

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

І.А. Костюшко, Н.Д. Любашенко, В.В. Третиник

Методи обчислень

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

І.А. Костюшко, Н.Д. Любашенко, В.В. Третиник

Методи обчислень

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів, які навчаються
за спеціальністю «Прикладна математика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 519.6 (075.8)
К72

*Затверджено Вченою радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(Протокол № 6 від 29.06. 2021 р.)*

Рецензенти: *Ю.М. Базилевич*, д. ф.-м. н., професор Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, м. Дніпро

О.Є. Пакриш, к.т.н, доцент кафедри інформаційних технологій та кібербезпеки ННІШ №1 НАВС, м. Київ

О.В. Склярєнко, к. ф.-м. наук, доцент,
ПВНЗ «Європейський університет», м. Київ

Відповідальний редактор *С.В. Сирота*, к. т. н., доцент,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Костюшко І.А.

К72 Методи обчислень : підручник / І. А. Костюшко, Н. Д. Любашенко, В. В. Третиник. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. – 243 с. – Бібліогр. : с. 241–242.

Підручник призначений для використання студентами ЗВО зі спеціальності 113 «Прикладна математика». Складається з восьми розділів, у відповідності з навчальним планом дисципліни «Методи обчислень». В кожному розділі подається теоретичне обґрунтування відповідних обчислювальних методів, надаються робочі формули, способи оцінювання похибок, а також наводяться алгоритми програмної реалізації. У кінці кожного розділу містяться контрольні питання, тестові завдання, матеріали для практичних та лабораторних робіт. Викладений матеріал відповідає діючим стандартам та навчальній програмі з дисципліни «Методи обчислень».

The textbook is intended for use by students of the speciality 113 "Applied Mathematics". It consists of eight sections, according to the curriculum of the discipline "Numerical methods". In each section the theoretical substantiation of the corresponding computational methods is given, working formulas, methods of errors estimation are given, and also algorithms of software realization. At the end of each section there are control questions, test tasks, materials for practical and laboratory work. The presented material meets the modern standards and the curriculum on the discipline "Numerical methods".

УДК 519.6 (075.8)

© І.А. Костюшко, Н.Д. Любашенко, В.В. Третиник, 2021
© КПП ім. Ігоря Сікорського, (ФПМ) 2021

ЗМІСТ

Передмова.....	6
Розділ 1. Елементи теорії похибок.....	8
1.1. Основні поняття теорії похибок.....	8
1.2. Оцінка похибки результату арифметичних дій.....	16
Контрольні запитання	25
Тестові завдання	25
Індивідуальна робота 1.....	27
Розділ 2. Чисельне розв’язання нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.....	43
2.1. Загальні положення.....	43
2.2. Метод ділення відрізка навпіл	45
2.3. Метод Ньютона	46
2.4. Метод хорд	50
2.5. Метод простої ітерації.....	54
Контрольні запитання	57
Тестові завдання	57
Індивідуальна робота 2.....	59
Розділ 3. Прямі методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	61
3.1. Метод Гаусса	61
3.2. Метод головних елементів.....	70
3.3. Обчислення визначників.....	72
3.4. Обчислення оберненої матриці	74
3.5. Уточнення елементів оберненої матриці.....	77
3.6. Метод обертання	81
3.7. Метод прогонки.....	85
3.8. Методи факторизації	88
3.8.1. Метод квадратних коренів.....	89
3.8.2. Схема Холецкого.....	93
Контрольні запитання	101
Тестові завдання.....	101

	Індивідуальна робота 3.....	102
Розділ 4.	Ітераційні методи розв’язання систем лінійних та нелінійних рівнянь.....	111
4.1.	Метод ітерації розв’язку СЛАР.....	111
4.2.	Метод Зейделя.....	116
4.3.	Розв’язання нелінійних систем.....	120
	Контрольні запитання	123
	Тестові завдання.....	124
	Індивідуальна робота 4.....	124
Розділ 5.	Інтерполяційні поліноми.....	132
5.1.	Постановка задачі інтерполяції.....	132
5.2.	Інтерполяційний багаточлен Лагранжа.....	133
5.3.	Інтерполяційна схема Ейткена.....	138
5.4.	Інтерполяційні формули Ньютона.....	144
5.4.1.	Кінцеві різниці різних порядків.....	144
5.4.2.	Перша інтерполяційна формула Ньютона (випадок сталого кроку інтерполяції).....	147
5.4.3.	Друга інтерполяційна формула Ньютона (випадок сталого кроку інтерполяції).....	151
5.4.4.	Поняття розділених різниць. Інтерполяційні формули Ньютона у випадку довільного кроку інтерполяції	155
5.5.	Багаточлени Чебишова.....	159
	Контрольні запитання.....	163
	Тестові завдання.....	163
	Індивідуальна робота 5.....	164
Розділ 6.	Інтерполяція сплайнами.....	167
6.1.	Поняття сплайна.....	167
6.2.	Перший спосіб побудови кубічного сплайна.....	169
6.3.	Другий спосіб побудови кубічного сплайна.....	177
	Контрольні запитання	181
	Тестові завдання.....	181
	Індивідуальна робота 6.....	182

Розділ 7. Чисельне інтегрування.....	184
7.1. Загальні положення.....	184
7.2. Інтерполяційні квадратурні формули.....	186
7.3. Формули Ньютона – Котеса.....	190
7.3.1. Формули прямокутників.....	190
7.3.2. Формула трапецій.....	195
7.3.3. Формула Сімпсона.....	196
7.4. Правило Рунге.....	198
7.5. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного ступеня точності. Формула Гаусса.....	201
7.6. Застосування поліномів Лежандра та Чебишова для чисельного інтегрування.....	204
Контрольні запитання.....	213
Тестові завдання.....	214
Індивідуальна робота 7.....	216
Розділ 8. Наближене розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.....	218
8.1. Однокрокові методи.....	218
8.1.1. Методи Ейлера.....	218
8.1.2. Методи Рунге–Кутта	221
8.2. Багатокрокові методи.....	225
8.3. Розв’язок задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.....	228
Контрольні запитання.....	233
Тестові завдання.....	234
Індивідуальна робота 8.....	235
Бібліографічний список.....	241

ПЕРЕДМОВА

Обчислення супроводжують наше життя: вони використовуються в побуті, в науці, в навчанні. Іноді проводити обчислення легко. Настільки легко, що людина може зробити це самостійно, не користуючись допоміжними засобами. Складніші обчислення можна виконати за допомогою папірця і ручки, калькулятора. Нарешті, будь-які, в тому числі найскладніші, обчислення беруть на себе комп'ютери.

Складність обчислень розуміється так: це або потреба виконати величезний обсяг розрахунків, або потреба створити таку математичну модель, яка б дозволила обчислити ту чи іншу величину, або потреба спростити існуючу модель до такого рівня, який дозволив би провести необхідні обчислення, або все разом.

На практиці, наприклад, при виконанні моделювання, розповсюдженою є ситуація, коли важко або взагалі неможливо отримати точний аналітичний розв'язок поставленої задачі. Студенти можуть згадати приклади задач, коли важко давалося обчислення похідної функції, або взяття інтегралу, або розв'язання систем диференціальних рівнянь, систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Якщо аналітичні методи не спрацьовують, тоді можна долучити інші підходи, зокрема наближені та чисельні методи.

Ідея чисельних методів полягає в тому, що можна спробувати звести дану задачу до іншої задачі. Ця нова задача має розв'язок, який гарантовано з заданою точністю співпадає з аналітичним розв'язком.

Характерна особливість чисельних методів криється в самій назві цього розділу математики. Методи обчислень, чисельний аналіз, чисельні методи – в усіх варіантах є слово “число”. Ці методи отримують на вході числа, потім обробляють їх за певними робочими формулами і надають результат у числовій формі.

Важливими складовими чисельних методів є алгоритми обчислень та точність результату. Як правило, алгоритми зводяться до послідовності арифметичних дій, тому легко програмуються. Точність результату оцінюється і надається разом з основним результатом.

Сучасні обчислювальні комплекси дозволяють розв'язувати практично будь-яку задачу. Найефективніші методи обчислень додалися до програмного забезпечення, яке, зокрема, є наповненням потужних математичних пакетів, наприклад, MatLab, Mathematica, Maple, інші. Існують бібліотеки чисельних методів майже для всіх популярних мов програмування.

Теоретичним фундаментом методів обчислень є розділи математики, зокрема математичний аналіз, теорія диференціальних рівнянь, лінійна алгебра.

Метою вивчення дисципліни “Методи обчислень” є оволодіння теорією проведення обчислень, отримання практичних навичок в розробці алгоритмів обчислень.

Підручник пропонується для вивчення курсу «Методи обчислень» студентам третього курсу денної форми навчання спеціальності «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр». Він містить 8 розділів, визначених навчальним планом дисципліни. В кожній темі наводиться розв'язання типових прикладів, наприкінці розділу – перелік контрольних запитань та тестів (із відповідями). Для кращого засвоєння наведеного теоретичного матеріалу студентам пропонується виконати індивідуальну роботу.

РОЗДІЛ 1.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Під час розв’язування прикладних задач важливо мати уяву про точність одержаних результатів. Похибки, які виникають у таких результатах, зумовлені наступними причинами:

- математичний опис задачі є неточним;
- для розв’язування задачі використовують наближені методи;
- при вводі/виводі даних, під час виконання арифметичних операцій здійснюється округлення.

Похибки, викликані цими причинами, називають, відповідно:

- неусунена похибка;
- похибка методу;
- похибка обчислень.

Неусунену похибку часто класифікують як:

- а) неусунену похибку обчислень, що є наслідком неточності задання параметрів математичної моделі задачі;*
- б) похибку математичного моделювання, що є наслідком заміни реальної задачі її математичною моделлю.*

Розглянемо, наприклад, вільний рух пружинного маятника маси m , що описується другим законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (1.1)$$

де k - жорсткість пружини; $x(t)$ - закон зміщення x з часом t .

Причинами вільних коливань пружинного маятника, які описуються рівнянням (1.1), є інертність тіла та дія сили пружності $F = -kx$, яку за припущенням ми вважаємо лінійною функцією від x , тобто виникає неусунена похибка (похибка математичного моделювання). Іншим джерелом похибки

(неусунена похибка обчислення) є неточність визначення параметрів моделі m та k . Якщо задачу (1.1) розв'язати наближеними методами, то виникне *похибка методу*. Похибка обчислення може виникнути під час *округлення* розв'язків задачі.

Наведемо основні визначення.

Нехай a - *точне* значення деякої величини, a^* - *наближене* значення цієї величини.

Якщо $a^* < a$, то кажуть що число a^* є наближеним значенням числа a з *недостачею*, якщо $a^* > a$, то з *надлишком*.

Різниця між точним та наближеним значенням числа називається *похибкою*. Зазвичай знак похибки визначити важко, тому користуються поняттям *абсолютної похибки* Δ , яке визначають як модуль різниці між точним та наближеним значенням числа:

$$\Delta = |a - a^*|. \quad (1.2)$$

Абсолютну похибку числа a позначають ще Δa .

Оскільки точне значення числа a зазвичай невідоме, користуються поняттям *граничної похибки*, що належить до поняття верхньої границі абсолютної похибки. *Гранична похибка* (позначається як Δ_a) – число (зазвичай найменше), що не менше за Δa , тобто

$$|a - a^*| = \Delta a \leq \Delta_a. \quad (1.3)$$

Приклад 1.1

В результаті деякого вимірювання одержали наближене значення довжини $l = 3,56$ см. З точністю до одиниці останнього знаку можна вважати, що гранична абсолютна похибка становить $\Delta_l = 0,01$ см. Для округленого з надлишком значення довжини $l = 3,6$ см гранична абсолютна похибка дорівнює $\Delta_l = \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,05$ см •

Наведені поняття похибки, абсолютної похибки, граничної похибки не дозволяють отримати уявлення про точність вимірювань чи розрахунків. Наприклад, при вимірюванні двох стрижнів отримано наступні результати:

$l_1 = 2000,2 \pm 0,1$ (см); $l_2 = 2,2 \pm 0,1$ (см). Для двох вимірювань абсолютна похибка результатів вимірювань однакова: $\Delta = 0,1$ (см). Проте, вочевидь, якість першого вимірювання вища аніж другого.

Для отримання якісної оцінки вимірювання (обчислення) вводять поняття відносної похибки.

Відносна похибка δ наближеного значення величини визначається як відношення абсолютної похибки до модуля точного або наближеного значення (якщо a та a^* не дорівнюють нулю), тобто:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \text{ або } \delta = \frac{\Delta}{|a^*|}. \quad (1.4)$$

Граничною відотною похибкою називають величину δ_a , що є верхньою границею відотної похибки:

$$\delta_a \geq \delta = \frac{\Delta}{|a|} \text{ або } \delta_a \geq \delta = \frac{\Delta}{|a^*|}. \quad (1.5)$$

Відносну похибку часто подають у відсотках.

Приклад 1.2

Нехай відома точна вага студента Васечкіна $a = 68$ кг. В результаті вимірювання ваги того ж Васечкіна після відвідування кафе одержано значення $a^* = 70$ кг. Абсолютна похибка згідно (1.2) складає: $|\Delta| = |68 - 70| = 2$ кг.

Значення відотної похибки знайдемо за формулою (1.4): $\delta = \frac{2}{70} = 0,029$.

За граничну відносну похибку можна вибрати значення $\delta_a = 0,03$ або $\delta_a = 3\%$ ●

Взагалі інформацію про те, що a^* є наближеним значенням числа a з граничними абсолютною (Δ) та відотною (δ) похибками записують у вигляді:

$$\begin{aligned} a = a^* \pm \Delta &\Leftrightarrow a^* - \Delta \leq a \leq a^* + \Delta; \\ a = a^* (1 \pm \delta) &\Leftrightarrow a^* (1 - \delta) \leq a \leq a^* (1 + \delta). \end{aligned}$$

Приклад 1.3

Нехай точна вага студента Васечкіна a невідома, але контрольне вимірювання його ваги склало $a^* = 68$ кг. Вважаючи, що гранична абсолютна похибка дорівнює $\Delta = 0,5$ кг, знайдемо відносну похибку:

$$\delta = \frac{\Delta}{a^*} = \frac{0,5}{68} \approx 0,0074 \Leftrightarrow \delta \approx 0,74 \%.$$

Тоді точна вага Васечкіна a , коливається в межах:

$$\begin{aligned} 68 - 0,5 &\leq a \leq 68 + 0,5; \\ 68 \cdot (1 - 0,0074) &\leq a \leq 68 \cdot (1 + 0,0074). \end{aligned}$$

Тобто, $67,5 \leq a \leq 68,5$ •

Приклад 1.4

Визначити, яка рівність точніша: $15/18 = 0,833$ чи $\sqrt{29} = 5,39$?

Розв'язання

Знайдемо значення даних виразів з більшою кількістю десяткових знаків:

$$15/18 = 0,83333; \quad \sqrt{29} = 5,38516.$$

Обчислимо граничні абсолютні похибки:

$$\Delta_1 = |0,83333 - 0,833| \leq 0,00033, \quad \Delta_2 = |5,38516 - 5,39| \leq 0,00484.$$

Граничні відносні похибки складають:

$$\delta_1 = \frac{0,00033}{0,833} = 0,0004 (0,04 \%), \quad \delta_2 = \frac{0,00484}{5,39} = 0,0009 (0,09 \%).$$

Оскільки $\delta_1 < \delta_2$, то рівність $15/18 = 0,833$ є більш точною •

При оперуванні наближеними числами важливо вміти визначати, які цифри числа є значущими або вірними.

Значущі цифри десяткового числа

Будь-яке додатне число a можна подати у вигляді:

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots \quad (m \neq 0).$$

Всі десяткові знаки $\alpha_i (i = m, m-1, \dots)$, які зберігаються при написанні, називаються *значущими цифрами* наближеного числа a .

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка цифра в його десятковому поданні, відмінна від нуля, та нуль, якщо він стоїть між значущими цифрами.

Правило визначення значущих цифр

Число a^* є наближенням до числа a з d значущими цифрами, якщо d є найбільшим додатнім цілим числом, для якого виконується умова:

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} < \frac{10^{-d}}{2}.$$

Приклад 1.5

Нехай $a = 3,56438$ та $a^* = 3,56$. Тоді відносна похибка дорівнюватиме:

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} < \frac{|3,56438 - 3,56|}{|3,56438|} = 0,00122 < \frac{10^{-2}}{2}.$$

Отже, оскільки $d = -2$, то a^* має дві значущі цифри ●

Приклад 1.6

$$a^* = \underline{0,0001}0203 = 1 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6} + 0 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-8};$$

$$a^* = 12340\underline{000000} = 1 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{10} + 3 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7.$$

Підкреслені нулі – незначущі цифри. Останній непідкреслений нуль є значущою цифрою, він показує, що збережено один десятковий розряд ●

Цифра наближеного числа називається *вірною в широкому сенсі*, якщо гранична абсолютна похибка цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається *сумнівною в широкому сенсі*.

Цифра наближеного числа називається *вірною у вузькому сенсі*, якщо гранична абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається *сумнівною у вузькому сенсі*.

Приклад 1.7

Нехай $a^* = 7,158$. Гранична абсолютна похибка складає 0,009. Визначимо вірні та сумнівні в широкому та вузькому сенсі цифри даного наближеного числа.

Розв'язання

Наприклад, для цифри 7 одиниця десяткового розряду дорівнює 1, для цифри 1 одиниця десяткового розряду дорівнює 0,1 і так далі. Проведемо порівняння цих чисел з заданою граничною абсолютною похибкою.

Оскільки $0,009 < 1$, то цифра 7 вірна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,1$, то цифра 1 вірна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,01$, то цифра 5 вірна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,001$, то цифра 8 сумнівна в широкому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,5$, то цифра 7 вірна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 < 0,05$, то цифра 1 вірна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,005$, то цифра 5 сумнівна у вузькому сенсі;
оскільки $0,009 > 0,0005$, то цифра 8 сумнівна у вузькому сенсі ●

Приклад 1.8

Знайти граничні абсолютні та відносні похибки числа b , якщо воно має тільки вірні цифри:
а) у вузькому сенсі; б) у широкому сенсі.

Розв'язання

а) нехай $b = 23,541$. Оскільки за умовою всі цифри числа b є вірними у вузькому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає $\Delta = 0,0005$, а гранична відносна похибка дорівнює $\delta = \Delta / a = 0,0005 / 23,541 = 0,000021$ (0,0021 %).

б) нехай $b = 6,05$. Оскільки за умовою всі цифри числа b є вірними у широкому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає $\Delta = 0,01$, а гранична відносна похибка дорівнює

$$\delta = \Delta / a = 0,01 / 6,05 = 0,0017 \text{ (0,17 \%)} \bullet$$

Зауваження 1

Сумнівні цифри замінюють у *цілому* числі нулями.

Зауваження 2

Якщо наближене число записується без вказівки його граничної абсолютної похибки, то записуються тільки вірні його цифри (як у широкому так і у вузькому сенсі). При цьому вірні нулі у кінці числа не відкидаються. Наприклад, числа 0,0564 та 0,05640 як наближені різні, оскільки гранична абсолютна похибка першого числа складає 0, 0001, а другого – 0, 00001.

Зауваження 3

У проміжних обчисленнях потрібно брати на одну цифру більше ніж рекомендують попередні правила (для зменшення накопичення похибки округлення). В остаточному результаті запасна (сумнівна) цифра відкидається.

Правила підрахунку цифр показують, як проводити округлення проміжних результатів, щоб, по-перше, отримати остаточний результат з тією точністю, яку забезпечують початкові дані, і, по-друге, не обчислювати і не виписувати (!) зайвих (що не підвищують точність) цифр, як в проміжних, так і в остаточному результатах. Ці правила не дають оцінки похибки результату, а лише забезпечують високу вірогідність того, що похибка результату приблизно така, яку забезпечують початкові дані.

Округлення чисел

Округлення числа a – заміна його наближеним числом a^* з меншою кількістю значущих цифр. Число a^* вибирають таким чином, щоб похибка округлення була мінімальною.

Для того, щоб округлити число до перших n значущих цифр, відкидають наступні значущі цифри. При цьому, якщо перша відкинута $(n+1)$ -а:

- менша за п'ять, то остання n -та цифра не змінюється;
- більша або дорівнює п'яти, то останню n -ту цифру потрібно збільшити на одиницю.

Наприклад, потрібно число $\pi = 3,14156926535\dots$ округлити до

- п'яти,
- трьох значущих цифр.

Отримуємо:

- $\pi \approx 3,1416$, абсолютна похибка не перевищує $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$;
- $\pi \approx 3,14$, абсолютна похибка не перевищує $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ •

Зайві цифри називають **сумнівними**.

Приклад 1.9

Округлити сумнівні цифри числа b , залишивши в ньому тільки вірні знаки:

а) у вузькому сенсі, якщо $b = 4,5037 \pm 0,0014$;

б) у широкому сенсі, якщо $b = 13,842$; ($\delta = 0,27\%$).

Визначити абсолютну похибку результату.

Розв'язання

а)

Згідно означення вірної цифри числа у вузькому сенсі, оскільки

$0,0014 < 0,5 \Rightarrow$ цифра 4 вірна у вузькому сенсі;

$0,0014 < 0,05 \Rightarrow$ цифра 5 вірна у вузькому сенсі;

$0,0014 < 0,005 \Rightarrow$ цифра 0 вірна у вузькому сенсі;

$0,0014 > 0,0005 \Rightarrow$ цифра 3 сумнівна у вузькому сенсі;

$0,0014 > 0,00005 \Rightarrow$ цифра 7 сумнівна у вузькому сенсі.

За правилом округлення знайдемо наближене значення даного числа:

$$b_1 = 4,50; \quad \Delta_1 = \Delta + \Delta_{окр.} = 0,0014 + 0,0037 = 0,0051.$$

Аналогічно попередньому визначимо, які цифри числа $b_1 = 4,5 \pm 0,0051$ є вірними у вузькому сенсі.

$0,0051 < 0,5 \Rightarrow$ цифра 4 вірна у вузькому сенсі;

$0,0051 < 0,05 \Rightarrow$ цифра 5 вірна у вузькому сенсі.

Абсолютна похибка результату складає $\Delta_1 = 0,0051$ •

б)

Нехай $b = 13,842$; $\delta = 0,0027$ (0.27 %). Тоді $\Delta = b \cdot \delta = 0,03737$.

Згідно означення, у даному числі вірними у широкому сенсі є цифри 1, 3 та 8, а сумнівними є 4 та 2. Округлимо дане число, зберігаючи перші три цифри:

$$b_1 = 13,8; \quad \Delta_1 = \Delta + \Delta_{окр.} = 0,03737 + 0,042 = 0,07937 < 0,1.$$

Як бачимо, всі цифри округленого числа $b_1 = 13,8$ є вірними у широкому сенсі. Абсолютна похибка результату складає $\Delta_1 = 0,07937$ •

1.2. ОЦІНКА ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТУ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ

Результатом дій над наближеними числами є також наближене число. Під час виконання арифметичних операцій над наближеними числами відбувається зазвичай накопичення похибок. Мають місце наступні оцінки абсолютних / відносних похибок результату основних арифметичних дій.

Похибка суми (різниці)

Теорема [12]

Абсолютна похибка алгебраїчної суми кількох наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел.

Тобто, якщо $a_i^* (i = \overline{1, n})$ – наближені числа, $A = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ – їх алгебраїчна сума, то

$$\Delta A \leq \Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots + \Delta a_n.$$

Правило 1

Щоб додати числа різної абсолютної точності потрібно:

- виділити числа, які містять менше десяткових знаків, залишити їх без змін;
- останні числа потрібно округлити за зразком виділених, зберігаючи один запасний десятковий знак;
- провести додавання чисел із врахуванням усіх збережених знаків;
- отриманий результат додавання округлити на один розряд.

При округленні доданків суми $A = a_1 + \dots + a_n$ до m -го десяткового розряду похибка округлення суми в самому гіршому випадку не перевищує

$$\Delta \leq n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^m.$$

Приклад 1.10

1. Обчислити суму наближених чисел: $A = \sum_{i=1}^5 a_i$,
де $a_1 = 2,3$; $a_2 = 123,251$; $a_3 = 5,7$; $a_4 = 25,18978787$; $a_5 = 0,00456$.
2. Визначити абсолютну похибку суми.

Розв'язання

1. Доданки a_1 і a_3 містять менше десяткових знаків, ніж інші доданки. Їх ми залишаємо без змін.

Доданки a_2 , a_4 , a_5 округлюємо, зберігаючи два десяткових знаки:

$$a_2 \approx 123,25; a_4 \approx 25,19; a_5 \approx 0,00$$

Обчислюємо суму:

$$A \approx 2,3 + 123,25 + 5,7 + 25,19 + 0,00 = 156,69.$$

Округлюємо наведений результат, залишаючи лише один десятковий знак: $A \approx 156,7$.

2. **Повна похибка** складається із трьох доданків:

- суми граничних похибок вхідних даних:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3} + \Delta_{a_4} + \Delta_{a_5}; \\ \Delta_1 &= 10^{-1} + 10^{-3} + 10^{-1} + 10^{-8} + 10^{-5} = 0,20101001 < 0,202;\end{aligned}$$

- абсолютної величини суми похибок, утворених при округленні кожного доданка (із врахуванням знаку округлення):

$$\Delta_2 = |0,001 - 0,00021213 + 0,00456| = 0,00534787 < 0,006;$$

- похибка округлення результату: $\Delta_3 = 156,7 - 156,69 = 0,01$.

Отже

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0,202 + 0,006 + 0,01 = 0,218 < 0,3; \\ A &= 156,7 \pm 0,3 \bullet\end{aligned}$$

Теорема [12]

Якщо доданки одного знаку, то гранична відносна похибка їх суми не перевищує найбільшої з граничних похибок доданків:

$$\delta_{a_1+\dots+a_n} \leq \max \{ \delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n} \}.$$

Граничні відносні похибки суми та різниці двох наближених чисел визначаються формулами:

$$\delta_{a_1+a_2} \leq \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a_1 + a_2|}, \quad \delta_{a_1-a_2} \leq \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a_1 - a_2|}.$$

Тому якщо числа a_1 і a_2 близькі, то відносна похибка їх *різниці* може виявитися дуже великою, і різниця не міститиме вірних цифр. Нехай, наприклад, $a = 0,5628 \cdot 10^4$; $b = 0,5631 \cdot 10^4$; $\Delta_a = 10^{-4} < 0,02 \%$;

$\Delta_b = 10^{-4} < 0,02 \%$ тоді різниця $a - b = -0,0003 \cdot 10^4$ і

$\delta_{a-b} \leq \frac{2}{0,0003} \cdot 10^{-4} = 67 \%$, тобто різниця не містить вірних цифр (втрата

точності). Це потрібно враховувати при побудові обчислювальних алгоритмів, адже велика помилка різниці поширюватиметься в ході подальших обчислень. Тому, по можливості, варто уникати віднімання двох майже рівних чисел. Формули, що містять віднімання двох близьких чисел, часто можна перетворити так, щоб уникнути цієї операції. Наприклад, при обчисленні величини $1 - \cos(x)$ для значень x , близьких до нуля, треба скористатися рівністю $1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Проте, якщо в силу необхідності доведеться віднімати майже рівні числа, то слід ці числа брати з достатньою кількістю запасних вірних цифр.

Похибка добутку (частки)

Теорема[12]

Відносна похибка добутку та відношення наближених чисел (одного чи різних знаків) не перевищує суми відносних похибок цих чисел.

Наслідок 1

Гранична відносна похибка добутку та відношення чисел дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел:

$$\delta_{a_1 \cdot a_2} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}; \quad \delta_{\frac{a_1}{a_2}} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}.$$

Наслідок 2

Якщо всі співмножники добутку достатньо точні за винятком одного, то гранична похибка буде співпадати з граничною похибкою найменш точного співмножника.

Приклад 1.11

Обчислити добуток наближених чисел

$$A = a_1 \cdot a_2, \quad a_1 = 98,2, \quad a_2 = 12,78,$$

якщо всі цифри співмножників є вірними. Встановити граничну відносну похибку добутку.

Розв'язання

Абсолютні граничні похибки співмножників:

$$\Delta_{a_1} = 0,05; \quad \Delta_{a_2} = 0,005 \Rightarrow$$

їх відносні граничні похибки:

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} = \frac{0,05}{98,2} \approx 0,0005; \quad \delta_{a_2} = \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} = \frac{0,005}{12,78} \approx 0,0004.$$

Гранична відносна похибка добутку:

$$\delta_A = 0,0005 + 0,0004 = 0,0009 \bullet$$

Правило 2

Для обчислення добутку наближених чисел із різною кількістю правильних значущих цифр, потрібно:

- визначити число найменш точне із співмножників;
- округлити останні співмножники таким чином, щоб кожне із них містило на одну (або на дві) значущі цифри більше, ніж кількість цифр в найменш точному із співмножників;
- в результаті множення зберегти стільки значущих цифр, скільки правильних цифр в найменш точному співмножнику.

Приклад 1.12

Оцінити відносну похибку обчислення довжини l круглого басейну радіуса $R = 5,48$ м, який незабаром планують побудувати у студентському містечку.

Розв'язання

Довжина круглого басейну (кола): $l = 2\pi R$.

Вважаючи, що $\pi = 3,14$ визначаємо абсолютну похибку наближених чисел R та $2 \cdot \pi = 2 \cdot 3,14 = 6,28$ (з точністю до одиниці останнього знаку): $\Delta_R = \Delta_{2\pi} = 0,01$. Визначимо відповідні граничні *відносні* похибки:

$$\delta_R = \frac{\Delta_R}{R} \approx 0,002, \quad \delta_{2\pi} = \frac{0,01}{6,28} \approx 0,002.$$

Тоді гранична відносна похибка величини l , як добутку двох наближених чисел, дорівнює:

$$\delta_l = \delta_{2\pi R} = \delta_R + \delta_{2\pi} = 0,002 + 0,002 = 0,004 \bullet$$

Відносна похибка степеня

Відносна похибка s -того степеня наближеного числа в s разів більше відносної похибки основи (як для цілих, так і для дробових s):

$$\delta_{a^s} = s \cdot \delta_a.$$

Правило 3

Під час піднесення наближеного числа до степеня s , в результаті потрібно зберігати стільки значущих цифр, скільки їх є в основі степеня.

Правила 1 – 3 стосовно визначення кількості знаків наближеного числа під час виконання арифметичних операцій, були сформульовані Брадїсом і носять назву правила підрахунку цифр.

Приклад 1.13

Згідно правила підрахунку цифр обчислити

$$X = ab^3 - c - \frac{3c^2}{a+b},$$

якщо

$$a = 5,8; \quad b = 13,74; \quad c = 9,665.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} X &= ab^3 - c - \frac{3c^2}{a+b} = 5,8 \cdot (13,74)^3 - 9,665 - \frac{3 \cdot (9,665)^2}{5,8 + 13,74} = 5,8 \cdot 2594 - 9,665 - \frac{3 \cdot 93,412}{19,54} = \\ &= 15045 - 9,665 - \frac{280,236}{19,54} = 15045 - 9,665 - 14,3417 = 15020,993 \quad \bullet \end{aligned}$$

Приклад 1.14

Визначити, з якою відносною похибкою і з кількома вірними цифрами можна знайти сторону a квадрата, якщо його площа $S = 67,92$ (з точністю до 0,01).

Розв'язання

$$a = \sqrt{S} = \sqrt{67,92} \approx 8,2413591... \quad \text{Оскільки } \delta_s = \frac{0,01}{67,92} \approx 0,00015, \text{ тому}$$

$$\delta_a = \frac{1}{2} \cdot 0,00015 = 0,000075 \Rightarrow \Delta_a = 8,2413591 \cdot 0,000075 = 1,213 \cdot 10^{-3}.$$

Тоді число a буде мати 4 вірні цифри, отже $a = 8,241 \quad \bullet$

Приклад 1.15

Обчислити значення

$$X = \frac{\sqrt[3]{a}}{bc},$$

якщо $a = 1,342 \pm 0,003$; $b = 0,487 \pm 0,0012$; $c = 54,065 \pm 0,006$.

Визначити абсолютну та відносну похибку результату.

Розв'язання

І спосіб

Знайдемо наближене значення X :

$$bc = 26,3; \quad \sqrt[3]{a} = 2,417; \quad X^* = 2,417 / 26,3 = 0,0919.$$

Далі знаходимо граничні відносні похибки:

$$\delta_a = \frac{0,003}{1,342} = 0,002; \quad \delta_b = \frac{0,0012}{0,487} = 0,0025; \quad \delta_c = \frac{0,006}{54,065} = 0,0001.$$

Граничну відносну похибку значення X знайдемо, використовуючи формулу:

$$\delta_X = \frac{1}{3} \delta_a + \delta_b + \delta_c = 0,002 + 0,0025 + 0,0001 = 0,005 \text{ (0,5 \%)}.$$

Гранична абсолютна похибка значення X дорівнюватиме:

$$\Delta_X = X^* \cdot \delta_X = 0,0919 \cdot 0,005 = 0,0005.$$

Отже, $X = 0,0919 \pm 0,0005$ ($\delta_X = 0,5 \%$) •

II спосіб

Згідно формули (1.25) гранична абсолютна похибка значення X дорівнює:

$$|\Delta_X| \leq \left| \frac{\partial X}{\partial a} \right| \Delta_a + \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| \Delta_b + \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \Delta_c.$$

Оскільки

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{1}{3} \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{bc}; \quad \frac{\partial X}{\partial b} = -\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2 c}; \quad \frac{\partial X}{\partial c} = -\frac{\sqrt[3]{a}}{b c^2},$$

то

$$|\Delta_X| \leq \frac{1}{3} \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{bc} \Delta_a + \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2 c} \Delta_b + \frac{\sqrt[3]{a}}{b c^2} \Delta_c.$$

Підставимо числові значення у останню формулу, отримуємо:

$$|\Delta_X| \leq \frac{1}{3} \frac{(1,342)^{-\frac{2}{3}}}{0,487 \cdot 54,065} \cdot 0,03 + \frac{\sqrt[3]{1,342}}{(0,487)^2 \cdot 54,065} \cdot 0,0012 + \frac{\sqrt[3]{1,342}}{0,487 \cdot (54,065)^2} \cdot 0,006 \approx 0,0005.$$

Отже, $X = 0,0919 \pm 0,0005$ ($\delta_X = 0,0005 / 0,0919 = 0,5 \%$) •

Розрізняють пряму та обернену задачу теорії похибок.

Пряма задача полягає у оцінюванні похибки результату обчислень, якщо відомі оцінки похибок вхідних даних. *Обернена задача* полягає у визначенні необхідної точності вхідних даних, що забезпечує задану точність результату обчислень.

Пряма задача теорії похибок

Відомі похибки величин $x_1, \dots, x_n$. Потрібно визначити похибку функції $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Позначимо $|\Delta x_i|$ абсолютні похибки аргументів функції. Тоді абсолютна похибка функції:

$$|\Delta y| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Будемо вважати Δx_i настільки малими величинами, що їх добутками, квадратами можна знехтувати по відношенню до самих величин, тоді:

$$|\Delta y| \approx |df(x_1, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Якщо поділити останній вираз на $|y|$, отримуємо оцінку відносної похибки функції y :

$$\delta \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{y} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Відповідно до наведених двох останніх виразів, для граничної похибки функції Δ_y , отримуємо:

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|,$$

де Δ_{x_i} – граничні похибки x_i , а гранична відносна похибка функції має вид:

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \right| \cdot |\Delta_{x_i}|.$$

Приклад 1.16

Обчислити значення

$$X = \frac{(a+b)e}{\sqrt{c^2 - d^2}},$$

якщо

$$a = 3,87 \pm 0,03; \quad b = 1,767 \pm 0,004; \quad c = 3,663 \pm 0,005; \quad d = 0,117 \pm 0,007.$$

Визначити абсолютну та відносну похибку результату.

Розв'язання

Знайдемо: $a+b = 5,64 \pm 0,034$; $c-d = 3,546 \pm 0,012$; $c+d = 3,780 \pm 0,012$.

Тоді:

$$\delta_X = \delta_{a+b} + \delta_e + \frac{1}{2} \delta_{c-d} + \frac{1}{2} \delta_{c+d} = \frac{0,034}{5,64} + \frac{0,006}{2,47} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,012}{3,546} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,012}{3,780} = 0,029; \quad (2,9 \%).$$

$$X^* = \frac{5,64 \cdot 2,47}{\sqrt{3,546 \cdot 3,78}} = 3,806.$$

Гранична абсолютна похибка значення X дорівнюватиме:

$$\Delta_X = X^* \cdot \delta_X = 3,806 \cdot 0,029 = 0,11.$$

Отже,

$$X = 3,806 \pm 0,11; \quad (\delta_X = 2,9 \%) \bullet$$

Обернена задача теорії похибок

Потрібно визначити, якими повинні бути абсолютні похибки аргументів функції $y = f(x_1, \dots, x_n)$, щоб абсолютна похибка функції Δ_y (яку ми вважаємо відомою) не перевищувала задану величину.

Вочевидь, що дана задача не має однозначного розв'язку. Для розв'язування наведеної задачі скористаємося принципом рівних впливів.

$$\text{Оскільки за умовою } \Delta_y - \text{ задана величина і } |\Delta_y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta_{x_i}|.$$

Згідно принципу рівних впливів усі доданки правої частини рівні між собою, тобто

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta_{x_1} = \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta_{x_2} = \dots = \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta_{x_n} = \frac{\Delta_y}{n} \Rightarrow$$

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n \cdot \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|}, \quad (i=1, n).$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають обчислювальною задачею?
2. Якими характеристиками оцінюється ефективність чисельного методу?
3. Який чисельний алгоритм називається стійким?
4. Що називають похибкою апроксимації?
5. Які є види похибок?
6. Сформулюйте пряму та обернену задачу теорії похибок.
7. Сформулюйте правило визначення значущих цифр наближеного числа.
8. Дайте визначення вірних та сумнівних цифр наближеного числа.
9. Як визначаються похибки обчислень під час виконання арифметичних операцій з наближеними числами?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Дати відповідь «так» або «ні»

1. Число ітерацій, виконуваних для отримання заданої точності розв'язку задачі, характеризує стійкість чисельного процесу.
Відповідь: ні
2. Різниця між точним та наближеним значенням розв'язку задачі є похибкою апроксимації.
Відповідь: так

3. Збіжність більшості чисельних методів гарантується коректним вибором початкового наближення.
Відповідь: так
4. Чи зменшиться похибка результату віднімання двох наближених чисел?
Відповідь: ні
5. Чи збільшиться похибка результату ділення двох наближених чисел?
Відповідь: так
6. Якщо для розв'язання задачі використовують наближені методи, то виникає неусунена похибка.
Відповідь: ні
7. Похибка обчислення є наслідком заміни реальної задачі її математичною моделлю.
Відповідь: ні
8. Обернена задача теорії похибок полягає у визначенні необхідної точності вхідних даних, що забезпечує задану точність результату обчислень.
Відповідь: так
9. Значення абсолютної похибки є більш інформативним з точки зору оцінювання якості відхилення від точного значення величини ніж значення відносної похибки.
Відповідь: ні
10. Якщо у наближеному числі $a^* = 9,397$ всі цифри є вірними у широкому сенсі, то гранична абсолютна похибка може складати 0,005 .
Відповідь: ні

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 1

Індивідуальна робота 1 складається із шести завдань (1.1 – 1.6).

Завдання 1.1 Визначити, яка рівність точніша.

Завдання 1.2 Округлити сумнівні цифри числа, залишивши в ньому тільки вірні знаки:

- а) у вузькому сенсі;
- б) у широкому сенсі.

Визначити абсолютну похибку результату.

Завдання 1.3 Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел, якщо вони мають тільки вірні цифри:

- а) у вузькому сенсі;
- б) у широкому сенсі.

Завдання 1.4 Обчислити значення X та визначити абсолютну та відносну похибку результату.

Завдання 1.5 Обчислити значення X та визначити абсолютну та відносну похибку результату.

Завдання 1.6 Обчислити значення X , користуючись правилом підрахунку цифр.

Чисельні дані завдань 1.1 – 1.6 наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Індивідуальна робота 1

Номер варіанта	Номер завдання	Завдання
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
1	1.1	$13 / 27 = 0,481; \quad \sqrt{15} = 3,87$
	1.2	а) $21,5137 \pm 0,0034$; б) $1,932(\delta = 0,63 \%)$
	1.3	а) $273,51$; б) $16,93$
	1.4	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$; $a = 3,85 \pm 0,01$; $b = 2,0435 \pm 0,0004$; $c = 962,6 \pm 0,1$
	1.5	$X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2$; $a = 4,3 \pm 0,05$; $b = 17,21 \pm 0,02$; $c = 8,2 \pm 0,05$; $m = 12,417 \pm 0,003$; $n = 8,37 \pm 0,005$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$; $a = 1,141$; $b = 3,156$; $h = 1,14$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
2	1.1	$6 / 14 = 0,429; \quad \sqrt{84} = 9,17$
	1.2	а) $73,137 \pm 0,037$; б) $5,439 (\delta = 0,15\%)$
	1.3	а) $8,284$; б) $7,741$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c};$ $a = 228,6 \pm 0,06; \quad b = 86,4 \pm 0,02; \quad c = 68,7 \pm 0,05$
	1.5	$X = \frac{m^3(a+b)}{c-d};$ $a = 13,5 \pm 0,02; \quad b = 3,7 \pm 0,02; \quad c = 34,5 \pm 0,02;$ $d = 23,725 \pm 0,005$
	1.6	$X = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12};$ $a = 8,53; \quad b = 6,271; \quad h = 12,48$
3	1.1	$5 / 18 = 0,278;$ $\sqrt{34} = 5,83$
	1.2	а) $14,264 \pm 0,032$; б) $15,947 (\delta = 0,07\%)$
	1.3	а) $82,3042$; б) $3,619$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{ab}}{c};$ $a = 3,845 \pm 0,004; \quad b = 16,2 \pm 0,05; \quad c = 10,8 \pm 0,1$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2};$ $a = 2,754 \pm 0,001; b = 11,7 \pm 0,04;$ $m = 0,56 \pm 0,005; \quad c = 10,536 \pm 0,002; \quad d = 6,32 \pm 0,008$
	1.6	$X = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5};$ $a = 0,562; \quad b = 0,2518; \quad h = 0,68$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
4	1.1	$3 / 65 = 0,046; \sqrt{38} = 6,16$
	1.2	a) $0,3185 \pm 0,0009$; б) $7,046(\delta = 0,02\%)$
	1.3	a) $98,32$; б) $1,054$
	1.4	$X = \frac{a^2 b}{c};$ $a = 3,456 \pm 0,002; b = 0,642 \pm 0,0005;$ $c = 7,12 \pm 0,004$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}};$ $a = 23,16 \pm 0,02; b = 8,23 \pm 0,005;$ $c = 145,5 \pm 0,08; d = 28,6 \pm 0,1; m = 0,28 \pm 0,006$
	1.6	$X = \frac{h}{3} S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right);$ $a = 8,51; A = 23,42; S = 45,8; h = 3,81$
5	1.1	$8 / 13 = 0,615; \sqrt{61} = 7,81$
	1.2	a) $8,9382 \pm 0,0052$; б) $5,0324(\delta = 0,67\%)$
	1.3	a) $12,924$; б) $12,95$
	1.4	$X = \frac{ab^3}{c};$ $a = 0,643 \pm 0,0005; b = 2,17 \pm 0,002;$ $c = 5,843 \pm 0,001$
	1.5	$X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}};$ $a = 27,16 \pm 0,006; b = 5,03 \pm 0,01; c = 3,6 \pm 0,02;$ $m = 12,375 \pm 0,004; n = 86,2 \pm 0,05$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2};$ $h = 21,1; a = 22,08; b = 31,11$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
6	1.1	$7 / 9 = 0,778; \quad \sqrt{29} = 3,46$
	1.2	а) $2,0943 \pm 0,0006;$ б) $8,372(\delta = 0,54\%)$
	1.3	а) $82,053;$ б) $3,054$
	1.4	$X = \frac{ab}{c^2};$ $a = 0,3575 \pm 0,0002; \quad b = 2,63 \pm 0,01;$ $c = 0,854 \pm 0,0005$
	1.5	$X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}};$ $a = 16,342 \pm 0,001; \quad b = 2,5 \pm 0,03;$ $c = 38,17 \pm 0,002; \quad d = 9,14 \pm 0,005; \quad m = 3,6 \pm 0,04$
	1.6	$X = \frac{1}{6} \pi h(3a^2 + h^2);$ $a = 2,456; \quad h = 1,76$
7	1.1	$4 / 9 = 0,445; \quad \sqrt{45} = 6,71$
	1.2	а) $1,3309 \pm 0,0007;$ б) $7,035(\delta = 0,03\%)$
	1.3	а) $12,973;$ б) $43,06$
	1.4	$X = \frac{\pi^2}{4} D d^2;$ $\pi = 3,14; \quad D = 54 \pm 0,5; \quad d = 8,235 \pm 0,001$
	1.5	$X = \frac{1}{64} \pi \sqrt{D^4 - d^4};$ $D = 36,5 \pm 0,1; \quad d = 26,35 \pm 0,005; \quad \pi = 3,14$
	1.6	$X = c^2 \left(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right);$ $c = 2,435; \quad \beta = 0,15; \quad \gamma = 1,27$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
8	1.1	$3/14 = 0,214; \sqrt{32} = 5,66$
	1.2	<i>a)</i> $3,1362 \pm 0,0016$; <i>б)</i> $74,221(\delta = 0,13\%)$
	1.3	<i>a)</i> $7,954$; <i>б)</i> $2,06$
	1.4	$X = \frac{m^2 n}{c^3};$ $m = 1,6531 \pm 0,0003; n = 3,78 \pm 0,002;$ $c = 0,158 \pm 0,0005$
	1.5	$X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d};$ $a = 9,542 \pm 0,001; b = 1,767 \pm 0,004; m = 3,128 \pm 0,002;$ $c = 0,172 \pm 0,001; d = 5,4 \pm 0,02$
	1.6	$X = \frac{1}{15} \pi h (2D^2 + Dd + 0,75d^2);$ $h = 84,2; D = 28,3; d = 42,08$
9	1.1	$7/19 = 0,368; \sqrt{44} = 6,63$
	1.2	<i>a)</i> $5,3407 \pm 0,0016$; <i>б)</i> $5,123(\delta = 0,05\%)$
	1.3	<i>a)</i> $14,065$; <i>б)</i> $1,96$
	1.4	$X = \sqrt{\frac{cd}{b}};$ $c = 0,7568 \pm 0,0002; d = 21,7 \pm 0,02;$ $b = 2,65 \pm 0,01$
	1.5	$X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)};$ $a = 10,82 \pm 0,03; b = 2,786 \pm 0,0006;$ $m = 0,28 \pm 0,006;$ $n = 14,7 \pm 0,06$
	1.6	$X = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ $p = (a+b+c)/2; a = 46,3; b = 29,72; c = 37,654$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
10	1.1	$7/17 = 0,412;$ $\sqrt{33} = 5,74$
	1.2	$a) \ 8,8612 \pm 0,0053;$ $б) \ 3,064(\delta = 0,02\%).$
	1.3	$a) \ 73,065;$ $б) \ 9,21$
	1.4	$X = \frac{Qe^3}{48E};$ $Q = 54,8 \pm 0,02; \ e = 2,45 \pm 0,01; \ E = 0,863 \pm 0,004$
	1.5	$X = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y};$ $n = 2,0435 \pm 0,0001; \ x = 4,2 \pm 0,05; \ y = 0,82 \pm 0,01$
	1.6	$X = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b + \beta)};$ $\alpha = 5,27; \ \beta = 0,0562; \ a = 158,35; \ b = 61,21$
11	1.1	$5/16 = 0,312;$ $\sqrt{76} = 8,72$
	1.2	$a) \ 4,2318 \pm 0,0003;$ $б) \ 83,234(\delta = 0,74\%)$
	1.3	$a) \ 8,274; \ б) \ 13,85$
	1.4	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}};$ $a = 4,16 \pm 0,005; \ b = 12,163 \pm 0,002;$ $c = 55,18 \pm 0,01$
	1.5	$X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2;$ $a = 5,2 \pm 0,04; \ b = 15,32 \pm 0,01; \ c = 7,5 \pm 0,05;$ $m = 21,823 \pm 0,002; \ n = 7,56 \pm 0,003$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2};$ $a = 2,234; \ b = 4,518; \ h = 4,48$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
12	1.1	$3/11 = 0,273; \sqrt{19} = 4,36$
	1.2	$a) 1,2316 \pm 0,0017;$ $b) 0,076 (\delta = 0,01\%)$
	1.3	$a) 13,886; b) 3,65$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c};$ $a = 315,6 \pm 0,05; b = 72,5 \pm 0,03; c = 53,8 \pm 0,03$
	1.5	$X = \frac{m^3(a+b)}{c-d};$ $a = 18,5 \pm 0,03; b = 5,6 \pm 0,02; m = 3,42 \pm 0,003;$ $c = 26,3 \pm 0,01; d = 14,782 \pm 0,006$
	1.6	$X = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12};$ $a = 6,44; b = 5,323; h = 15,44$
13	1.1	$4/13 = 0,308; \sqrt{22} = 4,69$
	1.2	$a) 3,0078 \pm 0,0012;$ $b) 82,334 (\delta = 0,05\%)$
	1.3	$a) 30,362;$ $b) 6,74$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{ab}}{c};$ $a = 4,632 \pm 0,003; b = 23,3 \pm 0,04; c = 11,3 \pm 0,06$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2};$ $a = 3,326 \pm 0,002; b = 15,8 \pm 0,03; c = 12,415 \pm 0,003;$ $d = 7,18 \pm 0,006$
	1.6	$X = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5};$ $a = 0,834; b = 0,3523; h = 0,74$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
14	1.1	$7/12 = 0,583; \quad \sqrt{55} = 7,42$
	1.2	<i>a)</i> $7,2836 \pm 0,0004$; <i>б)</i> $7,065(\delta = 0,54\%)$
	1.3	<i>a)</i> $3,997$; <i>б)</i> $9,21$
	1.4	$X = \frac{a^2 b}{c};$ $a = 1,245 \pm 0,001$; $b = 0,121 \pm 0,0002$; $c = 2,34 \pm 0,003$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}};$ $a = 17,41 \pm 0,01$; $b = 1,27 \pm 0,002$; $c = 342,3 \pm 0,04$; $d = 11,7 \pm 0,1$; $m = 0,71 \pm 0,003$
	1.6	$X = \frac{h}{3} S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right);$ $a = 5,71$; $A = 32,17$; $S = 51,7$; $h = 2,42$
15	1.1	$8/14 = 0,571$; $\sqrt{69} = 8,31$
	1.2	<i>a)</i> $0,9643 \pm 0,0042$; <i>б)</i> $7,241(\delta = 0,13\%)$
	1.3	<i>a)</i> $23,942$; <i>б)</i> $1,054$
	1.4	$X = \frac{ab^3}{c};$ $a = 0,142 \pm 0,0003$; $b = 1,71 \pm 0,002$; $c = 3,727 \pm 0,001$
	1.5	$X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}};$ $a = 15,71 \pm 0,005$; $b = 3,28 \pm 0,02$; $c = 7,2 \pm 0,01$; $m = 13,752 \pm 0,001$; $n = 33,7 \pm 0,03$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2};$ $h = 17,8$; $a = 32,47$; $b = 11,42$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
16	1.1	$6 / 17 = 0,353;$ $\sqrt{45} = 6,71$
	1.2	<i>a)</i> $0,3976 \pm 0,0063;$ <i>б)</i> $54,054(\delta = 0,17\%)$
	1.3	<i>a)</i> $90,323;$ <i>б)</i> $13,043$
	1.4	$X = \frac{ab}{c^2};$ $a = 0,1756 \pm 0,0001; b = 3,71 \pm 0,03; c = 0,285 \pm 0,0002$
	1.5	$X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}};$ $a = 12,751 \pm 0,001; b = 3,7 \pm 0,02; c = 23,76 \pm 0,003;$ $d = 8,12 \pm 0,004; m = 1,7 \pm 0,01$
	1.6	$X = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2);$ $a = 7,751; h = 3,35; \pi = 3.14$
17	1.1	$2 / 13 = 0,154; \sqrt{99} = 9,95$
	1.2	<i>a)</i> $9,3125 \pm 0,0008;$ <i>б)</i> $10,054(\delta = 0,32\%)$
	1.3	<i>a)</i> $6,876;$ <i>б)</i> $13,04$
	1.4	$X = \frac{\pi^2}{4} D d^2;$ $\pi = 3,14; D = 72 \pm 0,3; d = 3,274 \pm 0,002$
	1.5	$X = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4};$ $\pi = 3,14; D = 41,4 \pm 0,2; d = 31,75 \pm 0,003.$
	1.6	$X = c^2\left(1 + \frac{2\beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right);$ $c = 7,834; \beta = 0,21; \gamma = 3,71$

18	1.1	$4/17 = 0,235; \sqrt{37} = 6,308$
	1.2	a) $3,6049 \pm 0,0017$; б) $7,0965(\delta = 0,51\%)$
	1.3	a) $43,09$; б) $1,054$
	1.4	$X = \frac{m^2 n}{c^3}$; $m = 2,348 \pm 0,002$; $n = 4,37 \pm 0,004$; $c = 0,235 \pm 0,0003$
	1.5	$X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$; $a = 8,357 \pm 0,003$; $b = 1,767 \pm 0,004$; $m = 3,17 \pm 0,001$; $c = 1,315 \pm 0,0004$; $d = 2,4 \pm 0,02$
	1.6	$X = \frac{1}{15}\pi h(2D^2 + Dd + 0,75d^2)$; $h = 76$; $D = 17,2$; $d = 9,344$; $\pi = 3,14$
19	1.1	$11/18 = 0,611$; $\sqrt{19} = 4,36$
	1.2	a) $0,3276 \pm 0,0005$; б) $8,542(\delta = 0,43\%)$
	1.3	a) $80,221$; б) $1,06$
	1.4	$X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$; $c = 0,8345 \pm 0,0004$; $d = 13,8 \pm 0,03$; $b = 1,84 \pm 0,006$
	1.5	$X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$; $a = 9,37 \pm 0,004$; $b = 3,108 \pm 0,0003$; $m = 0,46 \pm 0,002$; $n = 15,2 \pm 0,04$
	1.6	$X = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = (a+b+c)/2$; $a = 10,5$; $b = 34,18$; $c = 27,327$

20	1.1	$14/18 = 0,778; \sqrt{71} = 8,43$
	1.2	a) $9,6109 \pm 0,0004;$ б) $6,043(\delta = 0,07\%)$
	1.3	a) $40,329;$ б) $1,065$
	1.4	$X = \frac{Qe^3}{48E};$ $Q = 38,5 \pm 0,01; \quad e = 3,35 \pm 0,02; \quad E = 0,734 \pm 0,001$
	1.5	$X = \frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y};$ $n = 1,1753 \pm 0,0002; \quad x = 5,8 \pm 0,01; \quad y = 0,65 \pm 0,02$
	1.6	$X = \frac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \frac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b + \beta)};$ $\alpha = 7,31; \quad \beta = 0,0761; \quad a = 234,36; \quad b = 81,26$
21	1.1	$11/18 = 0,612; \sqrt{61} = 7,81$
	1.2	a) $1,3209 \pm 0,0005;$ б) $0,0965(\delta = 0,17\%)$
	1.3	a) $0,241;$ б) $1,954$
	1.4	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}};$ $a = 7,27 \pm 0,01; \quad b = 5,205 \pm 0,002; \quad c = 87,32 \pm 0,03$
	1.5	$X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2;$ $a = 2,13 \pm 0,01; \quad b = 22,16 \pm 0,03; \quad c = 6,3 \pm 0,04;$ $m = 16,825 \pm 0,004; \quad n = 8,13 \pm 0,002$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2};$ $a = 5,813; \quad b = 1,315; \quad h = 2,56$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
22	1.1	$13/18 = 0,722$; $\sqrt{34} = 5,83$
	1.2	a) $1,3045 \pm 0,0003$; б) $0,8304(\delta = 0,32\%)$
	1.3	a) $17,235$; б) $0,543$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c};$ $a = 186,7 \pm 0,04$; $b = 66,6 \pm 0,03$; $c = 72,3 \pm 0,03$
	1.5	$X = \frac{m^3(a+b)}{c-d};$ $a = 11,8 \pm 0,02$; $b = 7,4 \pm 0,03$; $m = 5,82 \pm 0,005$; $c = 26,7 \pm 0,03$; $d = 11,234 \pm 0,004$
	1.6	$X = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12};$ $a = 9,05$; $b = 3,244$; $h = 20,18$
23	1.1	$14/19 = 0,737$; $\sqrt{88} = 9,38$
	1.2	a) $4,0035 \pm 0,0001$; б) $31,054(\delta = 0,75\%)$
	1.3	a) $9,276$; б) $14,11$
	1.4	$X = \frac{\sqrt{ab}}{c};$ $a = 2,312 \pm 0,004$; $b = 18,4 \pm 0,03$; $c = 20,2 \pm 0,08$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2};$ $a = 4,523 \pm 0,003$; $b = 10,8 \pm 0,02$; $m = 0,85 \pm 0,003$; $c = 9,318 \pm 0,002$; $d = 4,17 \pm 0,004$
	1.6	$X = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5};$ $a = 0,445$; $b = 0,4834$; $h = 0,87$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
24	1.1	$23 / 48 = 0,479; \sqrt{106} = 10,30$
	1.2	а) $0,9854 \pm 0,0004;$ б) $3,123(\delta = 0,11\%)$
	1.3	а) $55,077;$ б) $2,67$
	1.4	$X = \frac{a^2 b}{c};$ $a = 0,327 \pm 0,005; b = 3,147 \pm 0,0001; c = 1,78 \pm 0,001$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}};$ $a = 32,37 \pm 0,02; b = 2,35 \pm 0,001; c = 128,7 \pm 0,02;$ $d = 27,3 \pm 0,04; m = 0,93 \pm 0,001$
	1.6	$X = \frac{h}{3} S \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right);$ $a = 7,28; A = 11,71; S = 21,8; h = 5,31$
25	1.1	$25 / 36 = 0,694; \sqrt{11} = 3,32$
	1.2	а) $42,0423 \pm 0,0001;$ б) $7,032(\delta = 0,44\%)$
	1.3	а) $33,054; б) 14,87$
	1.4	$X = \frac{ab^3}{c};$ $a = 0,258 \pm 0,0002; b = 3,45 \pm 0,001; c = 7,221 \pm 0,003$
	1.5	$X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}};$ $a = 12,31 \pm 0,004; b = 1,73 \pm 0,03; c = 3,7 \pm 0,02;$ $m = 17,428 \pm 0,003; n = 41,7 \pm 0,01$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2};$ $h = 32,5; a = 27,51; b = 21,78$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
26	1.1	$47 / 49 = 0,959; \sqrt{74} = 8,60$
	1.2	а) $11,0124 \pm 0,0003$; б) $4,989(\delta = 0,41\%)$
	1.3	а) $82,044$; б) $0,87$
	1.4	$X = \frac{ab}{c^2}$; $a = 0,2731 \pm 0,0003$; $b = 5,12 \pm 0,02$; $c = 0,374 \pm 0,0001$
	1.5	$X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$; $a = 31,456 \pm 0,002$; $b = 7,3 \pm 0,01$; $c = 33,28 \pm 0,003$; $d = 6,71 \pm 0,001$; $m = 5,8 \pm 0,02$
	1.6	$X = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$; $a = 5,441$; $h = 6,17$; $\pi = 3.14$
27	1.1	$7 / 19 = 0,368; \sqrt{44} = 6,63$
	1.2	а) $5,3407 \pm 0,0016$; б) $5,123(\delta = 0,05\%)$
	1.3	а) $14,065$; б) $1,96$
	1.4	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$; $a = 7,27 \pm 0,01$; $b = 5,205 \pm 0,002$; $c = 87,32 \pm 0,03$
	1.5	$X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2$; $a = 2,13 \pm 0,01$; $b = 22,16 \pm 0,03$; $c = 6,3 \pm 0,04$; $m = 16,825 \pm 0,004$; $n = 8,13 \pm 0,002$
	1.6	$X = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$; $a = 5,813$; $b = 1,315$; $h = 2,56$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
28	1.1	$7 / 12 = 0,583; \quad \sqrt{55} = 7,42$
	1.2	а) $3,6049 \pm 0,0017$; б) $7,241(\delta = 0,13\%)$
	1.3	а) $3,997$; б) $1,054$
	1.4	$X = \frac{ab}{c^2}$; $a = 0,1756 \pm 0,0001$; $b = 3,71 \pm 0,03$; $c = 0,285 \pm 0,0002$
	1.5	$X = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$; $a = 12,751 \pm 0,001$; $b = 3,7 \pm 0,02$; $c = 23,76 \pm 0,003$; $d = 8,12 \pm 0,004$; $m = 1,7 \pm 0,01$
	1.6	$X = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$; $a = 7,751$; $h = 3,35$; $\pi = 3.14$
29	1.1	$8 / 14 = 0,571$; $\sqrt{69} = 8,31$
	1.2	а) $7,2836 \pm 0,0004$; б) $8,542(\delta = 0,43\%)$
	1.3	а) $43,09$; б) $1,054$
	1.4	$X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$; $c = 0,7568 \pm 0,0002$; $d = 21,7 \pm 0,02$; $b = 2,65 \pm 0,01$
	1.5	$X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$; $a = 10,82 \pm 0,03$; $b = 2,786 \pm 0,0006$; $m = 0,28 \pm 0,006$; $n = 14,7 \pm 0,06$
	1.6	$X = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = (a+b+c)/2$; $a = 46,3$; $b = 29,72$; $c = 37,654$

Продовження таблиці 1.1

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
30	1.1	$4/17 = 0,235;$ $\sqrt{37} = 6,308$
	1.2	a) $3,6049 \pm 0,0017;$ б) $8,542 (\delta = 0,43\%)$
	1.3	a) $43,09;$ б) $1,054$
	1.4	$X = \frac{a^2 b}{c};$ $a = 3,456 \pm 0,002; b = 0,642 \pm 0,0005; c = 7,12 \pm 0,004$
	1.5	$X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}};$ $a = 23,16 \pm 0,02; b = 8,23 \pm 0,005; c = 145,5 \pm 0,08;$ $d = 28,6 \pm 0,1; m = 0,28 \pm 0,006$
	1.6	$X = \frac{h}{3} S (1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2});$ $a = 8,51; A = 23,42; S = 45,8; h = 3,81$

РОЗДІЛ 2.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

2.1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Якщо алгебраїчне рівняння достатньо складне, то його корені лише інколи вдається знайти точно. Тому важливого значення набувають способи наближеного знаходження коренів рівняння й оцінки їхньої точності.

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

де $f(x)$ визначена і неперервна в певному скінченному чи нескінченному інтервалі.

Усяке значення ξ , що перетворює функцію $f(x)$ на нуль, тобто таке, що $f(\xi) = 0$, називається *коренем рівняння* (2.1) чи нулем функції $f(x)$.

Наближене знаходження дійсних коренів рівняння (2.1) звичайно складається з таких етапів:

- відокремлення коренів, тобто встановлення проміжків $[\alpha, \beta]$, що містять один і тільки один корінь рівняння (2.1);
- уточнення наближених коренів, тобто доведення їх до заданого ступеня точності.

Для відокремлення коренів корисна відома теорема з математичного аналізу. Відповідно до цієї теореми, якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, приймає значення різних знаків, тобто $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то всередині цього відрізка міститься *непарне число дійсних коренів*. Ясно, що корінь виявиться єдиним, якщо всередині цього відрізка функція $f(x)$ крім того ще й монотонна, тобто її похідна існує і зберігає знак усередині інтервалу (α, β) .

Таким чином, якщо існує неперервна похідна $f'(x)$ і її нулі легко обчислюються, то для відокремлення коренів рівняння (2.1) можна вчинити так:

- знайти корені рівняння $f'(x) = 0$, тим самим ми визначимо кінці інтервалів монотонності функції $f(x)$;
- оцінити значення функції $f(x)$ на кінцях знайдених інтервалів монотонності й вибрати ті з них, на кінцях яких значення функції набуває різних знаків. Вони і будуть шуканими інтервалами.

Корисно пам'ятати, що алгебраїчне рівняння n -го степеня $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, ($a_0 \neq 0$) має не більше ніж n дійсних коренів. Тому якщо для такого рівняння ми одержимо $n+1$ зміну знаків, то всі його корені будуть відокремленими.

Розглянемо кілька прикладів відокремлення коренів алгебраїчного рівняння.

Приклад 2.1

Відокремити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$$

Розв'язання

Область визначення даної функції $(-\infty; \infty)$.

Знайдемо корені рівняння $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Одержуємо такі інтервали монотонності функції $f(x): (-\infty; 0), (0; 2), (2; \infty)$.

Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях кожного з цих інтервалів:

$$f(-\infty) < 0, f(-\infty) < 0, f(0) > 0, f(2) < 0, f(\infty) > 0.$$

На кінцях кожного з інтервалів монотонності значення даної функції набуває різних знаків, отже в кожному інтервалі міститься по одному дійсному кореню розглянутого рівняння •

Приклад 2.2

Відділити корені рівняння

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 15x^3 - 41 = 0.$$

Розв'язання

Область визначення функції $(-\infty; \infty)$.

Функція $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 45x^2 = 5x^2(x^2 + 4x + 9)$ набуває невід'ємного значення. Отже функція $f(x)$ монотонна у своїй області визначення. Визначаючи знаки функції $f(x)$ на кінцях інтервалу монотонності $f(-\infty) < 0$, $f(\infty) > 0$, робимо висновок, що вона має в цьому інтервалі дійсний корінь.

Уточнити розташування кореня можна за допомогою методів розв'язання, що будуть розглянуті нижче ●

2.2. МЕТОД ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА НАВПІЛ

Метод ділення відрізка навпіл – найбільш поширена назва. Цей метод ще називають методом дихотомії або методом бісекції.

Постановка задачі: треба знайти з заданою точністю ε дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$, що міститься в інтервалі $[\alpha, \beta]$.

Найпростішим методом уточнення коренів є метод ділення відрізка навпіл. Для цього проміжок $[\alpha, \beta]$, що містить корінь, ділиться точкою $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ навпіл, і надалі розглядається та його половина, де функція $f(x)$ на її кінцях має різні знаки. Для знаходження наближеного значення кореня x_n з точністю ε процес ділення відрізка навпіл продовжуємо до тих пір, поки не виконуватиметься нерівність:

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n} < \varepsilon,$$

де $[\alpha_n; \beta_n]$ – відрізок після n -го ділення, що містить корінь, тобто

$$f(\alpha_n) \cdot f(\beta_n) < 0.$$

За наближене значення кореня можна вибрати будь-яку точку отриманого відрізка $[\alpha_n; \beta_n]$, наприклад, $x_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$.

Збіжність методу ділення відрізка навпіл повільна. На практиці цей метод зручно застосовувати для *грубої оцінки* кореня рівняння (2.1).

2.3. МЕТОД НЬЮТОНА

Цей метод ще називають методом дотичних, він є дуже ефективним для розв'язання *алгебраїчних і трансцендентних* рівнянь. Його основна перевага полягає в тому, що при порівняно простій схемі обчислень він має швидку збіжність.

Нехай єдиний корінь ξ рівняння

$$f(x) = 0$$

розташований усередині інтервалу $[\alpha, \beta]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ *неперервні і зберігають визначені знаки* $\forall x \in [\alpha, \beta]$ (рис. 2.1). Початкове наближення кореня – значення $x_0 \in [\alpha, \beta]$ повинне задовольняти умові

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (2.2)$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні рівняння кривої $y = f(x)$ рівнянням дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $x = x_i$. За наближене значення кореня береться абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox (рис.2.1).

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_i; f(x_i))$ має вид:

$$y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i).$$

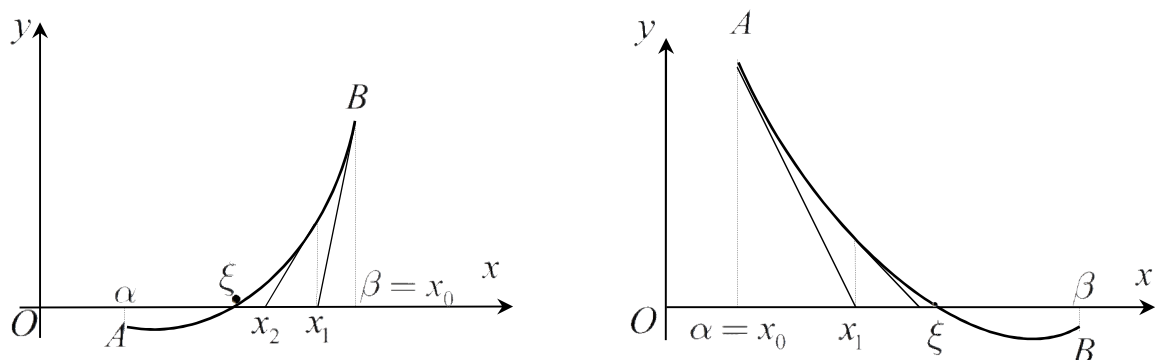


Рис. 2.1. Метод дотичних. Вибір початкового наближення

Тоді для точки $(x_{i+1}; 0)$ – точки перетину дотичної з віссю Ox має місце співвідношення:

$$-f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

звідки і отримується ітераційна формула метода Ньютона:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.3)$$

Відповідно до методу Ньютона корінь вихідного рівняння відшукується як границя наведеної ітераційної послідовності.

Для оцінки точності наближення x_i можна скористатися формулою [6]

$$|x_i - \xi| \leq \frac{|f(x_i)|}{m_1}, \quad (2.4)$$

де $|f'(x)| \geq m_1 > 0, \forall x \in [\alpha, \beta], \xi$ – точне значення кореня.

На практиці зазвичай обирають

$$m_1 = \min\{|f'(\alpha)|, |f'(\beta)|\}.$$

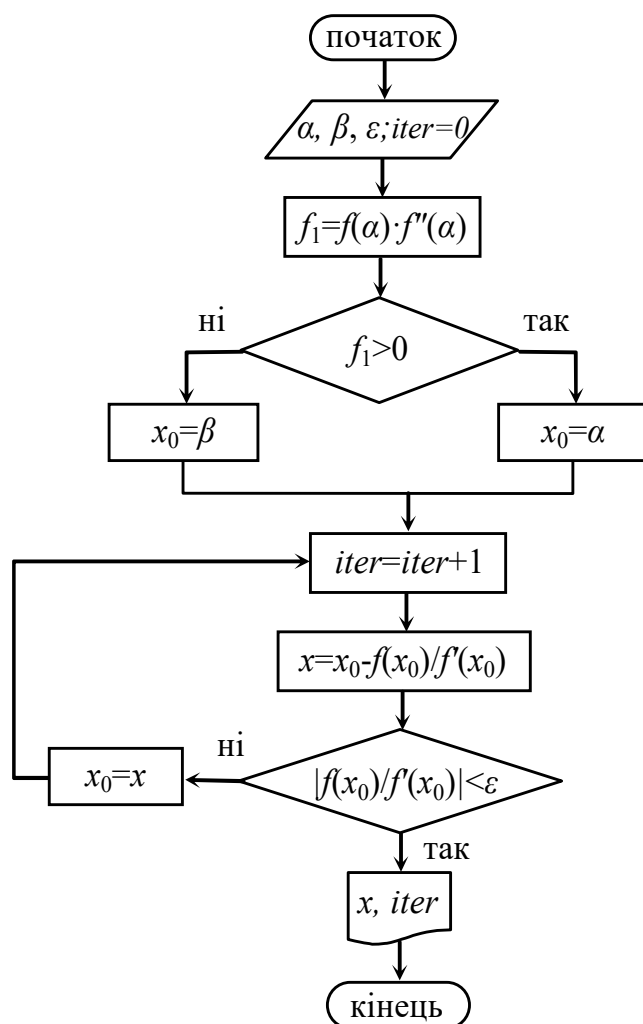


Рис.2.2. Блок-схема розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом дотичних

Зауваження. Нерівність (2.4) є загальною оцінкою похибки наближеного значення кореня рівняння (2.1), яка є вірною при застосуванні будь-якого чисельного методу розв'язку (2.1).

На рис. 2.2. наведено блок-схему програми розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом дотичних [15]. У даній блок-схемі:

α – лівий кінець інтервалу;

β – правий кінець інтервалу;

ε – точність обчислень;

x_0 – корінь рівняння на попередній ітерації;

x – корінь рівняння на поточній ітерації;

$iter$ – номер ітерації;

$f(x)$ – значення функції у точці x .

Наведемо без доказу **теорему про достатні умови збіжності методу Ньютона**.

Теорема. Якщо на проміжку $[a, b]$ похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ відмінні від нуля та знакосталі, крім того $f(a) \cdot f(b) < 0$ і початкове наближення x_0 задовольняє умову: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, то ітерації (2.3) метода Ньютона збігаються до єдиного кореня ξ рівняння (2.1).

Приклад 2.3

Знайдемо з точністю $\varepsilon = 0,0001$ корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. приклад 2.1), було отримано три інтервали: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, які містять три дійсні корені.

Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(0; 2)$.

Розв'язання

Цей інтервал методом бісекції зменшимо так, щоб його довжина не перевищувала 0.1.

Маємо:

$$x_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad f(x_1) = 1 > 0 \Rightarrow \xi \in [1; 2];$$

$$x_2 = \frac{1+2}{2} = 1,5, \quad f(x_2) = -0,375 < 0 \Rightarrow \xi \in [1; 1,5];$$

$$x_3 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25, \quad f(x_3) = 0,2656 > 0 \Rightarrow \xi \in [1,25; 1,5];$$

$$x_4 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375, \quad f(x_4) = -0,0727 < 0 \Rightarrow \xi \in [1,25; 1,375];$$

$$x_5 = \frac{1,25+1,375}{2} = 1,3125, \quad f(x_5) = 0,093 > 0 \Rightarrow \xi \in [1,3125; 1,375].$$

Довжина отриманого інтервалу: $|1,375 - 1,3125| = 0,0625 < 0,1$.

Подальше уточнення кореня проведемо *методом Ньютона*.

На відрізку $[1,3125; 1,375]$ друга похідна $f''(x) > 0$, перша похідна $f'(x) < 0$. За початкове наближення x_0 візьмемо той із кінців означеного відрізка, який задовольняє умову: $f(x_0)f''(x_0) > 0$, тобто $x_0 = 1,3125$. Тоді

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,3125 - \frac{0,093}{(-2,707)} = 1,3469, \quad f(x_1) = 0,00115.$$

Для визначення похибки отриманого наближення, застосовуємо оцінку (2.4), де $m_1 = \min \{|f'(\alpha)|, |f'(\beta)|\} = \min \{|-2,707|, |-2,578|\} = 2,578$, тобто $m_1 = 2,578$.

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0,00115}{2,578} \approx 0,000445 > 0,0001.$$

Точність, з якою обчислене перше наближення, недостатня. Тому робимо наступний крок

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,3496 - \frac{0,0015}{(-2,639)} = 1,3473, \quad f(x_2) = 2 \cdot 10^{-7},$$

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2,578} \approx 7,76 \cdot 10^{-8} < 0,0001.$$

Як видно з оцінки похибки другого наближення, ми одержали значення кореня з похибкою, що не перевищує задану.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ можна знайти аналогічним чином, проте застосуємо для їх уточнення інші чисельні методи ●

2.4. МЕТОД ХОРД

Метод хорд ще називають методом пропорційних частин. Розрахункові формули цього методу отримані з таких міркувань [15]. Інтервал $[\alpha, \beta]$, усередині якого розташований корінь рівняння $f(x) = 0$, ділимо у відношенні $f(\alpha)/f(\beta)$. Це дасть нам наближене значення кореня $x_i = \alpha + h_i$, де

$$h_i = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}(\beta - \alpha), \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (2.5)$$

Далі, застосовуючи цей прийом до одного з відрізків $[\alpha, x_1]$ чи $[x_1, \beta]$, на кінцях якого функція $f(x)$ має протилежні знаки, одержимо друге наближення x_2 і так далі.

Геометрично спосіб пропорційних частин еквівалентний заміні рівнянь кривої $y = f(x)$ рівнянням хорди, що проходить через точки $A(\alpha, f(\alpha))$ і $B(\beta, f(\beta))$. За наближене значення кореня приймається абсциса точки перетину хорди з віссю Ox (рис.2.3).

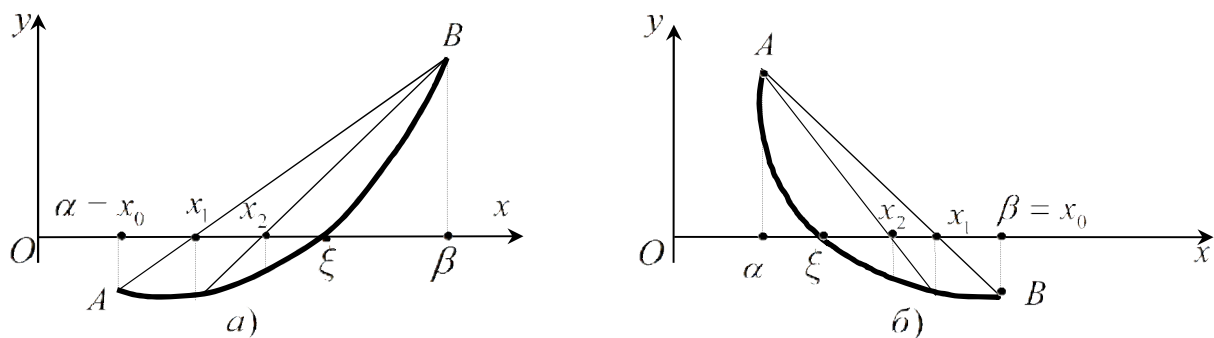


Рис. 2.3. Метод хорд. Геометрична інтерпретація

Уточнення кореня варто проводити доти, поки не буде досягнута задана точність. Для оцінки точності наближення можна скористатися формулою:

$$|x_i - \xi| \leq \frac{|f(x_i)|}{m_1}, \quad (2.6)$$

$$\text{де } |f'(x)| \geq m_1 > 0, \forall x \in [\alpha, \beta],$$

ξ – точне значення кореня.

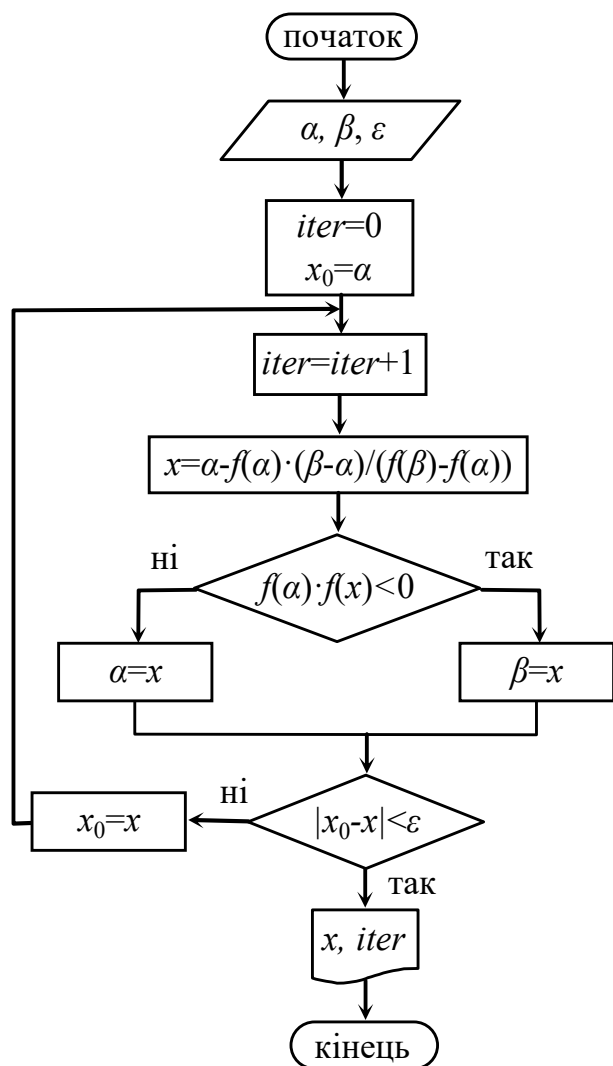


Рис.2.4. Блок-схема розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом хорд

На рис. 2.4. наведено блок-схему програми розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь методом хорд [15].

У даній блок-схемі:

α – лівий кінець інтервалу;

β – правий кінець інтервалу;

ϵ – точність обчислень;

x_0 – корінь рівняння на попередній ітерації;

x – корінь рівняння на поточній ітерації;

$iter$ – номер ітерації;

$f(x)$ – значення функції у точці x .

У випадку знакосталої другої похідної на заданому відрізку $[\alpha, \beta]$, один із кінців відрізка, а саме для якого виконується нерівність:

$$f(x) \cdot f''(x) > 0,$$

завжди буде нерухомим і у якості початкового наближення береться інший кінець відрізка (рис. 2.3).

У наведеному випадку зручно користуватися наступними ітераційними формулами, які є наслідками формули (2.5).

- Якщо $f(\alpha) \cdot f''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ – нерухомий кінець, $x_0 = \beta$ (рис. 2.3 б);

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - \alpha)}{f(x_n) - f(\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

- Якщо $f(\beta) \cdot f''(\beta) > 0 \Rightarrow \beta$ – нерухомий кінець, $x_0 = \alpha$ (рис. 2.3 а);

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (\beta - x_n)}{f(\beta) - f(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Приклад 2.4

Знайдемо з точністю до $\varepsilon = 0,01$ корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. приклад 2.1) отримано три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, що містять три корені. Застосовуючи ітераційний метод хорд, знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(-\infty; 0)$.

Розв'язання

$$f(0) = 3 > 0, \quad f'(x) = 3x(x - 2), \quad f''(x) = 6x - 6.$$

Від нескінченного інтервалу перейдемо до скінченного, замінивши його ліву границю скінченим числом менше нуля, але таким, щоб значення функції в ньому було від'ємним. Інтервал $[-1, 0]$ задовольняє цим вимогам: $f(-1) = -1 < 0$. Крім того, $f''(x)$ на цьому інтервалі знакопостійна і, отже, $f'(x)$ – монотонна й досягає найбільшого й найменшого

значення на кінцях інтервалу. Використовуючи метод бісекції, зменшимо цей інтервал так, щоб його довжина не перевищувала 0.1.

Маємо:

$$x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0,5, \quad f(x_1) \approx 2,125 > 0 \Rightarrow \text{корінь} \in [-1; -0,5];$$

$$x_2 = \frac{-1-0,5}{2} = -0,75, \quad f(x_2) \approx 0,89 > 0 \Rightarrow \text{корінь} \in [-1; -0,75];$$

$$x_3 = \frac{-1-0,75}{2} = -0,875, \quad f(x_3) \approx 0,033 > 0 \Rightarrow \text{корінь} \in [-1; -0,875];$$

$$x_4 = \frac{-1-0,875}{2} = -0,9375, \quad f(x_4) \approx -0,46 < 0 \Rightarrow \text{корінь} \in [-0,9375; -0,875].$$

Довжина отриманого інтервалу $|-0,875 + 0,9375| = 0,0625 < 0,1$, тому надалі будемо працювати з цим інтервалом.

Обчислюючи значення першої похідної $f'(x)$ на кінцях інтервалу, одержуємо $f'(-0,9375) \approx 8,26$; $f'(-0,875) \approx 7,547$. Отже, у формулі для оцінки похибки (2.6) для m_1 можна прийняти $m_1 = 7,547$.

Оскільки друга похідна на обраному інтервалі від'ємна, то як нерухомий кінець у формулі для обчислення кореня за методом хорд варто взяти лівий кінець інтервалу, тобто розрахункова формула набуде вигляду (2.7):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(\alpha)}(x_i - \alpha), \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{де } \alpha = -0,9375, x_0 = \beta = -0,875.$$

Виконуючи розрахунок за цією формулою при $i = 0$, одержимо $x_1 \approx -0,87514$, $f(x_1) \approx 0,03215$.

Обчислимо похибку

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0,03215}{7,547} \approx 0,00426 < 0,01.$$

Таким чином, уже перше наближення дає значення кореня з потрібною точністю.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(0; 2)$, $(2; +\infty)$ знаходяться аналогічно •

2.5. МЕТОД ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ

Уточнення дійсного кореня рівняння $f(x) = 0$ із заданою точністю ε методом простої ітерації відбувається за наступним алгоритмом [12].

Крок 1. Приводимо вихідне рівняння $f(x) = 0$ до канонічного виду:

$$x = \varphi(x). \quad (2.9)$$

Це завжди можна зробити заміною: $x = x + c \cdot f(x)$, де c – невідома константа.

Крок 2. Перевіряємо умову збіжності методу, а саме константу c підбираємо таким чином, щоб для функції $\varphi(x) = x + c \cdot f(x)$ виконувалась умова:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in [\alpha, \beta];$$

Крок 3. $(n + 1)$ -е наближення кореня визначаємо за формулою:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n);$$

Процес ітерацій потрібно продовжувати, поки не буде досягнуто виконання нерівності:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon. \quad (2.10)$$

Застосування метода простої ітерації базується на наступній теоремі, яку наводимо без доказу.

Теорема про достатні умови збіжності методу простої ітерації [1]

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена та диференційована на відрізку $[a, b]$. Тоді, якщо існує таке число q , що $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для $a < x < b$, то:

- 1) процес ітерації $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ збіжний, незалежно від початкового значення $x_0 \in [a, b]$;
- 2) граничне значення $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ є єдиним коренем рівняння $x = \varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Приклад 2.5

Знайдемо корінь рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$, що розташований в інтервалі $(2; +\infty)$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання

Від нескінченного інтервалу перейдемо до скінченного, замінивши його праву границю скінченим числом, більшим від 2, наприклад, 3. Оскільки

$$f(2) = -1 < 0; \quad f(3) = 3 > 0 \Rightarrow \text{точний корінь } \xi \in [2; 3].$$

Застосовуємо метод бісекції для отримання відрізка довжиною меншою (або рівною) 0.1, якому належить корінь ξ .

$$x_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5; \quad f(x_1) = -0,125 < 0 \Rightarrow [2,5; \quad 3];$$

$$x_2 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75; \quad f(x_2) = 1,109 > 0 \Rightarrow [2,5; \quad 2,75];$$

$$x_3 = \frac{2,5+2,75}{2} = 2,625; \quad f(x_3) = 0,416 > 0 \Rightarrow [2,5; \quad 2,625];$$

$$x_4 = \frac{2,5+2,625}{2} = 2,563; \quad f(x_3) = 0,127 > 0 \Rightarrow [2,5; \quad 2,563].$$

Отримано відрізок, довжиною меншою за 0.1; $\xi \in [2,5; \quad 2,563]$.

Для уточнення наближеного значення кореня застосовуємо метод простої ітерації.

Крок 1.

Записуємо рівняння у канонічному вигляді:

$$x = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)}.$$

Крок 2.

Похідна від функції $\varphi(x) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)}$ є спадною на відрізку $[2,5; 2,563]$, тому $\max_{x \in [2,5; 2,563]} |\varphi'(x)| = \varphi'(2,5) = 0,796$. Таким чином, можна покласти $q = 0,8 < 1$, що свідчить про збіжність метода ітерації. Тоді $\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 2,5 \cdot 10^{-3}$ і умова закінчення ітерацій (2.10) набуває вигляду:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2,5 \cdot 10^{-3}$$

Крок 3.

Довільним чином вибираємо початкове наближення, наприклад, $x_0 = 2,5$. Застосовуємо ітераційну формулу: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)} \Big|_{x=2,5} = 2,507;$$

$$|2,507 - 2,5| = 0,007 > 2,5 \cdot 10^{-3};$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)} \Big|_{x=2,507} = 2,512;$$

$$|2,512 - 2,507| = 5 \cdot 10^{-3} > 2,5 \cdot 10^{-3};$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)} \Big|_{x=2,512} = 2,516;$$

$$|2,516 - 2,512| = 4 \cdot 10^{-3} > 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$x_4 = \varphi(x_3) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)} \Big|_{x=2,516} = 2,519;$$

$$|2,519 - 2,516| = 3 \cdot 10^{-3} > 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$x_5 = \varphi(x_4) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)} \Big|_{x=2,522} = 2,524;$$

$$|2,524 - 2,522| = 2 \cdot 10^{-3} < 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, п'яте наближення дає значення кореня з потрібною точністю ●

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що означає процес відокремлення кореня рівняння?
2. В чому суть аналітичного методу відокремлення кореня?
3. Наведіть загальну оцінку похибки наближеного значення кореня рівняння.
4. Назвіть методи уточнення коренів нелінійних рівнянь.
5. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод Ньютона.
6. Наведіть формулу для контролю похибки методу Ньютона.
7. Дайте геометричну інтерпретацію метода Ньютона.
8. В чому полягає умова вибору нульового наближення в методі Ньютона?
9. Сформулюйте постановку задачі, опишіть метод хорд.
10. Наведіть формулу для контролю похибки метода хорд.
11. Дайте геометричну інтерпретацію метода хорд.
12. Сформулюйте теорему про достатні умови збіжності методу простої ітерації.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Дати відповідь «так» або «ні»

1. Наближені методи дають змогу знаходити тільки дійсні корені нелінійних рівнянь.

Відповідь: так

2. Уточнювати наближене значення кореня необхідно на проміжку де є хоча б один корінь рівняння.

Відповідь: ні

3. Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях відрізка, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$ то усередині цього відрізка міститься тільки один корінь рівняння.

Відповідь: ні

4. Метод хорд завжди збіжний.

Відповідь: ні

5. У методі простої ітерації вихідне рівняння не завжди можна привести до канонічного виду $x = \phi(x)$.

Відповідь: ні

6. Метод ітерацій збіжний для будь-якого вибору початкового значення.

Відповідь: ні

7. Збіжність методу ділення відрізка навпіл повільна.

Відповідь: так

8. Для неперервних функцій $f(x)$ абсолютну граничну похибку рівняння $f(x) = 0$ можна оцінити за формулою:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f'(x_n)|}{\mu}, \quad \mu = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|, \quad f'(x) \neq 0.$$

Відповідь: ні

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 2

Дано рівняння:

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Значення коефіцієнтів a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) для кожного варіанту задані в таблиці 2.1.

Номер варіанта, що є двозначним числом, відповідає номеру студента за списком групи. Перша цифра номера варіанта визначає значення шифру по вертикалі, друга – по горизонталі.

Таблиця 2.1. Індивідуальна робота 2

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2
Коефіцієнт a_i	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0
a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5

1. Аналітично відокремити усі дійсні корені рівняння.
2. Методом дихотомії звужити кожний із проміжків, що містить корінь, таким чином, щоб його довжина не перевищувала 0,1.
3. Обчислити усі корені з точністю до $\varepsilon = 0,0001$
 - методом Ньютона;
 - методом хорд;
 - методом простої ітерації.

Застосування усіх трьох наведених чисельних методів є обов'язковим для виконання індивідуальної роботи 2. Якщо дійсних коренів три, то для

уточнення кожного використати один із наведених методів. У випадку одного дійсного кореня рівняння, слід застосувати усі три означених метода для уточнення кореня, що належить визначеному у пункті 2 інтервалу.

РОЗДІЛ 3.

ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Чисельні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) поділяються на прямі та ітераційні.

Прямі методи іноді називають точними, а ітераційні – наближеними. Насправді прямі методи зазвичай дають наближений результат внаслідок операцій округлення арифметичних дій при застосуванні комп'ютерних засобів. Ефективне застосування ітераційних методів суттєво залежить від коректного вибору початкового наближення а також від швидкості збіжності процесу.

До прямих методів розв'язання СЛАР належать методи:

- виключення Гаусса;
- головного елемента;
- обертання;
- факторизації (метод квадратного кореня, схема Холецкого);
- прогонки та інші.

До ітераційних методів розв'язання СЛАР належать:

- метод простих ітерацій;
- метод Зейделя та інші.

3.1. МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса заснований на зведенні матриці системи до трикутного вигляду.

Нехай потрібно розв'язати систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; де $A = [a_{ij}]$ – задана матриця коефіцієнтів системи розмірності $n \times n$, $\det A \neq 0$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – означений вектор; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – шуканий вектор.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок, коли відмінні від нуля усі головні мінори матриці A (це випадок, який не потребує подальшої перестановки рядків і стовпців матриці A).

Метод Гаусса складається із двох етапів. Перший етап називається *прямим ходом метода Гаусса*, який полягає в зведенні матриці A до трикутного виду.

Прямий хід зазвичай реалізують одним із двох способів.

Спосіб перший. Спочатку робимо першим елементом головної діагоналі матриці A одиницю.

Для цього ділимо перше рівняння системи $Ax = b$ на елемент $a_{11} \neq 0$. Рівняння набуває вигляду:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)},$$

$$\text{де } a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}; \quad (j = \overline{1; n}).$$

Далі утворюють шляхом елементарних перетворень *нулі в першому стовпчику*, що стоять під головною діагоналлю. Для цього від другого, третього, ..., n -го рівняння віднімають перетворене перше, помножене на коефіцієнт a_{i1} ($i = \overline{2, n}$) відповідно. В результаті в новій перетвореній системі перший коефіцієнт головної діагоналі – одиниця, а усі коефіцієнти, що стоять під ним – нулі. Надалі перше рівняння вже не змінюється.

Аналогічні обчислення проводимо із другим, ..., n -м рядком. Таким чином, отримуємо перетворену СЛАР з матрицею коефіцієнтів трикутного вигляду.

Спосіб другий. Віднімемо від другого рівняння системи:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.1)$$

перше, помножене на таке число, щоб перетворився на нуль коефіцієнт при x_1 . Потім, у такий же спосіб, віднімемо перше рівняння від третього, четвертого і

так далі. Тоді виключаються всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі.

Потім, за допомогою другого рівняння виключимо з третього, четвертого тощо рівнянь коефіцієнти другого стовпця. Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці A всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі.

Напишемо загальні формули процесу. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $(k-1)$ -го стовпця. Тоді залишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі:

$$\sum_{j=k}^n a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \quad k \leq i \leq n. \quad (3.2)$$

Помножимо k -й рядок на число

$$C_{mk} = \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad m > k \quad (3.3)$$

і віднімемо його від m -го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка перетвориться на нуль, а інші зміняться за формулами

$$\begin{aligned} a_{m1}^{(k+1)} &= a_{m1}^{(k)} - C_{mk} a_{k1}^{(k)}, \\ b_m^{(k+1)} &= b_m^{(k)} - C_{mk} b_k^{(k)}, \\ k &< m, \quad 1 \leq n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Виконуючи обчислення за цими формулами при всіх зазначених індексах, виключимо елементи k -го стовпця. Назвемо таке виключення циклом процесу. Виконання всіх циклів називається *прямим ходом виключення*.

У результаті виконання прямого ходу одержимо систему з матрицею трикутного вигляду:

$$\sum_{j=i}^n a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.5)$$

Другий етап методу Гаусса, так званий «зворотний хід», полягає у визначенні невідомих x_i ($i = \overline{1, n}$) із отриманої системи (3.5). Суть зворотного ходу наступна. З останнього рівняння визначаємо x_n . Підставляючи його в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1} і так далі. Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right], \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (3.6)$$

Описаний основний підхід щодо розв'язання СЛАР методом Гаусса має свої недоліки. Виключення за формулами прямого ходу (3.3), (3.4) не можна проводити, якщо в ході розрахунку на головній діагоналі виявиться нульовий елемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Але в першому стовпці проміжної системи (3.2) всі елементи не можуть бути нулями: це означало б, що $\det A = 0$. Перестановкою рядків можна перемістити ненульовий елемент на головну діагональ і продовжити розрахунок.

Якщо елемент на головній діагоналі $a_{kk}^{(k)}$ малий, то цей рядок помножується на великі числа C_{mk} , що призводить до значних помилок округлення при обчисленнях. Щоб уникнути цього, кожен цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів стовпця $a_{mk}^{(k)}$, $m \geq k$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем у k -ому стовпці, і перестановкою рядків переводять його на головну діагональ, після чого роблять виключення. У цьому суть *методу Гаусса з вибором головного елемента*.

Блок-схему розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса наведено на рис.3.1, а її модифікацію – на рис. 3.2 [15]. У блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектора вільних членів; a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; x_i – елементи вектора невідомих; c_{ij} – допоміжні коефіцієнти; s – допоміжна величина.

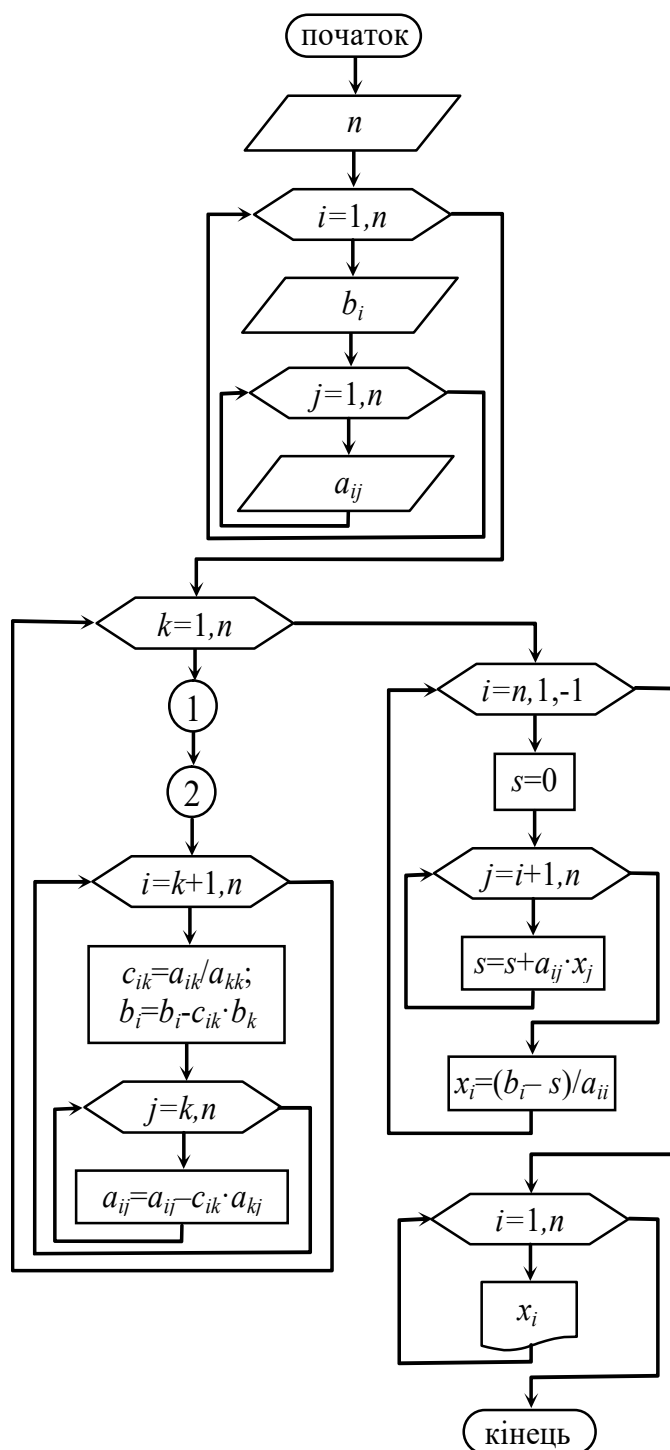


Рис.3.1. Блок-схема розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

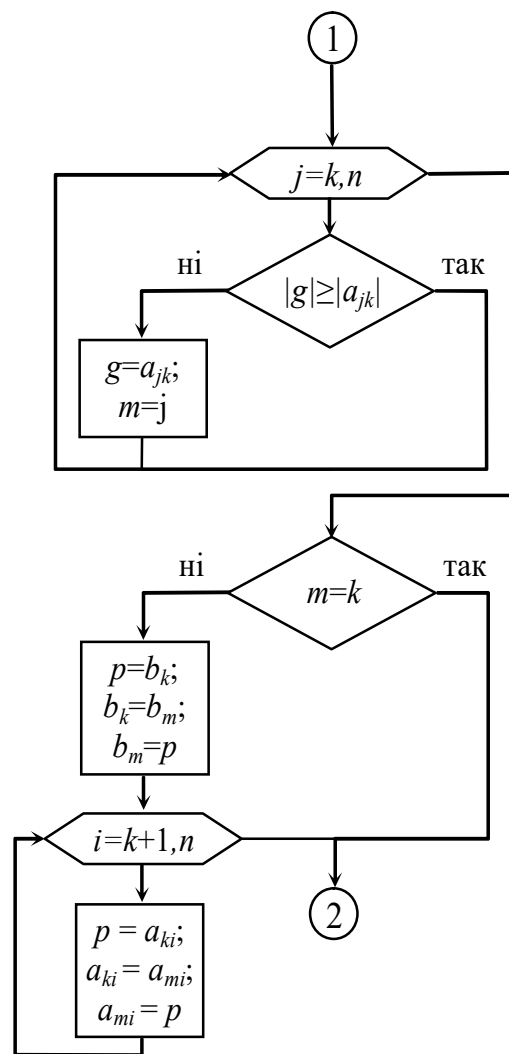


Рис.3.2. Вибір головного елемента у методі Гаусса

Приклад 3.1

Розв'язати методом Гаусса СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 41; \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -37; \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 44; \end{cases} \quad (3.7)$$

Розв'язання

Прямий хід метода Гаусса (зведення системи до трикутного виду).

Назвемо елемент головної діагоналі, під яким будемо утворювати нульові елементи, провідним елементом. Тобто на першій ітерації провідним елементом є $a_{11} = 2$; відповідний перший рядок назвемо провідним рядком.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 & 41 \\ -3 & 2 & -6 & -37 \\ 5 & -2 & 7 & 44 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 & 41/2 \\ -3 & 2 & -6 & -37 \\ 5 & -2 & 7 & 44 \end{pmatrix}$$

Після ділення провідного рядка на провідний елемент, утворюємо нулі в першому стовпчику під новим елементом $\tilde{a}_{11} = 1$. Для цього:

- від другого рівняння віднімаємо перше, помножене на (-3) ;
- від третього рівняння віднімаємо перше, помножене на (5) .

$$\begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 & 41/2 \\ 0 & -17/2 & 3/2 & 49/2 \\ 0 & 31/2 & -11/2 & -117/2 \end{pmatrix}$$

Перше рівняння вже не змінюється. Провідний рядок – другий, провідний елемент $a_{22}^{(1)} = -17/2$. Як і в попередній ітерації, ділимо провідний рядок на провідний елемент.

$$\begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 & 41/2 \\ 0 & 1 & -3/17 & -49/17 \\ 0 & 31/2 & -11/2 & -117/2 \end{pmatrix}$$

Утворюємо нуль під отриманим елементом $\tilde{a}_{22} = 1$. Від третього рівняння віднімаємо отримане друге рівняння, помножене на $31/2$.

Провідний елемент третього рівняння $a_{33}^{(3)} = -47/17$, провідний рядок – третій.

$$\begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 & 41/2 \\ 0 & 1 & -3/17 & -49/17 \\ 0 & 0 & -47/17 & -235/17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 & 41/2 \\ 0 & 1 & -3/17 & -49/17 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Зворотній хід метода Гаусса (визначення невідомих $\{x_3, x_2, x_1\}$).

З останнього рівняння визначили: $x_3 = 5$. Підставляємо це значення в попереднє (друге) рівняння, визначаємо:

$$x_2 = -49/17 + 3/17 \cdot x_3 = -49/17 + 3/17 \cdot 5 = -2.$$

Аналогічно з першого рівняння визначаємо:

$$x_1 = 41/2 - 5/2 \cdot x_3 + 7/2 \cdot x_2 = 41/2 - 5/2 \cdot 5 - 7/2 \cdot 2 = 1.$$

Відповідь: точний розв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 5$ •

Таким чином, метод Гаусса дозволяє отримати точний розв'язок СЛАР. Але, зазвичай проміжні результати (наприклад, дріб $3/17$) ми при розрахунках округлюємо, залишаючи лише два – три вірні десяткові знаки, тобто отримуємо лише наближений розв'язок СЛАР, який можна уточнити. Покажемо, як це зробити, якщо поправки коренів малі за абсолютною величиною.

Нехай для системи

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b};$$

де $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор невідомих величин; A – матриця коефіцієнтів при

невідомих величинах; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор – стовпець правої частини СЛАР

(вільний член системи), отримано початкове наближення $\mathbf{x}_0$. Покладемо

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}.$$

Для поправки $\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix}$ кореня $\mathbf{x}_0$ будемо мати рівняння $A \cdot (\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{b} \Rightarrow$

$$A \cdot \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.8)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A \cdot \mathbf{x}_0$ – нев'язка для наближеного розв'язку $\mathbf{x}_0$. Таким чином, щоб отримати $\boldsymbol{\delta}$, потрібно розв'язати СЛАР із вихідною матрицею коефіцієнтів

A та новим вільним членом $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Приклад 3.2

Розв'язати методом Гаусса СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 41; \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -37; \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 44; \end{cases} \quad (3.9)$$

Отримані наближені значення використати як початкові наближення, уточнити корені до 10^{-4} .

Розв'язання

Застосовуємо звичайну схему єдиного ділення.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 & 41 \\ -3 & 2 & -6 & -37 \\ 5 & -2 & 7 & 44 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 2,5 & 20,5 \\ -3 & 2 & -6 & -37 \\ 5 & -2 & 7 & 44 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 2,5 & 20,5 \\ 0 & -8,5 & 1,5 & 24,5 \\ 0 & 15,5 & -5,5 & -58,5 \end{pmatrix}.$$

Поки ніякого округлення не відбувалося. На наступному кроці буде відбуватися округлення, розрахунки проводимо з трьома значущими цифрами.

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -3,50 & 2,50 & 20,5 \\ 0,00 & 1,00 & -0,176 & -2,88 \\ 0,00 & 0,00 & -2,77 & -13,9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1,00 & -3,50 & 2,50 & 20,5 \\ 0,00 & 1,00 & -0,176 & -2,88 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 5,02 \end{pmatrix}.$$

Зворотний хід метода Гаусса:

$$x_3 = 5,02;$$

$$x_2 = -2,88 + 0,176 \cdot x_3 = -2,88 + 0,176 \cdot 5,02 = -2,00;$$

$$x_1 = 20,5 - 2,5 \cdot x_3 + 3,5 \cdot x_2 = 20,5 - 2,5 \cdot 5,02 + 3,5 \cdot (-2) = 0,950.$$

Отримали наближені значення коренів:

$$x_1^0 = 0,950; \quad x_2^0 = -2,00; \quad x_3^0 = 5,02.$$

Підставимо ці числа у вихідну систему (3.9), визначимо відповідні нев'язки (різниці між правою та лівою частинами системи (3.9)).

$$\varepsilon_1^0 = (41 - (2x_1 - 7x_2 + 5x_3)) \Big|_{x_i=x_i^0} = 8,08 \cdot 10^{-28} = 0,000;$$

$$\varepsilon_2^0 = (-37 - (-3x_1 + 2x_2 - 6x_3)) \Big|_{x_i=x_i^0} = -0,030;$$

$$\varepsilon_3^0 = (44 - (5x_1 - 2x_2 + 7x_3)) \Big|_{x_i=x_i^0} = 0,110.$$

Застосовуємо ці значення у якості вільних членів в СЛАР (3.9):

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & -0,03 \\ 5 & -2 & 7 & 0,11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 2,5 & 0 \\ 0 & -8,5 & 1,5 & -0,03 \\ 0 & 15,5 & -5,5 & 0,11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 2,5 & 0 \\ 0 & 1 & -0,176 & 0,00353 \\ 0 & 0 & -2,77 & 0,0553 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 2,5 & 0 \\ 0 & 1 & -0,176 & 0,00353 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0200 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\delta_3 = -0,02;$$

$$\delta_2 = 0,00353 + 0,176 \cdot (-0,02) = 10^{-5} = 0;$$

$$\delta_1 = 3,5 \cdot 0 - 2,5 \cdot (-0,02) = 0,05.$$

Тоді уточнені значення коренів:

$$x_1 = 0,95 + 0,05 = 1;$$

$$x_3 = 5,02 - 0,02 = 5.$$

$$x_2 = -2 + 0 = -2;$$

$$x_3 = 5,02 - 0,02 = 5.$$

Отримані уточнені значення збіглися із точними •

3.2. МЕТОД ГОЛОВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Метод головних елементів є узагальненням метода Гаусса [1]. Ідею метода розглянемо на прикладі.

Приклад 3.3

Розв'язати СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 41; \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -37; \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 44; \end{cases}$$

із застосуванням метода головних елементів.

Розв'язання

- Вибираємо *головний елемент* – найбільший за модулем елемент, який не належить стовпцю вільних членів:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{-7} & 5 & 41 \\ -3 & 2 & -6 & -37 \\ 5 & -2 & 7 & 44 \end{array} \right) \end{array}$$

$a_{12} = -7$ – головний елемент. Рядок, що містить головний елемент називається головним рядком. У даному прикладі головний рядок перший.

До кожної неголовного рядка додаємо головний рядок, помножений на відповідний множник

$$m_i = -\frac{a_{i2}}{a_{12}} \quad (i = 2, 3).$$

Тобто до другого рядка додаємо перший, помножений на $\frac{2}{7}$; до третього – перший, помножений на $\left(-\frac{2}{7}\right)$.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{-7} & 5 & 41 \\ -3 + \frac{4}{7} & 0 & -6 + \frac{10}{7} & -37 + \frac{82}{7} \\ 5 - \frac{4}{7} & 0 & 7 - \frac{10}{7} & 44 - \frac{82}{7} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{-7} & 5 & 41 \\ -\frac{17}{7} & 0 & -\frac{32}{7} & -\frac{117}{7} \\ \frac{31}{7} & 0 & \frac{39}{7} & \frac{226}{7} \end{array} \right) \end{array}$$

В результаті отримуємо нову СЛАР з матрицею, у якій другий стовпець, що містить головний елемент, заповнений нульовими елементами (звичайно, окрім головного елемента).

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{-7} & 5 & 41 \\ 17 & 0 & 32 & 117 \\ 31 & 0 & 39 & 226 \end{array} \right) \end{array}$$

- Відкидаємо цей стовпець та головний рядок, отримуємо нову матрицю з меншою на одиницю кількістю числом рядків та стовпців:

$$\left(\begin{array}{ccc} 17 & 32 & 117 \\ 31 & 39 & 226 \end{array} \right).$$

Для нової матриці повторюємо ті самі операції.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & b \\ \left(\begin{array}{ccc} 17 & 32 & 117 \\ 31 & \boxed{39} & 226 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 17 - \frac{31}{39} \cdot 32 & 0 & 117 - \frac{226}{39} \cdot 32 \\ 31 & \boxed{39} & 226 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} -\frac{329}{39} & 0 & -\frac{329}{39} \\ 31 & \boxed{39} & 226 \end{array} \right) \end{array}$$

- Із останньої системи визначаємо: $x_1 = 1$. Із інших провідних рівнянь визначаємо останні невідомі:

$$x_3 = \frac{1}{39}(226 - 31) = 5;$$

$$x_2 = -\frac{1}{7}(41 - 2x_1 - 5x_3) = -2.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 5$ •

Зауважимо, що метод Гаусса є частинним випадком методу головних елементів, а сама схема метода Гаусса отримується, якщо за головний елемент завжди вибирати верхній лівий елемент відповідної матриці.

Схема з вибором головного елемента по всій матриці менш чутлива до помилок округлення, ніж інші.

3.3. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

визначник якої $\Delta = \det A$, потрібно визначити.

Розглянемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

При розв'язанні системи (3.1) методом Гаусса, ми матрицю A заміняли трикутною матрицею

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(прямий хід метода Гаусса), визначник якої $\det \tilde{A} = 1$.

Елементи матриці $\tilde{A}$ отримувалися шляхом наступних елементарних перетворень:

- 1) Ділення провідного рядка на провідний елемент. При цьому визначник $\Delta = \det A$ також ділиться на провідний елемент.
- 2) Віднімання із непровідних рядків матриці A провідного рядка, помноженого на число. При цьому визначник Δ не змінюється.

Тому

$$\det \tilde{A} = 1 = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \cdot (-1)^k},$$

де k – кількість перестановок рядків (стовпців); $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ – провідні елементи на кожній із ітерацій. Тому

$$\Delta = \det A = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Тобто визначник дорівнює добутку «провідних» елементів для відповідної схеми Гаусса.

Зауважимо, що якщо для будь-якого кроку провідний елемент $a_{ii}^{(i-1)} = 0$, то потрібно змінити порядок рядків/стовпців матриці, не забуваючи щоразу при

кожній перестановці міняти знак визначника на протилежний.

Слід мати на увазі, що при обчисленні визначників із застосуванням комп'ютерних засобів може виникнути як переповнення, так і машинний нуль. Страхуватися можна введенням масштабних множників, переходом до логарифмів, почерговим перемножуванням великих і малих елементів.

Приклад 3.4

Обчислимо визначник матриці A із попереднього прикладу 3.1.

$$\begin{aligned}\Delta = \det A &= \begin{vmatrix} \boxed{2} & -7 & 5 \\ -3 & 2 & -6 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & \boxed{-17/2} & 3/2 \\ 0 & 31/2 & -11/2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{17}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -3/17 \\ 0 & 0 & \boxed{-47/17} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{17}{2}\right) \cdot \left(-\frac{47}{17}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -3/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 47.\end{aligned}$$

Відповідь: $\Delta = 47$.

3.4. ОБЧИСЛЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Задано матрицю $A = [a_{ij}]$, $(i, j = \overline{1, n})$, $\det A \neq 0$. При вказаному припущенні існує обернена матриця $A^{-1} = [x_{ij}]$, $(i, j = \overline{1, n})$, яка задовольняє умову:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (3.12)$$

де E – одинична матриця. Матричне рівняння $A \cdot A^{-1} = E$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Отримуємо СЛАР n^2 рівнянь відносно невідомих x_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$):

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.14)$$

Розв'язок (3.14) можна отримати методом Гаусса.

Приклад 3.5

Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ знайти:

- 1) обернену матрицю $A^{-1} = [x_{ij}]$, ($i, j = \overline{1, 3}$) та
- 2) її визначник $\det A$.

Розв'язання

- 1) Згідно визначення оберненої матриці: $A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб отримати елементи j -го стовпця ($j = \overline{1, 3}$) матриці A^{-1} маємо три СЛАР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо схему з єдиним діленням. При цьому будемо мати три стовпця вільних членів (таблиця 3.1). Зауважимо, що елементи рядків оберненої матриці знаходяться у зворотному порядку.

Таблиця 3.1. Приклад 3.5

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	2	3	1	0	0
4	5	6	0	1	0
7	8	9	0	0	1
1	2	3	1	0	0
—	-3	-6	-4	1	0
—	-6	-11	-7	0	1
—	1	2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
—	—	1	1	-2	1

Отже, зворотним ходом метода Гаусса отримуємо для

- для першого стовпця A^{-1} :

$$x_{31} = 1;$$

$$x_{21} = \frac{4}{3} - 2 \cdot 1 = -\frac{2}{3};$$

$$x_{11} = 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

- для другого стовпця A^{-1} :

$$x_{32} = -2;$$

$$x_{22} = -\frac{1}{3} - 2 \cdot (-2) = \frac{11}{3};$$

$$x_{12} = 0 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot \frac{11}{3} = -\frac{4}{3};$$

- для третього стовпця A^{-1} :

$$x_{33} = 1;$$

$$x_{23} = 0 - 2 \cdot 1 = -2;$$

$$x_{13} = 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 1.$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

2) Оскільки згідно методу визначені провідні елементи матриці A (в таблиці 3.1 виділено квадратом), то

$$\det A = 1 \cdot (-3) \cdot 1 = -3.$$

Відповідь: 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$ 2) $\det A = -3 \bullet$

3.5. УТОЧНЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Дамо спочатку наступні означення. Для матриці $A = [a_{ij}]$ довільного типу розглядають зазвичай три норми:

$$\|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (m - \text{норма});$$

$$\|A\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (l - \text{норма});$$

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \quad (k - \text{норма}).$$

Наприклад, для заданої матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

відповідні норми:

$$\|A\|_m = \max(1+2+3; \quad 4+5+6; \quad 7+8+9) = \max(6;15;24) = 24;$$

$$\|A\|_l = \max(1+4+7; \quad 2+5+8; \quad 3+6+9) = \max(12;15;18) = 18;$$

$$\|A\|_k = \sqrt{1^2 + \dots + 9^2} = \sqrt{285} \approx 16,9.$$

Припустимо, ми маємо наближене значення оберненої матриці $D_0 \approx A^{-1}$, тобто можна представити $AD_0 \approx E$, позначимо

$$F_0 = E - AD_0,$$

F_0 – похибка результатів. Якщо $F_0 = 0$, то $D_0 = A^{-1}$, тому якщо модулі елементів матриці F малі, то матриці A^{-1} та D_0 близькі між собою.

Для покращення точності елементів матриці D_0 можна застосувати метод послідовних наближень [1]. Будуємо послідовні наближення за формулою:

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1}F_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.15)$$

відповідна похибка:

$$F_k = E - AD_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Відомо [1], якщо

$$\|F_0\| \leq q < 1,$$

де $\|F_0\|$ – будь-яка канонічна норма матриці F_0 (m , l , або k – норма),

то процес ітерацій (3.15) завжди збіжний, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = A^{-1}$.

На практиці зазвичай процес уточнення елементів оберненої матриці припиняють, коли забезпечено нерівність:

$$\|D_k - D_{k-1}\| \leq \varepsilon, \quad (3.16)$$

де ε – задана точність.

Приклад 3.6

В прикладі 3.5 для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ отримано обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ причому це є точний розв'язок оскільки не застосовувалися}$$

наближені обчислення. Проте, із застосуванням наближених значень (таблиця 3.2, обчислення аналогічні розрахункам таблиці 3.1):

Таблиця 3.2. Приклад 3.6

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	2	3	1	0	0
4	5	6	0	1	0
7	8	9	0	0	1
1	2	3	1	0	0
	-3	-6	-4	1	0
	-6	-11	-7	0	1
	1	2	1,333	-0,333	0
		1	0,998	-1,998	1

отримуємо лише наближений результат:

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} -0,668 & -1,332 & 1,000 \\ -0,663 & 3,663 & -2,000 \\ 0,998 & -1,998 & 1,000 \end{pmatrix}.$$

Уточнимо елементи наближеної оберненої матриці:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -0,668 & -1,332 & 1,000 \\ -0,663 & 3,663 & -2,000 \\ 0,998 & -1,998 & 1,000 \end{pmatrix},$$

із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання

Визначаємо похибку результатів:

$$F_0 = E - AD_0 = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

Для подальшого уточнення елементів матриці D_0 скористаємося ітераційним процесом (3.15):

$$D_1 = D_0 + D_0 F_0 = \begin{pmatrix} -0,666668 & -1,333332 & 1 \\ -0,666663 & 3,666663 & -2 \\ 0,999998 & -1,999998 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D_1 - D_0 = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1,332 & -1,332 & 0,000 \\ -3,663 & 3,663 & 0,000 \\ 1,998 & -1,998 & 0,000 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо умову завершення ітераційного процесу (3.16). Оскільки

$$\|D_1 - D_0\|_l = 0,000333 < 10^{-3},$$

ітераційний процес завершено.

Відповідь: $A^{-1} \approx D_1 = \begin{pmatrix} -0,667 & -1,333 & 1,000 \\ -0,667 & 3,667 & -2,000 \\ 1,000 & -2,000 & 1,000 \end{pmatrix} \bullet$

3.6. МЕТОД ОБЕРТАННЯ

Метод Гаусса не єдиний, що застосовує зведення матриці коефіцієнтів до трикутного виду. Метод обертань, як і метод Гаусса, складається з прямого та оберненого ходу.

Розглядається СЛАР:

[illegible]

Прямий хід методу обертання

Як і для метода Гаусса, прямий хід перетворень полягає у зведенні матриці $A = [a_{ij}]$ до трикутного вигляду шляхом зведення до нуля піддіагональних елементів спочатку першого стовпця, потім другого і так далі.

Для цього утворюються наступні лінійні комбінації.

Беремо до уваги перше та друге рівняння системи (3.16). Нехай c_1, s_1 – деякі відмінні від нуля числа.

- Перше рівняння (3.16) помножимо на c_1 , друге – на s_1 та додаємо:

$$(c_1 a_{11} + s_1 a_{21})x_1 + (c_1 a_{12} + s_1 a_{22})x_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + s_1 a_{2n})x_n = c_1 b_1 + s_1 b_2. \quad (3.17)$$

Отриманим рівнянням замінюємо перше рівняння системи (3.16).

- Перше рівняння (3.16) помножимо на $-s_1$, друге – на c_1 та додаємо, отримуємо друге рівняння:

$$(-s_1 a_{11} + c_1 a_{21})x_1 + (-s_1 a_{12} + c_1 a_{22})x_2 + \dots + (-s_1 a_{1n} + c_1 a_{2n})x_n = -s_1 b_1 + c_1 b_2. \quad (3.18)$$

Параметри s_1 та c_1 визначаємо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} -s_1 a_{11} + c_1 a_{21} = 0; \\ s_1^2 + c_1^2 = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Перше рівняння (3.19) – умова виключення x_1 із другого рівняння, друге – умова нормування. Розв’язок (3.19):

$$c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

Аналогічні перетворення застосовуємо для першого та третього рівнянь системи. Тобто перше рівняння системи замінюється новим, утвореним додаванням першого рівняння *перетвореної* системи, помноженим на c_2 і третього рівняння (3.16) на s_2 . Третє рівняння – рівнянням, яке отримується у результаті добутку тих самих рівнянь відповідно на $-s_2$ та c_2 .

Із рештою рівнянь поступаємо аналогічним чином. За $n-1$ таких етапів прямого ходу вихідна система (3.16) буде перетворена до трикутного вигляду.

Зворотний хід методу обертань збігається із зворотним ходом методу Гаусса.

Приклад 3.7

Розв’язати СЛАР (3.20) методом обертань.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases} \quad (3.20)$$

Розв’язання

- *Прямий хід метода обертань*

Перше рівняння помножимо на c_1 , друге – на s_1 та додаємо обидва рівняння. Отримуємо нове перше рівняння:

$$x_1(c_1 + 3s_1) + x_2(2c_1 + s_1) + x_3(3c_1 + s_1) = 8c_1 + 3s_1. \quad (3.21)$$

Перше рівняння помножимо на $(-s_1)$, друге – на c_1 та додаємо обидва рівняння. Отримуємо нове друге рівняння:

$$x_1(-s_1 + 3c_1) + x_2(-2s_1 + c_1) + x_3(-3s_1 + c_1) = -8s_1 + 3c_1. \quad (3.22)$$

Параметри c_1 та s_1 визначаємо згідно рівнянь:

$$\begin{cases} -s_1 + 3c_1 = 0; \\ c_1^2 + s_1^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \\ c_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Система (3.20) із врахуванням (3.21), (3.22) приймає вид:

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 17; \\ 0x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -21; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases} \quad (3.23)$$

Перше рівняння (3.23) помножимо на c_2 , третє – на s_2 та додаємо обидва рівняння. Отримуємо нове перше рівняння:

$$x_1(10c_2 + 2s_2) + x_2(5c_2 + 3s_2) + x_3(6c_2 + s_2) = 17c_2 + 5s_2. \quad (3.24)$$

Перше рівняння (3.23) помножимо на $(-s_2)$, третє – на c_2 та додаємо обидва рівняння. Отримуємо нове третє рівняння:

$$x_1(-10s_2 + 2c_2) + x_2(-5s_2 + 3c_2) + x_3(-6s_2 + c_2) = -17s_2 + 5c_2. \quad (3.25)$$

Числа c_2 , s_2 є розв'язками системи:

$$\begin{cases} -10s_2 + 2c_2 = 0; \\ c_2^2 + s_2^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}; \\ c_2 = \frac{5}{\sqrt{26}}. \end{cases}$$

Тоді при врахуванні (3.24), (3.25) система (3.23) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} 52x_1 + 28x_2 + 31x_3 = 90; \\ 0x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -21; \\ 0x_1 + 10x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad (3.26)$$

В системі (3.26) залишаємо перше рівняння без змін. Друге помножимо на c_3 , третє – на s_3 , потім друге помножимо на $-s_3$, третє – на c_3 та додаємо:

$$x_2(-5c_3 + 10s_3) + x_3(-8c_3 - s_3) = -21c_3 + 8s_3; \quad (3.27)$$

$$x_2(5s_3 + 10c_3) + x_3(8s_3 - c_3) = 21s_3 + 8c_3; \quad (3.28)$$

Аналогічно попередньому визначаємо c_3, s_3 :

$$\begin{cases} 5s_3 + 10c_3 = 0; \\ c_3^2 + s_3^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \\ c_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Система (3.26) набуває вид:

$$\begin{cases} 52x_1 + 28x_2 + 31x_3 = 90; \\ 0x_1 - 25x_2 - 6x_3 = -37; \\ 0x_1 + 0x_2 - 17x_3 = -34. \end{cases}$$

- Звідки послідовно визначаємо (зворотний хід):

$$x_3 = 2; \quad x_2 = 1; \quad x_1 = 0.$$

Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet$

3.7. МЕТОД ПРОГОНКИ

Метод прогонки є частинним випадком метода Гаусса.

Застосовується до систем із трьох – п'ятидіагональною матрицею. Такі системи зустрічаються при чисельному розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь першого, другого порядків, при побудові кубічного сплайну.

Складемо розрахункові формули метода прогонки для випадка трьохдіагональної матриці коефіцієнтів.

Вважаємо, що система

$$A\mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (3.29)$$

містить трьохдіагональну матрицю A :

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & -b_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} - \text{означений стовпець вільних членів}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{шуканий вектор}.$$

В розгорнутому вигляді СЛАР (3.29) має наступний вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -b_1x_1 + c_1x_2 \\ a_2x_1 - b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3x_2 - b_3x_3 + c_3x_4 \\ \dots \\ a_nx_{n-1} - b_nx_n \end{array} \right. = \begin{array}{l} d_1; \\ d_2; \\ d_3; \\ \dots \\ d_n; \end{array} \quad (3.30)$$

вважається, що $a_1 = c_n = 0$; $b_i \neq 0 (i = \overline{1, n})$.

При розв'язанні таких систем можна застосувати обчислення, які не будуть враховувати нульові елементи. Це економить пам'ять та зменшує об'єм розрахунків.

Метод прогонки складається із двох етапів: *прямої та зворотної прогонки*.

- На першому етапі визначаються коефіцієнти прогонки.
- На другому етапі визначаються невідомі $x_1, \dots, x_n$.

З першого рівняння (3.30) визначимо x_1 через x_2 :

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1;$$

де

$$P_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad Q_1 = -\frac{d_1}{b_1}. \quad (3.31)$$

Підставимо цей вираз в друге рівняння (3.30), визначаємо x_2 через x_1 :

$$x_2 = P_2 x_3 + Q_2; \quad P_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 P_1}, \quad Q_2 = \frac{-d_2 + a_2 Q_1}{b_2 - a_2 P_1}.$$

Послідовно підставимо в i -те рівняння системи (3.30) вираз x_{i-1} , отриманий із $(i-1)$ -го рівняння, та виразимо x_i через x_{i+1} . Отримуємо формули прогонки:

$$x_i = Px_{i+1} + Q_i \quad , \quad (3.32)$$

$$P_i = \frac{c_i}{b_i - a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{-d_i + a_i Q_{i-1}}{b_i - a_i P_{i-1}}, \quad (i = \overline{2, n}). \quad (3.33)$$

Оскільки $c_n = 0$, то згідно (3.32)

$$x_n = Q_n. \quad (3.34)$$

Отже,

- *прямий етап* методу прогонки: визначення коефіцієнтів прогонки P_i, Q_i ($i = \overline{1, n}$) за формулами (3.31), (3.33);
- *зворотний етап*: визначення x_i ($i = \overline{n, 1}$) за формулами (3.34), (3.32).

Приклад 3.8

Методом прогонки розв'язати СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 & = 14; \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = -5; \\ 2x_3 - 5x_4 & = 19. \end{cases}$$

Розв'язання

- Прямий хід метода прогонки (визначення коефіцієнтів прогонки P_i, Q_i ($i = \overline{1; 4}$) за формулами (3.31), (3.33)):

$$P_1 = \frac{c_1}{b_1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \quad Q_1 = -\frac{d_1}{b_1} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2};$$

$$P_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 P_1} = \frac{5}{3 - \frac{1}{2}} = 2, \quad Q_2 = \frac{-d_2 + a_2 Q_1}{b_2 - a_2 P_1} = \frac{-14 + \frac{3}{2}}{3 - \frac{1}{2}} = -5;$$

$$P_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3 P_2} = -4, \quad Q_3 = \frac{-d_3 + a_3 Q_2}{b_3 - a_3 P_2} = -10;$$

$$P_4 = \frac{c_4}{b_4 - a_4 P_3} = 0, \quad Q_4 = \frac{-d_4 + a_4 Q_3}{b_4 - a_4 P_3} = -3.$$

- Зворотний хід метода прогонки (визначення x_i ($i = \overline{4;1}$) за формулами (3.34), (3.32)):

$$x_4 = Q_4 = -3;$$

$$x_3 = P_3 x_4 + Q_3 = -4 \cdot (-3) - 10 = 2;$$

$$x_2 = P_2 x_3 + Q_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1;$$

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$$

Відповідь: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ •

3.8. МЕТОДИ ФАКТОРИЗЦІЇ

Розглянемо СЛАР:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.35)$$

де $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець, який містить невідомі значення;

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – визначений вектор-стовпець вільних членів.

Ефективними є прямі методи рішення СЛАР, які використовують розкладання матриці A на множники (факторизацію).

Розглянемо два найбільш поширені методи факторизації [1]:

- метод квадратних коренів;
- схема Холецкого.

3.8.1. МЕТОД КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

Нехай в (3.35) $A = [a_{ij}]$ – *симетрична матриця* розмірності $n \times n$:
 $[a_{ij}] = [a_{ji}] = A^T \quad (i, j = \overline{1, n})$. Якщо $\det A \neq 0$, то матрицю A завжди можна представити у вигляді добутку двох транспонованих між собою трикутних матриць розмірністю $n \times n$:

$$A = C^T C, \quad (3.36)$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Згідно рівняння (3.36) послідовно можна знайти коефіцієнти матриці C .

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a_{11} = c_{11}^2;$$

$$a_{12} = c_{11}c_{12};$$

...

$$a_{1n} = c_{11}c_{1n};$$

$$a_{22} = c_{12}^2 + c_{22}^2;$$

...

$$a_{2n} = c_{12}c_{1n} + c_{22}c_{2n};$$

$$a_{nn} = c_{1n}^2 + c_{2n}^2 + \dots + c_{nn}^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sqrt{a_{11}}; \\ c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{c_{11}} \quad (j = \overline{2, n}); \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki}^2} \quad (i = \overline{2, n}); \\ c_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki} c_{kj}}{c_{ii}} \quad (2 \leq i < j); \\ c_{ij} &= 0 \quad (i > j). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Рівняння (3.35) з урахуванням (3.36) еквівалентно двом більш простим рівнянням (оскільки матриці C^T і C – трикутні):

$$C^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}; \quad C \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} c_{11}y_1 = b_1; \\ c_{12}y_1 + c_{22}y_2 = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \dots + c_{nn}y_n = b_n; \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} c_{1n}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = y_1; \\ \quad c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = y_2; \\ \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad c_{nn}x_n = y_n. \end{cases}$$

з яких послідовно визначаємо $\mathbf{y}$ та $\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{c_{11}}; \\ y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki} y_k}{c_{ii}} \quad (i = \overline{2; n}); \end{cases} \quad (3.39)$$

та

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{c_{nn}}, \\ x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k}{c_{ii}} \quad (i = \overline{n-1; 1}). \end{cases} \quad (3.40)$$

Наведений спосіб розв'язку СЛАР носить назву **метода квадратних коренів**.

Приклад 3.9

Знайти розв'язок СЛАР методом квадратних коренів.

$$\begin{cases} 2x_1 - 0,1x_2 + 2,7x_3 = 5,95; \\ -0,1x_1 + 9x_2 + 8x_3 = -50,2; \\ 2,7x_1 + 8x_2 + 15x_3 = -42,85. \end{cases}$$

Розв'язання

Представимо симетричну матрицю коефіцієнтів A при невідомих x_i ($i = \overline{1,3}$) у вигляді

(3.36): $A = C^T C$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,1 & 2,7 \\ -0,1 & 9 & 8 \\ 2,7 & 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначаємо коефіцієнти першого рядка матриці C за формулами (3.37) (залишаємо у відповідях три вірні десяткові знаки):

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2} = 1,414;$$

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{c_{11}} = -\frac{0,1}{1,414} = -0,071;$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{c_{11}} = \frac{2,7}{1,414} = 1,909.$$

За розрахунковими формулами (3.38) визначаємо послідовно коефіцієнти другого та третього рядка матриці C :

$$c_{22} = \sqrt{a_{22} - c_{12}^2} = \sqrt{9 - 0,071^2} = 3,000;$$

$$c_{23} = \frac{a_{23} - c_{12}c_{13}}{c_{22}} = \frac{8 + 0,071 \cdot 1,909}{3} = 2,712;$$

$$c_{33} = \sqrt{a_{33} - (c_{13}^2 + c_{23}^2)} = \sqrt{15 - (1,909^2 + 2,712^2)} = \sqrt{15 - (1,909^2 + 2,712^2)} = 2,000.$$

Отже:

$$C = \begin{pmatrix} 1,414 & -0,071 & 1,909 \\ 0 & 3,000 & 2,712 \\ 0 & 0 & 2,000 \end{pmatrix}.$$

За формулами (3.39) визначаємо координати допоміжного вектора $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$y_1 = \frac{b_1}{c_{11}} = \frac{5,95}{1,414} = 4,208;$$

$$y_2 = \frac{b_2 - c_{12}y_1}{c_{22}} = \frac{-50,2 + 0,071 \cdot 4,208}{3,000} = -16,634;$$

$$y_3 = \frac{b_3 - (c_{13}y_1 + c_{23}y_2)}{c_{33}} = \frac{-42,85 - (1,909 \cdot 4,208 - 2,712 \cdot 16,634)}{2,000} = -2,886.$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4,208 \\ -16,634 \\ -2,886 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулами (3.40) отримуємо координати шуканого вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$x_3 = \frac{y_3}{c_{33}} = \frac{-2,886}{2,000} = -1,443;$$

$$x_2 = \frac{y_2 - c_{23}x_3}{c_{22}} = \frac{-16,634 - 2,712 \cdot (-1,443)}{3,000} = -4,240;$$

$$x_1 = \frac{y_1 - (c_{12}x_2 + c_{13}x_3)}{c_{11}} = \frac{4,208 - (0,071 \cdot 4,240 - 1,909 \cdot 1,443)}{1,414} = 4,711.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4,711 \\ -4,240 \\ -1,443 \end{pmatrix}.$$

Нев'язки рівнянь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 5,95 - 2 \cdot 4,711 - 0,1 \cdot 4,240 + 2,7 \cdot 1,443 = 1 \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_2 &= -50,2 + 0,1 \cdot 4,711 + 9 \cdot 4,240 + 8 \cdot 1,443 = -0,025; \\ \varepsilon_3 &= -42,85 - 2,7 \cdot 4,711 + 8 \cdot 4,240 + 15 \cdot 1,443 = -0,05. \end{aligned}$$

Відповідь: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4,711 \\ -4,240 \\ -1,443 \end{pmatrix}$, абсолютна похибка розрахунків не перевищує 0,05 •

Зауваження. Якщо для деякого рядка i підкореневий вираз у формулі:

$c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki}^2}$ менше нуля, відповідні елементи c_{ii} будуть уявними. Але метод формально може бути застосований і в цьому випадку.

3.8.2. СХЕМА ХОЛЕЦЬКОГО

Розглянемо СЛАР (3.35). Будемо вважати, що $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця розмірності $n \times n$ ($i, j = \overline{1, n}$). Якщо всі головні мінори матриці A відмінні від нуля, то матрицю A можна представити у вигляді добутку

нижньої трикутної матриці $D = [d_{ij}]$ та верхньої трикутної матриці $C = [c_{ij}]$ з одиничною діагоналлю:

$$A = D \cdot C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо елементи матриць D і C .

Для першого стовбця матриці A маємо:

$$a_{11} = d_{11};$$

$$a_{21} = d_{21};$$

...

$$a_{n1} = d_{n1}.$$

Отже, перший стовпець матриці D визначено:

$$d_{i1} = a_{i1}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для першого рядка матриці A маємо:

$$a_{12} = d_{11} \cdot c_{12} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad a_{1n} = d_{11} \cdot c_{1n}.$$

Отже, перший рядок матриці C визначено:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}} \quad (j = \overline{2, n}).$$

Заповнюємо другий стовпець матриці D згідно співвідношень:

$$\begin{aligned} a_{22} &= d_{21}c_{12} + d_{22} \Rightarrow d_{22} = a_{22} - d_{21}c_{12}; \dots; \\ a_{n2} &= d_{n1}c_{12} + d_{n2} \Rightarrow d_{n2} = a_{n2} - d_{n1}c_{12} \end{aligned}$$

Отже: $d_{i2} = a_{i2} - d_{i1}c_{12} \quad (i = \overline{2, n})$.

Визначаємо *другий рядок матриці C*:

$$\begin{aligned} a_{23} &= d_{21}c_{13} + d_{22}c_{23} \Rightarrow c_{23} = \frac{a_{23} - d_{21}c_{13}}{d_{22}}; \dots; \\ a_{2n} &= d_{21}c_{1n} + d_{22}c_{2n} \Rightarrow c_{2n} = \frac{a_{2n} - d_{21}c_{1n}}{d_{22}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$c_{2j} = \frac{a_{2j} - d_{21}c_{1j}}{d_{22}} \quad (2 < j \leq n).$$

Далі визначаємо аналогічним чином елементи *третього стовпця* матриці D : $d_{33}, \dots, d_{n3}$, та елементи *третього рядка* матриці C : $c_{34}, \dots, c_{3n}$ і так далі, доки не будуть визначені усі елементи матриць D та C .

Ітераційні формули метода Холецкого:

$$d_{i1} = a_{i1}, \quad (i = \overline{1, n}); \quad (3.41)$$

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}} \quad (j = \overline{2, n}) \quad (3.42)$$

$$d_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{ik}c_{kj}; \quad (i \geq j > 1); \quad (3.43)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}c_{kj} \right), \quad (2 < j \leq n; i < j). \quad (3.44)$$

Оскільки матриці D та C – трикутні, то шуканий вектор x легко знаходиться із послідовностей СЛАР:

$$Dy = b; \quad Cx = y \quad (3.45)$$

за формулами:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{d_{11}}, \\ y_i = \frac{1}{d_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik} y_k \right) \quad (i > 1); \end{cases} \quad (3.46)$$

та

$$\begin{cases} x_n = y_n; \\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k, \quad (i = \overline{n-1; 1}). \end{cases} \quad (3.47)$$

Схема Холецкого зручна для роботи на обчислювальних машинах, оскільки у цьому випадку операції «накоплення» (3.41) – (3.44) можна проводити без запису усіх проміжних результатів.

Тобто **робочі формули** схеми Холецкого:

- за формулами (3.46) визначити координати вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;
- тоді формули (3.47) визначають координати шуканого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Приклад 3.10

Розв'язати СЛАР (3.48) із застосуванням схеми Холецкого.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12; \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases} \quad (3.48)$$

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = DC = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

За формулами (3.41): $d_{i1} = a_{i1}$, ($i = 1, n$) визначаємо перший стовпець матриці D , за формулами (3.42): $c_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}}$ ($j = \overline{2, n}$) – перший рядок матриці C :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & d_{22} & 0 & 0 \\ 2 & d_{32} & d_{33} & 0 \\ 1 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За формулами (3.43): $d_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{ik}c_{kj}$; ($i \geq j > 1$); визначаємо другий стовпець матриці D :

$$\begin{cases} d_{22} = a_{22} - d_{21}c_{12} = 1 - (-5) \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}; \\ d_{32} = a_{32} - d_{31}c_{12} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}; \\ d_{42} = a_{42} - d_{41}c_{12} = -5 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8/3 & 0 & 0 \\ 2 & -2/3 & d_{33} & 0 \\ 1 & -16/3 & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За формулами (3.44): $c_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik} c_{kj} \right)$, $(2 < j \leq n; i < j)$ – другий рядок C :

$$c_{23} = \frac{3}{8} (a_{23} - d_{21} c_{13}) = \frac{3}{8} \left(3 - 5 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2};$$

$$c_{24} = \frac{3}{8} (a_{24} - d_{21} c_{14}) = \frac{3}{8} \left(-4 + 5 \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{4}.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8/3 & 0 & 0 \\ 2 & -2/3 & d_{33} & 0 \\ 1 & -16/3 & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно за формулами (3.43) знаходимо третій стовпець D :

$$d_{33} = a_{33} - (d_{31} c_{13} + d_{32} c_{23}) = 1 - \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) = 2;$$

$$d_{43} = a_{43} - (d_{41} c_{13} + d_{42} c_{23}) = 3 - \left(1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{16}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) = 6;$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

та за (3.44) – третій рядок C :

$$c_{34} = \frac{1}{d_{33}} (a_{34} - [d_{31} c_{14} + d_{32} c_{24}]) = \frac{1}{2} \left(-1 - \left[2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right] \right) = -\frac{5}{4}.$$

Четвертий стовпець D :

$$d_{44} = a_{44} - (d_{41} c_{14} + d_{42} c_{24} + d_{43} c_{34}) = -3 - \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{16}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + 6 \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) \right) = \frac{5}{2}.$$

Отже:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8/3 & 0 & 0 \\ 2 & -2/3 & 2 & 0 \\ 1 & -16/3 & 6 & 5/2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Відповідно розрахункових формул (3.46) визначаємо y_i ($i = \overline{1,3}$).

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{d_{11}} = \frac{6}{3} = 2; \\ y_2 = \frac{1}{d_{11}}(b_2 - d_{21}y_1) = \frac{3}{8}(-12 + 5 \cdot 2) = -\frac{3}{4}; \\ y_3 = \frac{1}{d_{33}}(b_3 - (d_{31}y_1 + d_{32}y_2)) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(2 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)\right) = -\frac{7}{4}; \\ y_4 = \frac{1}{d_{44}}(b_4 - (d_{41}y_1 + d_{42}y_2 + d_{43}y_3)) = \frac{2}{5}\left(3 - \left(2 + \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} - 6 \cdot \frac{7}{4}\right)\right) = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Згідно формул (3.47), послідовно отримуємо:

$$\begin{cases} x_4 = y_4 = 3; \\ x_3 = y_3 - c_{34}x_4 = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} \cdot 3 = 2; \\ x_2 = y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = -1; \\ x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4 = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet$

ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМИ ХОЛЕЦЬКОГО ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

Ключовий етап метода Холецького – факторизація матриці A , тобто представлення її у вигляді добутку: $A = D \cdot C \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\det A = \det D \cdot \det C$. Оскільки $\det C = 1$, то $\det A = \det D = \prod_{i=1}^n d_{ii}$.

Приклад 3.11

Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

В попередньому прикладі 3.10 було наведено факторизацію матриці A із застосуванням схеми Холецького. Тобто відповідно до формул (3.49), (3.50) було отримано:

$$A = D \cdot C,$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8/3 & 0 & 0 \\ 2 & -2/3 & 2 & 0 \\ 1 & -16/3 & 6 & 5/2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\det A = \det D = 3 \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 40.$$

Відповідь: $\det A = 40$ •

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим відрізняються прямі та ітераційні методи розв'язання СЛАР?
2. В чому полягає прямий та зворотний хід метода Гаусса?
3. В чому полягає суть метода Гаусса з вибором головного елемента?
4. Яким чином можна уточнити наближені корені СЛАР із застосуванням метода Гаусса?
5. В чому полягає відмінність метода головних елементів від метода Гаусса?
6. Як обчислюється визначник матриці із застосуванням схеми Гаусса?
7. Яким чином визначається обернена матриця із застосуванням метода Гаусса?
8. В чому полягає ідея розв'язку СЛАР методом обертання?
9. До розв'язку СЛАР якого виду застосовується метод прогонки?
10. В чому полягає суть метода прогонки?
11. Які методи факторизації Вам відомі?
12. Які обмеження на матрицю коефіцієнтів при невідомих покладають при розв'язанні СЛАР методом квадратних коренів?
13. В чому полягає ідея схеми Холецького?
14. Яким чином схема Холецького може бути застосована для обчислення визначника матриці?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Дайте відповідь «так» або «ні».

1. Чи є метод Гаусса прямим?
Так
2. Метод Гаусса є узагальненням метода головних елементів.
Ні
3. Схема з вибором головного елемента по всій матриці менш чутлива до помилок округлення, ніж метод Гаусса
Так
4. Визначник матриці дорівнює добутку «провідних» елементів для відповідної схеми Гаусса.
Так

5. Сема Холецького – частинний випадок метода квадратних коренів.

Hi

6. Будь-яку СЛАР можна розв'язати методом квадратних коренів

Hi

7. Будь-яку СЛАР можна розв'язати із застосуванням схеми Холецького

Hi

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 3

Індивідуальна робота 3 складається із трьох завдань (3.1 – 3.3).

Завдання 3.1. Розробити програмне забезпечення, що дозволяє отримувати розв'язок СЛАР:

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

де $A = [a_{ij}]$ – задана матриця коефіцієнтів системи довільної розмірності $n \times n$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – означений вектор; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – шуканий вектор із застосуванням усіх наступних методів:

1. головних елементів;
2. обертань;
3. схеми Холецького.

Чисельні значення завдання 1 наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3. Індивідуальна робота 3. Завдання 3.1

Номер варіанта	Матриця коефіцієнтів системи $A = [a_{i,j}] \quad (i, j = \overline{1,6})$						Стовпець вільних членів $\mathbf{b}$
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
1	2,1	1,3	–5,2	1,4	3,3	4,6	14,35
	6,3	–0,4	–14,4	7,8	14,0	21,0	90,95
	2,1	–3,0	–1,7	9,2	7,8	24,6	129,28
	4,2	–1,7	–6,9	10,6	11,1	29,2	143,63
	–2,1	3,0	–0,6	–13,4	–0,5	0,0	–65,30
	4,2	2,6	–15,0	–5,6	13,5	0,6	–43,71

Продовження таблиці 3.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
2	1,7	−3,1	2,2	0,6	1,8	−0,1	−7,31
	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	40,53
	−0,4	5,7	4,1	3,6	−0,5	2,7	26,42
	4,7	−0,6	3,3	7,1	1,9	−4,6	23,24
	−0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	52,40
	2,6	3,1	7,4	−4,1	8,2	−0,1	31,99
3	−3,7	0,2	5,3	−1,4	2,2	3,4	−3,25
	0,6	2,4	−1,7	3,0	−7,1	0,7	−30,32
	4,8	−5,2	−2,3	1,6	0,8	3,5	19,01
	1,1	4,4	0,8	3,1	−2,8	−5,1	6,19
	−0,3	1,5	−1,4	6,2	1,7	0,4	7,04
	2,2	−0,1	4,5	−3,3	2,6	6,6	20,35
4	1,7	−0,1	8,2	−1,4	2,3	0,0	41,48
	−1,3	−0,9	2,1	6,7	0,0	1,1	6,27
	−0,1	−1,3	0,5	2,4	5,6	0,6	16,44
	6,1	−0,1	3,2	1,2	0,7	−0,4	40,62
	2,2	0,1	−0,2	0,4	−1,8	5,1	5,08
	0,4	7,6	2,0	−0,3	1,8	2,1	3,65
5	0,9	−1,7	0,3	6,9	1,2	−0,1	0,78
	−0,3	1,9	7,4	−1,1	0,9	0,2	−13,80
	7,2	0,2	−0,9	1,3	−2,0	1,9	12,35
	0,4	0,6	2,2	−1,2	−0,1	5,2	12,69
	1,6	8,8	−0,4	0,7	2,3	−1,1	10,57
	−1,3	−0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	1,91
6	2,4	−1,0	0,2	0,0	1,4	6,8	13,12
	0,0	0,4	5,4	−1,0	−1,9	0,1	11,74
	−1,9	1,5	−0,7	0,3	7,4	0,0	18,81
	8,3	−1,4	0,0	1,0	2,1	−1,7	−6,40
	2,2	0,6	0,0	6,6	−0,1	0,4	4,64
	−0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	13,78
7	−2,5	0,0	−0,4	0,0	6,7	1,2	4,13
	1,6	0,3	0,0	8,0	−1,1	−0,7	24,59
	1,2	−1,0	0,7	−0,9	0,0	5,9	−5,39
	−1,0	8,4	0,2	−1,3	0,0	2,1	15,64
	9,0	0,7	−1,4	2,1	−0,2	−0,8	12,98
	0,2	−1,4	7,7	0,1	1,9	0,0	−10,12

Продовження таблиці 3.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
8	−0,9	0,3	−0,5	0,0	5,4	−1,2	−3,19
	0,7	−0,4	6,4	−2,0	1,4	0,0	−9,30
	5,9	0,0	−0,8	1,1	0,3	0,7	3,83
	0,0	1,6	1,7	−2,1	0,0	6,6	19,43
	1,2	−1,0	0,0	7,9	−0,2	0,4	8,16
	−0,1	6,5	1,2	0,0	−0,9	−2,3	19,45
9	−1,4	1,7	−0,1	8,2	2,3	0,0	−22,23
	0,4	−1,8	5,1	2,2	0,1	−0,2	1,65
	0,7	−0,4	−2,0	0,0	1,4	6,4	19,00
	0,0	−0,8	1,1	0,3	5,9	0,7	3,17
	6,7	0,0	1,1	−1,3	2,1	−0,9	12,13
	1,2	7,9	0,0	−1,0	−0,2	0,4	0,72
10	−0,4	0,7	1,2	3,2	6,1	−0,1	−22,40
	0,3	0,0	8,0	1,6	−1,1	−0,7	−9,39
	−0,8	−0,2	2,1	−1,4	0,7	9,0	−3,09
	0,0	6,7	1,1	2,1	−0,9	−1,3	3,94
	5,6	2,4	0,5	−1,3	−0,1	0,6	−1,69
	1,8	−0,3	2,0	7,6	0,4	2,1	21,40
11	2,1	1,8	−0,3	2,0	0,4	7,6	−1,52
	0,0	1,6	6,8	0,2	−1,0	2,4	10,34
	1,9	2,0	1,3	−0,9	7,2	0,2	10,61
	0,6	5,6	2,4	−0,1	−1,3	0,5	−1,98
	6,9	1,2	−1,0	0,3	−1,7	0,7	22,74
	2,0	0,6	0,1	5,7	−0,8	−1,3	28,30
12	−1,0	1,2	0,3	−1,7	6,9	0,9	−0,65
	−0,1	−1,2	5,2	2,2	0,6	0,4	−4,52
	5,9	0,7	0,3	1,1	−0,8	0,0	6,23
	0,2	0,9	−1,1	1,9	−0,3	7,4	25,28
	1,9	−2,0	1,3	7,2	0,2	−0,9	1,74
	1,4	6,8	0,0	0,2	−1,0	2,4	−4,26
13	0,2	0,9	−1,1	1,9	7,4	−0,3	−5,94
	−0,9	0,2	7,2	1,9	−2,0	1,3	7,40
	−1,1	2,3	0,7	−0,4	1,6	8,8	−6,04
	2,0	5,7	0,6	0,1	−0,8	−1,3	−7,38
	6,6	0,0	−2,1	1,7	1,6	0,0	15,74
	−1,0	1,2	0,3	6,9	0,9	−1,7	15,55

Продовження таблиці 3.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
14	2,4	0,0	0,1	1,1	7,8	−0,5	−11,76
	0,1	−1,9	5,4	−1,0	0,4	0,0	4,66
	0,0	0,3	−0,7	1,5	−1,9	7,4	28,60
	5,7	2,0	0,6	0,1	−0,8	−1,3	−16,18
	0,4	−0,1	0,0	6,6	0,6	2,2	20,94
	1,4	6,8	0,0	0,2	−1,0	2,4	5,92
15	1,2	0,0	−0,4	6,6	0,1	−2,5	−8,86
	0,0	−0,9	6,1	0,7	−1,0	1,2	7,98
	0,0	1,9	0,1	−1,3	0,2	7,8	4,70
	−0,7	−1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	29,47
	−0,1	5,2	−1,2	2,2	0,6	0,4	6,09
	7,9	0,4	−0,2	0,0	−1,0	1,2	−27,93
16	1,9	−1,7	0,3	2,1	7,9	−0,4	11,78
	0,9	0,0	6,8	−2,1	−0,9	1,3	10,44
	−0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	13,82
	1,8	5,2	0,2	−0,4	0,0	2,2	−1,72
	5,8	0,5	−2,4	0,3	1,4	−0,1	1,76
	0,0	2,2	−1,2	8,0	−0,1	1,7	25,45
17	−0,1	0,2	−1,0	5,2	−1,8	0,4	3,42
	0,0	2,3	8,4	−0,2	1,6	−1,3	−11,56
	0,4	−0,1	−1,1	0,0	8,0	1,2	27,17
	−1,2	5,7	−0,5	0,0	0,3	−0,9	3,69
	−0,8	1,9	−1,4	1,1	0,0	6,6	0,90
	6,7	0,1	−2,1	1,7	1,5	0,0	11,57
18	−0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	−0,3	−10,57
	0,0	2,1	8,4	0,2	−1,8	1,3	17,30
	0,4	−0,1	1,2	0,0	8,1	−1,0	7,62
	0,6	6,0	−0,4	−1,1	0,9	0,0	3,85
	−0,8	2,0	−1,4	−1,1	0,1	6,8	32,76
	6,3	−1,4	0,0	2,0	0,4	−0,7	1,95
19	2,1	0,4	7,7	−1,9	0,4	−1,7	−8,87
	1,3	−0,8	−2,0	1,2	6,8	0,1	12,52
	−0,7	−1,0	1,5	8,1	0,0	0,3	33,09
	0,0	6,2	−3,1	1,1	−0,8	−0,4	0,19
	0,6	0,0	1,2	−0,4	−2,5	5,7	17,56
	8,9	−0,6	1,3	−2,0	0,2	0,7	14,12

Продовження таблиці 3.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
20	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,0	0,3	-11,48
	2,0	0,2	7,8	-2,1	0,2	-1,6	9,85
	-1,2	-0,8	2,0	0,9	6,6	0,1	19,77
	0,2	7,0	-3,3	1,4	-0,1	0,5	-19,81
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,61
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	19,36
21	-0,5	-1,3	-0,2	2,2	5,6	0,4	13,76
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	5,09
	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	8,94
	0,1	7,0	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-1,50
	7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	-15,59
	1,4	0,6	5,8	0,1	-0,6	-1,8	2,55
22	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-1,82
	0,7	-0,2	7,1	-1,2	1,9	2,1	2,64
	-2,2	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	4,54
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	-9,40
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	16,54
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	22,19
23	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	0,39
	-1,7	0,9	6,9	0,3	-1,2	-1,0	-15,29
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	2,2	-1,1	13,95
	0,1	1,6	-1,5	-2,1	0,0	6,6	-17,54
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	5,60
	1,3	-2,0	1,9	7,2	0,2	-0,9	3,68
24	2,4	-1,0	0,2	0,0	6,8	1,4	11,18
	2,2	0,6	6,6	0,0	-0,1	-0,4	15,68
	7,4	-1,9	1,5	-0,7	0,3	0,0	21,01
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	2,79
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	0,69
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-18,92
25	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	-1,82
	0,1	0,6	5,7	-1,3	-0,8	2,0	299,61
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	2,34
	6,9	-0,9	-1,7	1,2	0,3	-1,0	15,43
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	36,80
	-1,9	7,0	0,1	-1,6	0,7	-1,1	6,21

Продовження таблиці 3.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
26	0,4	0,6	2,2	-1,2	5,2	-0,1	-0,40
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	-13,07
	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	14,32
	1,2	-1,0	0,0	-0,2	0,4	7,8	1,54
	1,4	8,2	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	6,93
	1,2	-1,0	0,7	6,1	-0,9	0,0	13,02
27	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-3,84
	1,6	0,0	8,1	-1,2	2,1	-0,1	30,16
	6,2	0,1	-2,7	1,2	-0,3	-0,5	-25,78
	-0,1	1,4	0,4	2,1	0,5	5,7	17,58
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	11,30
	1,3	-0,9	-2,1	6,8	0,0	0,7	-4,95
28	-0,9	0,3	0,0	-0,5	5,8	-1,1	-6,18
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	7,53
	6,6	0,0	1,1	-1,4	1,7	-0,6	24,20
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	15,66
	1,2	8,2	0,0	-1,1	0,1	0,2	-6,36
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-9,21
29	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	0,6	-13,70
	-0,3	1,6	5,3	2,4	0,3	-0,2	20,17
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	12,52
	-0,7	0,4	2,0	0,0	-1,4	6,3	17,02
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-18,95
	1,3	-1,8	0,2	8,4	2,1	0,0	30,19
30	0,4	-0,8	0,0	1,1	6,2	-3,1	15,05
	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-21,52
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,99
	0,7	0,2	-2,0	1,3	-0,6	8,9	18,45
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	1,48
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	10,18

Завдання 3.2. Розробити програмне забезпечення, що дозволяє отримати розв’язок СЛАР довільної розмірності методом прогонки.

Виконати тестування програми для розв’язання заданої в таблиці 3.4 СЛАР.

Таблиця 3.4. Індивідуальна робота 3. Завдання 3.2

Номер варіанта	СЛАР	Номер варіанта	СЛАР
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
1	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2,0; \\ 2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,3; \\ 2x_2 + 3,6x_3 - 0,8x_4 = 2,6; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,2. \end{cases}$	2	$\begin{cases} 5,1x_1 - 1,1x_2 = 2,1; \\ 2,2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,4; \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,7; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 6,1x_1 - 1,1x_2 = 3,2; \\ 2,3x_1 + 4,8x_2 - 1,1x_3 = 3,5; \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,8; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,4. \end{cases}$	4	$\begin{cases} 6,2x_1 - 1,1x_2 = 4,2; \\ 3,3x_1 + 5,7x_2 - 1,2x_3 = 3,5; \\ 2x_2 + 3,8x_3 - 0,9x_4 = 3,8; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 6,3x_1 - 1,2x_2 = 4,3; \\ 3,4x_1 + 5,8x_2 - 1,3x_3 = 3,6; \\ 2,1x_2 + 4,1x_3 - 0,7x_4 = 3,9; \\ 3x_3 + 4,5x_4 = 7,6. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 6,5x_1 - 1,4x_2 = 4,6; \\ 3,6x_1 + 5,9x_2 - 1,5x_3 = 3,7; \\ 2,2x_2 + 4,3x_3 - 0,6x_4 = 3,1; \\ 3x_3 + 4,7x_4 = 7,7. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = 4,0; \\ 4x_1 + 9,2x_2 - 2x_3 = 6,6; \\ 4x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_4 = 5,2; \\ 6x_3 + 8,8x_4 = 14,4. \end{cases}$	8	$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 = 5,0; \\ 6x_1 + 9,9x_2 - 2x_3 = 6,5; \\ 4x_2 + 7,3x_3 - 1,5x_4 = 5,5; \\ 6x_3 + 8,8x_4 = 14,3. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 10,5x_1 - 2,5x_2 = 4,5; \\ 4,5x_1 + 9,2x_2 - 2,5x_3 = 6,5; \\ 4,5x_2 + 7,2x_3 - 1,6x_4 = 5,5; \\ 6,5x_3 + 8,8x_4 = 14,5. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 9,5x_1 - 3,5x_2 = 5,5; \\ 3,5x_1 + 9,9x_2 - 3,5x_3 = 6,5; \\ 3,5x_2 + 9,2x_3 - 2,6x_4 = 5,5; \\ 5,5x_3 + 9,8x_4 = 16,5. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 7,5x_1 - 1,5x_2 = 3,0; \\ 3,5x_1 + 6,9x_2 - 1,5x_3 = 4,9; \\ 3,5x_2 + 5,9x_3 - 1,2x_4 = 3,9; \\ 4,5x_3 + 6,6x_4 = 11,2. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1,5x_1 - 0,3x_2 = 0,6; \\ 0,6x_1 + 1,4x_2 - 0,3x_3 = 1,0; \\ 0,6x_2 + 1,1x_3 - 0,2x_4 = 0,8; \\ 0,9x_3 + 1,3x_4 = 2,2. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2,5x_1 - 0,3x_2 = 0,6; \\ 0,7x_1 + 2,4x_2 - 0,3x_3 = 0,9; \\ 1,1x_2 + 2,8x_3 - 0,2x_4 = 0,8; \\ 0,9x_3 + 2,5x_4 = 1,2. \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3,75x_1 - 0,75x_2 = 1,50; \\ 1,50x_1 + 3,5x_2 - 0,75x_3 = 2,50; \\ 1,50x_2 + 2,75x_3 - 0,50x_4 = 2,00; \\ 2,25x_3 + 3,25x_4 = 5,50. \end{cases}$

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
15	$\begin{cases} 4,35x_1 - 0,45x_2 = 1,40; \\ 1,50x_1 + 4,5x_2 - 0,75x_3 = 2,90; \\ 1,50x_2 + 3,75x_3 - 0,50x_4 = 2,50; \\ 2,25x_3 + 4,25x_4 = 5,50. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 11,5x_1 - 2,8x_2 = 6,8; \\ 3,5x_1 + 9,9x_2 - 3,5x_3 = 7,5; \\ 4,6x_2 + 9,3x_3 - 1,7x_4 = 5,6; \\ 6,6x_3 + 8,7x_4 = 12,2. \end{cases}$
17	$\begin{cases} 5,8x_1 - 2,1x_2 = 2,7; \\ 2,6x_1 + 5,1x_2 - 1,2x_3 = 3,8; \\ 2,3x_2 + 4,8x_3 - 0,9x_4 = 2,9; \\ 3,1x_3 + 4,6x_4 = 7,3. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 10,45x_1 - 2,52x_2 = 4,15; \\ 4,85x_1 + 9,82x_2 - 2,25x_3 = 6,31; \\ 4,15x_2 + 8,02x_3 - 1,26x_4 = 5,25; \\ 6,49x_3 + 8,78x_4 = 14,15. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 8,5x_1 - 1,5x_2 = 3,5; \\ 3,3x_1 + 7,9x_2 - 1,5x_3 = 4,8; \\ 3,4x_2 + 6,9x_3 - 1,3x_4 = 3,8; \\ 4,1x_3 + 7,6x_4 = 10,8. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 7,75x_1 - 1,75x_2 = 2,55; \\ 2,50x_1 + 7,55x_2 - 0,75x_3 = 3,50; \\ 1,50x_2 + 5,75x_3 - 2,50x_4 = 2,45; \\ 2,25x_3 + 5,25x_4 = 5,65. \end{cases}$
21	$\begin{cases} 17,5x_1 - 5,5x_2 = 4,2; \\ 6,5x_1 + 16,9x_2 - 1,5x_3 = 4,9; \\ 4,5x_2 + 15,9x_3 - 3,3x_4 = 3,9; \\ 6,3x_3 + 16,6x_4 = 12,1. \end{cases}$	22	$\begin{cases} 13,7x_1 - 4,7x_2 = 2,5; \\ 5,5x_1 + 15,5x_2 - 4,6x_3 = 8,5; \\ 3,9x_2 + 12,5x_3 - 2,7x_4 = 4,4; \\ 2,25x_3 + 10,2x_4 = 5,6. \end{cases}$
23	$\begin{cases} 18,5x_1 - 12,5x_2 = 5,4; \\ 6,5x_1 + 19,2x_2 - 4,5x_3 = 8,3; \\ 3,5x_2 + 9,2x_3 - 3,8x_4 = 5,2; \\ 6,5x_3 + 18,9x_4 = 15,1. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 4,28x_1 - 1,49x_2 = 1,63; \\ 2,55x_1 + 6,51x_2 - 0,85x_3 = 3,91; \\ 1,59x_2 + 7,79x_3 - 2,58x_4 = 2,54; \\ 2,29x_3 + 6,24x_4 = 5,55. \end{cases}$
25	$\begin{cases} 12,4x_1 - 3,3x_2 = 5,9; \\ 6,6x_1 + 11,9x_2 - 2,8x_3 = 6,9; \\ 4,5x_2 + 9,3x_3 - 1,8x_4 = 5,9; \\ 6,1x_3 + 8,9x_4 = 12,2. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 8,15x_1 - 1,25x_2 = 3,35; \\ 3,13x_1 + 7,19x_2 - 1,35x_3 = 4,28; \\ 3,14x_2 + 6,79x_3 - 1,23x_4 = 3,18; \\ 4,41x_3 + 7,86x_4 = 10,63. \end{cases}$
27	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2,0; \\ 2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,3; \\ 2x_2 + 3,6x_3 - 0,8x_4 = 2,6; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,2. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 5,1x_1 - 1,1x_2 = 2,1; \\ 2,2x_1 + 4,6x_2 - x_3 = 3,4; \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,7; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,3. \end{cases}$
29	$\begin{cases} 6,1x_1 - 1,1x_2 = 3,2; \\ 2,3x_1 + 4,8x_2 - 1,1x_3 = 3,5; \\ 2x_2 + 3,7x_3 - 0,9x_4 = 2,8; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,4. \end{cases}$	30	$\begin{cases} 6,2x_1 - 1,1x_2 = 4,2; \\ 3,3x_1 + 5,7x_2 - 1,2x_3 = 3,5; \\ 2x_2 + 3,8x_3 - 0,9x_4 = 3,8; \\ 3x_3 + 4,4x_4 = 7,1. \end{cases}$

Завдання 3.3.

1. Розробити програмне забезпечення, що обчислює для квадратної матриці A довільної розмірності обернену матрицю A^{-1} із застосуванням метода Гаусса та заданою точністю $\varepsilon = 0,001$.
2. Використати метод виправлення елементів оберненої матриці (побудова послідовних наближень (3.15), (3.16)).

Для тестування програми взяти коефіцієнти матриці A , зазначеної в завданні 3.1 (таблиця 3.3).

РОЗДІЛ 4.

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Найбільш типовою областю застосування ітераційних методів – системи лінійних рівнянь, які виникають при чисельному розв'язанні рівнянь з частинними похідними [9].

Ітераційні методи дозволяють отримати деяку послідовність, збіжну до точного розв'язку. Швидкість збіжності ітераційного методу залежить від правильного вибору початкового наближення, який вибирається першим членом послідовності. Проте зазвичай ітераційні методи є збіжними для довільного початкового наближення.

Несуттєвим недоліком ітераційних методів є той факт, що кожний із наведених методів дає збіжну послідовність не для довільної СЛАР. Однак для будь-якого вибраного методу можна так перетворити систему, щоб для перетвореної СЛАР цей метод став збіжним.

4.1. МЕТОД ІТЕРАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ СЛАР

Цей найпростіший ітераційний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що система рівнянь

$$Ax = b \quad (4.1)$$

перетворюється до вигляду

$$x = Bx + c \quad (4.2)$$

і її розв'язок знаходиться як границя послідовності

$$x^{n+1} = Bx^n + c, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.3)$$

Сформулюємо достатню умову збіжності процесу ітерацій [1].
Ітераційний процес (4.3) збігається до розв'язку системи незалежно від вибору початкового наближення, якщо виконується хоча б одна із умов:

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (i = \overline{1, n})$$

або

$$\sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (j = \overline{1, n}),$$

(тобто якщо $\|B\| < 1$).

Як наслідок, метод ітерації збігається при виконанні нерівності:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i, j = \overline{1, n})$$

При цьому, початкове наближення x^0 можна вибирати довільно. На практиці за початкове наближення x^0 часто беруть стовпець вільних членів c .

На рис 4.1. наведено блок-схему розв'язання СЛАР методом простої ітерації. В наведеній блок-схемі:

n – кількість рівнянь;

b_i – елементи вектора вільних членів;

a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів при невідомих;

ε – точність обчислень;

x_{0i} – елементи вектора невідомих на попередній ітерації;

x_i – елементи вектора невідомих на теперішній ітерації;

$iter$ – номер ітерації.

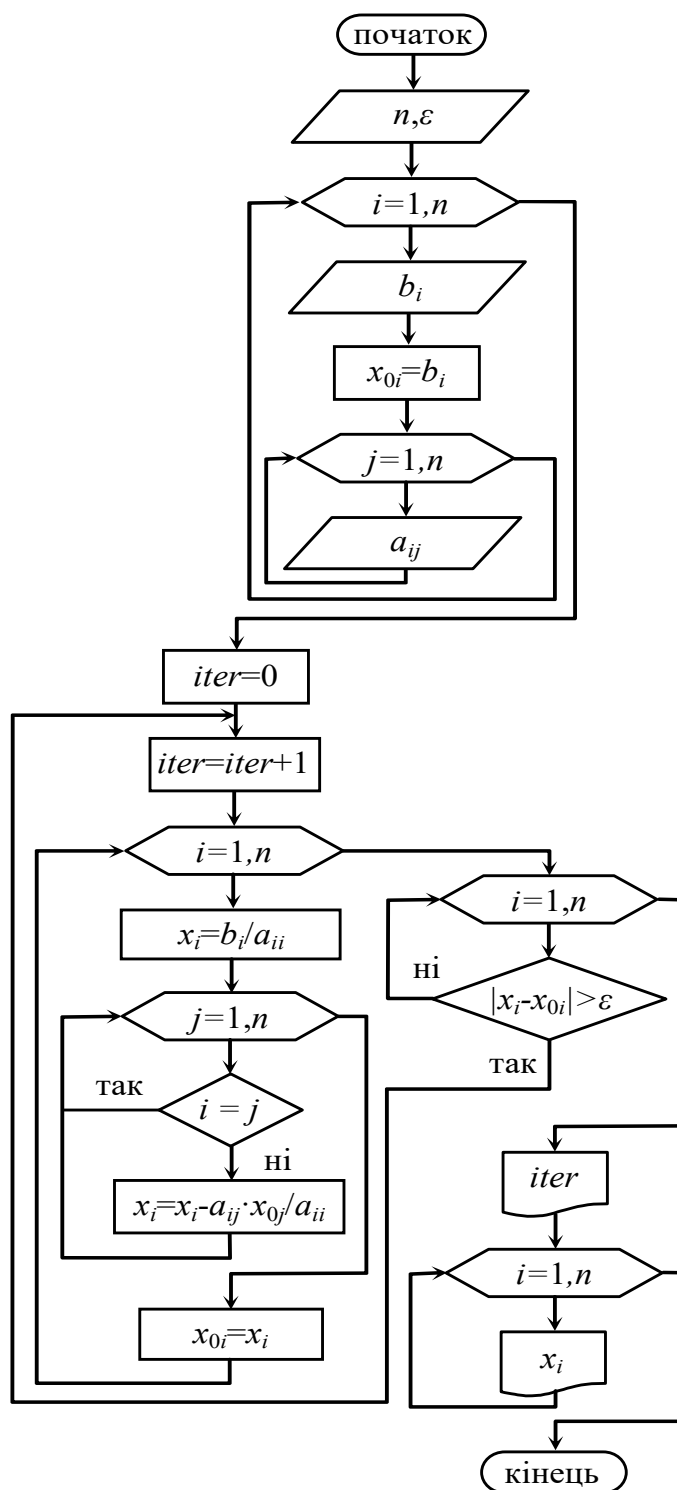


Рис.4.1. Блок-схема розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простої ітерації

Для приведення вихідної системи до вигляду (4.2) зазвичай роблять наступне. Із заданої системи виділяють рівняння з коефіцієнтами при невідомих, модулі яких більші від суми модулів інших коефіцієнтів при

невідомих у рівнянні. Кожне виділене рівняння вписують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

З останніх невикористаних і виділених рівнянь системи складають лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб був дотриманий зазначений вище принцип комплектування нової системи, й усі вільні рядки виявилися заповненими. При цьому треба подбати, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, що є рівнянням нової системи.

Якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками, то для одержання розв'язку з m числом десяткових знаків ($m \leq p$) потрібно в значеннях послідовних наближень утримувати $m + 1$ десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

Приклад 4.1

Методом простої ітерації з точністю до двох вірних десяткових знаків після коми розв'язати систему рівнянь [15]

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0, & (A) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, & (B) \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0, & (B) \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0, & (Г) \end{cases}$$

Розв'язання

У рівнянні (Б) коефіцієнт при x_3 за модулем більше від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих, тому його можна прийняти за третє рівняння нової системи. Коефіцієнт при x_1 в рівнянні (Г) також більше від суми модулів інших коефіцієнтів рівняння (Г), тому можна прийняти це рівняння за перше рівняння нової системи. Таким чином, нова система має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0, & (I) \\ \dots\dots\dots, & (II) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, & (III) \\ \dots\dots\dots, & (IV) \end{cases}$$

Аналізуючи початкову систему, легко помітити, що для одержання рівняння (II) з максимальним за модулем коефіцієнтом при x_2 досить скласти різницю (А) – (Б):

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0 (II).$$

Тепер у нову систему ввійшли рівняння $(A), (B)$ і (Γ) , тому в рівняння (IV) обов'язково повинне ввійти рівняння (B) даної системи. Підбором переконаємося, що за рівняння (IV) можна взяти лінійну комбінацію $2(A) - (B) + 2(B) - (\Gamma)$, тобто

$$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 - 10 = 0 (IV).$$

У підсумку одержали перетворену систему рівнянь $(I) - (IV)$ еквівалентну даній. Розв'язавши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4 - 0,4, \\ x_2 = -0,2x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0,2, \\ x_3 = 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0,2x_4 - 0,4, \\ x_4 = 0,333x_1 + 0 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1,111, \end{cases}$$

для знаходження розв'язку якої можна застосувати метод простої ітерації, тому що для неї виконується достатня умова збіжності. За нульове наближення коренів системи приймемо стовпець вільних членів, тобто $x_1^{(0)} = -0,4$; $x_2^{(0)} = 0,2$; $x_3^{(0)} = -0,4$; $x_4^{(0)} = -1,111$. Підставляючи ці значення в праві частини рівнянь останньої системи, одержимо перші наближення коренів:

$$x_1^{(1)} = -0,2 \cdot 0,2 + 0,1(-0,4) - 0,2(-1,111) - 0,4 \approx -0,258;$$

$$x_2^{(1)} = -0,2(-0,4) - 0,2(-0,4) + 0,2 \approx 0,360;$$

$$x_3^{(1)} = 0,2(-0,4) - 0,4 \cdot 0,2 + 0,2(-1,111) - 0,4 \approx -0,782;$$

$$x_4^{(1)} = 0,333(-0,4) - 1,111 \approx -1,244.$$

Далі, підставляючи ці знайдені наближення знову в праві частини системи, одержимо другі наближення коренів:

$$x_1^{(2)} = -0,301; x_2^{(2)} = 0,408; x_3^{(2)} = -0,844; x_4^{(2)} = -1,197.$$

Після нової підстановки будемо мати треті наближення коренів і так далі.

Для одержання коренів з необхідною точністю в одержуваних наближеннях утримуємо три знаки після коми й ітерації виконуємо доти, поки утримувані знаки в результатах перестануть змінюватися.

Зведемо результати обчислень у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1. Приклад 4.1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,360	-0,782	-1,244
2	-0,301	0,408	-0,844	-1,197
3	-0,327	0,429	-0,863	-1,212
4	-0,330	0,438	-0,879	-1,220
5	-0,332	0,442	-0,885	-1,221
6	-0,333	0,443	-0,887	-1,222
7	-0,333	0,444	-0,888	-1,222
8	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
9	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як видно з таблиці, на дев'ятому кроці ітерацій утримувані десяткові знаки в результатах перестали змінюватися. Округляючи отримані значення коренів на один знак, одержуємо $x_1 \approx -0,33$; $x_2 \approx 0,44$; $x_3 \approx -0,89$; $x_4 \approx -1,22$ •

4.2. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Метод Зейделя є певною модифікацією методу простої ітерації. Основна його ідея полягає в тому, що при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомої x_i враховуються вже обчислені раніше $(k+1)$ -і наближення невідомих $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}$.

Нехай дано зведену лінійну систему

$$x_i = c_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Виберемо довільно початкові наближення коренів $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$.

Далі, припускаючи, що k -і наближення $x_i^{(k)}$ коренів відомі, згідно метода будемо будувати $(k + 1)$ -і наближення за наступними формулами:

$$x_i^{(k+1)} = c_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_j^{(k)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Достатня умова збіжності, сформульована для методу простої ітерації, залишається вірною і для ітерацій за методом Зейделя.

Метод Зейделя дає кращу збіжність ніж метод простої ітерації.

Як було зазначено, методи Зейделя та простої ітерації збігаються, якщо

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq q < 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq q < 1 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Для досягнення заданої точності ε за методом ітерації потрібно виконання нерівності:

$$\frac{q}{1-q} \cdot \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon.$$

Для методу Зейделя гарних оцінок точності немає, тому наближення будують до тих пір, поки дві сусідні ітерації $\mathbf{x}^{(k)}$ та $\mathbf{x}^{(k+1)}$ не співпадуть із заданою точністю.

Приклад 4.2

Розглянемо розв'язання попереднього приклада методом Зейделя. Система була зведена до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = -0,4 + 0 \cdot x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4, \\ x_2 = 0,2 - 0,2x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,2x_3 + 0 \cdot x_4, \\ x_3 = -0,4 + 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0,2x_4, \\ x_4 = -1,111 + 0,333x_1 + 0 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4. \end{cases}$$

$$x_4^{(0)} = -1,111,$$

Узявши, як і раніше, за початкове наближення стовпець вільних членів, тобто

$$x_1^{(0)} = -0,4; \quad x_2^{(0)} = 0,2; \quad x_3^{(0)} = -0,4; \quad x_4^{(0)} = -1,111,$$

згідно метода Зейделя, одержимо перші наближення коренів

$$x_1^{(1)} = -0,4 - 0,2 \cdot 0,2 + 0,1(-0,4) - 0,2(-1,111) \approx -0,258;$$

$$x_2^{(1)} = 0,2 - 0,2(-0,258) - 0,2(-0,4) \approx -0,332;$$

$$x_3^{(1)} = -0,4 + 0,2(-0,258) + 0,4 \cdot 0,332 + 0,2(-1,111) \approx -0,807;$$

$$x_4^{(1)} = -1,111 + 0,333(-0,258) \approx -1,197.$$

Виконуючи аналогічним чином наступні ітерації, заносимо результати обчислень у таблицю 4.2.

Таблиця 4.2. Приклад 4.2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,332	-0,807	-1,197
2	-0,308	0,423	-0,870	-1,214
3	-0,329	0,440	-0,884	-1,221
4	-0,332	0,443	-0,888	-1,222
5	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
6	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як бачимо з таблиці, ми прийшли до тих же значень коренів $x_1 \approx -0,33, x_2 \approx -0,44;$
 $x_3 \approx -0,89; x_4 \approx -1,22$, виконавши при цьому на три ітерації менше, ніж при розв'язанні цієї системи методом простої ітерації •

На рис. 4.2 наведено блок-схему розв'язання СЛАР методом Зейделя [15]. У блок-схемі: n – кількість рівнянь; b_i – елементи вектора вільних членів; a_{ij} –

елементи матриці коефіцієнтів при невідомих; ε – точність обчислень; x_{0i} – елементи вектора невідомих на попередній ітерації; x_i – елементи вектора невідомих на теперішній ітерації; $iter$ – номер ітерації.

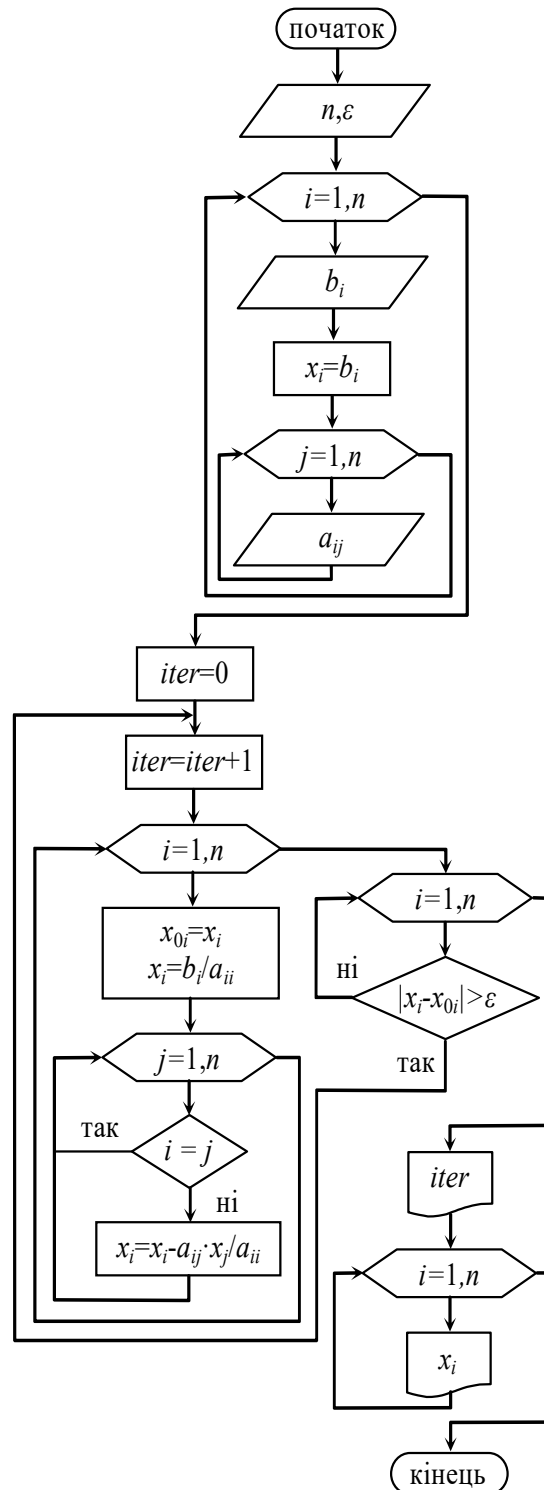


Рис.4.2. Блок-схема розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя

4.3. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Для розв'язання нелінійних систем, наприклад, виду:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0; \\ \Phi_2(x, y) = 0; \end{cases}$$

де $\Phi_i (i=1,2)$ – довільні задані функції, можна також засовувати метод ітерації.

Після означення початкового наближення (x_0, y_0) до шуканого $(\bar{x}, \bar{y})$ система зводиться до вигляду:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y); \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \quad (4.4)$$

При цьому функції $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ повинні задовольняти умовам збіжності:

$$\left(\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right| \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \leq q < 1, \quad i = 1, 2; \quad (4.5)$$

або

$$\begin{cases} \left(\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \leq q < 1; \\ \left(\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \leq q < 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Послідовні наближення до розв'язку визначаються формулами:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n); \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Має місце наступна оцінка точності методу:

$$\max(|\bar{x} - x_n|, |\bar{y} - y_n|) \leq \frac{q}{1-q} \cdot \max(|x_{n-1} - x_n|, |y_{n-1} - y_n|).$$

Приклад 4.3

Методом ітерації знайти з точністю до $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ розв'язок системи:

$$\begin{cases} 20x^2 = 1 - 2x^3 + 4y^3; \\ 10y = 5 + 2x^2 - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язання

- За початкове наближення візьмемо:

$$x_0 = 0,3; \quad y_0 = 0,5.$$

- Для застосування методу ітерації зводимо вихідну систему до виду (4.4):

$$\begin{cases} x = \sqrt{0,05(1 - 2x^3 + 4y^3)}; \\ y = 0,5 + 0,2x^2 - 0,3y^3. \end{cases}$$

Функції $\varphi_1(x, y) = \sqrt{0,05(1 - 2x^3 + 4y^3)}$ і $\varphi_2(x, y) = 0,5 + 0,2x^2 - 0,3y^3$ задовольняють умовам збіжності (4.5). Дійсно,

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| = 0,05 \cdot \frac{(6x^2 + 12y^2)}{2 \cdot \sqrt{(1 - 2x^3 + 4y^3)}} \Big|_{(0,3; 0,5)} \approx 0,5; \\ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = (0,4x + 0,9y^2) \Big|_{(0,3; 0,5)} \approx 0,35; \end{cases}$$

отже, можна взяти $q = 0,8$.

- Знаходимо перше наближення та оцінюємо його точність.

$$x_1 = \varphi_1(x, y) \Big|_{(0,3; 0,5)} = \sqrt{0,05(1 - 2x^3 + 4y^3)} \Big|_{(0,3; 0,5)} = 0,269;$$

$$y_1 = \varphi_2(x, y) \Big|_{(0,3; 0,5)} = 0,5 + 0,2x^2 - 0,3y^3 \Big|_{(0,3; 0,5)} = 0,481.$$

$$\max(|\bar{x} - x_1|, |\bar{y} - y_1|) \leq \frac{q}{1-q} \cdot \max(|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|) = \frac{0,8}{1-0,8} \cdot \max(0,031; 0,019) = 0,124 > 0,005.$$

- Аналогічно для другого наближення:

$$x_2 = \varphi_1(x, y) \Big|_{(0,269; 0,481)} = \sqrt{0,05(1 - 2x^3 + 4y^3)} \Big|_{(0,269; 0,481)} = 0,265;$$

$$y_2 = \varphi_2(x, y) \Big|_{(0,269; 0,481)} = 0,5 + 0,2x^2 - 0,3y^3 \Big|_{(0,269; 0,481)} = 0,480.$$

$$\max(|\bar{x} - x_2|, |\bar{y} - y_2|) \leq \frac{q}{1-q} \cdot \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = 4 \cdot 0,004 = 0,016 > 0,005.$$

- Для третього наближення:

$$x_3 = 0,2649; \quad y_3 = 0,4808.$$

$$\max(|\bar{x} - x_3|, |\bar{y} - y_3|) \leq 4 \cdot 0,0008 = 0,0032 < 0,005.$$

- Отже, $\bar{x} = 0,2649$; $\bar{y} = 0,4808$ •

Побудова ітеруючих функцій $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ вимагає деякого досвіду і винахідливості. Можна порекомендувати наступний прийом. Візьмемо $\varphi_1(x, y)$ і $\varphi_2(x, y)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x + \alpha\Phi_1(x, y) + \beta\Phi_2(x, y); \\ \varphi_2(x, y) &= y + \gamma\Phi_1(x, y) + \delta\Phi_2(x, y);, \\ &(\alpha\delta \neq \beta\gamma). \end{aligned}$$

Визначимо коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ відповідно до умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \varphi_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0; y_0)} = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0; y_0)} = 0. \end{array} \right.$$

Тобто умови збіжності будуть виконуватися.

Для наведеного попереднього прикладу 4.3 цей спосіб дає:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x - 0,082 \cdot (20x^2 - 1 + 2x^3 - 4y^3) - 0,02 \cdot (10y - 5 - 2x^2 + 3y^3); \\ \varphi_2(x, y) &= y - 0,008 \cdot (20x^2 - 1 + 2x^3 - 4y^3) - 0,084 \cdot (10y - 5 - 2x^2 + 3y^3). \end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Для яких СЛАР (прямокутних чи квадратних) застосовують ітераційні методи?
2. Дайте означення збіжності ітераційного процесу.
3. Як визначити норму матриці?
4. В чому суть методу простої ітерації розв'язання СЛАР?
5. В чому суть методу Зейделя розв'язання СЛАР?
6. Який ітераційний метод дає кращу збіжність?
7. Як сформулюється теорема про достатні умови збіжності методу простої ітерації для СЛАР?
8. Як сформулюється теорема про необхідні умови збіжності методу простої ітерації для СЛАР?
9. Яка умова закінчення ітерацій у методі Зейделя?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Метод Зейделя відноситься до ітераційних методів розв'язання СЛАР.
Так
2. Метод Зейделя можна застосовувати для СЛАР з m лінійних рівнянь та n невідомих ($m \neq n$).
Ні
3. Метод простої ітерації дає кращу збіжність ніж метод Зейделя.
Ні
4. Матриця A СЛАР з діагональним переважанням забезпечує збіжність ітераційного процесу.
Так
5. Якщо метод простої ітерації збіжний, то початкове наближення можна вибирати довільним чином.
Так
6. Метод простої ітерації є модифікацією методу Зейделя.
Ні
7. Теореми про збіжність методу простої ітерації застосовують для дослідження збіжності методу Зейделя.
Так

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 4

Методами:

- простої ітерації та
- Зейделя

з точністю до двох знаків після коми розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Чисельні дані для виконання індивідуальної роботи 4 наведені в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3. Індивідуальна робота 4

Номер варіанта	Матриця коефіцієнтів системи $A = [a_{ij}], (i, j = \overline{1,6})$						Стовпець вільних членів b
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
1	2,1	0,3	4,4	-0,1	1,4	0,0	-2,25
	0,0	2,2	-3,4	0,3	-0,8	1,4	4,07
	5,2	-1,0	0,4	0,7	1,1	-0,1	3,69
	-0,6	1,5	3,2	-2,1	1,6	0,6	-8,02
	1,3	0,2	0,0	0,8	6,1	-1,4	-16,33
	0,4	0,0	-2,7	1,4	-1,8	3,1	18,06
2	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	24,87
	-0,1	7,2	1,8	-2,3	1,1	0,3	7,81
	-2,1	3,0	-0,6	-3,4	-0,5	0,0	0,20
	0,4	0,0	1,9	6,1	-0,8	-2,1	11,00
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	0,12
	0,0	0,2	-1,6	2,4	0,7	5,7	22,04
3	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	29,95
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	-3,5	-20,33
	-2,1	3,3	-0,4	3,4	-0,5	0,0	2,11
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-8,0	1,1	-1,91
	6,3	-0,4	1,4	0,8	0,0	1,0	7,01
	4,2	-1,7	6,9	0,0	1,1	9,2	17,25
4	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	2,68
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-6,17
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	-35,57
	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	-25,65
	8,4	-1,6	0,0	0,7	-1,8	1,2	8,50
	1,6	8,7	-0,2	0,8	-2,0	1,1	-14,46

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
5	−1,1	−0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	11,83
	−2,7	1,9	−5,9	1,3	−2,2	1,0	16,24
	8,8	−1,5	0,3	−0,7	1,2	−2,1	18,64
	2,1	3,6	−1,5	−2,1	0,0	4,6	−37,76
	0,3	7,4	−1,9	1,1	0,9	0,2	−7,90
	2,3	−2,0	3,9	4,2	0,2	−1,9	−8,78
6	3,4	−1,0	2,2	1,0	4,8	1,4	20,16
	2,2	0,6	6,8	0,0	−0,1	−0,4	−1,58
	4,4	−2,9	−1,5	−0,7	1,3	0,8	15,62
	−1,3	−0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	−0,39
	−2,5	5,8	1,1	3,1	0,0	2,4	−11,95
	0,1	0,3	−1,0	5,4	−1,9	0,1	−12,82
7	2,2	−0,4	0,6	5,2	−1,2	0,1	9,43
	−2,1	3,6	4,7	−1,3	−2,8	2,0	7,77
	0,0	0,2	−1,0	0,0	6,8	1,4	−6,20
	4,9	−1,9	−2,7	1,2	0,3	−1,0	10,28
	−0,4	2,1	2,0	−0,3	1,8	7,6	16,05
	−2,9	4,0	1,1	−1,6	3,7	−1,1	−9,78
8	3,4	1,6	2,2	−1,2	4,2	−2,1	20,72
	−2,3	0,1	6,6	−0,4	0,0	1,2	6,52
	7,9	−0,3	1,3	−0,1	1,8	0,1	13,20
	2,2	−1,0	3,0	−1,2	3,4	5,8	5,70
	1,4	8,9	−0,1	0,0	−1,1	−0,7	−4,31
	3,2	−2,0	1,7	4,1	−1,9	0,4	0,23
9	2,2	−0,1	−0,3	0,2	5,3	−1,7	−6,11
	2,6	0,0	4,1	−1,2	2,1	−0,1	−18,21
	6,3	0,1	−2,7	0,2	−1,3	−0,5	−2,48
	−3,1	2,4	1,4	2,1	0,5	3,7	13,14
	−0,4	7,9	2,0	−0,2	−1,7	1,9	21,60
	3,3	−1,9	−2,1	4,8	0,0	1,7	2,68

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
10	−3,9	2,3	0,0	−1,5	3,8	−4,1	15,40
	0,4	−1,6	5,3	1,0	−0,2	−0,1	2,83
	4,6	0,7	2,1	−1,4	2,7	−3,6	35,68
	0,1	1,3	1,6	−2,1	0,2	6,7	−10,10
	2,2	5,2	0,9	−1,1	−2,1	1,2	−0,95
	−1,3	1,8	−0,2	8,6	−2,2	0,0	−29,34
11	0,1	0,0	0,9	−1,1	6,2	0,6	−2,06
	−2,3	3,6	4,3	2,4	0,3	−1,2	2,86
	6,8	0,1	−1,1	−1,4	2,0	−0,8	16,15
	−2,7	1,4	2,0	0,0	−3,4	4,3	−6,29
	−1,0	8,1	0,0	1,2	−0,1	0,4	−10,12
	3,3	−1,8	2,2	4,4	2,1	0,0	34,53
12	0,3	−0,9	0,0	1,1	6,3	−3,0	−18,47
	1,3	0,8	4,1	2,5	−3,0	−1,7	−11,85
	5,7	−1,5	−0,4	1,2	0,0	0,6	0,69
	2,7	3,2	−2,0	1,3	−3,6	4,9	33,99
	0,1	6,8	1,2	−2,0	−0,8	1,2	14,64
	−4,7	2,4	−3,9	−3,9	0,4	2,1	24,29
13	0,4	0,6	2,2	5,4	−1,2	−0,1	−26,32
	1,7	−2,2	4,1	−3,2	1,9	2,1	13,22
	−2,0	−1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	23,50
	3,1	−2,4	−3,8	2,0	0,0	4,6	−20,28
	−0,9	6,8	1,6	−0,2	1,2	−1,0	13,06
	4,5	2,4	−2,0	3,9	−1,1	4,1	−29,17
14	−3,5	−1,3	−2,2	1,4	3,6	0,4	−22,69
	−2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	−13,35
	3,9	1,5	2,6	−1,2	1,0	−4,8	11,33
	0,1	7,1	0,7	−1,1	−1,9	1,6	−17,57
	−0,9	6,8	1,6	−0,2	1,2	−1,0	−23,88
	1,4	−0,6	−8,8	2,1	−0,6	2,8	−30,08

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
15	2,1	0,4	7,7	−1,9	0,4	−1,7	−19,76
	−2,2	−3,1	0,8	4,2	−3,8	1,2	−15,45
	0,1	−1,4	−1,8	2,0	0,0	6,6	1,03
	2,4	−3,4	1,1	−4,1	0,9	2,1	−20,28
	−0,7	2,9	4,6	3,2	1,6	−0,8	3,86
	7,5	0,4	−2,0	0,9	−1,1	0,1	14,59
16	4,9	−2,7	0,9	1,4	−3,5	0,0	−29,45
	1,3	−0,8	−2,0	1,2	6,8	0,1	3,41
	−2,7	1,4	3,3	−2,5	0,0	−0,8	20,11
	0,2	7,0	−1,5	−0,1	−2,3	1,0	−7,93
	1,0	−2,1	3,6	4,4	0,9	2,5	−21,21
	9,1	−0,5	1,2	−2,4	0,0	−0,6	−28,18
17	0,1	0,0	0,9	−1,1	6,0	2,3	3,13
	−3,4	1,2	−2,7	4,8	−3,9	0,9	−4,70
	0,3	0,0	8,1	1,5	−1,0	−0,7	−9,75
	1,9	−4,1	0,0	−2,0	3,7	0,9	13,91
	−0,8	1,1	−2,8	−1,4	0,1	2,2	2,47
	−1,7	0,4	−1,9	7,7	0,4	2,1	6,41
18	1,2	0,0	−0,4	6,6	0,1	−2,5	16,04
	−3,7	1,3	2,8	−1,7	−4,2	0,0	19,46
	0,9	1,5	0,6	−1,2	1,0	6,8	25,20
	−1,6	−2,4	−3,7	4,1	0,0	2,9	9,52
	4,8	−1,9	1,8	−0,2	−3,5	0,0	11,16
	7,5	0,4	−2,0	0,9	−1,1	0,1	33,70
19	−3,7	0,9	4,1	−2,2	1,9	0,0	21,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	−1,2	−0,1	−22,09
	1,9	−2,3	−3,5	2,0	0,4	−4,2	2,71
	−7,8	−0,3	−1,9	0,4	1,7	2,2	12,63
	0,4	−0,2	1,1	−0,6	2,3	5,7	−4,15
	2,3	1,7	0,9	3,4	−4,4	−1,9	−27,60

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
20	1,2	0,0	−0,4	6,6	0,1	−2,5	−10,39
	−3,9	2,6	4,1	−0,8	2,4	1,6	12,90
	0,0	−0,9	6,1	0,7	−1,0	1,2	−10,26
	2,4	0,8	−2,9	3,3	0,9	−1,6	4,21
	−4,1	3,7	2,5	−1,1	2,2	3,0	−3,00
	0,0	1,9	0,1	−1,3	0,2	7,8	−15,20
21	1,7	−0,8	−2,1	1,1	0,4	0,0	14,51
	−0,7	−1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	20,69
	2,8	1,4	−1,0	−2,6	−0,7	3,1	1,51
	−0,1	5,2	−1,2	2,2	0,6	−0,4	−8,76
	7,9	0,4	−0,2	0,0	−1,0	1,2	3,98
	1,8	−2,4	3,5	−1,1	0,8	2,7	−5,78
22	1,9	−1,7	0,3	2,1	−7,9	−0,4	16,42
	−0,9	0,0	6,8	−2,1	−0,9	1,3	0,66
	2,1	3,3	−4,0	1,7	1,1	2,4	8,48
	−4,6	−2,8	1,3	3,5	0,9	0,0	24,85
	1,5	0,6	2,2	−0,4	1,8	−2,3	−14,05
	−0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	35,58
23	1,8	−5,2	0,2	−0,4	0,0	2,2	−1,16
	−2,1	1,7	−1,6	2,8	−3,4	0,0	−25,32
	0,9	−1,4	0,2	−2,1	1,8	−3,4	11,05
	−4,4	2,9	−3,5	1,9	2,4	1,6	−14,78
	5,8	0,5	−2,4	0,3	1,4	−0,1	25,47
	0,0	2,2	−1,2	8,0	−0,1	1,7	−9,90
24	−2,6	1,7	0,4	−2,3	3,1	0,0	−23,91
	1,4	−3,2	−2,9	0,7	−1,8	2,2	16,04
	−0,1	0,2	−1,0	5,2	−0,8	1,4	9,91
	0,0	2,1	8,4	−0,2	1,6	−1,3	1,18
	3,6	−4,1	0,7	2,4	1,9	−3,2	45,77
	0,4	−0,1	−1,1	0,0	8,0	1,2	−1,15

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
25	−1,2	5,7	−0,5	0,2	−0,1	−0,9	11,76
	−0,8	1,9	−1,4	1,1	0,0	6,6	43,81
	4,5	−3,4	1,9	−2,8	3,7	0,0	−29,38
	2,6	1,8	−2,1	0,9	−1,1	−0,6	13,52
	6,7	−0,1	−1,2	1,7	0,5	0,0	11,10
	−1,5	2,0	0,8	0,0	−2,3	1,9	11,96
26	−0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	−0,3	−11,76
	4,6	−3,0	−2,7	0,0	−1,9	3,5	−4,58
	1,1	2,9	0,8	−3,1	0,7	−2,3	7,68
	0,0	2,1	8,4	0,2	−1,8	1,3	−3,34
	0,4	−0,1	1,2	0,0	8,1	−1,0	30,76
	−2,8	1,5	−3,1	−2,2	0,0	3,3	20,42
27	1,9	−4,6	0,0	3,8	−2,4	1,2	10,07
	0,6	6,0	−0,4	−1,1	0,9	0,0	−18,17
	−0,8	2,0	−1,4	−0,1	1,1	6,8	−12,57
	2,4	−3,9	1,6	4,1	−2,7	−1,0	15,23
	−1,1	0,0	0,5	1,7	0,8	0,0	3,21
	6,3	−1,4	0,0	2,0	0,4	−0,7	11,36
28	2,1	0,4	7,7	−1,9	0,4	−1,7	−8,75
	−0,8	1,2	0,0	2,0	−1,6	0,4	4,72
	3,1	−2,8	−3,6	1,4	0,9	−2,2	3,07
	1,3	−0,8	−2,0	1,2	−6,8	0,1	19,48
	−0,7	1,0	1,5	−8,1	0,0	0,3	−11,57
	0,9	0,0	0,1	0,0	1,2	−0,8	−2,73
29	2,5	−1,8	−3,4	0,0	2,9	1,4	−10,68
	0,0	6,2	2,3	1,1	−0,8	−0,4	10,44
	−1,8	2,1	0,7	−1,5	2,4	0,1	20,68
	0,6	0,0	1,2	−0,4	−2,5	5,7	−7,83
	8,9	−0,6	1,3	−2,0	0,2	0,7	−32,61
	−3,3	2,9	−4,1	1,8	0,0	−2,5	7,49

Продовження таблиці 4.3

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
30	−0,7	−1,1	1,6	8,0	0,1	−0,3	21,43
	2,5	1,7	−3,1	0,0	−1,2	2,1	−1,33
	−1,1	0,9	2,2	−1,4	2,6	−0,7	−7,79
	2,0	−0,2	7,8	2,1	0,1	−1,6	21,91
	−1,2	−0,8	2,0	0,9	−6,6	0,1	4,83
	3,6	2,7	−3,3	−1,8	0,0	2,1	−6,21

РОЗДІЛ 5.

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОЛІНОМИ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

При розв'язанні багатьох практичних задач, що виникають у різних областях, виникає необхідність у використанні теорії наближення функцій або теорії апроксимації функцій.

Суть задачі апроксимації така. Нехай дана деяка невідома в аналітичному сенсі функція $y = f(x)$ і відома лише її поведінка (наприклад, дискретні значення в точках $f(x_i)$) на певному відрізку $[a, b]$. Таку функцію надалі будемо називати апроксимованою функцією. Треба побудувати іншу функцію $y = F(x)$, апроксимуючу функцію, яка б була близька до функції $y = f(x)$ з певною похибкою.

При цьому потрібне виконання таких вимог:

- наявність дискретних значень функції $y_i = f(x_i)$;
- визначення класу апроксимуючих функцій, з яких конструюється функція $y = F(x)$;
- вид критерію згоди між функціями $y = f(x)$ і $y = F(x)$;
- оцінка похибки апроксимації.

Вид функції $y = F(x)$ залежить від класу розв'язуваних задач. Наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану методом кінцевих елементів у задачах механіки деформованого тіла апроксимуючі функції є комбінацією функцій $1, x, \dots, x^n$, або сплайнами. Експонентні функції мають широке застосування у фізиці при вивченні явищ типу розпаду і нагромадження, а тригонометричні функції – у механіці при коливальних процесах.

Критерій згоди або близькості апроксимованої й апроксимуючої функцій визначається з умови мінімуму відстаней між ними. Наприклад, найпоширенішим критерієм є критерій Чебишова:

$$\rho = \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - F(x_i)| \rightarrow \min \rightarrow 0 .$$

Інший критерій може бути записаний у вигляді:

$$\rho = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - F(x_i)]^2 \rightarrow \min .$$

Метод апроксимації, заснований на другому критерії, має назву методу найменших квадратів.

Якщо при використанні критерію Чебишова прийняти $\rho = 0$, то це буде означати, що значення апроксимованої й апроксимуючої функцій у вузлових точках відрізка $[a, b]$ збігаються. Цей спосіб апроксимації називається *інтерполюванням* або *інтерполяцією*.

Питання оцінки похибки апроксимації безумовно залежать від попередніх трьох вимог і розглядаються окремо для конкретного процесу апроксимації.

5.2. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Нехай відомі значення деякої функції f в $n + 1$ різних точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Введемо позначення:

$$f_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту чи знайдені за допомогою досить складних обчислень.

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній точці x . Часто для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний багаточлен $L_n(x)$ степені n , що у точках x_i приймає задані значення, тобто

$$L_n(x_i) = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

i називається інтерполяційним. Точки x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) називаються *вузлами* інтерполяції.

Наближене відновлення функції f за формулою

$$f(x) \approx L_n(x)$$

називається *інтерполяцією функції f* . Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить усі вузли інтерполяції, то заміну функції f за зазначеною формулою називають також *екстраполяцією*.

Перш, ніж будувати багаточлен $L_n(x)$, розглянемо спочатку наступну задачу: побудуємо поліном $p_i(x)$, який задовольняє умовам:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = i; \\ 0, & \text{якщо } j \neq i. \end{cases} \quad \text{Оскільки } p_i(x) = 0 \text{ в точках } x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \text{ то}$$

його можна представити у вигляді:

$$p_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

де C_i – сталий коефіцієнт, який визначається згідно умови: $p_i(x_i) = 1$. Звідки

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \text{ Тому}$$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Перейдемо до розв'язку загальної задачі: визначення полінома $L_n(x)$, що задовольняє умовам $L_n(x_i) = y_i$ ($i = \overline{0, n}$). Цей поліном має наступний вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i,$$

або

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad (5.1)$$

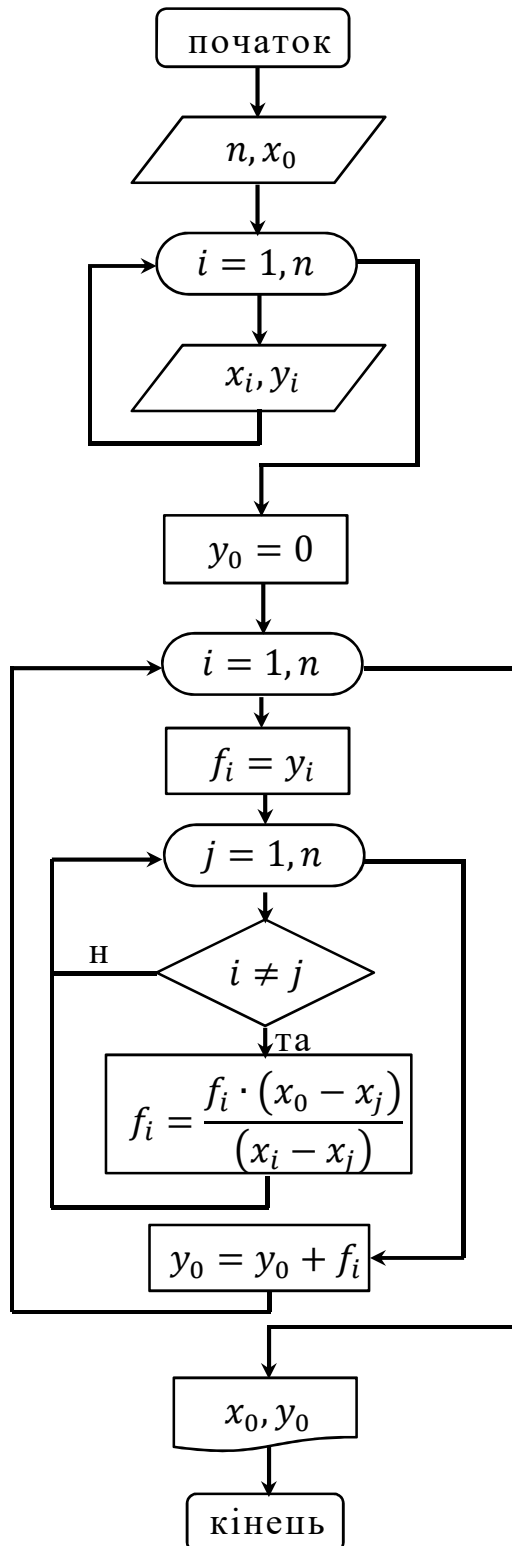


Рис. 5.1. Блок-схема побудови інтерполяційного багаточлена Лагранжа

Це і є *інтерполяційна формула Лагранжа*.

Доведено [1], що задача інтерполювання функції багаточленом Лагранжа має єдиний розв'язок.

На рис. 5.1 наведена блок-схема програми обчислення значення функції у заданій точці за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа.

У даній блок-схемі: n – кількість вузлових точок; x_i – координати вузлових точок; y_i – значення функції у вузлових точках; x_0 – координата точки, у якій знаходиться значення функції; y_0 – значення шуканої функції.

Приклад 5.1

Для функції $y = \cos(\pi x)$ побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа, обираючи вузли інтерполяції: $x_0 = 0$; $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/2$.

Розв'язання

Спочатку визначаємо відповідні значення функції

$$y_i = \cos(\pi x_i) \quad (i = \overline{0,2}):$$

$$y_0 = 1; \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = 0.$$

Застосовуючи формулу (5.1), отримуємо:

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(0 - \frac{1}{3}\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3} - 0\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)} + 0 \cdot \frac{(x-0)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)},$$

$$\text{або } L_2(x) = 1 - \frac{x}{2} - 3x^2 \bullet$$

Формулі Лагранжа (5.1) можна надати більш стислий вигляд. Позначимо

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (5.2)$$

Тоді

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^n (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) \quad (5.3)$$

Підставимо (5.2), (5.3) в (5.1), отримуємо:

$$L_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\omega'(x_i)(x - x_i)}. \quad (5.4)$$

Приклад 5.2

Нехай задані такі значення функції $f(x)$: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 16$.

Для заданої таблиці значень функції $f(x)$ побудувати багаточлен Лагранжа.

Розв'язання

Побудуємо інтерполяційний багаточлен Лагранжа у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

$$\text{Тут } \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

$$\text{Ясно, що } \omega'(x_k) = \prod_{i \neq k} (x_k - x_i).$$

$$\text{Для нашого прикладу } \omega(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

$$\omega'(1) = (1 - 2)(1 - 3)(1 - 4) = -6; \omega'(2) = 2; \omega'(3) = -2; \omega'(4) = 6.$$

Тоді

$$L_3(x) = -\frac{4}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) - 2(x-1)(x-2)(x-4) + \\ + \frac{16}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4 \bullet$$

Для функції $y = f(x)$ ми побудували багаточлен Лагранжа $L_n(x)$, який приймає в точках $x_i (i = \overline{0, n})$ задані значення $y_i = f(x_i)$.

Виникає питання, наскільки близько побудований багаточлен наближається до функції $f(x)$ в інших точках, тобто наскільки великий залишок:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Для визначення цієї степені наближення покладемо на функцію $y = f(x)$ додаткові обмеження. А саме, будемо вважати, що на відрізку $a \leq x \leq b$, який містить усі вузли інтерполяції, функція $f(x)$ має усі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно.

Має місце наступна оцінка для абсолютної похибки формули Лагранжа [1]:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad (5.5)$$

де $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|, \quad a \leq x \leq b.$

Приклад 5.3

З якою точністю можна обчислити $\sqrt{115}$ за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа для функції $y = \sqrt{x}$, обравши вузли інтерполяції $x_0 = 100; \quad x_1 = 121; \quad x_2 = 144$?

Розв'язання

Маємо:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Звідси

$$M_3 = \max|y'''| = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}, \quad 100 \leq x \leq 144.$$

Згідно формули (5.5) отримуємо:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| = \frac{\frac{3}{8} \cdot 10^{-5}}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \bullet$$

5.3. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА СХЕМА ЕЙТКЕНА

Нехай відомі в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ значення деякої функції $f(x)$:

$$f_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній **зазначеній** точці x . Звичайно, можна інтерполювати функцію $f(x)$ багаточленом Лагранжа (5.1) або (5.4) і потім обчислити наближене значення функції в заданій точці x :

$$f(x) \approx L_n(x).$$

Проте даний варіант вирішення задачі доволі громіздкий і нераціональний у випадку достатньо великої кількості вузлів x_i . У цьому випадку можна застосовувати інтерполяційну схему Ейткена, яка дозволяє обчислювати наближене значення функції за допомогою значень інтерполяційного багаточлена Лагранжа, без побудови самого багаточлена.

Обчислення за цією схемою мають ітераційний характер, кожен крок якої полягає в обчисленні визначника другого порядку.

- Нехай дано дві точки на кривій $y = f(x)$: $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$. Побудуємо функцію

$$P_{0,1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Якщо розкласти визначник в чисельнику в $P_{0,1}(x)$, отримуємо:

$$P_{0,1}(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = L_1(x),$$

тобто $P_{0,1}(x)$ співпадає з багаточленом Лагранжа першої степені, побудованому на точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$.

Для точок $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ так само будуємо функцію

$$P_{1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_1 & y_1 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

яка є багаточленом Лагранжа, що побудований на точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Аналогічно будуємо функції $P_{2,3}(x), P_{3,4}(x), \dots, P_{n-1,n}(x)$.

- На основі отриманих $P_{0,1}(x), P_{1,2}(x)$ утворюємо функцію:

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & P_{0,1}(x) \\ x - x_2 & P_{1,2}(x) \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Покажемо, що ця функція є багаточленом Лагранжа другої степені, що вирішує задачу параболічної інтерполяції по трьом точкам $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$P_{0,1,2}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & P_{0,1}(x_0) \\ x_0 - x_2 & P_{1,2}(x_0) \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_0 \\ x_0 - x_2 & P_{1,2}(x_0) \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_0;$$

$$P_{0,1,2}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & P_{0,1}(x_1) \\ x_1 - x_2 & P_{1,2}(x_1) \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_1;$$

$$P_{0,1,2}(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_0 & P_{0,1}(x_2) \\ x_2 - x_2 & P_{1,2}(x_2) \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_0 & P_{0,1}(x_2) \\ 0 & y_2 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_2.$$

Оскільки можна побудувати єдиний багаточлен за означеними точками, робимо висновок, що $P_{0,1,2}(x) = L_2(x)$, де $L_2(x)$ – багаточлен Лагранжа.

- Продовжуючи даний ітераційний процес далі, отримуємо послідовність інтерполяційних багаточленів Лагранжа, яка становить суть інтерполяційної схеми Ейткена:

$$f(x) \approx P_{0,1,\dots,i}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & P_{0,1,\dots,i-1}(x) \\ x - x_i & P_{1,\dots,i}(x) \end{vmatrix}}{x_i - x_0}. \quad (5.6)$$

Схему Ейткена легко запрограмувати. Організацію обчислень за формулою (5.6) треба встановити наступним чином. Якщо невідома степінь інтерполяційного полінома, то має відбуватися поступове підвищення степені інтерполяційних багаточленів $P_{0,1,\dots,i}(x)$ за рахунок підключення нових вузлів. Обчислення ведуться доки спадає величина $|P_{0,1,\dots,i}(x) - P_{0,1,\dots,i-1}(x)|$.

Зазвичай обчислювальний процес інтерполяційної схеми Ейткена оформлюється у вигляді наступної таблиці:

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3,i+4}(x)$	...
0	x_0	y_0	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$	...
1	x_1	y_1	$P_{1,2}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	$P_{1,2,3,4}(x)$	...	...
2	x_2	y_2	$P_{2,3}(x)$	$P_{2,3,4}(x)$	...	...	...
3	x_3	y_3	$P_{3,4}(x)$	...	...	...	...
4	x_4	y_4	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Приклад 5.4

Функція задана таблицею:

x_i	-1	0	2	4	6	9
y_i	-2	3	1	7	-1	5

Визначити наближене значення функції за схемою Ейткена в точці $x = -0.5$.

Розв'язання

Складаємо таблицю:

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3,i+4}(x)$	...
0	-1	-2	$P_{0,1}(x) = 0,5$	$P_{0,1,2}(x) = 1$	$P_{0,1,2,3}(x) = 1,375$	$P_{0,1,2,3,4}(x) = 1,8$	$P_{0,1,2,3,4,5}(x) = 2,225$
1	0	3	$P_{1,2}(x) = 3,5$	$P_{1,2,3}(x) = 4,75$	$P_{1,2,3,4}(x) = 7,328$	$P_{1,2,3,4,5}(x) = 10,902$	...
2	2	1	$P_{2,3}(x) = -6,5$	$P_{2,3,4}(x) = -26,188$	$P_{2,3,4,5} = -57,004$	...	...
3	4	7	$P_{3,4}(x) = 25$	$P_{3,4,5}(x) = 60,1$	...	...	...
4	6	-1	$P_{4,5}(x) = -14$	...	...	...	...
5	9	5	...	...	...	...	...

$$P_{i,i+1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & y_i \\ x - x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{x_{i+1} - x_i}.$$

$$P_{0,1}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5+1 & -2 \\ -0,5-0 & 3 \end{vmatrix}}{0+1} = 0,5;$$

$$P_{1,2}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,5-2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 3,5;$$

$$P_{2,3}(-0,5) = -6,5; \quad P_{3,4}(-0,5) = 25; \quad P_{4,5}(-0,5) = -14.$$

$$P_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & P_{i,i+1} \\ x - x_{i+2} & P_{i+1,i+2} \end{vmatrix}}{x_{i+2} - x_i}.$$

$$P_{0,1,2}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5+1 & 0,5 \\ -0,5-2 & 3,5 \end{vmatrix}}{2+1} = 1,$$

$$P_{1,2,3}(-0,5) = 4,75, \quad P_{2,3,4}(-0,5) = -26,188, \quad P_{3,4,5}(-0,5) = 60,1.$$

$$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & P_{i,i+1,i+2} \\ x - x_{i+3} & P_{i+1,i+2,i+3} \end{vmatrix}}{x_{i+3} - x_i}.$$

$$P_{0,1,2,3}(-0,5) = 1,375; \quad P_{1,2,3,4}(-0,5) = 7,328, \quad P_{2,3,4,5}(-0,5) = -57,004.$$

$$P_{i,i+1,i+2,i+3,i+4}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & P_{i,i+1,i+2,i+3} \\ x - x_{i+4} & P_{i+1,i+2,i+3,i+4} \end{vmatrix}}{x_{i+4} - x_i}.$$

$$P_{0,1,2,3,4}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5 - x_0 & P_{0,1,2,3} \\ -0,5 - x_4 & P_{1,2,3,4} \end{vmatrix}}{x_4 - x_0} = 1,8; \quad P_{1,2,3,4,5}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5 - x_1 & P_{1,2,3,4} \\ -0,5 - x_5 & P_{2,3,4,5} \end{vmatrix}}{x_5 - x_1} = 10,902$$

$$P_{0,1,2,3,4,5}(-0,5) = \frac{\begin{vmatrix} -0,5 - x_0 & P_{0,1,2,3,4}(-0,5) \\ -0,5 - x_5 & P_{1,2,3,4,5}(-0,5) \end{vmatrix}}{x_5 - x_0} = 2,255.$$

Оскільки точка, в якій ми обчислюємо наближене значення розташована між вузлами $x_0 = -1$; $x_1 = 0$, то доцільно в якості основної послідовності значень

багаточленів Лагранжа брати рядок, який відповідає значенню $i=0$. При цьому модулі різниць між сусідніми значеннями наведених чисел дорівнюють:

$$\begin{aligned} |P_{0,1,2} - P_{0,1}| &= 0,5; & |P_{0,1,2,3} - P_{0,1,2}| &= 0,375; \\ |P_{0,1,2,3,4} - P_{0,1,2,3}| &= 0,425; & |P_{0,1,2,3,4,5} - P_{0,1,2,3,4}| &= 0,425. \end{aligned}$$

Тобто після обчислення $P_{0,1,2,3}(x)=1,375$ різниця не зменшується. Подальші обчислення не мають сенсу. Тому $f(-0,5) \approx 1,375$ •

Приклад 5.5

В таблиці 5.1. наведено значення інтеграла ймовірностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Таблиця 5.1. Приклад 5.5

x	y
1,0	0,8427
1,1	0,8802
1,2	0,9103
1,3	0,9340
1,4	0,9523
1,5	0,9661
1,6	0,9763
1,7	0,9838
1,8	0,9891
1,9	0,9928
2,0	0,9953

Отримаємо значення $\Phi(1,43)$, застосовуючи інтерполяційну схему Ейткена.

Розв'язання

Спочатку візьмемо лише чотири табличних значення, між якими міститься $x=1,43$. Обчислення будемо проводимо, поки

$$|P_{0,1,\dots,i}(x) - P_{0,1,\dots,i-1}(x)| < 0,00005.$$

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	ΔP	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	ΔP
0	1,4	0,9523	$P_{0,1} =$ $=0,95644$	$P_{0,1,2} =$ $=0,95682$	$ P_{0,1,2} - P_{0,1} =$ $= 0,00038$	$P_{0,1,2,3} =$ $= 0,95687$	$P_{0,1,2,3} =$ $=0,00005$
1	1,5	0,9661	$P_{1,2} =$ $=0,95896$	$P_{1,2,3} =$ $=0,95735$	...	...	...
2	1,6	0,9763	$P_{2,3} =$ $=0,96355$	$P_{1,2,3} =$ $0,95735$	...	...	...
3	1,7	0,9838	...	...	...	...	...

Оскільки різниця ΔP ще спадає, потрібно застосування більшої кількості вузлів інтерполювання.

Додаємо ще один вузол інтерполювання:

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3,i+4}(x)$	...
0	1,4	0,9523	0,95644	0,95682	0,95687	0,95689	...
1	1,5	0,9661	0,95896	0,95735	0,95708	...	...
2	1,6	0,9763	0,96355	0,9585	...	...	...
3	1,7	0,9838	0,96949	...	...	...	...
4	1,8	0,9891	...	...	...	...	...

$$|P_{0,1} - P_{0,1,2}| = 0,00038;$$

$$|P_{0,1,2} - P_{0,1,2,3}| = 0,00005;$$

$$|P_{0,1,2,3} - P_{0,1,2,3,4}| = 0,00002 < 0,00005.$$

Значення $P_{0,1,2,3,4}$ майже не відрізняється від попереднього. Тому, після округлення до чотирьох знаків після коми, отримуємо $\Phi(1,43) \approx P_{0,1,2,3,4} = 0,9569$.

Відповідь збіглася з табличним значенням •

5.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА

5.4.1. КІНЦЕВІ РІЗНИЦІ РІЗНИХ ПОРЯДКІВ

Нехай $y = f(x)$ – задана функція. Позначимо $\Delta x = h$ – фіксована величина приросту аргументу (крок). Тоді вираз

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (5.7)$$

називається першою кінцевою різницею функції y . Аналогічно визначаємо кінцеві різниці вищих порядків

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n \geq 2.$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) = \Delta(f(x + \Delta x) - f(x)) = \\ &= [f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta^2 y = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Приклад 5.6

Побудувати кінцеві різниці для функції $P(x) = x^3$, покладаючи крок $\Delta x = 1$.

Розв'язання

$$\Delta P(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1;$$

$$\Delta^2 P(x) = (3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1) - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6;$$

$$\Delta^3 P(x) = (6(x+1) + 6) - (6x + 6) = 6;$$

$$\Delta^n P(x) = 0 \quad (n > 3).$$

Звертаємо увагу, що кінцева різниця третього порядку функції $P(x) = x^3$ є сталою величиною •

Методом математичної індукції можна довести [1], що для багаточлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ справедливе твердження:

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = \text{const}, \quad \Delta x = h.$$

Символ Δ можна розглядати як оператор, для якого мають місце наступні властивості:

$$\begin{aligned}\Delta(u+v) &= \Delta u + \Delta v; \\ \Delta(Cu) &= C \Delta u; \quad C = \text{const}; \\ \Delta^m(\Delta^n y) &= \Delta^{m+n} y;\end{aligned}$$

де m, n – цілі невід’ємні числа, при чому $\Delta^0 y \equiv y$.

ТАБЛИЦЯ РІЗНИЦЬ

Для функції $y = f(x)$, яку задано табличними значеннями $y_i = f(x_i)$, для системи рівновіддалених точок $x_i (i = 0, 1, 2, \dots)$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, кінцеві різниці послідовно визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i; \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^n y_i &= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.\end{aligned}$$

Зауважимо, що для визначення n -ї різниці $\Delta^n y_i$ потрібно знати $n+1$ членів $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}$ даної послідовності.

Кінцеві різниці різних порядків зручно розташовувати у вигляді таблиць двох типів: *горизонтальній* або *діагональній*.

Приклад 5.7

Скласти горизонтальну таблицю різниць функції

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

від початкового значення $x_0 = 0$, поклавши за крок $h = 1$.

Розв’язання

Покладемо $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$
знаходимо відповідні $y_0 = -1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 13.$
Звідки отримуємо:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3;$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 11;$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 8.$$

Оскільки наша функція є поліномом третього степеня, то $\Delta^3 y_i = 2 \cdot 3! = 12$.
Ці значення заносимо до таблиці 5.2.

Таблиця 5.2. Приклад 5.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12

Для подальшого заповнення таблиці 5.2 можна застосувати формули:

$$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta y_i + 12 \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + \Delta^2 y_i \quad (i = 1, 2, \dots);$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (i = 2, 3, \dots).$$

В таблиці 5.2 виділено курсивом вхідні дані для побудови таблиці •

5.4.2. ПЕРША ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА (ВИПАДОК СТАЛОГО КРОКУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ)

Як було зазначено, задача побудови багаточлена степені n , значення якого в заданих точках x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) співпадають із значеннями y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) функції $y = f(x)$ в цих точках, має єдиний розв'язок. Проте, в залежності від постановки задачі, цей багаточлен зручно записувати різними по вигляду формулами.

На відміну від формули Лагранжа, де кожний доданок залежить від усіх вузлів інтерполявання, будь-який член формули Ньютона залежить від перших (від початку відліку) вузлів і застосування нових вузлів приводить до збільшення членів формули. Це є перевагою формули Ньютона.

Розглянемо різні форми запису полінома Ньютона $P_n(x)$ степені не вище n , який приймає в точках x_i задані значення:

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = \overline{0, n}).$$

Для системи рівновіддалених точок $x_i (i = 0, 1, 2, \dots)$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, h – крок інтерполяції, розв’язок задачі інтерполявання функції задається **першою інтерполяційною формулою Ньютона**[1]:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (5.8)$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ – кількість кроків, потрібних для досягнення точки x , якщо виходити із точки x_0 .

Якщо задана необмежена таблиця значень функції y , то число n може бути довільним. Зазвичай число n обирають таким чином, щоб різниця $\Delta^n y_i$ була постійною із заданим степенем точності. За початкове значення x_0 можна взяти будь-яке табличне значення аргумента x .

Якщо таблиця значень функції обмежена, то число n також обмежене: n не може бути більше числа значень функції y , зменшеного на одиницю.

Зауважимо, що при застосуванні першої інтерполяційної формули Ньютона зручно користуватися горизонтальною таблицею

різниць, оскільки тоді потрібні значення різниць функції знаходяться у відповідному горизонтальному рядку таблиці.

Приклад 5.8

Апроксимувати функцію $y = e^x$ інтерполяційним поліномом Ньютона на відрізку $[3,5; 3,6]$, поклавши крок $h = 0,05$.

Розв'язання

Складаємо таблицю різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,50	33,115	1,698	0,087	0,005
3,55	34,813	1,785	0,092	0,003
3,60	36,598	1,877	0,095	—
3,65	38,475	1,972	—	—
3,70	40,447	—	—	—

Оскільки різниці третього порядку майже сталі, то в формулі Ньютона (5.8) покладемо $n = 3$. Покладемо $x_0 = 3,50$; $y_0 = 33,115$, згідно (5.8) отримуємо:

$$P_3(x) = 33,115 + 1,698 \cdot q + 0,087 \cdot \frac{q(q-1)}{2!} + 0,005 \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{3!},$$

де $q = \frac{x - 3,50}{0,05} = 20(x - 3,5) \bullet$

Приклад 5.9

В таблиці 5.1 наведено значення інтеграла ймовірностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Застосовуючи першу інтерполяційну формулу Ньютона, наближено визначити $\Phi(1.43)$ (умова прикладу 5.5).

Розв'язання

Доповнюємо таблицю 5.1 кінцевими різницями до третього порядку включно (таблиця 5.2).

За x_0 приймаємо найближче табличне значення до шуканого $x=1,43$. Тобто покладемо $x_0=1,4$. Оскільки $h=0,1$, то $q=\frac{1,43-1,4}{0,1}=0,3$. Підставляємо в формулу Ньютона (5.8), отримуємо:

$$y \approx 0,9523 + 0,138 \cdot 0,3 - 0,036 \cdot \frac{0,3(0,3-1)}{2!} + 0,009 \cdot \frac{0,3(0,3-1)(0,3-2)}{3!} = 0,95686.$$

Таблиця 5.2. Приклад 5.9

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	0,8427	0,375	-0,074	0,01
1,1	0,8802	0,301	-0,064	0,01
1,2	0,9103	0,237	-0,054	0,009
1,3	0,9340	0,183	-0,045	0,009
1,4	0,9523	0,138	-0,036	0,009
1,5	0,9661	0,102	-0,027	0,005
1,6	0,9763	0,0075	-0,022	0,006
1,7	0,9838	0,0053	-0,016	0,004
1,8	0,9891	0,0037	-0,012	—
1,9	0,9928	0,0025	—	—
2,0	0,9953	—	—	—

Для порівняння наведеного результату: табличне значення $\Phi(1,43)=0,9569$ •

На практиці часто потрібно навести аналітичний вигляд функції (підібрати аналітичну формулу), заданою таблицею значень. Така формула називається **емпіричною**, причому задача її побудови не є однозначною.

При побудові емпіричної формули потрібно враховувати загальні властивості функції. Якщо із таблиці різниць визначено, що n -ті різниці функції для рівновіддалених значень аргументу стали, то за емпіричну формулу можна взяти відповідну першу інтерполяційну формулу Ньютона.

Приклад 5.10

Знайти суму квадратів чисел від 1 до n : $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Розв'язання

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$
1	1	4	5	2
2	5	9	—	2
3	14	—	—	2

$$\Delta^3 S_n = 2! \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Отже, S_n можна шукати у вигляді полінома третьої степені відносно n , який позначимо $P_3(x)$.

Застосовуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона, враховуючи, що

$$q = \frac{n-1}{1} = n-1.$$

$$S_n = P_3(x) = 1 + 4 \cdot (n-1) + 5 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \bullet$$

5.4.3. ДРУГА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА (ВИПАДОК СТАЛОГО КРОКУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ)

Перша інтерполяційна формула незручна для інтерполювання функції поблизу кінця таблиці. В цьому випадку застосовується **друга інтерполяційна формула Ньютона**, яка має наступний вигляд [1]:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_n. \quad (5.9)$$

Приклад 5.11

Побудувати поліном Ньютона для функції, заданою таблицею

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Розв'язання

Складаємо таблицю різниць (таблиця 5.3).

Таблиця 5.3. Приклад 5.11

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	– 0,4
1	8,0	2,4	– 0,4
2	10,4	2,0	– 0,4
3	12,4	1,6	– 0,4
4	14,0	1,2	– 0,4
5	15,2		

Переконаємося, що друга різниця є сталою.

- Застосовуємо *першу* інтерполяційну формулу Ньютона (5.8) (інтерполювання «вперед»), де $q = \frac{x-x_0}{h} = x$, отримуємо:

$$y \approx P_2(x) = 5,2 + 2,8x + \frac{x(x-1)}{2!}(-0,4),$$

або

$$y = 5,2 + 3x - 0,2x^2.$$

- Застосовуємо *другу* інтерполяційну формулу Ньютона (5.9) (інтерполювання «назад»), де $q = \frac{x-x_n}{h} = x-5$, отримуємо:

$$P_2(x) = 15,2 + 1,2 \cdot q + \frac{q(q+1)}{2!}(-0,4) = -0,2x^2 + 3x + 5,2.$$

Відповіді із застосуванням першої та другої формули Ньютона збігаються •

Приклад 5.12

Задана таблиця значень функції $y = \lg x$:

x	y
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

За наведеними значеннями функції визначити $\lg 1044$.

Розв'язання

Складаємо таблицю різниць (таблиця 5.4).

Таблиця 5.4. Приклад 5.12

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	0,0043214	– 0,0000426	0,00000008
1010	3,0043214	0,0042788	– 0,0000418	0,00000009
1020	3,0086002	0,0042370	– 0,0000409	0,00000008
1030	3,0128372	0,0041961	– 0,0000401	
1040	3,0170333	0,0041560		
1050	3,0211893			

Покладемо $x_n = 1050$, тоді $q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0,6$.

Згідно формули Ньютона(5.9), з використанням виділених у таблиці 5.4 різниць, отримуємо:

$$\begin{aligned} \lg 1044 = & 3,0211893 + (-0,6) \cdot 0,0041560 + \frac{(-0,6) \cdot (-0,6 + 1)}{2} \cdot 0,0000401 + \\ & + \frac{(-0,6) \cdot (-0,6 + 1) \cdot (-0,6 + 2)}{6} \cdot 0,0000008 = 3,0187005. \end{aligned}$$

В отриманому результаті усі знаки є вірними •

Як перша, так і друга інтерполяційні формули Ньютона можуть бути використані для **екстраполювання** функції, тобто для визначення значень функції у для значень аргументів x , які знаходяться за межами таблиці.

Якщо $x < x_0$ та $x \approx x_0$, то потрібно використовувати першу інтерполяційну формулу Ньютона, причому у цьому випадку

$$q = \frac{x - x_0}{h} < 0.$$

Якщо $x > x_n$; $x \approx x_n$, слід використовувати другу інтерполяційну формулу, причому

$$q = \frac{x - x_n}{h} > 0.$$

Таким чином, *перша інтерполяційна формула Ньютона* зазвичай використовується *для інтерполювання вперед і екстраполювання назад*, а *друга інтерполяційна формула Ньютона*, навпаки, – *для інтерполювання назад та екстраполювання вперед*.

Зауважимо, що операція екстраполювання менш точніша, ніж операція інтерполювання.

Приклад 5.13 Задано таблицю значень функції $y = \sin x$.

x	y
15°	0,2588
20°	0,3420
25°	0,4226
30°	0,5000
35°	0,5736
40°	0,6428
45°	0,7071
50°	0,7660
55°	0,8192

Знайти $\sin 14^\circ$ та $\sin 56^\circ$.

Розв'язання

Складаємо таблицю різниць (таблиця 5.5).

Таблиця 5.5. Приклад 5.13

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15°	0,2588	0,0832	– 0,0026	– 0,0006
20°	0,3420	0,0806	– 0,0032	– 0,0006
25°	0,4226	0,0774	– 0,0038	– 0,0006
30°	0,5000	0,0736	– 0,0044	– 0,0005
35°	0,5736	0,0692	– 0,0049	– 0,0005
40°	0,6428	0,0643	– 0,0054	– 0,0003
45°	0,7071	0,0589	– 0,0057	
50°	0,7660	0,0532		
55°	0,8192			

Оскільки треті кінцеві різниці функції y практично стали, можна ними і обмежитися.

- Для підрахунку $\sin 14^\circ$ покладемо

$$x_0 = 15^\circ; \quad x = 14^\circ \Rightarrow \quad q = \frac{14^\circ - 15^\circ}{5^\circ} = -0,2.$$

Застосуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи різниці першого рядка таблиці (відповідають значенню кута $x = 15^\circ$), отримуємо:

$$\sin 14^\circ = 0,2588 + (-0,2) \cdot 0,0832 + \frac{(-0,2)(-1,2)}{2!}(-0,0026) + \frac{(-0,2)(-1,2)(-2,2)}{3!}(-0,0006) = 0,2419.$$

Для порівняння, згідно таблиць $\sin 14^\circ = 0,24192$.

- Для визначення $\sin 56^\circ$ покладемо:

$$x_n = 55^\circ; \quad x = 56^\circ \Rightarrow \quad q = \frac{56^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = 0,2.$$

Застосуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона, використовуючи виділені курсивом кінцеві різниці, отримуємо:

$$\sin 56^\circ = 0,8192 + 0,2 \cdot 0,0532 + \frac{0,2 \cdot 1,2}{2!}(-0,0057) + \frac{0,2 \cdot 1,2 \cdot 2,2}{3!}(-0,0003) = 0,8291.$$

Для порівняння, згідно таблиць $\sin 56^\circ = 0,82904$ •

5.4.4. ПОНЯТТЯ РОЗДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА У ВИПАДКУ ДОВІЛЬНОГО КРОКУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Якщо таблиця функції $y = f(x)$ задана не з постійним кроком, тобто проміжки між сусідніми значеннями аргументу різні, в цьому випадку для побудови інтерполяційної формули Ньютона використовують поняття *розділених різниць*.

Розділеною різницею першого порядку $f(x_i, x_{i-1})$ двох табличних значень називається відношення різниці значень функції до різниці відповідних значень аргументу:

$$f(x_i, x_{i-1}) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Розділеною різницею другого порядку $f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2})$ називається відношення різниці двох розділених різниці першого порядку до різниці між «крайніми» значеннями означених аргументів:

$$f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \frac{f(x_i, x_{i-1}) - f(x_{i-1}, x_{i-2})}{x_i - x_{i-2}}, \quad (i = \overline{2, n}).$$

Аналогічним чином визначаються розділені різниці будь-якого порядку, а саме, розділені різниці k -го порядку визначаються через розділені різниці $(k-1)$ -го порядку наступним чином:

$$f(x_{i+k}, \dots, x_i) = \frac{f(x_{i+k}, x_{i-1}) - f(x_{i+k-1}, x_i)}{x_{i+k} - x_i}.$$

Інтерполяційний поліном Ньютона для нерівних проміжків має вигляд (формула інтерполювання функції «вперед»):

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0) + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Формулу (5.10) використовують для інтерполяції функції на заданому відрізку $[x_0, x_n]$, якщо значення x лежить ближче до початку таблиці (до x_0).

У випадку, коли значення x розташоване ближче до кінця таблиці (до x_n), використовується формула Ньютона для інтерполяції «назад»:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Зауваження. На практиці зазвичай розділені різниці записують у таблицю наступного виду:

x	y	Розділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
x_0	y_0	—	—	—	—
—	—	$f(x_1, x_0)$	—	—	—
x_1	y_1	—	$f(x_2, x_1, x_0)$	—	—
—	—	$f(x_2, x_1)$	—	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$	—
x_2	y_2	—	$f(x_3, x_2, x_1)$	—	$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$
—	—	$f(x_3, x_2)$	—	$f(x_4, x_3, x_2, x_1)$	—
x_3	y_3	—	$f(x_4, x_3, x_2)$	—	—
—	—	$f(x_4, x_3)$	—	—	—
x_4	y_4	—	—	—	—

Приклад 5.14

Знайти інтерполяційний поліном Ньютона для функції $y = f(x)$, заданої таблицею:

x	1	3	4
y	6	24	45

Розв'язання

Оскільки вузли не рівновіддалені, інтерполяційний поліном Ньютона (5.10) для $n = 2$ матиме вигляд:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0). \quad (5.12)$$

Обчислимо розділені різниці:

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{24 - 6}{3 - 1} = 9; \quad f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45 - 24}{4 - 3} = 21;$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{21 - 9}{4 - 1} = 4.$$

З урахуванням наведених значень, поліном Ньютона (5.12) набуває наступного вигляду:

$$P_2(x) = 6 + 9(x-1) + 4(x-1)(x-3) \Leftrightarrow P_2(x) = 4x^2 - 7x + 9 \bullet$$

ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА

Оскільки поліноми Лагранжа і Ньютона, побудовані на основі однієї таблиці, різняться лише формою запису, зображення абсолютної похибки у вигляді:

$$|R_n(x)| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|,$$

де $M_{n+1} = \sup |f^{(n+1)}(x)|$, $x_0 \leq x \leq x_n$, справедливе як для формул Лагранжа, так і для формул Ньютона.

Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені, то залишковий член

- першої інтерполяційної формули Ньютона (5.8):

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad q = \frac{x-x_0}{h};$$

- другої інтерполяційної формули Ньютона (5.9):

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad q = \frac{x-x_n}{h}.$$

У практичних розрахунках аналітичний вид функції не завжди відомий. Тоді, припускаючи, що в таблиці кінцевих різниць для функції $y = f(x)$ різниці $(n+1)$ -го порядку $\Delta^{n+1}y \approx \text{const}$ і крок h досить малий, тоді наближено можна вважати: $f^{(n+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}$.

Цьому разі залишковий член

- першої інтерполяційної формули Ньютона:

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y;$$

- другої інтерполяційної формули Ньютона:

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y.$$

5.5. БАГАТОЧЛЕНИ ЧЕБИШОВА

Оцінка похибки інтерполяції визначається формулою (5.13). Розглянемо задачу, як на заданому відрізку $[a, b]$ вибрати вузли $x_0, x_1, \dots, x_n$ інтерполяції (у формі Лагранжа), щоб максимальна похибка інтерполяції даної функції $f(x)$ була на цьому відрізку мінімальною. Ця задача є складною і розв'язана для частинних випадків функції $f(x)$.

Розглянемо більш просту задачу. Побудувати вузли $\{x_i\}, (i = \overline{0, n})$ так, щоб на $[a, b]$ мінімальною була величина

$$\max_{[a, b]} \omega_{n+1}(x) = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

Спочатку візьмемо відрізок $[-1, 1]$, на якому визначено поліноми Чебишова згідно співвідношення:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \quad |x| \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

При

$$n = 0: T_0(x) = 1;$$

$$n = 1: T_1(x) = x.$$

Із тотожності:

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi$$

при $\varphi = \arccos(x)$ отримуємо рекурентну формулу:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in N,$$

відповідно якої послідовно знаходимо:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

...

Наведемо деякі властивості багаточленів Чебишова.

Властивість 1. При парному n багаточлен $T_n(x)$ є парною функцією, при непарному n – непарною функцією.

Властивість 2. Старший коефіцієнт багаточлена $T_n(x)$ дорівнює 2^{n-1} при $n \geq 1$.

Властивість 3. $T_n(x)$ має n дійсних коренів на відрізку $[-1;1]$, причому ці корені дорівнюють:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Властивість 4.

$$\max_{[-1;1]} |T_n(x)| = 1,$$

При цьому $T_n(x_m) = (-1)^m$, де $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Властивість 5.

Багаточлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1$$

серед усіх багаточленів n -го степеня зі старшим коефіцієнтом одиницею має на відрізку $[-1;1]$ найменше значення максимуму модуля, тобто не існує такого багаточлена $\bar{P}_n(x)$ n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1, що

$$\max_{[-1;1]} |\bar{P}_n(x)| < \max_{[-1;1]} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Доведення проведемо від супротивного.

Нехай існує такий багаточлен

$$\bar{P}_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Тоді $\bar{T}_n(x) - \bar{P}_n(x)$ – багаточлен степеня не вище $n-1$ і $\bar{T}_n(x) - \bar{P}_n(x) \neq 0$.

Крім того, з нашого припущення і властивості 4 випливає, що ця різниця в $(n+1)$ -й точці $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$, $(m = \overline{0, n})$ приймає ненульові значення зі знаками, що чергуються. Це означає, що багаточлен $\bar{T}_n(x) - \bar{P}_n(x)$ степеня менше n обертається в нуль хоча б в n точках, що неможливо. Властивість 5 доведено.

Тепер ми можемо побудувати вузли, що мінімізують оцінку похибки інтерполяції. Візьмемо на $[-1;1]$ в якості вузлів корені багаточлена Чебишова $T_{n+1}(x)$:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тоді багаточлен $(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_i)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ буде пропорційним багаточлену $T_{n+1}(x)$ і, згідно властивості 2

$$(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_i)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=2^{-n}\cdot T_{n+1}(x).$$

Оцінка похибки інтерполяції набуде вигляду

$$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n},$$

$$\text{де } M_{n+1}=\max_{[-1;1]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Згідно з властивістю 5, саме ці вузли є оптимальними на $[-1;1]$.

У випадку інтерполяції на будь-якому відрізку $[a;b]$ треба зробити заміну змінної:

$$x=\frac{1}{2}((b-a)t+b+a)\Leftrightarrow t=\frac{1}{b-a}(2x-b-a).$$

Тоді кореням багаточлена Чебишова $T_{n+1}(t)$ відповідають точки відрізка $[a;b]$:

$$x_i=\frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}+b+a\right), (i=\overline{0,n}).$$

Ці точки є оптимальними та

$$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},$$

$$\text{де } M_{n+1}=\max_{[a;b]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як сформулюється задача інтерполяції?
2. Яка функція називається інтерполянтою?
3. Який вигляд має інтерполяційна формула Лагранжа?
4. Дайте геометричну інтерпретацію процесу інтерполяції.
5. Коли застосовується схема Ейткена?
6. Як визначаються кінцеві різниці різних порядків?
7. Як записується перша та друга інтерполяційні формули Ньютона?
8. Коли застосовується перша та друга інтерполяційні формули Ньютона?
9. Як визначаються розділені різниці?
10. Як записуються інтерполяційні формули Ньютона у випадку довільного кроку інтерполяції?
11. Наведіть оцінки похибок інтерполяційних формул Лагранжа та Ньютона.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Чи має задача інтерполювання функції багаточленом декілька розв'язків?
Ні
2. Схема Ейткена застосовується для визначення наближеного значення функції, означеною таблицею, в проміжній точці.
Так
3. Обчислення за схемою Ейткена зводяться до визначення визначника другого порядку.
Так
4. При побудові інтерполяційних багаточленів Лагранжа та Ньютона розглядаються різні задачі.
Ні
5. Поняття аналітичної та емпіричної функції тотожні.
Ні
6. Операція екстраполювання функції менш точніша, ніж

операція інтерполювання.

Так

7. Поняття кінцевих та розділених різниць тотожні.

Ні

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 5

Індивідуальна робота 5 складається із трьох завдань.

Завдання 5.1

Функція $f(x)$ задана таблицею значень. Обчислити значення цієї функції в заданій точці $\bar{x}$ за допомогою

- побудови інтерполяційного багаточлена Лагранжа $L_4(x)$;
- побудови інтерполяційного багаточлена Ньютона $P_n(x)$;
- визначити похибку розрахунків.

Чисельні значення завдання 1 для кожного варіанта наведено в таблиці 5.6. Шифр по вертикалі / горизонталі – відповідно перша та друга цифра номера варіанта.

Таблиця 5.6. Завдання 5.1. Індивідуальна робота 5

Координати	Шифр по вертикалі									
x_0	-9,9	-8,1	-9,2	-8,7	-7,4	-9,5	-7,7	-8,4	-9,3	-8,8
$f(x_0)$	6,033	3,325	4,810	4,074	2,611	5,305	2,900	3,682	4,970	4,213
Координати	Шифр по горизонталі									
x_1	-0,9	0,0	0,5	-0,8	0,7	0,1	0,3	-0,4	-1,1	-0,2
$f(x_1)$	0,895	1,035	1,131	0,908	1,172	1,053	1,090	0,967	0,871	1,000
x_2	4,0	3,5	2,8	3,9	2,3	3,4	2,9	3,7	2,0	3,1
$f(x_2)$	2,011	1,873	1,683	1,983	1,552	1,846	1,710	1,928	1,475	1,764

Коор- динати	Шифр по горизонталі									
x_3	-4,8	-4,1	-5,3	-4,2	-4,9	-3,9	-5,6	-4,5	-3,6	-5,1
$f(x_3)$	1,108	0,940	1,283	0,954	1,140	0,898	1,411	1,024	0,854	1,208
x_4	6,5	7,7	8,2	6,2	7,4	8,5	6,8	7,9	6,0	7,1
$f(x_4)$	2,698	3,004	3,123	2,618	2,930	3,192	2,776	3,052	2,564	2,854
$\bar{x}$	-6,6	-2,3	1,2	1,8	4,2	4,5	5,1	5,4	5,6	5,8

Завдання 5.2

Задається аналітичний вигляд функції $f(x)$ та похибка обчислень ε (таблиця 5.7).

Таблиця 5.7. Завдання 5.2. Індивідуальна робота 5

Номер варіанту	$f(x)$	ε	Номер варіанту	$f(x)$	ε
1.	$\cos(2x - 4)$	10^{-3}	2.	e^{2x-1}	$2 \cdot 10^{-3}$
3.	$\lg(x)$	10^{-4}	4.	$\sqrt[3]{x+4}$	10^{-4}
5.	$\ln(5x - 5)$	$5 \cdot 10^{-4}$	6.	$\sqrt[5]{x^3 + 4x}$	10^{-3}
7.	$\cos^2(3x + 4)$	0.01	8.	0.5^{2x+1}	$5 \cdot 10^{-3}$
9.	$\sqrt{5x^3 - 4x + 2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	10.	$\ln(2x + 5)$	10^{-4}
11.	3^{x-5}	$3 \cdot 10^{-3}$	12.	$\sqrt{x^4 + 2x^2}$	$5 \cdot 10^{-4}$
13.	$\cos(5x)$	$5 \cdot 10^{-3}$	14.	$\sqrt[3]{3x^6 - 7x}$	10^{-3}
15.	e^{5x-10}	$4 \cdot 10^{-3}$	16.	$\ln\left(\frac{5x+3}{2}\right)$	$5 \cdot 10^{-3}$
17.	$\lg(x^2 + 1)$	10^{-3}	18.	$\sqrt{11x^3 - 4x^2 + 2}$	$5 \cdot 10^{-4}$
19.	$\sin(x^2)$	$3 \cdot 10^{-3}$	20.	4^{3x+6}	$5 \cdot 10^{-3}$
21.	3^{1-2x}	10^{-3}	22.	$\sqrt{5x^3 - 40x - 12}$	$5 \cdot 10^{-3}$
23.	$\cos^5(x + 1)$	$3 \cdot 10^{-3}$	24.	$\sin(4x + 1)$	$4 \cdot 10^{-3}$
25.	$\sin^3(2x + 1)\cos(2x - 1)$	$2 \cdot 10^{-3}$	26.	$\sin^3(11x + 1)$	$5 \cdot 10^{-3}$

Продовження таблиці 5.7

Номер варіанту	$f(x)$	ε	Номер варіанту	$f(x)$	ε
27.	2^{x-6}	$2 \cdot 10^{-3}$	28.	$\sin^4(-x+5)$	$5 \cdot 10^{-3}$
29.	$\cos^4(x-10)$	$5 \cdot 10^{-3}$	30.	$\sqrt{9x^2-7x-2}$	10^{-3}

- На довільно обраному відрізку $[a, b]$ ($|b-a| > 2$) із області визначення здійснити табулювання функції $y = f(x)$ з довільним кроком $h = \text{const}$ (із довільною кількістю вузлів інтерполяції).
- Значення аргумента $\bar{x}$ вибрати самостійно, $\bar{x} \in [a, b]$.
- За означеними вузлами та заданою похибкою ε згідно схеми Ейткена визначити наближене значення функції в точці $\bar{x}$

Завдання 5.3

Розробити програмне забезпечення задачі інтерполяції функції за Лагранжем та Ньютоном.

Реалізувати можливість вибору методу розв'язання.

Вхідні дані програми – задання:

- функції $y = f(x)$,
- відрізка інтерполювання $[a, b]$,
- кількості точок інтерполювання;
- значення аргументу $\bar{x} \in [a, b]$ (не співпадає з жодним із вузлів інтерполювання).

Вихідні дані програми:

- аналітичний вид полінома Лагранжа/ Ньютона;
- графіки інтерполянти та заданої функції $y = f(x)$ із зазначеними вузлами інтерполяції та вказаній на обох графіках точці з абсцисою $\bar{x}$;
- наближене значення інтерполянти в зазначеній точці $\bar{x}$ та обчисленою похибкою.

РОЗДІЛ 6.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ

6.1. ПОНЯТТЯ СПЛАЙНА

Якщо вузлів інтерполяції досить багато, відповідна степінь поліномів Лагранжа або Ньютона також достатньо висока (на одиницю менше кількості вузлів). Звичайно, значення даних поліномів у вузлах точно співпадають із значеннями самої функції, проте розбіжність між функцією та поліномом може суттєво відрізнятись між точками інтерполяції. Найбільша розбіжність виникає поблизу крайніх точок відрізка інтерполювання, причому, чим більше степінь полінома, тим більше розбіжність. Виникає, так званий, феномен Рунге.

Одним із варіантів усунення цього недоліка – застосування сплайнів. Ідея сплайн-інтерполяції полягає у визначенні інтерполюючої функції у вигляді поліномів між парами сусідніх вузлів (для кожної пари вузлів будується свій поліном). Сплайн – це функція $S(x)$, яка «склеєна» із багаточленів.

Лінійний сплайн

Найпростішим варіантом сплайну є лінійний сплайн (рис. 6.1.). На

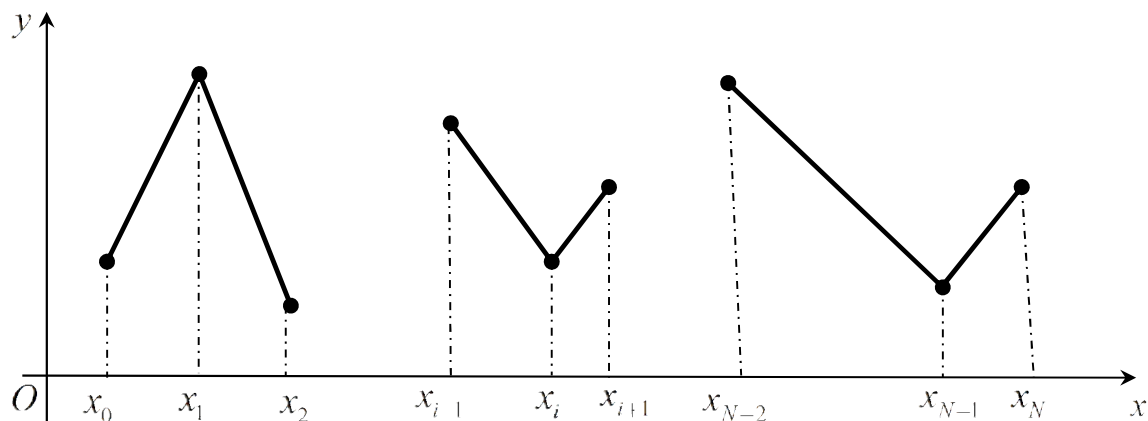


Рис. 6.1. Лінійна сплайн-інтерполяція

6.2. ПЕРШИЙ СПОСІБ ПОБУДОВИ КУБІЧНОГО СПЛАЙНА

На кожному із відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, N}$) будуємо поліном третього порядку (рис. 6.2):

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (6.1)$$

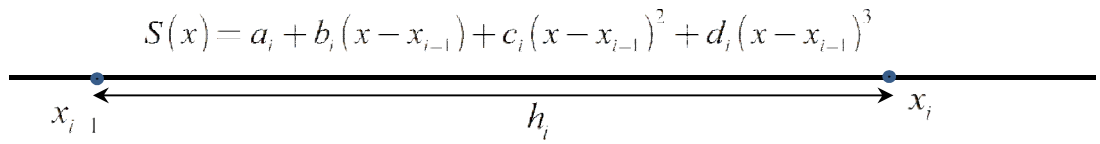


Рис. 6.2. Побудова кубічного сплайна. Позначення

Таким чином, для визначення сплайну на всьому відрізку $[x_0, x_N]$ потрібно визначити $4N$ невідомих a_i, b_i, c_i, d_i ($i = \overline{1, N}$). Для цього потрібно скласти $4N$ незалежних рівнянь.

Перші $2N$ рівняння отримуємо згідно умови проходження сплайна через вузли інтерполявання:

$$a_i = y_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}); \quad (6.2)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \quad (i = \overline{1, N}). \quad (6.3)$$

Оскільки

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}),$$

наступні $2N - 2$ рівняння відповідають умовам неперервності першої та другої похідної від функції $S(x)$ у внутрішніх вузлах інтерполявання:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (6.4)$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1} \quad (i = \overline{1, N-1}). \quad (6.5)$$

Таким чином, для визначення невідомих a_i, b_i, c_i, d_i ($i = \overline{1, N}$) отримано $4N - 2$ рівняння (6.2) – (6.5), які після незначних елементарних перетворень набувають наступного вигляду:

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & (i = \overline{1, N}); \\ b_i + c_i h_i + d_i h_i^2 = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} & (i = \overline{1, N}); \\ b_i + h_i(c_i + c_{i+1}) = b_{i+1} & (i = \overline{1, N-1}); \\ d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & (i = \overline{1, N-1}). \end{cases} \quad (6.6)$$

Два відсутніх рівняння задаються у вигляді обмежень похідних сплайна на кінцях відрізка інтерполювання $[x_0, x_N]$. Найбільш використані крайові умови наступних типів.

- **Граничні (крайові) умови першого типу:**

на кінцях відрізка $[x_0, x_N]$ задаються значення першої похідної шуканої функції:

$$S'(x_0) = f'(x_0); \quad S'(x_N) = f'(x_N). \quad (6.7)$$

В наведених позначеннях ці умови записуються наступним чином:

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_0); \\ b_N + 2c_N h_N + 3d_N h_N^2 = f'(x_N). \end{cases} \quad (6.8)$$

- **Граничні (крайові) умови другого типу:**

на кінцях відрізка $[x_0, x_N]$ задаються значення другої похідної шуканої функції:

$$S''(x_0) = f''(x_0); \quad S''(x_N) = f''(x_N). \quad (6.9)$$

Або:

$$\begin{cases} 2c_1 = f''(x_0); \\ 2c_N + 6d_N h_N = f''(x_N). \end{cases} \quad (6.10)$$

- **Граничні (крайові) умови третього типу:**

$$S'(x_0) = S'(x_N); \quad S''(x_0) = S''(x_N),$$

які називаються *періодичними*. Виконання цих умов варто використовувати, якщо функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом $T = x_N - x_0$.

Існують крайові умови й іншого вигляду.

Таким чином, отримано СЛАР (6.6) з відповідними крайовими умовами, яка містить $4N$ для визначення $4N$ невідомих коефіцієнтів сплайна. Розв'язок цієї системи можна отримати, наприклад, методом Гаусса, проте є можливість скоротити обчислення шляхом зведення системи до трьохдіагонального вигляду.

Розглянемо схему перетворення СЛАР (6.6) у випадках граничних умов першого та другого типів.

Граничні умови першого типу

Друге та четверте рівняння системи (6.6) при $i = 1$ та перша гранична умова (6.8) дозволяють отримати залежність між невідомими c_1 та c_2 :

$$\begin{cases} b_1 + c_1 h_1 + d_1 h_1^2 = \frac{y_1 - y_0}{h_1}; \\ c_1 + 3d_1 h_1 = c_2; \\ b_1 = f'(x_0); \end{cases} \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 3 \frac{y_1 - y_0}{h_1^2} - \frac{3}{h_1} f'(x_0). \quad (6.11)$$

Підставимо четверте та третє рівняння системи (6.6) в друге при $i = N - 1$, отримуємо:

$$b_N = \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} + \frac{h_{N-1}}{3}(2c_N + c_{N-1}). \quad (6.12)$$

Підстановка (6.12) в друге рівняння (6.6) при $i = N$ приводить до співвідношення:

$$d_N = \frac{1}{h_N^2} \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} - \frac{1}{3} h_{N-1} (c_{N-1} + 2c_N) - c_N h_N \right]. \quad (6.13)$$

Після підстановки (6.12), (6.13) в другу граничну умову (6.8), остаточно отримуємо наступне рівняння:

$$\frac{2}{3} h_{N-1} c_{N-1} + \left(h_N + \frac{4}{3} h_{N-1} \right) c_N = -f'(x_N) - 2 \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} + 3 \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N}. \quad (6.14)$$

Визначимо b_i, d_i ($i = \overline{1, N-1}$) із другого та четвертого рівняння системи (6.6):

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (6.15)$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \quad (i = \overline{1, N-1}); \quad (6.16)$$

Вирази (6.15), (6.16) підставимо в третє рівняння (6.6), яке можна представити у вигляді:

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \quad (i = \overline{2, N-1}). \quad (6.17)$$

Після спрощення отримуємо наступну СЛАР:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i-1}) + h_i c_{i+1} = 3 \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right]; \quad (i = \overline{2, N-1}). \quad (6.18)$$

Згідно (6.11), (6.14), (6.18) отримано лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 \frac{y_1 - y_0}{h_1^2} - \frac{3}{h_1} f'(x_0); \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i-1}) + h_i c_{i+1} = 3 \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right], \quad (i = \overline{2, N-1}); \\ \frac{2}{3} h_{N-1} c_{N-1} + \left(h_N + \frac{4}{3} h_{N-1} \right) c_N = -f'(x_N) - 2 \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} + 3 \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N}, \end{cases} \quad (6.19)$$

з трьохдіагональною матрицею, розв'язок якої можна отримати методом прогонки.

За відомими коефіцієнтами c_i ($i = \overline{1, N}$):

- визначаємо по формулам (6.16), (6.12) невідомі b_i ($i = \overline{1, N}$);
- згідно (6.15), (6.13) отримуємо значення d_i ($i = \overline{1, N}$);
- формули (6.2) визначають коефіцієнти a_i ($i = \overline{1, N}$).

Таким чином, для кожного відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, N}$) визначений кубічний поліном, тобто задачу інтерполювання функції $y = f(x)$ кубічним сплайном вважаємо розв'язаною.

Приклад 6.1

Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ в точці $x = 0.3$, якщо відома таблиця її значень (таблиця 6.1).

Таблиця 6.1. Приклад 6.1

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y_i	-0,7	0	0,7	1	0,7	0	-0,7

та значення похідної $y = f'(x)$ на кінцях відрізка інтерполювання:

$$f'(-1,5) = 1, \quad f'(1,5) = 2.$$

Розв'язання

Розв'язок будемо здійснювати використовуючи алгоритм кубічної сплайн – інтерполяції. Згідно умови задачі крок інтерполювання $h = 0,5$, кількість інтервалів $N = 6$. На кожному із відрізків будемо кубічний багаточлен:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (i = \overline{1,6}).$$

Для визначення c_i ($i = \overline{1,6}$) складемо СЛАР (6.19):

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 2,4; \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0; \\ c_2 + 4c_3 + c_4 = -4,8; \\ c_3 + 4c_4 + c_5 = -7,2; \\ c_4 + 4c_5 + c_6 = -4,8; \\ 2c_5 + 7c_6 = -20,4. \end{cases}$$

Для отримання розв'язку останньої СЛАР застосовуємо метод прогонки, визначаємо:

$$c_1 = 1,261; \quad c_2 = -0,122; \quad c_3 = -0,773; \quad c_4 = -1,587; \quad c_5 = -0,081; \quad c_6 = -2,891.$$

Після визначення усіх коефіцієнтів a_i за розрахунковими формулами (6.2), b_i – за формулами (6.12), (6.16), та d_i – згідно (6.15) $i = \overline{1,6}$, отримуємо остаточний вигляд сплайну:

$$S(x) = \begin{cases} 0,532 - 1,441x - 2,888x^2 - 0,922x^3, & x \in [-1,5; -1); \\ 1,014 + 0,024x - 1,424x^2 - 0,434x^3, & x \in [-1; -0,5); \\ 1 - 0,058x - 1,587x^2 - 0,543x^3, & x \in [-0,5; 0); \\ 1 - 0,058x - 1,587x^2 + 1,004x^3, & x \in [0; 0,5); \\ 1,360 - 2,216x + 2,730x^2 - 1,874x^3, & x \in [0,5; 1); \\ -10,205 + 32,479x - 31,965x^2 + 9,691x^3, & x \in [1; 1,5]. \end{cases}$$

Графік побудованого сплайну зображено на рис. 6.3

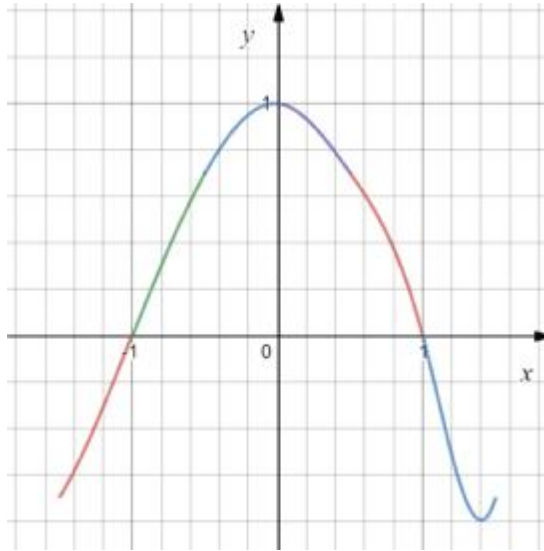


Рис. 6.3 Зображення сплайна. Приклад 6.1 Граничні умови першого типу

Тоді $f(0,3) \approx (1 - 0,057x - 1,588x^2 + x^3) \Big|_{x=0,3} = 0,867 \bullet$

Граничні умови другого типу

Якщо задані граничні умови (6.9), виконуючи перетворення, аналогічні до попередніх, приводимо систему (6.6), із врахуванням (6.9) до вигляду:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} f''(x_0); \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i-1}) + h_ic_{i+1} = 3 \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right], \quad (i = \overline{2, N-1}); \\ h_{N-1}c_{N-1} + 2c_N(h_N + h_{N-1}) = -f''(x_N) \frac{h_N}{2} + 3 \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \right]; \end{cases} \quad (6.20)$$

Після визначення усіх коефіцієнтів $c_i (i = \overline{1, N})$ методом прогонки, знаходимо інші невідомі:

$$\begin{cases} d_N = \frac{f''(x_N) - 2c_N}{6h_N}; & d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, (i = \overline{1, N-1}); \\ b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{h_N}{6} f''(x_N) - \frac{2}{3} c_N h_N; \\ b_i = b_{i+1} - h_i (c_i + c_{i+1}), (i = \overline{N-1, 1}); \\ a_i = y_{i-1}, (i = \overline{1, N}). \end{cases} \quad (6.21)$$

Приклад 6.2

Для функції, заданою таблицею 6.1 побудувати кубічний сплайн $S(x)$ при умові визначення другої похідної на кінцях відрізка інтерполювання:

$$S''(x_0) = f''(x_0) = -2; \quad S''(x_N) = f''(x_N) = 2.$$

Розв'язання

Система рівнянь (6.20) згідно умови набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} c_1 = -1; \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0; \\ c_2 + 4c_3 + c_4 = -4,8; \\ c_3 + 4c_4 + c_5 = -7,2; \\ c_4 + 4c_5 + c_6 = -4,8; \\ c_5 + 4c_6 = -1. \end{cases}$$

Методом прогонки визначаємо:

$$c_1 = -1; c_2 = 0,498; c_3 = -0,992; c_4 = -1,341; c_5 = -0,855; c_6 = -0,036.$$

За формулами (6.21) визначаємо a_i, b_i, d_i ($i = \overline{1, 6}$). Отримуємо остаточний вираз сплайна:

$$S(x) = \begin{cases} 2,905 + 5,404x + 3,5x^2 + x^3, & x \in [-1, 5; -1); \\ 0,911 - 0,571x - 2,472x^2 - 0,99x^3, & x \in [-1; -0,5); \\ 1,001 - 0,009x - 1,337x^2 - 0,23x^3, & x \in [-0,5; 0); \\ 1 - 0,011x - 1,341x^2 + 0,32x^3, & x \in [0; 0,5); \\ 0,972 + 0,159x - 1,68x^2 + 0,55x^3, & x \in [0,5; 1); \\ 0,828 + 0,59x - 2,109x^2 + 0,691x^3, & x \in [1; 1,5]. \end{cases}$$

Графік сплайну наводиться на рис 6.4.

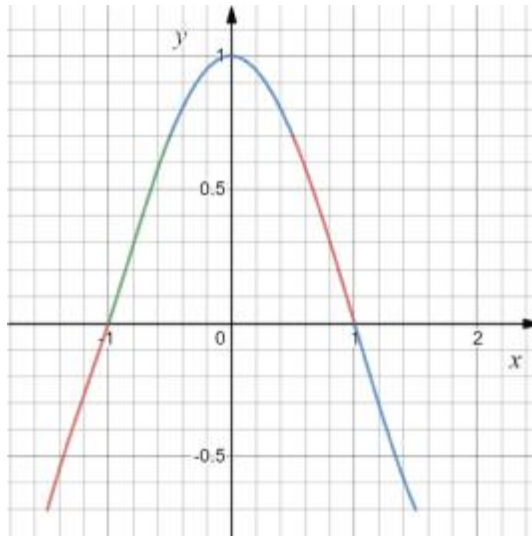


Рис.6.4 Кубічний сплайн. Приклад 6.2. Граничні умови другого типу

Недоліком наведеного підходу щодо побудови кубічного сплайна є проведення достатньо великої кількості чисельних та аналітичних розрахунків.

6.3. ДРУГИЙ СПОСІБ ПОБУДОВИ КУБІЧНОГО СПЛАЙНА

Наведемо ще один спосіб визначення коефіцієнтів кубічного сплайна, при якому загальна кількість величин, що підлягають визначенню, дорівнює $N + 1$, а не $4N$.

Постановка задачі не змінюється. Задано $N + 1$ точки $(x_i, y_i) (i = \overline{0; N})$. На кожному із відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ довжини h_i (рис. 6.5) потрібно побудувати поліном третьої степені $S_i (i = \overline{0; N - 1})$, який задовольняє умовам:

$$S_i(x_i) = y_i; \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (i = \overline{0; N - 1}), \quad (6.22)$$

тобто кожний поліном на своїй області визначення проходить через вузли інтерполяції; та умовам неперервності першої та другої похідної у внутрішніх вузлах інтерполяції:

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad (i = \overline{0; N-2}), \quad (6.23)$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad (i = \overline{0; N-2}). \quad (6.24)$$

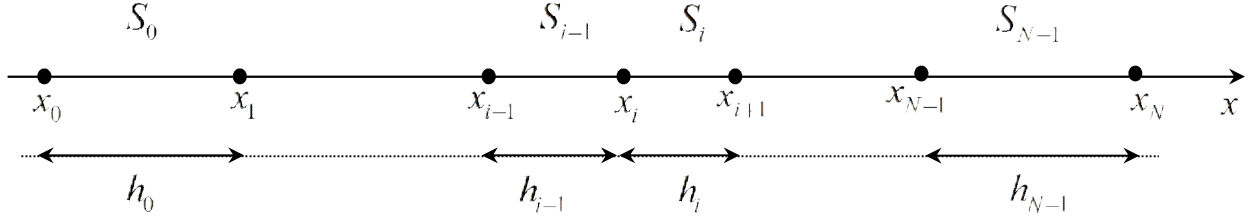


Рис. 6.5. Побудова кубічного сплайна. Позначення

Введемо безрозмірну величину $t = \frac{x - x_i}{h_i}$, яка приймає значення на кінцях кожного відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ значення $\{0; 1\}$ відповідно. Будемо шукати аналітичний вигляд сплайна на вказаному проміжку у вигляді:

$$S_i(t) = y_i(1-t)^2(1+2t) + y_{i+1} \cdot t^2 \cdot (3-2t) + n_i \cdot h_i \cdot t \cdot (1-t)^2 - n_{i+1} \cdot h_i \cdot t^2 \cdot (1-t); \quad (6.25)$$

$$\text{де } (i = \overline{0; N-1}).$$

Означення потребують числа $n_i (i = \overline{0; N})$.

Вирази для похідних кубічного полінома у формі (6.25) мають вид:

$$\frac{dS_i(t)}{dx} = \frac{1}{h_i} [6(y_{i+1} - y_i)t(1-t) + n_i h_i (1-t)(1-3t) - n_{i+1} h_i t(2-3t)]; \quad (6.26)$$

$$\frac{d^2 S_i(t)}{dx^2} = \frac{1}{h_i^2} [6(y_{i+1} - y_i)(1-2t) + 2n_i h_i (3t-2) - 2n_{i+1} h_i (1-3t)]. \quad (6.27)$$

Зазначимо, що при означенні сплайна у вигляді (6.25) і відповідно до (6.26) умови (6.22), (6.23) виконуються тотожно. Отже, залишається задовольнити

умовам (6.24) у внутрішніх точках інтерполювання. Підставимо (6.27) в (6.24), отримуємо СЛАР наступного виду:

$$\frac{1}{h_i} n_i + 2n_{i+1} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + n_{i+2} \frac{1}{h_{i+1}} = 3 \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} \right) \quad (i = \overline{0, N-2}). \quad (6.28)$$

Система (6.28) містить $N-1$ рівняння для визначення $N+1$ невідомих n_i ($i = \overline{0, N}$). Додаємо два відсутніх рівняння – граничні умови на кінцях проміжку.

У випадку граничних умов першого типу (6.7) із врахуванням (6.26) отримуємо наступні два рівняння:

$$n_0 = f'(x_0); \quad n_N = f'(x_N). \quad (6.29)$$

Для граничних умов другого типу (6.9), відповідні рівняння записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_0^2} [3(y_1 - y_0) - 2h_0 n_0 - h_0 n_1] &= f''(x_0); \\ \frac{2}{h_{N-1}^2} [-3(y_N - y_{N-1}) + h_{N-1} n_{N-1} + 2h_{N-1} n_N] &= f''(x_N). \end{aligned} \quad (6.30)$$

При означенні інших граничних умов відповідні рівняння можуть бути отримані аналогічним чином.

Отже, для визначення невідомих сплайна n_i ($i = \overline{0, N}$) при означенні

- граничних умов першого типу (6.7) отримано СЛАР (6.28), (6.29) ;
- для граничних умов другого типу (6.9) – СЛАР (6.28), (6.30).

Розв'язок наведених СЛАР може бути отриманий методом прогонки, оскільки матриця системи при невідомих є трьохдіагональною.

Приклад 6.3

Отримаємо розв'язок задачі, наведений в прикладі 6.1, означеним методом, тобто із застосуванням вибору сплайна у вигляді (6.25).

Розв'язання

Згідно умови кількість вузлів інтерполяції, що відповідає кількості невідомих сплайна дорівнює 7, беручи до уваги обрані позначення, маємо: $N = 6$, $h = 0.5$; невідомі, що підлягають визначенню: $n_i (i = \overline{0, 6})$. Оскільки використовуються граничні умови першого типу, напишемо СЛАР (6.28), (6.29):

$$\begin{cases} n_0 = f'(x_0); \\ n_0 + 4n_1 + n_2 = \frac{3}{h}(y_2 - y_0); \\ n_1 + 4n_2 + n_3 = \frac{3}{h}(y_3 - y_1); \\ n_2 + 4n_3 + n_4 = \frac{3}{h}(y_4 - y_2); \\ n_3 + 4n_4 + n_5 = \frac{3}{h}(y_5 - y_3); \\ n_4 + 4n_5 + n_6 = \frac{3}{h}(y_6 - y_4); \\ n_6 = f'(x_N). \end{cases} \quad (6.31)$$

Зауважимо, що праві частини наведених рівнянь – означені умовою числа. Застосовуючи до СЛАР (6.31) метод прогонки, визначаємо:

$$n_0 = 1; n_1 = 1,569; n_2 = 1,122; n_3 = -0,058; n_4 = -0,891; n_5 = -2,377; n_6 = 2.$$

Тобто сплайн (6.25) повністю визначений наведеними значеннями. Робимо обернену підстановку $t = \frac{x - x_i}{h_i}$, отримуємо остаточний вигляд кубічного сплайна:

$$S(x) = \begin{cases} 0,525 - 1,441x - 2,888x^2 - 0,922x^3, & x \in [-1,5; -1); \\ 1,014 + 0,024x - 1,4234x^2 - 0,434x^3, & x \in [-1; -0,5); \\ 1 - 0,058x - 1,587x^2 - 0,543x^3, & x \in [-0,5; 0); \\ 1 - 0,058x - 1,587x^2 + 1,004x^3, & x \in [0; 0,5); \\ 1,36 - 2,216x + 2,730x^2 - 1,874x^3, & x \in [0,5; 1); \\ -10,205 + 32,479x - 31,965x^2 + 9,691x^3, & x \in [1; 1,5]. \end{cases} \quad (6.32)$$

Графік сплайна (6.32) зображено на рис. 6.6.

Як видно із наведених рисунків 6.6 і 6.3 (як втім, і із їх аналітичних виглядів) побудовані сплайни співпадають •

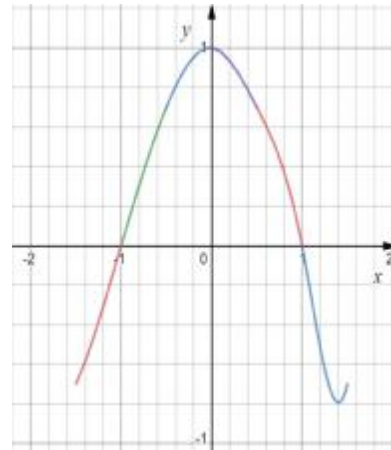


Рис.6.6. Приклад 6.3. Зображення кубічного сплайна

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чому не завжди доречно застосовувати лише один поліном для інтерполювання функції?
2. Як визначається сплайн?
3. Яким чином визначається лінійний сплайн?
4. Як визначається порядок сплайна?
4. Що називають дефектом сплайна?
5. Які способи побудови кубічного сплайну Вам відомі? В чому їх відмінність?
6. Які умови потрібно задати у кожній точці інтерполювання для однозначної побудови кубічного сплайну?
7. Чи може задача інтерполювання функції сплайном мати неоднозначний розв'язок?
8. Які види граничних умов зазвичай застосовують при побудові кубічного сплайну?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Дефект лінійного сплайну дорівнює одиниці.

Так

- | | | |
|----|---|------------|
| 2. | Дефект кубічного сплайну дорівнює двом. | <i>Hi</i> |
| 3. | Задача інтерполявання функції кубічним сплайном має єдиний розв'язок. | <i>Так</i> |
| 4. | При побудові сплайна, який проходить через N точок, потрібно скласти $4N$ рівнянь для визначення усіх параметрів сплайна (вважаємо, що застосовується перший спосіб побудови кубічного сплайну) | <i>Hi</i> |
| 5. | Чи обов'язково при обчисленні коефіцієнтів сплайна застосовувати метод прогонки для розв'язку СЛАР? | <i>Hi</i> |

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 6

Індивідуальна робота 6 складається із двох завдань.

Завдання 6.1

1) За заданою таблицею значень функції $f(x)$ (Таблиця 5.6. Завдання 5.1.

Індивідуальна робота 5) побудуйте кубічний сплайн $S(x) = S_{3,1}(x)$.

Граничні умови вибираються наступним чином:

- якщо номер варіанта Var – парне число, то сплайн повинен задовольняти граничним умовам першого типу:

$$S'(x_0) = f'(x_0) = -Var; \quad S'(x_N) = f'(x_N) = -Var;$$

- якщо номер варіанта Var – непарне число, то сплайн повинен задовольняти граничним умовам другого типу:

$$S''(x_0) = f''(x_0) = Var; \quad S''(x_N) = f''(x_N) = -Var.$$

У звіті повинні бути наведені аналітичні розрахунки та графічне представлення сплайна.

2) Обчисліть наближене значення функції $f(x)$ та її похідної другого порядку $f''(x)$ в заданій точці $\bar{x}$.

Завдання 6.2

Розробити програмне забезпечення задачі побудови кубічного сплайну із довільною кількістю вузлів інтерполяції та можливістю застосування на кінцях відрізка інтерполювання граничних умов першого та/або другого типу.

РОЗДІЛ 7. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

7.1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Обчислення визначених інтегралів

$$I = \int_a^b \rho(x)f(x)dx, \quad (7.1)$$

де $\rho(x), f(x)$ – задані на $[a; b]$ функції; $\rho(x) > 0$ – деякий ваговий множник;

є важливою частиною математичного моделювання різноманітних завдань прикладного характеру (визначення площ, об'ємів тощо).

У багатьох випадках первісна $F(x)$ функції $\rho(x)f(x)$ не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів чи є занадто складною. Внаслідок цього обчислення визначеного інтеграла (7.1) за формулою Ньютона-Лейбніца може бути складним чи навіть неможливим.

Крім того, підінтегральна функція може задаватися за допомогою таблиці, і тоді саме поняття первісної втрачає зміст. Тому важливе значення мають наближені і, у першу чергу, чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Звичайний прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що задану функцію $f(x)$ заміняють апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ простого вигляду (наприклад, поліномом), а потім наближено покладають:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx.$$

Функція $\varphi(x)$ повинна бути такою, щоб інтеграл $\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx$ обчислювався безпосередньо.

Універсальним підходом обчислення визначеного інтеграла (яке ще називається *квадратурою*) є використання методів чисельного інтегрування, які ґрунтуються на апроксимації підінтегральної функції багаточленами різних степенів. В результаті отримується квадратурна формула:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R(f), \quad (7.2)$$

де точки x_i називають *вузлами* (абсцисами), числа c_i – *коефіцієнтами* або *ваговими коефіцієнтами* ($i = \overline{0, n}$), $R(f)$ – похибка (залишковий член) квадратурної формули.

Квадратурна формула вважається заданою, якщо вказано, як вибирати вузли x_i , вагові коефіцієнти c_i , а також методика оцінки похибки $R(f)$ для певних класів функцій ($f \in B$). Вибір x_i , c_i ($i = \overline{0, n}$) не повинен залежати від f та B .

Квадратурна формула (7.1) називається *квадратурною формулою замкнутого типу*, якщо $x_0 = a$; $x_n = b$, інакше – *відкритого типу*.

Алгебраїчним степенем точності m квадратурної формули називається найвищий степінь алгебраїчного полінома $P_m(x)$, для якого квадратурна формула (7.2) є точною, тобто для якого $R(P_m(x)) = 0$.

Говорять, що *квадратурна формула має порядок точності k по кроку h* , якщо $R(f) = O(h^k)$, де $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$.

Якщо довжина інтервалу $[a, b]$ завелика, поступають наступним чином. Інтеграл (7.1) представляють у вигляді суми n інтегралів:

$$I = \int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)f(x)dx.$$

На кожному частковому інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ застосовують квадратурну формулу і знаходять наближене значення інтеграла I_i ($i = \overline{1, n}$) (згідно (7.2)). З отриманих виразів I_i складають квадратурну формулу для усього інтервалу $[a; b]$, тобто отримують *складену квадратурну формулу*. При цьому похибку $R(f)$ складеної формули знаходять додаванням абсолютних похибок R_i на кожному частковому інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$.

При обчисленні визначеного інтеграла (7.1) розглянемо [13]:

- інтерполяційні квадратурні формули;
- квадратурні формули найвищого степеня точності.

7.2. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ

Квадратурна формула отримується шляхом заміни підінтегральної функції $f(x)$ узагальненим інтерполяційним багаточленом, значення якого співпадають із значеннями підінтегральної функції в *означених* вузлах x_i ($i = \overline{0, n}$). Покладемо в якості узагальненого багаточлена – багаточлен Лагранжа:

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)}, \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

тоді

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_n(x) dx + R(f) = \int_a^b \rho(x) \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} dx + R(f),$$

отже,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} dx + R(f). \quad (7.3)$$

Із порівнянь формул (7.2) і (7.3), отримуємо вираз для вагових коефіцієнтів c_i :

$$c_i = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} dx. \quad (7.4)$$

Для залишкового члена квадратурної формули (7.3) отримуємо наступну оцінку:

$$|R(f)| = \int_a^b \rho(x) \cdot |f(x) - L_n(x)| dx \leq \int_a^b \rho(x) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| dx, \quad (7.5)$$

$$\text{де } M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Приклад 7.1

Для інтеграла $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$

- побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу за вузлами $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$;
- визначити алгебраїчний степінь точності отриманої інтерполяційної формули;
- визначити оцінку залишкового члена отриманої інтерполяційної формули.

Розв'язання

- За означеними вузлами x_i ($i = \overline{0,3}$) будемо квадратурну формулу. Для даного прикладу $\rho(x) \equiv 1, a = -1, b = 1$. Відповідно до квадратурної формули (7.2), отримуємо:

$$I \approx c_0 \cdot f(x_0) + c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2) + c_3 \cdot f(x_3), \quad (7.6)$$

де вагові коефіцієнти q_i ($i = \overline{0,3}$) визначені формулою (7.4), тобто

$$c_0 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} dx = \int_{-1}^1 \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)\left(-1-\frac{1}{2}\right)(-1-1)} dx = \frac{1}{9};$$

$$c_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)} dx = \frac{8}{9};$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} dx = \frac{8}{9};$$

$$c_3 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)} dx = \frac{1}{9}.$$

Остаточно квадратурна формула (7.6) приймає наступний вид:

$$I \approx \frac{1}{9} \cdot f(-1) + \frac{8}{9} \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot f(1). \quad (7.7)$$

• Визначимо **алгебраїчний степінь точності** формули (7.7).

За чотирма означеними умовою задачі вузлами $x_i (i = \overline{0,3})$ можна побудувати поліном степеня не вище третього. Доведемо, що алгебраїчний степінь точності формули (7.7) дорівнює саме три.

— Якщо степінь алгебраїчного полінома $m = 0$, тоді

$$f(x) = P_0(x) = 1, \text{ згідно (7.7) наближене значення інтеграла: } I \approx \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 2$$

співпадає із точним значенням: $I = \int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2$. Тобто залишковий член

$$R(P_0(x)) = 0.$$

— Якщо $m = 1$, тоді покладемо $f(x) = P_1(x) = x$. Аналогічно визначаємо:

$$I \approx \frac{1}{9} \cdot (-1) + \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot (1) = 0; \quad I = \int_{-1}^1 x \cdot dx = 0 \Rightarrow R(P_1) = 0.$$

— При $m=2$ покладемо: $f(x)=P_2(x)=x^2$.

Тоді

$$I \approx \frac{1}{9} \cdot (-1)^2 + \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot (1)^2 = \frac{2}{3}; \quad I = \int_{-1}^1 x^2 \cdot dx = \frac{2}{3} \Rightarrow R(P_2) = 0.$$

— При $m=3$: $f(x)=P_3(x)=x^3$.

$$I \approx \frac{1}{9} \cdot (-1)^3 + \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{9} \cdot (1)^3 = 0; \quad I = \int_{-1}^1 x^3 \cdot dx = 0 \Rightarrow R(P_3) = 0.$$

— Якщо $m=4$, то $f(x)=P_4(x)=x^4$.

$$I \approx \frac{1}{9} \cdot (-1)^4 + \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{9} \cdot (1)^4 = \frac{1}{3}; \quad I = \int_{-1}^1 x^4 \cdot dx = \frac{2}{5} \Rightarrow R(P_4) \neq 0.$$

Отже, встановили, що алгебраїчний степінь точності квадратурної формули (7.7) дорівнює трьом.

• Визначимо **оцінку залишкового члена** квадратурної формули (7.7). Згідно (7.5) отримуємо:

$$|R(f)| = \int_a^b |f(x) - L_3(x)| dx \leq \int_{-1}^1 \frac{M_4}{4!} \left| \left(x+1\right) \left(x+\frac{1}{2}\right) \left(x-\frac{1}{2}\right) (x-1) \right| dx \Leftrightarrow$$

$$|R(f)| \leq \frac{M_4}{4!} \cdot \frac{1}{15}, M_4 = \max_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)| \bullet$$

7.3. ФОРМУЛИ НЬЮТОНА - КОТЕСА

При обчисленні інтеграла (7.2) виберемо рівновіддаленими вузли x_i на крок $h = \frac{b-a}{n}$ один від одного, тобто $x_i = x_0 + ih \ (i = \overline{0, n})$, $\rho(x) \equiv 1$. У цьому випадку квадратурна формула (7.2) набуває вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f(x_i), \quad (7.8)$$

де числа H_i називаються коефіцієнтами Котеса, визначені співвідношенням:

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n \cdot i! (n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad (i = \overline{0, n}). \quad (7.9)$$

Розглянемо частинні випадки цієї формули.

7.3.1. ФОРМУЛИ ПРЯМОКУТНИКІВ

- **Формула лівих прямокутників**

Якщо покласти в (7.8) $f(x) \equiv f(a)$, $\forall x \in [a, b]$, отримуємо формулу лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f(a) dx = (b-a) \cdot f(a). \quad (7.10)$$

Згідно (7.5) при $n=0$ для залишкового члена має місце наступна оцінка:

$$|R(f)| = \int_a^b |f(x) - f(a)| dx \leq \int_a^b M_1 |x - a| dx = M_1 \frac{(b-a)^2}{2}, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Вочевидь, що порядок точності квадратурної формули (7.10) дорівнює двом.

Напишемо складену квадратурну формулу лівих прямокутників. Розбиваємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на n рівних відрізків точками x_i ($i = \overline{0, n}$) з кроком $h = \frac{b-a}{n}$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right) \approx \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) \cdot h) = h \cdot (f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})). \quad (7.11)$$

Залишковий член цієї формули, визначений формулою (7.5):

$$|R(f)| = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{M_1^{(i)}}{1!} |x - x_{i-1}| dx = \sum_{i=1}^n \frac{M_1^{(i)} (x_i - x_{i-1})^2}{2} \leq \frac{n \cdot M_1 \cdot h^2}{2} = \frac{(b-a) \cdot M_1 \cdot h}{2},$$

$$\text{де } M_1^{(i)} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f'(x)|, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Порядок точності складеної квадратурної формули (7.11) на одиницю менше, ніж у її аналога (7.10), і дорівнює одиниці.

Визначимо алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників. Позначимо $\tilde{I}$ – наближене значення $I = \int_a^b f(x) dx$, визначене за формулою лівих прямокутників.

— Якщо степінь алгебраїчного полінома $m = 0$, $f(x) = P_0 = 1$; тоді

$$\tilde{I} = b - a; \quad I = \int_a^b dx = b - a; \Rightarrow R(P_0) = 0.$$

— Якщо $m=1$, $f(x)=P_1=x$, то

$$\tilde{I}=(b-a)\cdot a; I=\int_a^b x\cdot dx=\frac{b^2-a^2}{2}; \Rightarrow R(P_1)\neq 0.$$

Отже, алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників дорівнює 0.

• **Формула правих прямокутників**

визначається аналогічно формулі лівих прямокутників, якщо покласти $f(x)\equiv f(b)$, $\forall x\in[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b f(b)dx=(b-a)\cdot f(b).$$

Для залишкового члена оцінка не змінюється:

$$|R(f)|\leq M_1\frac{(b-a)^2}{2}, \quad M_1=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Складена формула правих прямокутників та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^n\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right)\approx\sum_{i=1}^n(f(x_i)\cdot h)=h\cdot(f(x_1)+\dots+f(x_n)),$$

$$|R(f)|=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{M_1^{(i)}}{1!}|x-x_i|dx=\sum_{i=1}^n\frac{M_1^{(i)}(x_i-x_{i-1})^2}{2}\leq\frac{n\cdot M_1\cdot h^2}{2}=\frac{(b-a)\cdot M_1\cdot h}{2},$$

$$M_1^{(i)}=\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f'(x)|, (i=\overline{1,n}).$$

Порядок точності формули правих прямокутників по одному проміжку дорівнює 2; складеної – 1. Алгебраїчний степінь точності формули правих прямокутників – 0.

• **Формула середніх прямокутників**

Візьмемо у формулі Ньютона – Котеса (7.8) $\rho(x) \equiv 1$ та один вузол інтерполявання – середину відрізка $[a, b]$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Оцінка залишкового члена:

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{|b-a|^3}{24}, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Складена формула середніх прямокутників та оцінка її залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \dots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) \right), \quad x_{\frac{i}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (i=1, n);$$

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{|b-a| \cdot h^2}{24}, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (7.13)$$

Порядок точності складеної формули середніх прямокутників дорівнює 2, на одному проміжку – 3. Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1.

Приклад 7.2

Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{4+x^2}$$

із застосуванням складених квадратурних формул середніх прямокутників при $n=3$. Визначити похибку розрахунків.

Розв'язання

Якщо $n=3$, то $h = \frac{2+1}{3} = 1$. Складемо таблицю:

i	0,5	1,5	2,5
x_i	-0,5	0,5	1,5
$f(x_i)$	$\frac{4}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{1}{5}$

За складеною формулою середніх прямокутників отримуємо наближене значення інтеграла:

$$I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{4+x^2} \approx 1 \cdot \left(f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right) \approx 0,6306.$$

Оцінка залишкового члена. Встановлено, що функція $|f''(x)|$ досягає свого найбільшого значення на відрізку $[-1,2]$ при $x=0$, тобто

$$M_2 = \max_{x \in [-1;2]} |f''(x)| = |f''(0)| = 0,125.$$

Користуючись загальною оцінкою залишкового члена для квадратурної формули середніх прямокутників (7.13), отримуємо остаточно:

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{(b-a) \cdot h^2}{24} = 0,125 \frac{(2+1)}{24} \approx 0,0156 \bullet$$

7.3.2. ФОРМУЛА ТРАПЕЦІЙ

Покладемо у квадратурній формулі Ньютона – Котеса (7.8) замкненого типу $n=1$ (2 вузла інтерполяції: $x_0=a, x_1=b$), $\rho(x) \equiv 1$, отримуємо *квадратурну формулу трапецій*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \quad (7.14)$$

з оцінкою для залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_2|b-a|^3}{12}, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (7.15)$$

Відповідна *складена квадратурна формула* приймає наступний вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right), \quad (7.16)$$

з оцінкою для залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_2|b-a|h^2}{12}, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \quad (7.17)$$

Порядок точності, алгебраїчний степінь збігається з формулою середніх прямокутників.

Приклад 7.3

З використанням квадратурної формули трапецій обчислити $I = \int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx$ із точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язання

Із оцінки залишкового члена складеної квадратурної формули трапецій (17) маємо:

$$\frac{M_2(b-a)h^2}{12} \leq \varepsilon \Rightarrow h \leq \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon}{M_2(b-a)}},$$

$$\text{де } M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Відповідно до умови:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Тоді

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \max_{x \in [2,4]} \left| \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \right| = |f''(2)| = 0,9630, \text{ і } h \leq \sqrt{\frac{12 \cdot 0,001}{0,963 \cdot (4-2)}} \approx 0,0789.$$

Кількість розбиття n відрізка $[2,4]$ визначимо наступним чином:

$$n > \frac{b-a}{h} \Rightarrow n > \frac{4-2}{0,0789} \approx 25,413.$$

Покладемо, наприклад, $n=28$. Тоді крок $h=0,0714$.

Тепер можна обчислити інтеграл за формулою трапецій (7.16), застосовуючи програмні засоби:

$$I = \int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx \approx 0,0714 \cdot (0,1667 + 0,3039 + 0,2787 + \dots + 0,0333) \approx 0,2940.$$

$$\text{Відповідь: } I = \int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx \approx 0,2940 \quad \bullet$$

7.3.3. ФОРМУЛА СІМПСОНА

Покладемо в замкненій квадратурній формулі Ньютона–Котеса (7.8) $\rho(x) \equiv 1$, $n=2$ (беремо три вузли інтерполяції $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$), отримуємо *формулу Сімпсона (або формулу парабол)*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \quad (7.18)$$

з оцінкою залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_4 |b-a|^5}{2880}, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Тоді складена формула Сімпсона та оцінка її залишкового члена набувають наступного вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right); \quad (7.19)$$

$$|R(f)| \leq \frac{M_4 |b-a| h^4}{2880}, \quad (7.20)$$

$$\text{де } x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Порядок точності формули (7.19) дорівнює чотирьом, а формули (7.18) – п'яти. Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули Сімпсона дорівнює трьом.

Якщо застосовувати лише цілу нумерацію вузлів, то можна навести ще один вигляд формули Сімпсона (7.19):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right). \quad (7.21)$$

При цьому оцінка залишкового члена: $|R(f)| \leq \frac{M_4 |b-a| h^4}{180}.$

7.4. ПРАВИЛО РУНГЕ

Величина похибки формул чисельного інтегрування $|R(f)|$ залежить від кроку h та величини M_i , визначення якої може бути доволі складним. Звичайно, величину похибки можна зменшити за рахунок зменшення h , проте таке зменшення значно збільшує обсяг розрахунків і, відповідно, обчислювальну похибку. Саме тому необхідно вміти визначати похибку апостеріорно, наприклад, методом Рунге або методом подвійного перерахунку.

Апостеріорна оцінка похибки квадратурної формули

Визначимо $I = \int_a^b f(x)dx$ деякою складеною формулою чисельного інтегрування, яка має порядок точності q . Тоді при обчисленні означеного інтеграла з кроком h :

$$I \approx I_h + \Delta \cdot h^q + o(h^q),$$

де $\Delta \cdot h^q$ – головний член похибки квадратурної формули, Δ не залежить від h .

При зменшенні вдвічі кроку h , аналогічно отримуємо:

$$I \approx I_{\frac{h}{2}} + \Delta \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^q + o(h^q). \quad (7.22)$$

Із двох останніх наведених співвідношень знаходимо:

$$I_h - I_{\frac{h}{2}} + \Delta \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^q \cdot (2^q - 1) \approx 0 \Rightarrow \Delta \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^q = \frac{I_h - I_{\frac{h}{2}}}{1 - 2^q}.$$

Підстановка останнього виразу в (7.22) дозволяє отримати апостеріорну оцінку похибки інтеграла I (при наближеному значенні $I_{\frac{h}{2}}$) за допомогою за правилом Рунге:

$$\left| I - I_{\frac{h}{2}} \right| \approx \frac{\left| I_{\frac{h}{2}} - I_h \right|}{2^q - 1}. \quad (7.23)$$

В (7.23) потрібно покласти $q=1$ для формул правих та лівих прямокутників; $q=2$ – для формул середніх прямокутників та трапецій; $q=4$ – для формули Сімпсона.

Обчислення визначеного інтеграла із заданою точністю ε , з використанням правила Рунге

- Довільним чином вибираємо крок інтерполяції h (або кількість розбитків відрізка $n = \frac{b-a}{h}$).
- Відповідно обраної квадратурної формули визначають $I \approx I_h$ та $I \approx I_{\frac{h}{2}}$ з кроками інтегрування h та $\frac{h}{2}$ відповідно (кількість розбитків n та $2n$).
- Обчислюється похибка за формулою (7.23).

- Якщо значення отриманої похибки $\frac{\left| I_{\frac{h}{2}} - I_h \right|}{2^q - 1} > \varepsilon$, зменшуємо

вдвічі крок та визначаємо похибку $\frac{\left| I_{\frac{h}{2}} - I_{\frac{h}{2^2}} \right|}{2^q - 1}$.

- Обчислюємо значення інтеграла $I_{\frac{h}{2^k}}$, ($k=1,2,\dots$) доки не буде

виконуватися умова: $\frac{\left| I_{\frac{h}{2^k}} - I_{\frac{h}{2^{k-1}}} \right|}{2^q - 1} \leq \varepsilon$.

- При виконанні останньої умови, покладаємо за наближене значення інтеграла: $I \approx I_{\frac{h}{2^{k-1}}}$ з точністю ε .

Зауваження. За початкове значення n (або кроку h) рекомендується:

$$n \approx (b-a) \cdot \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow h \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad - \text{ в формулі трапецій;}$$

$$n \approx (b-a) \cdot \sqrt[4]{\varepsilon} \Leftrightarrow h \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \quad - \text{ в формулі Сімпсона (парабол).}$$

Приклад 7.4

За допомогою формули Сімпсона обчислити $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язання

Для забезпечення заданої точності обчислень скористаємося правилом Рунге. Спочатку візьмемо кількість точок інтерполювання $N=3$, відповідна кількість відрізків, на які розбивається відрізок інтегрування, дорівнює $n=N-1=2$ (ділимо відрізок $[0,1]$ на дві рівні частини). Тоді за формулою Сімпсона (7.18):

$$n=2; h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2 \cdot 3} (e^0 + 4e^{-0,5^2} + e^{-1}) = 0,74718,$$

проміжні обчислення ведемо з п'ятьма знаками після коми.

Тепер подвоїмо кількість n , тобто ділимо відрізок $[0;1]$ на чотири відрізки довжиною $h=0,25$ кожний. Складаємо таблицю значень підінтегральної функції:

x	0	0,25	0,5	0,75	1
e^{-x^2}	1,00000	0,93941	0,77880	0,56978	0,36788

За формулою Сімпсона (7.19):

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{3 \cdot 4} (e^0 + 4e^{-0,25^2} + 2e^{-0,5^2} + 4e^{-0,75^2} + e^{-1}) = \\ &= \frac{1}{12} (1 + 4 \cdot (0,93941 + 0,56978 + 2 \cdot 0,77880 + 0,36788)) = 0,74685.\end{aligned}$$

За принципом Рунге точність останнього результату дорівнює

$$\frac{|0,74718 - 0,74685|}{15} = 0,000022 < \varepsilon.$$

Отже, можемо вважати вірними чотири десяткових знаки.

Відповідь: $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,7468.$

7.5. КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ НАЙВИЩОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО СТЕПЕНЯ ТОЧНОСТІ. ФОРМУЛА ГАУССА

У попередніх наведених квадратурних формулах усі вузли інтерполювання вважалися рівновіддаленими один від одного. У формулах Гаусса вузли інтерполювання визначаються іншим чином, а саме вимагається, щоб квадратурна формула була точною для алгебраїчного багаточлена як можна більшого степеня m .

Для інтерполяційної формули чисельного інтегрування:

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (7.24)$$

Де $x \in [a, b]$, вагові функції $\rho(x) > 0$, що задовольняють умову:

$$\left| \int_a^b \rho(x) x^\alpha dx \right| < \infty, \quad \alpha = 0, 1, \dots,$$

будемо визначати невідомі вузли інтерполявання x_k та коефіцієнти c_k ($k = \overline{1, n}$) таким чином, щоб виконувалися умови:

$$\int_a^b \rho(x) x^\alpha dx = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\alpha, \quad (\alpha = \overline{0, m}). \quad (7.25)$$

Отже, для визначення $2n$ невідомих x_k, c_k маємо $m+1$ рівняння (7.25). Однозначний розв'язок цієї системи можливий при виконанні умови:

$$2n = m + 1 \Leftrightarrow m = 2n - 1.$$

Отже, для означених n вузлів можна побудувати квадратурну формулу, яка буде точною для багаточлена степеня $2n-1$ і нижче.

Теорема. [13] Квадратурна формула (7.24) буде точною для довільного багаточлена $P_m(x)$ степеня $m = 2n - 1$ тоді і тільки тоді, коли:

- вона є квадратурною формулою інтерполяційного типу:

$$c_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x)} dx, \quad \omega(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n); \quad (7.26)$$

- багаточлен $\omega(x)$ із ваговим множником $\rho(x)$ повинен бути ортогональним до довільного багаточлена $P_i(x)$ ($i = \overline{0, n-1}$), тобто має місце рівність:

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) \cdot P_i(x) dx = 0.$$

При умові $f(x) \in C_{[a,b]}^{2n}$ залишковий член формули Гаусса має наступну оцінку:

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx. \quad (7.27)$$

Приклад 7.5

Скласти квадратурну формулу обчислення $\int_{-1}^1 f(x) dx$ найвищого алгебраїчного степеня точності для двох вузлів інтерполювання ($n=2$).

Розв'язання

Для двох вузлів інтерполювання x_i ($i=1,2$) квадратурна формула приймає вид:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2). \quad (7.28)$$

В (7.28) невідомими є x_i, c_i ($i=1,2$). Для їх визначення маємо систему рівнянь (7.25), де $\rho(x) \equiv 1$, $m = 2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Покладемо в (7.25):

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^0 dx = \sum_{k=1}^2 c_k x_k^0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2; \\ \alpha = 1 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^1 dx = \sum_{k=1}^2 c_k x_k^1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \Rightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0; \\ \alpha = 2 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{k=1}^2 c_k x_k^2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \Rightarrow c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}; \\ \alpha = 3 &\Rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = \sum_{k=1}^2 c_k x_k^3 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \Rightarrow c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Отже, отримано нелінійну систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2; \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0; \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}; \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0. \end{cases} \quad (7.29)$$

Методом послідовного виключення знаходимо розв'язок (7.29). Із першого рівняння: $c_1 = 2 - c_2$. Після підстановки в друге рівняння, отримуємо:

$$c_2 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}, \quad c_1 = -\frac{2x_2}{x_1 - x_2}. \text{ Після підстановки в третє рівняння (7.29):}$$

$$(x_1 - x_2)(1 + 3x_1x_2) = 0.$$

Оскільки $x_1 \neq x_2$, то із застосуванням четвертого рівняння (7.29) остаточно отримуємо розв'язок (7.29):

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c_1 = c_2 = 1.$$

Тоді квадратурна формула (7.28) має вигляд:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Як видно із розв'язання прикладу (7.5), задача визначення невідомих x_i, c_i ($i = \overline{1, n}$) доволі громіздка. Для уникнення розв'язку нелінійної системи рівнянь (7.25), застосовується система ортогональних багаточленів.

7.6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА ТА ЧЕБИШОВА ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Застосування поліномів Лежандра для чисельного інтегрування

Поліноми Лежандра визначаються за формулою:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Вони задовольняють рекурентному співвідношенню:

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1)x L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

та є ортогональними на відрізку $[-1;1]$ з $\rho(x) \equiv 1$.

Можна навести декілька перших поліномів Лежандра:

$$L_0(x) = 1;$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x;$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} [3xL_1(x) - L_0(x)] = \frac{1}{2} (3x^2 - 1);$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x);$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x); \text{ і так далі.}$$

Із застосуванням поліномів Лежандра наведемо квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (7.30)$$

де x_k – корені полінома Лежандра $L_n(x)$, коефіцієнти c_k визначені формулою:

$$c_k = \frac{2}{(1-x_k^2) \left(L_n'(x_k) \right)^2}. \quad (7.31)$$

Оцінка залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n} 2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) ((2n)!)^3}. \quad (7.32)$$

Якщо інтеграл визначений на довільному відрізку $[a;b]$, то

- або поліноми Лежандра потрібно привести до проміжку $[a;b]$,
- або інтеграл – до проміжку $[-1;1]$.

Приклад 7.6

Побудувати квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності для обчислення інтеграла $I = \int_{-2}^3 f(x)dx$ при $n=2$ із застосуванням ортогональних поліномів Лежандра.

Розв'язання

Будуємо квадратурну формулу у вигляді: $I = \int_{-2}^3 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^2 c_i f(x_i)$.

Поліном Лежандра $L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$, визначений на проміжку $t \in [-1;1]$ переведемо на означений проміжок інтегрування $[-2;3]$. Для цього робимо заміну $x = \frac{1}{2}(5t+1) \Leftrightarrow t = \frac{2x-1}{5}$. Тоді

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \Big|_{t=\frac{2x-1}{5}} = \frac{1}{25}(6x^2 - 6x - 11).$$

Знаходимо корені полінома $L_2(x)$ – значення x_i ($i=1,2$) – вузли інтерполяції.

$$L_2(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 11 \Rightarrow x_1 = \frac{3-5\sqrt{3}}{6}, \quad x_2 = \frac{3+5\sqrt{3}}{6}.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів c_i ($i=1,2$) застосування формули (7.31) неможливе, оскільки відповідає проміжку $[-1;1]$, тому скористаємося формулою (7.4).

$$c_1 = \int_{-2}^3 \left(\frac{x - \frac{3+5\sqrt{3}}{6}}{\frac{3-5\sqrt{3}}{6} - \frac{3+5\sqrt{3}}{6}} \right) dx = \frac{5}{2}; \quad c_2 = \int_{-2}^3 \left(\frac{x - \frac{3-5\sqrt{3}}{6}}{\frac{3+5\sqrt{3}}{6} - \frac{3-5\sqrt{3}}{6}} \right) dx = \frac{5}{2}.$$

Отже,

$$I = \int_{-2}^3 f(x) dx \approx \frac{5}{2} \cdot f\left(\frac{3-5\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{5}{2} \cdot f\left(\frac{3+5\sqrt{3}}{6}\right).$$

Приклад 7.7

Використовуючи квадратурну формулу Гаусса, визначити наближене значення

$I = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 2}$, враховуючи два вузли інтерполявання ($n=2$). Зробити оцінку залишкового члена.

Розв'язання

Приводимо інтеграл до проміжку $[-1;1]$ заміною $x=t+2$. Якщо $x \in [1;3] \Rightarrow t \in [-1;1]$, тоді

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + 4t + 6}.$$

Побудуємо квадратурну формулу за допомогою поліномів Лежандра.

$$I = \int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{k=1}^2 c_k f(t_k) = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2), \quad (7.33)$$

$$\text{де } f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 6}.$$

Невідомі t_k ($k=1,2$) визначаємо як корені полінома Лежандра $L_2(t_k)=0$:

$$L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Коефіцієнти c_k ($k=1,2$) визначаємо згідно формули (7.31).

$$L_2'(t) = 3t \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)(\sqrt{3})^2} = 1.$$

Відповідно формулі (7.33) знаходимо наближене значення інтеграла:

$$I = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} + 6} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 6} \approx 0,364217.$$

Зробимо оцінку похибки. Оскільки четверта похідна функції $f(t)$:

$$f^{(IV)}(t) = \frac{24(5t^4 + 40t^3 + 100t^2 + 80t + 4)}{(t^2 + 4t + 6)^5},$$

графічно встановлюємо:

$$M_4 = \max_{t \in [-1; 1]} |f^{(IV)}(t)| = |f^{(IV)}(-1)| = \frac{88}{81}.$$

Відповідно (7.32) отримуємо остаточну оцінку залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n} 2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) ((2n)!)^3} \Big|_{n=2} = \frac{\frac{88}{81} \cdot 2^5 (2!)^4}{5 \cdot (4!)^3} \approx 8 \cdot 10^{-3} \bullet$$

Положення точок x_k (корені поліномів Лежандра) та ваги функцій c_k (означені формулою (7.31)) обчислюються точно для квадратур будь-якого порядку [6]. Проте, на практиці зазвичай застосовують квадратури порядку не вище 10-го. В таблиці 7.1. наведені значення аргументів та відповідні ваги для перших квадратур.

Таблиця 7.1. Вагові коефіцієнти та значення аргументів

Число точок n в квадратурі	Вагові коефіцієнти	Значення аргументів	Похибка апроксимації
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
2	$c_1 = 1$ $c_2 = 1$	$x_1 = -0,577350269$ $x_2 = +0,577350269$	$\sim f^{(4)}(x)$

Продовження таблиці 7.1

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
3	$c_1 = 0,555555556$ $c_2 = 0,888888889$ $c_3 = 0,555555556$	$x_1 = -0,774596669$ $x_2 = +0,000000000$ $x_3 = +0,774596669$	$\sim f^{(6)}(x)$
4	$c_1 = 0,347854845$ $c_2 = 0,652145155$ $c_3 = 0,652145155$ $c_4 = 0,347854845$	$x_1 = -0,861136312$ $x_2 = -0,339981044$ $x_3 = +0,339981044$ $x_4 = +0,861136312$	$\sim f^{(8)}(x)$
5	$c_1 = 0,236926885$ $c_2 = 0,478628670$ $c_3 = 0,568888889$ $c_4 = 0,478628670$ $c_5 = 0,236926885$	$x_1 = -0,906179846$ $x_2 = -0,538469310$ $x_3 = +0,000000000$ $x_4 = +0,538469310$ $x_5 = +0,906179846$	$\sim f^{(10)}(x)$
6	$c_1 = 0,171324492$ $c_2 = 0,360761573$ $c_3 = 0,467913935$ $c_4 = 0,467913935$ $c_5 = 0,360761573$ $c_6 = 0,171324492$	$x_1 = -0,932469514$ $x_2 = -0,661209386$ $x_3 = -0,238619186$ $x_4 = +0,238619186$ $x_5 = +0,661209386$ $x_6 = +0,932469514$	$\sim f^{(12)}(x)$

Приклад 7.7

За формулою Гаусса при $n=5$

- обчислити $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;
- оцінити похибку розрахунків.

Розв'язання

- У визначеному інтегралі зробимо заміну змінної $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot t$, приводимо інтеграл до проміжку інтегрування $[-1; 1]$:

$$I = 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{4 + (t+1)^2}.$$

Відповідно до наведених у таблиці 7.1 числових значень вагових коефіцієнтів та вузлів інтерполявання при $n = 5$, складемо таблицю значень підінтегральної функції

$$f(t) = \frac{dt}{4 + (t+1)^2}.$$

i	t_i	$f(t_i)$	c_i
1	-0,90617985	0,24945107	0,23692688
2	-0,53846931	0,23735995	0,47862868
3	0	0,2	0,56888889
4	0,53846931	0,15706211	0,47862868
5	0,90617985	0,13100114	0,23692688

Відповідно формулі (7.33) знаходимо наближене значення інтеграла:

$$I = \int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^5 c_i f(t_i) = 0,7854.$$

Оцінимо похибку.

Графічно (із застосуванням програмного забезпечення) встановлюємо:

$$M_{10} = \max_{t \in [-1;1]} |f^{(10)}(t)| = |f^{(10)}(-0,464)| = 584,42.$$

Тоді

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n} 2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) ((2n)!)^3} \Big|_{n=5} = \frac{584,42 \cdot 2^{11} (5!)^4}{11 \cdot (10!)^3} \approx 4,722 \cdot 10^{-7}.$$

Відповідь: 0,7854; $4,722 \cdot 10^{-7}$ •

Зауваження

Якщо отримана похибка перевищує задану, потрібно збільшувати n на одиницю, поки не буде досягнута бажана точність.

Застосування поліномів Чебишова для чисельного інтегрування

Багаточлени Чебишова, розглянуті в розділі 5.5, досить часто використовуються при побудові квадратурних формул. Як і поліноми Лежандра, вони є ортогональними на відрізку $[-1;1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В розділі 5.5 було наведено декілька перших поліномів Чебишова:

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x; \quad \dots$$

Тобто за допомогою поліномів Чебишова можна отримати квадратурну формулу наступного вигляду:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (7.35)$$

де вузли x_k – корені полінома $T_n(x)$, вагові коефіцієнти c_k означені формулою (7.4) при $\omega(x) \equiv T_n(x)$, і для них мають місце наступні співвідношення:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad c_k = \frac{\pi}{n}. \quad (7.36)$$

Оцінка залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_{2n} \cdot \pi}{2^{2n-1} \cdot (2n)!} \quad (7.37)$$

Приклад 7.8[13]

Визначити наближене значення інтеграла $I = \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$.

Розв'язання

Проміжок інтегрування $[0;1]$ приводимо до $[-1;1]$ заміною $x = \frac{1}{2}(t+1)$. Тоді

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Отримано ваговий множник $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, можливе застосування квадратурної формули (7.35), яка для двох вузлів інтерполяції ($n=2$) набуває наступного вигляду:

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2), \quad (7.38)$$

$$\text{де } f(t) = \frac{1}{4}(1-t^2).$$

Відповідно (7.36) визначаємо корені полінома Чебишова $T_2(t)$ – значення t_k та вагові коефіцієнти c_k ($k=1,2$):

$$t_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t_2 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$c_1 = c_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Згідно (7.38) отримуємо наближене значення інтеграла:

$$I \approx c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) = \frac{\pi}{2} \left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{4} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right) = \frac{\pi}{8} \approx 0,3927 \bullet$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які значення називаються вузлами квадратурної формули?
2. Які значення називаються ваговими коефіцієнтами квадратурної формули?
3. Яка квадратурна формула є замкненого типу, а яка – відкритого типу?
4. Дайте означення алгебраїчного степеня точності квадратурної формули.
5. Що називається порядком точності квадратурної формули?
6. В якому випадку застосовують складену квадратурну формулу?
7. Дайте означення вагових коефіцієнтів, оцінки залишкового члена при застосуванні в інтерполяційній квадратурній формулі багаточлена Лагранжа.
8. Як визначається квадратурна формула Ньютона – Котеса?
9. Як записується квадратурна формула правих/лівих прямокутників (по всьому проміжку)?
10. Наведіть оцінку для залишкового члена квадратурної формули правих/лівих прямокутників (по всьому проміжку).
11. Як записується складена квадратурна формула правих/лівих прямокутників?
12. Наведіть оцінку для залишкового члена складеної квадратурної формули правих/лівих прямокутників.

13. Як записується формула середніх прямокутників по всьому проміжку та складена?
14. Яким чином визначається похибка квадратурної формули середніх прямокутників по всьому проміжку та складеної?
15. Наведіть квадратурну формулу трапецій (по одному проміжку та складену) з оцінкою залишкового члена.
16. Чому дорівнює алгебраїчний степінь точності квадратурної формули трапецій? Доведіть.
17. Наведіть квадратурну формулу Сімпсона (по одному проміжку та складену) з оцінкою залишкового члена.
18. В чому полягає обчислення визначеного інтеграла із заданою точністю з використанням правила Рунге?
19. В чому полягає відмінність застосування формули Гаусса від інтерполяційних квадратурних формул?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Формула прямокутників – частинний випадок квадратурної формули Ньютона – Котеса?

Відповідь: Так

2. Порядок точності квадратурної формули правих/лівих прямокутників (по всьому проміжку) дорівнює двом?

Відповідь: Так

3. Порядок точності складеної квадратурної формули правих/лівих прямокутників дорівнює двом?

Відповідь: Ні

4. Алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників дорівнює нулю?

Відповідь: Так

5. Порядок точності складеної квадратурної формули середніх прямокутників дорівнює двом?

Відповідь: Так

6. Порядок точності квадратурної формули середніх прямокутників по одному проміжку дорівнює 1?

Відповідь: Ні

7. Алгебраїчний степінь точності формули середніх прямокутників дорівнює 1?

Відповідь: Так

8. У формулі трапецій застосовується три вузли інтерполяції?

Відповідь: Ні

9. Порядок точності складеної квадратурної формули трапецій дорівнює 2?

Відповідь: Так

10. Порядок точності квадратурної формули Сімпсона по одному проміжку дорівнює чотирьом, а складеної – п'яти?

Відповідь: Ні

11. Чи обов'язково при застосуванні квадратурної формули Гаусса приводити інтеграл, визначений на відрізку $[a;b]$ до відрізка $[-1;1]$?

Відповідь: Ні

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 7

Обчислити заданий інтеграл Рімана із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$

- методом трапецій із визначенням кількості інтервалів розбиття через оцінку похибки;
- методом Сімпсона із використанням принципу Рунге;
- за допомогою формул Гаусса.

Варіанти завдань до індивідуальної роботи 7 наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1. Індивідуальна робота 7

Номер варіанту	Індивідуальне завдання	Номер варіанту	Індивідуальне завдання
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
1.	$\int_{\pi/3}^{\pi} \cos(x + \sin x^2) dx$	2.	$\int_{-\pi/2}^0 \lg(2 - \cos 3x) dx$
3.	$\int_{1,5}^3 x^4 \cdot 2^{-x^2} dx$	4.	$\int_2^4 \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2} dx$
5.	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x^2 - \cos x) dx$	6.	$\int_{1,1}^{4,3} \ln(x + x^{-1}) dx$
7.	$\int_{0,17}^{0,48} \operatorname{ch}(2x - x^3) dx$	8.	$\int_{-2,1}^{1,1} \frac{e^x}{2x + 7} dx$
9.	$\int_{-\pi}^{-\pi/6} \lg(3 + \sin 3x) dx$	10.	$\int_{0,23}^{0,42} \operatorname{ch}(x - 2x^{-1}) dx$
11.	$\int_3^{4,5} x^{1/3} \cdot 3^{-x^2} dx$	12.	$\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos(x^2 - \sin 2x) dx$
13.	$\int_{\pi/6}^{\pi} (3 - x^2 \cos x^4) dx$	14.	$\int_0^{3\pi/2} 4^{\cos^2 x} dx$
15.	$\int_{-1}^{2,1} \frac{3^x}{3x + 4} dx$	16.	$\int_1^{3,2} \operatorname{th}(2x + x^2) dx$

Продовження таблиці 7.1

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
17.	$\int_1^{1,3} \cos(3x + x^{-1}) dx$	18.	$\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin(1 + \cos^2 x) dx$
19.	$\int_{-\pi/3}^{\pi} \lg(4 + \sin 2x) dx$	20.	$\int_{1,1}^{4,2} x^2 \cdot 4^{-x^4} dx$
21.	$\int_{1,6}^{3,1} x^{-2} \cos(2x - x^2) dx$	22.	$\int_0^{7\pi/2} \sin(2 \cos x + 1) dx$
23.	$\int_1^{4,3} 5^{-(x+x^{-1})} dx$	24.	$\int_{1,1}^{4,2} 2^x (3x - 2)^{-1} dx$
25.	$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{tg} x^2 dx$	26.	$\int_{-\pi/2}^{5\pi/6} (2 - \cos x^3) dx$
27.	$\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin(x^3 + \cos x^2) dx$	28.	$\int_{-\pi/3}^{\pi} 3^{\sin^2 x} dx$
29.	$\int_1^{3,5} x^{-3} \sin(x^3 - 2x) dx$	30.	$\int_{1,1}^{3,2} x^4 \cdot 2^{-(x+3)^2} dx$

РОЗДІЛ 8.

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Розглянемо чисельний розв'язок задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (8.1)$$

Потрібно визначити наближені значення $y_i = y(x_i)$ ($i = \overline{1, n}$) в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, де $h = x_i - x_{i-1} = \text{const}$ – крок сітки.

8.1. ОДНОКРОКОВІ МЕТОДИ

8.1.1. МЕТОДИ ЕЙЛЕРА

Класичний метод Ейлера заснований на запису (8.1) у формі кінцевих різниць:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad \Delta y = y(x+h) - y(x), \quad \Delta x = h. \quad (8.2)$$

Тоді наближені значення $y(x_i) = y_i$ обчислюються послідовно за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (i = \overline{0, n}). \quad (8.3)$$

Це і є класична формула метода Ейлера.

Для отримання формули (8.3) можна застосувати інший прийом. Відповідно до постановки задачі $y' = f(x, y(x))$, тоді після інтегрування останнього виразу в межах $[x_i; x_{i+1}]$, маємо:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(z, y(z)) dz. \quad (8.4)$$

Тоді

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(z, y(z)) dz. \quad (8.5)$$

Якщо для визначення наведеного означеного інтеграла застосувати формулу лівих прямокутників, то формула (8.5) запишеться у вигляді (8.3).

Оскільки формули лівих прямокутників мають перший порядок точності, то і похибка класичного методу Ейлера – величина порядку $O(h)$.

На рис. 8.1 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі

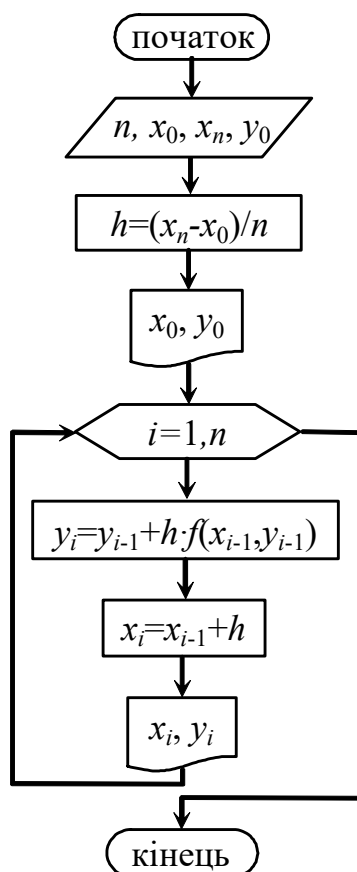


Рис.8.1. Блок-схема розв'язку задачі Коші методом Ейлера

Коші для диференціальних рівнянь першого порядку методом Ейлера.

В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкова умова; h – крок сітки; y_i – значення шуканої функції; $f(x_i; y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ в точці $(x_i; y_i)$.

Приклад 8.1

На відрітку $[0; 0,5]$ з кроком $h = 0,1$ методом Ейлера знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = 2x - 3y; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Відповідно до початкової умови $x_0 = 0$; $y_0 = 2$. Згідно ітераційних співвідношень (8.1), при $f(x, y) = 2x - 3y$ отримуємо наближені значення розв'язку задачі Коші в точках $x_i = x_0 + ih$ ($i = \overline{1; 5}$):

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = 1,4; & \text{при } x_1 &= x_0 + h = 0,1; \\
y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,4 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 1,4) = 1; & \text{при } x_2 &= x_0 + 2h = 0,2; \\
y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0,2 - 3 \cdot 1) = 0,74; & \text{при } x_3 &= x_0 + 3h = 0,3; \\
y_4 &= y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 0,74 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0,3 - 3 \cdot 0,74) = 0,578; & \text{при } x_4 &= x_0 + 4h = 0,4; \\
y_5 &= y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 0,578 + 0,1 \cdot (2 \cdot 0,4 - 3 \cdot 0,578) = 0,485; & \text{при } x_5 &= x_0 + 5h = 0,5.
\end{aligned}$$

Результати обчислень заносимо в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1. Приклад 8.1. Наближений розв'язок

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	2,000	1,400	1,000	0,740	0,578	0,485

Наведена в прикладі 8.1 задача Коші має точний розв'язок:

$$y = f(x) = \frac{1}{9} (20 \cdot e^{-3x} + 6x - 2).$$

В таблиці 8.2 наведено точні значення розв'язку.

Таблиця 8.2. Приклад 8.1. Точний розв'язок

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_i)$	2	1,491	1,131	0,881	0,714	0,607

Як видно із наведеного прикладу, застосування метода Ейлера доволі просте, проте приводить до досить великої похибки розрахунків •

Описана процедура (8.4), (8.5) визначення наближених значень y_i ($i = \overline{1, n}$) згідно (8.3), дозволяє отримати *модифікації метода Ейлера*.

Першу покращену формулу метода Ейлера (вдосконалений метод Ейлера) можна отримати, якщо в (8.5) для обчислення означеного інтеграла застосувати формулу центральних прямокутників. Вигляд формули вдосконаленого методу Ейлера наступний:

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{1}{2}h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Оскільки формула центральних прямокутників має другий порядок точності, то і формула вдосконаленого методу Ейлера має другий порядок точності.

Друга модифікація методу Ейлера (іноді називають методом Ейлера – Коші або методом Хьютона) отримується якщо в (8.5) для обчислення інтеграла застосувати формулу трапецій. Відповідно до цього методу спочатку обчислюється «грубе наближення» класичним методом Ейлера (8.3):

$$\tilde{y}_{i+1} = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Після чого наступне наближення y_{i+1} (скореговане значення) визначають за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h \cdot \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \right].$$

Оскільки формула трапецій має другий порядок точності, то і друга модифікована формула метода Ейлера має другий порядок точності.

Методи Ейлера є однокроковими методами.

8.1.2. МЕТОДИ РУНГЕ-КУТТА

Найбільш популярними серед однокрокових методів є методи Рунге – Кутта. Методи Ейлера можна розглядати як частинні випадки методів Рунге – Кутта. Згідно цього методу розв’язок задачі Коші (8.1) із застосуванням (8.4), (8.5) можна представити у вигляді [6]:

$$\left[\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1^i + 4k_2^i + k_3^i); \\ k_1^i &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right) \cdot h; \\ k_3^i &= f\left(x_i + h, y_i + 2 \cdot k_2^i - k_1^i\right) \cdot h. \end{aligned} \right. \quad (8.7)$$

або

$$\left[\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}(k_1^i + 3k_3^i); \\ k_1^i &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1^i}{3}\right) \cdot h; \\ k_3^i &= f\left(x_i + \frac{2}{3} \cdot h, y_i + \frac{2}{3} \cdot k_2^i\right) \cdot h. \end{aligned} \right. \quad (8.8)$$

Формули (8.7), (8.8) називають методами *третього* порядку, оскільки формули для y_{i+1} є точними при $f(x, y) = 1, x, x^2, x^3$.

Аналогічні розрахункові формули Рунге-Кутта *четвертого* порядку мають вид:

$$\left[\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i); \\ k_1^i &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right) \cdot h; \\ k_3^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right) \cdot h; \\ k_4^i &= f\left(x_i + h, y_i + k_3^i\right) \cdot h; \end{aligned} \right. \quad (8.9)$$

або

$$\left[\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}(k_1^i + 3k_2^i + 3k_3^i + k_4^i); \\ k_1^i &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1^i}{3}\right) \cdot h; \\ k_3^i &= f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{k_1^i}{3} + k_2^i\right) \cdot h; \\ k_4^i &= f(x_i + h, y_i + k_1^i - k_2^i + k_3^i) \cdot h; \end{aligned} \right. \quad (8.10)$$

або

$$\left[\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1^i + (2 - \sqrt{2})k_2^i + (2 + \sqrt{2})k_3^i + k_4^i); \\ k_1^i &= f(x_i, y_i) \cdot h; \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right) \cdot h; \\ k_3^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_1^i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2^i\right) \cdot h; \\ k_4^i &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2^i + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3^i\right) \cdot h; \end{aligned} \right. \quad (8.11)$$

Формули (8.9) – (8.11) використовують для обчислень стандартних моделей доволі часто, оскільки при досить невеликому обсязі обчислень точність методу становить $o(h^4)$. Метод (8.9) є найбільш застосованим.

На рис. 8.2 наведена блок-схема програми наближеного розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності із застосуванням розрахункових формул (8.9). В даній блок-схемі: x_0 – лівий кінець інтервалу; x_n – правий кінець інтервалу; n – кількість відрізків розбиття; y_0 – початкова умова; h – крок сітки; y_i – значення шуканої функції; $f(x_i; y_i)$ – значення правої частини диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ в точці $(x_i; y_i)$; $k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i$ – допоміжні числа.

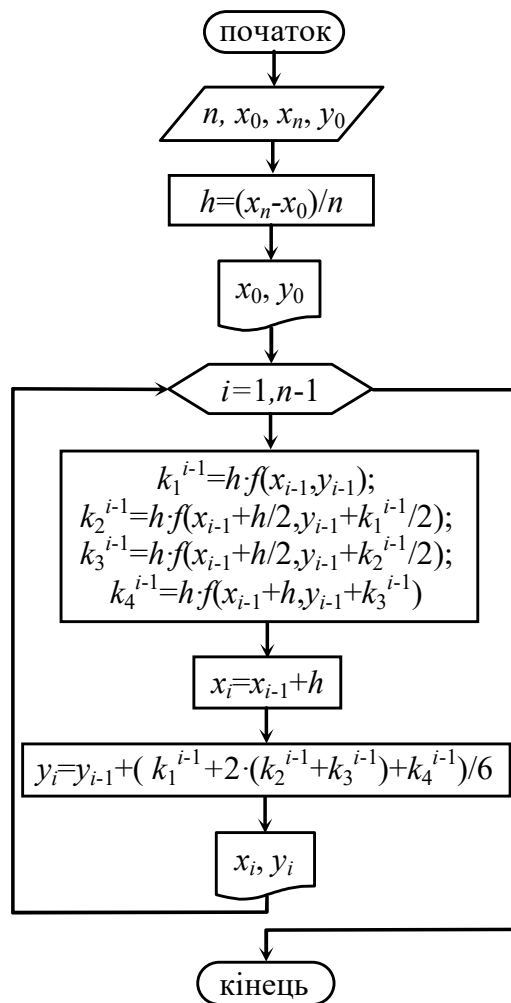


Рис.8.2. Блок-схема розв'язання задачі Коші методом Рунге-Кутта

Приклад 8.2

На відрізку $[0; 0,5]$ з кроком $h = 0,1$ методом Рунге - Кутта четвертого порядку знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = 2x - 3y; \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Позначимо:

$$f(x, y) = 2x - 3y; \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = \overline{1, 5}); \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 2.$$

Згідно розрахункових формул (8.9) для визначення y_1 послідовно знаходимо числа (8.2):

$$k_1^0 = hf(x_0; y_0) = 0,1 \cdot (2x_0 - 3y_0) = 0,1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = -0,6;$$

$$k_2^0 = hf\left(x_0 + h/2; y_0 + k_1^0/2\right) = 0,1 \cdot \left[2 \cdot \left(0 + \frac{0,1}{2}\right) - 3 \cdot \left(2 + \frac{-0,6}{2}\right)\right] = -0,5;$$

$$k_3^0 = hf\left(x_0 + h/2; y_0 + k_2^0/2\right) = 0,1 \cdot \left[2 \cdot \left(0 + \frac{0,1}{2}\right) - 3 \cdot \left(2 + \frac{-0,5}{2}\right)\right] = -0,515;$$

$$k_4^0 = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^0\right) = 0,1 \cdot \left[2 \cdot (0 + 0,1) - 3 \cdot \left(2 + \frac{-0,515}{2}\right)\right] = -0,4255.$$

Тоді

$$\Delta y_0 = (k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0)/6 = \frac{1}{6}(-0,6 - 2 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,515 - 0,4255) \approx -0,509.$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \approx 2 - 0,509 = 1,491.$$

Наступні значення y_i ($i = \overline{2;5}$) визначаємо аналогічно. Результати обчислень заносимо в таблицю 8.3.

Таблиця 8.3. Приклад 8.2

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_i)$	2	1,491	1,131	0,881	0,714	0,607

Отримані наближені значення збігаються з точними таблиці 8.2.

8.2. БАГАТОКРОКОВІ МЕТОДИ

Для розв'язку задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (8.12)$$

було наведено однокрокові методи (8.3), (8.7) – (8.11), які мають загальний вид:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y(x_i, y_i).$$

Можна поставити задачу про визначення наближених значень y_{i+1} шляхом використання інформації не за однією точкою x_i , а за

декількома попередніми $x_i, x_{i-1}, \dots$. Так виникають багатокрокові методи.

Нехай $y(x)$ – точний розв’язок (8.12). Після інтегрування (8.12), аналогічно (8.5), отримуємо:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (8.13)$$

Апроксимуємо підінтегральну функцію в (8.13) поліномом $p(x)$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx. \quad (8.14)$$

Для побудови $p(x)$ припустимо, що $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-N}$ – наближені значення $y(x)$ відповідно в точках $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-N}$. Тоді формула (8.14) допускає явне інтегрування.

- Якщо $N=0$, тоді $p(x) \equiv f(x_i, y_i) = f_i \equiv \text{const}$ і ми отримуємо формулу Ейлера.
- При $N=1$ $p(x)$ – лінійна функція, яка проходить через точки $(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i)$, тобто

$$p(x) = -\frac{x - x_i}{h} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i.$$

Після підстановки даного виразу в (8.14) та подальшого інтегрування, отримуємо:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}). \quad (8.15)$$

Це двокроковий метод, оскільки він використовує інформацію в двох точках x_i, x_{i-1} .

- Якщо $N=2$, то поліном $p(x)$ є квадратичним, що проходить через точки $(x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i)$. В цьому випадку аналогічно отримуємо:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \quad (8.16)$$

Це формула трьохкрокового методу.

- При $N=3$ поліном $p(x)$ є кубічним, що проходить через точки $(x_{i-3}, f_{i-3}), (x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i)$. Остаточна формула:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \quad (8.17)$$

Це формула чотирьохкрокового методу.

Наведені формули для випадків $N=1,2,3$ називають формулами *методів Адамса-Бошфорта*. Метод при $N=1$ має другий порядок точності і його називають методом Адамса-Бошфорта другого порядку. Аналогічно методи при $N=2$ та при $N=3$ є методами Адамса-Бошфорта третього та четвертого порядку точності.

Як видно із формул (8.15) – (8.17), для їх застосування необхідна інформація в попередніх точках x_{i-1} – для формули (8.15), x_{i-1}, x_{i-2} – для (8.16), $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$ – для (8.17). Для проведення розрахунків в наведених точках використовують однокрокові методи того самого порядку точності (наприклад, формули методу Рунге-Кутта), які ще називають *стартовими методами*. Можливий варіант, коли на першому кроці використовують однокроковий метод, на другому – двокроковий і так далі.

Розглянуті чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь можуть бути поширені і для розв'язку систем диференціальних рівнянь. Потрібно лише перейти до векторної форми запису задачі.

8.3. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Задача полягає у визначенні чисельного розв'язка системи n диференціальних рівнянь, приведених до нормальної форми:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \end{cases} \quad (8.18)$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0. \quad (8.19)$$

Задача (8.18), (8.19) у векторній формі записується наступним чином:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}); \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0. \end{cases} \quad (8.20)$$

Формула *метода Ейлера* має наступний вигляд:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i).$$

Вдосконалений метод Ейлера другого порядку (перша модифікація метода Ейлера). Основні формули:

$$\mathbf{y}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \quad x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2},$$
$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}\left(x_{i+\frac{1}{2}}, \mathbf{y}_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Модифікований метод Ейлера другого порядку (метод Хьютона). Це друга модифікація метода Ейлера. Загальна формула виглядає наступним чином:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} \cdot [\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(x_{i+1}, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i))].$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Основні формули:

$$\left[\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1^i + 2\mathbf{k}_2^i + 2\mathbf{k}_3^i + \mathbf{k}_4^i); \\ \mathbf{k}_1^i &= \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) \cdot h; \\ \mathbf{k}_2^i &= \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_1^i}{2}\right) \cdot h; \\ \mathbf{k}_3^i &= \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_2^i}{2}\right) \cdot h; \\ \mathbf{k}_4^i &= \mathbf{f}\left(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3^i\right) \cdot h. \end{aligned} \right. \quad (8.21)$$

Основна формула метода Адамса-Бошфорта:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{24}(55\mathbf{f}_i - 59\mathbf{f}_{i-1} + 37\mathbf{f}_{i-2} - 9\mathbf{f}_{i-3}).$$

Як приклад застосування формул Рунге-Кутта розглянемо модель Лотки-Вольтерри (або рівняння «хижак – жертва») – система двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що описує динаміку чисельності популяції з одним типом хижаків і одним типом жертв.

В загальному вигляді система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy; \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy; \end{cases} \quad (8.22)$$

де x – кількість «жертв»; y – кількість «хижаків»; t – час; a, b, c, d – певні параметри, що задають зв'язок між змінними.

Розв'язок системи (8.22) повинен задовольняти початковим умовам:

$$y(t_0) = y_0; \quad x(t_0) = x_0. \quad (8.23)$$

Для розв'язання наведеної задачі Коші (8.22), (8.23) застосуємо робочі формули методу Рунге - Кутта четвертого порядку (8.21).

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h; \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4); \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= h f_1(t_i, y_i, x_i); \\ k_2 &= h f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, x_i + \frac{q_1}{2}\right); \\ k_3 &= h f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, x_i + \frac{q_2}{2}\right); \\ k_4 &= h f_1(t_i + h, y_i + k_3, x_i + q_3); \\ q_1 &= h f_2(t_i, y_i, x_i); \\ q_2 &= h f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, x_i + \frac{q_1}{2}\right); \\ q_3 &= h f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, x_i + \frac{q_2}{2}\right); \\ q_4 &= h f_2(t_i + h, y_i + k_3, x_i + q_3). \end{aligned}$$

Приклад 8.3

Покладемо в системі Лотки-Вольтерри (8.22), (8.23) наступні чисельні дані (параметри задачі): $a=1,77$; $b=2,17$; $c=1,38$; $d=0,89$ та початкові дані: $x_0=3,39$; $y_0=2,13$. Процес розглядається на відрізку часу $t \in [15; 45]$.

Задача полягає у визначенні чисельного розв'язку наведеної задачі Коші методом Рунге-Кутта четвертого порядку із зазначеною точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання

Початковий крок можна визначити з двох умов:

- $h \leq \sqrt[4]{\varepsilon}$;
- кількість інтервалів інтегрування – парне число.

Щоб забезпечити потрібну точність, обчислення за формулами Рунге-Кутта проводять з кроком h і половинним кроком $\frac{h}{2}$, і порівнюють отримані значення функції в спільній точці t_i , при цьому досягнута точність наближено дорівнює (згідно правила Рунге) :

$$R_1 = \frac{|x_1^h - x_2^{h/2}|}{2^4 - 1}, \quad R_2 = \frac{|y_1^h - y_2^{h/2}|}{2^4 - 1}, \quad R = \max(R_1, R_2),$$

де y_1^h , $y_2^{h/2}$ – наближені значення точного розв'язку $y(t_i)$ в точці t_i , які були обчислені спочатку з кроком h , а потім з кроком $\frac{h}{2}$ відповідно; аналогічно x_1^h та $x_2^{h/2}$ – наближені значення точного розв'язку $x(t_i)$ в точці t_i , з кроком h , та $\frac{h}{2}$ відповідно.

У випадку виконання умови:

$$R > \varepsilon,$$

за правилом Рунге, треба зменшити крок вдвічі і повторити обчислення.

Якщо

$$R < \varepsilon,$$

то наступні обчислення ведемо з кроком $\frac{h}{2}$.

Обчислення проводимо, застосовуючи програмне забезпечення.

Результати при розмірі кроку інтегрування 0,1 (залежність $x = x(t)$ і $y = y(t)$) показано на рис. 8.1.

Зауважимо, що спостерігається циклічна закономірність. Тобто, коли популяція хижака спочатку маленька, здобич росте експоненціально. У певній точці здобич стає такою численною, що популяція хижака починає рости. Врешті-решт, збільшення хижаків стає причиною зменшення здобичі. Це зменшення, у свою чергу, призводить до зменшення хижаків. Цей процес повторюється. Як видно із розрахунків, пік кількості хижаків відстає від здобичі. Також видно, що процес має фіксований період, тобто повторюється через певний час.

Тепер, якщо параметри задачі змінити, загальна картина (рис.8.1) залишиться, проте амплітуди, фази та періоди будуть мінятися. Таким чином, є нескінченна кількість циклів, які можуть відбутися.

Подання розв'язка у фазовій площині є корисним в розпізнаванні внутрішньої структури моделі. Замість побудови графіків $x = x(t)$ і $y = y(t)$ в залежності від t , можна побудувати y в залежності від x : $y = y(x)$. Цей графік і називається поданням у фазовій площині (рис.8.2).

Бачимо, що взаємодія між хижакон і здобиччю визначає замкнуту орбіту, рух по якій відбувається проти годинникової стрілки. В центрі орбіти є критична точка (або точка відпочинку). Точне місце розташування цієї точки можна визначити згідно рівнянь:

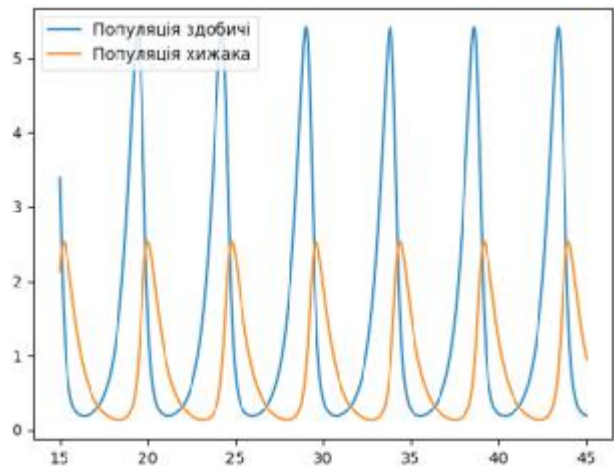


Рис.8.1. Графіки популяцій з часом

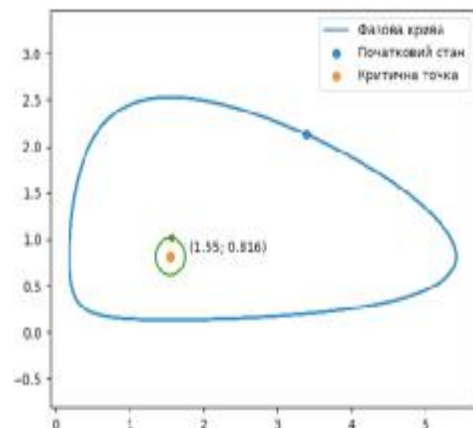


Рис.8.2 Фазовий портрет популяцій

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0; \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - bxy = 0; \\ -cy + dx = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0; \\ y(-c + dx) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \\ x = \frac{c}{d}; \\ y = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Стаціонарний стан (критична точка) з координатами $(0;0)$ є тривіальним і не представляє інтересу (оскільки якщо кількість жертв $x=0$ та хижаків $y=0$, то, звичайно, нічого не може відбуватися). Друга критична точка $\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$ (або в розглянутому прикладі точка $(1,55; 0,816)$ на рис.(8.2)) більш цікава. В цій точці похідна дорівнює нулю, отже популяція не буде змінюватися •

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку.
2. Наведіть формулу класичного методу Ейлера.
В чому полягають достоїнства й недоліки класичного методу Ейлера?
3. Як отримано формулу класичного методу Ейлера?
4. Який порядок точності формули класичного методу Ейлера?
5. Який вигляд має перша покращена формула методу Ейлера?
6. Який порядок точності формули вдосконаленого методу Ейлера?
7. Яким чином отримується та який вигляд має формула другої модифікації методу Ейлера (методу Ейлера-Коші або методу Хьютона)?
8. В чому полягає відмінність однокрокових методів

інтегрування задачі Коші від багатокрокових методів?

9. Які методи називають стартовими, коли і яким чином їх застосовують?
10. Які багатокрокові методи інтегрування задачі Коші Ви знаєте?
11. Чому при застосуванні метода Адамса обов'язково потрібно використання однокрових методів?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Класична формула метода Ейлера має другий порядок точності.
Hi
2. Розрахункові формули класичного метода Ейлера – базис для побудови більш складних методів
Так
3. Похибка метода Ейлера збільшується, чим більше відстань від початкової точки
Так
4. Класичну формулу метода Ейлера можна отримати із застосуванням формули інтегрування лівих прямокутників.
Так
5. Формула вдосконаленого метода Ейлера має третій порядок точності.
Hi
6. Друга модифікація метода Ейлера отримується із застосуванням квадратурної формули трапецій.
Так
7. Друга модифікація метода Ейлера – багатокровий метод.
Hi
8. Метод Рунге-Кутта – багатокроковий метод.

Hi

9. Для того, щоб отримати розрахункові формули метода Рунге-Кутта для системи диференціальних рівнянь, потрібно записати систему у векторній формі

Так

10. Ідея отримання розрахункових формул метода Рунге-Кутта – розкладання функції в ряд Тейлора.

Так

11. Методи Адамса – однокрокові методи.

Hi

12. Метод Ейлера можна розглядати як частинний випадок метода Адамса-Бошфорта.

Так

13. Для застосування метода Адамса потрібно попереднє застосування однокрокових методів.

Так

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА 8

Індивідуальна робота 8 складається із двох завдань.

Завдання 8.1

Розв'яжіть задачу Коші

$$y' = f(x; y); \quad y(x_0) = y_0$$

двома методами:

- Ейлера та
- Рунге Кутта.

Перша цифра номера варіанта визначає шифр по вертикалі, друга – шифр по горизонталі. Таблиця 8.4 визначає значення сталої A , що наводиться у визначенні функції $f(x, y)$ (таблиця 8.6). Таблиця 8.5

безпосередньо задає задачу Коші, а саме праву частину диференціального рівняння, початкову умову, інтервал, крок сітки.

Таблиця 8.4 Шифр по вертикалі

Перша цифра варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0,4	-0,3	2	0,3	1	-1	0,3	2	-1

Таблиця 8.5 Шифр по горизонталі

Друга цифра варіанту	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер правої частини	2	4	5	8	1	3	9	0	7	6
y_0	1	-2	1	-2	2	2	-1	1,05	-2	0.5
h	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,05	0,1	0,4	0,2
Інтервал	[0;2]	[0;2]	[1;2]	[1;3]	[0;1]	[1;3]	[1;1,5]	[0;1]	[0;4]	[1;3]

Таблиця 8.6 Права частина

Номер правої частини	$f(x, y)$	Номер правої частини	$f(x, y)$	Номер правої частини	$f(x, y)$
0	$\frac{(Ax + 0,3y)(1 - xy)}{-x - 0,2y}$	1	$\frac{0,3A - x}{0,3y}$	2	$Ax^3 - \frac{2}{y^2}$
3	$\frac{A}{y^2} + \frac{0,2}{x^2}$	4	$\frac{Ax^2 - 1}{y^3 + x^2 + 0,3}$	5	$\frac{A}{x^2} - \frac{0,3}{x} + \frac{1}{y^2}$
6	$-\frac{A}{y^2} - \frac{0,4x}{0,8 + x}$	7	$\frac{A}{0,4y^2 + 2x}$	8	$\frac{Ax}{y^3} + y$
9	$\frac{Ay}{2x + 0,7} + \frac{3}{y^2}$				

Завдання 8.2

Застосувати метод Рунге-Кутта 4-го порядку до розв'язку системи диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y; \\ \frac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y, \end{cases}$$

яка відповідає заданим початковим умовам:

$$y(t_0) = y_0; \quad x(t_0) = x_0.$$

Чисельні значення параметрів рівнянь a , b , c , d , проміжок інтервалу часу $t \in [t_0; T]$ та початкові дані x_0 , y_0 вибираються відповідно номера варіанта (таблиця 8.2). Похибка розрахунків не повинна перевищувати $\varepsilon = 10^{-3}$.

Для візуалізації результатів:

- на заданому проміжку $t \in [t_0; T]$ побудувати залежності $x(t)$, $y(t)$;
- побудувати розв'язок у фазовій площині, тобто залежність $y = y(x)$ із визначеною на кривій напрямку обходу та положенню на фазовій площині початкової та критичної точки.

Індивідуальні варіанти завдання 8.2 представлені в таблиці 8.7.

Таблиця 8.7 Завдання 8.2

№ варіанта	Значення параметрів рівнянь	Проміжок часу $t \in [t_0; T]$	Початкові дані: $x(t_0) = x_0$; $y(t_0) = y_0$
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
1.	$a = 1,25$; $b = 0,65$; $c = 0,85$; $d = 0,31$	$t \in [1; 31]$	$x_0 = 2,51$; $y_0 = 1,52$

Продовження таблиці 8.7

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
2.	$a = 1,28;$ $b = 1,09;$ $c = 0,87;$ $d = 0,35$	$t \in [2;32]$	$x_0 = 2,55;$ $y_0 = 1,56$
3.	$a = 1,31;$ $b = 1,23;$ $c = 0,91;$ $d = 0,41$	$t \in [3;33]$	$x_0 = 2,61;$ $y_0 = 1,61$
4.	$a = 1,35;$ $b = 1,35;$ $c = 0,95;$ $d = 0,45$	$t \in [4;34]$	$x_0 = 2,65;$ $y_0 = 1,65$
5.	$a = 1,39;$ $b = 1,48;$ $c = 0,99;$ $d = 0,49$	$t \in [5;35]$	$x_0 = 2,69;$ $y_0 = 1,68$
6.	$a = 1,42;$ $b = 1,81;$ $c = 1,05;$ $d = 0,54$	$t \in [6;36]$	$x_0 = 2,74;$ $y_0 = 1,73$
7.	$a = 1,45;$ $b = 1,85;$ $c = 1,11;$ $d = 0,58$	$t \in [7;37]$	$x_0 = 2,78;$ $y_0 = 1,77$
8.	$a = 1,52;$ $b = 1,91;$ $c = 1,14;$ $d = 0,61$	$t \in [8;38]$	$x_0 = 2,81;$ $y_0 = 1,81$
9.	$a = 1,58;$ $b = 1,94;$ $c = 1,19;$ $d = 0,63$	$t \in [9;39]$	$x_0 = 2,85;$ $y_0 = 1,85$
10.	$a = 1,61;$ $b = 1,97;$ $c = 1,22;$ $d = 0,67$	$t \in [10;40]$	$x_0 = 2,88;$ $y_0 = 1,89$
11.	$a = 1,65;$ $b = 2,01;$ $c = 1,25;$ $d = 0,71$	$t \in [11;41]$	$x_0 = 2,92;$ $y_0 = 1,92$

Продовження таблиці 8.7

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
12.	$a = 1,69;$ $b = 2,05;$ $c = 1,28;$ $d = 0,74$	$t \in [12;42]$	$x_0 = 2,95;$ $y_0 = 1,9$
13.	$a = 1,72;$ $b = 2,11;$ $c = 1,31;$ $d = 0,77$	$t \in [13;43]$	$x_0 = 2,99;$ $y_0 = 1,96$
14.	$a = 1,75;$ $b = 2,15;$ $c = 1,35;$ $d = 0,82$	$t \in [14;44]$	$x_0 = 3,23;$ $y_0 = 2,02$
15.	$a = 1,77;$ $b = 2,17;$ $c = 1,38;$ $d = 0,89$	$t \in [15;45]$	$x_0 = 3,39;$ $y_0 = 2,13$
16.	$a = 1,81;$ $b = 2,19;$ $c = 1,41;$ $d = 0,91$	$t \in [16;46]$	$x_0 = 3,41;$ $y_0 = 2,19$
17.	$a = 1,85;$ $b = 2,21;$ $c = 1,45;$ $d = 0,96$	$t \in [17;47]$	$x_0 = 3,49;$ $y_0 = 2,29$
18.	$a = 1,89;$ $b = 2,25;$ $c = 1,49;$ $d = 1,05$	$t \in [18;48]$	$x_0 = 3,55;$ $y_0 = 2,35$
19.	$a = 1,92;$ $b = 2,33;$ $c = 1,55;$ $d = 1,11$	$t \in [19;49]$	$x_0 = 3,59;$ $y_0 = 2,42$
20.	$a = 1,98;$ $b = 2,41;$ $c = 1,59;$ $d = 1,18$	$t \in [20;50]$	$x_0 = 3,65;$ $y_0 = 2,48$
21.	$a = 2,09;$ $b = 2,45;$ $c = 1,65;$ $d = 1,25$	$t \in [21;51]$	$x_0 = 3,73;$ $y_0 = 2,55$

Продовження таблиці 8.7

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
22.	$a = 2,11;$ $b = 2,69;$ $c = 1,75;$ $d = 1,33$	$t \in [22;52]$	$x_0 = 3,81;$ $y_0 = 2,63$
23.	$a = 2,22;$ $b = 2,84;$ $c = 1,99;$ $d = 1,45$	$t \in [23;53]$	$x_0 = 3,25;$ $y_0 = 3,05$
24.	$a = 2,75;$ $b = 3,15;$ $c = 2,35;$ $d = 1,82$	$t \in [24;54]$	$x_0 = 4,23;$ $y_0 = 3,02$
25.	$a = 3,77;$ $b = 4,17;$ $c = 3,38;$ $d = 2,89$	$t \in [25;55]$	$x_0 = 5,39;$ $y_0 = 4,13$
26.	$a = 4,81;$ $b = 5,19;$ $c = 5,41;$ $d = 3,91$	$t \in [26;56]$	$x_0 = 6,41;$ $y_0 = 5,19$
27.	$a = 5,85;$ $b = 6,21;$ $c = 5,45;$ $d = 4,96$	$t \in [27;57]$	$x_0 = 7,49;$ $y_0 = 6,29$
28.	$a = 6,52;$ $b = 6,91;$ $c = 6,14;$ $d = 5,61$	$t \in [28;58]$	$x_0 = 7,81;$ $y_0 = 6,81$
29.	$a = 7,58;$ $b = 7,94;$ $c = 7,19;$ $d = 7,63$	$t \in [29;59]$	$x_0 = 8,85;$ $y_0 = 7,85$
30.	$a = 9,61;$ $b = 9,97;$ $c = 9,22;$ $d = 8,67$	$t \in [30;60]$	$x_0 = 10,88;$ $y_0 = 9,89$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Книги:

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – Москва : Наука, 1966. – 664 с.
2. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – Київ : Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. – Москва : ООО Издательский дом «Оникс 21 век», 2005. – 432 с.
4. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – Москва : Наука, 1982. – 256 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Москва : Наука, 1978. – 512 с.
6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1984. – 832 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – Москва : Наука, 1987. – 600 с.
8. Березин И.С. Методы вычислений. Т.1 / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – Москва : Наука, 1976. – 632 с.
9. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – Лань, 2008. – 496 с.
10. Цегелик Г.Г. Чисельні методи / Г.Г. Цегелик. – Львів : Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004. – 408 с.

Навчально-методичні матеріали:

11. Любашенко Н.Д. Теорія похибок. Розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь: методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Чисельні методи” / Н.Д. Любашенко, М.Ю. Савкіна. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2012. – 96 с.

12. Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані (Data Science) та математичне моделювання» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко. – Електронні текстові дані (1 файл: 21,3 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 138 с. – Назва з екрана. – Режим доступу : <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/28225>
13. Голубєва К.М. Чисельні методи інтегрування (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики. ОП «Інформатика») : Методичні розробки / К.М. Голубєва, С.В. Денисов, О.Ф. Кашпур, Д.А. Ключин, А.І. Риженко. – Київ : «Видавництво Людмила», 2019. – 55 с.
14. Ляшенко Б.М. Методи обчислень: навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету / Б.М. Ляшенко, О.М. Кривонос, Т.А. Вакалюк. – Житомир: Видавництво ЖДУ, 2019. – 217 с.
15. Левчук С.А. Методи обчислень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямку підготовки «Прикладна математика» / С.А. Левчук, С.М. Гребенюк. – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 72 с.

На в ч а л ь н е в и д а н н я

Костюшко Ірина Анатоліївна

Любашенко Наталія Дмитрівна

Третиник Віолета Вікентіївна

Методи обчислень

Підручник

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію:серія А00 від 5.09.1995 р.

просп. Перемоги, 37,

м. Київ, 03056