МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. Я. Данилов,
А. Ю. Зінченко

СИНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ

ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальностями 122 Комп’ютерні науки та 124 Системний аналіз

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Снитюк, В. Є.*, д. т. н., проф., декан факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *Бідюк, П. І.*, д. т. н., проф., професор кафедри математичних методів системного аналізу ННІ “ПСА” НТУУ “КПІ”

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 30.03.2023 р.)
за поданням Вченої ради Навчально-наукового
інституту прикладного системного аналізу
(протокол № 3 від 27.03.2023 р.)

Викладено практичні роботи та методичні вказівки до їх виконання із курсу нелінійної динаміки зосереджених систем та моделей самоорганізації розподілених відкритих систем. Наведено основні ідеї і методи самоорганізації складних систем, алгоритми чисельного дослідження регулярної та хаотичної поведінки рівнянь нелінійної динаміки цих структур та псевдофазової реконструкції їх дивних атракторів; основні елементами теорії стійкості та автоколивань, біфуркації, катастроф та сценаріїв переходу до динамічного хаосу, основні методи побудови фракталів та елементи фрактального аналізу, а також основні алгоритми ідентифікації хаосу та реконструкції еволюційних операторів динамічних систем за одновимірним сигналом.

Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 122 Комп’ютерні науки та 124 Системний аналіз, а також буде корисний для аспірантів технічних і фізико-математичних спеціальностей і спеціалістів із нелінійної динаміки.

Реєстр. № НП 22/23-605. Обсяг 4,31 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ПЕРЕДМОВА

Моделювання нелінійної динаміки фізико-технічних, хімічних, біологічних, економічних систем та процесів базується на декількох альтернативних підходах. Основні методи поділяються на стохастичні (їх ще називають “традиційні”) та синергетичні – тобто ті, що ґрунтуються на положеннях теорії синергетики (наприклад, теорії детермінованого хаосу, теорії стійкості, теорії коливань). Так, нерегулярна поведінка систем, що не є стохастичними, пояснюється як результат складних нелінійних взаємодій внутрішніх параметрів цих систем (детермінований підхід). Синергетика займається дослідженням загальних закономірностей в процесах утворення, стійкості та нестійкості впорядкованих часових і просторових структур в складних неврівноважених системах різної природи, а також вона є найбільш перспективним міждисциплінарним підходом і її по праву можна назвати новою парадигмою сучасного мислення. Тому синергетичний підхід дослідження нелінійної динаміки складних систем часто є більш успішним в поясненні поведінки часових характеристик, ніж введення випадкових змінних. Так, згідно теорії хаосу введення до моделі теоретично виправданих нелінійностей пояснює флуктуації більш точно, ніж використання випадкових змінних. Застосування описаних підходів не є новим у фізико-технічних системах, однак, нелінійним процесам в економічних системах не приділяється належної уваги і вони на сьогоднішній день залишаються недостатньо вивченими.

Предметом вивчення дисципліни є методи аналізу самоорганізації відкритих систем з точки зору термодинаміки і теорії утворення дисипативних структур; побудови фракталів та визначення їхньої розмірності; методи теорії біфуркації та теорії стійкості; методи дослідження автоколивань та утворення структур; методи дослідження регулярної та хаотичної поведінки динамічних систем; методи побудови сучасних чисельних алгоритмів псевдофазової реконструкції атракторів (а в окремих випадках – самої динамічної системи) та виявлення детермінованого хаосу в скалярних одновимірних реалізаціях; методи створення нелінійних математичних моделей теорії катастроф та методи виявлення загальних характеристик процесів, які зовні виглядають суттєво різними.

Курс ґрунтується на засвоєних студентами дисциплінах: «Математичний аналіз», «Теорія ймовірностей», «Математична статистика», «Випадкові процеси», «Системний аналіз», «Бази даних». Синергетичні методи аналізу широко використовуються в наступних системно-організованих навчальних дисциплінах: «СППР», «Теорія керування», «Аналіз часових рядів», «Основи математичної економіки».

Об’єктом курсу служать:

- фрактали та їх властивості;
- нелінійні динамічні моделі, зоерема осцилятори;
- автоколивання та граничні цикли;
- самоорганізація і утворення структур в розподілених системах;
- системи з дискретним часом та їх математичне моделювання;
- універсальний сценарій Фейгенбаума переходу до динамічного хаосу;
- побудова чисельних методів пошуку атракторів нерівноважних динамічних систем;
- теорія біфуркацій та застосування її методів до аналізу реальних моделей, типи біфуркацій;
- теорія катастроф та її застосування до дослідження математичних моделей.
- методи ідентифікації хаосу скалярних реалізацій та методи реконструкції динамічних систем.

Метою вивчення курсу є засвоєння принципів і методів аналізу нелінійних динамічних систем, виявлення їх особливостей, здобуття навичок розв’язування рівнянь нелінійної динаміки та побудові химерних атракторів, знайомство з елементами теорії катастроф та сценаріями переходу до динамічного хаосу, знайомство з основними методами ідентифікації хаосу та реконструкції динамічної системи за одновимірним сигналом цієї системи.

Закріплення основних положень методів синергетичного аналізу відбувається в результаті виконання дев'яти типових практичних робіт для вирішення основних задач курсу.

Основні задачі дисципліни:

- побудова фазових портретів для нелінійних диференціальних та дискретних рівнянь;
- побудова фракталів та визначення їх фрактальних розмірностей;
- побудова замкнених траєкторій та дослідження стійкості другим методом Ляпунова з використанням асимптотичного підходу;
- розкриття прийомів розв'язання практичних задач синергетики, які виникають в наукових дослідженнях у різних галузях науки і техніки;
- набуття навичок творчого використання методів і за допомогою сучасних можливостей обчислювальної техніки та прикладного програмного забезпечення та їх використання для розв'язування різноманітних практичних задач;
- моделювання структур в гратках звя'заних відображень, автоколивань, взаємодії хвиль в активних середовищах, динаміки в складних нелінійних системах та процесах.

В результаті такого освоєння курсу студент додатково зможе використовувати свої знання і уміння для дослідження хаотичної та регулярної поведінки динамічних систем неперервного чи дискретного виду, для моделювання та визначення фрактальної розмірності атракторів цих систем, та для реконструкції динамічних систем за їх одновимірним сигналом.

Навчальний посібник слід розглядати як стислий виклад основних відомостей, термінів і алгоритмів з курсу, які направленні на виконання певної практичної роботи. Тому засвоєння викладеного матеріалу потребує набагато більшого обсягу та кількості годин. Наведені практичні роботи відображають весь курс дисципліни. Більшість з них є досить елементарними і широко використовуваними, проте деякі з них є справжніми дослідницькими і вимагають використання (створення) програмних продуктів, що ускладнює початкову задачу (наприклад, псевдофазова реконструкція атракторів).

Для виконання практикуму студенту потрібен комп'ютер, на якому встановлене IDE (інтегроване середовище програмування) або ж один із пакетів прикладних програм для рішення задач технічних обчислень (наприклад, Matlab). Передбачається виконання робіт в комп'ютерній лабораторії з використанням наявного ПЗ. При цьому жорстких вимог до апаратного забезпечення немає. Якщо не використовувати графічних систем, не буде проблем навіть із застарілим комп'ютером.

Методичні вказівки до кожної практичної роботи складаються із теоретичної частини, прикладу рішення конкретного завдяння, а також із завдань для самостійої роботи студентів. При цьому завдання складаються із декількох варіантів (як правило, 5–10 варіантів).

Студентам для виконання конкретної практичної роботи не варто обмежуватися лише наведеним теоретичним матеріалом у навчальному посібнику. В рекомендованій літературі міститься багато додаткових відомостей.

Для захисту практичної роботи студенти повинні надати викладачу оформлений звіт, привести теоретичні відомості, що використовуються при її виконанні, обґрунтувати побудований обчислювальний механізм, прикласти лістинг програми (в разі необхідності), інтерпретувати отримані результати. За неохідності студент повинен дати правильні відповіді на додаткові запитання за матеріалами практичної.

Вимоги до оформлення звіту. Звіт повинен містити: титульний лист; назву практичної роботи, тему і мету; номер варіанту і зміст індивідуального завдання; хід виконання роботи і короткий опис методів дослідження; результати чисельного моделювання та інтерпретація отриманих результатів; протокол виконаної роботи; висновки по роботі. Титульний лист повинен містити повну назву інституту, дисципліни, назву і номер практичної, прізвище, ініціали і номер групи студента, прізвище та ініціали викладача, а також поточний рік.

Автори виражають щиру подяку студенту 4 курсу кафедри математичних методів системного аналізу Грішину К. Д. за проведені моделювання на ЕОМ завдань практичних робіт та інтерпретації отриманих результатів.

В. Я. Данилов, А. Ю. Зінченко, січень 2023 р.

ВСТУП

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах – одна із фундаментальних проблем сучасного природознавства, яка є предметом детальної уваги дослідників [1]. Причиною появи хаотичних процесів, які можуть не відрізнятися за фізичними характеристиками від істинно випадкових, полягає не у великій кількості ступенів свободи і не в наявності флуктуацій, як вважалося раніше, а в експоненціальній нестійкості режимів. При цьому складність дослідження хаотичної динаміки детермінованих нелінійних систем обумовлюється експоненціальною чутливістю до малих збурень, що робить неможливим передбачення станів системи на проміжках часу, які перевищують певний часовий масштаб, логарифмічно залежний від неточності задання початкових умов. Результатом такої поведінки системи є те, що вона, як здається на перший погляд, характеризується нерегулярною хаотичною динамікою своїх змінних у часі, але при цьому сама динаміка хаотичного режиму системи є повністю детермінованою і в ній можна встановити низку закономірностей і властивостей, які відрізняють її від класичних випадкових процесів. Тут спрацьовує основний принцип детермінізму: майбутній стан системи однозначно визначається початковим станом. При детальнішому аналізі цієї хаотичної динаміки виявляється найважливіша відмінність цього процесу від випадкового – відтворення експерименту. Теоретично хаотична траєкторія детермінованої нелінійної системи повністю відтворюється, якщо створити точно такі ж початкові умови, проте властивість нестійкості динамічної системи тісно пов’язана з непередбачуваністю поведінки її траєкторій на великому проміжку часу. На практиці це означає, що неможливо передбачити поведінку хаотичної системи на великому проміжку часу, адже початкові умови й обчислення можна проводити лише із визначеною точністю; по суті справи, ця властивість хаотичних систем – експоненціальною чутливістю до малих збурень – означає кінець епохи лапласовського детермінізму.

Описані хаотичні процеси в нелінійних динамічних системах називаються детермінованим хаосом, який уперше був описаний і введений Е. Н. Лоренцом. Строгого математичного визначення явища динамічного хаосу не існує, проте можна його визначити за основними його характеристиками [2]:

1) нескінченна, нерегулярна поведінка фазових траєкторій;
2) широкополосний спектр потужності процесу $x(t)$, де x – вектор координат динамічної системи;
3) малий радіус кореляції процесу $x(t)$;
4) площина перерізу Пуанкаре щільно і нерегулярно заповнена точками перетину із фазовою траєкторією;
5) існування інваріантної міри у фазовому просторі, яка характеризує частоту попадань фазової точки в задану зону з плином часу;
6) ергодичність системи, що виражається в тому, що відносний час перебування системи в окремій множині фазового простору $\Omega \in D$ пропорційний відносно фазового об’єму множини цього простору V_Ω до фазового об’єму всього фазового простору V_Ω, і не залежить від початкового стану x_0;
7) перемішання системи, що виражається в тому, що початковий фазовий об’єм, переміщуючись по доступній частині фазового простору, дуже деформується, так, що з плином часу різні частини початкової зони можна виявити в різних частинах фазового об’єму незалежно від форми і розміщення цієї зони;

8) наявність додатного характеристичного показника Ляпунова в спектрі динамічної дисипативної системи, що характеризує експоненціальне розбігання траєкторій системи.

В основі динамічного хаосу лежать фундаментальні поняття – динамічна система та дивний атрактор, тому розглянемо їх докладніше.

Система є динамічною, якщо задані для неї початкові умови повністю визначають її поведінку в наступні моменти часу. Більшість систем матеріальної і нематеріальної природи є динамічними. Прикладом нединамічної системи є система, у якій діють випадкові сили, завдяки яким точне прогнозування поведінки стану системи є неможливим. В більшості випадків динамічну систему вдається задати системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n), \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{1}$$

Цій системі відповідає $n/2$ степенів свободи (вільності). Якщо вважати $(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0})$ координатами точки X_0 у деякий початковий момент часу $t = t_0$ в n-вимірному просторі P_0, тоді геометричним представленням стану системи і буде точка X_0. Ця точка називається зображальною або фазовою точкою, а відповідний їй n-вимірний простір – фазовим простором динамічної системи. Рух зображальної точки X_0 уздовж деякої кривої, яка називається фазовою траєкторією, є еволюцією системи.

Формальніше динамічну систему прийнято визначати так [1]. Нехай еволюційний оператор T^t перетворює деякий початковий стан (у момент часу t_0) системи P_0 у стан системи P в момент часу t, $T^t : P_0 \Rightarrow P$. Тоді під динамічною системою розуміється така система, еволюційний оператор якої задовольняє співвідношенню $T^t T^\tau = T^{t+\tau}$. Інакше кажучи, для динамічної системи час адитивний, а еволюційний оператор мультиплікативний. При цьому еволюційні оператори, які відповідають різним інтервалам часу, комутують: $T^t T^\tau = T^\tau T^t$. Зауважимо, що спосіб уведення оператора еволюції визначає математичну модель динамічної системи. Так, еволюційний оператор може бути введений за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, дискретних відображень, рівнянь в частинних похідних, інтегральних рівнянь, теорії графів тощо. По суті, задання динамічної системи відповідає постановці деякій задачі Коші. Математична модель такої системи вважається заданою, якщо введені параметри (координати) системи, які однозначно визначають її стан, та оператор еволюції, який дозволяє визначати зміну стану системи з плином часу. У подальшому під динамічною системою будемо розуміти саме її математичну модель, яка досить часто, у межах певних припущень, будується наближено для опису реальних процесів чи явищ навколишнього світу.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь (1), що є математичною моделлю деякої динамічної системи. У фазовому просторі цієї системи правими частинами рівнянь (1) породжується векторне поле швидкостей, при якому кожній зображальній точці X_0 відповідає вектор $X(x_i) = \{X_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n),\ X_2(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n),\ ...,\ X_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)\}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n,$ модуль якого чисельно дорівнює швидкості руху фазової точки по траєкторії. Сам вектор у кожній точці x_i направлений по дотичній до фазової траєкторії. Отже, динамічна система (1) може бути записана у векторній формі: $\dot{X} = X(x)$, де $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & . & . & . & \dot{x}_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n) \\ X_2(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n) \\ .... \\ X_n(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n) \end{pmatrix}$ – відповідні вектори і вектор-функція розмірності *n*.

У подальшому припускатимемо, що праві частини системи (1) є аналітичними функціями. Тоді ця система задовольняє умовам теореми Коші-Пікара (існування і єдиності розв’язку задачі Коші). Отже, і через кожну точку фазового простору проходить одна і тільки одна траєкторія. У теорії диференційних рівнянь доведено, що в системі (1) існує три типи траєкторій [1]:

1. Положення рівноваги, що складається з однієї нерухомої точки у фазовому просторі.
2. Цикли, які є замкнутими лініями у фазовому просторі.
3. Траєкторії без самоперетинів (незамкнені траєкторії).

Динамічні системи класифікуються залежно від властивостей оператора еволюції T^t, який може бути заданий у вигляді диференціального чи інтегрального перетворення, у вигляді матриці, таблиці, графа, ланцюга Маркова тощо. Лінійними називають такі динамічні системи, оператори еволюції яких є лінійними функціями (властивість суперпозиції). Розрізняють неперервні та дискретні оператори еволюції і, відповідно, системи з неперервним і дискретним часом. Динамічні системи називаються неперервними, якщо їхній стан може бути визначений у будь-який момент часу $t > t_0$. Такі системи називають ще потоками. Дискретними називаються динамічні системи, стан яких визначається на деякій множині значень часу (дискретах). Такі системи називаються ще каскадами.

За енергетичною ознакою динамічні системи діляться на консервативні та неконсервативні. Динамічні системи називаються консервативними, якщо запас їхньої енергії незмінний. Такі системи у фізиці називаються гамільтоновими. Для таких систем об’єм елемента фазового простору не змінюється з плином часу, а дивергенція векторного поля швидкостей дорівнює нулю: $div(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dX_{x_i}}{dx_i} = 0.$

Неконсервативними називаються динамічні системи, запас енергії яких змінюється з плином часу. Динамічна система називається дисипативною, якщо вона є неконсервативною і її енергія зменшується внаслідок тертя, розсіювання або інших факторів. У таких системах елемент фазового простору зменшується з плином часу, а дивергенція векторного поля швидкостей від’ємна. Переважна більшість динамічних систем є дисипативними.

Серед коливальних систем важливу роль відіграють системи із періодичними коливаннями. Їх називають осциляторами. Інколи цей термін вживається для опису довільних коливальних систем і, строго кажучи, тих, які здійснюють неперіодичні коливання. Осцилятори називаються гармонічними, якщо відповідні коливання є гармонічними, та ангармонічними в інших випадках. Осцилятори називаються лінійними (нелінійними), якщо еволюційний оператор математичної моделі рівняння є лінійним (нелінійними). При цьому основні параметри коливань (частота, форма, амплітуда тощо) визначається параметрами системи і взагалі не залежить від початкового стану системи [2].

Еволюцію дисипативних систем розмежовують на два класи: клас перехідних нестаціонарних рухів зображальної точки, які відповідають перехідному процесу динамічної системи від початкової до граничної множини станів, та клас усталених стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких повністю належать граничним множинам. Часто точну межу між цими класами рухів провести доволі складно або зовсім неможливо. Ця мажа залежить від точності обчислень при розв'язку конкретної задачі.

Розглянемо тепер можливі типи граничних множин дисипативної системи, які можуть існувати в обмеженій зоні фазового простору. Якщо існує така гранична множина динамічної системи у фазовому просторі, до якої притягуються всі траєкторії цієї системи з деякої зони, то така множина називається атрактором, така зона – басейном тяжіння атрактора. Зауважимо, що атрактори існують лише в дисипативних системах. Рух зображальної точки, якому відповідає фазова траєкторія з басейну тяжіння, є перехідним процесом. Усталений рух характеризується належністю фазової траєкторії до атрактора.

У загальній теорії динамічних систем доведено, що дисипативна динамічна система може мати такі типи атракторів [2]:

1) положення рівноваги, якому відповідає точка у фазовому просторі;
2) граничний цикл, фазові траєкторії якого – замкнені лінії;
3) квазіперіодичний атрактор, якому відповідає тороїдальна поверхня.

Вищеперераховані атрактори називаються регулярними. Траєкторії таких атракторів системи стійкі за Ляпуновим і Пуассоном [1, 2]. Відповідний рух динамічної системи буде повністю передбаченим у часі.

Тривалий час вважалося, що тільки регулярні атрактори можуть існувати в динамічних системах. Але в 60-х роках минулого століття виявилось, що у фазовому просторі повністю визначеної (детермінованої) динамічної системи розмірності $n \geq 3$ можуть існувати складні неперіодичні рухи, геометричним образом яких є складні притягувальні множини. При чому, такий непередбачуваний стан системи пояснюється властивостями самої системи, а не будь-яким зовнішнім впливом. Фазові траєкторії цих рухів – це нескінченна лінія, яка ніде не перетинається, і при $t \to +\infty$ не залишає деякої обмеженої зони і не притягується до жодного з регулярних атракторів. Час від часу траєкторія повертається в окіл початкового стану, інакше вона б залишила обмежену зону, але ці повернення мають непередбачуваний характер. Такі атрактори називаються дивними або хаотичними. Перший хаотичний атрактор був побудований Е. Лоренцом при чисельному дослідженні динаміки тривимірної моделі теплової конвекції, а термін «дивний атрактор» (straight attractor) був вперше запропонований через вісім років у праці Д. Рюеля та Ф. Такенса. Поява у фазовому просторі системи дивного атрактора пояснювалась уключенням у систему порівнено невеликої кількості частот (трьох або чотирьох залежно від керованих параметрів), після чого динаміка ставала турбулентною і, зокрема, демонструвала характерний для випадкового процесу суцільний спектр. У цій праці підкреслювалася наявність нестійкості фазових траєкторій на дивному атракторі і його нетривіальна геометрична структура (фрактальна множина або просто фрактал). А оскільки такі атрактори існують лише в нелінійних математичних моделях, які, як звичайно, не мають точних аналітичних розв'язків, то відразу виникла необхідність у розробці інформаційних технологій дослідження хаосу. Основні характеристики атракторів динамічних систем представлені в таблиці 1.

Дивні атрактори характеризуються передбачуваністю щодо детермінованості оператора еволюції $T_t : X(t_0) \to X(t).$ Проте він однозначно відтворюється при заданих початкових умовах, адже для розв'язку системи (1.2), як і у випадку регулярних атракторів, виконується теорема існування і єдності. Термін «детермінований хаос» використовується для визначення складних неперіодичних режимів детермінованих динамічних систем, математичними моделями яких є дивні атрактори.

Таблиця 1

Основні характеристики атракторів динамічних систем

Топологічна розмірність	Динаміка Атрактора	Спектр ЛХП	Розмірність Хаусдорфа
1	Нерухома точка	–	0
2	Періодичний рух	0 –	1
3	Тор T^2 Хаос C^1	0 0 – + 0 –	2 $2 < D < 3$
4	Гіпертор T^3 Хаос у торі T^3 Гіперхаос C^2	0 0 0 – + 0 0 – + + 0 –	3 $3 < D < 4$ $3 < D < 4$
N	Нерухома точка Періодичний рух (N – 1)-тор (N – 2)-хаос	– … – 0 – … – $\underset{l\geq 2}{0...0}\underset{N-l}{-...-}$ $\underset{k\geq 1}{+...+}\underset{l\geq 1}{0...0}\underset{N-k-l}{-...-}$	0 1 l $k+l < D < N$

Зауважимо, що стійкість хаотичних атракторів за Пуассоном, на відміну від регулярних, завжди супроводжується експоненціальною нестійкістю за Ляпуновим. Як наслідок, це призводить до експоненціальної розбіжності близьких у початковий момент часу фазових траєкторій та перемішуванню.

Дослідження нелінійної динаміки, процесів самоорганізації в просторово-розподілених системах різної природи (фізичних, хімічних, економічних та інших) та ідентифікація параметрів і структур математичних моделей складних процесів і систем на основі точних і неповних вимірів активно вивчається останнім часом і привертає до уваги багатьох дослідників [1 – 4]. Зацікавленість до цього напрямку досліджень зумовлено великою фундаментальною та практичною цінністю цього питання у зв’язку з тим, що більшість важливих систем є дисипативними, розподіленими і демонструють складні, зокрема хаотичні режими коливань. До аналізу просторово-неперервних моделей, що демонструють просторово-часовий хаос і процеси утворення структур, зводяться багато задач радіофізики, фізики плазми, наноелектроніки, економіки, екології тощо.

Першим сучасним міждисциплінарним напрямом застосування нелінійної динаміки є реалізація абстрактних моделей фінансово-економічних систем посткризового періоду, коливальних систем різної природи, реальних фізичних систем та феноменів нелінійної динаміки. Перші праці в дослідженні коливальних систем належать німецькому досліднику О.Ресслеру, а реальних фінансово-економічних систем – китайським Ма і Ю.-Ш. Чену. Основна мета цих робіт полягає в штучному конструюванні найпростішої детермінованої системи диференціальних рівнянь, яка демонструвала б хаотичну поведінку.

Дослідження реальних фізичних систем пов’язане з уведенням поняття дивних атракторів гіперболічного типу, у яких усі траєкторії системи є сідловими. Такі атрактори представляють абстрактними конструкціями, наприклад, атрактор Смейла-Вільямса, що будується для відображення тривимірного простору в себе. В останніх працях саратовської наукової школи на чолі з С.П. Кузнецовим побудована диференціальна модель осцилятора, у якого реалізуються дивні атрактори гіперболічного типу. А для реалізації гіперболічного хаосу запропонована модель на основі параметричного генератора.

Значний внесок у дослідження складної динаміки та біфуркації в нелінійних механічних системах зробили харківські вчені, зокрема в працях К.В. Аврамова досліджені хаотичні коливання дискретних механічних систем із кусково-лінійними пружними характеристиками. Вони запропонували різні методи та підходи до дослідження біфуркацій нелінійних коливань різних механічних систем.

Другим міждисциплінарним напрямом є багатопараметричний аналіз і побудова атласів карт динамічних режимів – діаграм на площині параметрів, де зони різних режимів динаміки показані визначеним кольором. Серед провідних досліджень у цьому напрямку варто зазначити праці А. П. Кузнецова, В. С. Аніщенка, О. С. Піковського, М. І. Рабіновича, С.В. Кияшка, А. Ю. Швеця, В. І. Паксютова, Л. Тюрюкінія, Н. Станкевича, Н. С. Богданової, Т. С. Краснопольської, А. Гонзалез-Буельзі та ін. У цих роботах запропоновані математичні моделі конкретних радіо-фізичних пристроїв і побудовані карти динамічних режимів для різних реальних та модельних нелінійних систем. Комплексні «атласи» таких карт відображають зміни динамічних режимів на всій площині біфуркаційних параметрів.

Третім міждисциплінарним напрямом досліджень детермінованого хаосу є управління хаосом. Завдяки фрактальній природі хаотичних режимів і їхньої чутливості до малих збурень вони допускають ефективне управління за допомогою зовнішніх керованих параметрів. Метою такого впливу є реалізація в системі потрібного режиму або попадання в задану зону фазового простору. Цей напрям сучасних досліджень вважається дуже перспективним в дослідженні фінансово-економічних та реальних фізичних систем. Серед досліджень тут варто зазначити роботи А.Л. Фрадкова, Б.Р. Андрієвського, Т. Капітаніка, У. Дреслера, Г. Нітше, Дж. Ромейреса, С. Гребожі, М. Ньюнеза, Г. Мато, М.Т. Ясена, Ф. М. Моукаму Какмені та інших.

Важливим напрямком досліджень щодо управління хаосом є дослідження хаотичної синхронізації в просторово-розподілених системах різної природи, що демонструють різні режими детермінованого хаосу [3]. Під синхронізацією (фазовою синхронізацією) розуміють процес встановлення і підтримки режиму коливань двох пов’язаних між собою динамічних систем (осциляторів), при якому частоти їхні збігаються або кратні одна одній. Більшість сучасних досліджень явища хаотичної синхронізації проводяться або для модельних систем з малою кількістю ступенів свободи (зв’язані системи з дискретним часом (відображення), потокові системи, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь), або для дискретних моделей просторово-розподілених автоколивальних систем, що є ланцюжками і гратками зв’язаних осциляторів чи відображень. Останніми роками спостерігається значний інтерес до дослідження синхронізації в складних нелінійних фінансово-економічних системах, які складаються із великої кількості елементів з різноманітними взаємозв’язками. Для систем з малою кількістю ступенів свободи нині досліджені основні закономірності явища хаотичної синхронізації, виділено декілька різних типів синхронної поведінки зв’язаних хаотичних систем. Це фазова синхронізація, узагальнена синхронізація, лаг синхронізації, лаг узагальненої синхронізації, що перемежовується, індукован/а шумом синхронізація, повна синхронізація, синхронізація часових масштабів. Усі перераховані типи хаотичної синхронізації пов’язані між собою, проте співвідношення між ними до кінця не вивчені. Серед основних досліджень у напрямку хаотичної синхронізації варто зазначити праці М.І. Рабіновича, Д. Валграєфа, О. С. Піковського, В. С. Аніщенка, С. Бакалетті, В. С. Афраймовича, А. П. Філатова, Й. Брагарда, К. Т. Чоу, Й. Я. Чена, А.С. Дмитрової та ін.

Перехід у нелінійній динамічній системі від регулярних до хаотичних режимів представляє собою деяку послідовність біфуркацій, яка може бути як скінченною, так і нескінченною. Таку послідовність біфуркацій називають сценарієм переходу до хаосу.

Найпоширенішим сценарієм переходу до хаосу є перехід через каскад (нескінченну послідовність) біфуркацій подвоєння періоду. Він полягає у виникненні каскаду біфуркацій подвоєння періоду, що призводить до народження хаотичного атрактора. Уперше його описав американський фізик Мітчел Фейгенбаум, який виявив, що точки біфуркацій подвоєння періоду накопичувалися до певної межі – порогу виникнення хаосу за законом геометричної прогресії з показником 4,669... Цей показник виявився універсальним, тобто виникав і в інших відображеннях, і, як потім з'ясувалось, у нелінійних дисипативних системах найрізноманітнішого виду. М. Фейгенбаум не лише описав цей сценарій для дискретного відображення, але й установив для нього властивості універсальності та скейлінгу.

Іншим основним сценарієм переходу до хаосу в динамічних системах є переміжність. Цю назву він отримав після публікації серії праць французьких дослідників І. Помо та П. Манневілля, які описали декілька можливих типів переходів до хаосу. Відмінною особливістю сценарію переміжності є перехід до хаосу внаслідок лише однієї біфуркації. У структурі утвореного хаотичного атрактора чітко виділяються дві фази: більш тривала ламінарна фаза, у якій рух системи відбувається в околі зниклого регулярного атрактора, та короткі непередбачувані турбулентні сплески, що з нею перемежовуються.

Третім основним є вищерозглянутий сценарій Ландау-Хопфа – перехід до хаосу через квазіперіодичні режими. Першими працями з дослідження цього сценарію вважаються вищезгадані праці Л.Д. Ландау та Е. Хопфа. Механізм переходу до хаосу пояснюється каскадом великої кількості біфуркацій, які супроводжуються виникненням усе нових і нових раціонально неспіввимірних частот. Такий каскад призводить до виникнення в системі складного динамічного режиму – турбулентності. У працях Д. Рюеля та Ф. Такенса показано, що вже після виникнення в системі перших трьох складників із неспіввимірними частотами може виникати дивний атрактор.

Досліджуючи виникнення сценарію Ландау-Хопфа, американські вчені Е. Отта, Дж. Йорка та ін. встановили можливість виникнення переходу до хаосу через квазіперіодичні режими дивних нехаотичних атракторів, які є дивними щодо своєї геометричної фрактальної структури. Особливістю цього сценарію переходу до хаосу є відсутність чутливості динаміки системи щодо збурення її початкових умов.

Дотепер за допомогою сучасних потужних комп'ютерів виявлена ще низка сценаріїв переходу до хаосу в динамічних системах – це сценарій Айфрамовича-Шильнікова, біфуркація Неймарка, жорсткі переходи типу «хаос-хаос» та інші. Серед них варто виокремити сучасні дослідження українських учених О. Ю. Швеця та Т.С. Краснопольської, які встановили так званий узагальнений сценарій переміжності. Цей сценарій реалізується внаслідок переміжності хаотичного атрактора та сідлового граничного циклу. Утворений при цьому хаотичний атрактор, крім ламінарної та турбулентної фази, також характеризується грубо-ламінарною фазою, у якій рух системи відбувається в околі зниклого хаотичного атрактора.

Проте перші два сценарії (сценарій Фейгенбаума і переміжності) найчастіше зустрічаються в прикладних задачах хаотичної динаміки. Картина можливих переходів від регулярного атрактора до хаотичного ще дуже далека від свого завершення.

Частина 1. Нелінійна динаміка зосереджених систем

Практична робота №1

Кількісні і якісні характеристики послідовностей даних

1.1. Перетворення Фур'є. Застосування перетворення Фур'є. Спектри складноперіодичних, хаотичних і шумових реалізацій.

При побудові химерних атракторів базовим для ідентифікації хаосу є досдідження спектральних характеристик та інваріантної міри. Великий клас завдань аналізу послідовностей даних пов'язаний з перетворенням Фур'є. Перетворення Фур'є відіграє важливу роль як необхідний проміжний крок у визначенні щільності спектру потужності, передатних функцій, кореляційних функцій та інших характеристик. Перетворення Фур'є задається виразом

$$X(t) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

де $j = \sqrt{-1}, -\infty < f < \infty, x(t)$ звичайно є функцією часу t. Перетворення Фур'є оборотне:

$$x(t) = F^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Дані, отримані в ході натурних і чисельних експериментів, як правило, представляють собою послідовності відліків змінної стану $x_n = x(t_n)$, що розташовані через рівні інтервали часу $\Delta t (t_n = n\Delta t, n = 0,1,..., N-1)$. У такому разі розглядають дискретне пряме і обернене перетворення Фур'є відповідно:

$$X_k = X(f_k) = F(x(t_n)) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j2\pi k/N},$$

$$k = 0,1,...., N-1$$

$$x_n = x(t_n) = F^{-1}(X(f_k)) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(f_k) e^{j2\pi nk/N},$$

$$n = 0,1,...N,$$

де $\Delta f = 1/(N\Delta t), f_k = k\Delta f$. Величини X та x пов'язані рівністю Парсеваля: $\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2$. Графік величини $|X_k|^2$ як функції частоти f називається спектром потужності. Величина кроку Δf відповідає спектральному дозволу. Найбільша частота спектру дорівнює $N\Delta f$. Графік спектру завжди симетричний щодо вертикальної прямої $(N/2)\Delta f$. Таким чином, корисний діапазон частот (той, що містить ненадлишкову інформацію) знаходиться в інтервалі $[0; 1/(2\Delta t)]$. Як правило, при побудові графіка спектру по осі ординат відкладають величину $P = 10\log_{10}(|X_k|^2)$.

1.2. Розрахунок ентропії складних періодичних, хаотичних і шумових реалізацій.

При описанні відкритих систем певну роль відіграє баланс ентропії. В результаті необоротних дисипативних процесів (дифузії, в'язкості, теплопровідності, фазових процесів, хімічних процесів) в будь-якій реальній системі зростає ентропія. Єдина функція стану, яка розрізняється в необоротних та в оборотних системах, - це ентропія: по-перше, вона зростає, а по-друге – змінюється.

Для розрахунку значення ентропії Шенона S необхідно діапазон зміни змінної стану системи $x \in [-A; A]$ розділити на K інтервалів довжини ΔS. Потім необхідно розрахувати імовірність p_k знаходження траєкторії системи в k-ом інтервалі. Тоді ентропія Шенона визначається виразом

$$S = -\sum_{k=1}^{K} p_k \ln p_k .$$

Числові помилки при визначенні ентропії виникають через те, що довжина послідовності даних, яка розглядається, - кінцева, а також із-за довільного вибору довжини інтервалу ΔS. Для того, щоб уникнути неточності у визначенні S, пов'язаної з вибором довжини інтервалу, використовують нормовану ентропію Шенона

$$S_n = \frac{S}{E},$$

де $E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{A}\right)^2$, N – довжина послідовності даних, $\bar{x}$ - середнє.

Завдання на практичну роботу №1

Завдання 1. Розрахуйте чисельно дійсну і уявну частини перетворення Фур'є, а також, спектральну щільність потужності: 1) періодичного сигналу; 2) періодичного сигналу з двома кратними частотами; 3) квазіперіодичного сигналу; 4) сигналу у вигляді одиничного прямокутного імпульсу; 5) шумових сигналів з рівномірною і нормальною функцією щільності розподілу імовірності. Порівняєте отримані результати з теоретичними. При оцінці перетворення Фур'є періодичної реалізації розгляньте випадки, коли перетворення Фур'є виконується для реалізації, що містить: 1) ціле число періодів; 2) неціле число періодів. Порівняєте спектри, що розраховані по одній реалізації і по декількох фрагментах реалізації із застосуванням процедури усереднення спектру.

Завдання 2. Розрахуйте спектральну щільність потужності для послідовностей, отриманих з допомогою; 1) логістичного відображення; 2) системи Ресслера при різних значеннях управляючих параметрів.

Завдання 3. Розрахуйте ентропію Шенона S і нормальну ентропію Шеннона S_n для послідовностей, отриманих за допомогою: 1) логістичного відображення; 2) системи Ресслера при різних значеннях управляючих параметрів; 3) системи Лоренца при різних значеннях управляючих параметрів. Проведіть дослідження залежностей S і S_n від величин K і N. Розрахуйте S і S_n для шумових послідовностей з рівномірною і нормальною функціями щільності розподілу імовірностей.

Практична робота №2
Елементи фрактального аналізу

2.1. Системи ітерованих відображень.

Нехай дано систему ітерованих функцій (СІФ)

$$T_i(x) = A_i x + b_i, \quad (1)$$

де $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ – деформація, $b_i = \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$ – кореляційний зсув, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. $S_i = \det A_i < 1$ є стискаючим відображенням. $T = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$, де $T \in E_0$; $2 \le n \le S$, де n- довільне натуральне число, а S – максимальне число ітерованих функцій.

Як приклад, наведемо алгоритми дії відображення дискретної СІФ.

1. Задаємо компакт E_0 на R^2.
2. Перша ітерація дає множину

$$E_1 = T(E_0) \equiv T_1(E_0) \bigcup ... \bigcup T_n(E_0)$$

3. Наступні ітерації:

$$E_{m+1} = T(E_m) \equiv T_1(E_m) \bigcup ... \bigcup T_n(E_m)$$

Тоді СІФ на кроках 1– 3 – це є, по суті, динамічна система.

Доведено [13], що $\underset{m\to\infty}{Lim} E_m = E.$

Даний алгоритм надалі будемо позначати ДСІФ. Детальніше з алгоритмом СІФ, а також ДСІФ можна ознайомитися в [1].

Приклад (за алгоритмом ДСІФ)

Якщо $E_0 = \Delta -$трикутник з вершинами $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, а відображення мають вид :

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ де } T_2 \vec{x} = \bar{A} x + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}; T_3 \vec{x} = \bar{A} x + \begin{pmatrix} x_4 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix};$$

то в результаті СІФ-процедури одержимо трикутний килим Серпинського. Зауважимо, що коєфіцієнт стискання ітерацій S = 0,25 .

2.2. Фрактали та розмірність геометричних об’єктів.

Багато соціально-економічних та природних систем настільки складні та нерегулярні, що використання класичних знайомих об’єктів геометрії та статистичного аналізу для їх моделювання є безнадійним. Як, наприклад, побудувати модель гірського хребта чи корони дерева в термінах геометрії? Яка математика відповідає за ритми серця та головного мозку, особливо, при приступах аритмії? Чи можна математично описати раптове виникнення певної хвилі паніки на фінансових ринках та, навіть, побудувати математичну модель соціальної поведінки?

Фрактали та теорія хаосу – підходящі засоби для дослідження поставлених питань. Теорія хаосу — математичний апарат, описуючий поведінку деяких нелінійних динамічних систем, що підлягають, при певних умовах, явищу, відомому як хаос, що характеризується сильною чутливістю поведінки системи до початкових умов. ***Хаос*** – це детермінована нелінійна динамічна система, яка може продукувати результати, що здаються випадковими. Така хаотична система повинна мати фрактальну розмірність та проявляти чутливу залежність від початкових умов.

Результатом такої чутливості є те, що поведінка такої системи здається випадковою, навіть, якщо модель, описуюча систему, є детермінованою. Прикладом подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій і його підсистеми: економічні, політичні, соціально-економічні,фінансові та інші. Теорія хаосу гласить, що складні системи суттєво залежать від початкових умов і невелика зміна в навколишньому середовищі веде до непередбачуваних наслідків.

Математичні системи з хаотичною поведінкою є детермінованими, тобто підкоряються деякому строгому закону і, в деякому сенсі, є впорядкованими.

Сам ***термін фрактал*** означає об'єкт, в якому частини деякою мірою подібні цілому, тобто окремі складові частини самоподібні. Прикладом є деревоподібне розгалуження. В той час як кожна гілляка дерева і кожне послідовно зменшуване розгалуження різні, вони в цілому якісно подібні до загальної структури всього дерева.

В більшості робіт по фракталам сомоподібність використовується як визначаюча властивість. Надалі ми будемо приймати точку зору Бенуа Мандельброта, за якою фрактали повинні визначатися в термінах фрактальної (дробової) розмірності. Фрактальна розмірність представляє собою досить складну концепцію. Ми будемо визначати її як число, яке кількісно описує те, як об'єкт заповнює простір. В евклідовій геометрії об'єкти суцільні та неперервні – вони не мають проміжків чи отворів. Вони мають цілі розмірності. Фрактали часто переривчасті, подібно сніжинці Кох (розмір самоподібності d=1,2618), що має, в принципі, нескінчену довжину всередині скінченного простору, адже коло, що замикає її в собі, обмежує її простір.

Існує декілька принципово різних визначень розмірності геометричного об'єкта. Ми зупинимося на трьох: фрактальна розмірність, чи розмірність Мінковського, топологічна розмірність та розмірність Хаусдорфа. Топологічна розмірність геометричного об'єкта завжди виражається цілим числом; це не суперечить інтуїтивному представленню про те, що криві – одномірні, а площини – двомірні. Розмірність Хаусдорфа лежить в основі фрактальної розмірності. В 1975 році Мандельброт визначив фрактал як множину, розмірність Хаусдорфа якої строго більша топологічної розмірності. Розмірність Мінковського може слугувати як аналог розмірності Хаусдорфа - зручною у використанні прикладних задач. Ці розмірності, як правило, співпадають, але алгоритм визначення розмірності Мінковського набагато ефективніший. Далі ми будемо використовувати і досліджувати фрактальну розмірність, застосовуючи її до часових рядів.

2.3. Розмірність Мінковського

Розглянемо відомі вирази для довжини, площі та об'єму "кулі" в евклідовому просторі. Довжина "кулі" радіусу r в R складає 2r. Площина "кулі" r в R^2 дорівнює πr^2. Нарешті, об'єму кулі радіуса R^3 дорівнює $4/3\pi r^3$. Відповідні формули в евклідовому просторі любого (цілого) числа вимірів добру відомі:

$$V_d = \gamma(d)r^d, d = 1, 2, 3..., \quad (1.1)$$

де $\gamma(d) = \Gamma(1/2)^d / \Gamma(1 + d/2),$ Г(x) – Гама-функція: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$ x > 0.

Це неперервна функція додатного аргументу, що інтерполює факторіал наступним чином: $\Gamma(n+1) = n!,$ n =0,1,2,…

Перший крок у побудові теорії дробової розмірності лежить у визначеності d-міри кулі радіусу r в R^n, де d – любе невід'ємне дійсне число. Це досягається поширенням формули (1.1) на всі дійсні d > 0. Наприклад, об'єм (міра) кулі в 3/2-мірному просторі визначається як $V_{3/2} = \gamma(3/2)r^{3/2}$. Зауважимо, що конкретне значення коефіцієнта $\gamma(d)$ в (1.1) не грає ніякої ролі в наших подальших міркуваннях і його можна вважати константою.

Наступний крок полягає в переносі поняття d –міри з кулі на будь-яку довільну множину $A \subset R^n$. Для цього апроксимуємо A об'єднанням куль та просумуємо їх об'єми (рис.1).

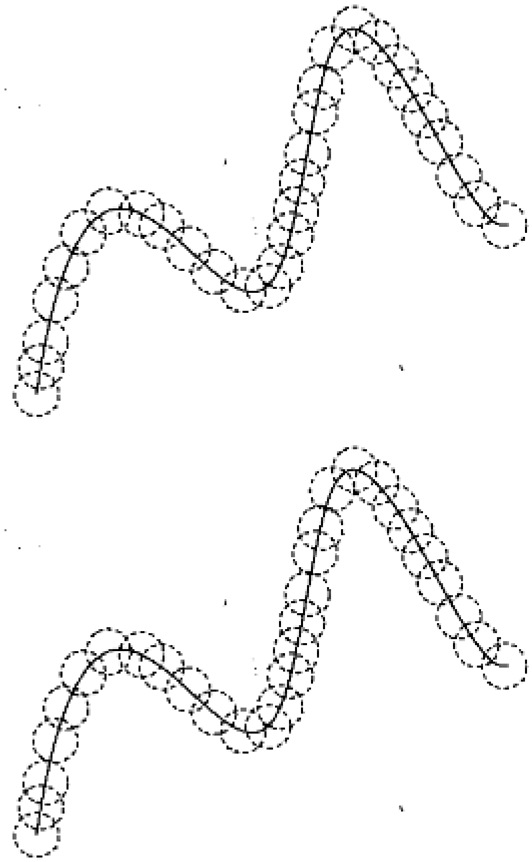


Рис.2.1 Апроксимація множини *A* об'єднанням куль

Нехай $N(\varepsilon)$ - мінімальне число шарів радіуса ε, що необхідні для покриття компактної множини A. Тоді d –міра A, яку позначимо як $B_d(A)$, задовольняє (приблизно):

$$B_d(A) \propto N(\varepsilon)\varepsilon^d .$$

Вважаючи, що $B_d(A) > 0$, для деякого c > 0 має місце:

$$N(\varepsilon) \approx \frac{c}{\varepsilon^d} .$$

Після логарифмування лівої та правої частини отримуємо:

$$LogN(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon .$$

Тобто $d = -\dfrac{logN(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \dfrac{l\og c}{\log \varepsilon}$.

Так як $\log \varepsilon \to -\infty$ при $\varepsilon \to 0_+$, то розмірність Мінковського

$$\dim_M(A) = d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.1).$$

Якщо ліміт існує, то вираз (2.1) визначає *розмірність Мінковського* множини A. Інколи також використовують *дробова розмірність*.

Зауважимо, що у нашому визначені упущені технічні деталі. Так, можна визначити дві величини – верхню та нижню границі розмірності, для яких знак lim в (2.1) зміниться на lim sup та lim inf, відповідно.

Якщо значення верхньої та нижньої границі співпадають, тобто ліміт в (1.2) існує, то розмірність Мінковського дорівнює цьому значенню.

З алгоритмами визначення розмірності Мінковського можна ознайомитися в [5]. Алгоритм визначення фрактальної розмірності (алгоритм Грассбергера та Прокаччі) буде представлений нижче.

2.4. Розмірність Хаусдорфа

Побудова розмірності Хаусдорфа має деякі подібності з конструкцією розмірності Мінковського. Почнемо з формули для d-міри кулі в $\Re^n$, а потім апроксимуємо d-міру довільної множини А сумою d-мір куль, які покривають А. Тепер ми будемо розглядати покриття множини А r-кулями, де $r \le \varepsilon, \varepsilon > 0$. Множина А має додатну d-міру Мінковського при d=1/2, але характеризується нульовою d-мірою Хаусдорфа при довільному d > 0.

Розглянемо послідовність куль з радіусами $r_i < \varepsilon, i = 1, 2, 3, \ldots$,які покривають А.Ми апроксимуємо d-міру Хаусдорфа множини А сумою $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d) r^d{}_i$. Введемо

$$S_{d,\varepsilon}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d) r^d{}_i,$$

де точна нижня границя шукається за всіма такими покриттями множини А. Визначимо *d-мірну зовнішню міру множини* А як

$$S_d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} S_{d,\varepsilon}(A).$$

Границя в даному визначенні існує завжди, так як $S_{d,\varepsilon}(A)$ спадає при $\varepsilon \to 0.$

Наведемо деякі властивості $S_{d,\varepsilon}(A)$.

1. Якщо $A \subset B,$ то $S_d(A) \le S_d(B)$.
2. $S_d(a)$ субадитивна, тобто $S_d(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} S_d(A_n).$
3. Якщо $A \subset \mathbb{R},$ то $S_1(A)$ співпадає із зовнішньою мірою в сенсі Лебега. Це твердження не справедливе, якщо $A \subset \mathbb{R}^n, n > 1.$ Але тим не менше, d-міра множини дорівнює 0 в том випадку і тільки в тому випадку, коли зовнішня міра Лебега дорівнює 0.

Теорема. Довільній множині $A \subset \mathbb{R}^n$ відповідає єдине число d, що називається розмірністю Хаусдорфа множини А, для якого

$$e < d \Rightarrow S_e(A) = \infty,$$
$$e > d \Rightarrow S_e(A) = 0.$$

Це число, яке позначимо як $\dim_H(A)$, задовольняє співвідношенню:

$$\dim_H(A) = \sup\{e : S_e(A) = \infty\} = \inf\{e : S_e(A) = 0\}.$$

2.5. Топологічна розмірність

Топологічна розмірність визначається індуктивним способом і тому інколи називається *індуктивною розмірністю.* Більш точно розглядаються мала та велика індуктивні розмірності. Але вони обидві співпадають для підмножини $\mathbb{R}^n$,розглядом якої ми обмежимося. До кінця цього параграфу термін ”розмірність E” буде означати топологічну розмірність $\dim_T(E)$.

Для порожньої множини θ покладемо:

$$\dim_T(\theta) = -1.$$

Розмірність довільної непорожньої множини відрізняється від -1.

Множина E має розмірність $\dim_T(\theta) = 0$ в тому випадку, якщо для кожного $x \in E$ і для довільної відносної відкритої множини U, що містить x, існує така відносно відкрита множина V, що $x \in V \subset U$ і $\partial V \cap E = 0.$(Нагадаємо, що ∂V позначає границю V). Прикладом множини розмірності 0 є множина раціональних чисел Q на дійсній осі R. При даній відносно відкритій множині U, що містить x, V є перетином Q з відкритим інтервалом, що має ірраціональні скінченні точки і що міститься в U. Границя V складається із двох ірраціональних граничних точок, які не належать Q.

Розмірність довільної зліченна множина простору R^n дорівнює 0. Більш важливий з точки зору фрактальної теорії результат формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Топологічна розмірність класичної множини Кантора дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Топологічна розмірність дійсної прямої* R *дорівнює* $\dim_T(R^n) = 1.$

Теорема 3. *Топологічна розмірність компактної множини* $A \in R^n$ *дорівнює нулю в тому і тільки в тому випадку, якщо A цілком незв'язне.*

Теорема 4. *Топологічна розмірність простору* R^n *дорівнює* $\dim_T(R^n) = n.$

2.6. Визначення фрактальної розмірності алгоритмом Грассбергера та Прокаччі.

Це метод знаходження кореляційної розмірності, що використовує кореляційний інтеграл $C_m(R)$ для обчислення фрактальної розмірності для високорозмірних аттракторів. Метод представляє собою імовірність того, що 2 точки на аттракторі лежать в межах відстані R одна від іншої.

Ми підрахували кількість пар точок наступним чином. По-перше, відновлюємо наш часовий ряд як фазовий простір, починаючи з нижньої розмірності вкладення m=2, як це було показано в попередньому розділі. Потім, починаючи з малої відстані R, підрахуємо для нього кореляційний інтеграл $C_m(R)$ у відповідності до наступного співвідношення:

$$C_m(R) = (1 \backslash N^2) * \sum_{i,j=1;i \neq j}^{N} Z(R - |X_i - X_j|),$$

де $Z(x)$ =1, якщо $R - |X_i - X_j| > 0$, і дорівнює 0 інакше,

N- кількість спостережень;

R – відстань;

C_m - кореляційний інтеграл для розмірності m. Z(x) називається функцією Хевисайда, так як вона дорівнює 0, якщо відстань між двома точками X_i і X_j менша R, і дорівнює 1, якщо ця відстань більше. Кореляційний інтеграл є імовірність того, що дві точки, що вибрані навмання, віддалені друг від друга менше, ніж на відстань R. Якщо ми збільшимо R, то C_m повинно збільшуватися зі швидкістю R^D. Це дає наступне співвідношення:

$$C_m = R^D$$

або $$\log(C_m) = D * \log(R) + const.$$

Для розмірності m ми можемо обчислити C_m при збільшенні R. Находячи нахил прямої на графіку лінійної регресії в подвійних логарифмічних координатах $\log(C_m)$, $\log(R)$, ми можемо оцінити кореляційну розмірність D для розмірності вкладень m. При збільшенні m, розмірність D буде в кінці кінців збігатися до своєї істинної величини. Той же результат має місце, якщо розмірність вкладення стає більше, ніж фрактальна розмірність. Звичайно збіжність спостерігається, коли розмірність вкладення на три чи більше цілих числа вища фрактальної розмірності. Фрактал, що вкладений в більш вищу розмірність, зберігає свою істинну розмірність по причинам кореляції між точками. Таким чином, кореляційна розмірність Грассберга і Прокаччі є доброю оцінкою для фрактальної розмірності. Ці дві розмірності, як показали ці два автори, прямо співвідносяться друг з другом.

2.7. Алгоритм Хігучі.

Опишемо алгоритм Хігучі для знаходження фрактальної розмірності часового ряду $X(1), X(2), X(3), \ldots, X(N)$.

Покладемо: X_k^m

$$X(m),\ X(m+k),\ X(m+2k), \ldots,\ X\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right] \cdot k\right) \quad (m = 1, 2, \ldots, k)$$

Тоді, наприклад для $k = 3, N = 100$

X_3^1; $X(1), X(4), X(7), \ldots, X(97), X(100)$,

X_3^2; $X(2), X(5), X(8), \ldots, X(98)$,

X_3^3; $X(3), X(6), X(9), \ldots, X(99)$.

Покладемо $L_m(k)$:

$$L_m(k) = \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k^2} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |X_N(m+ik) - X_N(m+(i-1)k)|.$$

Покладемо $L(k)$:

$$L(k) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} L_m(k)$$

Алгоритм Хігучі:

1. Покласти довільне k_{max}, де $k_{max} \geq 2, k_{max} \leq N$
2. Обчислити для кожного $k \in \{1, \ldots, k_{\max}\}$ [illegible]ня $L(k)$.
3. Для кожного значення $L(k)$ обчислити пару $\left\{\left(\log \frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$
4. Побудувати для множини пар, зазначених у пункті 3, лінійну регресійну модель $y = ax + b$.
5. Тоді число $a -$ обчислена фрактальна розмірність.

2.8. R/S-аналіз Херста.

R/S-аналіз — це сукупність статистичних прийомів та методів аналізу часових рядів (здебільшого фінансових), що дозволяють визначити деякі важливі їх характеристики, такі як наявність неперіодичних циклів, пам’яті та інших.

Історія створення методології R/S – аналізу бере початок з середини XX-го століття, коли гідролог Херст, пробивши майже 40 років над проектом Нільської греблі, завершував обробку часових рядів об'ємів стоку річок. Коли Херст вирішив перевірити припущення про те, що ці ряди підкоряються нормальному закону, він в результаті винайшов нову статистику - показник Херста (H). Як виявилось, цей показник має широке застосування в аналізі часових рядів завдяки своїй чудовій стійкості. Він містить мінімальні припущення про систему, що вивчається, і може класифікувати часові ряди. Він може відрізнити випадковий ряд від невипадкового, навіть якщо випадковий ряд не гаусівський (тобто не нормально розподілений). Херст виявив, що більшість природних систем не характеризуються випадковим блуканням - гаусівським, тобто поведінка часових рядів показників цих систем не підкоряється нормальному закону. Цей факт означає непридатність інструментарію економетрики для статистичного аналізу природних часових рядів. Херст вимірював коливання води в резервуарі відносно середнього з плином часу і ввів безрозмірне відношення за допомогою ділення розмаху R на стандартне відхилення спостережень S. Цей спосіб аналізу почав називатися методом нормованого розмаху (R/S-аналізу). Херст показав, що більшість природних явищ, включаючи річкові стоки, температуру, осідання, сонячні плями характеризуються "зміщеним випадковим блуканням"– трендом із збуренням. Сила тренду та рівень збурення можуть бути оціненими тим, як змінюється нормований розмах з часом, або, іншими словами, на скільки величина H перевершує 0,5. Приведемо опис алгоритму R/S – аналізу в тому вигляді, як ми будемо його реалізовувати.

Нехай дано часовий ряд $X(t)$.

Середнє значення $X(t)$ за період часу τ $\overline{X_t} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t)dt$. $V(t)$ - накопичене відхилення величини $X(t)$ від середнього $V(t,\tau) = \int_0^\tau (X(t')\overline{X_t})dt'$.

"Розмах" часового ряду (на даному проміжку часу τ): $R(t) = V_{\max}(t,\tau) - V_{\min}(t,\tau)$.

Стандартне відхилення ряду на тому ж інтервалі: $S = [\int_0^\tau (X(t') - \overline{X_t})^2 dt']^{\frac{1}{2}}$

Тоді, як відомо, виконується співвідношення $Log(R/S) = H * \log(\varsigma/2) + b$, або $Log(R/S) = H * \log(\varsigma) + b$, де H – показник Херста;

Ми будемо лінійною регресією за МНК оцінювати значення параметрів рівняння. Кутовим коефіцієнтом рівняння і буде показник Херста.

Є три різних класифікації для показника Херста:

1) H = 0.5. Указує на випадковий ряд. Події випадкові й некорреліровані. Сьогодення не впливає на майбутнє. Функція щільності ймовірності може бути нормальною кривою, однак це не обов'язкова умова. R/S-аналіз може класифікувати довільний ряд, безвідносно до того, який вид розподілу йому відповідає.

2) 0 ≤ H< 0.5. Даний діапазон відповідає антиперсистентним, або ергодичним рядам. Такий тип системи часто називають – «поверненням до середнього». Якщо система демонструє «ріст» у попередній період, то, швидше за все, у наступному періоді почнеться спад. І навпаки, якщо йшло зниження, то ймовірний близький підйом. Стійкість такого антиперсистентного поводження залежить від того, наскільки H близько до нуля. Такий ряд більше мінливий, чим ряд випадковий, тому що складається із частих реверсів спад-підйом.

3) 0.5 < H < 1.0. Маємо персистентні, або трендостійкі ряди. Якщо ряд зростає (убуває) у попередній період, то імовірно, що він буде зберігати цю тенденцію якийсь час у майбутньому. Чим ближче H до 0.5, тим більше зашумлен ряд і тим менш виражений його тренд. Персистентий ряд – це узагальнення броуновского руху, або зміщені випадкові блукання. Сила цього зсуву залежить від того, наскільки H більше 0.5.

Існує ще й четверта характеристика показника Херста, коли H>1. У цьому випадку говорять про статистику Леві й про процес (або тимчасовий ряд) із фрактальним часом, про тимчасові крапки розриву похідній. Це означає, що відбуваються незалежні перегони амплітуди, розподілені по Леви за час, певний величиною стрибка, і зростаючи разом з ним. Дисперсія збільшення за даний інтервал часу стає кінцевою, траєкторія у фазовому просторі зберігає свій вид, але з'являється новий фрактальний об'єкт - тимчасові крапки розриву похідній.

2.9. Приклад виконання практичної роботи

1. Взяти зразки кардіограм для хворих та здорових людей.

Зразки кардіограми було взято з бази даних зразків для статистичних досліджень та машинного навчання Mendeley Data.

Посилання на джерело: https://data.mendeley.com/datasets/7dybx7wyfn/3

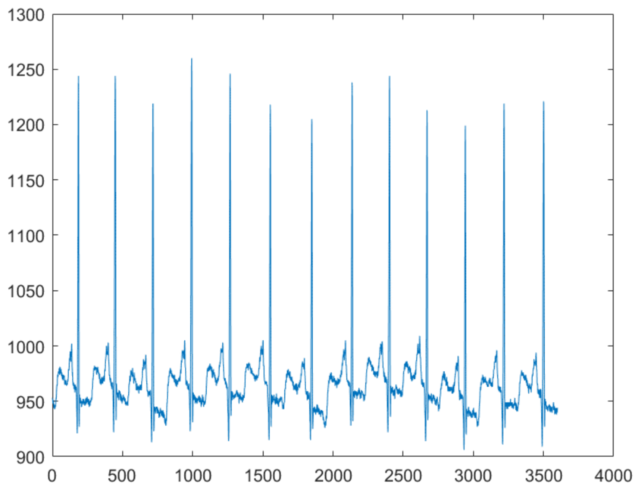
2. Написати програму, яка знаходить фрактальну розмірність часового ряду за допомогою алгоритму Хігучі.

Програму було написано з використанням пакету MATLAB, інформація про алгоритм Хігучі було взято з оригінальної статті 1988-го року.

1.3. Знайти фрактальну розмірність кардіограми. Порівняти отримані результати з теоретичними.

Візьмемо для аналізу дані електрокардіограм хворих на серце людей з відкритих джерел.

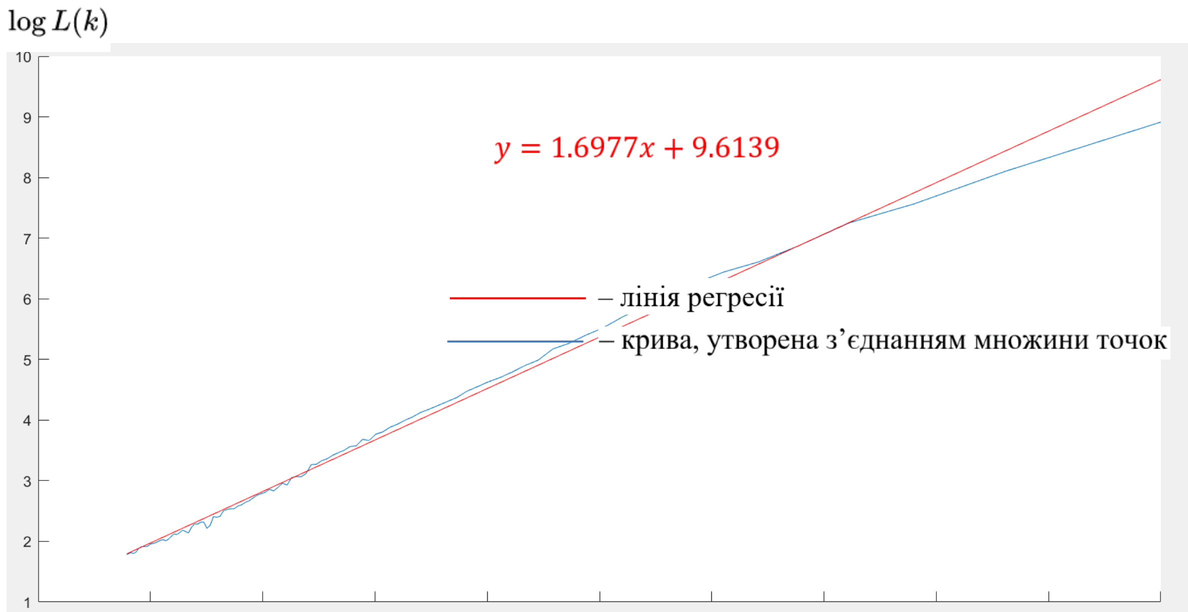
Приклад № 1: Кардіограма здорової людини (100m (0).mat)



По осі X – кількість точок. Будуємо послідовність точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

Зобразимо дані точки на графіку та побудуємо для нього лінійну регресійну модель.

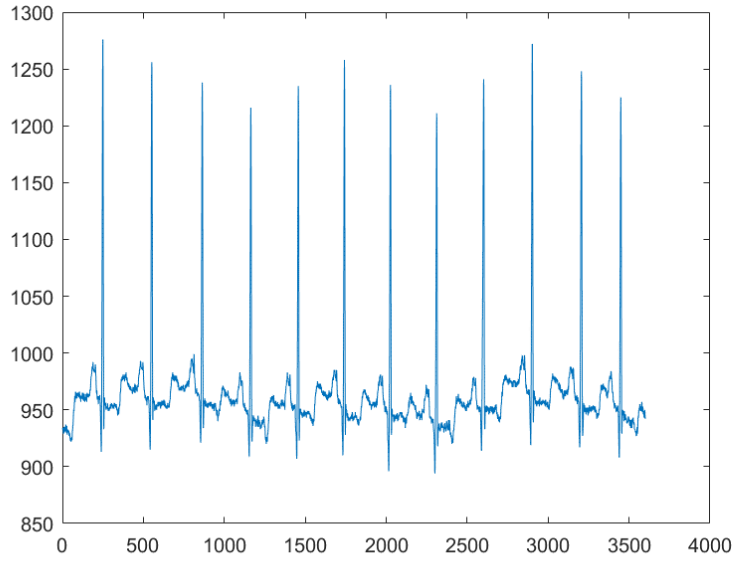
Модель дає пряму: $y = 1.6977x + 9.6139$



$\log \frac{1}{k}$

Фрактальна розмірність дає значення: 1.6977

Приклад № 2: Кардіограма людини, хворої на передчасне скорочення передсердь (APB 100m (2).mat)

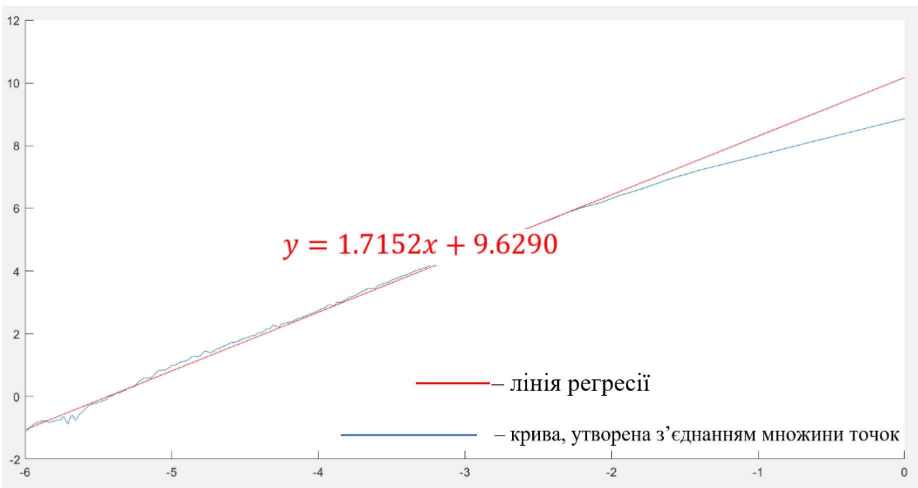


Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.

Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{ \left(\log \frac{1}{k}, \log L(k) \right) \right\}$

Модель дає пряму: $y = 1.7152x + 9.6290$

$\log L(k)$

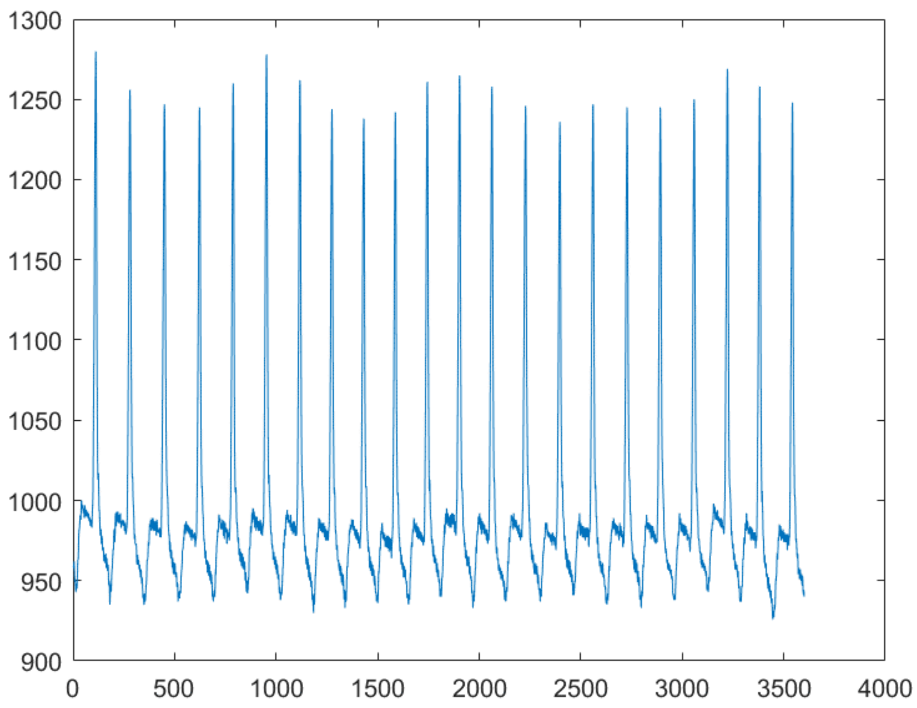


$\log \frac{1}{k}$

Фрактальна розмірність дає значення: 1.7152

Приклад № 3: Кардіограма людини, порушення – тріпотіння передсердь (AFL 100m (3).mat)

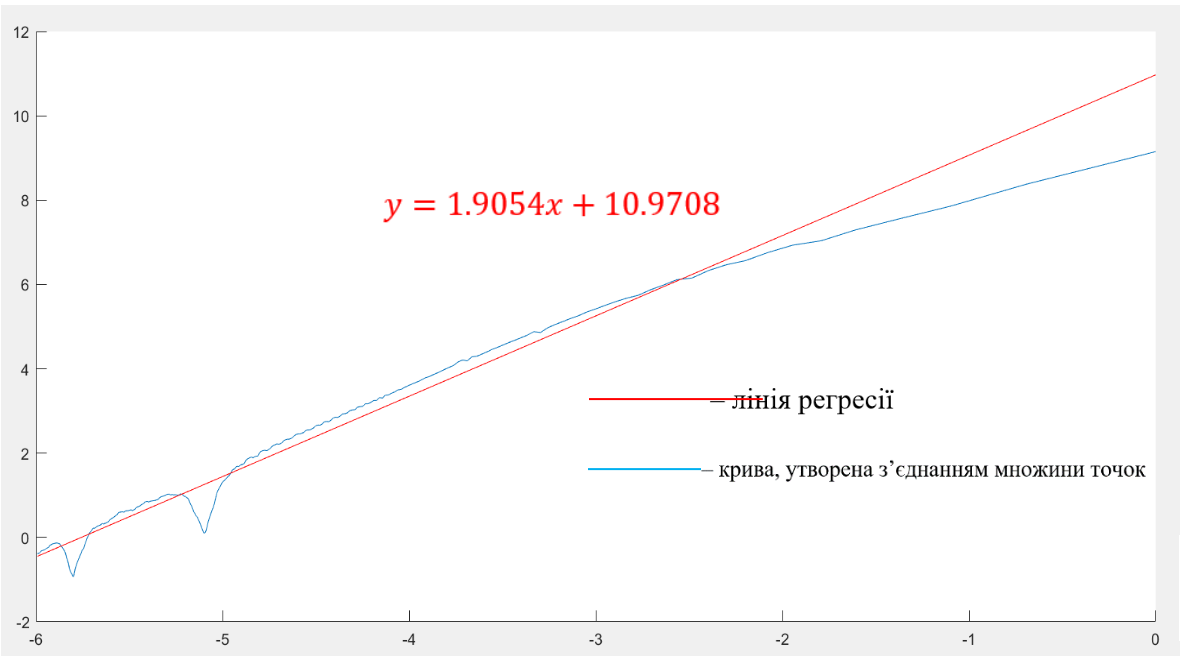
Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

Модель дає пряму: $y = 1.9054x + 10.9708$

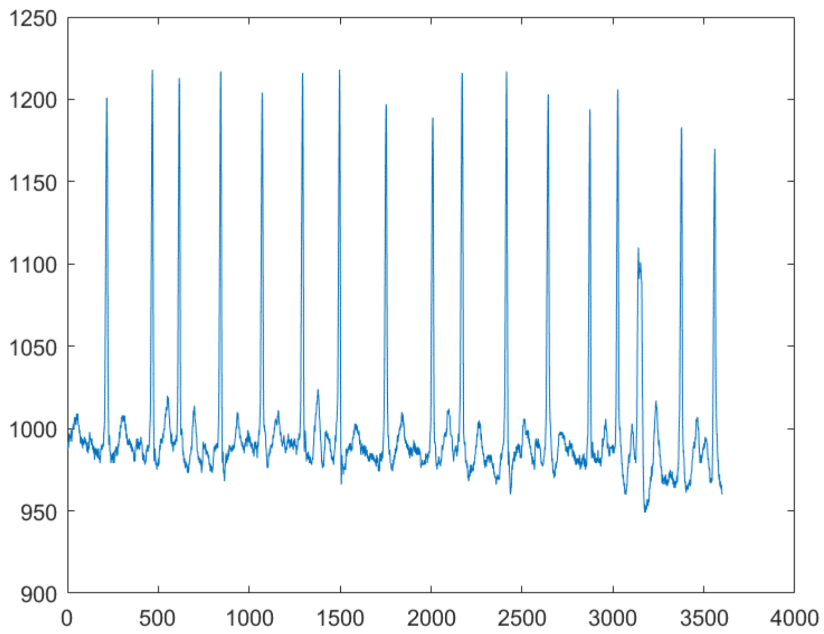
$\log L(k)$



$\log\frac{1}{k}$

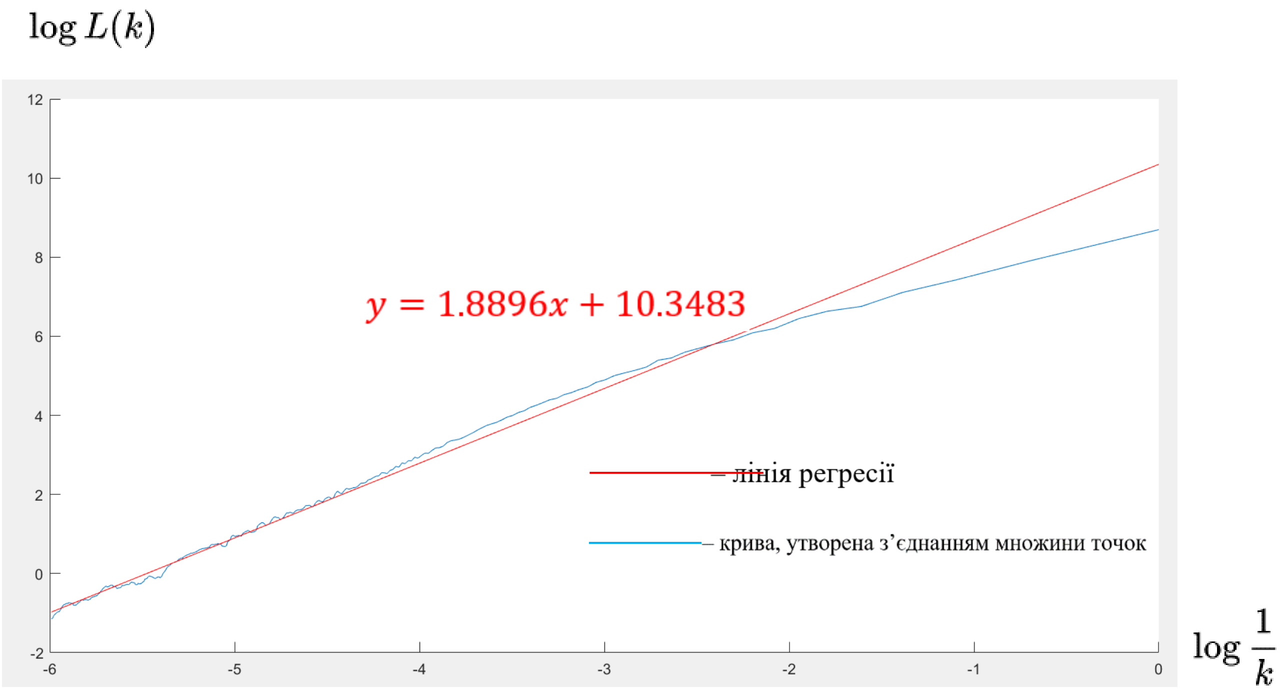
Фрактальна розмірність – 1.9054

Приклад № 4: Електрокардіограма, порушення – миготлива аритмія (AFIB 201m (4).mat)
Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

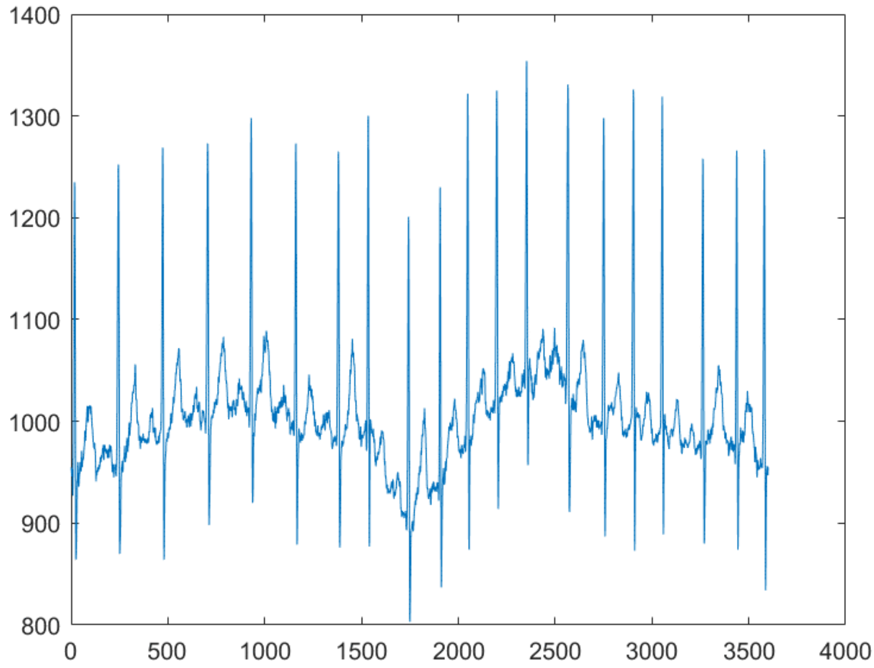
Модель дає пряму: $y = 1.8896x + 10.3483$



Фрактальна розмірність – 1.8896

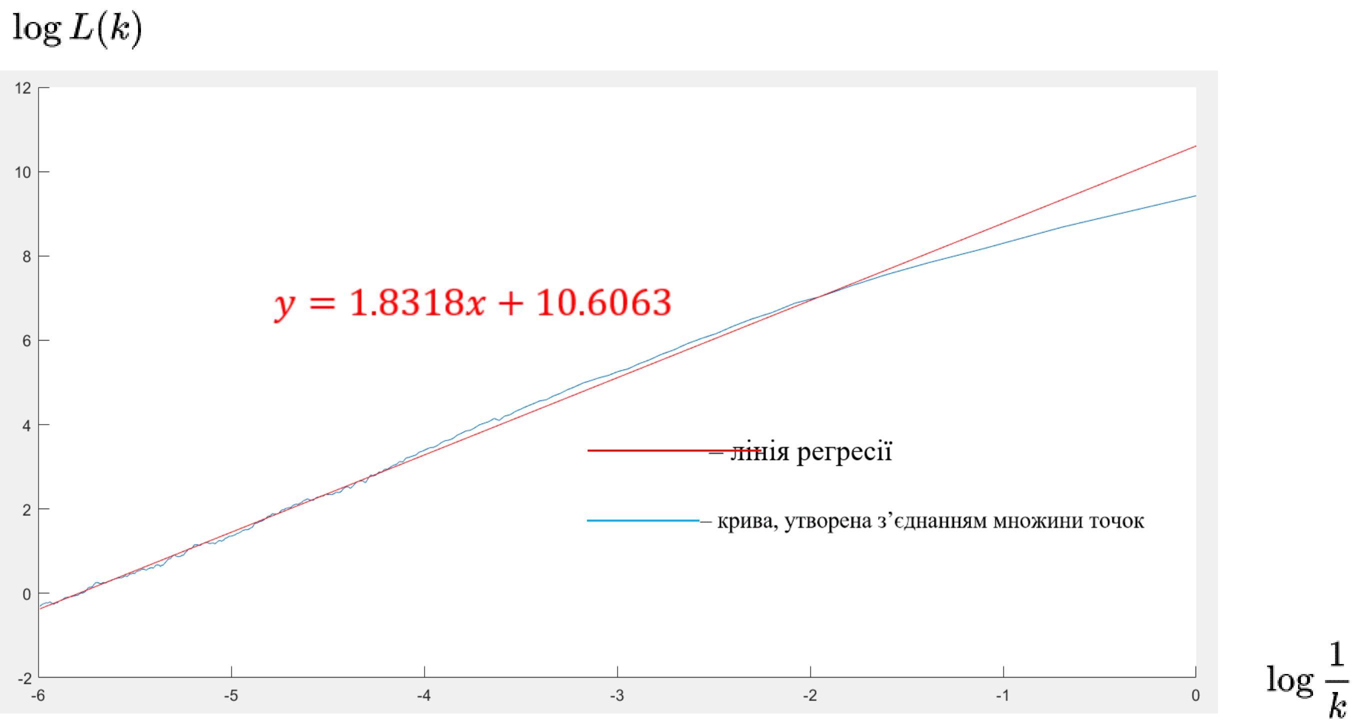
Приклад № 5: Електрокардіограма, порушення – надшлуночкова тахікардія (SVTA 209m (5))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

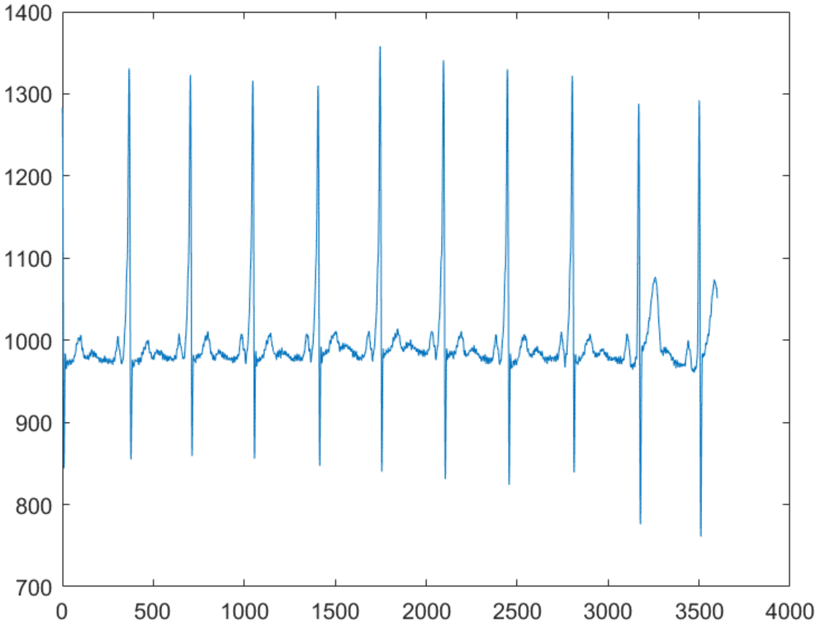
Модель дає пряму: $y = 1.8318x + 10.6063$



Фрактальна розмірність – 1.8318

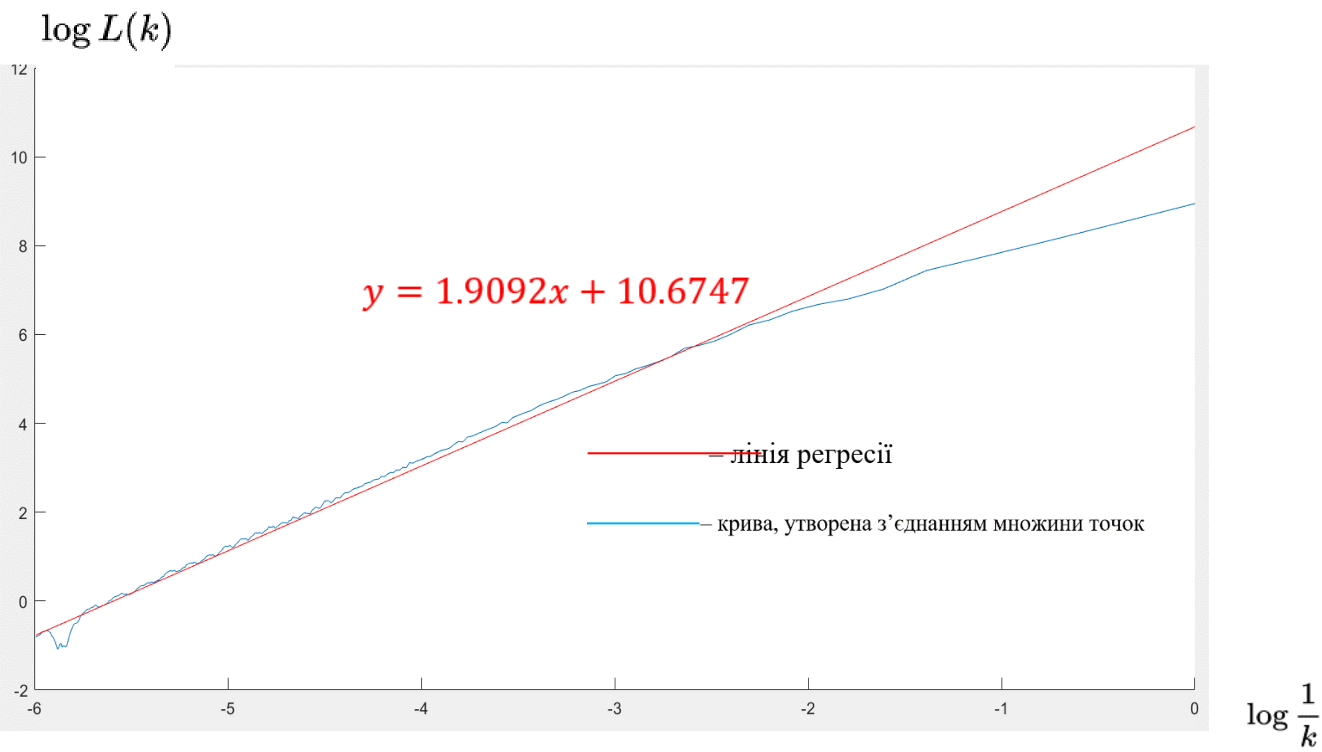
Приклад № 6: Електрокардіограма, порушення – синдром Вольфа-Паркінсона-Уайта (WPW 209m (5))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{ \left(\log\frac{1}{k}, \log L(k) \right) \right\}$

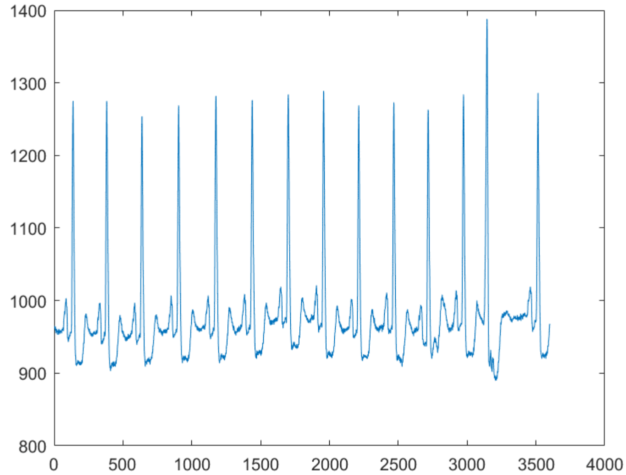
Модель дає пряму: $y = 1.9092x + 10.6747$



Фрактальна розмірність – 1.9092

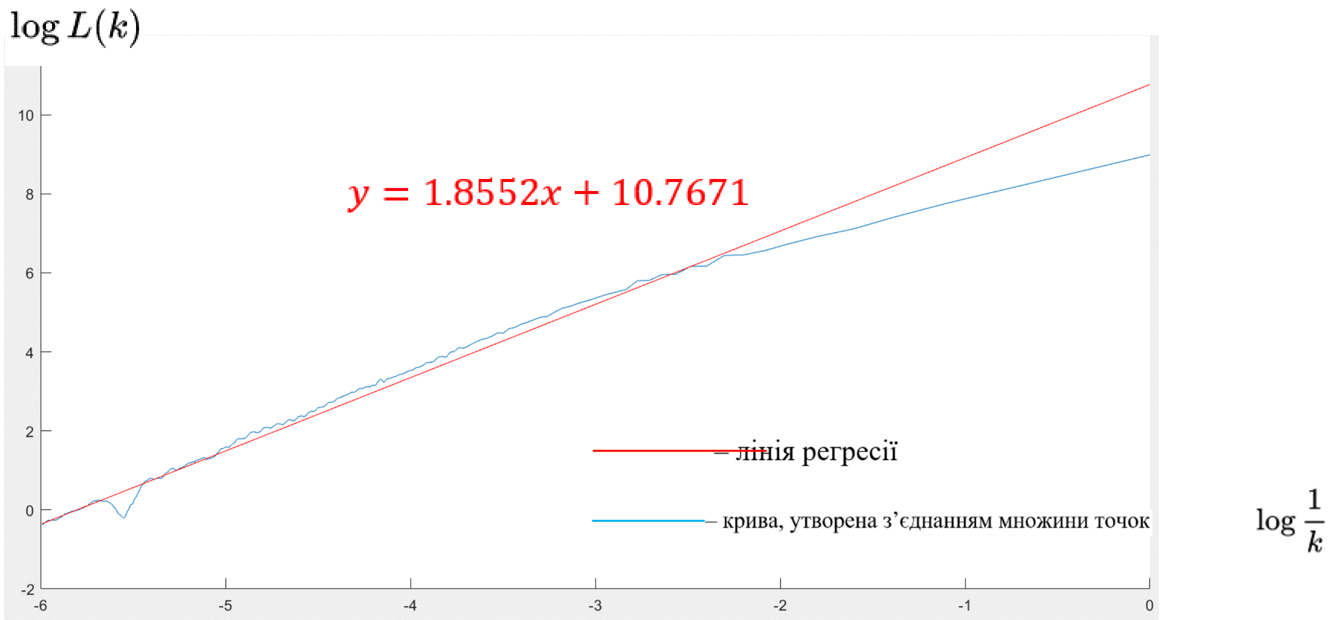
Приклад № 7: Електрокардіограма, порушення – передчасні скорочення шлуночків (PVC 105m (10))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



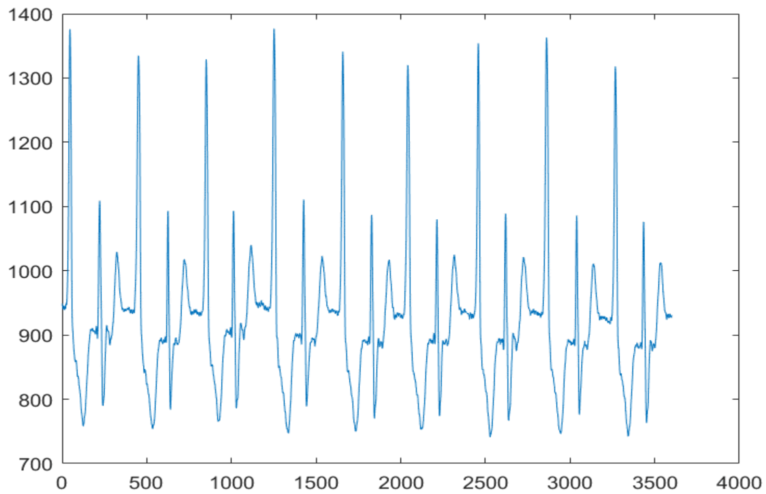
Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

Модель дає пряму: $y = 1.8552x + 10.7671$



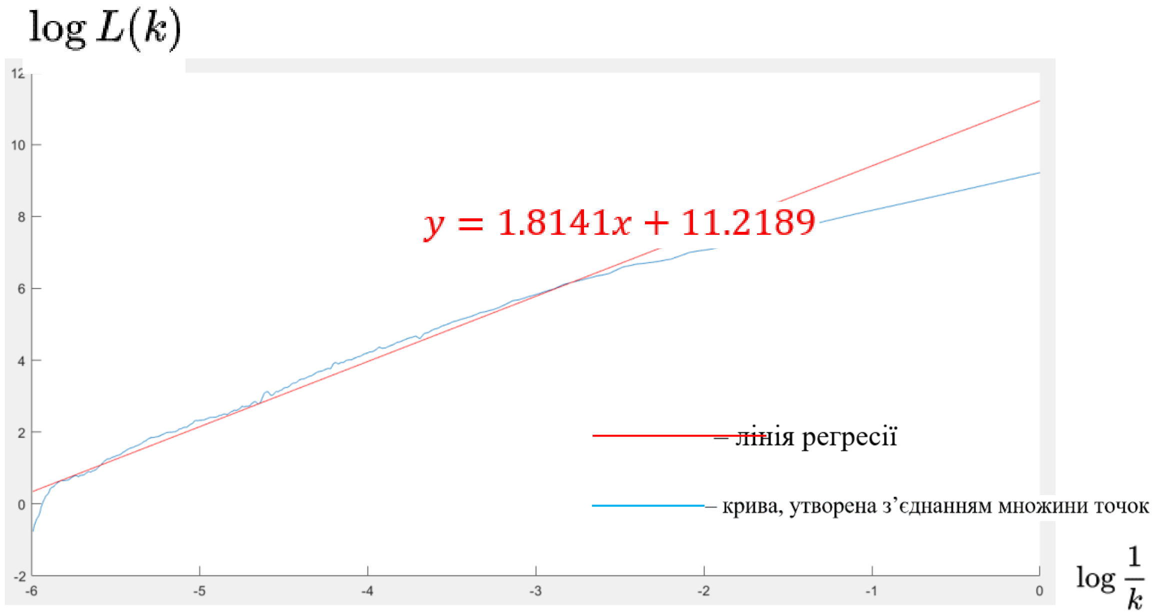
Приклад № 8: Електрокардіограма, порушення – аномальний пульс (VT 223m (6))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

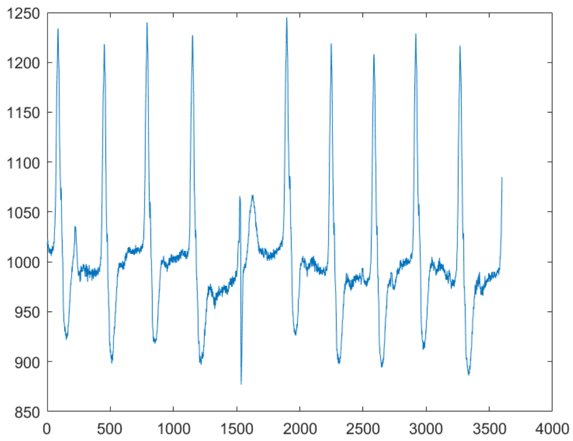
Модель дає пряму: $y = 1.8141x + 11.2189$



Фрактальна розмірність – 1.8141.

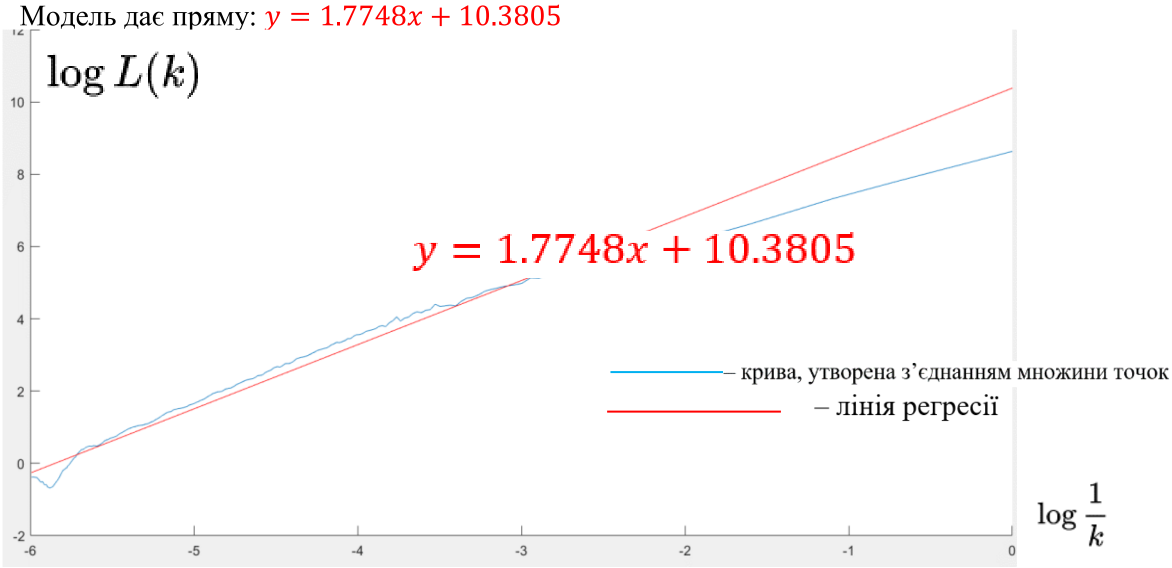
Приклад № 9: Електрокардіограма, порушення – аномальний пульс (VT 207m (9))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

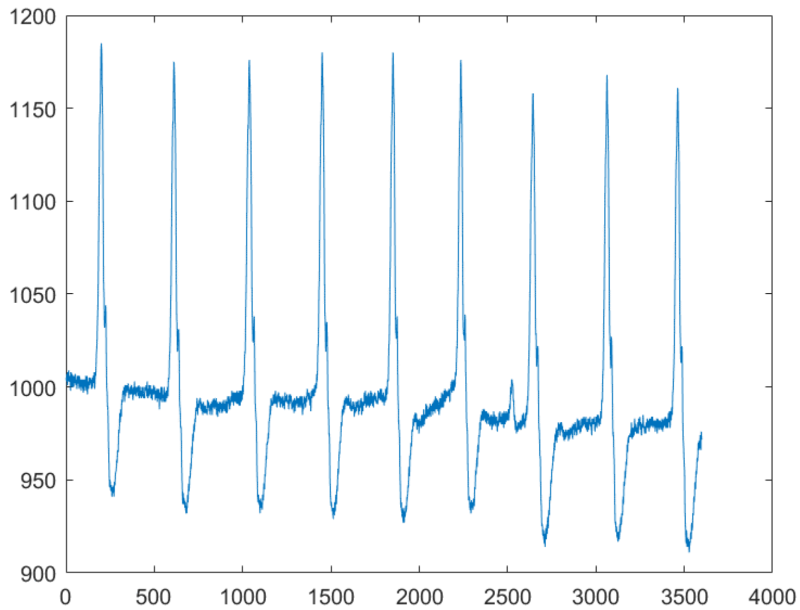
Модель дає пряму: $y = 1.7748x + 10.3805$



Фрактальна розмірність – 1.7748

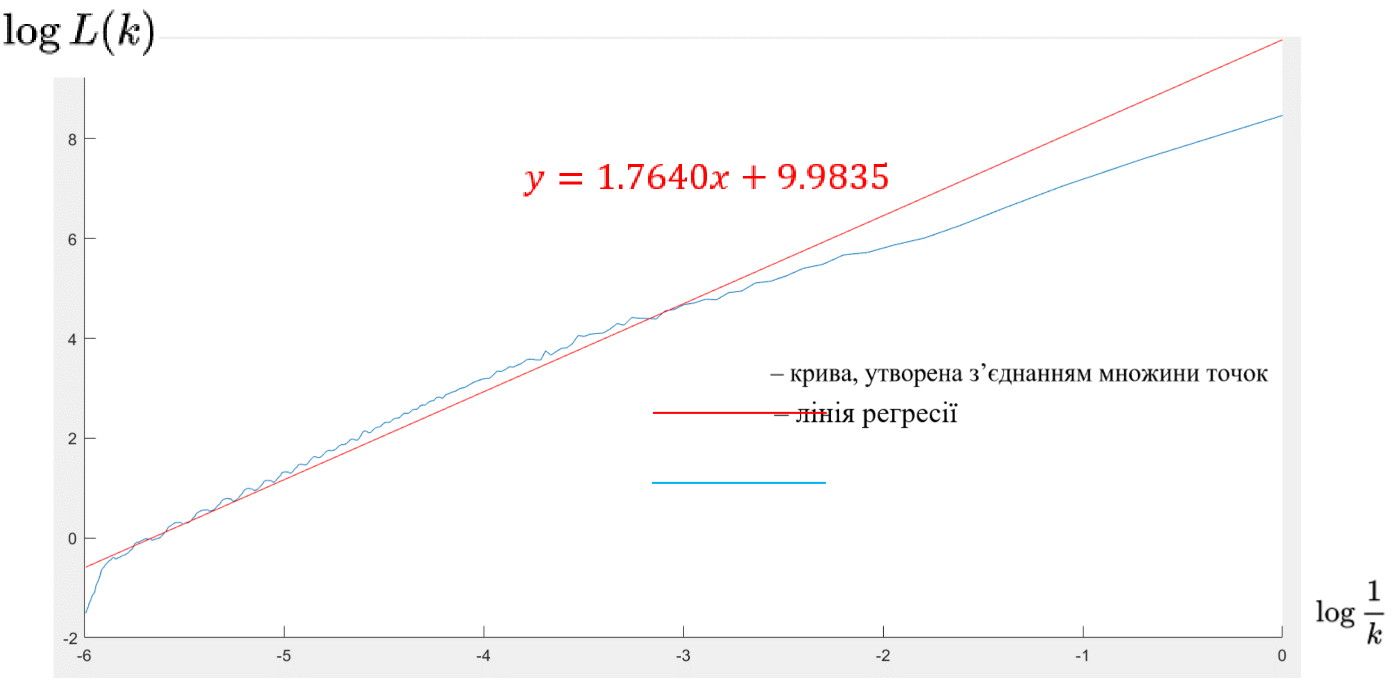
Приклад № 10: Електрокардіограма, порушення – ідіовентрикулярний ритм (IVR 207m (2))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



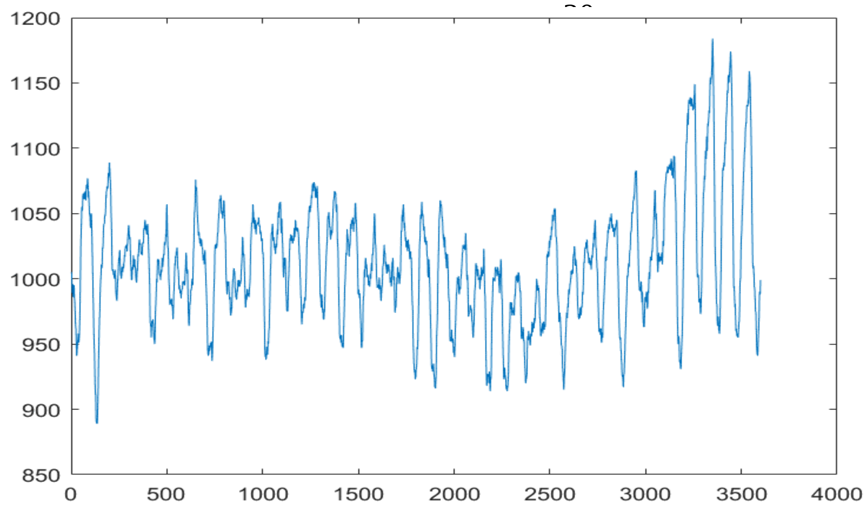
Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

Модель дає пряму: $y = 1.7640x + 9.9835$



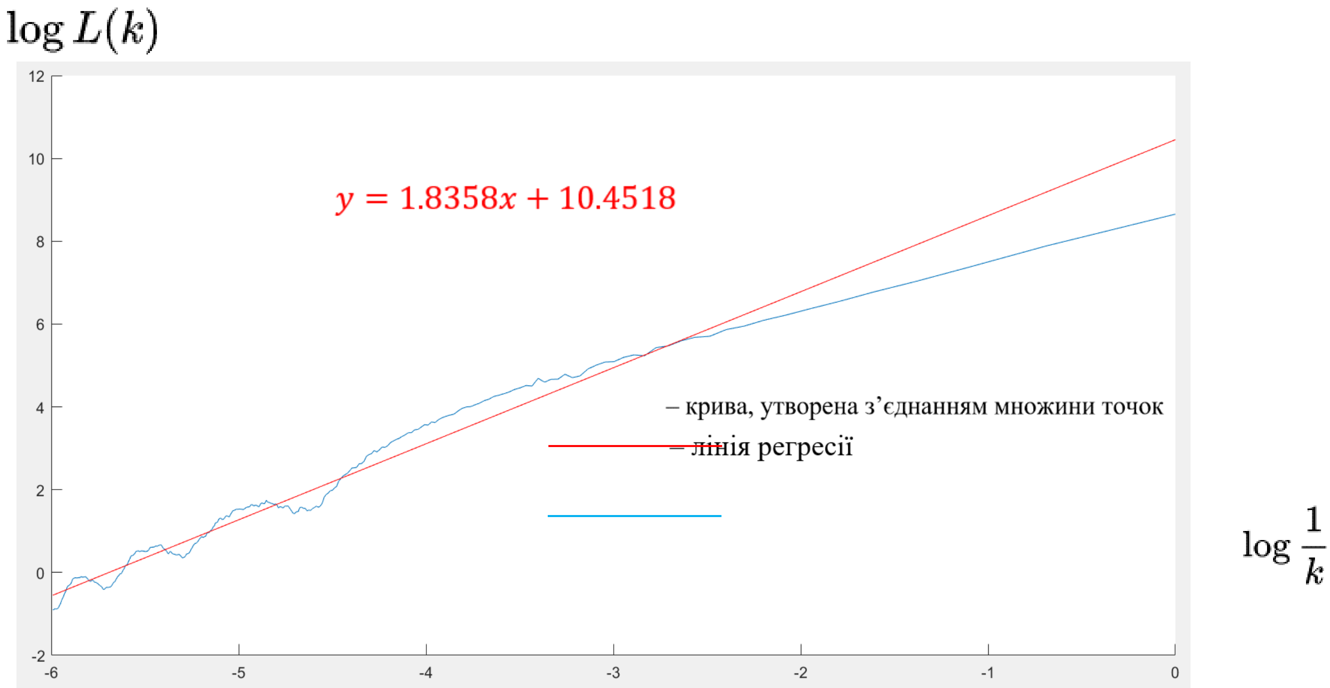
Приклад № 11: Електрокардіограма, порушення – тріпотіння шлуночків (VFL 207m (8))

Електрокардіограма має такий вигляд. Знайдемо її фрактальну розмірність.



Будуємо лінійну регресійну модель для множини точок $\left\{\left(\log\frac{1}{k}, \log L(k)\right)\right\}$

Модель дає пряму: $y = 1.8358x + 10.4518$



Фрактальна розмірність дає значення: 1.8358

Занесемо результати в таблицю.

Електрокардіограма	Фрактальна розмірність
Здорова людина	1.6977
Передчасне скорочення передсердь (APB)	1.7152
Тріпотіння передсердь (AFL)	1.9054
Миготлива аритмія (AFIB)	1.8896
Надшлуночкова тахікардія (SVTA)	1.8318
Синдром Вольфа-Паркінсона-Уайта (WPW)	1.9092
Передчасні скорочення шлуночків (PVC)	1.8552
Аномальний пульс, приклад № 1 (VT)	1.8141
Аномальний пульс, приклад № 2 (VT)	1.7748
Ідіовентрикулярний ритм (IVR)	1.7640
Тріпотіння шлуночків (VFL)	1.8358

Висновок. В ході виконання лабораторної роботи було опрацьовано теоретичний матеріал про фрактальні множини, їх властивості. Зокрема, було опрацьовано статтю Хігучі 1988 р, де було описано та теоретично обґрунтовано алгоритм знаходження фрактальної розмірності. Цей алгоритм було реалізовано в пакеті MATLAB. За допомогою написаної програми було знайдено фрактальну розмірність зразків кардіограм здорових людей та тих, чия робота серця має відхилення від норми.

Можна бачити, що для здорової людини показник фрактальної розмірності ЕКГ менше, ніж показник фрактальної розмірності ЕКГ людей, які мають певні захворювання. Це узгоджується з теоретичними відомостями які кажуть, що показник фрактальної розмірності ЕКГ у хворих на серце людей вище, ніж показник у здорових. Можна провести в дослідженні цієї лабораторної роботи приблизну грань, вище якої за фрактальною розмірністю людину можна вважати з хворобою серця – 1.7.

Таким чином, було виконано всі завдання практичної роботи.

Завдання на лабораторну роботу №2

Побудувати наступні фрактали та дослідити виникнення динамічного хаосу методами ДСІФ і РСІФ. Графічно представити отримані результати і порівняти оримані фрактали при однаковій кількості ітерацій. Відомо, що кожне із цих відображень стискається зі швидкістю стискання $S = 1/2$.

1) Фігура "кристал", в якому в якості початкової множини E_0 взяти вершини $(0,0),(1,0),(1/2,\sqrt{3}/2),(1/2,0),$ і яка породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$:

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.3726\\0.6714\end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1146\\0.2232\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6306\\0.2232\end{pmatrix},$$

$$T_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3700 & -0.6420\\0.6420 & 0.3700\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6356\\-0.0061\end{pmatrix}.$$

В наступних відображеннях в якості початкової множини E_0 взяти вершини вікна $[0,1]\times[0,1]$.

2) Фігура "лист", що породжується відображенням $\{T_1,T_2\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4000 & -0.3733\\0.0600 & 0.6000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.3533\\0.0000\end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.8000 & -0.1867\\0.1371 & 0.8000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.1000\\0.1000\end{pmatrix}.$$

3) Фігура "папороть", що породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7000 & 0.0000\\0.0000 & 0.7000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1496\\0.2962\end{pmatrix},T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1000 & -0.4330\\0.1732 & 0.2500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.4478\\0.0014\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1000 & 0.4330\\0.1732 & 0.2500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.4445\\0.1559\end{pmatrix},T_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0000 & 0.0000\\0.0000 & 0.3000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.4987\\0.0070\end{pmatrix}.$$

4) Фігура "кристал", що показана породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.3726\\0.6714\end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1146\\0.2232\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2550 & 0.0000\\0.0000 & 0.2550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6306\\0.2232\end{pmatrix},$$

$$T_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3700 & -0.6420\\0.6420 & 0.3700\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6356\\-0.0061\end{pmatrix}.$$

5) Фігура "Килим-1", що показана породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5000 & 0.0000\\0.0000 & -0.5000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5000\\0.5000\end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.000 & -0.5000\\-0.5000 & 0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5000\\0.5000\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5000 & 0.0000\\0.0000 & -0.5000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5000\\1.0000\end{pmatrix}.$$

5) Фігура "Килим-2", що показана породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5000 & 0.0000\\0.0000 & -0.5000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.0000\\1.0000\end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.000 & 0.5000\\0.5000 & 0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.0000\\0.0000\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5000 & 0.0000\\0.0000 & 0.5000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5000\\0.0000\end{pmatrix}.$$

6) Фігура "Дерево", що показана породжується відображенням $\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$, в якому

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1950 & -0.4880\\0.3440 & 0.4430\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.4431\\0.2452\end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4620 & 0.4140\\-0.2520 & 0.3610\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.2511\\0.5692\end{pmatrix},$$

$$T_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.0580 & -0.0700\\0.4530 & -0.1110\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5976\\0.0969\end{pmatrix},$$

$$T_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.0350 & 0.0700\\-0.4690 & 0.0220\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.4884\\0.5069\end{pmatrix},$$

$$T_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.6370 & 0.0000\\0.0000 & 0.5010\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.8562\\0.2513\end{pmatrix}$$

Практична робота №3

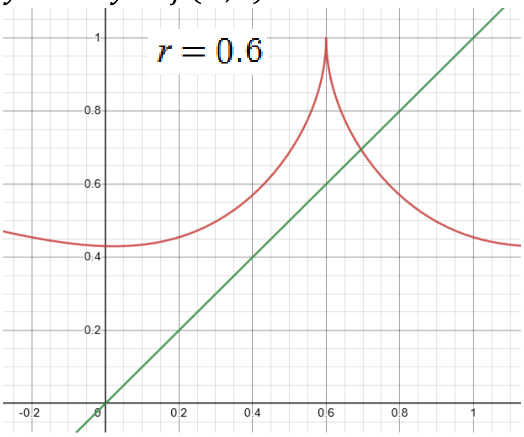
Дослідити хаотичну поведінку розв’язків різницевих рівнянь з параметрами. Універсальна поведінка для класу рівнянь

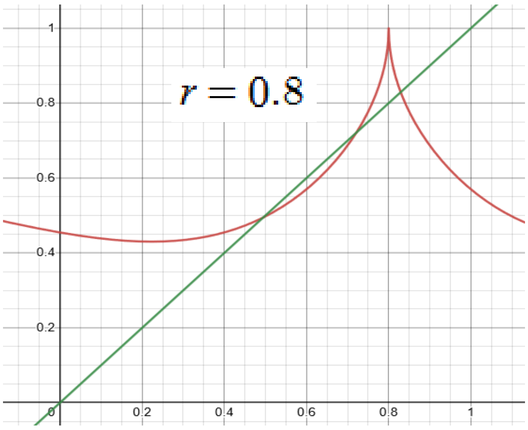
3.1. Основні відомості.

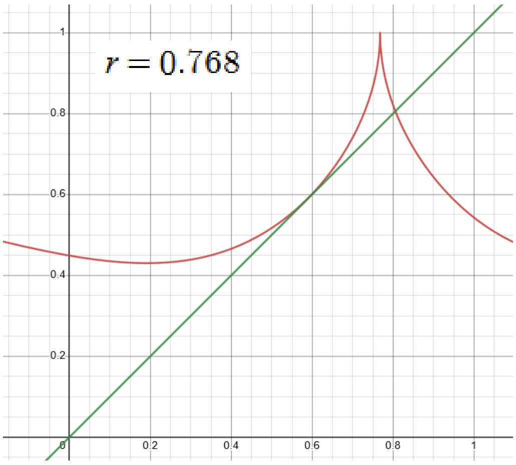
Одновимірне відображення Маннівеля-Помо має вигляд:

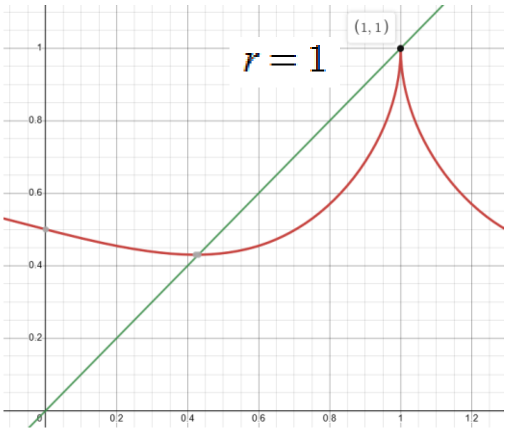
$$x_{n+1} = f(x_n, r) = 1 - \frac{\sqrt{|x_n - r|}}{1 + (x_n - r)^2}$$

Дискретні співвідношення досліджуються діаграмами Кенігса-Ламарея. Перехід від x_n до x_{n+1} можна представити переходом пошуком перетину прямої $y = f(x_n, r)$ з прямою $y = x$, з подальшим опущенням вертикальної прямої. Тому критичним є дослідження точок перетину $y = x$ з $y = f(x, r)$.







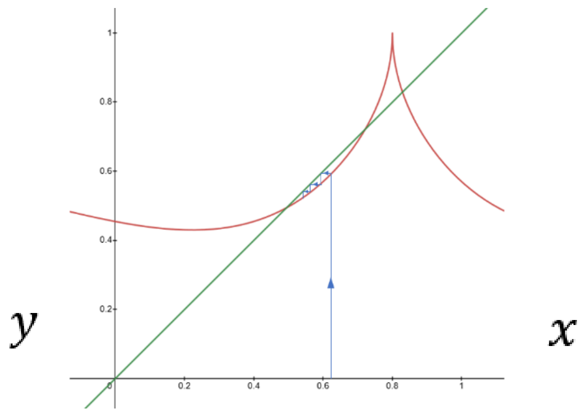


Таким чином, може бути 1, 2 або 3 стаціонарні точки залежно від r.

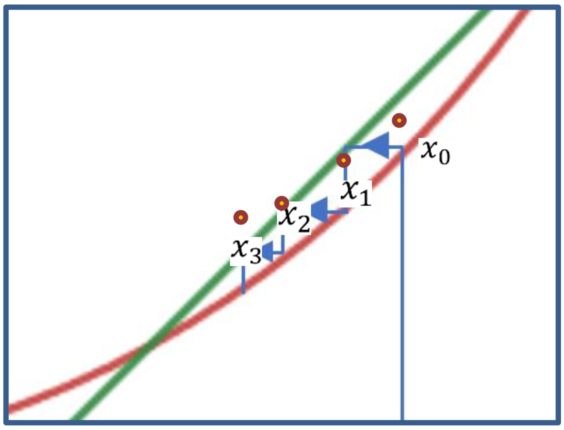
Графічний процес пошуку послідовності x_n послідовності $x_{n+1} = f(x_n)$

1. Покласти $x_n = x_0$
2. Провести вертикальну пряму $y = x_n$. Знайти перетин з кривою $y = f(x)$
3. З точки перетину $(t, f(t))$ провести горизонтальну пряму $y = f(t)$ до перетину з прямою $y = x$. Точка перетину буде $(f(t), f(t))$
4. З точки $f(t)$ провести вертикальну пряму $x = f(t)$. Знайти точку перетину з кривою $y = f(x)$

5. Покласти координату y знайденої точки перетину за x_{n+1}. Перейти до кроку № 2



На рисунку вище представлена схема пошуку значення x_{n+1} з відомої x_n. Можна бачити збільшений рисунок, де видно процес пошуку $x_0, x_1, x_2 \ldots$



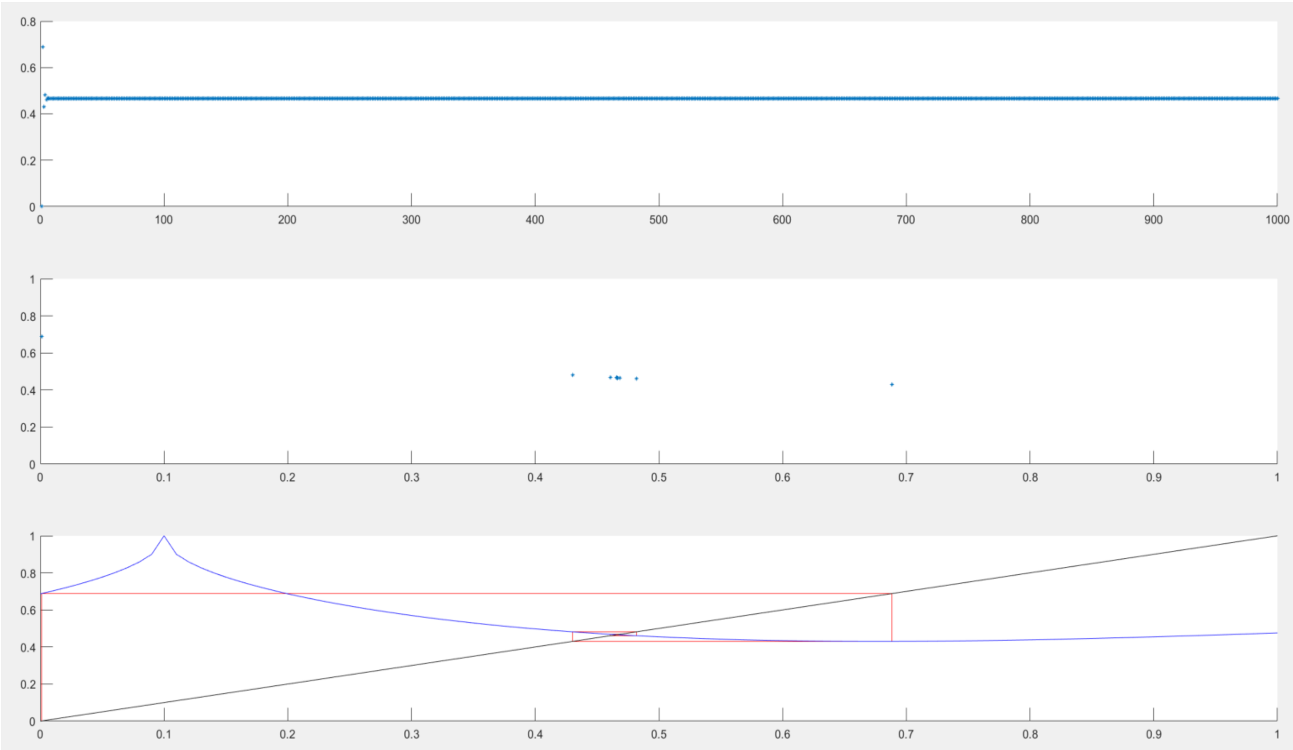
Збільшений рисунок, де показано процес побудови послідовності графічно

3.2. Приклад виконання практичної.

1. В пакеті MATLAB написати програму, яка будує діаграму Кенігса-Ламарея ітераційної послідовності $x_{n+1} = f(x_n)$, де $f(x)$ – співвідношення Маннівелля-Помо для вказного параметра r.

В пакеті MATLAB за допомогою вбудованих функцій subplot, plot було розроблено програму, яка створює вікно з діаграмою Кенігса-Ламарея для співвідношення Маннівелля-Помо для вказаного параметра r.

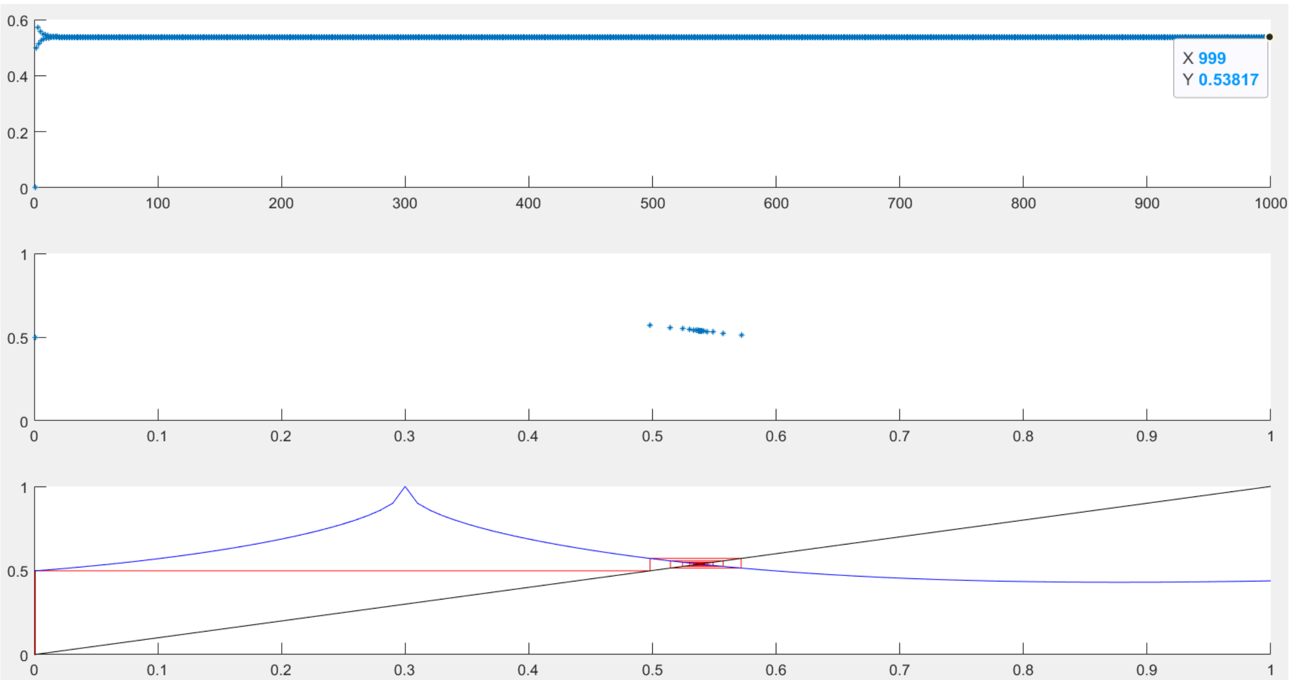
2. Зобразити для $r = 0.1$ та $r = 0.3$ діаграму Кенігса-Ламарея.



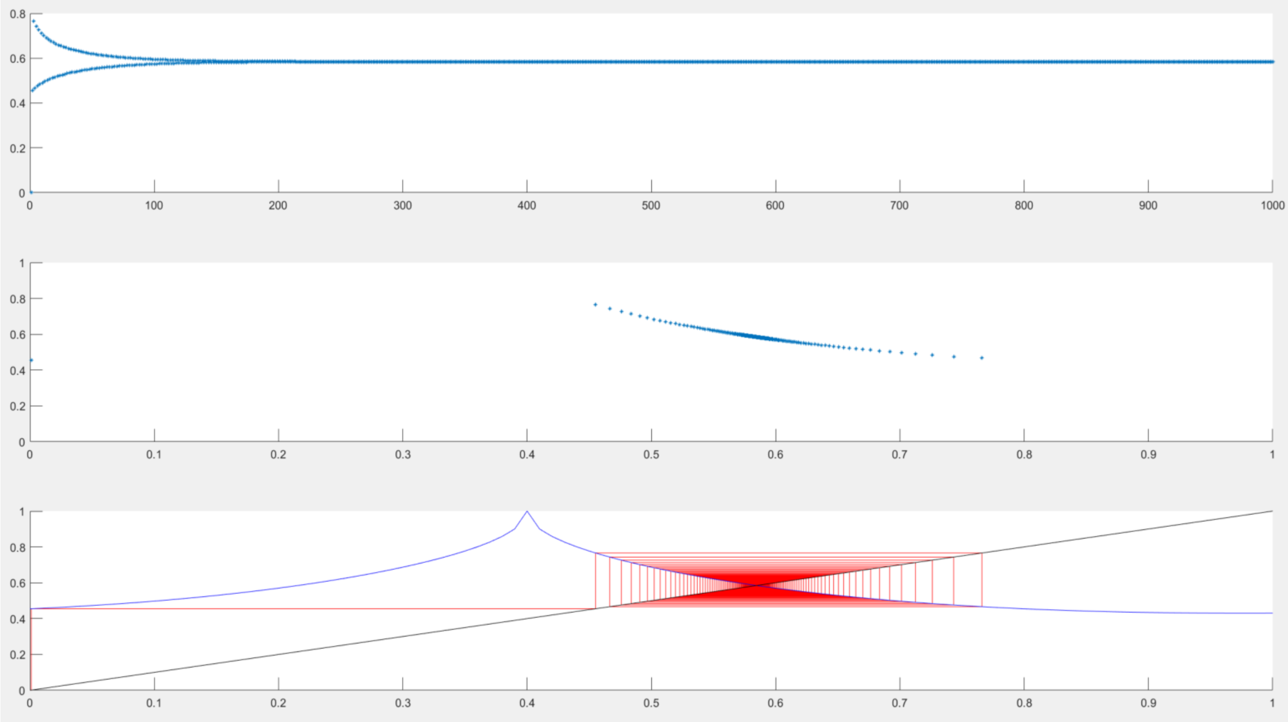
Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.1$

Можна бачити, що послідовність послідовність $x(n)$ виходить на атрактор, причому дуже швидко. Значення, до якого прямує послідовність $x(n)$ дорівнює приблизно 0.466. Для фазового портрету (x_n, x_{n+1}) також елементи групуються біля деякої точки.

Беремо параметр $r = 0.3$ та $r = 0.4$. Видно, що кількість точок стає більшою, але атрактор поки зберігається.



Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.3$

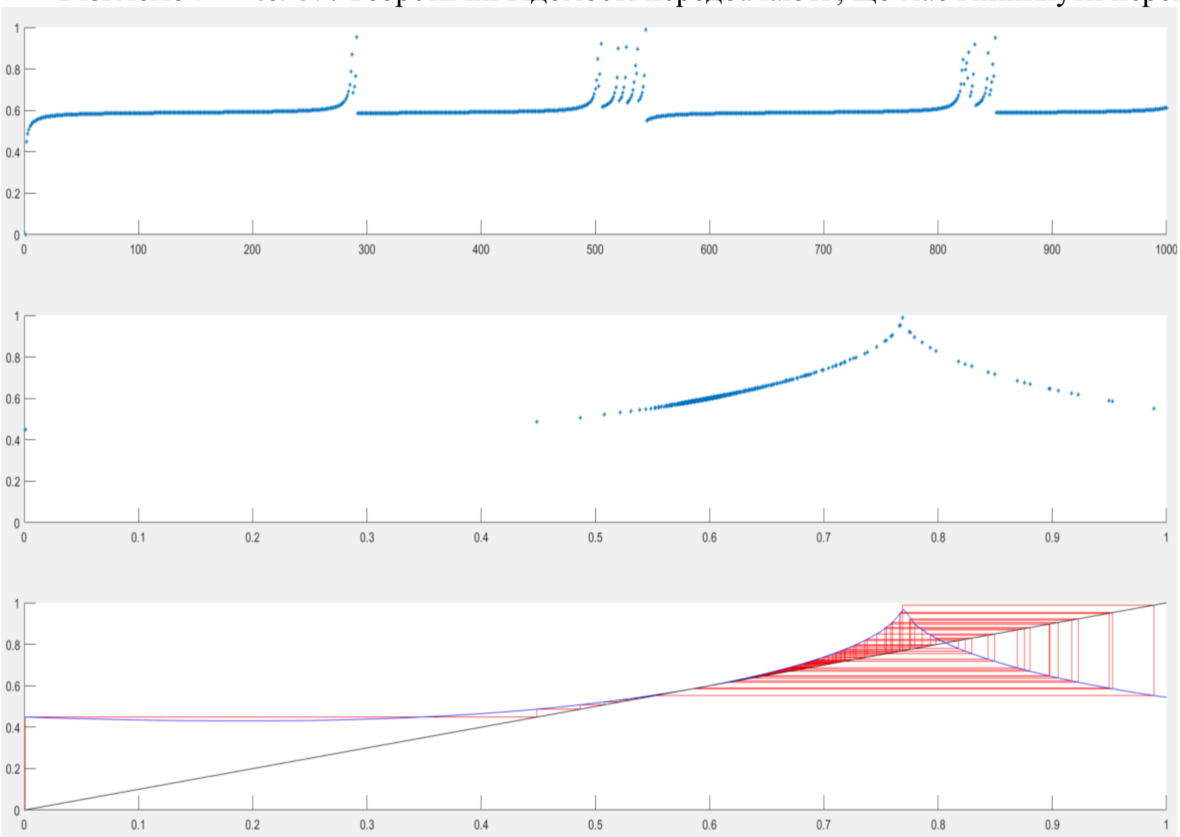


Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.4$

Видно, що кількість точок стає більшою, але атрактор поки зберіг

3. Зобразити для $r = 0.769$ діаграму Кенігса-Ламарея. Зробити висновок про поведінку послідовності.

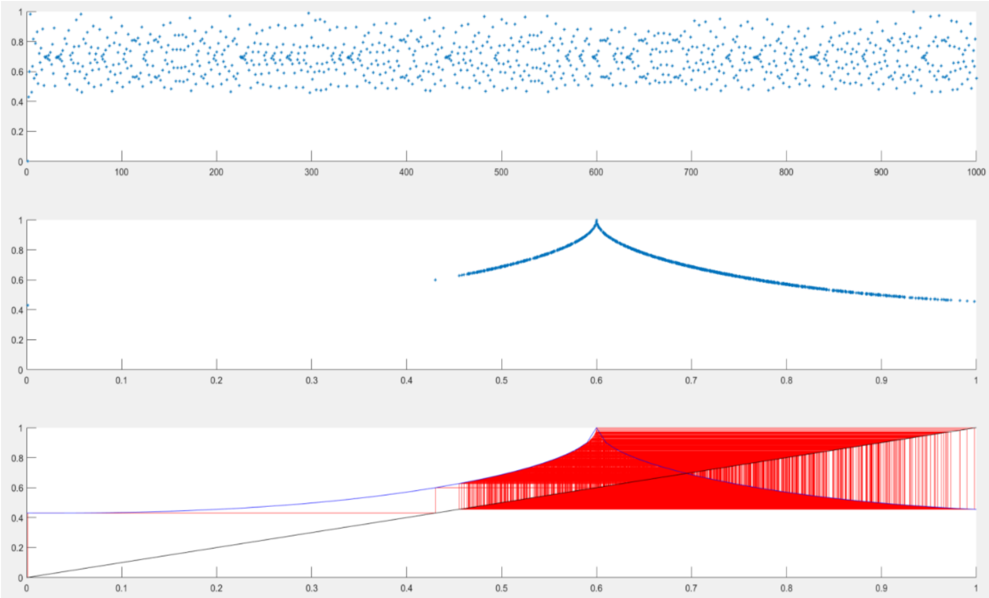
Візьмемо $r = 0.769$. Теоретичні відомості передбачають, що має виникнути перемежованість.



Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.769$

Точки, зображені на фазовій траєкторії (n, x_n) проходять через «ламінарну стадію руху». Після проходження цієї області система рухається хаотично до тих пір, поки знову потрапить в коридор. Явище, при яких довгі області ламінарної стадії перериваються недовгим періодом хаотичної поведінки називається перемежованість.

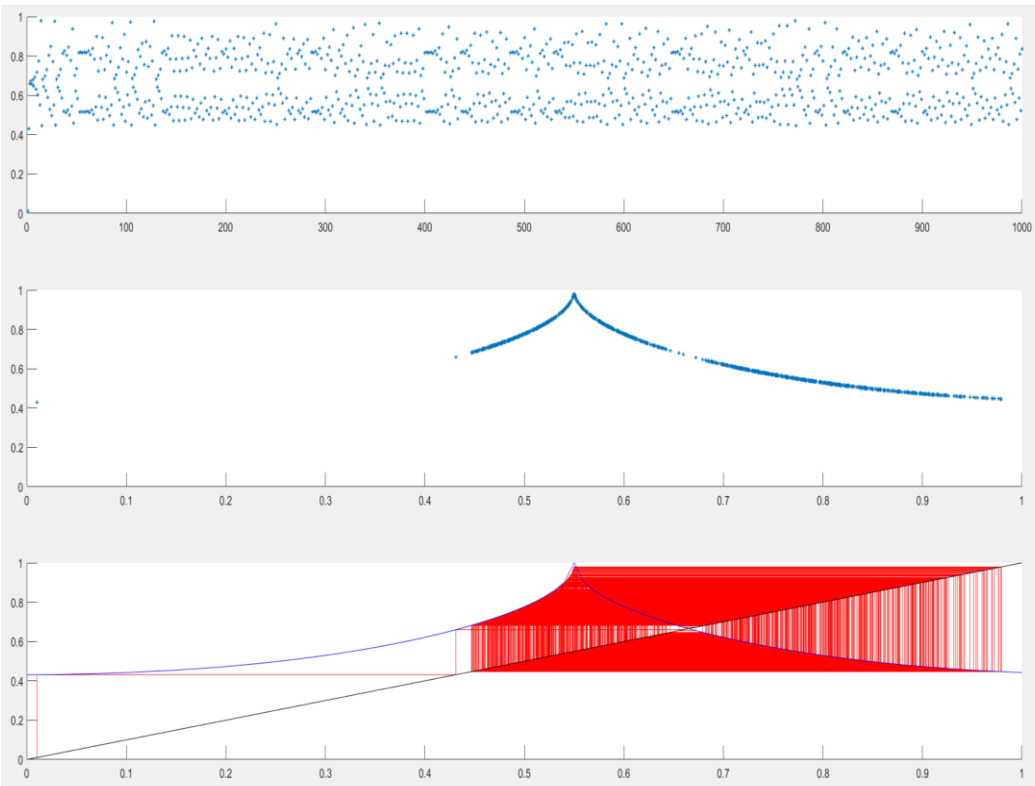
4. Зобразити для $r = 0.6$ та $r = 0.55$ діаграму Кенігса-Ламарея. Зробити висновок про різницю між поведінкою послідовності для $r = 0.769$ та параметрів $r = 0.55$.
Продемонструємо поведінку системи при $r = 0.6$.



На рисунку вище представлена діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.6$.

Бачимо, що ламінарного потоку майже немає, натомість, система поводить себе хаотично. Пряма $y = f(x)$ перетинається з прямою $y = x$ в одній єдиній точці. На графіку (x_n, x_{n+1}) точки чітко формують область графіка відображення $y = f(x_n)$, зокрема, «шпіль».

Зобразимо випадок параметра $r = 0.55$.



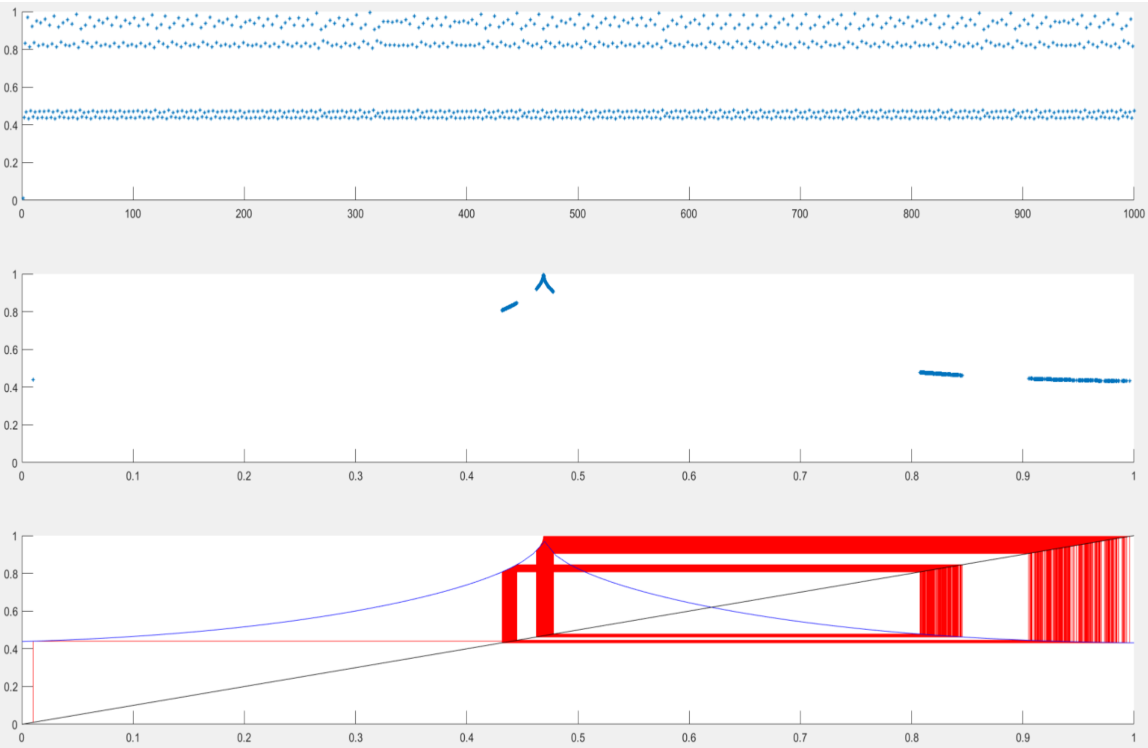
На рисунку вище представлена діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.55$.

Зробимо висновок про схожості та відмінності між динамікою послідовностей для параметрів $r = 0.55$ та динамікою послідовності для параметра $r = 0.769$.

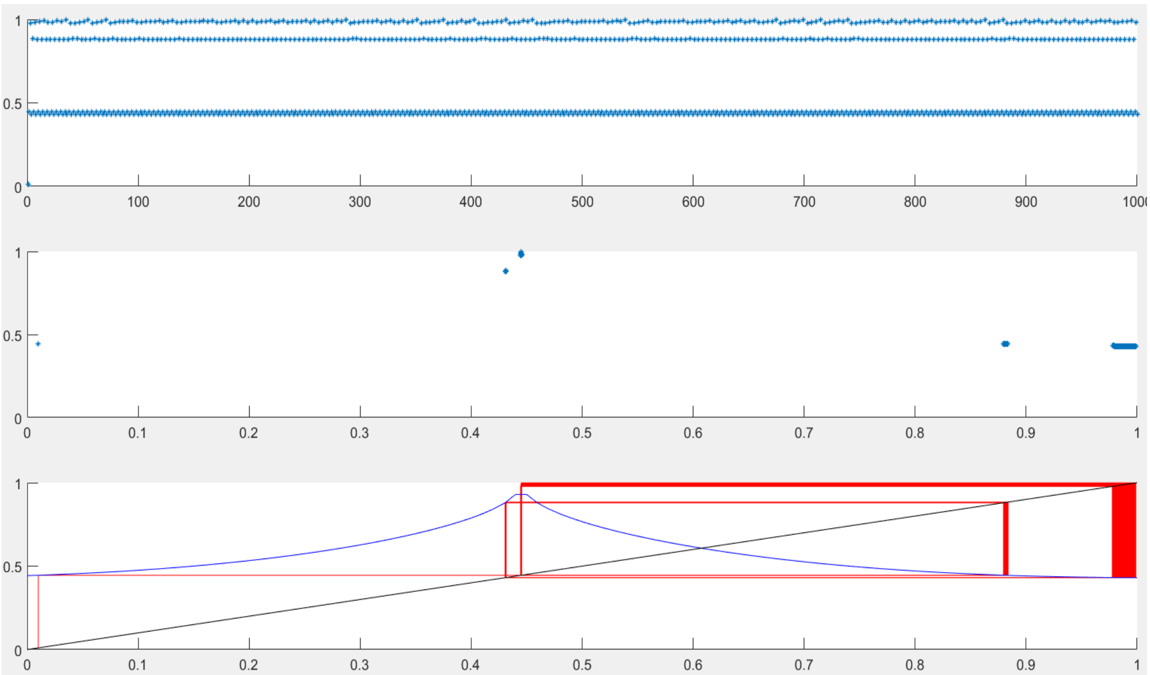
Особливості динаміки послідовності при $r = 0.55$. Хаотична поведінка, ламінарних течій немає, на малих проміжках точки починають групуватись біля 2 прямих.

Особливості динаміки послідовності при $r = 0.769$. Перемежованість, хаотична поведінка чергується з ламінарних течій.

5. Зобразити для $r = 0.469$ та $r = 0.445$ діаграму Кенігса-Ламарея.



Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.469$



Діаграма Кенігса-Ламарея для $r = 0.445$

Можна бачити, що тут точки групуються навколо чотирьох значень. Причому в залежності від параметра, різна степінь розкиду навколо цих прямих.

Висновок по практичній роботі. В ході виконання лабораторної роботи № 4 було зроблено програму, яка будує діаграму Кенігса-Ламарея для співвідношення Маннівелля-Помо для довільного параметру r.

При параметрі $r = 0.1$ та $r = 0.3$ явища перемежованості не відбувалось, взагалі не було хаотичної поведінки. На графіку (n, x_n) точки наближались до сталого значення, причому дуже швидко.

При деяких параметрах дійсно відбувається явище перемежованості. Наприклад, для параметра $r = 0.769$ чітко було видно, що на графіку (n, x_n), чергуються ламінарний потік та області хаотичної поведінки. Також при деяких параметрах, наприклад, $r = 0.6$, ламінарний потік, якщо й є, займає дуже незначний проміжок часу, а більшість часу система поводить себе хаотично. Цікаво, що при такому параметрі точки групувались навколо 2 прямих.

Для таких параметрів, як $r = 0.469$ та $r = 0.445$ точки послідовності могли групуватись навколо чотирьох точок.

Теоретичні відомості були взяті з підручника В. Т. Гринченко «Введение в нелинейную динамику».

Дослідження співвідношення Маннівелля-Помо дає можливість усвідомити наскільки складною може бути поведінка навіть одновимірного дискретного відображення за рахунок нелінійності. І в той же, дає можливість зрозуміти, що розвиток динамічних систем описується всього кількома універсальними сценаріями.

Завдання на практичну роботу №3

Побудувати біфуркаційні діаграми для наступних моделей. Описати та побудувати сценарії переходу до хаосу через подвоєння періоду. Дослідити при яких значеннях параметрів λ (α і β) виникає перемежовування. Показати графічно перемежовування регулярного режиму “острівками” хаосу. Дослідити виникнення періодів кратних 3. Побудувати відповідні діаграми. ***Обов’язкове повне дослідження логістичного рівняння.***

1) Логістичне рівняння $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n); 0 \le x_n \le 1$ (1978р.):
2) Модель Помо І. – Манневіля М. (1980р.):

$$x_{n+1} = f(x_n;\lambda);\ f(x_n;\lambda) = 1 - \frac{\sqrt{|x_n - \lambda|}}{1 + (x_n - \lambda)^2}.$$

3) Дисипативна модель Хенона:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a{x^2}_n + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

4) Консервативна модель Хенона (відображення Енона):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a{x^2}_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

5) Модель популяції комах:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 + x_n)^{-\beta}$$

6) модель популяції комах, обмежених епідеміями:

$$x_{n+1} = x_n e^{\lambda(1-x_n)}$$

5) Модель Фейгенбаума:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x^2{}_n \\ y_{n+1} = a - x_n \end{cases} \quad \text{(при } a = 0{,}4224 \text{ – початок хаосу)}$$

7) Модель Скеллама:

$$x_{k+1} = \frac{\alpha}{1+\beta x_k} x_k$$

8) Модель Фейгенбаума, що зжимається з $\| b \| < 1$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x^2{}_n \\ y_{n+1} = a + bx_n \end{cases}$$

9) Перетворення пекаря:

$$(x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1});$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_\alpha x_n, y_n < \alpha, 0 \le x_n \le 1, \\ \dfrac{1}{2} + \lambda_\beta x_n, y_n > \alpha, 0 \le y_n \le 1; \end{cases} \quad y_{n+1} = \begin{cases} y_n / \alpha, y_n < \alpha, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(y_n - \alpha), y_n > \alpha, \end{cases}$$

де α – деякий параметр.

Практична робота №4

Дослідження нелінійної динаміки диференційних рівнянь ІІ порядку

4.1. Рівняння Ван-дер-Поля. Отримати уявлення про рівняння Ван-дер-Поля, Брюселятора, поведінки їх розв’язків залежно від параметрів. Оволодіти сучасними пакетами для чисельного розв’язку систем диференціальних рівнянь.

$$\ddot{\xi} - 2\delta(1 - b\xi^2)\dot{\xi} + {\omega_0}^2\xi = 0$$

Щоб звести до системи лінійних диференціальних рівнянь, покладемо:

$$x = \xi, y = \dot{\xi}$$

Тоді рівняння матиме вид.

$$\dot{y} - 2\delta(1 - bx^2)y + {\omega_0}^2 x = 0$$

Тоді система прийме вид.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\delta(1 - bx^2)y - {\omega_0}^2 x \end{cases}$$

Знайдемо її стаціонарні точки.

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2\delta(1 - bx^2)y - {\omega_0}^2 x = 0 \end{cases}$$

Підставляючи 0 замість y.

$${\omega_0}^2 x = 0$$

Маємо, що $(0,0)$ – стаціонарна точка. Лінеаризуємо систему, записавши її у вигляді.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\delta(-2bx_0)y_0 - {\omega_0}^2 & 2\delta(1 - b{x_0}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Підставляючи значення $(0,0)$ в матриці, отримаємо систему, що описує поведінку траєкторій в околі точки $(0,0)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -{\omega_0}^2 & 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Тепер шукаємо власні числа.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -{\omega_0}^2 & 2\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2\delta) + {\omega_0}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\delta\lambda + {\omega_0}^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4{\omega_0}^2}}{2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$$

Якщо $\boldsymbol{\delta^2 \geq {\omega_0}^2}$:

$$\delta + \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} \geq 0$$

$$\delta - \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} > 0$$

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0 -$ особлива точка типу вузол

Якщо $\delta^2 < {\omega_0}^2$:

$$\sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} \in C$$

$$\delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} = a \pm ib$$

$Re\lambda_1 > 0, Re\lambda_2 > 0 -$ особлива точка типу фокус

Обчислимо дивергенцію:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} = 2\delta(1 - bx^2)$$

4.2. Рівняння Брюселятора. Тут розглядатимемо «зосереджену» модель брюселятора. Система диференційних рівнянь у безрозмірному вигляді має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2Y \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y \end{cases}$$

Знайдемо стаціонарні точки.

$$\begin{cases} A - (B+1)X + X^2Y = 0 \\ BX - X^2Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - (B+1)X + X^2Y = 0 \\ (B - XY)X = 0 \end{cases}$$

Випадок $X = 0$ не є розв'язком. Тоді $Y = \frac{B}{X}$

$$A - (B+1)X + X^2\frac{B}{X} = 0$$
$$A - (B+1)X + BX = 0$$
$$A - X = 0$$
$$X = A$$

Тоді $X = A, Y = \frac{B}{A}$. Стаціонарна точка $\left(A,\ \frac{B}{A}\right)$.
Дослідимо систему в околі цієї точки. Покладемо

$$\begin{cases} X = A\ + \tilde{x} \\ Y = \dfrac{B}{A}\ + \tilde{y} \end{cases}$$

Тоді для $\tilde{x} \ll A, \tilde{y} \ll \frac{B}{A}$ система буде себе так само, як і система нижче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = A - (B+1)(A\ +\ \tilde{x}) + (A\ +\ \tilde{x})^2\left(\dfrac{B}{A}\ +\ \tilde{y}\right) \\ \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = B(A\ +\ \tilde{x}) - (A\ +\ \tilde{x})^2\left(\dfrac{B}{A}\ +\ \tilde{y}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = A - (BA + B\tilde{x} + A + \tilde{x}) + (A^2 + 2A\tilde{x} + \tilde{x}^2)\left(\dfrac{B}{A}\ +\ \tilde{y}\right) \\ \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = B(A\ +\ \tilde{x}) - (A^2 + 2A\tilde{x} + \tilde{x}^2)\left(\dfrac{B}{A}\ +\ \tilde{y}\right) \end{cases}$$

Тут ми відкидаємо усі нелінійні компоненти.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = (B-1)\tilde{x} + A^2\tilde{y} \\ \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -B\tilde{x} - A^2\tilde{y} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (B-1) - \lambda & A^2 \\ -B & -A^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-A^2-\lambda)\big((B-1)-\lambda\big)+A^2B=0$$

$$(A^2+\lambda)\big(\lambda+(1-B)\big)+A^2B=0$$

$$\lambda^2+\lambda(1-B+A^2)+A^2(1-B)+A^2B=0$$

Нарешті, маємо таке квадратне рівняння:

$$\lambda^2+\lambda(1-B+A^2)+A^2=0$$

Знайдемо власні числа.

$$\lambda=\frac{1}{2}(B-1-A^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(B-1-A^2)^2-4A^2}$$

Якщо $(B-1-A^2)^2>4A^2$, тоді $\lambda_1,\lambda_2>0$ або <0 – вузол.

Якщо $(B-1-A^2)^2<4A^2$, тоді $Re\lambda_1, Re\lambda_2>0$ або <0 – фокус.

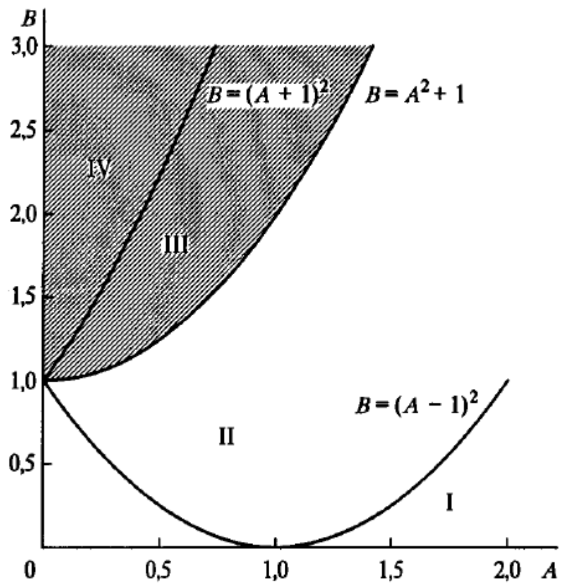
Тепер визначимо параметри, при яких вузол змінюється на фокус і навпаки.

$$|B-1-A^2|=2A$$

$$B-1-A^2=-2A$$

$$B-1-A^2=2A$$
$$B=A^2\pm2A+1$$
$$B=(A\pm1)^2$$

Якщо зобразити графіки цих парабол, отримаємо такі області.



Область I – стійкий вузол.

Область II – стійкий фокус.

Область III – нестійкий фокус.

Область IV – стійкий фокус.

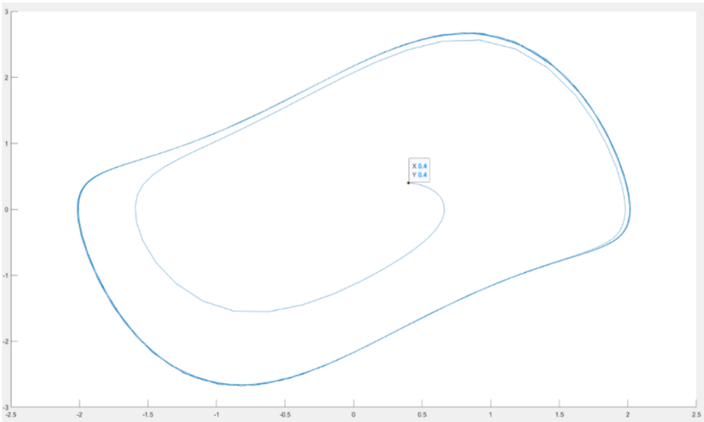
4.3. Приклад виконання практичної роботи.

1. В пакеті для обчислень MATLAB написати програму, яка чисельно розв'язує рівняння ван-дер-Поля для вказаних параметрів та зобразує фазові портрети в системі координат $\boldsymbol{x(t), y(t), y(x)}$.

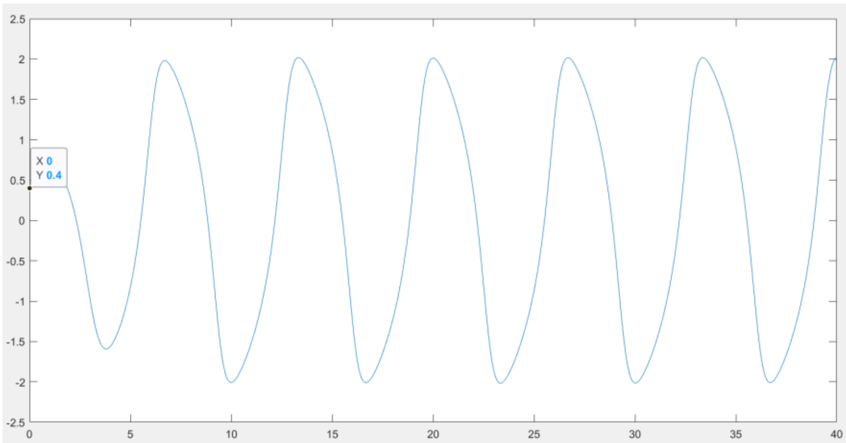
В пакеті MATLAB було написано програму, яка будує фазові портрети розв'язків для рівняння Ван-дер-Поля за допомогою вбудованої функції для чисельного розв'язання системи диф. Рівнянь ode45. Графіки було побудовано за допомогою функцій plot.

2. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв'язків рівняння Ван-дер-Поля для параметрів $\boldsymbol{\sigma = 0.5, b = 0.3, w = 1}$.

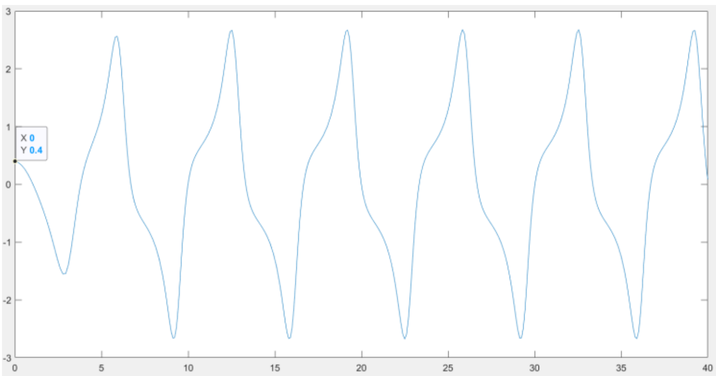
Зобразимо фазові портрети для системи $\sigma = 0.5, b = 0.3, w = 1$. Оберемо початкову точку $(0.4, 0.4)$.



Фазовий портрет $(\xi, \dot{\xi})$



Фазовий портрет (t, ξ)

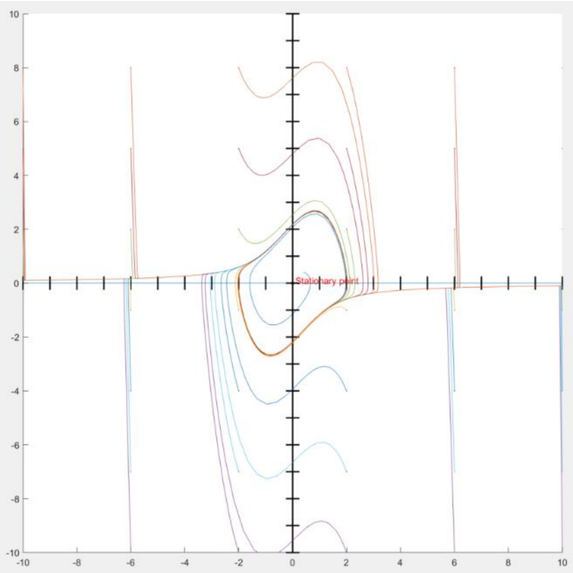


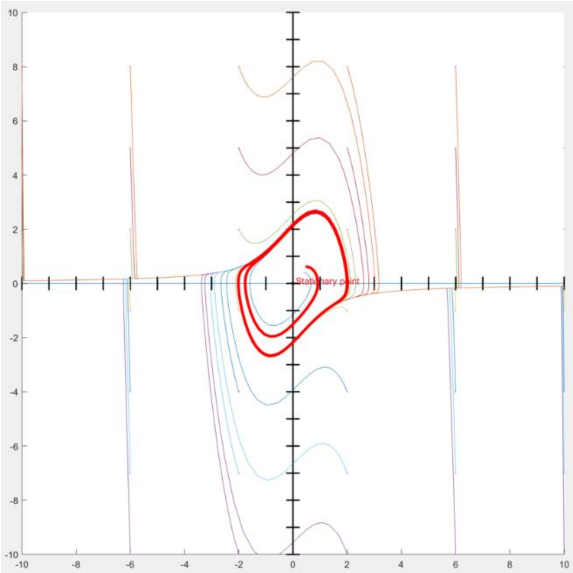
Фазовий портрет (t, ξ)

Бачимо, що траєкторія виходить на граничний цикл. Це означає, що система спочатку витрачала енергії більше, ніж отримувала ззовні. Через певний час система збалансувалась – за одиницю часу вона витрачає стільки ж енергії, скільки отримує.

3. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв'язків рівняння Ван-дер-Поля для параметрів $\boldsymbol{\sigma} \ll 1, \boldsymbol{b} = \mathbf{0.3}, \boldsymbol{w} = \mathbf{1}$.

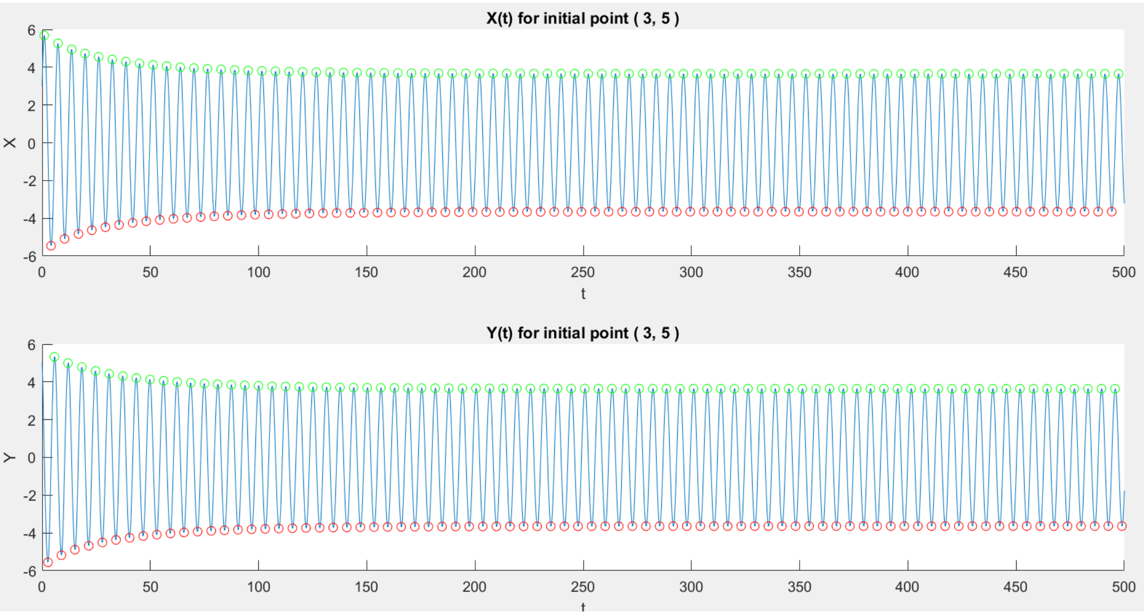
Візьмемо, наприклад, $\sigma = 0.01$ та побудуємо для нього фазовий портрет для різних початкових точок.





Фазовий портрет $(\xi, \dot{\xi})$ для різних початкових точок. Справа червоним показано траєкторія точки біля нестійкого фокуса (0,0)

Розглянемо траєкторію початкової точки $(3,5)$ та запишемо графік $x(t), y(t)$.



Параметри $\sigma = 0.01,\ b = 0.3,\ \omega_0 = 1$. Фазовий портрет $x(t)$ (зверху), $y(t)$ (знизу) траєкторії при початковій точці (3,5).

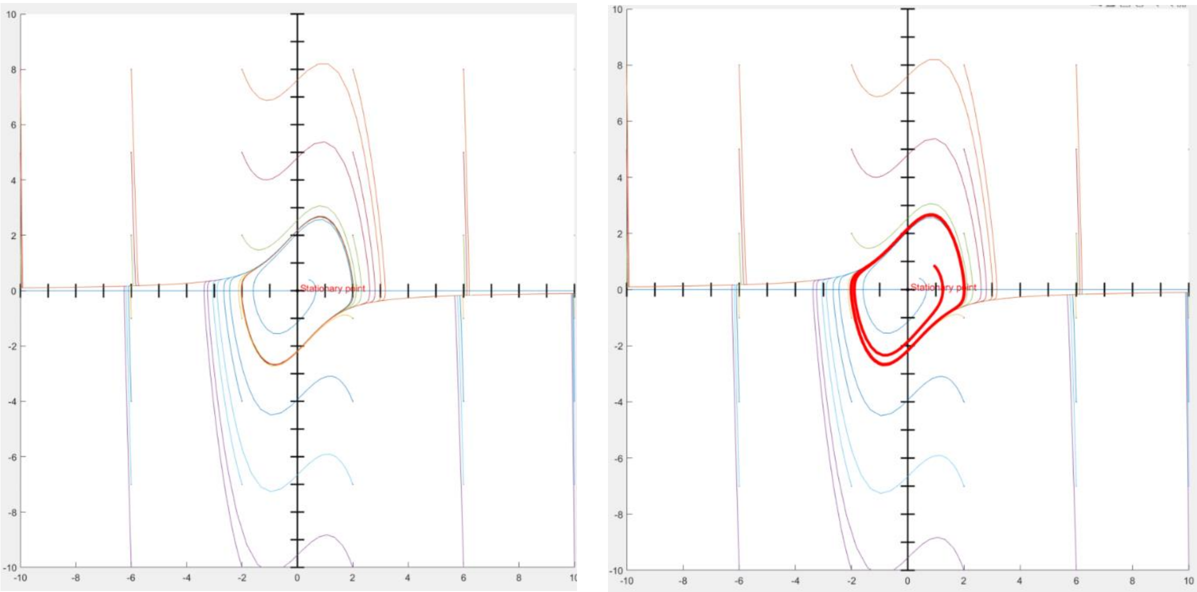
Тепер проінтерпретуємо отримані результати. Бачимо, що коливання незатухаючі, будь-яка траєкторія виходить на граничний цикл. Рівняння ван-дер-Поля описує поведінку осцилятора. Осцилятор втрачає енергію в ході роботи, але енергію ззовні постійно додається.

Траєкторії ззовні граничного циклу – ті, що втрачають енергію швидше, ніж накопичують, тому $(\xi, \dot{\xi})$ прямує до граничного циклу, де кількість витраченої за одиницю часу енергії та отриманої врівноважені.

Траєкторії ззовні граничного циклу – ті, що накопичують енергію швидше, ніж втрачають, тому $(\xi, \dot{\xi})$ прямує від точки (0, 0) до граничного циклу.

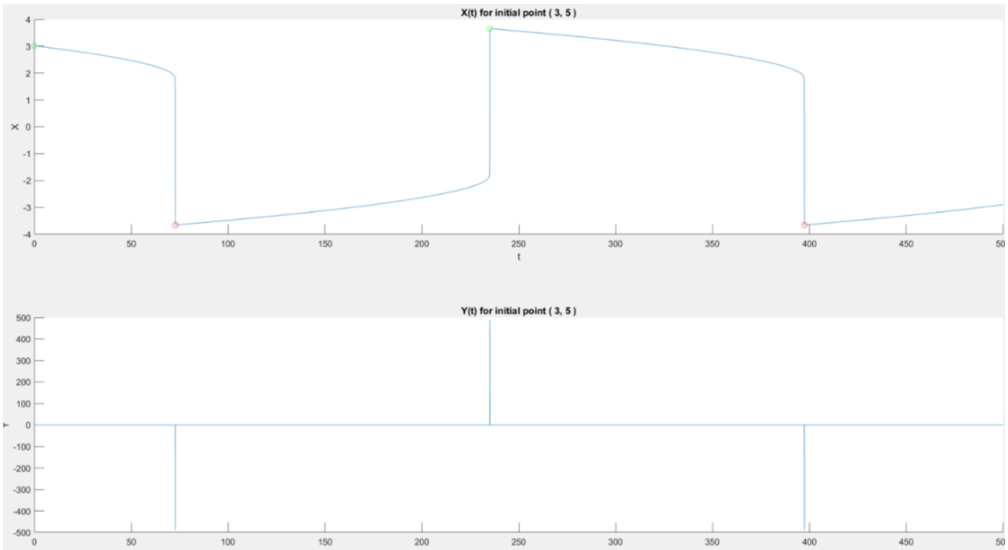
1.4. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв'язків рівняння Ван-дер-Поля для параметрів $\sigma \gg 1, b = 0.3, w = 1.$

Візьмемо $\sigma = 100$ та побудуємо фазовий портрет для різних початкових точок.



Фазовий портрет $(\xi, \dot{\xi})$ для різних початкових точок. Справа червоним показано траєкторія точки біля нестійкого фокуса (0,0)

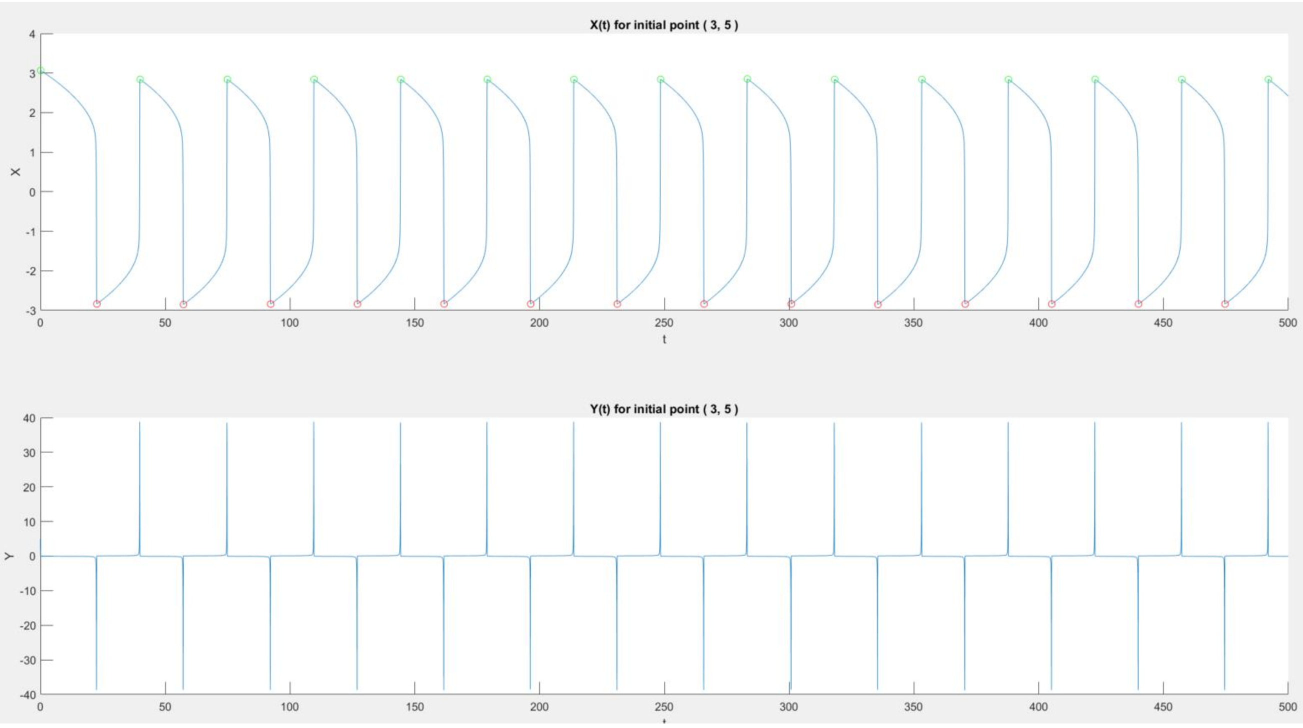
Розглянемо траєкторію початкової точки $(3,5)$ та запишемо графік $x(t), y(t)$.



Параметри $\sigma = 100,\ b = 0.3,\ \omega_0 = 1$. Фазовий портрет $x(t)$ (зверху), $y(t)$ (знизу) траєкторії при початковій точці (3,5).

5. Порівняти фазові портрети $x(t)$ та $y(t)$ розв'язків рівняння Ван-дер-Поля при зміні параметру b.

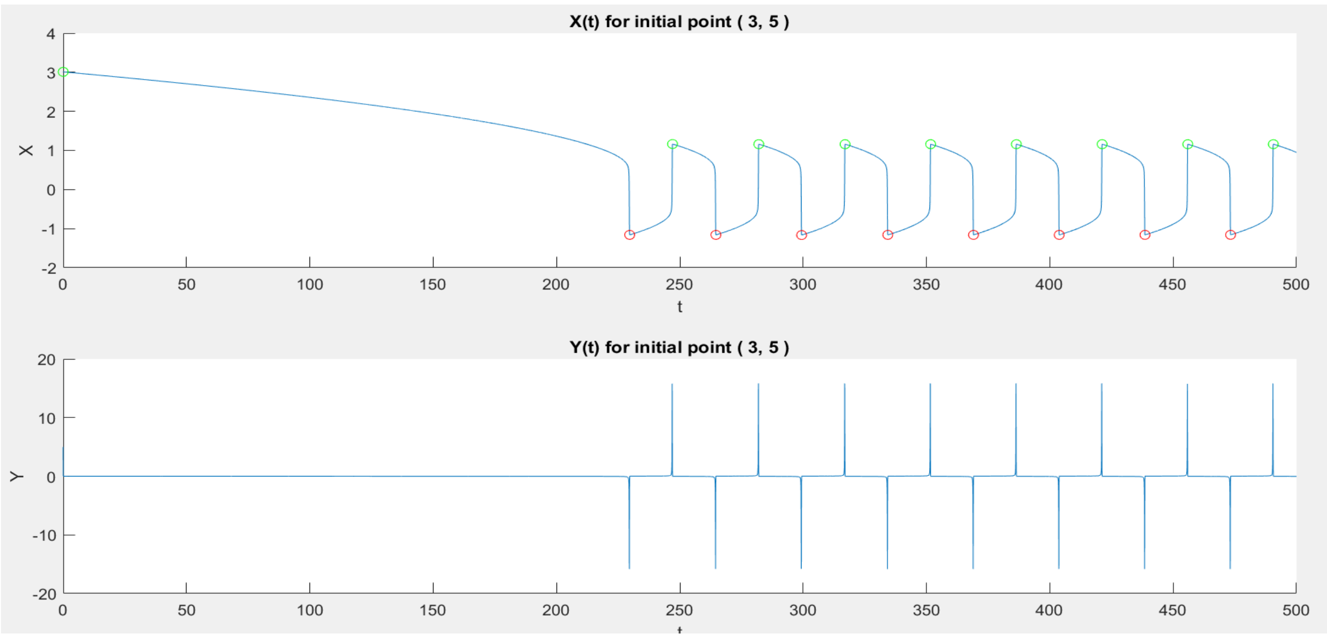
Побудуємо фазові портрети для $x(t), y(t)$ для $\sigma = 10,\ b = 0.5, \omega_0\ = 1$



Фазові портрети $x(t), y(t)$ для початкової точки (3,5). Параметри: $\sigma = 10$,

$b = 0.5,\ \omega_0\ = 1$

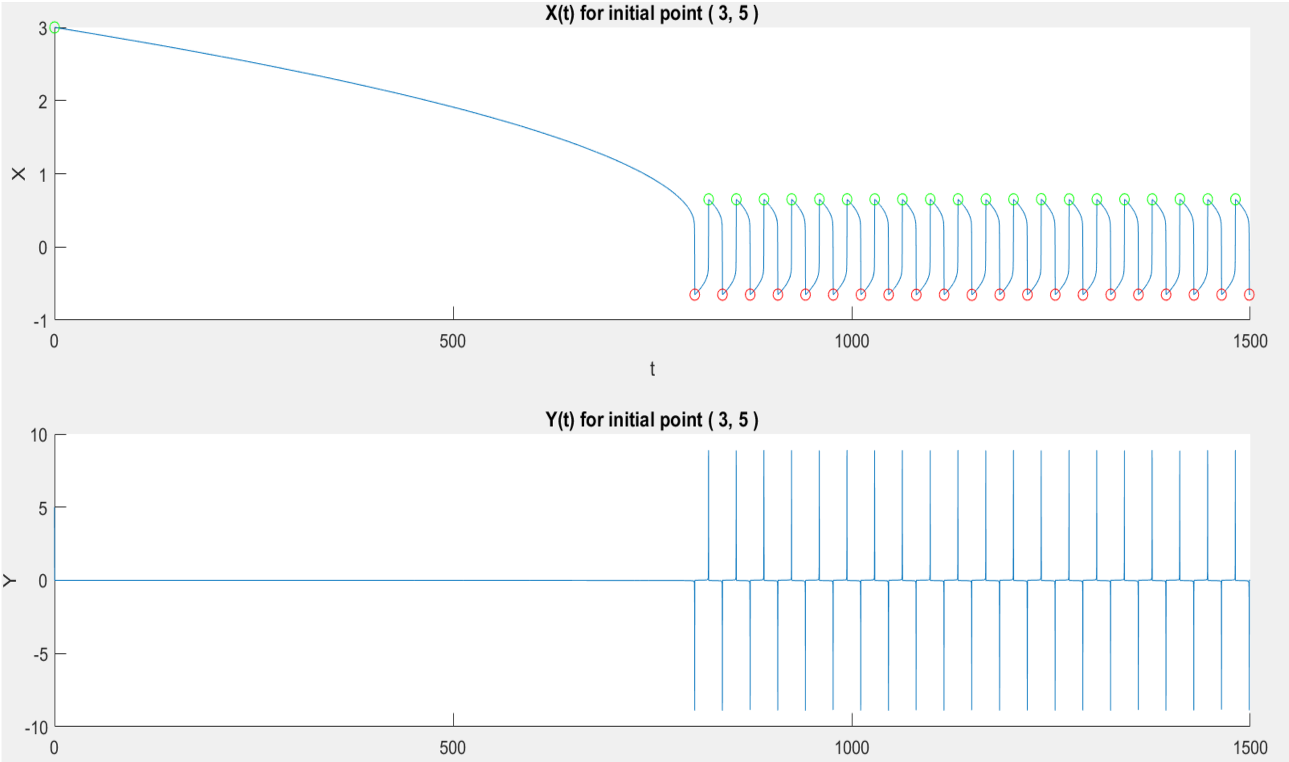
Побудуємо фазові портрети для $x(t), y(t)$ для $\sigma = 10,\ b = 3,\ \omega_0\ = 1$



Фазові портрети $x(t), y(t)$ для початкової точки (3,5). Параметри: $\sigma = 10$,

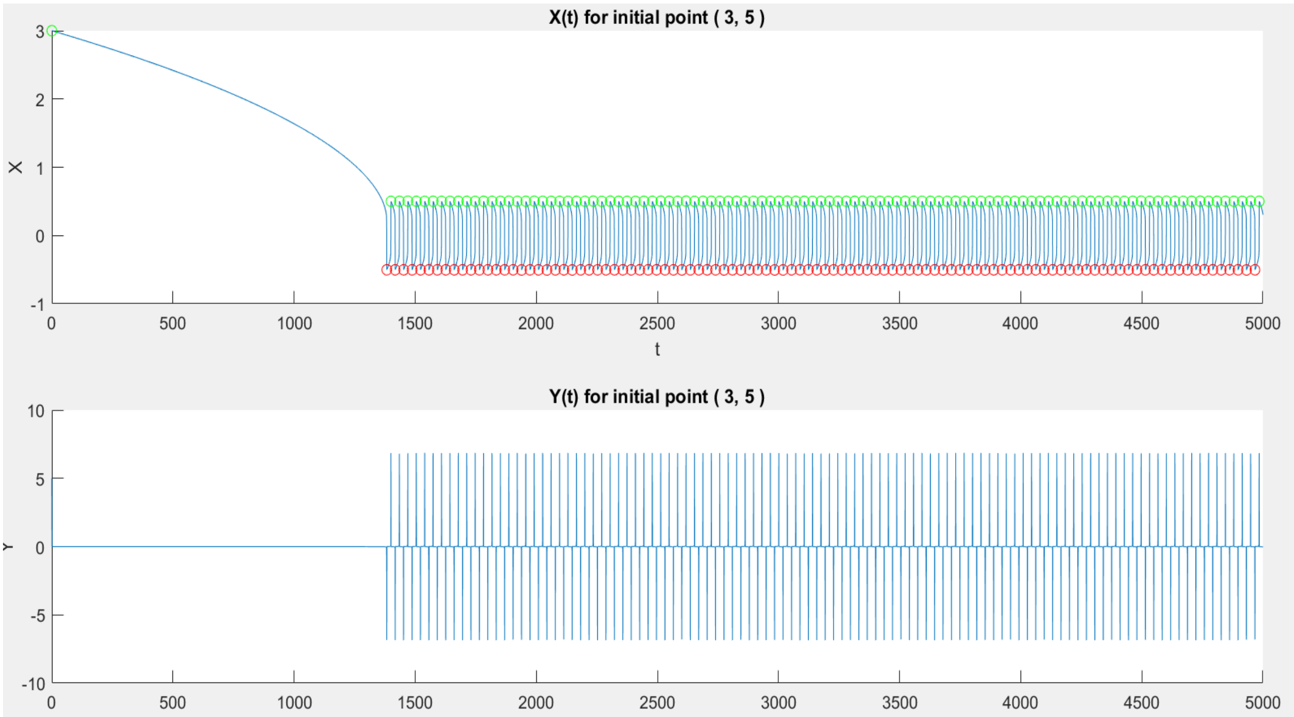
$b = 0.5,\ \omega_0\ = 1$

Побудуємо фазові портрети для $x(t), y(t)$ для $\sigma = 10,\ b = 9,\ \omega_0 = 1$



Фазові портрети $x(t), y(t)$ для початкової точки (3,5). Параметри: $\sigma = 10$, $b = 0.5,\ \omega_0\ = 1$

Побудуємо фазові портрети для $x(t), y(t)$ для $\sigma = 10,\ b = 16,\ \omega_0 = 1$

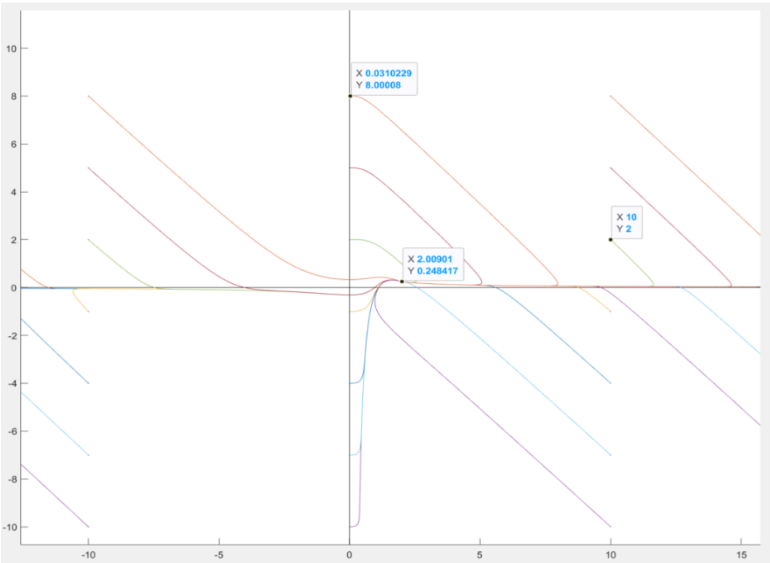


Фазові портрети $x(t), y(t)$ для початкової точки (3,5). Параметри: $\sigma = 10$, $b = 0.5,\ \omega_0\ = 1$

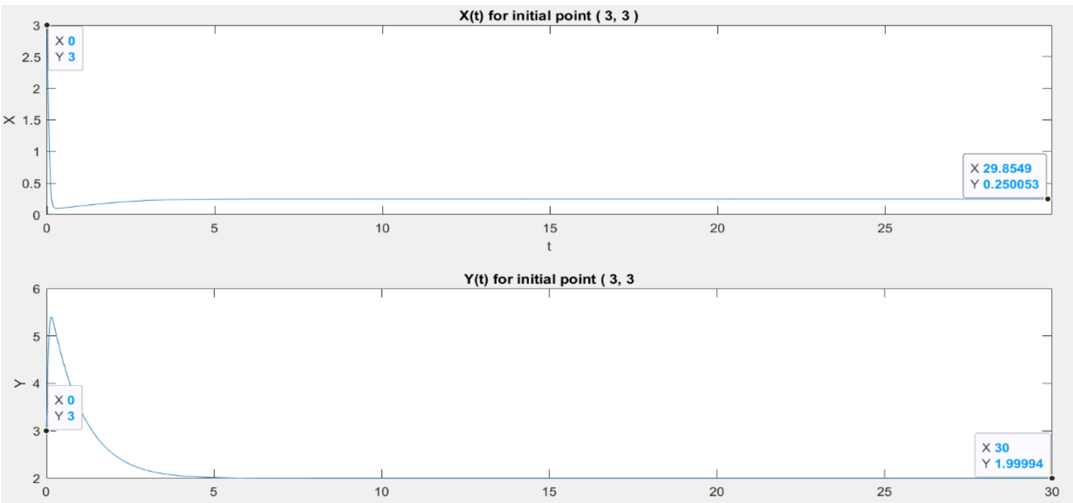
Можна зробити висновок, що збільшення параметра b збільшує час досягнення траєкторією граничного циклу.
Наприклад, щоб досягти граничного циклу траєкторії для різних параметрів знадобився різний час t.
$\sigma = 10,\ b = 0.5,\ \omega_0\ = 1$. Час: 0
$\sigma = 10,\ b = 3,\ \omega_0\ = 1$. Час: 220
$\sigma = 10,\ b = 9,\ \omega_0\ = 1$. Час: 700
$\sigma = 10,\ b = 16,\ \omega_0\ = 1$. Час: 1200

6. В пакеті для обчислень MATLAB написати програму, яка чисельно розв'язує рівняння брюселятора для вказаних параметрів та зобразує фазові портрети в системі координат $\boldsymbol{x(t), y(t), y(x)}$.

Оберемо параметри $A = 2,\ B = 0.25$. При таких параметрах траєкторія має бути стійким вузлом. В пакеті для обчислень MATLAB використовуємо функцію для розв'язку систем диференціальних рівнянь *ode45*, щоб отримати чисельний розв'язок для різних початкових точок.



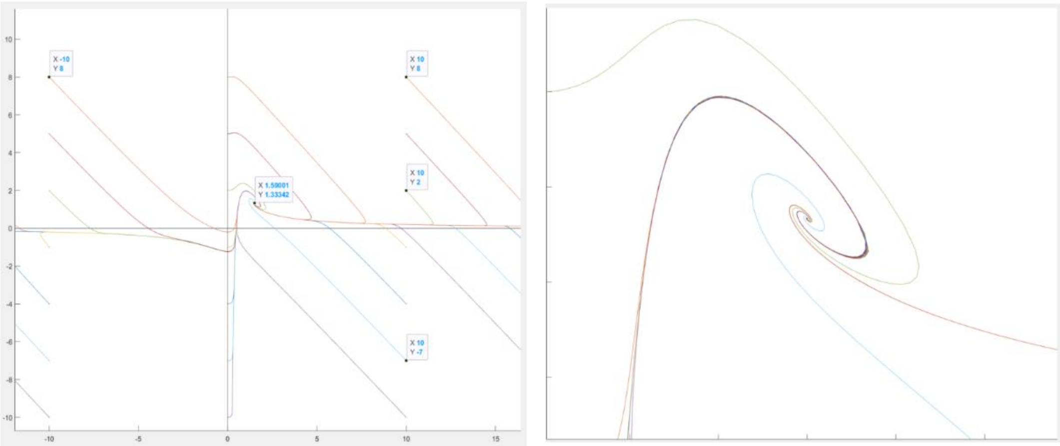
Фазовий портрет (X, Y)



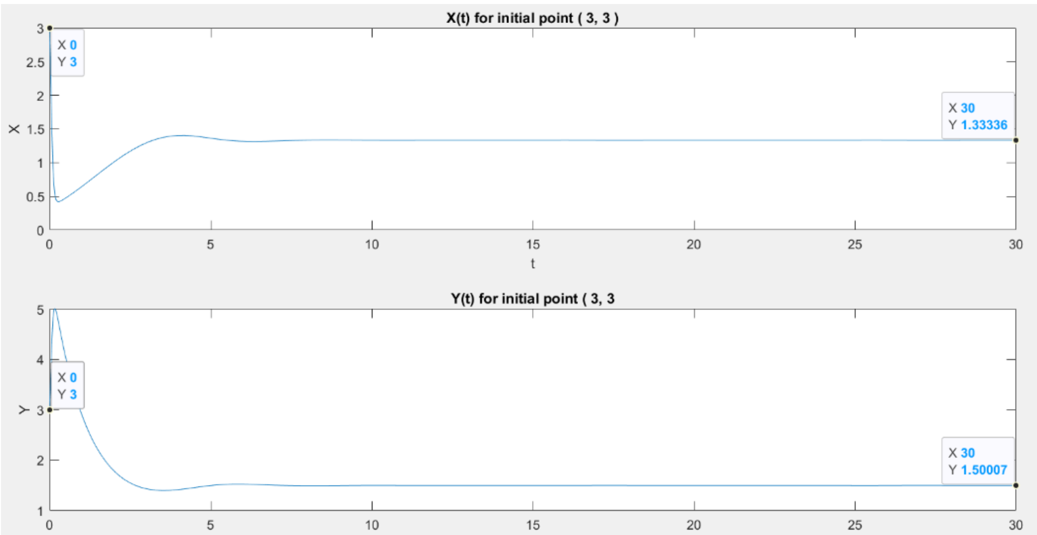
Фазові портрети (t, X) (зверху), (t, Y) (знизу) для траєкторії з початковою точкою $(3, 3)$

7. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв'язків рівняння брюселятора для параметрів $A > 0, B > 0, (A-1)^2 \leq B \leq A^2 + 1$.

Оберемо параметри $A = 1.5, B = 2$. При таких параметрах точка $\left(A, \frac{B}{A}\right)$ є стійким фокусом. Зобразимо траєкторії для різних початкових точок.



Фазовий портрет (X, Y) (зліва). Справа – його збільшена версія. Видно, що стаціонарна точка $\left(1.5, \frac{4}{3}\right)$ – стійкий фокус.

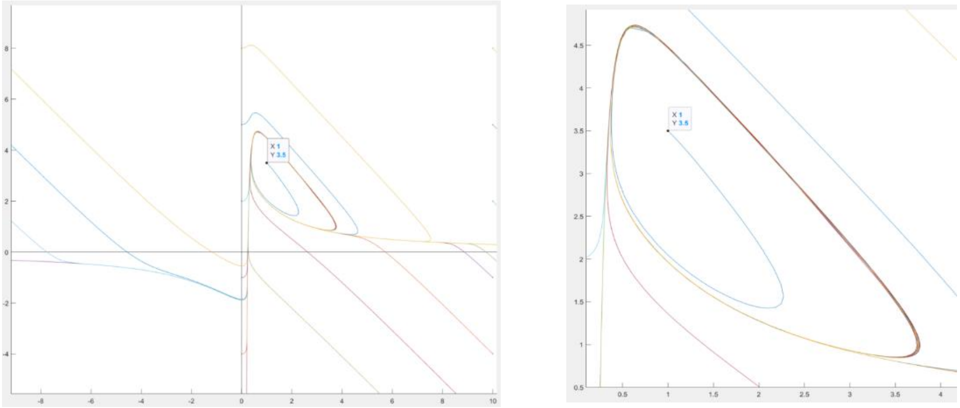


Фазові портрети (t, X) (зверху), (t, Y) (знизу) для траєкторії з початковою точкою $(3, 3)$

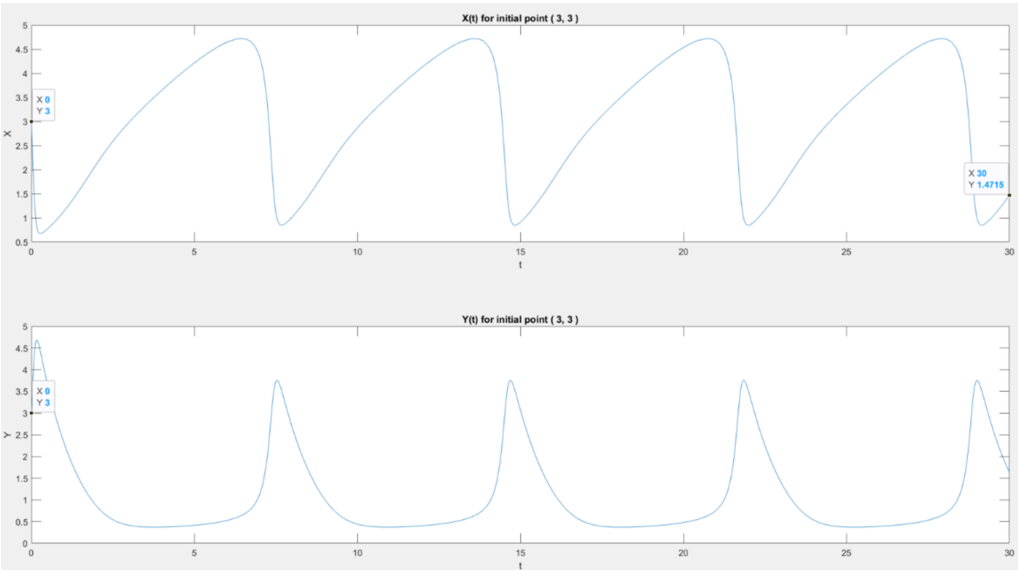
Результати узгоджуються з теорією. Точка $\left(1.5, \frac{4}{3}\right)$ – дійсно стійкий фокус.

8. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв'язків рівняння брюселятора для параметрів $A > 0, B > 0,\ A^2 + 1 \leq\ B \leq (A+1)^2$**.**

Оберемо параметри $A = 1, B = 3$. При таких параметрах точка $\left(A, \frac{B}{A}\right)$ є нестійким фокусом. Зобразимо траєкторії для різних початкових точок.



Фазовий портрет (X, Y) (зліва). Справа – його збільшена версія. Видно, що від стаціонарної точки $(1, 3)$ траєкторія в початковій точці $(1, 3.5)$ віддаляється.

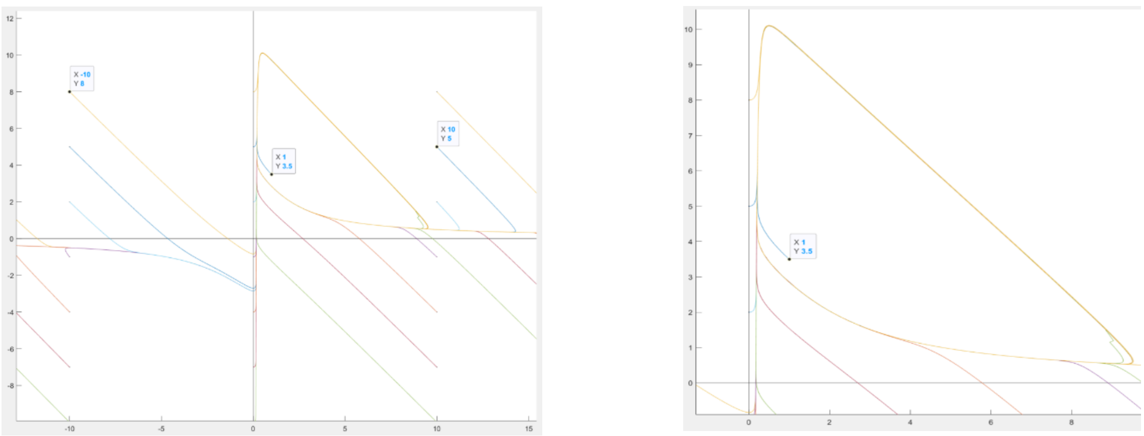


Фазові портрети (t, X) (зверху), (t, Y) (знизу) для траєкторії з початковою точкою $(3, 3)$

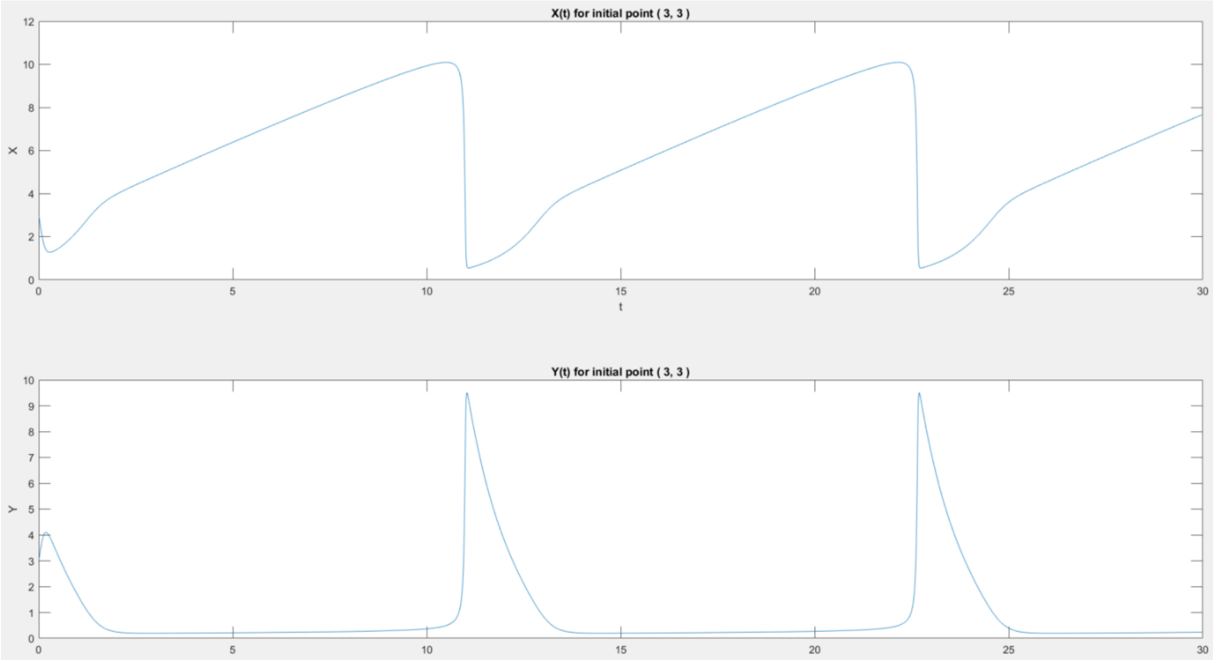
Результати узгоджуються з теорією. Точка $(1, 3)$ – дійсно нестійкий фокус.

9. В створеній програмі зобразити фазові портрети розв’язків рівняння брюселятора для параметрів $A > 0, B > 0, B \geq (A + 1)^2$

Оберемо параметри $A = 1, B = 5$. При таких параметрах точка $\left(A, \frac{B}{A}\right)$ є нестійким вузлом. Зобразимо траєкторії для різних початкових точок.



Фазовий портрет (X, Y) (зліва). Справа – його збільшена версія. Видно, що від стаціонарної точки $(1, 5)$ траєкторія в початковій точці $(1, 5)$ віддаляється.



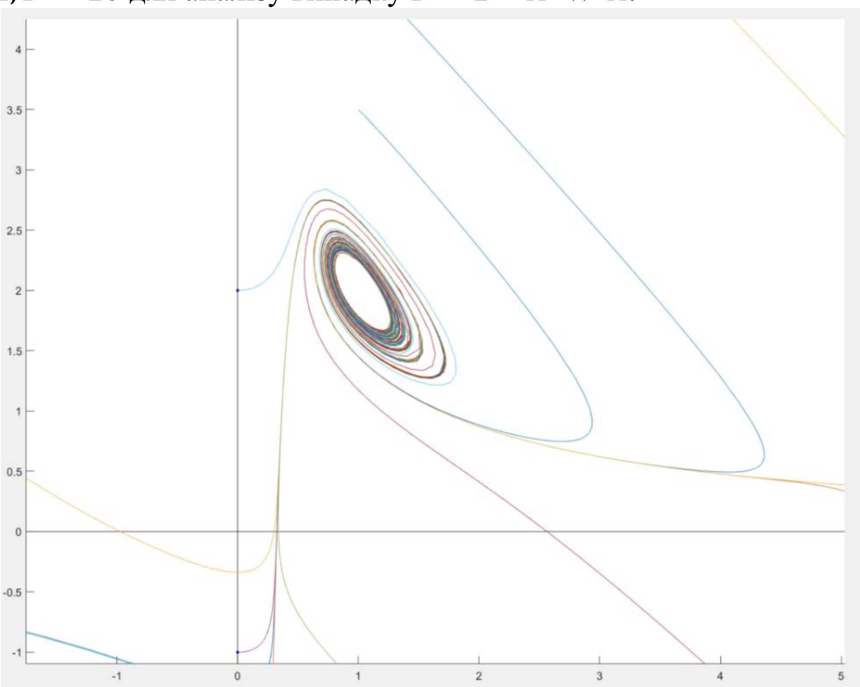
Фазові портрети (t, X) (зверху), (t, Y) (знизу) для траєкторії з початковою точкою $(3, 3)$

10. Порівняти форми граничного циклу брюселятора для випадків

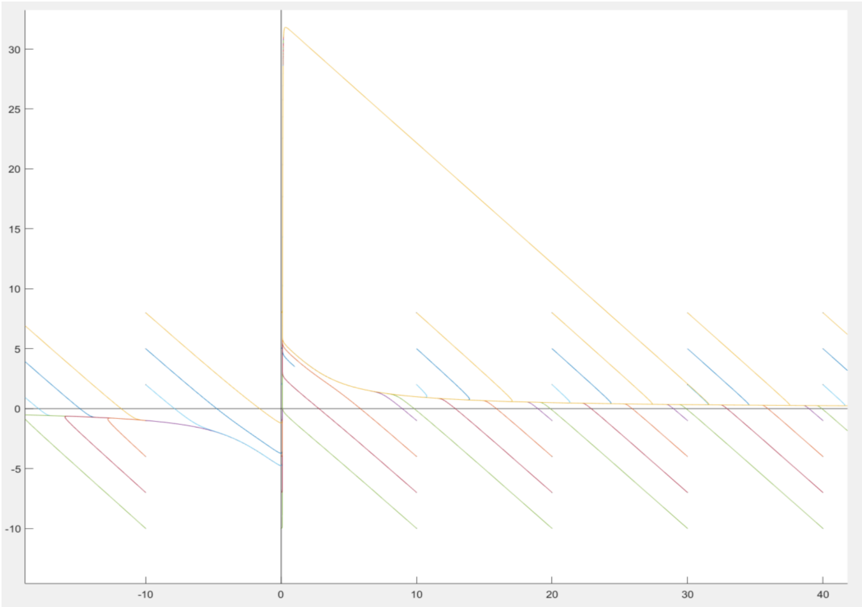
$B - 1 - A^2 \ll A$ та $B - 1 - A^2 \gg A$

Візьмемо $A = 1, B = 2.01$ для аналізу випадку $B - 1 - A^2 \ll A$.

Візьмемо $A = 1, B = 10$ для аналізу випадку $B - 1 - A^2 \gg A$.



Фазовий портрет для $A = 1, B = 2.01$. Граничний цикл близький до еліпсу



Фазовий портрет для $A = 1, B = 10$. Граничний цикл близький до прямокутного трикутника

Дійсно, при $B - 1 - A^2 \ll A$ граничний цикл близький до еліпса.
При $B - 1 - A^2 >> A$ граничний цикл близький до прямокутного трикутника.

Висновок. При виконанні практичної роботи було досліджено рівняння ван-дер-Поля та брюселятора. Для кожної системи було проведено пошук стаціонарної точки, досліджено поведінку в її околі. Зауважимо також, що рівняння брюселятора, взяте для дослідження, було дещо спрощене – в ньому були опущені лапласіани (так звана, зосереджена модель).

Було проведено порівняння форми траєкторій з теоретичними передбаченнями. Результати повністю співпали з теоретичними відомостями з літератури. Для розрахунку чисельного розв'язку було використано пакет MATLAB.

Завдання на лабораторну роботу №4

1) Знайти перші три члени асимптотики при $\varepsilon \to 0$ розв'язку задачі Коші для рівняння Дуффінга $x'' + \lambda^2 x = \varepsilon x^3, \quad x(0) = x_0, x'(0) = x_1,$ припускаючи, що λ відмінне від 0.

2) Знайти перші два члени асимптотики при $\varepsilon \to 0$ розв'язку задачі Коші для рівняння Ван дер Поля

$$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + x = 0, \quad x(0) = x_0, x'(0) = x_1.$$

3) За допомогою теореми про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульову особливу точку системи

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 - 2x_2 + x_1^2, \\ x'_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

з дійсним параметром α. Побудувати біфуркаційні діаграми.

4) Нехай права частина рівняння $x' = g(x)$ неперервно диференційована на R^m, $g(0)=0$, а його нульова особлива точка стійка, але не асимптотично стійка. Довести, що нульова особлива точка рівняння $x' = g(x)+\varepsilon x$ - нестійка при всіх додатних ε.
5) Нехай права частина рівняння $x' = g(x)$ неперервно диференційована на R^m, $g(0)=0$, а його нульова особлива точка стійка, але не асимптотично стійка. Довести, що нульова особлива точка рівняння $x' = g(x)-\varepsilon x$ - асимптотично стійка при всіх додатніх ε.
6) Показати, що якщо нульова особлива точка рівняння $x' = \alpha x + \sin(x)$ асимптотично стійка, то $\alpha \le -1$.
7) Довести, що якщо система $x' = Ax$ має розв'язок виду $\varphi(t) = \alpha e^{-t} + \beta^{et} (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m, \beta \ne 0)$, то нульова особлива точка системи $x' = Ax + c\,\|x\|^2\ (c \in \mathbb{R}^m)$ - нестійка.
8) Довести, що якщо двовимірна система $x' = Ax$ з дійсною матрицею *A* має комплексний розв’язок виду $\varphi(t) = \alpha e^{(i-1)t} (\alpha \in \mathbb{R}^2, \alpha \ne 0)$, то нульова особлива точка системи $x' = Ax + \beta\,\|x\|^4\ (\beta \in \mathbb{R}^2)$ є асимптотично стійкою.
9) Динаміку двох взаємодіючих наукових направлень X та Y задана системою звичайних диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1 xy - c_2 x - \beta_1 x^2, \\ \dot{y} = c_3 xy - c_4 y - \beta_2 y^2, \end{cases}$$

де коєфіцієнти c_2 та c_4 виизначають власних характер розвитку направлень X та Y, c_1 і c_3 задають тип взаємодії направлень Y на X і X на Y, а величини β_1 та β_2 визначають швидкість старіння інформації або вичерпання результатів даного наукового направлення (β_1, $\beta_2 > 0$). Провести аналіз структури фазового простору, зобразити його графічно та дослідити на стійкість систему відносно параметрів β_1 та β_2, якщо:

а) Обидва наукові напрямки є такими, що розвиваються, але X негативно впливає на Y, а Y позитивно впливає на X: $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = -1.$

б) Обидва наукові напрямки, що розвиваються, є конкуруючими, а взаємний їхній вплив – негативний: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -1.$

в) Обидва наукові напрямки є ”затухаючими”, а взаємний їхній вплив – позитивний: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1.$

г)”Затухаючий” науковий напрямок X негативно впливає на Y, що розвивається позитивно і Y позитивно впливає на X: $c_1 = c_2 = 1, c_3 = c_4 = -1.$

10) Дослідити на стійкість особливі точки (відносно параметрів) модель міжвидової конкуренції:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

де N_i – чисельність i-го виду, r_i – коєфіцієнт приросту i-го виду, β_i – коєфіцієнт, що описує внутрішньовидовий вплив, α_i - коєфіцієнт, що описує вплив зі сторони другого виду. Всі коєфіцієнти додатні. Графічно представити фазові портрети системи в залежності від параметрів та для кожного з них визначити типи стану рівноваги.

11) Для системи нелінійних диференційних рівнянь визначити тип стійкості траєкторій, дослідити особливі точки та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}], \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}]. \end{cases}$$

12) Дослідити на особливі точки та побудувати фазові портрети двох систем:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)(r-2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dot{r} = r(r-1)^2, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

де θ і r – полярні координати.

13) Дослідити на стійкість особливі точки відносно параметрів моделі бойових дій Ланчестера:
а) модель, що описує бойові дії між регулярними військами

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x(t) - \beta y(t) + P(t), \\ \dot{y} = -cx(t) - dy(t) + Q(t); \end{cases}$$

б) модель, що описує бойові дії між партизанськими з'єднаннями

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x(t) - gx(t)y(t) + P(t), \\ \dot{y} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t); \end{cases}$$

в) модель, що описує змішані бойові дії, в яких приймають участь як регулярні, так і партизанські з'єднаннями

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x(t) - gx(t)y(t) + P(t), \\ \dot{y} = -cx(t) - dy(t) + Q(t). \end{cases}$$

Всі коєфіцієнти при функціях є невід'ємними і такими, що характеризують ступінь впливу різних факторів на втрату в живій силі різних сторін x та y. P(t), Q(t) - члени, що враховують можливість підходу підкріплення силам x та y протягом дня. Графічно представити фазові портрети системи в залежності від параметрів та для кожного з них визначити типи стану рівноваги.

Практична робота №5

Моделювання динамічного хаосу

5.1. Поняття динамічних систем, їх граничні множини. Поняття дивного аттрактору.

Одним з важливих напрямків сучасної нелінійної динаміки є дослідження детермінованого або динамічного хаосу в нелінійних системах різної фізичної природи. Траєкторії таких систем демонструють випадкову поведінку, яка не пов'язана з присутністю будь-яких зовнішніх випадкових сил або з статистичною невизначеністю систем з великим числом ступенів свободи. Динамічний хаос є внутрішньою властивістю нелінійних систем. Загалом він обумовлений експоненціальною чутливістю фазових траєкторій до як завгодно слабкого збурювання початкових умов. Починаючи з робіт А. Пуанкаре, за допомогою парадигми динамічного хаосу закріпився новий погляд на проблеми класичної та небесної механіки.

Принциповою метою теорії динамічного хаосу є вивчення особливостей регулярної та хаотичної динаміки у фазовому просторі динамічних систем, обчислення їх динамічних і статистичних характеристик, з'ясування типових механізмів і сценаріїв переходу до хаосу. Дотепер ці питання глибоко розроблені для неперервних (або гладких) динамічних систем. Останні описуються диференціальними рівняннями або точковими відображеннями, праві частини яких не мають особливостей (розривів). Динамічні системи з особливостями вивчені ще недостатньо, хоч вони всюди зустрічаються. У певному відношенні їх навіть більше, ніж гладких систем, тому що розривних функцій за категорією Бера “більше”, ніж неперервних. В даній роботі будемо досліджувати складні системи без розривів та динаміку нелінійних систем без заданих математичних моделей (на основі динаміки часових рядів) та із заданими математичними моделями.

Розглянемо динамічні системи докладніше. Якщо величини x_1, x_2, ..., x_n – спостереження точки x в n-вимірному просторі за рівні проміжки часу, то отримаємо наочне геометричне представлення стану динамічної системи в цій точці. Таку точку назвемо фазовою точкою, а простір станів – фазовим простором динамічної системи. Зміні стану системи в часі відповідає рух фазової точки вздовж деякої лінії, що називається фазовою траєкторією або просто траєкторією.

Нехай математичною моделлю деякої динамічної системи є система звичайних диференціальних рівнянь.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, ..., x_n);\\
&\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, ..., x_n);\\
&......... ....\\
&\dot{x}_n = X_n(x_1, x_2, ..., x_n);
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

У фазовому просторі системи правими частинами рівняння (5.1) породжується векторне поле швидкостей, яке співставляє кожній точці x, що виходить з неї, вектор:
$X(x) = \{X_1(x_1, x_2, ..., x_n), X_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\}$.

Модуль цього вектора чисельно дорівнює швидкості руху фазової точки по траєкторії. Сам вектор в кожній точці **x** направлений по дотичній до фазової траєкторії.

Таким чином, динамічна система (1.2) може бути записана у векторній формі $\dot{x} = X(x)$, де $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ X_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ X_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$ - відповідні вектори і вектор-функція розмірності n.

В теорії диференційних рівнянь доведено що в системі (5.1) існує три типи траєкторій:

1. Положення рівноваги, що складається з однієї нерухомої точки у фазовому просторі.
2. Цикли, які є замкнутими лініями у фазовому просторі.
3. Траєкторії без самоперетинів (незамкнені траєкторії).

За енергетичною ознакою динамічні системи діляться на консервативні та дисипативні. Консервативні системи характеризуються незмінним у часі запасом енергії. Динамічні системи, енергія яких зменшується з плином часу внаслідок тертя, розсіювання та інших факторів, називаються дисипативними.

Серед динамічних систем особливу роль відіграють системи, у яких можливі ті чи інші коливання. Такі динамічні системи називають коливальними.

Припустимо, що динамічна система описується системою звичайних диференціальних рівнянь (1.2):

$\dot{x} = X(x)$, де x – вектор з компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$, а ***X(x)*** – вектор-функція з компонентами, $X_1(x_1, x_2, ..., x_n), X_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., X_n(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Нехай початкова умова системи стану (1.2) задається вектором **x0** з компонентами $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$. Припустимо, що у фазовому просторі динамічної системи існує дві множини B та $A \subset B$. Причому B – сукупність усіх точок **x0** фазового простору для яких $x \in A$ при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$. В цьому випадку множина A називається граничною множиною динамічної системи.

Розглянемо можливі типи граничних множин дисипативної динамічної системи, які можуть існувати в обмеженій області фазового простору.

Якщо всі точки **x0** $\in$ B прямують до A при $t \to +\infty$, то гранична множина є притягаючою і називається аттрактором. Відповідно множина B називається басейном тяжіння аттрактора.

Якщо всі точки **x0** $\in$ B прямують до A при $t \to -\infty$, то гранична множина є відштовхуючою і називається репеллером.

Множина A може складатися з двох підмножин, W^s і W^u причому точки, які належать W^s , прямують до A в прямому часі, в той же час точки, які належать W^u, прямують до A в зворотному часі. В цьому випадку A називається сідловою множиною або просто сідлом. Множини W^s і W^u називаються відповідно стійким і нестійким різновидом сідла.

Простішою граничною множиною динамічної системи, яка складається з однієї точки, є положення рівноваги. Воно може бути аттрактором (стійкий вузол, стійкий фокус), репеллером (нестійкий вузол, нестійкий фокус) або сідлом. Причому у сідла стійким і нестійким різновидом є відповідно його стійка і нестійка сепаратриса. На малюнку 2 показані, зліва направо, аттрактор (стійкий фокус), репеллер (нестійкий фокус) і сідло.

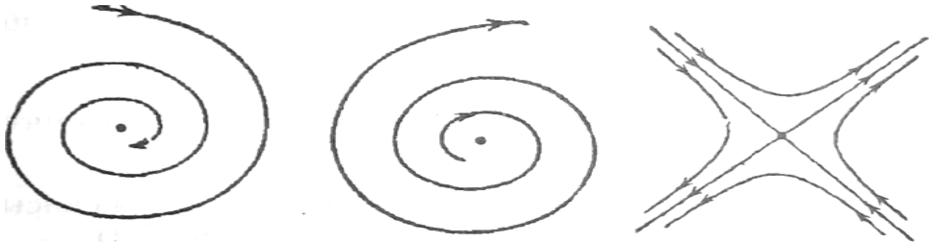


Рис. 5.1. Положення рівноваги: аттрактор, репеллер і сідло

Зауважимо, що точка типу центр не є ні аттрактором, ні репеллером, ні сідлом, оскільки відсутня будь-яка множина точок, які наближаються до центру в прямому або зворотному часі. Точка типу центр — це особливий випадок граничної множини, для якої A = B.

У свою чергу, граничний цикл динамічної системи буде аттрактором, якщо він стійкий, і репеллером, якщо він цілком нестійкий. Напівстійкий граничний цикл є сідлом і називається сідловим. На мал. 3 зображені зліва направо: граничний цикл, який є аттрактором, граничний цикл, який є репеллером і сідловий граничний цикл.

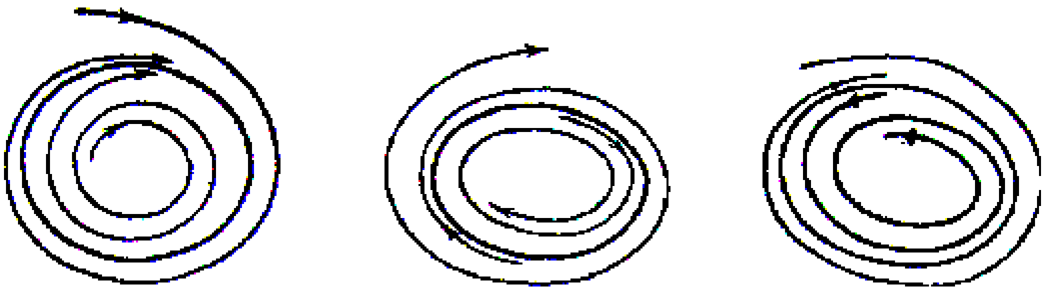


Рис.5.2. Граничні цикли: аттрактор, репеллер і сідловий

Таким чином, аттрактор – це гранична множина у фазовому просторі, до якого притягуються всі інші траєкторії з басейну тяжіння. Замітимо, що аттрактори існують тільки в дисипативних системах.

Рух в дисипативних системах доцільно розділити на два класи: клас перехідних, нестаціонарних рухів, які відповідають процесу переходу від початкової до граничної множини станів, і клас сталих, стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких належать граничним множинам. Часто точну межу між цими класами рухів провести неможливо. Ця межа залежить від точності обчислень, що проводяться, при рішенні конкретної задачі.

В загальній теорії динамічних систем доведено, що диссипативная динамічна система може мати наступні типи аттракторов:

1) положення рівноваги (крапки у фазовому просторі);
2) граничні цикли (замкнуті лінії у фазовому просторі);
3) квазіперіодичні аттрактори (тороїдальні поверхні у фазовому просторі).

Вище перераховані аттрактори називаються регулярними. Їм відповідають повністю передбачені в часі рухи дисипативних динамічних систем.

Довгий час вважалося, що тільки такі типи аттракторів існують в динамічних системах. Проте в 60-х роках минулого століття були відкриті абсолютно нові типи аттракторів у динамічних системах. Виявилося, що рух повністю визначеної (детермінованої) динамічної системи може стати абсолютно не передбачуваним (хаотичним). Причому, що особливо важливо, ця непередбачуваність пояснюється властивостями самої динамічної системи, а не якою-небудь зовнішньою хаотичною дією. Проте, при всій своїй непередбачуваності, такі рухи мають ряд чітких кількісних і якісних закономірностей, що істотно відрізняє їх від класичних стаціонарних випадкових процесів. Тому для позначення таких типів рухів динамічних систем став використовуватись термін – «детермінований хаос». У свою чергу, для рухів, які описуються регулярними аттракторами, став вживатися термін – «порядок».

Математичними образами детермінованого хаосу у фазовому просторі є складним чином влаштовані притягуючі множини, траєкторії точок яких не належать ні до одного типу регулярних аттракторів. Фазові траєкторії представляються у вигляді нескінченної лінії, яка ніде не перетинається, не залишає при $t \to +\infty$ замкнуту область і не притягується до регулярних аттракторам. Точка, яка зображується час від часу повертається в окіл довільно вибраного на траєкторії початкового стану, проте ці повернення не передбачувані і мають вигляд випадкової послідовності. Такі аттрактори називаються дивними (хаотичними). Отже, з одного боку, маємо непередбачуваність положення зображуючої точки траєкторії на аттракторі в заданий момент часу, а з іншого боку – передбачуваність, оскільки точно відомо, що ця точка належить аттрактору.

Практично перший хаотичний аттрактор був побудований Е. Лоренцем в 1963 р.

5.2 Типи стійкості траєкторій.

Розглянемо динамічну систему, задану системою диференціальних рівнянь у векторному вигляді (5.1): $\dot{x} = X(x)$. Припустимо, що її стан задається n-вимірним вектором x(t), а вектор-функція X(x) відображає n-вимірний евклідовий простір R^n в себе. Як було встановлено в різних численних дослідженнях основним механізмом виникнення детермінованого хаосу є нестійкість по Ляпунову траєкторій аттрактора. Тому познайомимося із стійкістю по Ляпунову і іншими типами стійкості системи (5.2).

Точка $\mathbf{x_0}$, а також траєкторія x(t), що виходить з неї, називаються стійкими по Лагранжу, якщо траєкторія x(t) завжди, при всіх t>0, залишається в деякій обмеженій області фазового простору. Іншими словами, існує така константа M, що для всіх t>0 виконується нерівність || x(t)||< M, де || x(t)||, як правило, звичайна евклідова норма:

$\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Тут $x_1,...., x_n$ – компоненти вектора x.

Точка n-вимірного фазового простору **y** називається ω- граничною точкою фазової траєкторії x(t), якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \to +\infty$, що $\lim\limits_{k\to+\infty} x(t_k) = y$. Аналогічно точка z називається α -граничною, якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \to -\infty$, що $\lim\limits_{k\to+\infty} x(t_k) = z$. Множина всіх ω - граничних точок називається ω - граничною множиною даної траєкторії і позначається через Ω_x. Відповідно множина усіх α - граничних точок називається α - граничною множиною даної траєкторії і позначається через A_x. Траєкторія **x(t)** називається стійкою по Пуассону, якщо кожна її точка є ω - граничною і α - граничною, тобто $x(t) \in \Omega_x \cap A_x$.

З визначення стійкості по Пуассону випливає, що будь-який сталий режим коливань (як регулярний, так і хаотичний) нелінійних дисипативних систем представляється траєкторіями стійкими по Пуассону. Зворотне твердження невірне.

Розглянемо декілька прикладів різних типів траєкторій. Найпростішою траєкторією є положення рівноваги. Така траєкторія складається тільки з однієї точки і, очевидно, стійка по Пуассону.

Якщо розглянути траєкторію, відмінну від нерухомої точки, то, як випливає з визначення, стійкою по Пуассону вона буде в тому випадку, якщо має властивість повертатися в як завгодно малий окіл кожної своєї точки нескінченне число раз. Повернення траєкторії в ε-окіл довільно вибраної на ній початкової точки називається поверненням Пуанкаре.

Тепер розглянемо граничний цикл. Очевидно, що повернення Пуанкаре в довільно вибрану початкову точку циклу фіксуватимуться періодично з як завгодно великою точністю. Час повернення T в цьому випадку буде просто періодом циклу. Він не залежить від вибору ε, принаймні, для достатньо малих ε.

Розглянемо наступний приклад. Припустимо, що для будь-кого заданого ε можна вказати період повернення T(ε), один і той же для довільної початкової точки на даній траєкторії, причому при $\varepsilon \to 0$ цей період прямує до нескінченності. Отже, повернення з даним ступенем точності слідують один за одним регулярно, з правильною періодичністю, проте період зростає, якщо ми бажаємо збільшити точність порівняння станів. Як відомо, такі рухи називаються квазіперіодичними. Зокрема, до них належить суперпозиція двох періодичних коливань з раціонально не сумірними частотами. У фазовому просторі цьому типу руху відповідає траєкторія, яка усюди щільно покриває тороїдальну поверхню.

І нарешті, детермінований хаос – це така ситуація, коли повернення Пуанкаре в ε-окіл початкової точки відбуваються без ознак регулярності, а інтервал часу між двома послідовними поверненнями кожного разу інший. У результаті спостерігається деяка хаотична послідовність часу таких повернень. Хаотичність таких повернень може допомогти нам ідентифікувати той факт, що в динамічній системі існує дивний аттрактор.

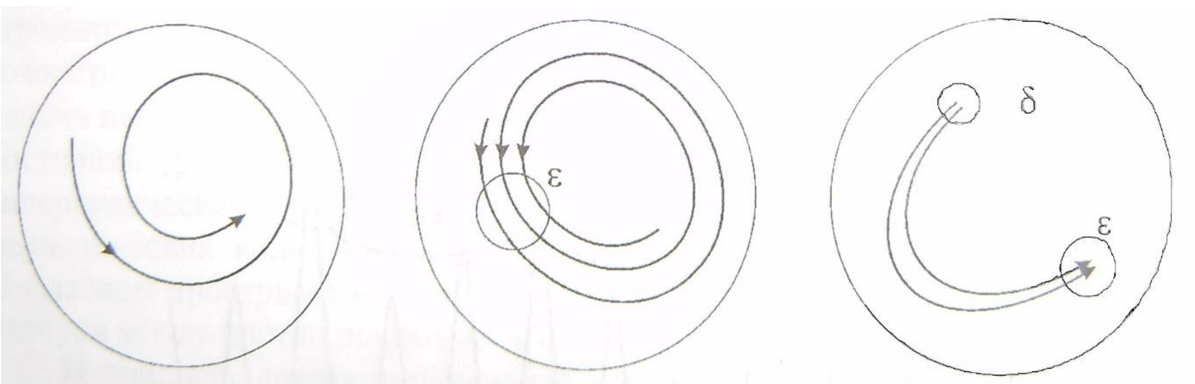
Відмітимо, що визначення стійкості по Лагранжу і Пуассону характеризують яку-небудь окремо взяту траєкторію і нічого не говорять про поведінку близьких до неї траєкторій. Така поведінка описує стійкість по Ляпунову. Припустимо, що система (1.1) при старті з точки $\mathbf{x_0}$ породжує траєкторію x(t), при старті з точки — траєкторію y(t). Траєкторія x(t) називається стійкою по Ляпунову, якщо для довільного, як завгодно малого ε >0, існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої стартової точки $\mathbf{y_0}$, яка задовольняє нерівності

$\|y_0 - x_0\| < \delta$ при всіх t>0 виконується нерівність $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$

Таким чином, якщо дві траєкторії близькі в початковий момент часу, то вони залишаються близькими і в будь-який подальший момент часу.

Траєкторія x(t) називається асимптотично стійкою, якщо вона стійка по Ляпунову і $\lim\limits_{t\to+\infty}\|y(t) - x(t)\| = 0$.

Наочна ілюстрація різних типів стійкості приведена на мал. 4 зліва показана траєкторія стійка по Лагранжу. Вона постійно залишається в замкнутій області. В центрі траєкторія стійка по Пуассону. Вона багато разів повертається в ε -окіл початкової точки. Нарешті, справа траєкторія стійка по Ляпунову. Дві близькі в початковий момент часу траєкторії назавжди залишаються близькими.



а б в

Рис. 5.3. Стійкість по Лагранжу (а), Пуассону (б) і Ляпунову (в)

Має місце наступна теорема.

Теорема. Якщо неперіодична траєкторія стійка по Пуассону і по Ляпунову, то вона квазиперіодична.

З цієї теореми відразу витікає, що всі регулярні аттрактори динамічних систем (положення рівноваги, граничні цикли і квазіперіодичні аттрактори) стійкі як по Пуассону, так і по Ляпунову. У свою чергу, всі дивні аттрактори динамічних систем стійкі по Пуассону і нестійкі по Ляпунову.

5.3. Спектр ляпуновських характеристичних показників. Визначення спектру ЛХП алгоритмом Бенеттіні.

Розглянемо динамічну систему у векторній формі (5.1). Нехай **x**(t) – деяка фазова траєкторія цієї системи, яку ми будемо називати незбуреною. Далі, нехай $y(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$ - близька до незбуреної траєкторії, що реалізується при незначній зміні початкових умов. Назвемо траєкторію $y(t)$ збуреною. Тоді еволюція малого збурення $\tilde{x}(t)$ в лінійному наближенні описується рівнянням першого порядку:

$$\dot{x}(t) = A(t)\tilde{x}, \tag{5.2}$$

де матриця $A(t)$ має вигляд:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Для системи (5.2) має місце теорема:

Теорема Ляпунова. Нехай існує така константа М, що для всіх елементів A_{ij} матриці А і для довільного Т

$$\frac{1}{T}\int_0^T | A_{ij}(t) | \, dt \le M,$$

тоді:

1. Для будь-якого рішення $\tilde{x}(t)$ рівняння (5.2) існує ляпуновський характерестичний показник – дійсне число, що відрізняється від $\pm\infty$, яке визначається за формулою:

$\lambda_{\tilde{x}(t)} = \overline{\lim_{T \to 0}} \frac{1}{T} \ln \| \tilde{x}(T) \|$ (1.5)

2. При множенні рішення на константу С ляпуновський характерестичний показник не міняється:

$$\lambda_{C\tilde{x}(t)} = \lambda_{\tilde{x}(t)} \quad (5.3)$$

3. Ляпуновський характеристичний показник лінійної комбінації двох рішень не перевищує більшого із показників цих двох рішень:

$$\lambda_{C_1\tilde{x}_1(t)+C_2\tilde{x}_2(t)} \le \max(\lambda_{\tilde{x}_1(t)}, \lambda_{\tilde{x}_2(t)}) \quad (5.4)$$

4. Існує n лінійно незалежних рішень $\tilde{x}_i(t)$ (фундаментальна система рішень рівняння (5.2), яким відповідають n лупуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку зменшення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Набір чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ спектром лупуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше із цих чисел λ_1 називається старшим лупуновським показником. Спектр ЛХП потрібно розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (1.4) в цілому, а не як одне рішення $\tilde{x}(t)$, оскільки рішення не залежить від вибору фундаментальної системи $\{\tilde{x}_i(t)\}$.В силу

(5.3) – (5.4) для будь-якого рішення $\tilde{x}(t)$ ляпуновським характеристичним показником обов'язково буду одне з чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Модно довести, що для положення рівноваги системи (5.2) спектр ЛХП складається лише із дійсних частин власних чисел матриці системи першого наближення. Для граничного циклу системи (5.2) спектр ЛХП визначається за формулою:

$$\lambda_i = \frac{\ln|\rho_i|}{T}, i = 1, ..., n.$$

де ρ_i - мультиплікатор граничного циклу, а Т – його період.

До цих пір, говорячи про спектр ЛХП, ми приписували його деякій фазовій траєкторії. Вирішимо тепер більш загальне питання про стійкість динамічної системи у встановленому режимі, що диктує нам необхідність визначення спектра ЛХП аттрактору. Якщо аттрактор представляє собою положення рівноваги чи граничний цикл, то він складається із однієї траєкторії і вже визначений нами спектр буде спектром ЛХП такого аттрактору. Якщо ж аттрактор складається із множини траєкторій, як, наприклад, тор чи дивний аттрактор, то виникає далеко не очевидне питання: чи можливо приписати аттрактору у цілому спектр якої-небудь траєкторії цього аттрактора.Тут на допомогу приходить мультиплікативна ергодична теореми В.І. Оселедця, що стверджує, що типова взята навмання траєкторія на аттракторі з одиничною імовірністю буде мати цілком визначений спектр ЛХП, який можна приписати аттрактору в цілому.

Спектр ЛХП аттрактора дисипативної динамічної системи повинен задовольняти наступним умовам:

1. Сума всіх *n* показників повинна бути від'ємною:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0.$$

Це умова дисипативності, завдяки який аттрактор є притягуючою граничною множиною нульової міри в фазовому просторі.

2. У аттрактора, що не знаходиться в положенні рівноваги, обов'язково повинен бути хоча б один нулевий показник.

Нехай ляпуновські характеристичні показники впорядковані за спаданням. Будемо позначати додатній показник знаком '+' , від'ємний – знаком '-', а нулевий – нулем. Тоді аттрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності n буде відповідати набір із n знаків, який ми будемо називати сигнатурою спектра ЛХП. Дослідимо, які можуть бути сигнатури при різних розмірах фазового простору.

При n=1 можливий тільки один варіант сигнатури < - >, що відповідає аттрактору у вигляді нерухомої точки – асимптотично стійкому положенню рівноваги.

При n=2 можливі тільки два варіанти сигнатури:

< -,- > - стійке положення рівноваги;

< 0,- > - граничний цикл.

Покажемо, що при n=2 всі інші варіанти сигнатур неможливі. Дійсно, сигнатури <+,0 > , < 0,0 > неможливі, так як такі сигнатури суперечать умові дисипативності (сума ляпуновських показників не буде від'ємною). Варіант <+,- > також неможливий, так як положення рівноваги з такою сигнатурою не стійке і не є аттрактором. Якщо ж аттрактор не є положенням рівноваги, то така сигнатура виключена в силу обов'язковій наявності, в цьому випадку, нульового показника.

Можливість виникнення аттрактору з додатнім ляпуновським характеристичним показником виникає, починаючи із розмірності фазового простору n=3. Тут можливі такі варіанти сигнатур:

< -, - , - > - стійке положення рівноваги;

< 0, -, - > - граничний цикл;

< 0, 0 ,- > - двовимірний тор;

< +, 0, - > - дивний аттрактор.

Всі інші варіанти сигнатур суперечать чи умові дисипативності, чи - необхідності наявності нульового показника для аттракторів, які не є нерухомими точками, чи – визначенню аттрактора.

При збільшенні розмірності фазового простору число можливих варіантів сигнатур істотно збільшується. Наприклад, при n=4 крім дивного аттрактору з одним додатнім лупуновським показником < +, 0, - > може існувати дивний аттрактор з двома додатними показниками < +, +, 0, - >. Дивні аттрактори, які мають в спектрі ЛХП більше одного додатного показника, називаються гіперхаотичними.

Таким чином, для динамічних систем, що описуються автономними диференціальними рівняннями, ми прийшли до фундаментального висновку – принципіальна можливість реалізації дивного аттрактору починається з розмірності фазового простору n=3. На фазовій площині існування фазових аттракторів неможливе.

До речі, неможливість дивного аттрактору на площині може бути доведена такими простими міркуваннями. Кожен аттрактор, в тому числі і дивний, повинен бути стійким по Лагранжу (розташовується в обмеженій області фазового простору) і по Пуасону (зображуюча точка повинна нескінченну кількість раз повертатися в ε-окіл стартової точки траєкторій аттрактору). На фазовій площині це обов’язково приведе до самоперетину траєкторії, що суперечить теоремі Коші-Пікапа. Отже, дивний аттрактор на фазовій площині не може існувати.

Наявність в секторі ЛХП додатного показника є одним із основних критеріїв ідентифікації дивних аттракторів в конкретних прикладних динамічних системах. Тому дуже важливо вміти вираховувати спектр ЛХП чи хоча би старший показник спектру. Нажаль, для більшості практичних динамічних систем саме вираховування показника за формулою

$$\lambda = \overline{\lim_{T\to 0}} \frac{1}{T} \ln \| \tilde{x}(T) \|$$

неможливе, так як траєкторія аттрактора не може бути знайдена для довільної системи за допомогою квадратурних формул. Тому для обчислення ляпуновських характеристичних показників приходиться застосовувати методи, основані на чисельних методах. Одним з найбільш відомих та застосованих методів є так званий алгоритм Бенеттіні та інших.

5.4. Алгоритмом Бенеттіні

Як відомо, для режиму динамічного хаосу характерна наявність експоненціальної нестійкості траєкторій, кількісною мірою якої є позитивний показник Ляпунова, що характеризує ступінь чутливості системи до вибору початкових умов. Число позитивних експонент в спектрі показників Ляпунова визначається кількістю нестійких напрямів періодичних орбіт, вбудованих в хаотичний аттрактор, хоча в принципі можливі і складніші ситуації (що полягають в співіснуванні періодичних орбіт з різним числом нестійких напрямів). Ми обмежимося розглядом динамічних систем з одним позитивним показником Ляпунова λ_1. При обчисленні λ_1 робиться припущення про "типовість" фазової траєкторії, що є вирішенням динамічної системи за вибраних початкових умов. Інакше величина показника, визначена на інтервалі часу T, може відрізнятися від граничного значення λ_1 (відповідного $T \to \infty$). Зокрема, відомі випадки, коли дискретні моделі демонструють дуже тривалі перехідні процеси (до 1,500,000 ітерацій динаміка є "хаотичними", після чого стає регулярною). З погляду обчислення показника Ляпунова це відповідає тому, що величина λ_1 протягом перехідного процесу сходиться до деякого позитивного значення, і лише на дуже тривалих часах спадає до нуля. Щоб охарактеризувати поведінку типової фазової траєкторії, іноді використовують поняття " показників Ляпунова на кінцевому часі" (*finite time Lyapunov exponents*), які характеризують швидкість розгону або стиснення по різних напрямах протягом кінцевого інтервалу часу T.

Якщо рівняння динамічної системи, що генерує фазову траєкторію, відомі, то визначити величину максимального показника (або повний спектр показників Ляпунова) можна за

допомогою добре відомого алгоритму, запропонованого в роботі Бенеттіна із співавторами (незалежно схожу техніку запропонували Шимада і Нагашима). Даний метод часто називають стандартним алгоритмом розрахунку показники Ляпунова.
Розглянемо систему однорідних диференціальних рівнянь:

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^m$ у якій $\vec{x}$ - вектор стану $\vec{f}$ - нелінійна вектор-функція $\vec{\mu}$ - вектор параметрів, що управляють. Дослідження даної системи на стійкість її часткового рішення $X_p(t)$ зводиться до аналізу рівнянь у варіаціях і введення поняття k-вимірного показника Ляпунова. Проте якщо обмежитися тільки обчисленням старшого показника Ляпунова, даний алгоритм істотно спрощується. Шукана величина λ_1 визначатиме еволюцію в часі вектора збурення $r(t) = r_0 e^{\lambda_1 t}$, де r_0 - величина початкового збурення (у момент часу $t_0 = 0$), $r_0 = | x(t_0) - x_p(t_0) |$.
Дана формула є дуже наближеною, оскільки швидкість розгону траєкторій не є постійною, а залежить від вибору точки на аттракторі. Строго кажучи, показники Ляпунова визначають шляхом вирішення рівнянь у варіаціях, розглядаючи нескінченно малі збурення. Проте існують роботи, в яких обґрунтовано, що експоненціальний закон розбігання траєкторій справедливий не тільки для нескінченно малих збурень, але і для малих збурень кінцевої величини, тому остання формула цілком може бути використана при практичному аналізі локальної нестійкості. Оскільки великі значення $r(t)$ приймати не може (інакше не виконуватиметься умова лінійного наближення), при розрахунку старшого показника Ляпунова проводять перенормування, в ході якого задаються нові збурення, - малі по величині, але вибрані в напрямі, який відповідає вектору збурення безпосередньо перед перенормуванням. Потім знов оцінюють швидкість експоненціального розбігання довколишніх траєкторій. В результаті обчислюється усереднена уздовж фазової траєкторії $X_p(t)$ кількісна характеристика ступеня хаотичності. Схемний процедура перенормування зображена на рис. 5.4

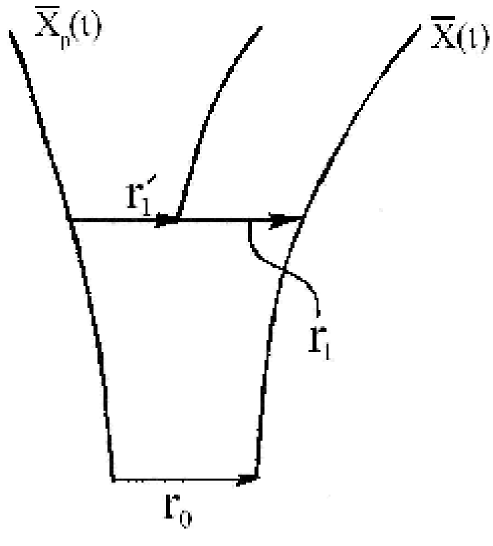


Рис. 5.4. Процедура перенормування для розрахунку старшого показника Ляпунова

Опишемо цю процедуру для розглянутої вище динамічної системи $\dot{x} = X(x)$

Процедура обчислення старшого ляпуновського показника починається з побудови чисельного методу рішення системи (5.1) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб мати впевненість у виході траєкторії **x**(t) на аттрактор, тобто відкидаються фазові координати траєкторії, що відповідають перехідному процесу. Тривалість перехідного процесу не підкорюється яким-небудь загальним закономірностям і тому її приходиться визначати індивідуально для кожної конкретної задачі. В якості розрахункового чисельного методу частіше всього застосовують метод Рунге-Кутти 4 чи 5 порядку. Для збільшення точності обчислення потрібно використовувати змінний часовий крок відліку, проводячи корекцію цього кроку із застосуванням коректуючої процедури Дормана-Пріса. Це дозволяє добитися локальної похибки обчислення порядку O(10^{-15}). Кінцеву точку цього відліку позначимо через $\mathbf{x_0}$ і приймаємо її за початкову точку траєкторії на аттракторі. Потім виводимо систему рівнянь першого наближення:

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=x(t)} \tilde{x} \quad (5.5)$$

Далі будемо спільно вирішувати системи рівнянь (5.2) та (5.5). Причому для системи рівнянь (1.3) в якості початкової точки беремо $\mathbf{x_0}$, а для системи (5.5) – деяку точку $\tilde{x}_0$, для якої виконується відношення $\|\tilde{x}_0\| = 1$. Наприклад, в якості початкового вектору збурень можна взяти вектор $\tilde{x}_0 = \{1,0,0,0,\ldots,0\}$. Задамо деякий часовий інтервал T і вирішимо чисельно системи (5.5) та (5.2), знайшовши вектор стану та його збурення в момент часу T: $\mathbf{x}(\mathrm{T}) = \mathbf{x_1}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{x}_1$.

Тепер перевизначимо вектор збурення так, щоб його направлення залишалося незмінними, а норма дорівнювала вихідному значенню 1, тобто покладемо $\tilde{x}_1^0 = \dfrac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|}$. Необхідність такого перенумерування пов'язана з тим, що у випадку, коли траєкторія є нестійкою (наприклад, належить дивному аттрактору), амплітуда збурення дуже швидко прямує до нескінченості і без виконання перенумерування буде переповнення регістрів комп'ютера, в наслідок чого комп'ютер зависне.

Далі знову продовжимо процедуру чисельного рішення системи (5.2) з початковою точкою $\mathbf{x_1}$ і системи (5.5) з початковою точкою $\tilde{x}_1^0$. Знайшовши вектор стану і вектор збурення в момент 2T: $\mathbf{x}(2\mathrm{T}) = \mathbf{x_2}$, $\tilde{x}(2T) = \tilde{x}_2$, перевизначимо вектор збурення $\tilde{x}_2^0 = \dfrac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}_2\|}$. Потім багато раз повторимо аналогічну процедуру знаходження рішень перенумерування.

Якісно алгоритм Бенеттіні можна проілюструвати за допомогою рисунку 5.5.

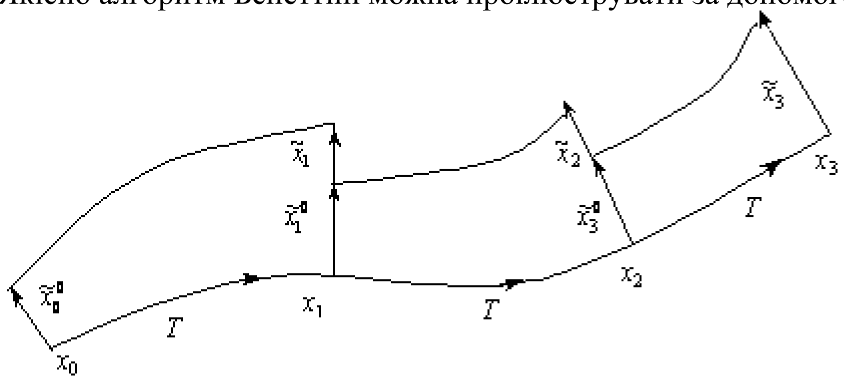


Рис. 5.5. Якісна схема алгоритму Бенеттіні .

Якщо початкова точка $\mathbf{x_0}$ належить типовій траєкторії аттрактора, а початкове збурення $\tilde{x}_0$ взято на наздогад, то еволюція амплітуди збурення буде визначатися, очевидно, старшим ляпуновським характерестичним показником. В силу формули $\lambda = \overline{\lim_{T\to 0}} \dfrac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\|$ приблизно отримуємо: $\lambda_1 \approx \dfrac{1}{KT}\sum_{i=1}^{k} \ln \|\tilde{x}_i\|$.

При цьому число кроків К повинно бути достатньо великим. Практично ми закінчуємо чисельне обчислення, коли значення величини λ_1 стає незмінним відносно якої-небудь, наперед вибраної, кількості знаків після десяткової роздільної точки. Далі описану процедуру бажано повторити декілька раз з різними початковими умовами для вектору стану і вектору збурення і провести статистичну обробку отриманих результатів. Довжина інтервалу перенумерування Т вибирається індивідуально для кожної конкретної задачі.

Для обчислення інших ляпуновських показників необхідно розрахувати еволюцію відповідного числа векторів збурення вздовж фазової траєкторії, що розглядається. Якщо проводити обчислення за алгоритмом Бенеттіні, то в кожному векторі збурення, при достатньо великому часу чисельного обчислення, буде домінувати складова з максимальним ляпуновським показником.

5.5. Перетин і відображення Пуанкаре

Розглянемо динамічну систему із неперервним часом, динаміка, якої описується деякими диференціальними рівняннями. Нехай, для визначеності, це система із трьохвимірним фазовим простором виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, ..., z); \\ \dot{y} &= f_2(x, y, ..., z); \quad (5.6) \\ \dot{z} &= f_3(x, y, ..., z); \end{aligned}$$

Далі розглянемо деякий розв'язок системи (5.6), якому відповідає у фазовому просторі траєкторія Г. Помістимо у фазовому просторі деяку площину S, рівняння якої має вигляд:

$$S(x, y, z) = 0 \qquad (5.7)$$

Вибір такої плоскості досить довільний, однак вона повинна розміщуватися так, щоб траєкторія **Г** багато разів її перетинала і дотикання траєкторії з площиною було неможливе (трансверсальний перетин). Така плоскість ***S*** називається січною Пуанкаре фазової траєкторії **Г**. Позначимо точки перетину траєкторії **Г** з січною ***S*** через $a_1, a_2, ...a_n$ (Рис. 5.6). Відмітимо, що послідовність точок $\{a_n\}$ задається перетином **Г** з *S* в одному напрямі. Отримана дискретна множина точок $\{a_n\}$**,** *n* = 1,2,3..., на січній Пуанкаре називається перетином Пуанкаре для траєкторії **Г**.

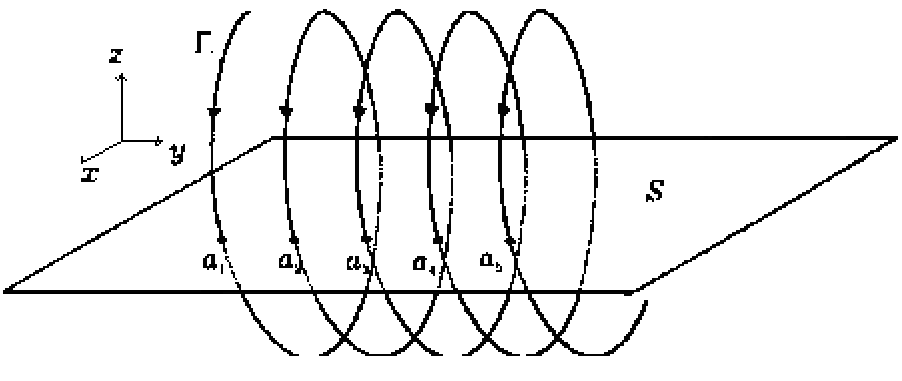


Рис. 5.6 Перетин Пуанкаре

Перетин Пуанкаре також породжує деяке дискретне відображення, яке ставить у відповідність будь-якій точці a_n найближчу наступну за нею точку a_{n+1}.

Закон відповідності між попередньою і наступною точками перетину Пуанкаре називається відображенням наслідування або відображенням Пуанкаре. Для даного тривимірного випадку, що розглядається це відображення буде вже двовимірним:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} &= P_2(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

так, як точки перетину Пуанкаре розташовуються на площині і третю координату завжди можна виразити через дві перші.

Таким чином, задача вивчення динамічної системи (5.6) може бути зведена до задачі вивчення відповідного відображення Пуанкаре, яке має розмірність, на одиницю меншу, ніж розмірність початкової динамічної системи. При цьому структура динамічної системи однозначно (але не взаємно-однозначно) визначає структуру породжуваного нею дискретного відображення (5.8). Ця заміна об'єкту дослідження не супроводжується якими-небудь апроксимаціями, аналіз залишається точним. Однак при такій заміні об'єкту дослідження ми втрачаємо інформацію про характер динаміки в проміжках часу між послідовними перетинами січної площини, зокрема, про тривалість інтервалів часу між цими перетинами і про топологічні властивості фазової траєкторії. Проте зберігається можливість аналізувати багато принципових питань, наприклад, виникає в системі регулярний або хаотичний режим.

Нехай дискретні рівняння (5.8) є відображенням Пуанкаре диференціальних рівнянь (5.6). Припустимо, (x_0, y_0) – стійка нерухома точка цього відображення. Їй відповідатиме стійкий однотактний граничний цикл системи (5.6).

Припустимо, дискретні рівняння (5.8) мають періодичний розв'язок:

$$x_{n+k} = x_n, y_{n+k} = y_n$$

де k – дискретний період. Такий розв'язок називатимемо ***k*-циклом.** Тоді k-циклу відображенню відповідатиме більш складніший k-тактний граничний цикл системи (5.5**).** Причому спектр ЛХП такого k-циклу дискретного відображення (5.8), доповнений нульовим показником, збігається із спектром ЛХП системи.

Якщо розв'язком дискретної системи (5.8) є квазіперіодична або хаотична послідовність, то відповідно квазіперіодичний або хаотичний режим встановлюватиметься в системі диференціальних рівняння (5.5). При цьому спектри ЛХП квазіперіодичних і хаотичних відображень збігаються з відповідними спектрами ЛХП квазіперіодичних або хаотичних аттракторів системи (5.5) за винятком одного нульового показника .

Знайти відображення Пуанкаре для конкретних нелінійних систем в явному вигляді вдається дуже рідко, в тих виняткових випадках, коли диференціальні рівняння допускають аналітичне рішення. Проте можна побудувати відображення Пуанкаре як чисельний алгоритм. При цьому виникають дві самостійні задачі. Перша – це знаходження деякої траєкторії **Г** системи (5.5) за заданих початкових умовах. Друга – це визначення координат точок перетину траєкторії з січною площиною, тобто побудова перетину і відображення Пуанкаре. Обчислити траєкторію можна за допомогою будь-якого відомого чисельного методу. Як уже відзначалося, для цього найчастіше застосовуються методи Рунге-Кутти. А для визначення точок перетину траєкторії з січною площиною необхідно на кожному кроці чисельного інтегрування системи (5.5) обчислювати значення функції $\boldsymbol{S(x,y,z)}$ до тих пір, поки не буде зафіксований момент зміни знаку $\boldsymbol{S(x,y,\ z)}$**,** який відповідає моменту перетину траєкторією січної площини.

Наприклад, нехай зміна знаку функції $\boldsymbol{S(x,y,z)}$ відбулася між n-м і $(n\ +1)$ кроком, так що величини $S_n = S(x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t))$ і $S_n = S(x(n+1\Delta t), y(n+1\Delta t), z(n+1\Delta t))$ де Δt – крок чисельної інтеграції, мають різні знаки, як показано на мал. 7. Далі необхідно уточнити значення точки перетину a_s. Цю задачу можна розв'язати із заданою ступінь точності, застосувавши методи інтерполяції. Послідовно зменшуючи крок інтегрування в два рази, можливо закінчити обчислення, коли різниця $|S_{n+1-}S_n|$ буде менше наперед заданої величини, яка визначає точність розрахунку точок a_s. Принципових труднощів тут немає, проте зростаючі вимоги до точності визначення a_s потребують додаткових обчислень, що ускладнить відповідні алгоритми обчислення і значно збільшить час, необхідний для розрахунків.

Для подолання цих складнощів М. Ено був запропонований простий і економічний метод, який полягає в наступному. Доповнимо систему рівнянь (5.5) ще одним співвідношенням, а саме

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial S}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$ так як

$$\left(\dot{\ }\right)=\frac{d}{dt}$$

то враховуючи (2.1), можемо записати

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial x}f_1(x,y,z)+\frac{\partial S}{\partial y}f_2(x,y,z)+\frac{\partial S}{\partial z}f_3(x,y,z) \qquad (2.5)$$

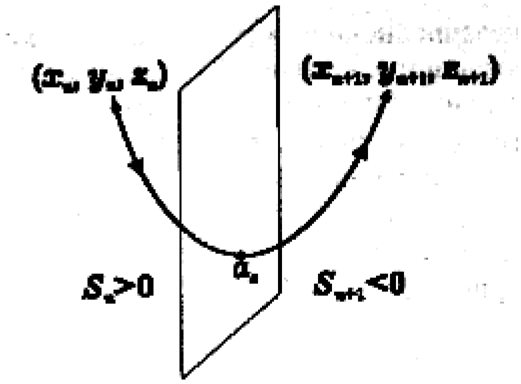


Рис. 5.7 Метод Ено

Введемо для зручності позначення

$$H(x,y,z)=\frac{\partial S}{\partial x}f_1(x,y,z)+\frac{\partial S}{\partial y}f_2(x,y,z)+\frac{\partial S}{\partial z}f_3(x,y,z)$$

$$\frac{dS}{dt}=H(x,y,z)$$

Тоді, враховуючи, що

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds},\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds},\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds},\frac{dt}{ds}=\frac{1}{H(x,y,z)}$$

можемо записати

$$\frac{dx}{dS}=\frac{f_1(x,y,z)}{H(x,y,z)}$$

$$\frac{dy}{dS}=\frac{f_2(x,y,z)}{H(x,y,z)} \qquad (5.9)$$

$$\frac{dz}{dS}=\frac{f_3(x,y,z)}{H(x,y,z)}$$

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x, y, z)}$$

Візьмемо значення **x, y**, *z, t і* **S,** отримані на *(n +1)* кроці чисельного інтегрування і зробимо ще один крок по ***S***, величина якого рівна

$\Delta S = -S_{n+1}$

В результаті інтеграції системи (5.5) тільки на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$ ми відразу попадаємо на січну **S**, причому похибка визначення точки перетину строго дорівнює погрішності інтеграції системи (5.5) на одному кроці і буде мінімальною. При знаходженні інших точок перетину (якщо вони існують) траєкторією Г плоскості ***S*** кожного разу інтегруватимемо систему (5.8) на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$ який змінюватиметься для кожної нової точки перетину.

Алгоритм побудови відображення Пуанкаре по методу Ено зручно програмувати спочатку як чисельний розв’язок рівнянь (5.8). При цьому функція $H(x, y, z)$ вважається рівною одиниці до тих пір, поки виконуються стандартні кроки за часом, і перевизначається відповідно до (5.7), коли виникає необхідність провести нестандартний крок *по* **S.** Оскільки в обох випадках використовується один і той же чисельний метод, досягається бажане узгодження по точності.

Всі проведені міркування очевидним чином поширюються на фазовий простір більшої розмірності, тільки замість січної двовимірної плоскості необхідно використовувати перетин n-вимірного фазового простору гіперповерхнею розмірності *n-1*. Та обставина, що при використанні відображення Пуанкаре розмірність зменшується на одиницю, інколи буває дуже корисною.

Метод перетину Пуанкаре особливо наочний у випадку **n=*3***, коли множина точок перетину лежить на двовимірній поверхні. Для **n>4** графічне представлення багатовимірного перетину Пуанкаре втрачає наочність. У цих випадках аналізують двох- або тривимірні проекції перетинів Пуанкаре.

Для періодичних розв’язків динамічної системи перетин Пуанкаре, як багатовимірний, так і його проекції, містять кінцеве число нерухомих точок, які повторюються строго через період розв’язку. У режимі дивного аттрактора на січній з'явиться деяка хаотична множина точок, число яких зростатиме із зростанням часу чисельної інтеграції. В деяких випадках ця хаотична множина може розташовуватися уздовж тонкої стрічки, близької по структурі до одновимірної кривої на січній. Цю криву приблизно можна прийняти за відображення Пуанкаре і аналізувати методом діаграм Ламерея.

Слід зазначити, що при вивченні хаотичних режимів достовірну інформацію про структуру перетину Пуанкаре можна отримати тільки при досить великому числі точок в перетині Пуанкаре.

5.7. Розмірність аттракторів

Як ми вже відзначали, математичним образом детермінованого хаотичного режиму в динамічній системі є дивні аттрактори, які мають надзвичайно складну геометричну структуру. Однією з важливих характеристик будь-якого геометричного об'єкту є його розмірність. На даний час розглядається багато типів розмірностей для аттракторів динамічних систем. Наприклад, фрактальна ємкість, розмірність Хаусдорфа-Безіковича, інформаційна і кореляційна розмірності, узагальнені розмірності Рені і так далі. Такі розмірності можуть давати істотну інформацію про структуру аттрактора, служити кількісною відміною ознакою регулярного аттрактора від дивних, а для дивних аттракторів виступати як якась міра «дивацтва» аттрактора.

Практично всі відомі дивні аттрактори є фрактальною множиною, яка має дробову розмірність Хаусдорфа- Безіковича. Цим вони відрізняються від регулярних аттракторів, відповідна розмірність яких є цілою. Безпосередній підрахунок фрактальної розмірності дивного аттрактора є надзвичайно трудомістким завданням, для вирішення якої в загальному випадку не існує яких-небудь стандартних алгоритмів. Проте порівняно просто може бути підрахована так звана ляпуновска розмірність аттрактора, яка на практиці найчастіше використовується як кількісна міра фрактальності.

Розгледимо дисипативну динамічну систему розмірності *n*. Поряд з початковою динамічною системою розглянемо ансамбль її ідентичних копій, які відрізняються одна від одної тільки різними початковими станами. У початковий момент часу у фазовому просторі цьому ансамблю відповідатиме якась «хмара» точок, що зображуються. В процесі еволюції початкова хмара змінюватиметься відповідно до динаміки системи, що задається її математичною моделлю.

Передбачимо, що біля даної динамічної системи існує дивний аттрактор. Спектр ЛХП такого аттрактора складається з ***n*** показників, впорядкованих по убуванню $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$. Причому $\lambda_1 \; > 0$ і принаймні, існує один нульовий показник. Крім того, в силу дисипативності системи, сума всіх ляпуновских характеристичних показників негативна:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i < 0. \qquad (5.10)$$

Будемо послідовно обчислювати суми вигляду (5.10) для m=1,2,…Спочатку ми будемо отримувати додатні, а потім від'ємні величини σ_m.Знайдемо таке *m*, що $\sigma_m \geq 0$, але $\sigma_{m+1} < 0$. В суму σ_m увійдуть всі додатні, всі нульові і частина від'ємних ляпуновських характеристичних показників. Якщо розглядати підпростір,що створений векторами збурень, які відповідають першим *m* ляпуновським показникам, то в цьому підпросторі об'єм "хмари" зображуючих точок ансамбля систем не зменшиться в процесі еволюції, зокрема, зростає при $\sigma_m > 0$. В той же час в підпросторі, що створений векторами збурень, які відповідають першим m+1 характеристичним показникам, об'єм "хмари" зображуючих точок буде зменшуватися при збільшені часу.

В 1979 році Каплан і Йорк запропонували гіпотузу, сенс якої полягає в тому, що фрактальна розмірність аттрактору D_{Fr} розташована в інтервалі

$$m \leq D_{Fr} < m+1$$

І складається із цілої *m* та деякої дробової частини *d* так, що

$$D_{Fr} = m + d$$

Причому ця дробова розмірність визначається із умови, що рух на аттракторі відповідає фізичним представленням про стаціонарність процесу, а саме:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ...\lambda_m + d\lambda_{m+1} = 0$$

Звідси отримуємо, що розмірність аттрактору D_{Fr} визначається за формулою:

$$D_{Fr} = m + \frac{\sum_{i+1}^{m} \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}$$

Ця формула називається формулою Каплана-Йорка.

5.8. Спектральна щільність та інваріантна міра.

Розглянемо знову динамічну систему загального виду (5.2). Припустимо, що система має аттрактор у вигляді граничного циклу, якому відповідає деяке періодичне, з циклом *T*, рішення **x(t)**. Нехай вектор-функція **x(t)** має компоненти

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)\}, \qquad (5.11)$$

де кожна з функцій $x_i(t)$ - періодична з періодом *T*. Як відомо, періодична функція $x_i(t)$ може бути розкладена в ряд Фур'є.

$$x_i(t) = c_{0,i} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,i} \cos(kw_1 t - \varphi_{k,i}); i = 1, 2, ..., n, \qquad (5.12)$$

де $w_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ - основна кругова частота $\varphi_{k,i}$ – фаза. Із цієї формули видно, що кожна із періодичних функцій $x_i(t)$ цілком визначається сукупністю величин $c_{k,i,}\varphi_{k,i}$. Сукупність величин $c_{k,i}$ називається спектром амплітуди, а сукупність $\varphi_{k,i}$ - спектром фаз функції $x_i(t)$. Для багатьох додатків достатньо знати лише спектр амплітуд. Він застосовується настільки часто, що коли говорять про спектр, то мають на увазі амплітудний спектр. Спектр періодичної функції дуже просто зобразити графічно. В декартовій системі координат $O\omega c$ по осі абсцис відкладаються частоти $\omega = k\omega_1$, а по осі ординат – амплітуди $c = c_{k,i}$. Потім точки з координатами $(k\omega_1; 0)$ і $(k\omega_1; c_{k,i})$ з'єднуються відрізками прямих, які називаються спектральними лініями. В результаті кожній гармоніці розкладу в ряд Фур'є (5.12) буде відповідати цілком визначена спектральна лінія. Ми отримаємо спектр, що складається із рівновіддалених спектральних ліній. Причому частоти гармонік знаходяться в простих кратних співвідношеннях. Такий спектр називається дискретним гармонійним спектром [1].

Зауважимо, що для всіх компонент вектор-функції (5.11) ми отримаємо дискретні гармонійні спектри, спектральні лінії яких мають однакові частоти і відрізняються тільки висотою. Тому для якісного вивчення спектру достатньо обмежитися побудовою спектра однієї із компонент вектор-функції. Як правило, на практиці спектральні властивості багатовимірних динамічних систем вивчаються на прикладі однієї із компонент вектор-функції стану, що суттєво спрощує задачу, але в той же час дозволяє досліджувати характерні особливості отриманих спектрів.

Тепер нехай початкова динамічна система (5.2) має квазіперіодичний аттрактор. В цьому випадку рішення системи **x(t)**, що відповідає аттрактору, буде квазіперіодичною вектор-функцією. Будемо вивчати спектральні характеристики аттрактора за допомогою однієї із компонент **x(t)** , яку позначимо, опускаючи індекс, через *x*(t). Квазіперіодична функція *x*(t) може бути записана у вигляді:

$$x(t) = x(\psi_1(t), \psi_2(t), ...\psi_p(t)), \qquad (5.13)$$

де функція $x(\psi)$ має період 2π за кожним аргументом ψ_i і між частотами ω_i не існує раціональних співвідношень. Використовуючи розкладення функції (5.13) в загальному ряді Фур'є, можна показати, що в цьому випадку спектр представляється у вигляді дискретної сукупності спектральних ліній [1]. Проте, на відміну від періодичного випадку, ці лінії не рівновіддалені, а розташовуються на частотах, які представляють собою лінійні комбінації базових частот:

$$\omega_{k_1,...,k_2} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + ... + k_p\omega_p.$$

Припустимо, що початкова система має дивний аттрактор, одна із траєкторій якого **x(t).** Спектральні властивості будемо вивчати за допомогою однієї із компонент вектор-функції **x(t)**, яку позначимо через *x*(t). В цьому випадку функція *x*(t) буде неперіодичною, тому замість розкладення в ряд Фур'є необхідно користуватися інтегралом Фур'є. Нагадаємо, що для неперіодичної функції має місце наступне співвідношення:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (5.14)$$

$$\text{де } S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (5.15)$$

Формули (3.1) і (3.2) є основними формулами теорії спектрів. Сенс формули (3.1) полягає в тому, що функція *x*(t) представляється сумою нескінченно великого числа нескінченно малих коливань, які як завгодно близькі за частотою. Комплексна амплітуда *C* кожного окремого коливання нескінченно мала і дорівнює:

$$dC = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \qquad (5.16)$$

Частотний інтервал між двома сусідніми коливаннями також нескінченно малий. Він дорівнює $d\omega$.

Величина $S(\omega)$ називається комплексним спектром неперіодичної функції, а її модель $\Phi(\omega) = |S(\omega)|$ просто спектром. В цьому випадку інтервали між окремими лініями необмежено скорочуються і спектр може бути представлений неперервною лінією, що огинає сімейства спектральних ліній. Такого роду спектр називається суцільним (неперервним).

Так як із формули (5.16) слідує, що

$$S(\omega) = \pi \frac{dC}{d\omega},$$

то величина $S(\omega)$ виражає не безпосередню амплітуду, а так звану спектральну щільність. Тому такий спектр називається спектром щільності коливань або Фур'є-спектром.

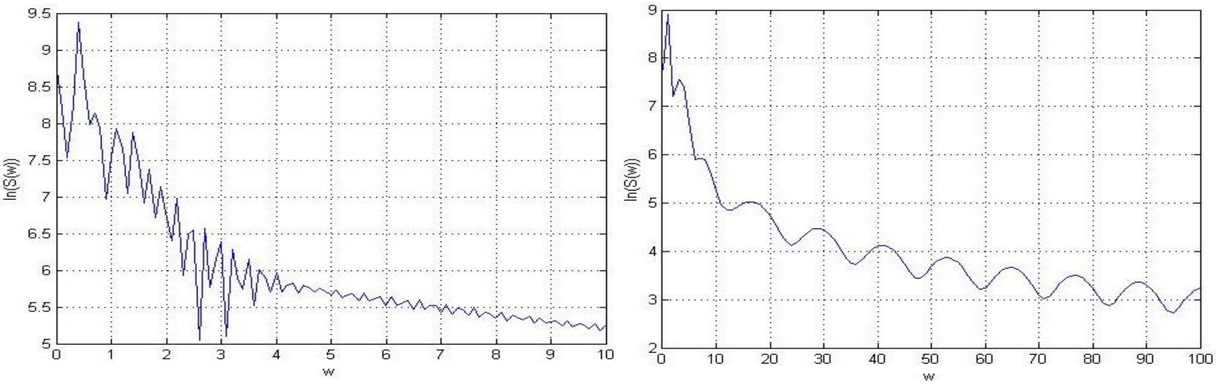
Побудова Фур'є-спектрів для аттракторів конкретних динамічних систем викликає деякі труднощі, так як часто невідомий аналітичний запис рішення динамічної системи, що відповідає тим чи іншим траєкторіям аттрактора. Крім того при побудові спектра можуть виникати проблеми при обчисленні інтеграла Фур'є на нескінченному проміжку. Тому потрібно робити наступним чином. Чисельним методом знаходиться яка-небудь типічна траєкторія аттрактора. Далі побудова спектру аттрактора, незалежно від того регулярний він чи дивний, виконується за допомогою перетворення Фур'є (5.15). Причому інтегрування проводиться на проміжку

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-i\omega t}d\omega, \qquad (5.17)$$

де t_0 - тривалість перехідного процесу (тобто час, за який траєкторія, що стартує в початковий момент часу $t = 0$, виходить на аттрактор), t_1 - деякий розумно вибраний момент часу, в який ми припиняємо інтегрування. Звичайно, проінтегрувати (5.17) ми зможемо тільки чисельно, застосував при цьому один із наближених методів інтегрування. Якщо траєкторія належить граничному циклу чи квазіперіодичному аттрактору, то можна застосувати порівняно простий метод Сімпсона. Якщо ж траєкторія належить дивному аттрактору чи аттрактору, який ми перевіряємо на "дивність", то доцільно застосувати більш громіздкий, але значно більш точний метод Фейлона [1].

Які же Фур'є-спектри ми отримаємо для різних типів аттракторів? Якщо аттрактор є граничним циклом, то спектральна щільність має вигляд , що якісно подібний до вигляду, приведеного на малюнку 9а. По осі абсцис відкладена частота, а по осі ординат $S_p = \lg|S(\omega)|$.

Спектр буде представляти собою неперервну лінію з чіткими локальними максимумами в точках $\omega = k\omega_1$. Логарифмічне масштабування по осі ординат тут застосовується із ціллю зменшення розмірів графіка. При $t_1 \to +\infty$ значення максимумів можуть трохи змінитися. Ознакою оптимальності вибору значення t_1 буде припинення зміни величини S_p з точністю до визначеного числа знаків після десяткової точки.



а б

Рис. 5.8. Типічні розподіли спектральної щільності для граничного циклу (а) і хаотичного аттрактору (б).

Якщо траєкторія належить квазіперіодичному аттрактору, то зовнішній вид типового Фур'є-спектру, на перший погляд, буде подібний до того, що наведений на малюнку 9а. Тобто також будемо мати неперервну лінію з чіткими максимумами (піками). Але по осі абсцис ці піки будуть не рівновіддаленими, а розміщатися в точках, які представляють собою лінійну комбінацію раціонально непорівнянних частот тору.

Нарешті, якщо траєкторія належить дивному аттрактору, то має місце велике різноманіття у видах Фур'є-спектру. Можливий вид спектру дивного аттрактору приведений на малюнку 9б. На відміну від регулярних аттракторів, які мають дискретний спектр, спектр дивного аттрактора суцільний (неперервний). Таким чином, наявність у аттрактора суцільного Фур'є-спектру може слугувати ще однією ознакою того, що аттрактор дивний.

На завершення цієї теми коротко ознайомимося із поняттям інваріантної міри аттрактора. Нехай ми маємо ансамбль ідентичних динамічних систем виду (5.2), які відрізняються тільки початковими умовами, і нехай D – деяка обмежена область фазового простору. Цій області припишемо міру μ(D), яка дорівнює відносному числу представлень ансамбля, стан якого належить області D. Об'єднання областей, що не перетинаються, $D_{1,\ldots\ldots,}D_n$ буде мати міру, що дорівнює сумі мір цих областей:

$$\mu(D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + ... + \mu(D_n).$$

В силу динаміки індивідуальних систем, які складають ансамбль, міра, що приписана різним підмножинам фазового простору, буде , взагалі кажучи, змінюватися з плином часу. Припустимо, що початкове розташування зображуючих точок спеціально підібрано так, що міра любої вимірної множини, розташування якої у фазовому просторі фіксоване, весь час залишається незмінною. Відповідна міра називається інваріантною мірою для динамічної системи, яка фігурує в якості індивідуального елемента ансамбля.

Якщо динаміка системи регулярна і протікає в обмеженій області фазового простору, то інваріантна міра існує (теорема Крилова-Боголюбова) [1]. Більш того, інваріантних мір може бути багато. Але серед всіх інваріантних мір основний інтерес представляють звичайна інваріантна міра або міра Крилова-Боголюбова. Припустимо, що початкова точка динамічної системи належить басейну притягання деякого аттрактора, що нас цікавить. Для довільної області D міру μ(D) визначимо у відповідності до співвідношення:

$$\mu(D) = \lim_{T\to\infty} \frac{\tau(D, x_0, T)}{T} \quad ,$$

де **x0** – точка старту фазової траєкторії, $\tau(D, x_0, T)$ - час знаходження зображуючої точки в області D при спостереженнях за інтервалом часу T. Якщо введена таким чином міра виявляється однією і тією ж майже при кожному виборі початкової точки, то це і буде інваріантна міра.

Математичні доведення, які відносяться до загальних властивостей хаотичних аттракторів, як правило, походять із припущення про наявність однозначно визначеної загальної міри. Проте до цього часу строго довести існування загальної інваріантної міри для більшості отриманих в прикладних задачах дивних аттракторів не вдалося. Тим не менше чисельно побудовані інваріантні міри часто бувають дуже корисними при вивчені хаотичної поведінки динамічних систем.

Коротко зупинимося на практичному алгоритмі побудови загальної інваріантної міри аттрактора. Спочатку ми чисельно будуємо яку-небудь траєкторію, що належить аттрактору, і запам'ятовуємо масив його значень фазових координат. Далі будуємо проекцію фазового портрета, що нас цікавить, на екрані комп'ютера, використовуючи отриманий масив фазових точок. При цьому застосовуємо техніку кодування зображення відтінками якого-небудь заздалегідь визначеного кольору, наприклад, білого чи червоного [1]. Послідовно виводимо на екран фазові точки, причому при попаданні у визначений піксель екрану декількох точок пропорційно їх кількості збільшуємо цифровий код яскравості даного пікселя. При достатньо великій кількості точок в масиві координат фазової траєкторії ми отримаємо проекцію фазового портрета, деякі частини якої будуть зображуватися більш яскраво, ніж інші. Яскраві частини фазового портрету відповідають тим областям, в які попадає зображуюча точка частіше, а більш темні частини фазового портрету - областям, куди зображуюча точка попадає більш рідко. Таким чином, ми практично отримали проекції розподілу загальної інваріантної міри по фазовому портрету аттрактора. Такі розподіли бувають дуже корисними при вивчені сценаріїв переходу до хаосу.

5.9. Системний підхід розв'язання приямих і обернних задач в системах з хаосом

5.9.1 Вступ

Однією з основних проблем дослідження нелінійних динамічних систем при аналізі складної динаміки є експоненціальна чутливість системи до малих збурень, яка характеризує присутність в системі детермінованого хаосу. При цьому мала зміна біфуркаційного параметра призводить до якісної зміни поведінки фазових траєкторій системи, тобто до нерегулярної хаотичної динаміки. Проте, на відміну від випадкового процесу, даний експеримент можна відтворити, тобто хаотична траєкторія детермінованої нелінійної системи повністю відтворюється, якщо покласти точно такі ж початкові умови та точність обчислення. Основним напрямком такого дослідження є проведення експериментів на основі математичного та комп'ютерного моделювання з використанням спеціальних обчислювальних методів, які мають високу точність обчислення та враховують особливості типів звя'зків нелінійної системи.

Для складання ефективних математичних описів досліджуваних об'єктів важливою задачею є отримання нових чи еквівалентних видів математичних моделей, а також параметрична і структурна ідентифікація нелінійних систем в хаотичному режимі за точними і неповними спостереженнями лише однієї фазової координати системи. Дана задача є складною і потребує створення ефективних програмних засобів комп'ютерної реалізації.

У вітчизняній та світовій науковій літературі зустрічається низка ґрунтовних праць, присвячених розробці підходів та обчислювальних методів дослідження детермінованого хаосу в прямих і обернених задачах. В той же час проблематика ефективного застосування комп'ютерних систем моделювання, включаючи їх структурну та алгоритмічну організацію їх використання з врахуванням різних типів нелінійності, залишається недостатньо висвітленою. Тому ***мета даної роботи*** – розробка системного підходу (структурно-функціональних схем) дослідження детермінованого хаосу в нелінійних системах та пов'язаних з ними обернених задачах.

5.9.2. РОЗРОБКА СХЕМ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1, 2, ..., n. \qquad (5.9.1),$$

що є математичною моделлю деякої динамічної системи. У фазовому просторі цієї системи правими частинами рівнянь (1) породжується векторне поле швидкостей, яке зіставляє кожній зображуючій точці X_0 вектор $X(x_i)=\{X_1(x_1,x_2,...,x_n),...,X_n(x_1,x_2,...,x_n)\}, i=1,...,n,$ модуль якого чисельно дорівнює швидкості руху фазової точки по траєкторії. Сам вектор в кожній точці x_i направлений по дотичній до фазової траєкторії. Таким чином, динамічна система (1) може бути записана у векторній формі $\dot{X}=X(x)$, де $\dot{X}=(\dot{x}_1 \ \ . \ . \ . \ \ \dot{x}_n)$ – відповідні вектори. В подальшому будемо припускати, що праві частини системи (1) є аналітичними функціями. Дана система задовольняє умовам теореми Коші-Пікара – через кожну точку фазового простору проходить одна і тільки одна траєкторія. Тоді основною задачею дослідження нелінійних динамічних систем різної природи, які, як правило, не мають точних аналітичних розв’язків, є задача виявлення областей хаотичних, регулярних і перехідних режимів, а також закономірностей переходу від одного режиму до іншого через відповідну послідовність біфуркацій [1].

На рис. 1 запропоновано структурно-функціональний підхід до розв’язання поставленої задачі дослідження. При цьому етапи схеми дослідження складаються зі спеціальних чисельних методів із локальною точністю чисельного розв’язання системи (1) до $O(10^{-12})$ – $O(10^{-16})$.
Поставимо задачу реконструкції. Нехай маємо скалярну реалізацію динамічної системи (1), отриману за точними вимірами: $x_i=[x(i\Delta t), i=1,..,N]$, де x – значення реалізації в момент часу $i\Delta t$, Δt – інтервал дискретизації і N – довжина реалізації. Потрібно реконструювати атрактори і математичну модель системи (1), а для часової послідовності – підтвердити наявність чи відсутність хаосу.

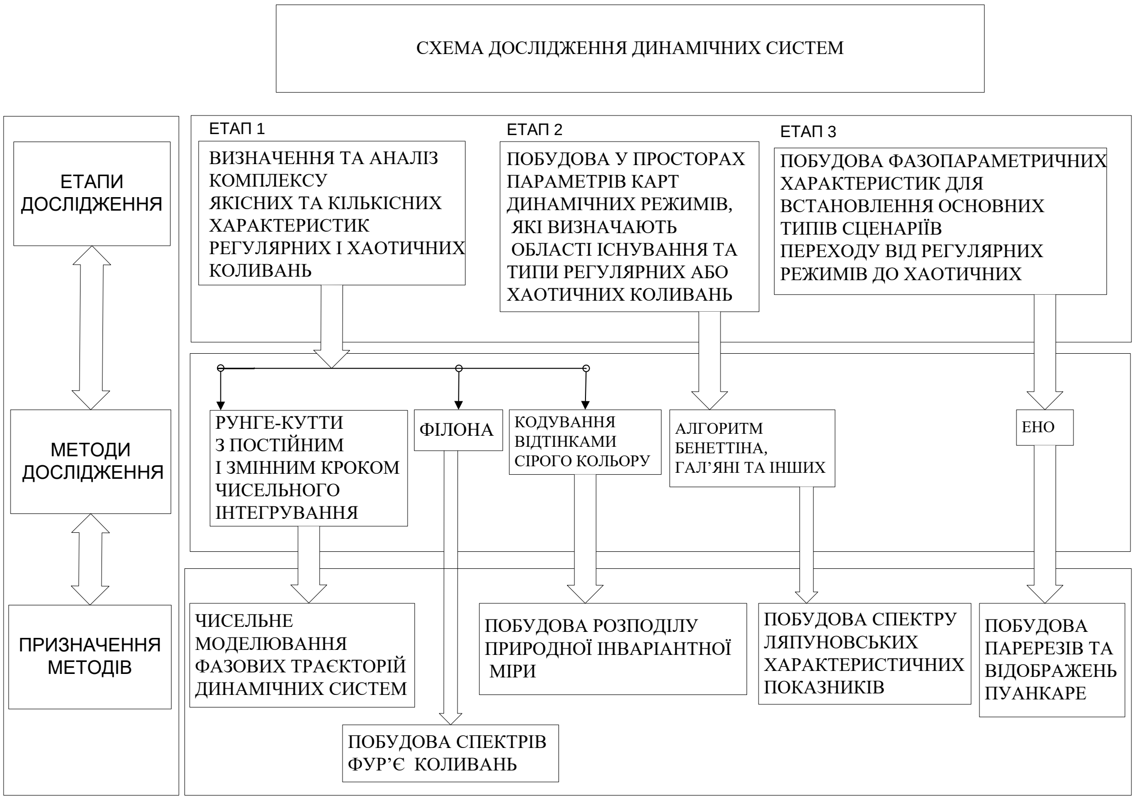


Рис. 5.9.1. Структурно-функціональна схема дослідження динамічних систем

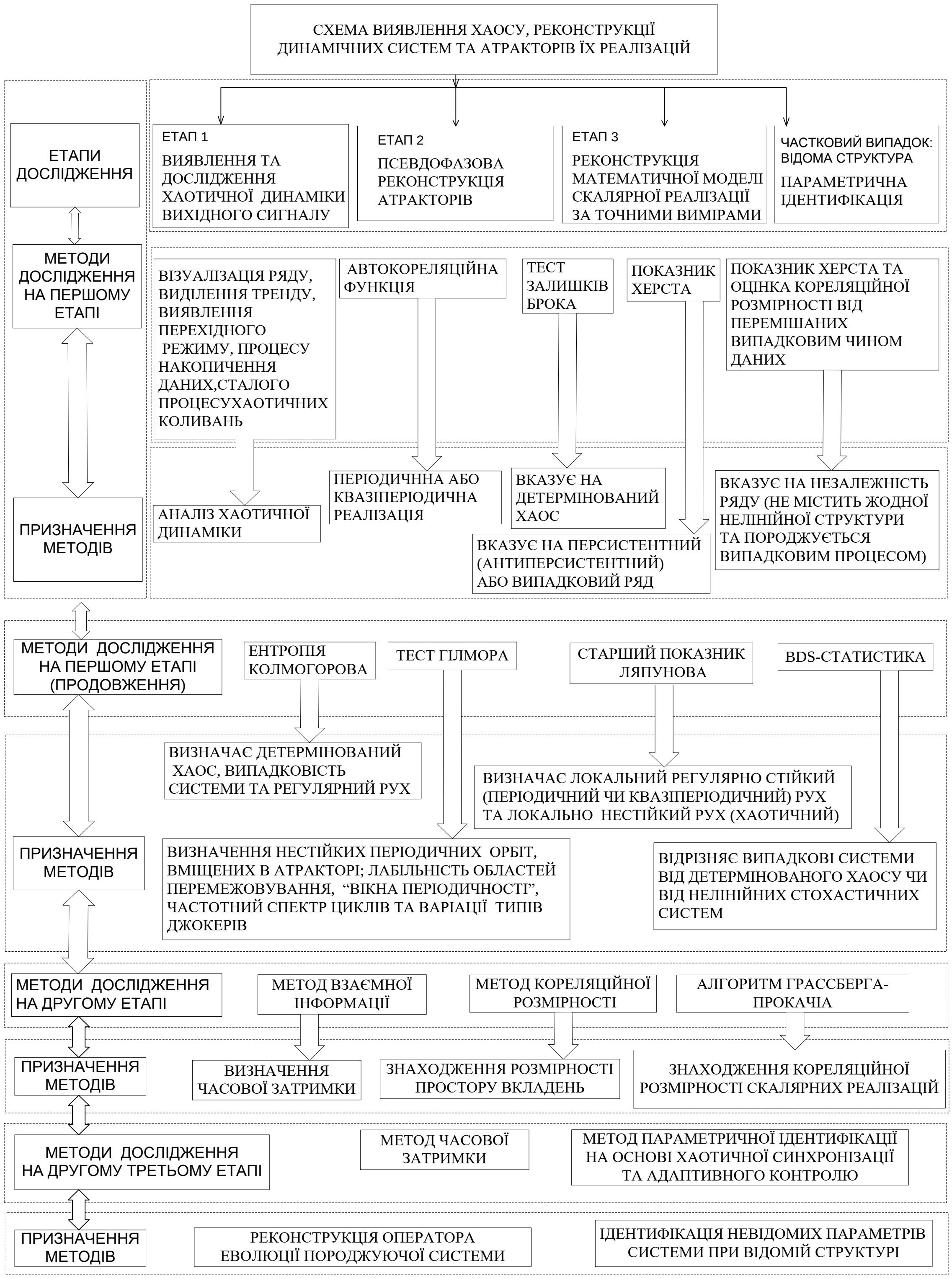


Рис. 5.9.2. Структурно-функціональна схема реконструкції атракторів та динамічних систем за їх скалярними реалізаціями

Для розв’язання даної задачі на рис. 5.9.2 представлено структурно-функціональну схему із етапами дослідження. Задача реконструкції оператора еволюції системи (5.9.1) ускладнюється, якщо інформація про об’єкт дослідження обмежена однією скалярною реалізацією або одновимірною реалізацією функції від фазових координат системи. Для коректного підбору моделі динамічної системи на рис. 3 зображена функціональна схема процесу реконструкції. При цьому вибір структури моделі і виду модельного оператора еволюції базуються на апріорній інформації про систему та на аналізі динаміки вихідного ряду системи.

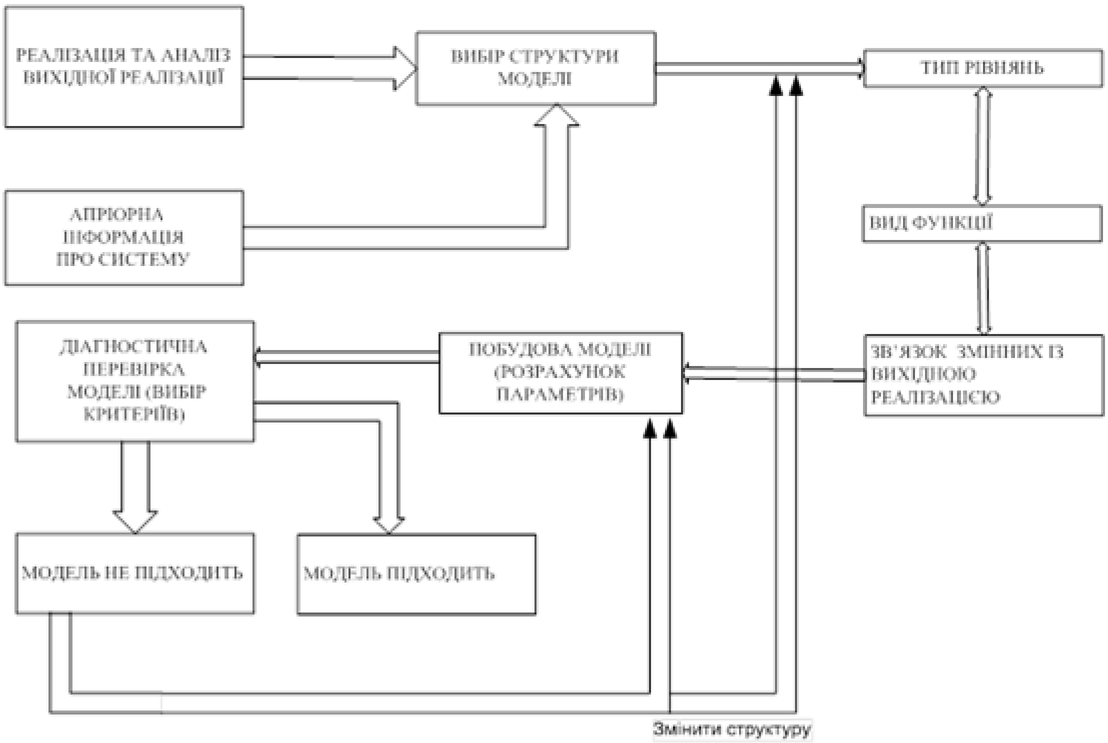


Рис. 5.9.*3*. Функціональна схема реконструкції систем за скалярною реалізацією

Для оцінювання невідомих параметрів реконструйованої системи скористаємося методом глобальної реконструкції [2]. Задамо структуру динамічної системи звичайними диференціальними рівняннями 1-го порядку $\dot{x} = F_j(x_j),\ j = 1,..,n$ із заздалегідь обчисленою за методом кореляційної розмірності розмірністю системи (розмірність простору вкладення атракторів). Тоді для отримання конкретного виду еволюційного оператора функції F_j представимо у вигляді розкладання за деяким базисом, обмежуючись при цьому скінченним числом членів розкладання. В простішому випадку задання F_j може здійснюватися поліномом деякої степені $v: F_j(x_i) = \sum_{l_1,l_2,...,l_n=0}^{v} C_{j,l_1,l_2,...,l_n} \prod_{s=1}^{n} x_{s,i}^{l_k},\ j = 1,..,n, \sum_{s=1}^{n} l_s \le v,$ де $C_{j,l_1,l_2,...,l_n}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно розв'язати систему N лінійних алгебраїчних рівнянь $x_{j,i+1} = \sum_{l_1,l_2,...,l_n=0}^{v} C_{j,l_1,l_2,...,l_n} \prod_{s=1}^{n} x_{s,i}^{l_k}, i = 1,.., N,\ j = 1,..,n$ з невідомими $C_{j,l_1,l_2,...,l_n}$, в якій N – кількість точок псевдофазової реконструкції скалярного часового ряду $x_i(t)$, що використовуються для апроксимації правих частин, а v – степінь полінома. Для апроксимації можуть застосовуватися поліноми Лежандра, Фур'є чи інший базис розкладання функцій F_j. Тоді невідомі коефіцієнти при поліномах обчислюються за рекурентним методом найменших квадратів (РМНК). При цьому діагностична перевірка моделі представляє собою повне дослідження отриманої математичної моделі згідно структурно-функціональної схеми (5.9.1). Встановлення областей регулярної і хаотичної динаміки сконструйованої математичної моделі, а також побудова відповідних атракторів відповідно до вже дослідженої динаміки скалярної реалізації і є основними критеріями адекватності вибору математичної моделі.

5.9.3. ПРИКЛАДИ ПСЕВДОФАЗОВОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ АТРАКТОРІВ

Як приклад, розглянемо малодосліджену нелінійну систему Ю.-Ш. Чена [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz, \end{aligned} \qquad (5.9.2)$$

де параметри $a \geq 0-$ збереження суми процентної ставки, $b \geq 0-$ вартість інвестицій, $c \geq 0-$ еластичність попиту на комерційних ринках. Перше рівняння цієї системи описує зміну в часі процентної ставки, друге – інвестиційного попиту, а третє – індексу цін. Детальний опис моделі представлений в роботі [3].

Результати дослідження були проведені для скалярних реалізацій по першій та другій координаті для даної системи, отриманої числовим розв'язком системи з використанням алгоритму Дорманда-Принса [4]. Було проведено 2 комп'ютерні експерименти дослідження детермінованого хаосу: при хаотичному та регулярному режимах динаміки системи. Вибірки рядів як для хаотичних, так і для регулярних режимів були вибрані по 100000 значень даних. Початкові умови для експериментів були вибрані $x(t_0) = 2, y(t_0) = 3, z(t_0) = 2,$ а параметри – $a = 3,\ b = 0.1, c = 1$ – для хаотичного режиму і $a = 3, b = 0.24, c = 1$ та $a = 2.475, b = 0.1, c = 1.8$ – для регулярного. При цьому крок дискретизації методу Рунге-Кутти склав 10^{-3}.

Для уникнення помилок при дослідженні детермінованого хаосу, зокрема при обчисленні розмірності вкладення, кореляційної розмірності D_2, тесту Брока, ентропії Колмогорова, BDS-тесту, пов'язаних зі скінченністю ряду, було застосовано критерій А. Цоніса, що визначає мінімально необхідну довжину ряду : $N > 10^{2+0,4D_2}$. А оскільки оцінка кореляційної розмірності реконструйованого атрактора системи (2) склала 2.21 (див. табл. 1), то мінімально необхідна довжина ряду повинна перевищувати $10^{2+0,4 \cdot 2,21} = 766$ значень.

На рис. 5 – 10 приведені результати дослідження для даних часових реалізацій регулярного і хаотичного режиму нелінійної системи (5.9.2). Характеристики кількісних та якісних ознак зведені у відповідні таблиці.

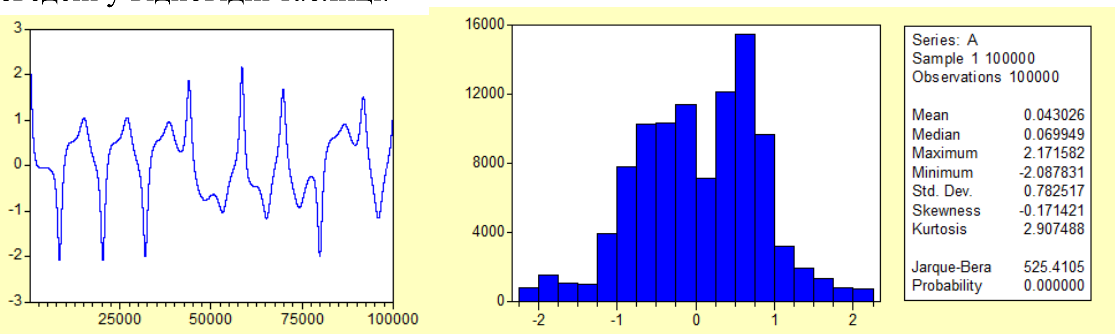


Рис. 5.9.4. Динаміка скалярної реалізації хаотичного режиму та її статистичні дані

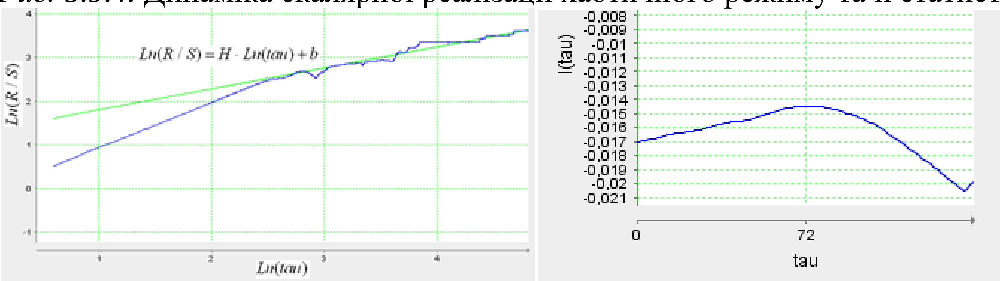


Рис. 5.9.5. Лінійна регресія оцінки показника Херста (зліва) та графік функції взаємної кореляції (справа) 1-ої скалярної реалізації хаотичного режиму

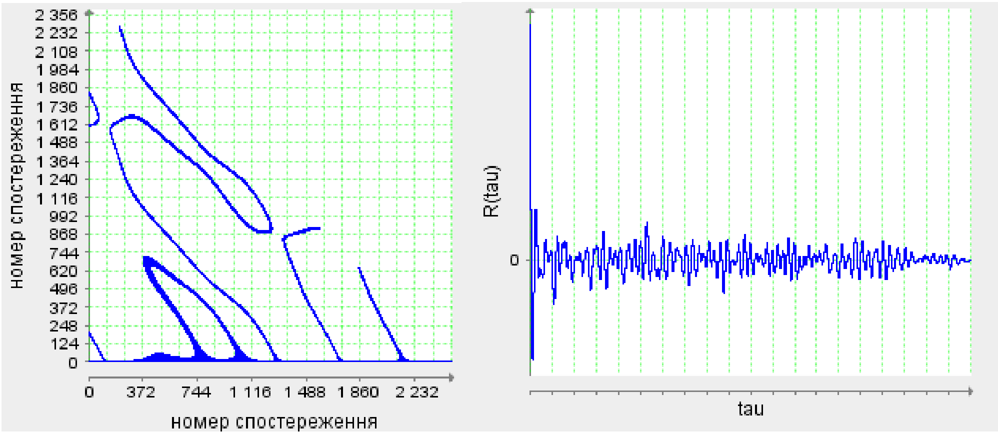


Рис. 5.9.6. Тест Гілмора: інтервальний джокер і русла (зліва) та автокореляційна функція (справа) першої скалярної реалізації хаотичного режиму системи (2)

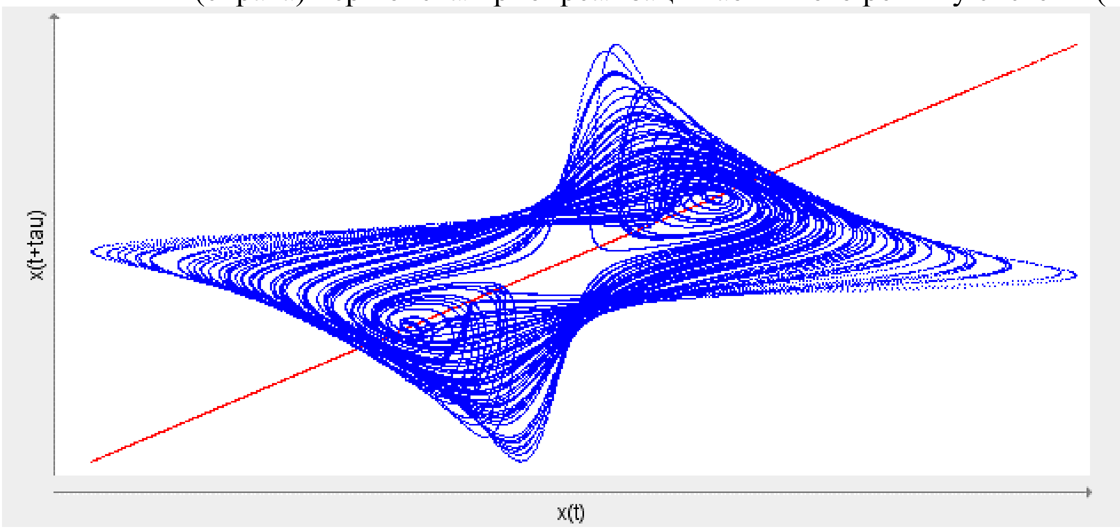


Рис. 5.9.7. Псевдофазова реконструкція першої реалізації хаотичного режиму системи (2). Часова затримка 139 секунд, розмірність вкладення – 3

Із кількісних та якісних характеристик, представлених в таблиці 1, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентним (ергодичними, що складаються із частих реверсів підйом-спад), має нелінійну структуру (підтверджену тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризуються ефектом турбулентності. Автокореляційна функція на великих проміжках часу прямує до нуля, що свідчить про відсутність кореляції між сусідніми значеннями (під впливом нестійкості за Ляпуновим системи), а додатні показники Ляпунова і Колмогорова вказують на присутність в ряді хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атрактора).

Таблиця 5.9.1 – Кількісні і якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі для 1-ої скалярної реалізації хаотичного режиму

Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)	Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)
Показник Херста	0.4791552279363	Автокореляція	прямує до нуля
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0.4957591621218764	Старший показник Ляпунова	0.243
Тест Брока	D_2: 2.211і 2.213 λ_1: 0.243 і 0.241	Розмірність Мінковського	2.52

Ентропія Колмогорова	0,243	Візуалізація ряду	хаотичний режим
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2.211 87.91	Розмірність вкладення	3
Тест Гілмора та ε	Інтервальний джокер, ε = 0.02471	Часова затримка	139 секунд

Оскільки BDS-статистика значно більша 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [5]. На рисунку 5.9.6 представлено графік “тісного повернення” – графічний тест Гілмора. Тут бачимо “порожні” області, що не містять точок, і області із суцільними лініями. Присутність ”порожніх” областей вказує на розриви у відображенні, а суцільних ліній – на ”шумові” цикли, тобто ця картина свідчить про присутність в скалярній реалізації інтервальних джокерів (областей випадкових фазових стрибків) із наявними руслами складного частотного спектру (області детермінованої поведінки). Візуалізація ряду також свідчить про присутність хаосу та відсутність тренду. Реконструйований атрактор на рис. 5.9.7 також підтверджує припущення наявності хаосу.

Із кількісних та якісних характеристик, представлених в таблиці 5.9.2 для регулярного режиму, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентними, не породжуються випадковими процесами (підтверджується тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризуються ефектом турбулентності. Автокореляційна функція квазіперіодична (періодична), що свідчить про квазіперіодичність (періодичність) відповідної скалярної реалізації, а нульові показники Ляпунова і Колмогорова вказують на відсутність в ряді хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атрактора). Оскільки BDS-статистика значно більша 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [5].

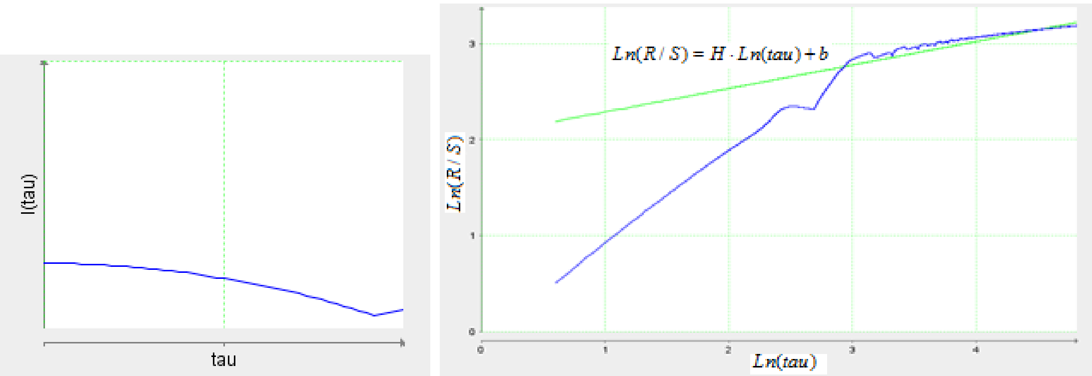


Рис. 5.9.8. Функція взаємної кореляції (зліва) та оцінка показника Херста (справа) скалярної реалізації регулярного режиму системи (5.9.2)

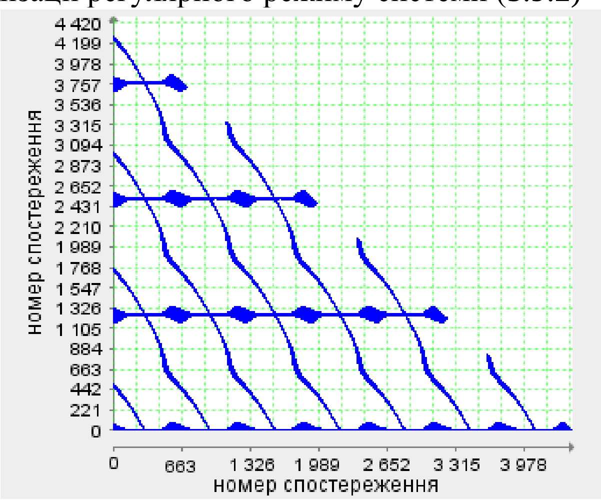


Рис. 5.9.9. Тест Гілмора: періодичні орбіти скалярної реалізації регулярного режиму

На рисунку 5.9.9 представлені графіки "тісного повернення" – графічний тест Гілмора. Тут зображено суцільні чорні лінії, які проходять горизонтально та вертикально вздовж всього графіка через рівні інтервали, визначені квазіперіодичністю (періодичністю) вимірювань в одиницях часу спостережень.

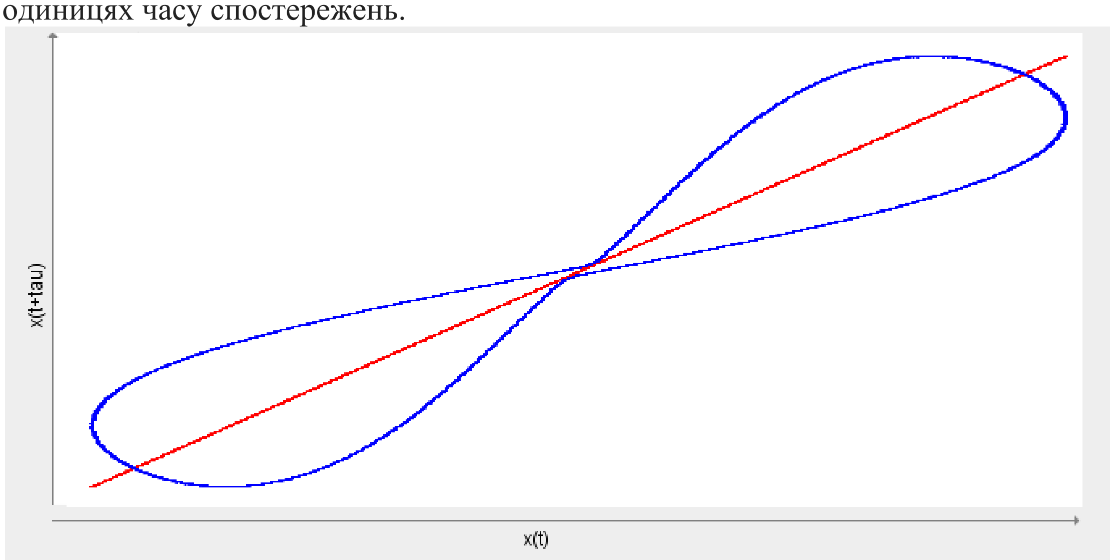


Рис. 5.9.10. Псевдофазова реконструкція скалярної реалізації регулярного режиму системи (5.9.2). Часова затримка 44 секунди, розмірність вкладення –3

Таблиця 5.9.2. – Кількісні і якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі скалярної реалізації регулярного режиму

Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)	Назва характеристики	Її опис (кількісне значення)
Показник Херста	0.24449230462814917	Автокореляція	Періодична
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0.5236470025920382	Старший показник Ляпунова	0
Тест Брока	D_2 : 2.417 і 2.332 λ_1 : 0.0 і 0.27	Розмірність Мінковського	2.755
Ентропія Колмогорова	0	Візуалізація ряду	Періодичний рух
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2.417 17.19	Розмірність вкладення	3
Тест Гілмора та ε	періодичні орбіти, $\varepsilon = 0.04097$	Часова затримка	44 секунди

Наявність квазіперіодичних (періодичних) орбіт на графіку свідчить про квазіперіодичність (періодичність) скалярної реалізації та про наявність русел складного частотного спектру (областей детермінованої поведінки). Візуалізація відповідного ряду також свідчить про відсутність хаосу та про періодичність (квазіперіодичність). Реконструйований атрактор на рис. 10 підтверджує припущення наявності періодичної (квазіперіодичної) поведінки одновимірної реалізації.

5.9.4. ПРИКЛАД РЕКОНСТРУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Розглянемо класичну нелінійну систему- осцилятор Ресслера, математична модель якої має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - z,\\ \dot{y} &= \omega x + ay,\\ \dot{z} &= b + z(x-c),\end{aligned} \tag{5.9.3}$$

де γ – параметр зворотного зв'язку; δ – параметр адаптації, ω – параметр, що визначає основну власну частоту коливань (було вибрано значення $\omega = 0.93$); інші стандартні параметри були вибрані такими $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$.

Вибірка скалярної реалізації по 1-ій фазовій координаті хаотичного режиму на атракторі системи склала 100000 значень. При дослідженні точність оцінювання, використовуючи метод Рунге-Кутти п'ятого порядку із корегуючою процедурою Дорманда-Прінса для змінного кроку чисельного інтегрування, склала 10^{-7}. Початкові умови були вибрані наступні $x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0.001$. Використовуючи метод послідовного диференціювання [5], за РМНК оцінили невідомі коефіцієнти системи (5.9.3). При цьому отримали реконструйовану математичну модель системи Ресслера:

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = z,\\ \dot{z} = -0.2 - 10x + 0.5y - 9.85z + 1.0225xy + yz -\\ -0.15xz - 0.15y^2 - 0.15x^2 + 0z^2.\end{cases} \tag{5.9.4}$$

На рис. 11 представлено атрактор системи (5.9.4). При цьому всі основні топологічні властивості і динаміка реконструйованого атрактора цілком відповідають оригінальному атрактору Ресслера (5.9.3).

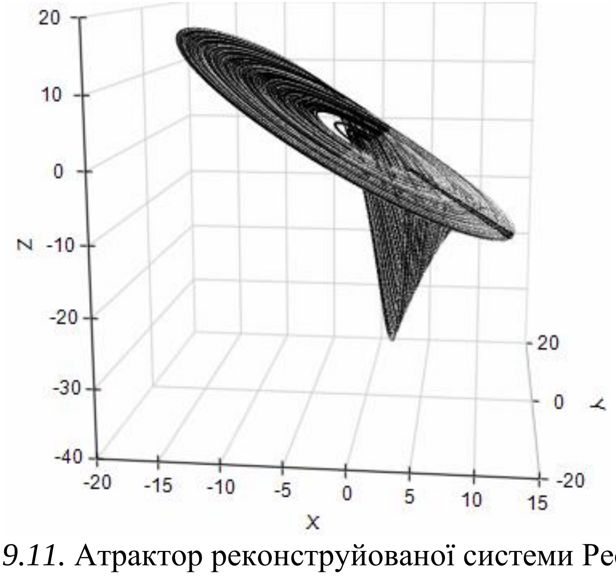


Рис. 5.9.11. Атрактор реконструйованої системи Ресслера

5.9.5. ВИСНОВКИ

В даному пункті розглянуто задачу дослідження детермінованого хаосу для нелінійних динамічних систем, заданих диференціальними рівняннями, а також обернену задачу – реконструкції виявлених атракторів та математичної моделі самої системи за точними і неповними спостереженнями. Для розв'язання поставлених прямих і обернених задач запропоновано системний підхід, описаний структурно-функціональними схемами досліджень. На прикладі нелінійної системи Ю.-Ш. Чена продемонстровано псевдофазову реконструкцію атракторів за спостереженнями скалярних реалізацій фазових координат хаотичного і регулярного режимів. При цьому експериментальні дослідження реалізації даної системи при хаотичному режимі підтвердили неможливість прогнозування експериментальних даних при виявленому хаосі на проміжках часу, що перевищують деякий часовий масштаб, логарифмічно залежний від неточності задання початкових умов. Це зумовлюється експоненціальною чутливістю вихідної системи до малих збурень. Також, на прикладі системи Ресслера продемонстровано реконструкцію математичної моделі за спостереженнями 1-ої скалярної реалізації фазової координати при хаотичному режимі.

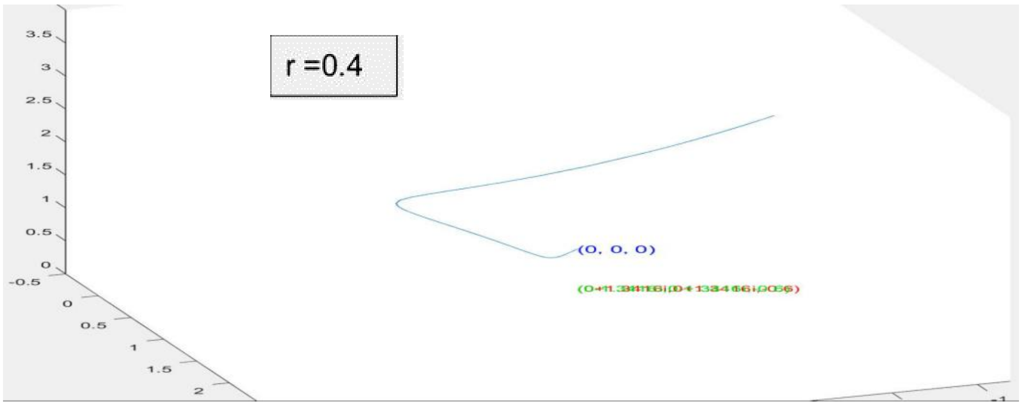
5.10. Приклад дослідження.

1. В пакеті для обчислень MATLAB написати програму, яка знаходить чисельний розв'язок та будує фазовий портрет (x, y, z) системи Лоренца для вказаної початкової точки та вказаних параметрів.

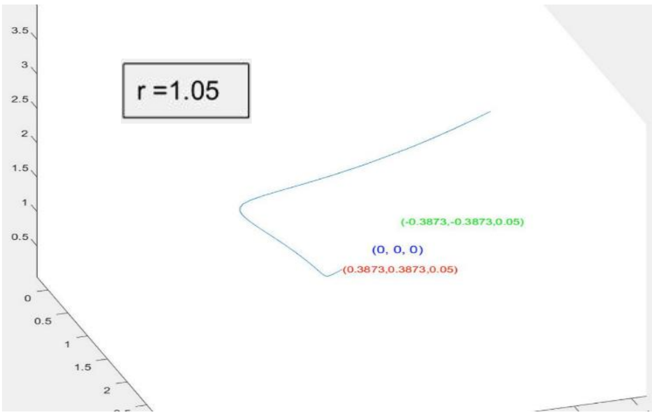
Аналогічно як для попередньої лабораторної роботи, пишемо програму яка за допомогою вбудованих функцій для розв'язання систем диференційних рівнянь знаходить чисельний розв'язок та будує фазовий портрет. Програма здатна також об'єднувати графіки у відеофайл, що зручно для перегляду послідовної зміни фазового портрету.

2. Зобразити фазові портрети (x, y, z) для системи Лоренца, варіюючи параметр r від 0.4 до 40, демонструючи зміну фазового портрету. Інші параметри взяти $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$.

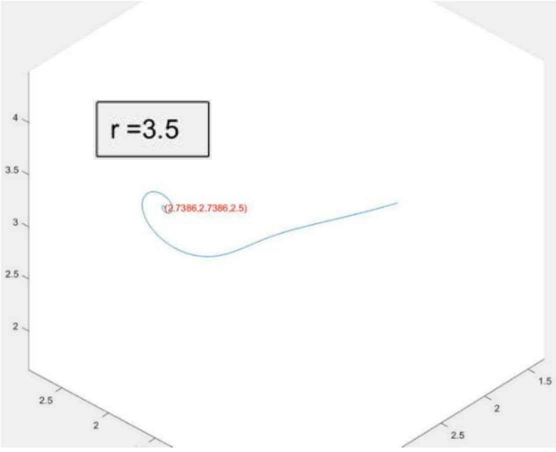
Варіюємо параметр r. Спочатку візьмемо $r = 0.4$.



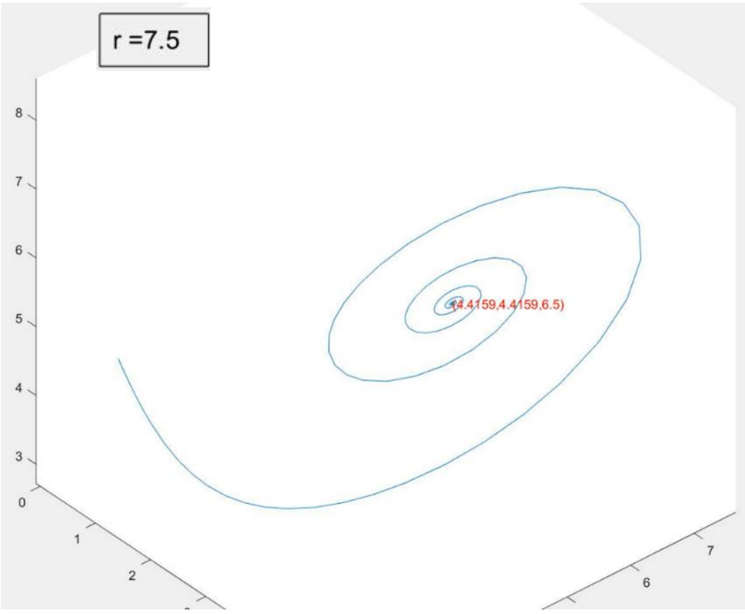
$r = 0.4$. Траєкторія прямує в точку (0, 0, 0) – атрактор



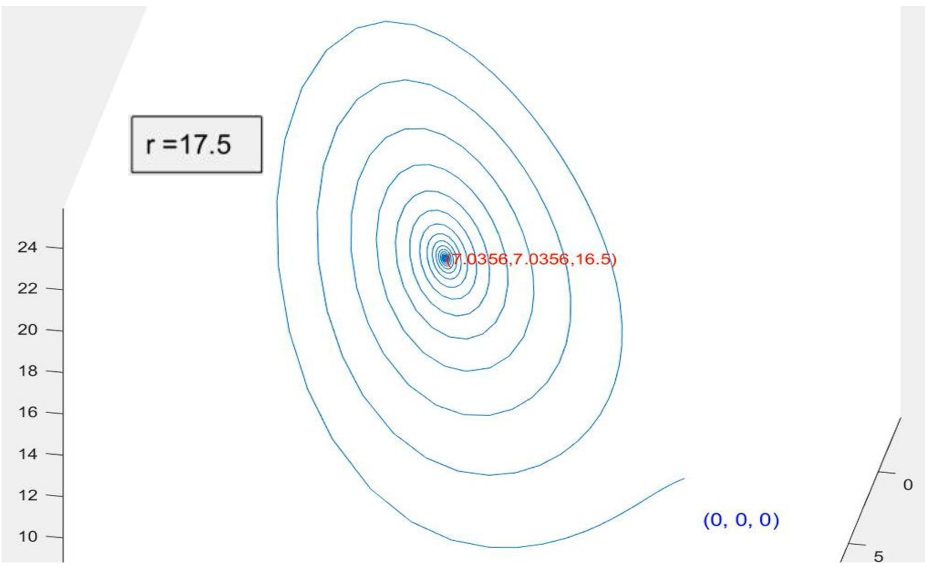
$r = 1.05$ Тепер стало ще 2 атрактори, показано червоним та синім



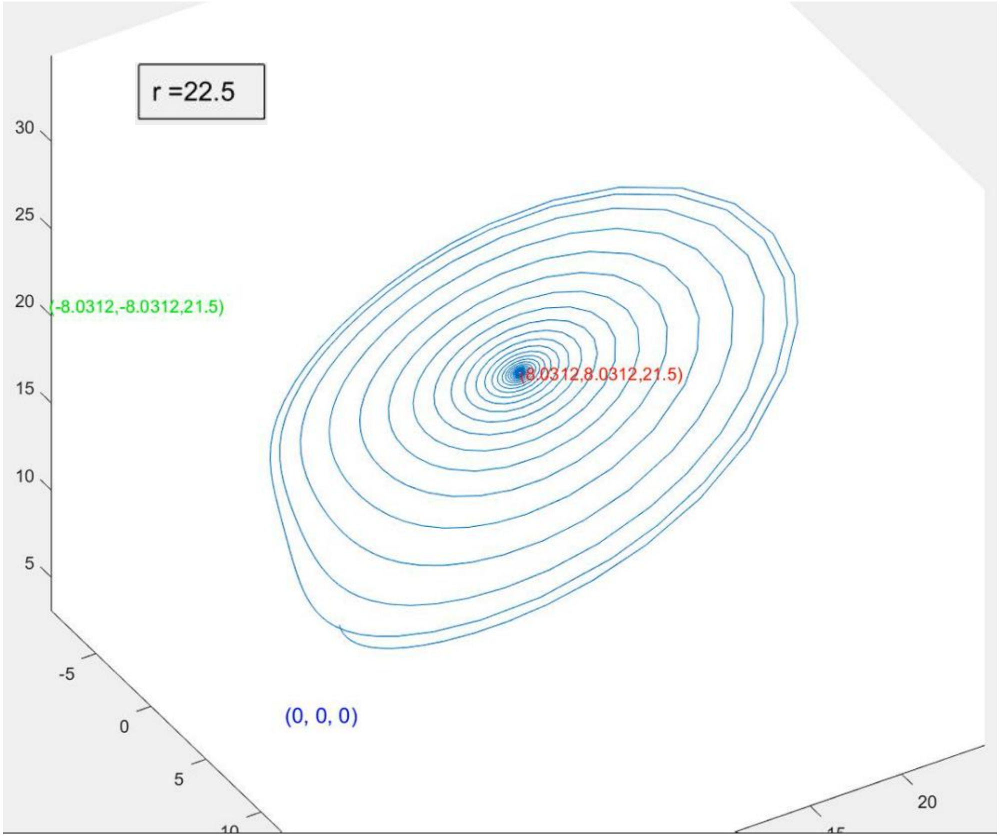
$r = 3.5$ Тепер чітко видно, що один з атракторів – фокус. При такому параметру r маємо 2 стійких фокуси (траєкторія на рисунку вище прямує до одного з них)



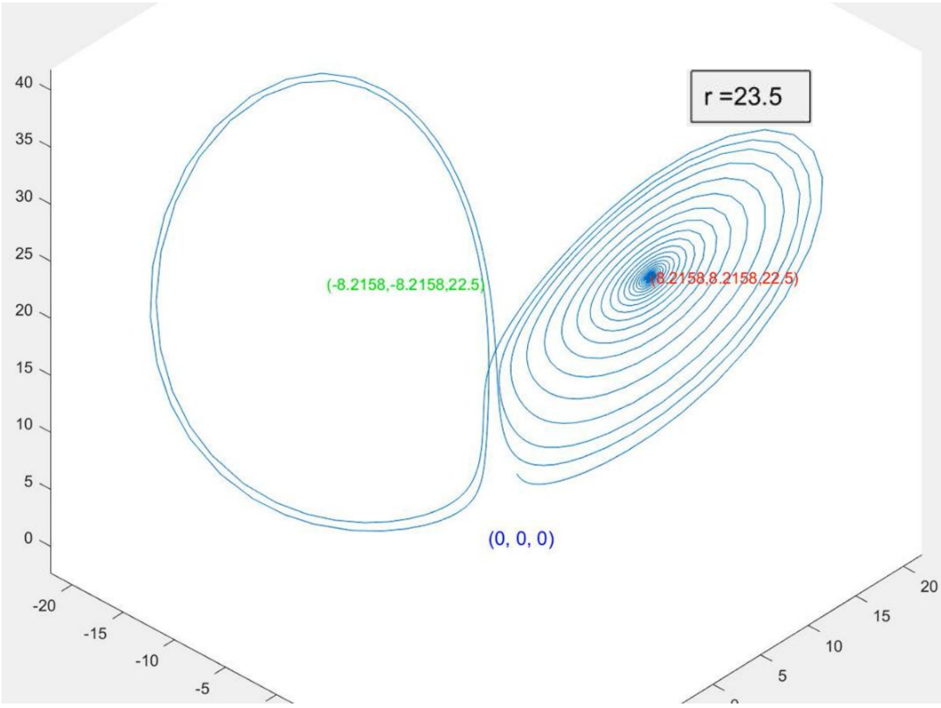
$r = 7$ Фокус стає більш широким. При такому параметру r маємо 2 стійких фокуси (траєкторія на рисунку вище прямує до одного з них)



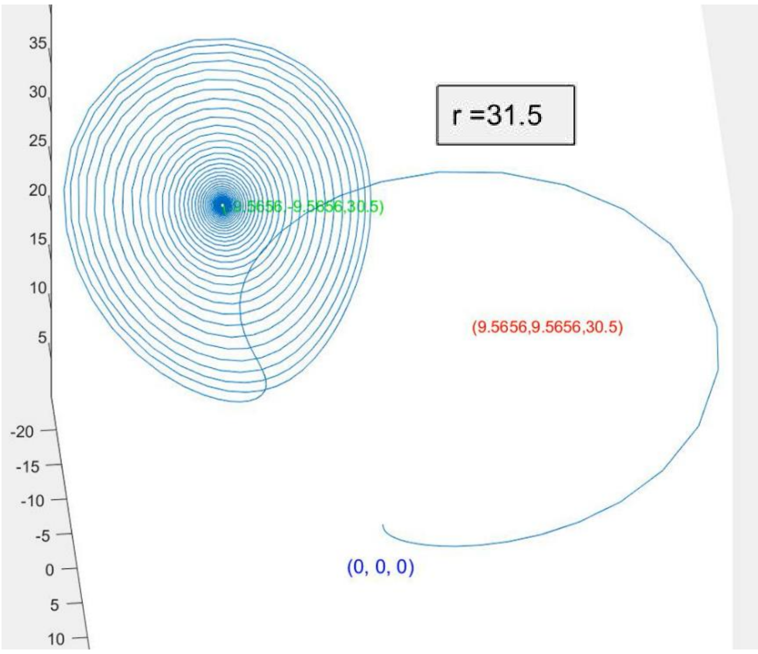
$r = 17.5$ Фокус стає ще більш «скрученим». При такому параметру r маємо 2 стійких фокуси (траєкторія на рисунку вище прямує до одного з них)



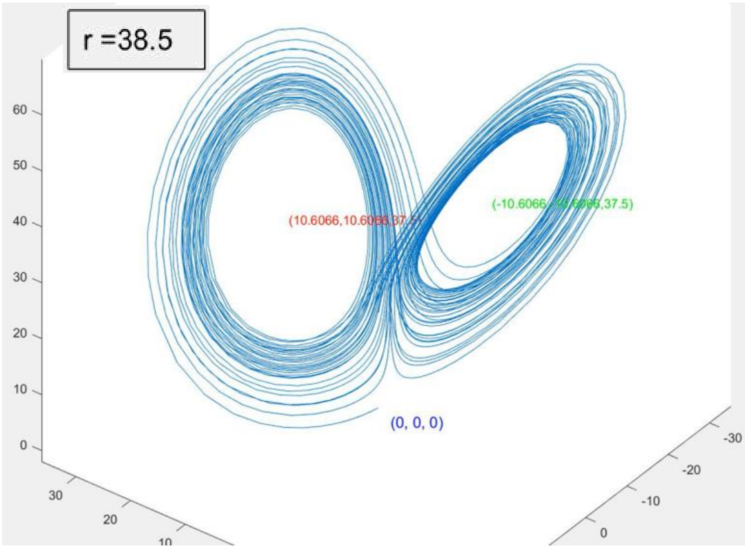
$r = 22.5$ Фокус стає ще більш «скрученим». Червоним та зеленим позначено 2 атрактори – стійкі фокуси



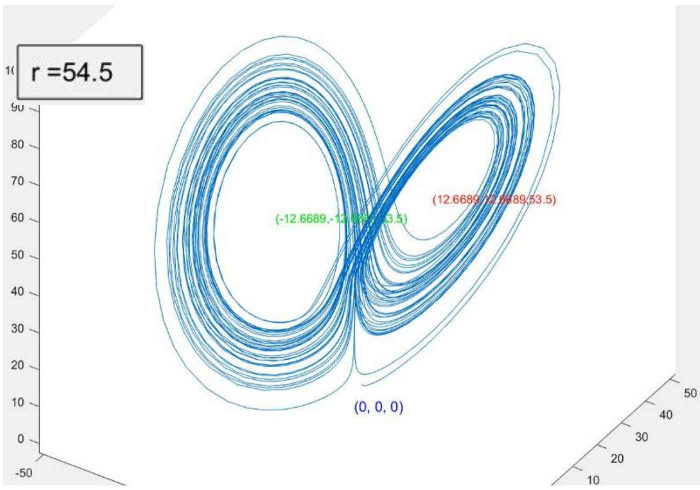
$r = 23.5$ Відбувається якісна зміна атрактора. Через те, що 2-а стаціонарна точка впливає на нашу траєкторію, вона робить кілька обертів навколо іншого нестійкого фокусу



$r = 31.5$ Якщо далі збільшувати параметр, з’явиться «дивний атрактор»



$r = 38.5$ Можна бачити «дивний атрактор» (атрактор Лоренца)

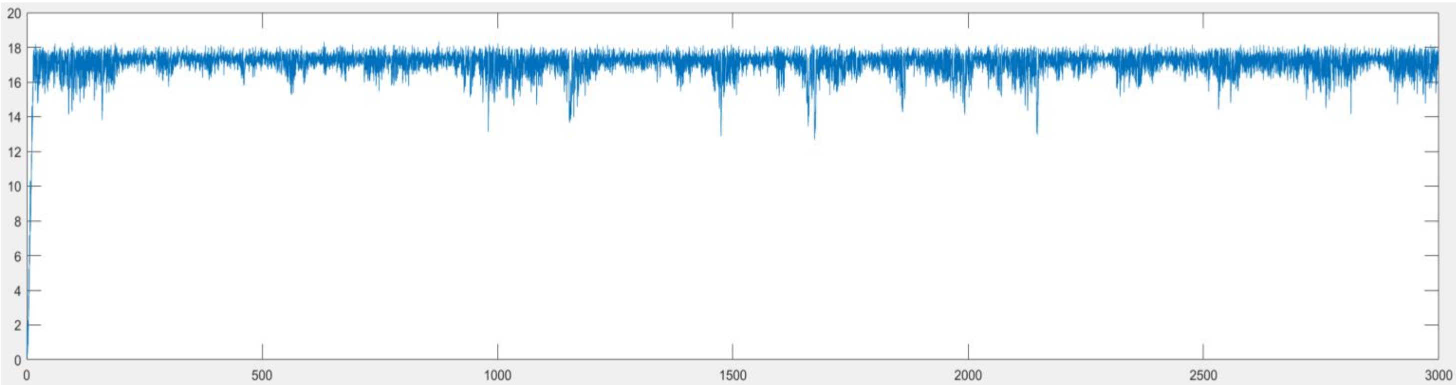


$r = 54.5$ Можна бачити «дивний атрактор» (атрактор Лоренца)

3. Показати наявність хаосу в системі для великих значень параметра r, порівнявши відношення відхилень фазових траєкторій протягом часу для початкових точок, відстань між якими дорівнює 10^{-6}. За допомогою наближеної формули оцінити старший показник Ляпунова.

Візьмемо параметри: $\sigma = 10, r = 60, b = \frac{8}{3}$. Покладемо першу початкову точку $(3, 5, 8)$, іншу – $(3 + 10^{-6}, 5, 8)$. Оскільки відношення відхилень великі, візьмемо $ln\frac{\delta(\tau)}{\delta_0}$.

Старший показник Ляпунова можна оцінити наближено, використавши формулу $ln\frac{\delta(\tau)}{\delta_0} = \Lambda\tau$. Тут значення Λ для кожного значення τ різне. Тоді треба взяти середнє значення.



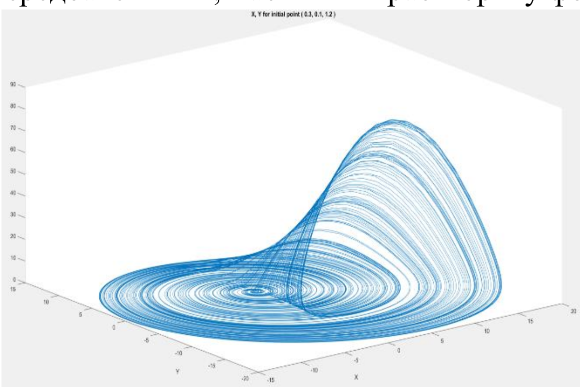
Графік $\ln\left(\frac{\delta(\tau)}{\delta_0}\right)$ в залежності від τ

Спробуємо порахувати $\Lambda(\tau) = \frac{\ln\left(\frac{\delta(\tau)}{\delta_0}\right)}{\tau}$ та взяти середнє значення. Отримаємо $\Lambda \approx 0.76599$, тобто $\Lambda > 0$ – свідчить про наявність хаосу.

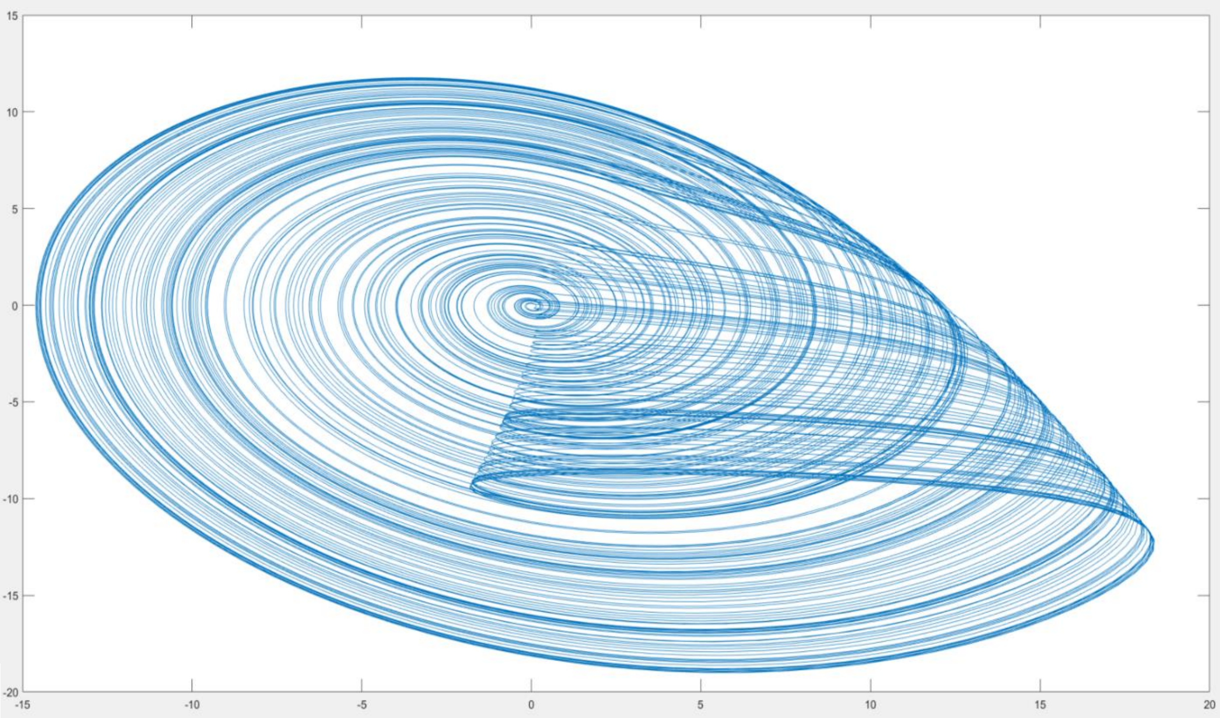
4. В пакеті для обчислень MATLAB написати програму, яка знаходить чисельний розв'язок та будує фазовий портрет (x, y, z) системи Реслера для вказаної початкової точки та вказаних параметрів.

В пакеті MATLAB було написано програму, яка будує для вказаних параметрів та початкових точок фазовий портрет в системах координат $(x, y, z), (x, y), (x, z), (y, z), (t, x), (t, y), (t, z)$. Програма також наближено обчислює показник Ляпунова та сповіщує про наявність хаосу.

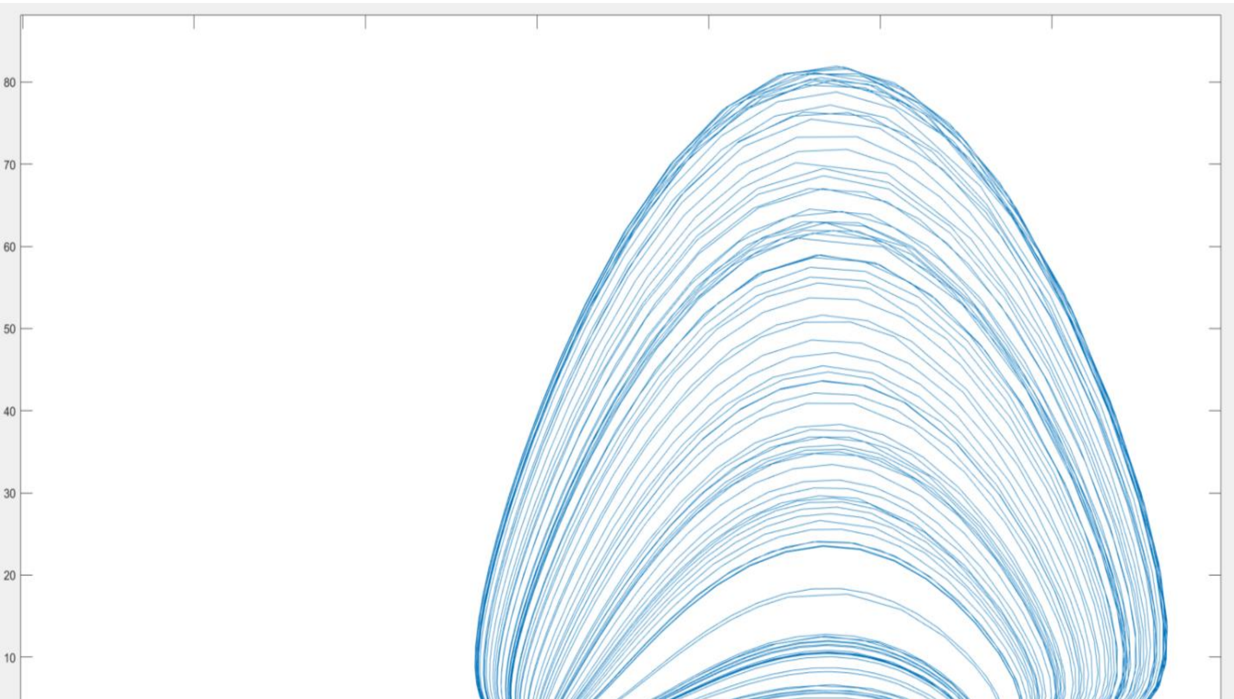
5. Побудувати фазовий портрет системи Реслера для набору параметрів $a = 0.3, b = 0.4, c = 8.5$.
Побудуємо фазовий портрет (x, y, z) для траєкторії, початкова точка якої дорівнює $(0.3, 0.1, 1.2)$.
Нижче побудуємо фазові портрети в системах координат $(x, y), (x, z), (y, z), (t, x), (t, y), (t, z)$.
За теоретичними передбаченнями, має вийти траєкторія у формі «воронки».



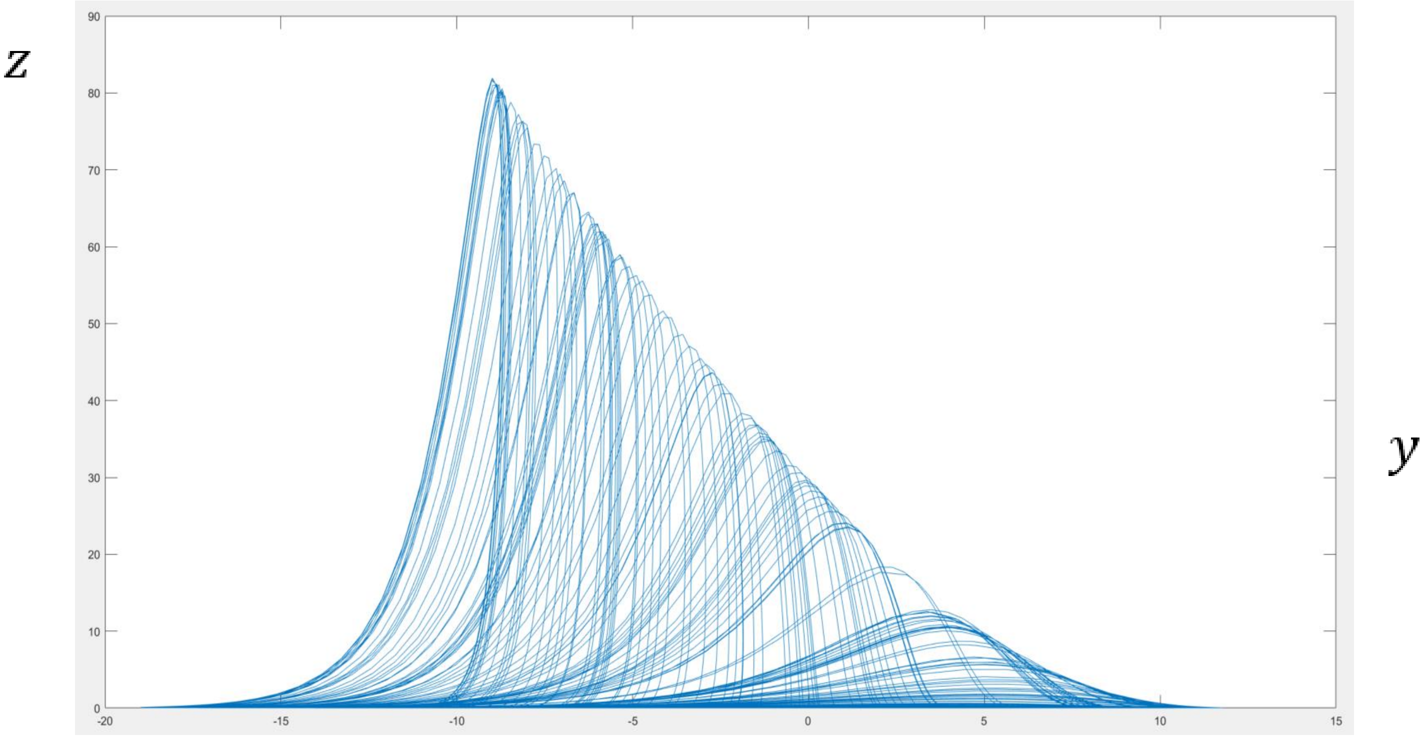
Фазовий портрет (x, y, z) системи Реслера. Початкова точка – $(0.3, 0.1, 1.2)$



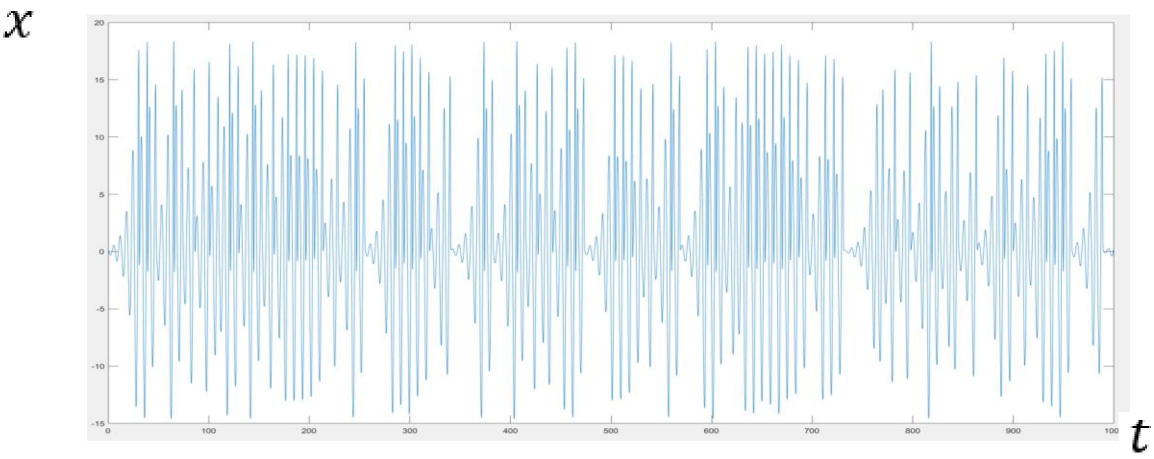
Проекція фазової траєкторії системи Реслера на площину (x, y). Початкова точка – $(0.3, 0.1, 1.2)$



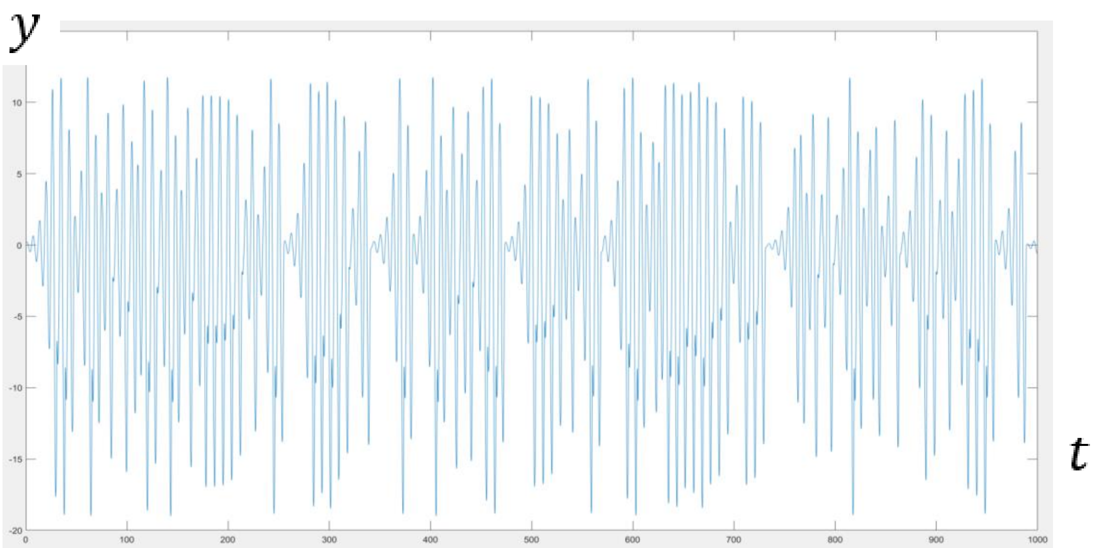
Проекція фазової траєкторії системи Реслера на площину (x, z). Видно, що частина атрактора Реслера знаходиться у площині $z = 0$



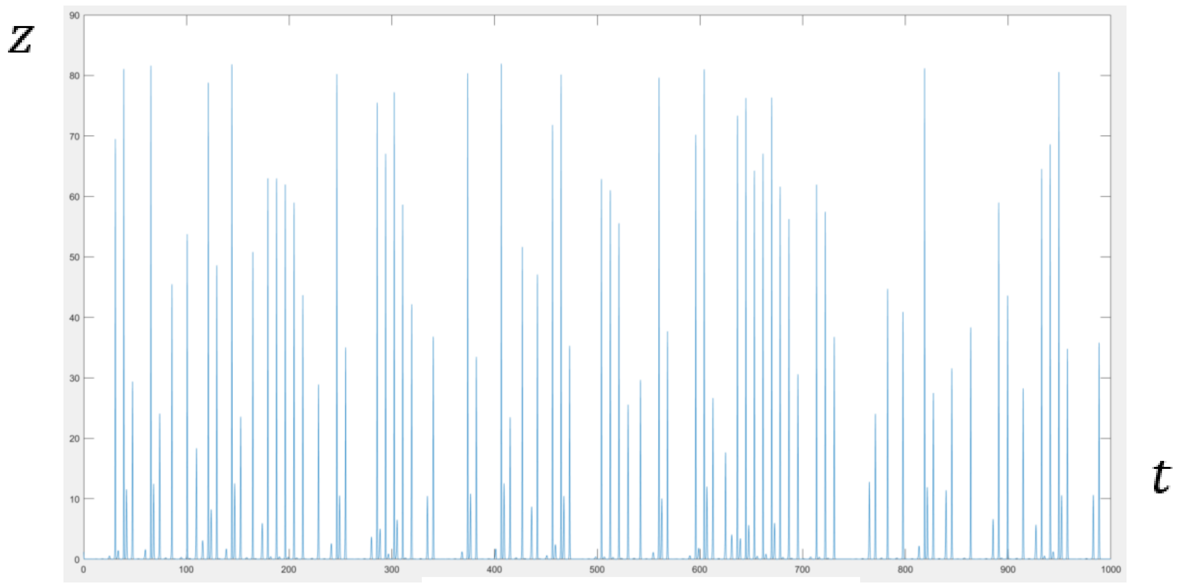
Тепер зобразимо залежність від часу для фазової траєкторії системи Реслера.



Фазова траєкторія $x(t)$

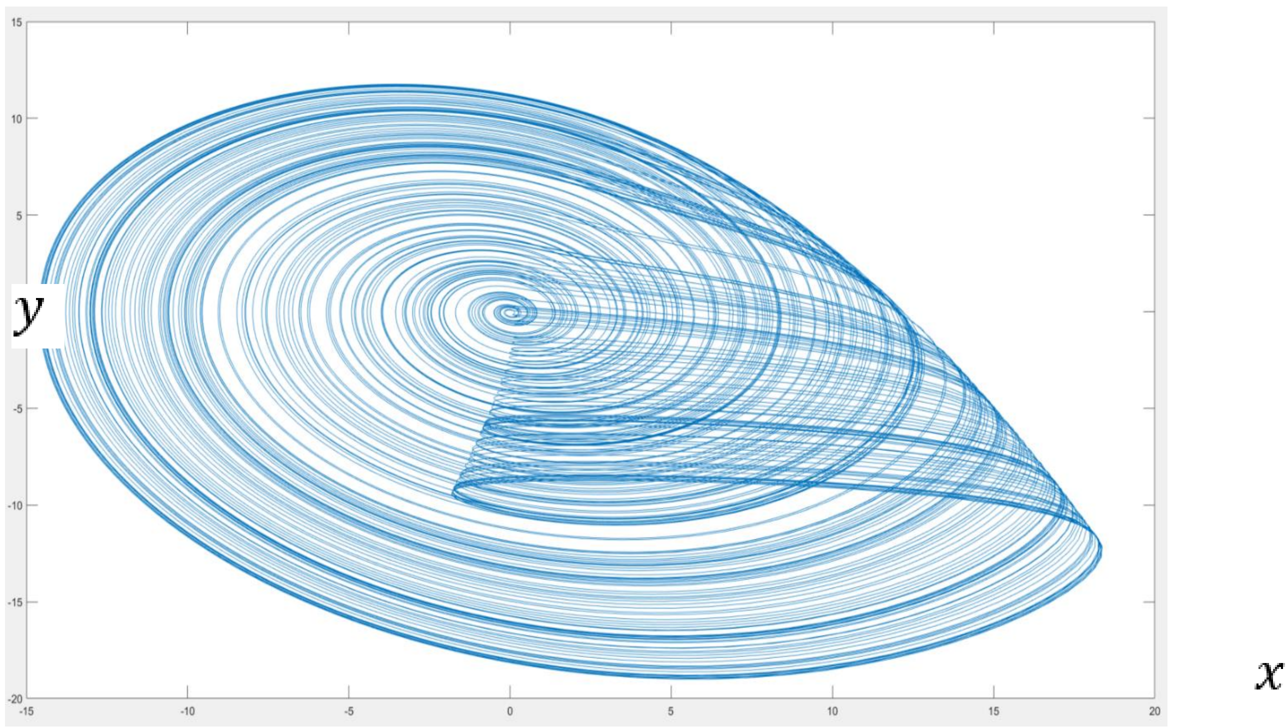


Фазова траєкторія $y(t)$

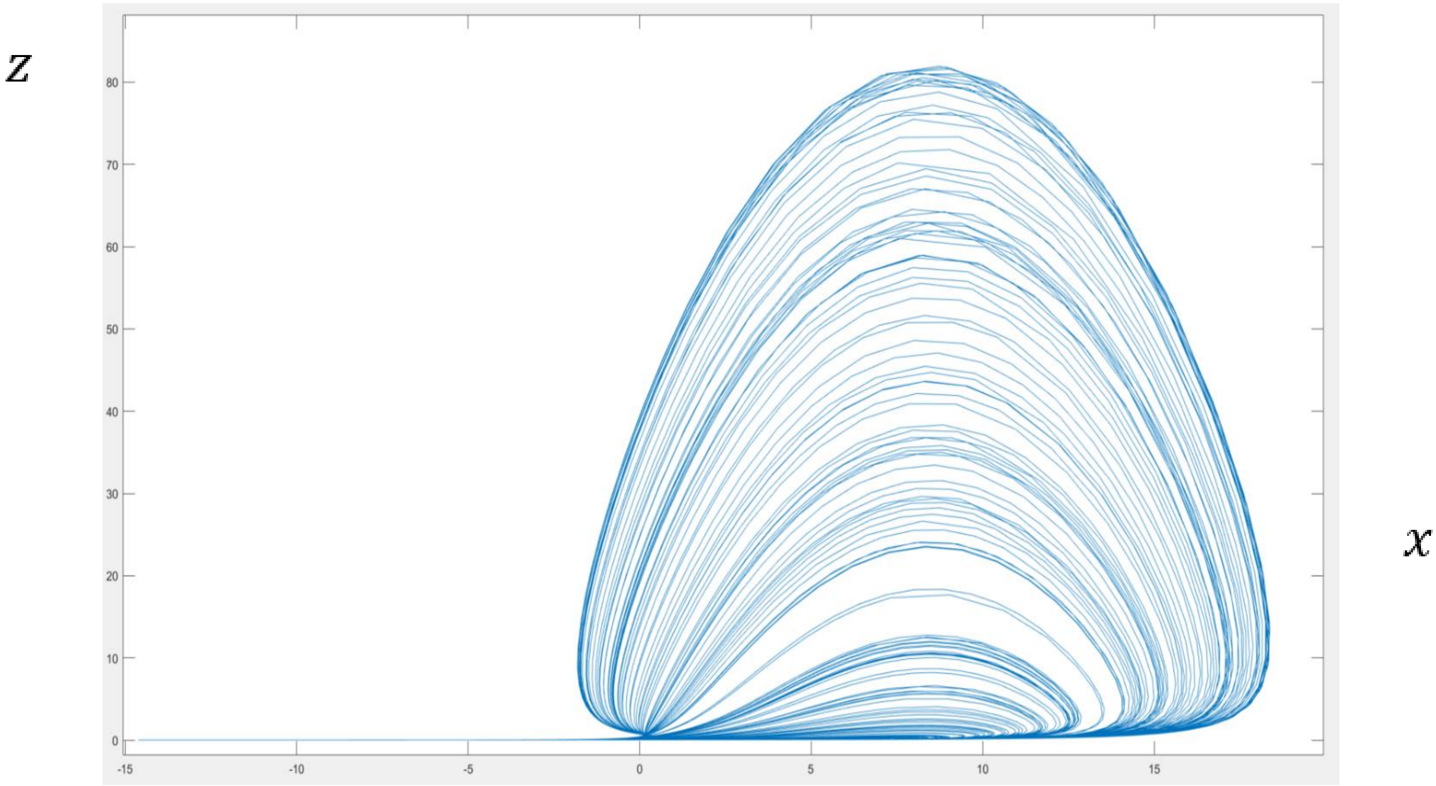


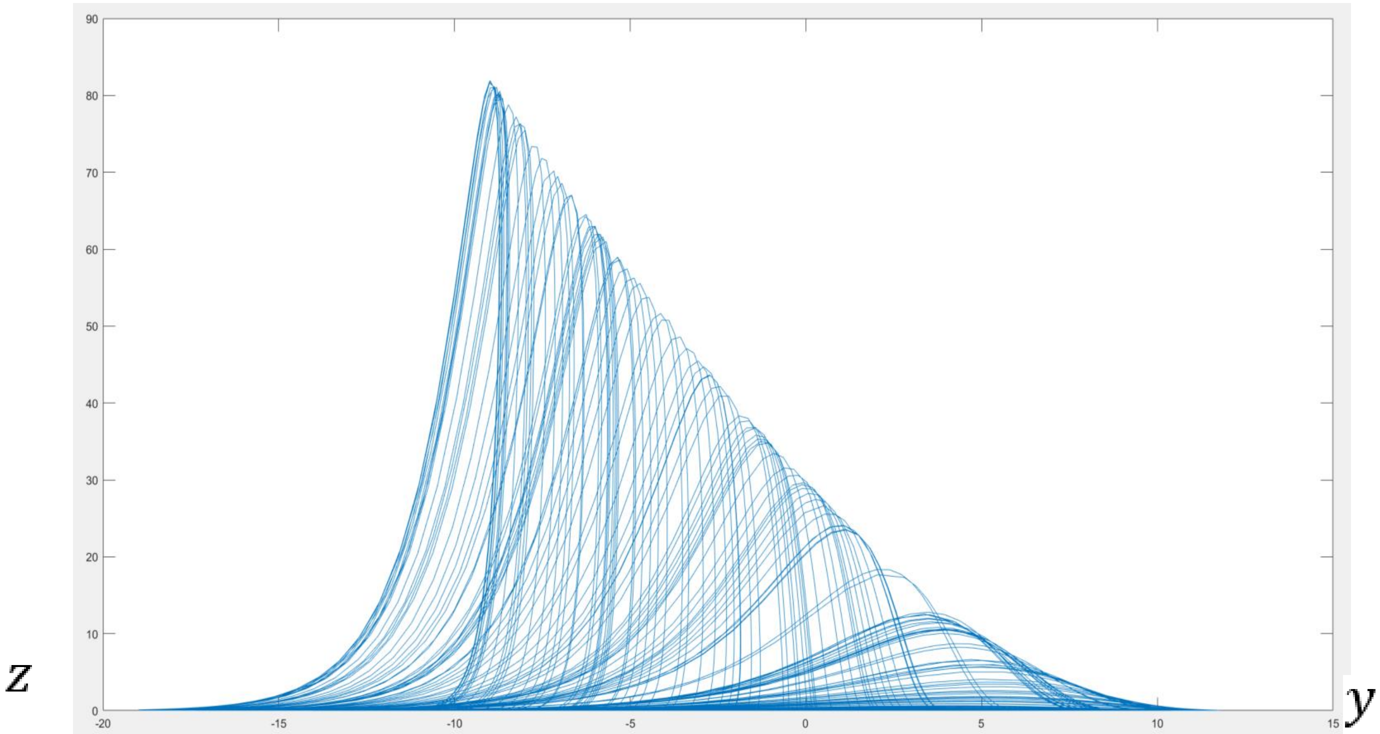
Фазова траєкторія $z(t)$

Параметри $(0.3, 0.1, 1.2)$



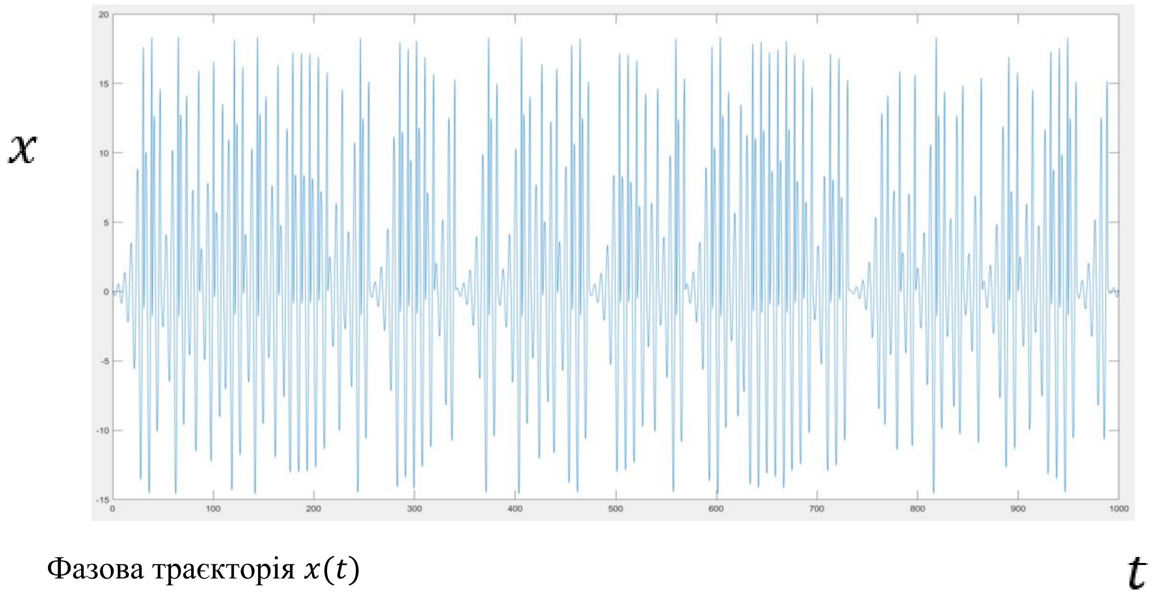
Проекція фазової траєкторії системи Реслера на площину (x, y). Початкова точка – $(0.3, 0.1, 1.2)$



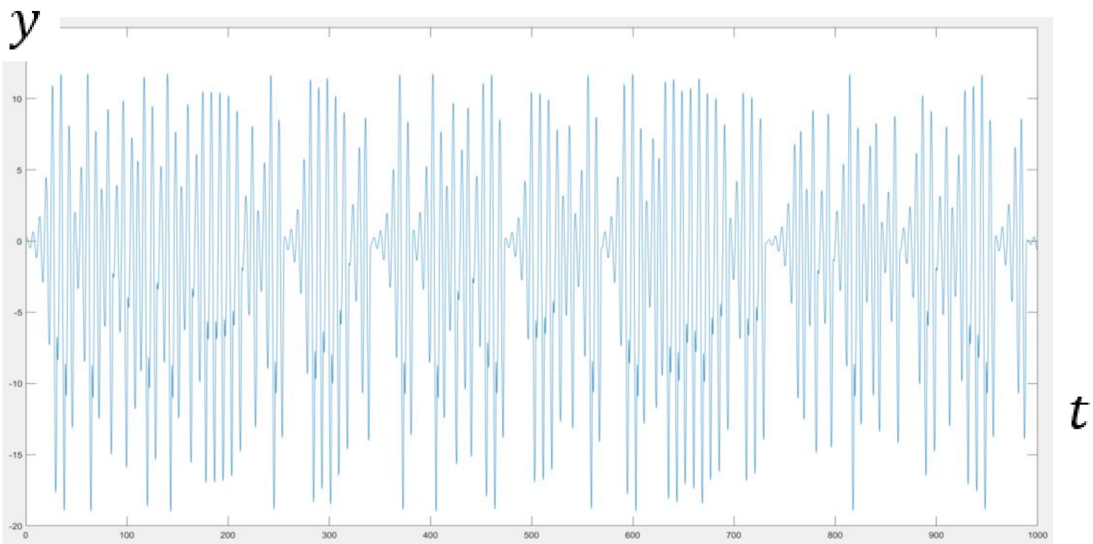


Проекція фазової траєкторії системи Реслера на площину (y, z)

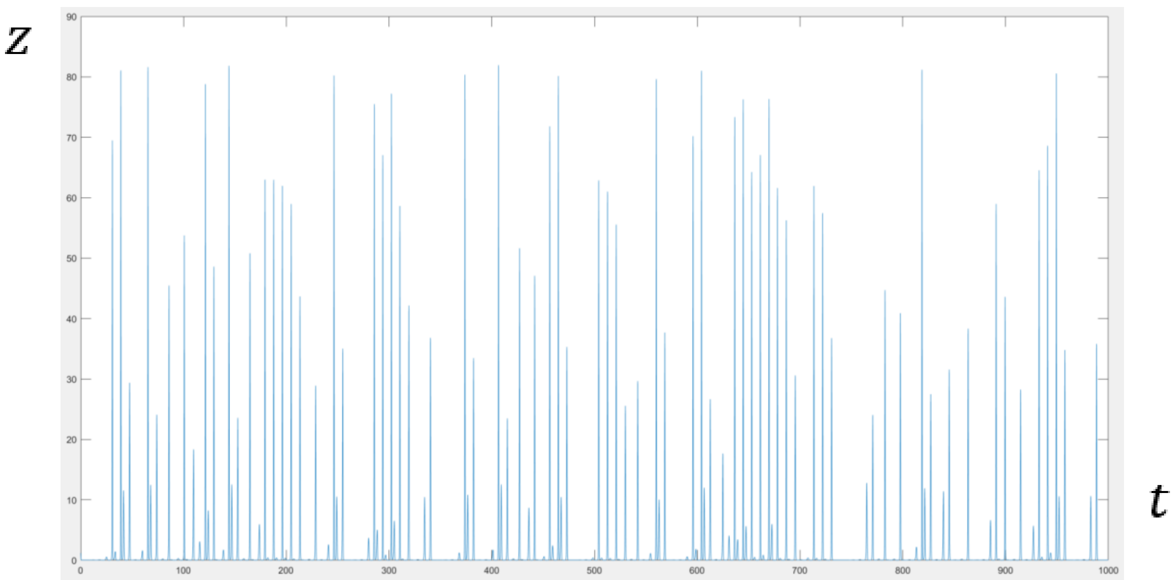
Тепер зобразимо залежність від часу для фазової траєкторії системи Реслера.



Фазова траєкторія $x(t)$



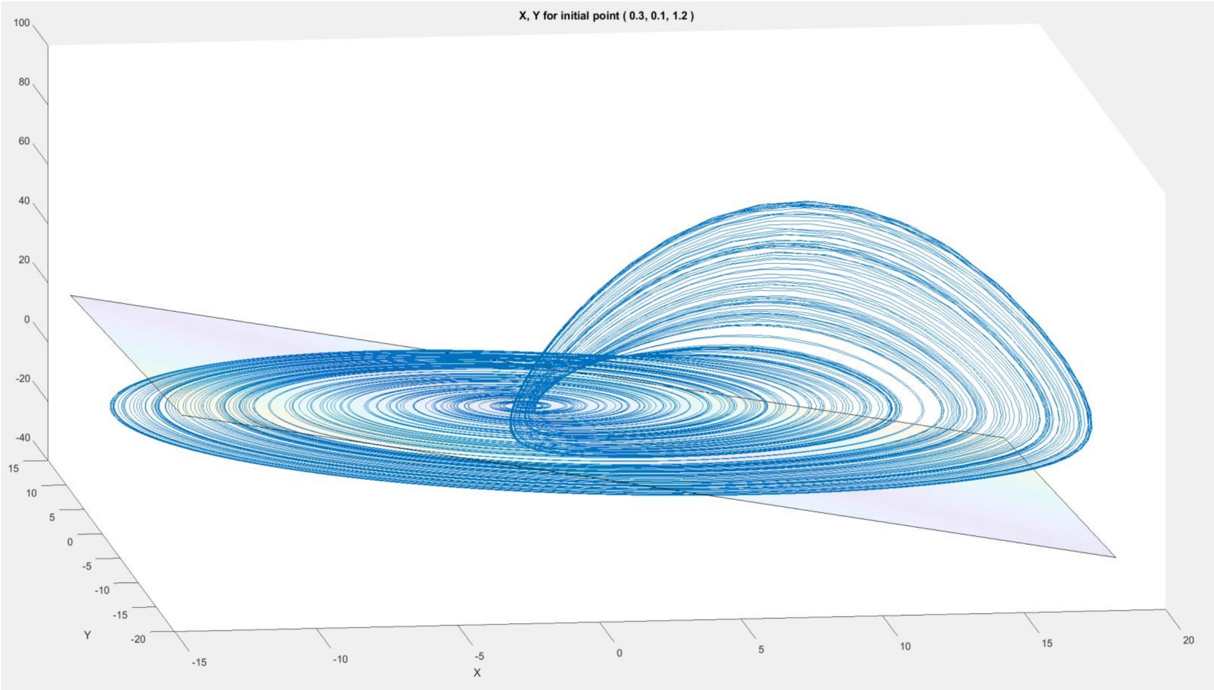
Фазова траєкторія $y(t)$



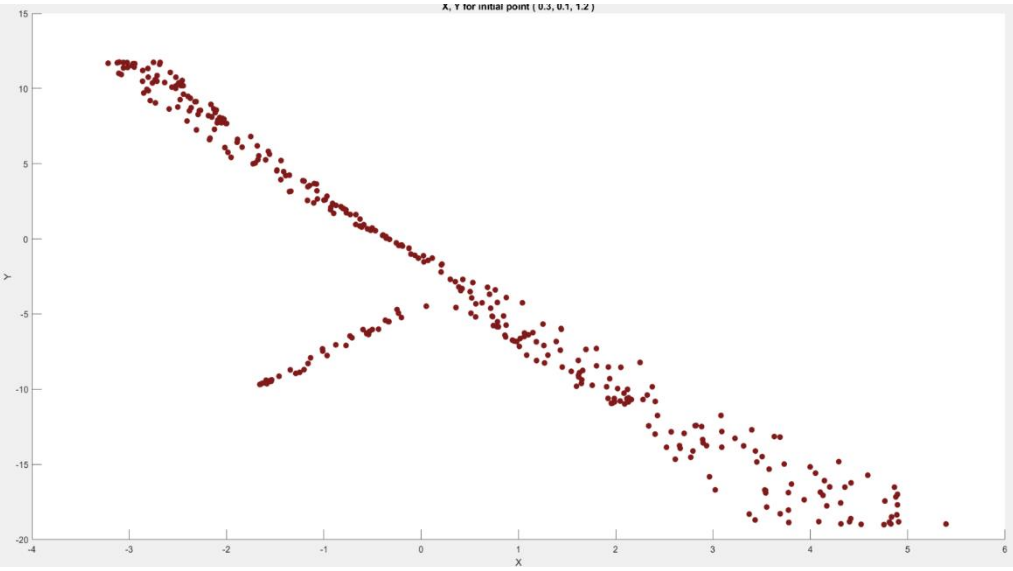
Фазова траєкторія $z(t)$

6. Побудувати для фазового портрету переріз деякою площиною.

Візьмемо площину $Ax + By + Cz = D$, де $A = 1, B = 0.2, C = 0.6, D = 0.3$. Зображення точок перетину траєкторії з цією площиною дасть глибше розуміння форми атрактора.



Площина, яка перетинає фазову траєкторію системи Реслера



Множина точок перетину траєкторії з площиною

Висновок по підрозділу. В ході виконання практичної роботи було побудовано фазові траєкторії для системи Лоренца та Реслера. Для системи Лоренца параметр r варіювався від 0.4 до 54.5 таким чином, щоб побачити якісні зміни фазової траєкторії, якщо початкову точку не змінювати. Також для системи Лоренца для параметру $r = 60$ було перевірено наявність хаосу, порівнявши логарифм відношення відхилень в момент часу τ та початковий момент. Цікаво, що навіть при відхиленні 10^{-6} в початкових точках траєкторії значно відрізняються, хоча обидві виходять на атрактор Лоренца. Було оцінено старший показник Ляпунова за допомогою логарифму відношення відхилень, який виявився додатнім. Це свідчить про наявність хаосу в системі.

Для системи Реслера було побудовано фазові портрети та зроблено проекції траєкторії на різні площини, побудовано залежність координат від часу. Також було побудовано переріз траєкторії площиною, щоб отримати глибше уявлення про форму атрактора.

В ході виконання роботи було написано з використанням пакету MATLAB програму, яка дозволяє будувати для довільних параметрів фазові портрети системи Лоренца та Реслера, для системи Лоренца також наближено обчислювати старший показник Ляпунова, що дозволить перевірити наявність хаосу в системі.

Теоретичні матеріали були взяті з підручників В. Т. Гринченко «Введение в нелинейную динамику», Михайлов «Динамический хаос».

Завдання на лабораторну роботу №5

Для дослідження хаотичної поведінки розв’язків нелінійних динамічних систем довільного типу створити програмне забезпечення з використанням мови програмування С# технології .NET Framework з розмірністю фазового простору $n \geq 3$. Для методичних вказівок використовувати навчальний посібник [1].

Для наступних нелінійних систем диференційованих рівнянь першого порядку з розмірністю фазового простору $n \geq 3$ провести повне дослідження динамічного хаосу, що включає в себе розрахунки за алгоритмами:

1) Чисельно розв’язати систему нелінійних рівнянь методом Рунге- Кутти не нижче 4 порядку;
2) Алгоритмом Беннетіні з ортогоналізацією за Шмідтом побудувати спектр ЛХП;
3) Дослідити на стійкість;
4) Побудувати Фур’є спектри як додатковий засіб для виявлення атракторів;
5) Побудувати переріз Пуанкаре методом Ено;
6) Побудувати інваріантну міру за алгоритмом Файлона;
7) Там, де потрібно, побудувати матрицю монодромії та дослідити на стійкість та атрактори;
8) Побудувати карти динамічних режимів та описати переходи до хаосу.

1)Модель Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\delta x + \delta y \\ \dot{y} = rx - y - xz, r > 0, \delta > 0, b > 0. \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

2) Модель Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z), \\ \dot{y} = x + \frac{1}{5}y, \qquad , \mu > 0 \\ \dot{z} = \frac{1}{5} + z(x-\mu). \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^2 + z \\ \dot{y} = x^2 y^3 z^2 \\ \dot{z} = \frac{xyz^3}{z^3 - y - z^2} \end{cases}$$

4) Модель економіки торгівлі:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 y - k_2 x, \\ \dot{y} = -k_3 y + k_4 x + k_5 z + \rho_1 xz + \rho_2 x^2 z, \\ \dot{z} = k_6 z + k_7 x - k_8 y - \rho_3 x^2 + \rho_4 xz. \end{cases}$$

де x(t)- валовий продукт; y(t) – трудовий ресурс; z(t) – капіталовкладення, що призначені розширити виробництво; ρxz – фінансове розширення виробництва валового продукту (означає залучення фінансового ресурсу в процес виробництва одночасно валовому продукту і капіталовкладенням).

5) Модель ціноутворення при торгівлі між державами з обміном товарів на золото:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = j_1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = j_2 - c_1 x_1 x_2 - x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = j_3 - c_2 x_2 x_3 - \dfrac{x_3}{\tau}. \end{cases}$$

Тут x_1 –грошова маса другої держави у відповідних іменуваннях; x_2 – кількість золота другої держави в момент часу t; x_3 - кількість деякого товару виду x_3 в момент часу t в першій країні; j_1, j_2, j_3 – випуск в одиницю часу грошей держави, золота і товару виду x_3 відповідно; τ – довготривалість товару виду x_3; $1/c_1$ – ціна золота в першій країні; $1/c_2$ – ціна товару виду x_3, що випускається першою країною в грамах золота іншої держави.

6) Модель функціонування підприємсива (фірма, завод, кооператив і т. п.):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \rho_1 x^2, \\ \dot{y} = \beta_1 x - \beta_2 y + \beta_3 z - \rho_2 xz, \\ \dot{z} = -\gamma_1 z - \gamma_2 x + \gamma_3 y + \rho_3 xy - \rho_4 x^2 + \rho_5 xz + \rho_6 y^2 + \rho_7 xyz, \end{cases}$$

де *x(t)*- кількість варіантів заробити гроші, які існують у відповідного підприємства; *y(t)* – трудовий ресурс, що знаходиться в розпорядженні адміністрації; *z(t)* – кількісь грошової маси, яка є у підприємства в момент часу t.

7) Модель інженерної та теоретичної діяльності із залученням інвестицій:

$$\begin{cases} \dot{H} = k_1 pHL - \dfrac{H}{\tau} - \beta(cH - \gamma p), \\ \dot{L} = k_2 pH - k_3 L, \\ \dot{p} = \alpha_1 p - \alpha_2 p^2. \end{cases}$$

В цій моделі p - сукупний продукт; H - інженерна інформація і L – кількість інженерів в момент часу t в деякій системі.

Частина 2. Базові моделі самоорганізації розподілених відкритих систем

Практична робота №6

Ґратки зв'язаних відображень: класифікація просторово-часових станів

6.1. Основні відомості.

Ґратки зв'язаних відображень є одними з найпростіших моделей розподілених систем. Такі моделі широко використовуються при вивченні складної просторово-часової динаміки систем різної природи. Очевидна перевага ґраток зв'язаних відображень (в порівнянні з рівняннями в частинних похідних і системами зв'язаних звичайних диференціальних рівнянь) полягає в ефективності їх комп'ютерного моделювання.

Ґратки зв'язаних відображень можна класифікувати за способом опису окремого елементу і за типом зв'язків елементів в гратці. Як елемент ґратки, зазвичай, вибирається одновимірне відображення, що демонструє складну періодичну і хаотичну поведінку. Зв'язки між елементами ґраток можуть задаватися найрізноманітнішими способами в залежності від структури модельованої системи.

Так, для одновимірної ґратки логістичних відображень з дифузійним зв'язком можна записати

$$x_{n+1,i} = (1-\varepsilon) f(x_{n,i}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_{n,i+1}) + f(x_{n,i-1})], \qquad (1)$$

де $f(x) = 1 - \lambda x^2 -$ нелінійна функція; n - дискретний час, $n = 1,...,N;$ i - дискретна просторова координата, $i = 1,...,L; \varepsilon -$ параметр зв'язку. Періодичні граничні умови для даного ланцюжка запишуться у вигляді

$$x_{n,0} = x_{n,L}; \quad x_{n,L+1} = x_{n,1}. \qquad (2)$$

Гратки або решітка пов'язаних відображень – частковий випадок клітинного автомата, де для кожної клітини стан на кроці $n+1$ залежить від сусідніх клітин на кроці n. Для решітки пов'язаних відображень стан визначається дійсним числом.

Розмірність решітки може бути довільна, найчастіше береться одновимірна, двовимірна, тривимірна. Такі моделі широко використовуються при дослідженні просторово-часової динаміки систем різної природи. Решітки пов'язаних відображень значно легше моделюються на комп'ютерах, на відміну від систем, де треба розв'язувати диференціальні рівняння.

Найбільш відомим клітинним автоматом є так-звана «гра життя». В ній стан клітини також залежить від сусідніх клітин – її теж можна вважати решіткою пов'язаних відображень.

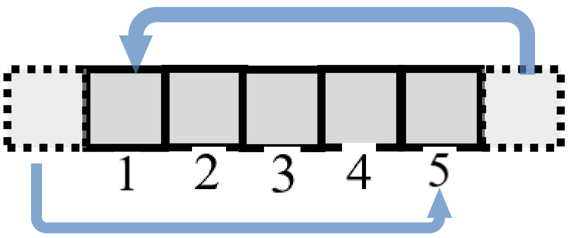
Приклад. Одновимірна решітка логістичних відображень з дифузійним зв'язком. Функція, що визначає поведінку клітини на наступному кроці.

$$x_{n+1}(i,j) = b[x_n(i,j) - H(x_n(i,j))] + d[H(x_n(i+1,j)) + \\ + H(x_n(i-1,j)) + H(x_n(i,j+1)) + H(x_n(i,j-1))]$$

де $f(x) = 1 - \lambda x^2$

Для ланцюга граничні умови періодичні $x_{n,0} = x_{n,L}; \quad x_{n,L+1} = x_{n,1}$

Можна провести аналогію з «круглою землю». Якщо рухатись з одного кінця в інший, дійти до N (краю смуги), далі продовжити рухатись, то Ви попадете в клітину 1 (початок смуги).



6.2. Приклад дослідження.

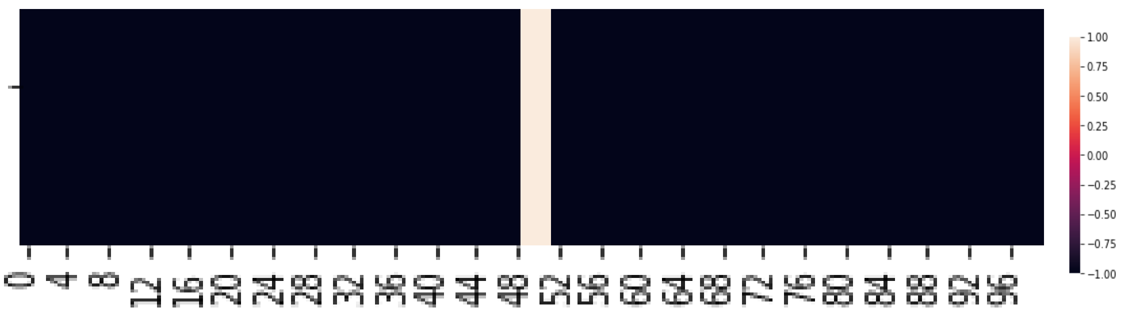
1. Написати програму, яка моделює роботу одновимірної решітки логістичних відображень з дифузійним зв'язком для 100 клітин.

В середовищі Python було створено програму, яка моделює роботу одновимірної решітки логістичних відображень з дифузійним зв'язком. Кількість клітин можна вказати довільну.

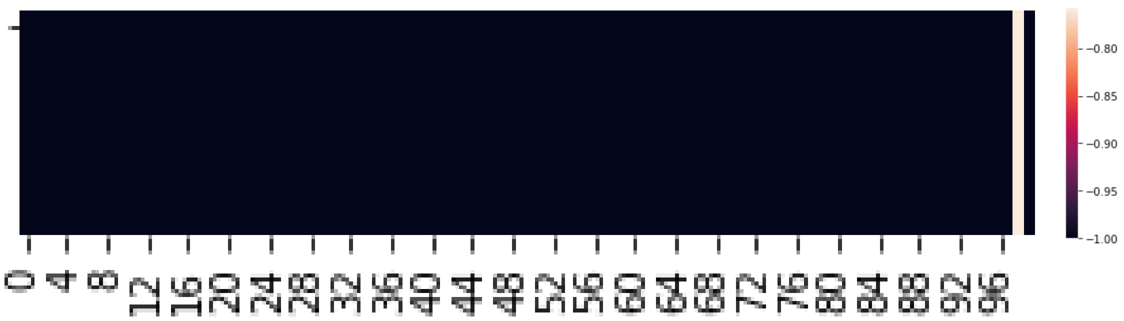
Слід зауважити, що програма на кожному кроці ділить показник , що визначає стан клітини на максимальне значення серед усіх показників на смузі – нормує. Це необхідно для того, щоб не відбувалось машинного переповнення, бо функція $1 - \lambda x^2$ швидко зростає.

1.2. Змоделювати в ній випадок, коли на початку на полі є збуджена смуга на 9 клітин.

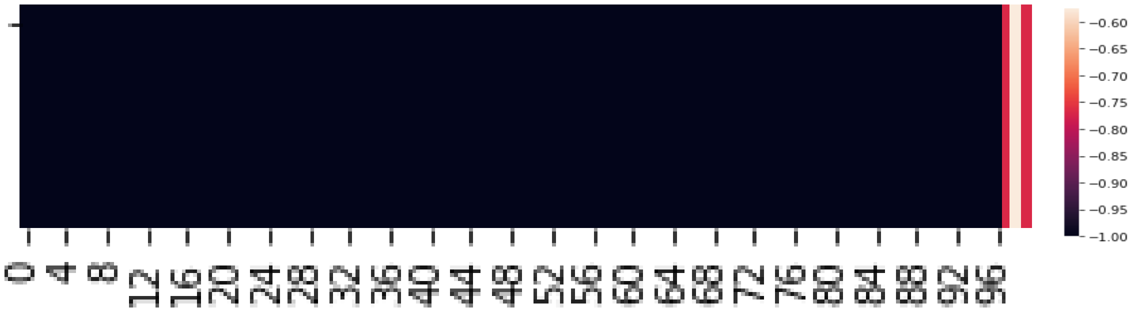
Для моделювання кліткового автомату було використано мову програмування Python та бібліотеки numpy, matplotlib.



Крок 1. Видно початкову смугу

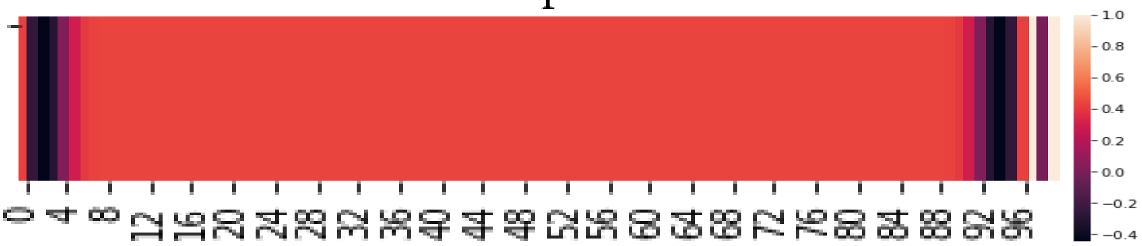


Крок 2



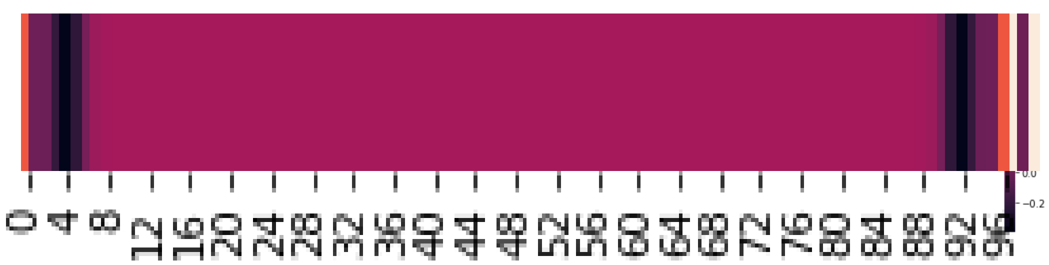
Крок 3. Збудження змістилось на кінці відрізка

Крок 4.

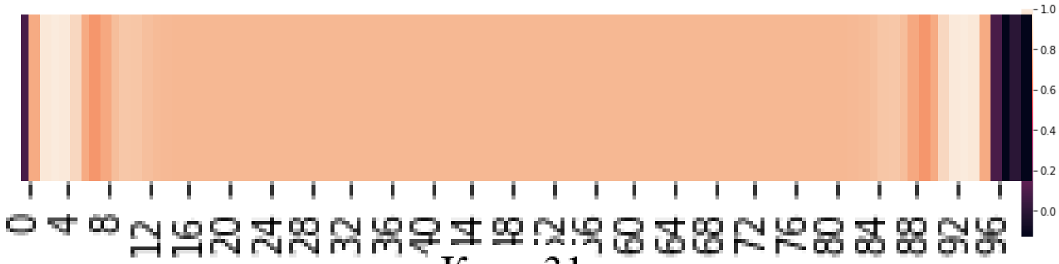


Крок 13

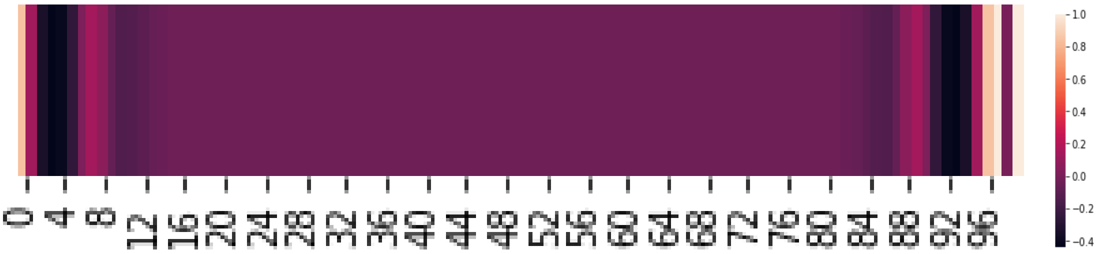
Крок 14



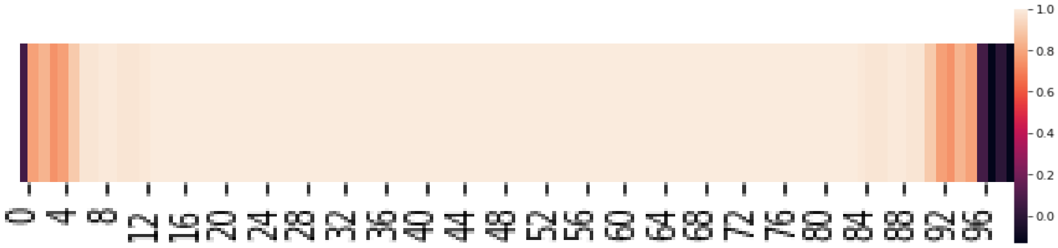
Крок 15



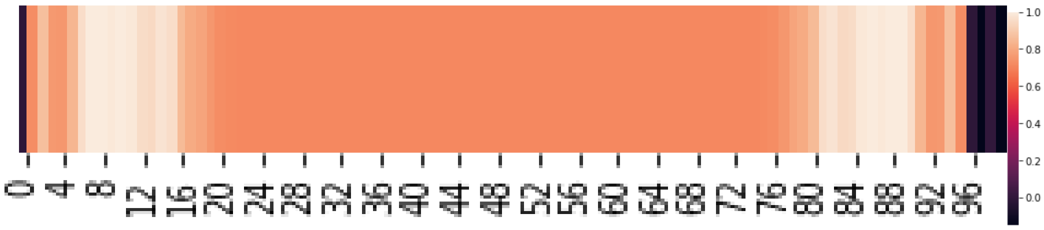
Крок 31



Крок 32

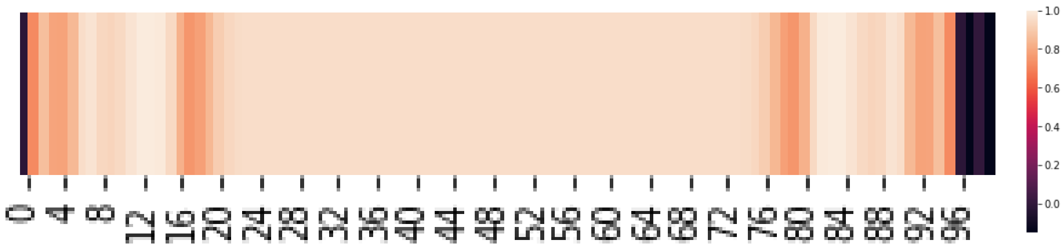


Крок 33

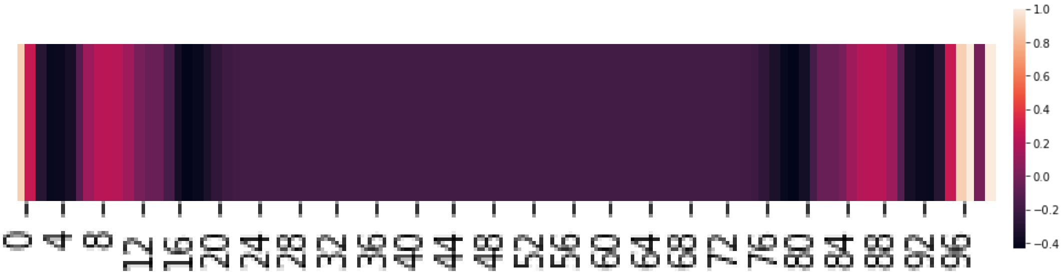


Крок 54

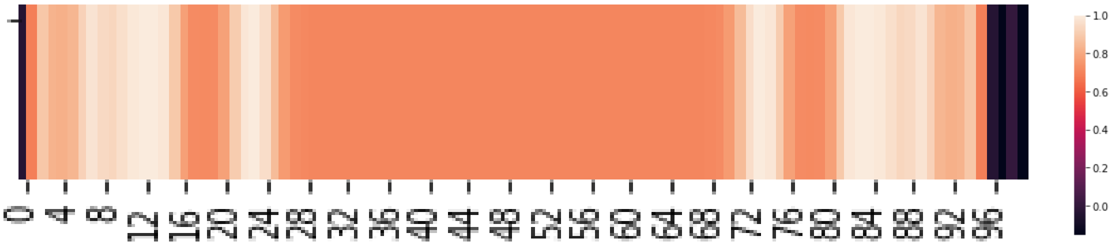
Крок 55



Крок 56



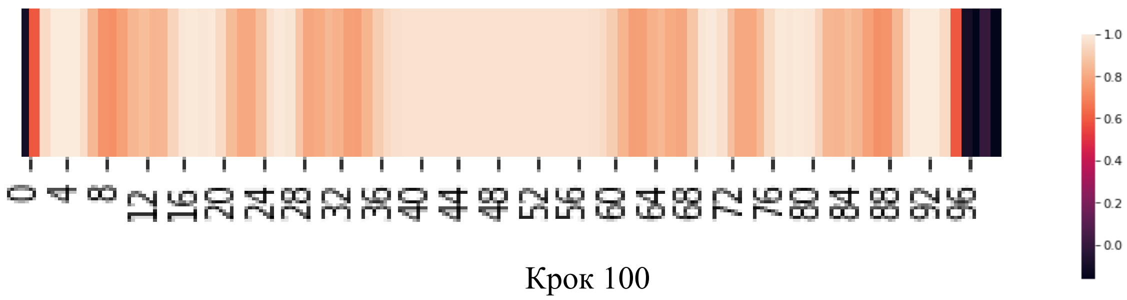
Крок 57



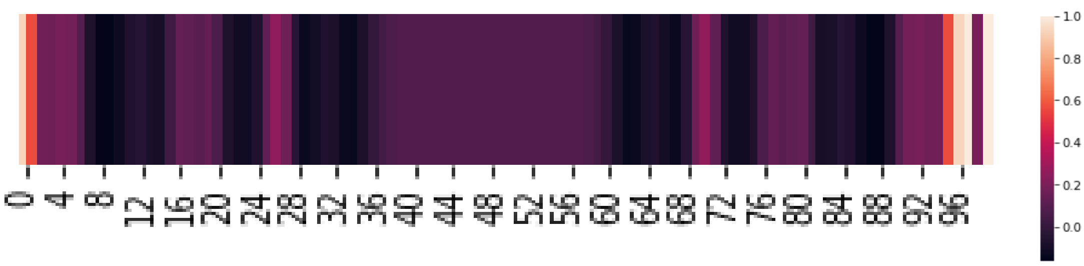
Крок 72

Крок 73

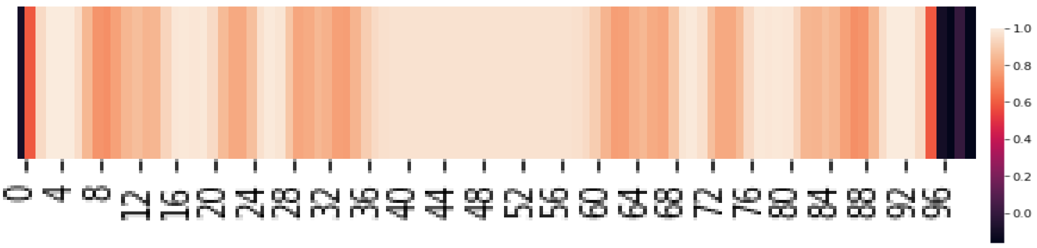
Крок 74



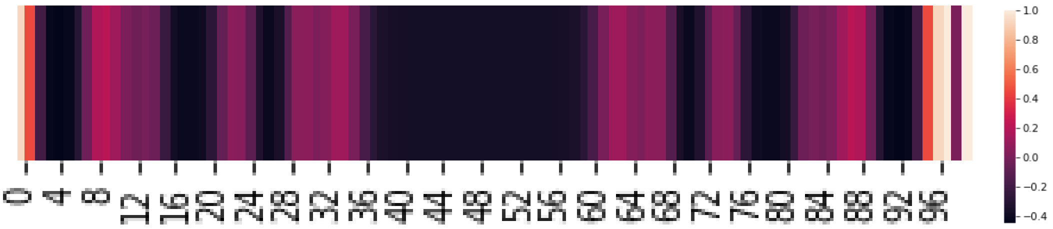
Крок 100



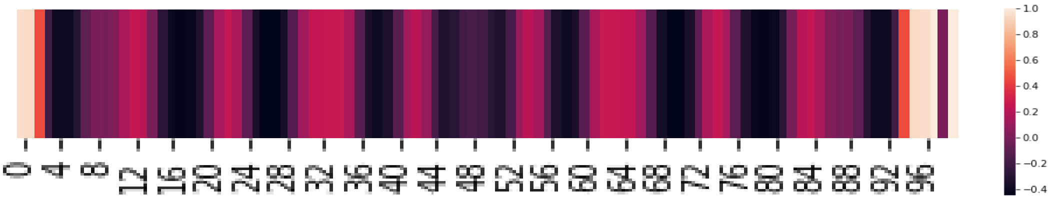
Крок 101



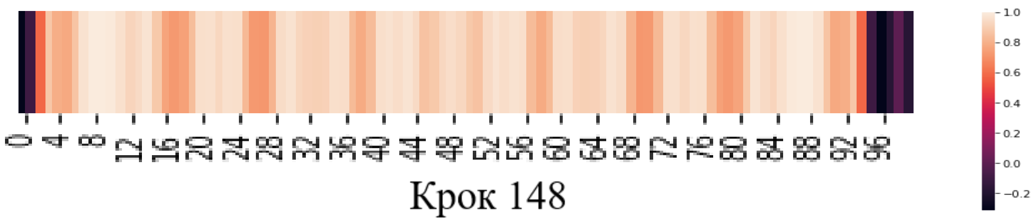
Крок 102



Крок 103



Крок 147



Крок 148

Бачимо, що система дає серію смуг, кількість та розташування яких змінюються. Але слід розуміти, що тут програма додатково ще робить нормування, тобто значення $x_n(i)$ у кожній клітині ділиться на максимальний показник $x_n(i)$.

Завдання на лабораторну роботу №6

Завдання 1. Розв'язати чисельно систему рівнянь (1), що відповідає ланцюжку дифузійно зв'язаних логістичних відображень, з граничними умовами (2) і початковими умовами, що задані в інтервалі [0;1] випадковим чином з рівномірним законом розподілу. На просторово-амплітудних діаграмах $x_n(i)$ спостерігати виникнення і еволюцію просторових структур $\varepsilon = 0,1; \lambda = \{1,44;1,64;1,72;1,80;1,90\}, e = = 0,1$; А = {1,44, 1,64, 1,72, 1,80, 1,90}.

Завдання 2. На основі просторово-часових діаграм спостерігати еволюцію дефектів і перехід до розвиненої турбулентності при збільшенні параметра нелінійності $\lambda(\varepsilon = 0,1)$. З'ясувати, яким чином збільшення параметра зв'язку ε впливає на динаміку системи. Побудувати просторові спектри для різних конфігурацій ланцюжка.

Практична робота №7

Моделювання структур в ґратках зв'язаних відображень

7.1. Основні відомості.

Збуджувані активні середовища є найбільш відомими системами, в яких спостерігаються різні просторово-часові структури (наприклад, біжучі і спіральні хвилі). Моделювання поведінки таких систем можливе на основі диференціальних рівнянь в частинних похідних; ґраток, що складаються із систем звичайних диференціальних рівнянь; ґраток зв'язаних відображень; клітинних автоматів.

Розглянемо *модель збуджуваного активного середовища*, побудованого на основі ґраток зв'язаних відображень. Як складовий елемент ґратки, необхідно вибрати відображення, що дозволяє моделювати перехід системи в збуджуваний стан. Відображення може мати вигляд:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b(x_n - H(x_n)) + c, \quad (1)$$

де b — параметр, H(x) — функція Хевісайда (H(x) = 1 для $x \geq 0, H(x) = 0$ для x < 0), n - дискретний час. Вважатимемо, що система знаходиться в стані збудження, якщо x > 0. Константа c визначає зовнішній вплив.

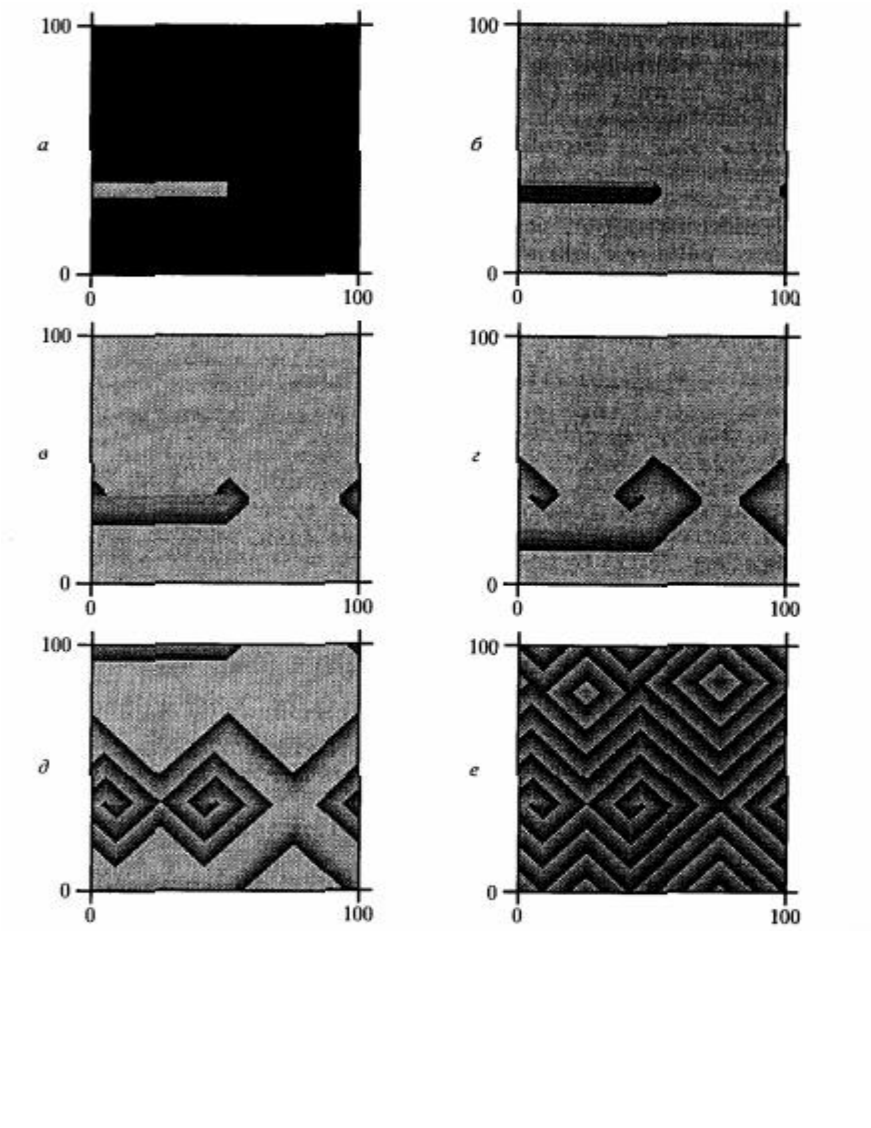
При побудові ґратки зв'язаних відображень на основі відображення (1) припускатимемо, що цей вплив визначається сусідніми елементами. Двовимірна гратка відображення в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i,j) = b[x_n(i,j) - H(x_n(i,j))] + d[H(x_n(i+1,j)) + \\ + H(x_n(i-1,j)) + H(x_n(i,j+1)) + H(x_n(i,j-1))], \end{aligned} \quad (2)$$

де d - параметр зв'язку; i, j – дискретні просторові координати. Розглядатимемо періодичні граничні умови:

$$\begin{aligned} x_n(0,j) = x_n(L,j); x_n(L+1,j) = x_n(1,j); \\ x_n(i,0) = x_n(i,L); x_n(i,L+1) = x_n(i,1); \end{aligned} \quad (3)$$

де L - розмір системи.



На рисунку вище зображено формування спіральної хвилі в гратці нелінійних елементів (2) з граничними умовами (3). Миттєві знімки станів $x_n(i,j)$ при $\lambda = 0{,}77$, $\varepsilon = 0{,}06$, L x L = 100 x 100. Миттєві знімки представлені для послідовних значень дискретного часу: *а*) n = 1, *б*) n =5, *в*) n = 10, *г*) n = 20, *д*) n = 40, *е*) n = 100

Приклад. Модель збудженого активного середовища. Покладемо, що клітина збуджена, якщо $x > 0$. Функція, що визначає наступний стан клітини має вид:

$$x_{n+1}(i,j) = b[x_n(i,j) - H(x_n(i,j))] + d[H(x_n(i+1,j)) + \\ + H(x_n(i-1,j)) + H(x_n(i,j+1)) + H(x_n(i,j-1))]$$

де $H(x) -$ функція Хевісайда.

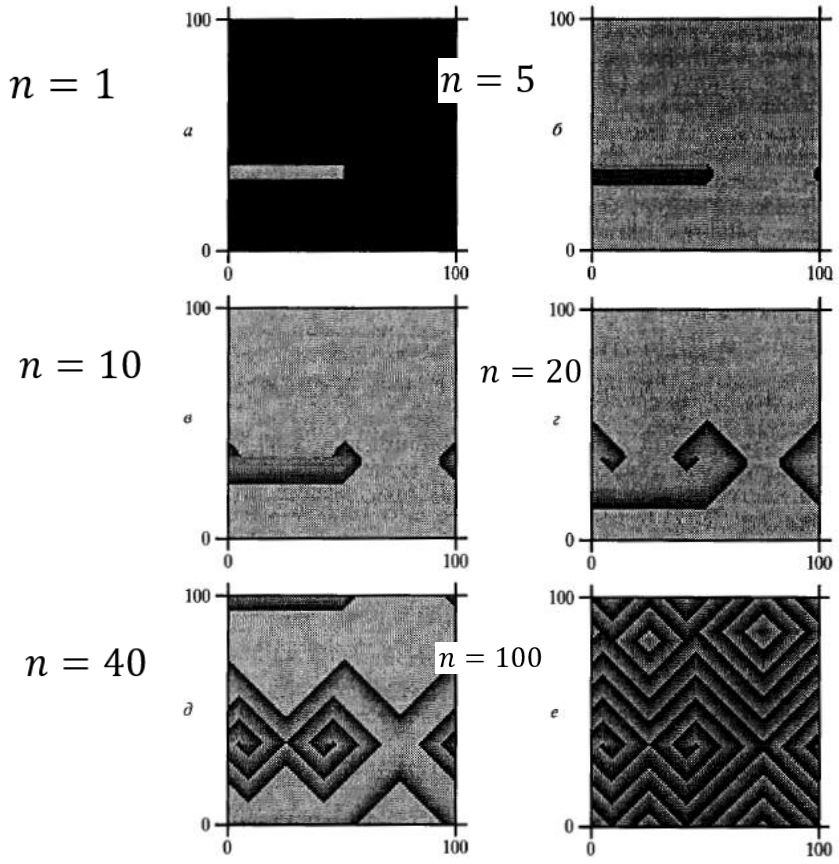
Граничні умови періодичні. Тобто

$$x_n(0,j) = x_n(L,j); \quad x_n(L+1,j) = x_n(1,j);$$

де $L -$ розмір сист

$$x_n(i,0) = x_n(i,L); \quad x_n(i,L+1) = x_n(i,1),$$

В залежності від початкових умов, можуть утворюватись достатньо складні структури, наприклад, спіральні хвилі.



Модель збудженого активного середовища. Формування спіральної хвилі. Параметри $\lambda = 0.77, \varepsilon = 0.06, L \times L = 100$

7.2. Приклад дослідження.

1. Написати програму, яка відтворює модель збудженого активного середовища на основі двовимірної решітки пов'язаних відображень.

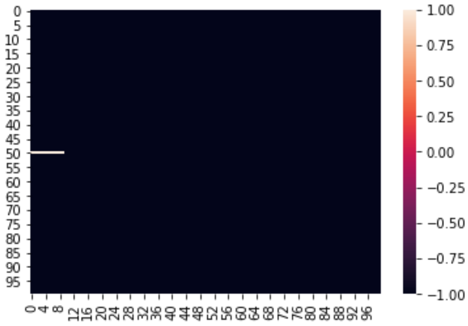
На мові Python було написано програму, яка відтворює модель збудженого активного середовища на основі двовимірної решітки пов'язаних відображень. Можна задати довільну кількість клітин та довільну функцію, яка визначатиме поведінку системи. Програма виводить серію рисунків для кожного дискретного кроку.

2. В написаній програмі змоделювати випадок 100×100 клітин, $b = 0.77, d = 0.06$. **Взяти початкові умови: збуджена смуга 1×10 кл.**

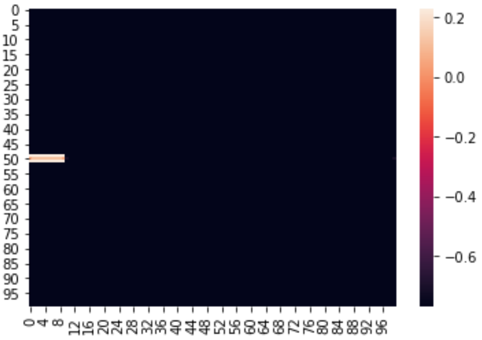
Функцію використати:

$$x_{n+1}(i,j) = b\left(x_n(i,j) - H\big(x_n(i,j)\big)\right) + d\big(x_n(i+1,j) + x_n(i-1,j)\big) + x_n(i,j+1) + x_n(i,j-1)$$

Моделюємо систему та спостерігаємо за хвилею збудження.

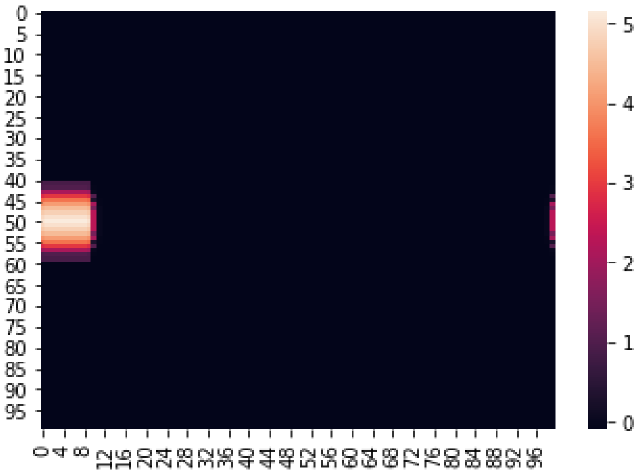


$n = 1$

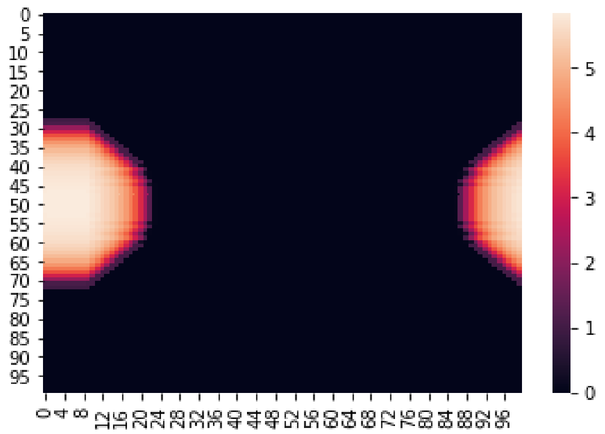


$n = 2$

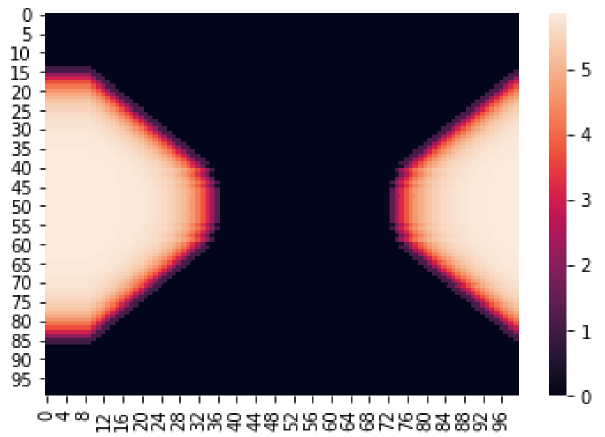
$n = 4$



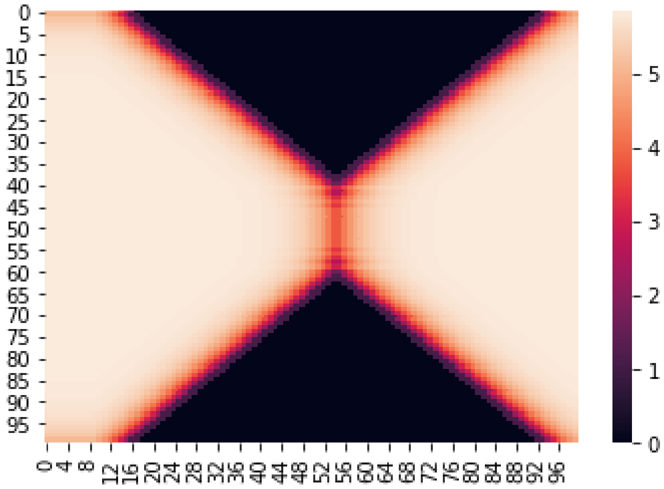
$n = 10$



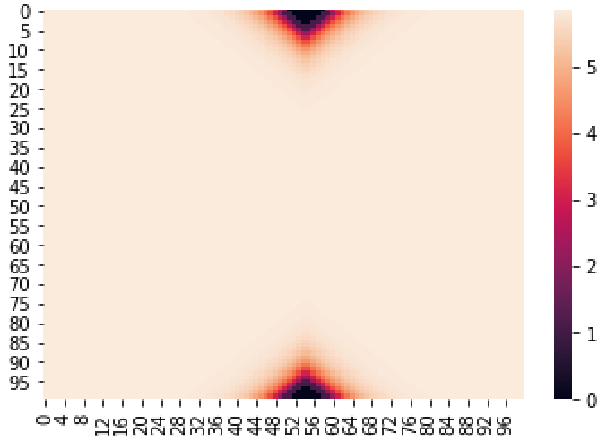
$n = 20$



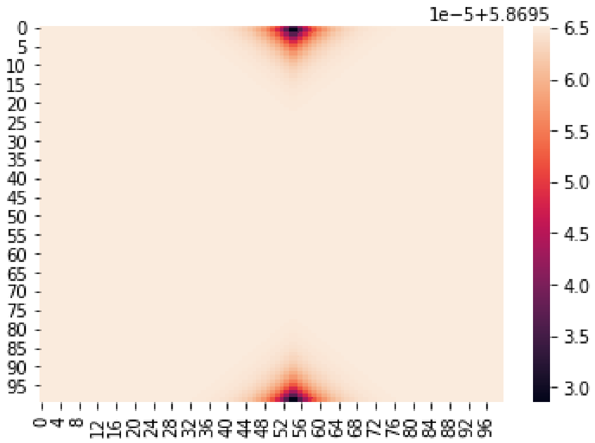
$n = 36$



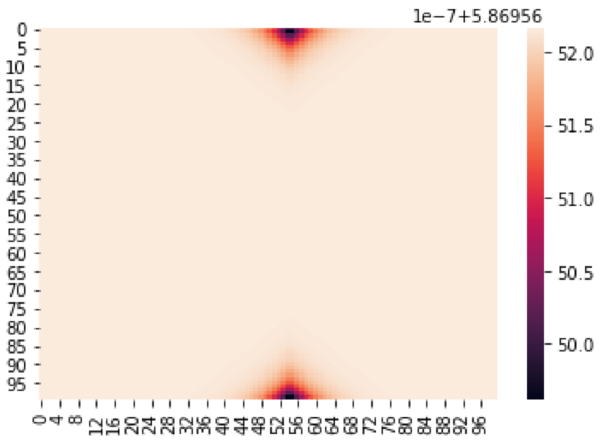
$n = 59$



$n = 91$



$n = 140$



$n = 160$

Бачимо, що система доходить до певного «стаціонарного стану» та потім майже перестає змінювати стани клітин. В клітинах, рівень збудження асимптотично наближається до певного сталого значення.

Це може підштовхнути нас до спроби визначити аналогів «стаціонарних точок» – значень клітин, при яких значення не змінюються.

Покладемо: сусіди клітини (i, j) збуджені.

Тоді формула спрощується, так як функції Хевісайда починають приймати значення 1.

$$x_{n+1}(i,j) = b\left(x_n(i,j) - H\big(x_n(i,j)\big)\right) + d\left(H\big(x_n(i+1,j)\big) + H\big(x_n(i-1,j)\big)\right) +$$
$$+H\big(x_n(i,j+1)\big) + H\big(x_n(i,j-1)\big)$$
$$x_{n+1}(i,j) = b(x_n(i,j) - 1) + d(1+1) + 1 + 1$$
$$x_{n+1}(i,j) = b(x_n(i,j) - 1) + 2d + 2$$

Спробуємо знайти таке значення, щоб $x_{n+1}(i,j) = x_n(i,j)$

$$x_n(i,j) = bx_n(i,j) - b + 2d + 2$$
$$x_n(i,j)(1-b) = -b + 2d + 2$$
$$x_n(i,j) = \frac{2d + 2 - b}{1 - b}$$

$$x_n(i,j) = \frac{2 * 0.06 + 2 - 0.77}{1 - 0.77} \approx 5.869565\ ...$$

Позначимо $c = 5.869565$, тепер візьмемо число близьке до нього $c + \varepsilon$. Для малих значень, що функції Хевісайда досі приймають 1.

$$x_{n+1}(i,j) = b(c + \varepsilon - 1) + 2d + 2$$
$$x_{n+1}(i,j) = (b(c-1) + 2d + 2) + b\varepsilon = c + b\varepsilon$$
$$x_{n+1}(i,j) = c + b\varepsilon$$

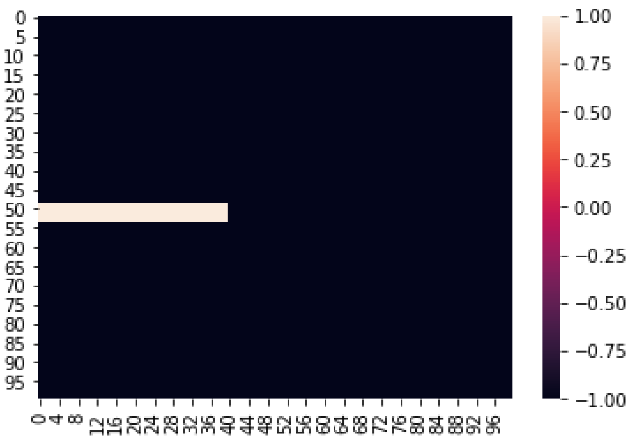
Якщо у нас $0 < b < 1$ тоді $x_{n+1}(i,j)$ ближче до c, ніж $x_n(i,j)$. Тобто числа з деякого околу c будуть прямувати до нього.

Якщо ми подивимось на значення збуджень для $n = 150$, то всі його значення близькі до 5.869565. Дуже цікаво, що поведінка дискретної системи має певні аналогії з поведінкою неперервних систем. Вона має свої аналоги стаціонарних точок, свої аналоги атракторів (як ми бачили, значення збудження прямують до неї).

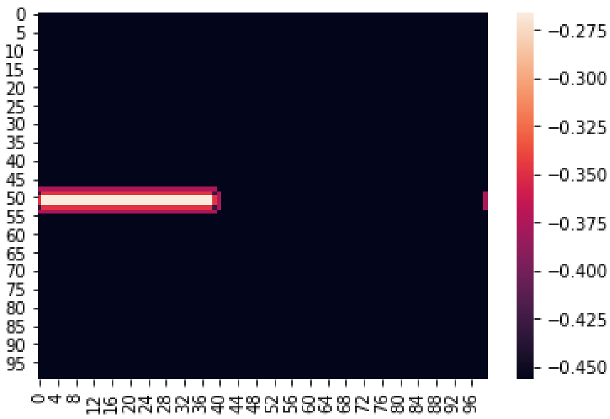
4. В написаній програмі змоделювати випадок 100×100 клітин, $b = 0.77$, $d = 0.06$. Взяти початкові умови: збуджена смуга 5×10 кл.
Функцію використати:

$$x_{n+1}(i,j) = b\left(x_n(i,j) - H\big(x_n(i,j)\big)\right) + d\big(x_n(i+1,j) + x_n(i-1,j) + x_n(i,j+1) + x_n(i,j-1)\big)$$

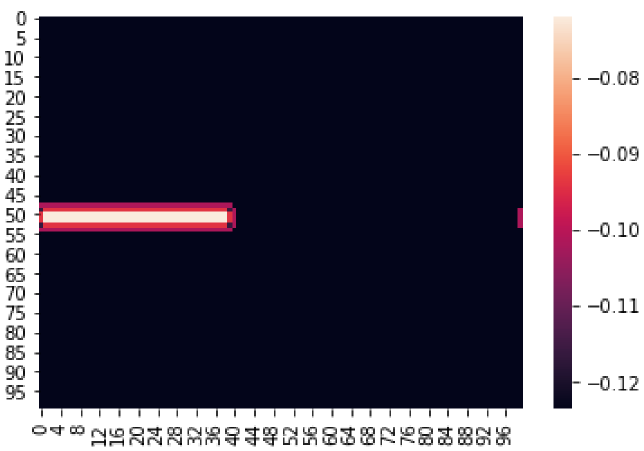
Будемо спостерігати за зміною стану системи.



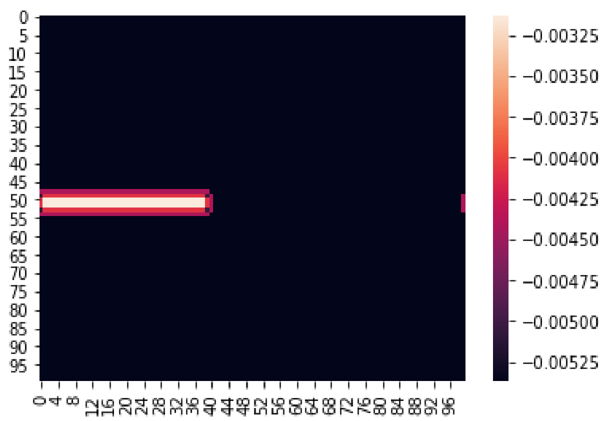
$n = 1$



$n = 3$



$n = 8$



$n = 20$

Далі система перестає змінюватись. Її показники збудження близькі до 0.
Дослідимо тепер, чи є у такої системи стани, при яких $x_{n+1}(i,j) = x_n(i,j)$.
Тепер покладемо, що сусіди клітини (i,j) незбуджені, тобто значення показника менші 0, тому функції Хевісайда дорівнюватимуть 0.

$$x_{n+1}(i,j) = b\left(x_n(i,j) - H\big(x_n(i,j)\big)\right) + d\Big(\big(H\big(x_n(i+1,j)\big) + H\big(x_n(i-1,j)\big) +$$

$$+H\big(x_n(i,j+1)\big) + H\big(x_n(i,j-1)\big)\Big)$$

$$x_{n+1}(i,j) = bx_n(i,j)$$

Покладемо $x_{n+1}(i,j) = x_n(i,j)$:

$$x_n(i,j) = bx_n(i,j)$$

$$x_n(i,j) = 0$$

Але функція Хевісайда дорівнює 1, тому взагалі якщо всі клітин матимуть значення 0, зміни в їх показниках будуть відбуватись.

Якщо всі клітини матимуть значення -ε ($\varepsilon > 0$), їхнє значення буде наближатись до 0, але не досягати його. Це видно з рівняння нижче.

$$x_{n+1}(i,j) = b(-\varepsilon), \text{для } x_n(i,j) = -\varepsilon$$

Тобто т.к $b = 0.77$ $x_n(i,j)$ починає за модулем наближатись до 0, але не досягати.

Спробуємо дослідити, чи існує ще такий варіант стаціонарного стану для збудженої системи. Покладемо для цього всі функції Хевісайда 1. Тобто всі клітини збуджені.

$$x_{n+1}(i,j) = b(x_n(i,j) - 1) + d(1+1+1+1)$$

$$x_{n+1}(i,j) = b(x_n(i,j) - 1) + 4d$$

Покладемо $x_{n+1}(i,j) = x_n(i,j)$

$$x_n(i,j) = bx_n(i,j) - b + 4d$$

$$x_n(i,j) = \frac{4d - b}{1 - b}$$

$$c = \frac{4 * 0.06 - 0.77}{1 - 0.77} \approx -2.304$$

Але тоді система не перебуває у збудженому стані. Отже більше границь для послідовності $x_n(i,j)$ окрім -0 (границі зліва від 0), немає.

5. Висновок по підрозділу. В ході виконання практичної роботи № 7 було розроблено програми, які моделюють роботу решіток пов'язаних відображень для одновимірного та двовимірного випадків. Можна задати будь-яку функцію, яка визначатиме поведінку системи.

Було змодельовано роботу одновимірної решітки логістичних відображень з дифузійним зв'язком та періодичними граничними умовами. В результаті було отримано серію «смуг», які змінюють свою кількість та положення з часом.

Було побудовано модель збудженого активного середовища на основі роботи двовимірної решітки пов'язаних відображень для 2 різних функцій. В обох випадках було виявлено, що показники $x_n(i,j)$ в усіх клітинах прямують до деякого сталого числа, причому з різних початкових значень. Аналіз функцій відображення показали, що якщо для зв'язаного відображення існують значення, при яких $x_{n+1}(i,j) = x_n(i,j) =$ с тоді до цього числа с значення $x_n(i,j)$ можуть прямувати.

Цей результат показує, що в дискретних системах існують свої аналоги стаціонарних точок, аналоги атракторів. Тобто такі системи можуть «наближатись» до певного стану в тому сенсі, що кожна його $x_n(i,j)$ прямує до деякого значення с з часом. Отримані з рівності $x_n(i,j) = x_{n+1}(i,j)$ показники с співпадають зі значеннями, до яких прямують послідовності $x_n(i,j)$. Така поведінка клітинних автоматів ще раз підкреслює універсальність сценаріїв, за якими може розвиватись динамічна система.

Завдання на практичну роботу №7

1) Реалізувати програму, що дозволяє розглянути динаміку ґратки зв'язаних відображень (2), (3) при L = 50 (гратка 50 x 50), b = 0,77, d = 0,06. Значення змінної стану в дискретні моменти часу позначити відтінками сірого кольору (для отримання чіткішої картини поведінки системи проведіть попередню оцінку діапазону зміни змінної стану). Промоделювати розповсюдження плоскої хвилі уздовж однієї з координатних осей системи. Для формування плоскої хвилі необхідно задати однорідний незбуджений стан для всієї системи $(\{x_0(i,j)\}_{i,j=\overrightarrow{1,L}})$ і потім сформувати тонкий фронт хвилі (2-4 елементи), що складається з елементів у збуреному стані. Розглянути взаємодію двох плоских хвиль, що рухаються назустріч один одному.

2) Розглянути формування в системі (2), (3) спіральних хвиль при взаємодії двох плоских хвиль, що рухаються перпендикулярно один до одного.

Завдання 3. Розглянути формування в системі (2), (3) спіральних хвиль при розповсюдженні в системі початкового збурення, що займає частину простору по одній з координат, наприклад, $\{x_0(i, j = const)\}_{i=\overrightarrow{1,L/2}}$. Процес формування спіральної хвилі для такого збурення представлений на рис. 7.1.

Завдання 4. Розглянути формування в системі (2), (3) спіральних хвиль при розповсюдженні в системі початкового збурення у вигляді плоскої хвилі (наприклад, $\{x_0(i, j = const)\}_{i=\overrightarrow{1,L}}$) і за наявності в системі точкового збурення.

Завдання 5. Розглянути формування в системі (2), (3) спіральних хвиль із випадкового початкового збурення.

Практична робота №8

Моделювання просторових структур в системі ”реакція з дифузією”

8.1. Основні відомості.

Формування просторових структур є однією із найважливіших проблем нелінійної динаміки. Широкий клас задач, що мають безпосереднє відношення до біології Такі моделі можуть демонструвати стійкі неоднорідні стаціонарні стани при умові нульового потоку через границю.

Розглянемо двохкомпонентну одновимірну систему реакцій з дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f(u) - v)u + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u - g(v))v + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

де u = u(x,t), v = v(x,t), x – просторова координата, t – час. Така система використовується при описі деяких ситуацій типу ”хижак-жертва”. Нелінійні функції задаються у вигляді:

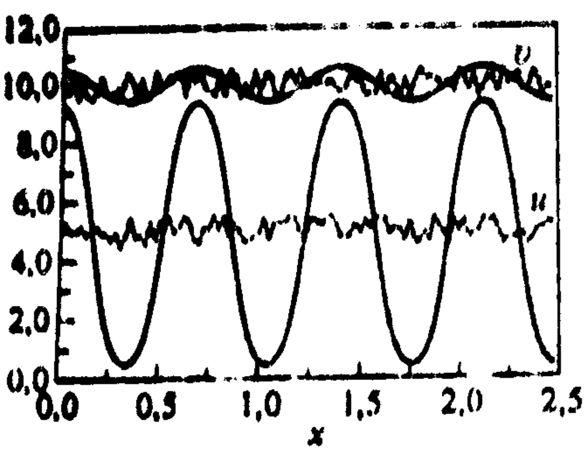
$$f(u) = \frac{35 + 16u - u^2}{9}, g(u) = 1 + \frac{2v}{5}. \qquad (2)$$

Будемо розглядати рішення u(x,t), v(x,t) в обмеженій області $0 \le x \le$ L з нульовим потоком на границі, що відповідає граничним умовам:

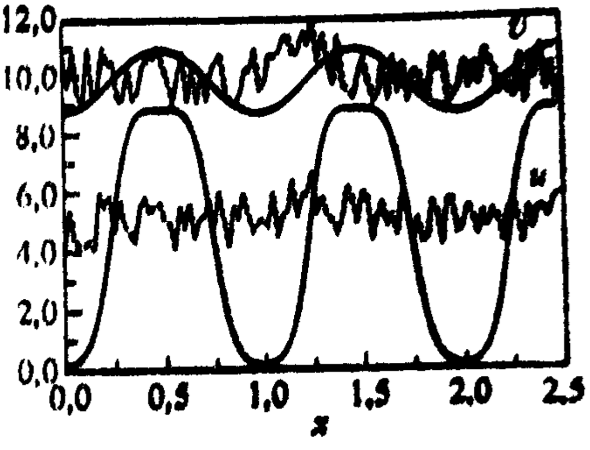
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0, \qquad (3)$$

де L – розмір системи.

Приклади формування стійких просторових структур в такій системі приведені на мал. 8.1.



а



б

Рис. 8.1. Формування структури в моделі, що описується рівняннями (1), (2) з граничними умовами (3). Початковий розподіл показано пунктирною лінією,а вже усталений розподіл - безперервною лінія. Початкові умови задаються у вигляді випадкової послідовності з рівномірним розподілом (*а*) і випадкової послідовності з рівномірним розподілом, що накладена на трикутний імпульс (*б*)

Завдання на практичну роботу №8

Завдання 1. Створіть програму, що дозволяє розглянути динаміку системи (1), (2) з граничними умовами (3) при L = 2,5, D_1 = 0,0125, D_2 = 1,0. При побудові схеми чисельного розв'язку системи (1)-(3) необхідно скористатися методом сіток, розбиваючи просторовий розмір системи *L* на N інтервалів (крок інтегрування по просторовій координаті $\Delta x = L/N$)
і заміняючи похідну другого порядку по просторовій координаті скінченною різницею

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \sim \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2},$$

для $v_{xx} = \partial^2 v(x,t)/\partial x^2$ – аналогічно. Інтегрування за часом необхідно проводити методом Ейлера або Рунге-Кутта. Слід взяти до уваги, що при чисельному розв'язанні рівняння дифузії виду $u_t = Du_{xx}$ для стійкості схеми

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{D(u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t))}{(\Delta x)^2},$$

необхідно, щоб виконувалася умова $2D(\Delta t)/(\Delta x)^2 \le 1.$ При розгляді особливостей формування структур необхідно виводити на екран розподіли $u(x)$ і $v(x)$ на кожному кроці за часом t.

Завдання 2. Оцінити значення кроку інтегрування за часом Δt і по просторовій координаті Δx, при яких чисельна схема розв'язку системи (1)-(3) є стійкою. Розглянути випадок N = 100, Δx=L/N = 0,025. Як початковий розподіл для $u(x)$ і $v(x)$ використати трикутний імпульс (див. мал. **2**).

Завдання 3. Дослідити особливість формування структур у тому випадку, коли початковий розподіл задається у вигляді трикутного імпульсу, що модулюється випадковим сигналом. Розглянути випадки, коли випадковий сигнал має рівномірний і нормальний розподіли.

Завдання 4. Після встановлення в системі структури (мал. **2**) в систему необхідно внести короткочасне випадкове збурення на кінцевому інтервалі (інтервалах) по просторовій координаті і розглянути еволюцію системи. Необхідно провести дослідження при зміні амплітуди дії.

Завдання 5. Розглянути формування в системі (1)-(3) структур із випадкового початкового збурення (мал. 2). Необхідно розглянути рівномірно розподілені випадкові значення на інтервалі [-*a*, *a*] щодо постійного рівня зміщення b. Провести дослідження, змінюючи амплітуду розподілу *a* і значення зміщення b.

Практична робота №9
Взаємодія хвиль в моделі збуджуваного активного середовища

9.1. Основні відомості.

Моделювання збуджуваних активних середовищ за допомогою нелінійних рівнянь дифузії є класичним підходом при дослідженні просторово-часової динаміки широкого класу фізичних, хімічних, біологічних систем. Базова модель збуджуваного активного середовища записується у вигляді системи двох нелінійних рівнянь дифузії для так званих швидких і повільних змінних. Такі моделі демонструють різноманітні просторово-часові стани, серед яких особливий інтерес представляють бігучі хвилі, ведучі центри і спіральні хвилі.

Класична модель збуджуваного активного середовища записується рівнянням Фітц-Хью-Нагумо і має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}(u - \frac{1}{3}u^3 - v) + I + D\nabla^2 u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = u - bv + a, \tag{1}$$

де u і v - швидка і повільна змінні стану системи, відповідно; t - час; ε, *I, D, a, b* — параметри.

Досліджуючи особливості взаємодії бігучих хвиль, можна обмежитися розглядом системи, одновимірної по просторовій координаті; при цьому в рівняннях (1) можна вважати, що $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial x^2$.

Рішення $u(x,t)$, $v(x,t)$ системи (1) розглядають або в обмеженій області $x \in [0, L]$ з нульовим потоком на межі, чому відповідають граничні умови

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = 0, \tag{2}$$

або в області, що замкнена в коло, чому відповідають періодичні умови

$$u(0,t) = u(L,t), \qquad v(0,t) = v(L,t), \tag{3}$$

де L – розмір системи. Вибираючи значення параметрів таким чином, щоб система (1) була збуджуваною, і, подаючи короткий імпульс збудження в деяку точку системи, можна добитися виникнення двох імпульсів збудження, що рухаються в різні сторони. Вносячи короткочасні збурення зі скінченної просторової області системи, можна добитися формування хвилі збурення, що рухається в одному напрямку (див. рис. 3). Швидкість такої хвилі залежить від параметрів системи. Залежність швидкості хвилі c від параметра b представлена на рис. 3.

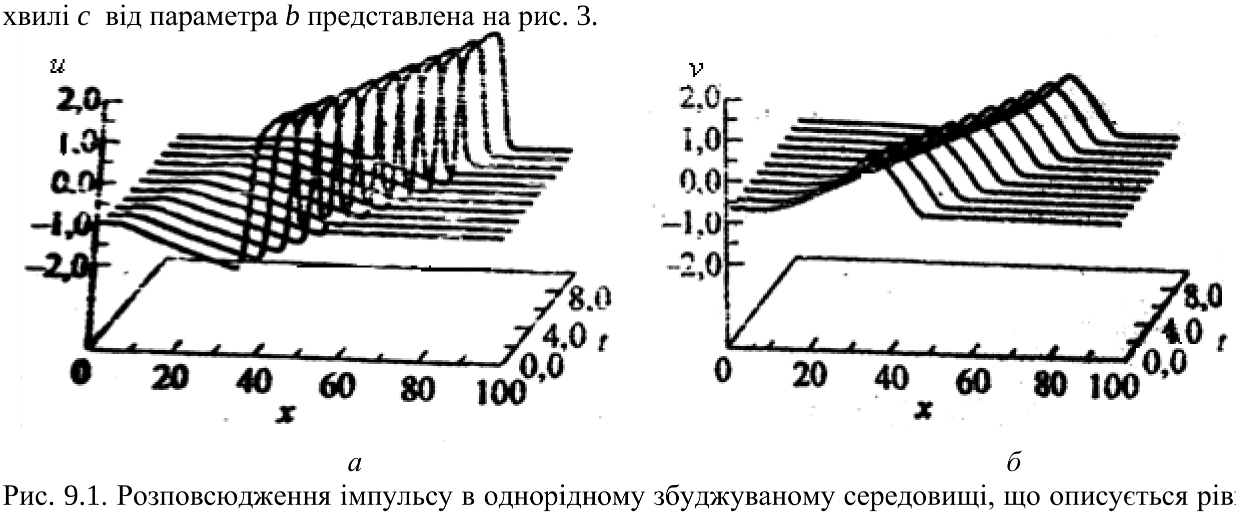


Рис. 9.1. Розповсюдження імпульсу в однорідному збуджуваному середовищі, що описується рівнянням Фітц-Хью-Нагумо (1), (2)

Завдання на практичну роботу №9

Завдання 1. Визначити положення нерухомих точок точкової системи Фітц-Хью-Нагумо (1) (D = 0, I = 0). Знайти поріг біфуркації Андронова-Хопфа для системи Фітц-Хью-Нагумо (1) при D = 0. Побудувати нуль-ізокліни ($\partial u / \partial t = 0, \partial v / \partial t = 0$) системи Фітц-Хью-Нагумо (1) при D = 0. Проаналізувати розташування нуль-ізокліни системи і характер динаміки системи Фітц-Хью-Нагумо при D = 0.

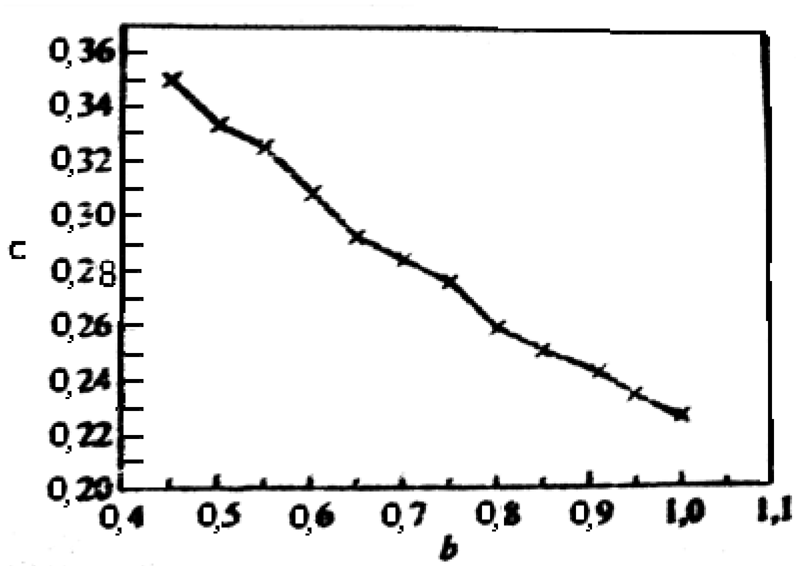


Рис. 9.2. Залежність швидкості імпульсу *c*, що розповсюджується в однорідному середовищі, яке описується рівнянням Фітц-Хью-Нагумо (1), (2), від параметра *b*

Завдання 2. Реалізувати програму для визначення періоду коливань системи Фітц-Хью-Нагумо (1) при $D = 0$. Провести дослідження зміни періоду коливань системи Фітц-Хью-Нагумо при зміні управляючих параметрів.

Завдання 3. Реалізувати програму**,** що дозволяє розглядати динаміку системи (1) з граничними умовами (2) при $L = 100$, $I = 0$, $\varepsilon = 0{,}2$, $a = 0{,}7$, $b = 0{,}5$, $D = 2{,}0$. При побудові схеми чисельного розв'язку системи (1), (2) скористатися рекомендаціями, що приведені в лабораторній роботі №8.

Завдання 4. Дослідити особливості формування бігучих хвиль імпульсів, коли початковий розподіл задається у вигляді короткого прямокутного імпульсу. Розглянути особливості формування бігучих імпульсів, коли початковий розподіл має вигляд гаусівської функції. Задати початкові умови для формування одинарного бігучого імпульсу (мал. 4).

Завдання 5. Дослідити особливості взаємодії бігучих імпульсів в модельному середовищі (1), (2) і (1), (3).

Завдання 6. Реалізувати програму для визначення швидкості руху одинарного бігучого імпульсу. Провести дослідження залежності руху бігучих імпульсів від параметрів системи.

ЗМІСТ

Перелік джерел-посилань

1. Зінченко А. Ю. Комп’ютерне моделювання детермінованого хаосу в складних нелінійних системах (2021)
2. Зінченко А. Ю. Комп’ютерне моделювання нелінійної динаміки складних систем на основі синергетичних методів дослідження (2023)
3. Zinchenko A. Yu. Parametric Identification of Dynamic Systems Based on Chaotic Synchronization and Adaptive Control (2023). Systems, Decision and Control in Energy IV. Springer Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-22464-5
4. В.Я. Данилов, А.Ю. Зінченко Синергетичні методи аналізу [навч. посібник] – К.: НТУУ “КПІ” ВПІ ВПК “Політехніка”, 2011. – 340 с.
5. Sayama H. Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems Open SUNY textbooks, Milne Library, State University of New York at Geneseo (2015). 485 pages.
6. J. D. Crawford. Introduction to bifurcation theory. Reviews of Modern Physics, Vol.63, No.4, 991-1037, 1991.
7. Kuznetsov Yuri A. Element of Applied Bifurcation Theory (Second Edition). – Springer, New York, 1998. – 592 c.
8. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems. Physica, 7D, 16(1978).
9. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco, 1983. – 643 c.
10. Edgar E. Peters Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility 2nd Edition, Wiley, 1996. – 299 p.
11. Michael Tabor Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics. Wiley, New York, 1989. – 384 p.
12. M. Schroeder, Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise, Dover Books on Physics, Dover (2009).
13. Ma J. H., Chen Y. S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I. Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – Vol. 22, No. 11. – P. 1240 – 1251.
14. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys., 19, 25 (1978)
15. Kononyuk A.E. (2016) Discrete -continuous mathematics. (Surfaces). – In the 12th book. Book 6. Part 2.-Kiyv: Osvita of Ukraine. – p. 618.
16. Jens Feder Fractals (Physics of Solids and Liquids), Springer, 1988 – 310 p.
17. H. G. Schuster, Wolfram Just Deterministic Chaos: An Introduction, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005 - 287 p.
18. Зинченко А.Ю. Исследование регулярной и хаотической динамики одной финансовой системы / Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2013. – Т.21, №2. – С. 173 – 187.

Рекомендовані джерела для поглибленого вивчення

1. Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York, NY, United States, 2000. – 603 p.
2. Kenneth Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley&Sons, New York, 1990.
3. Holger Kantz and Thomas Schreiber Nonlinear time series analysis [2-nd ed.], Cambridge, the university Press, 369 p.
4. Crutchfield J. P, B.S. McNamara Equations of motion from a data series. Complex Systems. – 1987. – № 1. – P. 417 – 452.
5. Dormand J.R., P. J. Prince A family of embedded Runge-Kutta formulae. J. Comp. Appl. Math. – 1980. – Vol. 6. – P. 19–26.
6. Robert L. Devaney Chaos, fractals, and dynamics: computer experiments in modern mathematics (dale seymour math), Addison-Wesley 1990. – 181 p.