

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ТА ВПРАВ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПОХІДНА ФУНКЦІЯ

Навчальний посібник



УДК 517.5(076)

3-41

Автори:

І. М. Александрович, А. В. Анікушин, О. К. Боярчук,
О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доц. О. Н. Нестеренко,
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. В. Поляков

Рекомендовано до друку

*вченою радою факультету кібернетики
(протокол № _____ від _____ вересня 2016 року)*

Ухвалено науково-технічною радою

*Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 5 від 13 травня 2020 року)*

3-41 Збірник задач та вправ з математичного аналізу. Похідна функція / І. М. Александрович, А. В. Анікушин, О. К. Боярчук, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2021. — 140 с.

ISBN

Посібник присвячено вивченню тих розділів математичного аналізу, які передують поняттю похідна — визначенню поняття функції, теорія послідовностей, границя та неперервність функції. До кожного з 10 розділів посібника наводиться основний теоретичний матеріал та велика кількість задач. До усіх задач наведені відповіді, які дадуть читачам змогу перевіряти свої розв'язання.

Для студентів математичних та інформаційних спеціальностей університетів

УДК 517.5(076)

© Александрович І. М., Анікушин А. В., Боярчук О. К., Молодцов О. І.,
Номіровський Д. А., Рубльов Б. В., Семенов В. В., 2021

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2021

ЧАСТИНА 1

Похідна функція. Умови задач

РОЗДІЛ 1

Визначення похідної, правила диференціювання

Короткі теоретичні відомості

Нехай функція $f:R \rightarrow R$, $x_0 \in D_f$ та x_0 – гранична точка множини D_f . Функція f називається *диференційованою в точці* x_0 , якщо існує скінченна границя $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, яку називають *похідною функції f у точці x_0* і позначають символом $f'(x_0)$. У точці множини D_f , що не є граничною, поняття похідної не визначатимемо. Якщо функція $f:R \rightarrow R$ диференційована в точці x_0 , то існує така неперервна в точці x_0 функція $D_f \xrightarrow{\phi} R$, що $\forall x \in D_f$ справджується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \phi(x)$, при цьому $f'(x_0) = \phi(x_0)$. Функцію $f:R \rightarrow R$ називають *диференційованою на множині $X \subset D_f$* , якщо вона диференційована в кожній точці $x \in D_f$.

Теорема 1 (необхідна умова диференційованості).

Якщо функція f диференційована в точці $x_0 \in D_f$, то вона неперервна в цій точці ►.

Теорема 2 (про похідну композиції).

Нехай функція $f:R \rightarrow R$ диференційована в точці x_0 , а функція $g:R \rightarrow R$ диференційована в точці t_0 . Якщо $x_0 = g(t_0)$ і t_0 – гранична точка множини $D_{f \circ g}$, то композиція $f \circ g$ диференційована в точці t_0 і справджується рівність

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(x_0)g'(t_0) \blacktriangleright.$$

Теорема 3 (лінійність диференціювання).

Нехай функції $f:R \rightarrow R$, $g:R \rightarrow R$, $D_f = D_g$ диференційовані в точці x_0 . Тоді $\forall \alpha, \beta \in R$ функція $\alpha f + \beta g$ диференційована в точці x_0 і справджується рівність

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \blacktriangleright.$$

Теорема 4 (похідна добутку функцій).

Якщо функції $f:R \rightarrow R$, $g:R \rightarrow R$, $D_f = D_g$ диференційовані в точці x_0 , то функція $(f \cdot g)$ диференційована в точці x_0 і справджується рівність

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \blacktriangleright.$$

Теорема 5 (похідна частки).

Нехай $f:R \rightarrow R$, $g:R \rightarrow R$, $D_f = D_g$ – диференційовані функції в точці x_0 . Якщо $g(x_0) \neq 0$, то функція $\frac{f}{g}$ диференційована в точці x_0 і справджується рівність

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \blacktriangleright.$$

Теорема 6 (похідна оберненої функції).

Нехай функція $f:R \rightarrow R$ у деякому околі точки $x_0 \in D_f$ має похідну f' , яка є неперервною в точці x_0 . Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$, то існують такі околиці $O(x_0) \subset D_f$ та $O(y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, що звуження функції $f:O(x_0) \rightarrow O(y_0)$ є оборотною функцією та існує

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \blacktriangleright.$$

Наведемо *таблицю похідних* основних елементарних функцій (формули справджуються на областях визначення зазначених функцій):

$$\begin{aligned}(x^p)' &= p x^{p-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \\(a^x)' &= a^x \ln a, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \\(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.\end{aligned}$$

Похідну *степенево-показникової функції* можна обчислити таким чином:

$$\begin{aligned}\left(u(x)^{v(x)}\right)' &= \left(e^{v(x) \ln u(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \left(v(x) \ln u(x)\right)' = \\&= u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x) u'(x)}{u(x)}\right).\end{aligned}$$

Нехай $f: R \rightarrow R$, якщо x_0 – гранична точка множини $D_f \cap (-\infty, x_0)$ ($D_f \cap (x_0, +\infty)$), то $f'_\Lambda(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ($f'_\Pi(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$). Числа $f'_\Lambda(x_0)$ та $f'_\Pi(x_0)$, якщо вони існують, називаються відповідно *лівою* та *правою похідними функції f у точці x_0* .

Теорема 7 (*критерій диференційованості функції*).

Для того, щоб неперервна функція $f: R \rightarrow R$ була диференційованою в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множин $D_f \cap (-\infty, x_0)$ та $D_f \cap (x_0, +\infty)$, необхідно й достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченні та рівні ліву і праву похідні. При цьому справджується рівність $f'_\Lambda(x_0) = f'_\Pi(x_0) = f'(x_0)$ ►.

Відображення $R \xrightarrow{L} R$ називається *лінійним*, якщо $\forall x, y \in R$ виконуються умови:

$$1) L(x+y) = L(x) + L(y), \quad \forall x, y \in R \text{ (адитивність);}$$

$$2) L(\lambda x) = \lambda L(x), \quad \forall x \in R \text{ (однорідність).}$$

Лема 1 (загальний вигляд лінійного відображення).

Відображення $R \xrightarrow{L} R$ лінійне тоді й тільки тоді, коли існує $a = \text{const}$, для якої $\forall x \in R$ справджується рівність $L(x) = ax$ ►.

Теорема 8 (приріст диференційованої функції).

Нехай для функції $f: R \rightarrow R$ точка $x_0 \in D_f$ гранична для множини D_f . Якщо існує така лінійна форма $L(h) = ah$, що $\forall h \in R: x_0 + h \in D_f$ справджується рівність $f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(h)$, то функція f диференційована у точці x_0 і $f'(x_0) = a$ ►.

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ має похідну в точці x_0 , то $\forall h \in R: x_0 + h \in D_f$ справджується рівність

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)h,$$

де α – неперервна в точці x_0 функція, $\alpha(0) = 0$ та $D_\alpha = D_f$.

Лінійну форму $h \mapsto f'(x_0)h$ називають *диференціалом функції f у точці x_0* і позначають символом $df(x_0)$ (або df , якщо опустити параметр x_0). Отже, $\forall h \in R$ $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$.

Розглянемо функцію $g(x) = x$, $x \in R$. Для кожного фіксованого $x_0 \in R$ та $\forall h \in R: dg(x_0)(h) = g'(x_0) \cdot h = h$, тобто диференціали функції $g: x \mapsto x$ у будь-якій точці рівні між собою, тому окрім позначення $dx(x_0)$ їх позначають просто через dx . Диференціал цієї функції не залежить від x і його називають *диференціалом незалежної змінної*.

Оскільки

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx(x_0)(h) \quad \forall h \in R: x_0 + h \in D_f,$$

то, опускаючи аргумент h , будемо це записувати як $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Крім того, оскільки справджується рівність

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)(h)}{dx(x_0)(h)}, \text{ то будемо це записувати як } f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

або, опускаючи і аргумент x_0 , також як $f' = \frac{df}{dx}$.

При достатньо малому $\varepsilon > 0$ для наближеного обчислення значень диференційованої у $O_\varepsilon(x_0) \subset D_f$ функції f використовують наближену формулу

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h) = f'(x_0)(x - x_0), \quad h = x - x_0,$$

тобто

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

При знаходженні диференціалів складних функцій часто використовують властивість інваріантності форми першого диференціала, суть якого полягає в такому. Нехай в умовах теореми 2 визначена та диференційована композиція функцій $F = f \circ g$. Тоді її похідна обчислюється за формулою

$$F'(t_0) = (f \circ g)'(t_0) = f'(x_0)g'(t_0).$$

Диференціал $dF(t_0)(h)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} dF(t_0)(h) &= F'(t_0)dt(h) = f'(x_0)g'(t_0)dt(h) = \\ &= f'(x_0)dx(h) = df(x_0)(h), \end{aligned}$$

оскільки з урахуванням позначення $x = g(t)$ справджується рівність $dx(h) = g'(t_0)dt(h)$. Якщо врахувати рівність $dF(t_0)(h) = df(x_0)(h)$, то отримаємо, що форма диференціала функції f така сама, як у випадку, коли x є незалежною змінною.

Нехай функція $y = f(x)$, $x \in R$ задана параметрично, тобто $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $a < t < b$, і припустимо, що $\forall t \in (a, b) \exists \phi'(t)$, $\psi'(t)$ та $\phi'(t) \neq 0$. Тоді композиція $y = f(x) = (\psi \circ \phi^{-1})(x)$ має похідну $\forall x_0 \in D_f$, яку можна знайти за формулою

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}, \quad x_0 = \phi(t_0).$$

Нехай задане відображення $F: R^2 \rightarrow R$. Якщо диференційована функція $X \xrightarrow{f} R$ задана неявно рівнянням

$F(x, y) = 0$ на множині $X \times Y \subset R^2$, тобто $\forall x \in X$ справджується рівність $F(x, f(x)) = 0$, то похідна f' може бути знайдена з рівності $\frac{d}{dx}(F(x, f(x))) = 0$, де $F(x, f(x))$ розглядатимемо як складну функцію одного аргументу x .

Теорема 9 (неперервність похідної).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ неперервна в деякому околі $O_\delta(x_0)$, диференційована у проколотому околі $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ та $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \alpha \in R$, то f диференційована в точці x_0 і при цьому $f'(x_0) = \alpha$ ►.

Теорема 10 (точки розриву похідної).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована на проміжку $(a, b) \subset D_f$, то її похідна f' може мати на (a, b) лише розриви другого роду ►.

Задачі

1. Обчисліть похідні явно заданих функцій $f: R \rightarrow R$ у кожній неізолюваній точці їхньої області визначення (параметри a, b додатні):

$$1) f(x) = \frac{x}{1+x^2};$$

$$2) f(x) = \frac{\ln x}{x};$$

$$3) f(x) = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$5) f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^3 x);$$

$$6) f(x) = \sin(\sin(\sin x));$$

$$7) f(x) = \sin(\cos(\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)));$$

$$8) f(x) = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x));$$

$$9) f(x) = \frac{1}{\cos^n x};$$

$$10) f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b;$$

$$11) f(x) = \left(\frac{1-x^2}{2} \sin x - \cos x\right) e^{-x};$$

$$12) f(x) = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4};$$

$$13) f(x) = 3^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}};$$

$$14) f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right);$$

$$15) f(x) = \ln \left(\ln^2 \left(\ln^3 x \right) \right);$$

$$16) f(x) = x \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - \sqrt{x^2 + 1};$$

$$17) f(x) = a^{a^a} + a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{x^x} + x^{x^x};$$

$$18) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right);$$

$$19) f(x) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{4x^4} - \frac{1}{16x^4};$$

$$20) f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right);$$

$$21) f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x;$$

$$22) f(x) = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right);$$

$$23) f(x) = \ln \frac{5 + 3 \cos x + 4 \sin x}{3 + 5 \cos x};$$

$$24) f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \arccos x;$$

$$25) f(x) = \arcsin(\sin x);$$

$$26) f(x) = x(\sin \ln x - \cos \ln x);$$

$$27) f(x) = \sin(\arcsin x);$$

$$28) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$$

$$29) f(x) = \frac{1}{\arccos^2(x^2)};$$

$$30) f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x};$$

$$31) f(x) = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}};$$

$$32) f(x) = e^x + \sqrt{1 + e^{2x}};$$

$$33) f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x);$$

$$34) f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}};$$

$$35) f(x) = \ln \left(\ln \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) \right);$$

$$36) f(x) = \arccos(\sin^2 x - \cos^2 x);$$

$$37) f(x) = \operatorname{arctg}(thx);$$

$$38) f(x) = \arccos \frac{1}{chx};$$

$$39) f(x) = 10^{\frac{x}{\log_x 3}};$$

- 40) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;
- 41) $f(x) = x^{\frac{7}{\ln x}}$;
- 42) $f(x) = \ln \frac{2 + \cos x + \sqrt{3} \sin x}{1 + 2 \cos x}$;
- 43) $f(x) = \sqrt[17]{\frac{e^{\sin 5x} (x^2 + 5x + 1)}{(x^{12} - x^6 + 2)^3}}$;
- 44) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;
- 45) $f(x) = (ch x)^{e^x}$;
- 46) $f(x) = \frac{\cos \ln x - \sin \ln x}{e^{\arcsin^4 x} + \cos^2 x}$;
- 47) $f(x) = \frac{x^2 \ln^2 \operatorname{tg} x}{\ln \sin^2 \pi x}$;
- 48) $f(x) = \log_x (x^4 + 4)$;
- 49) $f(x) = th x + cth x$;
- 50) $f(x) = (8 + 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1 - x^2}$;
- 51) $f(x) = (\ln x - 2) \sqrt{1 + \ln x}$;
- 52) $f(x) = \frac{6 + 25x^3}{1000} (2 - 5x^3)^{\frac{5}{3}}$;
- 53) $f(x) = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$;
- 54) $f(x) = 2 \ln \left(1 + e^{\frac{x}{2}} \right) - x - 2e^{-\frac{x}{2}}$;
- 55) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

- 56) $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + \cos x}$;
- 57) $f(x) = \frac{\ln \sqrt{x} + \operatorname{tg} x^2}{\arccos x}$;
- 58) $f(x) = \frac{2^{\sin x}}{\operatorname{arctg}(x^2 - 1)}$;
- 59) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^{\frac{3}{7}}}{\cos x^2 + \cos^2 x}$;
- 60) $f(x) = \frac{\ln x + \ln^2 x}{x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{4}{5}}}$;
- 61) $f(x) = \frac{sh x^2}{ch x^3} \cdot \frac{\arcsin x + \arccos x}{1 + x^2}$;
- 62) $f(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\ln(1 + \sin x)}{ch x - 1}$;
- 63) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arccot} x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\cos ch x}$;
- 64) $f(x) = \frac{\sin(\sin^2 x)}{\cos \sqrt{x}} \cdot \frac{she^x}{\ln \frac{1+x}{1+x^2}}$;
- 65) $f(x) = \frac{\sin x + \arcsin x}{\cos x + \arccos x} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}{\operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}}$;
- 66) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;
- 67) $f(x) = (sh x)^{sh x}$;
- 68) $f(x) = (\cos x)^{\arccos x}$;
- 69) $f(x) = (\pi - \arcsin x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

$$70) f(x) = x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$71) f(x) = -\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right|;$$

$$72) f(x) = x^{\lg x} - \frac{1-x^{\lg 2x}}{2} \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$73) f(x) = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x);$$

$$74) f(x) = \frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$75) f(x) = \frac{6-5x}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|;$$

$$76) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2};$$

$$77) f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4};$$

$$78) f(x) = \frac{8x^4 + 8x^2 + 4x - 1}{(x^3 + x + 1)^2};$$

$$79) f(x) = \ln \left| \frac{x^5 - 5x}{x^5 - 5x + 1} \right|;$$

$$80) f(x) = (\arcsin x^2)^{\lg^2 x};$$

$$81) f(x) = \left(\cos x^{\frac{3}{2}} \right)^{\sqrt{\sin x}};$$

$$82) f(x) = \left(\ln^2(1 + \sqrt{x}) \right)^{\cos x^2};$$

- 83) $f(x) = \left(\arccos \sqrt{x} \right)^{e^{-\frac{1}{x}}}$;
- 84) $f(x) = \left(1 + \sin x + \sin x^2 \right)^{2 \cos x}$;
- 85) $f(x) = \left(ch x^2 \right)^{sh^2 x}$;
- 86) $f(x) = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} \right)^{\operatorname{arctg}^2 x}$;
- 87) $f(x) = \left(\cos \sin x \right)^{\sqrt{\ln x}}$;
- 88) $f(x) = \ln \left(x^2 + 1 \right)^{\operatorname{tg}^3 x}$;
- 89) $f(x) = \left(sh x^2 \right)^{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$;
- 90) $f(x) = \left(ch \sqrt{x} \right)^{2 \sin^{\frac{5}{3}} x}$;
- 91) $f(x) = \left(\operatorname{arcctg} \left(1 + \sqrt{x} \right) \right)^{\ln \ln x}$;
- 92) $f(x) = \left(\ln \ln \left(x^2 + 1 \right) \right)^{\ln \left(x^4 - 1 \right)}$;
- 93) $f(x) = \left(\cos \operatorname{arcctg} x \right)^{\arcsin x^2}$;
- 94) $f(x) = \left(\operatorname{tg} \arccos x \right)^{\arcsin^2 x}$;
- 95) $f(x) = x^{x^{\sin x}}$;
- 96) $f(x) = 2^{x^{x^2}}$;
- 97) $f(x) = \left(\ln x \right)^{x^{\ln x}}$;
- 98) $f(x) = x^{(\ln x)^{\ln x}}$;
- 99) $f(x) = \left(\sin \cos x \right)^{x^{ch x}}$;
- 100) $f(x) = \left(\operatorname{arctg} x \right)^{2^{\operatorname{arctg} x}}$.

2. Обчисліть похідну функції $f: R \rightarrow R$ у точці x_0 :

1) $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

в) $x_0 = 2$;

г) $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = \frac{1}{2}\pi$;

4) $f(x) = \arctg x \cdot \arcsin x$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

5) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$:

а) $x_0 = \frac{1}{\pi}$;

б) $x_0 = \frac{2}{\pi}$;

6) $f(x) = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = -1$;

в) $x_0 = -\sqrt[3]{3}$;

7) $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

8) $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \arctg \cos x$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = \frac{1}{2}\pi$;

в) $x_0 = \pi$;

9) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$, $x_0 = 0$;

10) $f(x) = (9-3^x) \ln(x^2)$:

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = 2$;

11) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$:

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = \frac{1}{2}\pi$;

$$12) f(x) = \frac{x \ln(x+2)}{e^{x^2}};$$

$$a) x_0 = 0;$$

$$б) x_0 = -1;$$

$$13) f(x) = \prod_{k=-100}^{100} (x-k):$$

$$a) x_0 = -100;$$

$$б) x_0 = -1;$$

$$в) x_0 = 0;$$

$$г) x_0 = 100.$$

3. Знайдіть похідну функції $f: R \rightarrow R$ у кожній точці, де функція диференційована:

$$1) f(x) = |x|;$$

$$2) f(x) = x|x|;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} |\ln|x||, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \arccos \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1; \end{cases}$$

$$5) f(x) = |\sin^3 x|;$$

$$6) f(x) = [x] \sin^2 \pi x;$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

- 11) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in R \setminus Q, \\ 0, & x \in Q; \end{cases}$
- 12) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2}(x-1), & |x| > 1; \end{cases}$
- 13) $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in R \setminus Q, \\ x^2, & x \in Q; \end{cases}$
- 14) $f(x) = \begin{cases} 2x(1-x^2)e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$
- 15) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{2} \pi x, & |x| \leq 1, \\ -1, & |x| > 1; \end{cases}$
- 16) $f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}x|x| + \frac{5}{2}, & |x| > 1; \end{cases}$
- 17) $f(x) = \arcsin(\cos x);$
- 18) $f(x) = \arccos(\cos x);$
- 19) $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$
- 20) $f(x) = x(x^2-1)^2[x];$
- 21) $f(x) = \begin{cases} e^x - 2^x, & x < 0, \\ x - \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$
- 22) $f(x) = \begin{cases} x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & |x| \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$
- 23) $f(x) = |x^3|;$
- 24) $f(x) = [x] \sin \pi x;$
- 25) $f(x) = |\pi - x| \sin x;$
- 26) $f(x) = \{x\} \sin^2 \pi x.$

4. Знайдіть, у яких точках області визначення функція $f:R \rightarrow R$ не диференційована:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 + x^{\frac{5}{2}} + x^3, & x \geq 0, \\ x^3 \sin x + \sqrt[3]{x^4} \cos x, & x < 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - sh x}{x^2}, & x > 0, \\ ch x - \cos x, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x^3 - 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

- 11) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, x = 0 \wedge |x| > 1; \end{cases}$
- 12) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n+1}} < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ 0, x = 0 \wedge |x| > 1; \end{cases}$
- 13) $f(x) = e^{-|x|}$;
- 14) $f(x) = |x| \cdot \cos x$;
- 15) $f(x) = \min\{x, \sin x\}$;
- 16) $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$;
- 17) $f(x) = \min\{x^2, x^3\}$;
- 18) $f(x) = \max\{\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}\}$.

5. Знайдіть, за яких значень параметрів α, β функція $f: R \rightarrow R$ буде неперервно диференційованою на R , якщо:

- 1) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, x \leq 1, \\ x^2, x > 1; \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, x > -1, \\ x^3, x \leq -1; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, x \geq 1, \\ -1, x < 1; \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, x \geq 1, \\ x + \beta, x < 1; \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, x > 1, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, x \leq 1; \end{cases}$
- 6) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, x \leq 0, \\ 0, x > 0; \end{cases}$

$$7) f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \sin \alpha x, & x \geq 0, \\ \sin \beta x, & x < 0; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} (x + \alpha)e^{-\beta x}, & x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |x| < 1, \\ |x|^{-1}, & |x| \geq 1; \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} x, & |x| < 1, \\ \beta x, & |x| \geq 1; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2x + 1, & x \geq -1, \\ -x^2 + \beta, & x < -1; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} \alpha x^4 + \beta x^3 + x^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ x - \beta, & x \in [0, 1], \\ x^2 + \alpha x - \beta, & x < 0; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - x + \beta, & x \leq 1, \\ -x^2 + \beta x + \alpha, & x \in (-1, 1), \\ \beta x^2 + \alpha x - 1, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \max\{\alpha |x|, \beta x^2\};$$

$$18) f(x) = \min\{\alpha x^3, \beta\}.$$

6. Знайдіть, за яких значень параметрів α, β функція $f: R \rightarrow R$ буде:

- 1) неперервною на R ;
- 2) диференційованою на R ;
- 3) неперервно диференційованою на R :

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 0, \\ x^\beta, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \leq 0, \\ x^\beta, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \min \{ \alpha x^2, \beta x^4 \};$$

$$\text{е) } f(x) = \max \{ \alpha x, \beta \sin x \}.$$

7. Чи є функція $f: X \rightarrow R$ диференційованою у точці x_0 ?
Якщо так, то знайдіть значення $f'(x_0)$, якщо:

$$1) f(x) = x, \quad X = N \text{ та}$$

$$\text{а) } x_0 = 1;$$

$$\text{б) } x_0 = 2;$$

$$2) f(x) = x^2, \quad X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\} \cup \{0\} \text{ та}$$

$$\text{а) } x_0 = 1;$$

$$\text{б) } x_0 = \frac{1}{10};$$

$$\text{в) } x_0 = 0;$$

$$3) f(x) = x^3, \quad X = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \mid n \in N \right\} \text{ та}$$

$$\text{а) } x_0 = 0;$$

$$\text{б) } x_0 = \frac{1}{1000};$$

$$\text{в) } x_0 = \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } x_0 = 1;$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{— нескоротний дріб, } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$X = \mathbb{Q}$ та

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $X = \mathbb{Q}$ та

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = -2$;

в) $x_0 = 0$;

6) $f(x) = x^3 - x$, $X = (R \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ та

а) $x_0 = -1$;

б) $x_0 = \sqrt{2}$;

в) $x_0 = 0$;

7) $f(x) = [x]$, $X = \mathbb{Q}$ та

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = -2$;

в) $x_0 = -\frac{3}{7}$;

г) $x_0 = \frac{5}{2}$;

8) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in R \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ $X = [-1, 1]$ та

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = 0$.

8. Вважаючи функції ϕ та ψ диференційованими на R , знайдіть похідну складних функцій f , де:

1) $f(x) = \phi(x^3) + \psi^3(x)$;

2) $f(x) = \phi(e^x) + e^{\psi(x)}$;

3) $f(x) = \phi(\sin^2 x) + \psi(\sin(x^2))$;

4) $f(x) = (\phi(x))^{\psi(x)}$, $\phi(x) > 0$;

5) $f(x) = \log_{\phi(x)} \psi(x)$, $\phi(x) > 0$, $\phi(x) \neq 1$, $\psi(x) > 0$;

6) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$, $\psi(x) \neq 0$;

7) $f(x) = \ln \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$, $\phi(x)\psi(x) > 0$.

9. За правилами диференціювання обернених функцій знайдіть похідні функції $f: R \rightarrow R$ на множині $X \subset D_f$, якщо:

- 1) $f(x) = \arcsin x$, $X = [0, 1)$;
- 2) $f(x) = \arccos x$, $X = [0, 1)$;
- 3) $f(x) = \arctg x$, $X = [0, +\infty)$;
- 4) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $X = [0, +\infty)$;
- 5) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, $X = [0, 1)$;
- 6) $f(x) = e^{\arcsin x}$, $X = [0, 1)$;
- 7) $f(x) = \ln x$, $X = (0, +\infty)$;
- 8) $f(x) = \log_2 x$, $X = (0, +\infty)$;
- 9) $f(x) = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $X = R$;
- 10) $f(x) = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $X = (1, +\infty)$;
- 11) $f(x) = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $X = (0, 1)$.

10. Знайдіть ліву та праву похідні функції $f: X \rightarrow R$ у точці x_0 та зробіть висновок, чи існує $f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = |x|$ та

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ та

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ та

а) $x_0 = 0$;

б) $x_0 = \frac{1}{2}$;

в) $x_0 = 1$;

г) $x_0 = 2$;

- 4) $f(x) = [x] \sin \pi x$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{1}{2}$;
 в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$;
- 5) $f(x) = \sin^2 x \cdot |\cos x| + \cos x \cdot |\sin x|$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 6) $f(x) = \begin{cases} 2x^a, & x \leq 0, \\ \ln(1+x^{\frac{7}{5}}), & x > 0, \end{cases}$ та $x_0 = 0$
- а) $a = 1$; б) $a = 2$;
- 7) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 1, \end{cases}$ та $x_0 = 1$;
- 8) $f(x) = (1-x^2) \operatorname{sgn} x$ та $x_0 = 0$;
- 9) $f(x) = x|x|$ та $x_0 = 0$;
- 10) $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ та $x_0 = 0$;
- 11) $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$ та $x_0 = 0$;
- 12) $f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \cos x$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 13) $f(x) = \arcsin \sin x$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 14) $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
- 15) $f(x) = \min\{\sin x, x\}$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
- 16) $f(x) = \min\{x^2 - x, x\}$ та
- а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$;

$$17) f(x) = \begin{cases} |\ln |x-1||, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad \text{та}$$

$$\text{а) } x_0 = 0;$$

$$\text{б) } x_0 = 1;$$

$$\text{в) } x_0 = 2;$$

$$\text{г) } x_0 = 3;$$

$$18) f(x) = \begin{cases} \frac{x^a}{\sin x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \text{та}$$

$$\text{а) } a = 1;$$

$$\text{б) } a = 2;$$

$$19) f(x) = \begin{cases} x^a \arctg \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \text{та}$$

$$\text{а) } a = 1;$$

$$\text{б) } a = 2.$$

11. Дослідіть на диференційованість функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3\text{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right], & x \neq (2n+1)\pi, \\ \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{5}}, & x = (2n+1)\pi, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{2} \left| x - 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right] \right| \left(x - 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right] \right) + \pi^2 \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right];$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{3}x^3, & |x| \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{6}\text{sgn } x, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \frac{[x]}{\pi} ([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x);$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\text{sgn } x, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{6+3\sin x} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2\text{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right], & x \neq (2n+1)\pi, \\ \frac{2\pi(2n+1)}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}, & x = (2n+1)\pi, \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x + \pi}{2\pi} \right], & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n + 1), & x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z};$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$9) f(x) = (-1)^{\left[\frac{\frac{3}{4}\pi + x}{\pi} \right]} (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2} \left[\frac{\frac{3}{4}\pi + x}{\pi} \right];$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2}, & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 2}, & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$12) f(x) = [x] \ln x - \ln([x]!), \quad x \geq 1.$$

12. Обчисліть диференціали функцій у кожній неізольованій точці їхньої області визначення (параметри a, b додатні), а також їхні значення в точці P для:

1) явно заданої функції $y = f(x)$:

а) $f(x) = \frac{1}{x}, P(1, 1);$

б) $f(x) = \arccos e^x, P(0, 0);$

в) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), P(0, 0);$

г) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, P(0, 0);$

д) $f(x) = x^x, P(1, 1);$

е) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, P(1, 0);$

є) $f(x) = x \ln x, P(1, 0);$

ж) $f(x) = xe^x, P(1, e);$

з) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, P(0, 0);$

и) $f(x) = 2^{-\frac{1}{\cos x}}, P\left(0, \frac{1}{2}\right);$

і) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}, P(9, \sqrt{11});$

ї) $f(x) = \cos \ln x, P(1, 1);$

2) параметрично заданої функції $x = \phi(t), y = \psi(t)$ на множині $t \in T$:

а) $x = t^4 + 1, y = t^3 + t, T = R^+, P(2, 2);$

б) $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}, T = (0, +\infty), P(0, 0);$

в) $x = (t^2 - 1)(t + 1), y = (t^2 - 1)(t - 1), T = [\frac{1}{3}, +\infty), P(2, 2);$

г) $x = \sin t, y = \cos t, T = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], P(0, 1);$

3) неявної функції, що задається рівнянням $F(x, y) = 0$ на множині $X \times Y$:

а) $x^4 + x - y^5 - y^2 = 0, X = Y = R^+, P(1, 1);$

б) $\sin x - \sin y = 0, X = (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), Y = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), P(-\pi, \pi);$

в) $\sin x - \cos y = 0, X = (0, \frac{\pi}{2}), Y = (0, \frac{\pi}{2}), P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4});$

г) $e^y + y - \ln x - x = 0, X = Y = R, P(1, 0).$

13. Відомо, що функції u, v, w мають однакову область визначення, у кожній точці якої існують їхні диференціали. Знайдіть диференціали функції f на її області визначення, де:

1) $f(x) = uvw;$

2) $f(x) = \ln \sqrt{u^2 + v^2};$

$$3) f(x) = \frac{u}{vw};$$

$$4) f(x) = \frac{uv}{w};$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}};$$

$$6) f(x) = \frac{uv}{u^2 + w^2};$$

$$7) f(x) = \operatorname{arccctg} \frac{u}{v};$$

$$8) f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{v};$$

$$9) f(x) = e^{uv};$$

$$10) f(x) = e^{u+v};$$

$$11) f(x) = u^v;$$

$$12) f(x) = u^{v^w};$$

$$13) f(x) = (uv)^w;$$

$$14) f(x) = v^{uw}.$$

14. Визначте, чи буде диференційованою в області визначення функція $x \mapsto y(x)$, що задана параметрично:

$$1) x(t) = 2t + |t|, y(t) = 5t^2 + 4t|t|;$$

$$2) x(t) = 2t^7 + t^5 \cos t + 4t^3, y(t) = t^5 + t^3 \sin t;$$

$$3) x(t) = \begin{cases} t, & x \in Q, \\ -t, & x \in R \setminus Q, \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & x \in Q, \\ -t^2, & x \in R \setminus Q; \end{cases}$$

$$4) x(t) = \begin{cases} t, & x \in Q, \\ 2t-1, & x \in R \setminus Q, \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} t^2 + 2t, & x \in Q, \\ 4t^2 - 1, & x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

15. Знайдіть на області визначення похідні функцій $x \mapsto y(x)$, що задані параметрично, а також значення цих похідних при заданому значенні параметра t_0 і в заданій точці $M(x_0, y_0)$, якщо:

$$1) x(t) = t^2 + t + 1, y(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1, t_0 = -\frac{1}{2}, M(1, 1);$$

$$2) x(t) = 1t - t^2, y(t) = t - t^3, t_0 = 0, M(0, 0);$$

$$3) x(t) = t^5(t-1), y(t) = t^5(t+1), t_0 = -1, M(0, 2);$$

$$4) x(t) = (t-1)^2(t-2), y(t) = (t-2)^2(t-1), t_0 = 3, M(-2, 4);$$

$$5) x(t) = \frac{t+1}{t}, y(t) = \frac{t-1}{t}, t_0 = 1, M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2});$$

- 6) $x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1}$, $y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$, $t_0 = \sqrt[3]{2}$, $M(0, 0)$;
 7) $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos^2 t$, $t_0 = \frac{1}{4}\pi$, $M(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$;
 8) $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, $t_0 = \frac{1}{6}\pi$, $M(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2})$;
 9) $x(t) = cht$, $y(t) = 4sh t$, $t_0 = \ln 2$, $M(ch1, 4ch1)$;
 10) $x(t) = \sin^3 t$, $y(t) = \cos^3 t$, $t_0 = \frac{1}{3}\pi$, $M(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$;
 11) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $t_0 = \frac{1}{2}\pi$, $M(\pi, 2)$;
 12) $x(t) = \ln(1+t^3)$, $y(t) = t - \operatorname{arctg} t$, $t_0 = 1$, $M(0, 0)$.

16. Знайдіть на області визначення похідну функції $y(x)$, $x \in R$, що неявно задається наведеним рівнянням, а також значення цієї похідної в заданій точці $M(x_0, y_0)$, якщо:

- 1) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(1, 0)$;
 2) $y^5 + y^3 + y + x$, $M(-3, 1)$;
 3) $y - x = a \sin y$, $a \in (0, 1)$, $M(, 0)$;
 4) $xy + \ln y = 1$, $M(1, 1)$;
 5) $x^y = y^x$, $M(4, 2)$;
 6) $2y \ln y = x$, $M(2e, e)$;
 7) $y = x + \operatorname{arctg} y$, $M(1 - \frac{1}{4}\pi, 1)$;
 8) $y = 1 + xe^y$, $M(-1, 0)$.

17. Замінюючи приріст функції її диференціалом у відповідній точці, обчисліть наближено такі значення:

- 1) $\sqrt[3]{1,02}$; 2) $\sin 29^\circ$; 3) $\lg 11$;
 4) $\operatorname{arctg} 0,95$; 5) $\operatorname{tg} 44^\circ$; 6) $\operatorname{arctg}(-0,01)$;
 7) $\sqrt[3]{100}$; 8) $\cos 151^\circ$; 9) $0,98 \ln 0,98$;
 10) $2^{2,99}$; 11) $\operatorname{ctg} 92^\circ$; 12) $\log_2(15,97)$;
 13) $\sqrt[3]{7,99} \cdot \cos(0,01)$; 14) $(1,01)^2 \cdot (2,01)^2 \cdot (3,01)^2$.

18. Чи буде диференційованою функція F у точці x_0 , якщо із двох функцій f та g ($D_f = D_g$) диференційовані в точці x_0 :

- 1) обидві функції;
- 2) тільки функція f ;
- 3) жодна із двох функцій, якщо:
 - а) $F(x) = f(x) + g(x)$;
 - б) $F(x) = f(x)g(x)$;
 - в) $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$;
 - г) $F(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $f(x_0) \neq 0$.

19. Перевірте, чи справджуються твердження:

1) якщо всі функції $f_{ij}(x)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, мають спільну область визначення та диференційовані на ній, то

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_k(x) & f'_k(x) & \dots & f'_k(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix};$$

2) якщо функція f диференційована на проміжку $(a, +\infty)$, то:

- а) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$;
- б) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, то $\exists \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$;

в) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$;

г) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in R$, то $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \in R$;

д) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \in R$, то $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in R$;

3) якщо функція f диференційована на R (D^f) та:

а) f парна, то f' непарна;

б) f непарна, то f' парна;

в) $f - T$ -періодична, то $f' - T$ -періодична;

г) f' парна, то f непарна;

д) f' непарна, то f парна;

е) $f' - T$ -періодична, то $f - T$ -періодична;

4) функція f диференційована в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли:

а) функція f неперервна в точці x_0 ;

б) коли існує $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n f \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right)$;

5) якщо функція f диференційована в точці x_0 , то вона диференційована в деякому околі точки x_0 ;

6) якщо функція f диференційована на $[a, b]$, то на $[a, b]$ також диференційовані функції

$$M_1(x) = \max_{t \in [a, x]} f(t), M_2(x) = \max_{t \in [x, b]} f(t), m_1(x) = \min_{t \in [a, x]} f(t),$$

$$m_2(x) = \min_{t \in [x, b]} f(t);$$

7) якщо для деякої функції $f: [a, b] \rightarrow R$ функція $M_1(x) = \max_{x \in [a, x]} f(x)$ диференційована на $[a, b]$, то на $[a, b]$ також диференційована і функція f ;

8) якщо функції f та g диференційовані на (a, b) (D_f), то:

а) з умови $\forall x \in (a, b) \quad f(x) < g(x)$ випливає, що $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < g'(x)$;

б) з умови $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < g'(x)$ випливає, що $\forall x \in (a, b) \quad f(x) \leq g(x)$;

в) з умов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x)$ та $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < g'(x)$ випливає, що $\forall x \in (a, b) \quad f(x) < g(x)$;

г) з умов $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x)$ та $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < g'(x)$ випливає, що $\forall x \in (a, b) \quad f(x) > g(x)$;

9) якщо функції f диференційовані в точці $x_0 = 0$, то функція $f(g(x))$ також диференційована в точці $x_0 = 0$, якщо:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

10) якщо для функції $f: R \rightarrow R$ існує неперервна в точці x_0 функція ϕ , яка задовольняє умови $D_f = D_\phi$ та $\forall x \in D_f$ справджується умова $f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0)$, то:

а) f диференційована в точці x_0 ;

б) f диференційована в точці x_0 , якщо x_0 – гранична точка D_f ;

в) якщо існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = \phi(x_0)$;

г) якщо існує $f'(x)$, де $x \in D_f$, то $f'(x) = \phi(x)$.

20. Наведіть приклади функцій $f: R \rightarrow R$, якщо такі існують, для яких справджуються умови:

1) не існують $f'(x_0)$ та $f''(x_0)$ у деякій точці x_0 , граничній для D_f , а $f'''(x_0)$ існує;

2) не існують f' у жодній точці R , а $(f^2)'$ існує $\forall x \in R$;

3) f неперервна в точці x_0 , але в цій точці не існують ні $f'_\Delta(x_0)$, ні $f'_\Pi(x_0)$;

4) f диференційована в усіх точках множини M та розривна в усіх точках $R \setminus M$, де:

а) $M = \{0, 1, 2\}$; б) $M = \{\pm n, \pm \frac{1}{n} | n \in N\}$;

в) $M = \{0, \pm n, \pm \frac{1}{n} | n \in N\}$;

5) для деякої послідовності $\alpha_n = o(1)$ існує границя $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n}$, але f не диференційована в точці x_0 .

21. За допомогою похідної обчисліть значення сум:

1) $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$;

2) $\sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1}$;

3) $\sum_{k=1}^n k \cos kx$;

4) $\sum_{k=1}^n k \sin kx$;

5) $\sum_{k=1}^n k \cos kx$;

6) $\sum_{k=1}^n (2k-1) \cos(2k-1)x$.

РОЗДІЛ 2

Похідні та диференціали вищих порядків

Короткі теоретичні відомості

Нехай для функції $f: R \rightarrow R$ множина $X \subset D_f$ не має ізольованих точок. Назвемо її *1-диференційованою на X* , якщо $\forall x \in X$ вона має похідну f' . Функція $x \mapsto f'(x)$, $x \in X$, називається *першою похідною (1-похідною)* функції f і позначається f' або $f^{(1)}$. Індукцією визначатимемо похідну функції f довільного порядку. Якщо функція $f^{(n)}$ диференційована на множині $X \subset D_f$, що не має ізольованих точок, то її похідна $(f^{(n)})'$ називається *$(n+1)$ -ю похідною функції f на множині X* і позначається $f^{(n+1)}$. Множину всіх функцій, які мають на множині X неперервну n -ту похідну, позначатимемо символом $C^{(n)}(X)$. Якщо функція $f^{(n)} \forall n \in N$ має неперервну похідну на X , то вона називається *нескінченно диференційованою на X* . Сукупність усіх таких функцій позначатимемо через $C^\infty(X)$.

Теорема 1 (*правило Лейбніца*).

Якщо функції f та g n -диференційовані на множині X , то функція fg також диференційована на X і $\forall x_0 \in X$ справджується формула Лейбніца

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(nk)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0). \blacktriangleright$$

Похідні n -го порядку для оберненої, параметрично та неявно заданих функцій визначаються індукцією так само, як перша похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку.

Нехай у функції $f: R \rightarrow R$ визначений її $(n-1)$ -й диференціал у точці x_0 , у якій функція є n -диференційованою. Тоді n -м диференціалом функції f у точці x_0 називатимемо функцію $h \mapsto d^n f(x_0)(h)$, де

$$d^n f(x_0)(h) = d(d^{n-1} f)(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx(h)^n = f^{(n)}(x_0) h^n,$$

тобто

$$\forall k = \overline{1, n} \quad d^k f(x_0) = f^{(k)} dx^k \quad \text{та} \quad d^k f(x_0)(h) = f^{(k)}(x_0) h^k.$$

Зазначимо, що властивість інваріантності диференціалів вищих порядків, починаючи із другого, у загальному випадку не виконується, а справджується лише для лінійної внутрішньої функції.

Властивості (n -х похідних n 'яти основних функцій):

1. $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{1}{2} \pi n\right).$
2. $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{1}{2} \pi n\right).$
3. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$
4. $(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \cdot \frac{1}{\ln a}.$
5. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) x^{\alpha-n}.$

Задачі

В усіх задачах цього розділу параметри $a, b, c, \dots$ вважатимемо додатними, параметри $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – довільними дійсними.

22. Для явно заданої функції $f: R \rightarrow R$ у кожній неізолюваній точці області визначення знайдіть f' , f'' та $f'''(x_0)$, якщо:

$$1) f(x) = x\sqrt{1+x^2}, \quad x_0 = 1;$$

- 2) $f(x) = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0;$
- 3) $f(x) = x \ln x, \quad x_0 = 1;$
- 4) $x(\sin \ln x + \cos \ln x), \quad x_0 = 1;$
- 5) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0;$
- 6) $f(x) = \ln(1 + x), \quad x_0 = 0;$
- 7) $f(x) = e^{-x^2}, \quad x_0 = 0;$
- 8) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x_0 = 1;$
- 9) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi;$
- 10) $f(x) = \cos(x^2), \quad x_0 = \sqrt{\pi};$
- 11) $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = \pi;$
- 12) $f(x) = \arccos x + \arcsin x, \quad x_0 = \frac{1}{2};$
- 13) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad x_0 = 1;$
- 14) $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad x_0 = -1;$
- 15) $f(x) = x^x, \quad x_0 = 1;$
- 16) $f(x) = \log_x 2, \quad x_0 = 2;$
- 17) $f(x) = \sin x \ln(1+x), \quad x_0 = 0;$
- 18) $f(x) = e^x \cos x, \quad x_0 = 0;$
- 19) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x+5}, \quad x_0 = 1;$
- 20) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}, \quad x_0 = 0.$

23. Для функції $x \mapsto y(x)$, що задана параметрично, у кожній неізолюваній точці області визначення знайдіть f', f'', f''' , а також значення f''' за заданого значення параметра t_0 , якщо:

- 1) $x(t) = 2t - t^2, \quad y(t) = 3t - t^3, \quad t_0 = 1;$
- 2) $x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad t_0 = \frac{1}{4}\pi;$

- 3) $x(t) = a \cos^2 t$, $y(t) = b \sin^2 t$, $t_0 = \frac{1}{6} \pi$;
- 4) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$;
- 5) $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $t_0 = 0$;
- 6) $x(t) = \ln \cos t$, $y(t) = \ln \cos 2t$, $t_0 = \frac{1}{6} \pi$;
- 7) $x(t) = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$, $y(t) = t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t$, $t_0 = 0$;
- 8) $x(t) = \cos^{-1} t$, $y(t) = \operatorname{tg} t - t$, $t_0 = 0$;
- 9) $x(t) = \frac{e^t}{1+t}$, $y(t) = e^t(t-1)$, $t_0 = 0$;
- 10) $x(t) = 2^{\cos^2 t}$, $y(t) = 2^{\sin^2 t}$, $t_0 = 1$;
- 11) $x(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2$, $y(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2$, $t_0 = 0$;
- 12) $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$, $t_0 = 2$;
- 13) $x(t) = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$, $t_0 = 0$;
- 14) $x(t) = 1 + e^{-t}$, $y(t) = 2t + e^{-2t}$, $t_0 = 0$;
- 15) $x(t) = \cos^4 t$, $y(t) = \sin^4 t$, $t_0 = \frac{1}{4} \pi$;
- 16) $x(t) = t \ln t$, $y(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t_0 = 1$;
- 17) $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = t^3 - 3t + 1$, $t_0 = 0$;
- 18) $x(t) = \frac{3t}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}$, $t_0 = 1$;
- 19) $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t + \frac{1}{t^2}$, $t_0 = 1$.

24. Для функції $x \mapsto y(x)$, що задана неявно, у кожній неізолюваній точці області визначення знайдіть y' , y'' , а також значення y''' у заданій точці $M(x_0, y_0)$, якщо:

- 1) $y^2 = 2ax$, $M(2a, 2a)$;
- 2) $x^2 - xy + y^3 = 1$, $M(1, 1)$;

- 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad M(a\sqrt{2}, b);$
- 4) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}, \quad M(1, 0);$
- 5) $e^{x-y} = x + y - 1, \quad M(1, 1);$
- 6) $y^2 + 2 \ln y = x^4, \quad M(-1, 1);$
- 7) $y + \cos y = x, \quad M(1, 0);$
- 8) $x^2 y^2 = x^3 - y^3 - 3, \quad M(2, 1);$
- 9) $x^4 + xy - y^4 = -13, \quad M(1, 2);$
- 10) $x^3 + y^3 = 3axy, \quad M(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}).$

25. Для явно заданої функції $f : R \rightarrow R$ у кожній неізолюваній точці області визначення знайдіть n -ту похідну, $n \in N$, якщо:

- 1) $f(x) = (\alpha x + \beta)^\lambda, \quad n = 10;$
- 2) $f(x) = \ln(\alpha x + \beta), \quad n = 11;$
- 3) $f(x) = e^{\alpha x + \beta}, \quad n = 12;$
- 4) $f(x) = \sin(\alpha x + \beta), \quad n = 13;$
- 5) $f(x) = \cos(\alpha x + \beta), \quad n = 14;$
- 6) $f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}; \quad n = 15;$
- 7) $f(x) = sh(\alpha x + \beta), \quad n = 16;$
- 8) $f(x) = ch(\alpha x + \beta), \quad n = 17;$
- 9) $f(x) = x(2x-1)^2(3x-1)^3$ та
 - a) $n = 5;$
 - б) $n = 6;$
- 10) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}, \quad n = 8;$
- 11) $f(x) = x^2 e^{2x}, \quad n = 20;$
- 12) $f(x) = x \ln x, \quad n = 5;$

$$13) f(x) = (x^2 + x + 1)\sin(3x + 1), \quad n = 10;$$

$$14) f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad n = 4;$$

$$15) f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad n = 10;$$

$$16) f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x, \quad n = 10;$$

$$17) f(x) = e^x \cos x, \quad n = 5;$$

$$18) f(x) = \operatorname{ch} x \cos x, \quad n = 5;$$

$$19) f(x) = \cos 4x \cos x, \quad n = 7;$$

$$20) f(x) = \ln(x^2 + x - 2), \quad n = 11;$$

$$21) f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, \quad n = 12;$$

$$22) f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}, \quad n = 8.$$

26. Для явно заданої функції $f: R \rightarrow R$ у кожній неізолюваній точці області визначення для довільного натурального n знайдіть n -ту похідну, якщо:

$$1) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x(1-x)};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$4) f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x};$$

$$5) f(x) = \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + 5x + 4};$$

$$6) f(x) = \ln \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

- 7) $f(x) = \sin^2 x$;
- 8) $f(x) = \cos^2 x$;
- 9) $f(x) = \sin^3 x$;
- 10) $f(x) = \cos^3 x$;
- 11) $f(x) = \sin \alpha x \cdot \cos \beta x$;
- 12) $f(x) = \sin \alpha x \cdot \sin \beta x$;
- 13) $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin 6x$;
- 14) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;
- 15) $f(x) = x^2 \sin \alpha x$;
- 16) $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$;
- 17) $f(x) = e^x \cos x$;
- 18) $f(x) = e^x \sin x$;
- 19) $f(x) = e^{ax} \cos(\beta x + \gamma)$;
- 20) $f(x) = e^{ax} \sin(\beta x + \gamma)$;
- 21) $f(x) = ch \alpha x \cdot ch \beta x$;
- 22) $f(x) = ch \alpha x \cdot sh \beta x$;
- 23) $f(x) = ch \alpha x \cdot \cos \beta x$;
- 24) $f(x) = sh \alpha x \cdot \sin \beta x$;
- 25) $f(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$;
- 26) $f(x) = x^n \ln x$.

27. Для явно заданої функції $f: R \rightarrow R$ для довільного натурального n знайдіть $f^{(n)}(0)$, якщо:

$$1) f(x) = \frac{1}{x(1-x)};$$

$$2) f(x) = \frac{x^n}{x^3 - 1};$$

$$3) f(x) = x^{n-1} \ln(x^2 + 2x + 3);$$

$$4) f(x) = x^{n-1} \cos 2x;$$

$$5) f(x) = \operatorname{arctg} x;$$

$$6) f(x) = \arcsin x;$$

$$7) f(x) = \operatorname{arctg}^2 x;$$

$$8) f(x) = \arcsin^2 x;$$

$$9) f(x) = \cos(m \arcsin x);$$

$$10) f(x) = \sin(m \arcsin x);$$

$$11) f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1);$$

$$12) f(x) = (x+2)^2 \ln(1-x);$$

$$13) f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1};$$

$$14) f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}.$$

28. Скільки похідних у точці $x_0 = 0$ має функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^{\frac{8}{3}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} P(x) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \text{ де } P(x) \text{ — довільний багаточлен;}$$

- 6) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0; \end{cases}$
- 7) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x^5, & x \geq 0; \end{cases}$
- 8) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0; \end{cases}$
- 9) $f(x) = \begin{cases} sh\,x, & x < 0. \\ \sin x \cdot ch\,x, & x \geq 0; \end{cases}$
- 10) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0, \\ \ln(1+x) - x, & x \geq 0; \end{cases}$
- 11) $f(x) = \begin{cases} \cos x - 1, & x < 0, \\ \ln(1+x) - x, & x \geq 0; \end{cases}$
- 12) $f(x) = |x|;$
- 13) $f(x) = x^3 |x|;$
- 14) $f(x) = |\sin^5 x|;$
- 15) $f(x) = [x] \sin^2 x;$
- 16) $f(x) = \begin{cases} x^5, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0; \end{cases}$
- 17) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0; \end{cases}$
- 18) $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in R \setminus Q, \\ 0, & x \in Q; \end{cases}$
- 19) $f(x) = \begin{cases} -x^7, & x \in R \setminus Q, \\ x^6, & x \in Q. \end{cases}$

29. Для функції $f: R \rightarrow R$, вважаючи x незалежною змінною, обчисліть df та d^2f у кожній неізольованій точці області визначення, а також $d^3f(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^x$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)\operatorname{sh} x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \operatorname{sh} x \cdot \sin x$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = 2x + \sin x$, $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$, $x_0 = 0$;

6) $f(x) = \ln x \cdot \cos x$, $x_0 = 1$;

7) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

8) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

30. Вважаючи, що $x: R \rightarrow R$ – функція деякого аргументу, обчисліть або спростіть наведені вирази та знайдіть серед них однакові:

1) d^2x ;

2) dx^2 ;

3) $(dx)^2$;

4) $d^2(x)$;

5) $d(x^2)$;

6) d^2x^2 ;

7) $(dx^2)^2$;

8) $(d^2x)^2$;

9) $d^2(x^2)$;

10) $(d(x^2))^2$;

11) $((dx)^2)^2$.

31. Вважаючи, що $x: R \rightarrow R$ – функція деякого аргументу, обчисліть диференціали наведених виразів, якщо:

1) xd^2x^3 ;

2) x^2dx^4 ;

3) $x^2d^3x^2$;

4) $x^3d^3x^3$;

5) x^5d^5x ;

6) $d^2x^3d^3x^2$;

7) dx^4d^4x ;

8) $d^3x^4d^5x^5$;

9) $dx^2d^3x^4$;

10) $d^4x^4d^2x^2$;

11) $dx d^2x^2 d^3x^3$.

32. Знайдіть перші три диференціали функції $f: R \rightarrow R$, вважаючи функції u, v та w диференційованими достатню кількість разів у відповідних точках області визначення, якщо:

1) $y = u^n$;

2) $y = a^u$;

3) $y = \sin u$;

4) $y = \cos u$;

5) $y = \operatorname{tg} u$;

6) $y = \ln x$;

7) $y = e^{uv}$;

8) $f = uvw$;

9) $f = \frac{u}{v}$;

10) $y = u^v$;

11) $f = u^m v^n$;

12) $f = uv + uw + vw$.

РОЗДІЛ 3

Теореми про середнє

Короткі теоретичні відомості

Теорема 1 (Ферма).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована в точці x_0 , граничній для D_f , та існує такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $\forall x \in O(x_0)$ справджується умова $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), то $f'(x_0) = 0$. ►

Теорема 2 (Ролля).

Якщо функція $f \in C[a, b]$ диференційована в кожній точці інтервалу (a, b) і $f(a) = f(b)$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$. ►

Теорема 3 (Дарбу).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована в кожній точці $[a, b]$ і $f'_n(a) \cdot f'_n(b) < 0$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$. ►

Наслідок 1 (про проміжні значення похідної).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована в кожній точці сегмента $[a, b]$, то її похідна $f'(x)$ набуває всіх проміжних значень між числами $f'_n(a)$ та $f'_n(b)$.

Наслідок 2 (про збереження знака похідної).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована в кожній точці сегмента $[a, b]$ і $\forall x \in [a, b]$ $f'(x) \neq 0$, то її похідна $f'(x)$ зберігає знак на $[a, b]$.

Теорема 4 (Лагранжа).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ неперервна на сегменті $[a, b]$ і диференційована в кожній точці інтервалу (a, b) , то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \blacktriangleright$$

Теорема 5 (Коші).

Якщо функції $f, g: R \rightarrow R$ неперервні на сегменті $[a, b]$ і диференційовані в кожній точці інтервалу (a, b) , то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi). \blacktriangleright$$

Наслідок (переформулювання теореми Коші).

Якщо, крім виконання умов теореми Коші, $\forall x \in [a, b]$ $g'(x) \neq 0$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Задачі

33. Доведіть твердження:

1) якщо $f \in C((a, b))$ ($a, b \in \bar{R}$), має скінченну похідну в кожній точці проміжку (a, b) і $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$;

2) якщо $f \in C^{(n-1)}([x_0, x_n])$, має похідну n -го порядку в кожній точці інтервалу (x_0, x_n) і $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, де $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, то $\exists \xi \in (x_0, x_n): f^{(n)}(\xi) = 0$;

3) якщо всі нулі багаточлена $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ дійсні, то всі його похідні $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$ також мають лише дійсні нулі;

4) послідовні похідні функції $f(x)$ мають лише дійсні прості нулі, причому кожний нуль n -ї похідної лежить між двома сусідніми нулями $(n+1)$ -ї похідної, де:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x}{1 + x^2};$$

5) якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована на скінченному інтервалі (a, b) , має на ньому n нулів і виконується одна з умов: $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f'(a) \neq 0$, $\operatorname{sgn} f(b) = -\operatorname{sgn} f'(b) \neq 0$, то похідна $f'(x)$ має на (a, b) принаймні n нулів; якщо ж виконуються обидві умови, то похідна $f'(x)$ має на (a, b) не менше нулів;

6) якщо функція f має похідну на сегменті $[a, b]$ і $f(a) = f(b) = 0$, то рівняння $g(x) = 0$ має розв'язок на (a, b) , де:

$$\text{а) } g(x) = f(x) + f'(x) \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } g(x) = f(x) + f'(x) \sin x \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } g(x) = f'(x) + 3f(x) \ln 5;$$

$$\text{г) } g(x) = \alpha \cdot f(x) + f'(x), \quad \alpha \in R;$$

$$\text{д) } g(x) = f(x)h'(x) + f'(x), \quad \text{де } h \text{ — довільна диференційована на } (a, b) \text{ функція};$$

7) якщо $\{f, g\} \subset C([a, b])$, мають похідні на (a, b) , то:

$$\text{а) якщо } f(a)g(b) = f(b)g(a) \text{ і } \forall x \in [a, b] f(x)g(x) \neq 0,$$

$$\text{то } \exists \xi \in (a, b): \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)};$$

б) якщо $\forall x \in (a, b) f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, то функції f та g не мають на (a, b) спільних нулів і між двома будь-якими нулями однієї функції є нуль іншої функції;

- в)** якщо $\forall x \in (a, b) \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \neq 0$, то кожна із функцій f та g має на (a, b) не більше одного нуля;
- г)** якщо $f(a) = f(b) = 0$ і $\forall x \in [a, b] \quad g(x) > 0$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ рівняння $f'(x)g(x) + n \cdot f(x)g'(x) = 0$ має розв'язок на (a, b) ;
- д)** якщо $f(a) = 0, g(b) = 1$ і $\forall x \in (a, b) \quad f(x) > 0, g(x) > 0$, то рівняння $\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$ має розв'язок на (a, b) ;
- 8)** якщо $f \in C^{(2)}([0, 2])$ і $f(i) = i, i = 0, 1, 2$, то $\exists \xi \in (0, 2) : f''(\xi) = 0$;
- 9)** якщо $f \in C^{(3)}([0, 3])$ і $f(i) = i^2 + i + 1, i = \overline{0, 3}$, то $\exists \xi \in (0, 3) : f'''(\xi) = 0$;
- 10)** якщо $f \in C([0, \pi])$, диференційована і додатна на $[0, \pi]$, то рівняння $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{ctg} x$ має принаймні один розв'язок на $(0, \pi)$;
- 11)** якщо $f \in C^{(1)}\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, то рівняння $\frac{f'(x)}{f'(x)} = -\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$ має розв'язок на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;
- 12)** якщо числа $a_k \in R(k = \overline{0, n})$ задовольняють умову $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} = 0$, то багаточлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ має хоча б один нуль на інтервалі $(0, 1)$;

13) якщо числа $a_k \in R(k=0, n)$ задовольняють умову

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k a_k}{k+1} = 0, \text{ то рівняння } \sum_{k=0}^n a_k \ln^k x = 0 \text{ має хоча б один}$$

розв'язок на інтервалі $(1, 9)$;

14) усі нулі багаточленів $P_n(x)$ дійсні, якщо:

а) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$ – багаточлен Лежандра;

б) $P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ – багаточлен Чебишова – Лагерра;

в) $P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ – багаточлен Чебишова – Ерміта.

34. Перевірте, чи можна застосувати теорему Дарбу для функції $[a, b] \xrightarrow{f} R$, і знайдіть, якщо це можливо, хоча б одну точку $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$:

1) $f(x) = |x|, [a, b] = [-1, 1]$;

2) $f(x) = x^2, [a, b] = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$;

3) $f(x) = |x^2 - 1|, [a, b] = [-1, 1]$;

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ x, & |x| \leq 1: \end{cases}$

а) $[a, b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; **б)** $[a, b] = [-1, 1]$;

в) $[a, b] = [-2, 2]$;

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0: \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} \text{а)} [a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; & \text{б)} [a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \text{в)} [a, b] = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

35. Доведіть твердження:

1) якщо функція $f \in C([a, b])$ диференційована в кожній точці інтервалу (a, b) , то $\forall \{x_0, x\} \subset [a, b]$ має місце рівність $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$, $0 < \theta < 1$ (формула скінченних приростів Лагранжа);

2) якщо функція f має на проміжку (a, b) ($\{a, b\} \subset \bar{R}$) обмежену похідну, то вона рівномірно неперервна на (a, b) ;

3) якщо для функції $f: R \rightarrow R \forall x \in R f^{(n)}(x) = 0$, то:

а) при $n = 1$ функція f стала;

б) при $n = 2$ функція f лінійна;

в) при $n = 3$ функція f квадратична;

г) за довільного натурального n функція f є алгебраїчним багаточленом;

4) якщо функція $f \in C([a, b])$ диференційована в кожній точці інтервалу (a, b) і не є лінійною, то

$$\exists \xi \in (a, b) : |f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|;$$

5) якщо f диференційована на сегменті $[a, b]$ ($a > 0$), то

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{1}{a - b} \left| \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi);$$

6) якщо функції f і g диференційовані на сегменті $[a, b]$ і $\forall x \in [a, b] \ g(x)g'(x) \neq 0$, то

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{1}{g(b) - g(a)} \left| \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{g'(\xi)} \left| \begin{vmatrix} f(\xi) & g(\xi) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix} \right|.$$

36. Доведіть нерівності:

- 1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;
- 2) $py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$, $0 < y < x$, $p > 1$;
- 3) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$;
- 4) $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, $0 < y < x$;
- 5) $|x - y| \leq |x^2 \ln x - y^2 \ln y| \leq 3e|x - y|$, $\{x, y\} \subset [1, e]$;
- 6) $|x^2 \arctg x - y^2 \arctg y| \leq \frac{1+\pi}{2}|x - y|$, $\{x, y\} \subset [0, 1]$;
- 7) $\frac{x-y}{\cos^2 y} \leq \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \leq \frac{x-y}{\cos^2 x}$, $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$;
- 8) $x - y < \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y < e^x(x - y)$, $0 < y < x$;
- 9) $x - y < \arcsin x - \arcsin y < 2(x - y)$, $-\frac{3}{5} < y < x < \frac{3}{5}$;
- 10) $x - y < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < 4(x - y)$, $-\frac{\pi}{3} < y < x < \frac{\pi}{3}$;
- 11) $|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y| \geq \frac{4}{3}(y - x)$, $\frac{\pi}{6} < x < y < \frac{\pi}{3}$;
- 12) $(x - y)2^{y-1} < 2^x - 2^y < (x - y)2^x$, $y < x$.

37. З'ясуйте, чи справджуються твердження:

- 1) якщо функція $f(x)$ диференційована і не обмежена на скінченному інтервалі (a, b) , то її похідна $f'(x)$ також не обмежена на (a, b) ;
- 2) якщо $f'(x)$ не обмежена на скінченному інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ також не обмежена на цьому інтервалі;
- 3) якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована на нескінченному проміжку $(a, +\infty)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;

4) якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована на нескінченному проміжку $(a, +\infty)$ і $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0;$$

5) теорему Ролля для функції $f: R \rightarrow R$ можна застосувати на сегменті $[a, b]$, якщо:

$$\text{а) } f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1, \\ -\sqrt{4-(3-|x|)^2}, & 1 < x \leq 2, \end{cases} [a, b] = [-1, 2];$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0, \\ 1-x^3, & x > 0, \end{cases} [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{е) } f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0, \end{cases} [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{є) } f(x) = 1 - |x|, [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{ж) } f(x) = \ln \sin x, [a, b] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right];$$

6) якщо $f \in C^{(1)}((a, b))$, то $\forall \xi \in (a, b) \exists (x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b))$:

$$x_1 < \xi < x_2 \text{ і } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi);$$

7) теорему Коші для функцій $f: R \rightarrow R$ та $g: R \rightarrow R$ можна застосувати на сегменті $[a, b]$, якщо:

а) $f(x) = e^x, g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, [a, b] = [-2, 2];$

б) $f(x) = \sin x, g(x) = x^{\frac{2}{3}}, [a, b] = [-8, 8];$

в) $f(x) = x^2, g(x) = x^3, [a, b] = [-1, 1];$

8) у теоремі Ролля можна відмовитися від однієї з умов:

а) неперервності f на $[a, b];$

б) диференційованості f у кожній точці $(a, b);$

в) $f(a) = f(b);$

9) теорему Лагранжа для функції $f: R \rightarrow R$ можна застосувати на сегменті $[a, b]$, якщо:

а) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} [a, b] = [-1, 1];$

б) $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}, [a, b] = [-1, 1];$

в) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1, \end{cases} [a, b] = [0, 4];$

г) $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}, [a, b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

РОЗДІЛ 4

Формула Тейлора, правила Лопіталя

Короткі теоретичні відомості

Теорема 1 (перше правило Лопіталя).

Нехай функції $f, g : (a, b) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$;
- 2) $\forall x \in (a, b) \exists f'(x)$ та $\exists g'(x) \neq 0$;
- 3) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. ►

Теорема 2 (друге правило Лопіталя).

Нехай функції $f, g : (a, b) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$;
- 2) $\forall x \in (a, b) \exists f'(x)$ та $\exists g'(x)$;
- 3) якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. ►

Теорема 3 (локальна формула Тейлора).

Нехай функція $f : O_\delta(x_0) \rightarrow R$ ($n-1$) разів неперервно диференційована в цьому околі та $\exists f^{(n)}(x_0) \in R$. Тоді справджується формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \blacktriangleright$$

Доданок $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ називається залишковим членом у формі Пеано.

Завдяки локальності цієї формули її називають асимптотичним зображенням функції f в околі точки x_0 . Вона дуже ефективна при знаходженні границь. Якщо $x_0 = 0$, то

локальну формулу Тейлора називають *формулою Маклорена*.
Наведемо п'ять основних розвинень Маклорена:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n); \\
 \sin x &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}); \\
 \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).
 \end{aligned}$$

Теорема 4 (*формула Тейлора*).

Нехай $f \in C^n(a, b)$ і має $(n+1)$ -шу похідну в кожній точці (a, b) , можливо, за винятком точки $x_0 \in (a, b)$. Тоді $\forall x \in (a, b)$ $\exists \xi$ між точками x_0 та x така, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!p} \left(\frac{x-x_0}{x-\xi} \right)^p (x-\xi)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$, $p > 0$ називається *залишковим членом у формі Шлемільха – Роша*. ►

При $p = n+1$ $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ – *залишковий член*

у формі *Лагранжа*; при $p = 1$ $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n$ – *залишковий член у формі Коші*, де $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in (0, 1)$.

Задачі

38. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена до членів п'ятого порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

1) $f(x) = \sin x$;

2) $f(x) = \cos x$;

3) $f(x) = e^x$;

4) $f(x) = \ln(1+x)$;

5) $f(x) = (1+x)^a$;

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

7) $f(x) = a^x$;

8) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

9) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

10) $f(x) = \operatorname{th} x$;

11) $f(x) = \arcsin x$;

12) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

13) $f(x) = \arccos x$;

14) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

15) $f(x) = \sqrt{1+x}$;

16) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$;

17) $f(x) = (1+x)^{-1}$;

18) $f(x) = (1-x)^{-1}$;

19) $f(x) = \ln(1-x)$;

20) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg} x$;

21) $f(x) = x \cdot \operatorname{cth} x$.

39. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена до членів n -го порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

1) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n=3$;

2) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $n=4$;

3) $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, $n=3$;

4) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$, $n=13$;

5) $f(x) = \ln \cos x$, $n=6$;

6) $f(x) = \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{x} \right)$, $n=4$;

7) $f(x) = (\cos x)^{\sin \operatorname{tg} x}$, $n=6$;

8) $f(x) = \ln(e^x - e^{x^2} + e^{x^3})$, $n=3$;

- 9) $f(x) = \sqrt{e^x + \ln(1+x)}$, $n = 3$;
 10) $f(x) = e^{x \ln(1-x)}$, $n = 4$;
 11) $f(x) = \cos(\cos x - 1)$, $n = 6$;
 12) $f(x) = \operatorname{tg}(e^{x^2} - \cos)$, $n = 4$;
 13) $f(x) = \ln(e^x - \ln(1-x))$, $n = 4$;
 14) $f(x) = \ln \cos(x^2)$, $n = 8$;
 15) $f(x) = \sin\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \cos x\right)$, $n = 3$;
 16) $f(x) = \sin(\cos(x^2) - e^{x^2})$, $n = 6$;
 17) $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin(x^2)}$, $n = 7$.

40. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена до членів п'ятого порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = e^{2x-x^2}$; | 2) $f(x) = \operatorname{tg} \sin x$; |
| 3) $f(x) = \sin \operatorname{tg} x$; | 4) $f(x) = (1+x)^x$; |
| 5) $f(x) = \sin(\cos x - e^x)$; | 6) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$; |
| 7) $f(x) = \operatorname{tg} sh x$; | 8) $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$; |
| 9) $f(x) = \ln \cos \sin x$; | 10) $f(x) = e^{\operatorname{tg} \ln(1-x^2)}$; |
| 11) $f(x) = \ln \frac{x}{\sin x}$; | 12) $f(x) = \sqrt{\cos^3 x - 1 + e^{x^5}}$; |
| 13) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} + e^{2x^2} - 1}$; | 14) $f(x) = \sin(\cos x - 1)$; |
| 15) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$; | |
| 16) $f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1}$; | |
| 17) $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x} - 1}$; | |

- 18) $f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$;
 19) $f(x) = sh \operatorname{tg} x$;
 20) $f(x) = \arcsin sh x$;
 21) $f(x) = \ln(\cos x + th \sin x)$;
 22) $f(x) = (\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} ch x)^{sh \sin x}$;
 23) $f(x) = (\cos x)^{\frac{sh x}{\sin x}}$;
 24) $f(x) = (\cos x + \sin x)^{\ln(1+x)}$;
 25) $f(x) = (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{sh x}{\cos x}}$;
 26) $f(x) = (ch x)^{\operatorname{tg} x - \sin x}$;
 27) $f(x) = (ch x)^{\frac{x^2}{x+1}}$;
 28) $f(x) = (e^x + sh x)^{\frac{\sin x}{1+x^2}}$;
 29) $f(x) = (e^x - 1 + ch x)^{x \ln(1+x)}$;
 30) $f(x) = (\cos x)^{sh x}$;
 31) $f(x) = (ch x)^{sh x}$;
 32) $f(x) = (1 + \ln(1 - x^2))^{\operatorname{tg} x}$;
 33) $f(x) = (\sin(x^2) + \cos 2x)^{\ln(1+x^2)}$;
 34) $f(x) = (1 + \sin x)^{\cos x}$.

41. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена до членів n -го порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

- 1) $f(x) = \sin \cos x$, $n = 5$;
 2) $f(x) = \cos \cos x$, $n = 5$;
 3) $f(x) = e^{\cos x}$, $n = 5$;
 4) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$, $n = 5$;
 5) $f(x) = \sin(e^x)$, $n = 4$;
 6) $f(x) = \cos(e^x)$, $n = 4$;
 7) $f(x) = \cos \frac{2}{1+x}$, $n = 4$;
 8) $f(x) = e^{e^x}$, $n = 4$;

- 9) $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $n = 3$;
- 10) $f(x) = e^{chx}$, $n = 5$;
- 11) $f(x) = shchx$, $n = 5$;
- 12) $f(x) = ch \cos x$, $n = 5$;
- 13) $f(x) = \ln(chx + \cos x)$, $n = 5$;
- 14) $f(x) = \sin chx$, $n = 5$;
- 15) $f(x) = \ln(e^x + x + 1)$, $n = 5$;
- 16) $f(x) = \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $n = 5$;
- 17) $f(x) = \sin \ln(2 + \sin x)$, $n = 3$;
- 18) $f(x) = (2 + \sin x)^{\sin x}$, $n = 3$;
- 19) $f(x) = \cos \sin(\cos x + 1)$, $n = 3$;
- 20) $f(x) = \ln \ln(5 - x^2)$, $n = 5$;
- 21) $f(x) = \cos \ln(2 + x)$, $n = 3$;
- 22) $f(x) = \sin(e^{\frac{x}{\sin x}})$, $n = 5$.

42. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена до членів n -го порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

- 1) $f(x) = \frac{\cos \sin \ln(1 + x) - 1}{\sqrt[3]{1 - x^2} - \cos(x^3)}$, $n = 4$;
- 2) $f(x) = \frac{\ln \cos shx}{e^{x^2} - 1}$, $n = 5$;
- 3) $f(x) = \frac{\cos \ln(1 - x^2) - chx}{x^3 - x}$, $n = 4$;
- 4) $f(x) = \frac{x((1 + \sin(x^2))^{\frac{1}{3}} - ch(x^{\frac{3}{2}}))}{\operatorname{tg} x \cdot th x}$, $n = 4$;
- 5) $f(x) = \frac{\sin(2x - x^2)(\cos \ln(1 + x^3) - 1)}{\sin x \cdot shx + \ln(1 + x^6)}$, $n = 5$;

- 6) $f(x) = \frac{\sin x - x}{sh(x^2) - x} \cdot e^{\operatorname{tg}(x+x^2) - \ln(1-x^2)}, \quad n = 5;$
- 7) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln(1+x^2)} \cdot \ln ch(x+x^3), \quad n = 5;$
- 8) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{ch x - 1} \cdot \operatorname{tn}(\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}), \quad n = 5;$
- 9) $f(x) = \frac{th \frac{x}{1+x^3} \cdot \frac{x}{1+\operatorname{tg}(x^2)}}{1+\frac{1}{2}x^2 - \cos x - \operatorname{tg}(x^2)}, \quad n = 3;$
- 10) $f(x) = \frac{th(1 - \cos x - xsh x)}{\operatorname{tg}(x^2) - x}, \quad n = 4;$
- 11) $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x \cdot sh(x^2))}{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^4} + x^2}, \quad n = 4;$
- 12) $f(x) = \frac{\ln(\ln(1 + \sin(x^2)) + 1)}{\operatorname{tg}(x^2) + x^2}, \quad n = 5.$

43. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано до членів n -го або максимально можливого порядку, якщо:

- 1) $f(x) = (|x|^3 + 1)^{\frac{1}{2}}$ та
 а) $n = 2;$ б) $n = 3;$
- 2) $f(x) = |x|x^3 + \cos^2 x$ та
 а) $n = 1;$ б) $n = 4;$
- 3) $f(x) = \sin |x|^3 + e^x, \quad n = 5;$
- 4) $f(x) = e^{x^2|x|}, \quad n = 3;$
- 5) $f(x) = (1 + |x|^3)^{\frac{5}{2}}, \quad n = 3;$
- 6) $f(x) = ch(|x|^3), \quad n = 10;$
- 7) $f(x) = \sin(x + |x|^5)$ та
 а) $n = 3;$ б) $n = 5;$

$$8) f(x) = \cos(x^2) - \cos(|x|^3) \text{ та} \\ \text{а) } n = 6; \quad \text{б) } n = 11;$$

$$9) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad n = 15;$$

$$10) f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad n = 30;$$

$$11) f(x) = \begin{cases} x^6 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \text{ та}$$

$$\text{а) } n = 3; \quad \text{б) } n = 5;$$

$$12) f(x) = \begin{cases} x^{x^3}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \text{ та}$$

$$\text{а) } n = 2; \quad \text{б) } n = 5;$$

$$13) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x \sin x, & x \geq 0, \\ 1 - \cos x, & x < 0, \end{cases} \text{ та}$$

$$\text{а) } n = 2; \quad \text{б) } n = 4;$$

$$14) f(x) = \begin{cases} x^5, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0, \end{cases} \quad n = 3;$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} \quad n = 3;$$

$$16) f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in R \setminus Q, \\ 0, & x \in Q, \end{cases} \quad n = 2;$$

$$17) f(x) = \begin{cases} \sin(x^2), & x \geq 0, \\ sh(x^2), & x < 0, \end{cases} \quad n = 6;$$

$$18) f(x) = \begin{cases} \frac{sh x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad n = 5;$$

$$19) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad n = 5;$$

$$20) f(x) = \begin{cases} x - \sin x, & x \geq 0, \\ \operatorname{sh} x - x, & x < 0, \end{cases} \quad n = 6;$$

$$21) f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0, \\ \cos x, & x \leq 0, \end{cases} \quad n = 2;$$

$$22) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln |x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad n = 3;$$

$$23) f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1 - \cos x, & x \leq 0, \end{cases}, \quad n = 2.$$

44. З'ясуйте, скільки похідних у точці $x_0 = 0$ має функція $f: R \rightarrow R$, якщо:

$$1) f(x) = \begin{cases} x - \sin x, & x \geq 0, \\ \operatorname{sh} x - x, & x < 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \sin x \operatorname{ch} x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \\
7) \quad f(x) &= \begin{cases} \cos(x^2), & x \geq 0, \\ \operatorname{ch}(x^{\frac{3}{2}}), & x < 0; \end{cases} \\
8) \quad f(x) &= \begin{cases} x \sin x, & x \geq 0, \\ \operatorname{tg}(x^2), & x < 0; \end{cases} \\
9) \quad f(x) &= \begin{cases} \sin(x + \frac{1}{3}x^3), & x \geq 0, \\ \operatorname{tg}(x + \frac{1}{6}x^3), & x < 0; \end{cases} \\
10) \quad f(x) &= \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ e^x - 1, & x < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

45. Для функцій, що задані неявно чи параметрично, запишіть формулу Маклорена до членів n -го порядку із залишковим членом у формі Пеано, якщо:

- 1) $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 3t - t^3$, $n = 3$;
- 2) $x(t) = 2t + \sin t$, $y(t) = te^t$, $n = 3$;
- 3) $x(t) = t - t^2$, $y(t) = 4t - t^4$, $n = 3$;
- 4) $x(t) = te^t$, $y(t) = te^{-t}$, $n = 3$;
- 5) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $n = 2$;
- 6) $x(t) = \frac{e^t - 1}{1 + t}$, $y(t) = \frac{e^{-t} - 1}{1 + t}$, $n = 2$;
- 7) $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$, $n = 3$;
- 8) $x^4 + y^4 + \sin(xy) - 1 = 0$, $n = 2$;
- 9) $x - y - y^7 = 0$, $n = 5$;
- 10) $x^3 + y^3 + x^2y + 1 = 0$, $n = 3$;
- 11) $y^5 + x^4 - xy^2 - 1 = 0$, $n = 3$;

12) $x^5 + y^5 - 5xy - 1 = 0$, $n = 4$.

46. Для функції $f: R \rightarrow R$ знайдіть похідну $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = \sin^3(\operatorname{tg}(x - x^3))$ та

a) $n = 3$;

б) $n = 6$;

2) $f(x) = \sin \ln \cos x$ та

a) $n = 4$;

б) $n = 5$;

3) $f(x) = \operatorname{tg} \sin x \cdot \sin \operatorname{tg} x$ та

a) $n = 4$;

б) $n = 5$;

4) $f(x) = \ln \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} \sin x$ та

a) $n = 5$;

б) $n = 6$;

5) $f(x) = \sin \sin x \cdot \cos \cos x$ та

a) $n = 3$;

б) $n = 4$;

6) $f(x) = e^{\frac{\sin x}{x}}$ та

a) $n = 4$;

б) $n = 5$;

7) $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ та

a) $n = 3$;

б) $n = 4$;

8) $f(x) = \frac{e^{x^3} - 1}{x}$ та

a) $n = 4$;

б) $n = 5$;

9) $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}$ та

a) $n = 3$;

б) $n = 4$;

10) $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$ та

a) $n = 3$;

б) $n = 4$.

47. Для функції $f: R \rightarrow R$ запишіть формулу Тейлора в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Пеано до членів n -го порядку, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$ та $n = 3$;

- 2) $f(x) = x^x - 1$ $x_0 = 1$ та $n = 3$;
- 3) $f(x) = \sin \frac{1}{2} \pi x$ $x_0 = 1$ та $n = 4$;
- 4) $f(x) = x^3 \ln x$ $x_0 = 1$ та $n = 4$;
- 5) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $x_0 = 2$ та $n = 3$;
- 6) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $x_0 = 1$ та $n = 3$;
- 7) $f(x) = x e^{-x^2}$ $x_0 = 2$ та $n = 2$;
- 8) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 2$ та $n = 4$.

48. Знайдіть найбільше можливе натуральне значення n , для якого існують такі значення параметрів A, B, C , щоб справджувалися рівності, де:

- 1) $\operatorname{arctg} x = \frac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o(x^n)$;
- 2) $\arcsin x = \frac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + o(x^n)$;
- 3) $\ln(1+x) = \frac{x + Ax^2}{1 + Bx} + o(x^n)$;
- 4) $(1+x)^\alpha = \frac{1 + Ax}{1 + Bx} + o(x^n)$;
- 5) $\operatorname{ctg} x = \frac{x + Ax^2}{x + Bx^3} + o(x^n)$;
- 6) $\ln(1-x) = \frac{-x + Ax^2 + Bx^3}{1 + Cx} + o(x^n)$;
- 7) $e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx} + o(x^n)$;
- 8) $(1+x)^x = \frac{x + Ax + Bx^2}{1 + Cx} + o(x^n)$.

49. Застосуйте формулу Тейлора в околі відповідної точки x_0 до членів найменшого можливого порядку n із залишковим членом у формі Лагранжа для наближеного обчислення заданих значень із вказаною точністю ε , якщо:

- | | |
|--|---|
| 1) $26^{\frac{3}{2}}, \varepsilon = 10^{-3};$ | 2) $\sqrt[12]{4100}, \varepsilon = 10^{-6};$ |
| 3) $\sqrt{5}, \varepsilon = 10^{-2};$ | 4) $\sin 20^\circ, \varepsilon = 10^{-2};$ |
| 5) $\sin 1^\circ, \varepsilon = 10^{-7};$ | 6) $\ln 3, \varepsilon = 10^{-3};$ |
| 7) $\operatorname{tg} 3^\circ, \varepsilon = 10^{-4};$ | 8) $\operatorname{arctg} 1,1, \varepsilon = 10^{-4}.$ |

50. Використовуючи формулу Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа, оцініть із точністю до 10^{-n} абсолютні похибки наведених формул для наближених обчислень, якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120};$ | |
| а) $0 \leq x \leq 1;$ | б) $ x \leq \frac{1}{2};$ |
| 2) $ x \leq \frac{1}{2};$ | |
| а) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6};$ | б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$ |
| 3) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, x \leq \frac{1}{10};$ | |
| 4) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}, x \leq \frac{1}{2};$ | |
| 5) $\operatorname{sh} x \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$ | |
| а) $ x \leq \frac{1}{2};$ | б) $ x \leq \frac{1}{10};$ |
| 6) $ x \leq \frac{1}{10};$ | |
| а) $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2};$ | б) $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24};$ |

7) $|x| \leq \frac{1}{2}$:

a) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$; б) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;

8) $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}$, $|x| \leq \frac{1}{10}$;

9) $\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$.

51. Доведіть твердження.

1) Нехай функції $f, g : (a, b) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- $\forall x \in (a, b) \quad \forall k = \overline{0, n} \quad \exists f^{(k)}(x)$ та $\exists g^{(k)}(x) \neq 0$;
- $\forall k = \overline{0, n-1} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g^{(k)}(x) = 0$;
- $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L \in \overline{R}$,
- то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Нехай функції $f, g : (a, +\infty) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'(x)$ та $\exists g'(x) \neq 0$;
- $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
- $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R}$,
- то $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

3) Нехай функції $f, g : (a, b) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- $\forall x \in (a, b) \quad \forall k = \overline{0, n} \quad \exists f^{(k)}(x)$ та $\exists g^{(k)}(x) \neq 0$;
- $\forall k = \overline{0, n-1} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g^{(k)}(x) = \infty$;

$$- \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L \in \overline{R},$$

$$- \text{то } \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

4) Нехай функції $f, g : (a, +\infty) \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

$$- \forall x \in (a, b) \quad \exists f'(x) \text{ та } \exists g'(x) \neq 0;$$

$$- \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty;$$

$$- \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R},$$

$$- \text{то } \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

52. Знайдіть границі, а також з'ясуйте, чи можна їх знайти безпосереднім застосуванням правил Лопіталя, якщо:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\sin x} (x + \sin x \cos x)}{1 + x + \sin x \cdot \cos x};$$

$$a) a = +\infty;$$

$$б) a = 0;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x - \sin x};$$

$$a) a = +\infty;$$

$$б) a = +0;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{\sin^2 x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\operatorname{sh} x}.$$

У задачах 53–55 параметри $a, b, c, \dots$ вважатимемо додатними, параметри $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – довільними дійсними.

53. Знайдіть границі ($x_0 \in \overline{R}$):

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^a}{\ln^b x};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{11} + x^4 + 1}{e^x};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = -\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x}{\ln |x|};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

$$\text{в) } x_0 = -\infty;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \ln x}{2^x};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{e^x};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

$$\text{в) } x_0 = -\infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x}{\ln x};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{15}};$$

$$\text{а) } x_0 = +\infty;$$

$$\text{б) } x_0 = +0;$$

- 8) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$;
- а) $x_0 = +\infty$; б) $x_0 = +0$;
- в) $x_0 = -0$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x \cdot \ln(1-x)$;
- а) $x_0 = 1-0$; б) $x_0 = +0$.

54. Знайдіть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x - x \cdot \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \sin x}{\ln(1+x) + x \operatorname{tg} x - x}$;

- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \operatorname{tg} x - x}{x^3};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{5x};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sin x - \cos x}{2x^4};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{x};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^a} - x^{a^x}}{x - a};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right);$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2};$

- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1 + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right);$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - e^{2x}} - \cos 2x + \ln(1 + x)}{\sin x - \arcsin \operatorname{tg} x};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sin x - \ln(x + \sqrt[5]{1 + x^2}) - \frac{1}{6}x^2}{th(x - x^2) - x + x^2};$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{\sin x} - 1} - ch \frac{x}{\sqrt{3}}}{\sin^2 x - x^2};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - e^x) - \sin x \cdot \sqrt{1 + 2x}}{\operatorname{tg}(x + x^2) - x - x^2};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x}{\sin x} - \frac{1}{3} + \frac{\cos x}{3}}{\cos x \cdot ch x - 1};$
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - 1) + e^x - 1 - x - \frac{x^3}{6}}{\sin x \cdot sh x - x^2 + 2x^4};$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\operatorname{tg} \sin x} - 1 + \frac{1}{2}x^3}{x(ch^2 x - 1)};$
- 32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{x} \right) + \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x}{4} \right)}{sh x - \operatorname{tg} 2x + th x};$
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} \ln(1 - x)} - 1 + x}{\sin \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right) - \operatorname{tg} \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right)};$
- 34) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{e^x - 1}{\sin x} \right) + \frac{\ln(1 - x)}{x} + 1 + \frac{x^2}{8}}{sh x - \operatorname{tg} x};$

- 35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \sin x + \frac{1}{2}x^2}{\sin^3 x - \sin(x^3)};$
- 36) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \cos x\right) + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{6}}{x^3 + \sin^2 x \cdot \operatorname{th} x};$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - \sqrt[8]{1 - x^4}}{\sin(x^2) - x^2};$
- 38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \operatorname{tg}(e^x - \cos x) - e^x - \operatorname{ch} x}{x(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x})};$
- 39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin \operatorname{tg} x} - \cos \sqrt{x^3}}{\sin x + \operatorname{sh} x - 2x + x^5};$
- 40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \sin x) - \sin x \cdot \sqrt{1-2x}}{\operatorname{tg} x - \sin x};$
- 41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^5};$
- 42) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{5}} x) - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{2}x^2}}{\operatorname{ch} \sin x - e^{\frac{1}{2}x^2}};$
- 43) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)^5}{\frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1};$
- 44) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) + \cos x - \sqrt[3]{4+3x} - x^2}{x(\cos x - \operatorname{ch} x)};$
- 45) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x} (\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x - 1});$
- 46) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x^2} \right);$
- 47) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{\ln(1+x) + x \operatorname{tg} x - x};$

- 48) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}x^2}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x};$
- 49) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{n+2}) - \sin^{n+2} x}{x^{n+4}};$
- 50) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^{n+1}) - \ln^{n+1}(1+x)}{x^{n+2}};$
- 51) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \operatorname{tg} x)^6}{\sin \sin x - \operatorname{tg} \operatorname{tg} x};$
- 52) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3};$
- 53) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x};$
- 54) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{\sin \sin x - \ln(1+x)};$
- 55) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{cossin} x - 1};$
- 56) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x};$
- 57) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + \frac{3}{2}e^2 \sin(x^2)}{\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg}(x^2)};$
- 58) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \sin x - \sin^2 x}{x^6};$
- 59) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \ln(1-x)};$
- 60) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1-x^8) - \frac{1}{2}\pi + \sqrt{2}x^4}{\ln(x^4 + \sqrt{1+x^8}) - e^{x^4} + 1};$

$$61) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(e^{\sin x} + \ln(1-x) + \frac{1}{3}x^3\right)}{\ln \operatorname{ch} x - \frac{1}{2}x^2};$$

$$62) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}(x^2)}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - \frac{1}{3}x^3};$$

$$63) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \frac{2x}{2+x^4} + \cos \frac{2x}{2+x^4} - 2e^{\frac{x^4}{2}}}{\operatorname{tg} \sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg} \sqrt{1-x^4}};$$

$$64) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x-1} - (1-x)^{-1}}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \sin x};$$

$$65) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cos x) + x \ln(1 + \frac{2}{3}x^2) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1};$$

$$66) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{arctg} 2x - 2 \operatorname{arctg} x)^2}{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x};$$

$$67) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \arcsin 2x - \operatorname{tg} 3x}{x - \operatorname{arctg} x};$$

$$68) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 3x - 6 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x};$$

$$69) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{3}} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}}}{x \sqrt{x}};$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x^2)}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2};$$

$$71) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2};$$

$$70) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x^2)}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2};$$

- 71) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2}$;
- 72) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{4}\pi + x) - \operatorname{arctg}(\frac{1}{4}\pi - x)}{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + x) - \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - x)}$;
- 73) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - x^a}{\log_a x - \log_x a}, a > 1$;
- 74) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x - 1}$;
- 75) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}, a > 1$;
- 76) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{4}\pi^2 - \arccos x \cdot \arccos 2x}{\arcsin x}$.

55. Знайдіть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cthx}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) \right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow +0} \sin^x(1-x^x)$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg}^x(1-x^x)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x(x^x - 1)$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^{x-1}}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x} - 1$;

$$13) \lim_{x \rightarrow +0} (\ln \frac{1}{x})^x;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +0} (th x)^x;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{arctg } x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \arccos x}{\pi} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \sin x}};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin(x^2) - x^2}{\sin^2(\frac{1}{\sqrt{6}} x^3)} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{sh(x + \sin x)}{\sin x + \arcsin x} \right)^{\text{ctg}^2 x};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1-0} (\arccos x)^{1-x};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg}(2x + x^3) - th(2x + x^3)}{\frac{16}{3} x^3} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2}}};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x-2} + \ln(e + x e^{x+1}) \right)^{\frac{1}{x^3}};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{\frac{1}{x^4}};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1 + 2 \text{tg } x} + \frac{1}{2} x^2 - \sin x \right)^{\frac{1}{sh x - \text{arctg } x}};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + th x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x^2 \cos(x^2) \right)^{\frac{1}{x^4}}.$$

РОЗДІЛ 5

Застосування похідної для дослідження властивостей функцій

Короткі теоретичні відомості

Нехай функція $f:R \rightarrow R$, $x_0 \in D_f$ та x_0 – гранична точка множини D_f . Функція називається *зростаючою (спадною)* у точці x_0 , якщо існує такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $\forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ справджується умова $(f(x) - f(x_0))(x - x_0) > 0$ ($(f(x) - f(x_0))(x - x_0) < 0$). Якщо ж справджуються нестрогі нерівності $(f(x) - f(x_0))(x - x_0) \geq 0$ ($(f(x) - f(x_0))(x - x_0) \leq 0$), то функція f називається *спадною (незростаючою)* у точці x_0 .

Теорема 1 (достатня умова зростання функції в точці).

Для того, щоб диференційована в точці x_0 функція $f:(a,b) \rightarrow R$ зростала (спадала) у цій точці, достатньо, щоб справджувалася умова $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$). ►

Теорема 2 (узагальнена Лагранжа).

Нехай функція $f \in C([a,b])$ має праву похідну в кожній точці множини $[a,b) \setminus E$, де множина E не більш ніж зліченна. Тоді якщо $\forall x \in [a,b) \setminus E$ $f'_\Pi(x) \geq 0$, то $f(b) \geq f(a)$. ►

Нехай функція $f:R \rightarrow R$, $x_0 \in D_f$ та x_0 – гранична точка множини D_f . Функція f має *локальний максимум (мінімум)* у точці x_0 , якщо існує такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $\forall x \in O(x_0)$ справджується умова $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Локальний максимум (мінімум) називається *строгим*, якщо справджується умова $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$). Локальні максимуми та мінімуми називають *локальними екстремумами*.

Теорема 3 (Ферма, необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $f: R \rightarrow R$ диференційована в точці x_0 , граничній для D_f , та існує такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $\forall x \in O(x_0)$ справджується умова $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$), то $f'(x_0) = 0$. ►

Для неперервної на D_f функції $f: R \rightarrow R$ корені рівняння $f'(x_0) = 0$ називаються *стаціонарними точками* функції. Екстремальними для функції f можуть бути також точки, у яких похідна f' не існує.

Теорема 4 (перша достатня умова екстремуму).

Нехай функція $f \in C(x_0)$ та диференційована в деякому околі $\overset{o}{O}(x_0)$ точки x_0 . Якщо при переході через точку x_0 похідна f' змінює знак, то функція f має у точці x_0 екстремум. ►

Теорема 5 (друга достатня умова екстремуму).

Нехай функція $f: R \rightarrow R$ n разів диференційована в точці x_0 , при цьому $\forall k = \overline{1, n-1}$ $f^{(k)}(x_0) = 0$ та $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді при парному n функція f має в точці x_0 локальний екстремум: максимум, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$; при непарному n функція f не має локального екстремуму в точці x_0 . ►

Абсолютним (або глобальним) максимумом (мінімумом) функції $f: R \rightarrow R$ на множині $X \subset D_f$ називається її найбільше (найменше) значення на множині X .

Нехай функція $f: R \rightarrow R$ задана параметрично рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $D_\phi = D_\psi = T$, де $T = [a, b]$ (або (a, b) , $[a, b)$ чи $(a, b]$) та $a, b \in \overline{R}$. Тоді *графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) | x = \phi(t), y = \psi(t), t \in T\}.$$

Пряма $Ax + By + C = 0$ називається *асимптотою графіка функції $\Gamma(f)$ при $t \rightarrow t_0 + 0 \in T$ або при $t \rightarrow t_0 - 0 \in T$* , якщо

справджуються умови $d(t) = \frac{A\phi(t) + B\psi(t) + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow 0$, а

$\phi^2(t) + \psi^2(t) \rightarrow +\infty$. При цьому:

якщо $\phi(t) \rightarrow a \in R$, $|\psi(t)| \rightarrow +\infty$, то ця пряма задається рівнянням $x = a$ і називається *вертикальною асимптотою*;

якщо $\psi(t) \rightarrow b \in R$, $|\phi(t)| \rightarrow +\infty$, то ця пряма задається рівнянням $y = b$ і називається *горизонтальною асимптотою*;

якщо $|\phi(t)| \rightarrow +\infty$, $|\psi(t)| \rightarrow +\infty$, то ця пряма задається рівнянням $y = kx + b$, де $\frac{\psi(t)}{\phi(t)} \rightarrow k \in R \setminus \{0\}$, $\psi(t) - k\phi(t) \rightarrow b$, і

називається *похилою асимптотою*.

Для явно заданої функції $y = f(x)$, $x \in R$ графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок

$$\Gamma(f) = \{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}.$$

Пряма $x = a \in R$ називається *вертикальною асимптотою графіка функції* $\Gamma(f)$, якщо при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow a + 0$ або $x \rightarrow a - 0$) $|f(x)| \rightarrow +\infty$;

пряма $y = b \in R$ називається *горизонтальною асимптотою графіка функції* $\Gamma(f)$, якщо при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) $f(x) \rightarrow b$;

пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою графіка функції* $\Gamma(f)$, якщо при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) $\frac{f(x)}{x} \rightarrow k \in R \setminus \{0\}$ та $f(x) - kx \rightarrow b \in R$.

Для функції $(a, b) \xrightarrow{f} R$, $a, b \in \bar{R}$ її *надграфіком* $\bar{\Gamma}(f)$ (*підграфіком* $\underline{\Gamma}(f)$) називається множина

$$\bar{\Gamma}(f) = \{(x, y) | y \geq f(x), x \in (a, b)\}$$

$$(\underline{\Gamma}(f) = \{(x, y) | y \leq f(x), x \in (a, b)\}).$$

Функція f називається *опуклою* (увігнутою), якщо її надграфік (підграфік) є опуклою множиною.

Еквівалентне означення опуклої та увігнутої функції.

Функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ називається *опуклою (увігнутою)*, якщо $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ та $\forall \lambda \in [0, 1]$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \end{aligned}$$

Функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ називається *строго опуклою (строго увігнутою)*, якщо $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$ та $\forall \lambda \in (0, 1)$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &< (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &> (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \end{aligned}$$

Теорема 6 (критерій опуклості диференційованої функції).

Диференційована на (a, b) функція $f: (a, b) \rightarrow R$ опукла (увігнута) тоді й тільки тоді, коли її похідна f' є неспадною (незростаючою) функцією. ►

Наслідок (критерій опуклості двічі диференційованої функції). Двічі диференційована на (a, b) функція $f: (a, b) \rightarrow R$ опукла (увігнута) тоді й тільки тоді, коли її друга похідна f'' є невід'ємною (недодатною) функцією.

Якщо функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ диференційована в точці x_0 і при переході через цю точку x_0 змінює характер опуклості, то кажуть, що точка $M(x_0, f(x_0))$ є *точкою перегину графіка функції* $\Gamma(f)$.

Теорема 7 (необхідна умова точки перегину).

Нехай диференційована функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ має другу похідну в точці x_0 . Якщо $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегину графіка функції $\Gamma(f)$, то $f''(x_0) = 0$. ►

Теорема 8 (достатня умова точки перегину).

Нехай функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ n разів диференційована в точці x_0 , при цьому $\forall k = \overline{2, n-1}$ $f^{(k)}(x_0) = 0$ та $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді при

непарному n функція f має в точці x_0 перегин; при парному n функція f не має перегину в точці x_0 . ►

Схема дослідження функції f для побудови графіка функції $\Gamma(f)$

1. З'ясувати питання періодичності, характеру парності функції, знайти область її визначення та множину значень, точки перетину із осями координат, проміжки знакосталості, області неперервності та диференційованості.

2. Знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують.

3. Знайти проміжки монотонності функції та її екстремуми.

4. Знайти проміжки опуклості й увігнутості функції та її точки перегину.

5. Побудувати графік функції, використовуючи всі попередні дослідження.

Графік функції $\Gamma(f)$, якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично за допомогою відображень $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T \subset R$. Множину $T \cap D_\phi \cap D_\psi$ розбиваємо на множини $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$, на кожній із яких визначена параметрична функція $y = f_k(x)$, $x \in \phi(T_k)$, $k = \overline{1, n}$. Графіком параметричної функції $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T \subset R$ будемо вважати об'єднання графіків параметричних функцій $\Gamma(f_k)$.

Аналогічно досліджують усі параметричні функції на екстремум, перегини тощо, а також усі ці поняття для *неявної функції* $x \mapsto y(x)$, яка визначається рівнянням $F(x, y) = 0$. Графіком цієї функції вважатимемо об'єднання графіків неявних функцій, що визначені рівнянням $F(x, y) = 0$ на підмножинах $X_k \times Y_k \subset R \times R$. Дослідження властивостей виконуватимемо відповідно для кожної функції $y = f_k(x)$, що задається рівнянням $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in X_k \times Y_k$.

Задачі

56. Доведіть твердження:

1) якщо функція $[a, b] \xrightarrow{f} R$ у деякій точці $x_0 \in (a, b)$ задовольняє умови $f'(x_0) \neq 0$ та $f' \in C(x_0)$, то функція f строго монотонна в деякому околі цієї точки;

2) в умовах узагальненої теореми Лагранжа (теорема 2) справджуються такі властивості:

а) для величин $m = \inf_{x \in [a, b] \setminus E} f'_{\Pi}(x)$ та $m = \sup_{x \in [a, b] \setminus E} f'_{\Pi}(x)$

справджується нерівність $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$;

б) якщо в кожній точці множини $[a, b] \setminus E$ $f'_{\Pi}(x) = 0$, то $\forall x \in [a, b]$ справджується рівність $f(x) = f(a) = f(b)$;

в) якщо існує точка $x_0 \in [a, b] \setminus E$: $f'_{\Pi}(x_0) > 0$, то $\forall x \in [a, b]$ справджується рівність $f(x) = f(a) = f(b)$;

г) якщо існує точка $x_0 \in [a, b] \setminus E$: $f'_{\Pi}(x_0) > 0$, то справджується нерівність $f(b) > f(a)$;

3) нехай функція $f \in C[a, b]$, тоді:

а) якщо функція f має ліву похідну в кожній точці множини $(a, b] \setminus E$, де множина E не більш ніж зліченна, і $\forall x \in (a, b] \setminus E$ $f'_{\Lambda}(x) \geq 0$, то $f(b) \geq f(a)$;

б) якщо функція f має похідну в кожній точці множини $[a, b] \setminus E$, де множина E не більш ніж зліченна, і $\forall x \in [a, b] \setminus E$ $f'(x) \geq 0$, то $f(b) \geq f(a)$;

в) якщо в кожній точці множини $[a, b] \setminus E$ ($[a, b] \setminus E$), де множина E не більш ніж зліченна, існує права (ліва) похідна f'_{Π} (f'_{Λ}), то f неспадна на $[a, b]$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in (a, b] \setminus E$ $f'_{\Pi}(x) \geq 0$ ($f'_{\Lambda}(x) \geq 0$) (критерій нестрокої монотонності функції);

г) якщо в кожній точці множини $[a, b] \setminus E$ ($[a, b] \setminus E$), де множина E не більш ніж зліченна, існує права (ліва) похідна f'_Π (f'_Λ), то f зростаюча на $[a, b]$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in (a, b] \setminus E \quad f'_\Pi(x) \geq 0$ ($f'_\Lambda(x) \geq 0$), при цьому множина точок, у яких $f'_\Pi(x) > 0$ ($f'_\Lambda(x) > 0$), є щільною на $[a, b]$ (критерій строгої монотонності функції);

д) якщо існує функція $g \in C[a, b]$ і в кожній точці множини $(a, b] \setminus E$, де множина E не більш ніж зліченна, справджується рівність $f'_\Pi(x) = g'_\Pi(x)$ ($f'_\Lambda(x) = g'_\Lambda(x)$), то існує стала $C \in R$, для якої $\forall x \in [a, b]$ справджується рівність $f(x) = g(x) + C$.

57. Дослідіть на монотонність функції $f: R \rightarrow R$ на множині $X \subset D_f$, якщо:

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ та $X = R^+$;

2) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ та $X = R$;

3) $f(x) = x^4 e^{-x}$ та $X = R$;

4) $f(x) = x^5 e^{-x}$ та $X = R$;

5) $f(x) = x + \sin 2x$ та $X = R$;

6) $f(x) = x + \sin x$ та $X = R$;

7) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ та

а) $X = (0, +\infty)$; б) $X = (-\infty, -1)$;

8) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ та $X = R$;

9) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ та $X = (0, +\infty)$;

- 10) $f(x) = x - e^x$ та $X = R$;
- 11) $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$ та $X = [0, 1]$;
- 12) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ та $X = (0, +\infty)$;
- 13) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (1+x)e^{-x}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 14) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ та $X = R \setminus \{1\}$;
- 15) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 16) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x$ та $X = R$;
- 17) $f(x) = \log_x(x+1)$ та $X = (1, +\infty)$;
- 18) $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+4x)}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 19) $f(x) = \left(\frac{2+x}{3+x}\right)^{3+x}$ та $X = [0, +\infty)$;
- 20) $f(x) = (2+x)\ln(x+1) - 2x$ та $X = (-1, +\infty)$;
- 21) $f(x) = \begin{cases} x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ та $X = [0, +\infty)$;
- 22) $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ та
- а) $X = (0, +\infty)$; б) $X = (-\infty, -1)$;
- 23) $f(x) = x + |\sin x|$ та $X = R$;
- 24) $f(x) = |\cos 2x| - 2x$ та $X = R$.

58. Дослідіть на монотонність параметрично задану функцію $y = y(x)$, де $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ на множині $t \in T$, якщо:

- 1) $x(t) = \sin t - t + \frac{1}{6}t^3$, $y(t) = 4t^5 - 5t^4 + 1$ та $T = R$;
- 2) $x(t) = t \ln t$, $y(t) = \frac{\ln t}{t}$ та $T = (0, +\infty)$;

$$3) x(t) = \sin(2t^2) - 4t, \quad y(t) = \sqrt{2\pi}t + \cos(2t^2) \text{ та } T = [0, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}];$$

$$4) x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \text{ та } T = [0, 2\pi].$$

59. Знайдіть локальні екстремуми функції $f: R \rightarrow R$ на області визначення, якщо:

$$1) f(x) = x^x;$$

$$2) f(x) = e^{-x^2};$$

$$3) f(x) = x^4(1-x)^3;$$

$$4) f(x) = e^{x^3-3x};$$

$$5) f(x) = \frac{x^2 - 4}{(1-x)^2};$$

$$6) f(x) = \frac{\ln^2 x}{x};$$

$$7) f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$

$$8) f(x) = x + |\sin 2x|;$$

$$9) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1};$$

$$10) f(x) = \arctg x - \frac{\ln(1+x^2)}{2};$$

$$11) f(x) = e^x \sin x;$$

$$12) f(x) = x + x^{-2};$$

$$13) f(x) = \frac{2x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7}}{3};$$

$$14) f(x) = x \cdot 3^{-x};$$

$$15) f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctg x - \frac{1}{8}\pi x^2 - \frac{1}{2}(x-1);$$

$$16) f(x) = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x;$$

$$17) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 1};$$

$$18) f(x) = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)};$$

$$19) f(x) = x - \ln(1+x);$$

$$20) f(x) = x - \ln(1+x^2);$$

$$21) f(x) = \frac{x}{\ln x};$$

$$22) f(x) = x + \frac{9}{x};$$

$$23) f(x) = x\sqrt{2-x^2};$$

$$24) f(x) = x + \sqrt{1-x};$$

$$25) f(x) = (x-4)(x-5)(x+6)(x+7);$$

$$26) f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in R \setminus Q, \\ 0, & x \in Q; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in R \setminus Q, \\ x^4, & x \in Q; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in R \setminus Q, \\ x^2, & x \in Q; \end{cases}$$

$$31) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in R \setminus Q, \\ 1 - x^2, & x \in Q; \end{cases}$$

$$32) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x + 1, & x > 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$$

$$33) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1 - x, & x > 0, \\ a, & x = 0; \end{cases}$$

$$34) f(x) = |x|^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot |1 - x|^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}};$$

$$35) f(x) = \cos^{100} x + ch^{100} x;$$

$$36) f(x) = \cos x + |\cos x|;$$

$$37) f(x) = |x|e^{-|x-1|};$$

$$38) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2-1}}, & |x| \neq 1, \\ 0, & |x| = 1; \end{cases}$$

$$39) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$40) f(x) = \max\{x^2 + 2x - 2, 4 - 2x - x^2\};$$

$$41) f(x) = \min\{x + 5, x^2 + 1, 1 - x\};$$

$$42) f(x) = \min\{x^3 - 3x, 4 - x\};$$

$$43) f(x) = \min\{x^2 + 2x, x^2 - 2x, x^2 - 6x + 8\}.$$

60. Знайдіть локальні екстремуми параметрично заданої функції $y = y(x)$, де $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ на множині $t \in T = D_\phi \cap D_\psi$, якщо:

$$1) x(t) = \frac{1}{t(t+1)}, y(t) = \frac{(t+1)^2}{t};$$

- 2) $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$;
- 3) $x(t) = t^2 + t + 1$, $y(t) = t^2 - t + 1$;
- 4) $x(t) = t^4 + t$, $y(t) = 5t^2 - 2t^5$;
- 5) $x(t) = \frac{e^t}{t+1}$, $y(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$;
- 6) $x(t) = \frac{t^2}{1-2t}$, $y(t) = \frac{t^3}{1-2t}$;
- 7) $x(t) = sh t - t$, $y(t) = ch t - 1$;
- 8) $x(t) = t^2 + 3t + 1$, $y(t) = t^2 + 3t + 1$;
- 9) $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$;
- 10) $x(t) = \frac{(t+1)^2}{4}$, $y(t) = \frac{(t-1)^2}{4}$;
- 11) $x(t) = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$;
- 12) $x(t) = \frac{t^2+1}{t}$, $y(t) = \frac{t^2+3}{t-1}$;
- 13) $x(t) = \frac{t^2-3t}{t+1}$, $y(t) = \frac{t^2+2t}{t+1}$;
- 14) $x(t) = t \ln t$, $y(t) = \frac{\ln t}{t}$;
- 15) $x(t) = 3t - t^3$, $y(t) = 4t - t^4$.

61. Знайдіть локальні екстремуми неявно заданої рівнянням $F(x, y) = 0$ функції $x \mapsto y(x)$, якщо:

- 1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;
- 2) $(x + y) - xy(y - x) = 0$;
- 3) $x^3 + y^3 + x^2y + 1 = 0$;

$$4) x^4 - y^4 + yx - 259 = 0;$$

$$5) x^6 + 2x^3y - y^3 + 12 = 0.$$

62. Для функції $f: R \rightarrow R$ на множині $A \subset D_f$ знайдіть $\max_{x \in A} f(x)$ та $\min_{x \in A} f(x)$; за відсутності одного з них знайдіть, відповідно, $\inf_{x \in A} f(x)$ та $\sup_{x \in A} f(x)$, якщо:

$$1) f(x) = |x^2 + 6x + 8|,$$

$$a) A = [-4; 4];$$

$$б) A = [0; 2];$$

$$2) f(x) = |x^2 + 2x - 8|,$$

$$a) A = (-3; 3);$$

$$б) A = [-2; 1];$$

$$3) f(x) = x + \frac{1}{x},$$

$$a) A = [\frac{1}{2}; 4];$$

$$б) A = [\frac{1}{4}; 2];$$

$$4) f(x) = \sqrt{5 - 4x}, A = [-1; 1];$$

$$5) f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}, A = [0; +\infty);$$

$$6) f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, A = (0; +\infty);$$

$$7) f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4},$$

$$a) A = R;$$

$$б) A = [0; +\infty);$$

$$8) f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, A = [-1; 1];$$

$$9) f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,$$

$$a) A = [-1; 2];$$

$$б) A = [0; 4];$$

$$10) f(x) = \frac{x-1}{1+x}, A = [0; 4];$$

$$11) f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, A = R;$$

$$12) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad A = [0; +\infty);$$

$$13) f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|},$$

$$\text{a) } A = [0; 1]; \quad \text{б) } A = R;$$

$$14) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad A = R;$$

$$15) f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x, \quad A = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right];$$

$$16) f(x) = \cos x - \sin^2 x + 2, \quad A = [0, \pi].$$

63. Нехай функції f та g n -диференційовані на проміжку $X = (a, b) \subset \bar{R}$, $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $f^{(k)}(x_0)$ та $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x) \forall x \in X$. Доведіть, що:

$$1) \text{ якщо } x_0 = a, \text{ то } f(x) > g(x) \quad \forall x \in X;$$

$$2) \text{ якщо } x_0 = b, \quad n = 2m, \quad m \in N, \text{ то } f(x) > g(x) \quad \forall x \in X;$$

$$3) \text{ якщо } x_0 = b, \quad n = 2m - 1, \quad m \in N, \text{ то } f(x) < g(x) \quad \forall x \in X.$$

64. Доведіть нерівності:

$$1) e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0;$$

$$2) \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \quad x > 0;$$

$$3) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad x > 0;$$

$$4) x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0;$$

$$5) \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \quad x > 0;$$

$$6) \ln x > \frac{2(x-1)}{1+x}, \quad x > 1;$$

- 7) $2x \cdot \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2), x \neq 0;$
- 8) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x, x \in (0, \frac{1}{2}\pi);$
- 9) $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}, x > 0;$
- 10) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, x > 0;$
- 11) $\operatorname{sh} x > x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, x > 0;$
- 12) $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, x \neq 0;$
- 13) $x^3 + 3x + 6x \ln x > 6x^2, x > 1;$
- 14) $x^4 + 8x + 12x^2 \ln x > 8x^3 + 1, x > 1;$
- 15) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} > \frac{x}{y}, 0 < y < x < \frac{1}{2}\pi;$
- 16) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}, x > 0;$
- 17) $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(1+x) < x + \frac{x^2}{2}, x > 0;$
- 18) $(a+x)^a < a^{a+x}, a \geq e, x > 0;$
- 19) $(e+x)^{e-x} < (e-x)^{e+x}, x \in (0, e);$
- 20) $e^x < 1+x+\frac{x^2 e^x}{2}, x > 0;$
- 21) $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), x > 0;$
- 22) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x} + \ln x, x > 0;$
- 23) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0;$

- 24) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, x > 1;$
- 25) $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}, x \in (1, e);$
- 26) $x - \frac{x^3}{3} < \arctg x < x - \frac{x^3}{6}, x \in (0, 1);$
- 27) $\sin x \leq \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2}, x \in [0, \pi];$
- 28) $\sin x \leq 1 - \frac{4x}{\pi^2}, |x| \leq \frac{\pi}{2};$
- 29) $\tg x \geq \frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}, x \in [0, \frac{1}{4}\pi];$
- 30) $\tg x \leq \frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}, x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi].$

65. Чи можна щось гарантовано сказати про характер опуклості функції ϕ на проміжку $X = (a, b)$, якщо відомо, що $D_f = D_g = X$, а також:

- 1) $\phi = \alpha f$, $\alpha \neq 0$ та
 а) f опукла; б) f опукла;
- 2) $\phi = f^{-1}$ та
 а) f оборотна й опукла; б) f оборотна й увігнута;
- 3) $\phi = \frac{1}{f}$ та
 а) f опукла та $E_f \subset (0, +\infty)$ ($E_f \subset (0, +\infty)$);
 б) f увігнута та $E_f \subset (0, +\infty)$ ($E_f \subset (0, +\infty)$);
- 4) $\phi = f + g$ та
 а) f та g опуклі; б) f та g увігнуті;
 в) f опукла та g увігнута;

- 5) $\phi = f \cdot g$ та
- а) f та g опуклі, невід'ємні та зростаючі;
 - б) f та g опуклі, невід'ємні та спадні;
 - в) f та g опуклі, недодатні та зростаючі;
 - г) f та g опуклі, недодатні та спадні;
 - б) $\phi = f \cdot g$, f опукла, невід'ємна, зростаюча та
 - а) g увігнута, недодатна, спадна;
 - б) g опукла, недодатна, спадна;
 - в) g увігнута, невід'ємна, спадна;
 - г) g увігнута, недодатна, зростаюча.

66. Чи можна щось гарантовано сказати про характер опуклості функції $f \circ g$ на проміжку $X = (a, b)$, якщо відомо, що g двічі диференційована на X , f двічі диференційована на E_g та:

- 1) f опукла та зростаюча на E_f , g опукла;
- 2) f опукла та зростаюча на E_f , g увігнута;
- 3) f опукла та спадна на E_f , g опукла;
- 4) f опукла та спадна на E_f , g увігнута;
- 5) f увігнута та зростаюча на E_f , g опукла;
- 6) f увігнута та зростаюча на E_f , g увігнута;
- 7) f увігнута та спадна на E_f , g опукла;
- 8) f увігнута та спадна на E_f , g увігнута.

67. Дослідіть на опуклість функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множині $X \subset D_f$ та знайдіть точки перегину, якщо:

- 1) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ та $X = \mathbb{R}$;
- 2) $f(x) = x(x+1)(x+2)$ та $X = \mathbb{R}$;
- 3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ та $X = \mathbb{R}$;
- 4) $f(x) = x + \sin x$ та $X = \mathbb{R}$;

- 5) $f(x) = \ln(1+x^2)$ та $X = R$;
- 6) $f(x) = x^x$ та $X = (0, +\infty)$;
- 7) $f(x) = x^2 \ln x$ та $X = (0, +\infty)$;
- 8) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ та $X = R$;
- 10) $f(x) = (x+2)^6 + 2x+1$ та $X = R$;
- 11) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ та $X = R$;
- 12) $f(x) = \ln(x^2-1)$ та $X = (1, +\infty)$;
- 13) $f(x) = x^4 \cdot (12 \ln x - 12)$ та $X = (0, +\infty)$;
- 14) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 15) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ та $X = (0, +\infty)$;
- 16) $f(x) = (x+1)^4 + e^x$ та $X = R$;
- 17) $f(x) = \ln(1+x^3)$ та $X = (-1, +\infty)$;
- 18) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ та $X = R$;
- 19) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ та $X = R$.

68. Дослідіть на опуклість параметрично задану функцію $y = y(x)$, де $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ на множині T , і знайдіть точки перегину, якщо:

- 1) $\phi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$, $T = R$;
- 2) $\phi(t) = 3t^3 + t$, $\psi(t) = t^3 + 3t$; $T = R$;
- 3) $\phi(t) = e^t(t+1)$, $\psi(t) = e^t(t-1)$; $T = R$;
- 4) $\phi(t) = t^3 + 3t + 1$, $\psi(t) = t^3 - 3t + 1$; $T = R$.

69. Доведіть твердження:

1) якщо функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ опукла (увігнута) на (a, b) , то
 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ та $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$:
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, справджується *нерівність Ієнсена*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \left(f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right);$$

2) якщо $a_i, b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad p, q > 0: \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то
 справджується *нерівність Гельдера*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}};$$

3) якщо $a_i, b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad p \geq 1: \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то
 справджується *нерівність Мінковського*:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

4) якщо $x_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$, то справджується *нерівність між середніми*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

70. Доведіть нерівності:

1) $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, \quad x, y > 0, \quad n > 1;$

2) $\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}};$

3) $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x, y > 0;$

- 4) $\sqrt{\sin x \cdot \sin y} \leq \sin \frac{x+y}{2}, x, y \in (0, \pi);$
- 5) $\frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{\sin x \cdot \sin y} \leq \sqrt{xy} \cdot \sin \frac{x+y}{2}, x, y \in (0, \pi);$
- 6) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1 \leq \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}, x, y > 1;$
- 7) $e^{\frac{x+y}{2}} + 2 \leq \sqrt{(e^x+2)(e^y+2)};$
- 8) $(x+y)a^{\frac{2}{x+y}} \leq xa^{\frac{1}{x}} + ya^{\frac{1}{y}}, x, y > 0, a > 1;$
- 9) $2^{1-\sqrt{\frac{x+y}{2}}} \leq 2^{-\sqrt{x}} + 2^{-\sqrt{y}}, x, y > 0;$
- 10) $\log_{0,3} \lg \frac{x+y}{2} \leq \frac{\log_{0,3} \lg x + \log_{0,3} \lg y}{2}, x, y > 1;$
- 11) $\operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}{2}, x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
- 12) $\frac{\sqrt{\lg \frac{x+y}{2}}}{2} \geq \frac{\sqrt{\lg(xy)x} + 2\sqrt{\lg x \cdot \lg y}}{2}, x, y > 1;$
- 13) $\sqrt{\sin \frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin y}}{2}, x, y \in (0, \pi);$
- 14) $x, y \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right);$
- 15) $\frac{2(x+y)}{2-(x+y)} \geq \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}, x, y > 1;$
- 16) $\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{(1-x)(1-y)}}{2-(x+y)}, x, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right);$
- 17) $\sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{2}} \leq \sqrt[m]{\frac{x^m + y^m}{2}}, x, y > 0, 1 \leq n \leq m;$

$$18) \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{(1-x)(1-y)}}{2-(x+y)}, \quad x, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$19) \frac{x^4 + 2y^4 + 3z^4}{6} \geq \left(\frac{x + 2y + 3z}{6}\right)^4;$$

$$20) \cos \frac{x + 2y + 4z}{7} \leq \frac{\cos x + 2 \cos y + 4 \cos z}{7} \quad x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

71. Доведіть нерівності:

$$1) -2 \leq 3x - x^3 \leq 2, \quad |x| < 2;$$

$$2) -13 \leq 2x^3 - 3x^2 - 12x \leq 7, \quad |x| \leq 1;$$

$$3) \frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$4) 5 \leq \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{77}{13}, \quad 1 \leq x \leq 4;$$

$$5) 2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1], \quad p \geq 1;$$

$$6) x^m (a-x)^n \leq \frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}, \quad x \in [0, a], \quad m > 0, \quad n > 0;$$

$$7) \frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad n \geq 1.$$

72. Перевірте, чи справджуються твердження для функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$1) \text{ Якщо } f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \text{то:}$$

а) f зростає в точці $x = 0$;

б) $\exists \varepsilon > 0$: f зростає на множині $O_\varepsilon(0)$.

2) Якщо $f \in C^{(2)}([a, b])$, то:

а) між кожними двома точками перегину графіка функції $\Gamma(f)$ є принаймні одна точка екстремуму;

б) між кожними двома точками екстремуму графіка функції $\Gamma(f)$ є принаймні одна точка перегину.

3) Якщо $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ то:

а) $x=0$ – точка максимуму функції f ;

б) $\exists \varepsilon > 0$: f зростає на множині $(-\varepsilon, 0)$;

в) $\exists \varepsilon > 0$: f спадає на множині $(0, \varepsilon)$.

4) Якщо $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ то:

а) $x=0$ – точка екстремуму функції f ;

б) у точці $x=0$ справджується теорема 4 (перша достатня умова точки екстремуму) для функції f ;

в) у точці $x=0$ справджується теорема 5 (друга достатня умова точки екстремуму) для функції f ;

г) $x=0$ – точка перегину функції f ;

д) $f \in C^{(\infty)}(R)$.

5) Якщо $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ то:

а) $x=0$ – точка екстремуму функції f ;

б) $x=0$ – точка перегину функції f ;

в) у точці $x=0$ справджується теорема 8 (достатня умова точки перегину) для функції f ;

г) $f \in C^{(\infty)}(R)$.

6) Якщо $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^4 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ то:

а) $x=0$ – точка максимуму функції f ;

б) $x=0$ – точка перегину функції f .

7) Якщо $f(x) = P_n(x)$ – багаточлен степеня n , то графік $\Gamma(f)$ при парному (непарному) n має:

а) принаймні одну точку екстремуму;

б) принаймні одну точку перегину.

8) Якщо функція $[a, b] \xrightarrow{f} R$, то:

а) $f \in C([a, b])$;

б) $f \in C((a, b))$;

в) f у кожній точці (a, b) має ліву та праву похідну.

9) Функція неперервна й опукла на (a, b) тоді й тільки тоді, коли $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ справджується нерівність

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

10) Функція $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ має в точці $x=0$

екстремум (перегин), якщо:

а) $n=1$;

б) $n=2$;

в) $n=3$;

г) $n=4$.

11) Функція $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ має в точці $x=0$

екстремум (перегин), якщо:

а) $n=2$;

б) $n=3$.

12) Якщо $x_0 \in (a, b) = D_f$, то для того, щоб функція f мала в точці x_0 максимум, необхідно й достатньо, щоб існувало $\varepsilon > 0$, для якого на проміжку $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ f була б неспадною, а на проміжку $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ – незростаючою.

13) Якщо функція f диференційована на $(a, b) = D_f$, то для того, щоб функція f була монотонною, необхідно й достатньо, щоб f' була монотонною.

14) Якщо $f \in C^{(1)}(R^+)$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in R$, якщо:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f'(x)) = A$.

15) Існують функція f і точка $x_0 \in (a, b) = D_f$, у якій функція має одночасно:

а) точки строгого локального екстремуму і перегину;

б) точки строгого локального екстремуму і перегину, при цьому $f \in C(x_0)$;

в) точки строгого локального екстремуму і перегину, при цьому $f \in C^{(1)}(x_0)$;

г) точки локального екстремуму і перегину.

16) Існує нелінійна функція $f \in C^{(\infty)}(R)$ така, що $\forall n \in N$
 $\forall x \in R$ справджується нерівність $|f^{(n)}(x)| \leq 2^{-n}$.

17) Строго опукла на $(a, b) = D_f$ функція f :

а) може досягати свого мінімуму (максимуму) в деякій точці проміжку (a, b) ;

б) обов'язково досягає свого мінімуму (максимуму) в деякій точці проміжку (a, b) .

73. Доведіть твердження:

1) якщо $[a, +\infty) \xrightarrow{f} R$ двічі диференційована на D_f ,
 $f(a) = A > 0$, $f'(a) < 0$ та $f''(a) \leq 0$, то рівняння $f(x) = 0$
має єдиний розв'язок на проміжку $(a, +\infty)$;

2) якщо функція $[0, 1] \xrightarrow{f} R$ двічі диференційована на D_f ,
 $f(0) = f(1) = 0$ та $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$, то $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$;

3) якщо функція $R \xrightarrow{f} R$ тричі диференційована на R і $\forall x \in R \quad f(x) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$ та $f'''(x) > 0$, то $\exists a > 0: \forall x > 0 \quad f(x) > ax^2$;

4) якщо $(a, b) \xrightarrow{f} R$ двічі диференційована на D_f та для деякої точки $c \in (a, b) \quad f''(c) \neq 0$, то на інтервалі (a, b) знайдуться дві точки x, y , що задовольнятимуть умову

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c);$$

5) якщо функція $f \in C^{(1)}((a, b))$ та $\forall x, y \in (a, b)$ існує єдина точка $z \in (a, b)$, для якої $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$, то f — строго опукла або строго увігнута функція;

6) множина точок, у яких функція $R \xrightarrow{f} R$ має строгий локальний екстремум, не більш ніж зліченна;

7) якщо функція $f \in C^{(2)}((-a, a))$ парна, $f''(0) \neq 0$, то точка $x = 0$ є точкою екстремуму функції f ;

8) якщо функція $[0, 1] \xrightarrow{f} R$ диференційована на D_f та $f'_H(0) \cdot f'_A(1) < 0$, то $\exists c \in (0, 1): f'(c) = 0$;

9) якщо функція $[0, 1] \xrightarrow{f} R$ диференційована на D_f та $f'_H(0) = 1, \quad f'_A(1) = 1$, то $\exists c \in (0, 1): f'(c) = c$;

10) якщо функція $f \in C^{(\infty)}(R)$ така, що $\exists M \in R: \forall n \in N \quad \forall x \in R \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$, а також $f(\frac{1}{n}) = 0$, то $f(x) = 0 \quad \forall x \in R$;

11) якщо функція $f \in C^{(\infty)}([0, +\infty))$ така, що $\forall n \in N \quad \forall x > 0 \quad f^{(n)}(0) = 0$ та $f^{(n)}(x) \geq 0$, то $f(x) = 0 \quad \forall x > 0$;

12) якщо функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ $(n+1)$ разів диференційована на (a, b) , при цьому $x, x+h \in (a, b)$ та

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x + \theta_h h)}{n!},$$

де $0 < \theta < 1$ та $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$.

74. Знайдіть асимптоти графіків функцій $x \mapsto y(x)$, $x \in D_f$:

1) $y(x) = \frac{x^2 + 8x + 12}{3x^2 + 17x - 6}$;

2) $y(x) = \frac{3x^3 - 2x - 1}{x^2 + x + 2}$;

3) $y(x) = \sqrt[3]{\frac{27x^5 + 1}{x^2 + 2}}$;

4) $y(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$;

5) $y(x) = xe^{\frac{1}{x}}$;

6) $y(x) = x + e^{-x}$;

7) $y(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x + (x+2) \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|} - \frac{1}{x+3}$;

8) $y(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$;

9) $y(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{e^x + 2} - 6x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2 - 1}$;

10) $y(x) = (7x+1) \operatorname{arctg} x - 2x \operatorname{arctg} x + \frac{6x}{x^2 - 4} + \frac{1}{e^x + 1}$.

75. Знайдіть локальні екстремуми параметрично заданої функції $y = y(x)$, де $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ на множині $t \in T = D_\phi \cap D_\psi$, якщо:

1) $x = t^3 - 1$, $y = t^3 - 2\arctg t$;

2) $x = te^t$, $y = te^{-t}$;

3) $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$;

4) $x = \frac{1}{t(t^2-1)}$, $y = \frac{t+1}{t^2(t-1)}$;

5) $x = \frac{t}{(t^2-1)(t+2)}$, $y = \frac{t^2}{(t+1)^2(t+2)}$;

6) $x = \frac{1}{t(t-1)(t-2)(t-3)}$, $y = \frac{(t-2)(t-4)}{t(t-1)(t+1)(t+2)}$.

76. Побудуйте графіки функцій $f: R \rightarrow R$:

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$;

2) $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3$;

3) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$;

4) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$;

5) $f(x) = \frac{14}{x^4-8x^2+2}$;

6) $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$;

7) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$;

8) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$;

9) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$;

10) $f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-2x+2}$;

11) $f(x) = \frac{x^4+2}{2x^2+1}$;

12) $f(x) = \frac{2-x^2}{1+x^4}$;

$$13) f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3};$$

$$14) f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1};$$

$$15) f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2};$$

$$16) f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$17) f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}};$$

$$18) f(x) = (x-3)\sqrt{x};$$

$$19) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

$$20) f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2-x+1};$$

$$21) f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x;$$

$$22) f(x) = \sqrt{x^2 \cdot \frac{1+x}{1-x}};$$

$$23) f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}};$$

$$24) f(x) = e^x + e^{-x};$$

$$25) f(x) = e^{-\frac{1}{x}};$$

$$26) f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}};$$

$$27) f(x) = x^x;$$

$$28) f(x) = x^n e^{-x}, n \in \mathbb{N};$$

$$29) f(x) = x \ln |x|;$$

$$30) f(x) = \frac{x}{\ln |x|};$$

$$31) f(x) = (x^2+1)e^{-x^2};$$

$$32) f(x) = x + e^{-x};$$

$$33) f(x) = \frac{e^x}{x+1};$$

$$34) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$$

$$35) f(x) = \ln \frac{x+1}{x-2};$$

$$36) f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x > 0;$$

$$37) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$

$$38) f(x) = \frac{x}{e^x};$$

$$39) f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x;$$

$$40) f(x) = x^2 \ln x;$$

$$41) f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right);$$

$$42) f(x) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2};$$

$$43) f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \sin x;$$

$$44) f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x};$$

$$45) f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)};$$

$$46) f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$47) f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$48) f(x) = \arccos \frac{1-x}{1-2x};$$

$$49) f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - x);$$

$$50) f(x) = x + \operatorname{arctg} x;$$

$$51) f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x;$$

$$52) f(x) = 2x - \operatorname{tg} x;$$

$$53) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4};$$

$$54) f(x) = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}.$$

У задачах 77–79 параметри вважатимемо додатними.

77. Побудуйте графіки параметрично заданої функції $y = y(x)$, де $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ на множині $t \in T = D_\phi \cap D_\psi$, якщо:

$$1) x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1; \quad 2) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3;$$

$$3) x = -5t^2 + 2t^5, y = -3t^2 + 2t^3; \quad 4) x = t^4, y = 5t^2 - 2t^5;$$

$$5) x = t^3 - 3t, y = \left(\frac{t-1}{t}\right)^2; \quad 6) x = \frac{3t}{t^3 + 1}, y = \frac{3t^2}{t^3 + 1};$$

$$7) x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}; \quad 8) x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1};$$

$$9) x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}; \quad 10) x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2};$$

$$11) x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}; \quad 12) x = \frac{1}{t(t-1)}, y = \frac{t}{t-1};$$

- 13) $x = \frac{1}{t^2 - 1}, y = \frac{1}{t(t-1)}$;
 14) $x = \frac{t^2}{t+1}, y = \frac{1}{t(t+1)}$;
 15) $x = \frac{t^2 + 1}{t}, y = \frac{t^2 + 3}{t-1}$;
 16) $x = \frac{t^2 - 3t}{t+1}, y = \frac{t^2 + 2t}{t+1}$;
 17) $x = \frac{1}{t(t-2)}, y = -\frac{1}{t(t+2)}$;
 18) $x = \frac{t^2 - 3}{t-2}, y = -\frac{t^2}{t+1}$;
 19) $x = \frac{t^3}{1+t^3}, y = \frac{t^2}{1+t^2}$;
 20) $x = \frac{t^2}{4(1-t)}, y = \frac{t^3}{8(t-1)}$;
 21) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}$;
 22) $x = \frac{t^2}{1-2t}, y = \frac{t^3}{1-2t}$;
 23) $x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6\arctg t$;
 24) $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t$;
 25) $x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1)$;
 26) $x = te^t, y = te^{-t}$;
 27) $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$;
 28) $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}$;
 29) $x = 2t + \ln|t-1|, y = t + \ln|t-1|$;
 30) $x = te^t, y = te^{-t}$.

78. Побудуйте графіки неявно заданої рівнянням $F(x, y) = 0$ функції $x \mapsto y(x)$, якщо:

- 1) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$;
 2) $x(x^2 + y^2) = a^2 y$;
 3) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$;
 4) $x^y = y^x, x > 0, y > 0$;
 5) $x^2 y^2 = x^3 - y^3$;
 6) $x^3 + y^3 = 3axy$;
 7) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$;
 8) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 xy(x - y)$;
 9) $(x + y)^3 = a(x - y)$;

$$10) (x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^4 + y^4);$$

$$11) (x + y)^3 = axy;$$

$$12) (x + y)^4 = ax^2y;$$

$$13) x^4 + y^4 = 2xy;$$

$$14) 4y^2 = 4x^2y + x^5;$$

$$15) x^5 + y^5 = xy^2.$$

79. Побудуйте графіки функцій, заданих у полярних координатах, якщо:

$$1) r = a \operatorname{tg} \phi;$$

$$2) r = a(1 + b \cos \phi);$$

$$3) r = \sqrt{\frac{\pi}{\phi}};$$

$$4) r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\phi}{\pi};$$

$$5) r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\phi}};$$

$$6) r = a \operatorname{ctg} \phi;$$

$$7) r = 2a \cos \phi + 1;$$

$$8) r = \sin \phi - \frac{1}{2};$$

$$9) r = \frac{a \operatorname{th} \phi}{\phi - 1}, \phi > 1;$$

$$10) \phi = \arccos \frac{r-1}{r^2}.$$

ЧАСТИНА 2

Похідна функція. Відповіді

РОЗДІЛ 1

Визначення похідної, правила диференціювання

1. 1) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{3x^5+2x^4+4x^3+8x^2+3x+6}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$;
- 4) $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;
- 5) $-2\cos(\cos^2 x)\cos x \sin x \cos(\sin^3 x) -$
 $-3\sin(\cos^2 x)\cos x \sin^2 x \sin(\sin^3 x)$;
- 6) $\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$;
- 7) $\frac{\cos(\cos(\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x))) \cdot \sin(\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x))}{\cos^2(\operatorname{ctg} x) \cdot \sin^2 x}$;
- 8) $\frac{-3\cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)) \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x) \cdot \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$; 9) $\frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$;
- 10) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \cdot \left(\ln \frac{a}{b} + \frac{b-a}{x}\right)$;
- 11) $\frac{e^{-x}}{2} \left((x-1)^2 \sin x + (3-x^2) \cos x \right)$;
- 12) $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$; 13) $-\frac{3^{\operatorname{tg} 1/x} \ln 3}{x^2 \cos^2 1/x}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 15) $\frac{2}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$;

16) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; **17)** $a^{a^x} a^x \ln^2 a + a^{x^a} x^{a-1} a \ln a + a^a x^{a^{a-1}} +$
 $+ x^{a^x} x^{x-1} (x \ln x \cdot (\ln x + 1) + 1)$; **18)** $\sqrt{x^2 + a^2}$; **19)** $\frac{\ln x}{x^5}$;

20) $\frac{\ln x - x - 1 - 1/x}{(1 - x \ln x)(1 + x \ln(1/x - \ln x))}$; **21)** $\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$;

22) $\frac{1}{2x\sqrt{x-1} \cdot \arccos 1/\sqrt{x}}$; **23)** $\frac{4}{3+5\cos x}$; **24)** $-\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;

25) $\operatorname{sgn} \cos x$; **26)** $2 \sin \ln x$; **27)** 1 ; **28)** 1 ; **29)** $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4} \arccos^3 x^2}$;

30) $\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$; **31)** $-\frac{\arccos x}{x^2}$; **32)** $e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; **33)** $\frac{2 \sin 2x}{2 - \sin^2 2x}$;

34) $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$; **35)** $\frac{\ln 2}{x \ln \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{2}}$; **36)** $\operatorname{sgn} \sin 2x$; **37)** $\frac{1}{ch 2x}$;

38) $\frac{\operatorname{sgn} sh x}{ch x}$; **39)** $10^{x \log_3 x} \cdot \ln 10 \cdot \log_3(ex)$; **40)** $x^{1/x-2} (1 - \ln x)$; **41)** 0 ;

42) $\frac{\sqrt{3}}{1+2\cos x}$; **43)** $\frac{1}{17} \left(\frac{e^{\sin \sqrt{x}} (x^2 + \sqrt{x} + 1)}{x^{12} - x^6 + 1} \right)^{-16/17}$;

44) $(\cos x)^{\sin x - 1} (\cos^2 x \cdot \ln \cos x - \sin^2 x)$; **45)** $e^x (ch x)^{e^e} (\ln ch x + th x)$;

46) $\left(e^{\arcsin^4 x} + \cos^2 x \right)^{-2} \cdot$
 $\left((\cos \ln x - \sin \ln x) \left(\frac{4 \arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin^4 x} - \sin 2x \right) - \right.$
 $\left. - \frac{1}{x} \left(e^{\arcsin^4 x} + \cos^2 x \right) (\sin \ln x + \cos \ln x) \right)$;

$$\begin{aligned}
& 47) \frac{2x \ln \sin^2 \pi x \cdot \ln \operatorname{tg} x \cdot \left(\ln \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\sin 2x} \right) - \pi x^2 \operatorname{ctg} \pi x \cdot \ln^2 \operatorname{tg} x}{\ln^2 \sin^2 \pi x}; \\
& 48) \frac{4x^4 \ln x - (x^4 + 4) \ln(x^4 + 4)}{x(x^4 + 4) \ln^2 x}; \quad 49) -\frac{2}{\sin^2 2x}; \quad 50) -\frac{15x^5}{\sqrt{1-x^2}}; \\
& 51) \frac{3 \ln x}{2x\sqrt{1+\ln x}}; \quad 52) -x^5(2-5x^3)^{2/3}; \quad 53) (a^2+x^2)^{-3/2}; \\
& 54) \frac{1}{e^x + e^{x/2}}; \quad 55) -(\cos x)^{1/x-1} \frac{\cos x \ln \cos x + x \sin x}{x^2}; \\
& 56) \frac{(x^2 + \cos x) \cos \sqrt{x} - 2\sqrt{x}(2x - \sin x) \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x^2 + \cos x)^2}; \\
& 57) \frac{\left(\frac{1}{2x} + \frac{2x}{\cos^2 x^2} \right) \arccos x - \frac{\ln \sqrt{x} + \operatorname{tg} x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2 x}; \\
& 58) \frac{2^{\sin x} \left(\ln 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{arctg}(x^2 - 1) - \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2} \right)}{\operatorname{arctg}^2(x^2 - 1)}; \\
& 59) \frac{3(\cos x^2 + \cos^2 x) + 14(x + \sqrt{x})(2x \sin x^2 + \sin 2x)}{14\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^{4/7}(\cos x^2 + \cos^2 x)^2}; \\
& 60) \frac{(2 \ln x + 1)(x^{1/4} + x^{-1/5}) - (\ln x + \ln^2 x) \left(\frac{5}{4} x^{1/4} + \frac{4}{5} x^{-1/5} \right)}{(x^{1/4} + x^{-1/5})^2}; \\
& 61) \frac{\pi x}{2(1+x^2) \operatorname{ch} x^3} \left(2 \operatorname{ch} x^2 - 3 x \operatorname{sh} x^2 \cdot \operatorname{cth} x^3 - \frac{2 \operatorname{sh} x^2}{1+x^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
62) & \frac{e^{\arcsin x}}{(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})(ch x - 1)} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x}}{6x(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x})} \right) \times \right. \\
& \left. \times \ln(1 + sh x) + \frac{ch x(ch x - 1) - sh x \cdot (1 + sh x) \cdot \ln(1 + sh x)}{(1 + sh x)(ch x - 1)} \right); \\
63) & \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\cos ch x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x}} \left(\frac{6x - 1 - x^2}{3(1 + x^2)} + \frac{2 \cos ch x + x^3 sh x \cdot \sin ch x}{x^2 \cos ch x} \right); \\
64) & \frac{1}{\ln^2 \frac{1+x}{1+x^2} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} \cdot \\
& \cdot \left(sh e^x \cdot \left(\cos \sin^2 x \cdot \sin 2x \cdot \cos \sqrt{x} + \frac{\sin \sin^2 x \cdot \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right) \ln \frac{1+x}{1+x^2} + \right. \\
& \left. + \sin \sin^2 x \cdot \cos \sqrt{x} \left(e^x \cos e^x \cdot \ln \frac{1+x}{1+x^2} + \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)(1+x^2)} sh e^x \right) \right); \\
65) & \frac{1 + \sin x \cdot \arcsin x + \cos x \cdot \arccos x + \frac{\pi}{2} + \sin x + \cos x}{(\cos x + \arccos x)^2 \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}{\operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}} + \\
& + \frac{\sin x + \arcsin x}{\cos x + \arccos x} \cdot \frac{x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x} + \operatorname{tg} x^2 \cdot \cos^2 x^2 \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos^2 x^2 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x^2} \operatorname{ctg}^4 \sqrt{x}}; \\
66) & (\sin x)^{\cos x - 1} (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x); \\
67) & ch x \cdot (sh x)^{sh x} (1 + \ln ch x); \\
68) & -(\cos x)^{\arccos x} \left(\frac{\ln \cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x \cdot \operatorname{tg} x \right);
\end{aligned}$$

$$69) -(\pi - \arcsin x) \frac{1}{\ln x} \left(\frac{\ln(\pi - \arcsin x)}{x \ln^2 x} + \frac{1}{(\pi - \arcsin x) \sqrt{1-x^2} \ln x} \right);$$

$$70) x \ln \frac{1-x}{1+x}; \quad 71) \frac{\arcsin x}{x^2}; \quad 72) \frac{x^{\operatorname{tg} x - 1}}{\cos^2 x} (x \ln x + \sin x \cdot \cos x) + \\ + \frac{x^{\operatorname{tg} 2x - 1}}{2 \cos^2 2x} (2x \ln x + \sin 2x \cdot \cos 2x) \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-x^{\operatorname{tg} 2x}}{1-x^2};$$

$$73) \sin \ln x; \quad 74) \frac{x^2}{2} (x+1) \sqrt{a^2 + x^2}; \quad 75) \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2};$$

$$76) \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 3}; \quad 77) \frac{x^2 - 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$78) \frac{-16x^6 - 8x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 16x + 5}{(x^3 + x + 1)^3};$$

$$79) \frac{5(x^4 - 1)}{(x^5 - 5x)(x^5 - 5x + 1)};$$

$$80) (\arcsin x^2)^{\operatorname{tg}^2 x} \left(\frac{\ln \arcsin x^2}{\cos^2 x} + \frac{x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^4} \arcsin x^2} \right) 2 \operatorname{tg} x;$$

$$81) \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} (\cos x^{3/2})^{\sqrt{\sin x} - 1} \\ (\cos x \cdot \cos x^{3/2} \cdot \ln \cos x^{3/2} - 3\sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \sin x^{3/2});$$

$$82) \left(\ln^2(1 + \sqrt{x}) \right)^{\cos x^2} \left(\frac{\cos x^2}{(x + \sqrt{x}) \ln(1 + \sqrt{x})} - 2x \sin x^2 \cdot \ln \ln^2(1 + \sqrt{x}) \right);$$

$$83) e^{-\frac{1}{x}} (\arccos \sqrt{x}) e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\ln \arccos \sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)} \arccos \sqrt{x}} \right);$$

- 84) $2\left(1 + \sin x + \sin^2 x\right)^{2\cos x - 1} \left(\cos x \cdot \left(\cos x + 2x \cos x^2 \right) - \right.$
 $\left. - \sin x \cdot \left(1 + \sin x + \sin^2 x \right) \ln \left(1 + \sin x + \sin^2 x \right) \right);$
- 85) $\left(ch x^2 \right)^{sh^2 x - 1} \left(sh 2x \cdot ch x^2 \cdot \ln ch x^2 + 2x sh^2 x \cdot sh x^2 \right);$
- 86) $\operatorname{arctg} x \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} \right)^{\operatorname{arctg}^2 x} \left(\frac{2 \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{1 + x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}(1+x)\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \right);$
- 87) $\left(\cos \sin x \right)^{\sqrt{\ln x}} \left(\frac{\ln \cos \sin x}{2x\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\ln x} \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} \sin x \right);$
- 88) $\frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \operatorname{tg}^3 x}{x^2 + 1};$
- 89) $\left(sh x^2 \right)^{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \left(2x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} \cdot cth x^2 - \frac{\ln sh x^2}{3 \sin^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \right);$
- 90) $2 \sin^{\frac{2}{3}} x \cdot \left(ch \sqrt{x} \right)^{\sin^{\frac{5}{3}} x} \left(\frac{5}{3} \cos x \cdot \ln ch \sqrt{x} + \frac{\sin x \cdot th \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right);$
 $\left(\operatorname{arctg} (1 + \sqrt{x}) \right)^{\ln \ln x}$
- 91) $\left(\frac{\ln \operatorname{arctg} (1 + \sqrt{x})}{x \ln x} - \frac{\ln \ln x}{2\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 2)\operatorname{arctg} (1 + \sqrt{x})} \right);$
 $\frac{2x}{x^2 + 1} \left(\ln \ln (x^2 + 1) \right)^{\ln(x^4 - 1)}$
- 92) $\left(\frac{2x^2 \ln \ln \ln (x^2 + 1)}{x^2 - 1} + \frac{\ln(x^4 - 1)}{\ln(x^2 + 1) \cdot \ln \ln (x^2 + 1)} \right);$
- 93) $\left(\cos \operatorname{arctg} x \right)^{\operatorname{arcsin} x^2} \left(\frac{2x \ln \cos \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{x \operatorname{arcsin} x^2}{1 + x^2} \right);$

$$94) (\operatorname{tg} \arccos x)^{\arcsin^2 x} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \left(2 \ln \operatorname{tg} \arccos x - \frac{\arcsin^2 x}{x^2 \sqrt{1-x^2} \operatorname{tg} \arccos x} \right);$$

$$95) x^{x^{\sin x}} \cdot x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln^2 x + \frac{1 + \sin x \cdot \ln x}{x} \right);$$

$$96) 2^{x^{x^2}} \cdot x^{x^2} \cdot x(2 \ln x + 1) \ln 2;$$

$$97) (\ln x)^{x^{\ln x}} \cdot x^{\ln x - 1} (2 \ln^2 x + 1);$$

$$98) x^{(\ln x)^{\ln x - 1}} \cdot (\ln x)^{\ln x} (\ln \ln x \cdot \ln x + \ln x + 1);$$

$$99) (\sin \cos x)^{x^{chx}} \cdot x^{chx} \left(\left(shx \cdot \ln x + \frac{chx}{x} \right) \ln \sin \cos x - \operatorname{ctg} \cos x \cdot \sin x \right);$$

$$100) f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{2 \operatorname{arctg} x} \left(\frac{2 \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x (1+x^2)} - \frac{2 \operatorname{arctg} x \ln 2 \ln \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right).$$

$$2. 1) \text{ а) } -324; \text{ б) } -8; \text{ в), г) } 0; 2) \text{ а) } -\frac{1}{4}; \text{ б) } -1; 3) \text{ а) } 0; \text{ б) } 1;$$

$$4) \text{ а) } 0; \text{ б) не имеет; 5) а) } -\pi^2; \text{ б) } -\frac{1}{4}\pi^2; \text{ в) а) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}; \text{ б) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2};$$

$$\text{в) не имеет; 7) а) } 2; \text{ б) } -2; 8) \text{ а) } -\frac{1}{2}\pi; \text{ б) } 2; \text{ в) } -\frac{1}{2}\pi; 9) 0;$$

$$10) \text{ а) } 12; \text{ б) } -18 \ln^2 2; 11) \text{ а) } 0; \text{ б) } 1; 12) \text{ а) } \ln 2; \text{ б) } -e^{-1};$$

$$13) \text{ а) } 200!; \text{ б) } 100! \cdot 99! (99!)^2; \text{ в) } (100!)^2; \text{ г) } 200!.$$

$$3. 1) \operatorname{sgn} x, x \neq 0; 2) 2|x|; 3) \frac{\operatorname{sgn} \ln |x|}{x}, x \notin \{0, \pm 1\};$$

$$4) \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1, 0, |x| < 1; 5) \frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x|; 6) \pi[x] \sin 2\pi x;$$

$$7) 3x^2, x \geq 0, 2x, x < 0; 8) 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, 0, x = 0;$$

$$9) \frac{1}{1+x}, x \geq 0, 1, x < 0; 10) 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), x \in [a, b],$$

- 0, $x \notin [a, b]$; **11)** 0, $x = 0$; **12)** $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1, 1]$, $\frac{1}{2}$, $|x| > 1$;
- 13)** 0, $x = 0$; **14)** $2x(1-x^2)e^{-x^2}$, $|x| \leq 1$, 0, $|x| > 1$;
- 15)** $\frac{1}{2}\pi \cos \frac{1}{2}\pi x$, $x \in [-1, 1)$, 0, $|x| > 1$;
- 16)** $x^{-\frac{2}{3}}$, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1]$, $|x|$, $|x| > 1$;
- 17)** $-\operatorname{sgn} \sin x$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **18)** $\operatorname{sgn} \sin x$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 19)** $(x-2)^2 |x-3|^3 \operatorname{sgn}(x-1) + 2(x-2) |(x-1)(x-3)^3 + 3(x-2)^2(x-3) |(x-1)(x-3)|$, $x \neq 1$;
- 20)** $(5x^2-1)(x^2-1)[x]$, $x \in (R \setminus \mathbb{Z}) \cup \{\pm 1\}$;
- 21)** $e^x - 2^x \ln 2$, $x < 0$, $\frac{x}{1+x}$, $x > 0$;
- 22)** $\left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \cdot \operatorname{sgn} \cos \frac{\pi}{x}$, $x \notin \left\{ \frac{2}{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}$; **23)** $3x |x|$;
- 24)** $\pi[x] \cos \pi x$, $x \notin \mathbb{Z}$; **25)** $\operatorname{sgn}(x-\pi) \sin x + |\pi-x| \cos x$;
- 26)** $\sin^2 \pi x + \pi \{x\} \sin 2\pi x$.
- 4. 1), 2)** $x = 0$; **3)** $\emptyset$; **4)** $x = 0$; **5)** $x = 1$; **6)** $\emptyset$; **7)** $x = 1$;
- 8)–10)** $x = 0$; **11)** $\{\pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$; **12)** $\{\pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- 13), 14)** $x = 0$; **15)** $\emptyset$; **16)** $\{\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; **17)** $x = 1$;
- 18)** $x \in \{0, \pm 1\}$.
- 5. 1)** $\alpha = 2$, $\beta = -1$; **2)** $\alpha = 3$, $\beta = 2$; **3)** $\alpha = 2$, $\beta = -4$; **4)** $\alpha = \beta = 1$;
- 5)** $\alpha + \beta = 2$; **6)** $\beta = 0$; **7), 8)** $\alpha = \beta$; **9)** $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$;
- 10)** $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$; **11)** не існує; **12), 13)** $\alpha = \beta = 0$; **14)** $\alpha, \beta \in R$;
- 15)** $\alpha = \beta = 1$; **16)** $\alpha = \beta = -1$; **17)** $\alpha = 0$, $\beta \leq 0 \vee \alpha < 0$, $\beta \geq 0$;
- 18)** $\alpha\beta = 0$.

6. 1) а) $\beta > 0$; б), в) $\beta > 1$; 2) а) $\beta > 0$;
 б), в) $\alpha = \beta = 1 \vee \alpha = 0, \beta > 1$; 3) а) $\alpha > 0$; б) $\alpha > 1$; в) $\alpha > 2$;
 4) а) $\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta < 0 \vee \beta < \alpha < 0$;
 б) $\alpha > 1 \vee \alpha = 1, \beta \leq 0 \vee \beta + 1 < \alpha < 1$;
 в) $\alpha > 1 \vee \alpha = 1, \beta < 0 \vee \beta + 1 < \alpha < 1$; 5) а)–в) $\alpha\beta \leq 0$;
 6) а) $\alpha, \beta \in R$; б), в) $\alpha = \beta$.

7. 1) а), б) ні; 2) а), б) ні; в) 0; 3) а) 0; б), в) ні; г) 3; 4) а), б) ні;
 5) а), б) 1; в) ні; 6) а) ні; б) 5; в) -1; 7) а), б) ні; в), г) 1; 8) а), б) ні.

8. 1) $3x^2\phi'(x^3) + 3\psi^2(x)\psi'(x)$; 2) $e^{\psi(x)}(\phi'(e^x)e^x + \phi(e^x)\psi'(x))$;

3) $\sin 2x(\phi'(\sin^2 x) + 2x\psi'(\sin(x^2))\cos(x^2))$;

4) $(\phi(x))\psi(x)\left(\frac{\phi'(x)\psi(x)}{\phi^2(x)} + \psi'(x)\ln\phi(x)\right)$;

5) $\frac{\psi'(x)\phi(x)\ln\phi(x) - \phi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\phi(x)\psi(x)\ln^2\phi(x)}$;

6) $\frac{\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x)}{\phi^2(x) + \psi^2(x)}$; 7) $\frac{\phi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\phi(x)}{\phi(x)\psi(x)}$;

9. 1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\frac{1}{1+x^2}$; 4) $-\frac{1}{1+x^2}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$;

6) $\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$; 7) $\frac{1}{x}$; 8) $\frac{1}{x\ln 2}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 11) $\frac{1}{1-x^2}$.

10. У відповіді записується трійка $(f'_\Lambda(x_0), f'_\Pi(x_0), f'(x_0))$, якщо якогось значення не існує, то ставиться знак "-". 1) а) $(-1, 1, -)$;

б) $(1, 1, 1)$; 2) а) $(1, 0, -)$; б) $\left(\frac{1+2e}{(1+e)^2}, \frac{1+2e}{(1+e)^2}, \frac{1+2e}{(1+e)^2}\right)$;

3) а) $(-, -, -)$; б) $(1, 1, 1)$; в) $(1, 1, 1)$, г) $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\right)$;

- 4) а)** $(-\pi, 0, -)$; **б)** $(0, 0, 0)$; **в)** $(0, -\pi, -)$, **г)** $(\pi, 2\pi, -)$;
5) а) $(-1, 1, -)$; **б)** $(-2, 0, -)$; **г) а)** $(2, 0, -)$; **б)** $(0, 0, 0)$;
7) $\left(\frac{1}{2}, -, -\right)$; **8)** $(-, -, -)$; **9)** $(0, 0, 0)$; **10)** $(-, -, -)$;
11) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -)$; **12) а)** $(-1, -1, -1)$; **б)** $(0, 0, 0)$; **13) а)** $(1, 1, 1)$;
б) $(1, -1, -)$; **14) а)** $(0, 0, 0)$; **б)** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\right)$; **15) а)** $(1, 1, 1)$;
б) $(0, 0, 0)$; **16) а)** $(1, -1, -)$; **б)** $(1, 1, 1)$; **17) а)** $(-1, 1, -)$;
б) $(-, -, -)$; **в)** $(-1, 1, -)$, **г)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; **18) а)** $(0, 0, 0)$;
б) $(-, -, -)$; **19) а)** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\right)$; **б)** $(0, 0, 0)$.

- 11. 1)** $\frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$; **2)** $\arccos(\cos x)$; **3)** $\begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1, \\ 1-|x|, & |x| > 1; \end{cases}$
4) $[x] \mid \sin \pi x|, x \notin \mathbb{Z}$; **5)** $\begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ x^2, & |x| > 1; \end{cases}$
6) $\frac{2(1-\cos x)(1+2\sin x)}{(2+\sin x)^2}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; **7)** $\frac{1}{1+\cos^2 x}$;
8) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$; **9)** $\sqrt{1-\sin 2x}$; **10)** $\frac{2}{3\cos^2 x + 1}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
11) $\frac{4(1-\sin 2x + \cos 2x)}{(3-2\sin 2x + \cos 2x)^2}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; **12)** $\frac{[x]}{x}, x \geq 1$.

- 12. 1) а)** $-\frac{1}{x^2}dx, -dx$; **б)** $-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx, -\frac{1}{2}dx$; **в)** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx, dx$;
г) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx, dx$; **д)** $x^x \ln(ex)dx, dx$; **е)** $\frac{1-\ln x}{x^2}dx, dx$;

$$\text{e)} \ln(ex)dx, dx; \text{ж)} (x+1)e^x dx, 2edx; \text{з)} \frac{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx, dx;$$

$$\text{и)} -2 \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} \ln 2 dx, 0;$$

$$\text{и)} \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \frac{5dx}{48\sqrt{11}};$$

$$\text{и)} -\frac{\sin \ln x}{x} dx, 0; \text{2) а)} \frac{3t^2+1}{4t^3} dx, dx; \text{б)} \frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)} dx, dx;$$

$$\text{в)} \frac{3t^2-2t-1}{3t^2+2t-1} dx, dx; \text{г)} -\operatorname{tg} t dx, 0; \text{3) а)} \frac{4x^3+1}{5y^4+2y} dx, \frac{5}{7} dx;$$

$$\text{б)} \frac{\cos x}{\cos y} dx, dx; \text{в)} -\frac{\cos x}{\sin y} dx, -dx; \text{г)} \frac{x+1}{x(e^y+1)} dx, dx.$$

$$\text{13. 1) } uvdw + vwdu + wudv; \text{2) } \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2};$$

$$\text{3) } \frac{vwdu - uwdv - uvdw}{uv^2w^2}; \text{4) } \frac{vwdu + uwdv - uvdw}{w^2}; \text{5) } -\frac{udu + vdv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{6) } \frac{w(v^2 - u^2)du - 2uvw dv + u(u^2 + v^2)dw}{(u^2 + v^2)^2}; \text{7) } \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2};$$

$$\text{8) } \frac{2(vdu - u dv)}{\sin \frac{2u}{v} \cdot v^2}; \text{9) } e^{uv}(vdu + u dv); \text{10) } e^{u+v}(du + dv);$$

$$\text{11) } u^v \left(\frac{udu}{v} + \ln u dv \right); \text{12) } u^{v^w} \cdot u^v \left(\frac{du}{u} + \frac{dw}{v} dv + \ln u \ln v dw \right);$$

$$\text{13) } (uv)^w \left(\frac{wdu}{u} + \frac{wdv}{v} + \ln(uv) dw \right); \text{14) } v^{uw} \left(w \ln v du + \frac{uvw dv}{v} + u \ln v dw \right).$$

14. 1) так; 2) так; 3) ні; 1) так.

15. 1) $\frac{t^2+t+1}{2t+1}$, не існує, 1; 2) $\frac{1-3t^2}{1-2t}$, 1, 1, при $t=0$, 2, при $t=1$;

3) $\frac{6t+5}{6t-5}$, $\frac{1}{11}$, 11; 4) $\frac{(t-2)(3t-4)}{(t-1)(3t-5)}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{5}$; 5) $\frac{(t-2)(3t-4)}{(t-1)(3t-5)}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{5}$;

6) $2t-t^4$, 0, 0; 7) -1, -1, -1; 8) $-\frac{4}{3}\operatorname{ctg} t$, $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{4}{3}$;

9) $4tht$, $\frac{12}{5}$, -4; 10) $\operatorname{ctg} t$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$; 11) $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}t$, 1, 0;

12) $\frac{1+t^3}{3(1+t^2)}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$.

16. 1) $\frac{x+y}{x-y}$, 1; 2) $-\frac{1}{5y^4+3y^2+1}$, $-\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{1-a\cos y}$, $\frac{1}{1-a}$;

4) $-\frac{y^2}{xy+1}$, $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{2x-3x^2}{3y^2-2y}$, -1; 6) $-\frac{1}{2\ln y}$, $-\frac{1}{2}$; 7) $1+\frac{1}{y^2}$, 2;

8) $-\frac{1}{2\ln y}$, $-\frac{1}{2}$.

17. 1) 1,01; 2) 0,48; 3) 1,1; 4) 0,76; 5) 0,97; 6) 1,58; 7) 1,9; 8) -0,87;

9) -0,02; 10) 1016,8; 11) -0,03; 12) 3,99; 13) 2,00; 14) 37,07.

18. 1) а) так; б) ні, в) не завжди; 2) а) так; б) не завжди, в) не завжди;

3) а) так; б) не завжди, в) не завжди; 2) а) так; б) ні, в) не завжди.

19. 1) так; 2) а) ні; б) так, в)–г) ні; 3) а)–в) так, г) ні; д) так, е) ні;

4) а), б) ні; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) а), б) ні; в), г) так; 9) а) ні; б) так,

10) а) ні; б), в) так, г) ні.

21. 1) $\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$, $\frac{n(n+1)}{2}$, $x=1$;

$$\begin{aligned}
& 2) \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1, \\
& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad x = 1; \quad 3) \frac{n \sin(n + \frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi k, \\
& k \in Z, \quad \frac{n(n+1)}{2}, \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z; \\
& 4) \frac{\frac{1}{2} \sin nx - n \cos(n + \frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi k, \quad k \in Z, \quad 0, \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z; \\
& 5) \frac{nsh(n + \frac{1}{2})xsh \frac{x}{2} - sh^2 \frac{nx}{2}}{2sh^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq 0, \quad \frac{n(n+1)}{2}, \quad x = 0; \\
& 6) \frac{\sin nx(2n \sin x \cos nx - \cos x \sin nx)}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in Z, \quad \frac{n(n+1)}{2}, \\
& x = \pi k, \quad k \in Z.
\end{aligned}$$

Розділ 2

Похідні та диференціали вищих порядків

$$\begin{aligned}
& 22. 1) \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{2x^3 + 3x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{5\sqrt{2}}{4}; \quad 2) 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1, 2\operatorname{actg} x + \frac{2x}{1+x^2}, \\
& 4; \quad 3) \ln x + 1, \frac{1}{x}, -1; \quad 4) 2 \cos \ln x, -\frac{2 \sin \ln x}{x}, -2; \quad 5) \frac{1}{\cos^2 x}, \\
& \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, 2; \quad 6) \frac{1}{x+1}, -\frac{1}{(1+x)^2}, 2; \quad 7) -2xe^{-x^2}, (4x^2 - 2)e^{-x^2}, 0;
\end{aligned}$$

8) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}; \textbf{9)}$ $-\sin 2x, -2\cos 2x, 0;$
10) $-2x\sin(x^2), -2\sin(x^2)-4x^2\cos(x^2), 12\sqrt{\pi}; \textbf{11)}$ $2-\frac{1}{\sin^2 x},$
 $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}, -2; \textbf{12)}$ $0, 0, 0; \textbf{13)}$ $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, \frac{2(1-x)}{x(2-x)}, -2;$
14) $\frac{2\operatorname{sgn} x}{x^2+1}, x \neq 0 \quad \frac{-4|x|}{(x^2+1)^2}, x \neq 0 \quad 6 \quad -1; \textbf{15)}$ $x^x(\ln x+1),$
 $x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}, 3; \textbf{16)}$ $-\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}, \ln 2 \cdot \frac{\ln x+2}{x^2\ln^3 x}, -\frac{\ln^2 2+3\ln 2+3}{4\ln^3 2};$
17) $\cos x \ln(1+x) + \frac{\sin x}{1+x}, -\sin x \ln(1+x) + \frac{2\cos x}{1+x} - \frac{\sin x}{(1+x)^2}, -3;$
18) $e^x(\cos x - \sin x), -2e^x \sin x, -2;$
19) $\frac{2(x-1)^2(x+8)}{(x+5)^2}, \frac{(x-1)(x+8)}{(x+5)^3}, 1; \textbf{20)}$ $1 + \frac{1}{(x+1)^2}, -\frac{2}{(x+1)^3}, 6.$
23. 1) $\frac{3(1+t)}{2}, \frac{3}{4(1-t)}, \frac{3}{8}; \textbf{2)}$ $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t, -\frac{b}{a^2\sin^3 t}, -\frac{12b}{a^3}; \textbf{3)}$ $-\frac{b}{a},$
 $0, 0; \textbf{4)}$ $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}, -\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}, 0; \textbf{5)}$ $\operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos^3(t + \frac{1}{4}\pi)}, -4; \textbf{6)}$ $\frac{2\operatorname{tg} 2t}{\operatorname{tg} t}, -\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}, 240;$
7) $c\operatorname{th} t, -\frac{1}{t\operatorname{sh}^3 t}, \frac{256}{81} \cdot \frac{5\ln 2+1}{\ln^3 2};$
8) $\sin t, -\frac{\cos^3 t}{\sin t}, -\frac{1}{\sqrt{2}}; \textbf{9)}$ $(t+1)^2, \frac{2(t+1)^3}{te^t}, \frac{7}{4} \cdot e^4; \textbf{10)}$ $-2^{-\cos 2t},$
 $2^{3\sin^2 t-1}, -\frac{3}{2}; \textbf{11)}$ $\frac{t-1}{t+1}, \frac{4}{(t+1)^3}, -12; \textbf{12)}$ $\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2},$

$$\frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3}, -\frac{19}{324}; \mathbf{13)} -\frac{t^2+1}{2t}, \frac{(1-t^2)^3}{t^3}, -\frac{3}{32\sqrt{2}};$$

$$\mathbf{14)} 2(e^{-t}-e^t), 2(1+e^{2t}), -4; \mathbf{15)} -\operatorname{tg}^2 t, \frac{1}{2\cos^6 t}, -24;$$

$$\mathbf{16)} \frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}, \frac{\ln^2 t-2}{(\ln t+1)^3}, 16; \mathbf{17)} \frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{4t}{3(t^2+1)^3}, \frac{4}{9};$$

$$\mathbf{18)} \frac{t^4-2t}{2t^3-1}, \frac{2t^3(t^3+1)^2(t^3+2)}{3(2t^3-1)^3}, -\frac{352}{3}; \mathbf{19)} \frac{t^3-2}{t(t^2-1)}, \frac{2(t^3-3t^2+1)}{(1-t^2)^3},$$

$$24(3-4\sqrt{2}).$$

$$\mathbf{24. 1)} \frac{a}{y}, -\frac{a^2}{y^3}, \frac{3}{32a^2}; \mathbf{2)} \frac{y-2x}{3y^2-x},$$

$$\frac{2(y-2x)(3y^2-x)-6y(y-2x)^2-2(3y^2-x)^2}{(3y^2-x)^3}, -\frac{105}{4};$$

$$\mathbf{3)} \frac{b^2x}{a^2y}, \frac{b^2(a^2y^2-b^2x^2)}{a^4y^3}, \frac{3b\sqrt{2}}{a^3}; \mathbf{4)} \frac{x+y}{x-y}, \frac{2(y^2+x^2)}{(x+y)^3}, 4;$$

$$\mathbf{5)} 1-\frac{2}{x+y}, \frac{4(y+x+1)}{(x+y)^3}, -\frac{1}{4}; \mathbf{6)} \frac{2x^3y}{y^2+1}, 2x^2y \cdot \frac{3(y^2+1)+2x^4(1-y^4)}{(y^2+1)^3},$$

$$-5; \mathbf{7)} \frac{1}{1-\sin y}, \frac{\cos y}{(1-\sin y)^3}, 3; \mathbf{8)} \frac{3x^2-2xy^2}{3y^2+2x^2y},$$

$$\frac{54xy(y^3-x^3)-18(y^6+x^6)+16y^4x^4+72y^3x^3}{(3y^2+2x^2y)^3}, \frac{308976}{161051};$$

$$\mathbf{9)} \frac{4x^3+y}{4y^3-x}, \frac{12x^2(4y^3-x)^2+2(4x^3+y)(4y^3-x)-12y^2(4x^3+y)^2}{(4y^3-x)^3}, -12;$$

$$\mathbf{10)} \frac{x^2-ay}{ax-y^2}, 2 \cdot \frac{x(ax-y^2)^2-a(x^2-ay)(ax-y^2)+y(x^2-ay)^2}{(ax-y^2)^3},$$

$$-\frac{8}{a^2\sqrt[3]{2}}.$$

25. 1) $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-9)\alpha^{10}(\alpha x+\beta)^{\lambda-10}$; **2)** $\frac{\alpha^{11}10!}{(\alpha x+\beta)^{11}}$; **3)** $\alpha^{12}e^{\alpha x+\beta}$;
4) $\alpha^{13}\cos(\alpha x+\beta)$; **5)** $-\alpha^{14}\cos(\alpha x+\beta)$; **6)** $\frac{-\alpha^{15}15!}{(\alpha x+\beta)^{16}}$;
7) $\alpha^{16}sh(\alpha x+\beta)$; **8)** $\alpha^{17}sh(\alpha x+\beta)$; **9) a)** $108\cdot 6!x-216\cdot 5!$;
6) $108\cdot 6!$; **10)** $\frac{8!}{(1-x)^9}$; **11)** $2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$; **12)** $-\frac{6}{x^4}$;
13) $3^9((-3x^2-3x+29)\sin(3x+1)-10(2x+1)\cos(3x+1))$;
14) $\frac{2(12\ln x-25)}{x^5}$; **15)** $\frac{e^x}{x^{11}}(x^{10}-10x^9+9\cdot 10x^8-$
 $-8\cdot 9\cdot 10x^7+\dots+1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot 10)$; **16)** $2^8(3^{10}\sin 6x-2^{10}\sin 4x-\sin 2x)$
; **17)** $e^x(\sin x-\cos x)$; **18)** $e^x(\sin x-\cos x)$;
19) $\frac{1}{2}(5^7\sin 5x-3^7\sin 3x)$; **20)** $\frac{10!}{3}\cdot\left(\frac{4}{(x+2)^{11}}+\frac{2}{(x-1)^{11}}\right)$;
21) $\frac{21!!}{2^{12}(1-x)^{12}}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\frac{46}{\sqrt{1-x}}\right)$; **22)** $-7!\cdot\left(\frac{1}{(x-1)^8}+\frac{1}{(x+1)^8}-\frac{2}{(x-2)^8}\right)$.

26 (у всіх відповідях $k \in N$).

1) $\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}}$; **2)** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$;
3) $(-1)^n n!\cdot\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$;
4) $(-1)^n n!\cdot\left(\frac{1}{6x^{n+1}}-\frac{3}{2(x-2)^{n+1}}+\frac{4}{3(x-3)^{n+1}}\right)$;
5) $(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot\left(\frac{2}{(x-1)^n}-\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x+4)^n}\right)$;

- 6) $(-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{1}{(x+5)^n} + \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} - \frac{2}{(x+2)^n} \right);$
- 7) $-2^{n-1} \cos(2x + \frac{1}{2}\pi n);$ 8) $2^{n-1} \cos(2x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 9) $\frac{3}{4} \sin(2x + \frac{1}{2}\pi n) - \frac{1}{4} \cdot 3^n \sin(3x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 10) $\frac{3}{4} \cos(2x + \frac{1}{2}\pi n) + \frac{1}{4} \cdot 3^n \cos(3x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 11) $\frac{1}{2}(a+b)^n \sin((a+b)x + \frac{1}{2}\pi n) + \frac{1}{2}(b-a)^n \sin((b-a)x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 12) $\frac{1}{2}(a-b)^n \cos((a-b)x + \frac{1}{2}\pi n) - \frac{1}{2}(b+a)^n \sin((b+a)x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 13) $\frac{1}{2}(a-b)^n \cos((a-b)x + \frac{1}{2}\pi n) + \frac{1}{2}(b+a)^n \sin((b+a)x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 14) $4^{n-1} \cos(4x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 15) $\alpha^{n-2} \sin(\alpha x + \frac{1}{2}\pi n)(\alpha^2 x^2 - n^2 + n) - 2n\alpha^{n-1} \cos(\alpha x + \frac{1}{2}\pi n);$
- 16) $(-1)^n e^{-x}(x^2 + 2x + x - 2n(x+1) + n(n-1));$
- 17) $2^{\frac{1}{2}n} e^x \cos(x + \frac{1}{4}\pi n);$ 18) $2^{\frac{1}{2}n} e^x \sin(x + \frac{1}{4}\pi n);$
- 19) $(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}n} e^{\alpha x} \cos(\beta x + \gamma + n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha});$
- 20) $(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}n} e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma + n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha});$
- 21) $\frac{1}{2}((\alpha + \beta)^n f((\alpha + \beta)x) + (\alpha - \beta)^n f((\alpha - \beta)x)),$ де при $n = 2k$
 $f(x) = ch x$, при $n = 2k - 1$ $f(x) = sh x$;
- 22) $\frac{1}{2}((\alpha + \beta)^n f((\alpha + \beta)x) - (\alpha - \beta)^n f((\alpha - \beta)x)),$ де при $n = 2k$
 $f(x) = sh x$, при $n = 2k - 1$ $f(x) = ch x$;
- 23) $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}n} (e^{\alpha x} \cos(\beta x + n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha}) + e^{-\alpha x} \cos(\beta x - n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha}));$
- 24) $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}n} (e^{\alpha x} \sin(\beta x + n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha}) -$
 $- e^{-\alpha x} \sin(\beta x - n \cdot \arctg \frac{\beta}{\alpha}));$ 25) $\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}};$ 26) $n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$

27 (у всіх відповідях $k \in N$).

1) $\frac{1}{3} \cdot n! \cdot ((-1)^n + 2)$; **2)** $-n!$; **3)** $\frac{2}{3}n!$; **4)** 0 ; **5)** 0 при $n = 2k$, $(-1)^{k+1} \cdot (2k-2)!$ при $n = 2k-1$; **6)** 0 при $n = 2k$, $((2k-2)!)^2$ при $n = 2k-1$; **7)** 0 при $n = 2k-1$, $(-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k-1)! \cdot (1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1})$ при $n = 2k$; **8)** 0 при $n = 2k-1$, $2^{2k-1} \cdot 2 \cdot ((k-1)!)^2$ при $n = 2k$; **9)** 0 при $n = 2k-1$, $(-1)^{k-1} m^2 (m^2 - 2^2) \dots (m^2 - (2k-2)^2)$ при $n = 2k$;
10) 0 при $n = 2k$ та $n = 1$, $(-1)^k m (m^2 - 1^2) \dots (m^2 - (2k-1)^2)$ при $n = 2k+1$; **11)** 1 при $n = 1$, 3 при $n = 2$, 2 при $n = 3$, $2 \cdot (-1)^{n-3} (n-3)!$ при $n \geq 4$; **12)** 2 при $n = 1$, $(-1)^{n-1} (n-1)!$ при $n \geq 2$; **13)** $(-1)^{k+1} \cdot 2(2k-1)!$ при $n = 2k-1$, $(-1)^{k-1} \cdot (2k)!$ при $n = 2k$; **14)** $\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \cdot \left(\cos \frac{\pi(n+1)}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi(n+1)}{3} \right)$.

28. 1) n ; **2)** 3 ; **3)–6)** нескінченність; **7)** жодної; **8)** 0 , **9)** 3 ; **10)** 1 ; **11)** 2 ; **12)** жодної; **13)** 3 ; **14)** 4 ; **15)** 1 ; **16)** 2 ; **17)–19)** 1 .

29. 1) $(x^3 + 4x^2 + 3x + 2)e^x dx$, $(x^3 + 7x^2 + 11x + 5)e^x dx^2$, $16dx^3$;
2) $((2x+3)shx + (x^2 + 3x - 1)chx)dx$, $(2(2x+3)chx + (x^2 + 3x + 1)shx)dx^2$, $9dx^3$; **3)** $(chx \cdot \sin x + shx \cdot \cos x)dx$, $2chx \cdot \cos x dx^2$, 0 ; **4)** $(2 + \cos x)dx$, $-\sin x dx^2$, $-\cos 1 dx^3$;
5) $2sh(2x)dx$, $4ch(2x)dx^2$, 0 ; **6)** $(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x})dx$, $(-\cos x \cdot \ln x - \frac{2\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2})dx^2$, $3(\sin 1 - \cos 1)dx^3$;
7) $\frac{1 - \ln x}{x^2} dx$, $\frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2$, $11dx^3$; **8)** $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$, $\frac{2\sin x - 2x \cos x - x^2 \sin x}{x^3} dx^2$, $\frac{48(4 - \pi^2)}{\pi^4} dx^3$.

30. 1) d^2x ; 2) dx^2 ; 3) dx^2 ; 4) d^2x ; 5) $2xdx$; 6) d^2x^2 ; 7) dx^4 ;
8) d^2x^2 ; 9) $2xd^2x + 2dx^2$; 10) $4x^2dx^2$; 11) dx^4 .

31. 1) $dx d^2x^3 + 3xd^2x^2 d^3x$; 2) $2xdx^5 + 4x^2dx^3 d^2x$;
3) $2xdxd^3x^2 + 2x^2d^3xd^4x$; 4) $3x^2dx d^3x^3 + 3x^3d^3x^2 d^4x$;
5) $5x^4dx d^5x + x^5d^6x$; 6) $3d^2x^2 d^3x^3 + 2d^3xd^4xd^2x^3$;
7) $4dx^3 d^2xd^4x + dx^4 d^5x$; 8) $4d^3x^3 d^4xd^5x^5 + 5d^5x^4 d^6xd^3x^4$;
9) $2dxd^2xd^3x^4 + 4d^3x^3 d^4xdx^2$; 10) $4d^4x^3 d^5xd^2x^2 + 2d^2xd^3xd^4x^4$;
11) $d^2x^3 d^3x^3 + 2dxd^2xd^3x^4 + 3dxd^2x^2 d^3x^2 d^4x$.

32. 1) $nu^{n-1}du$, $n(n-1)u^{n-2}du^2 + nu^{n-1}d^2u$,
 $n(n-1)(n-2)u^{n-3}du^3 + 3n(n-1)u^{n-2}d^2udu + nu^{n-1}d^3u$; 2) $a^u \ln adu$,
 $a^u \ln^2 adu^2 + a^u \ln adud^2u$,
 $a^u \ln^3 adu^3 + 3a^u \ln^2 ad^2udu + a^u \ln ad^3u$; 3) $\cos udu$,
 $-\sin udu^2 + \cos ud^2u$, $-\cos udu^3 - 3\sin ud^2udu + \cos ud^3u$;
4) $-\sin udu$, $-\cos udu^2 - \sin ud^2u$, $\sin udu^3 - 3\cos ud^2udu -$
 $-\sin ud^3u$; 5) $\cos^{-2} udu$, $2\cos^{-3} u \sin udu^2 + \cos^{-2} ud^2u$,
 $2\cos^{-4} u(3 - \cos^2 u)du^3 + 6\sin u \cos^{-3} ud^2udu + \cos^{-2} ud^3u$;
6) $u^{-1}du$, $-u^{-2}du^2 + u^{-1}d^2u$, $2u^{-3}du^3 - 3u^{-2}d^2udu + u^{-1}d^3u$;
7) $e^{uv}(vdu + u dv)$, $e^{uv}((vdu + u dv)^2 + 2dudv + vd^2u + ud^2v)$,
 $e^{uv}((vdu + u dv)^3 + 3(vdu + u dv)(2dudv + vd^2u + ud^2v)) +$
 $+ e^{uv}(3d^2udv + 3dud^2v + vd^3u + ud^3v)$; 8) $vwdu + uwdv + uvdw$,
 $2wdudv + 2vdudw + 2udv dw + vwd^2u + uwd^2v + uv d^2w$,
 $6dudv dw + 3w(d^2udv + dud^2v) + 3v(d^2udw + dud^2w) +$
 $+ 3u(d^2vdw + dvd^2w) + vwd^3u + uwd^3v + uv d^3w$;

9) $v^{-1}du - uv^{-2}dv, v^{-1}d^2u - 2v^{-2}dudv + 2uv^{-3}dv^2 - uv^{-2}d^2v,$
 $v^{-1}d^3u - 3v^{-2}(d^2udv + dud^2v) + 6v^{-3}dv(dudv + ud^2v - uv^{-1}dv^2) -$
 $-uv^{-2}d^3v;$ 10) $u^v(vu^{-1}du - \ln u dv), u^v(vu^{-1}du + \ln u dv)^2 +$
 $+u^v(2u^{-1}dudv + \ln ud^2v - vu^{-2}d^2u), u^v(vu^{-1}du + \ln u dv)^3 +$
 $+3u^v(vu^{-1}du + \ln u dv)(2u^{-1}dudv + \ln ud^2v - vu^{-2}du^2 +$
 $+vu^{-1}d^2u) + u^v(2vu^{-3}du^3 + vu^{-1}d^3u + \ln ud^3v - 3u^{-2}(du^2dv -$
 $-udud^2v + d^2udv + vdud^2u));$ 11) $u^{m-1}v^{n-1}(mvdu + nudv),$
 $u^{m-2}v^{n-2}(m(m-1)v^2d^2u + 2mnvdu dv + n(n-1)u^2d^2v),$
 $u^{m-3}v^{n-3}(m(m-1)(m-2)v^3d^3u + n(n-1)(n-2)u^3d^3v) +$
 $+3u^{m-3}v^{n-3}mnv((m-1)vd^2udv + (n-1)dud^2v);$
12) $(v+w)du + (u+w)dv + (u+v)dw,$
 $2(dudv + dudw + dv dw) + (v+w)d^2u + (u+w)d^2v + (u+v)d^2w,$
 $3((dv + dw)d^2u + (du + dw)d^2v + (du + dv)d^2w) +$
 $+(v+w)d^3u + (u+w)d^3v + (u+v)d^3w.$

РОЗДІЛ 3

Теоремаи про середнє

34. 1) ні; 2) так, $\xi=0$; 3) ні, $\xi=0$; 4) а)-в) ні; 5) а) ні; 6), в) так, $\xi=0$.

37. 1) так; 2) ні; 3) так; 4) а) ні; 6) так; 5) а)-в) ні; г)-е) так; є) ні;
ж) так; 6) ні; 7) а) так; 6) ні; в) так; 8) а)-в) ні; 9) а)-г) ні.

Розділ 4

Формула Тейлора, правила Лопітала

38. 1) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$; 2) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$;
- 3) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$; 4) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$;
- 5) $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} +$
 $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4}{24} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)x^5}{120} + o(x^5)$;
- 6) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$; 7) $1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2} + \frac{x^3 \ln^3 a}{6} +$
 $+\frac{x^4 \ln^4 a}{24} + \frac{x^5 \ln^5 a}{120} + o(x^5)$; 8) $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$;
- 9) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$; 10) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$;
- 11) $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$; 12) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$;
- 13) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$; 14) $\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$;
- 15) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + o(x^5)$;
- 16) $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \frac{22x^5}{729} + o(x^5)$;
- 17) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$; 18) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$;
- 19) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$;
- 20) $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^5)$; 21) $1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^5)$.

$$39. \textbf{1)} 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4); \textbf{2)} } 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{720} + o(x^4);$$

$$\textbf{3)} } \frac{x^2}{6} + x^3 + \frac{119x^4}{72} + o(x^4); \textbf{4)} } x - \frac{x^7}{18} + \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13});$$

$$\textbf{5)} } -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6); \textbf{6)} } -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + o(x^4);$$

$$\textbf{7)} } 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{8} + o(x^6); \textbf{8)} } x - x^2 + 2x^3 + o(x^3);$$

$$\textbf{9)} } 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{4} + o(x^3); \textbf{10)} } 1 - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4);$$

$$\textbf{11)} } 1 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + o(x^6); \textbf{12)} } \frac{3x^4}{2} + \frac{11x^4}{24} + o(x^4);$$

$$\textbf{13)} } -\frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4); \textbf{14)} } -\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{12} + o(x^8);$$

$$\textbf{15)} } -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} - \frac{11x^3}{48} + o(x^3); \textbf{16)} } -x^2 - x^4 + o(x^6);$$

$$\textbf{17)} } 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7).$$

$$40. \textbf{1)} } 1 + 2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} - \frac{x^5}{15} + o(x^5); \textbf{2), 3)} } x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5);$$

$$\textbf{4)} } 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \frac{3x^5}{4} + o(x^5); \textbf{5)} } -x - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{17x^5}{30} + o(x^5);$$

$$\textbf{6)} } 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5); \textbf{7)} } x + \frac{x^3}{2} + \frac{37x^5}{120} + o(x^5);$$

$$\textbf{8)} } x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{3} + \frac{2x^5}{3} + o(x^5); \textbf{9)} } -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^5);$$

$$\textbf{10)} } 1 - x^2 + o(x^5); \textbf{11)} } \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + o(x^5);$$

$$\begin{aligned}
& \textbf{12)} 1 - \frac{3x^2}{4} + \frac{5x^4}{32} + \frac{x^5}{2} + o(x^5); \textbf{13)} } 1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5); \\
& \textbf{14)} } -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5); \textbf{15)} } \frac{x^3}{3} + \frac{11x^5}{24} + o(x^5); \\
& \textbf{16)} } \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{90} + o(x^5); \textbf{17)} } 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{30} + o(x^5); \\
& \textbf{18)} } 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5); \textbf{19)} } x + \frac{x^3}{6} - \frac{7x^5}{120} + o(x^5); \\
& \textbf{20)} } x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)\sqrt{2}; \textbf{21)} } x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{7x^5}{15} + o(x^5); \\
& \textbf{22)} } 1 + \frac{x^5}{24} + o(x^5); \textbf{23)} } 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5); \\
& \textbf{24)} } 1 + x^2 - \frac{3x^3}{2} + 2x^4 - \frac{17x^5}{12} + o(x^5); \\
& \textbf{25)} } 1 - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{6} - \frac{5x^5}{12} + o(x^5); \textbf{26)} } 1 + \frac{x^5}{4} + o(x^5); \\
& \textbf{27)} } x + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} + o(x^5); \textbf{28)} } 1 + 2x^2 - \frac{3x^3}{2} + \frac{5x^4}{3} - 4x^5 + o(x^5); \\
& \textbf{29)} } 1 + x^3 - \frac{5x^5}{12} + o(x^5); \textbf{30)} } 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o(x^5); \textbf{31)} } 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^5); \\
& \textbf{32)} } 1 - x^3 - \frac{4x^5}{3} + o(x^5); \textbf{33)} } 1 - x^4 + o(x^5); \\
& \textbf{34)} } 1 + x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{13x^5}{60} + o(x^5).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textbf{41. 1)} } \sin 1 - \frac{\cos 1}{2}x^2 + \frac{\cos 1 - 3\sin 1}{24}x^4 + o(x^5); \\
& \textbf{2)} } \cos 1 + \frac{\sin 1}{2}x^2 - \frac{3\cos 1 + \sin 1}{24}x^4 + o(x^5); \\
& \textbf{3)} } e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5); \textbf{4)} } \ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^5);
\end{aligned}$$

- 5) $\sin 1 + \cos 1 \cdot x - \frac{\cos 1 - \sin 1}{2} x^2 - \frac{\sin 1}{2} x^3 - \frac{5 \cos 1 + 6 \sin 1}{24} x^4 + o(x^5)$;
- 6) $\cos 1 + \sin 1 \cdot x - \frac{\cos 1 + \sin 1}{2} x^2 - \frac{\cos 1}{2} x^3 + \frac{5 \sin 1 - 6 \cos 1}{24} x^4 + o(x^5)$;
- 7) $\cos 2 + 2 \sin 2 \cdot x - 2(\cos 2 + \sin 2)x^2 + \frac{12 \cos 2 + 2 \sin 2}{3} x^3 -$
 $-\frac{16 \cos 2 - 6 \sin 2}{3} x^4 + o(x^4)$; 8) $e + ex + ex^2 + \frac{5e}{6} x^3 + \frac{5e}{8} x^4 + o(x^4)$;
- 9) $\ln 2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2 + o(x^3)$; 10) $e + \frac{e}{2} x^2 + \frac{e}{6} x^4 + o(x^5)$;
- 11) $sh 1 - \frac{ch 1}{2} x^2 + \frac{ch 1 + 3sh 1}{24} x^4 + o(x^5)$;
- 12) $ch 1 - \frac{sh 1}{2} x^2 + \frac{3ch 1 + sh 1}{24} x^4 + o(x^5)$; 13) $\ln 2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^5)$;
- 14) $\sin 1 + \frac{\cos 1}{2} x^2 + \frac{\cos 1 - 3 \sin 1}{24} x^4 + o(x^5)$;
- 15) $\ln 2 + x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{32} x^4 + \frac{7}{120} x^5 + o(x^3)$;
- 16) $\sin 1 - \frac{\cos 1}{6} x^2 + \frac{3 \cos 1 - 5 \sin 1}{360} x^4 + o(x^5)$;
- 17) $\sin \ln 2 - \frac{\cos \ln 2}{6} x + \frac{\cos \ln 2 + \sin \ln 2}{8} x^2 - \frac{\cos \ln 2 - \sin \ln 2}{16} x^3 + o(x^3)$;
- 18) $1 + \ln 2 \cdot x + \frac{\ln^2 2 + 1}{2} x^2 + \frac{4 \ln^3 2 + 8 \ln 2 - 3}{24} x^3 + o(x^3)$;
- 19) $\cos \sin 2 + \frac{1}{2} \sin \sin 2 \cdot \cos 2 \cdot x^2 + o(x^3)$;
- 20) $\ln \ln 5 - \frac{x^2}{5 \ln 5} - \frac{(\ln 5 + 1)x^4}{50 \ln^2 5} + o(x^5)$;
- 21) $\cos \ln 2 - \frac{1}{2} \sin \ln 2 \cdot x - \frac{1}{8(\cos \ln 2 - \sin \ln 2)x^2} +$
 $+\frac{1}{48}(3 \cos \ln 2 - \sin \ln 2)x^3 + o(x^3)$;
- 22) $\sin e + \frac{e \cos e}{6} \cdot x^2 + \frac{e(12 \cos e - 5 e \sin e)}{360} \cdot x^4 + o(x^5)$.

42. 1) $\frac{3}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{1111x^4}{360} + o(x^4)$; 2) $-\frac{1}{2} - \frac{x^4}{60} + o(x^5)$;
 3) $\frac{x}{2} + \frac{25x^3}{24} + o(x^4)$; 4) $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} + o(x^4)$; 5) $x^5 + o(x^5)$;
 6) $\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{3} + \frac{89x^4}{120} + \frac{23x^5}{20} + o(x^5)$; 7) $\frac{x^3}{6} + \frac{41x^5}{90} + o(x^5)$;
 8) $\frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{24} + o(x^5)$; 9) $\frac{1}{2} - \frac{21x^2}{32} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$;
 10) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{14x^3}{24} + \frac{17x^4}{24} + o(x^4)$;
 11) $x - \frac{x^2}{3} + \frac{4x^3}{9} + \frac{22x^4}{27} + o(x^4)$; 12) $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^5)$.
 43. 1) а), 6) $1 + o(x^2)$; 2) а), 6) $1 + o(1)$; 3) $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$;
 4), 5) $1 + o(x^2)$; 6) $1 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^{10})$; 7) а) $x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,
 6) $x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$; 8) а) $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$,
 6) $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + o(x^6)$; 9) $o(x^{15})$; 10) $o(x^{30})$;
 11) а), 6) $o(x^3)$; 12) а), 6) $1 + o(x^2)$; 13) а) $\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,
 6) $\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$; 14) $o(x^2)$; 15), 16) $o(x)$; 17) $x^2 + o(x^5)$;
 18) $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)$; 19) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$;
 20) $x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + o(x^6)$; 21) $1 + o(1)$; 22) $o(x^2)$; 23) $o(x)$.
 44. 1) 4; 2) 2; 3)-5) нескінченність; 6) жодної; 7)-9) 2; 10) 1.

45. 1) $\frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, якщо $y(0) = 0$,
 $-2 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, якщо $y(0) = -2$;
 2) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{243}x^3 + o(x^3)$; 3) $4x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)$,
 якщо $y(0) = 0$, $3 - 6x^2 - 8x^3 + o(x^3)$, якщо $y(0) = 3$;
 4) $x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$; 5) $2x + o(x^2)$ при $t = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,
 $-2x + o(x^2)$ при $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$;
 7) $1 - \frac{1}{3}x - \frac{26}{81}x^3 + o(x^3)$; 8) $1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)$, якщо $y(0) = 1$,
 $-1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)$, якщо $y(0) = -1$; 9) $x + o(x^5)$;
 10) $-1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$; 11) $1 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{125}x^3 + o(x^3)$;
 12) $1 + x - x^2 + x^3 + o(x^4)$.

46. 1) а) 1, б) 0; 2) а) -2, б) 0; 3) а), б) 0; 4) а) 20, б) 0;
 5) а) $3\sin 1 - 2\cos 1$, б) 0; 6) а) $\frac{4}{3}e$, б) 0; 7) а) $-\frac{3}{2}$, б) $-\frac{24}{5}$;
 8) а) 0, б) 60; 9) а) $\frac{1}{20}$, б) 0; 10) а) $\frac{6}{8!}$, б) $-\frac{24}{10!}$.

47. 1) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$;
 2) $(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$;
 3) $1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$;
 4) $(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$;
 5) $2 - (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + o((x-2)^3)$;
 6) $(x-1) - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$;

- 7) $2e^{-4} - 7e^{-4}(x-1) + 10e^{-4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$;
- 8) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{16}(x-2)^2 - \frac{1}{48}(x-2)^3 + \frac{1}{128}(x-2)^4 + o((x-2)^4)$.
48. 1) $n=6, A=\frac{4}{15}, B=\frac{3}{5}$; 2) $n=6, A=\frac{37}{60}, B=\frac{9}{20}$;
- 3) $n=3, A=\frac{1}{6}, B=\frac{2}{3}$; 4) $\alpha \neq -1, n=2, A=\frac{3-\alpha}{2}, B=\frac{1-\alpha}{2}$
та $\alpha = -1, n=3, A=2, B=1$; 5) $n=3, A=\frac{2}{5}, B=\frac{1}{15}$;
- 6) $n=3, A=\frac{1}{4}, B=\frac{5}{12}, C=-\frac{3}{4}$; 7) $n=3, A=\frac{2}{3}, B=-\frac{1}{6}, C=-\frac{1}{3}$;
- 8) $n=3, A=C=\frac{1}{2}, B=1$.

49. 1) 132, 575, $n=2$; 2) 2,0001627, $n=1$; 3) 2,23, $n=2$;
- 4) 035, $n=2$; 5) 0,01745241, $n=4$; 6) 1,098, $n=2$; 7) 0,0524, $n=2$; 8) 0,8329, $n=2$.

50. 1) а) 10^{-2} , б) 10^{-4} ; 2) а) 10^{-3} , б) 10^{-5} ; 3) 10^{-3} ; 4) 10^{-7} ;
- 5) а) 10^{-4} , б) 10^{-10} ; 6) а) 10^{-5} , б) 10^{-8} ; 7) а) 10^{-1} , б) 10^{-2} ;
- 8) 10^{-6} ; 9) 10^{-1} .

52. 1) 0, не можна; 2) 1, не можна; 3) $+\infty$, не можна;
- 4) 0, не можна; 5) а) границя не існує, б) 0, не можна; 6) а) $+\infty$, не можна, б) 0, можна; 7) 0, не можна; 8) 0, не можна.

53. 1) а) 0, б) $+\infty$; 2) а) 0, б) $-\infty$; 3) а) $+\infty$, б), в) 0; 4) а), б) 0;
- 5) а), б) 0, в) не існує; 6) а) 0, б) не існує; 7) а), б) 0; 8) а), б) 0, в) $-\infty$; 9) а), б) 0.

54. 1) $-\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5), 6) $\frac{1}{3}$; 7) 0; 8) $\frac{19}{90}$; 7) 0;

8) $\frac{19}{90}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) 2; 11), 12) $\frac{1}{2}$; 13) 1; 14) $\frac{e}{10}$; 15) $\frac{1}{6}$; 16) $\frac{1}{2}$;
 17) $\frac{\ln a}{6}$; 18) $\frac{1}{16}$; 17) $\frac{\ln a}{6}$; 18) $\frac{1}{16}$; 19) $\frac{2}{3}$;
 20) $a^{a^a+a-1}(a \ln a - 1 - a \ln^2 a)$; 21), 22) $\frac{1}{2}$; 23) $\frac{1}{a}$; 24) $-\frac{1}{2}\infty$;
 25) $\frac{11}{4}$; 26) $-\frac{1}{2}$; 27) $-\frac{23}{180}$; 28) 2; 29) $-\frac{7}{60}$; 30) $\frac{1}{24}$; 31) $0 - \frac{1}{3}$;
 32) $-\frac{1}{38}$; 33) $\frac{2}{3}$; 34) $\frac{3}{2}$; 35) не ищуте; 36) $-\frac{11}{96}$; 37) $-\frac{1}{8}$; 38) $\frac{2}{3}$;
 39) $-\frac{5}{61}$; 40) $\frac{8}{3}$; 41) $\frac{3}{20}$; 42) $\frac{3}{50}$; 43) 0; 44) $\frac{5}{3}$; 45) 1; 46) 1;
 47) 2; 48) $-\frac{7}{4}$; 49) $\frac{n+2}{6}$; 50) $\frac{n+1}{2}$; 51) 0; 52), 53) 1; 54) $\frac{\pi}{2}$;
 55) -2; 56) 0; 57) $2e^2$; 58) $\frac{1}{18}$; 59) не ищуте; 60) 0; 61) $\frac{9}{2}$;
 62) 2; 63) $-\frac{11}{12 \cos^2 1}$; 64) $-\frac{1}{6}$; 65) $\frac{7}{45}$; 66) 0; 67) $-\frac{47}{6}$; 68) 2;
 69) $\frac{1}{18}$; 70) -8; 71) -2; 72) $\frac{4}{\pi^2 + 8}$; 73) $a^{a+1} \ln a (\ln a - 1)$; 74) 1;
 75) $\frac{1}{2}$; 76) $\frac{3\pi}{2}$.

55. 1) $e^{-\frac{1}{6}}$; 2) $e^{\frac{1}{3}}$; 3) $e^{-\frac{1}{2}}$; 4) $e^{\frac{1}{2}}$; 5) $e^{\frac{5}{6}}$; 6) $e^{\frac{5}{24}}$; 7), 8) 1; 9),
 10) 0; 11) 1; 12) -1; 13)-15) 1; 16) $e^{\frac{1}{3}}$; 17) $e^{\frac{1}{6}}$; 18) $e^{\frac{1}{3}}$; 19) $e^{-\frac{2}{\pi}}$;
 20) e ; 21) 1; 22) $e^{\frac{7}{12}}$; 23) e ; 24) 0; 25) e^{-3} ; 26) $e^{-\frac{5}{12}}$; 27) $e^{-\frac{1}{15}}$;
 28) e^2 ; 29) 1.

РОЗДІЛ 5

Застосування похідної для дослідження властивостей функцій

57. 1) зростає при $x \in [0, 100)$, спадає при $x \in (100, +\infty)$;
- 2) зростає при $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$, спадає при $x \in (0, \frac{2}{\ln 2})$;
- 3) зростає при $x \in (0, 4)$, спадає при $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$;
- 4) зростає при $x \in (-\infty, 5)$, спадає при $x \in (5, +\infty)$;
- 5) зростає при $x \in (-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, спадає при $x \in (\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) зростає на X ; 7) а) зростає на X ; б) зростає на X ; 8) зростає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, спадає при $x \in (-1, 1)$; 9) зростає при $x \in (e, +\infty)$, спадає при $x \in (0, e)$; 10) зростає при $x \in (-\infty, 0)$, спадає при $x \in (0, +\infty)$;
- 11) зростає при $x \in [0, \frac{3}{4})$, спадає при $x \in (\frac{3}{4}, 1]$; 12) зростає при $x \in (0, \frac{1}{2})$, спадає при $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$; 13) спадає на X ; 14) зростає при $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, спадає при $x \in (-3, -1)$; 15) зростає при $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\frac{2}{3+4n}, \frac{2}{1+4n})$, спадає при $x \in (2, +\infty) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\frac{2}{5+4n}, \frac{2}{3+4n})$; 16) зростає на X ;
- 17) спадає на X ; 18, 19) зростає на X ;
- 20) зростає при $x \in (0, +\infty)$, спадає при $x \in (-1, 0)$;
- 21) зростає при $x \in \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{\pi}{12} + 2\pi n}, e^{\frac{5\pi}{12} + 2\pi n} \right) \cup \{0\}$,

спадає при $x \in \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{5\pi}{12} + 2\pi n}, e^{\frac{\pi}{12} + 2\pi(n+1)} \right)$;

22), 23) зростає на X ; **24)** спадає на X .

58. 1) зростає при $t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, спадає при $t \in (0, 1)$;

2) зростає при $t \in (e^{-1}, e)$, спадає при $t \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$;

3) спадає при $t \in [0, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}]$; **4)** зростає при $t \in [0, \pi)$,

спадає при $t \in (\pi, 2\pi]$.

59. 1) $f(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}}$ – мінімум; **2)** $f(0) = 1$ – максимум;

3) $f(0) = 0$ – мінімум, $f(\frac{4}{7}) = \frac{6912}{823543}$ – максимум; **4)** $f(1) = e^{-2}$

– мінімум, $f(-1) = e^2$ – максимум; **5)** $f(4) = \frac{4}{3}$ – максимум;

6) $f(1) = 0$ – мінімум, $f(e^2) = 4e^{-2}$ – максимум; **7)** $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ –

мінімум; **8)** $f(\pi n) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – мінімум, $f(\frac{1}{2}\pi + \pi n) = \frac{1}{2}\pi + \pi n$

, $n \in \mathbb{Z}$ – максимум, $f(\frac{1}{3}\pi + \pi n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ –

максимум, $f(-\frac{1}{6}\pi + \pi n) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – максимум;

9) $f(-\frac{7}{5}) = -\frac{1}{24}$ – мінімум; **10)** $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ – максимум;

11) $f(-\frac{1}{4}\pi + 2\pi n) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ – мінімум,

$f(\frac{3}{4}\pi + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ – максимум; **12)** $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ –

мінімум; **13)** $f(1) = -\frac{2}{3}$ – мінімум, $f(0) = 0$ – максимум;

- 14)** $f(\log_3 e) = \frac{1}{e \ln 3}$ – максимум; **15)** $f(1) = \frac{1}{8}\pi$ – мінімум,
 $f(0) = \frac{1}{2}$ – максимум; **16)** $f(e) = 2e - \frac{1}{2}e^2$ – мінімум,
 $f(1) = \frac{5}{2}$ – максимум; **17)** $f\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}$ – мінімум,
 $f\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}}$ – максимум; **18)** $f(-3) = \frac{1}{\ln 3}$ –
 максимум; **19)** $f(0) = 0$ – мінімум; **20)** екстремумів немає;
21) $f(e) = e$ – мінімум; **22)** $f(3) = 6$ – мінімум, $f(-3) = -6$ –
 максимум; **23)** $f(-1) = -1$ – мінімум, $f(1) = 1$ – максимум;
24) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ – максимум; **25)** $f(-1 \pm \frac{\sqrt{122}}{2}) = -\frac{121}{4}$ – мінімум,
 $f(-1) = 900$ – максимум; **26)** $f(0) = a$ – мінімум при $a \leq 0$,
 максимум при $a > 0$; **27)** $f(0) = a$ – мінімум при $a < 0$,
 максимум при $a > 0$, екстремумів немає при $a = 0$; **28)** $f(q) = 0$
 – мінімум при $q \in Q$, $f(r) = 1$ – максимум при $r \in R \setminus Q$;
29) $f(0) = 0$ – мінімум; **30)** $f(0) = 0$ – мінімум, $f(r) = 1$ –
 мінімум при $r \in (R \setminus Q) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$, $f(r) = 1$ –
 максимум при $r \in (R \setminus Q) \cap ((-1, 1))$; **31)** $f(0) = 1$ – максимум;
32) $f(0) = a$ – мінімум при $a < 0$, максимум при $a > 1$,
 екстремумів немає при $a \in [0, 1]$; **33)** $f(0) = a$ – мінімум при
 $a < 0$, максимум при $a \geq 1$, екстремумів немає при $a \in [0, 1)$;
34) $f(0) = 0$ – мінімум, $f(1) = 0$ – мінімум,
 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$ – максимум;
35) $f(0) = 2$ – мінімум; **36)** $f(x) = 0$ – мінімум при
 $x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$, $f(2\pi n) = 1$, $n \in Z$ – максимум;
37) $f(0) = 0$ – мінімум, $f(1) = 1$ – максимум, $f(-1) = e^{-2}$ –

максимум; **38)** $f(\pm 1) = 0$ – мінімум, $f(0) = e^{-1}$ – максимум;
39) $f(0) = 0$ – мінімум; **40)** $f(-3) = 1$ – мінімум,
 $f(1) = 1$ – мінімум, $f(-1) = 5$ – максимум;
41) $f(0) = -1$ – мінімум, $f(-2) = 3$ – максимум,
 $f(1) = 0$ – максимум; **42)** $f(1) = -2$ – мінімум,
 $f(-1) = 2$ – максимум, $f(2) = 2$ – максимум;
43) $f(-1) = -1$ – мінімум, $f(1) = -1$ – мінімум, $f(3) = -1$ –
мінімум, $f(0) = 0$ – максимум, $f(2) = 0$ – максимум.

60. 1) $y\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ – мінімум при $t = 1$; **2)** екстремумів немає;

3) $y\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4}$ – мінімум при $t = \frac{1}{2}$; **4)** $y(0) = 0$ – мінімум

при $t = 0$, $y(2) = 3$ – максимум при $t = 1$, $y(0) = 7$ – максимум

при $t = -1$; **5)** $y(e^{-2}) = -e^2$ – максимум при $t = -2$; **6)** $y(0) = 0$ –

максимум при $t = 0$, $y\left(-\frac{9}{8}\right) = -\frac{27}{32}$ – максимум при $t = \frac{3}{4}$;

7) $y(0) = 0$ – мінімум при $t = 0$; **8)** $y(5) = -1$ – мінімум при $t = 1$,
 $y(-3) = 3$ – мінімум при $t = -1$; **9)** екстремумів немає;

10) $y(1) = 0$ – мінімум при $t = 1$; **11)** $y(0) = 1$ – максимум
при $t = 0$; **12)** $y(-2) = -2$ – максимум при $t = -1$,

$y\left(\frac{10}{3}\right) = 6$ – мінімум при $t = 3$; **13)** екстремумів немає;

14) $y(e) = \frac{1}{e}$ – максимум при $t = e$; **14)** $y(2) = 3$ – максимум
при $t = 1$.

61. 1) $y(0) = 0$ – мінімум, $y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{4}$ – максимум;

2) $y(1) = 1 \pm \sqrt{2}$ – мінімум, $y(-1) = -1 \pm \sqrt{2}$ – максимум;

3) $y(0) = -1$ – мінімум, $y\left(\frac{2}{\sqrt[3]{31}}\right) = -\frac{3}{\sqrt[3]{31}}$ – максимум;

4) $y(1) = -4$ – мінімум, $y(-1) = 4$ – максимум;

5) $y(-\sqrt[3]{2}) = -2$ – максимум.

62. 1) а) 0 – мінімум, 48 – максимум; б) 8 – мінімум, 28 – максимум; 2) а) 0 – мінімум, 7 – супремум;

б) 5 – мінімум, 9 – максимум; 3) а), б) 2 – мінімум, $\frac{17}{4}$ – максимум; 4) 1 – мінімум, 3 – максимум; 5) 0 – інфімум,

$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ – максимум; 6) 0 – інфімум, 1 – супремум;

7) а) $-\frac{1}{6}$ – мінімум, $\frac{1}{2}$ – максимум; б) 0 – інфімум,

$\frac{1}{2}$ – максимум; 8) -12 – мінімум, 2 – максимум;

9) а) -10 – мінімум, 2 – максимум; б) -26 – мінімум, 65 – максимум; 10) -1 – мінімум, $\frac{3}{5}$ – максимум;

11) $\frac{1}{3}$ – мінімум, 3 – максимум; 12) $-\frac{1}{4}\pi$ – інфімум,

$\frac{1}{4}\pi$ – максимум; 13) а) $\frac{4}{3}$ – мінімум, $\frac{3}{2}$ – максимум;

б) 0 – інфімум, $\frac{3}{2}$ – максимум; 14) 2 – мінімум,

$+\infty$ – супремум; 15) 2 – мінімум, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ – максимум;

16) $\frac{3}{4}$ – мінімум, 3 – максимум.

65. 1) а) ϕ – опукла (увігнута) при $\alpha > 0$ ($\alpha > 0$);

б) ϕ – увігнута (опукла) при $\alpha > 0$ ($\alpha > 0$);

2) а) ϕ – увігнута; б) ϕ – опукла; 3) а) ϕ – увігнута;

б) ϕ – опукла; 4) а) ϕ – опукла; б) ϕ – увігнута;

в), г) ϕ визначити неможливо; **5) а)** ϕ – увігнута;
б)-г) ϕ визначити неможливо.

66. 1) опукла; **2), 3)** визначити неможливо; **4)** опукла;
5) визначити неможливо; **6), 7)** увігнута; **8)** визначити неможливо.

67. 1) опукла при $x \in (-\infty, 0)$, увігнута при $x \in (0, +\infty)$;
 $(0, 0)$ – точка перегину; **2)** опукла при $x \in (-1, +\infty)$,
увігнута при $x \in (-\infty, -1)$; $(-1, 0)$ – точка перегину;

3) опукла при $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ та при $x \in (2, +\infty)$, увігнута
при $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$; $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{16})$, $(2, -33)$ – точки перегину; **4)** опукла
при $x \in (2\pi n - \pi, 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, увігнута при $x \in (2\pi n, 2\pi n + \pi)$,
 $n \in \mathbb{Z}$; $(\pi n, \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ – точки перегину; **5)** опукла
при $x \in (-1, 1)$, увігнута при $x \in (-\infty, -1)$ та при $x \in (1, +\infty)$;
 $(-1, \ln 2)$ та $(1, \ln 2)$ – точки перегину; **6)** опукла при $x \in (0, +\infty)$,

точок перегину немає; **7)** опукла при $x \in (e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, увігнута
при $x \in (0, e^{-\frac{3}{2}})$; $(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3})$ – точка перегину;

8) опукла при $x \in (0, +\infty)$, точок перегину немає; **9)** опукла
при $x \in (-1, 2 - \sqrt{3})$ та при $x \in (2 + \sqrt{3}, +\infty)$, увігнута при
 $x \in (-\infty, -1)$ та при $x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; $(-1, 0)$,
 $(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}))$ та $(2 + \sqrt{3}, \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3}))$ – точки перегину;

10), 11) опукла при $x \in \mathbb{R}$, точок перегину немає; **12)** увігнута
при $x \in (1, +\infty)$, точок перегину немає; **13)** опукла при
 $x \in (e^6, +\infty)$, увігнута при $x \in (0, e^6)$; $(e^6, 60e^{24})$ – точка
перегину; **14)** опукла при $x \in (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$, увігнута при $x \in (0, e^{\frac{3}{2}})$;

$(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ – точка перегину; **15)** опукла при $x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1}{2})$
та при $x \in (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$, увігнута при $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2})$ та при
 $x \in (\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$; $(-1, 0)$, $(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{8})$, $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{8})$
та $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ – точки перегину; **16)** опукла при $x \in R$, точок
перегину немає; **17)** опукла при $x \in (0, \sqrt[3]{2})$, увігнута при
 $x \in (-1, 0)$ та при $x \in (\sqrt[3]{2}, +\infty)$; $(0, 0)$ та $(\sqrt[3]{2}, \ln 3)$ – точки
перегину; **18)** опукла при $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, увігнута при $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$;
 $(\frac{1}{2}, e^{\arctg \frac{1}{2}})$ – точка перегину; **19)** опукла при $x \in (-\infty, 1)$
та при $x \in (3, +\infty)$, увігнута при $x \in (1, 3)$; $(1, 11)$, $(3, 27)$ –
точки перегину.

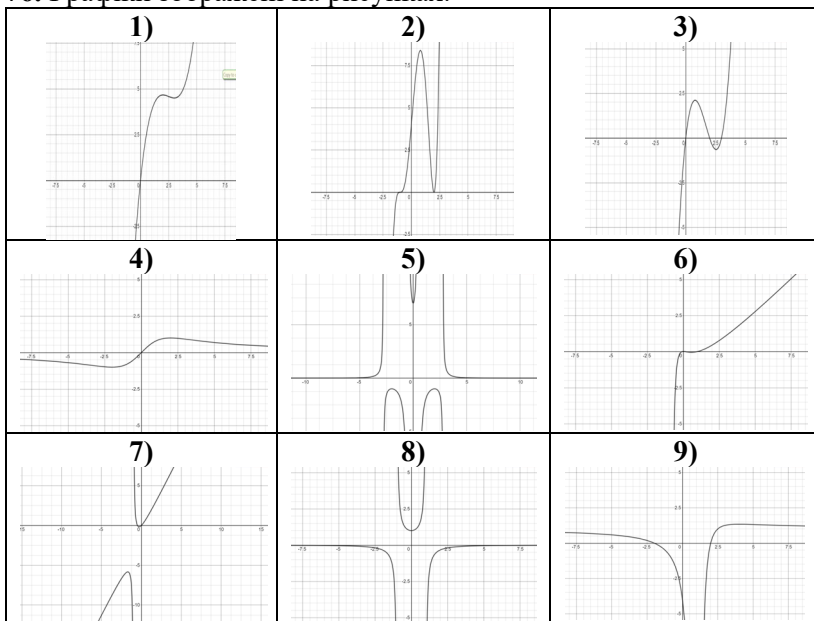
68. 1) увігнута при $t \in R$, точок перегину немає;
2) опукла при $t \in (-\infty, 0)$, увігнута при $t \in (0, +\infty)$;
 $(0, 0)$ – точка перегину при $t = 0$; **3)** опукла при $t \in (-\infty, -2)$,
увігнута при $t \in (-2, +\infty)$; $(-e^{-2}, -3e^{-2})$ – точка перегину
при $t = -2$; **4)** опукла при $t \in (0, +\infty)$, увігнута при $t \in (-\infty, 0)$;
 $(0, 0)$ – точка перегину при $t = 0$.

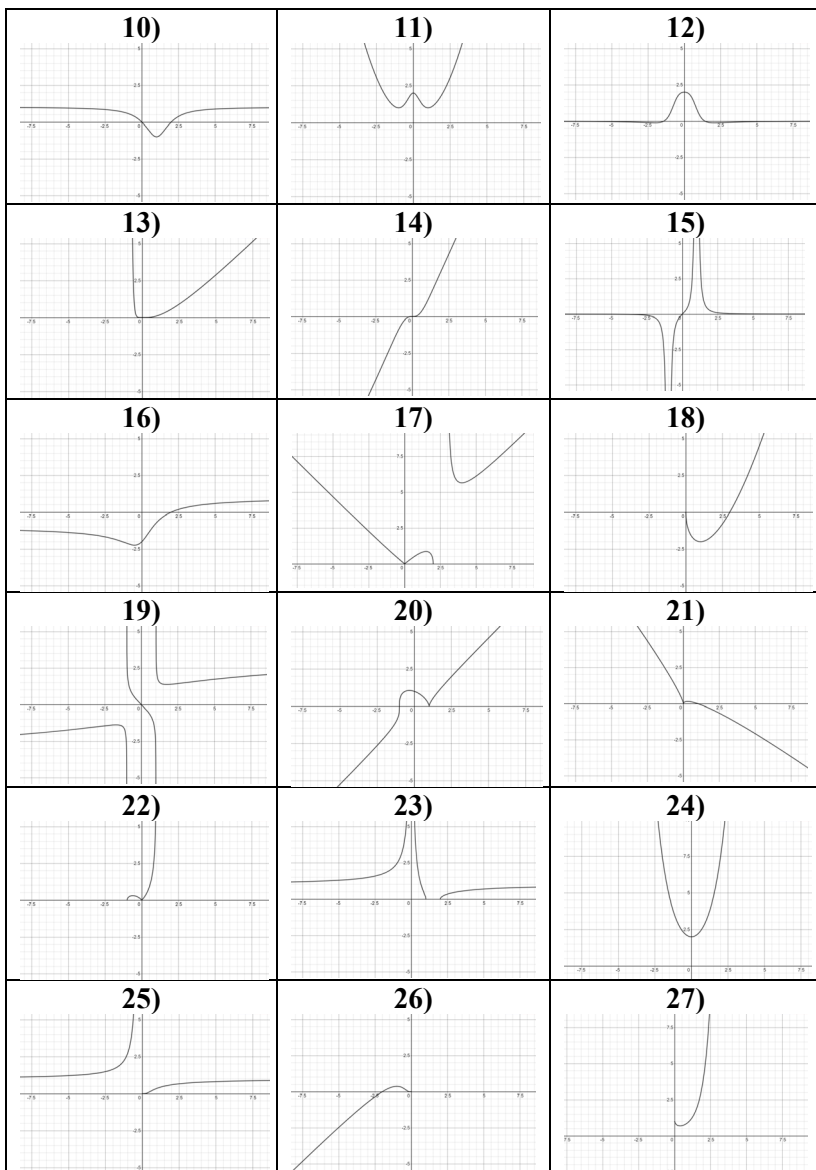
72. 1) а) так; **б)** ні; **2) а)** ні; **б)** так; **3) а)** так; **б), в)** ні; **4) а), б)** так;
в), г) ні; **д)** так; **5) а)** ні; **б)** так; **в)** ні; **г)** так; **б) а), б)** ні; **7) а)** так
(ні) при парному (непарному) n ; **б)** ні (так) при парному
(непарному) n ; **8) а)** ні; **б), в)** так; **9)** достатньо, але не
необхідно; **10), 11)** екстремумів і перегинів немає; **12)** достатньо,
але не необхідно; **13)** ні; **14) а)** так; **б)** ні; **15) а), б)** ні; **в)** так;
г) ні; **16)** так; **17) а)** так (ні); **б)** ні (ні).

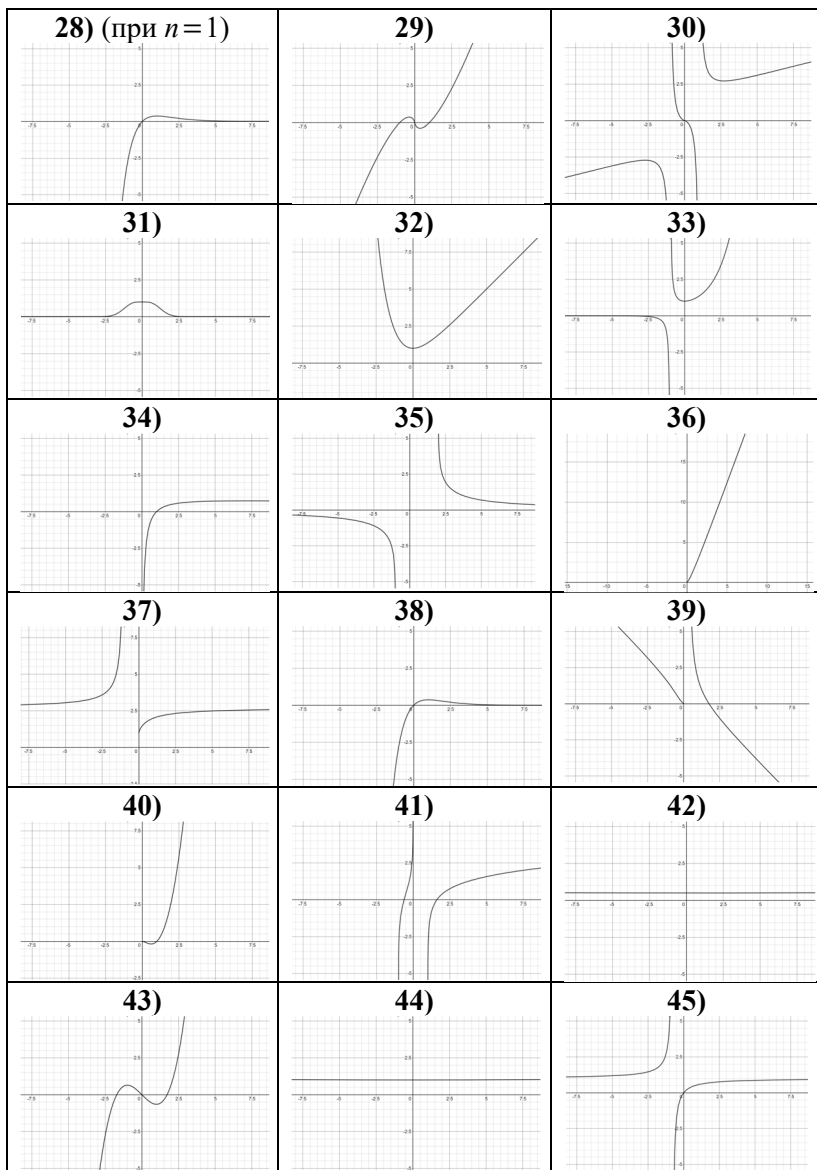
74. **1)** $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; **2)** $y = 3x - 3$; **3)** $y = 3x$; **4)** $x = 0$, $x = -1$,
 $y = x - \frac{1}{2}$; **5)** $x = 0$, $y = 0$; **6)** $y = x$; **7)** $x = -3$, $y = ex + \frac{3e}{2} - 1$;
8) $y = \pm \frac{\pi}{2}x - 1$; **9)** $x = \pm 1$, $y = \pm 3\pi x \pm 6$; **10)** $x = \pm 2$,
 $y = \pm \frac{7\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 9$.

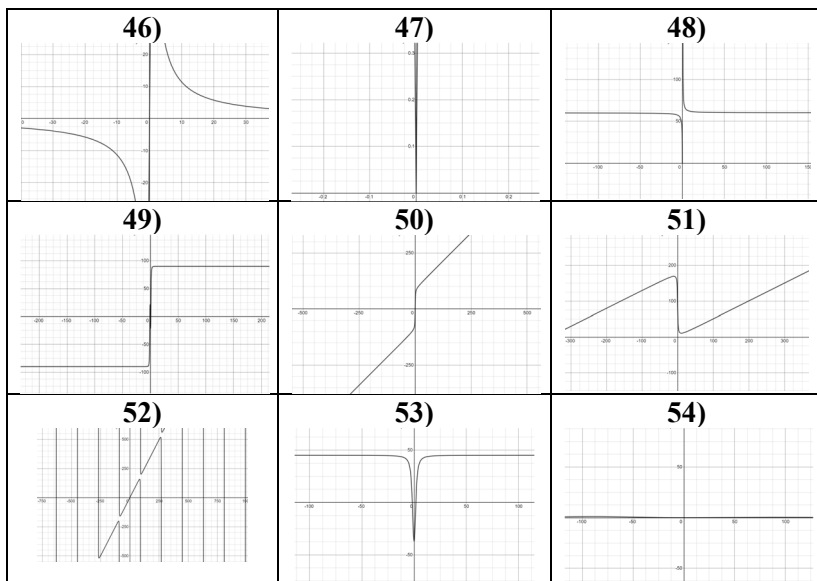
75. **1)** $y = x + 1 \pm \pi$; **2)** $x = 0$, $y = 0$; **3)** $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$;
4) $y = 0$, $y = 4x$; **5)** $y = \frac{1}{12}$, $y = -6x + \frac{2}{3}$; **6)** $x = \frac{1}{24}$, $x = \frac{1}{120}$,
 $y = 0$, $y = -\frac{1}{120}$, $y = 24x + \frac{19}{3}$, $y = x - \frac{11}{6}$.

76. Графіки зображені на рисунках.

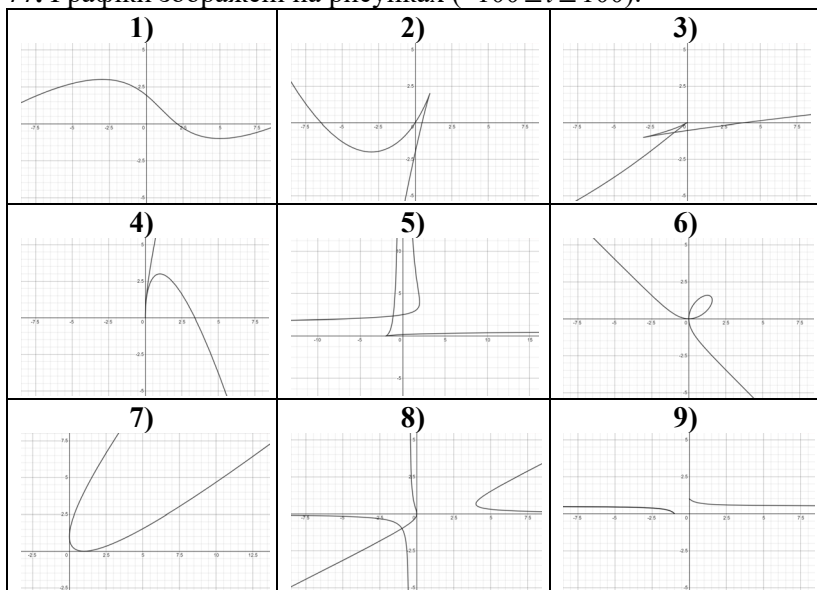


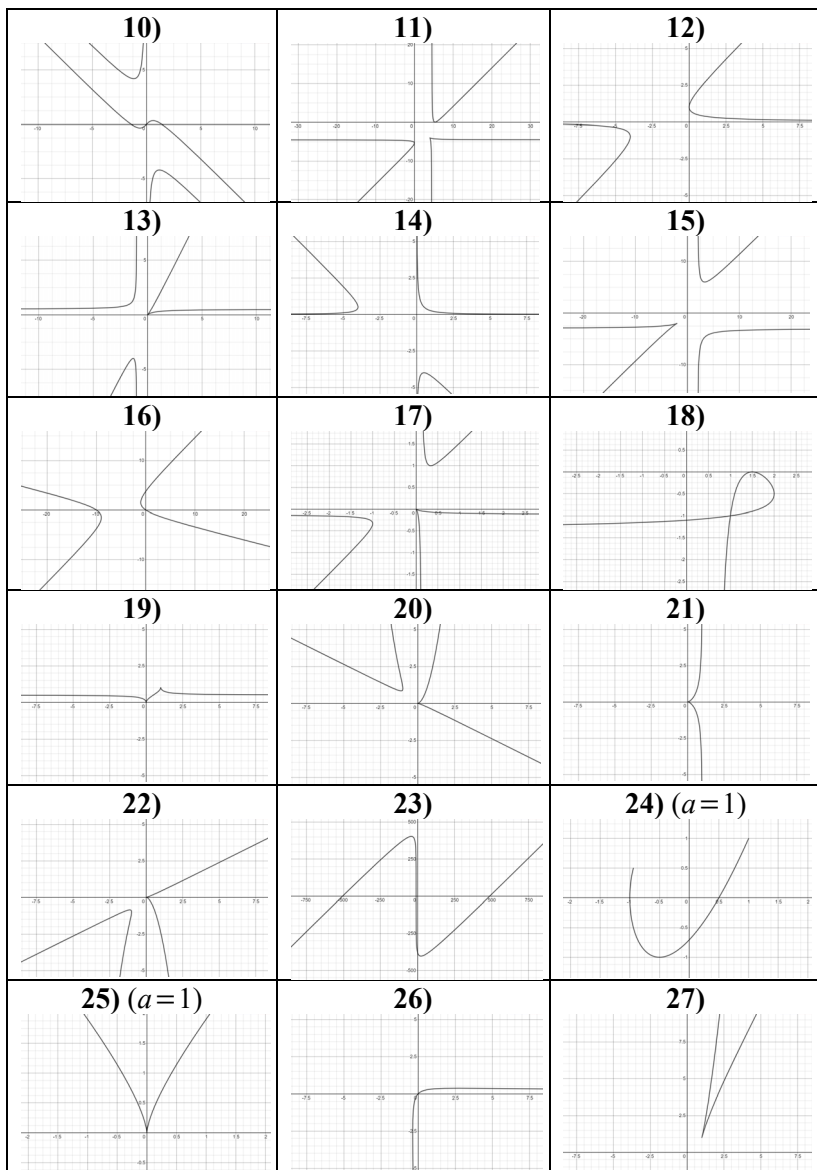


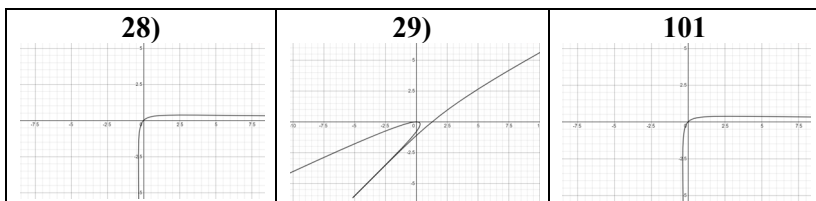




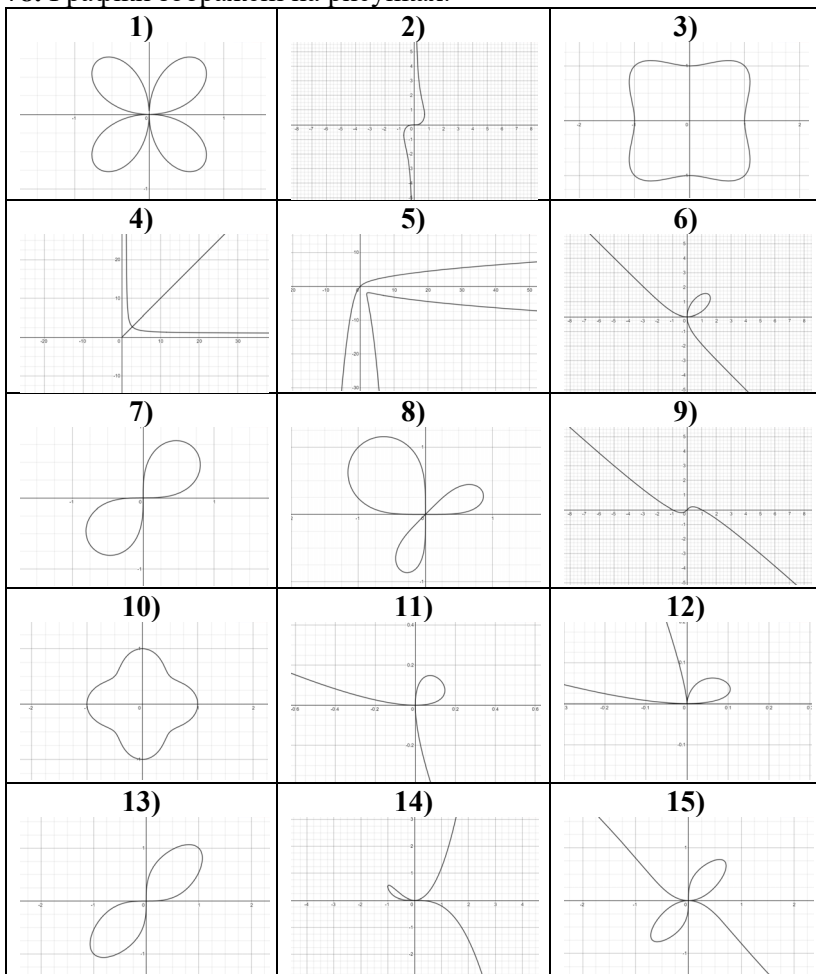
77. Графіки зображені на рисунках ($-100 \leq t \leq 100$).

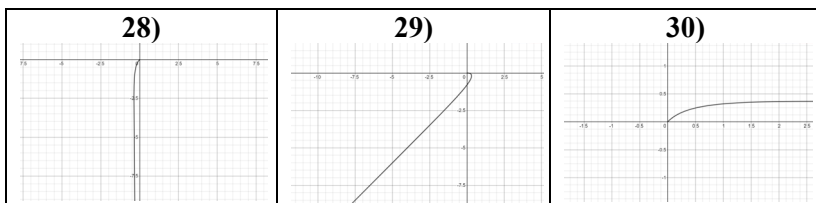




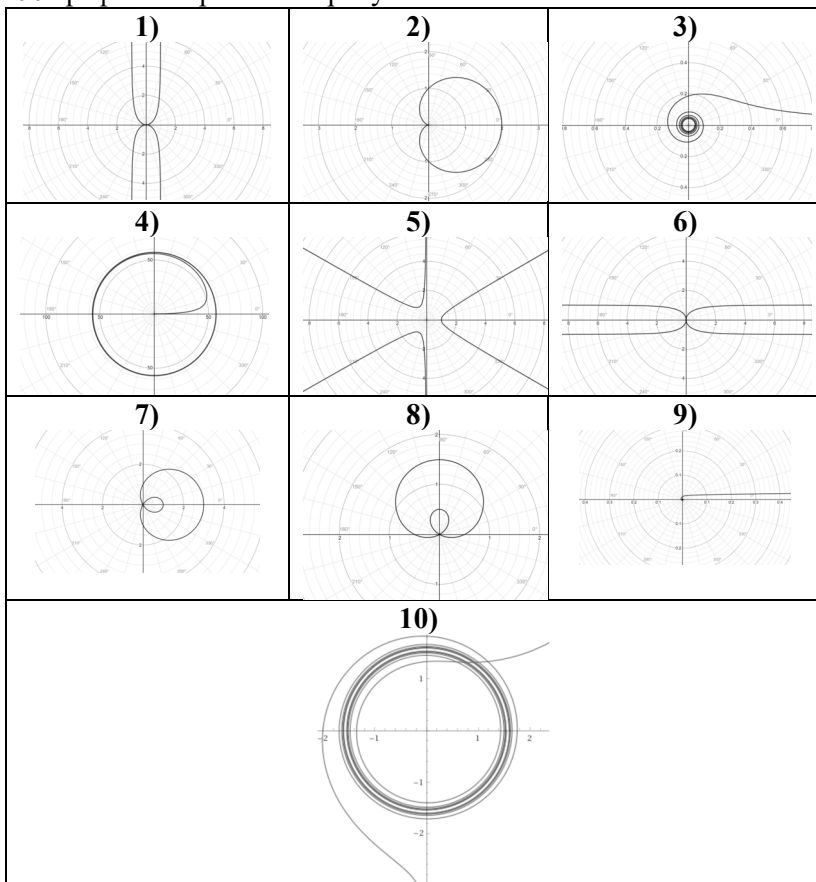


78. Графіки зображені на рисунках.





79. Графіки зображені на рисунках.



ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшко И. И. Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1988.

2. Ляшко І. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1992, 1993. – Ч. 1, 2.

3. Математический анализ : в 3 ч. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища школа, 1983–1985. – Ч. 1–3.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

5. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев и др. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Т. 2. Интегралы. Ряды. – М. : Наука, 1984, 1986.

6. Полия Г. Задачи и теоремы из анализа / Г. Полия, Г. Сеге. – М. : Наука, 1978. – Ч. 1, 2.

7. Дороговцев А. Я. Математический анализ : сб. задач / А. Я. Дороговцев. – К. : Вища школа, 1987.

8. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М. : Мир, 1967.

9. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / С. И. Ляшко, А. К. Боярчук, И. Н. Александрович и др. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2001.

ЗМІСТ

Частина 1

Похідна функція. Умови задач..... 3

Розділ 1. Визначення похідної, правила диференціювання.....	3
Задачі	8
Розділ 2. Похідні та диференціали вищих порядків.....	34
Задачі	35
Розділ 3. Теореми про середнє	45
Задачі	46
Розділ 4. Формула Тейлора, правила Лопіталя.....	54
Задачі	56
Розділ 5. Застосування похідної для дослідження властивостей функцій	80
Задачі	83

Частина 2

Похідна функція. Відповіді 108

Розділ 1. Визначення похідної, правила диференціювання.....	108
Розділ 2. Похідні та диференціали вищих порядків.....	120
Розділ 3. Теореми про середнє	127
Розділ 4. Формула Тейлора, правила Лопіталя.....	128
Розділ 5. Застосування похідної для дослідження властивостей функцій	136

Література..... 150

Навчальне видання

Александрович І. М.

Анікушин А. В.

Боярчук О. К.

Молодцов О. І.

Номіровський Д. А.

Рубльов Б. В.

Семенов В. В.

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ТА ВПРАВ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПОХІДНА ФУНКЦІЯ

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16} Ум. друк. арк. 5,7. Наклад 100. Зам. № 221-10118.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № Іф14.
Підписано до друку 12.07.21

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна

☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28

e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua

http: vpc.knu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02