ

Дійсна $U(\omega)$ і уявна $V(\omega)$ складові:

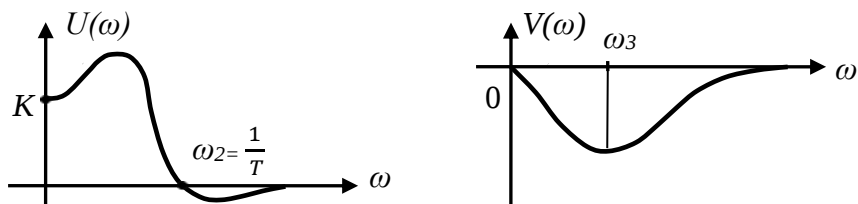
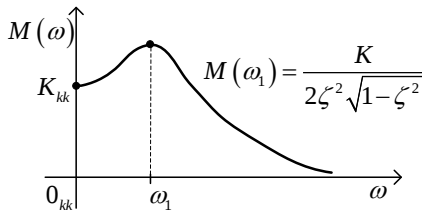


Рис. 6.34. $U(\omega)$ і $V(\omega)$

Модуль $M(\omega)$ і аргумент $\varphi(\omega)$:

а)



б)

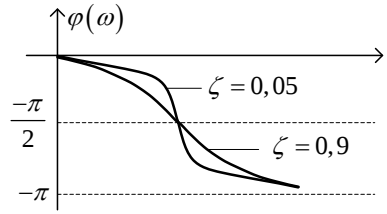


Рис. 6.35. Модуль (а) і аргумент (б) $W(j\omega)$

Логарифмічна залежність $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}$$

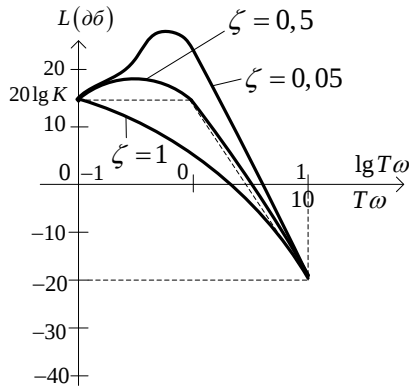


Рис. 6.36. ЛАЧХ

Залежність похибок кусково-лінійної апроксимації $L(\omega)$ асимптотами $20 \lg K$ для інтервалу $T\omega$ від 0,1 до 1 і $-40 \lg \omega$, для $T\omega$ від 0 до ∞ (рис. 6.37):

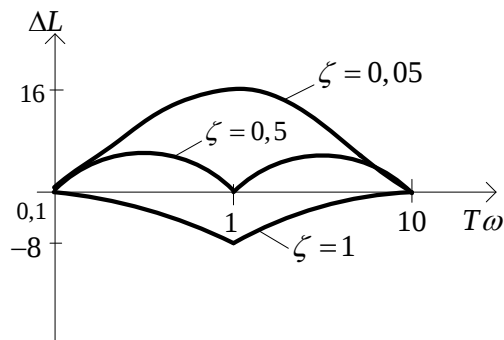


Рис. 6.37. Графік ΔL від $T\omega$

ТЕСТ

1. Як за графіком $h(t)$ і $w(t)$ визначити параметри ζ і T ланки другого порядку?
2. Як за графіком АФЧХ (Рис. 6.33) визначити параметри ζ і T ланки II порядку?
3. Від чого залежить похибка (Рис. 6.37) кусково-лінійної апроксимації ЛАЧХ ланки?

Практичне заняття

6.3.5 Консервативна ланка II порядку

Це окремий випадок коливальної ланки, в якій параметр ζ , що вказує на демпфуючий ефект (ефект затухання вільних коливань), відсутній, тобто $\zeta = 0$.

В коливальній системі при зменшенні ζ коливання $y(t)$ затухають все повільніше, при $\zeta = 0$ – усталюються з постійною амплітудою, а для $\zeta < 0$ – починають зростати. Це вже нестійкий коливальний процес. Для $\zeta = 0$ маємо режим на границі стійкості і нестійкості процесу $y(t)$.

Диференційне рівняння:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y(t) = Kx(t);$$

передаточна функція:

$$\frac{y(p)}{x(p)} = W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 1}.$$

Перехідна характеристика:

Її зображення за Лапласом:

$$H(p) = \frac{K}{P(T^2 p^2 + 1)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Знайдемо $h(t)$:

$$F_1(p) = K; F'_{2p}(p) = (T^2 p^2 + 1) + 2T^2 p^2 = 3T^2 p^2 + 1.$$

Корені:

$$p_1 = 0; p_2 = -j\frac{1}{T}; p_3 = +j\frac{1}{T}.$$

$$F'_{2p}(p_1) = 1; F'_{2p}(p_2) = 3T^2 \left(-j\frac{1}{T}\right)^2 + 1 = -2.$$

$$F'_{2p}(p_3) = 3T^2 \left(j\frac{1}{T}\right)^2 + 1 = -2.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \sum_{K=1}^3 \frac{F_1(p_K)}{F'_{2p}(p_K)} e^{p_K t} = \\
 &= \frac{K}{1} e^{0 \cdot t} - \frac{K}{2} e^{-j \frac{t}{T}} - \frac{K}{2} e^{j \frac{t}{T}} = \\
 &= K \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) \cdot 1(t).
 \end{aligned}$$

Імпульсна перехідна функція $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{K}{T} \sin \frac{t}{T} \cdot 1(t).$$

Графіки $h(t)$ і $w(t)$:

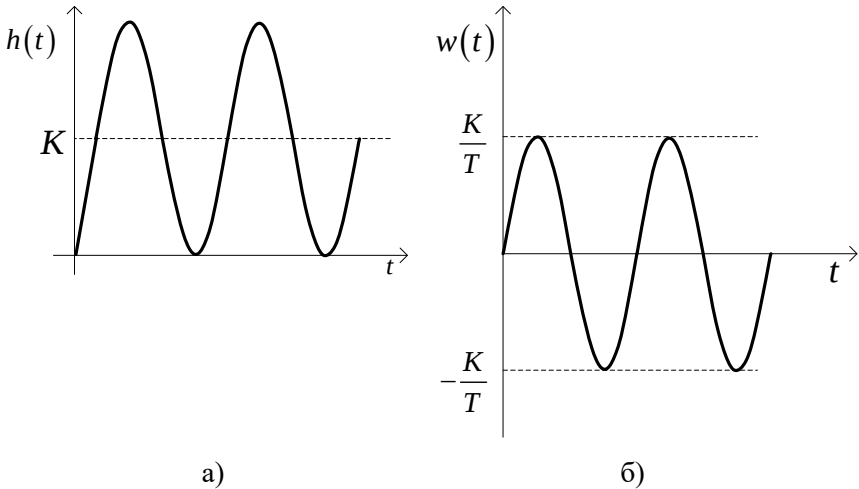


Рис. 6.38. Графіки: а) $h(t)$; б) $\omega(t)$

Частотні характеристики

Амплітудо-фазо-частотна:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 T^2 + 1} = \frac{K}{1 - T^2 \omega^2};$$

$$U(\omega) = \frac{K}{1 - T^2 \omega^2};$$

$$V(\omega) \equiv 0.$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \equiv 0$$

$$M(\omega) = \left| \frac{K}{1 - T^2 \omega^2} \right|.$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg |1 - T^2 \omega^2|.$$

Графіки:

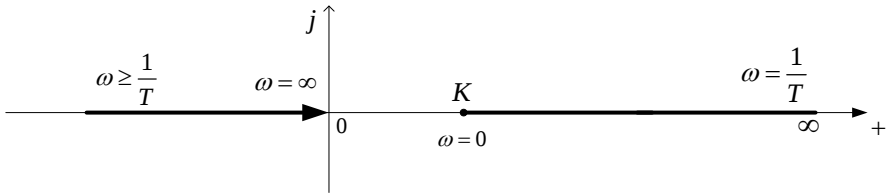


Рис. 6.39. Графік $W(j\omega)$.

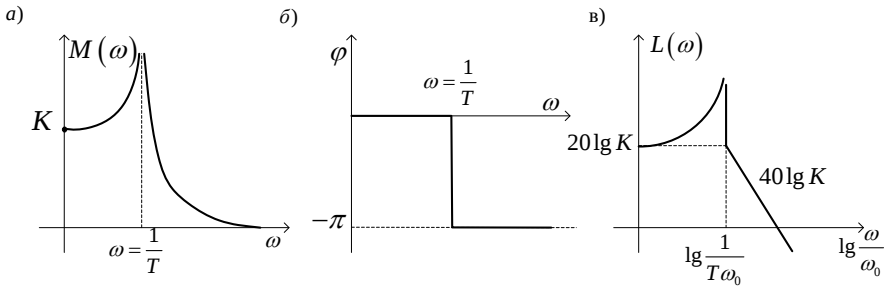


Рис.6.40. Графіки: а) – $M(\omega)$, б) – $\varphi(\omega)$, в) – $L(\omega)$.

6.3.6 Ланка II порядку, що має астатизм I порядку

Наприклад, ДПС, де $x(t)=U_A(t)$, $y(t)=\theta$ – кут обертання валу ДПС.
 Це фактично послідовне з'єднання інерційної й інтегруючої ланок.
 Передаточна функція:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{p(\tau p + 1)}.$$

Амплітудо-фазо-частотна характеристика:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} = -\frac{K}{\omega(\omega\tau - j)} = \\ &= -\frac{K}{\omega(\omega\tau - j)} \cdot \frac{(\omega\tau + j)}{(\omega\tau + j)} = \frac{-K\tau}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{K}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)}. \end{aligned}$$

Тобто

$$U(\omega) = -\frac{K\tau}{1 + \omega^2\tau^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{K}{\omega\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

$\varphi(\omega)$ знайдемо з урахуванням, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= \frac{j}{j^2} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}; \\ \frac{1}{j\omega\tau + 1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cdot e^{j\arctg\omega\tau}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau,$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Побудуємо відповідні графіки:

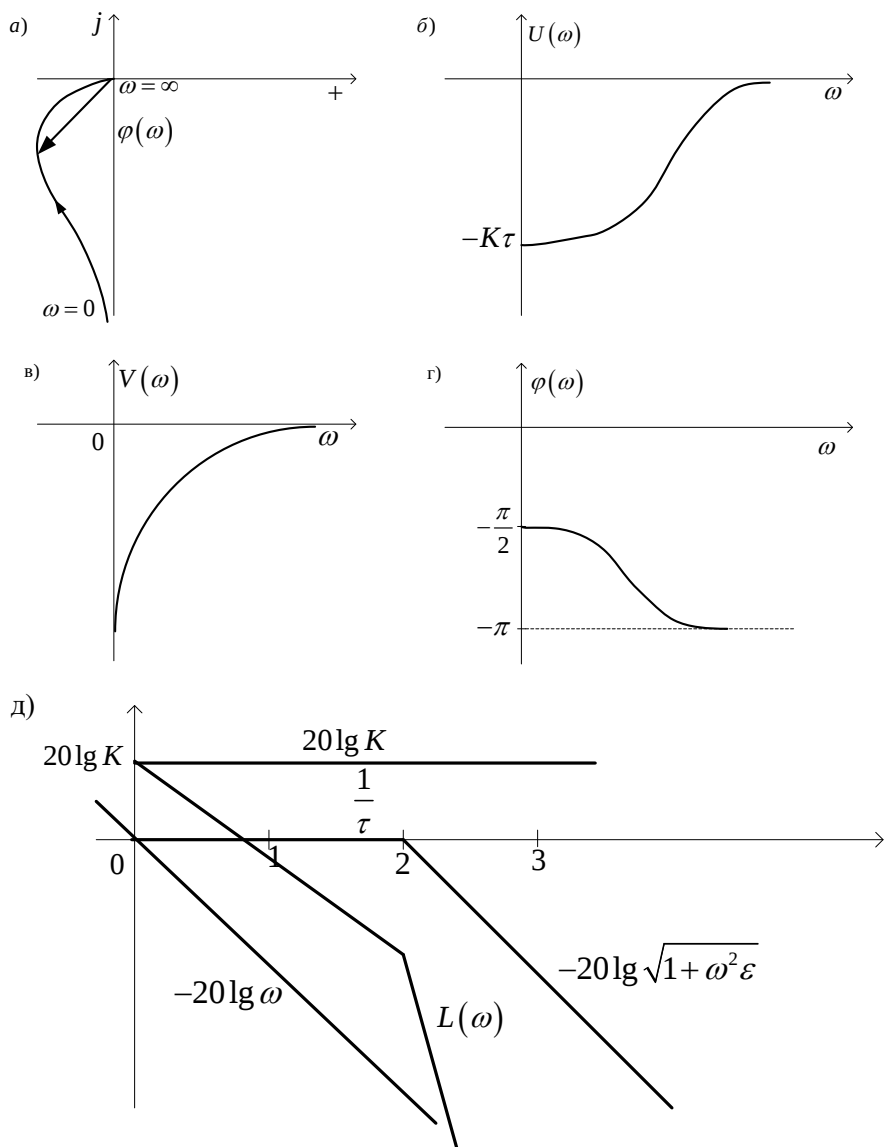


Рис. 6.41. Графіки: а) $-W(j\omega)$, б) $-U(\omega)$, в) $-V(\omega)$, г) $\varphi(\omega)$, д) $-L(\omega)$, як сума складових.

Існує безліч механічних, електричних та іншої природи процесів, в яких вхідний сигнал (причина) і вихідний (наслідок) майже ідентичні, але зсунуті у часі. Наприклад:

- транспортер: кількість завантажуваної речовини на його вході дорівнює кількості на виході, але з затримкою в часі $\tau = \frac{l}{V}$, де l – довжина, V – швидкість руху стрічки транспортера;
- рознесеність у просторі і, відповідно, у часі діаметра круглого прокату чи товщини листового на вході з обтискними валками і показами датчиків цих розмірів, які розташовані на деякій відстані від обтискних валків;
- істинне миттєве значення вимірюваної величини і виміряне, отримане з запізненням внаслідок її усереднення на інтервалі τ часу t з метою фільтрації випадкових похибок.

Отже, вхід-вихід ланки пов'язані простим рівнянням:

$$x_{вих}(t) = x_{вх}(t - \tau).$$

Визначимо часові характеристики ланки:

$$x_{вих}(t) = h(t) = 1(t - \tau),$$

$$w(t) = \delta(t - \tau).$$

Передаюча функція:

$$W(p) = \frac{x_{вих}(p)}{x_{вх}(p)},$$

де

$$\begin{aligned} x_{вих}(p) &= \int_0^{\infty} x_{вих}(t) \cdot e^{-pt} dt \\ x_{вих}(p) &= \int_0^{\infty} x_{вх}(t - \tau) \cdot e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} x_{вх}(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} \cdot e^{-p\tau} d(t - \tau) = \\ &= e^{-p\tau} \cdot x_{вх}(p). \end{aligned}$$

Тоді

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

Частотні характеристики:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}; M(\omega) = 1;$$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega;$$

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega \tau - j \sin \omega \tau;$$

Тобто:

$$U(\omega) = \cos \omega \tau; V(\omega) = -\sin \omega \tau.$$

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) \equiv 0.$$

Графіки характеристик:

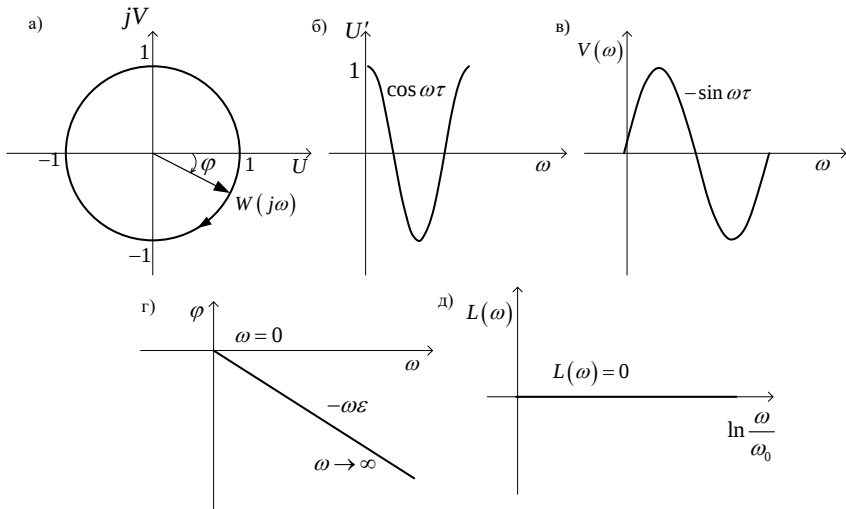


Рис. 6.42. Графіки: а) $W(j\omega)$, б) $U(\omega)$, в) $V(\omega)$, г) $\varphi(\omega)$, д) $L(\omega)$

Якщо ланка чистого запізнення з'єднана послідовно, наприклад, з інерційною ланкою I порядку, то

$$W(p) = \frac{K}{\tau_1 p + 1} e^{-\tau_2 p},$$

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{K \cdot e^{-j\omega\tau_2}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cdot e^{+j\arctg\omega\tau_1}} = \\
 &= \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{-j[\arctg\omega\tau_1 + \omega\tau_2]},
 \end{aligned}$$

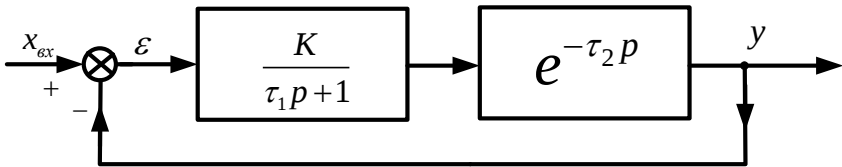
тобто, на $M(\omega)$ оператор $e^{-\tau_2 p}$ не впливає, але впливає на фазо-частотну характеристику, збільшуючи модуль кута:

$$\varphi(\omega) = -\arctg\omega\tau_1 - \omega\tau_2.$$

Окрім того, слід попередити, що ланка запізнення фізично існує, в той час, як ланка ідеального упереджування $e^{\tau p}$ фізично не можлива. Можлива лише її наближена реалізація шляхом розкладання оператора $e^{\tau p}$ в ряд Тейлора, Маклорена, Паде та ін.

ТЕСТ

1. Розрахуйте, як вплине чисельник $W(p)$, якщо його коефіцієнт K змінювати від $-\infty$ до $+\infty$ у замкненій САК з одиничним зворотним зв'язком,



де

$$e^{-\tau_2 p} \approx 1 - \tau_2 p + \frac{\tau_2^2}{2} p^2,$$

$$W_{\zeta}(p) = \frac{\frac{K}{\tau_1 p + 1} \cdot e^{-\tau_2 p}}{1 + \frac{K}{\tau_1 p + 1} \cdot e^{-\tau_2 p}} \cong \frac{K \cdot e^{-\tau_2 p}}{\tau_1 p + 1 + K \left(1 - \tau_2 p + \frac{\tau_2^2}{2} p^2 \right)},$$

$$K \frac{\tau_2^2}{2} p^2 + (\tau_1 - \tau_2 K) p + K = 0.$$

Приклад. ДПС з індуктивністю в колі якоря і ШІМ.

За наявності індуктивності система керування по $U_{\text{я}}$ буде коливальною ланкою II порядку.

Рівняння $J \frac{d\Omega}{dt} = M_0 - M_n$ приводиться до типової ланки:

$$T^2 \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + 2\zeta T \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = KU_{\text{я}}$$

Або

$\Omega(t) = x(t)$, $U_{\text{я}}(t) = U$. Тоді

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dx}{dt} + x(t) = KU(t).$$

Нехай $T = 1$; $\zeta = 0,5$; $K = 10$. Тоді маємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 10,0U(t).$$

Характеристичний поліном: $p^2 + p + 1 = 0$.

$$p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Зображення $H(p)$ перехідної функції:

$$H(p) = \frac{10}{p(p^2 + p + 1)}, \text{ бо } 1(t) \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Знайдемо $h(t)$ за теоремою Лапласа:

$$h(t) = \sum_{K=1}^{\zeta} \frac{F_1(p_K)}{p_{2p}^{\zeta}(p_K)} \cdot e^{p_K t}.$$

У нас $F_1(p) = 10$;

$$F_1(p) = \frac{d}{dp}(p(p^2 + p + 1)) = p^2 + p + 1 + 2p^2 + p = 3p^2 + 2p + 1,$$

$$F'_{2p}(p_1) = 1; p_1 = 0.$$

$$F'_{2p}(p_2) = 3 \left(-\frac{1}{2} + j\sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + j\sqrt{\frac{3}{4}} \right) + 1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} - j \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} - j \sqrt{\frac{3}{4}} + 1 = -1 - j \sqrt{\frac{3}{2}} \\
F'_{2p}(p_3) &= 3 \left(-\frac{1}{2} - j \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - j \sqrt{\frac{3}{4}} \right) + 1 = \\
&= \frac{3}{4} + 3j \sqrt{\frac{3}{4}} - 3 \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - j \sqrt{\frac{3}{4}} + 1 = -1 + j \sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{10}{1} e^{0t} + \frac{10 \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}}{(-1 - j\sqrt{3})} + \frac{10}{(-1 - j\sqrt{3})} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} = \\
&= 10 \left[1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{1 + j\sqrt{3}} - \frac{e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{-1 + j\sqrt{3}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Перетворимо за формулами Ейлера вираз в дужках (•):

Позначимо $\sqrt{\frac{3}{2}} = \omega$, тоді (•) маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{j\omega t}}{1 + j2\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{1 - j2\omega} &= \frac{e^{j\omega t}(1 - j2\omega) + e^{-j\omega t}(1 + j2\omega)}{1 + 4\omega^2} = \\
&= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{1 + 4\omega^2} - j \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{1 + 4\omega^2} \cdot 2\omega = \\
&= \frac{2}{1 + 4\omega^2} [1 \cdot \cos \omega t - 2\omega \sin \omega t] = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \cdot \cos \omega t - \frac{2\omega}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \cdot \sin \omega t \right] = \\
&= \frac{2\omega}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} [\sin \alpha \cdot \cos \omega t - \cos \alpha \cdot \sin \omega t] = \\
&= \frac{2\omega}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha),
\end{aligned}$$

де

$$\alpha = \arg t g \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{\bullet}}}{\frac{2\omega}{\sqrt{\bullet}}} \right) = \arg t g 2\omega$$

Тоді

$$h(t) = 10 \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin(\omega t + \alpha)}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \cdot 2 \right]$$

або

$$h(t) = 10 \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \right], \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

7 СТРУКТУРНІ СХЕМИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

7.1 Послідовне з'єднання ланок

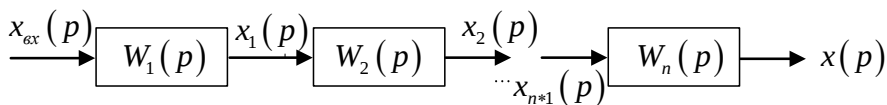


Рис. 7.1. n -послідовно з'єднаних ланок

$$\begin{aligned}x_{вих}(p) &= W_n(p) \cdot x_{n-1}(p), \\x_{n-1}(p) &= W_{n-1}(p) \cdot x_{n-2}(p), \dots\end{aligned}$$

або

$$x_{вих}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \cdot x_{вх}(p),$$

тобто, для послідовного з'єднання ланок еквівалентна ланка буде мати передаточну функцію як добуток цих ланок:

$$W_e(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

7.2 Паралельне з'єднання ланок

$$x_{вих}(p) = x_1(p) + x_2(p) + \dots + x_n(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p) \cdot x_{вх}(p),$$

тобто еквівалентна передаточна функція для паралельного з'єднання $W_i(p)$ дорівнює їх сумі:

$$W_e(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

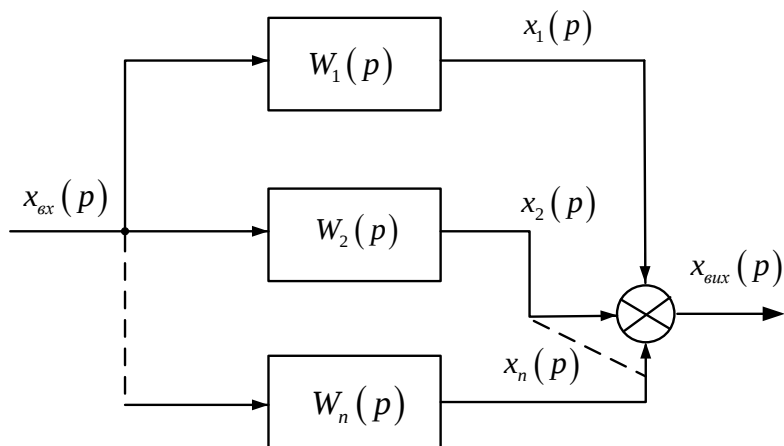


Рис. 7.2. n -паралельно з'єднаних ланок

7.3 Зустрічно-паралельне з'єднання

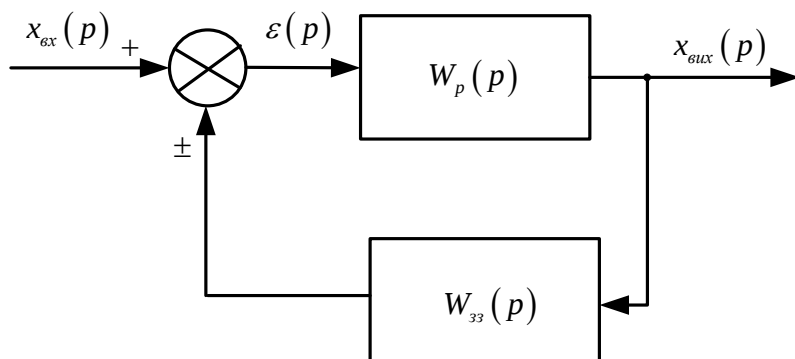


Рис. 7.3. Передаточні функції розімкненої системи $W_p(p)$ і зворотного зв'язку $W_{\text{зз}}(p)$

Тут $W_p(p)$ - передаточна функція розімкненої системи: $\varepsilon(p) \rightarrow x_{\text{вих.}}$,
 $W_{зз}(p)$ - передаточна функція ланки зворотного зв'язку. Він може бути як додатнім, так і від'ємним.

Отже

$$x_{\text{вих}}(p) = W_p(p) \cdot \varepsilon(p),$$

$$\varepsilon(p) = x_{\text{вх}}(p) \pm W_{зз}(p) \cdot x_{\text{вих}}(p).$$

Підставивши друге в перше, отримаємо передаточну функцію еквівалентної (замкненої) системи:

$$\frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1 \mp W_p(p) \cdot W_{зз}(p)},$$

де мінус в знаменнику відповідає додатному зворотному зв'язку, плюс – від'ємному.

7.4 Системи з перехресними зв'язками

Як приклад, розглянемо систему з трьома прямими і двома зворотними зв'язками:

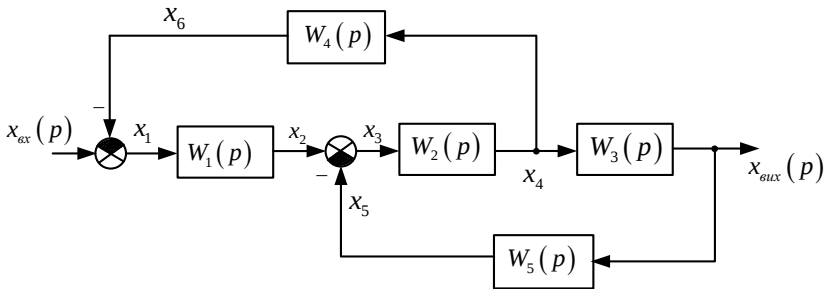


Рис. 7.4. Система «вхід – вихід» з перехресними зв'язками

Необхідно знайти еквівалентну передаточну функцію:

$$W_e(p) = \frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)}.$$

7.4.1 Визначення $W_e(p)$ шляхом виключення з системи рівнянь проміжних змінних

$$\begin{aligned}x_{вих}(p) &= W_3(p) \cdot x_4(p), \\x_4(p) &= W_2(p) \cdot [x_2(p) - W_5(p) \cdot x_{вих}(p)], \\x_2(p) &= W_1(p) \cdot [x_{вх}(p) - W_4(p) \cdot x_4(p)].\end{aligned}$$

З першого рівняння підставимо значення x_4 у друге:

$$x_4 = W_3^{-1} \cdot x_{вих} = W_2[x_2 - W_5 \cdot x_{вих}].$$

Тепер значення x_2 і x_4 підставимо в третє рівняння:

$$\begin{aligned}x_2 &= [W_3^{-1} \cdot W_2^{-1} + W_2^{-1} \cdot W_5] \cdot x_{вих}, \\[W_3^{-1} \cdot W_2^{-1} + W_2^{-1} \cdot W_5] \cdot x_{вих} &= W_1[x_{вх} - W_4 \cdot W_3^{-1} \cdot x_{вих}]\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{x_{вих}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{W_1}{[W_3^{-1}W_2^{-1} + W_2^{-1} \cdot W_5 + W_1W_4W_3^{-1}]} = \\&= \frac{W_1W_2W_3}{1 + W_2W_3W_5 + W_1W_2W_4}.\end{aligned}$$

Як бачимо, досить багато треба було зробити розрахунків. Більш простим буде наступний метод.

7.4.2 Метод структурних (тотожних) перетворень

З метою спрощення завдання по визначенню передаточної функції системи з перехресними зв'язками створено метод структурних перетворень. Згідно до методу будемо переносити

суматори $\rightarrow \otimes \rightarrow$ так, щоб схеми з їх перенесенням були тотожні вихідним схемам. Це можливо лише для систем з лінійними ланками. Розглянемо алгоритм спрощення цим методом на прикладі схеми (Рис.7.4).

Крок 1: Перенесемо перший суматор за $W_1(p)$, але так, щоб нічого не змінилося відносно $W_e(p)$ (Рис. 7.4):

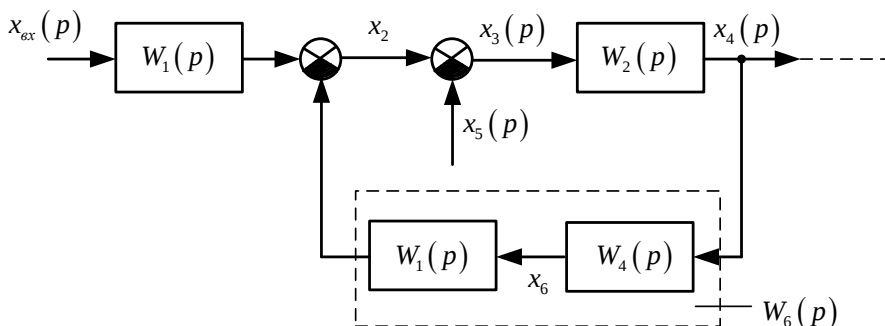


Рис. 7.5. Частина системи (рис. 7.4)

Не складно показати, що $x_4(p)$ для схем (Рис. 7.4) і (Рис. 7.5) буде однакове:

$$x_4(p) = W_2(p)[-x_5(p) + W_1(p)[x_{вх}(p) - W_4(p) \cdot x_4(p)]].$$

Крок 2: В колі зворотного зв'язку схеми (Рис. 7.5) замінімо послідовно з'єднані $W_1(p)$ і $W_4(p)$ еквівалентною

$$W_6(p) = W_1(p) \cdot W_4(p).$$

Крок 3: Поміняємо місцями суматори:

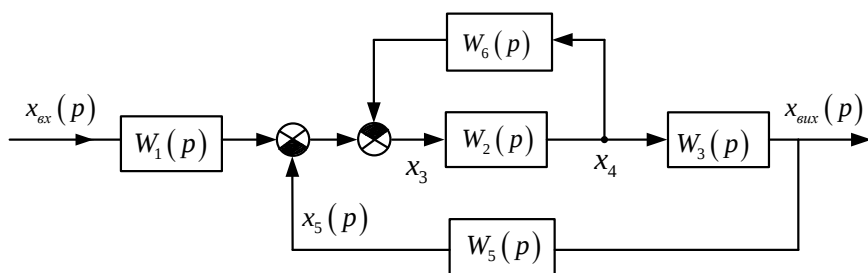


Рис. 7.6. Система еквівалентна системі (рис. 7.4)

Не складно впевнитись, що від зміни місць суматорів сума (сигнал $x_3(p)$) не зміниться:

- для схеми (Рис. 7.4)

$$x_3(p) = W_1(p)[x_{ex}(p) - W_4(p) \cdot x_4(p)] - x_5(p),$$

- для схеми (Рис. 7.6)

$$x_3(p) = W_1(p)x_{ex}(p) - x_5(p) - W_6(p)x_4(p),$$

що ідентично попередньому, так як

$$W_1(p) \cdot W_4(p) = W_6(p).$$

Крок 4: Замінімо прості з'єднання еквівалентними:

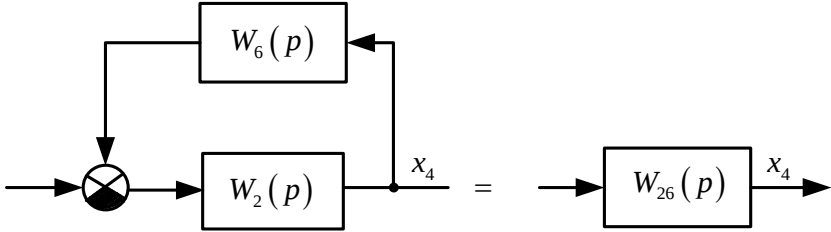


Рис. 7.7. Подальше спрощення

Тут

$$W_{26} = \frac{W_2(p)}{1 + W_6(p) \cdot W_2(p)};$$

далі, послідовне з'єднання $W_{26}(p)$ і $W_3(p)$ на еквівалентне:

$$W_{263}(p) = \frac{W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_6(p) \cdot W_2(p)};$$

далі, зустрічно-паралельне з'єднання $W_{263}(p)$ і $W_5(p)$ на еквівалентне:

$$W_{2635}(p) = \frac{W_{263}(p)}{1 + W_5 W_{263}(p)},$$

і, нарешті, отримаємо еквівалентну передаточну функцію всієї системи:

$$W_e(p) = W_1(p) \cdot W_{2635}(p),$$

яка тотожна раніше отриманій:

$$W_e(p) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_3 W_5 + W_1 W_4}.$$

7.5 Використання формули Мейсона для визначення еквівалентної передаточної функції системи

Дуже коротко про направлені графи:

- вітка графа – це елемент структурної схеми з передаточною функцією $W(p)$;
- по проходженню сигналу через $W(p)$ його зображення помножується на $W(p)$;
- у вузлі графа утворюється сигнал, що дорівнює сумі зображень сигналів, які проходять по вітках зі стрілками, напрямленими до цього вузла; цей зв'язок сигналів відображає вузлове рівняння;
- сигнал, який утворився у вузлі, подається в усі вітки, стрілки яких направлено від цього вузла;
- закінчення вітки є вузлом, навіть якщо інші вітки до нього не підходять; однак точки розвітвлення структурних схем не є вузлами;
- передаточна функція $W(p)$ вітки зворотного зв'язку має знак цього зв'язку ($\pm$).

Так для послідовного з'єднання $W_i(p)$ (рис. 7.1) маємо граф:

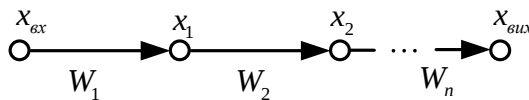


Рис. 7.8. Граф послідовного з'єднання елементів

Для паралельного (Рис. 7.2):

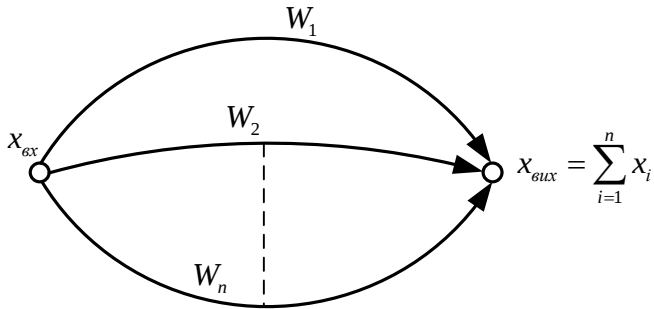


Рис. 7.9. Граф паралельного з'єднання

Для зустрічно-паралельного (Рис. 7.3):

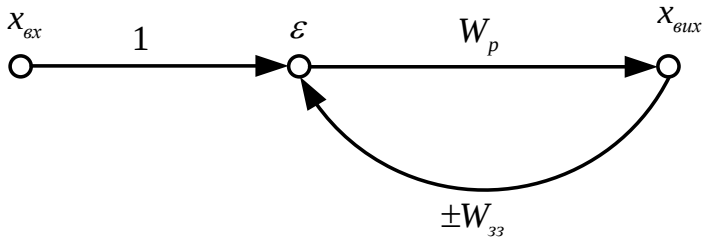


Рис. 7.10. Граф зустрічно-паралельного з'єднання

Для визначення передаточної функції $W_e(p)$ системи з одним входом $x_{вх}(p)$ і одним виходом можна використовувати спрощену формулу Мейсона:

$$W_e(p) = \frac{x_{вих}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{\sum_k p_k \cdot \Delta_k}{\Delta},$$

де p_k визначається, як неперервна послідовність віток в напрямку стрілок, при цьому жоден вузол двічі не зустрічається; Δ_k -

алгебраїчне доповнення до k -го шляху: це сума за всіма можливими шляхами в напрямку стрілок:

$$\Delta_k = 1 - \sum W_i + \sum_{i,k}^* W_i W_k - \sum_{i,k,m}^* W_i W_k W_m + \dots,$$

але ураховуються у всіх сумах лише ті контури, які не торкаються шляху p_k .

* - означає, що треба брати добутки передаточних функцій контурів, які не перетинаються (!).

Δ - визначник графа:

$\Delta = 1 - \sum W_i(p)$ всіх окремих i -х контурів, плюс $\sum$ добутків усіх можливих комбінацій з двох недотичних контурів, мінус $\sum$ добутків усіх можливих комбінацій з трьох недотичних контурів, + ...

Отже, рис. 7.4 відповідає граф:

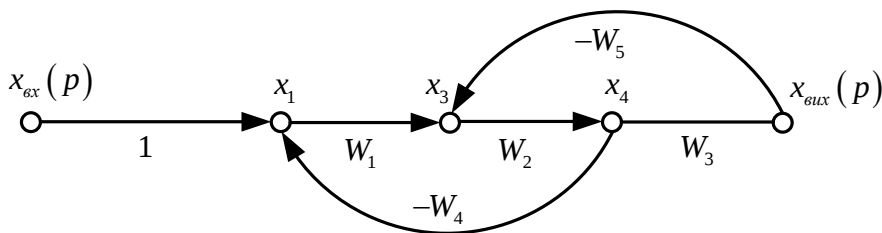


Рис. 7.11. Граф системи (рис. 7.4)

Визначимо: $p_k = p_1 = W_1 W_2 W_3(p)$

Контури: $L_1 = -W_2 W_3 W_5(p)$,

$L_2 = -W_1 W_2 W_4$.

Всі контури мають спільні вузли, тому

$$\Delta_k = \Delta_1 = 1.$$

Визначник Δ :

$$\Delta = 1 + W_2 W_3 W_5 + W_1 W_2 W_3.$$

Тоді, згідно з формулою Мейсона:

$$W_e(p) = \frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{p_1 \cdot 1}{\Delta} = \frac{W_1 W_2 W_3(p)}{1 + W_2 W_3 W_5 + W_1 W_2 W_3}.$$

Якщо до системи (Рис. 7.4) додати ще дві ланки (Рис. 7.12), тобто ланку $W_6(p)$ на виході і $W_7(p)$ в глибокому (з виходу на вхід) зворотному зв'язку, то отримаємо триконтурну структуру:

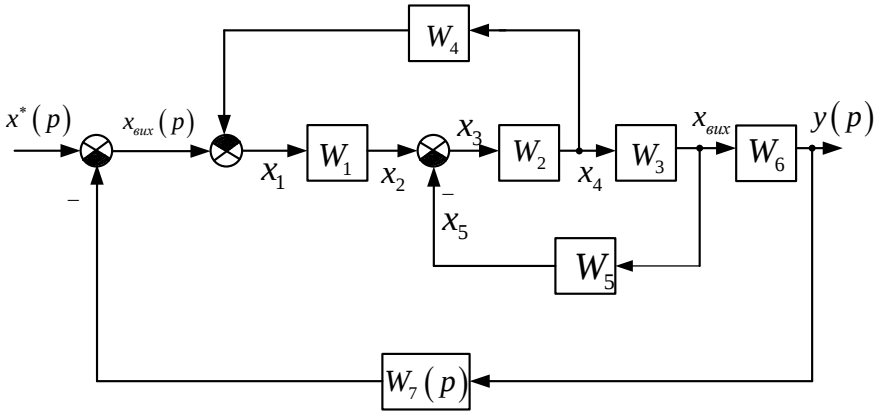


Рис. 7.12. Розширена система (рис. 7.4)

Сигнальний граф системи (Рис. 7.12):

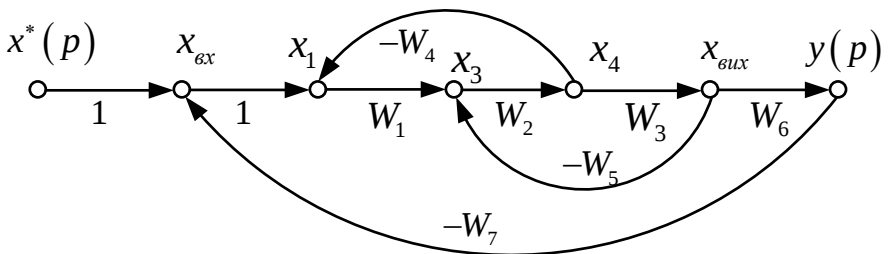


Рис. 7.13. Граф системи (рис. 7.12)

По графу (Рис. 7.13) або, навіть, за схемою (Рис. 7.12) розраховуємо замкнену передаточну функцію:

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{p_1 \cdot \Delta_1}{\Delta},$$

де, оскільки схема має один прямий шлях $p_k = p_1$, $\Delta_1 = 1$,

$$p_1 = W_1 W_2 W_3 W_6,$$

визначник Δ :

$$\Delta = 1 + W_1 W_2 W_4 + W_2 W_3 W_5 + W_1 W_2 W_3 W_6 W_7.$$

Розглянемо простий приклад, який пояснює, звідки виникла формула Мейсона.

Двомірна система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + z_1 = z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + z_2 = z_2 \end{cases}$$

або в стандартному вигляді:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = z_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = z_2 \end{cases}. \quad (7.1)$$

Сигнальний граф (рис. 7.14).

Тут a_{11} і a_{22} утворюють контури, що недотичні.

a_{11} і $a_{12}a_{21}$ } – дотичні.
 a_{22} і $a_{12}a_{21}$ }

Рішення системи (7.1):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - a_{11}}{\Delta} \cdot z_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} \cdot z_2; \\ x_2 &= \frac{1 - a_{22}}{\Delta} \cdot z_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} \cdot z_1, \end{aligned}$$

де $\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

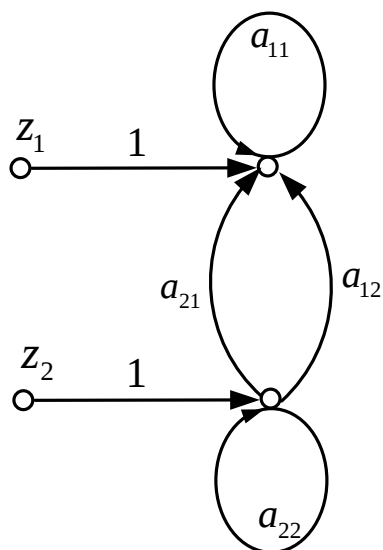


Рис. 7.14. Граф системи (7.1)

У рішенні для x_1 відносно входу z_1 чисельник дорівнює $1 \cdot (1 - a_{22})$, тобто значенню визначника недотичного шляху від z_1 до x_1 .

У рішенні для x_1 відносно z_2 чисельник дорівнює a_{12} , тобто цей шлях дотичний всіх контурів. Для x_2 – аналогічно. (Більш глибоке дослідження теорії сигнальних графів наведено, наприклад, у підручнику Сигорського – Петренка «Общая теория электрических сигналов», М.; В.Ш., 1971 р., стор. 409-418).

7.6. Дослідження впливу зворотного зв'язку на динамічні властивості системи

7.6.1 Дослідження безінерційної ланки $y(t) = kx(t)$

Безінерційна ланка $y(t) = kx(t)$:

- безінерційний зворотний зв'язок:

$$x_1(t) = \pm k_{3.3} y(t),$$

тобто маємо структуру, за якої

$$y(t) = k\varepsilon(t) = k(x(t) \pm k_{3.3} y(t))$$

або

$$y(t) = \frac{k}{1 \mp k_{3.3} \cdot k} \cdot x(t) = k_3 x(t).$$

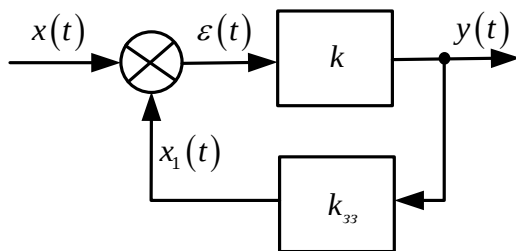


Рис. 7.15. Безінерційна система зі зворотним зв'язком

Висновок: додатний зворотний зв'язок $(k_{3.3} y(t))$ збільшує коефіцієнт k_3 замкненої системи; від'ємний – зменшує; взагалі, за умови, що $|k_{33} \cdot k| \gg 1$, коефіцієнт замкненої системи наближено дорівнює $\pm k_{33}^{-1}$. Це широко використовується для стабілізації коефіцієнта зв'язку $x(t)$ з $y(t)$.

- *гнучкий* зворотний зв'язок:

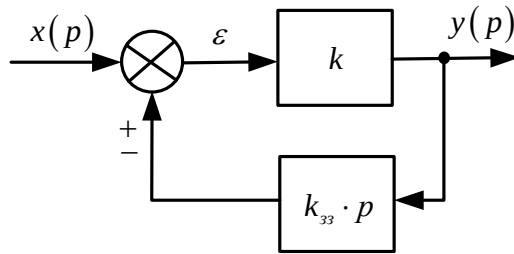


Рис. 7.16. Безінерційна система з гнучким зворотним зв'язком

$$y(p) = k(x(p) \pm k_{33}py(p))$$

або передаточна функція замкненої системи

$$\frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{1 \mp k k_{33} \cdot p}.$$

За від'ємного зворотного зв'язку безінерційна ланка перетворюється в стійку інерційну ланку I порядку зі сталою часу $\tau = k k_{33}$; за додатного – в нестійку.

- *інтегральний зворотний зв'язок:*

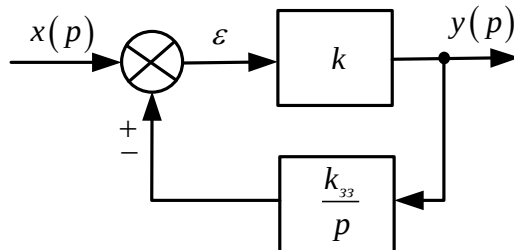


Рис. 7.17. Безінерційна система з інтегральним зворотним зв'язком

Тут

$$y(p) = k \left(x(p) \pm \frac{k_{33}}{p} y(p) \right)$$

або

$$\frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k \cdot p}{p + k k_{33}} = \frac{\alpha p}{\tau p + 1},$$

де: $\alpha = k_{33}^{-1}$; $\tau = (k k_{33})^{-1}$.

Отже, від'ємний інтегральний зв'язок перетворює безінерційну ланку в стійкий реальний диференціатор, додатний – в нестійкий.

7.6.2 Дослідження інерційної ланки I порядку

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t)$$

або

$$W(p) = \frac{k}{\tau p + 1} = \frac{y(p)}{x(p)}.$$

- *безінерційний (жорсткий) зворотний зв'язок:*

$$x_1(t) = \pm k_{33} \cdot y(t),$$

Тобто

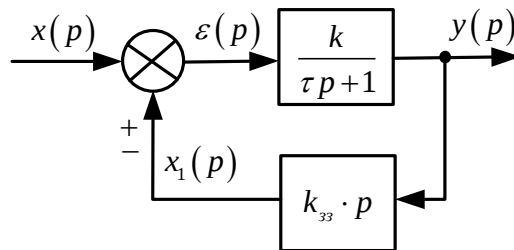


Рис. 7.18. Інерційна ланка з жорстким зворотним зв'язком

Як витікає зі схеми (Рис. 7.18),

$$y(p) = \frac{k}{\tau p + 1} (x(p) \pm k_{33} y(p)),$$

або

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{\frac{k}{\tau p + 1}}{1 \mp \frac{k \cdot k_{33}}{\tau p + 1}} = \frac{k}{\tau p + 1 \mp k \cdot k_{33}} = \frac{\alpha}{\tau_1 p + 1},$$

де

$$\alpha = \frac{k}{1 \mp k \cdot k_{33}}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{1 \mp k \cdot k_{33}}.$$

Отже, жорсткий зворотний зв'язок, якщо він додатний, змінює α і τ_1 , згідно до графіку (рис. 7.19, 7.20).

В результаті, на інтервалі $kk_{33} \in (-\infty; 1]$ маємо стійку ланку першого порядку зі зростаючими $\alpha(kk_{33})$ і $\tau(kk_{33})$ від нуля до нескінченності; на інтервалі $(1, \infty)$ маємо нестійку ланку, в якій α і τ стали від'ємними, змінюючись від нескінченності до нуля.

Якщо такий зв'язок від'ємний, то

$$W_3(p) = \frac{\frac{k}{\tau p + 1}}{\left(1 + \frac{kk_{33}}{\tau p + 1}\right)} = \frac{k}{\tau p + 1 + kk_{33}} = \frac{\alpha}{\tau_1 p + 1},$$

де

$$\alpha = \frac{k}{1 + kk_{33}},$$

за умови $kk_{33} \gg 1$, $\tau_1 \cong k_3^{-1}$;

$$\tau_1 = \frac{\tau}{1 + kk_{33}},$$

за умови $kk_{33} \gg 1$, $\tau_1 \cong \tau \cdot k_3^{-1}$.

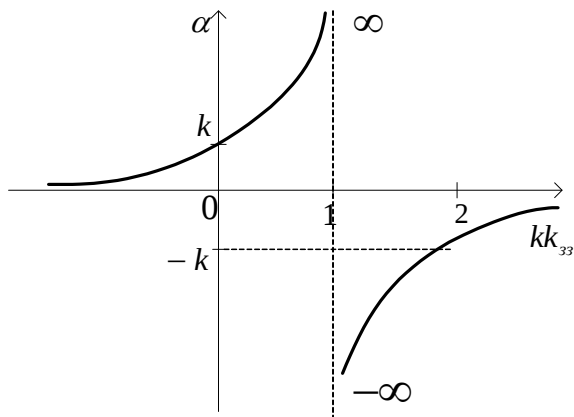


Рис. 7.19. Залежність α від $k \cdot k_{33}$

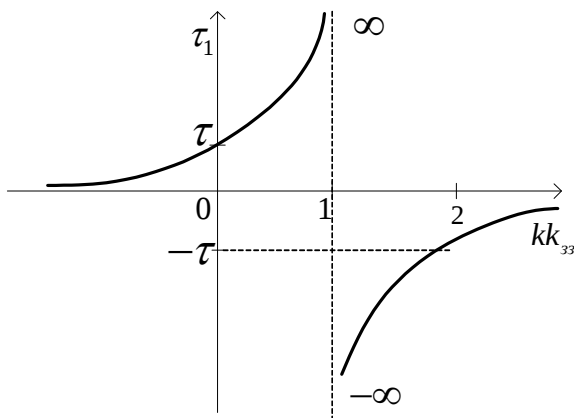


Рис. 7.20. Залежність τ від $k \cdot k_{33}$

Отже, жорсткий від'ємний зворотний зв'язок стабілізує (якщо $k_{33} = \text{const}$) коефіцієнт α і зменшує інерційність (τ_1) ланки (Рис. 7.21, 7.22):

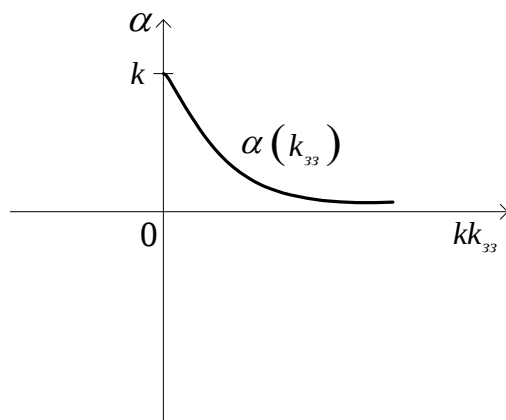


Рис. 7.21. Залежність $\alpha(k \cdot k_{33})$

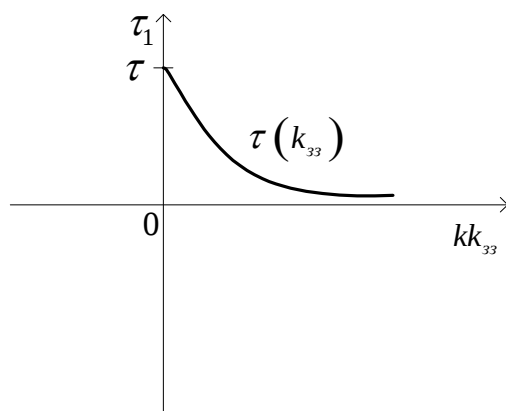


Рис. 7.22. . Залежність $\tau(k \cdot k_{33})$

- *гнучкий* зворотний зв'язок (Рис. 7.23):

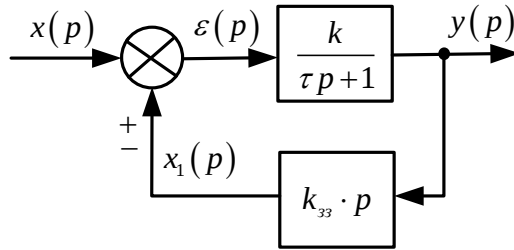


Рис. 7.23. Інерційна ланка з гнучким зворотним зв'язком

Як видно зі схеми

$$y(p) = \frac{k}{\tau p + 1} (x(p) \pm k_{33} \cdot p y(p)),$$

або, для замкненої схеми

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{\frac{k}{\tau p + 1}}{1 \pm \frac{k \cdot k_{33}}{\tau p + 1} \cdot p} = \frac{k}{(\tau \pm k k_{33})p + 1} = \frac{\alpha}{\tau_1 p + 1},$$

де $\alpha = k$; $\tau_1 = \tau \pm k k_{33}$.

Отже, гнучкий зворотний зв'язок, якщо від від'ємний, то збільшує інерційність τ_1 ланки, додатній – зменшує (аж доки τ_1 не змінить знак і ланка стане нестійкою), а статичний коефіцієнт $\alpha=k$ залишається незмінним (Рис. 7.24).

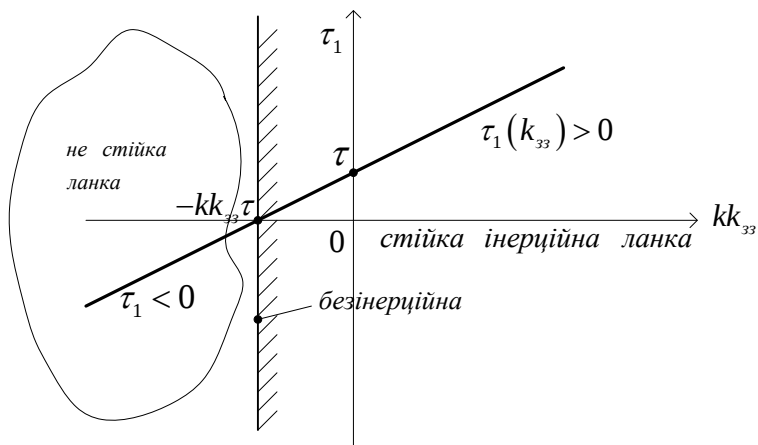


Рис. 7.24. Залежність $\tau_1(k \cdot k_{33})$

- інтегральний зворотний зв'язок:

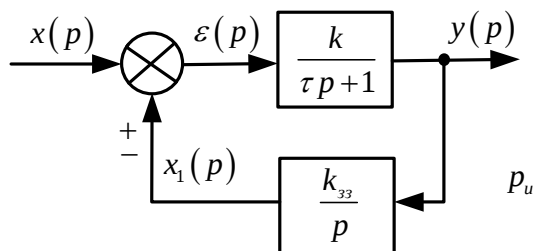


Рис. 7.25. Інтегральний зв'язок

Зі схеми (Рис. 7.25) витікає, що

$$y(p) = \frac{k}{\tau p + 1} \left(x(p) \pm \frac{k_{33}}{p} y(p) \right),$$

або передаточна функція замкненої системи

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{\frac{k}{\tau p + 1}}{1 \mp \frac{k}{\tau p + 1} \cdot \frac{k_{33}}{p}} = \frac{k \cdot p}{p(\tau p + 1) \mp k \cdot k_{33}} =$$

$$= \frac{b_1 p}{a_2 p^2 + a_1 p \mp 1},$$

де $b_1 = k_{33}^{-1}$, $a_2 = \frac{\tau}{k k_{33}}$, $a_1 = \frac{1}{k k_{33}}$;

мінус при 1 відповідає додатному зворотному зв'язку і система буде нестійка; дійсно, один з коренів знаменника, як характеристичного полінома $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ рівняння

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = b_1 x(t),$$

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} + 1}$$

буде додатним:

$$p_1 = -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} + 1}.$$

Плюс при 1 відповідає від'ємному зворотному зв'язку; система стійка, а її частотна характеристика

$$|W_3(\omega)| = M(\omega) = \frac{\omega b_1}{\sqrt{(1 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}}$$

або

$$M(\omega) = \frac{\omega k_{33}^{-1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{k k_{33}} \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{(k k_{33})^2}}}$$

являє собою смуговий фільтр (Рис. 7.26)

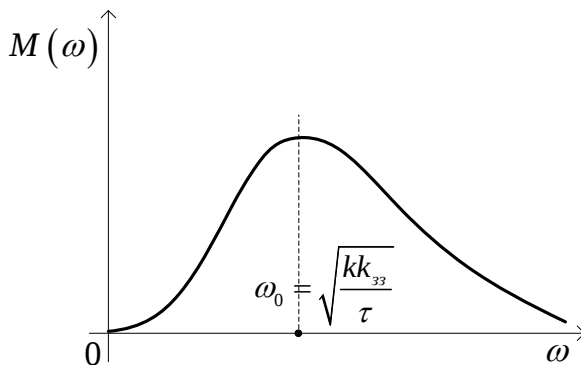


Рис. 7.26. АЧХ системи

Отже, змінюючи вид і знак зворотного зв'язку в ланці I порядку, можна не тільки змінювати параметри k і τ ланки, а й отримати інші ланки з бажаними характеристиками.

ТЕСТ

1. Запишіть $W_3(p)$ для інерційної ланки 1 порядку охопленої зворотнім зв'язком з передаточною функцією ПІД – регулятора:

$$W_{33}(p) = K_{33} + \frac{K_i}{p} + K_o \cdot p$$

2. Запишіть $W_3(p)$ для цієї ж ланки, охопленої зворотнім зв'язком з $W_{33} = \frac{K_{33}}{\tau_{33}p+1}$.

7.6.3. Дослідження інтегруючої ланки

- *жорсткий* зворотний зв'язок:

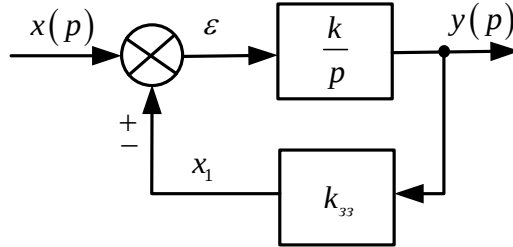


Рис. 7.27. Жорсткий зворотний зв'язок в інтегруючій ланці

Діючи аналогічно до попереднього, отримаємо:

$$y(p) = \frac{k}{p} (x(p) \pm k_{33} \cdot y(p)),$$

або

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{p \mp k \cdot k_{33}} = \frac{\alpha}{\tau p \mp 1},$$

де $\alpha = k_{33}^{-1}$, $\tau = (k k_{33})^{-1}$.

За додатного зворотного зв'язку маємо нестійку ланку I порядку; за від'ємного – стійку інерційну ланку I порядку, стала τ часу якої зворотно пропорційна добутку k на k_{33} .

- *гнучкий* зворотний зв'язок:

Зі схеми (Рис. 7.28) витікає, що $y(p) = \frac{k}{p} (x(p) \pm k_{33} p \cdot y(p))$ або

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{p \mp k \cdot k_{33} p} = \frac{\alpha}{p},$$

де

$$\alpha = \frac{k}{1 \mp k \cdot k_{33}}.$$

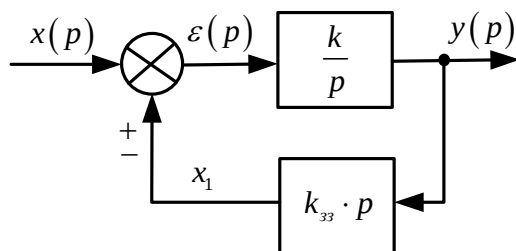


Рис. 7.28. Гнучкий зворотній зв'язок

За умови додатного зворотного зв'язку (мінус у знаменнику) зі збільшенням k_{33} α зростає до нескінченності, а далі змінює знак і спадає до нуля (Рис. 7.29). Отже, збільшуючи k_{33} можна суттєво збільшити α в інтегруючій ланці.

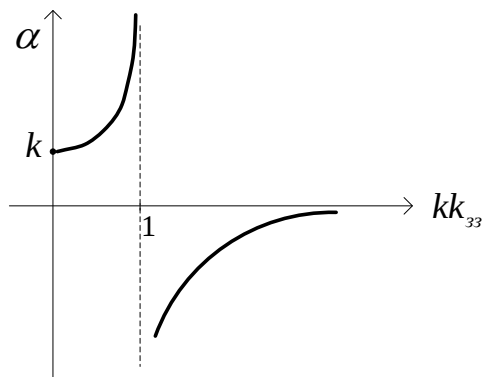


Рис. 7.29. Залежність від $k \cdot k_{33}$

За умови від'ємного зворотного зв'язку (плюс у знаменнику) зі зростанням k_{33} коефіцієнт α зменшується.

- *інтегральний зворотний зв'язок:*

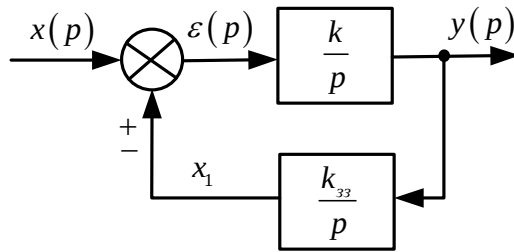


Рис. 7.30. Інтегральний зворотний зв'язок

Тут

$$y(p) = \frac{k}{p} \left(x(p) \pm \frac{k_{33}}{p} y(p) \right),$$

або

$$W_3(p) = \frac{k}{p \mp \frac{k \cdot k_{33}}{p}} = \frac{kp}{p^2 \mp k \cdot k_{33}} = \frac{\alpha p}{p^2 T^2 \mp 1},$$

де $\alpha = k_{33}^{-1}$, $T = \frac{1}{\sqrt{k k_{33}}}$. Тут як для додатного зворотного зв'язку корені характеристичного поліному

$$T^2 p^2 - 1 = 0$$

будуть дійсними додатними $p_{1,2} = \pm(1/T)$ і система буде аперіодично нестійка.

Для від'ємного зворотного зв'язку $p_{1,2} = \pm j(1/T)$ інтегратор перетворюється в генератор синусоїдних коливань.

7.6.4 Дослідження диференціюючої ланки

- жорсткий зворотний зв'язок:

$$y(p) = kp(x(p) \pm k_{33} \cdot y(p)),$$

або

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{kp}{1 \mp k \cdot k_{33} \cdot p} = \frac{\alpha p}{\tau p \mp 1},$$

де $\alpha = k$, $\tau = k k_{33}$.

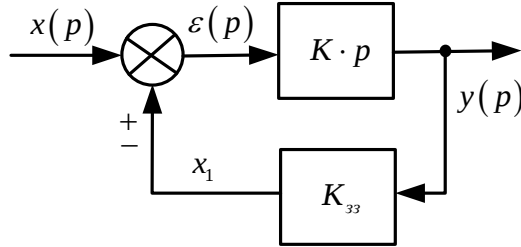


Рис. 7.31. Жорсткий зворотний зв'язок

Отже, за додатним зворотним зв'язком буде нестійкий, а за від'ємним – стійкий реальний диференціатор. Його «реальність» полягає в тому, що за умови $\omega\tau \ll 1$, він майже ідеальний, а за умови $\omega\tau \gg 1$ він майже пропорційний зі статичним коефіцієнтом k_{33}^{-1} . Така властивість дає можливість використовувати його в САК, як диференціатор корисних низькочастотних сигналів і не підсилювати суттєво високо частотні завади.

- *гнучкий* зворотний зв'язок:

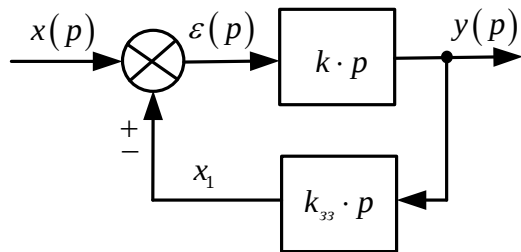


Рис. 7.32. Гнучкий зворотний зв'язок

$$y(p) = kp(x(p) \pm k_{33} \cdot p),$$

або

$$W_3(p) = \frac{kp}{1 \mp k \cdot k_{33} p^2}.$$

Корені характеристичного полінома (знаменника $W_3(p)$) будуть такими ж як і для інтегруючої ланки з гнучким зворотним зв'язком; система нестійка.

- *інтегруючий* зворотний зв'язок:

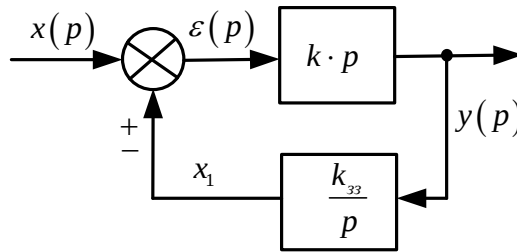


Рис. 7.33. Інтегруючий зворотний зв'язок

$$y(p) = kp \left(x(p) \pm \frac{k_{33}}{p} \cdot y(p) \right),$$

або

$$W_3(p) = \frac{kp}{1 \mp k \cdot k_{33}} = \alpha p.$$

Як бачимо, інтегральний зворотний зв'язок змінює тільки коефіцієнт α : додатний збільшує, від'ємний – зменшує.

Практичне завдання

7.6.5 Дослідження нестійкої ланки I порядку

- жорсткий зворотний зв'язок:

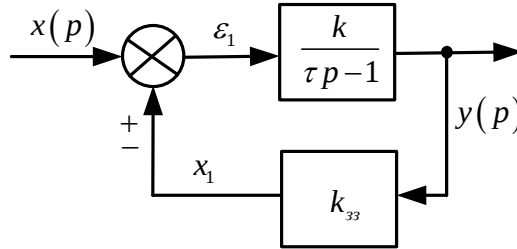


Рис. 7.34. Жорсткий зворотний зв'язок

$$y(p) = \frac{k}{\tau p - 1} (x(p) \pm k_{33} y(p)),$$

або

$$W_3(p) = \frac{\frac{k}{\tau p - 1}}{1 \mp \frac{k \cdot k_{33}}{\tau p - 1}} = \frac{k}{\tau p - (1 \pm k \cdot k_{33})} = \frac{\alpha}{\tau_1 p - 1},$$

де

$$\alpha = \frac{k}{1 \pm k k_{33}},$$

як бачимо, за умови, що $\tau_1 = \frac{\tau}{1 \pm k k_{33}}$, $k \cdot k_{33} > 1$, ланка змінює знак α (з плюса на мінус) і з нестійкої стає стійкою.

- гнучкий зворотний зв'язок:

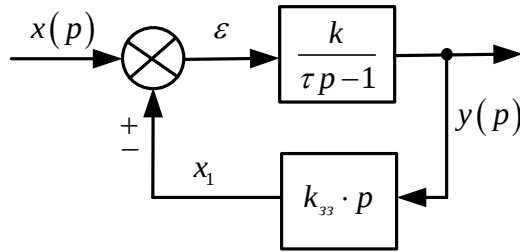


Рис. 7.35. Гнучкий зворотний зв'язок

$$y(p) = \frac{k}{\tau p - 1} (x(p) \pm k_{33} \cdot p y(p)),$$

або

$$W_3(p) = \frac{\frac{k}{\tau p - 1}}{1 \mp \frac{k \cdot k_{33} \cdot p}{\tau p - 1}} = \frac{k}{(\tau p - 1) \mp k \cdot k_{33} p} = \frac{k}{(\tau \mp k \cdot k_{33}) p - 1} = \frac{\alpha}{\tau_1 p - 1},$$

де $\alpha = k$, $\tau_1 = \tau \pm k k_{33}$.

Отже, якщо нестійку ланку охопити додатним гнучким зворотним зв'язком, то, за умови, що $k k_{33} > \tau$, система буде стійкою, але зміниться знак.

- *інтегральний зворотний зв'язок:*

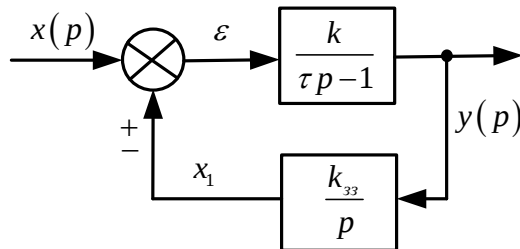


Рис. 7.36. Інтегральний зворотний зв'язок

$$W(p) = \frac{k}{\tau p - 1} \left(x(p) \pm \frac{k_{33}}{p} y(p) \right),$$

або

$$W_3(p) = \frac{\frac{k}{\tau p - 1}}{1 \mp \frac{k_{33}}{p} \cdot \frac{k}{\tau p - 1}} = \frac{k}{(\tau p - 1) \mp k \cdot k_{33}} = \frac{\alpha p}{a_2 p^2 + a_1 p \mp 1},$$

де $\alpha = k_3^{-1}$, $a_2 = \tau$, $a_1 = \frac{-1}{k_3 k}$, як бачимо, за будь-яких значень k_{33} ланка залишається нестійкою. Дійсно, як мінімум один з коренів полінома $\tau p^2 - p \pm k_3 k = 0$ буде завжди мати додатну складову:

$$P_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} \pm \frac{k_{33} \cdot k}{\tau}}.$$

Загальний висновок: введення зворотного зв'язку дозволяє змінювати характеристики динамічних ланок САК: стійкість, маневреність (керованість) або інерційність, статичний коефіцієнт і сталу часу ланки.

ТЕСТ

1. Для Вашого варіанту $W(p)$ дослідити вплив різних зворотних зв'язків на передаточну функцію замкненої системи.

7.7 Частотні характеристики послідовно з'єднаних ланок САК

Як вже показано, для послідовного з'єднання передаточних функцій еквівалентна передаточна функція буде дорівнювати їх добутку:

Приклад 1:

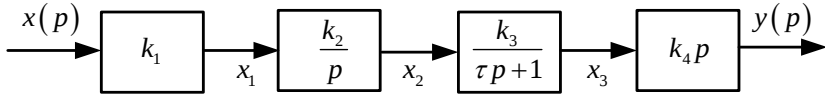


Рис. 7.37. Послідовне з'єднання типових ланок

$$y(p) = k_4 p \cdot x_3(p), \quad x_3(p) = \frac{k_3}{\tau p + 1} x_2(p),$$

$$x_2(p) = \frac{k_2}{p} x_1(p), \quad x_1(p) = k_1 x(p).$$

Виключаючи проміжні змінні $x_i(p)$, $i = 1, 2, 3$, отримаємо, що

$$W_e(p) = \prod_{i=1}^4 W_i(p).$$

Для нашого прикладу

$$W_e(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{\tau p + 1} = \frac{K_e}{\tau p + 1}$$

.

Приклад 2:

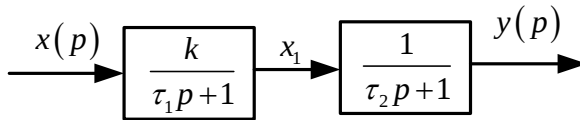


Рис. 7.38. Дві інерційні ланки

Тут

$$W_e(p) = \frac{k}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$$

.

Приклад 3:

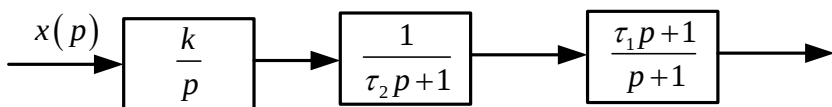


Рис. 7.39. Три ланки

Тут

$$W_e(p) = \frac{k(\tau_1 p + 1)}{p(p + 1)(\tau_2 p + 1)^2}$$

де $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$.

Частотні характеристики послідовних з'єднань ланок

Покладемо, що $p = j\omega$. Тоді для I прикладу

$$W_{e1}(j\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{j\omega\tau + 1} = \frac{K_e}{j\omega\tau + 1};$$

для II прикладу

$$W_{e2}(j\omega) = \frac{k}{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)};$$

для III прикладу

$$W_{e3}(j\omega) = \frac{k(j\omega\tau_1 + 1)}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega\tau_2 + 1)^2}.$$

Представимо ці функції через модуль $M(\omega)$ і $\varphi(\omega)$:

$$W_{e1}(j\omega) = \frac{K_e}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \cdot e^{-j\arctg\omega\tau},$$

або

$$M_{e1}(\omega) = \frac{K_e}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad \varphi_1(\omega) = -\arctg\omega\tau;$$

$$W_{e2}(j\omega) = \frac{k \cdot e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)}}{\sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1} \cdot \sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1}},$$

де

$$\varphi_1(\omega) = \arctg\omega\tau_1, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg\omega\tau_2,$$

$$M_{e2}(\omega) = M_1(\omega) \cdot M_2(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau_2^2 + 1}},$$

$$\varphi_{e2}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

Отже, АЧХ окремих ланок перемножуються, а ФЧХ – складаються.

$$\begin{aligned} W_{e3}(j\omega) &= \frac{k}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1} \cdot e^{j \arctg \omega \tau_1}}{\sqrt{\omega^2 + 1} \cdot e^{j \arctg \omega}} \cdot \frac{1}{(\omega^2 \tau_2^2 + 1) e^{j 2 \arctg \omega \tau_2}} \\ &= \\ &= \frac{k \cdot \sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1} \cdot (\omega^2 \tau_2^2 + 1)} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{2} + \arctg \omega \tau_1 - \arctg \omega - 2 \arctg \omega \tau_2)}. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} M_{e3}(\omega) &= \frac{k \sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1} \cdot (\omega^2 \tau_2^2 + 1)} = \prod_{i=1}^3 M_i(\omega), \\ \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} + \arctg \omega \tau_1 - \arctg \omega - 2 \arctg \omega \tau_2 = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\omega). \end{aligned}$$

На відміну від ФЧХ, АЧХ перемножуються, що не зовсім зручно для графічного представлення і вирішення задач аналізу і синтезу САК. Більш зручними в цьому сенсі логарифмічні частотні характеристики. Отже, для послідовного з'єднання динамічних ланок з АФЧХ $W_i(j\omega) = M_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)}$ еквівалентна АФЧХ буде мати наступний вигляд:

$$W_e(j\omega) = \prod_{i=1}^n M_i(\omega) \cdot e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)}$$

або

$$\begin{aligned} M_e(\omega) &= \prod_{i=1}^n M_i(\omega), \\ \varphi_e(\omega) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \end{aligned}$$

Так, для першого прикладу (Рис. 7.37):

$$W_e(j\omega) = k_1 \cdot e^{j0} \cdot \frac{k_2}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{k_3}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \cdot e^{-j\arctg\omega\tau} \cdot k_4 \cdot \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}},$$

де

$$M_e(\omega) = k_1 \cdot \frac{k_2}{\omega} \cdot \frac{k_3}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \cdot k_4 \cdot \omega = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}};$$

$$M_e(\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau + \frac{\pi}{2} = -\arctg\omega\tau.$$

$$L_e(\omega) = 20 \left[\lg k_1 + \lg k_2 - \lg \omega + \lg k_3 - \lg \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} + \lg k_4 - \lg \omega \right] =$$

$$= 20 [\lg k_e - \lg \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}],$$

де

$$k_e = \prod_{n=1}^i k_i.$$

Графік $L_e(\omega)$ відповідає ЛАХ інерційної ланки I порядку (рис. 7.40).

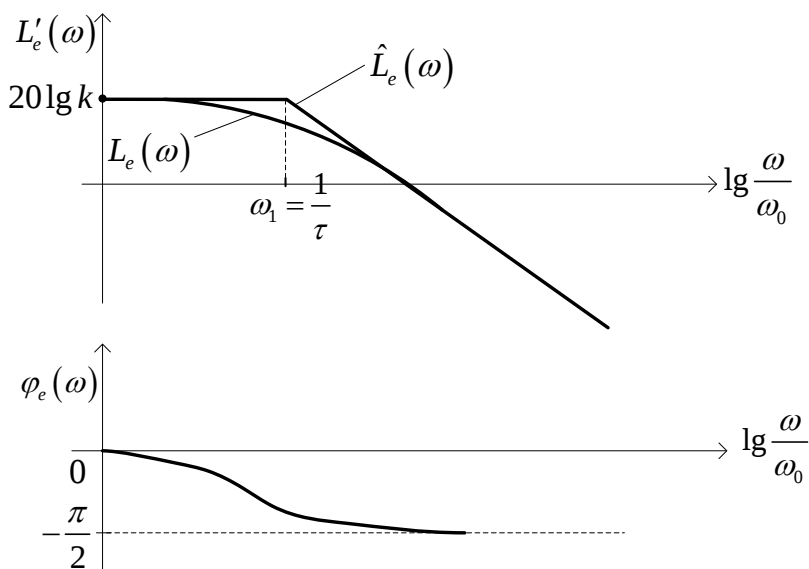


Рис. 7.40. ЛФЧХ

Кусково-лінійна апроксимація $\hat{L}(\omega)$ залежності $L(\omega)$, як вже зазначалось, будується за асимптотами:

– якщо $\omega\tau < 1$, то $L(\omega) \approx \hat{L}(\omega) = 20[\lg k_e - \lg 1] = 20\lg k_e$;

– якщо $\omega\tau \geq 1$, то $L(\omega) \approx \hat{L}(\omega) = 20[\lg k_e - \lg \omega\tau]$,

коли $\omega\tau$ змінюється на декату (в 10 разів), то $-20\lg 10 = -20$. Тобто, маємо нахил -20 дБ/дек.

Для прикладу II (рис. 7.38):

$$W_e(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega\tau_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} = \\ = M_1(\omega) \cdot e^{-j\varphi_1(\omega)} \cdot M_2(\omega) \cdot e^{-j\varphi_2(\omega)} = M_e(\omega) \cdot e^{j\varphi_e(\omega)},$$

де

$$M_e(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1}}, \\ \varphi_e(\omega) = -(\arctg\omega\tau_1 + \arctg\omega\tau_2), \\ L_e(\omega) = 20\lg M_e(\omega) = 20 \left[\lg k - \lg \sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1} - \lg \sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1} \right].$$

Для $k > 1, \tau_1 > \tau_2$ графік $L_e(\omega)$ і $\hat{L}_e(\omega)$ наведено на рис. 7.41.

Як бачимо, зі зростанням ω $L_e(\omega)$ зменшується, а $\varphi_e(\omega)$ за модулем зростає від нуля до $-\pi$, коли $\omega \rightarrow \infty$.

Алгоритм побудови $L_e(\omega)$ і $\varphi_e(\omega)$ для послідовно з'єднаних ланок:

- визначити частоти $\omega_i = 1/\tau_i$ спряження кусково-лінійних залежностей $\hat{L}_e(\omega), i = \overline{1, n}$ і розташувати їх на осі частот;
- нанести на осі ординат точку зі значенням $20\lg k_e$;
- провести пряму $20 \lg k_e$ до першої частоти спряження $\omega_i = 1/\tau_i$;
- від прямої $20 \lg k_e$, починаючи з частоти ω провести пряму з нахилом у -20 дБ/дек до другої частоти $\omega_2 = 1/\tau_2, \omega_2 > \omega_1$.
- далі від точки $\omega_2 = 1/\tau_2$ проводимо наступну частину графіка у вигляді прямої з нахилом плюс чи мінус 20 дБ/дек відносно

попередньої частини, залежно від того чи цей множник є в чисельнику чи знаменнику $M_e(\omega)$.

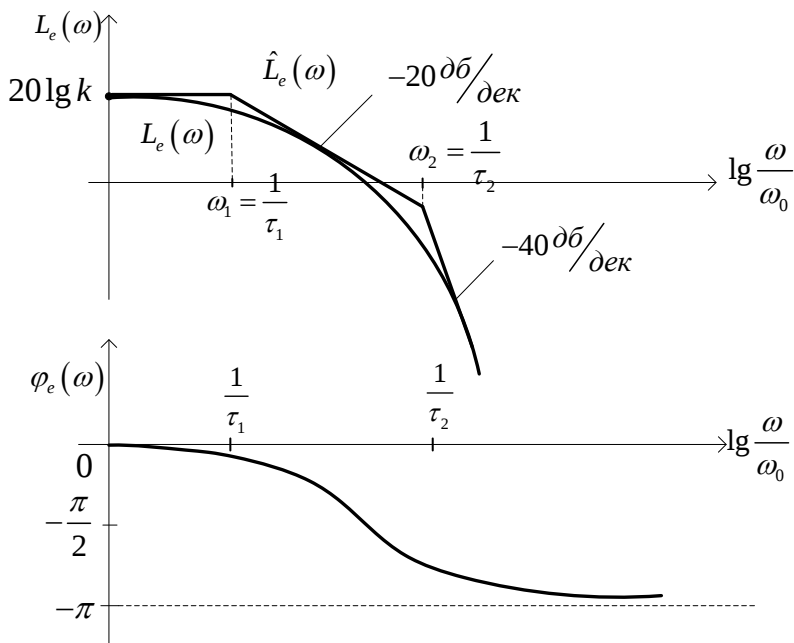


Рис. 7.41. ЛФЧХ

Проілюструємо цей алгоритм на прикладі III (рис. 7.39). Тут:

$$\begin{aligned}
 W_e(j\omega) &= \frac{k}{j\omega} \cdot \frac{(j\omega\tau_1 + 1)}{j\omega + 1} \cdot \frac{1}{(j\omega\tau_2 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} = \\
 &= \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1} \cdot e^{j\arctg\omega\tau_1}}{\sqrt{\omega^2 + 1} \cdot e^{j\arctg\omega}} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1} \cdot e^{j\arctg\omega\tau_2} \cdot \sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1} \cdot e^{j\arctg\omega\tau_2}} = \\
 &= M_e(\omega) \cdot e^{j\varphi_e(\omega)},
 \end{aligned}$$

де

$$M_e(\omega) = \frac{k}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau_2^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau_2^2 + 1}};$$

$$\varphi_e(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \omega \tau_1 - \operatorname{arctg} \omega - 2 \operatorname{arctg} \omega \tau_2.$$

Для побудови графіка $\hat{L}_e(\omega)$, $\varphi_e(\omega)$, покладемо, що $k = 100$; $\tau_1 = 0,1$ с, $\tau_2 = 0,01$ с; $\tau_3 = 1$ с; тоді, за алгоритмом, визначаємо частоти спряження:

$$\omega_1 = 1/\tau_3 = 1/1 = 1 \text{ рад/с},$$

$$\omega_2 = 1/\tau_1 = 1/0,1 = 10 \text{ рад/с},$$

$$\omega_3 = 1/\tau_2 = 1/0,01 = 100 \text{ рад/с}, \omega_0 = 1.$$

Далі прямо за $W_e(p)$ будуємо кусково-лінійну модель $\hat{L}_e(\omega)$ залежності $\hat{L}_i(\omega)$:

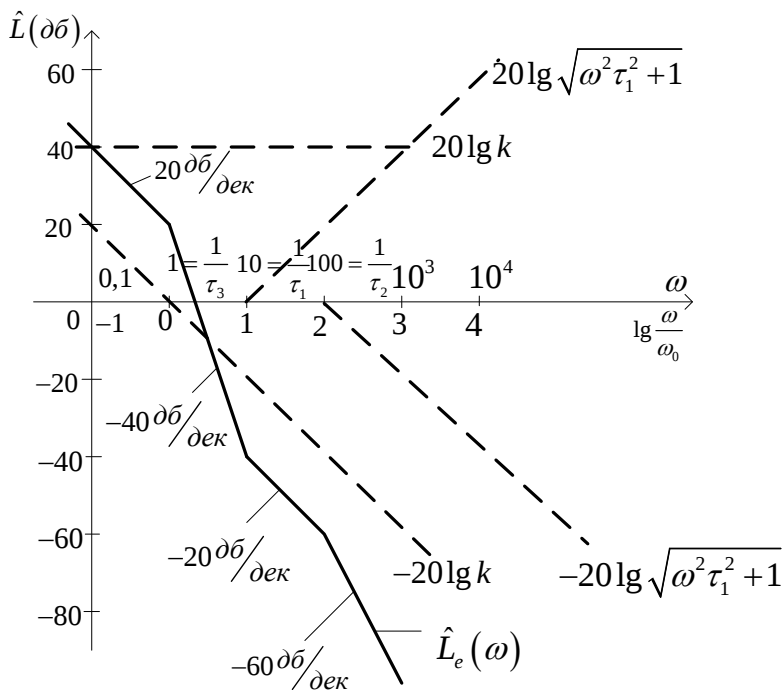


Рис. 7.42. ЛАЧХ

Далі, склавши $\hat{L}_i(\omega)$ (пунктирні лінії) отримаємо $\hat{L}_e(\omega)$ (суцільна лінія):

Фазочастотна характеристика:

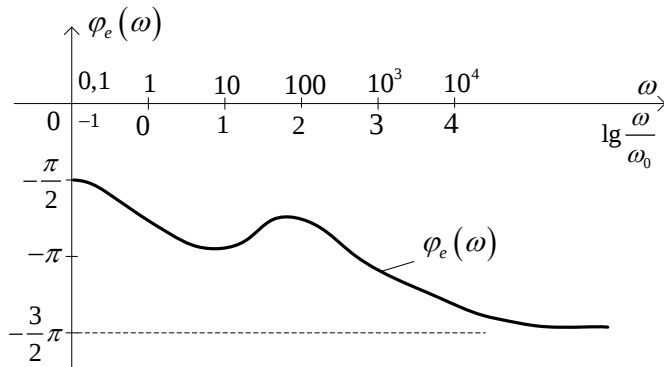


Рис. 7.43. ЛФЧХ

Як видно з графіка $\varphi_e(\omega)$, інтегруюча ланка відразу дає постійний зсув фаз на -90° , далі ланки I порядку, що розташовані в знаменнику $W_e(p)$, збільшують зсув, ланка в чисельнику – зменшує.

Якщо маємо ланку II порядку з дійсними коренями характеристичного полінома

$$W(p) = \frac{k}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

і корені p_i , $i = 1, 2$ дійсні, то за теоремою Вієта її можна подавати як добуток двох ланок I порядку;

$$W(p) = \frac{k}{(p - p_1)(p - p_2)},$$

і будувати LAX шляхом кусочно-лінійної апроксимації $L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega)$.

У випадку комплексно-спряжених коренів коливальної ланки в зоні резонансних частот слід будувати точку $L(\omega)$, а за їх межами, як

звичайно, кусково-лінійну апроксимацію $\hat{L}(\omega)$. Покажемо це на прикладі 4.

Приклад 4.

$$W(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$$

або

$$W(j\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} \cdot k \cdot e^{j \arctg \omega \tau} \cdot e^{-j \arctg \frac{2\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)}}}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}},$$

$$M(\omega) = \frac{k \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}},$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = +\arctg \omega \tau - \arctg \frac{2\xi T \omega}{(1 - (T^2 \omega^2))}.$$

Нехай $k > 1$, $\tau < T$, $\xi \ll 1$, тоді графік $\hat{L}(\omega)$ буде складатися з кусково-лінійних перших двох складових $L(\omega)$ і точного значення третьої складової.

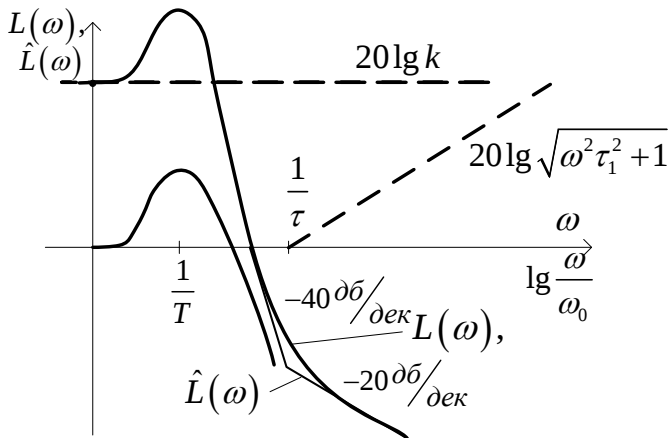
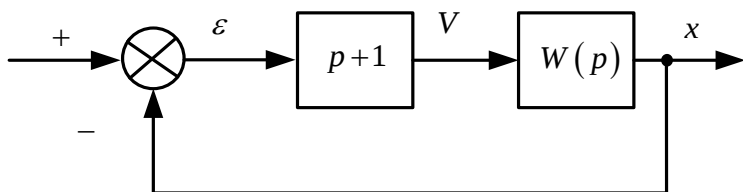


Рис. 7.44. ЛАЧХ

Загальний висновок: кусково-лінійна апроксимація ЛАЧХ, за винятком коливальних систем, дозволяє суттєво спростити завдання аналізу (на стійкість) і синтезу (бажаної динаміки) САК.

ТЕСТ

1. Побудуйте всі частотні характеристики послідовного увімкнення $W(p)$ Вашого варіанту з коригуючою ланкою $W_{кл}=(p+1)$.



$L(\omega), W(j\omega), M(\omega), \varphi(\omega), U(\omega), V(\omega).$

8 ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ САК

8.1. Загальні положення

Будь-яка реалізована САК, як і все в цьому світі, не може нескінченно довго зберігати незмінними свої властивості. Тому практично таку властивість як стійкість САК будемо розглядати на достатньо великому кінцевому інтервалі часі, тим не менш приймаючи його для теоретичних досліджень, як напівнескінчений: $t \in [0, \infty]$.

Наприклад, для визначення усталеного значення похибки САК, ми користуємося межевою теоремою Лапласа:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p),$$

хоч реальне значення $\varepsilon(t)$ для стійкості САК через $(3 \div 5)\tau$ вже близьке до $\varepsilon(\infty)$ з похибкою в $(5 \div 0,5\%)$ від $\varepsilon(0)$.

Відповідно, і параметри САК будемо вважати сталими, розглядаючи динаміку САК, як систему зі сталими параметрами.

Отже, за такої постановки, поняття стійкості САК, розуміється як властивість повертатися в заданий або близькій до нього сталий режим після виходу з нього внаслідок зовнішнього кінцевого у часі впливу.

Подамо деякі наглядні приклади з механіки:

1) Взаємодія кульки з поверхнею. На кульку діє сила тяжіння Землі.

Під дією сили тяжіння виведена з нижнього стійкого положення кулька коливально повертається в нього або близько до нього, якщо враховувати тертя і не ідеально круглу форму кульки (рис. 8.1, а). Це система стійка і за малих, і за великих відхилень.

Однак система (рис. 8.1, б) за малих відхилень стійка, за великих – ні. Це система *стійка в малому*.

Система (рис. 8.1, в) за ідеальних форм. взагалі, *не стійка*.

Система (рис. 8.1, г) – *напівстійка*.

Система (рис. 8.1, *д*) – *нейтральна*, якщо поверхня кульки кругла, основи – горизонтальна.

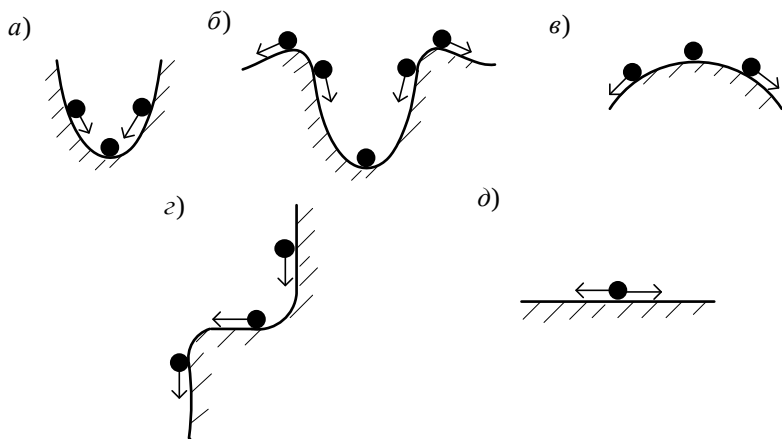


Рис. 8.1. Сутність стійкості

2) *Маятники* (рис. 8.2, *а*) – **стійкий**, (рис. 8.1, *б*) – **не стійкий**.

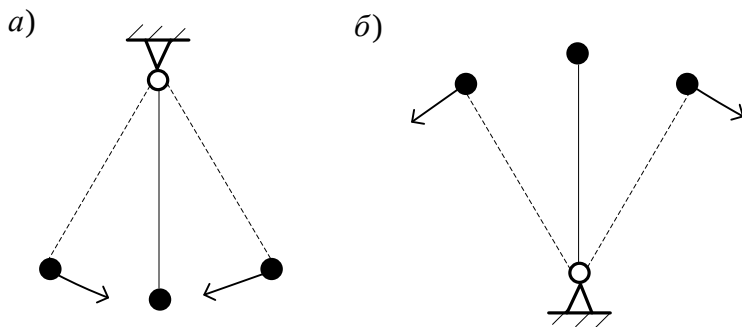


Рис. 8.2. Система: а) **стійка**; б) **не стійка**

3) Літак в повздовжньому русі (рис. 8.3, *а*) – **стійкий**, (рис. 8.3, *б*) – **не стійкий**. Це залежить від розташування центра мас x_T і

центра x_F дії всіх аеродинамічних сил (аеродинамічний фокус).

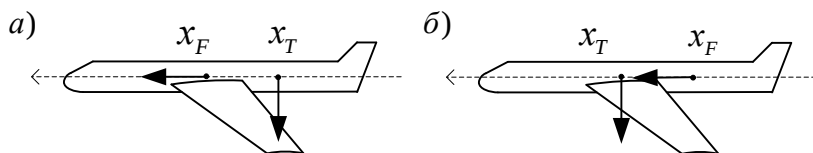


Рис. 8.3. Літак: а) стійкий; б) не стійкий

- 4) Операційний підсилювач з ємнісним від'ємним зворотнім зв'язком (рис. 8.4, а) – стійкий, (рис. 8.4, б) – не стійкий.

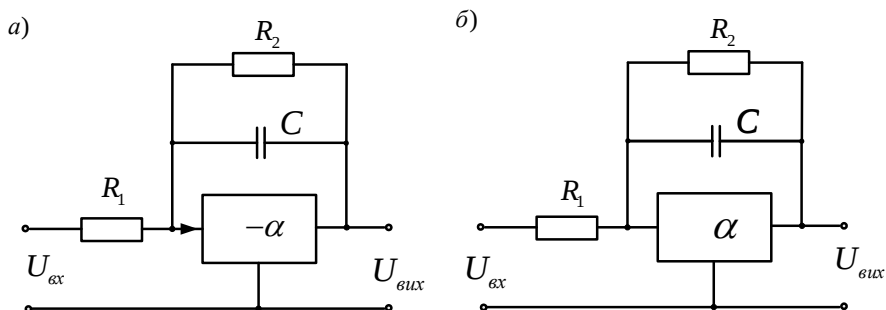


Рис. 8.4. Операційний підсилювач: а) стійкий; б) не стійкий

Для схеми (а):

$$W(p) = \frac{1}{pC} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_2 C p}, \quad p_1 = -\frac{1}{R_2 C} < 0.$$

Для схеми (б):

$$W(p) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - R_2 C p}, \quad p_1 = \frac{1}{R_2 C} > 0.$$

Корінь знаменника $W(p)$ для схеми (а) від'ємний, для (б) – додатний.

Взагалі, для лінійних динамічних систем знак дійсної складової коренів характеристичного поліному лінійного диференційного рівняння системи однозначно визначає стійкість чи нестійкість системи. Поняття і фундаментальні дослідження стійкості САК були розвинуті вченим О.М. Ляпуновим. Розуміючи, що реальні САК, як і всі явища і об'єкти (внаслідок фундаментального закону загального взаємозв'язку всього з усім) не можуть бути ідеально лінійними, О.М. Ляпунов розглядає лінійні моделі, як моделі першого наближення нелінійних. Те ж стосується поняття стаціонарності. Тому про стійкість реальної САК за її лінійною моделлю можна стверджувати лише для тієї області змінних стану, де похибка апроксимації реальної САК лінійною моделлю буде не суттєвою. Стійкість чи не стійкість лінійної моделі САК визначається за І теоремою Ляпунова значеннями дійсної складової коренів характеристичного поліному (знаменника передаточної функції): $P_k = \alpha_k \pm j\beta_k, k = \overline{1, n}$.

Якщо $\alpha_k < 0$, система стійка.

Якщо $\alpha_k > 0$, система не стійка.

Якщо $\alpha_k \approx 0$, система на грані стійкості і, для більш достовірного ствердження про стійкість чи ні, слід розглядати більш точну нелінійну модель.

Якщо модель САК – це диференційне рівняння:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x(t), \end{aligned}$$

то його рішення $y(t)$ складається з усталеного (вимушеного) руху $y_{уст.}(t)$ і вільного (перехідного) руху $y_{віль.}(t)$:

$$y(t) = y_{уст.}(t) + y_{віль.}(t).$$

Усталений (вимушений, бажаний) рух можливий лише за умов, що вільна складова $y_{віль.}(t)$ з часом буде прямувати до нуля. Оскільки

вільна складова $y_{\text{віль.}}(t)$ визначається, як рішення однорідного рівняння

$$a_0 \frac{d^n y_{\text{віль.}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_{\text{віль.}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y_{\text{віль.}}(t) \equiv 0$$

за відповідних не нульових початкових умов, то для того, щоб $y(t)$ з часом досягло усталеного значення $y_{\text{уст.}}(t)$, необхідно щоб корені p_k , $k = \overline{1, n}$ характеристичного поліному

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0$$

мали від'ємну дійсну складову, бо рішення однорідного рівняння – це сума експонент

$$y_{\text{віль.}}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad p_k = \alpha_k \pm j \beta_k.$$

Система аперіодично асимптотично стійка, якщо $p_k = -\alpha_k$, коливально стійка, якщо $p_k = \alpha_k \pm j \beta_k$, де $\alpha_k < 0$, і, аналогічно, не стійка, якщо в p_k дійсна складова $\alpha_k > 0$. Система на грані аперіодичної стійкості, якщо $\beta_k = 0$, $\alpha_k \cong 0$; коливальної – якщо $\beta_k \neq 0$, $\alpha_k \cong 0$.

Наприклад, літак (рис. 8.3) в повздовжньому русі за малих відхилень від прямолінійного руху описується рівнянням

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = b(t) \cdot x(t),$$

де $y(t)$ – кут тангажу, $x(t)$ – рулі висоти. Корені поліному:

$$P_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}}.$$

За малого демпфування ($a_1 \rightarrow 0$) будемо мати

$p_{1,2} \approx \pm j \sqrt{a_2/a_0}$ і система буде на грані коливальної стійкості.

За умови «анти-демпфування» ($a_1 < 0$), система буде не стійкою коливально, якщо $a_1^2 / 4a_0^2 < a_2 / a_0$, або аперіодично, якщо $a_1^2 / 4a_0^2 > a_2 / a_0$.

На рис. 8.3. показано два крайні варіанта: а) стійкий, б) не стійкий. Якщо координати x_F і x_T співпадають, система буде на грані стійкості.

Операційні підсилювачі (рис. 8.4) – також можуть розглядатися як лінійні в межах не виходу $U_{\text{вих.}}(t)$ в зону насичення електронних елементів (транзисторів). Взагалі, передаточні функції $W(p)$ існують тільки для лінійних елементів.

Лінійна модель маятника (рис. 8.2) теж справедлива для невеликих відхилень від вертикального положення. З математичних позицій Ляпунова (поняття «епсилон-дельта»), система в сенсі Ляпунова стійка, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ фазового простору (змінних $y(t), \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$) існує таке $\Delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що із норми $\|\delta y(t_0)\| < \Delta(\varepsilon, t_0)$ витікає, що $\|\delta y(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$. В протилежному випадку рішення $y(t)$ буде не стійким.

Асимптотична стійкість в деякій обмеженій області $G(t_0)$ фазового простору $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, де $y_{i+1} = \frac{d^i y}{dt^i}$, гарантується, якщо норма $\|Y\| \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow \infty$.

Асимптотична стійкість в цілому (глобально) буде за умови, якщо областю асимптотичної стійкості буде весь фазовий простір.

ТЕСТ

Як впливає знак зворотного зв'язку на стійкість системи?

8.2. Спрощені показники стійкості САК

З метою спрощення і прискорення задач аналізу і синтезу САК вченими Е. Раусом, Л. Гурвіцом, Г. Найквістом, Михайловим були розроблені критерії стійкості, які не вимагають відшукування коренів p_k , $k = \overline{1, n}$, характеристичних поліномів диференційного рівняння системи.

8.2.1. Алгебраїчний критерій стійкості САК Рауса (1877 р.)

За видом характеристичного поліному

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots a_{n-1} p + a_n = 0$$

будується матриця (таблиця).

Таблиця Рауса

	1	2	3	4	5	...	
1	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	...	парні індекси
2	a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	...	непарні індекси
3	C_{13}	C_{23}	C_{33}	C_{43}	C_{53}	...	C_{ki} $\left\{ \begin{array}{l} k - \text{стовпчик} \\ i - \text{рядок} \end{array} \right.$
4	C_{14}	C_{24}	C_{34}	C_{44}	C_{54}	...	
5	C_{15}	C_{25}	C_{35}	C_{45}	C_{55}	...	
...	...	...	...	...	...	...	

C_{ki} визначається з визначників:

$$C_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix}, \dots, C_{ki} = \begin{vmatrix} C_{k+1, i-2} & C_{k, i-2} \\ C_{k+1, i-1} & C_{k, i-1} \\ & 1 \end{vmatrix}, k, i = \overline{1, n}.$$

Для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб усі елементи першого стовпчика таблиці Рауса були того ж знаку, що і a_0 .

Критерій Рауса зручно використовувати для систем високого порядку n .

Приклади:

- Система I порядку: $a_0 p + a_1 = 0$. Для стійкості достатньо, щоб $\text{sign} a_1 = \text{sign} a_0$;
- Система II порядку: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_0/a_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2 > 0.$$

Тут теж достатньо, щоб усі коефіцієнти $a_0 a_1 a_2$ полінома були одного знаку.

- Система III порядку: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

Система стійка, якщо

$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ або $a_2 - (a_0/a_1) a_3 > 0$, тобто

Таблиця Рауса:

	1	2	3
1	a_0	a_2	a_4
2	a_1	a_3	a_5
3	C_{13}	C_{23}	C_{33}
4	C_{14}	C_{24}	C_{34}

- Система IV порядку: $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$.

Таблиця Рауса:

	1	2
1	a_0	a_2
2	a_1	a
3	C_{13}	C_{23}
4	C_{14}	0

Для стійкості необхідно, щоб

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0/a_1 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} = a_2 - (a_0/a_1)a_3 > 0$$

або $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

$$C_{14} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1/a_3 \\ a_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_{23} = \begin{vmatrix} a_4 & a_2/a_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_4,$$

тобто всі $a_i > 0, i = \overline{0, 4}; a_1 a_2 > a_0 a_3$;

$$C_{14} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1/C_{13} \\ a_4 & 1 \end{vmatrix} = a_3 - \left(a_1/a_2 - \frac{a_0}{a_1} \cdot a_3 \right) a_4 > 0,$$

тобто всі елементи І стовпчика таблиці a_0, a_1, C_{13}, C_{14} були більше нуля (або того ж значення, що і a_0 , якщо $a_0 < 0$). Отже, як бачимо, дякуючи методу Рауса, можна легко перевірити умову стійкості системи досить високого порядку, оскільки визначники C_{ki} мають II порядок і легко обчислюються.

8.2.2 Алгебраїчний критерій стійкості САК Гурвіца (1895 р.)

Для перевірки стійкості САК за критерієм Гурвіца також будеється визначник з коефіцієнтів характеристичного полінома:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Правила побудови визначника:

- на головній діагоналі визначника записують коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ в зростаючій послідовності, починаючи з a_1 і закінчуючи a_n ;
- непарні рядки доповнюються непарними коефіцієнтами в зростаючій послідовності зліва направо;
- парні рядки – аналогічно парними;
- місця відсутніх коефіцієнтів заповнюють нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Отже, для стійкості САК необхідно і достатньо, щоб визначник Гурвіца (Δ_n) і всі його мінори (виділені пунктиром) були більше нуля (або одного знаку з a_0):

$$a_0 > 0, \Delta_n > 0, \Delta_{n-1} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_0 > 0.$$

При цьому, як видно зі структури визначника,

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}.$$

Приклади:

- Система I порядку: $a_0 p + a_1 = 0$, $\Delta_1 = a_1$. Для стійкості достатньо, щоб $\text{sign} a_1 = \text{sign} a_0$;
- Система II порядку: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$. Для стійкості достатньо, щоб

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, достатньо, щоб усі коефіцієнти a_0, a_1, a_2 полінома були одного знаку.

- Система III порядку: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Для стійкості системи треба, щоб $a_0 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_1 > 0$, але $\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2$, оскільки $a_4 = 0$; тобто $a_3 > 0$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, $\Delta_1 = a_1 > 0$.

Тобто, для стійкості системи III порядку необхідно виконання двох умов:

- 1) всі коефіцієнти одного знаку;
- 2) добуток середніх коефіцієнтів a_1, a_2 більше добутку крайніх a_0, a_3 :

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

- Система IV порядку: $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$.

Для стійкості системи необхідно, щоб

$a_0 > 0$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, але $\Delta_4 = a_4 \cdot \Delta_3$, тому $a_4 > 0$.

$\Delta_1 = a_1 > 0$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0 \end{aligned}$$

або

$$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0,$$

Δ_2 – окремо перевіряти не треба, оскільки він входить $(a_1 a_2 - a_0 a_3)$ в Δ_3 . Тобто, для системи IV порядку для її стійкості необхідно, щоб всі коефіцієнти a_i , $i = \overline{0, 4}$ були більше нуля і щоб виконувалась нерівність $\Delta_3 > 0$.

Розглянемо замкнену САК (рис. 8.5).

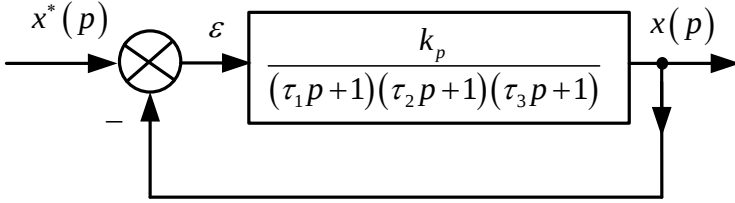


Рис. 8.5. Замкнена САК

Передаточна функція замкненої САК:

$$\frac{x(p)}{x^*(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = W_3(p) = \frac{k_p}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1) + k_p}.$$

Характеристичний поліном (знаменник $W_3(p)$):

$$(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)(\tau_3 p + 1) + k_p = \tau_1 \tau_2 \tau_3 p^3 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) p + (1 + k_p) = 0.$$

В термінах критерію Гурвіца :

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 = a_0; \quad \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3 = a_1; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = a_2; \quad 1 + k_p = a_3.$$

Отже, за Гурвіцом, маємо, що:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 = \\ = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0,$$

оскільки $a_3 > 0$, то $(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$,

тобто $(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3)(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - (\tau_1 \tau_2 \tau_3)(1 + k_p) > 0$.

Визначимо критичне значення $k_p^{\text{кр.}}$, за якого ця нерівність переходить в рівність, а система – на межу стійкості:

$$k_p^{\text{кр.}} = \frac{(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3)(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - \tau_1 \tau_2 \tau_3}{\tau_1 \tau_2 \tau_3} =$$

$$= \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - 1.$$

Нехай всі $\tau_i, i = \overline{1, 3}$, однакові:

$\tau_i = 1$, тоді $k_p^{\text{кр.}} = 8$;

$\tau_i = 10$, тоді $k_p^{\text{кр.}} = (3/10) \cdot 30 - 1 = 8$;

$\tau_i = 100$, тоді $k_p^{\text{кр.}} = (3/100) \cdot 300 - 1 = 8$.

Тобто за будь-яких, але однакових τ_i $k_p^{\text{кр.}} = 8$.

Тепер візьмемо $\tau_1 = 1, \tau_2 = 5, \tau_3 = 25$.

Тоді

$$k_p^{\text{кр.}} = \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) (1 + 5 + 25) - 1 = \frac{25 + 5 + 1}{25} \cdot 31 - 1 = 37,4.$$

Далі візьмемо $\tau_1 = 1, \tau_2 = 10, \tau_3 = 100$.

Тоді

$$\begin{aligned} k_p^{\text{кр.}} &= \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \right) (1 + 10 + 100) - 1 = \\ &= \frac{1 + 10 + 100}{100} \cdot 111 - 1 = 122,2. \end{aligned}$$

Висновок: незалежно від значення τ_i , якщо вони однакові, $k_p^{\text{кр.}} = 8$; якщо вони різняться в 5 разів, $k_p^{\text{кр.}} = 37,4$; якщо в 10 разів, $k_p^{\text{кр.}} = 122,2$. Тобто, для стійкості замкненої САК краще, якщо τ_i різні.

Структурно не стійка САК

Нехай розімкнена передаточна функція – це аперіодична ланка та два інтегратора (рис. 8.6).

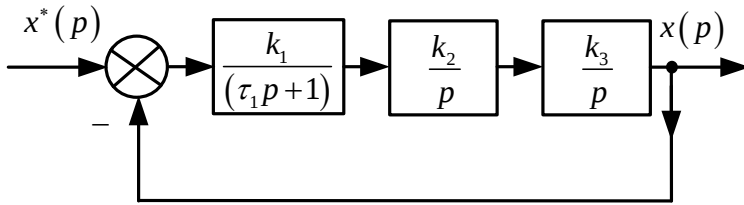


Рис. 8.6. Структурно не стійка САК

Розімкнена система:

$$W_p(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(\tau_1 p + 1) p^2},$$

Замкнена система:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}.$$

Взагалі, якщо $a_n = 0$, а $\Delta_{n-1} > 0$, то це відповідає межі аперіодичної стійкості САК; якщо $\Delta_{n-1} = 0$, то це межа коливальної стійкості.

$$W_3(p) = \frac{\frac{k_1 k_2 k_3}{(\tau_1 p + 1) p^2}}{1 + \frac{k_1 k_2 k_3}{(\tau_1 p + 1) p^2}} = \frac{k_1 k_2 k_3}{(\tau_1 p + 1) p^2 + k_1 k_2 k_3}.$$

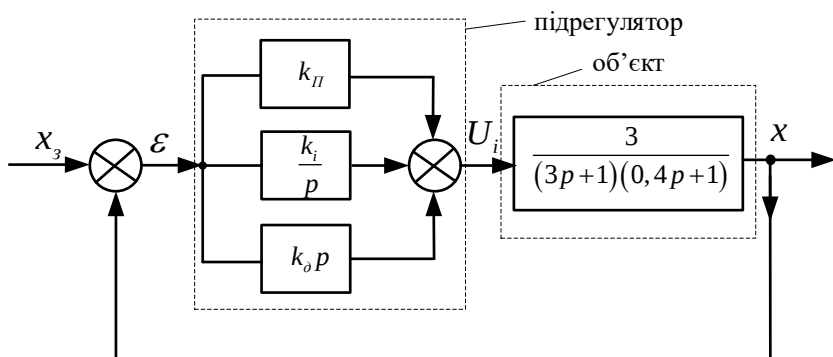
$$\text{Тут } a_3(p) = \tau_1 p^3 + p^2 + k_1 k_2 k_3 = a_0 p^3 + a_1 p^2 + 0 \cdot p + a_3$$

$$a_1 \cdot 0 - a_0 a_3 = -\tau_1 k_1 k_2 k_3 < 0$$

Система структурно не стійка за будь-яких τ_1 , $k_1 k_2 k_3$.

ТЕСТ

1. Перевірте на стійкість за критерієм Рауса і Гурвіца вашу систему $W(p)$ з ПІД-регулятором, охоплену одиничним зворотнім зв'язком (від'ємним і додатнім).



$$W_p = \frac{k_{\Pi}p + k_i + k_{\partial}p^2}{p} \cdot \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)}$$

$$W_3 = \frac{W_p}{1 + W_p} = \frac{3(k_{\Pi}p + k_i + k_{\partial}p^2)}{p(3p+1)(0,4p+1) + 3(k_{\Pi}p + k_i + k_{\partial}p^2)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} a_3(p) &= 1,2p^3 + (3,4p^2 + 3k_{\partial}p^2) + (1 + 3k_{\Pi})p + 3k_i = \\ &= a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0 \end{aligned}$$

$$a_0 = 1,2; a_1 = 3,4 + 3k_{\partial}; a_2 = 1 + 3k_{\Pi}; a_3 = 3k_i.$$

Таблиця Рауса

	1	2	3	3	3
1	a_0	a_2	0	0	0
2	a_1	a_3	0	0	0
3	C_{13}	C_{23}	C_{33}	C_{43}	C_{53}
4	C_{14}	C_{24}	C_{34}	C_{44}	C_{54}

$$a_0 = 1,2 > 0; a_1 = 3,4 + 3k_{\partial} > 0.$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & \frac{a_0}{a_1} \\ a_3 & 1 \end{vmatrix}, c_{14} = \begin{vmatrix} a_3 & \frac{a_1}{c_{13}} \\ a_{23} & 1 \end{vmatrix} = a_3, c_{23} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a_2}{a_3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{13} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 > 0,$$

$$c_{13} = (1 + 3k_n) - \frac{1,3}{3,4 + 3k_\partial} \cdot 3k_i > 0$$

$$c_{14} = 3k_i > 0$$

Щоб САК була стійкою, треба, щоб

$$(1 + 3k_n)(3,4 + 3k_\partial) - 3,9k_i > 0$$

$$3,4 + 3k_\partial + 10,2k_n + 9k_n k_\partial > 3,9k_i$$

Отже, маємо обмеження на k_i

$$3,9k_i < \frac{3,4 + 3k_\partial + 10,2k_n + 9k_n k_\partial}{3,9}.$$

Стійкість за Гурвіцом

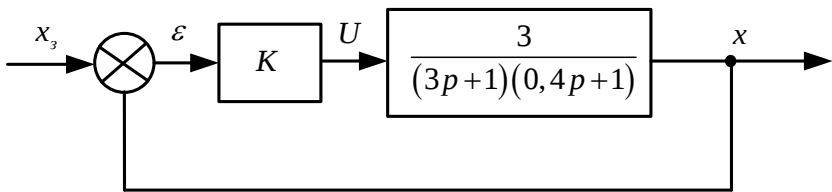
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$a_1 = 3,4 + 3k_\partial > 0,$$

$$a_3 = 3k_i > 0,$$

$a_1 a_2 - a_0 a_3 = (3,4 + 3k_\partial)(1 + 3k_n) - 1,3 \cdot 3k_i > 0$; та ж умова, що і в Рауса. Отже можна грамотно підібрати k_n, k_i, k_∂ .

2. Система з П-регулятором.



$$W_3 = \frac{W_p}{1 + W_p}, \quad x(p) = W_p(x_3 - x), \quad [1 + W_p]x = W_p x_3,$$

$$W_3 = \frac{\frac{3k}{(3p+1)(0,4p+1)}}{1 + \frac{3k}{(3p+1)(0,4p+1)}} = \frac{3k}{(3p+1)(0,4p+1) + 3k} = \frac{3k}{a_3(p)},$$

$$1,2p^2 + 3,4p + (1 + 3k) = a_3(p),$$

$$p^2 + 3p + 3k = 0,$$

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3k} = -2 \pm j3, \quad k > \frac{2}{3},$$

$$a_3(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Матриця Гурвіца

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

$a_n = 0, \Delta_{n-1} > 0$ - межа аперіодичної стійкості,

$a_n \neq 0, \Delta_{n-1} = 0$ - межа коливальної стійкості.

8.3 Частотні критерії стійкості

8.3.1 Критерій Михайлова

В критерії Михайлова використано властивості частотних характеристик замкненої САК.

Характеристичний поліном (знаменник передаточної функції) замкненої САК:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Якщо в цьому поліномі замість комплексної змінної p підставити уявну змінну $j\omega$:

$$a_3(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-i} j\omega + a_n = 0,$$

то, для конкретної частоти, це буде вектор (комплексне число) на комплексній площині;

для n – парного будуть дійсні складові $R_e\{a_3(j\omega)\}$, для непарних – уявні $J_m\{a_3(j\omega)\}$:

$$a_3(j\omega) = R_e(\omega) + jJ_m(\omega).$$

Якщо змінювати частоту ω від нуля до нескінченності, то кінець вектора $a_3(j\omega)$ буде описувати на комплексній площині криву, яку називають *годографом Михайлова*. За формою цього годографа можна визначити стійкість САК.

Два формулювання критерію:

Ствердження 1: Для стійкості лінеаризованої системи необхідно і достатньо, щоб вектор годографа $a_3(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до нескінченності обертався у напрямку проти годинникової стрілки на кут $\frac{\pi}{2} \cdot n$, де n – порядок диференційного рівняння САК. Початок годографа (для $\omega = 0$) лежить на додатній дійсній напіввісі.

Ствердження 2: Для стійкості лінеаризованої САК необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова $a_3(j\omega)$, обертаючись в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) при зміні частоти ω від 0 до нескінченності, послідовно проходив через n

квадрантів, де n – порядок диференційного рівняння САК. Початок траєкторії $a_3(j\omega)$ лежить на дійсній вісі.

Доведемо справедливність стверджень 1 і 2.

Поліном $a_3(p)$, за відомих коренів p_i , $i = \overline{1, n}$, можна подати (теорема Вієта) як добуток різниць $(p - p_i)$:

$$a_3(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

або

$$a_3(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

Кожен множник $(p - p_i)$, за умови, що $p = j\omega$ при зміні ω від 0 до ∞ , як комплексний вектор z , буде повертатися на відповідний кут, залежно від кореню p_i :

- 1) p_i – дійсний, від’ємний (рис. 8.7):

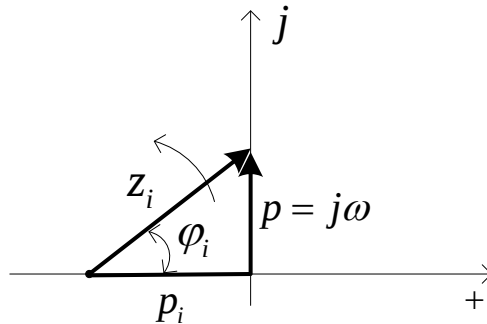


Рис. 8.7. Залежність $z_i(\omega)$

Як бачимо, якщо $0 \leq \omega \leq \infty$, кут φ_i змінюється від 0 до $\pi/2$.

- 2) p_i – дійсний, додатний (рис. 8.8):

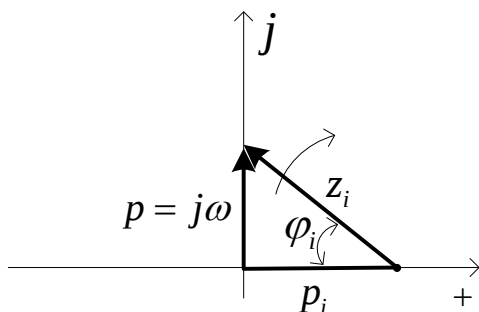


Рис. 8.8. Залежність $z_i(\omega)$

Як бачимо, якщо $0 \leq \omega \leq \infty$, кут $\varphi_i(\omega)$ змінюється від 0 до $-\pi/2$.

3) $p_{i,i+1}$ – комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною:

$$p_{i,i+1} = -\beta \pm j\alpha,$$

тоді

$$\begin{aligned} z_i &= p - p_i = p + \beta - j\alpha, \\ z_{i+1} &= p - p_{i+1} = p - \beta + j\alpha. \end{aligned}$$

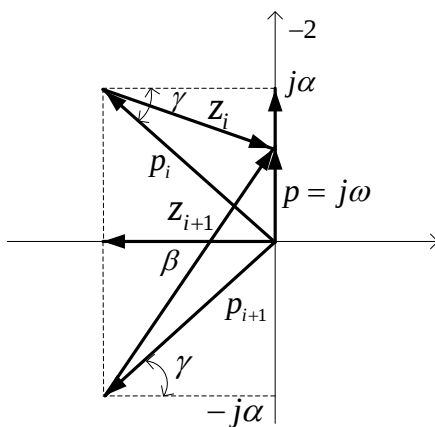


Рис. 8.9. Залежність $z_i(\omega)$

За умови, що ω змінюється від 0 до ∞ вектор z_{i+1} , повернеться в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) на кут $\pi/2 - \gamma$, вектор z_i – на кут $\pi/2 + \gamma$. Тоді вектор $z = z_i \cdot z_{i+1} = z_i \cdot z_{i+1} \times \times e^{j[(\pi/2)+(\pi/2-\gamma)]}$ повернеться на кут π . Тобто на кожний корінь приходить кут $\pi/2$.

- 3) p_i, p_{i+1} – комплексно спряжені корені з додатною дійсною складовою α : $p_i, p_{i+1} = \beta \pm j\alpha$ (рис. 8.10):

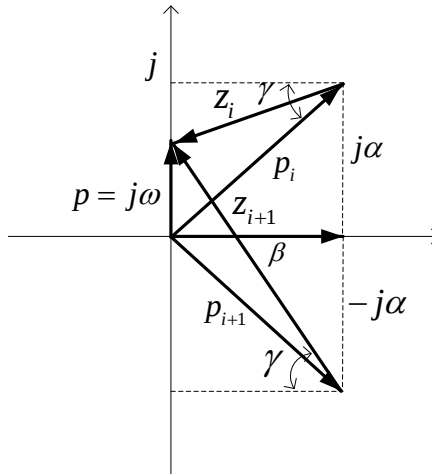


Рис. 8.10. Залежність $z_i(\omega)$

За умови, що ω змінюється від 0 до ∞ , вектор z_i повернеться на кут $\pi/2 - \gamma$ проти годинникової стрілки, вектор z_{i+1} – на кут $\pi/2 + \gamma$. Разом добуток векторів $z_i \cdot z_{i+1}$ повернеться на кут $-\pi$ (проти годинникової стрілки).

Отже, якщо САК не стійка порядок диференційного рівняння n , а характеристичний поліном має l коренів справа від осі j , $n-l$ – зліва, то загальний кут обертання $a_3(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ складе $\pi/2(n-l) - \pi/2 \cdot l = \pi/2 \cdot n - \pi \cdot l$. Отже, щоб САК була стійкою, необхідно і достатньо, щоб

$$\boxed{\arg a_3(j\omega) = \pi/2 \cdot n,}$$

що вимагалось довести.

Приклади:

1) $n = 1$, $a_3(p) = a_0 p + a_1$; $p = j\omega$; $a_3(j\omega) = ja_0\omega + a_1$.

Годографи для $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ стійкої САК і $a_0 > 0$, $a_1 < 0$ – не стійкої (рис. 8.11, а, б).

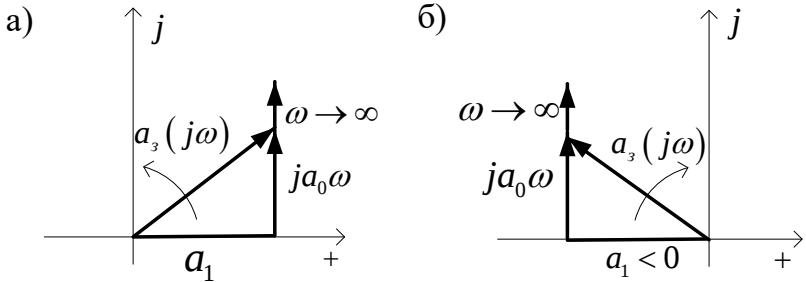


Рис. 8.11. Залежність $z_i(\omega)$

2) $n = 2$, $a_3(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$; $p = j\omega$; $a_3(j\omega) = (a_2 - a_0\omega^2) + ja_1\omega$, якщо $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, то система стійка. Годограф $a_3(j\omega)$ послідовно проходить проти годинникової стрілки, при зміні від 0 до ∞ , два квадранти (рис. 8.12, а). Якщо система не стійка, наприклад, $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, то (рис. 8.12, б) годограф $a_3(j\omega) = (a_2 - a_0\omega^2) + ja_1\omega$ буде проходити два квадранта в протилежному (від'ємному) напрямку.

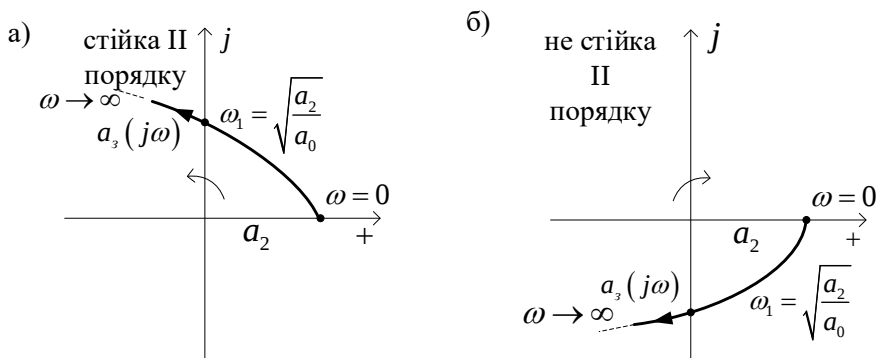


Рис. 8.12. Залежність $a_3(\omega)$

3) Якщо система стійка, наприклад, $n = 3$, $a_3(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3$; $p = j\omega$; $a_3(j\omega) = (a_3 - \omega^2a_1) + j\omega(a_2 - \omega^2a_0)$. Якщо система стійка (це, за Гурвіцом, $(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$, $a_i > 0$, то годограф $a_3(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ послідовно пройде три квадранти (рис. 8.13, а).

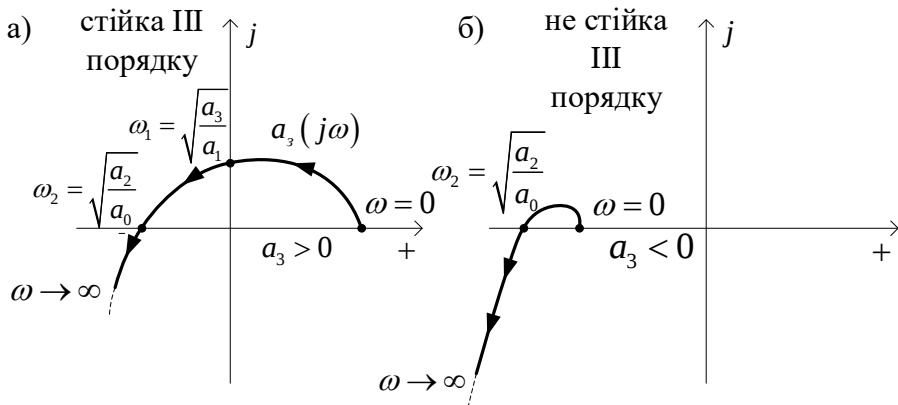


Рис. 8.13. Залежність $a_3(\omega)$

Для не стійкої системи, наприклад, якщо $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ (рис. 8.13, б) годограф пройде всього два квадранти при зміні ω від 0 до ∞ .

Для стійкої системи n -го порядку з додатними коефіцієнтами $a_n > 0$, годограф починається на дійсній осі на відстані a_n і послідовно проходить n -квadrantів (рис. 8.14).

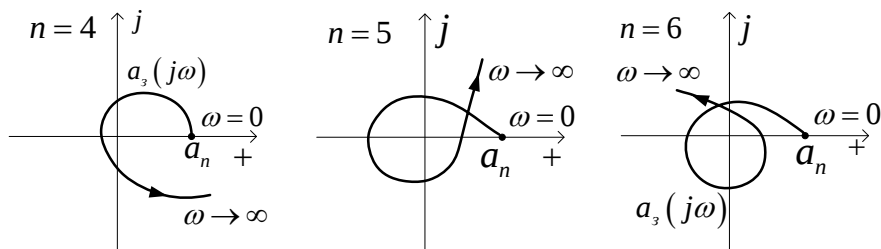


Рис. 8.14 Стійкі IV, V, VI порядку

Для виявлення нестійкості САК достатньо, щоб порушилося число квадрантів або послідовність їх проходження (рис. 8.15), а також, якщо годограф $a_3(j\omega)$ починається на дійсній півосі $a_3(0) < 0$ (рис. 8.13, б).

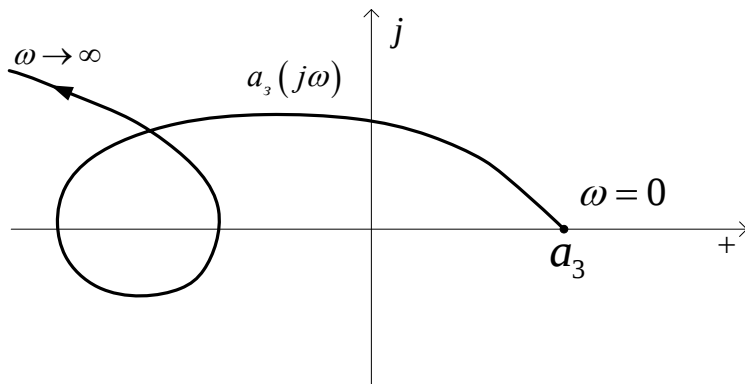


Рис. 8.15. Не стійка САК

Якщо лінеаризована система знаходиться на грані аперіодичної стійкості, тобто один з коренів $p_k = 0$ (або $a_n = 0$), то за $\omega = 0$ $a_3(j\omega)$ починається з нуля і, якщо мала деформація годографа приводить систему до стійкості, то така система вважається стійкою.

Наприклад, $a_3(p) = a_0 p^2 + a_1 p = 0$, де $p_1 = 0$, $p_2 = -(a_1/a_0)$, то, добавивши як завгодно маленьку $a_2 > 0$, годограф (рис. 8.16, а) переходить в годограф стійкої системи (рис. 8.16, б).

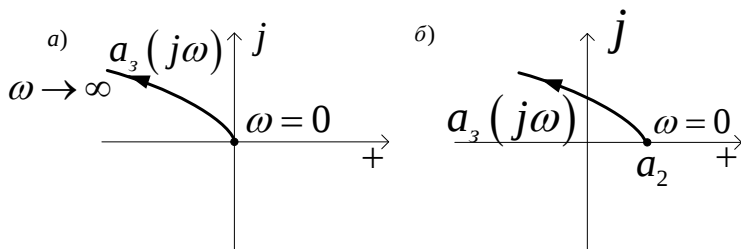


Рис. 8.16. Залежність $a_3(\omega)$

З іншого боку, якщо система не стійка, наприклад, $a_3(p) = a_0 p^2 - a_1 p$, де $p_1 = 0$, $p_2 = a_1/a_0$, то, добавивши $a_2 \geq 0$ систему не зробиш стійкою (рис. 8.17):

$$a_3(j\omega) = (a_2 - \omega^2 a_0) - j\omega a_1.$$

Якщо лінеаризована система знаходиться на грані коливальної стійкості, тобто має два уявних кореня $p_i, i+1 = \pm j\omega_1$ то, оминаючи їх зліва (рис. 8.17, а) нескінченно малими напівокружностями, створюємо умови, завдяки яким кожен корінь буде давати кут оберту $a_3(j\omega)$ рівний $\pi/2$.

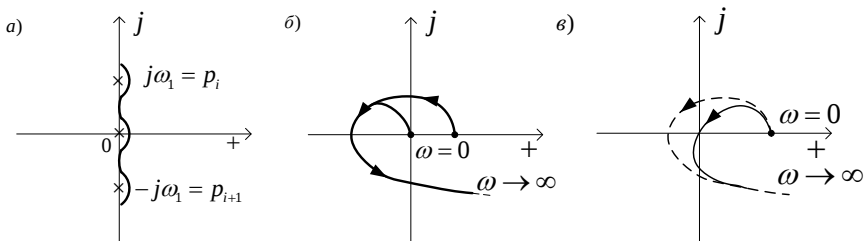


Рис. 8.17. Стійка САК

Так, системи четвертого порядку ($n = 4$) будуть стійкими за малої варіації нульового (рис. 8.17, б) чи уявних (рис. 8.17, в) коренів. В той час, як система (рис. 8.18) за малих деформацій не буде стійкою: вона послідовно проходить 6 квадрантів але за часовою стрілкою, а не проти, як стійка.

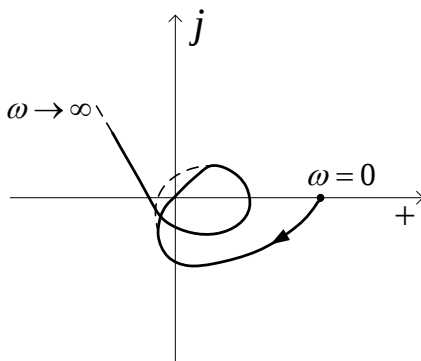


Рис. 8.18. Не стійка САК

8.3.2 Наслідок критерію Михайлова

Подамо годограф $a_3(j\omega)$ в алгебраїчній формі:

$$a_3(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

де, для системи n -го порядку:

$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots,$$

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots.$$

Якщо система стійка (рис. 8.19), то корені $U(\omega)$ і $V(\omega)$ зі зростанням ω будуть чередуватися (рис. 8.20).

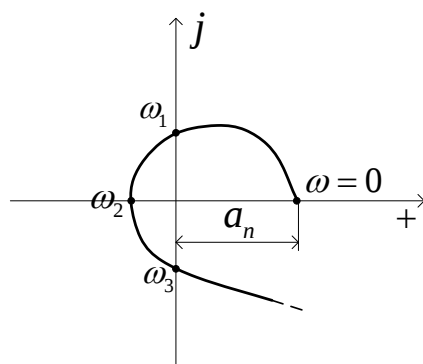


Рис. 8.19. Залежність $a_3(\omega)$

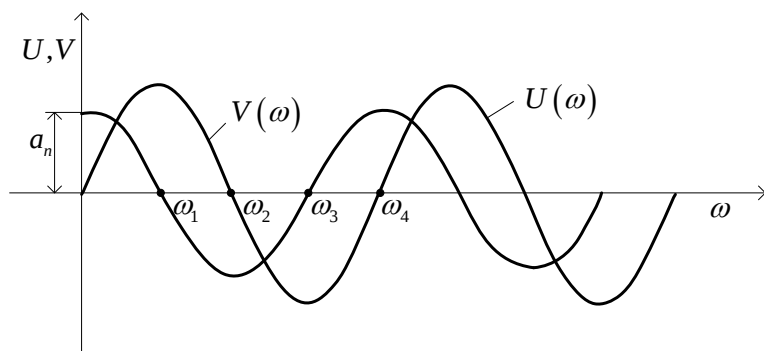


Рис. 8.20. Стійка САК

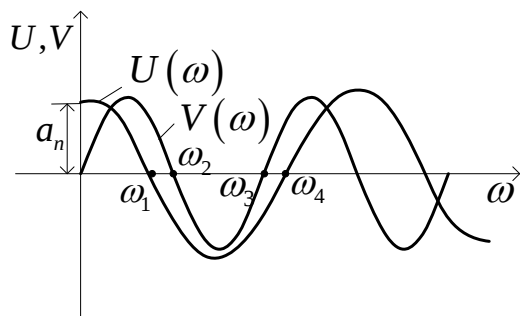


Рис. 8.21. Не стійка САК

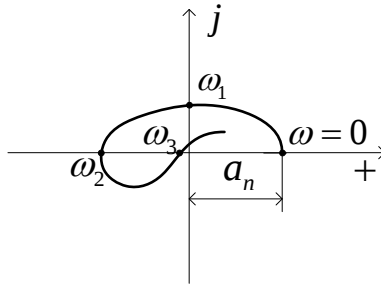


Рис.22 Нестійка САК

Якщо не стійка (рис. 8.21, 8.22) послідовність чередування порушується:

Приклад стійкої системи

$$a_3(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + p + 1 = 0,$$

або $a_3(j\omega) = \omega^4 - j2\omega^3 + j\omega + 1 - 3\omega^2$

$$U(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0; \quad \omega_{1,2} = \pm 1,6; \quad \omega_{3,4} = \pm 0,65;$$

$$V(\omega) = \omega - 2\omega^3 = 0; \quad \omega_5 = 0; \quad \omega_{6,7} = \pm 0,71$$

Беручи $\omega_i > 0$, отримаємо послідовність, де чередуються корені $U(\omega)$ і $V(\omega)$:

P_V	0		0,71	
P_U		0,65		1,6

Отже, система стійка.

Приклад не стійкої системи

$$a_3(p) = p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 1 = 0, \quad p = j\omega,$$

$$a_3(j\omega) = \omega^4 - 3j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + 1 = 0,$$

або

$U(\omega) = \omega^4 - 2\omega^2 + 1 = 0$	$\omega_{1,2,3,4} = \pm 1$
$V(\omega) = \omega(1 - 3\omega^2) = 0$ $-3\omega_1^2 = 0$	$\omega_5 = 0; \omega_{6,7} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Послідовність для $\omega_i > 0$:

p_V	0	$1/\sqrt{3}$	
p_U			1

Система не стійка.

Отже, для стійкості САК необхідно і достатньо, щоб корені дійсної і уявної частини годографа $a_3(j\omega)$ Михайлова при зростанні ω чередувалися.

Недоліком критерію Михайлова є необхідність мати рівняння динаміки замкненої САК.

ТЕСТ

1. Оцініть стійкість Вашої САК з ПІ-регулятором за критерієм Михайлова і його наслідком.

Тест на критерій Михайлова

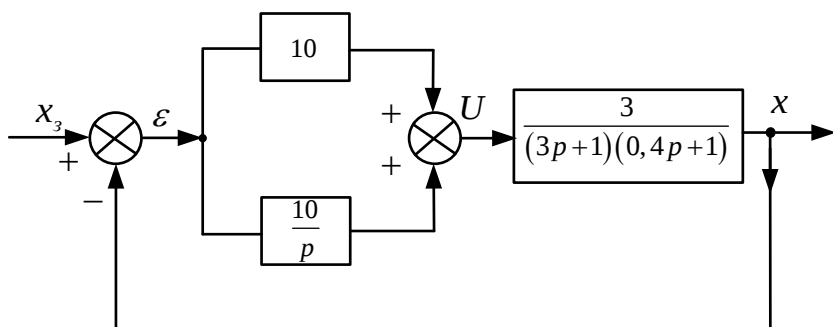
$$W_p = \left(10 + \frac{10}{p}\right) \cdot \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)} = \frac{(10p+10)3}{p(3p+1)(0,4p+1)};$$

$$W_3 = \frac{W_p}{1 + W_p} = \frac{\frac{(10p + 10)3}{p(3p + 1)(0,4p + 1)}}{1 + \frac{(10p + 10)3}{p(3p + 1)(0,4p + 1)}} =$$

$$= \frac{(10p + 10)3}{p(3p + 1)(0,4p + 1) + (10p + 10)3};$$

$$a_3(p) = 1,2p^3 + 3,4p^2 + 31p + 30 = 0,$$

$$a_3(j\omega) = -j1,2\omega^3 - 3,4\omega^2 + j31\omega + 30 = 0.$$



		к о п е н і		ω_2	ω_1	ω_3	$\rightarrow \omega$
$U(\omega)$	$30 - 3,4\omega^2$		$U = 0$		2,97		
$V(\omega)$	$-1,2\omega^3 + 31\omega$		$V = 0$	0		5,08	

$$\omega^2 = \frac{30}{3,4}; \omega_1 \cong 2,97; \omega(31 - 1,2\omega^2);$$

$$\omega_2 = 0; \omega_3 = \sqrt{\frac{31}{1,2}} = 5,08.$$

Система стійка.

8.4 Частотний критерій Найквіста

На відміну від критерію Михайлова, для аналізу стійкості замкненої САК за критерієм Найквіста достатньо мати амплітудо-фазо-частотну характеристику (АФЧХ) розімкненої частини САК, яку можна отримати експериментально (якщо об'єкт стійкий).

Умова, за якої корені p_i замкненої САК були лівими (тобто дійсна їх частина повинна бути менше нуля), накладає відповідні обмеження на розташування годографу $W_p(j\omega)$ розімкненої частини на комплексній площині. Передаточна функція $W_3(p)$ замкненої САК з одиничним зворотнім зв'язком визначається через передаточну функцію $W_p(p)$ розімкненої частини САК, згідно до рис. 8.23:

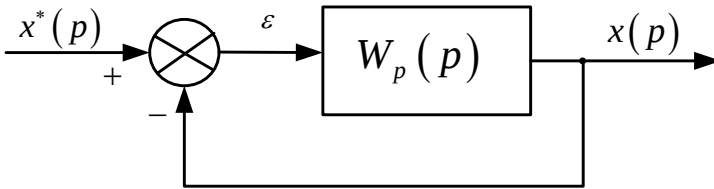


Рис. 8.23. Замкнена САК

$$x(p) = W_p(p)[x^*(p) - x(p)],$$

звідки

$$\frac{x(p)}{x^*(p)} = W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{Q(p)}{Q(p) + R(p)}.$$

якщо

$$W_p(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

де

$R(p) + Q(p) = a_3(p)$ – характеристичне рівняння замкненої САК,
 $Q(p)$ – розімкненої САК.

Найквістом було запропоновано вираз, який легко побудувати за даними експерименту з розімкненої частини САК, але який враховує обидва характеристичних полінома, замкненої і розімкненої САК:

$$1 + W_p(p) = \frac{R(p) + Q(p)}{Q(p)}, W_p = \frac{R}{Q}.$$

Покладемо $p = j\omega$ і розглянемо кут обертання вектора $1 + W_p(j\omega)$ на комплексній площині, якщо частота ω змінюється від 0 до ∞ :

$$\varphi(\omega) = \arg[1 + W_p(j\omega)].$$

Залежно від того стійка САК чи ні, кут $\varphi(\omega)$ для $\omega = \infty$ буде різним. За теоремою Вієта чисельних $R(p) + Q(p)$ і знаменник $Q(p)$, які мають однаковий порядок n , можна подати так:

- чисельник: $(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$,
- знаменник: $(p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_n)$.

Тобто, для $p = j\omega$:

$$1 + W_p(j\omega) = \frac{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{(j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2) \dots (j\omega - p'_n)}.$$

Кожен множник, як чисельника, так і знаменника, залежно від того, від'ємна чи додатна дійсна складова кореня p_i чи p'_i , як було показано при виведенні критерію Михайлова при зміні частоти від 0 до ∞ , обертається на кут $\varphi_i(\infty) = \pm(\pi/2)$.

Отже можливі наступні варіанти:

1) Усі корені чисельника і знаменника ліві (тобто, дійсна частина від'ємна):

$$\varphi_1(\omega) = \arg(Q(j\omega) + R(j\omega)) = \frac{\pi}{2} \cdot n,$$

$$\varphi_2(\omega) = \arg Q(j\omega) = \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

Загальний кут

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega = \infty} = \frac{\pi}{2} \cdot n - \frac{\pi}{2} \cdot n = 0,$$

дійсно

$$1 + W_p(j\omega) = \frac{|Q(j\omega) + R(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_1(\omega)}}{|Q(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_2(\omega)}} =$$

$$= \frac{|Q(j\omega) + R(j\omega)|}{|Q(j\omega)|} \cdot e^{j(\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega))},$$

тобто, при зміні від 0 до ∞ , $\varphi(\omega) = (\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega))$.

Отже, якщо стійка розімкнена і замкнена САК, то

$$\varphi(\omega) = \arg[1 + W_p(j\omega)] \equiv 0$$

при зміні частоти від 0 до ∞ .

2) Всі корені чисельника $Q(j\omega) + R(j\omega)$ ліві (замкнена САК стійка), а k – коренів знаменника $Q(p)$ – праві, $(n - k)$ – ліві (розімкнена САК не стійка). Тоді, при зміні ω від 0 до ∞ ,

$$\varphi_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \cdot n,$$

$$\varphi_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \cdot (n - k) - \frac{\pi}{2} \cdot k,$$

загальний кут

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega = \infty} = \frac{\pi}{2} \cdot n - \frac{\pi}{2} \cdot (n - k) + \frac{\pi}{2} \cdot k = \pi \cdot k.$$

Отже, якщо розімкнена САК має k коренів з додатною дійсною складовою (або просто додатних дійсних коренів), то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб при зміні ω від 0 до ∞ годограф $1 + W_p(j\omega)$ повернувся на кут πk проти годинникової стрілки.

3) Розімкнена і замкнена САК не стійкі (розімкнена має k , замкнена l коренів з додатною дійсною складовою). Тоді

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega = \infty} = \left[\frac{\pi}{2} \cdot (n - l) - \frac{\pi}{2} \cdot l \right] - \left[\frac{\pi}{2} \cdot (n - k) - \frac{\pi}{2} \cdot k \right] = \pi(k - l),$$

$k \neq l$.

4) Розімкнена стійка, замкнена не стійка: (l -правих коренів)

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega = \infty} = \left[\frac{\pi}{2} \cdot (n - l) - \frac{\pi}{2} \cdot l \right] - \frac{\pi}{2} n = -\pi l.$$

Отже, виходячи із залежності $\varphi(\omega)$ від зміни ω від 0 до ∞ , сформулюємо правило перевірки стійкості САК за Найквістом:

1) Система стійка в розімкненому стані. Щоб замкнена САК була стійкою необхідно і достатньо, щоб кут $\varphi(\omega)$ вектора $1 + W_p(j\omega)$ (при зміні ω від 0 до ∞) дорівнював нулю.

Оскільки будь-який вектор визначається довжиною $M(\omega)$ і кутом обертання $\varphi(\omega)$, то, не змінюючи його показників, ми маємо право (для кращої наочності графіка) перемістити його на площині $(+, j)$ вліво на 2 одиниці (рис. 8.24).

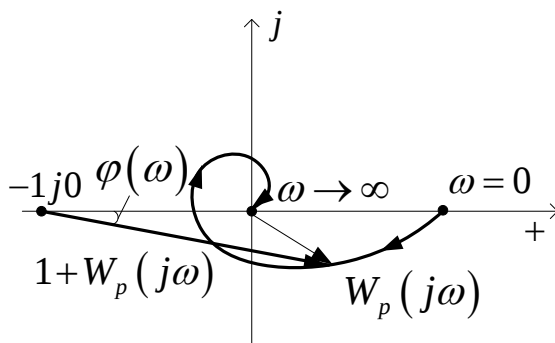


Рис. 8.24. Годограф Найквіста

Інакше кажучи, як видно з рис. 8.24, необхідно, щоб її АФЧХ $W_p(j\omega)$ не охоплювала точку $(-1, j0)$ на комплексній площині.

Дійсно, якщо $W_p(j\omega)$ буде охоплювати точку (рис. 8.25), то кут $\varphi(\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ буде дорівнювати 2π , а не 0. Окрім того, на частоті ω_0 кут $\varphi(\omega_0)$ обертання $W_p(j\omega)$ складе $-\pi$ при $M_p(\omega) > 1$.

Це створює в розімкненій системі позитивний зворотній зв'язок на частоті ω_0 з коефіцієнтом підсилення більше 1, що робить розімкнену САК не стійкою (дивись розділ 7.6 впливу зворотного зв'язку на динаміку динамічної ланки).

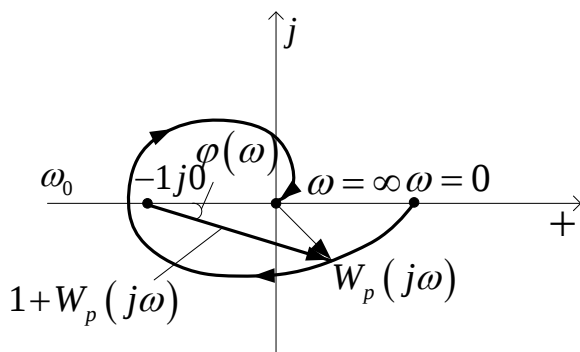


Рис. 8.25. Розімкнена стійка, замкнена не стійка

Якщо $M_p(\omega_0) = 1$ (рис. 8.26), то $W_p(j\omega)$ буде на межі стійкості.

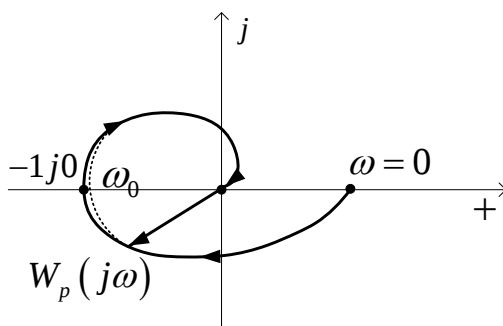


Рис. 8.26. Залежність $W_p(j\omega)$

Для визначення стійкості замкненої системи необхідно точку $(-1, j0)$ обійти справа по окружності нескінченно малого радіусу (пунктир на рис. 8.26). При цьому кут $\varphi(\omega)$ вектора $1 + W_p(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ буде нульовим. Тобто замкнена САК буде стійкою.

Отже, якщо $W_p(p)$ має нульові або спряжені уявні корені, то для перевірки стійкості $W_3(p)$ за критерієм Найквіста, ці корені слід обходити справа за окружністю нескінченно малого радіусу (рис. 8.27).

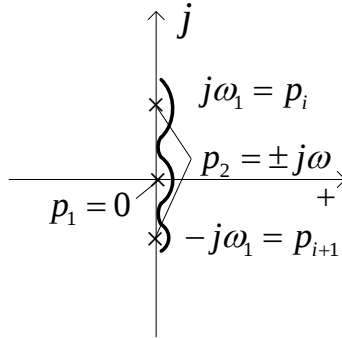


Рис. 8.27. Умова стійкості

Наприклад, нехай

$$W_p(p) = \frac{0,5}{p(p+1)},$$

тоді

$$W_p(j\omega) = \frac{0,5}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{0,5}{\omega\sqrt{(1+\omega^2)^2}} \cdot e^{-j(\pi/2)-\arctg\omega}.$$

Побудуємо вектор-функцію від ω критерію Найквіста $1 + W_p(j\omega)$, зсунутого вліво на 2 одиниці.

Визначимо корені $W_3(p)$:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{0,5}{p^2 + p + 1},$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Як бачимо, дійсна частина коренів від'ємна, значить $W_3(p)$ стійка. Отже, якщо корінь p_1 розімкненої системи $W_p(p)$ нульовий, то обходячи його справа нескінченно малим радіусом $r \rightarrow 0$, але $r > 0$, отримаємо:

$$W_p(p) = \frac{0,5}{(p+r)(p+1)}$$

або

$$W_p(j\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{(\omega^2 + r^2)(\omega^2 + 1)}} \cdot e^{-j(\arctg(\omega/r) + \arctg\omega)}.$$

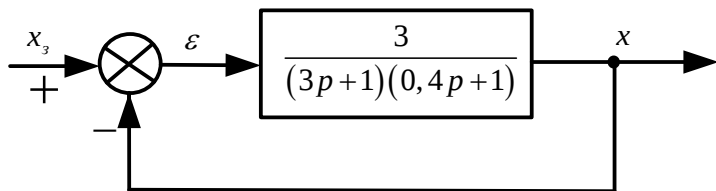
Тобто $W_p(0) = 0,5/r$, де $r \rightarrow 0$, $k_p \rightarrow \infty$. Тоді годограф Михайлова $1 + W_p(j\omega)$ буде починатися (для $\omega = 0$) на дійсній напів-осі і $\varphi(\omega = 0) = 0$ і закінчуватись (для $\omega \rightarrow \infty$) теж з $\varphi(\omega \rightarrow \infty) = 0$.

Сумарний кут оберту дорівнює нулю: $W_3(p)$ – стійка.

ТЕСТ

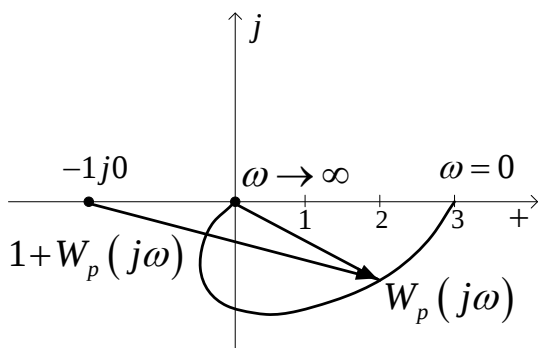
- Оцініть стійкість Вашої САК за критерієм Найквіста.

Тест 1.



$$W_p(j\omega) = \frac{3}{(3j\omega + 1)(0,4j\omega + 1)},$$

$$1 + W_p(j\omega) = \frac{(3j\omega + 1)(0,4j\omega + 1) + 3}{(3j\omega + 1)(0,4j\omega + 1)},$$



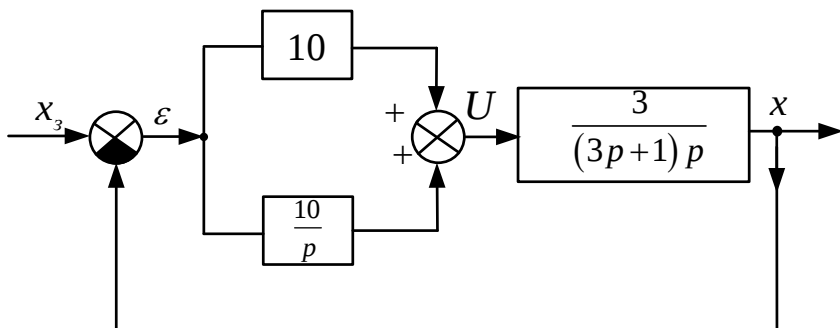
$$W_p(j\omega) = \frac{3e^{-j(\arg \operatorname{tg} 3\omega + \arg \operatorname{tg} 0,4\omega)}}{(9\omega^2 + 1)(0,16\omega^2 + 1)}$$

або через U, V :

$$W_p(j\omega) = \frac{3(1 - j3\omega)(1 - j0,16\omega)}{(9\omega^2 + 1)(0,16\omega^2 + 1)} = \frac{3 - 0,48\omega^2}{(9\omega^2 + 1)(0,16\omega^2 + 1)} - \frac{j9\omega + 0,48\omega}{(9\omega^2 + 1)(0,16\omega^2 + 1)} = U(\omega) - jV(\omega),$$

$$\sum \varphi = 0.$$

Тест 2.



Дослідити за критерієм Найквіста.

$$W_p = \left(10 + \frac{10}{p}\right) \frac{3}{(3p+1)p} = \frac{(10p+10)p}{p^2(3p+1)};$$

$$W_p(j\omega) = \frac{30 + 30j\omega}{(-\omega^2)(j3\omega + 1)} = \frac{30(j\omega + 1)}{(-\omega^2)(j3\omega + 1)};$$

$$1 + W_p(j\omega) = \frac{-(\omega^2)(j3\omega + 1) + 30(j\omega + 1)}{(-\omega^2)(j3\omega + 1)};$$

$$\varphi_1 = \arg t g \frac{30\omega - 3\omega^3}{30 - \omega^2};$$

$$\varphi_2 = \arg t g \frac{(-3\omega^3)}{(-\omega^2)} = \arg t g 3\omega;$$

$$\varphi_1(\infty) \cong \arg t g 3\omega;$$

$$\varphi = \varphi_1(\infty) - \varphi_2(\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Замкнена система стійка.

2. Система не стійка в розімкненому стані (має k правих коренів).

Критерій Найквіста: якщо САК не стійка в розімкненому стані і характеристичний поліном розімкненої системи має k коренів з додатною дійсною складовою (або просто дійсні додатні), то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб вектор $1 + W_p(j\omega)$, при зростанні частоти ω від 0 до ∞ , повернувся на кут $k\pi$ (або $2\pi \cdot k/2$). Це означає, що $W_p(j\omega)$ повинен охоплювати точку $(-1, j0)$.

Інакше кажучи, якщо САК не стійка в розімкненому стані і характеристичне рівняння розімкненої САК має k правих коренів, то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої САК, при зростанні частоти ω від 0 до ∞ , охоплювала точку $(-1, j0)$ $k/2$ разів. Тобто, тут, щоб визначати стійкість, треба апріорі знати кількість k правих коренів.

Як наслідок критерію Найквіста можна сформулювати наступні *правила переходу годографа $W_p(j\omega)$ через дійсну вісь*. Візьмемо перехід знизу – уверх зі знаком «мінус», зверху – униз _ зі знаком «плюс». Переходи розглядаються на відрізках дійсної осі від -1 до $-\infty$.

Приклад 1. $k = 2$, замкнена САК стійка, розімкнена – ні.

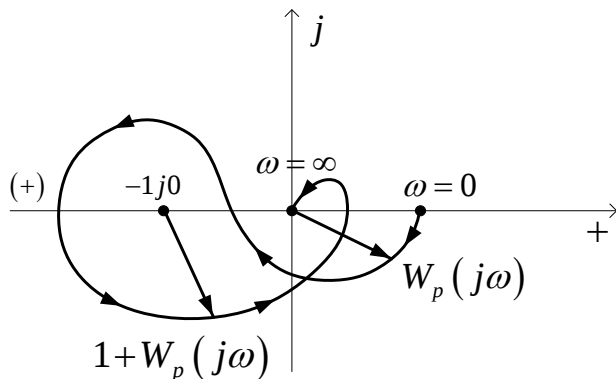


Рис. 8.29. Залежність $W_p(j\omega)$

$\varphi(\omega) = \arg(1 + W_p(j\omega))$ при зростанні ω від 0 до ∞ складе $-\pi$, що за критерієм Найквіста говорить про стійкість замкненої САК. Число переходів тут $k/2 = 1$. Таким чином, якщо розімкнена САК не стійка і має k правих коренів, то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб різниця додатних і від'ємних переходів $W_p(j\omega)$ на ділянці дійсної вісі від $(-1, j0)$ до $(-\infty, j0)$ дорівнювала $k/2$.

Р.С. На жаль, якщо $W_p(j\omega)$ не стійка, то визначити її експериментально не можливо.

Якщо $W_p(j\omega)$ починається (для $\omega = 0$) на ділянці від $(-1, j0)$ до $(-\infty, j0)$ (рис. 8.30), то $k = 1$, а число переходів дорівнює $1/2$ і $W_3(p)$ буде стійкою.

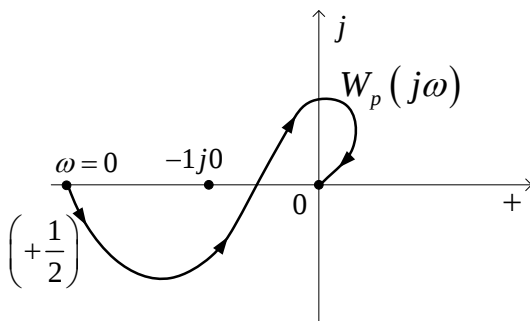


Рис. 8.30. Залежність $W_p(j\omega)$

Якщо САК стійка в розімкненому стані, то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб різниця числа додатних і від'ємних переходів $W_p(j\omega)$ на ділянці дійсної осі від (-1) до $(-\infty)$ дорівнювала нулю.

Наприклад (рис. 8.31). Тут маємо один $(-)$ перехід і один $(+)$ перехід. Їх сума дорівнює нулю.

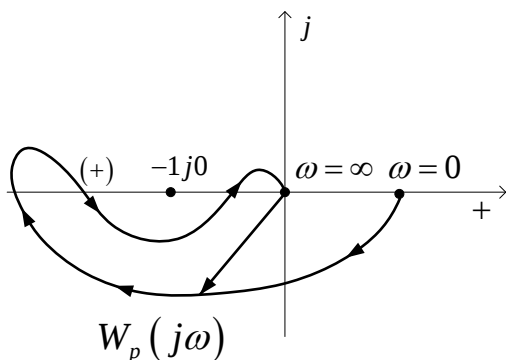


Рис. 8.31. Залежність $W_p(j\omega)$

Якщо $W_p(j\omega)$ проходить близько до точки $(-2, j0)$, то не велика варіація параметрів $W_p(j\omega)$, наприклад, статичного коефіцієнта k_p , може змінити стійкість на не стійкість і навпаки.

8.5 Дослідження стійкості за зворотною АФЧХ САК

Якщо звичайна АФЧХ розімкненої частини САК це

$$W_p(j\omega) = M_p(\omega) \cdot e^{j\varphi_p(\omega)},$$

то, відповідно до неї, зворотна АФЧХ буде

$$W_p^{-1}(j\omega) = M_p^{-1}(\omega) \cdot e^{-j\varphi_p(\omega)}.$$

Інколи за зворотною АФЧХ може бути зручніше дослідити стійкість замкненої САК.

Так, якщо

$$W_p(j\omega) = \frac{k_p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

то

$$W_p^{-1}(p) = k_p^{-1}(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n).$$

На рис. 8.32, а, б для наочності подані пряма (а) і зворотна (б) АФЧХ стійкої ланки IV порядку. АФЧХ не охоплює точку $(-1, j0)$, а там,

де виходить за коло одиничного радіусу (точка 4), аргумент $W_p(j\omega)$, тобто $\varphi(\omega_4)$ менше критичного ($\varphi(\omega_4) \approx 70^\circ$), критичний (180°).

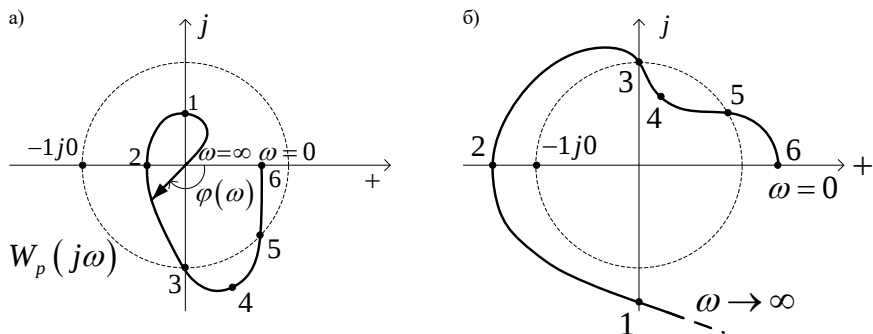


Рис. 8.32. Залежності: а) $W_p(j\omega)$; б) $W_p^{-1}(j\omega)$

Критерій: Якщо САК стійка в розімкненому стані, то для її стійкості в замкненому стані необхідно і достатньо, щоб зворотна АФЧХ розімкненої САК $W_p^{-1}(j\omega)$, під час змінювання частоти ω від 0 до ∞ , охоплювала точку $(-1, j\omega)$. Або, щоб різниця числа додатних і від'ємних переходів $W_p^{-1}(j\omega)$ на відрізку дійсної осі від 0 до (-1) під час змінювання ω від 0 до ∞ дорівнювала нулю.

Відповідно, якщо САК в розімкненому стані не стійка (рис. 8.33, а, б), то для стійкості замкненої САК необхідно і достатньо, щоб різниця числа додатних і від'ємних переходів $W_p^{-1}(j\omega)$ на відрізку дійсної осі від 0 до (-1) під час змінювання ω від 0 до ∞ дорівнювала $k/2$, де k – число правих коренів характеристичного полінома розімкненої САК.

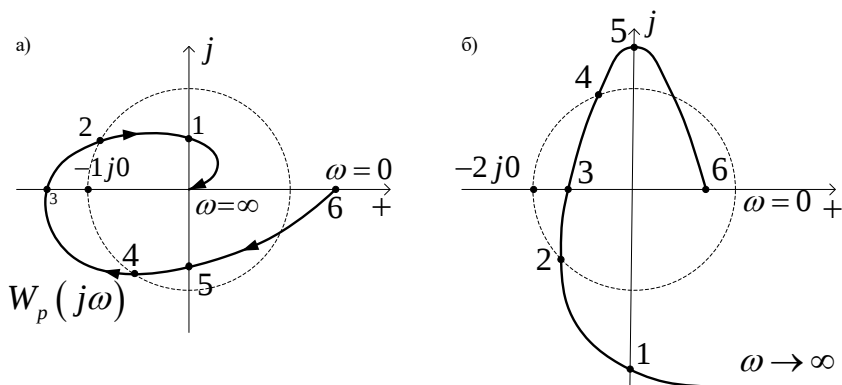


Рис. 8.33. Залежності: а) $W_p(j\omega)$; б) $W_p^{-1}(j\omega)$

8.6 Визначення стійкості САК за амплітудо-частотною (АЧХ) і фазочастотною (ФЧХ) характеристиками розімкненої частини САК

Стійка САК в розімкненому стані, наприклад, III порядку, має наступні графіки АФЧХ, АЧХ і ФЧХ (рис. 8.34 (а, б, в)).

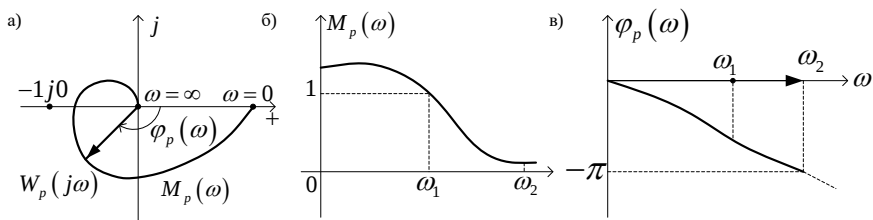


Рис. 8.34. Частотні характеристики

САК не стійка, якщо при зсуві $\varphi_p(\omega_1)$, що дорівнює $-\pi$, $M(\omega)$ буде більше одиниці. За такої ситуації від'ємний зворотний зв'язок

замкненої САК переходить на частоті ω_1 в додатній і динаміка САК стає не стійкою.

САК стійка, якщо $M(\omega_1) < 1$ або САК буде на межі стійкості, якщо $M(\omega_1) = 1$.

Отже, за графіком $W_p(j\omega)$, $M_p(\omega)$ і $\varphi_p(\omega)$ або тільки $M_p(\omega)$ і $\varphi_p(\omega)$ можна однозначно визначати стан системи. Так, якщо ω_2 більше ω_1 (рис. 8.34, б, в), то система стійка, якщо менше – не стійка, якщо $\omega_1 = \omega_2$, – на межі стійкості.

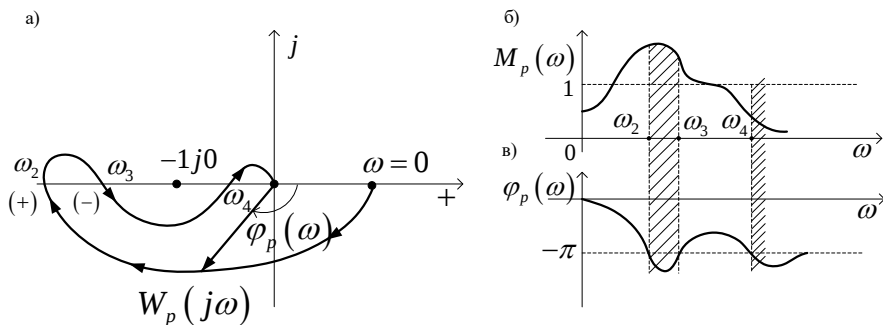


Рис. 8.35. Стійка САК

Якщо $W_p(j\omega)$ не охоплює точку $(-1, j0)$, але має значення $M(\omega) > 1$ для декількох частот ω_i , за яких $\varphi_p(\omega_i) = -\pi$, ($i = 2, 3, 4$), то для аналізу стійкості замкненої САК необхідно обчислювати число переходів $\varphi_p(\omega)$ в діапазоні частот ω_i від 0 до ω_1 (за якої $M_p(\omega) = 1$) (рис. 8.35, а, б, в).

Маємо один (+), один (-) переходи на частотах ω_2 і ω_3 в діапазоні, де $M(\omega) > 1$, тобто за точкою $(-1, j0)$. Замкнена САК буде стійкою.

8.7. Визначення стійкості за діаграмою Бode

Якщо побудувати $M_p(\omega)$ в логарифмічному масштабі, як $L_p(\omega)$, де $L_p(\omega) = 20\lg M(\omega)$, за співвідношенням $\lg \omega_1$ і $\lg \omega_2$ та значенням $L(\omega_1)$ і $L(\omega_2)$ можна визначати стійкість замкненої САК (рис. 8.36).

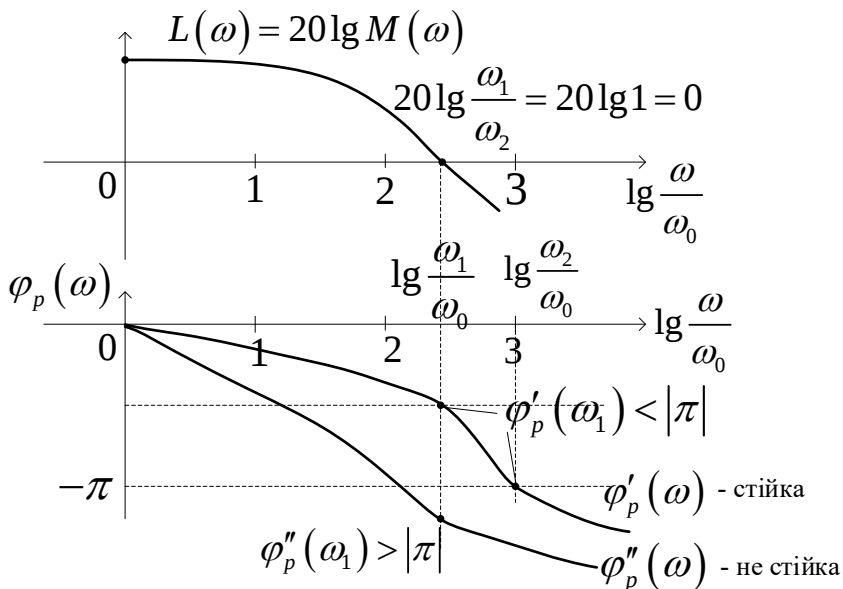


Рис. 8.36. Діаграма Бode

Для **стійкості** замкненої САК необхідно і достатньо, щоб ω_1 була менше ω_2 або замкнена САК стійка, якщо $L(\omega) > 0$ тільки до частоти ω_1 , за якої кут $\varphi_p(\omega) < |-\pi|$.

8.8. Рідкісний випадок, за якого критерій Найквіста дає не правильний висновок

Якщо чисельник $Q(p)$ і знаменник $R(p)$ розімкненої частини $W_p(p)$ мають (при розкладанні за теоремою Вієта) один однаковий множник $(p - \alpha)$, де $\alpha > 0$ або два однакових множника

$$[p - (\alpha + j\beta)], [p - (\alpha - j\beta)],$$

тобто

$$Q(p) = Q_1(p)(p - \alpha), \quad R(p) = R_1(p)(p - \alpha),$$

або

$$\begin{aligned} Q(p) &= Q_1(p)[p - p_1][p - p_2], \\ R(p) &= R_1(p)[p - p_1][p - p_2], \end{aligned}$$

де $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$,

то

$$W_p(p) = \frac{Q(p)}{R(p)} = \frac{Q_1(p)}{R_1(p)} - \text{стійка},$$

бо корені $R_1(p)$ – ліві.

Однак характеристичне рівняння замкненої САК

$$Q(p) + R(p) = [Q(p) + R(p)] \cdot [p - \alpha] = 0$$

або

$$[Q(p) + R(p)][(p - p_1)(p - p_2)] = 0$$

буде мати один додатній корінь α чи два спряжені з додатною дійсною складовою α .

Тобто за критерієм Найквіста замкнена САК начебто стійка, а за Михайловим і в дійсності вона не стійка.

ТЕСТ

1. Оцініть стійкість Вашої САК за зворотною АФЧХ, а також за АФЧ і ФЧХ.
-

8.9 Дослідження стійкості САК, які мають ланки з чистим запізненням

Реальна розподіленість в просторі процесів $x(t)$, місця безпосередньої дії $U(t)$ на процес і вимірювальних пристроїв з вимірювання $x(t)$, як реакції на $U(t)$, наявність деякого часу обробки сигналів $x(t)$ в сучасних «інтелектуальних» цифрових первинних перетворювачах та в багатьох інших випадках, призводить до часової затримки у вимірах $x(t)$ і, як наслідок, появи в САК ланки з чистим запізненням τ_L .

Наприклад, об'єктами з запізненням можуть бути трубопроводи, транспортери, стрічки звукозапису, радіо- і звукові канали передачі інформації, тобто системи з розподіленими у просторі параметрами.

Часто системи високого порядку для наближених досліджень заміняють ланками малого порядку з запізненням.

Рівняння ланки з чистим запізненням τ_L :

$$x(t) = kU(t - \tau_L).$$

Зображення за Лапласом:

$$x(p) = kU(p) \cdot e^{-\tau_L p}.$$

Передаточна функція:

$$\frac{x(p)}{U(p)} = k \cdot e^{-\tau_L p} = W(p).$$

Якщо $U(t) = 1(t)$, то перехідна функція $h(t)$ ланки чистого запізнення буде такою, як на рис. 8.37.

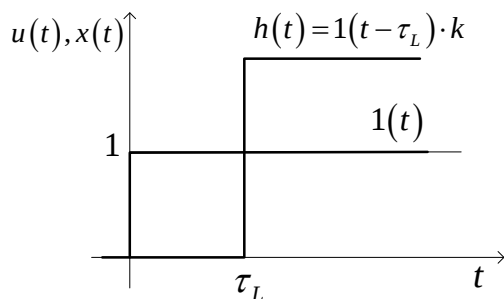


Рис. 8.37. Залежність $h(t)$

Якщо САК високого порядку $h_1(t)$ заміняють ланкою не високого порядку $h_2(t)$ з запізненням τ_L , то маємо рис. 8.38.

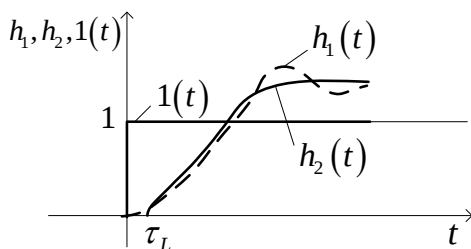


Рис. 8.38. Спрощення $h(t)$

Нехай САК має регулятор $W_1(p)$, об'єкт $W_0(p)$ і вимірювач $W_2(p)$, що є ланкою з чистим запізненням.

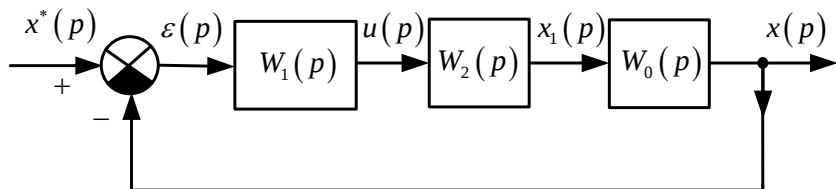


Рис. 8.39. САК із запізненням

Розімкнена частина САК:

$$W_p(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_0(p).$$

Замкнена САК:

$$W_3 = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},$$

знаменник $1 + W_p(p)$, та його характеристичний поліном визначає стійкість чи не стійкість САК.

Нехай $W_1(p)$ і $W_2(p)$ – інерційні ланки I порядку, а $W_0(p)$ – ланка з запізненням:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{\tau_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k_2}{\tau_2 p + 1}, \quad W_0(p) = e^{-\tau_L p}.$$

Тоді характеристичний поліном замкненої САК дорівнюватиме:

$$(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) + k_1 k_2 \cdot e^{-\tau_L p} = 0.$$

Наявність $e^{-\tau_L p}$ призводить до того, що це рівняння має нескінченно багато коренів. Для наближеного оцінювання стійкості оператор $e^{-\tau_L p}$ розкладають в кінцевий ряд, наприклад, в ряд Тейлора:

$$e^{-\tau_L p} \cong 1 - \tau_L p + \frac{(\tau_L p)^2}{2}.$$

Підставимо його в рівняння характеристичного полінома:

$$(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) + k_1 k_2 \cdot \left(1 - \tau_L p + \frac{(\tau_L p)^2}{2}\right) \cong 0,$$

або

$$\left(\tau_1 \tau_2 + k_1 k_2 \frac{\tau_L^2}{2}\right) p^2 + (\tau_1 + \tau_2 - k_1 k_2 \tau_L) p + (1 + k_1 k_2) \cong 0.$$

За критерієм Гурвіца для полінома II порядку, щоб корені його мали від'ємну дійсну складову, достатньо, аби всі коефіцієнти були додатними, тобто, щоб $\tau_1 + \tau_2 - k_1 k_2 \tau_L$ було більше нуля або

$$\tau_L < \frac{\tau_1 + \tau_2}{k_1 k_2}.$$

Ряд Тейлора збігається повільно, тому для більш точного визначення стійкості САК слід брати більше членів ряду і за Раусом, Гурвіцом чи Михайловим перевіряти умову стійкості.

Вплив ланки з запізненням τ_L на стійкість САК зручніше визначати за частотними критеріями.

Подамо $W_p(p)$ як добуток частини $W_n(p)$, що не містить запізнення і ланки $W_0(p)$ з чистим запізненням (рис. 8.40).

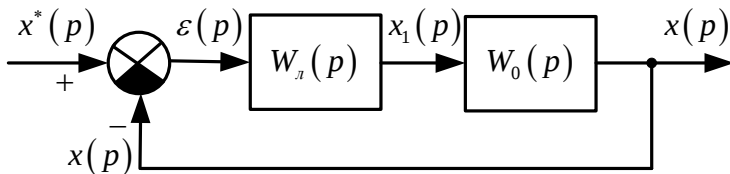


Рис. 8.40. САК із запізненням

Для дослідження за Найквістом необхідно побудувати $W_p(j\omega)$:

$$W_p(j\omega) = W_n(j\omega) \cdot W_0(j\omega),$$

де, для попереднього прикладу

$$\begin{aligned} W_n(j\omega) &= \frac{k_1 k_2}{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} = \\ &= \frac{k_1 k_2}{\sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1} \cdot \sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1}} \cdot e^{-j(\arctg\omega\tau_1 + \arctg\omega\tau_2)}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} M_n(\omega) &= \frac{k_1 k_2}{\sqrt{\omega^2\tau_1^2 + 1} \cdot \sqrt{\omega^2\tau_2^2 + 1}}, \\ \varphi_p(\omega) &= -(\arctg\omega\tau_1 + \arctg\omega\tau_2). \end{aligned}$$

Для ланки чистого запізнення:

$W_0(j\omega) = 1 \cdot e^{-\tau_L \cdot j\omega}$ або $M_0(\omega) = 1$, $\varphi_0(\omega) = -\tau_L \cdot \omega$ (рис. 8.41, а, б).

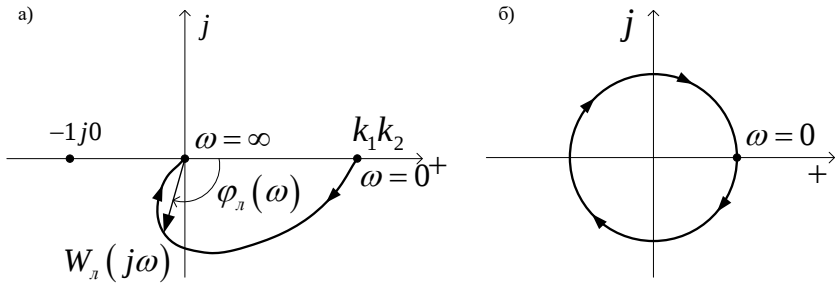


Рис. 8.41. АФЧХ

Для розімкненої складової САК:

$$M_p(\omega) = M_l(\omega), \quad \varphi_p(\omega) = \varphi_l(\omega) + \varphi_0(\omega).$$

Отже, ланка з чистим запізненням вносить додатково зсув по фазі, запізнення (інерційність) в САК (рис. 8.42).

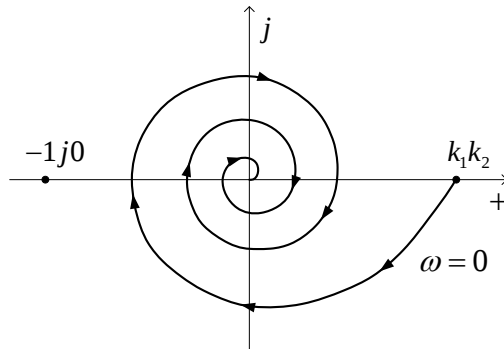


Рис. 8.42. АФЧХ САК із запізненням

Розглянемо умову стійкості для нашого прикладу, де $W_l(p)$ – ланка другого порядку (рис. 8.43).

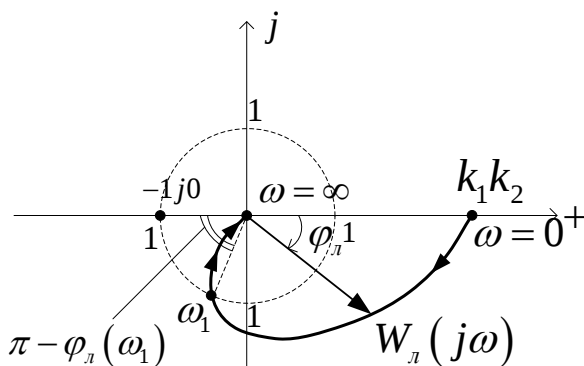


Рис. 8.43. Запас за фазою і амплітудою

Сумарний кут $\varphi_p(\omega) = \varphi_L(\omega) + \omega\tau_L$. Система на межі стійкості, якщо $\varphi_p(\omega_1) = -\pi$ або $\tau_{Lкр} \cdot \omega_1 = \pi - \varphi_L(\omega_1)$, де $\tau_{Lкр}$ – критичне значення запізнення, за якого САК виходить на межу між стійкістю і не стійкістю.

Умова стійкості САК:

$$\tau_L < \frac{\pi - \varphi_L(\omega_1)}{\omega_1},$$

де ω_1 – частота, на якій $M_L(\omega) = 1$.

Отже, якщо $W_L(j\omega)$ розташовано всередині одиничного кола, то незалежно від τ_L система завжди буде стійкою.

Якщо $W_L(j\omega)$ перетинає окружність одиничного радіусу декілька разів, то тут маємо декілька критичних значень $\tau_{Lкр}$ (рис. 8.44).

Маємо три критичні запізнення:

$$\tau_{Lкр1} = \frac{\pi - \varphi_L(\omega_1)}{\omega_1};$$

$$\tau_{Lкр2} = \frac{\pi - \varphi_L(\omega_2)}{\omega_2};$$

$$\tau_{Lкр3} = \frac{\pi - \varphi_L(\omega_3)}{\omega_3}.$$

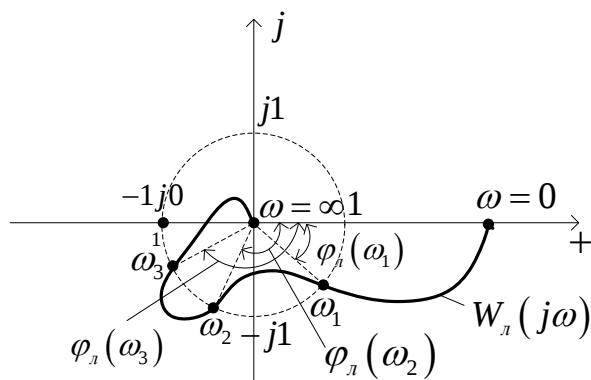


Рис. 8.44. Система без запізнення

Система завжди стійка, якщо запізнення τ_L менше найменшого критичного ($\tau_{Lкр3}$).

$$\tau_L < \tau_{Lкр3}.$$

Взагалі можливі 2 стійких і 2 не стійких режими:

- 1) $\tau_L < \tau_{Lкр3} = \min \tau_{кр}$. Годограф $W_p(j\omega)$ (рис. 8.45) дорівнює $W_L(j\omega) \cdot e^{-\tau_L \cdot j\omega} = M_p(\omega) \cdot e^{-j(\varphi_L(\omega) + \tau_L \omega)}$ і не охоплює точку $(-1, j0)$ при зміні ω від 0 до ∞ .

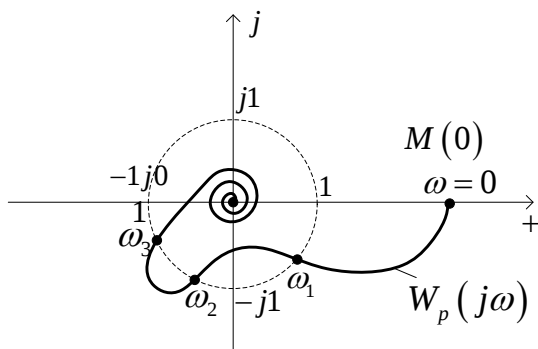


Рис. 8.45. Вплив запізнення

Система завжди буде стійкою, але кут $\varphi_p(\omega_3)$ стає ближче до $-\pi$ або кут $\pi - \varphi_p(\omega_3)$ стає менше, ніж $\pi - \varphi_l(\omega_3)$.

2) $\tau_{Lкр3} < \tau_L < \tau_{Lкр2}$. Годограф $W_p(j\omega)$, маючи на ділянці ω від ω_2 до ω_3 модуль $M_p(\omega) > 1$ при повороті його відносно $W_L(j\omega)$ на кут $\omega\tau_L$, більший від $\pi - \varphi_l(\omega)$, буде охоплювати точку $(-1, j0)$ і **система буде не стійкою** (рис. 8.46).

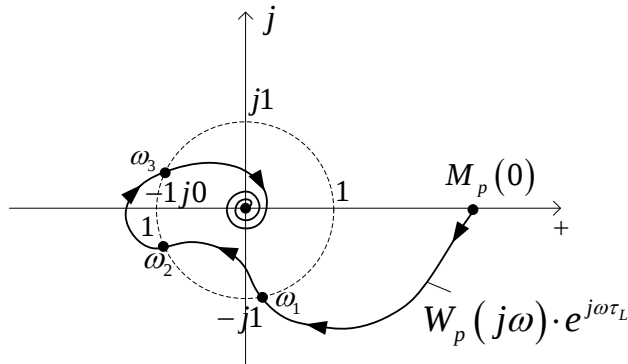


Рис. 8.46. Вплив запізнення

3) $\tau_{Lкр3} < \tau_L < \tau_{Lкр1}$. Годограф $W_p(j\omega)$, маючи на ділянці ω від ω_2 до ω_3 модуль $M_p(\omega) < 1$ при повороті його відносно $W_L(j\omega)$ на кут $\omega\tau_L$, більший від $\pi - \varphi_l(\omega)$, не буде охоплювати точку $(-1, j0)$ і **система буде стійкою** (рис. 8.47).

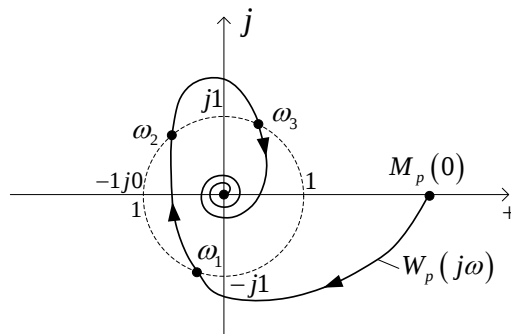


Рис. 8.47. Вплив запізнення

4) $\tau_L > \tau_{Lкрз}$. Годограф $W_p(j\omega)$, маючи на ділянці ω від 0 до ω_1 модуль $M_p(\omega) > 1$ при повороті його на кут $\omega\tau_L$, більший від $\pi - \varphi_L(\omega)$, буде охоплювати точку $(-1, j0)$ і **система буде не стійкою** (рис. 8.48).

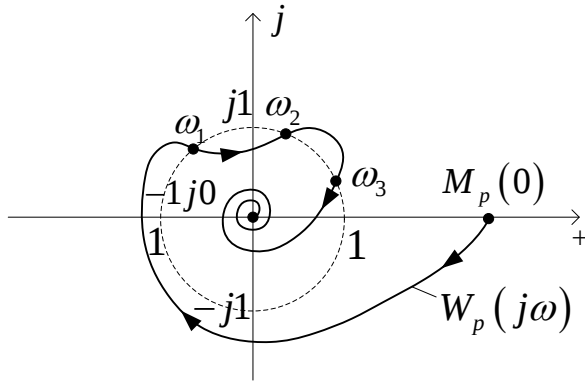


Рис. 8.48. Вплив запізнення

Якщо розімкнена САК не стійка (рис. 8.49), то за будь-якого запізнення вона стійкою не стане. Тут потрібно не запізнення, а випередження, яке фізично може бути наближено реалізованим для обмеженого за спектром сигналу $x(t)$ у вигляді кінцевого ряду Тейлора:

$$x(t + \tau) \cong x(t) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_t \cdot \tau + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_t \cdot \tau^2 + \dots$$

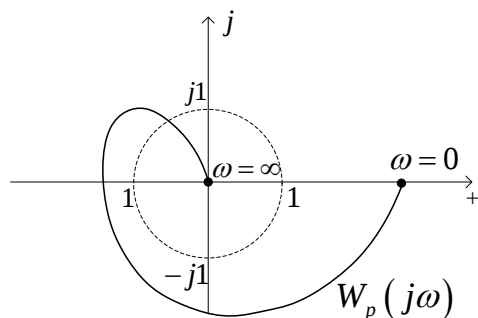


Рис. 8.49. Не стійка САК

Лінійна не стійка астатична САК

$$W_L(p) = \frac{k}{p(\tau p + 1)}$$

за будь-якого τ_L не може стати стійкою (рис. 8.50).

Якщо лінійна САК, наприклад (рис. 8.51), третього порядку не стійка, але в діапазоні частот від 0 до ω_1 має модуль $M_L(\omega) < 1$, то за допомогою ланки чистого запізнення її можна бути зробити стійкою.

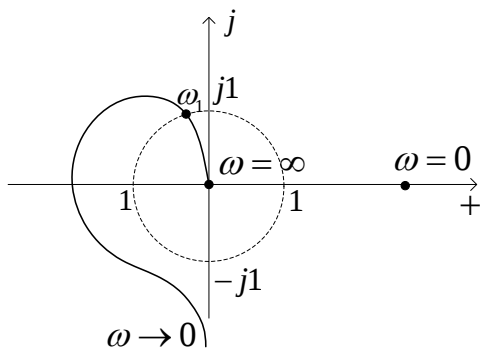


Рис. 8.50. АФЧХ

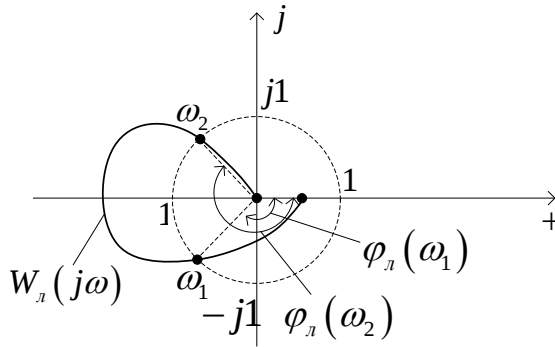


Рис. 8.51. АФЧХ

САК має дві точки перетину окружності одиничного радіусу на частоті ω_1 і ω_2 . Відповідно – маємо два критичних запізнення:

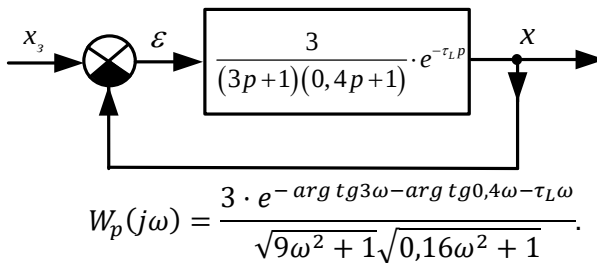
$$\tau_{Lkp1} = \frac{\pi - \varphi_L(\omega_1)}{\omega_1};$$

$$\tau_{Lkp2} = \frac{\pi - \varphi_L(\omega_2)}{\omega_2}.$$

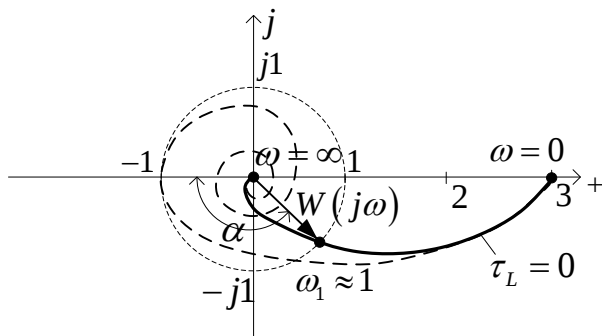
Якщо запізнення τ_L лежить в межах $\tau_{Lkp1} < \tau_L < \tau_{Lkp2}$, то САК буде стійкою.

ТЕСТ

- Послідовно з вашою передаточною функцією $W(p)$ увімкнути ланку з чистим запізненням τ і дослідити стійкість замкненої САК залежно від τ .



Будуємо графік:



Якщо $\tau_L \omega = \alpha$, то САК буде на грані стійкості.

За Гурвіцом :

$$a_3(p) \cong (3p + 1)(0,4p + 1) + 3 \left(1 - \tau_L p + \frac{(\tau_L p)^2}{2} \right) \left(1,2 + \frac{3\tau_L^2}{2} \right) \cdot p^2 + (3,4 - \tau_L)p + 4 = 0$$

Система на межі коливальної стійкості, якщо $\tau_L = 3,4$; не стійка, якщо $\tau_L > 3,4$; стійка, якщо $\tau_L < 3,4$.

9 ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ САК В ПРОСТОРІ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

9.1 Метод D-розбиття

Як нам вже відомо з попереднього матеріалу курсу ТАК, властивості перехідного і усталеного стану САК (стійкість – не стійкість, аперіодичність – коливальність процесів) визначаються коренями p_i ($i = \overline{1, n}$) характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

В свою чергу, визначаючи коефіцієнти a_i ($i = \overline{0, n}$) через фізичні параметри САК, ми маємо можливість проаналізувати, як впливають ці параметри на коефіцієнти a_i і, відповідно, коефіцієнти a_i на характеристики САК. Графічно і практично досить просто проводити такі дослідження, якщо всі a_i постійні, окрім одного чи двох.

Наприклад, треба з'ясувати, за яких a_0 і a_n САК буде стійкою, коли інші коефіцієнти не змінні. Задамося довільними значеннями $a_0 = a_{01}$ і $a_n = a_{n1}$. В результаті серед n коренів характеристичного рівняння k коренів будуть правими (рис. 9.1, а).

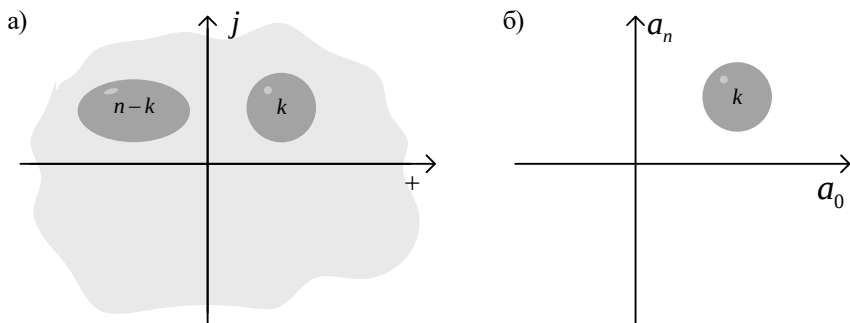


Рис. 9.1. Комфорне відображення

На площині (a_0, a_n) можна виділити область (рис. 9.1, б), яка задовольняє такому розташуванню коренів.

Якщо взяти чисто уявний корінь, то це буде відповідати попаданню співвідношення a_0 і a_n на межу стійкості САК. Тобто, уявній вісі комплексної площини відповідає межа області в координатах (a_n, a_0) . Однак, це ще не є область, а тільки її межа. Тоді методом D-розбиття є виділення відповідної області на площині коефіцієнтів, яка відповідає відповідному розташуванню коренів p_i на комплексній площині $(j, +)$.

Якщо три коефіцієнти a_i ($i = 1, 2, 3$) змінні, то маємо просторову задачу (рис. 9.2).

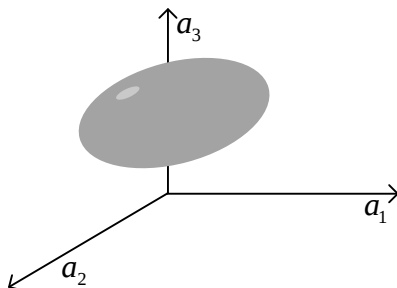


Рис. 9.2. Область стійкості

Якщо всі n коефіцієнтів змінні, то маємо задачу пошуку області в n -мірному просторі, відповідної до заданого числа k ($k = 0, n$) прaviх коренів.

9.2 D-розбиття на комплексній площині в функції одного параметра

Характеристичний поліном замкненої САК:

$$a_3(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Якщо $p = p_k, k = \overline{1, n}$, то $a_3(p_k) \equiv 0$.

Якщо в $a_3(p)$ змінюється a_i в функції одного параметра α , то за відповідного значення α , корінь p_k буде суто уявним ($p_k = j\omega_1$), а це відповідає межі деякої області. Отже рівняння межі, деякої області визначається заміною в $a_3(p)$ p на $j\omega$. Межа будується для зміни ω від 0 до $\pm\infty$.

Якщо

$$a_3(p_k) = Q(p_k) + \alpha R(p_k) = 0,$$

то

$$\alpha = -\frac{Q(p_k)}{R(p_k)}.$$

Приклад 1. $a_3(p_k) = p_k^2 + a_1 p_k + a_0 = 0$, де параметр $\alpha = a_1$.

Тоді

$$a_3(p_k) = (p_k^2 + a_0) + \alpha p_k = 0,$$

або

$$Q(p_k) = p_k^2 + a_0; \quad R(p_k) = p_k;$$

$$\alpha = -\frac{p_k^2 + a_0}{p_k}.$$

Приклад 2. $a_3(p_k) = (\tau_1 p_k + 1)(\tau_2 p_k + 1) + 1 = 0$, де параметр $\alpha = \tau_1$.

Тоді

$$a_3(p_k) = (2 + \tau_2 p_k) + \alpha \cdot p_k (\tau_2 p_k + 1) = 0.$$

Звідси

$$\alpha = -\frac{2 + \tau_2 p_k}{p_k (\tau_2 p_k + 1)}.$$

В обох прикладах α дійсне число. Однак, для побудови кривої D- розбиття, а саме, її межі, коли $p_k = j\omega$ при його підстановці в $Q(p_k)$ і $R(p_k)$ формально маємо α , як комплекс:

$$\alpha(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Якщо змінювати ω від $-\infty$ до $+\infty$ на комплексній площині $U(\omega)$, $jV(\omega)$, то отримаємо годограф $\alpha(j\omega)$, як межу стійкості САК, а далі

(оскільки α є дійсним числом) будемо розглядати у цій області тільки дійсні значення α .

Наприклад,

$$a_3(p) = p^3 + p^2 + p + \alpha; \quad Q_3(j\omega)^2 - j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + \alpha = 0.$$

$$\text{Отже } \alpha = \omega^2 - j(\omega - \omega^3); \quad U(\omega) = \omega^2; \quad V(\omega) = -V\omega(1 - \omega^2).$$

Змінюючи ω від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо годограф $\alpha(j\omega)$ (рис. 9.3), який розбиває площину (V, U) на 3 підобласті: D_1, D_2, D_3 .

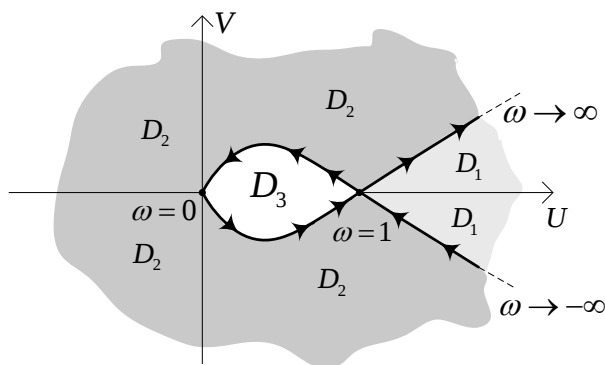


Рис. 9.3. Метод D -розбиття

Дійсне значення параметра α лежить в межах від $-\infty$ до $+\infty$. За попередніми критеріями ми знаємо, що за умови, що добуток середніх більше добутку крайніх членів кубічного рівняння, система буде стійкою, тобто $\alpha \in (0, 1)$ (область D_3). Для того, щоб це виявити за методом D - розбиття, введемо правило штрихування межевої лінії $\alpha(j\omega)$ для руху ω від $-\infty$ до $+\infty$: **рухаючись по межевій кривій D-розбиття від $\omega = -\infty$ до $\omega = \infty$, штрихуємо зліва**. Якщо на площині (V, U) перетинаємо D -криву, переходячи зі заштрихованої сторони на не заштриховану, то на площині коренів один корінь перетинає уявну вісь, переходячи з лівої напівплощини на праву і навпаки: перехід з

не заштрихованої сторони на заштриховану відповідає переходу кореня з правої напівплощини на ліву (рис. 9.4, а, б).

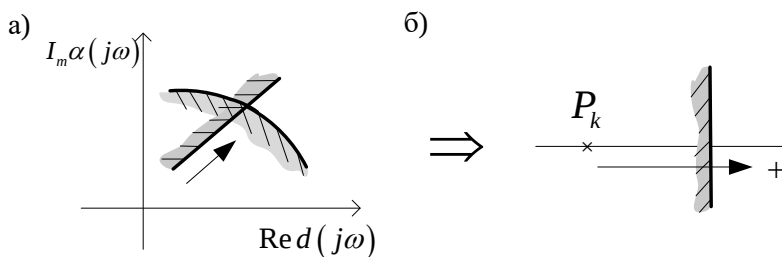


Рис.9.4. Комфорне відображення

Повертаючись до нашого прикладу (рис. 9.3), проведемо штрихування лінії $\alpha(j\omega)$ (рис. 9.5).

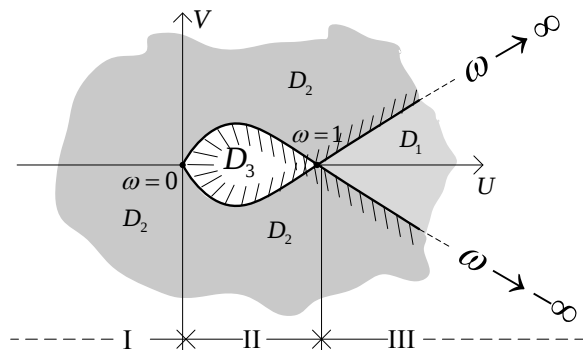


Рис. 9.5. Метод D -розбиття

Проекція $\alpha(j\omega)$ на дійсну вісь $U(\omega)$ розташована в трьох частинах:

I – оскільки $\alpha > 0$, то вона не розглядається;

II – $\alpha \in (0, 1)$, реально $\omega > 0$, тому штриховка зліва від $\alpha(j\omega)$, $\omega \in (0, 1)$ говорить, що тут САК стійка;

III – перехід з заштрихованої зони лінії $\alpha(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, 0)$ на не заштриховану зону D_1 цієї лінії, говорить про перехід лівого кореня p_k в правий (рис. 9.4, а. б): в зоні D_1 , де $\alpha > 1$ САК не стійка.

Не знаючи апріорі скільки лівих, скільки правих коренів $a_3(p)$ замкненої САК, по виду кривої $\alpha(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ та її штриховки, можна визначити D-область – претендента на стійкість (рис. 9.6).

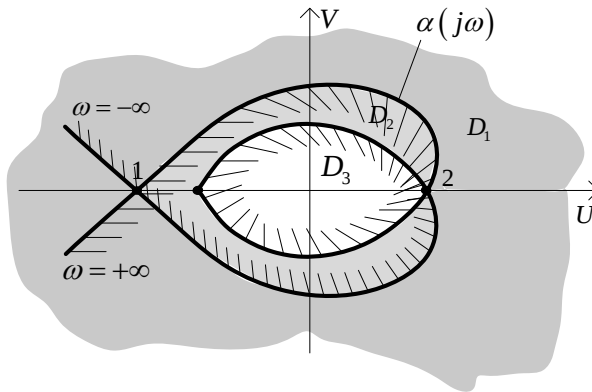


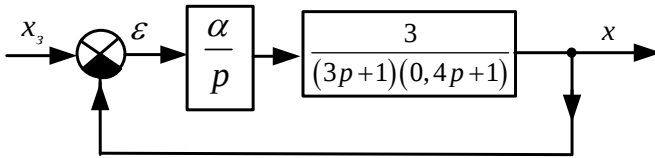
Рис. 9.6. Метод D -розбиття

Рухаючись від $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$ і далі $\omega = +\infty$, в точці 1 перетинаємо $\alpha(j\omega)$ з не заштрихованої на заштриховану сторону. Це говорить про зменшення на одиницю правих коренів. В точці 2 – аналогічно перетинаємо і число правих коренів ще зменшиться на одиницю. Але, повторно перетинаючи $\alpha(j\omega)$ в точці 2, ми переходимо з заштрихованої сторони на не заштриховану. Тобто, добавляється один правий корінь. А в точці 1 – ще один. Тому претендентом на область з мінімальним числом правих коренів буде зона $U(\omega)$ між точками 2 і 3.

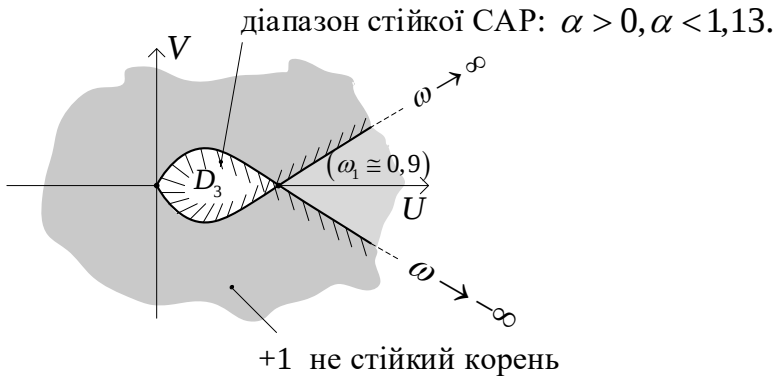
А якщо відома степінь n $a_3(p)$ і для даного прикладу вона дорівнює 2, то $2-2=0$ і область D_3 не містить правих коренів. Тобто система буде стійкою. якщо α лежить в межах точок 2, 3 дійсної осі.

ТЕСТ

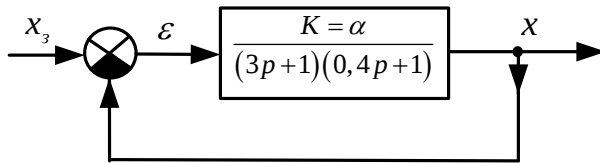
- Дослідити вплив коефіцієнта α Вашої САК методом D-розбиття в функції одного параметра (коефіцієнта підсилення) для замкненої САК з одиночним зворотнім зв'язком та І-регулятором.



$$\begin{aligned}
 a_3 p &= (3p + 1)(0,4p + 1)p + \alpha \cdot 3 \\
 a_3(j\omega) &= (3p + 1)(0,4p + 1) \cdot j\omega + 3\alpha = \\
 &= 1,2j\omega^3 - 3\omega^2 - 0,4\omega^2 + j\omega + 3\alpha = 0 \\
 \alpha(j\omega) &= \frac{3,4\omega^2}{3} + j \frac{\omega(-1 + 1,2\omega^2)}{3} = \\
 &\cong 1,13\omega^2 + j0,33(\omega(-1 + 1,2\omega^2))
 \end{aligned}$$



2. САК з П-регулятором.



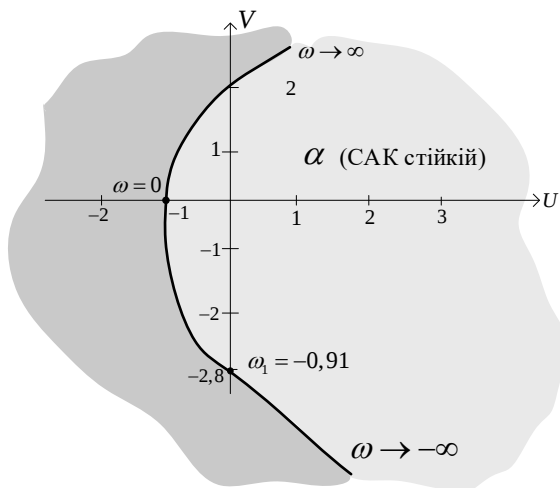
$$W_3 = \frac{\frac{\alpha}{(3p+1)(0,4p+1)}}{\left(1 + \frac{\alpha}{(3p+1)(0,4p+1)}\right)}$$

$$a_3(p_k) = (3p_k + 1)(0,4p_k + 1) + 2 = 1,2p_k^2 + 3,4p_k + 1 + \alpha \equiv 0$$

$$\alpha = -1,2p_k^2 - 3,4p_k - 1$$

$$\alpha(j\omega) = 1,2\omega^2 - 3,4j\omega - 1 = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = 1,2\omega^2 - 1; V(\omega) = -3,4\omega$$



$$\pm\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{1,2}} \cong 0,91$$

Система стійка за будь яких $\alpha > -1$.

9.3 D-розбиття на комплексній площині в функції двох параметрів

9.3.1 Загальні положення

Характеристичний поліном замкненої САК:

$$a_3(p_k) = a_0 p_k^n + a_1 p_k^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Коефіцієнти a_i ($i = \overline{0, n}$) залежать від двох фізичних параметрів α і β . Тоді його можна подати так:

$$a_3(p_k) = \alpha M(p_k) + \beta Q(p_k) + R(p_k) = 0.$$

Межі стійкості САК відповідає уявний корінь $p_k = j\omega$. Тоді маємо:

$$\alpha M(j\omega) + \beta Q(j\omega) + R(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \equiv 0$$

або

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= \alpha M_1(\omega) + \beta Q_1(\omega) + R_1(\omega = 0) \\ V(\omega) &= \alpha M_2(\omega) + \beta Q_2(\omega) + R_2(\omega = 0) \end{aligned} \right\}.$$

Звідси маємо рішення цієї системи:

$$\alpha(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ M_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$\beta(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} M_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ M_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ M_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Лінії D-розбиття будуємо в правій системі координат (рис. 9.7).

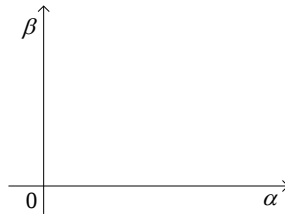


Рис. 9.7. Система координат

Для існування рішення $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$, необхідно, щоб одночасно не були нульовими чисельники Δ_1 , Δ_2 і знаменник Δ рішення. Графічно це означає наявність точки перетину кривих $U(\omega) = 0$ і $V(\omega) = 0$ (рис. 9.8, а).

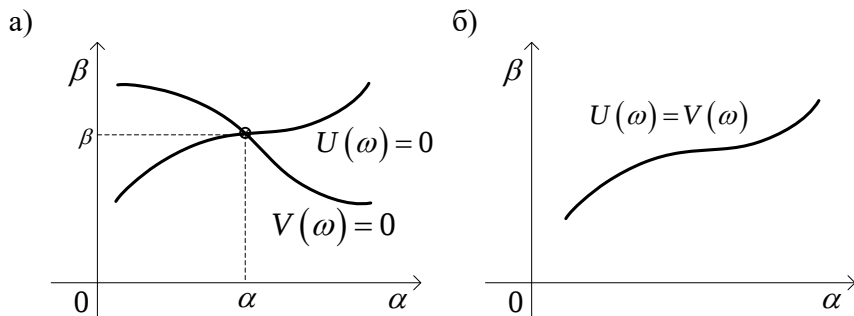


Рис. 9.8. D -розбиття

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, лінії $U(\omega)$ і $V(\omega)$ співпадуть (рис. 9.8. б). Можливе також рівняння особливої лінії $U(\omega) = 0$ або $V(\omega) = 0$.

Для більш простого розуміння правила штриховки та побудови відповідних ліній на площині (α, β) , розглянемо приклад:

$$a_3(p) = (\tau_3 p + 1)(\tau_1^2 p^2 + \tau_2 p + 1) + k = 0.$$

Нехай $\tau_1 = 0.5$ с, $\tau_3 = 0.001$ с, а $k = \alpha$, $\tau_2 = \beta$.

Для виявлення меж стійкості на площині (α, β) покладемо, що один із коренів $a_3(p)$ $p_k = j\omega$. Тоді маємо $a_3(j\omega)$:

$$a_3(j\omega) = (\tau_3 j\omega + 1)[\tau_1^2 (-\omega)^2 + j\omega\beta] + 1 + \alpha = 0$$

або, за відповідних значень τ_1 і τ_3 , отримаємо, що

$$0.0005(j\omega)^3 + (0.5\beta + 0.01)(j\omega)^2 + (\beta + 0.5(j\omega) + 1 + \alpha = 0),$$

звідси

$$\begin{cases} U(\alpha, \beta, \omega) = 0 \\ V(\alpha, \beta, \omega) = 0 \end{cases}$$

або

$$\left. \begin{aligned} -0.5\beta\omega^2 + \alpha + (1 - 0.001\omega^2) &= 0 \\ \beta\omega + 0 \cdot \alpha + (0.5\omega - 0.0005\omega^3) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

В стандартній формі запису:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5\omega^2 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001\omega^2 - 1 \\ 0.0005\omega^3 - 0.5\omega \end{bmatrix}.$$

Отже:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} 1 & -0.5\omega^2 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} = \omega; \\ \Delta_1 &= \begin{bmatrix} 0.001\omega^2 - 1 & 0.5\omega^2 \\ 0.0005\omega^3 - 0.5\omega & \omega \end{bmatrix} = \\ &= \omega[0.001\omega^2 - 1 + 0.5(0.0005\omega^3 - 0.5\omega)] = \\ &= \omega[0.00025\omega^4 - 0.249\omega^2 - 1]; \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.001\omega^2 - 1 \\ 0 & 0.0005\omega^3 - 0.5\omega \end{bmatrix} = 0.0005\omega^3 - 0.5\omega. \end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0.00025\omega^4 - 0.249\omega^2 - 1, \\ \beta(\omega) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0.0005\omega^2 - 0.5. \end{aligned}$$

Змінюючи ω від $-\infty$ до $+\infty$ будуємо лінію D-розбиття (рис. 9.9). За умови $\omega = 0$, маємо $\alpha(0) = 0/0$, $\beta(0) = 0/0$, тобто, особливу лінію: з I рівняння системи $U(\alpha, \beta, \omega)$ це буде $\alpha + 1 = 0$ або $\alpha = -1$.

Правило штриховки лінії: при русі від $-\infty$ до $+\infty$ штрихуємо зліва, якщо $\Delta > 0$, або справа, якщо $\Delta < 0$. Якщо зображуюча точка (α, β) двічі пробігає по кривій від $-\infty$ до 0 і від 0 до ∞ , то штрихуємо обидва рази з однієї сторони, оскільки Δ змінює знак, коли $\omega = 0$ або, коли $\omega = +\infty$. Штриховка особливих ліній наноситься зі сторони кривої D-розбиття. Якщо Δ в точці перетину кривої D-розбиття особливої лінії змінює знак, то штриховка особливої лінії переходить на інший бік (рис. 9.9). Лінія D-розбиття з одинарною штриховкою відповідає наявності нульового кореня $p_k = 0$; подвійна штриховка – двом уявним кореням $p_k = j\omega$, $p_{k+1} = -j\omega$. Особлива лінія має одну штриховку, що відповідає $p_k = 0$; лінія ABC – подвійну, що

відповідає двом уявним кореням $\pm j\omega$. В точці А лінія АВС перетинає особливу лінію ABF і змінює знак визначник Δ . Тому штриховка особливої лінії за точкою А зліва змінює сторону.

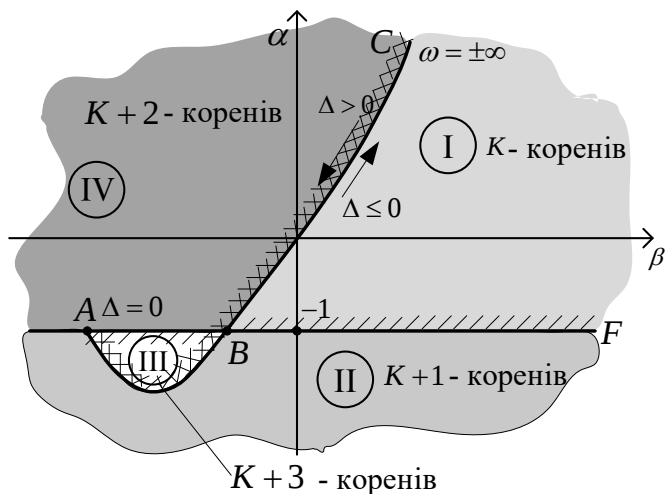


Рис. 9.9. D -розбиття

Якщо при перетинанні чи наближенні на $\pm\infty$ D -розбиття до особливої лінії знак Δ не змінюється, то особлива лінія не штригується.

Після нанесення штриховок серед підобластей I÷IV площини (α, β) , за правилом переходу через лінію зі штриховкою, можна відшукати підобласть з найменшою кількістю k можливих правих коренів. Так, якщо прийняти, що в I області k таких коренів, то в II-ій буде вже $k + 1$, в III-ій – $k + 3$, в IV-ій – $k + 2$. Тобто претендентом на стійкість є I підобласть. Оскільки для даного прикладу степінь поліному $a_3(p) = 0$ дорівнює трьом і є підобласть III, де – $k + 3$ коренів, де для $a_3(p)$ третього порядку число коренів дорівнює 3, то

очевидно в I підобласті число k правих коренів дорівнює нулю. Тобто, область I на площині (α, β) , за яких САК буде стійкою.

9.3.2 Гіпербола Вишнєградського

В деяких випадках, наприклад, для характеристичного поліному $a_3(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ або відповідного до нього однорідного диференційного рівняння САК

$$a_0 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = 0$$

або

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{a_3}{a_0} x = 0,$$

шляхом введення масштабування у часі $T = \omega_0 t$ або $d/dt = \omega_0^{-1}(d/dT)$, отримаємо еквівалентне початковому рівняння часу T :

$$\omega_0^3 \frac{d^3 x}{dT^3} + \omega_0^2 \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{d^2 x}{dT^2} + \omega_0 \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{dx}{dT} + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

або через оператор $D = d/dT$ це буде:

$$D^3 + \frac{a_1}{a_0 \omega_0} D^2 + \frac{a_2}{a_0 \omega_0^2} D + \frac{a_3}{a_0 \omega_0^3} = 0.$$

Нехай довільна $\omega_0 = \sqrt[3]{a_3/a_0}$, тоді

$$\frac{a_1}{a_0 \omega_0} = \frac{a_1}{a_0 \sqrt[3]{a_3/a_0}} = \alpha,$$

$$\frac{a_2}{a_0 \omega_0^2} = \frac{a_2}{a_0 \sqrt[3]{(a_3/a_0)^2}} = \beta.$$

Отже тоді отримаємо еквівалентний до $a_3(p)$ характеристичний поліном вже комплексного $D = -\alpha_1 \pm j\omega_1$:

$$D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1 = 0.$$

Для отримання границі коливальної стійкості, підставимо замість D уявний корінь $D_k = j\omega$:

$$-j\omega^3 - \alpha\omega^2 + j\beta\omega + 1 = 0$$

або

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= -\omega^2 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 1 = 0 \\ V(\omega) &= 0 \cdot \alpha + \omega \cdot \beta - \omega^3 = 0 \end{aligned} \right\}'$$

або

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \omega^3 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$\alpha = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \omega^3 & \omega \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}} = \frac{1}{\omega^2};$$

$$\boxed{\Delta = -\omega^3},$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} -\omega^2 & -1 \\ 0 & \omega^3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}} = \omega^2.$$

В цьому випадку можна отримати криву D-розбиття без ω :

$\alpha \cdot \beta = 1$ або $\beta = 1/\alpha$ – гіпербола Вишнєградського.

При зміні ω від $-\infty$ до 0, $\Delta = -\omega^3 > 0$, штрихування зліва, далі ω від 0 до ∞ , $\Delta < 0$, штрихування справа (рис. 9.10).

З рівняння $D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1 = 0$, за критерієм Гурвіца, САК стійка, якщо $\alpha \cdot \beta - 1 > 0$ або $\alpha \cdot \beta > 1$. Приведення системи третього порядку до виду $D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1 = 0$ дозволяє не тільки визначити області стійкості і не стійкості (рис. 9.10), а, задаючись різними значеннями коренів, побудувати межі і підобласті на площині (α, β) з різними характеристиками вільної складової перехідного процесу, які визначають не тільки стійкість, а і якість САК (рис. 9.10).

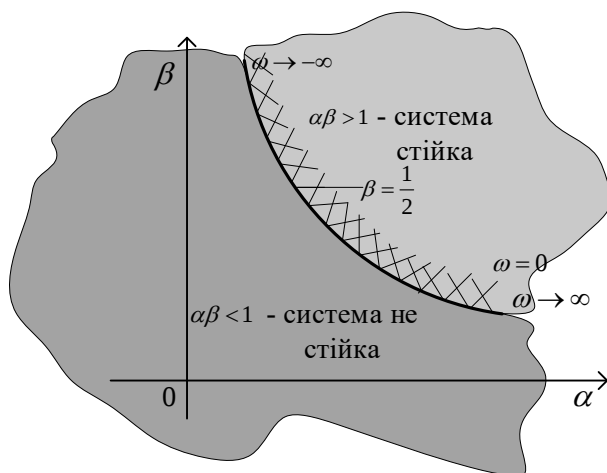


Рис. 9.10. D -розбиття

Якщо в рівняння:

$$D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1 = 0$$

підставити $D = j\omega$, то отримаємо границю коливальної стійкості: $\alpha \cdot \beta = 1$ (рис. 9.10, лінія 1).

Якщо покласти в $D = -\alpha_1 \pm j\omega_1$, $\omega_1 = 0$, то отримаємо межу дійсних коренів (рис. 9.10, лінія 2):

$$-\alpha_1^3 + \alpha \cdot \alpha_1^2 + \beta \alpha_1 - 1 = 0$$

і так далі. На рис. 9.11 побудовано межові лінії, які розділяють підобласті з різними значеннями коренів D_k і, відповідно різних за якістю перехідних процесів в САК.

Таким чином, за діаграмою Вишнеградського можна вибрати такі α і β , а через них a_0, a_1, a_2, a_3 , за яких перехідний процес в САК буде бажаний.

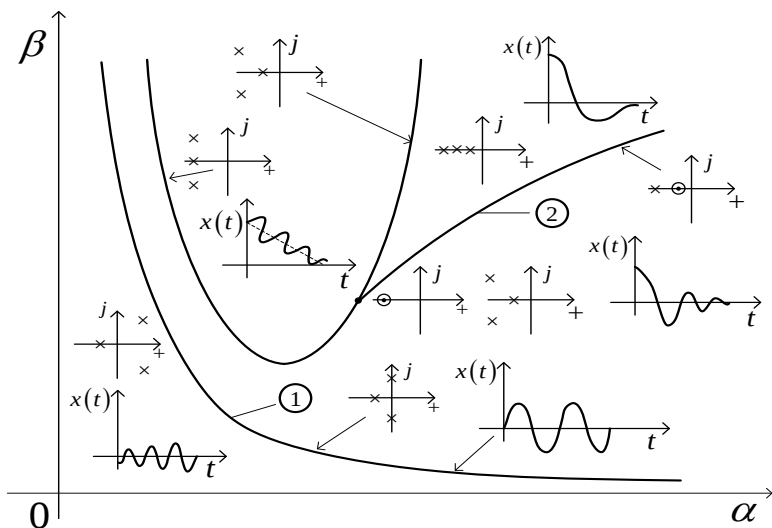
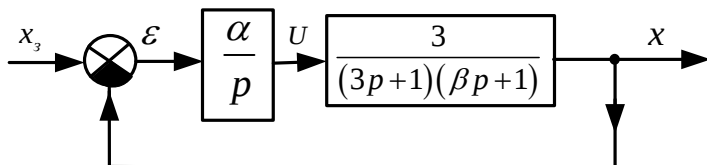


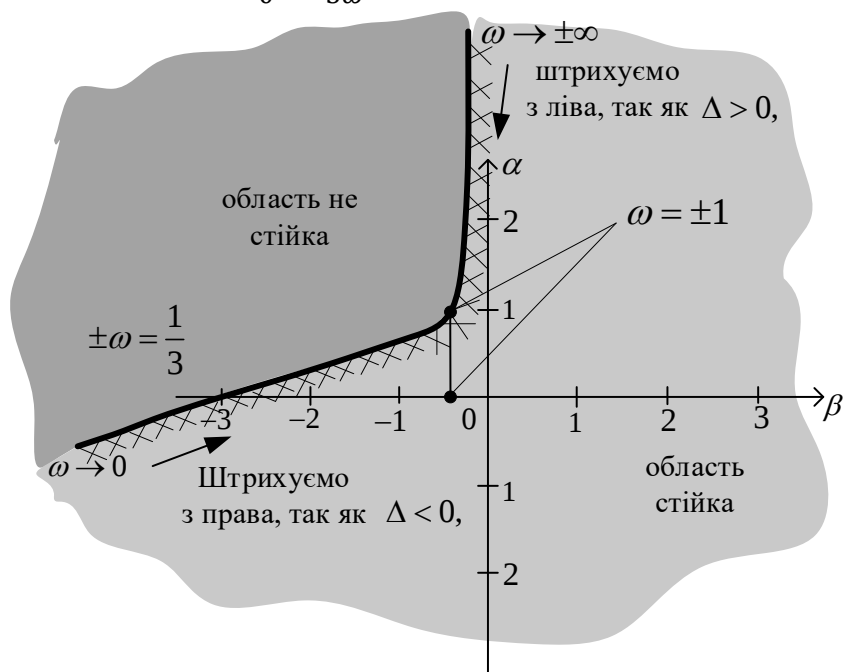
Рис. 9.11. Діаграма Вишнеградського, де:
1 – межа коливальної стійкості; 2, 3 – межі між областями
коливальних і аперіодичних процесів

ТЕСТ

1. Дослідити вплив двох коефіцієнтів α і β методом D-розбиття для Вашої системи.



$$\begin{aligned}
 a_3(p_k) &= (3p_k + 1)(\beta p_k + 1)p_k + 3\alpha \equiv 0, \\
 \beta(3p_k^3 + p_k) + \alpha \cdot 3 + 3p_k^2 + p_k &\equiv 0, \\
 p_k = j\omega; \beta(-j3\omega^3 - \omega^2) + \alpha \cdot 3 - 3\omega^2 + j\omega &\equiv 0, \\
 U(\omega) &= -\omega^2\beta + \alpha 3 - 3\omega^2 \equiv 0, \\
 V(\omega) &= -3\omega^3\beta + 0 \cdot \alpha + \omega \equiv 0 \quad \text{або} \\
 \begin{cases} 3\alpha + (-\omega^2) \cdot \beta = 3\omega^2, \\ 0 \cdot \alpha + (-3\omega^3) \cdot \beta = -\omega, \end{cases} \\
 \alpha(\omega) &= \frac{\begin{vmatrix} 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega & -3\omega^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -\omega^2 \\ 0 & -3\omega^3 \end{vmatrix}} = \frac{-9\omega^5 + \omega^3}{-9\omega^3} = \omega^2 - \frac{1}{9}, \\
 \beta(\omega) &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3\omega^2 \\ 0 & -\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -\omega^2 \\ 0 & -3\omega^3 \end{vmatrix}} = \frac{3\omega}{-9\omega^3} = -\frac{1}{3\omega^2}.
 \end{aligned}$$



9.4 Дослідження впливу коефіцієнтів ПІД-регулятора на стійкість САК приводом робота

Електродвигун постійного струму (ДПС) з навантаженням на його валу описується за законом Ньютона для обертового руху наступним рівнянням:

$$\mathfrak{I}_{\Sigma} \frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{д}} + M_{\text{н}},$$

де: $\mathfrak{I}_{\Sigma}$ – сумарний момент інерції усіх складових системи, які приводяться в рух валом ДПС;

Ω – швидкість обертання вала (рад/с);

$M_{\text{д}} = k_U \cdot U_{\text{я}}$; $U_{\text{я}}$ – напруга на якорі (В); k_U – коефіцієнт (Н·м/В) зв'язку моменту на валу ДПС і напруги якоря;

$M_{\text{н}} = k_{\text{н}} \cdot \varphi$ – момент протидії, пропорційний (наприклад) куту обертання вала ДПС;

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тоді:

$$\mathfrak{I}_{\Sigma} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_{\text{н}} \cdot \varphi = k_U \cdot U_{\text{я}}$$

або

$$\frac{\mathfrak{I}_{\Sigma}}{k_{\text{н}}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi(t) = \frac{k_U}{k_{\text{н}}} \cdot U_{\text{я}}(t).$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{I}_{\Sigma}}{k_{\text{н}}} &= T^2, \\ \frac{k_U}{k_{\text{н}}} &= k, \\ \varphi(t) &= x(t), \\ U_{\text{я}} &= U. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо рівняння ДПС в стандартній формі:

$$T^2 \frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = kU(t).$$

Характеристичний поліном ДПС:

$$T^2 p^2 + 1 = 0;$$

$$p_{1,2} = \pm jT^{-1}.$$

Система на межі коливальної стійкості (консервативна ланка II порядку).

Для забезпечення стійкості системи ДПС – ПІД-регулятор з одиничним негативним зворотнім зв'язком (рис. 9.12) треба дослідити за яких значень коефіцієнтів k_1, k_2, k_3 ПІД регулятора

$$U(p) = \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 \cdot p \right) \varepsilon(p)$$

САК ДПС буде стійкою?

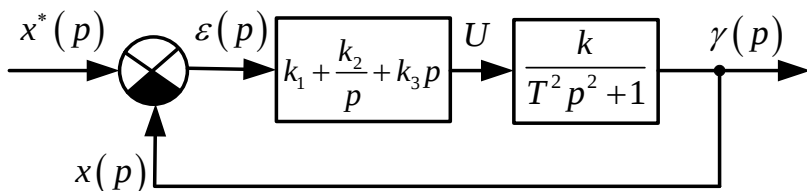


Рис. 9.12. САК з ПІД-регулятором

I, взагалі, чи можливо її зробити стійкою?

Запишемо передаточну функцію розімкненої частини САК ДПС:

$$W(p) = \frac{k(k_1 p + k_2 + k_3 \cdot p^2)}{p(T^2 p^2 + 1)}.$$

Розімкнена САК має один нульовий і два уявних кореня. тобто водночас знаходиться на межі аперіодичної і коливальної стійкості. Поглянемо, як вплине негативний зворотній зв'язок. Замкнена САК:

$$\begin{aligned} W_3(p) &= \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{k k_3 p^2 + k k_1 p + k k_2}{T^2 p^3 + k k_3 p^2 + (1 + k k_1) p + k k_2} = \\ &= \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}, \end{aligned}$$

де

$$a_0 = T^2, a_1 = kk_3, a_2 = (1 + kk_1), a_3 = kk_2.$$

Для стійкості за Гурвицем необхідно, щоб $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$ або $(kk_3) \cdot (1 + kk_1) > T^2 \cdot kk_2$.

Скоротивши на k , отримаємо таку умову стійкості:

$$\frac{k_3(1 + kk_1)}{T^2 \cdot k_2} > 1,$$

де $k = k_U/k_H$ і залежить від характеристик ДПС і навантаження; інтегральна складова $(k_2/p) \varepsilon(p)$ ПД-регулятора погіршує умову стійкості (k_2 в знаменнику); покращує стійкість диференційна складова $k_3 \cdot p \cdot \varepsilon(p)$ ПД регулятора, а також пропорційна $k_1 \cdot \varepsilon(p)$.

Цікаво розглянути можливість використання ПДД-регулятора:

$$U(p) = (k_1 + k_3 p^2) \varepsilon(p).$$

Тоді

$$W_p(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{k(k_1 + k_3 p^2)}{T^2 p^2 + 1}.$$

Розімкнена САК на межі коливальної стійкості. Замкнена САК:

$$W_3(p) = \frac{k(k_1 + k_3 p^2)}{T^2 p^2 + 1 + k(k_1 + k_3 p^2)} = \frac{k(k_1 + k_3 p^2)}{(T^2 + kk_3)p^2 + (kk_1 + 1)}.$$

Замкнена САК теж на межі коливальної стійкості.

А якщо ПД-регулятор? Тоді:

$$W_p(p) = \frac{k(k_1 + k_3 p)}{T^2 p^2 + 1},$$
$$W_3(p) = \frac{k(k_1 + k_3 p)}{T^2 p^2 + 1 + k(k_1 + k_3 p)}.$$

Тут

$$a_3(p) = T^2 p^2 + kk_3 p + kk_1 = a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Система стійка, оскільки всі a_0, a_1, a_2 більше нуля.

Але аперіодичність чи коливальність перехідних процесів буде залежати від коефіцієнтів ПД-регулятора. Корені $p_{1,2}$:

$$p_{1,2} = -\frac{kk_3}{2T^2} \pm \sqrt{\left(\frac{kk_3}{2T^2}\right)^2 - \frac{kk_1}{T^2}} = -\frac{kk_3}{2T^2} \pm \frac{1}{2T^2} \sqrt{(kk_3)^2 - 4kk_1}.$$

Якщо k_1 досить велике $(kk_3)^2 < 4kk_1$, процес коливальний стійкий, якщо $(kk_3)^2 > 4kk_1$ – аперіодичний. Однак відсутність інтегральної складової не дозволяє (розділ 10) повністю прибрати похибку ε в усталеному режимі.

Нарешті, якщо *П-регулятор*, то:

$$W_3(p) = \frac{kk_1}{T^2 p^2 + 1 + kk_1},$$

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1 + kk_1}{T^2}},$$

Система залишається на грані коливальної стійкості. Отже, найкращим буде ПД-регулятор.

ТЕСТ

1. Підключити ПД-регулятор до Вашого об'єкта (розділ 4, табл 1) $W(p)$ і дослідити вплив коефіцієнтів регулятора на стійкість замкненої САК.

10 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ САК

10.1 Якість САК в усталеному режимі

10.1.1 Оцінка похибки $\varepsilon(\infty)$ за вхідним впливом

По закінченню перехідного режиму САК, пов'язаного з ненульовими початковими умовами, настає усталений режим. Для дослідження його якості використовують стандартні (типові) вхідні впливи:

$$1) x_1^*(t) = 1(t) \text{ або } x_1^*(p) = 1/p;$$

$$2) x_2^*(t) = t \text{ або } x_2^*(p) = 1/p^2;$$

$$3) x_3^*(t) = t^2/2 \text{ або } x_3^*(p) = 1/p^3;$$

.....

$$n) x_n^*(t) = t^n/n! \text{ або } x_n^*(p) = 1/p^n.$$

Тут вихідною змінною САК буде похибка $\varepsilon(t)$ між вхідною $x^*(t)$ і вихідною $x(t)$ змінними САК. Для САК з одиничним зворотнім зв'язком (рис. 10.1, а, б) і передаточною функцією $W_p(p)$ розімкненої частини, маємо:

$$\varepsilon(p) = x^*(p) - W_p(p) \cdot \varepsilon(p)$$

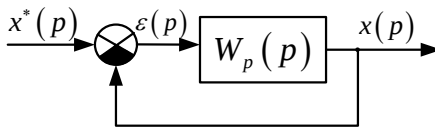
або

$$\varepsilon(p)[1 + W_p(p)] = x^*(p),$$

де

$$W_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{x^*(p)} = [1 + W_p(p)]^{-1}.$$

а)



б)

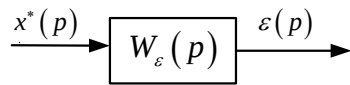


Рис. 10.1. Структура САК

За теоремою Лапласа усталене значення $\varepsilon(\infty)$ визначається залежно від типового вхідного впливу і передаточної функції $W_\varepsilon(p)$:

$$1) \quad \varepsilon_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) x_1^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p};$$

$$2) \quad \varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) x_2^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p^2};$$

$$3) \quad \varepsilon_3(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) x_3^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p^3};$$

.....

$$n) \quad \varepsilon_n(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) x_n^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p^n}.$$

Усталена похибка $\varepsilon_1(\infty)$, як реакція на сходінку, називається *похибкою за положенням*.

Усталена похибка $\varepsilon_2(\infty)$, як реакція на лінійно зростаючий вплив, називається *похибкою за швидкістю*.

Усталена похибка $\varepsilon_3(\infty)$, як реакція на квадратично зростаючий вплив, називається *похибкою за прискоренням* і т.д.

Відношення швидкості v зміни вхідного сигналу $x_2^*(t) = v \cdot t$ до усталеної похибки $\varepsilon_2(\infty)$ називається *добротністю САК за швидкістю*:

$$k_v = \frac{v}{\varepsilon_2(\infty)}.$$

Відношення прискорення a зміни вхідного сигналу $x_3^*(t) = at^2/2$ до усталеної похибки $\varepsilon_3(\infty)$ називається *добротністю САК за прискоренням*:

$$k_a = \frac{a}{\varepsilon_3(\infty)}.$$

САК, яка має сталу величину $\varepsilon_2(\infty)$, тобто, сталу похибку $\varepsilon_2(t)$ реакції на $x_3^*(t) = at^2/2$, називають САК з астатизмом другого порядку.

1) Простий приклад САК з астатизмом першого порядку (рис. 10.2).

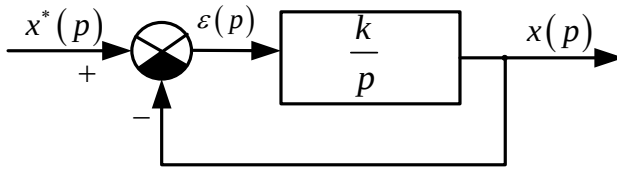


Рис. 10.2. Астатична САК

Тут

$$\varepsilon(p) = x^*(p) - \frac{k}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

або

$$\varepsilon(p) \left[1 + \frac{k}{p} \right] = x^*(p),$$

де

$$x^*(p) = \frac{1}{p}.$$

Тоді

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p}{p+k} \cdot \frac{1}{p} = 0;$$

якщо $x^*(t) = v \cdot t$, то $x^*(p) = v/p^2$, а

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p}{p+k} \cdot \frac{v}{p^2} = \frac{v}{k} = const.$$

Чим більший k , тим менше усталена похибка за швидкістю v .

2) Простий приклад САК з астатизмом другого порядку (рис. 10.3).

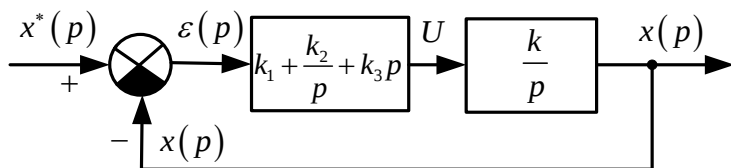


Рис. 10.3. Астатична САК з ПД-регулятором

$$\varepsilon(p) = x^*(p) - \frac{k_1 p + k_2 + k_1 p^2}{p} \cdot \frac{k}{p} \cdot \varepsilon(p)$$

або

$$\varepsilon(p) \left[1 + \frac{k(k_1 p + k_2 + k_1 p^2)}{p^2} \right] = x^*(p),$$

або

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{p^2 + k(k_1 p + k_2 + k_1 p^2)} \cdot x^*(p).$$

Отже, якщо $x^*(t) = at^2/2$, то $x^*(p) = a/p^3$, а

$$\varepsilon_3(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^2}{p^2 + k(k_1 p + k_2 + k_1 p^2)} \cdot \frac{a}{p^3} = \frac{a}{kk_2} = const.$$

Чим більший коефіцієнт об'єкта k і k_2 ПД-регулятора, тим менше усталена похибка за прискоренням a . Похибки за положенням і за швидкістю САК з астатизмом другого порядку дорівнюють нулю.

Якщо передаточну функцію $W_\varepsilon(p)$ по похибці $\varepsilon(t)$ подати степеневим рядом, розділивши чисельник на знаменник, наприклад, для

$$W_\varepsilon(p) = \frac{p}{p + k'}$$

$$\begin{array}{r}
- \frac{p}{p + \frac{p^2}{k}} \left| \frac{k+p}{\frac{p}{k} - \frac{p^2}{k^2} + \frac{p^3}{k^3} - \frac{p^4}{k^4} + \dots} \right. \\
- \frac{\frac{p^2}{k}}{\frac{p^2}{k} - \frac{p^3}{k^2}} \\
- \frac{\frac{p^3}{k^2}}{\frac{p^3}{k^2} + \frac{p^4}{k^3}} \\
- \frac{\frac{p^4}{k^3}}{\frac{p^4}{k^3} - \frac{p^5}{k^4}} \\
\dots\dots
\end{array}$$

то відповідні складові ряду

$$0 + \frac{p}{k} - \frac{p^2}{k^2} + \frac{p^3}{k^3} - \frac{p^4}{k^4} \dots$$

будуть відповідними коефіцієнтами усталеної похибки:

$$W_{\varepsilon}(p) = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots + C_n p^n,$$

де: C_0 – коефіцієнт похибки за положенням;

C_1 – коефіцієнт похибки за швидкістю;

C_2 – коефіцієнт похибки за прискоренням.

Переходячи до часових характеристик від $p^k \cdot x^*(p)$, ($k = 0, 1, 2 \dots n$)

до оригіналів $d^k x^*(t)/dt^k$, отримаємо похибку $\varepsilon(t)$ САК, представлені рядом:

$$\varepsilon(t) = C_0 \cdot x^*(t) + C_1 \frac{dx^*}{dt} + C_2 \frac{d^2 x^*}{dt^2} + \dots + C_n \frac{d^n x^*}{dt^n}.$$

Так для попереднього прикладу

$$C_0 = 0; C_1 = \frac{1}{k}; C_2 = -\frac{1}{k^2}; C_3 = \frac{1}{k^3}; C_4 = \frac{1}{k^4},$$

тоді

$$\varepsilon(t) = 0 \cdot x^*(t) + \frac{1}{k} \cdot \frac{dx^*}{dt} - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2x^*}{dt^2} + \frac{1}{k^3} \cdot \frac{d^3x^*}{dt^3} - \frac{1}{k^4} \cdot \frac{d^4x^*}{dt^4} \dots$$

Отже, для

$$x_1^*(t) = 1(t), \quad \varepsilon(\infty) = 0;$$

$$x_2^*(t) = v \cdot t, \quad \varepsilon(\infty) = v/k;$$

$$x_3^*(t) = at^2/2, \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(0 \cdot (at^2/2) + (2at/k) - (2a/k^2) + \right. \\ \left. + (1/k^3) \cdot 0 - \dots \right) \rightarrow \infty.$$

Таким чином, САК (рис.10.2) може відслідковувати в усталеному режимі лише сталу величину $x^*(t) = const$.

Система (рис. 10.3) з ПД-регулятором і тим же об'єктом керування, як було показано, відслідковує без похибки в усталеному режимі лінійно зростаючу функцію $x^*(t) = v \cdot t$ і зі сталою похибкою a/kk_2 – квадратично зростаючу $x^*(t) = at^2/2$. При цьому, чим більші k і k_2 , тим менше $\varepsilon(\infty)$.

Однак, розглянемо, як вплине на перехідний процес і стійкість САК збільшення k і k_2 . Запишемо замкнену передаточну функцію САК (рис. 10.3):

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{\left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3p\right) \cdot \frac{k}{p}}{1 + \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3p\right) \cdot \frac{k}{p}} = \\ = \frac{k(k_3p^2 + k_1p + k_2)}{(1 + kk_3)p^2 + kk_1p + k_2k} = \frac{b_3(p)}{a_3(p)},$$

де $a_3(p)$ – характеристичний поліном, корені якого визначають якість і стійкість перехідного процесу:

$$p_{1,2} = -\frac{kk_1}{2(1 + kk_3)} \pm \sqrt{\frac{(kk_1)^2}{4(1 + kk_3)^2} - \frac{kk_2}{1 + kk_3}},$$

наближено, враховуючи, що $kk_3 \gg 1$, отримаємо, що

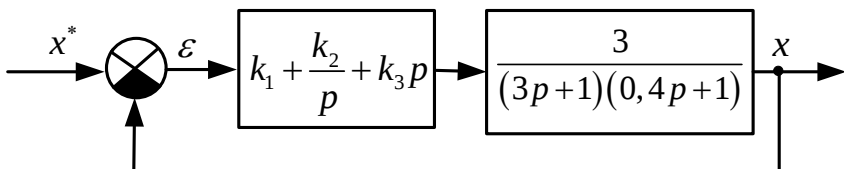
$$p_{1,2} = -\frac{k_1}{2k_3} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_3^2} - \frac{k_2}{k_3}} = -\alpha \pm j\beta.$$

Отже, за незмінної огибаючої $e^{-\alpha t}$, чим більше k_2 , тим більше коливальність перехідного процесу $x(t)$, необхідно, щоб k_1^2 було більше $4k_3k_2$ (тоді під коренем буде додатне число і процес буде аперіодичним).

ТЕСТ

- Дослідити усталену похибку для Вашої САК з П-, ПІ-, ПІД-регулятора для типових входних впливів.

Приклад:



$$\begin{aligned} W_\varepsilon &= \frac{1}{1 + \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3p\right) \cdot 3} \\ &= \frac{(3p+1)(0.4p+1)}{(3p+1)(0.4p+1) + 3\left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3p\right)} = \\ &= \frac{(1.2p^2 + 3.4p + 1) \cdot p}{(1.2p^2 + 3.4p + 1) \cdot p + (k_1p + k_2 + k_3p^2)} = \\ &= \frac{1.2p^3 + 3.4p^2 + p}{1.2p^3 + (3.4 + 3k_3)p^2 + (1 + 3k_1)p + 3k_2}. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p} = 0,$$

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{U}{p^2} = \frac{U}{3k_2} = \text{const},$$

$$\varepsilon_3(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{a}{p^3} \Rightarrow \infty.$$

Знайдемо k_2 за умови стійкості САК:

$$a_3(p) = 1,2p^3 + (3,4 + 3k_3)p^2 + (1 + 3k_1)p + 3k_2$$

для стійкості САК, необхідно, щоб

$$(3,4 + 3k_3)(1 + 3k_1) > 3,6k_2, \text{ тобто}$$

$$k_2 < \frac{(3,4 + 3k_3)(1 + 3k_1)}{3,6} \approx \frac{9k_1k_3}{3,6} \approx 2,5k_1k_3$$

Якщо $\varepsilon_2(\infty)$ задана, то $k_2 = \frac{U}{3\varepsilon_2(\infty)}$, а умову стійкості і, навіть, аперіодичність перехідних процесів забезпечимо вибором k_1 і k_3 . Однак k_3 обмежено шумами на вході, тому вибором k_1 .

Розрахуємо коефіцієнти похибки, розклавши $W_\varepsilon(p)$ шляхом ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{l} - \frac{p + 3,4p^2 + 1,2p^3}{p + \frac{(1+3k_1)}{3k_2}p^2 + \dots} \quad \left| \frac{3k_2 + (1+3k_1)p + (3,4 + 3k_3)p^2 + 1,2p^3}{\frac{p}{3k_2} + \left(3,4 - \frac{1+3k_1}{3k_2}\right)p^2 \dots}, \text{ тоб то} \right. \\ \hline \frac{p}{3k_2} + \frac{\left(3,4 - \frac{1+3k_1}{3k_2}\right)}{(3k_2)}p^2 \dots \quad W_\varepsilon(p) = 0 + \frac{p}{3k_2} + \frac{\left(3,4 - \frac{1+3k_1}{3k_2}\right)}{(3k_2)}p^2 \dots \end{array}$$

$$\varepsilon(t) = c_0 x^*(t) + \frac{1}{3k_2} \cdot \frac{dx^*}{dt} + \frac{3,4 - \frac{1+3k_1}{3k_2}}{3k_2} \cdot \frac{d^2 x^*}{dt^2} + \dots$$

10.1.2 Оцінювання усталеної похибки за збуренням САК

Збурення $f(t)$, яке діє на САК у відповідному місці, спотворює вихідну змінну $x(t)$ об'єкта керування. Тому його вплив в усталеному режимі роботи САК також важливо дослідити. Як приклад, подамо САК у вигляді (рис. 10.4):

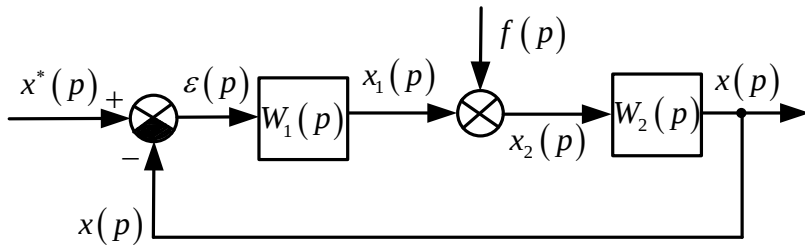


Рис. 10.4. Структурна схема

Скористаємося методом (розділ 7.4) еквівалентних структурних перетворень: САК (рис. 10.4) переведемо в САК (рис. 10.5), а її – в САК (рис. 10.6):

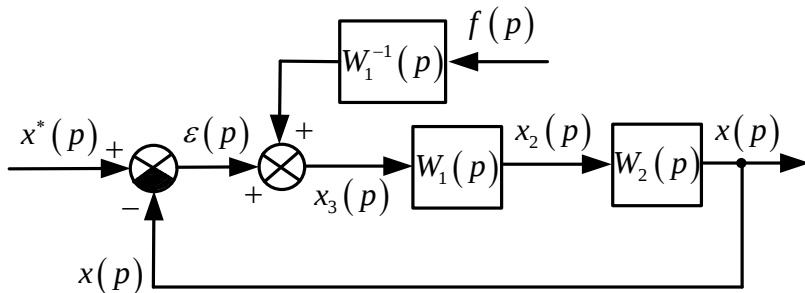


Рис. 10.5. Перетворена структурна схема

За такого перетворення $x_2(p)$ не зміниться:

$$x_2(p) = f(p) + W_1(p) \cdot \varepsilon(p) = W_1(p)[\varepsilon(p) + W_1^{-1}(p) \cdot f(p)].$$

Змінні $x_3(p)$ і $\varepsilon(p)$ на рис. 10.5 не зміняться, якщо поміняти місцями суматори:

$$x_3(p) = W_1^{-1}(p) \cdot f(p) + \varepsilon(p).$$

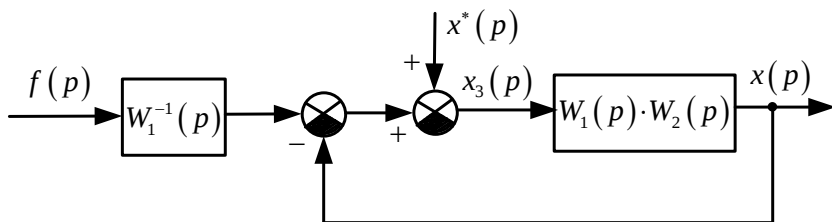


Рис. 10.6. Перетворена структурна схема

Тут

$$x_3(p) = (x^* - x(p)) + W_1^{-1}(p) \cdot f(p) = \varepsilon(p) + W_1^{-1}(p) \cdot f(p).$$

Визначаючи передаточну функцію по збуренню зі схеми (рис. 10.4), покладемо, що вхідна змінна $x^*(t) = 0$, тоді $x(t) = \varepsilon(t)$, а $W_\varepsilon(p)$ по $f(p)$, дорівнюватиме відношенню $\varepsilon(p)$ до $f(p)$:

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(p) \Big|_{x^*(t)=0} &= W_\varepsilon(p) \cdot W_1^{-1}(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \cdot W_1^{-1} = \\ &= \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}. \end{aligned}$$

Відповідно, усталена похибка по збуренню, за теоремою Лапласа, дорівнює:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \cdot f(p).$$

Задаючись стандартними впливами $f(t)$ (стала, лінійно зростаюча, квадратично і т.д.), отримаємо похибки слідування за $f(t)$ по положенню, якщо $f(t) = \text{const}$, по швидкості, якщо $f(t) = v \cdot t$, по прискоренню, якщо $f(t) = at^2/2$ і т.д.

Так, якщо в САК з ПД-регулятором (рис. 10.3) до керуючого впливу $U(t)$ додається збурення $f(t)$ (рис. 10.7), то похибка $\varepsilon(p)$ САК буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= \frac{\frac{k}{p}}{1 + \left(k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 p\right) \cdot \frac{k}{p}} \cdot f(p) = \\ &= \frac{k \cdot p}{(1 + k k_3) p^2 + k k_1 p + k k_2} \cdot f(p).\end{aligned}$$

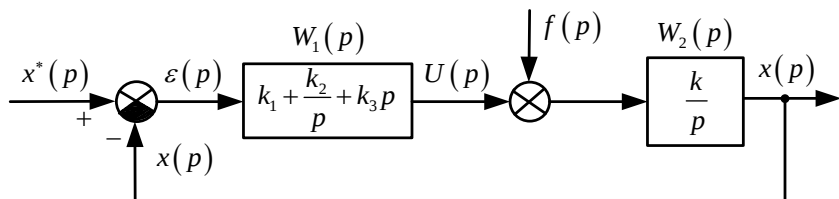


Рис. 10.7. Структурна схема

Якщо $f(t) = \text{const}$, то $f(p) = f_0/p$ і усталена похибка від впливу сталої складової збурення за теоремою Лапласа буде дорівнюватиме нулю:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \frac{k \cdot p}{(1 + k k_3) p^2 + k k_1 p + k k_2} \cdot \frac{f(p)}{p} \equiv 0.$$

Якщо $f(t) = v \cdot t$, то $f(p) = v/p^2$, а $\varepsilon(\infty) = v/k_2$ – стала величина, тим менша, чим більший коефіцієнт k_2 в ПД-регуляторі.

У тому випадку, якщо збурення $f(t)$ безпосередньо вимірюється, для САК (рис. 10.7) можна ввести додатковий зв'язок по $f(t)$ повністю компенсуючий вплив збурення на вихідну змінну $x(t)$ (рис. 10.8).

Завдяки такій диференційній вишці, збурення зі знаком «плюс» діє на вхід ланки k/p і, проходячи через пряму і зворотню передаточні функції ПД-регулятора, діє зі знаком «мінус», повністю компенсуючи свій вплив на $x(t)$, не залежно від виду $f(t)$.

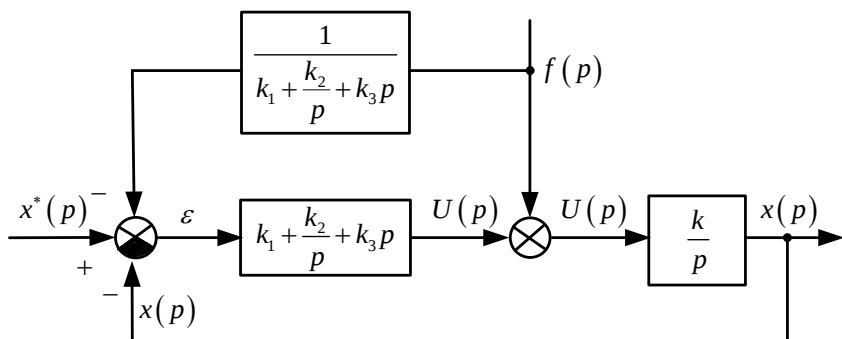
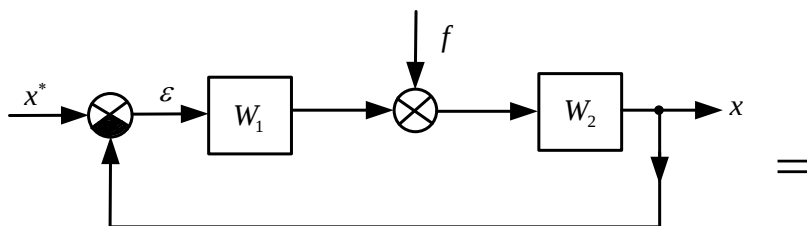
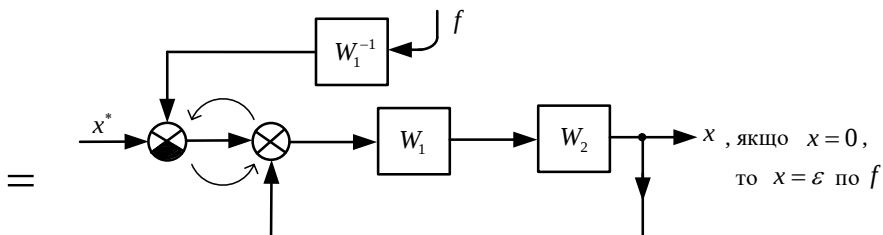
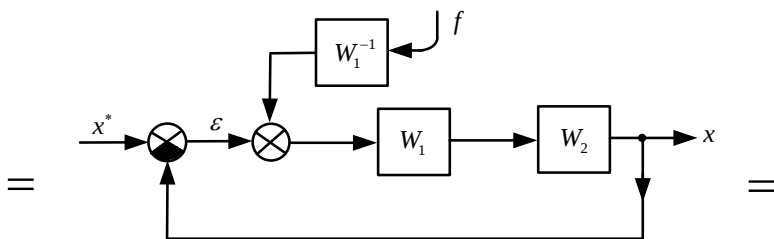


Рис. 10.8. Інваріантність до збурення

ТЕСТ 1

- Для САК (рис. 10.7), у якій замість k/p стоїть Ваша передавальна функція ДПС, розрахуйте усталену похибку по збуренню $i_{\text{я}}(t)$, яке задане типовими впливами $I_{\text{я}}(t) \cdot 1(t)$, $I_{\text{я}}(t) \cdot v \cdot t \cdot 1(t)$, $I_{\text{я}}(t) \cdot (vt^2/2) \cdot 1(t)$, де $I_{\text{я}}$ дорівнює номеру Вашого варіанту.



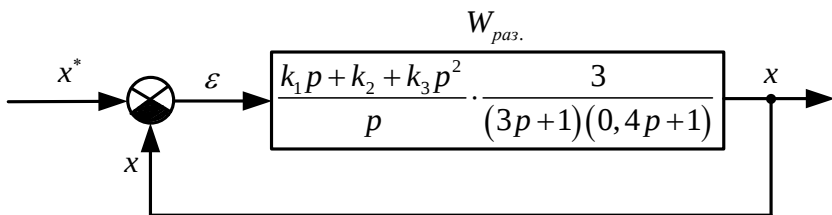


$$x = \varepsilon = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2} \cdot W_1^{-1} \cdot f = \frac{W_2}{1 + W_1 W_2} \cdot f$$

Тобто $W_\varepsilon = \frac{W_2}{1 + W_1 W_2} \cdot f$,

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot f(p)$$

ТЕСТ 2



$$W_\varepsilon = \frac{1}{1 + W_{paz.}} = \frac{k_1 p + k_2 + k_3 p^3}{p} \cdot \frac{3}{(3p+1)(0.4p+1)}$$

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p} = 0$$

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{U}{p^2} = \frac{U}{3k_2}$$

$$\varepsilon_3(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot \frac{a}{p^3} \rightarrow \infty$$

Тобто ця САК є остаточною з

$\varepsilon(\infty)$ при $x^* = 1(t) = 0$;

$\varepsilon(\infty)$ при $x^* = Ut = \frac{U}{3k_2}$;

$\varepsilon(\infty)$ при $x^* = \frac{at^2}{2} \rightarrow \infty$.

Оцінювання $\varepsilon(\infty)$ за $f(t)$.

10.1.3 Оцінювання усталеної похибки САК під дією періодичного вхідного впливу

Синусоїдний задавальний $x^*(t)$ чи збурюючий $f(t)$ сигнал в розкладанні його в ряд Фур'є має єдину складову, наприклад:

$$x^*(t) = x_m \sin \omega t.$$

Однак, розкладання синусу в степеневий ряд Тейлора буде, окрім складових vt , $at^2/2$ і так далі, нескінченно багато складових вищого порядку. Тому для дослідження якості САК в усталеному режимі доцільно скористатися частотними характеристиками передаточної функції за похибкою.

Так для САК (рис. 10.2):

$$W_{\varepsilon_y}(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cdot e^{j(\pi/2) - j \arctg(\omega/k)},$$

де

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = M_{\varepsilon_y}(\omega), \quad \varphi_{\varepsilon_y}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega}{k}.$$

Тоді для вхідного синусоїдного сигналу одиничної амплітуди і частоти ω :

$$\varepsilon_y(t) = M_{\varepsilon}(\omega) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega}{k}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Як бачимо, чим більше k і менше ω , тим менша амплітуда ε_m похибки $\varepsilon_y(t)$, а кут зсуву фаз – між $\varepsilon(t)$ і $x^*(t)$ наближається до $\pi/2$; і навпаки, чим менше k і більше ω , тим ближче амплітуда ε_m до x_m , а кут φ – до нуля.

Для САК (рис. 10.3):

$$\begin{aligned}
 W_{\varepsilon}(j\omega) &= \frac{\omega^2}{-\omega^2 + k(j\omega k_1 + k_2 - \omega^2 k)} = \\
 &= -\frac{\omega^2}{-j\omega k k_1 + (k k_2 - \omega^2(1 + k_3))} = \\
 &= \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega k k_1)^2 + (k k_2 - \omega^2(1 + k_3))^2}} \cdot e^{j\varphi(\omega)},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega k k_1)^2 + (k k_2 - \omega^2(1 + k_3))^2}} &= M_{\varepsilon_y}(\omega), \\
 \varphi_{\varepsilon}(\omega) &= \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega k k_1}{k k_2 - \omega^2(1 + k_3)} = \pi - \varphi.
 \end{aligned}$$

Отже, якщо $x^*(t) = \sin \omega t$, то усталена похибка $\varepsilon_y(t)$ дорівнюватиме

$$\varepsilon_y(t) = M_{\varepsilon_y}(\omega) \cdot \sin(\omega t + \pi - \varphi)$$

і буде тим менше, чим менше ω , і чим більше k, k_1, k_2 . А зі зростанням ω (доки $k k_2$ не зрівняється з $\omega^2(1 + k_3)$) амплітуда $\varepsilon_y(t)$ буде прискорено зростати, далі зростання її уповільнюється і в подальшому амплітуда $\varepsilon_y(t)$ зменшується, якщо ω зростає. Це пояснюється впливом диференціюючої складової $k_3 p$ ПД-регулятора.

У випадку *періодичного не синусоїдного вхідного впливу* на САК, її усталена похибка $\varepsilon_y(t)$ розраховується як алгебраїчна сума похибок від складових ряду Фур'є, в якій розкладається періодична не синусоїдна функція вхідного сигналу.

Ряд Фур'є періодичного не синусоїдного сигналу $x^*(t)$:

$$x^*(t) = X_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} A_k \sin i\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos i\omega t$$

або

$$x^*(t) = X_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} X_{mi} \sin(k\omega t + \Psi_k),$$

де:

$$X_0^* = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) dt - \text{середнє значення } x^*(t);$$

$$A_i = \frac{2}{T} \int_0^T x^*(t) \sin(i\omega t) dt,$$

$$B_i = \frac{2}{T} \int_0^T x^*(t) \cos(i\omega t) dt,$$

$$X_{ik} = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}; \Psi_i = \arctg(B_i/A_i).$$

Отже $x^*(t)$ представляє суму:

$$x^*(t) = \sum X_{mi} \cdot \sin(k\omega t + \Psi_k), i = 1, 2 \dots$$

і для кожної i -ої складової розраховується відповідна складова усталеної похибки

$$\varepsilon_{yi}(t) = \varepsilon_{mi} \sin(i\omega t + \Psi_{yi}),$$

складаючи які отримуємо шукану усталену похибку:

$$\varepsilon_y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{yi}(t).$$

Наприклад, якщо на схему (рис. 10.2) діє $x^*(t) = \text{sign} \sin \omega t$.

Розкладаючи в ряд Фур'є отримаємо суму непарних гармонік:

$$X_0^*(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sign} \sin \omega t = 0,$$

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{T} \int_0^T \text{sign} \sin \omega t \cdot \sin(i\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(i\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T \sin(i\omega t) dt. \end{aligned}$$

Обчислимо спочатку:

$$\int_0^{T/2} \sin(i\omega t) dt = \frac{1}{i\omega} \int_0^{\pi} \sin i\omega t d(i\omega t) = \frac{1}{i\omega} (-\cos i\omega t)_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{i\omega}, & i = 2n + 1, n = 0, 1, 2 \dots \\ 0, & i = 2n, \end{cases}$$

аналогічно:

$$\int_{T/2}^T (\cdot) = \begin{cases} \frac{2}{i\omega}, & i = 2n + 1, n = 0, 1, 2 \dots \\ 0, & i = 2n \end{cases}.$$

Тоді:

$$A_i = \frac{2}{T} \cdot \frac{4}{i\omega} = \frac{8}{Ti \frac{2\pi}{T}} = \frac{4}{i\pi}, i = 2n + 1, n = 0, 1, 2 \dots,$$

$$B_i = 0,$$

а $x^*(t)$ дорівнюватиме:

$$x^*(t) = \sum_{\substack{i=2n+1, \\ n=0,1,2}}^{\infty} \frac{4}{i\pi} \sin i\omega t \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{i=2n+1, \\ n=0,1,2}}^N \frac{\sin i\omega t}{i}.$$

Тепер для кожної i -ої складової $x^*(t)$ знаходимо усталену похибку $\varepsilon_{iy}(t)$:

$$\varepsilon_{iy}(t) = \frac{i\omega}{\sqrt{(i\omega)^2 + k^2}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin i\omega t}{i}.$$

Загальна усталена похибка:

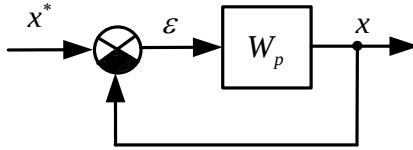
$$\varepsilon_y(t) \cong \sum_{\substack{i=2n+1, \\ n=0,1,2}}^N \frac{\omega}{\sqrt{(i\omega)^2 + k^2}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sin i\omega t.$$

Р.С. Кути $\varphi_i(\omega)$ дорівнюють нулю, оскільки $B_i = 0$, а $\varphi_i = \arctg(B_i/A_i) = 0$.

Як бачимо в САК (рис. 10.2), чим більший коефіцієнт k , тим менше усталена похибка $\varepsilon_y(t)$.

ТЕСТ

- Розрахувати і побудувати залежність усталеної похибки $\varepsilon(\infty)$ Вашої САК під дією синусоїдного сигналу $x(t)$ на вході САК. Дослідити, як впливають частота ω сигналу $x(t)$ та параметри ПІД-регулятора на амплітуду і фазу похибки $\varepsilon(t)$.



В моєму
прикладі

$$W_p(j\omega) = \frac{k_1 j\omega + k_2 - k_3 \omega^2}{j\omega} \cdot \frac{3}{(j\omega 3 + 1)(j\omega 0,4 + 1)}$$

$$W_\varepsilon = \frac{1}{1 + W_p} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 j\omega + k_2 - k_3 \omega^2}{j\omega} \cdot \frac{3}{(j\omega 3 + 1)(j\omega 0,4 + 1)}} =$$

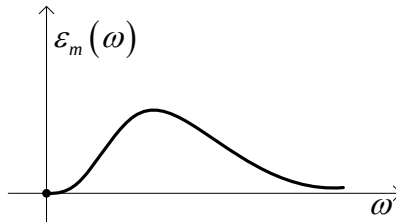
$$= \frac{j\omega(3j\omega + 1)(0,4j\omega + 1)}{j\omega(j3\omega + 1)(0,4j\omega + 1) + (k_1 j\omega + k_2 - k_3 \omega^2)}$$

Модуль W_ε дорівнює відношенню модулів:

$$W_\varepsilon(\omega) = \frac{\omega \sqrt{1 + 9\omega^2} \cdot \sqrt{1 + 0,16\omega^2}}{-j1,2\omega^3 - 3,4\omega^2 + j\omega + k_1 j\omega + k_2 - k_3 \omega^2} =$$

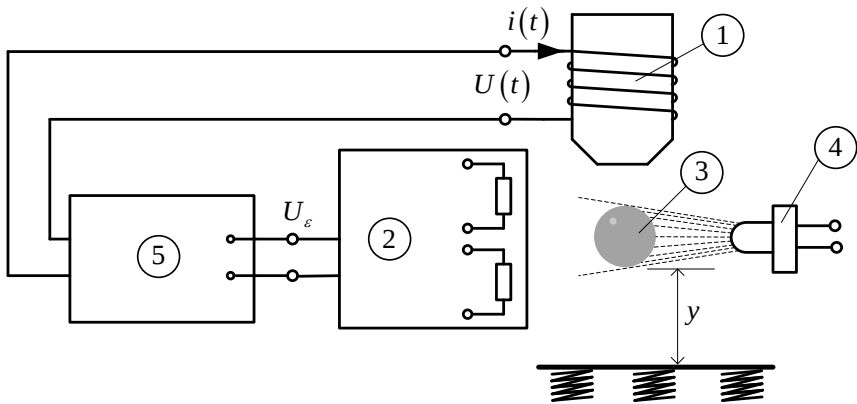
$$= \frac{\omega \sqrt{1 + 9\omega^2} \cdot \sqrt{1 + 0,16\omega^2}}{\sqrt{(k_2 - k_3 - 3,4)^2 \omega^4 + [(k_1 + 1)\omega - 1,2\omega^3]^2}}$$

$W_\varepsilon(\omega)$ - це амплітуда $\varepsilon(\infty)$, як функція від ω :



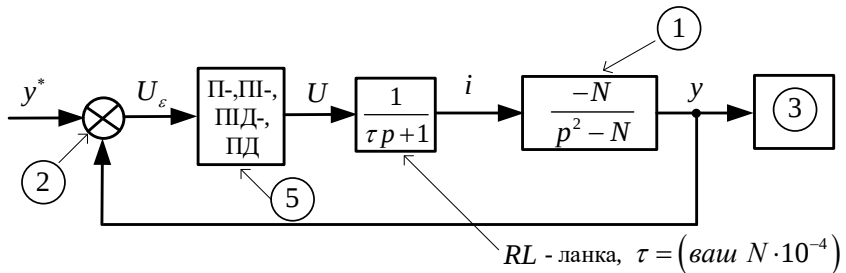
Підсумкова контрольна робота

На основі ТОЕ, електротехніки, фізики запропонуйте конструкцію і розрахуйте за якого регулятора (П- чи ПІ-, чи ПІД-, чи ПД-) система утримання феромагнітної кульки на висоті «у» буде стійкою (у малому).



1– електромагніт; 2 – мостова схема вимірювання відхилення Δy від заданого шляхом розбалансу моста при $\Delta y \neq 0$; 3 – кулька; 4 – джерело світла; 5 – підсилювач та регулятор, побудований на операційних підсилювачах.

Структура схем САК:



P.S. Зверніть увагу, що в об'єкті $(-N)$, де N – номер Вашого варіанта. Тоді в $\otimes$ треба не $\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$, а $\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix}$.

1. Виконати моделювання в системі MATLAB (Simulink) Вашої САК.
 2. Зробити відповідні висновки.
-

10.2 Прямі показники якості перехідних процесів у САК

Прямі показники якості перехідного процесу в САК визначають безпосередньо по перехідному процесу виходу $x(t)$ системи, як реакції на стандартний вхідний вплив $x^*(t)$ у вигляді функції Хевісайда $x^*(t) = 1(t)$ або дельта-функції Дірака

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

За функцією Хевісайда отримуємо реакцію $x(t)$ у вигляді перехідної функції $h(t)$, за функцією Дірака – імпульсну перехідну функцію $w(t)$. Як правило, для більшості об'єктів визначають $h(t)$. Однак, якщо об'єкт сильно коливальний і має технологічні обмеження на відхилення $x(t)$ від базового режиму (наприклад, сильно маневрений літак, що має коливальний процес і малий або відсутній запас стійкості), то в якості $x^*(t)$ використовують короткий імпульс $\hat{\delta}(t)$, який при оцінюванні прямих показників якості динаміки об'єкта приводиться до еквівалентної йому дії на об'єкт δ – функції Дірака (рис. 10.9):

$$x^*(t) = S_i \cdot \delta(t),$$

де S_i – площа.

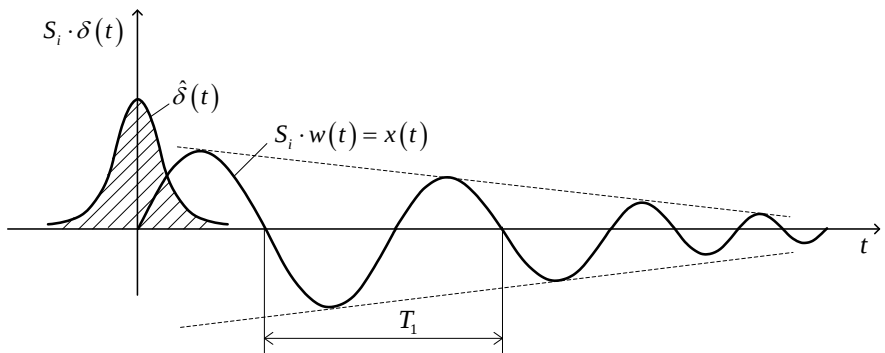


Рис. 10.9. Імпульсна перехідна функція

За графіком (рис. 10.9) можна наближено обчислити такі прямі показники, як **час $t_{п.п.}$ перехідного процесу** (час виходу в 5% зону від амплітуди першої хвилі), **показник $m_{зг.}$ інтенсивності згасання** амплітуди за один період.

Для цього $x(t)$ подамо, як реакцію коливальної ланки другого порядку на δ – функцію:

$$x(t) \cong x_m \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t.$$

Перший максимум $x(t)$ буде, коли $\omega t_1 = \pi/2$, другий – через період $T = 2\pi/\omega$.

Тоді відношення другої амплітуди хвилі коливань до першої складе показник їх згасання $m_{зг.}$:

$$m_{зг.} = \frac{x_m \cdot e^{-\alpha(t_1+T)} \cdot \sin \omega(t_1 + T)}{x_m \cdot e^{-\alpha t_1} \cdot \sin \omega t_1} = e^{-\alpha T} = e^{-(2\pi\alpha/\omega)}.$$

Кількість n коливань до виходу $x(t)$ в 5% зону x_m .

За реакцією САК на функцію Хевісайда $1(t)$ (рис. 10.10) отримують не параметричну модель перехідної функції $h(t)$ з такими прямими показниками якості:

- час перехідного процесу $t_{п.п.}$ або час регулювання t_p . Це час, за який керована змінна $x(t)$ попадає в зону, як правило, $\pm(3 \div 5)\%$ відхилення від усталеного значення;
- час усталення t_y – проміжок часу, за якого $h(t)$ вперше перетинає усталене значення $h_{уст.}$;
- кут $\alpha = \arctg \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_y}$, під яким вперше $h(t)$ перетинає $h_{уст.}$;
- відносне перерегулювання σ визначається як відношення у відсотках абсолютного максимального відхилення Δh_{max} до усталеного значення $h_{уст.}$:

$$\sigma\% = \frac{h_{max} - h_{уст.}}{h_{уст.}} \cdot 100\%.$$

Як правило, вважають, що запас стійкості САК є достатнім, якщо $\sigma = (10 \div 20)\%$. Для монотонного перехідного процесу (без перерегулювання) $\sigma = 0$. Наприклад, в САК ліфтом.

- число n коливань $h(t)$ в межах часу t_p регулювання. На рис. 10.10 $n = 2,5$. Чим менше n , тим менше коливальність перехідного процесу $x(t)$. Залежно від призначення САК в якості вхідного сигналу $1(t)$ використовують у **системах стабілізації сходінку збурення** $f(t) = 1(t)$, у **слідкуючих** і програмних САК – **сходінку вхідного сигналу** $x^*(t) = 1(t)$.

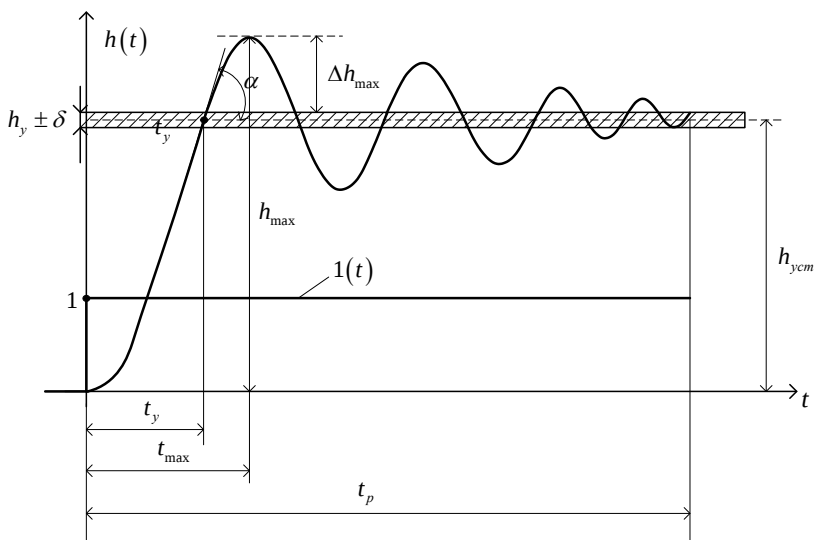


Рис. 10.10. Перехідна функція

10.3 Непрямі показники якості САК

10.3.1 Діаграма Вишнєградського

Для САК, характеристичний поліном $a_3(p)$ якої має третій порядок, як уже раніше було розглянуто, можна отримати зв'язок виду перехідного процесу і стійкості залежно від двох параметрів приведенного характеристичного поліному $a_3(p)$:

- звичайний поліном:

$$a_3(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0;$$

- поліном з однозначно визначеними коефіцієнтами:

$$\frac{a_0}{a_3} p^3 + \frac{a_1}{a_3} p^2 + \frac{a_2}{a_3} p + 1 = 0;$$

- новий масштаб у часі:

$$T = \omega_0 t; \quad p = \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{dT} = \omega_0 D;$$

- повторне нормування коефіцієнтів за умови, що довільна

$$\omega_0 = \sqrt[3]{a_3/a_0};$$

$$\frac{a_0}{a_3} \omega_0^3 D^3 + \frac{a_1}{a_3} \omega_0^2 D^2 + \omega_0 D + 1 = 0$$

або

$$D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1 = 0,$$

де

$$\alpha = \frac{a_1}{a_3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2}, \quad \beta = \frac{a_2}{a_3} \cdot \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}};$$

- далі, за методом D -розбиття, поклавши, що один з коренів приведенного характеристичного полінома $a_3(D) = 0$, є уявним: $D_1 = j\omega$, знаходимо межу областей стійкості і коливальної нестійкості САК:

$$(j\omega)^3 - \alpha\omega^3 + \beta j\omega + 1 = 0$$

або окремо для дійсної і уявної складових:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(-\omega^2) + \beta \cdot 0 &= -1 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot \omega &= \omega^3 \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \omega^3 & \omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta} = \frac{1}{+\omega^2};$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & -1 \\ 0 & \omega \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta\beta}{\Delta} = +\omega^2;$$

$$\Delta = -\omega^3;$$

- при русі від $(-\infty)$ до 0 і від 0 до ∞ , оскільки $\Delta < 0$, то штрихуємо гіперболу $\alpha\beta = 1$ *праворуч* (рис. 10.11):

$$\beta = \frac{1}{\alpha} = \omega^2;$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Далі, задаючись різними видами коренів, наприклад $D_1 = -\alpha$; $D_{2,3} = -\alpha \pm j\omega$, отримаємо межу між другою і четвертою зонами; коренями $D_1 = -\alpha_1$; $D_2 = D_3 = -\alpha$, де $|\alpha| < |\alpha_1|$, отримаємо межу між третьою і четвертою зонами. Кожна зона, відповідно до розташування коренів D_1, D_2, D_3 , має характерний перехідний процес $x(t)$ (рис. 10.11).

За умови, що $D_1 = D_2 = D_3 = \alpha$ отримаємо точку А на площині (α, β) .

На рис. 10.11 зона 1 відповідає не стійкій коливальній САК; зона 2 – стійкій коливальній; зона 3 – монотонному перехідному процесу (без зміни знаку $x(t)$); зона 4 – аперіодичному.

Як приклад, визначимо деякі межі між зонами 2÷4.

- покладемо $D = -\gamma + j\omega$ і підставимо в приведений кубічний поліном:

$$\begin{aligned} & (D^3 + \alpha D^2 + \beta D + 1) \Big|_{D = -\gamma + j\omega} = \\ & = \alpha[(\gamma^2 - \omega^2) - 2j\gamma\omega] + \beta(-\gamma + j\omega) + \\ & + 1 - \gamma^3 + 3\gamma\omega^2 - j\omega(3\gamma^2 - \omega^2) = 0; \end{aligned}$$

- попередня тотожність нулю справедлива окремо для дійсної і уявної складових:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\gamma^2 - \omega^2) - \beta\gamma &= \gamma^3 - 1 - 3\gamma\omega^2 \\ -\alpha \cdot 2\gamma\omega + \beta \cdot \omega &= \omega(\omega^2 - 3\gamma^2) \end{aligned} \right\};$$

- рішення α, β цієї системи:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1 + 2\omega^2\gamma + 2\gamma^3}{\gamma^2 + \omega^2} = 2\gamma + \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} \\ \beta &= \frac{2\omega^2\gamma^2 + \gamma^4 + \omega^4 + 2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} + \gamma^2 + \omega^2 \end{aligned} \right\};$$

- якщо покласти, що $D = -\gamma$, то кубічний поліном D набуває такого вигляду:

$$\alpha\gamma^2 - \beta\gamma = \gamma^3 - 1;$$

- із останніх трьох рівнянь, задаючись різними значеннями γ і ω , отримуємо рівняння відповідних меж:

- межа стійкості ($\gamma = 0$) між зонами 1 і 2:

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2}, \beta = \omega^2; \alpha\beta = 1;$$

- межа зони аперіодичності ($\omega = 0$) між зонами 2 і 4:

$$\alpha = \frac{1 + 2\gamma^3}{\gamma^2}, \beta = \frac{\gamma^3 + 2}{\gamma}.$$

Якщо виключити γ , то отримаємо:

$$\alpha^2\beta^2 - 4(\alpha^3 + \beta^3) + 18\alpha\beta - 27 = 0;$$

і так далі.

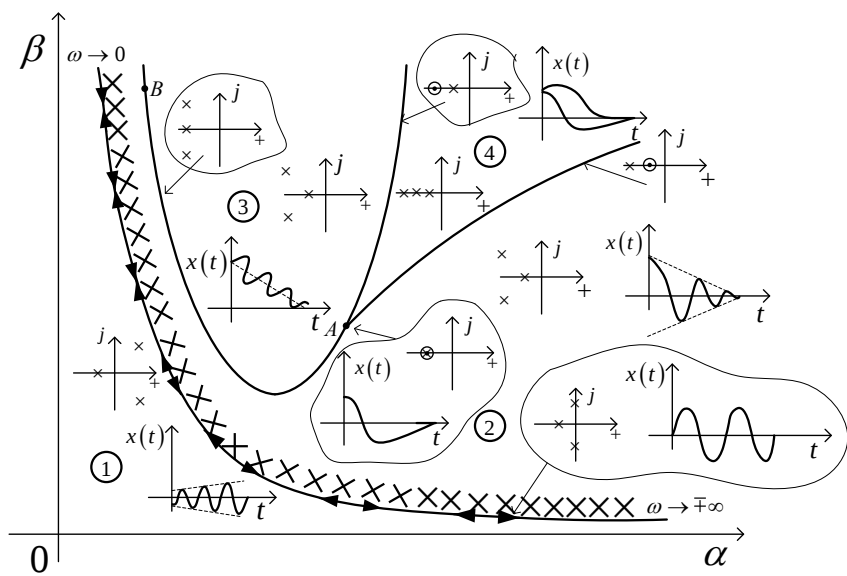


Рис. 10.11. Діаграма Вишнеградського

11 НЕПРЯМІ (КОРЕНЕВІ) ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ САК

Кореневі критерії якості САК встановлюють зв'язок між розташуванням полюсів $p_i, i = \overline{1, n}$, характеристичного полінома $a_3(p)$ і прямими показниками: час $t_{п.п.}$ перехідного процесу $x(t)$, перерегулювання σ , коливальність чи аперіодичність $x(t)$ та ін.

11.1 Ступінь стійкості

Так, Ципкіним Я.З. в 1946 році запропоноване поняття *ступені стійкості* η (рис. 11.12).

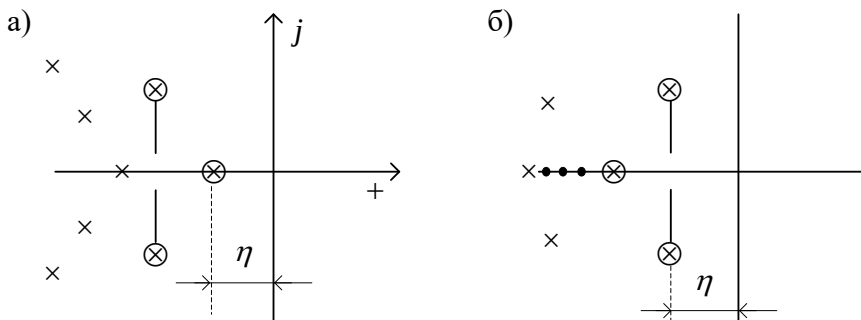


Рис. 11.12. Ступінь стійкості

Ступінь стійкості – це модуль відстані між найближчим зліва до уявної осі коренем і уявною віссю. Якщо найближчий корінь дійсний – це аперіодична ступінь стійкості (рис. 11.12, а), якщо комплексно спряжена пара – коливальна (рис. 11.12, б).

Щоб обчислити η , не визначаючи коренів p_i полінома $a_3(p) = 0$ використовують наступний підхід: в характеристичний поліном $a_3(p)$ вводять нову змінну $z = p + \eta$; тоді $p = z - \eta$ і $a_3(p) = a_0(z - \eta)^n + a_1(z - \eta)^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Тоді, розкривши дужки, отримаємо поліном відносно $z = p + \eta$, один дійсний або

комплексно-спряжені корені якого приймають значення 0 або $\pm j\omega$. Це відповідає тому, що зміщена на η система буде на межі аперіодичної або коливальної стійкості. Отже маємо поліном

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0,$$

коефіцієнти A_i ($i = \overline{0, n}$) якого, визначаються з поліному $a_3(p)$:

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \left. \frac{d^{n-k} a_3(p)}{dp^{n-k}} \right|_{p=-\eta}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad A_n = a_3(p) \Big|_{p=-\eta}.$$

Завдяки зсуву на η змінної z відносно p , поліном $A(z) = 0$ повинен мати один нульовий або два уявних кореня. Щоб визначити η , за якого це відбувається, можна скористатися, маючи поліном $A(z)$, різними методами:

1. *Метод послідовних наближень.*

Задаючись різними η , будуюмо годографи Михайлова і, інтерполюючи їх відстань до початку координат, уточнюємо η (рис. 11.13).

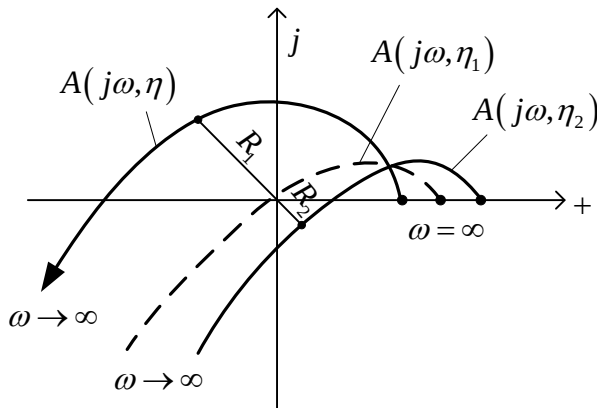


Рис. 11.13. Метод інтерполяції

Як видно з рис. 11.13, перше наближення η до η^* можна розрахувати шляхом інтерполяції:

$$\eta^* \approx \frac{\eta_1 \cdot R_2 + \eta_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2}.$$

Далі, за необхідності більшої точності, процес послідовних наближень можна продовжити до похибки в $2 \div 5\%$ від $\max A(j\omega)$ по ω .

2. За критерієм Гурвіца

Межа аперіодичної стійкості відповідає умові $A_n = 0$; межа коливальної стійкості $A_{n-1} = 0$.

2. За критерієм Найквіста, якщо маємо знаменник $a_p(p)$ розімкненої передаточної функції $W_p(p)$, то переходячи від p до z аналогічно отримаємо $A_3(z)$ і, інтерполюючи η , знаходимо η^* , за якого $A_3(j\omega)$ буде проходити через точку $(-1, j0)$.

Простий приклад.

$$a_3(p) = p^2 + p + 1 = 0.$$

Потрібно знайти невідому ступінь стійкості ($\eta = 0,5$) САК, не знаходячи корені $p_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 - 1}$. Отже із полінома $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, ($a_0 = a_1 = a_2 = 1$), визначимо поліном $A_3(z)$:

$$A_2 = a_3(p) \Big|_{p = -\eta} = \eta^2 - \eta + 1;$$

$$A_1 = \frac{da_3(p)}{dp} \Big|_{p = -\eta} = -2\eta + 1;$$

$$A_0 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 a_3(p)}{dp^2} \Big|_{p = -\eta} = 1.$$

Або

$$A_3(z) = z^2 + (1 - 2\eta)z + (1 - \eta + \eta^2).$$

За критерієм Гурвіца:

– межа аперіодичної стійкості, це умова, що $1 - \eta + \eta^2 = 0$, звідси $\eta = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 1}$. Це комплексне число, а η може бути тільки дійсним. Тобто, аперіодичної стійкості не існує;

– межа коливальної стійкості, це умова, що $1 - \eta = 0$, звідси $\eta = 0,5$.

4. За критерієм Михайлова

$$A_3(j\omega) = -\omega^2 + (1 - 2\eta) \cdot j\omega + (1 - \eta + \eta^2) \equiv 0$$

або

$$U(\omega) = -\omega^2 + (1 - \eta + \eta^2) \equiv 0,$$

$$V(\omega) = \omega(1 - 2\eta) \equiv 0.$$

За якоїсь ω годограф Михайлова проходить через нуль (рис. 11.14). З рівняння $V(\omega) = 0$, оскільки $\omega \neq 0$, знаходимо $\eta = 0,5$.

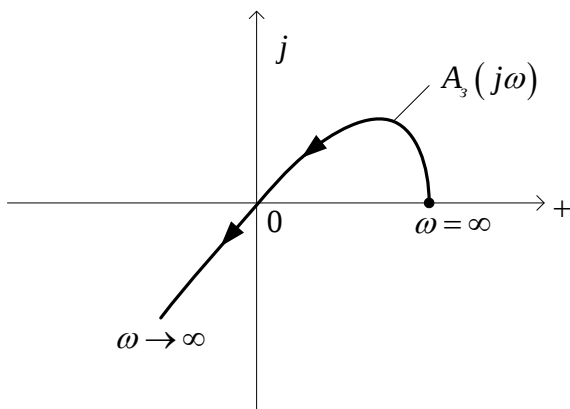


Рис. 11.14. Годогрaф Михайлова

5. Після визначення ступені стійкості η можна наближено розрахувати за нею *прямі показники* якості. Чим менше η , тим повільніше затухають перехідні процеси в САК:

– якщо найближчий до уявної осі корінь p_i дійсний ($|p_i| = \eta$), то перехідний процес $x(t)$ буде (в основному) аперіодичний з часом $t_{п.п}$ перехідного процесу приблизно 3τ , тобто:

$$t_{п.п} \approx \frac{3}{\eta};$$

– якщо найближче до уявної осі парара комплексно-спарених коренів $p_i = -\eta \pm j\beta$, то дуже наближено:

$$t_{п.п} \leq \frac{1}{\eta} \cdot \ln \frac{1}{\Delta},$$

де $\Delta \in (0,01 \div 0,05)$.

Сектор комплексної площі, в якому розташовані всі корені p_i полінома $a_3(p)$, визначає (рис. 11.15) показник μ *коливальності* $x(t)$ в САК:

$$\mu = \frac{\beta}{\eta}.$$

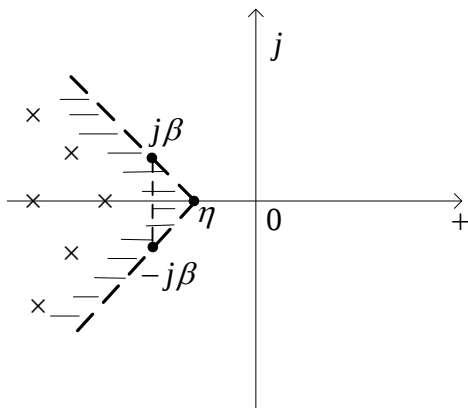


Рис. 11.15. Ступінь коливальності

Швидкість протікання перехідного процесу $x(t)$ пропорційна *середнє-геометричному* здобутку p_i :

$$\Omega = \sqrt[n]{|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n|},$$

що дорівнює (без визначення коренів p_i) кореню $\sqrt[n]{\dots}$ з відношення $\Omega = \sqrt[n]{|a_n/a_0|}$ полінома $a_3(p)$. При збільшенні Ω в m разів, перехідний процес $x(t)$ протікає в m разів швидше.

Для статичної САК (коли $\varepsilon(\infty) \neq 0$) коефіцієнт a_n в поліномі $a_3(p)$ буде дорівнювати коефіцієнту k_p розімкненої САК плюс 1: $a_n = k_p + 1$; – для астатичної, – $a_n = k_p$. Отже збільшення швидкодії може бути досягнуто (якщо це не вплине на стійкість САК) шляхом збільшення коефіцієнта k_p розімкненої частини САК.

Якщо САК має перехідну функцію $h(t)$, близьку до реакції коливальної ланки

$$\begin{aligned} T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\xi}{T} \cdot \frac{dx}{dt} + x(t) &= k1(t), \\ x(t) &= h(t) = \\ &= k \left[1 - e^{-(\xi/T)t} \left(\cos \frac{t}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \frac{t}{T} \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right] \cdot 1(t) = \\ &= k \left[1 - e^{-(\xi/T)t} \left(\sin \frac{t}{T} \sqrt{1 - \xi^2} + \varphi \right) \right], \\ \varphi &= \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}, \end{aligned}$$

то *перерегулювання* σ (у відсотках) дорівнюватиме:

$$\sigma = 100 \cdot e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)},$$

а *затухання* z за період коливань

$$z = \frac{x(t_1) - x(t_1 + T)}{x(t_1)}$$

складе величину

$$1 - \frac{e^{-(\xi/T)t_1}}{1 - e^{-\left(\frac{\xi}{T}\right)\left(t_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}} = 1 - e^{-\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)},$$

де $\xi < 1$.

Числовий приклад

САК з астатизмом першого порядку має розімкнену передаточну функцію:

$$W_p(p) = \frac{20}{p(p+2)}.$$

Відповідно, замкнена САК з одиничним від'ємним зворотнім зв'язком:

$$W_p(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{20}{p^2 + 2p + 20},$$

де $a_3(p) = p^2 + 2p + 20$.

Корені $a_3(p)$: $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-20}$, тобто $p_{1,2} = -1 \pm j \cdot 4,36$.

Показники якості:

1. Ступінь стійкості: $\eta = 1$.

2. Оцінка перерегулювання:

$$\sigma = 100 \cdot e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \cong 50\%,$$

якщо $\xi \cong 0,225$. Дійсно,

$$a_3(p) = p^2 + 2p + 20 = 20 \left(\frac{1}{20} p^2 + \frac{1}{10} p + 1 \right),$$

де $T^2 = 1/20$, $2\xi T = 1/10$, звідси $\xi \approx 0,225$, $T = 0,222$.

3. Оцінка часу $t_{п.п}$ перехідного процесу $x(t)$:

$$t_{п.п} \leq \frac{1}{\eta} \cdot \ln \frac{1}{\Delta} = \ln \frac{1}{0,05} = 3 \text{ с},$$

якщо $\Delta = 0,05$.

Якщо аналітично розрахувати $h(t)$ і співставити точні показники і їх оцінки, то легко впевнитися в доцільності використання кореневих показників без розрахунку $h(t)$. Отже $h(t)$, як реакція САК на $1(t)$ за нульових початкових умов, дорівнює:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 - e^{-(\xi/T)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi \right) = \\ &= 1 - e^{-(0,225/0,222)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0,05}} \sin \left(t \frac{\sqrt{1-0,05}}{0,222} + 0,4\pi \right) \cong \end{aligned}$$

$$\cong 1 - e^{-t} \cdot \sin(5t + 0,4\pi)$$

або графіку на рис. 11.16.

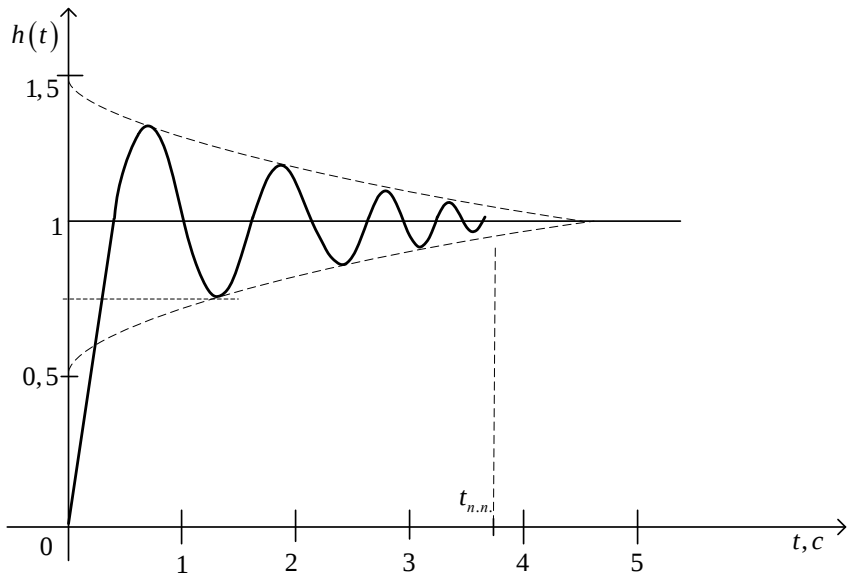


Рис. 11.16. Перехідна функція

З рис. 11.16 $\sigma \approx 45\%$, $t_{п.п} \approx 3,5$ с, що близько до непрямих розрахунків ($\sigma \approx 50\%$, $t_{п.п} \approx 3$ с).

11.1.1. Частотні показники якості

Подібно до прямого і зворотного перетворення Лапласа, для мінімально-фазових стійких систем, користуючись аналогічним перетворенням Фур'є, за якого $p = j\omega$, можна встановити зв'язок між дійсною складовою $U_3(\omega)$ амплітудо-фазочастотної характеристики $W_3(j\omega)$ замкненої САК і її перехідною функцією:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_3(\omega)}{\omega} \cdot \sin \omega t d\omega.$$

Практично верхню межу по ω можна обмежити кінцевою величиною ω_{max} , за якої $U_3(\omega_{max}) \leq (0,1 \div 0,2)U_3(0)$. Тоді за формою і параметрами $U_3(\omega)$ можна оцінити прямі показники якості перехідного процесу:

– якщо $U_3(\omega)$ монотонно зменшується (рис. 11.17, крива 1), то σ буде в межах 18%;

– для забезпечення монотонності перехідного процесу $h(t)$, достатньо, щоб похідна $dU_3(\omega)/d\omega$ була за модулем спадаючою функцією ω (рис. 11.17, крива 2);

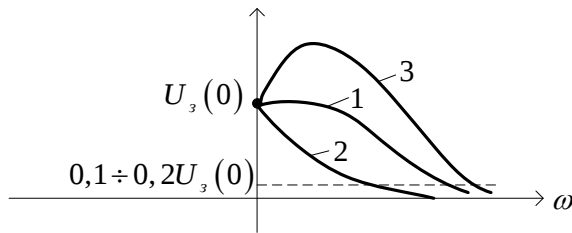


Рис. 11.17. Дійсна АЧХ

– $U_3(\omega)$ має зростаючу від $U_3(0)$ ділянку ω (рис. 11.17, крива 3), то перерегулювання буде наближено оцінюватися нерівністю:

$$\sigma \leq \frac{1,18U_3(\omega_{max}) - U_3(0)}{U_3(0)} \cdot 100\%;$$

– якщо $U_3(\omega)$ має інтервал ω від 0 до ω_{max} (де $U_3(\omega_{max}) = 0,05U_3(0)$), то час коливального перехідного процесу буде в межах $t_{п.п} \geq \pi/\omega_{max}$; отже $t_{п.п}$ зворотно пропорційний частоті ω_{max} : збільшуючи ω_{max} в $U_3(\omega)$, ми зменшуємо $t_{п.п}$ і навпаки. Таким чином, задаючись полосою $(0, \omega_{max})$ $U_3(\omega)$ можна встановлювати бажаний $t_{п.п}$.

Як для Лапласа, так і для Фур'є перетворень справедлива теорема про усталене значення $h(\infty)$:

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_3(p) \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} W_3(p);$$

$$h(\infty) = \lim_{j\omega \rightarrow 0} j\omega \cdot W_3(j\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} = \lim_{j\omega \rightarrow 0} W_3(j\omega).$$

Оскільки $W_3(j\omega) = U_3(\omega) + jV_3(\omega)$, де завжди $V_3(\omega)$ містить множинник ω , то

$$h(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} [U_3(\omega) + jV_3(\omega)] = U_3(0).$$

Тоді, для *статичної* САК (рис.11.18, а):

$$U_3(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_3(j\omega) = \frac{k_p}{1 + k_p};$$

для *астатичної* (рис. 11.18, б):

$$U_3(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_3(j\omega) = 1.$$

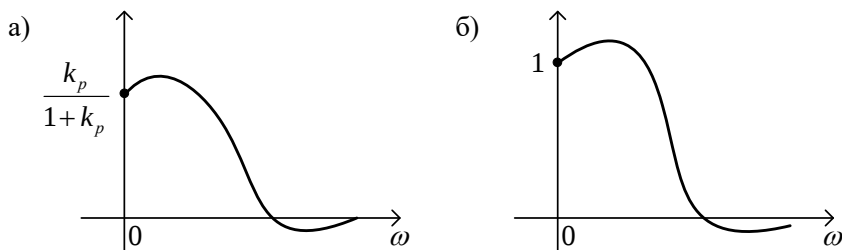


Рис. 11.18. Дійсна АЧХ

Показник коливальності САК

За амплітудно-частотною характеристикою $W_3(\omega)$ замкненої САК, отриманою теоретично чи експериментально, також можна встановити зв'язок з прямими показниками перехідного процесу.

Так, для оцінювання перерегулювання $\sigma\%$ було введено поняття показника M коливальності перехідного процесу в САК:

$$M = \sup_{0 < \omega < \infty} \left[\frac{W(\omega)}{W(0)} \right],$$

де напис «*sup*» (суперум) означає найбільший серед можливих на різних частотах максимум $W_3(\omega)$.

Основний ефект коливальності процесів в САК пов'язаний з парою комплексно-спряжених коренів $p_{1,2}$ полінома $a_3(p)$, розташованих ближче інших коренів до уявної вісі. Чим ближче $p_{1,2}$, тим сильніша коливальність САК (рис. 10.19).

Для *аперіодичного* процесу $x(t)$ АЧХ (рис. 11.19, крива 1) показник $M = 1$, для *коливального* процесу $x(t)$ АЧХ (рис. 11.19, крива 2) показник $M > 1$, для процесу на межі коливальної стійкості (корені $p_{1,2} = \pm j\omega_{max}$) показник $M \rightarrow \infty$ (рис. 11.19, крива 3).

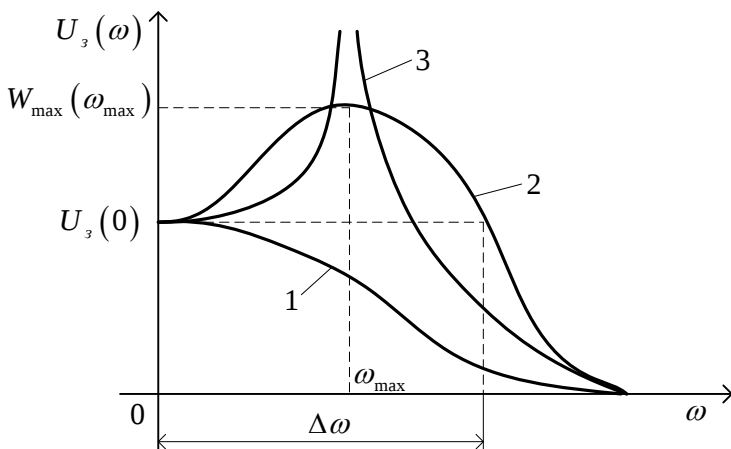


Рис. 11.19. Дійсна АЧХ

Для астатичних САК $W_3(0) = 1$, для статичних САК

$$W_3(0) = \frac{k_p}{1 + k_p} < 1. \text{ Наближений зв'язок між показником } M \text{ і}$$

перерегулюванням $\sigma\%$ наведено на рис. 11.20, а; між $\sigma\%$ і затуханням z за період – на рис. 11.20, б:

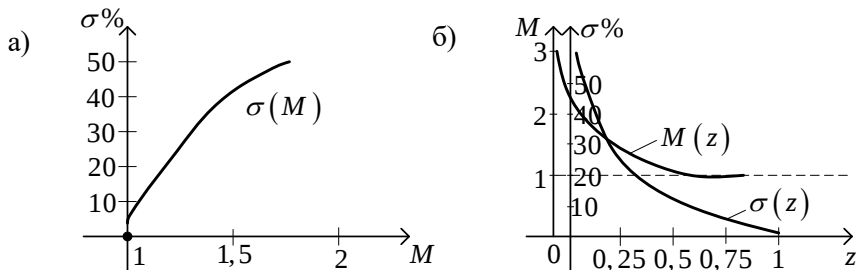


Рис. 11.20. Залежність: а) σ від M , б) $M(z)$ і $\sigma(z)$

Час $t_{п.п}$ перехідного процесу пов'язаний з полозою $\Delta\omega$ (рис. 11.19) пропускання системи: орієнтовно $t_{п.п} \approx \pi/\Delta\omega$.

11.1.2. Інтегральні критерії якості

Інтегральні показники якості перехідних процесів є функціоналами від перехідної складової $\Delta x(t)$ перехідного процесу $x(t)$, як реакції на одиничну сходику $1(t)$:

$$\Delta x(t) = x(\infty) - x(t).$$

Якщо $\Delta x(t)$ – аперіодична функція часу t , то таким показником, що інтегрально (комплексно) визначає якість процесу $\Delta x(t)$, може бути *лінійний функціонал* (інтеграл в межах $0, \infty$):

$$I_1 = \int_0^{\infty} \Delta x(t) dt,$$

тобто площа під графіком $\Delta x(t)$.

Оскільки, за граничною теоремою Лапласа,

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{W_3(p)}{p} = W_3(0),$$

а

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_3(p)}{p} \right\},$$

то

$$I_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \Delta x(t) \cdot e^{-pt} = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta X(p)$$

або

$$I_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_3(0) - W_3(p)}{p}.$$

Наприклад,

$$W_3(p) = \frac{b_0}{p + b_0} = \frac{1}{\tau p + 1},$$

де $\tau = b_0^{-1}$.

Тоді

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_3(0) - W_3(p)}{p} = \frac{\frac{d}{dp} (W_3(0) - W_3(p))}{\frac{dp}{dp}} = \\ &= \frac{dW_3(p)}{dp} \Big|_{p=0} = - \frac{-\tau}{(\tau p + 1)^2} \Big|_{p=0} = \tau. \end{aligned}$$

В часовій області з рівняння замкненої системи

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = 1(t),$$

маємо рішення

$$x(t) = 1 - e^{-(t/\tau)},$$

а

$$\Delta x(t) = x(\infty) - x(t) = e^{-(t/\tau)}.$$

Відповідно

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-(t/\tau)} dt = -\tau \int_0^{\infty} e^{-(t/\tau)} d\left(\frac{t}{\tau}\right) = \tau.$$

Отже, площа I_1 під експонентою $\Delta x(t)$ дорівнюватиме сталій часу τ , а час $t_{п.п}$ перехідного процесу приблизно 3τ . Тобто маємо прямий зв'язок непрямого показника I_1 з прямим показником $t_{п.п}$.

Квадратичний функціонал

$$I_2 = \int_0^{\infty} \Delta x^2(t) dt$$

більш універсальний: він годиться як для аперіодичних, так і коливальних перехідних процесів $\Delta x(t)$.

Для аперіодичного з попереднього прикладу:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \Delta x^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(t/\tau)^2} dt = \frac{\tau}{2}.$$

В загальному випадку, за якого

$$\Delta x(p) = \frac{b_0 p^m - b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n - a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

де $m \leq n$, то показник I_2 розраховується² як зворотне перетворення Лапласа:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \Delta x(p) \cdot \Delta x(-p) dp,$$

або за формулою³ Парсеваля, як зворотне перетворення⁴ Фур'є:
Якщо

$$\Delta x(p) = \frac{b_0}{a_0 p + a_1},$$

² Бесекерський В.А. Теория систем автоматического управления/ В.А.Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Профессия, 2003. – 752 с.

³ Булгаков Б.В. Колебания / Гостехиздат, 1949. - 464 с.

⁴ Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р. Теория следящих систем. ИЛ, 1951. – 38 с.

то

$$I_2 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1};$$

якщо

$$\Delta x(p) = \frac{b_0p + b_1}{a_0p^2 + a_1p + a_2},$$

то

$$I_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2}$$

і т. д.

Маючи аналітичну залежність $I_2(a, b)$ можна вирішувати задачу оптимізації параметрів. Наприклад, необхідно дослідити вплив електромеханічної сталої часу τ електропривода, що має розімкнену передаточну функцію:

$$W_p(p) = \frac{k}{p(\tau p + 1)},$$

на інтегральний квадратичний показник.

Замкнена передаточна функція:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{k}{\tau p^2 + p + k}.$$

Тут $\tau = b_0, b_1 = 1, a_0 = \tau, a_1 = 1, a_2 = k$.

Тоді

$$I_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2} = \frac{\tau + \tau^2k}{2\tau k} = \frac{1 + \tau k}{2k}.$$

Отже (рис. 11.21), за незмінним k , чим більше електромеханічна стала τ , тим більший I_2 ; зі зростанням k показник I_2 буде прямувати до $\tau/2$.

Якщо показник

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left(\Delta x^2 + \tau \left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 \right) dt,$$

враховує не тільки похибку $\Delta x(t)$, а і квадрат швидкості її змінювання у часі, то умова його мінімуму відповідає перехідному процесу $\Delta x(t)$ з меншою коливальною складовою, а за великих τ процес взагалі буде аперіодичним, однак, більш повільним.

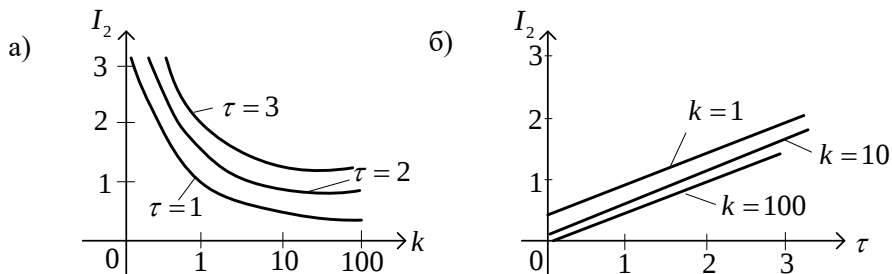


Рис. 11.21. Залежність: а) $I_2(k, \tau)$, б) $I_2(\tau, k)$

11.1.3. Методи підвищення якості САК

Більшість САК, як правило використовують П-, ПІ- і ПІД-закони керування. Розглянемо, як впливають параметри цих регуляторів на стійкість динаміки і точність відслідковування типових входних впливів в усталеному режимі (в статиці).

Загальна структура САК:

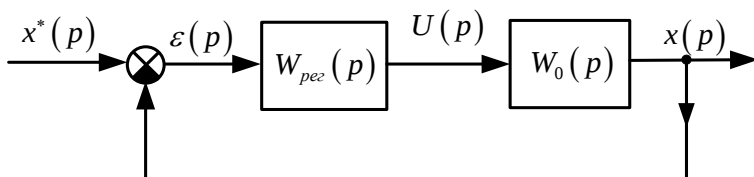


Рис. 11.22. Структура САК

Похибка $\varepsilon(p)$ визначає точність. Тому знайдемо передаточну функцію:

$$W_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{x^*(p)};$$

похибка

$$\varepsilon(p) = x^*(p) - W_{\text{рег}}(p) \cdot W_0(p) \cdot \varepsilon(p),$$

звідси

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{рег}}(p) \cdot W_0(p)}.$$

Розкладаючи $W_\varepsilon(p)$ в ряд Маклорена,

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(p) \cong W_\varepsilon(p) \Big|_{p=0} + \frac{dW_\varepsilon(p)}{dp} \Big|_{p=0} \cdot p + \frac{1}{2} \frac{d^2 W_\varepsilon(p)}{dp^2} \Big|_{p=0} \cdot p^2 + \\ + \frac{1}{3!} \frac{d^3 W_\varepsilon(p)}{dp^3} \Big|_{p=0} \cdot p^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)} W_\varepsilon(p)}{dp^{(n)}} \Big|_{p=0} \cdot p^n, \end{aligned}$$

отримаємо коефіцієнти похибок:

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(p) \Big|_{p=0} = C_0; \quad \frac{dW_\varepsilon(p)}{dp} \Big|_{p=0} = C_1; \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 W_\varepsilon(p)}{dp^2} \Big|_{p=0} = C_2; \\ \frac{1}{6} \frac{d^3 W_\varepsilon(p)}{dp^3} \Big|_{p=0} = C_3; \quad \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)} W_\varepsilon(p)}{dp^{(n)}} \Big|_{p=0} = C_n. \end{aligned}$$

Тоді наближено:

$$W_\varepsilon(p) \cong \sum_{i=0}^n C_i p^i$$

або

$$\varepsilon(p) = C_0 x^*(p) + C_1 p x^*(p) + C_2 p^2 x^*(p) + \dots.$$

Переходячи від зображення по Лапласу до оригіналів, отримаємо, що:

$$\varepsilon(t) = C_0 x^*(t) + C_1 \frac{dx^*}{dt} + C_2 \frac{d^2 x^*}{dt^2} + \dots.$$

Якщо

$$x^*(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2,$$

то майже усталена похибка $\varepsilon(t)$ САК, як реакція на $x^*(t)$ буде такою:

$$\varepsilon(t) = C_0(d_0 + d_1 t + d_2 t^2) + C_1(d_1 + 2d_2) + C_1 \cdot 2d_2 =$$

$$= (C_0 d_0 + C_1 d_1 + C_2 d_2) + (C_0 d_1 + 2C_1 d_2)t + (C_0 \cdot d_2) \cdot t^2.$$

Для $x^*(t) = d_0 \cdot 1(t)$, $d_1 = d_2 = 0$,

$\varepsilon(t) = C_0 d_0$ – похибка по положенню;

для $x^*(t) = d_1 t$ – лінійна функція t , $d_0 = d_2 = 0$,

$\varepsilon(t) = (C_0 + C_1) d_1 t$ – похибка за швидкістю;

для $x^*(t) = d_2 \cdot t^2$ – квадратична функція t , $d_0 = d_1 = 0$,

$\varepsilon(t) = (C_0 + 2C_2) d_2 t^2$ – похибка за прискоренням.

Математично абсолютно точну усталену похибку САК для $t \rightarrow \infty$ отримаємо з межової теореми Лапласа:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_\varepsilon(p) \cdot x^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + W_{\text{рег}}(p) \cdot W_0(p)} \cdot x^*(p).$$

Отже $\varepsilon(\infty)$ буде залежати від структури і параметрів $W_{\text{рег}}(p)$ і $W_0(p)$.

Приклад. Передаточна функція об'єкта керування (наприклад, електродвигуна) така:

$$\frac{x(p)}{U(p)} = W_0(p) = \frac{k_d}{p(\tau_d p + 1)},$$

де: k_d – відношення в статиці швидкості $\Omega(t)$ обертання вала двигуна до напруги $U(t)$, як керуючого впливу;

τ_d – електромеханічна стала часу.

Тоді, відповідно до структури САК (рис. 11.22), залежно від структури регулятора, маємо наступне:

1) *P-регулятор*:

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + k_p \frac{k_d}{p(\tau_d p + 1)}} = \frac{p(\tau_d p + 1)}{p(\tau_d p + 1) + k_p k_d};$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за положенням:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(\tau_d p + 1)}{p(\tau_d p + 1) + k_p k_d} \cdot \frac{d_0}{p} = 0.$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за швидкістю:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(\tau_d p + 1)}{p(\tau_d p + 1) + k_p k_d} \cdot \frac{d_1}{p^2} = \frac{d_1}{k_i k_d}.$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за прискоренням:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(\tau_d p + 1)}{p(\tau_d p + 1) + k_n k_d} \cdot \frac{d_2}{p^3} \rightarrow \infty.$$

2) *ПІ-регулятор*.

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \left(k_n + \frac{k_i}{p}\right) \frac{k_d}{p(\tau_d p + 1)}} = \frac{\tau_d p^3 + p^2}{\tau_d p^3 + p^2 + k_n k_d p + k_i k_d}.$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за положенням:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\tau_d p^3 + p^2}{\tau_d p^3 + p^2 + k_n k_d p + k_i k_d} \cdot \frac{d_0}{p} = 0.$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за швидкістю:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\tau_d p^3 + p^2}{\tau_d p^3 + p^2 + k_n k_d p + k_i k_d} \cdot \frac{d_1}{p^2} = 0.$$

Похибка $\varepsilon(\infty)$ за прискоренням:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\tau_d p^3 + p^2}{\tau_d p^3 + p^2 + k_n k_d p + k_i k_d} \cdot \frac{d_2}{p^3} = \frac{d_2}{k_i k_d}.$$

Однак, на відміну від САК з П-регулятором, де за будь-якого k_n САК стійка. Характеристичний поліном для неї:

$$\tau_d p^2 + p + k_n k_d = 0,$$

за будь-якого додатного k_n дасть корені з від'ємною дійсною складовою:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_d} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_d^2} - \frac{k_n k_d}{\tau_d}},$$

для САК з ПІ-регулятором умова стійкості забезпечується, якщо:

$$k_n k_d - \tau_d k_i k_d = k_d (k_n - \tau_d k_i) > 0,$$

тобто, маємо обмеження на k_i :

$$k_i < \frac{k_n}{\tau_d}.$$

3) *ПІД-регулятор*:

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \left(k_p + \frac{k_i}{p} + pk_{\text{диф}}\right) \frac{k_d}{p(\tau_d p + 1)}} = \frac{p^2(\tau_d p + 1)}{\tau_d p^3 + (1 + k_{\text{диф}}k_d)p^2 + k_p p + k_i k_d};$$

Маючи ті ж $\varepsilon(\infty)$, що і САК з ПІ-регулятором, САК з ПІД-регулятором, завдяки регулюванню по похідній від $\varepsilon(t)$, має кращі умови стійкості:

$$(1 + k_{\text{диф}}k_d) \cdot k_p > k_i k_d \tau_d,$$

або

$$k_i < \frac{(1 + k_{\text{диф}}k_d) \cdot k_p}{k_d \tau_d} \approx \frac{k_{\text{диф}}k_p}{\tau_d},$$

тобто по відношенню до ПІ-регулятора, в ПІД-регуляторі k_i можна збільшити в $k_{\text{диф}}$ разів.

11.1.4. Компенсація збурюючих впливів в САК. Інваріантність

Проблемою інваріантності САК до збурюючого впливу $f(t)$ чи вхідного задавального впливу $x^*(t)$ займалось багато вітчизняних і закордонних вчених (Кухтенко О.І., Кулебякін В.С., Костюк В.І., Петров Б.М., Чінаєв П.І., Щипанов Г.В. та ін..).

Теоретично можна забезпечити умову абсолютної інваріантності САК, практично-інваріантність до «епсілон».

Розглянемо структуру САК з регулюванням по відхиленню $\varepsilon(t)$, вхідному впливу $x^*(t)$ та збуренню $f(t)$ (рис. 11.23), а також сигнальний граф її (рис. 11.24).

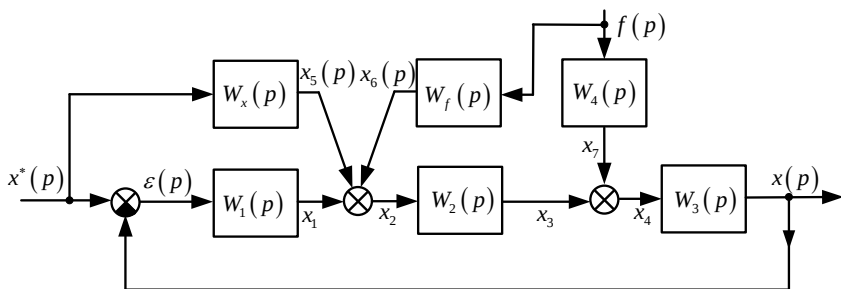


Рис. 11.23 Структура системы

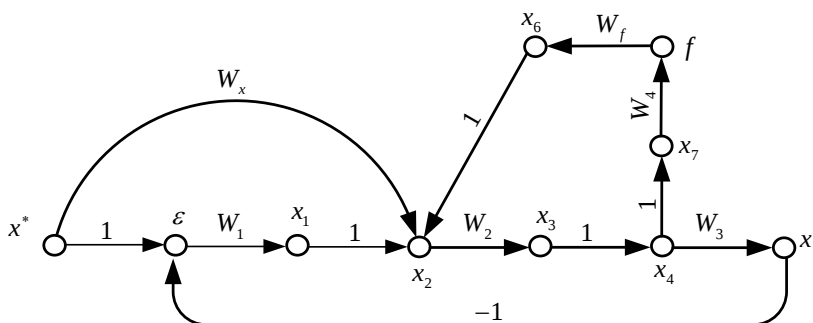


Рис. 11.24. Сигнальный граф

Спростуємо цей граф:

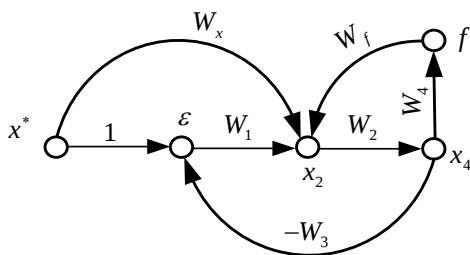


Рис.11.25. Сигнальный граф

Рівняння, які відповідають графу (рис. 11.26):

$$\begin{cases} \varepsilon = x^* - W_3 \cdot x_4, \\ x_2 = W_1 \cdot \varepsilon + W_f \cdot f + W_x \cdot x^*, \\ x_4 = W_2 \cdot x_2 + W_4 \cdot x_4. \end{cases}$$

Після нескладних перетворень:

$$\varepsilon = x^* - W_3 \left(W_2 (W_1 \cdot \varepsilon + W_f \cdot f + W_x \cdot x^*) \right) - W_3 W_4 f,$$

або

$$\varepsilon(1 + W_1 W_2 W_3) = (1 - W_3 W_2 W_x) x^* - W_3 (W_2 W_f + W_4) f,$$

отримаємо, що

$$\varepsilon = \frac{1 - W_3 W_2 W_x}{1 + W_1 W_2 W_3} x^* - \frac{W_3 (W_2 W_f + W_4)}{1 + W_1 W_2 W_3} f.$$

Звідси отримаємо умову повної інваріантності:

якщо

$$W_x(p) = (W_3(p) \cdot W_2(p))^{-1},$$

а

$$W_f(p) = -\frac{W_4(p)}{W_2(p)},$$

то $\varepsilon(t) \equiv 0$, а $x(t) = x^*(t)$.

Як правило (і з умови фізичної реалізованості) передаточні функції $W_3(p)$ і $W_2(p)$ об'єкта керування – це дробно-раціональні функції змінної p степінь полінома знаменника яких більше степені полінома чисельника. Тому для реалізації умови інваріантності по вхідному сигналу $x^*(t)$ необхідно, щоб $W_x(p)$ мав степінь полінома чисельника більше, ніж у знаменника. Це можливо реалізувати, якщо $x^*(t)$ не має розривів, тобто підлягає диференціюванню необхідну кількість разів. Крім того, $x^*(t)$ повинен бути точним. Це можливо забезпечити у програмних САК. де $x^*(t)$ – задана функція часу.

Для слідкуючих систем $x^*(t)$ вимірюється з випадковими завадами, що ускладнює його диференціювання.

Умова інваріантності по збуренню $f(t)$, як правило, може бути реалізована, якщо $f(t)$ вимірюється безпосередньо.

Якщо $f(t)$ безпосередньо не вимірюється, то за відомих $W_2(p)$, $W_3(p)$, $W_4(p)$, виходячи з того, що

$$x(p) = W_3 W_4 \cdot f(p) + x_3(p),$$

обчислимо $f(p)$:

$$\hat{f}(p) = (W_3 W_4)^{-1} (x(p) - x_3(p))$$

і використаємо його в інваріантній САК (рис. 11.23).

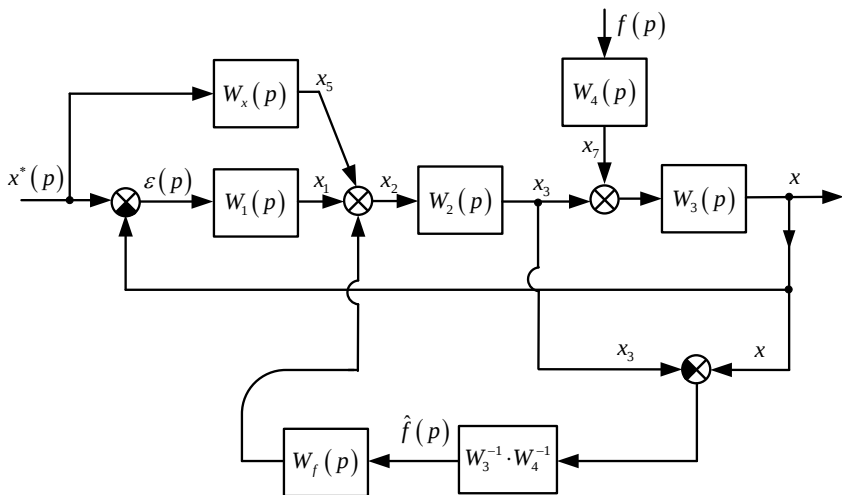


Рис. 11.26. Структура САК

Тут

$$W_f(p) \cdot W_3^{-1} \cdot W_4^{-1} = -\frac{W_4}{W_2 W_3 W_4} = -(W_2 W_3)^{-1}.$$

За цих умов САК (рис. 11.26) еквівалентна САК (рис. 11.23).

12 СИНТЕЗ КОРЕГУВАЛЬНИХ ЛАНОК САК У ВИПАДКУ ОДИНИЧНОГО СТУПІНЧАСТОГО ВХІДНОГО ВПЛИВУ

12.1 Оптимальна передаточна функція

Будемо вважати перехідний процес $x(t)$, як реакцію на вхідний ступінчастий вплив, *оптимальним*, якщо він монотонний і має мінімально можливий час $t_{п.п.}^*$ перехідного процесу при обмеженні на прискорення $\ddot{x}(t)$ (рис. 12.1).

Дійсно, за обмеженням на d^2x/dt^2 або (що те саме) на керуючий вплив $U(t)$, мінімум $t_{п.п.}$ досягається шляхом розгону $x(t)$ на інтервалі $[0, t_{п.п.}^*/2]$ з максимальним прискоренням ω_{max} під дією $\max U(t) = \omega_{max}$ і аналогічним гальмуванням на інтервалі $(t_{п.п.}^*/2, t_{п.п.}^*)$.

Графік $x(t)$ (рис. 12.1, в) можна подати у вигляді трьох парабол (рис. 12.2).

$$x(t) = \frac{1}{2} \omega_{max} \cdot t^2 \cdot 1(t) - \omega_{max} (t - t_{п.п.}^*/2)^2 \cdot 1(t - t_{п.п.}^*/2) + \\ + \frac{1}{2} \omega_{max} (t - t_{п.п.}^*)^2 \cdot 1(t - t_{п.п.}^*),$$

як реакцій на три сходинки (рис. 12.3), з яких складається сигнал $\omega(t)$ (рис. 12.1, а):

$$U_1(t) = \omega_{max} \cdot 1(t), \quad t \in [0, \infty],$$

$$U_2(t) = \omega_{max} \cdot 1(t - t_{п.п.}^*/2), \quad t \in [t_{п.п.}^*/2, \infty],$$

$$U_3(t) = \omega_{max} \cdot 1(t - t_{п.п.}^*), \quad t \in [t_{п.п.}^*, \infty].$$

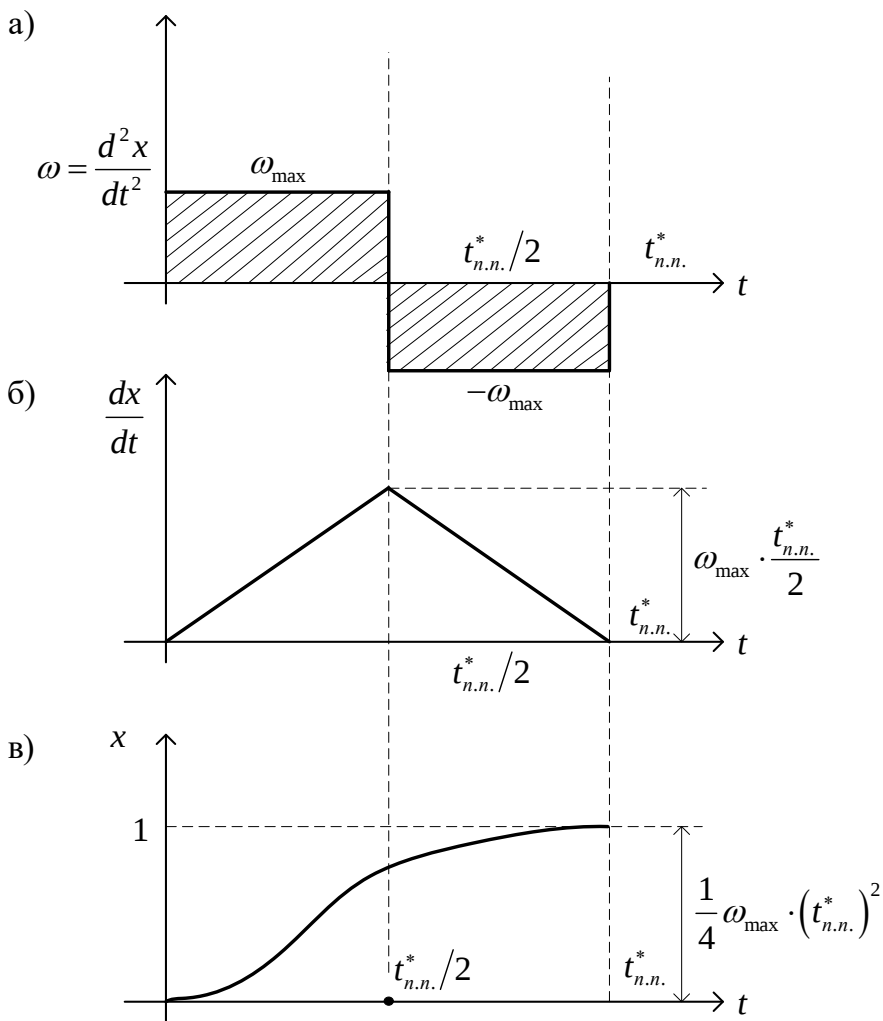


Рис. 12.1. а) вхід САК $\omega = \pm\omega_{\max} = \pm(d^2x/dt^2)$;
 б) швидкість зміни $x(t)$; в) графік $x(t)$

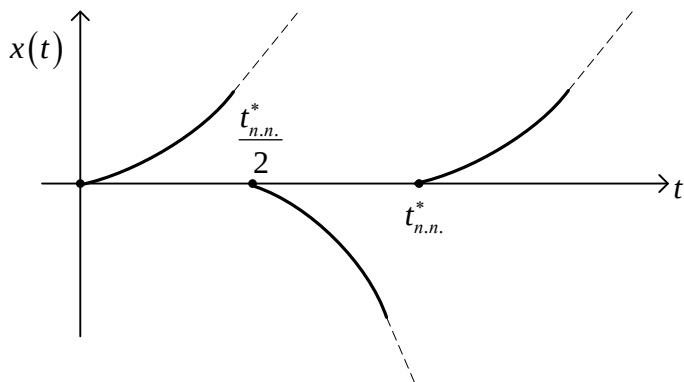


Рис. 12.2. Складові $x(t)$

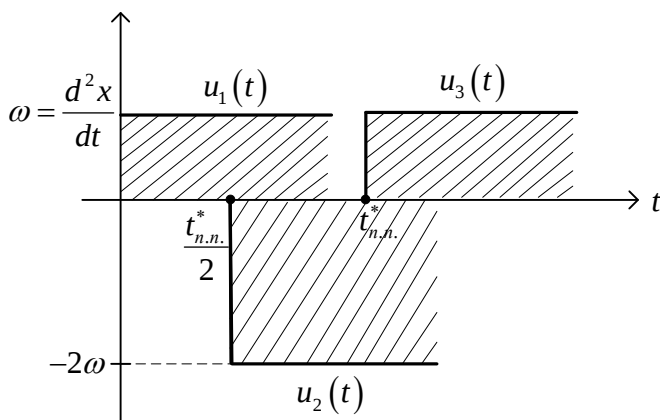


Рис. 12.3. Складові $u(t)$

Зображення за Лапласом реакції $x(t)$:

$$x(p) = \frac{\omega_{max}}{p^3} - 2 \frac{\omega_{max} \cdot e^{-(t_{n.n.}^*/2)p}}{p^3} + \omega_{max} \frac{e^{t_{n.n.}^* \cdot p}}{p^3}.$$

Оскільки

$$x(p) = W_3^*(p) \cdot \frac{1}{p},$$

де: $W_3^*(p)$ – передаточна функція замкненої оптимальної САК,
 $1/p$ – зображення вхідного впливу $x^*(t) = 1(t)$,
 то

$$W_3^*(p) = \frac{\omega_{max}}{p^2} (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p}),$$

а розімкнена передаточна функція за умови, що

$$W_3^*(p) = \frac{W_3^*(p)}{1 + W_3^*(p)}$$

буде визначатися через $W_3^*(p)$ наступним чином:

$$\begin{aligned} W_3^*(p) &= \frac{W_3^*(p)}{1 + W_3^*(p)} = \frac{\frac{\omega_{max}}{p^2} (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p})}{1 - \left[\frac{\omega_{max}}{p^2} (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p}) \right]} = \\ &= \frac{\omega_{max} (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p})}{p^2 - \omega_{max} (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p})}. \end{aligned}$$

Далі, оскільки $x(\infty) = 1$, $W_3(0) = 1$, то $\omega_{max} = 4/(t_{п.п.}^*)^2$.

Тоді оптимальна розімкнена передаточна функція може бути визначена через $t_{п.п.}^*$:

$$W_3^*(p) = \frac{4/(t_{п.п.}^*)^2 (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p})}{p^2 - 4/(t_{п.п.}^*)^2 (1 - 2e^{-(t_{п.п.}^*/2p)} + e^{-t_{п.п.}^* \cdot p})}.$$

За цією формулою можемо побудувати оптимальні ЛАЧХ і ФЧХ розімкненої⁵ САК (рис. 12.4).

Розкладаючи $e^{-(t_{п.п.}^*/2p)}$ та $e^{-t_{п.п.}^* \cdot p}$ в ряди Паде чи Маклорена⁶, можна з заданою точністю перейти від трансцендентного виразу $W_p^*(p)$ до нелінійного фазового дробно-раціонального.

⁵ Теория автоматического регулирования. Книга 2. под. ред. В.В.Солодовникова, М.: Машиностроение, 1967.– с. 682

⁶ Теория автоматического регулирования. Книга 2. под. ред. В.В. Солодовникова, М.: Машиностроение, 1967.– с. 317-321

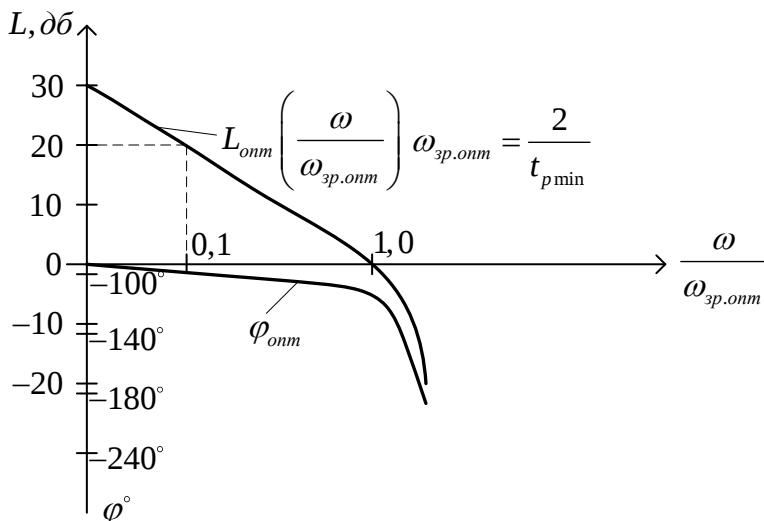


Рис. 12.4. Оптимальні L і φ розімкненої САК

Нахил $L_{\text{опт}}$ для $\omega/\omega_{\text{зр.опт}} < 4$ приблизно -20 дБ/дек.; для $\omega/\omega_{\text{зр.опт}} > 4$ нахил різко зростає. Саме цих вимог слід дотримуватися при підборі корелюючих ланок.

12.2 Побудова бажаної ЛАЧХ

Бажана ЛАЧХ є кусково-лінійним наближенням до оптимальної ЛАЧХ.

У *низькочастотній області* $L_{\text{бaj}}$ малих частот визначається точністю САР (допустимою усталеною похибкою $\varepsilon(\infty)$) і нахилом (як у оптимальної) -20 дБ/дек. для не астатичної системи або $-v20 \lg \omega$ для САК з астатизмом v -го порядку:

$$L_{\text{бaj}}(\text{НЧ}) = 20 \lg k_p - v20 \lg \omega,$$

де: k_p – статичний коефіцієнт передачі бажаної САК.

Фазочастотна характеристика:

$$\varphi_{\text{баж}}(\text{НЧ}) = -\nu \frac{\pi}{2}.$$

У високочастотній області, де $L(\omega) \leq 25$ дБ., тобто $|W_p(j\omega)| \leq 0,05$, динаміка САК корекції не потребує і, з метою спрощення коригувальної ланки, бажана $L_{\text{баж}}$ співпадає з вихідною L_0 не скорегованою.

Середньочастотна область найбільш важлива з позицій бажаної динаміки САК. Частоту зрізу $\omega_{\text{зр}}$ бажаної $L_{\text{баж}}$ вибирають таким чином, щоб вона задовольняла умові:

$$\omega_{\text{зр.min}} \leq \omega_{\text{зр}} \leq \omega_{\text{зр.opt}} = \frac{2}{T_{p \text{ min}}},$$

де: $\omega_{\text{зр.opt}}$ – частота зрізу оптимальної ЛАЧХ.

Частоту $\omega_{\text{зр.min}}$ визначають за кривими (рис. 12.5) для заданих значень перерегулювання σ_{max} , часу перехідного процесу⁷ $T_{p \text{ max}}$ і параметрів χ, χ_a, λ типової дійсної частотної характеристики $U(\omega)$ (рис. 12.5):

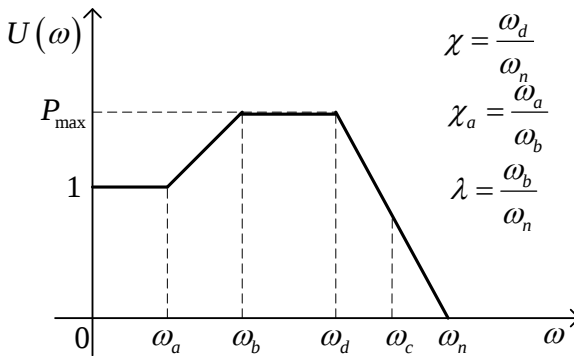


Рис. 12.5. Кусково-лінійна апроксимація типової дійсної частотної характеристики

⁷ Теория автоматического регулирования. Книга 2. под. ред. В.В. Солодовникова, М.: Машиностроение, 1967.– с. 311

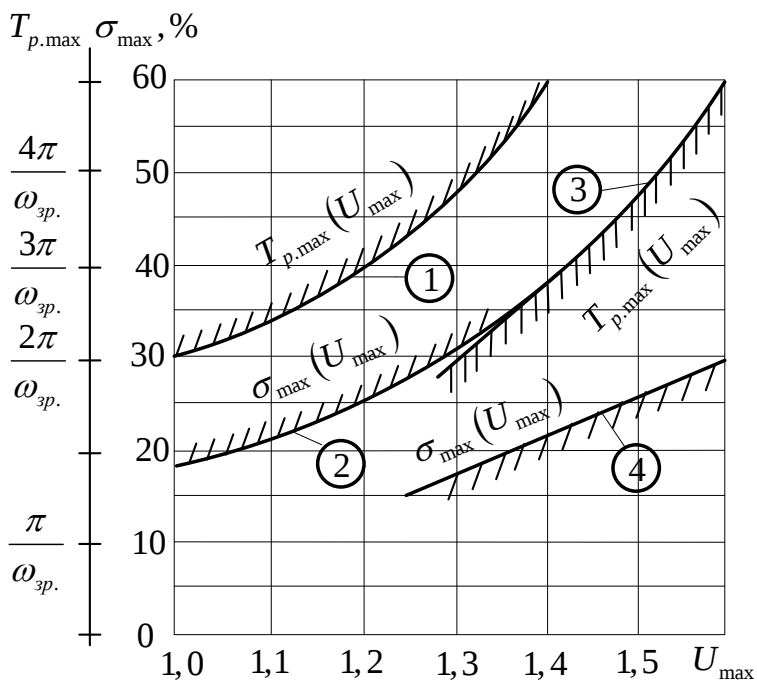


Рис. 12.6 Залежності $\sigma_{\max}(U_{\max})$, $T_{p\max}(U_{\max})$ для різних значень параметрів типової $U(\omega)$:

криві 1, 2 – для $\kappa \leq 0,8$; $\kappa_a \geq 0,4$; $\lambda \geq 0,5$;

3, 4 – для $\kappa \leq 0,8$; $\kappa_a \leq 0,4$; $0,1 \leq \lambda \leq 0,5$;

Отже спочатку слід побудувати для не скорегованої частини САК (об'єкта керування) дійсну складову $U(\omega)$ бажанням, по $U_{\max}$ і $U_{\min} \cong U_{\max} - 1$ за номограмою⁵ можна знайти допустиме значення надлишку фази γ_c системи, забезпечене на всьому інтервалі частот, де бажана $L_{\text{баж}}(\omega)$ задовольняє умові:

$$L_M \geq L_{\text{баж}}(\omega) \geq -L_M,$$

де: $2L_M$ – сторона прямокутника номограми⁵.

За кривими 1, 3 визначають (рис. 12.6) визначають $\omega_{зр.min}$, яке входить в нерівність

$$\omega_{зр.min} \leq \omega_{зр.} \leq \omega_{зр.opt}.$$

Криві 2, 4 (рис. 12.6) дозволяють за відомих U_{max} визначити σ_{max} або навпаки за заданими σ_{max} і $T_{p max}$ визначити необхідні параметри $U(\omega)$: U_{max} , κ , κ_a , λ .

Оскільки процес побудови бажаної ЛАЧХ є наближеним, то після її побудови і синтезу коригуючої ланки необхідно перевірити дотримання необхідних запасів стійкості за фазою і амплітудою. Далі, за необхідності, скорегувати корегуючу ланку.

12.3 Синтез коригувальних пристроїв

12.3.1 Синтез послідовного коригувального пристрою (ланки)

Передаточна функція $W(p)$ послідовно з'єднаних об'єкта $W_0(p)$ і коригувальної ланки $W_k(p)$:

$$W(p) = W_k(p) \cdot W_0(p).$$

Якщо $W_k(p)$ і $W_0(p)$ мінімально фазові, то

$$W_k(j\omega) = W_k(j\omega) \cdot e^{j\varphi_k(\omega)},$$

$$W_0(j\omega) = W_0(j\omega) \cdot e^{j\varphi_0(\omega)},$$

$$L(\omega) = L_k(\omega) + L_0(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) + \varphi_0(\omega).$$

Алгоритм визначення $W_k(p)$:

- 1) будуємо ЛАЧХ $L_0(\omega)$;
- 2) будуємо бажану ЛАЧХ $L_{баж}(\omega)$;
- 3) визначаємо необхідну ЛАЧХ коригуючої ланки $L_k(\omega)$, як різницю між

$$L_k(\omega) = L_{баж}(\omega) - L_0(\omega);$$

- 4) шляхом кусково-лінійної апроксимації $L_k(\omega)$ визначаємо структуру і параметри $W_k(p)$, дотримуючись принципу мінімальної складності $W_k(p)$ і, якщо вони задовольняють, переходимо до п. 6;

5) перевіряємо якісні показники скоригованої САК (прямі і непрямі);

6) підбирається конструкція коригувальної ланки у вигляді RC-ланок згідно таблиці VIII.3⁸.

12.3.2 Синтез паралельного коригувального пристрою (ланки)

Превагою такого з'єднання $W_k(p)$ є те, що при цьому, як і за будь-якого від'ємного зворотного зв'язку, зменшується вплив нелінійних характеристичних елементів САК та їх не стаціонарність на якість перехідних процесів.

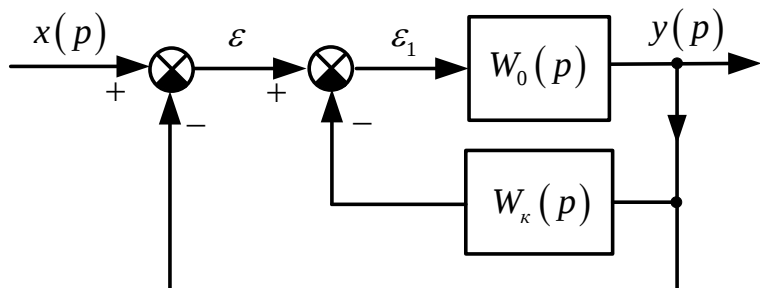


Рис. 12.7 Система з паралельним $W_k(p)$

Відповідно до схеми (рис. 12.7) розімкнена передаточна функція $W(p) = y(p)/\varepsilon(p)$ дорівнює:

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p) \cdot W_k(p)}$$

або наближено (якщо $|W_0 \cdot W_k| \gg 1$):

$$W(p) = W_{\text{баз}}(p) \cong W_k^{-1}.$$

Відповідно

$$L_k(\omega) = -L_{\text{баз}}(\omega).$$

⁸ Теория автоматического регулирования. Книга 2. под. ред. В.В.Солодовникова, М.: Машиностроение, 1967.– с. 326-329

Алгоритм визначення $W_k(p)$, увімкненого паралельно до $W_0(p)$:

- 1) будуємо $L_0(\omega)$;
- 2) будуємо бажану ЛАЧХ: $L_{\text{баж}}(\omega)$;
- 3) в діапазоні середніх частот підбирається $L_k(\omega)$ за умови:

$$L_k(\omega) \approx -L_{\text{баж}}(\omega);$$

4) підбираємо статичний коефіцієнт K_k таким, щоб коефіцієнт замкненої системи

$$k = \frac{k_0}{1 + k_0 k_k}$$

був бажаним;

- 5) перевіряємо, чи буде стійкою система (рис. 12.7);
- 6) будуємо $L_k(\omega) = -L_{\text{баж}}(\omega)$;
- 7) синтезуємо конструкцію паралельної коригувальної ланки.

12.4 Приклад корекції динаміки об'єкта (консервативна ланка)

12.4.1 Об'єкт управління – консервативна ланка:

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T^2 p^2 + 1}, \quad k_0 = 10; \quad T = 1 \text{ с.}$$

Його характеристики:

– перехідна:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = k_0 \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) \cdot 1(t);$$

– імпульсна перехідна:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ W_0(p) \} = \frac{k_0}{T} \sin \frac{t}{T} \cdot 1(t);$$

АФЧХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2};$$

$$V(\omega) = 0; A(\omega) = U(\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}; \varphi(\omega) = 0; \omega < \frac{1}{T};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi; \omega \geq \frac{1}{T}.$$

Графік АФЧХ:

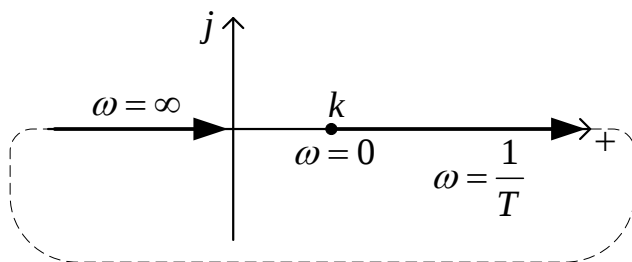


Рис. 12.8. АФЧХ

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg(1 - \omega^2 T^2).$

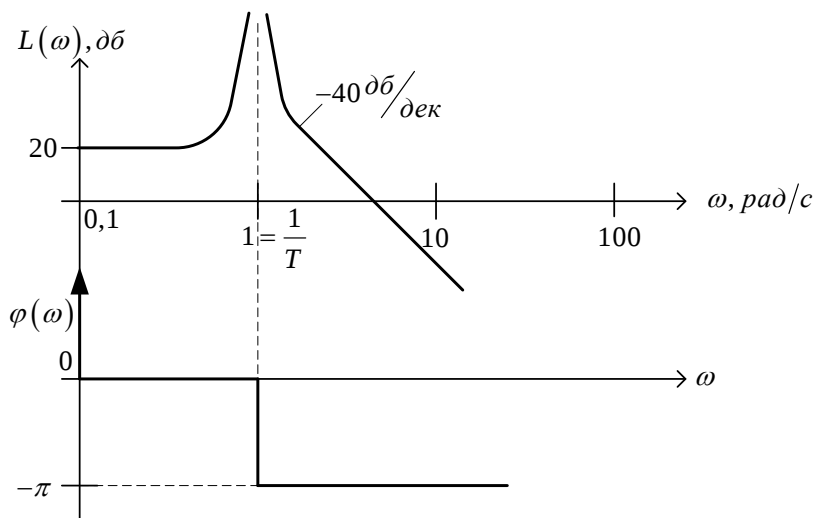


Рис. 12.9. ЛАЧХ і ФЧХ

12.4.2 Побудова бажаної ЛАФЧХ

Побудова бажаної ЛАФЧХ за умови, що $\sigma\% = 30\%$, $T_{p\max} = 5$ с., статична похибка $C_0 = 0,01$, тобто 1%.

Низькочастотна область: за відомої статичної похибки $C_0 = 0,01$ і $k = 10$, визначаємо k_k коригувальної ланки:

$$C_0 = \frac{1}{1 + k \cdot k_k},$$

звідки

$$k_k = \frac{1 - C_0}{k \cdot C_0} = \frac{0,99}{10 \cdot 0,01} \approx 10.$$

Тоді:

$$L_{\text{баж}}(0) = 20 \lg k_k \cdot k = 20 \lg 100 = 40 \text{ дБ.}$$

Середньочастотна область:

По заданих $\sigma\% = 30\%$, $T_{p\max} = 5$ с. визначаємо частоту $\omega_{зр}$ зрізу (за якої $L(\omega_{зр}) = 0$) за кривою 2 (рис. 12.6) для $\sigma\% = 30\%$, $U_{\max} \approx 1,25$; далі за кривою 1 для $U_{\max} = 1,25$ маємо $T_{\max} = 5 = 3,5\pi/\omega_{зр}$; звідси частота зрізу $\omega_{зр} = 3,5\pi/5 \approx 2$ рад/с.

Нахил $L_{\text{баж}}$ в середніх частотах $[\omega_2, \omega_3]$ повинен бути – 20 дБ/дек (рис. 12.10).

Задамо ω_3 в межах $(2 \div 4) \omega_{зр}$, наприклад, $\omega_3 = a_3 \omega_{зр}$, $a_3 = 3$, $\omega_3 = 6$ рад/с.

Для визначення $\omega_2 = a_2 \omega_{зр}$ коефіцієнт a_2 визначають за графіком (рис. 12.11).

Для $a_3 = 3$ і $\sigma\% = 30\%$ коефіцієнт $a_2 \approx 0,5$.

Тобто $\omega_2 = 0,5 \omega_{зр} = 1$. Для спряження $L_{\text{баж}}(\omega)$, де $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$ з ділянкою нижніх частот $[0, \omega_1]$, необхідно провести пряму під нахилом – 40 дБ/дек. Це $L_{\text{баж}}(\omega)$ в інтервалі $[\omega_2, \omega_3]$, де $\omega_1 \approx 0,2$.

Високочастотну складову $L_{\text{баж}}$ проводимо паралельно $L_0(\omega)$, де $\omega > \omega_3$ або під ще більшим нахилом, наприклад, – 60 дБ/дек. Вона не впливає на якість і стійкість САК.

Логарифмічну характеристику коригувальної ланки знаходимо як різницю $L_{\text{бaj}}(\omega)$ і $L_0(\omega)$.

Перевірка по $L_{\text{бaj}}(\omega)$ запасу по фазі γ для заданого запасу ΔA за амплітудою

Відповідно до графіків (рис. 12.12) по $\sigma\% = 30\%$ знаходимо ΔA і по ΔA (в логарифмах) знаходимо γ° . Необхідні $\Delta A = 17\%$, $\gamma^\circ = 37^\circ$.

Розраховуємо дійсні значення γ° для частот $\omega_{\text{зр}}$ та ω' , ω'' , де модуль

$$|L_{\text{бaj}}| = \Delta A = 17\%,$$

$$\omega' < \omega_{\text{зр}}, \omega'' > \omega_{\text{зр}}, \omega_{\text{зр}} = 2; \omega' \cong 0,9; \omega'' \cong 12.$$

$$W_{\text{бaj}}(j\omega) = \frac{k_{\text{роз}}(1 + j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_1)^2(1 + j\omega T_3)} = \frac{k_{\text{роз}} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)},$$

де

$$T_1 = \omega_1^{-1}; T_2 = \omega_2^{-1}; T_3 = \omega_3^{-1}; \lg k_{\text{роз}} = 40.$$

Відповідно до $W_{\text{бaj}}(j\omega)$ отримаємо ФЧХ $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = -2\arctg \frac{\omega}{\omega_1} + \arctg \frac{\omega}{\omega_2} - \arctg \frac{\omega}{\omega_3}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\varphi(\omega') &= -115^\circ, \\ \varphi(\omega'') &= -135^\circ, \\ \varphi(\omega_{\text{зр}}) &= -120^\circ.\end{aligned}$$

Тоді запас γ за фазою $\varphi(\omega)$ складе:

$$\gamma = \pi - \varphi(\omega) = \begin{cases} -180 + 115^\circ = -65^\circ \\ -180 + 135^\circ = -45^\circ, \\ -180 + 120^\circ = -60^\circ \end{cases}$$

що більше (за модулем) заданого запасу -40° .

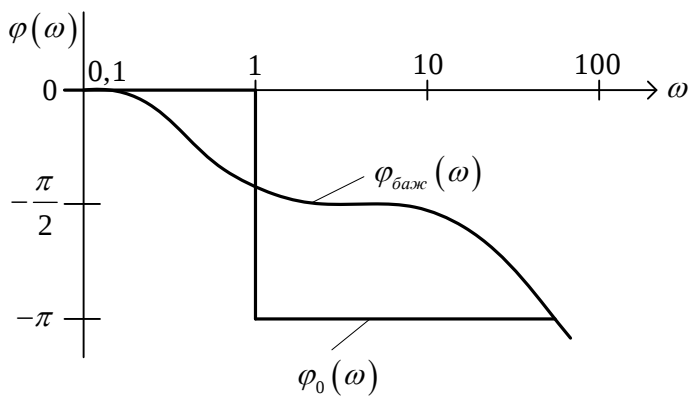
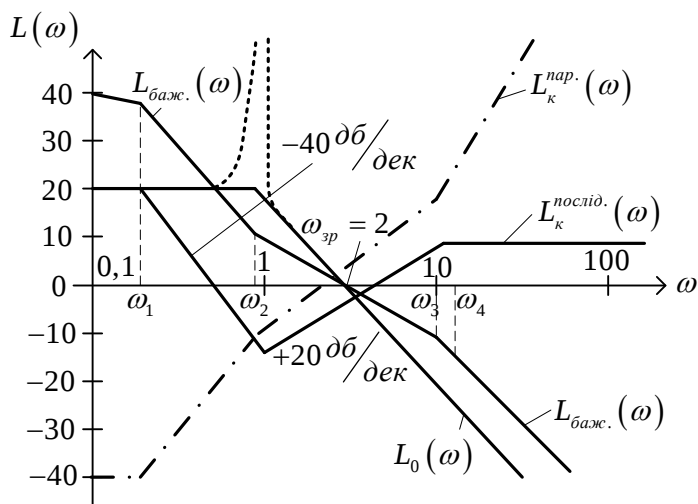


Рис. 12.10. ЛАЧХ і ФЧХ

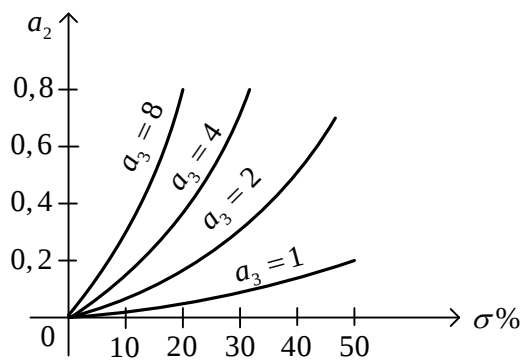


Рис. 12.11. Залежність $a_2(a_3, \sigma)$

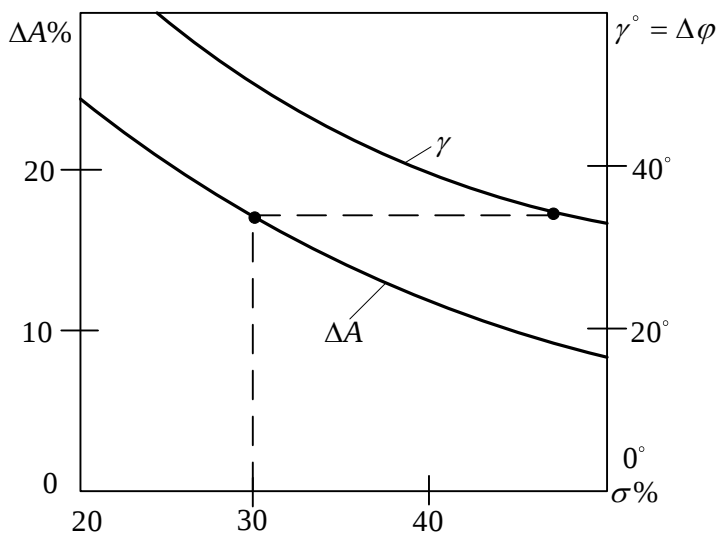


Рис. 12.12. Залежність ΔA і γ від σ

Для визначення $\varphi(\omega)$ побудуємо за $L_{\text{баз}}(\omega)$ АФЧХ $W_{\text{баз}}(j\omega)$.

Побудова ЛАХ і $W_{\text{к}}(p)$ послідовної коригуючої ланки

Оскільки $L_{\text{баз}}(\omega) = L_0(\omega) + L_{\text{к}}(\omega)$,

то

$$L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{баз}}(\omega) - L_0(\omega).$$

Вона побудована на рис. 21.10. Отже:

$$W_{\text{к}}(p) = \frac{k_{\text{к}} \left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^3}{\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)^2 \left(1 + \frac{p}{\omega_3}\right)} = \frac{10(1+p)^3}{(1+5p)^2(1+0,17p)}.$$

Якщо скористатися паралельним коригувальним пристроєм, то

$$W_{\text{к}}^{\text{пар}}(p) \cong W_{\text{баз}}^{-1}(p),$$

а

$$L_{\text{к}}^{\text{пар}}(\omega) \cong -L_{\text{баз}}(\omega).$$

На рис.12.10 $L_{\text{к}}^{\text{пар}}(\omega)$ показано штрих-пунктиром.

Оскільки консервативна ланка в точці $\omega = 1$ має розрив (пунктирна лінія на рис. 12.10), то дійсна ЛАХ скорегованої системи буде відрізнятись від кусково-лінійної. Однак, завдяки корекції САК в цілому буде стійка і якість перехідних процесів буде забезпечена завдяки необхідним запасам за амплітудою і фазою (рис. 12.13).

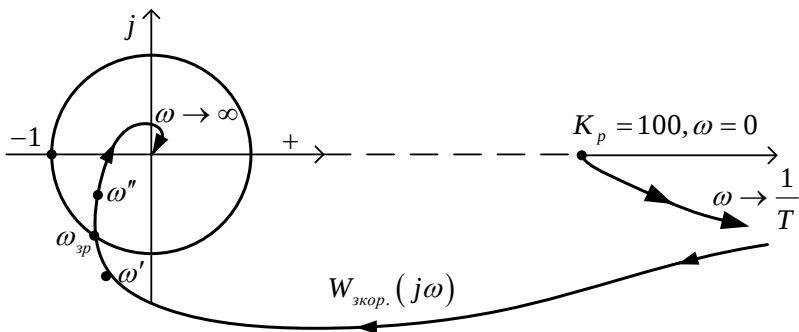


Рис. 12.13. АФЧХ

12.5 Приклад⁹ з використання моделювання в середовищі MATLAB

Об'єкт керування (наприклад, електропривод) має

$$W_0(p) = \frac{10}{p(0,02p + 1)(0,5p + 1)},$$

де 10 – статичний коефіцієнт передачі, 0,02 і 0,5 – електрична і механічна стала часу.

Необхідно виконати синтез послідовного корегувального пристрою так, щоб САК була астатичною, коефіцієнт C_1 похибки $\varepsilon(\infty)$ відстеження лінійно зростаючої функції дорівнював 0,1 $\sigma\% = 20$; $t_{п.п.} \leq 4$ с.

Алгоритм розрахунку САК

Крок 1. Будуємо ЛАЧХ не скоригованої системи (рис. 11.14):

$$W_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0,02j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}$$

або АЧХ

$$|W_0(\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1 + (0,02\omega)^2}\sqrt{1 + (0,5\omega)^2}},$$

або

$$|W_0(\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{50}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}.$$

Звідси ЛАЧХ L_0 :

$$L_0(\omega) = 20 \lg 10 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{50}\right)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}.$$

На частоті $\omega = 1$, $L_0(1) \approx 20$, далі, завдяки члену $-20 \lg \omega$, вліво і вправо проводимо під нахилом -20 дБ/дек. пряму. На частоті

⁹ Репнікова Н.Б. ТАК класика і сучасність/К.: НТУУ «КПІ», 2001. – 328 с.

2 додається $-20 \lg \sqrt{1 + (\omega/2)^2}$ і до частоти 50 буде пряма з нахилом -40 дБ/дек., правіше частоти 50 додається складова $-20 \lg \sqrt{1 + (\omega/50)^2}$, – пряма отримує нахил -60 дБ/дек. (рис. 12.14).

Крок 2. Будуємо бажану $L_{\text{баж}}(\omega)$.

2.1 Добротність $k_v = 1/C_1$ за швидкістю зміни вхідного сигналу:

$$k_v = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{0.1} = 10.$$

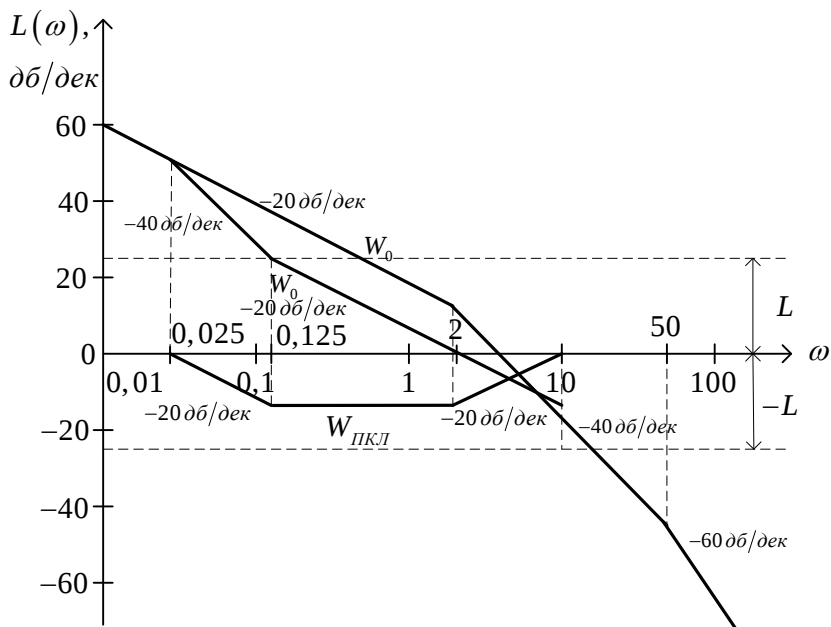


Рис. 12.14. ЛАЧХ

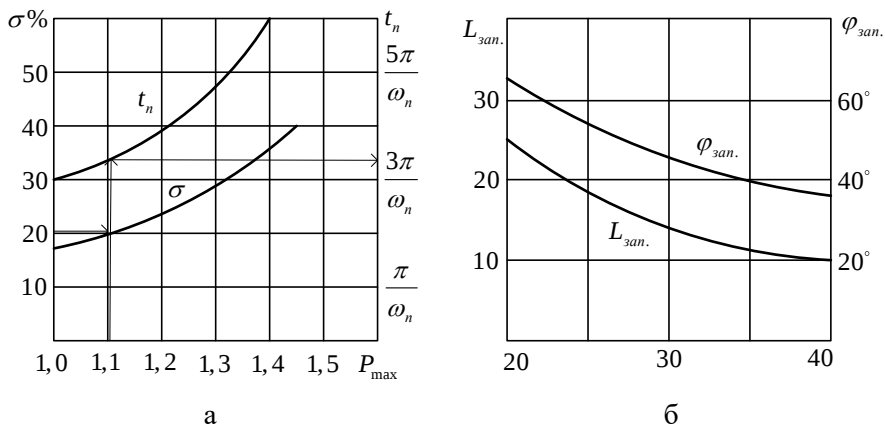


Рис. 12.15. Залежності: а) σ і t_n від P_{max} ; б) $L_{зап.}$ і $\varphi_{зап.}$ від $\sigma\%$

2.2 Частота зрізу $\omega_{зр.}$. За заданим $\sigma\% = 20$ знаходимо граничну частоту ω_n позитивності $L_{бaj}(\omega)$ відповідно до графіка (рис. 12.15):

$$(\sigma\% = 20) \Rightarrow (t_{п.п.} = \frac{3,15\pi}{\omega_n}; t_{п.п.} = 4, \text{ то } \omega_n = 2,5).$$

Частоту зрізу $\omega_{зр.}$ беруть в межах $(0,6 \div 0,9) \omega_n$. Візьмемо $\omega_{зр.} = 2$.

2.3. Запас $L_{зап.}$ стійкості за амплітудою (рис. 12.15):

$$(\sigma\% = 20) \Rightarrow L_{зап.} = 24 \text{ дБ}.$$

2.4 Будуємо бажану ЛАЧХ $L_{бaj}(\omega)$.

Оскільки $k_v=10$ і система астатична, то побудову $L_{бaj}$ починаємо з нахилом -20 дБ/дек з перетином вісі ω на частоті $\omega_{зр.}$ зрізу: $\omega_{зр.} = 2$. Сполучення з ЛАЧХ об'єкта $L_0(\omega)$ здійснюємо прямими з нахилом -40 дБ/дек. Частоти сполучень визначаємо графічно.

Для спрощення структури коригуючої ланки, після $\omega > 10$ бажана $L_{бaj}(\omega)$ ЛАХ повторює $L_0(\omega)$.

3. Визначення ЛАЧХ послідовного корегувального пристрою (рис. 12.14):

$$L_k(\omega) = L_{бaj}(\omega) - L_0(\omega).$$

4. За графіком $L_k(\omega)$ визначаємо передаточну функцію $W_k(p)$:

$$W_K(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{0,125}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{0,025}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} = \frac{(8j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}{(40j\omega + 1)(0,1j\omega + 1)}$$

або

$$W_K(p) = \frac{(8j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}{(40j\omega + 1)(0,1j\omega + 1)}.$$

5. Шляхом моделювання в середовищі MATLAB перевіряємо показники якості САК з корекцією (рис. 12.16).

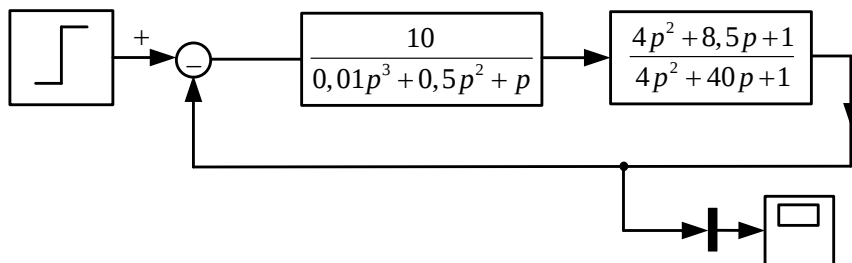


Рис. 12.16. Моделювання САК в MATLAB (Simulink)

На Score 2 маємо перехідну функцію $h(t)$ скорегованої САК (рис. 12.17), яка задовольняє вимоги по $\sigma\%$ і $t_{п.п.}$.

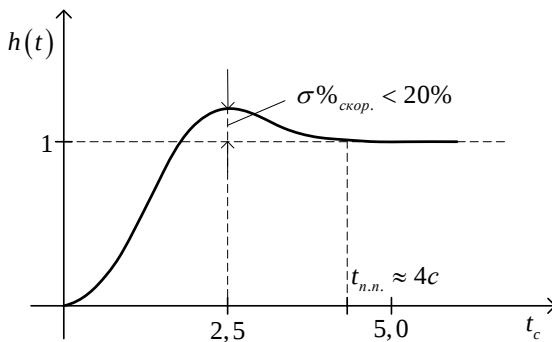


Рис. 12.17. Залежність $h(t)$

6. За графіком $L_K(\omega)$ і $W_K(p)$ визначаємо (рис. 12.18) структуру і параметри RC-коригувальної ланки¹⁰.

Як показано в цій таблиці, τ_1 в $W_K(p)$ дорівнює $R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2$.

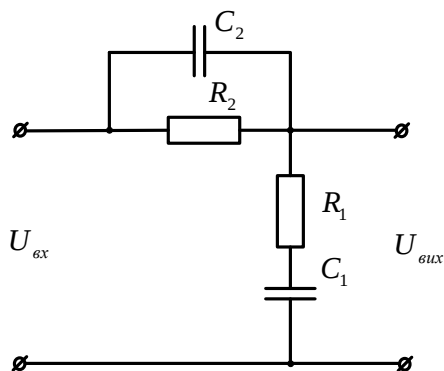


Рис. 12.18. Коригуюча ланка

Далі знаменник

$$W_K(p) = (\tau_3 p + 1)(\tau_4 p + 1) = \tau_3 \tau_4 p^2 + (\tau_3 + \tau_4)p + 1$$

і це (чому?) дорівнює

$$\tau_3 \tau_4 p^2 + \left[\tau_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \tau_2 \right] p + 1.$$

Доведемо це, скориставшись теорією електричних кіл. Дійсно, згідно схеми (рис. 11.18), позначивши $R_1 C_1 = \tau_1$, $R_2 C_2 = \tau_2$, маємо:

$$\begin{aligned} W_K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{R_1 + \frac{1}{pC_1}}{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} + \left(R_1 + \frac{1}{pC_1} \right)} = \frac{\frac{\tau_1 p + 1}{pC_1}}{\left(\frac{R_2}{\tau_2 p + 1} + \frac{\tau_1 p + 1}{pC_1} \right)} = \\ &= \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{(R_2 \cdot pC_1 + (\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1))} = \end{aligned}$$

¹⁰ Табл. VIII, Солодовников В.В. ТАУ. кн. 2, стр. 326-329

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + R_2 \cdot C_1)p + 1} = \\
&= \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2 + R_2 \cdot C_1)p + 1} = \\
&= \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}{\tau_1 \tau_2 p^2 + \left(\tau_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \tau_2 \right) p + 1}.
\end{aligned}$$

Отже, для нашої $W_k(p)$,

$$\tau_1 = R_1 \cdot C_1 = 0,5; \quad \tau_2 = R_2 \cdot C_2 = 8; \quad \tau_1 \tau_2 = 4;$$

$$\tau_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \tau_2 = 40,1.$$

Маємо 4 залежності з чотирма невідомими: C_1 , C_2 , R_1 , R_2 .

Реально, задавшись конденсаторами, наприклад, $C_1 = C_2 = 100$ мкФ, знайдемо активні опори R_1 і R_2 резисторів:

$$R_1 = \frac{0,5}{10^{-4}} = 500 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{8}{10^{-4}} = 800 \text{ Ом}.$$

12.6 Налаштування САК за часовими характеристиками

В традиційних промислових системах автоматики широко використовують стандартні промислові регулятори за похибкою $\varepsilon(t)$ в САК:

- з пропорційним законом керування (так звані П-регулятори);
- з пропорційно-інтегральним (ПІ-регулятори);
- з пропорційно-інтегрально-диференціальним (ПІД-регулятори).

Налаштки цих регуляторів, користуючись так званими розгінними характеристиками об'єктів автоматизації, тобто експериментально знятими перехідними функціями $h(t)$ об'єкта, та номограмами оптимальних налаштувань параметрів, які залежать від

параметрів $h(t)$ і критерію якості САК, виставляють ці оптимальні параметри:

$k_{п opt}$ – статичний коефіцієнт;

$T_{i opt} = 1/k_i$ – інтегральний коефіцієнт;

$T_{д opt} = k_d$ – диференційний коефіцієнт.

Залежно від статичності чи астатичності об'єкта керування; від критерію якості перехідного процесу (аперіодичний, з перерегулюванням $\sigma \leq 20\%$, мінімуму середньо-квадратичної похибки у відпрацюванні сходінки вхідного сигналу); від параметрів $\tau_{об}, T_{об}, \alpha, h(t)$ за відповідними номограмами¹¹ (стор. 329) розраховуються оптимальні параметри регуляторів.

1. Розгонні характеристики об'єкта:

а) Статичного

б) Астатичного

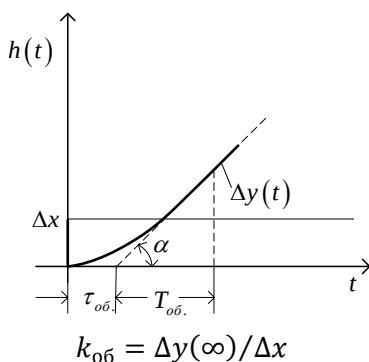
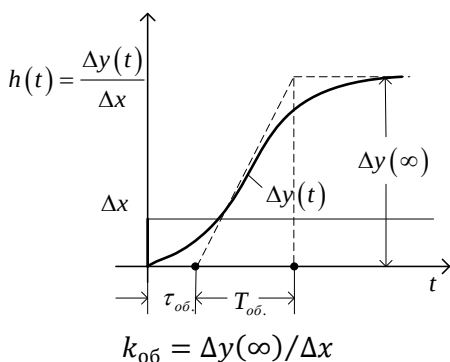


Рис. 12.19. Розгонні характеристики

Як приклад, наведемо номограму для визначення оптимальних параметрів ПД-регулятора астатичного об'єкта (рис. 12.19, б) за критерієм аперіодичності перехідного процесу (без перерегулювання)

¹¹ Наладка средств автоматизации и АСР: Справочное пособие/Под ред. А.С.Клюева, М.: Энергоатомиздат, 1989. – 368 с.

(рис. 12.20) за умови, що *ступінь затухання* Ψ перехідного процесу в САК з ПД-регулятором (відносна різниця двох сусідніх амплітуд одного знаку $h(t)$):

$$\Psi = \frac{\Delta h_{max} - \Delta h_1}{\Delta h_{max}}$$

складе від 1 до 0,95.

Визначивши з перехідного процесу (рис. 12.19, б) параметри $\tau_{об}$, $k_{об}$, $T_{об}$ знаходимо відношення

$$\mu_1 = \frac{\tau_{об}}{T_{об}},$$

далі за μ_1 визначаємо і $T_d(1)/\tau_{об} \approx 0,25$ (точка 1), звідки

$$T_{d\,opt} = 9,25 \cdot \tau_{об}; \quad k_{p\,opt} \approx 1 \text{ (точка 2),}$$

звідки $k_{п\,opt} = k_{p\,opt}/k_{об} \approx 1/k_{об}$, $(T_i/\tau_{об})_{opt} \approx 5$ (точка 3), звідки $T_{i\,opt} \cong 5\tau_{об}$.

Далі, виставивши ці параметри в ПД-регуляторі, доцільно ще раз провести експеримент в САК з цим ПД-регулятором, щоб впевнитись у виконанні ним заданих показників якості САК.

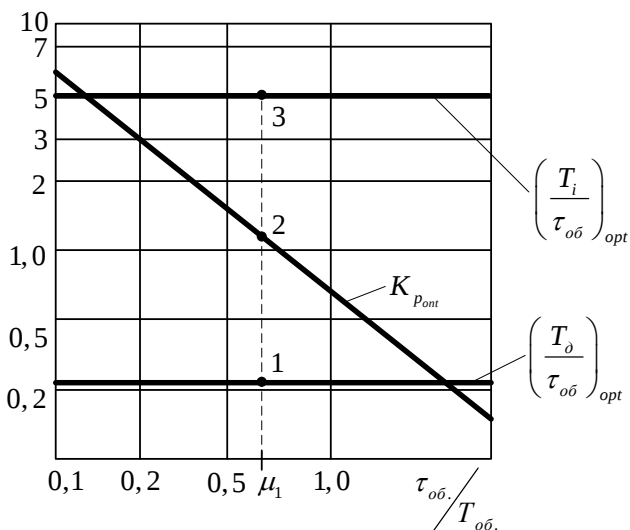


Рис. 12.20. Номограма для розрахунку параметрів ПД-регулятора

13 НЕЛІНІЙНІ САК

Розглянуті раніше лінійні САК в дійсності є нелінійними. Але ступінь не лінійності в області робочого режиму САК не є суттєвою. Це дозволяє шляхом лінеаризації нелінійних елементів з допустимою (з точки зору стійкості і якості) похибкою замінити нелінійні елементи (НЕ) лійними.

В загальному випадку, а також якщо НЕ мають суттєву нелінійність (як в малому так і в великому) динаміку і статику таких САК слід розглядати як нелінійну.

13.1 Статика нелінійних САК (НСАК)

13.1.1 Типові нелінійні ланки (кусково-лінійна апроксимація)



Рис.13.1. Нелінійна ланка

1) Однозначні нелінійні перетворення:

- а) зона не чутливості (Δ_1, Δ_2) (рис.13.2,а);
 - б) НЕ з насиченням (y_{m1}, y_{m2}) (рис.13.2,б);
 - в) НЕ з зоною і насиченням (рис.13.2,в);
 - г) Трьох-позиційне реле (рис.13.2,г);
 - д) аналогово-цифровий перетворювач (рис.13.3,д).
- (НЕ пункти г, д – мають залежності з розривами I роду).

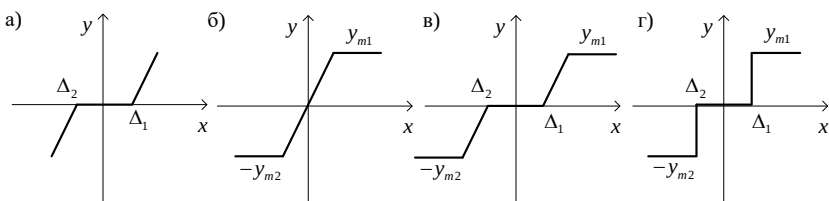


Рис. 13.2. Нелінійні елементи: а) зона не чутливості; б) з насиченням; в) з зоною і насиченням; г) релейна з зоною

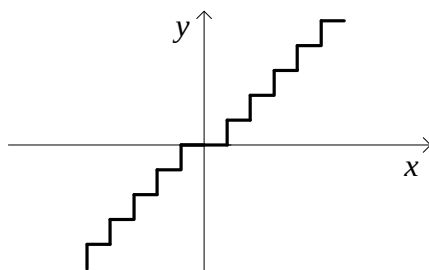


Рис.13.3. Аналогово-цифровий перетворювач

2) Багатозначні нелінійні перетворення:

- а) *двохпозиційне реле з гістерезисом* (рис.13.4,а);
 - б) *трьохпозиційне реле з гістерезисом* (рис.13.4,б);
 - в) *багатозначне (люфт в редукторі)* (рис.13.4, в),
 - г) *магнітний гістерезис* (рис.13.4,г).
- (пункти а і б – розривні залежності).

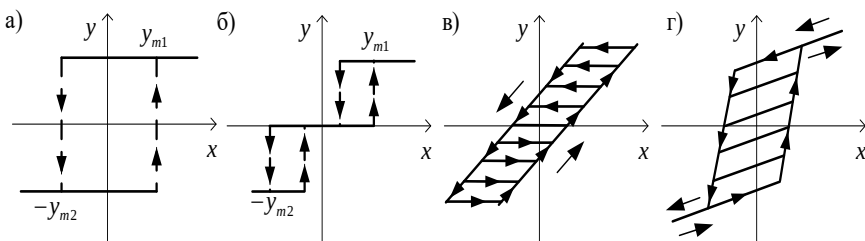


Рис.13.4. Багатозначні нелінійні елементи

13.1.2 Типи з'єднань нелінійних ланок

а) *Послідовне з'єднання двох НЕ*

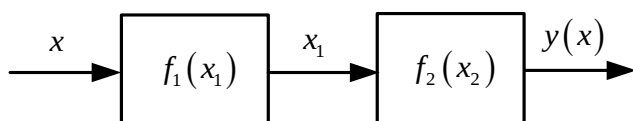


Рис.13.5. Послідовне з'єднання

Тут має місце композиція НЕ:

$$y(x) = f_2(x_2) = f_2(f_1(x)).$$

Наприклад (рис.13.6), де будується графічно, так звана, «хрестоподібна діаграма», що відповідає умові композиції.

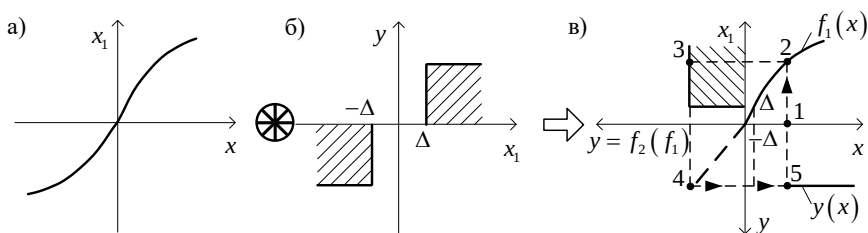


Рис.13.6. Хрестоподібна діаграма

б) Паралельне з'єднання НЕ

$y(x) = f_1(x) + f_2(x)$, отже за однакових x складаються ординати $y_1(x)$ плюс $y_2(x)$. Наприклад, (рис.13.7)

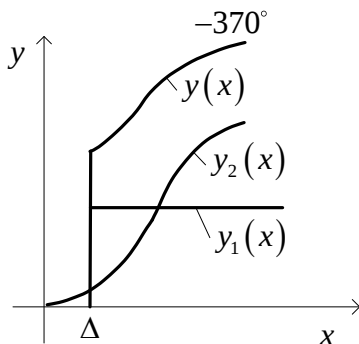


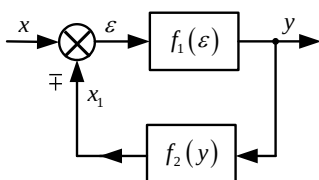
Рис.13.7. Паралельне з'єднання

г) Паралельно-зустрічне з'єднання НЕ (з'єднання зі зворотнім зв'язком) (рис.13.8).

$\varepsilon = x \mp f_2(y) = f_1^{-1}(y)$, звідси

$$x(t) = f_1^{-1}\{y\} \pm f_2\{y\}.$$

а)



б)

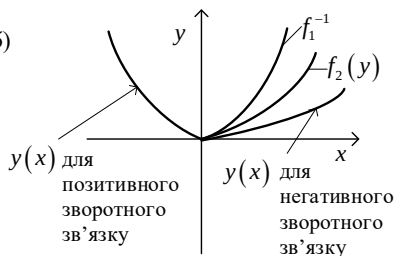


Рис.13.8. Зустрічно-паралельне з'єднання

Зі схеми (рис.13.8, а) витікає, що

$$\varepsilon = x \mp f_2(y) = f_1^{-1}(y),$$

тобто

$$x(t) = f_1^{-1}(y(t)) \pm f_2(y(t)),$$

де – зворотна до $f_1(\varepsilon)$ нелінійна залежність (крива f_1^{-1} на рис. 13.7,б).

Складаючи чи віднімаючи $f_2(y)$ відносно $f_1(y)$, отримаємо залежності $y(x)$ для позитивного і негативного (додатного і від'ємного) зворотного зв'язку. Перетворення справедливе, якщо $f_1(\varepsilon)$ однозначна, тобто якщо існує $f_1^{-1}(y)$.

13.1.3 Деякі структурні перетворення нелінійних систем

а) Перенос точки (1) розгалуження:

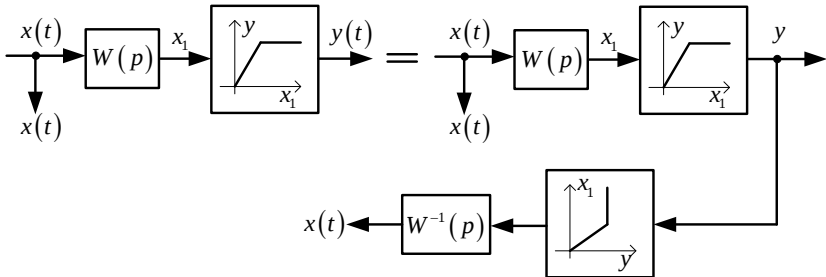


Рис.13.9. Структурне перетворення

Тут все очевидно, але, якщо є динамічна ланка $W(p)$, то необхідно використати відповідну зворотну характеристику (рис.13.10).

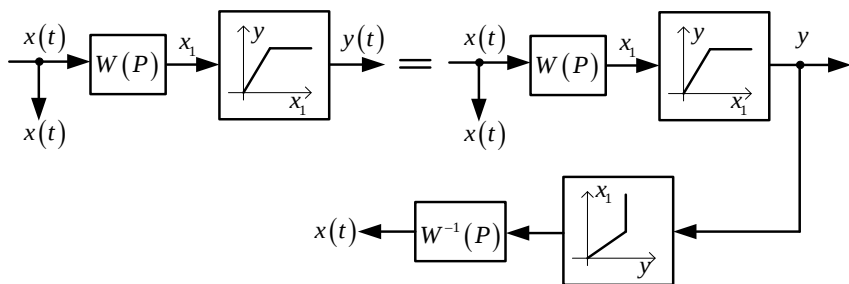


Рис.13.10. Структурне перетворення

Тут $W(p)$ і $W^{-1}(p)$ – символічний запис диференційного рівняння, тобто $p = \frac{d}{dt}$.

Така подача диференційного зв'язку дещо компактніша.

б) В САК зі зворотнім зв'язком можна міняти місцями ланки, які включено в коло прямого і зворотного зв'язку, шляхом заміни відповідних операторів (статичних і динамічних) зворотними.

Позначимо нелінійний динамічний оператор, що включає лінійний динамічний $W(p)$ і нелінійну однозначну статичну складову f (модель Гамерштейна-Вінера), буквою λ .

Покажемо, що системі (рис.13.11,а) еквівалентна система (рис.13.11,б).

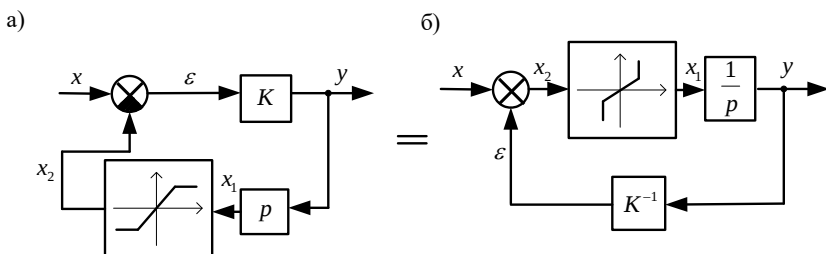


Рис.13.11. Структурне перетворення

Для схеми (а) $y = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}x$, якщо оператори λ_1, λ_2 лінійні, то, розділивши чисельник і знаменник на $\lambda_1 \cdot \lambda_2$, отримаємо, що $y = \frac{\lambda_2^{-1}}{1+\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}x$, тобто схему (б).

Аналогічно і для нелінійних САК з однозначними НЕ (рис.13.12).

Наприклад,

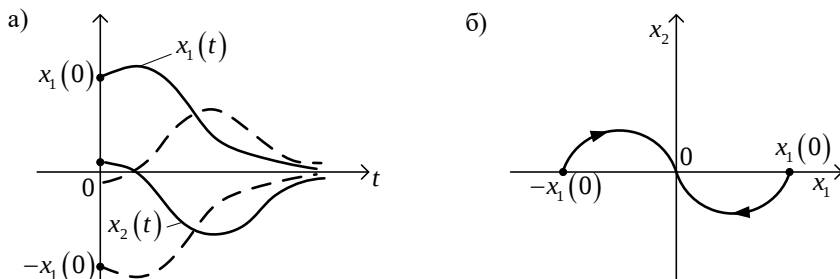


Рис.13.12. Структурне перетворення

При реалізації оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$ суттєво підсилює високочастотні завади та похибки вимірювання $y(t)$ (схема рис. 13.12, а). Тому доцільніше при реалізації скористатися схемою (рис. 13.12, б).

Домашнє завдання

Накресліть послідовне, паралельне і зустрічно-паралельне з'єднання нелінійних елементів (рис. 13.2) по два елемента.

13.2. Аналіз нелінійних САК на фазовій площині

13.2.1. Поведінка НСАК за малих відхилень від точки рівноваги

Фазовою площиною називають окремий випадок фазового простору, якщо його розмірність дорівнює двом. Тобто САК відносно похибки $\varepsilon(t)$ чи вихідної змінної $y(t)$ подається системою диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t), \\ \dot{x}_2 = f(u(t))' \end{cases}$$

де $u(t)$ – керуючий вплив,

$x_1, x_2(t)$ – змінні стану,

$\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ – їх похідні.

Точка M з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ називається зображуючою точкою, тобто її руху у часі t відповідає фазова траєкторія. За формою траєкторії точки $M(x_1, x_2)$ можна дослідити якість і стійкість НСАК.

На відміну від лінійних САК в НСАК розрізняють як стійкий стан рівноваги (спокою) або автоколивань.

В НСАК стійкість може залежати як від виду математичної моделі НСАК, так і від початкових умов. Залежно від початкових умов розглядається:

- стійкість «у малому», тобто за малих початкових відхилень;

- стійкість «у великому», тобто за великих початкових відхилень; стійкість «в цілому», тобто за необмежених початкових відхилень від усталеного стану.

Система *асимптотично* стійка, якщо повертається після зняття збурюючого впливу в початкову точку, *просто* стійка, – якщо повертається в деяку область, що включає в себе початкову точку.

Для наочності дослідження поведінки НСАК за малих відхилень від точки рівноваги розглянемо перехід від моделі Вінера-Гамерштейна

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial y}{\partial t} + a_0 y(t) = f(u(t))$$

до моделі в змінних стану $x_1(t)$ і $x_2(t)$ в формі Коші.

Введемо змінні стану:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{\partial y}{\partial t},$$

тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial t} = f(u(t)) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t), \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_2(t). \end{cases}$$

Для вільного руху $f(u(t)) \equiv 0$, а $x_1(t)$ – малі відхилення від усталеного режиму, де $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$.

Тоді, розділивши перше рівняння на друге, отримаємо рівняння руху зображальної точки M :

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -a_1 - a_0 \frac{x_1(t)}{x_2(t)}.$$

Залежно від знаку і величини коефіцієнтів a_0 і a_1 матимемо різні фазові траєкторії $x_2(x_1)$.

Повертаючись до моделі Вінера-Гамерштейна, за умови що $f(u(t)) = 0$, отримаємо корені характеристичного рівняння

$$p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

1) Якщо корені дійсні від'ємні ($p_1 < 0, p_2 < 0$), то

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}, \\ x_2(t) &= p_1 c_1 e^{p_1 t} + p_2 c_2 e^{p_2 t} \end{aligned}$$

затухаючі аперіодично перехідні процеси (рис.13.13, а) і фазові траєкторії (рис.13.13, б):

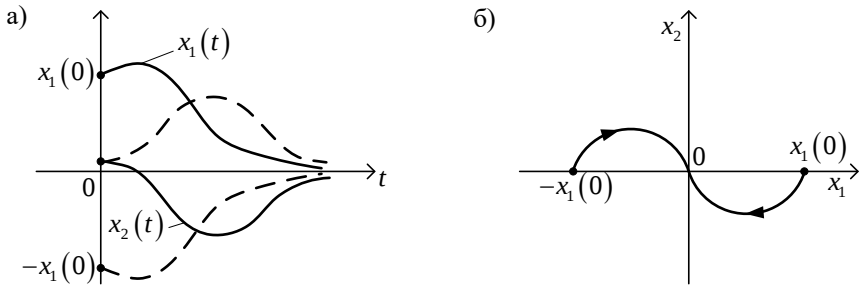


Рис.13.13. а) часова, б) фазова траєкторія

2) Якщо корені комплексно-спряжені з від'ємною дійсною складовою (рис. 13.14), то

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t,$$

$$x_2(t) = x_1(0)[- \alpha e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t - \omega e^{-\alpha t} \sin \omega t].$$

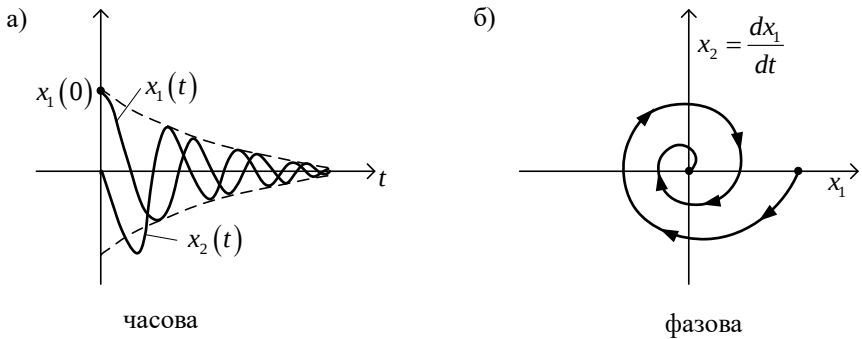


Рис. 13.14. Часова залежність (а) і фазовий портрет (б)

1) Якщо корені дійсні додатні ($p_1 > 0, p_2 > 0$), то маємо зростаючі експоненти (рис.13.15, а) і відповідні до них фазові траєкторії (рис.13.15, б).

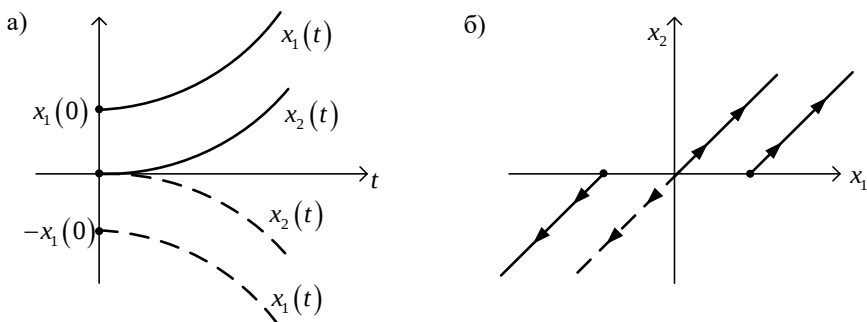


Рис.13.15. Часові і фазові траєкторії

- 2) Якщо корені комплексно-спряжені з додатною дійсною складовою $p_1 = \alpha + j\omega$; $p_2 = \alpha - j\omega$, то фазова траєкторія розбігається за спіраллю Архімеда (рис.13.16).

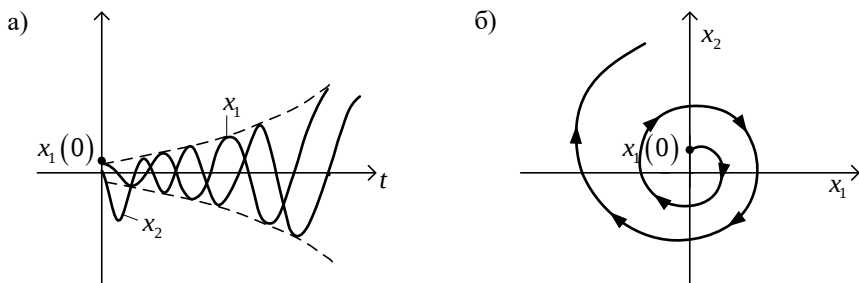


Рис.13.16. Часова залежність і фазовий портрет

Характерно, що траєкторія $x_2(x_1)$ завжди розгортається за часовою стрілкою. Це витікає з того, що $x_2 = \frac{\partial x_1}{\partial t}$.

- 3) Якщо корені уявні ($p_1 = j\omega$; $p_2 = -j\omega$), коли $a_1 = 0$, то фазова траєкторія утворює еліпс (рис.13.17, а, б):

$$x_1(t) = x_1(0) \cos \omega t,$$

$$x_2(t) = \omega x_1(0) \sin \omega t.$$

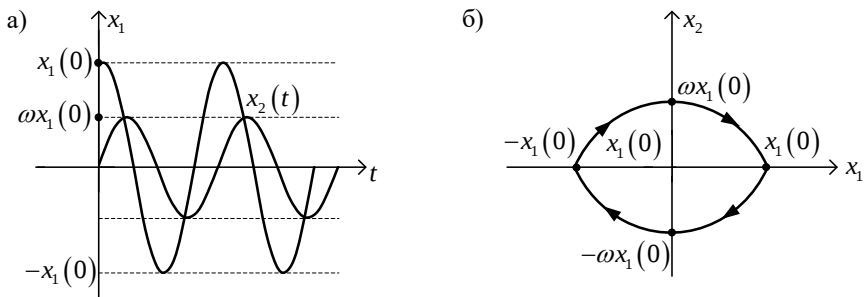


Рис.13.17. Фазовий портрет

4) Якщо обидва корені дійсні, але $(p_1 < 0, p_2 > 0)$ то точка $x_1 = 0; x_2 = 0$ називається **сідлом** і фазові траєкторії для різних початкових умов розбігаються вздовж прямолінійних траєкторій. Останні відповідають випадкам, коли один із коренів дорівнює нулю: якщо від'ємний, то стрілочки йдуть від нуля якщо додатний – то до нуля (рис.13.18).

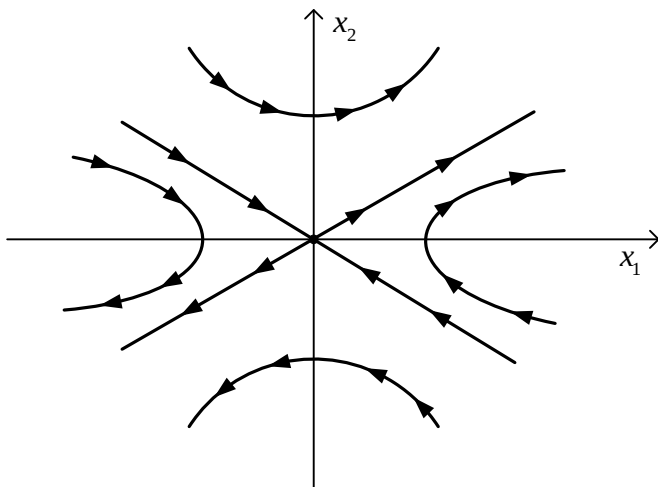


Рис.12.18. Фазовий портрет

Стійкі «сідло» або «стійкий фокус» мають «стійкі в малому» САК; не стійкі у малому» САК мають не стійкий вузол чи фокус ($x_1 = x_2 = 0$).

13.2.2. Поведінка НСАК за великих відхилень від точки рівноваги

Поведінка НСАК, задачі аналізу і синтезу досліджувалися різними методами і вченими:

- метод Ляпунова (найбільш загальний);
- частотні методи Л.С. Гольдфарба і Є.П. Попова;
- метод фазової площини;
- метод припасовування;
- метод точкових перетворень А.А. Андропова;
- чисельні методи на ЕОМ.

Як приклад метода фазової площини з виконанням методу припасовування розглянемо задачу аналізу релейної НСАК, стійкість і якість перехідних процесів в ній залежно від виду НЕ, наявності зворотного зв'язку за швидкістю вихідної координати об'єкту. Релейна САК найбільш проста в реалізації. Вона складається з електродвигуна, НЕ з релейними характеристиками і суматора (рис.13.19).

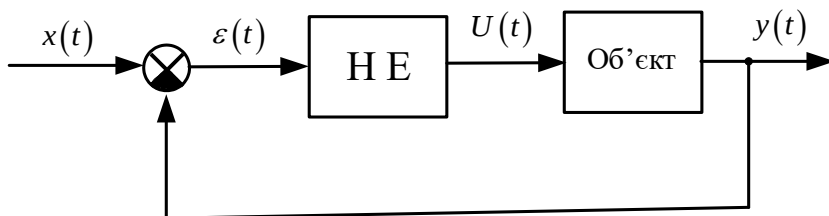


Рис. 13.19. Релейна система

Нелінійний елемент може мати одну з характеристик (рис.13.2, 13.3).

Об'єктом може бути, наприклад, двигун постійного струму (ДПС) з керуванням напругою якоря, де $U_{\text{я}}(t) \in \pm U_m; 0$.

Для покращення динаміки НСАК може вводитися за допомогою тахогенератора зворотній зв'язок за швидкістю Ω обертання валу двигуна. Вихідна координата $y(t)$ дорівнює куту θ обертання валу після редуктора.

Отже маємо, наприклад, наступну структурну схему системи:

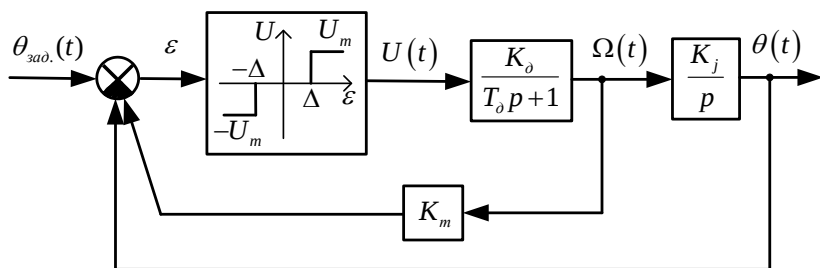


Рис.13.20. Релейний електропривод

Тут (як і раніше) диференційні зв'язки подано структурами подібними до передаточних функцій. Але слід пам'ятати, до тут $p = \frac{d}{dt}$, а не змінна Лапласа. На схемі позначено:

$\theta_{\text{зад}}(t)$ – бажана траєкторія зміни кута;

$\theta(t)$ – дійсна траєкторія;

K_d і T_d – коефіцієнт і стала часу ДПС;

K_j – коефіцієнт редукції редуктора;

K_m – коефіцієнт тахогенератора;

Трьох-позиційне реле перетворює сигнал ε похибки в керуючий вплив за законом:

$$U(t) = \begin{cases} +U_m, & \text{якщо } \varepsilon \geq \Delta, \\ 0, & \text{якщо } |\varepsilon| < \Delta, \\ -U_m, & \text{якщо } \varepsilon \leq -\Delta. \end{cases} \quad (13.1)$$

ДПС перетворює сигнал $U(t)$ в кутову швидкість $\Omega(t)$:

$$T_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega(t) = K_\theta U(t) \quad (13.2)$$

Перехід від $\Omega(t)$ до $\theta(t)$ об'єднано з редуктором. Тоді маємо, що

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_j \Omega(t) \quad (13.3)$$

Переходячи від позначення фізичних величин до абстрактних

$$\theta(t) = x_1(t); \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = K_j \Omega = x_2(t), \quad (13.4)$$

отримаємо (відповідно до рис. 13.19 і виразів (13.1), (13.2), (13.3)) наступні рівняння:

$$T_\theta \frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2(t) = K_\theta \cdot K_j \cdot U(\varepsilon), \quad (13.5)$$

$$\varepsilon(t) = \theta_3(t) - x_1(t) - K_m \Omega. \quad (13.6)$$

Для розгляду динаміки і стійкості доцільно прийняти $\theta_3(t) = 0$, а $x_1(0) \neq 0$, $x_2(0) \neq 0$. Тоді (12.4) – (12.6) набуває вигляду

$$\varepsilon(t) = -x_1(t) - K_m \Omega = -x_1(t) - \frac{K_m}{K_j} x_2(t). \quad (13.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{K_\theta K_j}{T_\theta} U(\varepsilon(t)) - \frac{1}{T_\theta} x_2(t), \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_2. \end{cases} \quad (13.8)$$

Розділивши I рівняння в (13.8) на II, отримаємо диференціальне рівняння фазової траєкторії ($x_2(x_1)$):

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{K_\theta K_j}{T_\theta} \cdot \frac{U\left(-x_1(t) - \frac{K_m}{K_j} x_2(t)\right)}{x_2(t)} - \frac{1}{T_\theta}. \quad (13.9)$$

Для кожного з інтервалів сталості $U(\varepsilon)$ запишемо рівняння (13.9):

$$1) \quad \varepsilon > \Delta: \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{K_o K_j}{T_o} \cdot \frac{U_m}{x_2} - \frac{1}{T_o}. \quad (13.10)$$

$$2) \quad \varepsilon < -\Delta: \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{K_o K_j}{T_o} \cdot \frac{U_m}{x_2} - \frac{1}{T_o}. \quad (13.11)$$

$$3) \quad |\varepsilon| < \Delta: \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{T_o}. \quad (13.12)$$

Для отримання рішень рівнянь (13.10) – (13.12) скористаємося графічним методом «ізоклін»¹².

Ізокліна – це лінія на фазовій площині, яку перетинає фазова траєкторія $x_2(x_1)$ під заданим кутом.

Враховуючи рівняння (13.7) і (13.1) визначимо на фазовій площині лінії переключення реле (13.1) залежно від ε :

Якщо $\varepsilon = \Delta$, то з (13.7) отримаємо:

$$\Delta = -x_1(t) - \frac{K_m}{K_j} x_2(t)$$

або

$$x_2(t) = -\frac{K_j}{K_m} (x_1(t) + \Delta). \quad (13.13)$$

Якщо $\varepsilon = -\Delta$, то

$$x_2(t) = -\frac{K_j}{K_m} (x_1(t) - \Delta). \quad (13.14)$$

Якщо $|\varepsilon| < \Delta$, то маємо аналітичне рішення рівняння (13.12):

$$x_2(t) = -\frac{1}{T_o} x_1(t) + c, \quad (13.15)$$

¹² Теорія автоматичного керування / Под ред. А.В. Нетушила – М.: Высш. школа, 1975.– 300 с.

де c – константа, яка визначається шляхом припасовування траєкторій $x_2(x(t))$ на лініях (12.13), (12.14) переключення.

На рис.13.21 на площині (x_1, x_2) нанесено лінії переключення (13.13), (13.14).

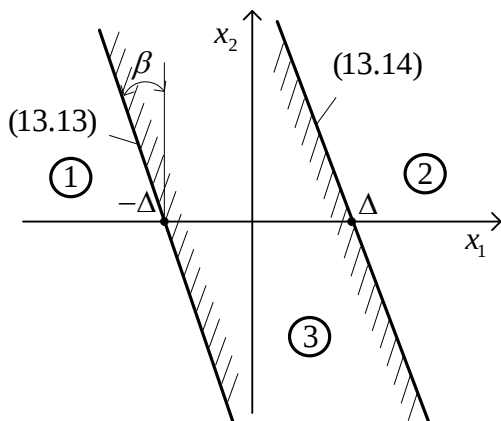


Рис.13.21. Лінії переключення

Ці лінії розділяють площину (x_1, x_2) на три області: область ① відповідає рівнянню (13.11), ② – рівнянню (13.10), ③ – рівнянню (13.12).

Далі, для кожної з областей (1, 2) і відповідних ним рівнянь (13.10), (13.11) отримаємо рівняння ізоклін.

Для цього будемо задаватися сталими значеннями c_i похідних $\partial x_2 / \partial x_1$. Тоді замість (13.10) маємо

$$C_i = \frac{K_\partial K_j}{T_\partial} \cdot \frac{U_m}{x_2} - \frac{1}{T_\partial}$$

або

$$x_2 = \frac{K_\partial K_i}{T_\partial} \cdot U_m \cdot - \frac{1}{C_i + \frac{1}{T_\partial}}; \quad (13.16)$$

замість (13.11) маємо

$$C_i = -\left(\frac{K_o K_j}{T_o} \cdot \frac{U_m}{x_2} + \frac{1}{T_o}\right)$$

або

$$x_2 = -\frac{K_o K_j}{T_o} \cdot U_m \cdot -\frac{1}{C_i - \frac{1}{T_o}}. \quad (13.17)$$

Тепер для конкретних числових значень K_d , K_j , T_d , задаючись C_i в діапазоні $(\pm\infty)$ наносимо на фазову площину лінії ізоклін та стрілочки, що перетинають їх під кутом $\alpha_i = \arctan C_i$ (рис.13.22).

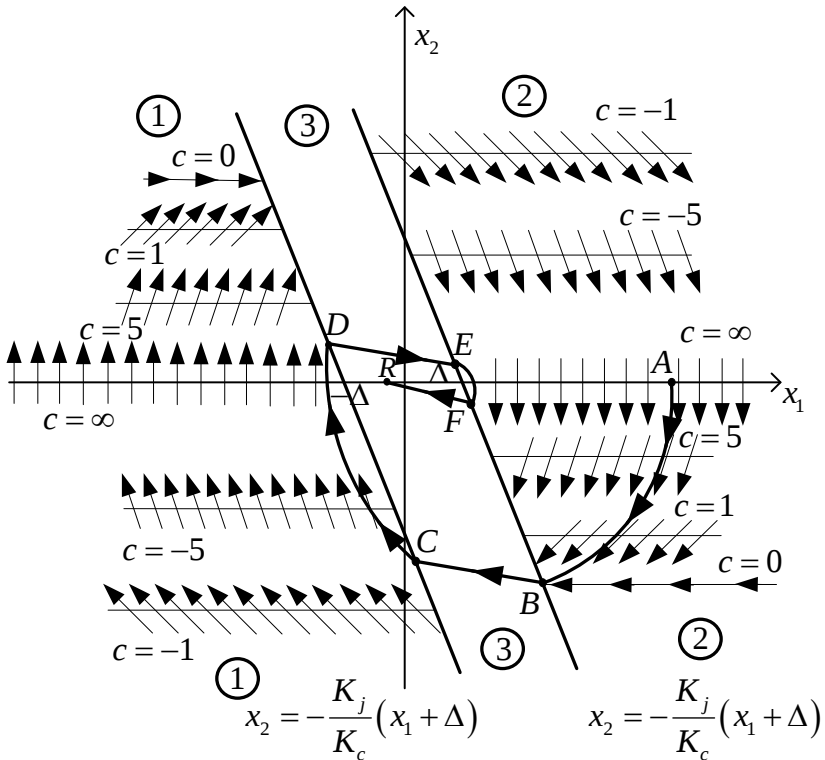


Рис.13.22. Фазовий портрет

Маючи сітку ізоклін рішення (13.15) і рівняння (13.12) малюємо (залежно від початкових умов $x_1(0)$ і $x_2(0)$) «фазовий

портрет» перехідного процесу в НСАК (рис.13.22) в координатах x_1 , x_2 (фактично, оскільки $\theta_3 = 0$, це похибка ε і її похідна). Точка A відповідає значенню $x_1(0)$, $x_2(0)$. Далі по дотичній стрілочок проходимо до точки B , далі в зоні ③ з B в C переходимо за рішенням (13.15) рівняння (13.12); далі з точки C в точку D зони ② по дотичним до стрілочок і так далі з D в E , з E в F , з F в кінцеву точку R .

З траєкторії руху зображаючої точки з початкового стану A в кінцевий R видно, що $x_1(t)$ затухає коливально: з області, де $x_1 > 0$ переходить в область, де $x_1 < 0$, потім знову і зупиняється в зоні нечутливості реле (точка R).

По фазовому портрету (рис.13.22) легко проаналізувати вплив зони $\pm\Delta$, коефіцієнта K_m ВЗЗ по Ω на якість перехідного процесу в релейній НСАК. В межах зон ① і ② перехідний процес $x_1(t)$ природно залежить від параметрів лінійної динамічної складової моделі НСАК. Це K_d , K_j , T_d , U_m . В зоні ③, де $U(t) = 0$, – від сталої часу T_d , кута нахилу ліній переключень (12.13), (12.14) відносно осі x_2 (рис. 13.21), який визначається як $\beta = -\arctan \frac{K_j}{K_m}$: чим сильніший від'ємний зворотній зв'язок по швидкості (більший K_m), тим більший цей кут і, відповідно, менше коливальність процесу $x_1(t)$. За досить великого кута β НСАК переходить в, так званий, ковзкий режим, якщо $\Delta = 0$.

Якщо НЕ має вигляд прямокутної петлі гістерезису (неоднозначний НЕ), то кількість коливань дещо зростає. Система нестійка «в малому»: в зоні нуля встановлюються автоколивання, амплітуду і частоту яких можна визначити по параметрам еліптичної траєкторії:

Амплітуда A_m синусоїди

$$x_1(t) = A_m \cdot \sin \omega t$$

дорівнює $1/2$ максимальної ширини еліпса:

$$A_m = \frac{1}{2} \cdot x_{max} \quad (13.18)$$

частоту ω визначає з $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \omega A_m \cdot \cos(\omega t), \quad (13.19)$$

тобто

$$\omega = \frac{x_{2max}}{x_{1max}}. \quad (13.20)$$

На рис.13.23 наведено приклади фазових портретів НСАК для різних НЕ за наявності або відсутності (лінії переключення вертикальні) ВЗЗ швидкістю Ω .

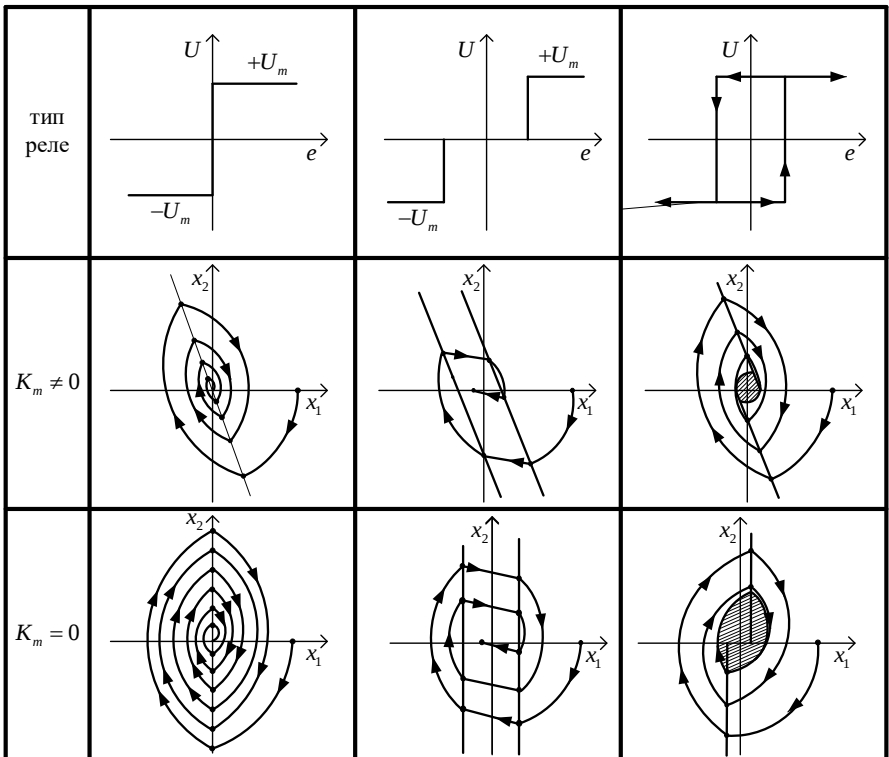


Рис.13.23. Фазові портрети

Приклад 1. Дослідження можливості релейного керування об'єктом з астатизмом другого порядку

В якості об'єкта, який має операцію подвійного інтегрування керуючого впливу $U(t)$, наприклад, може розглядатися:

- канал крену $x_1(t)$ ракети чи космічного апарату;
- положення $x_1(t)$ плоттера фірми Хьюлетт-Паккард;
- електродвигун з навантаженням, що має значний момент інерції і незначне демпфування (маніпулятор по збірці конструкції в космосі, електропривод в «старт-стопному» режимі та ін.).

Такі об'єкти з досить великою точністю можна описати простим рівнянням:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_0 U(t). \quad (13.21)$$

Не лінійний елемент – ідеальне реле:

$$U(t) = \begin{cases} U_m, & \text{якщо } \varepsilon > 0 \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon = 0. \\ -U_m, & \text{якщо } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (13.22)$$

Дослідимо, як поведе себе система (рис. 13.24) без зворотного зв'язку за швидкістю:

$$x_2(t) = \frac{dx_1}{dt}. \quad (13.23)$$

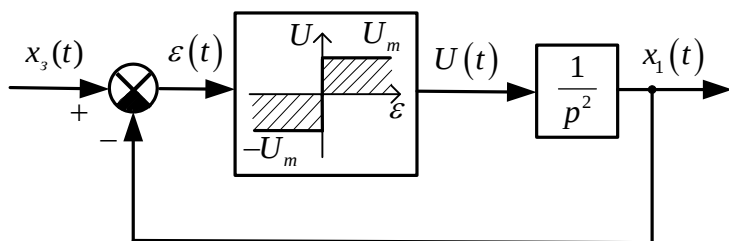


Рис. 13.24. Релейна система

Якщо $x_1(0) = x_{10} \neq 0$, а задане $x_1 = x_3(t) = 0$, то $\varepsilon(t) = -x_1(t)$.
Далі:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}. \quad (13.24)$$

Відношення (13.24) до (13.23) дає рівняння фазової траєкторії $x_2(x_1)$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_0 U(t)}{x_2}. \quad (13.25)$$

Для побудови рішення (13.25) $x_2(x_1)$ скористаємось методом ізоклін:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = C_i = \frac{k_0 U(t)}{x_2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13.26)$$

Звідси рівняння i -ої ізокліни для підобласті (x_2, x_1) , якщо $x_1 > 0$, з урахуванням (13.22) буде:

$$x_2 = \frac{-k_0 U_m}{C_i}, \quad (13.27)$$

для під області (x_2, x_1) , якщо $x_1 < 0$:

$$x_2 = \frac{k_0 U_m}{C_i}. \quad (13.28)$$

Покладемо (знормуємо) для спрощення запису $k_0 U_m = 1$. Тоді (13.27), (13.28) набуває вигляду:

$$x_2 = -\frac{1}{C_i}, \quad \text{якщо } x_1 > 0, (\varepsilon < 0); \quad (13.29)$$

$$x_2 = \frac{1}{C_i}, \quad \text{якщо } x_1 < 0, (\varepsilon > 0).$$

Задаючись значенням $C_i = \pm 0,5, \pm 1; \infty$, намалюємо сітку ізоклін (13.29) (рис.13.25).

Внаслідок повної симетрії сітки, за будь-яких початкових умов $(x_1(0), x_2(0))$ маємо траєкторію $x_2(x_1)$ у вигляді еліпса (а) (13.18), (13.19), (13.20) (для даних $k_0 U_m = 1$ – це коло).

Отже в системі (рис.13.24) встановляться автоколивання з амплітудою (13.18) (приблизно) 2,5 одиниць і частотою (13.20) 1 радіан в секунду (рис. 13.25, крива (а)).

Введемо в систему (рис. 13.24) додатково зворотній зв'язок з $k_{3.3}$ за швидкістю $dx_1/dt = x_2$. Тоді лінія переключення набуде наступного вигляду:

$$-x_1(t) - k_{3.3}x_2(t) = 0$$

або

$$x_2 = -k_{3.3}^{-1}x_1. \quad (13.30)$$

Тобто це пряма, що проходить через початок координат $x_1 = x_2 = 0$ під кутом $\alpha = \arctg(x_2/x_1) = -k_{3.3}^{-1}$.

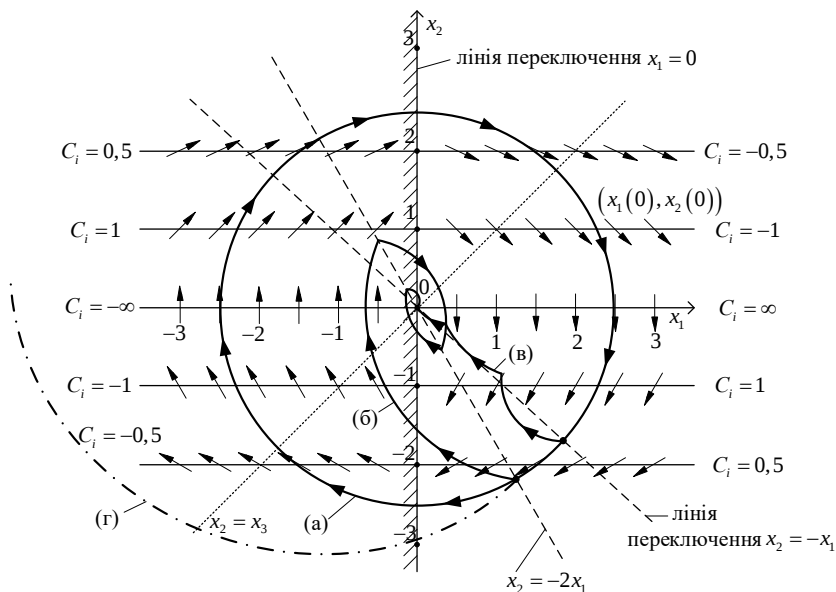


Рис. 13.25. Фазовий портрет

Для нашого прикладу покладемо, що $k_{3.3} = 0,5$. Тоді лінія (13.30) пройде під кутом $-63,5^\circ$ (рис. 13.25, пунктир).

Внаслідок введення від'ємного зворотного зв'язку з $k_{3.3} = 0,5$ маємо коливальний затухаючий процес (рис. 13.25, крива (б)) (приблизно три коливання).

Якщо взяти $k_{3.3} = 1$ (лінія $x_2 = -x_1$) то система перейде в так званий «ковзний режим» (рис. 13.25, крива (в)) швидких переключень з однієї зони на іншу вздовж лінії переключення $x_2 = -x_1$.

В такому режимі система має майже найбільшу швидкодію відпрацювання початкового розузгодження між $(x_1(0), x_2(0))$ і $(x_1 = x_2 = 0)$; майже не чутливість до параметра k_0 об'єкта. Але якщо $x_1(t)$ механічна величина, то часте переключення не бажане для механічного редуктора. Такий режим використовують для стабілізації руху $x(t)$ ракет відносно заданої траєкторії $x^*(t)$.

Для забезпечення максимальної швидкодії необхідно створити більш складну, ніж релейна характеристику нелінійного елемента. Для нашого прикладу $k_0 U_m = 1$. Тоді рівняння (13.26) набуває вигляду:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{x_2}$$

або $x_2 dx_2 = dx_1$, а його рішення буде:

$$\frac{x_2^2}{2} = \pm x_1 + C_i,$$

або

$$x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2} + C_i, \quad (13.31)$$

яке залежно від C_i утворює множину парабол (рис. 13.26).

Як видно з рис. 13.26, для максимальної швидкодії НСАК, тобто, щоб вона за одне переключення без перегулювання перейшла з будь-якого початкового стану $(x_1(0), x_2(0))$ в точку $(x_1 = x_2 = 0)$, необхідно, щоб лінія переключення відповідала траєкторії (13.31) для $C_i = 0$. Зліва від осі x_2 це буде:

$$x_1^{(\text{ЛП})} = \frac{x_2^2}{2},$$

зправа:

$$x_1^{(\text{ПП})} = -\frac{x_2^2}{2},$$

або в цілому

$$x_1^{(\text{лп})} = -\frac{x_2^2}{2} \cdot \text{sign } x_2 \quad (13.32)$$

(жирна лінія на рис. 13.26).

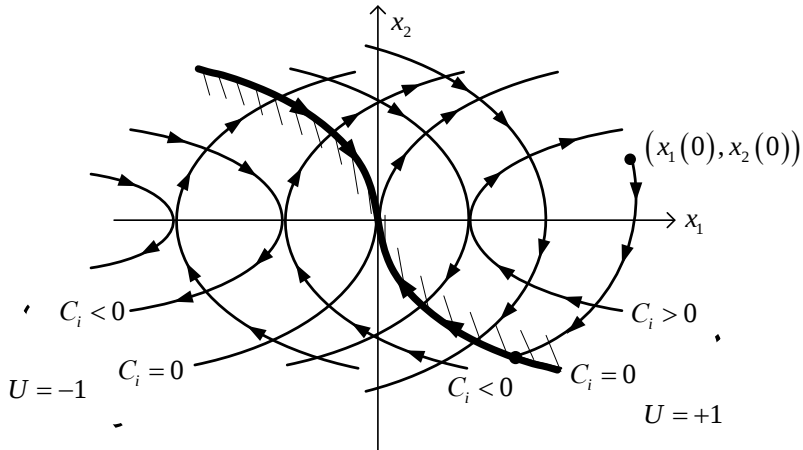


Рис. 13.26. Фазовий портрет оптимальної за швидкістю САК

НСАК повинна розпізнавати, на якій півплощині знаходиться зображаюча точка $(x_1(t), x_2(t))$. Для цього введемо функцію V різниці:

$$V(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2^2}{2} \cdot \text{sign } x_2. \quad (13.33)$$

Тоді оптимальне керування

$$U^*(t) = U_m \cdot \text{sign } V, \quad (13.34)$$

у нас $U_m = 1$.

Структурну схему, що реалізує оптимальний за швидкістю алгоритм керування об'єктом з астатизмом другого порядку наведено на рис. 13.27.

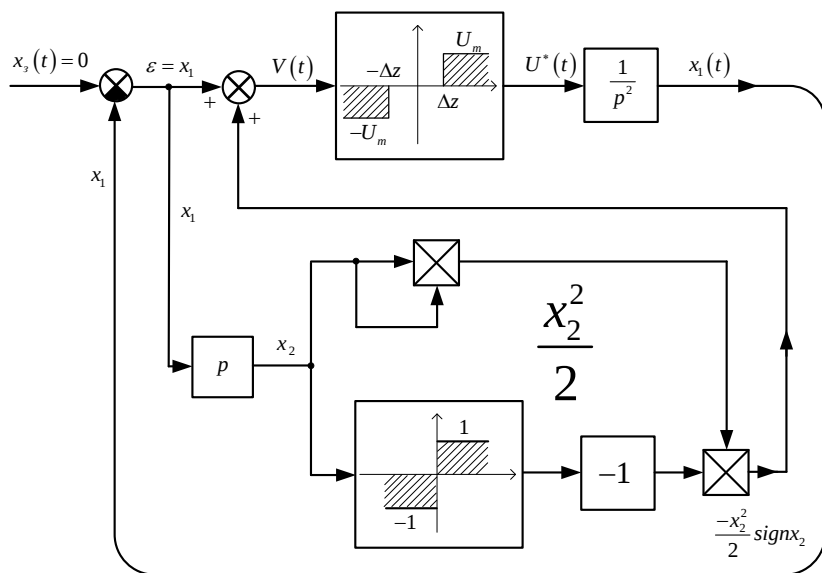


Рис. 13.27. Структура оптимальної за швидкодією САК

Приклад 2. Розрахунок методом фазової площини динаміки САК інерційним об'єктом, що має екстремальну нелінійну характеристику

Об'єктом керування може бути будь-який агрегат, що має екстремальну статичну нелінійність і інерційну лінійну складову. Це так звана модель Вінера-Гамерштейна (рис. 13.28).

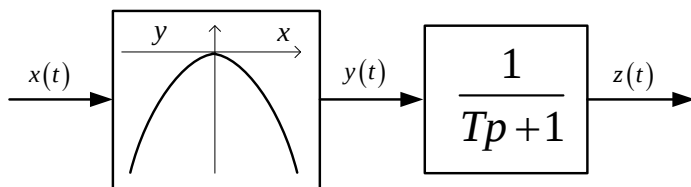


Рис. 13.28. Модель Вінера-Гамерштейна

Нелінійна залежність $y(x)$ повільно дрейфує у часі, змінюючи своє екстремальне значення (рис. 13.29) $y^*(x^*)$.

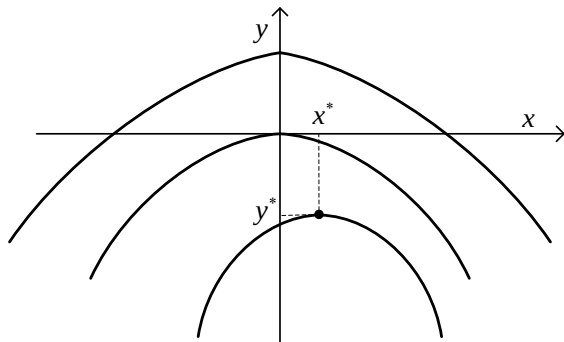


Рис. 13.29. Дрейфуюча у часі екстремальна залежність

Необхідно за допомогою І-регулятора і логічного елемента (рис. 13.30) відслідковувати екстремальне (максимальне) значення $y^*(x^*)$.

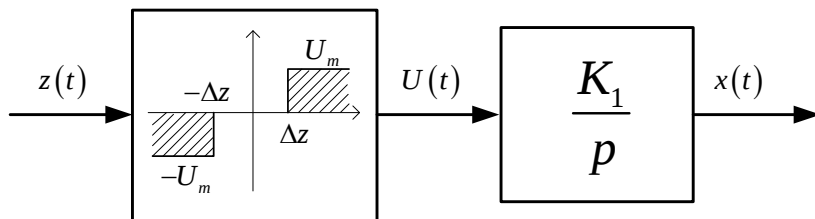


Рис. 13.30. Релейна САК

Така задача виникає, наприклад, для підтримування максимальної температури в камері згорання шляхом регулювання подачі повітря або палива; коефіцієнта корисної дії (ККД) двигуна внутрішнього згорання; ККД автономних джерел електроенергії і т. ін.

Для спрощення теоретичного аналізу динаміки, апроксимуємо в зоні екстремуму $y^*(x^*)$ залежність $y(x)$ параболою з початком (рис. 13.28) системи координат в точці $y^*(x^*)$. Тоді:

$$y(x) = -x^2. \quad (13.35)$$

В якості змінних стану візьмемо $x_1 = x$; $x_2 = z$.

$$T \frac{dz}{dt} + z(t) = -kx^2(t). \quad (13.36)$$

Рівняння САК (рис. 13.30):

$$\frac{dx}{dt} = \pm k_1 U_m = \pm v(t), \quad (13.37)$$

де: $v(t)$ – швидкість змінювання $x(t)$.

Запишемо (13.36) в формі Коші:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{T} (kx^2 + z). \quad (13.38)$$

Для отримання фазової траєкторії $x_2(x_1)$, тобто $z(x)$, розділимо (13.38) на (13.37):

$$\frac{dz}{dx} = \mp \frac{1}{Tv} (kx^2 + z). \quad (13.39)$$

Рішення $z(x)$ рівняння (13.39) будемо шукати *методом ізоклін*:

$$\frac{dz}{dx} = C_i = \mp \frac{1}{Tv} (kx^2 + z), i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.40)$$

Тобто:

$$z = \mp Tv C_i - kx^2. \quad (13.41)$$

Логічний елемент $v(z)$ (рис. 13.30) змінює знак U_m після того, як z зменшилося (перейшовши через максимум) на величину порогу Δz . В результаті змінює напрямок швидкість $v(t)$: відбувається реверс.

Нанесемо ізокліни (рис. 13.31) на фазову площину (z, x) :

$$C_i = 0, z = -kx^2 \text{ (лінія 1)}.$$

Далі для різних C_i маємо ту ж параболу, але зміщено по осі z .

При цьому, якщо $v > 0$ в (13.37), – зміщення вниз (рис. 13.31, парабола (2)); якщо $v < 0$, – вверх (рис. 13.31, парабола (3)).

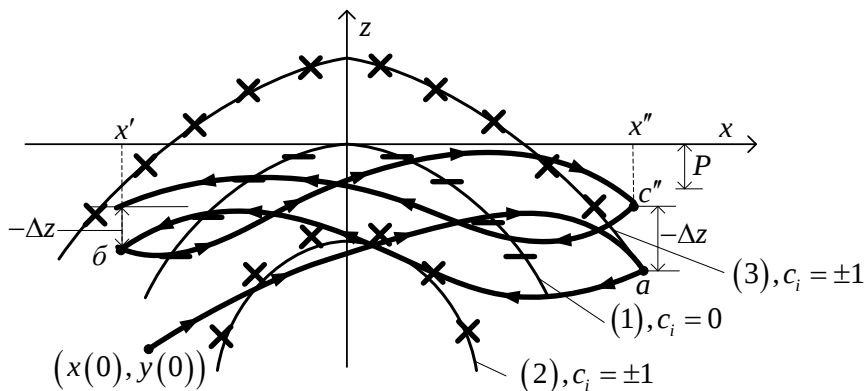


Рис. 13.31. Фазовий портрет

Задамо $C_i = \pm 1$ і нанесемо стрілочки на параболи (2), (3) (рис. 13.31), тобто під кутом $\pm 45^\circ$.

Починаючи з початкового стану $(x(0), z(0))$ проводимо лінію до точки «а», де z зменшиться від максимального значення на Δz .

Далі з «а» до «б», з «б» до «с» і т. д.

Траєкторія $z(x)$ виходить на усталену «вісімку», з якої легко визначити зону пошуку на вході (x' , x''), а також період T_1 коливань в зоні екстремуму:

$$T_1 = \frac{|x'| + |x''|}{v} \quad (13.42)$$

та час $t_{\text{п.п.}}$ перехідного процесу виходу з $(x(0), Z(0))$ в зону пошуку:

$$t_{\text{п.п.}} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |x_{i+1}|), \quad (13.43)$$

де: n – число коливань в перехідному процесі (рис. 13.32);

P – середні втрати на пошук.

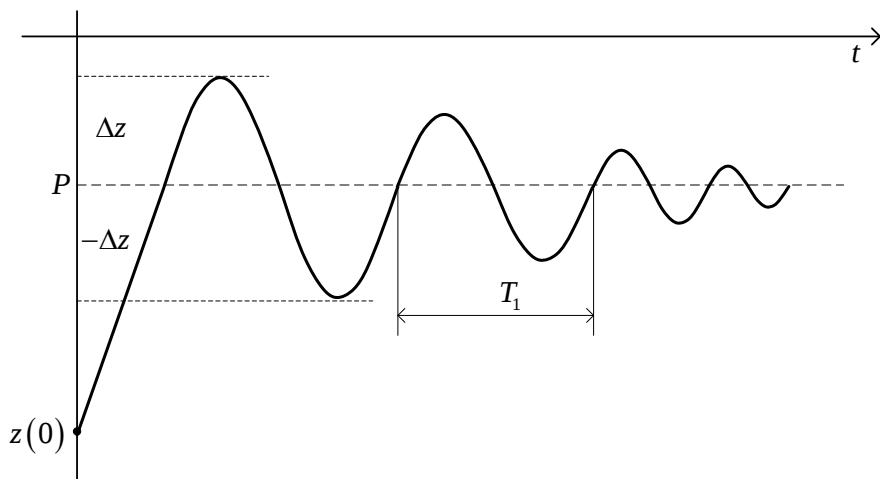


Рис. 13.32. Перехідний процес

P.S. Цю задачу можна вирішувати для будь-якої випуклої нелінійної залежності. Наприклад, для ККД електромашин, які мають несиметричну залежність ККД від навантаження (рис. 13.33).

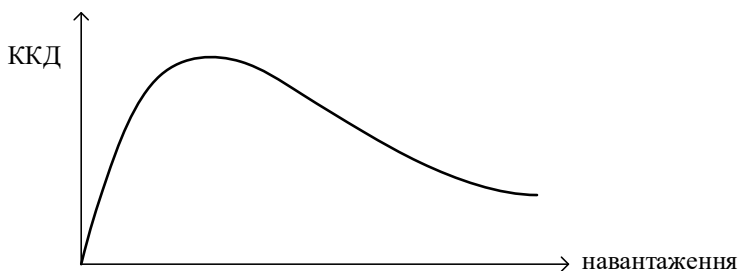


Рис. 13.33. ККД електромашин

Числовий приклад. Релейний електропривод розвертає сонячну батарею за сонцем так, щоб її потужність була максимальною (батарея $\perp$ до сонця) (рис. 13.34).

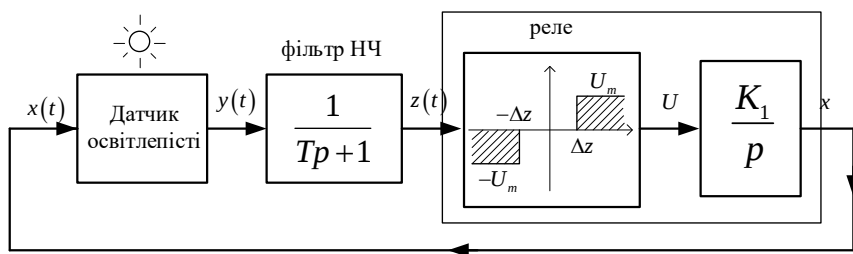


Рис. 13.34. Структура екстремальної САК

Релейний привод повертає датчик і сонячну батарею зі швидкістю $v = \pm k_1 U_m$, фільтр НЧ згладжує випадкові збурення, які більш високочастотні, ніж корисний сигнал.

Числові значення параметрів:

$$y(x) = -10x^2, \quad k = 10, \quad T = 10 \text{ с.}, \quad U_m = 20 \text{ В},$$

$$\Delta z = 0,01 \text{ рад.}, \quad k_1 = 0,02 \text{ рад/с.}$$

Основні рівняння:

$$y(x) = -10x^2,$$

$$10 \frac{dz}{dt} + z(t) = -10x^2(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm 0,02 \cdot 20 = \pm 0,4 = \pm v,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{10} (10x^2(t)) + z(t),$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{1}{4} (10x^2 + z),$$

$$\frac{dz}{dx} = C_i = \pm \frac{1}{4} (10x^2 + z), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$z = \pm 4C_i - 10x^2.$$

Будуємо фазову площину:

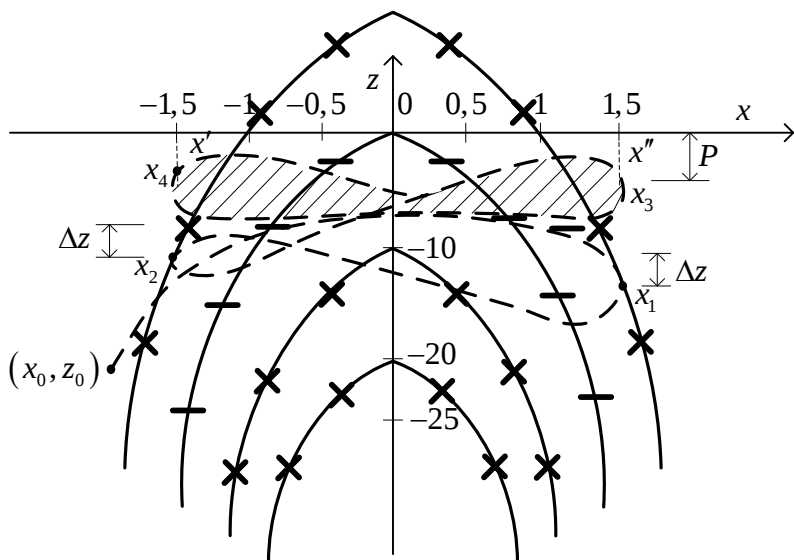


Рис. 13.35. Фазовый портрет

$$T_1 = \frac{|-1,5| + |1,5|}{0,4} = 7,5 \text{ с.},$$

$$t_{\text{п.п.}} = \frac{1}{0,4} (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) \cong 15 \text{ с.}$$

14 МЕТОД МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

14.1 Графічне подання САК, представлених змінними стану

14.1.1 Скалярні структурні схеми

Наприклад, двомірна (рис. 14.1) схема:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u_1, u_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u_1, u_2, t) \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

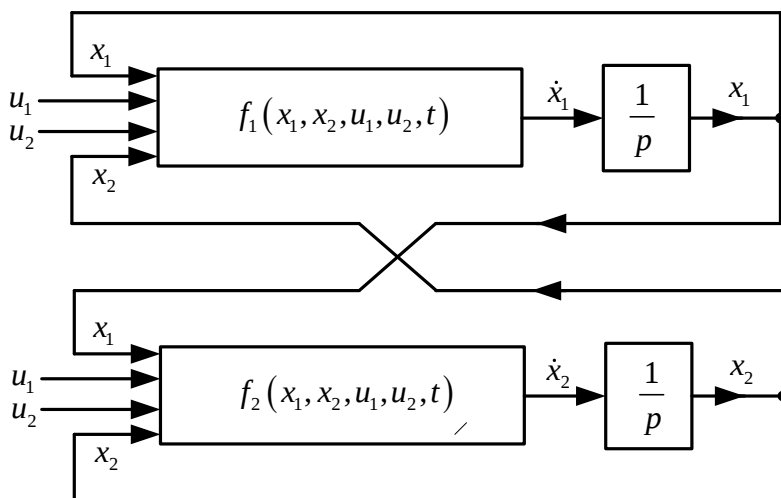


Рис. 14.1. Двомірна нелінійна система

Якщо систему (14.1) лінеаризувати відносно базового режиму $x_{10}, x_{20}, u_{10}, u_{20}, t_0$, то рівняння (14.1) будуть лінійними зі сталими коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2 + b_{11} \Delta u_1 + b_{12} \Delta u_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2 + b_{21} \Delta u_1 + b_{22} \Delta u_2 \end{aligned} \right\}, \quad (14.2)$$

де:

$$\Delta x_i = x_i(t) - x_i(t_0),$$

$$\Delta u_i = u_i(t) - u_i(t_0), \quad i = 1, 2,$$

$$a_{ii} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right|_{x_0, u_0}, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_0, u_0}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

$$b_{ii} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right|_{x_0, u_0}, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{x_0, u_0}.$$

Структурна схема системи (14.2):

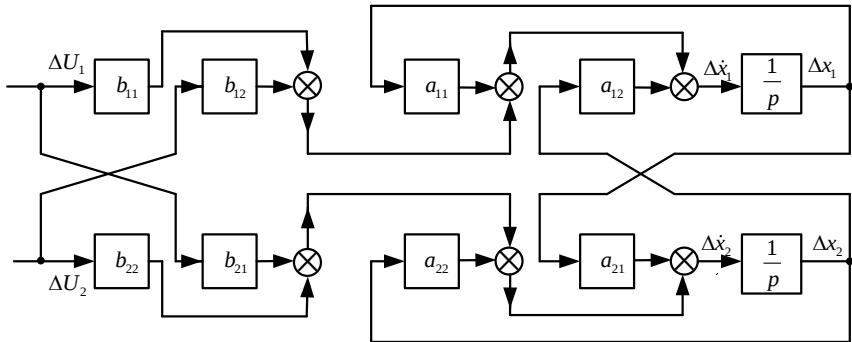


Рис. 14.2. Двомірна лінеаризована система

Якщо розмірність більше двох, то краще представляти *векторно*.

14.1.2. Векторні структурні схеми

– Неперервна не лінійна (рис. 14.3);

– Неперервна лінійна типу (рис. 14.4, а)

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (14.3)$$

де: $\dot{X}, X$ – n – мірні функції часу,

U – m – мірна керуюча функція часу,

або типу (рис. 14.4, б):

$$X = [pE - A]^{-1} \cdot B \cdot U = W(p) \cdot U, \quad (14.4)$$

де: E – одинична діагональна матриця,

A – матриця $n \times n$, B – $n \times m$,

$W(p)$ – матрична передавальна функція.

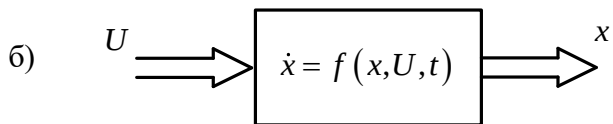
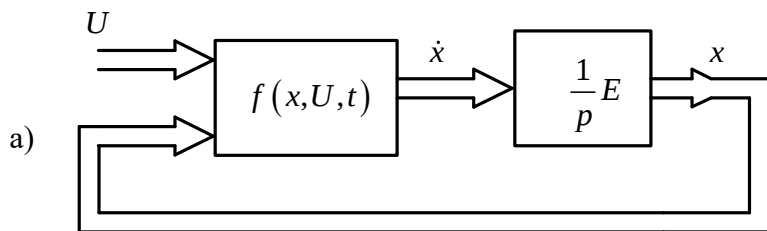


Рис. 14.3. Схема «вхід U – швидкість $\dot{X}$ – стан X » (а) або «вхід U – стан X » (б)

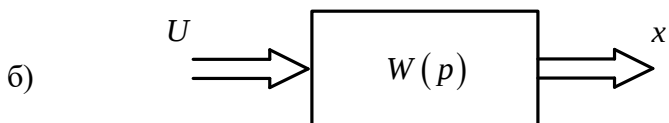
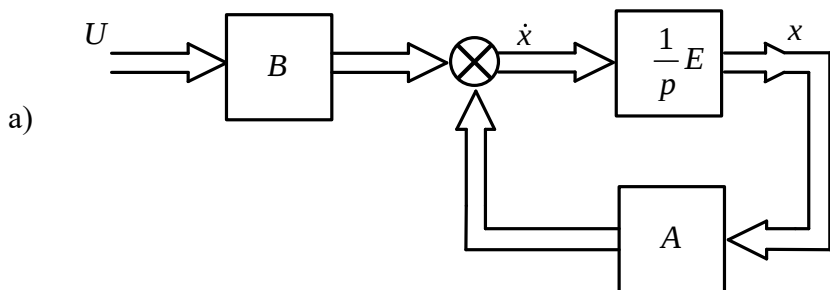


Рис. 14.4. Схема $U \rightarrow \dot{X} \rightarrow X$ (а) і $U \rightarrow X$ (б)

– Дискретна нелінійна система (рис. 14.5), де z^{-1} – оператор затримки на один крок Δt :

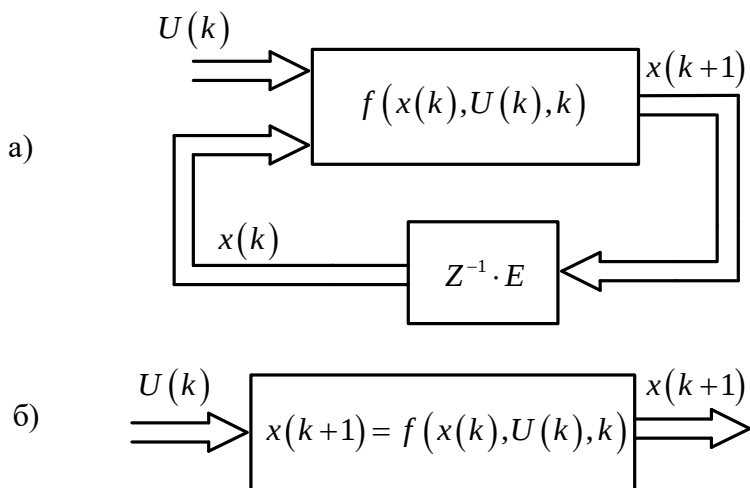


Рис. 14.5. Схеми дискретних нелінійних систем (а, б)

– Дискретні лінійні системи (рис. 14.6), де k – номер кроку Δt у часі t :

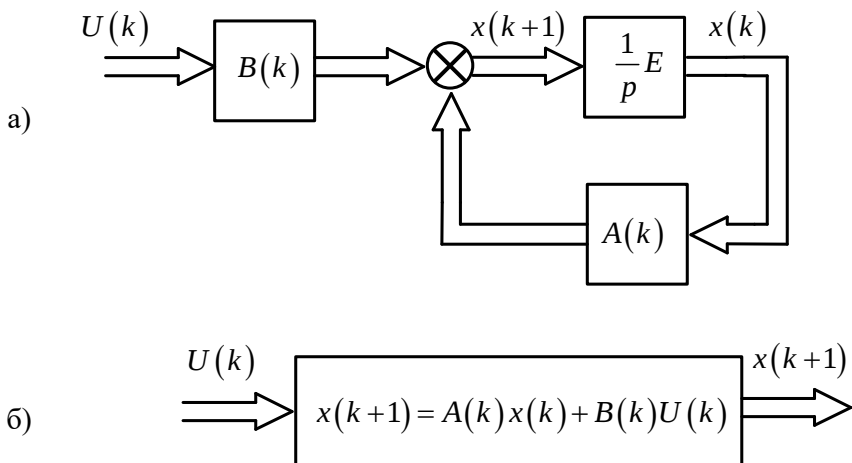


Рис. 14.6. Схеми дискретних лінійних систем зі змінними (від k) матрицями коефіцієнтів

14.1.3. Неоднозначність переходу від передаточної функції до рівнянь у змінних стану

З передаточної функції об'єкта можна отримати декілька видів рівнянь у формі Коші.

– Алгоритм прямого програмування

Нехай передаточна функція об'єкта наступна:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p^2 + 7p + 12)} \quad (14.5)$$

- розділимо чисельник і знаменник (14.5) на p в максимальній степені (p^3):

$$W(p) = \frac{p^{-1} + 3p^{-2} + 2p^{-3}}{1 + 7p^{-1} + 12p^{-2}} = \frac{y(p)}{u(p)} \quad (14.6)$$

- введемо між $y(p)$ і $u(p)$ проміжну функцію (похибку САК) $E(p)$ так, що:

$$y(p) = (p^{-1} + 3p^{-2} + 2p^{-3}) \cdot E(p), \quad (14.7)$$

де:

$$E(p) = \frac{1}{1 + 7p^{-1} + 12p^{-2}} \cdot u(p),$$

або

$$E(p) = u(p) - 7p^{-1}E(p) - 12p^{-2}E(p) \quad (14.8)$$

• відповідно до (14.7) і (14.8) подамо структурну схему (рис. 14.7):

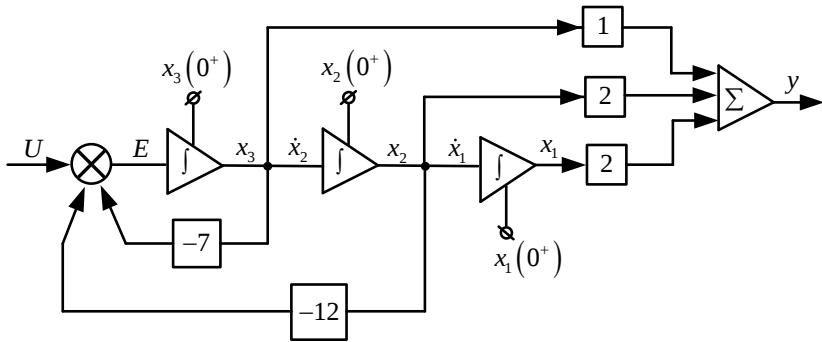


Рис. 14.7. Структурна схема системи (14.7), (14.8)

Змінними стану тут є x_1 , x_2 , x_3 .

- Відповідно до схеми (рис. 14.7) запишемо систему рівнянь у формі Коші:
- не однорідна система, скалярний запис:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = u - 12x_2 - 7x_3; \\ y = 2x_1 + 3x_2 + x_3; \end{cases} \quad (14.9)$$

– векторно-матричне подання:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases} \quad (14.10)$$

де:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y \text{ і } U - \text{ скаляри,}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [2 \quad 3 \quad 1], D = 0.$$

- Якщо $u(t)$ можна подати диференціальним рівнянням, наприклад, східчастий вплив $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$, як $\dot{u}(t) = 0$, $U(0) = U_0$.
Тоді неоднорідна система (14.10) приводиться до однорідної:

Приклад:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)} = \frac{3}{1,2p^2 + 3,4p + 1} = \\ &= \frac{3/_{1,2}}{1,2p^2 + \left(3,4/_{1,2}\right)p + 1/_{1,2}} = \frac{2,5}{p^2 + 2,83p + 0,83} = \\ &= \frac{2,5p^{-2}}{1 + 2,83p^{-1} + 0,83p^{-2}} \\ &= \frac{y(p)}{U(p)} \end{aligned} \quad (14.11)$$

Нехай:

$$y(p) = 2,5p^{-2} \cdot E(p), \quad (14.12)$$

де:

$$E(p) = \frac{1}{1 + 2,83p^{-1} + 0,83p^{-2}} \cdot U(p)$$

або

$$E(p) \cdot [1 + 2,83p^{-1} + 0,83p^{-2}] = U(p),$$

або

$$E(p) = U(p) - 2,83p^{-1}E(p) - 0,83p^{-2}E(p). \quad (14.13)$$

По (14.13) і (14.12) будемо схему:

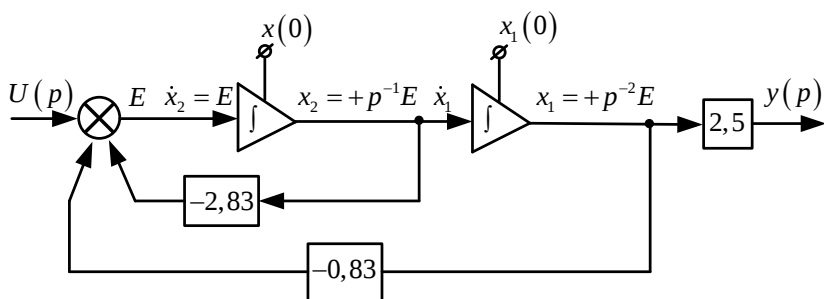


Рис. 14.8. Структурна схема системи

Змінні стану: $x_1 = p^{-2}E$; $\dot{x}_1 = x_2 = p^{-1}E$.

Тоді, відповідно до схеми (рис. 14.8):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - 0,83x_1 - 2,83x_2; \\ y(t) = 2,5x_1, \end{cases} \quad (14.14)$$

або

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases} \quad (14.15)$$

де:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ де } U - \text{скалярне,} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,83 & -2,83 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [2,5 \quad 0], D = 0. \end{aligned}$$

Якщо $U(t) = 1(t)$, то $\dot{u}(t) = 0$, $U(0) = U_0$, тоді неоднорідна система (14.10) переходить в однорідну:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0,83 & -2,83 \end{bmatrix}, \\ \dot{V} &= A_1 V, V(0) = V_0, \end{aligned} \quad (14.16)$$

де:

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}.$$

• **Алгоритм паралельного програмування**

– передаточну функцію (14.15) подамо у вигляді суми простих дробно-раціональних функцій:

$$W(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p^2 + 7p + 12)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+3} + \frac{C_3}{p+4}. \quad (14.17)$$

Тут C_1, C_2, C_3 невідомі константи; знаменники простих функцій отримано шляхом розкладання $p(p^2 + 7p + 12)$ за *теоремою Вієта*:

$$p(p^2 + 7p + 12) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3),$$

де: $p_1 = 0; p_2 = -3; p_3 = -4$,

де $-3, -4$ корені полінома $p^2 + 7p + 12 = 0$;

– визначимо числові значення C_1, C_2, C_3 шляхом прирівнювання чисельників рівняння (14.17) (це метод невизначених коефіцієнтів):

$$\begin{aligned} p^2 + 3p + 2 &= C_1(p+3)(p+4) + C_2 \cdot p(p+4) + C_3 \cdot p(p+3) = \\ &= C_1[p^2 + 7p + 12] + C_2[p^2 + 4p] + C_3[p^2 + 3p] = \\ &= (C_1 + C_2 + C_3)p^2 + (C_1 \cdot 7 + C_2 \cdot 4 + C_3 \cdot 3)p + C_1 \cdot 12. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти за однакових степенів p в лівій і правій частині цього рівняння:

deg p	Ліва частина	Права частина
0	2 =	$12C_1$
1	3 =	$7C_1 + 4C_2 + 3C_3$
2	1 =	$C_1 + C_2 + C_3$

Звідси:

$$C_1 = \frac{1}{6};$$

тоді:

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \frac{7}{6} + 4C_2 + 3C_3 \\ 1 &= \frac{1}{6} + C_2 + C_3 \end{aligned} \right\}.$$

Звідси:

$$C_2 = \frac{2}{3}; \quad C_3 = \frac{3}{2}.$$

Тобто

$$W(p) = \frac{1}{6p} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+4}. \quad (14.18)$$

– За рівнянням (14.18) побудуємо структурну схему системи (рис. 14.9).

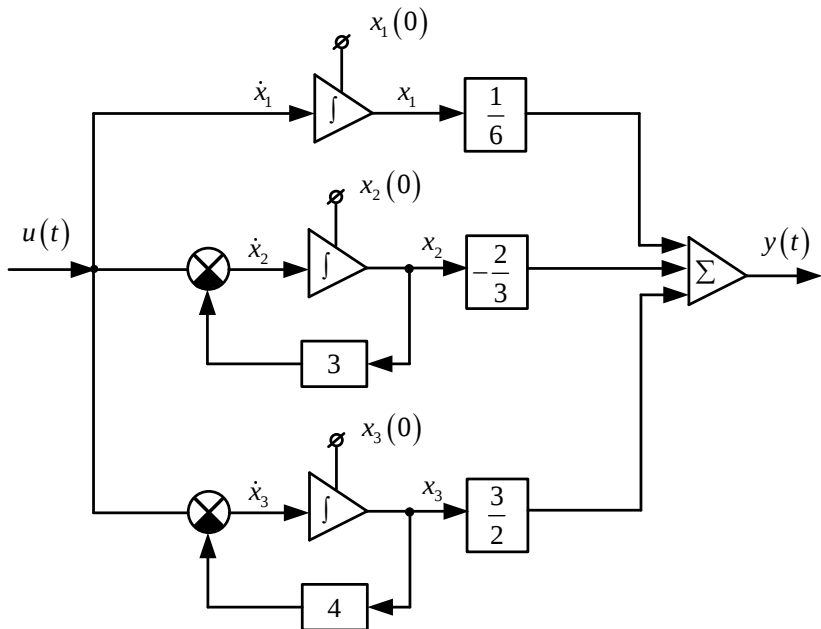


Рис. 14.9. Структурна схема системи (14.18)

Скалярні рівняння відповідно до схеми:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u; \\ \dot{x}_2 = u - 3x_2; \\ \dot{x}_3 = u - 4x_3; \\ y = \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{2}x_3; \end{cases} \quad (14.19)$$

Векторно-матричне подання:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases} \quad (14.20)$$

де:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Приклад:

$$W(p) = \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)} = \frac{C_1}{3p+1} + \frac{C_2}{0,4p+1}.$$

Прирівняємо чисельники за однакового знаменника:

$$3 = C_1(0,4p+1) + C_2(3p+1).$$

deg p	Ліва частина	Права частина
0	3 =	$C_1 + C_2$
1	0 =	$0,4C_1 + 3C_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$3 = 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2,$$

$$0 = 0,4 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2,$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{Adj A^T}{\det A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2,6} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2,6} & -\frac{0,4}{2,6} \\ -\frac{1}{2,6} & \frac{1}{2,6} \end{bmatrix} = A^{-1},$$

$$\det A = 3 - 0,4 = 2,6,$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2,6} & -\frac{0,4}{2,6} \\ -\frac{1}{2,6} & \frac{1}{2,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2,6} \\ -\frac{3}{2,6} \end{bmatrix}, \begin{cases} C_1 = 3,46, \\ C_2 = -1,15. \end{cases}$$

$$W(p) = \frac{3,46}{3p+1} - \frac{1,15}{0,4p+1} = \frac{1,153}{p+0,333} - \frac{2,875}{p+2,5}. \quad (14.21)$$

Будуємо структурну схему за (14.21):

$$Y(p) = \left| \frac{1,153}{p+0,333} \right| U(p) + \frac{(-2,875)}{p+2,5} U(p).$$

$\frac{1,153}{p+0,333}, \frac{(-2,875)}{p+2,5}$ – це прості інерційні ланки I порядку.

Отже:

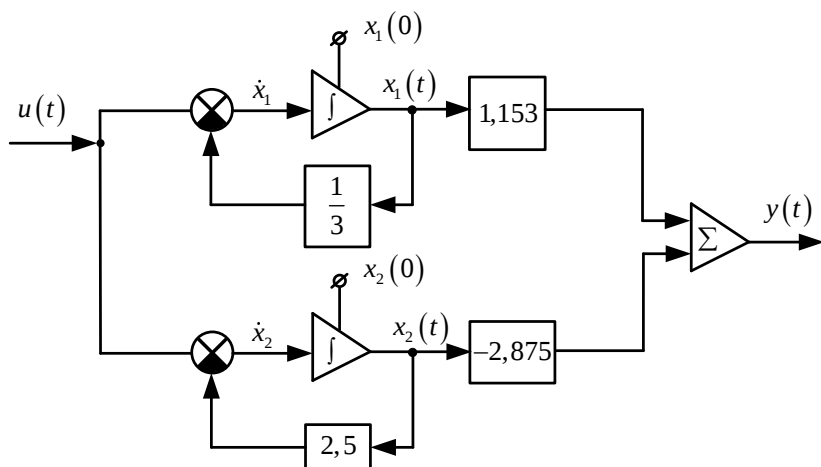


Рис. 14.10. Структурна схема системи

Форма Коші:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - \frac{1}{3}x_1 \\ \dot{x}_2 &= u - 2,5x_2 \end{aligned} \right\}, y(t) = 1,153x_1 - 2,875x_2.$$

Векторно-матричне подання:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 153 \quad -2,875], \quad D = 0.$$

• *Алгоритм послідовного програмування*

– розклавши поліном чисельника і знаменника передаточної функції (14.17) за теоремою Вієта, отримаємо:

$$\frac{p^2 + 3p + 2}{p(p^2 + 7p + 12)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(p - p'_1)}{(p - p_1)} \cdot \frac{(p - p'_2)}{(p - p_2)}, \quad (14.22)$$

де: p'_1, p'_2 – корені чисельника $p^2 + 3p + 2$;

p_1, p_2 – корені знаменника $p(p^2 + 7p + 12)$;

$p'_1 = -1$; $p'_2 = -2$; $p_1 = -3$; $p_2 = -4$.

Тобто:

$$W(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{p + 1}{p + 3} \cdot \frac{p + 2}{p + 4}. \quad (14.23)$$

На рис. 14.11 маємо структурну схему з трьох послідовно з'єднаних простих ланок:

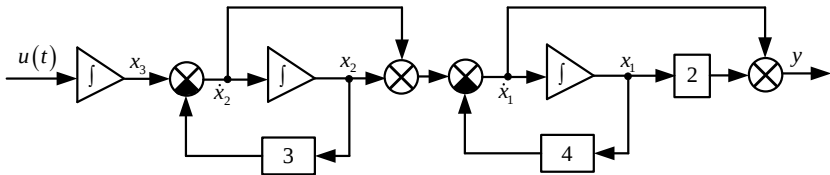


Рис. 14.11. Структурна схема системи (14.23)

Скалярні рівняння для схеми (рис. 14.11).

Скалярні рівняння відповідно до схеми:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_2; \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = u; \end{cases} \quad (14.24)$$

$$y = 2x_1 - 4x_1 + x_2 - 3x_2 + x_3 = -2x_1 - 2x_2 + x_3.$$

Векторно-матрична форма (14.24):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases} \quad (14.25)$$

де:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-2 \quad -2 \quad 1], \quad D = 0.$$

Приклад

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{3}{(3p+1)(0,4p+1)} = \frac{3}{1,2p^2 + 3,4p + 1} = \\ &= \frac{2,5}{p^2 + 2,83p + 0,83}. \\ 3 &= 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2, \\ 0 &= 0,4 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2, \end{aligned}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{Adj A^T}{\det A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2,6} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2,6} & -\frac{0,4}{2,6} \\ -\frac{1}{2,6} & \frac{1}{2,6} \end{bmatrix},$$

Знайдемо корені:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -1,415 \pm \sqrt{(0,415)^2 - 0,83} = -1,415 \pm \sqrt{2 - 0,83} = \\ &= -1,415 \pm 1,0817; \end{aligned}$$

$$p_1 = -0,333; \quad p_2 = -2,5.$$

Отже маємо:

$$W(p) = 2,5 \cdot \frac{1}{p + 0,333} \cdot \frac{1}{p + 2,5}.$$

Тоді послідовно з'єднаємо 3 елементи:

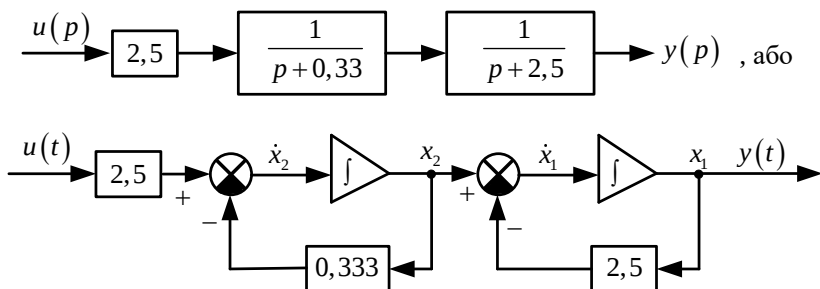


Рис. 14.12. Послідовне програмування

Рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 2,5x_1 \\ \dot{x}_2 &= u(t) - \frac{1}{3}x_2 \end{aligned} \right\}, y(t) = 2,5x_1.$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX + DU, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2,5 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}, D = 0.$$

14.1.4. Поняття керованості і спостережуваності об'єкта керування

Об'єкти керування можуть мати різну природу і структуру причинно ($U(t)$) – наслідкових ($Y(t)$) зв'язків. Тому, перш ніж створювати САК ними, необхідно перевірити принципову можливість керування. Це досягається на основі критеріїв керованості і спостережуваності змінних стану об'єкта.

Об'єкт, що описується матрицями A і B ($\dot{X} = AX + BU$) керований, якщо існує таке необмежене керування $U(t)$, яке може

перевести його змінні стану $X(t)$ з довільного початкового стану $X(0)$ у будь-якій інший заданий стан $X(t)$.

Керованість об'єктом виконується, якщо для $\dot{X} = AX + BU$,

$$\text{ранг } [BABA^2B \dots A^{n-1}B] = n, \quad (14.26)$$

де: n – розмірність вектора X .

Для об'єкта зі *скалярними* входом $u(t)$ і виходом $y(t)$ вводиться поняття матриці P_c керованості:

$$P_c = [BABA^2B \dots A^{n-1}B]. \quad (14.27)$$

Якщо визначник її не нульовий, то об'єкт керований, якщо нульовий, то ні.

$$\det P_c \begin{cases} \neq 0 & \text{– керований;} \\ = 0 & \text{– не керований.} \end{cases} \quad (14.28)$$

Спостережуваність або можливість за змінними $X(t)$ і $Y(t)$ (об'єкта) відновити початковий стан $X(0)$ теж є необхідною умовою для побудови САК.

Якщо кожна i –та складова $x_i(t)$ стану $X(t)$ в кожний момент часу t спостережувана, то (за Р.Калманом) об'єкт повністю спостережуваний.

Для спостережуваності об'єкта:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ Y = CX, \end{cases} \quad (14.29)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\text{ранг } H = n, \quad (14.30)$$

де:

$$H = [C^T, A^T C^T, A^{T(2)} C^T, \dots, A^{T(n-1)} C^T]. \quad (14.31)$$

Умова (14.30) еквівалентна тому, щоб n стовпців матриці (14.31) утворювали систему лінійно незалежних функцій; або матриця C не повинна мати нульових стовпців; або

$$\det H \neq 0. \quad (14.32)$$

Як *приклад* і з метою підтвердження еквівалентності схем прямого, паралельного і послідовного програмування (розділ 2.1.3) перевіримо ці схеми на керованість і спостережуваність.

- Пряме програмування:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -12x_2 - 7x_3 + u; \\ y = 2x_1 + 3x_2 + x_3. \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 3 \quad 1].$$

Тоді

$$P_c = [BABA^2B], \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 37 \end{bmatrix},$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 37 \end{bmatrix}, \quad \det P_c = -7 \neq 0,$$

об'єкт керований.

$$H = [C^T, A^T C^T, A^{T(2)} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix},$$

$$C = [2 \quad 3 \quad 1],$$

$$CA = [0 \quad -10 \quad -4],$$

$$CA^2 = [0 \quad 48 \quad 18],$$

$$\det H = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -4 \\ 1 & 48 & 18 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$

об'єкт спостережуваний.

- Паралельне програмування:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u; \\ \dot{x}_2 = u - 3x_2; \\ \dot{x}_3 = u - 4x_3; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{2}x_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 CA &= [0 \quad 2 \quad -6], \\
 CA^2 &= [0 \quad -6 \quad 24], \\
 H &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & 24 \end{bmatrix}, \\
 \det H &= 2 \neq 0,
 \end{aligned}$$

об'єкт спостережуваний.

$$\begin{aligned}
 P_c &= [BABA^2B], \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \\
 A^2B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}, \\
 P_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{bmatrix} = -12 \neq 0,
 \end{aligned}$$

об'єкт керований.

- Послідовне програмування:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2 + x_3; \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = u; \end{cases}$$

$$y = -2x_1 - 2x_2 + x_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-2 \quad -2 \quad 1].$$

$$CA = [-2 \quad -2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [8 \quad 10 \quad -4],$$

$$CA^2 = [8 \quad 10 \quad -4] \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -[-32 \quad -46 \quad -18],$$

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & -4 \\ -32 & -46 & -18 \end{bmatrix}, \\
 \det H &\neq 0,
 \end{aligned}$$

об'єкт спостережуваний.

$$P_c = [BABA^2B], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det P_c = 3 \neq 0,$$

об'єкт керований.

Приклад, коли об'єкт не керований і не спостережуваний.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - u; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Подамо цю систему у формі графа (рис. 14.13).

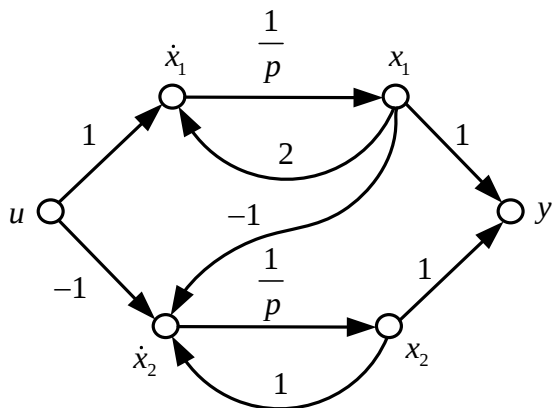


Рис. 14.13. Граф системи

Векторно-матрична форма:

$$\dot{X} = AX + BU;$$

$$Y = CX,$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P_c = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \det P_c = 0,$$

об'єкт не керований.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det H = 0,$$

об'єкт не спостережуваний.

Отже тут, хоч y з u зв'язані з x_1, x_2 (як видно з графа), тим не менш за таких числових значень параметрів, об'єкт не керований і не спостережуваний.

Важливий момент. Якщо матриці A, B отримано шляхом переходу будь-яким методом програмування від $W(p)$ до системи

$\dot{X} = AX + BU, Y = CX$, то така система буде завжди керованою. Наприклад,

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = W(p) = \frac{1}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (14.32)$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, тоді в фазових змінних стану, маємо:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = a_0 x_2 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u, \end{cases} \quad (14.33)$$

$$y(t) = x_1,$$

або

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Звідси:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}, A^2 B = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ -(a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -(a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}, \det P_c = -1 \neq 0$$

i не залежить від параметрів a_i , $i = 0, 1, 2$.

Відповідно до (14.32) і (14.33) подамо графічне зображення системи (14.33) у вигляді графу:

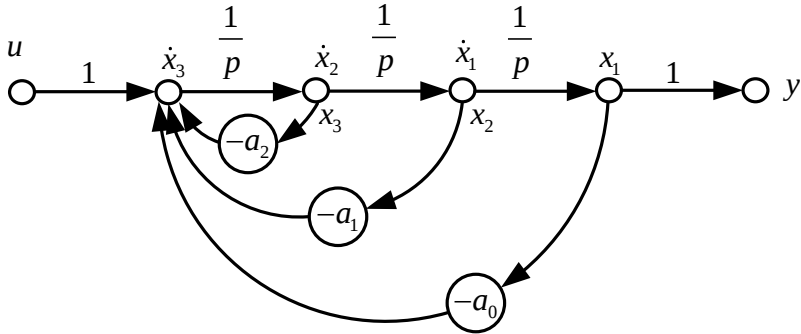


Рис. 14.14. Граф системи у змінних стану

Отже система (рис. 14.14), залежно від знаку і значення коефіцієнтів a_i зворотного зв'язку за змінними стану, може бути як стійкою, так і ні, але вона завжди буде керованою і спостережуваною.

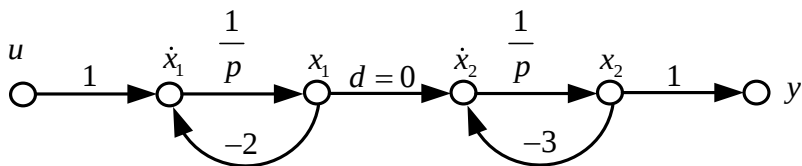
- Інший *приклад* системи у просторі станів, яка ні за яких параметрів не може стати керованою і спостережуваною.

Рівняння системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 0 \cdot x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1, \end{cases}$$

де: $d = 0$.

Граф системи (рис.14.15):



14.15. Граф некерованої системи

Дійсно,

$$P_c = [B, AB];$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix},$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \det P_c = d = 0.$$

Тільки за умови, що $d \neq 0$, система буде керованою і спостережуваною.

Висновок: перш ніж проектувати САК об'єктом, необхідно перевірити його модель на умови керованості (14.26) і спостережуваності (14.31).

14.1.5. Розміщення полюсів за допомогою зворотних зв'язків за змінними стану

В даному випадку оптимальність САК забезпечується відповідними розташуванням коренів характеристичного полінома передаточної функції замкненої САК. Це розташування досягається відповідним підбором матриці K зворотного зв'язку:

$$U = KX. \quad (14.34)$$

Наприклад, маємо об'єкт:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = u.$$

Фазові змінні:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \frac{dy}{dt}; \quad x_3 = \frac{d^2y}{dt^2},$$

Тоді у векторно-матричному вигляді:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = AX + BU.$$

Матриця K зворотного зв'язку по стану:

$$K = [K_1, K_2, K_3],$$

тобто

$$U = -KX,$$

а

$$\dot{X} = AX + BU = AX - BKX = (A - BK)X.$$

Звідси матриця системи зі зворотним зв'язком дорівнює:

$$(pE - A + BK) = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 2 + K_1 & 3 + K_2 & p + 5 + K_3 \end{bmatrix}.$$

Її характеристичний поліном:

$$\det[pE - A + BK] = p^3 + (p + K_3)p^2 + (3 + K_2)p + (2 + K_1). \quad (14.35)$$

Для стійкості САК, як відомо (розділ 8.2.2), достатньо, щоб добуток середніх був більше добутку крайніх:

$$(5 + K_3)(3 + K_2) > 1 \cdot (2 + K_1).$$

Щоб задати якість перехідних процесів, необхідно поліном (14.35), визначивши його корені, привести до вигляду:

$$(p^2 + 2\zeta\omega p + \omega^2)(p + \zeta\omega), \quad (14.36)$$

де: ζ – визначає ступінь затухання перехідного процесу;

ω – частоту коливаль.

Якщо задати $\zeta = 0,8$, а ω за умови часу T перехідного процесу, наприклад, $T \cong 0,83$ с., тоді:

$$T \cong \frac{4}{\zeta\omega} = \frac{4}{0,8\omega} = 0,83,$$

звідси $\omega = 6$.

Тепер поліном (14.36) набуває вигляду:

$$(p^2 + 9,6p + 36)(p + 4,8) = \\ = p^3 + 14,4p^2 + 82,1p + 172,8. \quad (14.37)$$

Прирівнявши коефіцієнти поліномів (14.35) і (14.37), знаходимо оптимальні значення коефіцієнтів зворотного зв'язку:

$$\begin{aligned} 5 + K_3 &= 14,4; \quad K_3 = 9,4; \\ 3 + K_2 &= 82,1; \quad K_2 = 79,1; \\ 2 + K_1 &= 172,8; \quad K_1 = 170,8. \end{aligned}$$

Для полегшення вибору бажаного вигляду полінома використовують метод стандартних коефіцієнтів.

Якщо розглядати реакцію системи на одиничну сходику $1(t)$, тобто перехідну функцію $h(t)$, то вона складається з усталеної складової і суми експонент $C_i e^{\alpha_i t}$, $i = 1, n$. Тут α_i – корені характеристичного полінома замкненої САК. Якщо вони дійсні і від'ємні, то $h(t)$ – аперіодичний процес, якщо комплексні з від'ємною дійсною складовою, – то коливальний.

Метод стандартних коефіцієнтів полягає в тому, що бажаний характеристичний поліном для забезпечення аперіодичності перехідного процесу задають у вигляді бінома Ньютона:

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = (p + \omega_0)^n = 0, \quad (14.38)$$

де всі корені дійсні, негативні:

$$p_i = -\omega_0,$$

а ω_0 визначає час t_n перехідного процесу.

Стандартні біноміальні форми:

n	
1	$(p + \omega_0)^1 = p + \omega_0$
2	$(p + \omega_0)^2 = p^2 + 2p\omega_0 + \omega_0^2$
3	$(p + \omega_0)^3 = p^3 + 3p^2\omega_0 + 3p\omega_0^2 + \omega_0^3$
4	$(p + \omega_0)^4 = p^4 + 4p^3\omega_0 + 6p^2\omega_0^2 + 4p\omega_0^3 + \omega_0^4$
...	

Графіки бажаних перехідних процесів $h(t)$ в функції безрозмірного часу $\omega_0 t$ наведено на рис. 14.16.

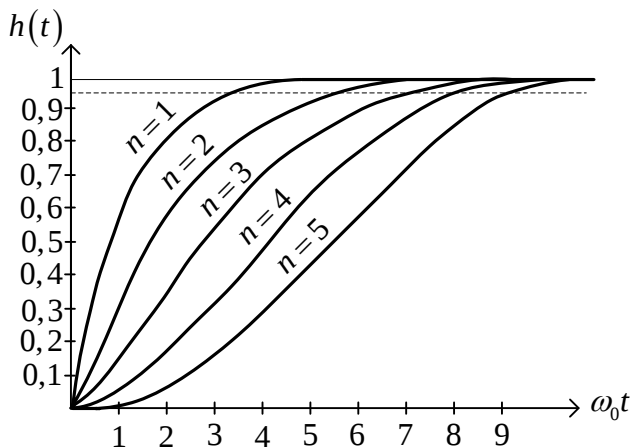


Рис.14.16. Реакції на східчастий вплив систем з коефіцієнтами біному Ньютона

Запропоноване Баттервортом розташування коренів у лівій напівплощині на напівколі радіуса ω_0 з однаковим кутовим кроком призводить до поліномів наступного виду:

n	
1	$p + \omega_0$
2	$p^2 + 1,4p\omega_0 + \omega_0^2$
3	$p^3 + 2p^2\omega_0 + 2p\omega_0^2 + \omega_0^3$
...	

Ним відповідають бажані перехідні процеси з невеличким перерегулюванням (окрім I порядку) (рис. 14.17).

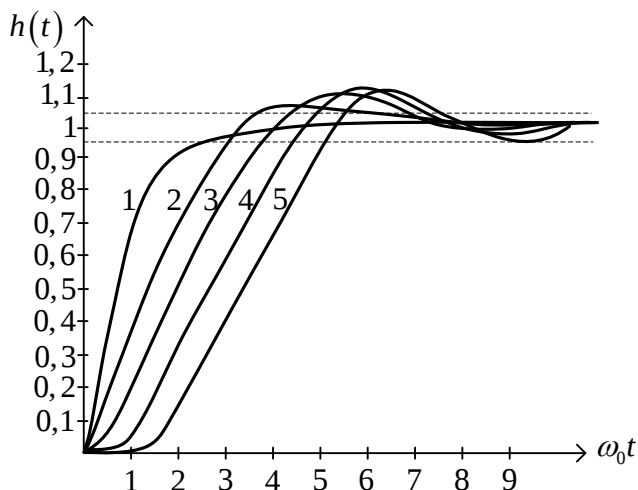


Рис.14.17. Реакції на східчастий вплив систем з коефіцієнтами Баттерворта

Однак, слід підкреслити, що таке співвідношення між характеристичним поліномом і перехідним процесом справедливе лише за відсутності полінома в чисельнику замкненої передаточної функції. Тобто $W(p)$ повинна мати такий вигляд:

$$W(p) = \frac{1}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Наявність чисельника у вигляді полінома від p може як покращити, так і погіршити $h(t)$ – відносно бажаної.

Інша мова, що вибором бажаного полінома ми завжди можемо забезпечити бажані показники стійкості САК.

Загальний алгоритм розміщення полюсів за допомогою зв'язків за змінними стану системи

а) Математичний опис системи:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \quad (14.39)$$

$$Y(t) = CX(t),$$

де керуючий вплив $U(t)$ складається зі зовнішнього впливу $V(t)$ і внутрішнього зворотного зв'язку $KX(t)$ за змінними стану $X(t)$ (рис. 14.18):

$$U(t) = V(t) - KX(t).$$

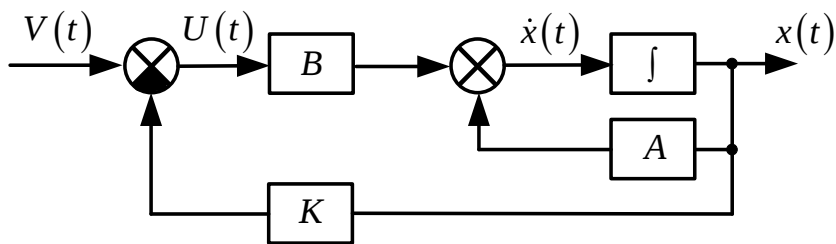


Рис. 14.18. Структурна схема системи (14.39)

б) Перевірка керованості об'єкта (14.39):

$$\det P_c = \det[BABA^2B \dots A^{n-1}B] \neq 0.$$

в) Розрахунок матриці K коефіцієнтів зворотного зв'язку за умови ідентичності коефіцієнтів характеристичного полінома:

$$\det[pE - A + BK] = 0, \quad K < 0 \quad (14.40)$$

системи (14.39) і бажаного полінома – полінома з бажаним розташуванням коренів на комплексній площині.

Приклад. Використовуючи зворотний зв'язок за швидкістю Ω і струмом $I_{\text{я}}$ якоря ДПС, необхідно забезпечити час $t_{\text{п.п.}}$ перехідного процесу не більше 0,5 с і перерегулювання $\sigma \leq 10\%$.

Фізичні параметри ДПС:

- номінальні напруга і струм якоря: $U_{\text{н}} = 220 \text{ В}$, $I_{\text{н}} = 14 \text{ А}$;
- опір і індуктивність якорного кола: $R_{\text{я}} = 5 \text{ Ом}$, $L_{\text{я}} = 0,2 \text{ Гн}$;

- номінальна швидкість $\Omega_{\text{я}} = 100 \text{ рад/с}$;
- момент інерції ДПС: $\mathfrak{J} = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;
- момент навантаження: $M_{\text{н}} = 21 \text{ н} \cdot \text{м}$;
- електромеханічна стала: $C_{\text{м}} = 1,5 \text{ В} \cdot \text{с}$.

а) *Математичний опис:*

- рівняння якірного кола за II законом Кірхгофа:

$$U = I_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{dI_{\text{я}}}{dt} + C_{\text{м}} \cdot \Omega; \quad (14.41)$$

- рівняння Ньютона для обертального руху:

$$\mathfrak{J}_{\Sigma} \frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{н}}. \quad (14.42)$$

Рівняння (14.41), (14.42) у формі Коші:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + D \cdot M_{\text{н}} \\ Y = CX, \end{cases} \quad (14.43)$$

де:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix},$$

або в скалярній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & -\frac{C_{\text{м}}}{L_{\text{я}}} \\ \frac{C_{\text{м}}}{\mathfrak{J}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_{\text{я}}} \end{bmatrix} \cdot M_{\text{н}}. \quad (14.44)$$

Підставимо в (14.44) числові значення фізичних параметрів:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & -7,5 \\ 7,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot M_{\text{н}}. \quad (14.45)$$

Рішення системи (14.45) для $U = 220 \text{ В}$, $M_{\text{н}} = 21 \text{ нм}$, подано рисунком (14.19):

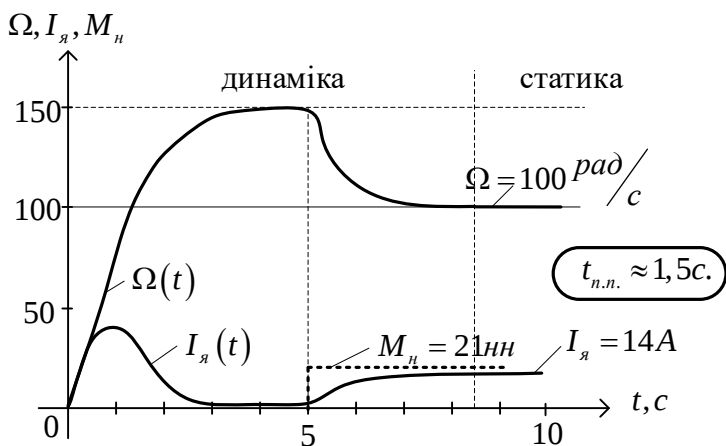


Рис. 14.19. Залежність Ω , $I_{\text{я}}$, $M_{\text{н}}$ від часу t

б) Перевірка керованості:

$$P_c = [B, AB]; B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} -2,5 & -7,5 \\ 7,5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$AB = \begin{bmatrix} -125 \\ 37,5 \end{bmatrix}; P_c = \begin{bmatrix} 5 & -125 \\ 0 & 37,5 \end{bmatrix},$$

$\det P_c = 187,5 \neq 0$, система керована.

в) Розрахунок матриці K :

$$\begin{aligned} \det[pE - A + BK] &= \det \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2,5 & -7,5 \\ 7,5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K_1 & 5K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= p^2 + (25 + 5K_1)p + (56,25 + 37,5K_2). \end{aligned} \quad (14.46)$$

Бажаний поліном – біном Ньютона:

$$p^2 + 2\Omega_0 p + \Omega_0^2 \quad (14.47)$$

з порівнянням (14.47) і (14.46) маємо:

$$\left. \begin{aligned} 25 + 5K_1 &= 2\Omega_0 \\ 56,25 + 37,5K_2 &= \Omega_0^2 \end{aligned} \right\}. \quad (14.48)$$

З графіка $h(t)$ (рис. 14.16) для системи II порядку, маємо (де $\omega_0 = \Omega_0$).

$$\omega_0 t_{\text{п.п.}} \approx 4,5.$$

За умови, що $t_{\text{п.п.}} = 0,5$ с., знаходимо $\Omega_0 = 4,5/0,5 = 9$ рад/с.

Тоді з (14.48) знаходимо:

$$K_1 = \frac{2\Omega_0 - 25}{5} = -1,4;$$

$$K_2 = \frac{\Omega_0^2 - 56,25}{37,5} = 0,66.$$

Система зі зворотним зв'язком набуває вигляду:

$$\dot{X} = (A + BK)X + BU + D \cdot M_H, \quad (14.49)$$

або з числовими значеннями коефіцієнтів

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & -7,5 \\ 7,5 & 0,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot M_H$$

матиме наступний (рис. 14.20) перехідний процес:

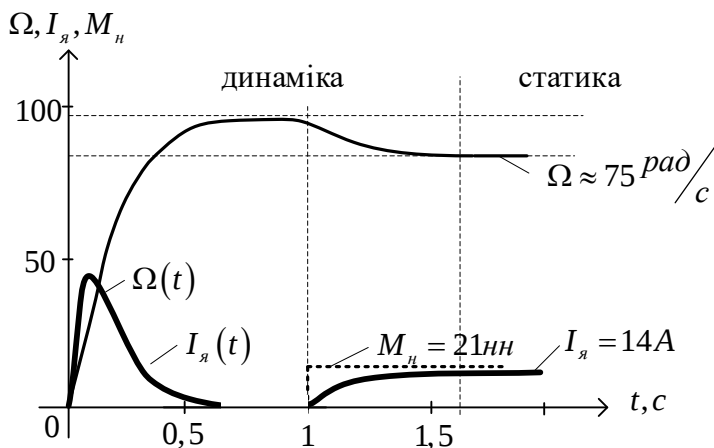


Рис. 14.20. Залежність Ω , $I_{\text{я}}$, $M_{\text{н}}$ від часу t

Отже, перехідний процес тепер задовольняє бажаному $t_{\text{п.п.}} = 0,5$ с., однак усталене значення Ω стало меншим.

Тоді для забезпечення бажаного усталеного $\Omega = 100$ рад/с слід або збільшити напругу (що не завжди можливо і допустимо для ДПС), або доповнити систему зовнішнім додатковим колом з П – , чи ПІ – , чи І – регулюванням.

Наприклад, помістимо систему (14.49) всередину замкненого контуру з I – регулятором (рис. 14.21).

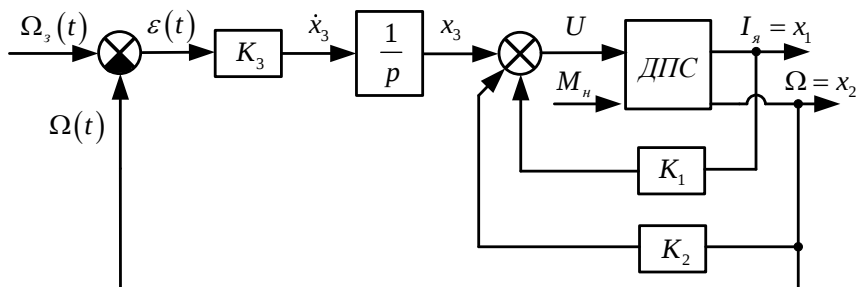


Рис. 14.21. Система з I – регулятором

Модель ДПС у цій схемі:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX + DU, \end{cases}$$

де:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Розрахувати слід коефіцієнти K_1 , K_2 , K_3 .

В скалярному виді:

$$\begin{aligned} u &= x_3 - K_1 x_1 - K_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= K_3 (\Omega_3 - \Omega), \Omega = y = x_2. \end{aligned}$$

Система у формі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \\ \dot{x}_3 = K_3\Omega_3 - K_3c_{11}x_1 - K_3c_{12}x_2 \end{cases}. \quad (14.50)$$

Підставимо в (14.50) значення u :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1x_3 - b_1K_1x_1 - b_1K_2x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2x_3 - b_2K_1x_1 - b_2K_2x_2 \\ \dot{x}_3 = K_3\Omega_3 - K_3c_{11}x_1 - K_3c_{12}x_2 \end{cases}$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_1 K_1 & a_{12} - b_1 K_2 & b_1 \\ a_{21} - b_2 K_1 & a_{22} - b_2 K_2 & b_2 \\ -K_3 c_{11} & -K_3 c_{12} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{bmatrix} \Omega_3.$$

Характеристичне рівняння:

$$\det \left[\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} - b_1 K_1 & a_{12} - b_1 K_2 & b_1 \\ a_{21} - b_2 K_1 & a_{22} - b_2 K_2 & b_2 \\ -K_3 c_{11} & -K_3 c_{12} & 0 \end{bmatrix} \right] = 0. \quad (14.51)$$

Рівняння (14.51) з урахуванням чисельних значень коефіцієнтів ДПС:

$$\det \begin{bmatrix} p + 25 + 5K_1 & 7,5 + 5K_2 & -5 \\ -7,5 & p & 0 \\ 0 & K_3 & p \end{bmatrix} =$$

$$= p^3 + (25 + 5K_1)p^2 + (56,25 + 37,5K_2)p + 37,5K_3. \quad (14.52)$$

Бажаний біноміальний характеристичний поліном для системи III порядку:

$$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3, \quad (14.53)$$

нормований час $\omega_0 t_{\text{п.п.}}$ (згідно рис. 14.16) дорівнює 6,3.

Прирівнявши коефіцієнти в (14.52) і (14.53), отримаємо систему:

$$\left. \begin{aligned} 25 + 5K_1 &= 3\omega_0 \\ 56,25 + 37,5K_2 &= 3\omega_0^2 \\ 37,5K_3 &= \omega_0^3 \end{aligned} \right\}, \quad \Omega_0 = \omega_0. \quad (14.54)$$

За заданим часом $t_{\text{п.п.}} = 0,5$ с знайдемо:

$$\Omega_0 = \omega_0 = \frac{6,3}{t_{\text{п.п.}}} = 12,6 \text{ рад/с.}$$

Тепер із (14.54) знаходимо шукані коефіцієнти:

$$K_1 = 53,3; K_2 = 11,2; K_3 = 53,3.$$

Моделювання системи (рис. 14.22) показує, що усталене значення $\Omega = 100$ рад/с; подача збурення $M_n = 21$ нм, а також включення створює аперіодичний процес з часом не більше 0,5 с (рис. 14.22).

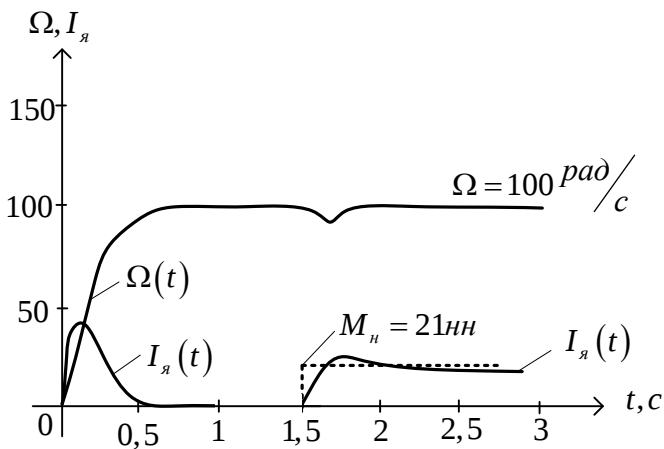


Рис. 14.22. Перехідні і усталені процеси в САК з І – регулятором і модальним керуванням

Зауваження: Останню задачу і подібні до неї можна вирішувати простіше, якщо застосувати *принцип декомпозиції*:

- на І кроці забезпечуємо стійкість і бажану якість об'єкта керування шляхом введення зворотних зв'язків за змінними його стану;

- на II кроці синтезуємо оптимальний регулятор для цього об'єкта з вже покращеними характеристиками. Наприклад, нестійкий об'єкт

$$\ddot{x} - a_1 \dot{x} + a_0 x = bu$$

робимо стійким, вводячи зворотний зв'язок по $\dot{x}$:

$$\ddot{x} - (K_1 - a_1)\dot{x} + a_0 x = bu,$$

де $K_1 > a_1$, а далі для останнього проектуємо оптимальний регулятор.

Інший приклад: коливальний об'єкт робимо аперіодичним, а далі для аперіодичного за теоремою Фельдбаума синтезуємо просте релейне оптимальне за швидкістю керування і т.ін.

- *Формула Акермана*

Для системи з одним входом $u(t)$ і одним виходом $y(t)$ коефіцієнти K_i матриці K можуть бути визначені безпосередньо через матрицю P_c керованості і матрицю A за *формулою Акермана*.

Коефіцієнти матриці K зворотного зв'язку за станом X :

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot P_c^{-1} q(A), \quad (14.55)$$

де P_c^{-1} зворотна до P_c матриця,

$$q(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n \cdot E, \quad (14.56)$$

де $a_i, i = \overline{1, n}$, коефіцієнти *бажаного* характеристичного полінома $q(p)$ замкненої системи,

$$q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (14.57)$$

Приклад 1. За досить суттєвого моменту інерції і слабкого демпфування, після нормування змінних «вхід – вихід», передаточну функцію об'єкта керування можна подати у вигляді подвійного інтегралу:

$$W(p) = \frac{1}{p^2},$$

що має два нульових кореня.

Структурна схема об'єкта:

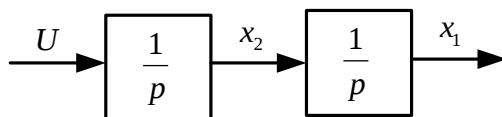


Рис. 14.23. Об'єкт без зворотних зв'язків

Необхідно ввести зворотні зв'язки з коефіцієнтами K_1 і K_2 відповідно за x_1 і x_2 такі, щоб характеристичний поліном замкненої системи (рис. 14.24).

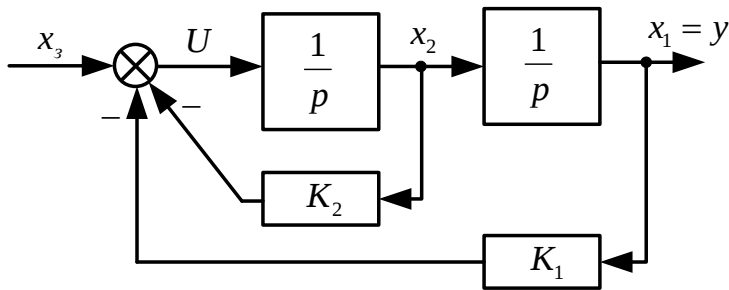


Рис. 14.24. Об'єкт зі зворотними зв'язками

дорівнював бажаному:

$$p^2 + 2p + 2 = 0.$$

Рівняння об'єкта (рис. 14.23):

$$\dot{X} = AX + BU = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= U \end{aligned} \right\}$$

Матриця керованості:

$$P_c = [BAB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0, \text{ система керована.}$$

Матриця K за формулою Аккермана:

$$K = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot q(A) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot q(A);$$

$$q(A) = A^2 + 2A + 2E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тоді:

$$K = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [2 \ 2].$$

Тобто в схемі (рис. 14.24) $K_1 = K_2 = 2$. Таким чином, в результаті введення зворотного зв'язку за x_1 і x_2 , корені $P_{1,2} = \pm j1$ об'єкта перемістилися вліво і прийняли значення $P_{1,2} = -1 \pm j1$ (рис. 14.25).

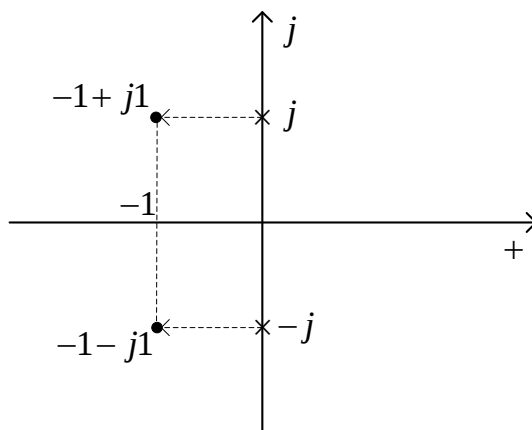


Рис. 14.25. Керування коренями

Приклад 2. Система стабілізації підвісу «у» феромагнітної кульки (1) (або осі) в магнітному полі електромагніту (2) (рис. 14.26).

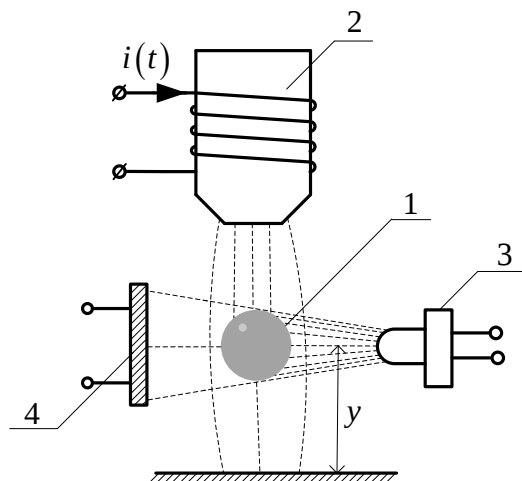


Рис. 14.26. Магнітна підвіска кульки (1) в полі електромагніту (2) з контролем висоти у оптичною системою «лампочка (3) – фотоприймач (4) (ПЗС-лінійка)»

Така система є нестійкою, нелінійною, динамічною. Лінеаризуємо її в зоні заданого значення y . Позначимо відхилення y від заданого через x_1 , $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$; відхилення струму $i(t)$ збудження магнітного потоку через $U(t)$. Тоді маємо диференціальне рівняння:

$$\ddot{y}(t) - 1600 y(t) = -15u(t);$$

або

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 1600x_1 - 15u. \end{cases} \quad (14.57)$$

Схема системи (14.57):

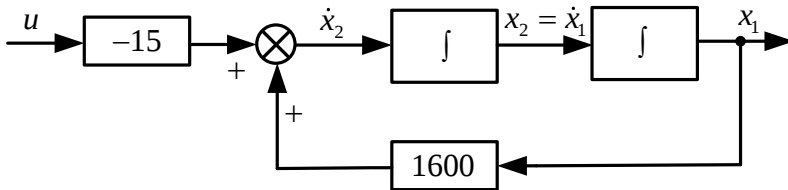


Рис. 14.27. Схема нестійкої системи (14.57)

Векторно-матричний запис:

$$\dot{X} = AX + BU = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} u.$$

В змінних Лапласа:

$$[pE - A]X(p) = BU(p);$$

характеристичний поліном

$$\det[pE - A] = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1600 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1600 = 0.$$

Корені $P_1 = 40$; $P_2 = -40$.

Об'єкт (рис. 14.27) аперіодично не стійкий.

Введемо зворотні зв'язки за x_1, x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 1600x_1 + k_1x_1 + k_2x_2 - 15U \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = (1600+k_1)x_1 + k_2x_2 - 15U. \end{cases}$$

Векторно-матричний запис:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1600+k_1) & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} u;$$

в змінних Лапласа:

$$\begin{bmatrix} p & -1 \\ -(1600+k_1) & p - k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} u(p).$$

Характеристичний поліном:

$$\begin{vmatrix} p & -1 \\ -(1600+k_1) & p - k_2 \end{vmatrix} = p(p - k_2) - (1600+k_1) = \\ = p^2 - k_2p - (1600+k_1). \quad (14.58)$$

Бажаний поліном:

$$p^2 + 2\xi\omega_0p + \omega_0^2,$$

наприклад, для $\xi = 0,7$; $\omega_0 = 10$, буде таким:

$$p^2 + 14p + 100. \quad (14.59)$$

Прирівнявши (14.58) з (14.59) визначаємо, що $k_1 = -1700$; $k_2 = -14$.

Схема скоригованої системи:

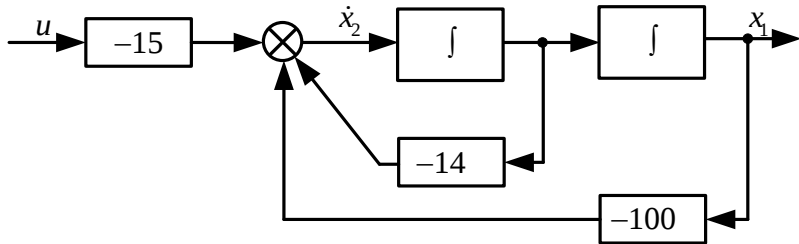


Рис. 14.28. Скоригована схема

Такий же результат отримаємо за формулою Аккермана:

- рівняння об'єкта:

$$\dot{X} = AX + BU = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \end{bmatrix} u;$$

матриця керованості:

$$P_c = [BAB] = \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді:

$$K = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix} \cdot q(A),$$

де:

$$\begin{aligned} q(A) &= A^2 + 14A + 100E = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1600 & 0 \end{bmatrix}^2 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1600 & 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1600 & 0 \\ 0 & 1600 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ 22400 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1700 & 14 \\ 22400 & 1700 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$K = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1700 & 14 \\ 22400 & 1700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1700}{15} & -\frac{14}{15} \end{bmatrix}.$$

В результаті отримаємо схему:

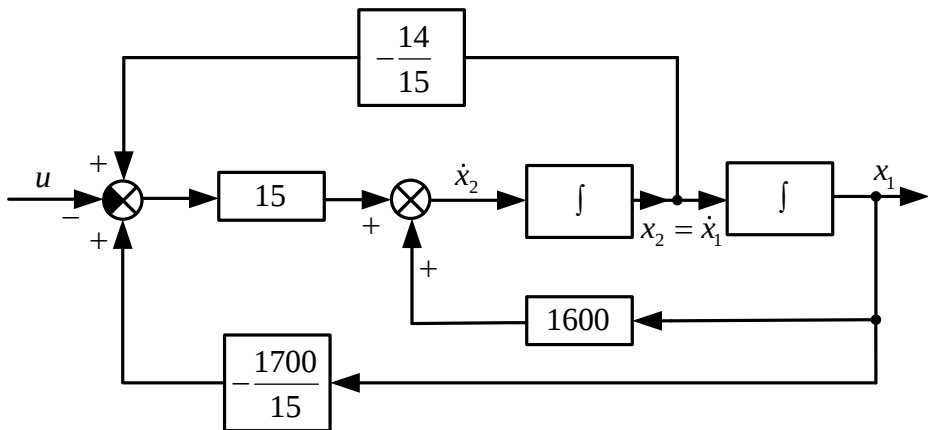


Рис. 14.29. Структурна схема

Схема (рис. 14.29) ідентична схемі (рис. 14.28), якщо перенести зворотні зв'язки через ланку $\boxed{15}$, відповідно помноживши коефіцієнти: $-\frac{14}{15}$ і $-\frac{1700}{15}$ на 15.

Приклад розрахункової роботи

Об'єкт керування (за № варіанта), наприклад, №21. Його передаточна функція:

$$\frac{x(p)}{u(p)} = W(p) = \frac{30}{(3p + 1)(0,14p + 1)}.$$

Необхідно, шляхом введення зворотних зв'язків по змінним стану і підключенням І-регулятора $\left(\frac{K_3}{p}\right)$ забезпечити необхідну якість перехідного процесу замкненої САК при дії на її вході $x_3 = 1(t)$ – ступінчатої функції, а саме: час перехідного процесу $t_{п.п.} \leq 2$ с, перерегулювання $\sigma \leq 10\%$.

Схема САК:

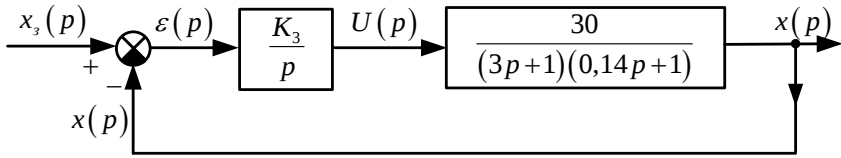


Рис. 14.30. Структура САК

Алгоритм вирішення задачі

1. Перейдемо в об'єкті від $W(p)$ до змінних стану:

$$(3p + 1)(0,14p + 1)x(p) = 30u(p)$$

або

$$(0,42p^2 + 3,14p + 1)x(p) = 30u(p).$$

Покладем $p = d/dt$, тоді маємо:

$$0,42\ddot{x}(t) + 3,14\dot{x}(t) + x(t) = 30u(t), \quad (14.60)$$

де:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Задамо змінні стану: $x(t) = x_1(t)$; $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$.

Рівняння (14.60) у формі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{30}{0,42}u(t) - \frac{3,14}{0,42}x_2(t) - \frac{1}{0,42}x_1(t) \end{cases}$$

або

$$\dot{x}_2 \cong 71u(t) - 7,5x_2(t) - 2,4x_1(t).$$

2. Структура САК з І-регулятором і зворотними зв'язками:

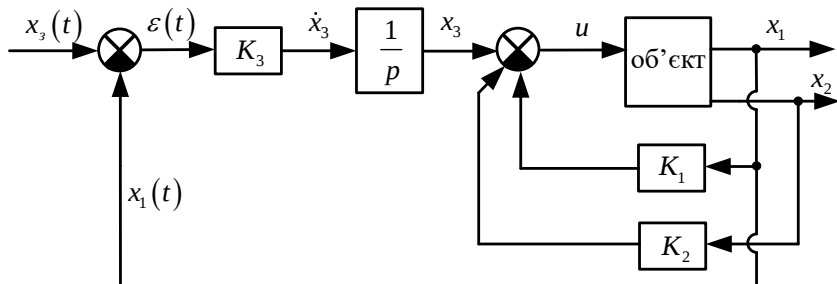


Рис. 14.31. Структура САК з І-регулятором

Рівняння замкненої системи:

$$\begin{aligned} u(t) &= x_3(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= k_3(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

або разом з об'єктом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 71(x_3 + k_1 x_1 + k_2 x_2) - 7,5x_2 - 2,4x_1; \\ \dot{x}_3 = -k_3 x_1 + k_3 x_3, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = (71k_1 - 2,4)x_1 + (71k_2 - 7,5)x_2 + 71x_3; \\ \dot{x}_3 = -k_3 x_1 + k_3 x_3. \end{cases} \quad (14.61)$$

Рівняння (14.61) в матричному вигляді:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (71k_1 - 2,4) & (71k_2 - 7,5) & 71 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix} x_3. \end{aligned} \quad (14.62)$$

3. Характеристичний поліном

В (14.62) знов замінимо d/dt на змінну перетворення Лапласа p , тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (71k_1 - 2,4) & (71k_2 - 7,5) & 71 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \\ = \det \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ (2,4 - 71k_1) & (p + (7,5 - 71k_2)) & 71 \\ k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \quad (14.63) \\ = p \cdot \begin{bmatrix} p + (7,5 - 71k_2) & -71 \\ 0 & p \end{bmatrix} + p(2,4 - 71k_1) + 71k_3 &= \\ = p^3 + (7,5 - 71k_2)p^2 + (-71k_1 + 2,4)p + 71k_3. & \end{aligned}$$

4. Знайдемо коефіцієнти бажаного *полінома бінома Ньютона*. Для III порядку це:

$$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3, \quad (14.64)$$

нормований час $\omega_0 t_{\text{п.п.}} = 6,3$ одиниці (згідно графіка (рис. 14.16)).

Заданий час $t_{\text{п.п.}} = 2$ с. Звідси:

$$\omega_0 = \frac{6,3}{2} = 3,15 \text{ рад/с}$$

Тоді бажаний поліном (14.64) набуває числових значень коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} p^3 + 3 \cdot 3,15 p^2 + 3 \cdot (3,15)^2 p + (3,15)^3 &= \\ = p^3 + 9,45 p^2 + 3 \cdot 29,77 p + 31. & \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти нашого (14.63) і бажаного (14.64) поліномів. Звідси знайдемо k_1, k_2, k_3 :

$$\left. \begin{aligned} 7,5 - 71k_2 &= 9,45 \\ -71k_1 + 2,4 &= 29,77 \\ 71k_3 &= 31 \end{aligned} \right| \begin{aligned} k_2 &= -0,027 \\ k_1 &= -0,385 \\ k_3 &= 0,437 \end{aligned}$$

5. *Моделювання в MATLAB отриманої САК:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = (71 \cdot (-0,385) - 2,4)x_1 + (71 \cdot (-0,027) - 7,5)x_2 + 71x_3; \\ \dot{x}_3 = -0,437x_1 + 0,437x_3, \end{cases}$$

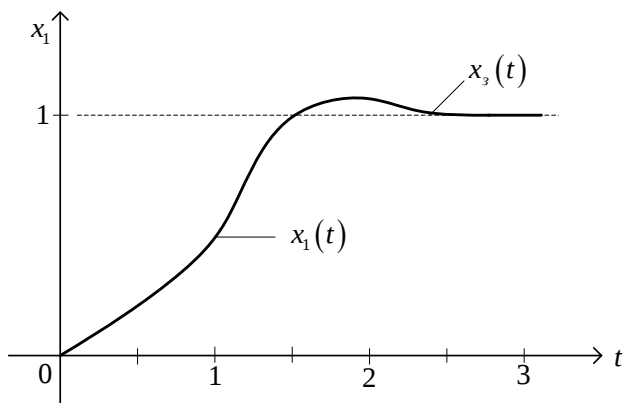


Рис. 14.32. Графік $x_1(t)$

6. Висновок: отримана САК задовольняє вимогам по $t_{п.п.}$ і σ .

Перехід від неперервних до дискретних систем (вільний рух)

Однорідне рівняння:

$$\dot{X} = AX(t), \quad A \rightarrow n \times n, \quad x \rightarrow n \times 1, \quad x(0).$$

Перетворення Лапласа:

$$-X(0) + pX(p) = AX(p),$$

тобто:

$$X(p) = [p \cdot I - A]^{-1}X(0), \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}. \quad (14.65)$$

Зворотне перетворення Лапласа:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[p \cdot I - A]^{-1}\}X(0), \quad (14.66)$$

але $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ – це перехідна матриця стану $F(t) = e^{At}$.

Приклад.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

або

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0,$$

тобто:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases},$$

або

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2 \left(x_1 + \frac{3}{2} \dot{x}_1 \right), \\ \Delta &= p^2 + 3p + 2, \\ p_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm 1, \\ p_1 &= -\frac{5}{2}; \quad p_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} [p \cdot I - A] &= \begin{bmatrix} p & 2 \\ -1 & p+3 \end{bmatrix}, \\ [p \cdot I - A]^{-1} &= F(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} p+3 & -2 \\ 1 & p \end{bmatrix}, \\ F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}, \end{aligned}$$

або

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+3}{\Delta} \right\} x_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{\Delta} \right\} x_2(0), \quad (14.67)$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta} \right\} x_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{\Delta} \right\} x_2(0).$$

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+3}{p^2+3p+2} \right\} x_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{p^2+3p+2} \right\} x_2(0),$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2+3p+2} \right\} x_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+3p+2} \right\} x_2(0).$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+3}{p^2+3p+2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \right\} = \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{F'_{2p}(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$

$$F_1(p) = p+3; \quad F_1(p_1) = -\frac{5}{2}+3=1; \quad F_1(p_2) = -\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2};$$

$$F'_{2p}(p) = 2p+3; \quad F'_{2p}(p_1) = -\frac{5}{2} \cdot 2+3=-2;$$

$$F'_{2p}(p_2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 2;$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{p^2 + 3p + 2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_1}{F'_{2p}(p)} \right\} = \sum_{k=1}^2 \frac{F_1}{F'_{2p}(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$

$$F_1(p_k) = -2; \quad k = 1, 2.$$

$$F'_{2p}(p_k) = 2p + 3; \quad F'_{2p}(p_1) = -2; \quad F'_{2p}(p_2) = 2.$$

Тоді:

$$x_1(t) = \left[\frac{1}{(-2)} e^{-(5/2)t} + \frac{5}{2} e^{-(1/2)t} \right] x_1(0) +$$

$$+ \left[\frac{(-2)}{(-2)} e^{-(5/2)t} + \frac{(-2)}{2} e^{-(1/2)t} \right] x_2(0) =$$

$$= \left[\frac{5}{4} e^{-(1/2)t} - \frac{1}{2} e^{-(5/2)t} \right] x_1(0) + \left[e^{-(5/2)t} - e^{-(1/2)t} \right] x_2(0).$$

Аналогічно розраховується $x_2(t)$.

Тепер, якщо $t_k = k\Delta t$, Δt – крок t , а замість $x_1(0)$, $x_2(0)$ підставляти попереднє $(k-1)$ -ше значення t , то отримаємо різницеве рівняння, яке в $k\Delta t$ точно співпадає з неперервним:

$$x_1(k) = \left[\frac{5}{4} e^{-(1/2)\Delta t} - \frac{1}{2} e^{-(5/2)\Delta t} \right] x_1(k-1) +$$

$$+ \left[e^{-(5/2)\Delta t} - e^{-(1/2)\Delta t} \right] x_2(k-1) = a_{11}x_1(k-1) + a_{12}x_2(k-1),$$

де:

$$a_{11} = \frac{5}{4} e^{-(\Delta t/2)} - \frac{1}{2} e^{-(5\Delta t/2)}; \quad a_{12} = e^{-(5\Delta t/2)} - e^{-(\Delta t/2)}.$$

Взявши $\mathcal{L}^{-1}$, отримаємо відповідні експоненти $e^{p_1 t}$, $e^{p_2 t}$. І, якщо взяти дискретно $k\Delta t, k = 0, 1, 2 \dots$, то неперервні рівняння (14.66) перейдуть в дискретні (точні!):

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) \end{cases}'$$

де a_{ij} визначимо з (14.66) як $\mathcal{L}^{-1}$.

Неоднорідна система. Якщо U – кусково-стала функція (рис. 14.33) з кроком Δt , то:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + U \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{X} = AX + BU, Y = CX, \\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

$$PX - AX = BU, [PI - A]X(p) = BU(p),$$

$$X(p) = [PI - A]^{-1} \cdot BU(p),$$

$$X(k+1) = A_g \cdot X(k) + B_g U(k), y(k) = CX(k),$$

$$A_g = e^{AT}, B_g = \int_0^T e^{At} \cdot B dt,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{AT}\} = (p \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{bmatrix}.$$

Тоді:

$$A_g = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_g = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0,1} = \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix},$$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \cdot X(k) + \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k)$$

або

$$x_1(k+1) = e^{-T} x_1(k) + 0 \cdot x_2(k) + (1 - e^{-T}) U(k),$$

тобто

$$x_1(k+1) = e^{-T} x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = (1 - e^{-T}) x_1(k) + x_2(k) + (1 - e^{-T}) U(k).$$

Це буде точно, якщо $U(k) = \sum_{i=0}^k \Delta U(i) \cdot 1(i-k)$ – кусково-стала функція.

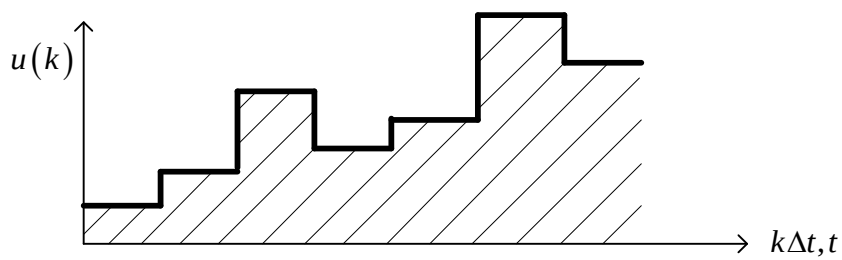


Рис. 14.33. Графік $u(k)$

15 ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

15.1 Загальні положення

Дискретні САК – це такі системи, до складу яких входить хоча б одна ланка дискретної дії (ЛДД).

Дискретний елемент перетворює неперервний сигнал в дискретний, дані про якого отримуються в дискретні моменти $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n$ часу t . Дискретний сигнал отримується шляхом квантування за часом t , рівнем x або за t і x одночасно.

Переваги ДСАК:

- більша точність вимірів;
- використання цифрових сигналів покращує точність процесів обробки інформації;
- реалізація складних алгоритмів керування у вигляді програм для ЕОМ;
- малі розміри та енергоспоживання при реалізації на мікро-ЕОМ.

Для керування неперервним об'єктом ДСАК включає аналогово-цифрові (АЦП) та цифро-аналогові (ЦАП) перетворювачі.

Типи квантування сигналів.

Квантування за рівнем перетворює неперервний вхідний сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ у східчастий з фіксованим рівнем Δx сходинок (рис. 15.1).

Квантування за часом перетворює неперервний сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ у східчастий $x_{\text{вих}}(t)$ шляхом фіксації рівнів $x_{\text{вх}}(t)$ в дискретні моменти t_k часу t (рис. 15.2) або в послідовність імпульсів, амплітуда чи ширина яких визначається значенням $x_{\text{вх}}(t)$ в t_k зі сталим або змінним у часі періодом T (рис. 15.2, а, б).

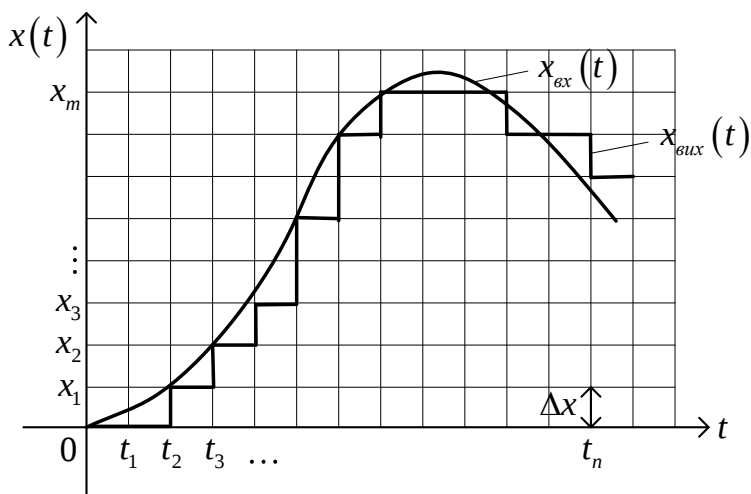


Рис. 15.1. Квантування $x(t)$

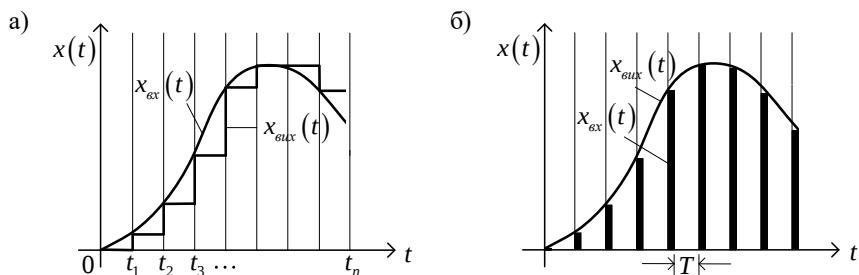


Рис. 15.2. Квантування $x(t)$

Квантування за часом і рівнем об'єднує два перших (рис. 15.3).
В релейних САК має місце квантування за рівнем; в імпульсних САК – за часом; в цифрових САК – за рівнем і часом.

Решітчастою функцією $f(nT_0)$ називається функція дискретного аргументу $t = nT_0, n = 0, 1, 2, \dots$, значення якої відомі в момент nT_0 , або для відносного часу $\bar{t} = t/T_0$ визначають як $f[n]$.

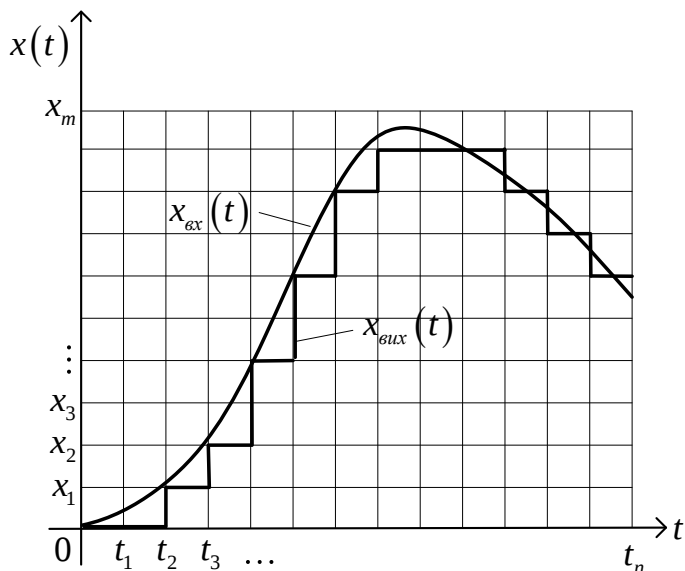


Рис. 15.3. Квантування $x(t)$ за часом t і рівнем

15.2 Модуляція в ДСАК

Імпульсні елементи в ДСАК перетворюють $x_{\text{вх}}(t)$ в послідовність імпульсів, параметри яких залежать від $x_{\text{вх}}(t)$. Найбільш поширеними є *три види модуляції*:

1. *Амплітудно-імпульсна модуляція (АІМ)*, за якої $x_{\text{вх}}(t)$ перетворюється в послідовність нескінченно тонких імпульсів з кроком T_0 у часі і амплітудою, пропорційною $x_{\text{вх}}(t_n)$ в момент t_n квантування.

2. *Широтно-імпульсна модуляція (ШІМ)*, за якої $x_{\text{вх}}(t)$ перетворюється в послідовність імпульсів сталої частоти слідування і амплітуди, *ширина* яких пропорційна $x_{\text{вх}}(t_n)$.

3. *Частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ)*, за якої $x_{\text{вх}}(t)$ перетворюється в послідовність імпульсів сталої амплітуди і ширини, а частота їх слідування пропорційна $x_{\text{вх}}(t)$ в момент t_n квантування.

Можливі і більш складні і, водночас, поміхо-стійкі способи модуляції, наприклад, кодо-імпульсна та ін.

Далі розглянемо ДСАК з АІМ, як найбільш поширеною.

Три параметра *імпульсного елемента* з АІМ модуляцією:

1. Період T_0 або частота ω_0 повторення імпульсів:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

2. Тривалість τ імпульсів $\tau = \gamma T_0$ або скважність:

$$\gamma = \frac{\tau}{T_0}.$$

3. Форма імпульсу (прямокутна, трикутна, синусоїдна, експоненційна, тощо).

Реальний імпульсний елемент (рис. 15.4) представляється послідовним з'єднанням ідеального [1] і формувача [2].

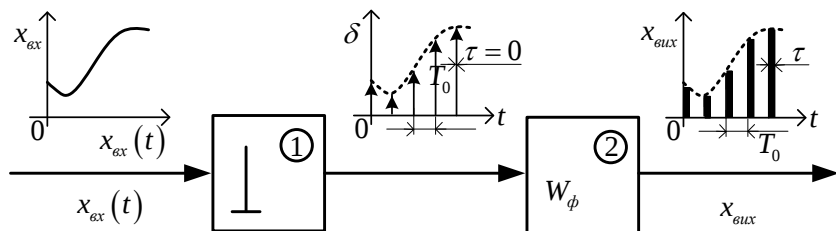


Рис. 15.4. Реальний імпульсний елемент

Найпростіший імпульсний елемент (δ – імпульсний) модулює $x_{\text{вх}}(t)$ дельта-імпульсами Дірака:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

які мають одиничну площу:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

і одиничне перетворення Лапласа:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Якщо імпульс зсунуто на kT_0 тактів, то (за теоремою зміщення):

$$\mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0p}.$$

Отже імпульсний модулятор перемножує функцію $f(t)$ на послідовність $\delta_T(t)$ імпульсів $\delta(t - kT_0)$, утворюючи *решітчасту функцію*:

$$\begin{aligned} f_k &= f(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k) \delta(t - kT_0), \quad T = T_0. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Перетворення Лапласа:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1; \quad \mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0p}; \quad \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0p}\right\} = \frac{1}{1 - e^{-pT_0}};$$

$$\mathcal{L}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kTp}.$$

Введемо нову змінну $Z = e^{pT}$.

Тоді:

$$F(Z) = \mathcal{L}\{f(t_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k Z^{-k}, \quad (15.2)$$

де $F(Z)$ названо *Z-перетворенням* решітчастої функції (15.1) $f(t_k)$.

15.3 Зв'язок Z-перетворення з $\mathcal{L}$ -перетворенням Лапласа

За теоремою згортки відомо, що добуток $x(t) \cdot y(t)$ буде мати перетворення Лапласа, як згортку:

$$\mathcal{L}\{x(t) \cdot y(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(S)Y(p-S)dS.$$

Якщо це застосувати до виразу (15.2), то отримаємо, що:

$$F(Z) \Big|_{Z=e^{pT}} = \mathcal{L}\{f(t_k)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_r F(S) \cdot \frac{1}{1-e^{-T(p-S)}} dS, \quad (15.3)$$

де $\oint_r$ – інтеграл по контуру радіусу $r \rightarrow \infty$.

Взагалі, можна отримати Z-перетворення решітчастої функції часу $f(k)$, як $Z\{f(k)\}$, так і як Z-перетворення неперервної функції $F(S)$ перетворення Лапласа. Отже:

$$F(Z) = Z\{f(k)\} = Z\{F(S)\}.$$

Обчислення інтегралу (15.3) здійснюється по контуру L_1 (рис. 15.5) за формулою¹³ (15.4):

$$F(Z) = \mathcal{L}\{f(t_k)\} = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{S_i} \left[\frac{A(S)}{B(S)} \cdot \frac{1}{1-e^{-T(p-S)}} \right], \quad (15.4)$$

де: S_i – корені $B(S) = 0$, в лівій напівплощині;

Res_{S_i} – це лишки функції $F(S)$ в полюсах S_i (15.5).

Обчислення інтегралу (15.3) по контуру L_2 (права напівплощина) дає:

$$F(Z) = \mathcal{L}\{f(t_k)\} = F(S) \cdot \frac{1}{1-e^{-T(p-S)}},$$

$$Z = e^{-pT} = e^{-(\sigma+j\omega)T} = e^{-\sigma T}(\cos \omega T + j \sin \omega T).$$

¹³ Джури Э.И. Импульсные САУ: пер. с англ./Э.И.Джури.–М.: Физматгиз, 1971. – 320 с.

Внаслідок періодичності Z маємо нескінченну кількість полюсів у правій напівплощині (рис.15.5), відстань по уявній осі між ними дорівнює частоті квантування $\omega_s = 2\pi/T$.

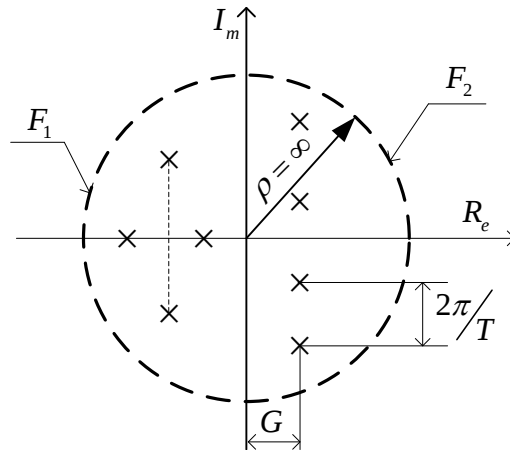


Рис. 15.5. Контур інтегрування

Приклад перетворення $W(S)$ в $F(Z)$

Передавальна функція неперервної системи:

$$W(S) = \frac{1}{S(S+a)} = \frac{A(S)}{B(S)}.$$

Використовуючи перетворення (15.4), отримаємо:

для S_i , $i = 1, 2$; $S_1 = 0$; $S_2 = -a$;

$$\frac{dB(S)}{dS} = 2S + a.$$

Враховуючи, що в (15.4) лишки ReS_i функції $F(S)$ в полюсах S_i («зірочки» на рис. 15.5) дорівнюють:

$$ReS_i = \frac{A(S_i)}{\left. \frac{dB(S)}{dS} \right|_{S=S_i}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(P-S_i)}}, \quad (15.5)$$

отримаємо:

$$F(Z) = \frac{1}{a(1 - e^{-TP})} + \frac{1}{(-a)(1 - e^{-T(P+a)})} = \frac{(1-d)Z}{a(Z-1)(Z-d)};$$

$$d = e^{-aT}, Z = e^{TP}.$$

15.4 Властивості Z-перетворення

1. *Додавання:*

$$Z\{f_1(k) + f_2(k)\} = Z\{f_1(k)\} + Z\{f_2(k)\}.$$

2. *Множення на сталу величину α :*

$$Z\{\alpha\{f(k)\}\} = \alpha Z\{f(k)\}.$$

3. *Лінійність:*

$$Z\{\alpha \cdot f_1(k) + \beta \cdot f_2(k)\} = \alpha Z\{f_1(k)\} + \beta Z\{f_2(k)\}.$$

4. *Зсув на m тактів ліворуч:*

$$Z\{f((k-m)T)\} = Z^{-m} \cdot F(Z)$$

або праворуч:

$$Z\{f((k+m)T)\} = Z^m \cdot F(Z).$$

Тому Z називають *оператором зсуву*.

5. *Z-перетворення за нульових початкових умов для прямих*

$$Z\{\Delta f_k\} = Z\{f_{k+1} - f_k\} = (Z - 1)F(Z),$$

$$Z\{\Delta^n f_k\} = (Z - 1)^n F(Z)$$

і обернених різниць:

$$Z\{\nabla f_k\} = Z\{f_{k-1} - f_k\} = \frac{(Z - 1)}{Z} F(Z),$$

$$Z\{\nabla^n f_k\} = \frac{(Z - 1)^n}{Z^n} F(Z).$$

6. *Теореми про початкове і кінцеве значення послідовності $f(k)$.*

Оскільки

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)Z^{-k} = f(0) + f(T)Z^{-1} + f(2T)Z^{-2} + \dots,$$

то, якщо $Z \rightarrow 0$, $F(Z) \rightarrow f(0)$, тобто:

$$f(0) = \lim_{Z \rightarrow 0} F(Z).$$

Відповідно, кінцеве значення:

$$f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(nT) = \lim_{Z+1} (Z-1)F(Z).$$

7. Теорема про кінцеву суму:

$$Z \left\{ \sum_{k=0}^n f_k \right\} = \frac{Z}{Z-1} F(Z),$$

якщо $f(0) = 0$.

8. Модифіковане Z-перетворення.

Якщо треба обчислити вихідний сигнал $y(t)$ імпульсного елемента в проміжку між тактами kT , $k = 0, 1, 2, \dots$, то вводять коефіцієнт запізнення ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тоді:

$$Y(Z, \varepsilon) = Z_m(y) = \sum_{k=0}^{\infty} [y((k-1+\varepsilon)T)] Z^{-k}, \quad (15.6)$$

$$Z \cdot Y(Z, \varepsilon)_{\varepsilon=0} = \sum_{k=0}^{\infty} [y((kT))] Z^{-k} = Y(Z).$$

Звичайне і модифіковане Z-перетворення.

Таблиця 15.1

Неперервна функція	Решітчаста функція	Звичайне Z-перетворення	Модифіковане Z-перетворення
$1(t)$	$1(kT)$	$\frac{Z}{Z-1}$	$\frac{Z}{Z-1}$
t	kT	$\frac{TZ}{(Z-1)^2}$	$\frac{TZ}{(Z-1)^2} + \frac{\varepsilon TZ}{Z-1}$
$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1-d)Z}{(Z-1)(Z-d)},$ $d = e^{-aT}$	$\frac{Z}{Z-1} - \frac{Zd^\varepsilon}{Z-d},$ $d = e^{-aT}$

9. *Обернене Z-перетворення.*

Серед багатьох методів знаходження оберненого Z-перетворення найбільш зручними є:

- *метод розкладання в степеневий ряд;*
- *метод розкладання на прості дроби.*

Метод розкладання в степеневий ряд полягає в діленні чисельника $A(Z)$ на знаменник $B(Z)$ дробно-раціональної функції $F(Z)$.

В результаті отримують степеневий ряд з від'ємними степенями:

$$F(Z) \cong e(0) + e(\cdot)Z^{-1} + e(\cdot)Z^{-2} + \dots,$$

де: $e(k)$ є значенням числової послідовності $\{e(k)\}$.

Степені від'ємні, якщо $\deg A(Z)$ менше $\deg B(Z)$. Якщо $\deg A(Z) > \deg B(Z)$, то степені будуть додатними. Однак така $F(Z)$ фізично не може реалізуватись, оскільки майбутні значення t_k не відомі.

Метод розкладання на прості дроби полягає в розкладанні складної функції $F(Z)$ на прості дроби, для яких існують таблиці¹⁴. Оскільки в табличних функціях одним із множників в чисельнику є Z , то на прості дроби розкладають функцію $F(Z)/Z$, а потім кожен дріб помножується на Z .

15.5 Опис ДСАК різницевами рівняннями

Різницеві рівняння пов'язують вхідні і вихідні змінні в дискретні моменти kT часу t . Якщо крок T часу досить малий, то відповідні похідні

$$\frac{d^j y}{dt^j}, j = 1, 2, \dots, n; \quad \frac{d^i u}{dt^i}, i = 1, 2, \dots, m$$

в диференційному рівнянні

¹⁴ Изерман Р. Цифровые системы управления/М.:Мир, 1984. – 542.

$$\begin{aligned}
b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_n y(t) &= \\
&= a_0 \frac{d^m u}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots \\
&+ a_m u(t) \quad (15.7)
\end{aligned}$$

заміняють різницями:

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{y_{k+1} - y_k}{T} = \frac{\Delta y_k}{T}; \quad (15.8)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \cong \frac{\Delta y_{k+1} - \Delta y_k}{T^2} = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{T^2} \quad (15.9)$$

і так далі:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n y}{dt^n} &\cong \frac{\Delta^{(n)} y_k}{T^n} = \frac{\sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v y(k+n-v)}{T^n}, \quad C_n^v \\
&= \frac{n!}{v! (k-v)!}. \quad (15.10)
\end{aligned}$$

Підставивши (15.8), (15.9), (15.10) в (15.7), отримують різницеве рівняння:

$$\begin{aligned}
q_0 y_{k+n} + q_1 y_{k+n-1} + \dots + q_{n-1} y_{k+1} + q_n y_k &= \\
= p_0 u_{k+m} + p_1 u_{k+m-1} + \dots + p_{m-1} u_{k+1} + p_m u_k. \quad (15.11)
\end{aligned}$$

Приклад. Диференційне рівняння системи:

$$b_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_2 y = a_0 \frac{du}{dt} + a_1 u.$$

Підставивши різниці (15.8), (15.9), отримаємо різницеве рівняння:

$$q_0 y_{k+2} + q_1 y_{k+1} + q_2 y_k = p_0 u_{k+1} + p_1 u_k,$$

де:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{b_0}{T^2}; \quad q_1 = \frac{b_1}{T} - \frac{2b_0}{T^2}; \quad q_2 = b_2 - \frac{b_1}{T} + \frac{2b_0}{T^2}; \\
p_0 &= \frac{a_0}{T}; \quad p_1 = -\frac{a_0}{T} + a_1.
\end{aligned}$$

Для систем, що фізично реалізуються, слід різницеве рівняння (15.11) записати у спадних різницях:

$$q_0 y_k + q_1 y_{k-1} + \dots + q_{n-1} y_{k-n+1} + q_n y_{k-n} =$$

$$= p_0 u_k + p_1 u_{k-1} + \dots + p_{m-1} u_{k-m+1} + p_m u_{k-m}. \quad (15.12)$$

Для нашого прикладу:

$$q_0 y_k + q_1 y_{k-1} + q_2 y_{k-2} = p_0 u_{k-1} + p_1 u_{k-2}.$$

Перехід від різницевого рівняння до передаточних функцій ДСАК

Виконаємо Z – перетворення (15.3) за нульових початкових умов рівняння (15.12):

$$\begin{aligned} q_0 y(z) z^n + q_1 y(z) z^{n-1} + \dots + q_n y(z) &= \\ &= p_0 z^m u(z) + p_1 z^{m-1} u(z) + \dots + p_m u(z). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Відношення $y(z)$ до $u(z)$ з (15.13) є передаточною функцією ДСАК:

$$W(z) = \frac{p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_n}, \quad n \geq m. \quad (15.14)$$

Приклад:

– цифровий інтегратор:

$$W(z) = \frac{T \cdot z}{z - 1};$$

– цифровий диференціатор:

$$W(z) = \frac{T - z}{z \cdot T}.$$

Дійсно з рівняння цифрового інтегратора, який отримано з аналогового:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

шляхом його диференціювання:

$$\frac{dy}{dt} = u(t)$$

і переходу до дискретного:

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} = u(k+1),$$

використовуючи оператор $z = e^{pT}$, отримаємо, що:

$$\frac{y(k)[z - 1]}{T} = u(k) \cdot z$$

або

$$\frac{y(k)}{u(k)} = W(z) = \frac{Tz}{z - 1}.$$

Аналогічно для диференціатора:

$$y(t) = \frac{du}{dt}$$

або

$$y(k + 1) = \frac{u(k + 1) - u(k)}{T},$$

підставивши оператор z зсуву у часі t на T , отримаємо, що:

$$W(z) = \frac{z - 1}{T \cdot z}.$$

З'єднання дискретних передавальних функцій

1. *Послідовне* (рис. 15.6, а):

$$W(z) = Z\{W_1(p)\} \cdot Z\{W_2(p)\},$$

для (рис. 15.6, б):

$$W(z) = Z\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}.$$

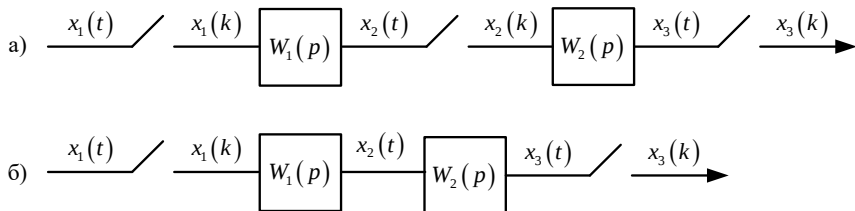


Рис. 15.6. Послідовне з'єднання

Приклад:

$$W_1(p) = \frac{1}{p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{p + a}.$$

Для з'єднання (рис. 15.6, а):

$$W_1(z) = \frac{z}{z-1}; \quad W_2(z) = \frac{z}{z-d}; \quad d = e^{aT}.$$

$$W_a(z) = W_1(z) \cdot W_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-d)}.$$

Для з'єднання (рис. 15.6, б):

$$W_6(z) = Z\{W_1(z) \cdot W_2(z)\} = \frac{(1-d)z}{a(z-1)(z-d)}.$$

Як бачимо $W_a(z) \neq W_6(z)$.

2. Паралельне з'єднання (рис. 15.7):

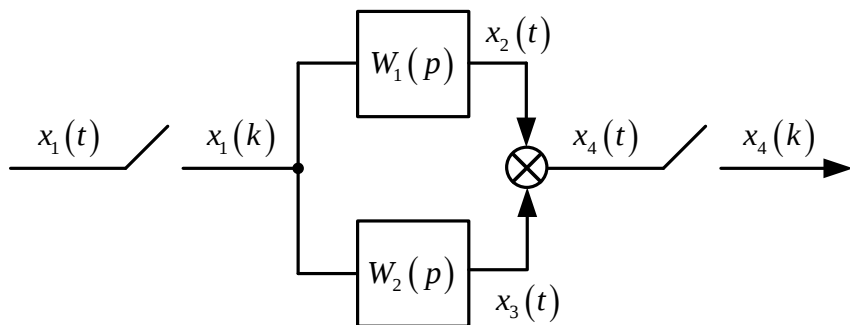


Рис. 15.7. Паралельне з'єднання

Тут:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{W_1(p) + W_2(p)\} = Z\{W_1(p)\} + Z\{W_2(p)\} \\ &= W_1(z) + W_2(z). \end{aligned}$$

3. Зустрічно-паралельне з'єднання (система зі зворотним зв'язком),
схема (рис. 15.8, а):

$$\begin{aligned} e(p) &= u(p) \pm W_2(p)y(z); \\ y(p) &= W_1(p)e(z); \\ e(z) &= Z\{u(p) \pm W_2(p)y(z)\} = u(z) \pm W_2(z)y(z); \\ y(z) &= Z\{W_1(p)l(z)\} = Z\{W_1(p)\}e(z). \end{aligned}$$

Тоді:

$$W_a(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{W_1(z)}{1 \pm W_1(z)W_2(z)},$$

де плюс – для від’ємного, мінус – для додатного зворотного зв’язку.

Схема (рис. 15.8, б):

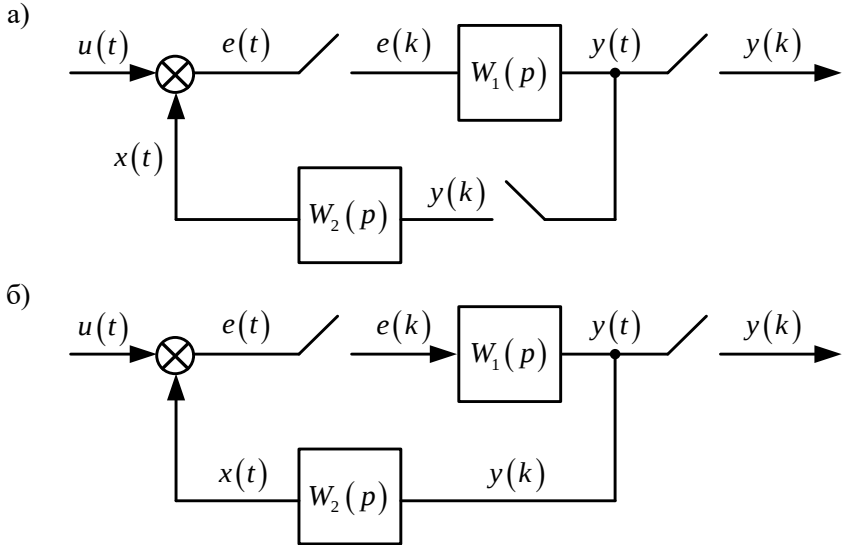


Рис.15.8. Зустрічно-паралельне з’єднання

$$e(p) = u(p) \pm W_2(p)W_1(p)e(z);$$

$$y(p) = W_1(p)e(z);$$

$$e(z) = Z\{u(p) \pm W_2(p)W_1(p)e(z)\} = u(z) \pm Z\{W_1(p)W_2(z)\}e(z);$$

$$y(z) = W_1(p)e(z);$$

$$e(z) = \frac{u(z)}{1 \pm Z\{W_1(p)W_2(z)\}}.$$

Тоді:

$$W_6(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{W_1(z)}{1 \pm Z\{W_1(p)W_2(z)\}}.$$

Як бачимо, $W_a(z) \neq W_g(z)$. Тобто, в ДСАК дискретні передаточні функції з'єднань залежить від розташування імпульсних елементів (на схемі ключі $_\ / _\$).

Фіксуючі ланки (фіксатори) в ДСАК

Математична модель ЦАП – це *фіксатор*, який перетворює решітчасту функцію в неперервну (рис. 15.9).

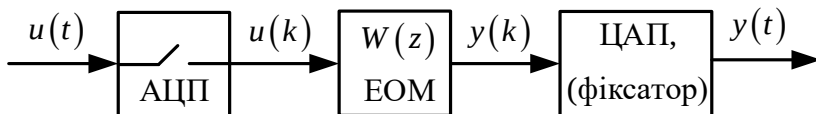


Рис. 15.9. Фіксуюча ланка

Фіксатори можуть бути нульового (ЗОН), першого (ФОН), другого (СОН) порядків та ін.

Фіксатор ЗОН фіксує величину квантового сигналу на час інтервалу T дискретності імпульсів. Його імпульсна перехідна функція:

$$w_{\text{ЗОН}}(t) = 1(t) - 1(t - T),$$

відповідно, передаточна функція:

$$W_{\text{ЗОН}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pt} = \frac{1 - e^{-pt}}{p}. \quad (15.15)$$

Передаточна функція послідовного з'єднання об'єкта $W_0(p)$ і ЗОН:

$$W_{\Sigma}(p) = W_{\text{ЗОН}}(p) \cdot W_0(p) = (1 - e^{-pt}) \cdot \frac{W_0(p)}{p},$$

його Z – перетворення:

$$W_{\Sigma}(z) = \frac{z - 1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}. \quad (15.16)$$

Фіксатор FOH – фіксує сигнал і його першу різницю на інтервалі T квантування за часом t . Його імпульсна перехідна функція:

$$w_{FOH}(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) - 2 \left[1(t - T) + \frac{t - T}{T}\right] + 1(t - 2T) + \frac{t - 2T}{T},$$

передаточна функція:

$$W_{FOH}(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Tp^2}\right) (1 - e^{-pt}), \quad (15.17)$$

Z – перетворення (15.17):

$$W_{FOH}(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 \cdot z \left\{ \frac{Tp+1}{Tp^2} W_0(p) \right\}.$$

Якщо в контурі управління є ЕОМ, яка затрачує час τ_3 на обробку інформації, то передаточна функція з'єднання ZOH – фіксатора, ЕОМ і об'єкта дорівнюватиме:

$$W_{\Sigma} = W_{ZOH}(p) \cdot W_0(p) \cdot e^{-\tau_3 p},$$

а її Z – перетворення:

$$W_{\Sigma}(z) = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{1}{p} W_0(p) \cdot e^{-\tau_3 p} \right\} = \frac{z-1}{z} z^{-d} \cdot z \left\{ \frac{1}{p} W_0(p) \right\},$$

де: $d = \frac{\tau_3}{T}$ – відносне обчислювальне запізнення.

15.6 Частотні характеристики ДСАК

Для передаточної функції ДСАК:

$$W(z) = \frac{p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_n} \quad (15.18)$$

виконаємо підстановку за формулою Ейлера:

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T = e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}, \quad (15.19)$$

де: $\bar{\omega} = \omega T$ – відносна частота,

T – період квантування.

Підставимо (15.19) у (15.18):

$$\begin{aligned} W(z) &= \\ &= \frac{p_0 (\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega})^m + p_1 (\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega})^{m-1} + \dots + p_m}{(\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega})^n + q_1 (\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega})^{n-1} + \dots + q_n}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Як витікає з виразу (15.20) АЧХ ДСАК є періодичною функцією частоти $\bar{\omega}$ (рис. 15.10) з періодом T .

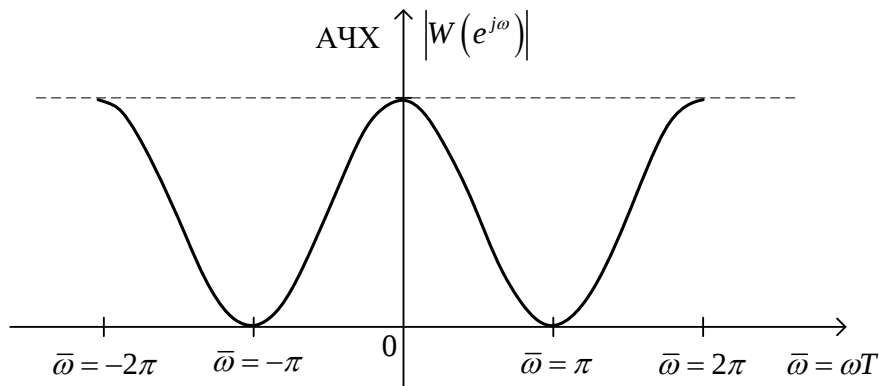


Рис. 15.10. Частотна характеристика

Враховуючи періодичність АЧХ ДСАК, можна бачити (з рис. 15.10), що реакція ДСАК на сигнали з частотами, які кратні частоті квантування, буде такою ж, як і на постійний сигнал. Ця властивість називається *стробоскопічним ефектом*. Для уникнення цього ефекту необхідно вибирати частоту квантування набагато більшу за вищу частоту в спектрі сигналу або ж штучно фільтром нижніх частот звужувати спектр сигналу, який подається в ДСАК.

За теоремою Котельникова-Шенона, для можливості відновлення сигналу $x(t)$ за його дискретами $x(kT)$ необхідно, щоб найвища частота ω_B в спектрі сигналу $x(t)$ не перевищувала половину частоти ω_{KB} квантування:

$$\omega_B \leq \frac{\omega_{KB}}{2} = \omega_H, \quad \omega_{KB} = \frac{2\pi}{T}, \quad (15.21)$$

де: ω_H – частота Найквіста.

На практиці, враховуючи, можливість дії випадкових високочастотних збурень, бажано в ДСАК включати передімпульсний фільтр (ПФ) нижніх частот (рис. 15.11):

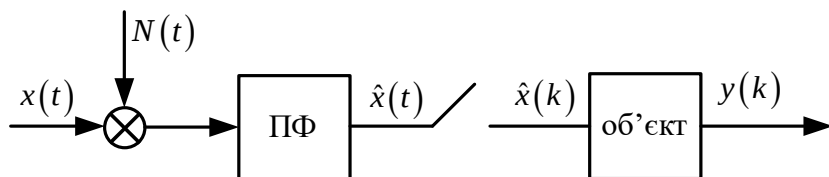


Рис.15.11. Дискретна система

Життєвий приклад. На літальних апаратах на гіроплатформі розташовані аналогові датчики кутів, швидкостей, прискорень. Платформа, внаслідок дії зовнішньої вібрації, вібує з частотою 30 Гц. Система реєстрації сигналів на бортовий магнітний накопичувач знімає дискретно у часі ці дані з частотою 32 Гц. Частота f корисного сигналу $x(t)$ 0,1 Гц. Рівень вібрацій $N(t)$ 1 В, рівень сигналу 5 В. На цифровий накопичувач поступає сигнал $x(k)$ з вібрацією, зовсім не схожий на синусоїдний (рис. 15.12).

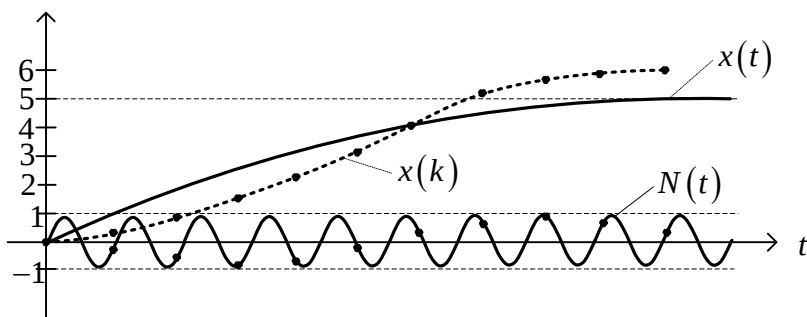


Рис. 15.12. Проблема дискретизації у часі

Якщо ж скористатися схемою (рис. 15.11) і в якості передімпульсного фільтра взяти фільтр нижніх частот з частотою пропускання меншою частоти вібрацій, то не вносячи суттєвих змін в амплітуді і фазі сигналу $x(t)$, отримаємо $x(k)$, майже співпадаючий з $x(t)$.

Логарифмічні частотні характеристики ДСАК

Для неперервної САК:

$$W(j\omega) = \ln A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega),$$

де: $A(\omega) \geq 0$.

Для дискретної САК логарифм від функції z взяти неможливо, оскільки ця функція знакозамінна, а логарифму від від'ємного числа не існує. Тому для побудови ЛАЧХ ДСАК необхідно використати білінійне перетворення: якщо

$$z = \frac{1+W}{1-W}, \text{ то } W = \frac{z-1}{z+1}. \quad (15.22)$$

Тоді на комплексній площині уявна вісь $\Im_m$ перетворюється в коло з одиничним радіусом на z – площині (рис. 15.13).

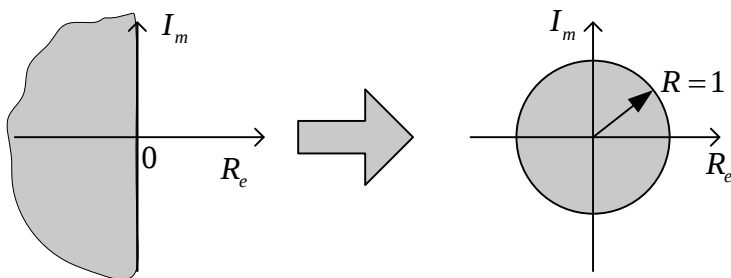


Рис. 15.13. Перехід від неперервного до дискретного представлення

З рівняння:

$$\begin{aligned} W &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \\ &= j\bar{\lambda} \quad (15.23) \end{aligned}$$

вводиться поняття відносної псевдо-частоти $\bar{\lambda}$, де частота ω і $\bar{\lambda}$ зв'язані залежністю:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \bar{\lambda}$$

або $\bar{\omega} = \omega T = 2 \operatorname{arctg} \bar{\lambda}$.

Таким чином, якщо ω змінюється від 0 до π , то $\bar{\lambda}$ – від 0 до ∞ (рис. 15.14).

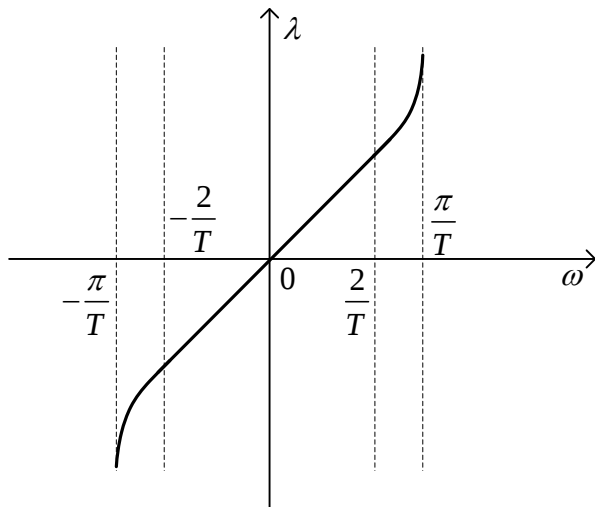


Рис. 15.14. Залежність λ від ω

Для частот в межах $\pm \frac{2}{T} \quad \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$ і $\lambda = \omega$. Тоді в розрахунках, якщо $\omega T < 2$ частоту λ можна замінити частотою ω .

Для побудови ЛАЧХ ДСАК комплексну функцію слід подати, як дробно-раціональну, яка має складовими в чисельнику і знаменнику типові прості співмножники:

$$k, j\lambda, j\lambda T + 1, T^2(j\lambda)^2 + 2\zeta T j\lambda + 1.$$

Далі будують ЛАЧХ і ФЧХ, як і для неперервних систем.

15.7 Стійкість ДСАК

15.7.1. Алгебраїчні критерії

ДСАК стійка, якщо усі корені характеристичного рівняння лежать на z – площині в колі одиничного радіусу.

Розв’язок однорідного різницевого рівняння ДСАК

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0$$

має вигляд:

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k, \quad (15.24)$$

де z_i є коренями характеристичного рівняння:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Якщо всі z_i за модулем менше одиниці, то вільний рух зі зростанням k прямує до нуля, а ДСАК стійка.

Оскільки межа стійкості дискретних і неперервних САК різні, то для того, щоб скористатися критерієм Гурвіца, необхідно спочатку виконати комфорне відображення (15.22) z в w .

За таким перетворенням утворюється поліноміальне характеристичне рівняння $D(w) = 0$.

Зоною стійкості для коренів w_i цього рівняння буде ліва напівплощина.

До рівняння $D(w) = 0$ можна застосувати всі алгебраїчні критерії стійкості неперервних САК.

Так за критерієм Гурвіца треба визначити передаточну функцію замкненої САК:

$$W_3(z) = \frac{Q(z)}{D(z)},$$

треба записати характеристичне рівняння:

$$D(z) = 0,$$

далі виконати білінійне перетворення:

$$D(w) = a_0 \frac{(1+w)^n}{(1-w)^n} + a_1 \frac{(1+w)^{n-1}}{(1-w)^{n-1}} + \dots + a_n = 0,$$

звести це рівняння до спільного знаменника і тоді отримати нове характеристичне рівняння:

$$D'(w) = a'_0 w^n + a'_1 w^{n-1} + \dots + a'_n = 0. \quad (15.25)$$

Для стійкості ДСАК необхідно і достатньо, щоб (для $a'_0 > 0$) визначник Гурвіца і всі його діагональні мінори були додатними:

$$a'_n > 0, \Delta_n > 0, \Delta_{n-1} > 0, \dots, \Delta_1 > 0.$$

Безпосередньо з характеристичного рівняння ДСАК можна визначити стійкість ДСАК *критерієм Шур — Кона*.

Характеристичне рівняння:

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (15.26)$$

Для стійкості ДСАК необхідно і достатньо, щоб у послідовності визначників Δ_k , які утворюються з (15.26) за певним законом, чергувалися знаки; якщо k непарне, то $\Delta_k < 0$, якщо k парне, то $\Delta_k > 0$.

Визначник Δ_k складають з $2k$ рядків та стовпців у вигляді:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & \dots & a_n & 0 & \dots & a_0 \\ a_0^* & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}^* & \dots & a_{n-k+1}^* \\ a_1^* & a_0^* & 0 & \dots & 0 & a_n^* & \dots & a_{n-k+2}^* \\ a_2^* & a_1^* & a_0^* & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-k+3}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}^* & a_{k-2}^* & a_{k-3}^* & \dots & a_0^* & 0 & \dots & a_n^* \end{vmatrix},$$

де: $k = 1, 2, \dots, n$; $a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*$ — коефіцієнти комплексно-спряжені коефіцієнтам $a_0, a_1, \dots, a_n$. Якщо всі a_i дійсні, та $a_i^* = a_i$.

Кількість змін знаку має дорівнюватиме порядку n характеристичного рівняння.

Приклад.

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 + a_3 = 0.$$

Визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_0 \\ a_0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 \\ a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_0 = a_3 > 0.$$

15.7.2. Частотні критерії стійкості ДСАК

Подібно до критеріїв Михайлова і Найквіста для неперервних САК введено критерії для ДСАК.

За критерієм Михайлова в характеристичне рівняння $D(z) = 0$ замкненої ДСАК слід підставити $z = e^{j\bar{\omega}}$, де:

$$\bar{\omega} = \omega T, \quad e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} D(e^{j\bar{\omega}}) &= a_0 \cos n \bar{\omega} + j a_0 \sin n \bar{\omega} + a_1 \cos(n-1) \bar{\omega} + \\ &+ j a_1 \sin(n-1) \bar{\omega} + \dots + a_{n-1} \cos \bar{\omega} + j a_{n-1} \sin \bar{\omega} + a_n = \\ &= X(\bar{\omega}) + j Y(\bar{\omega}), \end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned} X(\bar{\omega}) &= a_0 \cos n \bar{\omega} + a_1 \cos(n-1) \bar{\omega} + \dots + a_{n-1} \cos \bar{\omega} + a_n, \\ Y(\bar{\omega}) &= a_0 \sin n \bar{\omega} + a_1 \sin(n-1) \bar{\omega} + \dots + a_{n-1} \sin \bar{\omega} + a_n. \end{aligned}$$

Будуємо аналог годографа Михайлова шляхом змінювання $\bar{\omega}$ від 0 до π . ДСАК стійка, якщо годограф вектору $D(e^{j\bar{\omega}})$, при зміні $\bar{\omega}$ від 0 до π , починається для $\bar{\omega} = 0$ на додатній дійсній півосі і обходить проти годинникової стрілки послідовно $2n$ квадрантів не перетворюючись в нуль (рис. 15.15).

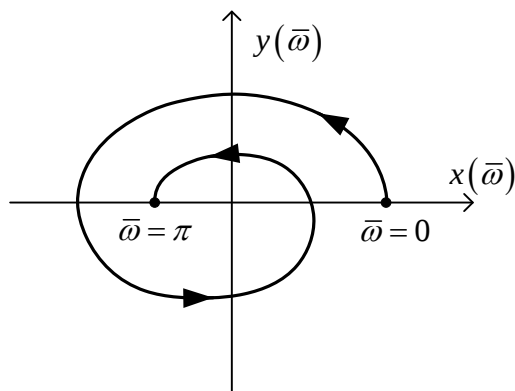


Рис. 15.15. Годограф Михайлова

Аналог критерія Найквіста для ДСАК:

- якщо ДСАК стійка у розімкненому стані або нейтральна (має корені характеристичного рівняння з одиничним модулем), то для стійкості замкненої ДСАК необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої ДСАК, при змінюванні відносної частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π , не охоплювала точку $(-1, j0)$ і не проходила через неї.

- якщо ДСАК у розімкненому стані не стійка, то для стійкості замкненої ДСАК необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої ДСАК, при змінюванні відносної частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π , охоплювала точку $(-1, j0)$ $l/2$ разів, де l – кількість нестійких коренів характеристичного рівняння розімкненої ДСАК. Корінь нестійкий, якщо його модуль більше 1.

Замкнена ДСАК для $l = 0$ буде нестійкою, якщо годограф АФЧХ розімкненої ДСАК охоплює точку $(-1, j0)$; якщо годограф проходить через цю точку, то замкнена ДСАК буде на межі стійкості.

Якщо характеристичне рівняння розімкненої ДСАК має l нестійких (за одиничним колом) і $n - l$ стійких, то замкнена ДСАК буде стійкою, якщо АФЧХ розімкненої ДСАК охоплює точку $(-1, j0)$ стільки разів, скільки коренів за межами кола одиничного радіусу,

тобто l разів при зміні частоти ω від $-(\pi/T)$ до (π/T) . Тобто вектор $W(j\omega)$ розімкненої ДСАК обернеться навколо точки $(-1, j0)$ на кут $\varphi = 2\pi l$ проти годинникової стрілки.

15.8. Метод динамічного програмування Беллмана

15.8.1. Статична варіаційна задача

Розглянемо транспортну задачу: із пункту А необхідно переїхати в пункт В по дорогам між перехрестями C_i, M_j, N_i, L_j, K_i , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3, 4$ (рис. 15.16). Кожна ділянка дороги вносить свої втрати (в паливі чи в часі). Можливий напрямок руху вказано стрілочками (вверх і вправо). Необхідно знайти оптимальну (в сенсі мінімуму втрат) траєкторію руху з п. А в п. В.

Якщо відшукувати оптимальний шлях методом перебору всіх можливих, то навіть для такого простого прикладу необхідно розглянути 25 варіантів. В реальних задачах, де маємо набагато більше перехресть, задача перебору усіх варіантів взагалі не можлива. Щоб отримати бажаний результат з мінімальною кількістю розрахунків Річардом Белманом було запропоновано і формалізовано наступну стратегію:

- з усіх перехресть ми точно будемо в перехрестях А і В;
- почнемо пошук з кінця, тобто з пункту В. Тут маємо 2 варіанти:
 - з C_1 в В втрати складають 2 одиниці;
 - з C_2 в В – 3 одиниці (помітимо їх в кружечках C_1, C_2 на рис. 15.16);
- змістимося на крок назад в пункти $M_1 \div M_3$; з M_1 і M_3 є тільки один шлях. Складемо втрати з M_1 до C_1 і з C_1 до В і запишемо їх (запам'ятовуємо) в пункті M_1 (це буде $2 + 5 = 7$);
- аналогічно в M_3 ($3 + 1 = 4$);
- з пункту M_2 є два шляхи: $M_{21}C_1$ або M_2C_2 ; M_2, C_1 втрати будуть ($1 + 2 = 3$), M_2C_2 ($2 + 3 = 5$). Отже тут одразу можна виключити

варіант з більшими втратами (на рис. 15.16 він перекреслений). Далі, діючи аалогічно, переходимо до пунктів $N_1 \div N_4$, підраховуємо втрати за відпоідних шляхів, вибираємо найменші, решту відкидаємо (перекреслюємо).

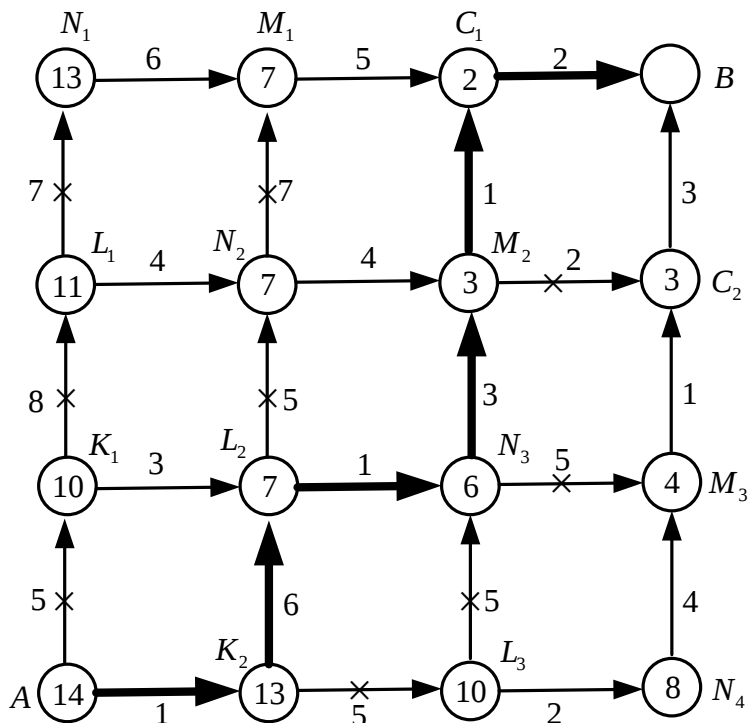


Рис. 15.16. Транспортна задача

Далі переходимо до пунктів $L_1 \div L_3$ і діємо аналогічно. Далі до K_1, K_2 . Нарешті з пункту A з двох шляхів вибираємо менший ($A_1 K_2$) відкидаємо ($A K_1$) і по не викресленим шляхам отримуємо оптимальний шлях $A \rightarrow K_2 \rightarrow L_2 \rightarrow N_3 \rightarrow M_2 \rightarrow C_1 \rightarrow B$ з мінімальними втратами ($1 + 13 = 14$). Таким чином на кожному кроці

з B в A ми отримували умовно оптимальні шляхи, а дійшовши до A , – безумовно оптимальний (жирні лінії на рис. 15.16).

Звідси витікає принцип оптимальності Р. Белмана: *будь-який відрізок оптимальної траєкторії також є оптимальним, а подальша поведінка процесу не залежить від його предисторії, тобто поведінки САК в минулому до початку керування.*

15.8.2. Дискретна динамічна задача

Сформулюємо розглянуту задачу в термінах дискретних САК:

- об'єкт керування:

$$X(k+1) = f(X(k), U(k)) + X(N), \quad (15.27)$$

де: X – вектор-функція змінних стану об'єкту $x_1(k), \dots, x_n(k)$,
 $k = \overline{1, N}$;

$U(k)$ – вектор-функція керуючих впливів $u_1(k), \dots, u_m(k)$;

- функціонал якості:

$$\mathfrak{J} = \sum_{k=0}^{N-1} G(X(k), U(k)) + \varphi(X(N)), \quad (15.28)$$

де $\varphi(X(N))$ – вказує на вагу $X(k)$ в кінцевій точці N .

Так, якщо $X(k)$ – похибка САК, то чим більша $\varphi(X(N))$, тим вона буде меншою в кінцевій точці N дискретного керування $U(k)$.

Покроковий алгоритм розрахунку.

Крок 1. Остання ділянка шляху:

$$\mathfrak{J}_{N-1} = G(X(N-1), U(N-1)) + \varphi(X(N)), \quad (15.29)$$

або, з врахуванням (15.27),

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{N-1} = G(X(N-1), U(N-1)) + f(X(N-1), U(N-1)) \\ + X(N-1)), \end{aligned}$$

тобто функціонал $\mathfrak{J}_{N-1}$ залежить від $X(N-1)$ і $U(N-1)$.

Виберемо $U(N-1)$ так, щоб $\mathfrak{J}_{N-1}$ був мінімальним. Якщо $\mathfrak{J}_{N-1}$ по $U(N-1)$ диференційований, беремо похідну від $\mathfrak{J}_{N-1}$ по $U(N-1)$, прирівнюємо її до нуля і звідси отримуємо умовно

оптимальне керування $U^*(N-1)$, як функцію $X(N-1)$.
Запам'ятовуємо $\mathfrak{Z}_{N-1}^*$ і U_{N-1}^* як функції від $X(N-1)$.

Крок 2.

$$\mathfrak{Z}_{N-2} = G(X(N-2), U(N-2)) + G(X(N-1), U(N-1)) + \varphi(X(N)) = G(X(N-2), U(N-2)) + \mathfrak{Z}_{N-1}^*(X(N-1)), \quad (15.30)$$

де $\mathfrak{Z}_{N-1}^*(X(N-1))$ вже умовно мінімізований.

Виберемо $U(N-2)$ так, щоб $\mathfrak{Z}_{N-2}$ був мінімальним.
Запам'ятовуємо $\mathfrak{Z}_{N-2}^*$ і U_{N-2}^* як функції $X(N-1)$, а значення $\mathfrak{Z}_{N-1}^*$ можна відкинути, оскільки воно увійшло в $\mathfrak{Z}_{N-2}^*$.

.....
Крок i-ий:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{N-i}^*(X(N-i)) &= \\ &= G(X(N-i), U^*(N-i) + \\ &+ \mathfrak{Z}_{N-i+1}^*(X(N-i) + f(X(N-i), U(N-i)))) \end{aligned} \quad (15.31)$$

Продовжуючи аналогічні операції, приходимо до відомої точки $X(0)$ і, перераховуючи умовно оптимальні $U^*(N-i)$, $X^*(N-i)$, $i = N, N-1, \dots, 1$, отримаємо оптимальну послідовність керуючих впливів $U^*(t)$ і траєкторію $X^*(t)$.

Для наочності розглянемо приклад.

Приклад 1. Дискретна модель об'єкта керування (інерційної ланки I порядку):

$$x(k+1) = 0,5x(k) + 0,1u(k). \quad (15.32)$$

Функціонал оптимальності САК:

$$\mathfrak{Z} = \sum_{k=0}^3 (x^2(k) + u^2(k)) + 10x^2(4). \quad (15.33)$$

Покроковий алгоритм визначення оптимальних значень $\mathfrak{Z}^*$, $x^*(k)$, $u^*(k)$.

Крок 1. Інтервал $(N-1, N) = (3, 4)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_3 &= x^2(3) + u^2(3) + 10x^2(4) = \\ &= x^2(3) + u^2(3) + 10[0,5x(3) + 0,1u(3)]^2. \end{aligned}$$

Умовно оптимальне $u^*(3)$, як функція $x(3)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_3}{\partial u(3)} = 0 = 2u^*(3) + 20[0,5x(3) + 0,1u^*(3)] \cdot 0,1.$$

Звідси:

$$u^*(3) = -\frac{1}{2,2}x(3) = -0,4545x(3),$$

умовно оптимальний функціонал:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3^* &= x^2(3) + (-0,4545)^2 x^2(3) + 10[0,5 - 0,4545]^2 x^2(3) = \\ &= 1,20867x^2(3)\end{aligned}$$

Крок 2. Інтервал $(N - 2, N - 1) = (2, 3)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= x^2(2) + u^2(2) + \mathfrak{S}_3^* = \\ &= x^2(2) + u^2(2) + 1,20867[0,5x(2) + 0,1u(2)]^2.\end{aligned}$$

Умовно оптимальне $u^*(2)$, як функція $x(2)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u(2)} = 2u^*(2) + 2,416[0,5x(2) + 0,1u^*(2)] \cdot 0,1 \equiv 0.$$

Звідси:

$$\begin{aligned}u^*(2) &= -0,0597x(2), \\ \mathfrak{S}_2^* &= x^2(2) + (-0,0597)^2 x^2(2) + \\ &+ 1,208[0,5x(2) + 0,1(-0,0597)x(2)]^2 = 1,6x^2(2).\end{aligned}$$

Крок 3. Інтервал $(N - 3, N - 2) = (1, 2)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= x^2(1) + u^2(1) + \mathfrak{S}_2^* = \\ &= x^2(1) + u^2(1) + 1,6[0,5x(1) + 0,1u(1)]^2.\end{aligned}$$

Умовно оптимальне $u^*(1)$, як функції від $x(1)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u(1)} = 0 = 2u^*(1) + 3,2[0,5x(1) + 0,1u^*(1)] \cdot 0,1.$$

Звідси:

$$\begin{aligned}u^*(1) &= -0,7877x(1), \\ \mathfrak{S}_1^* &= 1,904x^2(1).\end{aligned}$$

Крок 4. Інтервал $(N - 4, N - 3) = (0, 1)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0 &= x^2(0) + u^2(0) + \mathfrak{S}_1^* = \\ &= x^2(0) + u^2(0) + 1,904[0,5x(0) + 0,1u(0)]^2.\end{aligned}$$

Умовно оптимальне $u^*(0)$, як функція $x(0)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial u(0)} = 0 = 2u^*(0) + 3,808[0,5x(0) + 0,1u^*(0)] \cdot 0,1.$$

Звідси:

$$u^*(0) = -0,0934x(0).$$

Оптимальне значення показника якості на усьому інтервалі керування:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_0^* &= x^2(0) + (-0,934x(0))^2 + \\ &+ 1,904[0,5 - 0,0934]^2 x(0) = 2,185x^2(0). \end{aligned}$$

Нехай початкове значення $x(0)$ похибки САК складає **10** одиниць. Тоді, починаючи з початку процесу ($k = 0$), $x(0) = 10$, розраховуємо вже безумовне оптимальне керування $u^*(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$ і, відповідно до моделі (6), оптимальну траєкторію $x^*(k)$:

інтервал (0, 1):

$$\begin{cases} u^*(0) = -0,934 \cdot 10 = -9,34 \\ x^*(1) = 0,5x(0) + 0,1(-9,34) = 5 - 0,934 = 4,066. \end{cases}$$

інтервал (1, 2):

$$\begin{cases} u^*(1) = -0,7877 \cdot 4,066 = -3,203 \\ x^*(2) = 0,5x^*(1) + 0,1u^*(1) = 2,033 \cdot 0,1(-3,203) = 1,7127. \end{cases}$$

інтервал (2, 3):

$$\begin{cases} u^*(2) = -0,0597 \cdot 1,7127 = -0,1023 \\ x^*(3) = 0,5 \cdot 1,7127 + 0,1(-0,1023) = 0,84612. \end{cases}$$

інтервал (3, 4):

$$\begin{cases} u^*(3) = -0,4545 \cdot 0,84612 = -0,3846 \\ x^*(4) = 0,5 \cdot 0,84612 + 0,1(-0,3846) = 0,3846. \end{cases}$$

Графіки оптимальних керування і траєкторії.

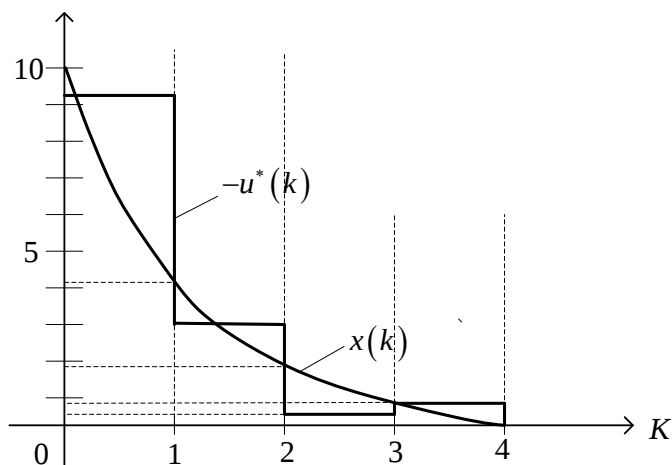


Рис. 15.17. Оптимальний процес

Чим більша вага похибки $x(N)$ в кінцевій точці (тут вага 10), тим ближче буде $x^*(N)$ до нуля.

Приклад 2. Об'єкт керування – аперіодична ланка II порядку:

$$W(p) = \frac{k}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)}$$

або

$$(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)y(p) = kU(p),$$

або

$$[\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + 1]y(p) = kU(p),$$

або

$$\ddot{y}(t) + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \dot{y}(t) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} y(t) = \frac{k}{\tau_1 \tau_2} u(t).$$

Змінні стану: $y(t) = x_1(t)$, $\dot{y} = x_2(t)$.

Рівняння у формі Коші:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} x_2 - \frac{1}{\tau_1 \tau_2} x_1 + \frac{k}{\tau_1 \tau_2} u(t) \end{aligned} \right\}.$$

Числові значення:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{3 + 0,4}{1,2} x_2 - \frac{1}{1,2} x_1 + 2,5u(t) \end{aligned} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= -0,83x_2 - 2,83x_1 + 2,5u(t). \end{aligned} \right.$$

Дискретна модель:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{\Delta t} &= x_2(k), \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{\Delta t} &= -0,83x_1(k) - 2,83x_2(k) + 2,5u(t). \end{aligned} \right.$$

Візьмемо $\Delta t = 1$ с. Тоді:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -0,83x_1(k) - 2,83x_2(k) + 2,5u(t). \end{aligned} \right.$$

Функціонал якості САК:

$$\mathfrak{J} = \sum_{k=0}^2 (x_1^2(k) + x_2^2(k) + u^2(k)) + 10 (x_1^2(3) + x_2^2(3)).$$

Покроковий алгоритм визначення оптимальних значень $\mathfrak{J}^*, X^*, U^*$.

Крок 1. Інтервал $(N-1, N) = (2, 3)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 &= x_1^2(2) + x_2^2(2) + u^2(2) + 10 (x_1^2(3) + x_2^2(3)) = \\ &= x_1^2(2) + x_2^2(2) + u^2(2) + \\ &+ 10 \left\{ (x_1(2) + x_2(2))^2 + [-0,83x_1(2) - 1,83x_2(2) + 2,5u(2)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Умовно оптимальне $u^*(2)$, як функція $x_1(2), x_2(2)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial u(2)} = 0 = 2u(2) + 10 \cdot 2[-0,83x_1(2) - 1,83x_2(2) + 2,5u(2)] \cdot 2,5$$

або

$$0 = U^*(2) + 25[-0,83x_1(2) - 1,83x_2(2) + 2,5U^*(2)],$$

$$U^*(2)[1 - 25 \cdot 2,5] + 25[-0,83x_1(2) - 1,83x_2(2)] \equiv 0,$$

звідси:

$$U^*(2) = \frac{20,75x_1(2) + 47,75x_2(2)}{-61,5} = -0,337x_1(2) - 0,776x_2(2),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_2^* &= x_1^2(2) + x_2^2(2) + (-0,337x_1(2) - 0,776x_2(2))^2 + \\ &\quad + 10\{(x_1(2) + x_2(2))^2 + \\ &\quad + [-0,83x_1(2) - 1,83x_2(2) + 2,5(-0,337x_1(2) - 0,776x_2(2))]\}^2 = \\ &= \mathfrak{I}_2^*(x_1^2(2), x_2^2(2)). \end{aligned}$$

Крок 2. Інтервал $(N - 2, N - 1) = (1, 2)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= x_1^2(1) + x_2^2(1) + u^2(1) + \mathfrak{I}_2^*(x_1^2(2), x_2^2(2)) = \\ &= x_1^2(1) + x_2^2(1) + u^2(1) + \\ &\quad + \mathfrak{I}_2^*[x_1^2(2) + x_2^2(2); -0,83x_1(1) - 1,83x_2(1) + 2,5u(1)]; \\ &\quad \frac{\partial \mathfrak{I}_1}{\partial u(1)} = 0, \end{aligned}$$

отримуємо $U^*(1)$ і $\mathfrak{I}_1^*(x_1(2), x_2(2))$.

Крок 3. Інтервал $(N - 3, N - 2) = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0 &= x_1^2(0) + x_2^2(0) + u^2(0) + \mathfrak{I}_1^*(x_1(2), x_2(2)) = \\ &= x_1^2(0) + x_2^2(0) + u^2(0) + \\ &\quad + \mathfrak{I}_1^*[(x_1(0) + x_2(2)); -0,83x_1(0) - 1,83x_2(0) + 2,5u(0)], \\ &\quad \frac{\partial \mathfrak{I}_0}{\partial u(0)} = 0. \end{aligned}$$

Звідси: $u^*(0), \mathfrak{I}_0^*(0)$.

Далі, знаючи $x_1(0)$ і $x_2(0)$, в зворотному порядку знаходимо:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= x_1(0) + x_2(0), \\ x_2(1) &= -0,83x_1(0) - 1,83x_2(0) + 2,5u^*(0), \\ x_1(2) &= x_1(1) + x_2(1), \\ x_2(2) &= -0,83x_1(1) - 1,83x_2(1) + 2,5u^*(1). \end{aligned}$$

Домашнє завдання

1. Знайти найдешевший шлях від п. А до п. М (рис. 15.18).

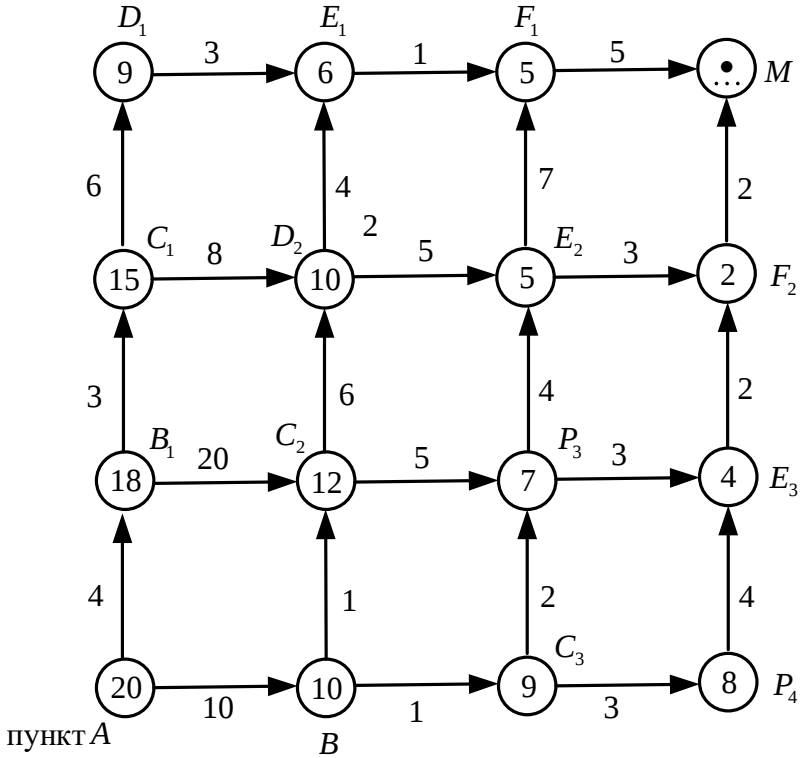


Рис. 15.18. Транспортна задача

2. Метод динамічного програмування

Для

$$W(p) = \frac{k}{(\tau_1 p_1 + 1)(\tau_2 p_2 + 1)},$$

взяти спрощену передаточну функцію

$$W(p) = \frac{k}{\tau p + 1}.$$

де: τ – більша з τ_1 і τ_2 ;

$$y(t) = x_1(t).$$

Для

$$W(p) = \frac{k}{p(\tau p + 1)},$$

взяти за $y(t)$ кутову швидкість, тоді

$$W(p) = \frac{k}{\tau p + 1}.$$

Розрахувати $U^*(k)$, $x_1^*(k)$, $\mathfrak{Z}^*(k)$, побудувати графіки, якщо x_1 – похибка САК.

15.8.3. Неперервний варіант методу динамічного програмування

Об'єкт керування:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U); \quad (15.34)$$

початкові умови $X(0) = X_0$, $U(0) = U_0$.

Функціонал оптимальності:

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\infty} G(X, U) dt; \quad (15.35)$$

мінімальне значення (15.35) позначимо, як $S(X_0)$, яке залежить від X_0 і U^* .

Припустимо, що оптимальна траєкторія $x(t)$ вже є (рис. 15.19).

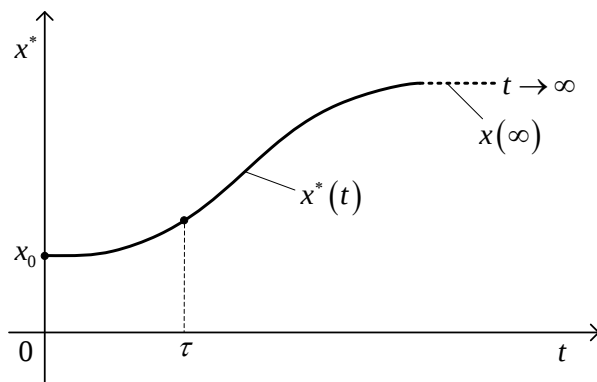


Рис. 15.19. Дві ділянки $[0, \tau]$ і $[\tau, \infty]$ оптимальної траєкторії $x^*(t)$

Згідно до *принципу оптимальності* Р.Беллмана $X(t)$ для $t \geq \tau$ не залежить від $X(t)$ для $t < \tau$, а залежить від $X(\tau)$.

Тому, якщо $X^*(t)$ для $t < \tau$ було оптимальним, то і після τ воно оптимальне. Інакше кажучи, $X^*(t)$ для $t \geq \tau$ може розглядатися, як самостійна траєкторія, де $X^*(\tau)$ її початкова умова.

Тоді, за принципом оптимальності інтеграл (15.35) можна подати сумою інтегралів:

$$S(X_0) = \min \left[\int_0^{\tau} G(X, U) dt + \int_{\tau}^{\infty} G(X, U) dt \right]. \quad (15.36)$$

Відповідно до принципу оптимальності, якщо $U(t)$ доставляє мінімум інтегралу $G(X, U)dt$, то вона буде також доставляти мінімум $\int_{\tau}^{\infty} G(X, U)dt$. Тому, враховуючи (15.36), отримаємо, що

$$S(X_0) = \min \left[\int_0^{\tau} G(X, U) dt \right] + S[X(\tau)]. \quad (15.37)$$

де: $S[X(\tau)]$ – функція початкового стану в момент $t = \tau$.

Далі, якщо вважати τ малою величиною, то

$$S[X(\tau)] = S[X_0 + \Delta X] = S[X_0 + f(X, U) \cdot \tau]. \quad (15.38)$$

Розкладаючи в ряд, наближено отримуємо:

$$S[X_0 + f(X, U) \cdot \tau] \cong S(X_0) + f(X, U) \frac{\partial S}{\partial X} \tau. \quad (15.39)$$

Тоді з (15.37), з урахуванням (15.39), отримуємо:

$$S(X_0) = \min \left[G(X_0, U_0) \tau + S(X_0) + f(X_0, U_0) \frac{\partial S}{\partial X} \tau \right]. \quad (15.40)$$

Якщо в (15.40) відняти $S(X_0)$ і скоротити на τ , то отримуємо:

$$\min \left[G(X_0, U_0) + f(X_0, U_0) \frac{\partial S}{\partial X} = 0 \right]. \quad (15.41)$$

Умова мінімуму (15.41) по U_0 :

$$\frac{\partial G(X_0, U_0)}{\partial U_0} + \frac{\partial f(X_0, U_0)}{\partial U_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} = 0. \quad (15.42)$$

Згідно до принципу оптимальності початкової умови X_0, U_0 можна замінити на поточні координати X, U . Тоді маємо:

$$\left. \begin{aligned} G(X, U) + f(X, U) \cdot \frac{\partial S}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial G(X, U)}{\partial U} + \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad (15.43)$$

або, виключивши з (15.43) $(\partial S / \partial X)$, отримаємо рівняння без часткових похідних $(\partial S / \partial X)$:

$$f(X, U) \cdot \frac{\partial G(X, U)}{\partial U} = G(X, U) \cdot \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \cdot \frac{\partial S}{\partial X}. \quad (15.44)$$

P.S. Метод працює, якщо об'єкт можна подати системою (15.34), і якщо існує похідна $(\partial S / \partial X)$.

Приклад 1. Рівняння (15.34) об'єкта керування:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t).$$

Необхідно перевести об'єкт з початкового стану $x(0) = x_0$ для $t = 0$ в кінцеве положення $x(\infty) = 0$, коли $t \rightarrow \infty$. При цьому мати мінімум функціоналу (15.35):

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty G(x, u) dt = \int_0^\infty (x_1^2 + cu^2) dt.$$

Запишемо рівняння (15.43):

$$\left. \begin{aligned} G(x, u) + f(x, u) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Або для нашого об'єкта і функціонала:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + cu^2 + (ax + bu) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ 2cu + b \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З другого рівняння

$$u = -\frac{b}{2c} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

підставимо в перше:

$$x^2 + ax \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{b^2}{4c} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (15.45)$$

Маємо нелінійне диференціальне рівняння в часткових похідних. Рішення його відшукується у вигляді квадратичної форми;

$$S = Ax^2.$$

Щоб визначити A візьмемо похідну:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2Ax$$

і підставимо її в рівняння (15.45):

$$x^2 + 2aAx^2 - \frac{b^2}{c}A^2x^2 = 0$$

або

$$1 + 2aA - \frac{b^2}{c}A^2 = 0, \text{ бо } x(t) \neq 0.$$

Тоді

$$A_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{c}}}{-\frac{b^2}{c}}.$$

Для квадратичної форми слід взяти $A > 0$:

$$A = \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{c}}}{b}.$$

Відповідно, оптимальне керування набуває вигляду:

$$u^*(x(t)) = \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{c}}}{b} \cdot x(t).$$

Для інтеграла (15.35) в межах від 0 до ∞ коефіцієнт оптимального П – регулятора буде постійним.

Приклад 2. Рівняння електродвигуна, як інерційної інтегруючої ланки:

$$\tau \frac{d^2 x}{dt^2} = ku, \quad (15.46)$$

де: x – кут обертання валу; τ – стала часу.

Необхідно перевести об'єкт з початкового стану $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ в кінцевий $x = x(T)$, $\frac{dx}{dt} = 0$ за мінімальний час.

$$\mathfrak{I}_1 = T = \int_0^T dt \rightarrow \min, \quad (15.47)$$

за умови, що

$$\mathfrak{I}_2 = \int_0^T x(t) dt = x(T) \quad (15.48)$$

і що

$$\mathfrak{I}_3 = \int_0^T k_2 U^2 dt = Q \leq Q_0. \quad (15.49)$$

Рівняння (15.46) у формі Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_1(t); \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{I}_1}{dt} = \frac{k}{\tau} u(t) = k_1 U(t) = f_1; \\ \frac{d\mathfrak{I}_2}{dt} = -x_1 = f_2; \\ \frac{d\mathfrak{I}_3}{dt} = k_2 u^2(t) = f_3. \end{cases} \quad (15.50)$$

Рівняння Беллмана для критерію (15.47) оптимальності за швидкодією:

$$\left. \begin{aligned} G + \sum_{i=1}^3 f_i(X, U) \frac{\partial S}{\partial x_i} &= 0; \\ \frac{dG}{du} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i(X, U)}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i} &= 0; \end{aligned} \right\}, \quad (15.51)$$

або, з урахуванням (15.50):

$$\left. \begin{aligned} 1 + k_1 u \frac{\partial S}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} + k_2 u^2 \frac{\partial S}{\partial x_3} &= 0; \\ k_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + 2k_2 u \frac{\partial S}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

Звідси:

$$u(t) = -\frac{k_1}{2k_2} \frac{\frac{\partial S}{\partial x_1}}{\frac{\partial S}{\partial x_3}}. \quad (15.53)$$

Підставимо (15.53) в перше рівняння (15.52):

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} = \frac{k_1^2}{4k_2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2. \quad (15.54)$$

Рішення (15.54) відшуковують у вигляді:

$$S = (1 + a_1 x_1)^{3/2} + a_2 x_2 + a_3 x_3. \quad (15.55)$$

Похідні від (15.55) по x_1 , x_2 , x_3 :

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{3}{2} a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1}; \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = a_2; \quad \frac{\partial S}{\partial x_3} = a_3. \quad (15.56)$$

Підставивши (15.56) в (15.54), отримаємо:

$$a_3 - x_1 a_2 a_3 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^2 + \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^3 x_1. \quad (15.57)$$

Один з коефіцієнтів можна задати довільно: нехай $a_3 = 1$; тоді з (15.57) отримаємо:

$$-a_2 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^3; \quad 1 = \frac{9k_1^2}{16k_2} a_1^2$$

або

$$a_1 = \frac{4}{3k_1} \sqrt{k_2}; \quad a_2 = -\frac{4}{3k_1} \sqrt{k_2}. \quad (15.58)$$

Підставивши (15.58) в друге рівняння системи (15.52), отримуємо оптимальне керування:

$$\begin{aligned} u^*(t) = u^*(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{k_2}} \sqrt{1 + \frac{4}{3k_1} \sqrt{k_2} x_1(t)} = \\ &= -c_1 \sqrt{1 + c_2 x_1(t)}, \end{aligned} \quad (15.59)$$

де:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2}}; \quad c_2 = \frac{4}{3k_1} c_1^{-1}.$$

Отже, оптимальне керування u^* буде не лінійною функцією похибки $x_1(t)$ замкненої САК.

Для розрахунку більш складних САК доцільно користуватися дискретним методом динамічного програмування Беллмана, переводячи диференційні рівняння в еквівалентні різниці (розділ 15.8.2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Теорія автоматичного керування: класика і сучасність: підр. / Н.Б. Репнікова. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 328 с.
2. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування / Підр., К.: Либідь, 2007. – 656 с.
3. Островерхов М.Я., Сільвестров А.М., Зеленський К.Х. Методи дослідження електротехнічних систем і комплексів. – К.: ТАЛКОМ, 2019. – 300 с.
4. Павленко Т.П. Автоматизований електропривод загально-промислових механізмів. Конспект лекцій (для студентів усіх форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка) / Т. П. Павленко, О. В. Донець, О. М. Петренко; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 132 с.
5. Марченко, А. А. Теорія автоматичного керування. Дослідження системи автоматичного регулювання. Курсова робота [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», спеціалізації «Системи управління виробництвом і розподілом електроенергії» / А. А. Марченко, В. С. Гулий, Д. В. Настенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 31 с.
6. Теорія автоматичного управління: Підручник / За ред. Г.Ф. Зайцева. – К.: Техніка, 2002. — 668 с.
7. Бахрушин В.Є. Теорія керування : навч. посіб. / В.Є. Бахрушин, Т.Ю. Огаренко. – Запоріжжя : КПУ, 2014. – 224 с.
8. Л.М. Артюшин, О.А. Машков, Б.В. Дурняк, М.С. Сівов. Теорія автоматичного керування. – Львів: Видавництво УАД, 2004.
9. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: Курс лекцій для студентів напряму 0925 “Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології ден. та заочн. форм навчання – (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. – 200 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ	5
1.1. Актуальність курсу ТАК.....	5
1.2. Короткий історичний огляд	5
1.3. Три підходи до створення САК.....	6
1.4. Основні поняття і терміни	7
1.5. Принципи регулювання	9
1.6. Поділення САК за призначенням.....	15
1.7. . Поділення САК за похибкою в усталеному режимі	17
1.8. Класифікація регуляторів.....	20
2 МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС САК	24
2.1. Динамічна ланка (ДЛ) як елемент САК.....	24
2.1.1. Статика.....	24
2.1.2 Лінеаризація.....	24
2.1.3. Приведення до стандартного вигляду	26
2.2. Побудова рівняння динаміки САК.....	29
2.2.1. Опис елементів схеми	29
2.2.2. Диференційне рівняння системи.....	32
3 ПЕРЕДАТОЧНА ФУНКЦІЯ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ.....	35
3.1. Пряме перетворення Лапласа	35
3.1.1. Зображення функції Хевісайта.....	35
3.1.2. Зображення похідної df/dt :	35

3.1.3. Зображення другої похідної	35
3.1.4. Зображення $\sin x$	36
3.1.5. Теорема подібності	36
3.1.6. Зображення t^n	36
3.1.7. Зображення інтеграла	37
3.1.8. Деякі інші перетворення Лапласа	37
3.2. Зворотне перетворення Лапласа	39
3.2.1. Перша теорема розкладання.....	39
3.2.2. Друга теорема Лапласа	40
3.3. Передаточна функція системи	42
4 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	
ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ.....	46
4.1 Амплітудо-фазо-частотні характеристики	46
4.2. Логарифмічна амплітудо-фазо-частотна характеристика	50
5 ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	64
5.1. Перехідна функція $h(t)$	64
5.2. Імпульсна перехідна функція.....	66
5.3. Зв'язок між вихідною величиною $x(t)$, вхідною $x_s(t)$ і функціями $h(t)$ і $w(t)$	68
6 ТИПОВІ ЛАНКИ САК	77
6.1 Безінерційна ланка.....	77
6.1.1 Часові характеристики.....	77
6.1.2. Передаточна функція	78

6.1.3.Частотні характеристики	78
6.2 Інерційна ланка I порядку	79
6.2.1 Типова інерційна ланка I порядку та її характеристики	82
6.2.2. Ідеальна інтегруюча ланка	91
6.2.3 Ідеальна диференціальна ланка	94
6.2.4 Реальна диференціююча ланка	96
6.2.5. Не стійка аперіодична ланка I порядку	103
6.3. Ланки II порядку	108
6.3.1 Двигун постійного струму, як ланка II порядку в системі широтно-імпульсного керування його швидкістю Ω	108
6.3.2. Аперіодична ланка II порядку.....	114
6.3.3 Коливальна ланка II порядку	121
6.3.4 Передаточна функція і частотні характеристики ланки II порядку	124
6.3.5 Консервативна ланка II порядку	129
6.3.6 Ланка II порядку, що має астатизм I порядку.....	133
7 СТРУКТУРНІ СХЕМИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	141
7.1 Послідовне з'єднання ланок	141
7.2 Паралельне з'єднання ланок.....	141
7.3 Зустрічно-паралельне з'єднання.....	142
7.4 Системи з перехресними зв'язками	143
7.4.1 Визначення $W_e(p)$ шляхом виключення з системи рівнянь проміжних змінних.....	144
7.4.2 Метод структурних (тотожних) перетворень	144

7.5 Використання формули Мейсона для визначення еквівалентної передаточної функції системи	147
7.6. Дослідження впливу зворотного зв'язку на динамічні властивості системи	153
7.6.1 Дослідження безінерційної ланки $y(t) = kx(t)$	153
7.6.2 Дослідження інерційної ланки I порядку	155
7.6.3. Дослідження інтегруючої ланки	163
7.6.4 Дослідження диференціюючої ланки	165
7.6.5 Дослідження нестійкої ланки I порядку	168
7.7 Частотні характеристики послідовно з'єднаних ланок САК	171
8 ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ САК.....	181
8.1. Загальні положення	181
8.2. Спрощені показники стійкості САК.....	187
8.2.1. Алгебраїчний критерій стійкості САК Рауса (1877 р.)	187
8.2.2 Алгебраїчний критерій стійкості САК Гурвіца (1895 р.)	189
8.3 Частотні критерії стійкості.....	198
8.3.1 Критерій Михайлова	198
8.3.2 Наслідок критерію Михайлова	206
8.4 Частотний критерій Найквіста.....	211
8.5 Дослідження стійкості за зворотною АФЧХ САК	222
8.6 Визначення стійкості САК за амплітудо-частотною (АЧХ) і фазочастотною (ФЧХ) характеристиками розімкненої частини САК	224
8.7. Визначення стійкості за діаграмою Бode	226
8.8 Рідкісний випадок, за якого критерій Найквіста дає не правильний висновок	227

8.9 Дослідження стійкості САК, які мають ланки з чистим запізненням.....	228
9 ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ САК В ПРОСТОРІ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ	240
9.1 Метод D-розбиття	240
9.2 D-розбиття на комплексній площині в функції одного параметра.	241
9.3 D-розбиття на комплексній площині в функції двох параметрів... ..	248
9.3.1 Загальні положення.....	248
9.3.2 Гіпербола Вишнеградського	252
9.4 Дослідження впливу коефіцієнтів ПІД-регулятора на стійкість САК приводом робота.....	255
10 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ САК	261
10.1 Якість САК в усталеному режимі.....	261
10.1.1 Оцінка похибки ε_{∞} за вхідним впливом	261
10.1.2 Оцінювання усталеної похибки по збуренню САК	269
10.1.3 Оцінювання усталеної похибки САК під дією періодичного вхідного впливу.....	275
10.2 Прямі показники якості перехідних процесів у САК	282
10.3 Непрямі показники якості САК	285
10.3.1 Діаграма Вишнеградського	285
11 НЕПРЯМІ (КОРЕНЕВІ) ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ САК	289
11.1 Ступінь стійкості	289
11.1.1. Частотні показники якості.....	296
11.1.2. Інтегральні критерії якості	300
11.1.3. Методи підвищення якості САК.....	304

11.1.4. Компенсація збурюючих впливів в САК. Інваріантність	308
12 СИНТЕЗ КОРЕГУВАЛЬНИХ ЛАНОК САК У ВИПАДКУ ОДИНИЧНОГО СТУПІНЧАСТОГО ВХІДНОГО ВПЛИВУ	312
12.1 Оптимальна передаточна функція.....	312
12.2 Побудова бажаної ЛАЧХ	316
12.3 Синтез коригувальних пристроїв.....	319
12.3.1 Синтез послідовного коригувального пристрою (ланки)	319
12.3.2 Синтез паралельного коригувального пристрою (ланки).....	320
12.4 Приклад корекції динаміки об'єкта (консервативна ланка)	321
12.4.1 Об'єкт управління – консервативна ланка:.....	321
12.4.2 Побудова бажаної ЛАФЧХ.....	323
12.5 Приклад з використання моделювання в середовищі MATLAB	328
12.6 Налаштовування САК за часовими характеристиками.....	333
13 НЕЛІНІЙНІ САК.....	336
13.1 Статика нелінійних САК (НСАК)	336
13.1.1 Типові нелінійні ланки (кусково-лінійна апроксимація).....	336
13.1.2 Типи з'єднань нелінійних ланок	338
13.1.3 Деякі структурні перетворення нелінійних систем.....	340
13.2. Аналіз нелінійних САК на фазовій площині	343
13.2.1. Поведінка НСАК за малих відхилень від точки рівноваги.....	343
13.2.2. Поведінка НСАК за великих відхилень від точки рівноваги	348
14 МЕТОД МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ	368
14.1 Графічне подання САК, представлених змінними стану.....	368

14.1.1 Скалярні структурні схеми.....	368
14.1.2. Векторні структурні схеми.....	369
14.1.3. Неоднозначність переходу від передаточної функції до рівнянь у змінних стану.....	372
14.1.4. Поняття керованості і спостережуваності об'єкта керування.....	382
14.1.5. Розміщення полюсів за допомогою зворотних зв'язків за змінними стану.....	389
15 ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	416
15.1 Загальні положення	416
15.2 Модуляція в ДСАК.....	418
15.3 Зв'язок Z -перетворення з $\mathcal{L}$ -перетворенням Лапласа.....	421
15.4 Властивості Z -перетворення.....	423
15.5 Опис ДСАК різними рівняннями.....	425
15.6 Частотні характеристики ДСАК.....	432
15.7 Стійкість ДСАК	437
15.7.1. Алгебраїчні критерії.....	437
15.7.2. Частотні критерії стійкості ДСАК.....	439
15.8. Метод динамічного програмування Беллмана	441
15.8.1. Статична варіаційна задача	441
15.8.2. Дискретна динамічна задача	443
15.8.3. Неперервний варіант методу динамічного програмування.....	452
ЛІТЕРАТУРА.....	459
ЗМІСТ	460