

Освітні тренди та традиції у навчанні математики

Житомир 2024

ББК

УДК

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол №___ від ___ листопада 2024)*

Рецензенти:

Валерій ЖУРАВЛЬОВ – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної навчання математики Поліського національного університету (Житомир)

Василь ШВЕЦЬ – кандидат педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики УДУ імені Михайла Драгоманова (Київ)

Лариса СЕМЕНЕЦЬ – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету "Житомирська політехніка"

Королук О. М., Ленчук І. Г., Михайленко В. В., Мосіюк О.О., Прус А. В. , Свєрчевська І. А. , Фонарюк О.В., Чемерис О.А. Освітні тренди та традиції у навчанні математики: монографія. Житомир, 2024.

У монографії представлено результати науково-дослідницької діяльності авторського колективу щодо модернізації сучасної освіти, обґрунтовано перспективи і пріоритети математичної освіти в епоху соціальних викликів.

Адресується фахівцям, які займаються науковою і професійно-педагогічною діяльністю з означеної проблеми, докторантам, аспірантам та студентам, усім, хто цікавиться сучасними проблемами компетентнісної освіти і професійної підготовки.

ISBN _____

ЗМІСТ

1. Про формування математичної компетентності здобувачів вищої освіти.	4
1.1. Метрична визначеність зображень стереометрії. Іван ЛЕНЧУК	4
1.2. Непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез. Василь МИХАЙЛЕНКО	37
1.3. Історико-генетичний підхід до вивчення методів розв’язування алгебраїчних рівнянь та їх систем. Ірина СВЕРЧЕВСЬКА	71
2. Про цифрову компетентність у викладанні фундаментальних дисциплін	116
2.1. Програмні продукти у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики для здобувачів першого рівня вищої освіти. Ольга ЧЕМЕРИС	116
2.2. Динамічне середовище Geogebra для розв’язування задач з аналітичної геометрії (модуль «прямі та площини»). Олександр МОСІЮК	153
3. Про формування методичної компетентності здобувачів вищої освіти.	201
3.1. Математичне моделювання в освіті та завдання математичного моделювання. Алла ПРУС	201
3.2. Професійна компетентність майбутнього вчителя математики нової української школи: прикладні задачі в курсі математики та міжгалузевому інтегрованому курсі "STEM". Олена КОРОЛЮК	230
3.3. Реалізація STEM – проектів під час освітнього процесу: від ідеї до втілення. Олена ФОНАРЮК	263



МЕТРИЧНА ВИЗНАЧЕНІСТЬ ЗОБРАЖЕНЬ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Іван ЛЕНЧУК

lench456@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

Анотація. Викладено теорію метричної визначеності бінарних зображень фігур у стереометрії, введено поняття «параметраж зображення», прикладами продемонстровано специфіку та особливості подання теми в ЗЗСО. Сформульовано критерій розв'язуваності метричних задач та алгоритм пошуку результату конструктивними методами. Розглянуто дві основні метричні задачі на точки, прямі та площини, не володіючи методикою застосування і правилами розв'язання яких практично неможливо дійти до кінцевого результату працюючи конструктивними методами із площиною загального розташування. Розроблена схема, на якій представлено логічно вивірену класифікацію похідних задач, що допоможе зацікавленій особі вникнути в суть і зрозуміти зв'язки в теорії розглядуваного питання. Дано постановку проблеми, виконано стислий аналіз останніх досліджень і публікацій. Виписано мету статті, в якій передбачено навчати графічним та графоаналітичним методам роботи зі стереометричними фігурами шляхом геометризації й наочної візуалізації задач на обчислення, займатися творчим пошуком, працюючи із зображеннями інноваційно. В результатах дослідження пропонуються до перегляду шляхи розв'язання семи різнохарактерних задач, (окрім задач для самостійного розв'язання). Перша із задач має постановочний характер, де висвітлено питання відстані від точки до прямої в загальному вигляді. Привертається увага до метричної визначеності будь-якої площини загального розташування відносно картинної площини, що з методичної точки зору суть важливо. Другою подано задачу на обчислення, яка розв'язана всіма можливими методами, з наголосом на метод конструктивізму. Наступні три пропозиції за змістом та суттю віднесено до конструктивних. Останні дві є обчислювальними стереометричними, в яких пріоритетами в міркуваннях обрано їх геометризацію й унаочнення, а в пошуку шляхів розв'язання – конструктивізм і якісний зображувальний супровід. У кожній задачі надається можливість оцінити точність конструктивного моделювання просторових фігур та отриманих результатів побудовних операцій. У висновках передбачено продовження даного дослідження у плані педагогічно виваженого, осмисленого і ефективного застосуванням ІКТ та 3D-моделювання в роботі зі студентами.

Ключові слова: конструктивна стереометрія; перетворення суміщення; метрична визначеність зображень; графічний та графоаналітичний методи.

METRIC DEFINITENESS OF STEREOOMETRY IMAGES

Ivan LENCHUK

lench456@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1923-9540>

Abstract. The theory of metric definiteness of binary images of figures in stereometry is presented, the concept of "image parameterization" is introduced, the specifics and features of the presentation of the topic in the ZZSO are demonstrated by examples. The criterion of solvability of metric problems and the algorithm for finding the result by constructive methods are formulated. Two main metric problems on points, lines and planes are considered, which, without knowing the methodology of application and rules for solving them, are almost impossible to reach the final result by working with constructive methods with a plane of general location. A diagram is developed, which presents a logically verified classification of derivative problems, which will help an interested person to grasp the essence and understand the

connections in the theory of the issue under consideration. The problem is formulated, and a brief analysis of recent research and publications is made. The purpose of the article is outlined, which is to teach graphical and graphoanalytical methods of working with stereometric shapes through geometrization and visualization of computational problems, to engage in creative search, working with images in an innovative way. The results of the study suggest ways of solving seven different problems (except for problems for independent solution). The first of the tasks is of a staging nature, where the issue of the distance from a point to a line is covered in general. Attention is drawn to the metric determinacy of any plane of general location relative to the picture plane, which is essential from a methodological point of view. The second is a computational problem that can be solved by all possible methods, with an emphasis on the method of constructivism. The following three proposals are classified as constructive in content and essence. The latter two are computational stereometric problems, in which the priorities in considerations are their geometrization and visualization, and in the search for solutions - constructivism and high-quality visual support. Each problem provides an opportunity to evaluate the accuracy of constructive modeling of spatial figures and the results of construction operations. The conclusions provide for the continuation of this study in terms of pedagogically balanced, meaningful and effective use of ICT and 3D modeling in working with students.

Key words: constructive stereometry; alignment transformation; metric image certainty; graphical and graphoanalytic methods.

ВСТУП

Постановка проблеми. Основною метою сучасної освіти є розвиток суб'єкта навчання як особистості, його здібностей, творчо-розвивального потенціалу, інтелекту. Такий стан речей у підготовці майбутнього вчителя математики вимагає зміни всієї системи навчання, потрібно кардинально міняти логіку постановки і реалізації учбового процесу, впроваджувати нові зв'язки між визначальними блоками професійної підготовки. Геометрія, як дисципліна прикладного (практичного) напрямку, в розвивальному навчанні студента (учня) займає надто вагоме місце. Проте в педагогічних університетах і ЗЗСО їй поки що не надається пріоритетне місце.

У позиційній та в метричній стереометрії наріжним каменем операцій у конструктивному (побудовному) моделюванні фігур є дві *основні позиційні* та дві *основні метричні* задачі з точками, прямими і площинами. Це задачі на: перетин прямої і площини (ОПЗ-1), перетин двох площин (ОПЗ-2), відстань від точки до прямої (ОМЗ-1) й відстань від точки до площини (ОМЗ-2). Без них неможливе розв'язання будь-яких інших змістових задач не лише на взаємне розміщення геометричних фігур, відшукування їх спільних елементів (інциденцій), але й задач метричного характеру. Щоб фахово здійснювати закономірні операції на зображеннях стереометричних тіл, потрібно ретельно відпрацювати покрокові алгоритми їх розв'язання шляхом просторових уявлень та адекватних уявлюваних дій на проєкційних рисунках. До того ж, щоб отримати правдиві результати в оригіналі, операції на рисунках-моделях слід виконувати вельми акуратно.

На зображеннях стереометричних тіл їх грані, основи, перерізи, ребра й інші елементи займають (як правило) загальне розташування відносно картинної площини, а тому проєкціюються у спотвореному вигляді. З такими об'єктами, не знаючи методів та прийомів конструктивізму, проводити операції побудовного характеру важко. Як з'ясувалося, вихідними і базовими для обґрунтованих дій

на проєкційному рисунку послугують ОПЗ, ОМЗ та, окрім того, закономірні *просторові перетворення*. До таких відносять, зокрема, поворот навколо проєкціовальної прямої, а також *поворот навколо нульової лінії рівня* (суміщення) плоских фігур із картинною площиною.

Ми ставимо перед студентами **проблему** діяльнісної візуалізації набутих, але (поки що) не усталених знань шляхом їх структурування і залучення до системного розв'язання різнопланових, зорієнтованих на практицизм стереометричних задач та, завдячуючи такому підходу, глибокого, ефективного переосмислення і засвоєння майбутніми вчителями математики закономірностей у придбанні компетентностей (знань, умінь і навичок) операцій у найпершій з наук на професійному рівні.

Аналіз актуальних досліджень. Питання позиційної та метричної визначеності якісних, закономірно обґрунтованих побудов із використанням методів перетворень на наочних зображеннях фігур піднімалося ще на початку 50-х років минулого століття. Провідні вчені (геометри) слушно зауважували, що на наочних проєкціях (в аксонометрії) проводити взаємно перпендикулярних ліній, ділити кути, будувати кола і багатокутники за готовими розмірами й здійснювати інші метричні операції можна лише в тому випадку, коли фігури проєкціюються на площину аксонометричних проєкцій без спотворення. В усіх інших розташуваннях фігур виконання таких побудов стає неможливим і доводиться використовувати спеціальні, допоміжні прийоми. Найпершим із застосовуваних прийомів (методів, способів), які дають можливість розв'язувати схожі задачі, є *суміщення* плоскої фігури з площиною зображення чи з площиною, яка паралельна площині зображень, з наступним поверненням уже суміщеної площини у вихідне розташування. Варто наголосити, що це специфічне перетворення геометричних фігур вельми корисне в стереометрії. Адже не секрет, що геометрія є наукою, котра вивчає властивості фігур, які не змінюються при перетвореннях деякої групи перетворень.

Однак у сьогоденні на фізико-математичних факультетах педагогічних університетів, у ЗЗСО перетворення суміщення, як і перетворення обертання навколо проєкціовальної прямої, суб'єктами навчання не використовуються на практиці, оскільки вказані теми відсутні в навчальних програмах. Не надається належна увага й вимогам наочності та правильності геометричних рисунків.

Питання позиційної стереометрії, з чіткою алгоритмізацією ОПЗ і з їх теоретичним поданням та практичним застосуванням, у деталях розглянуто в навчальному посібнику [1, ч. II, р. I]. Метрика стереометрії більш об'ємна. Їй приділяється достатня увага як у вказаному посібнику (ч. II, р. II), так і в ряді інших авторських публікацій (див. напр. [2-7]).

Мета статті. В даному дослідженні ми виносимо на обговорення спільнотою фахових методистів-математиків питання переосмислення існуючих прийомів і методів навчання геометрії в університетах та школах. Зокрема, конкретними прикладами задач намагаємося продемонструвати місце й неабияк важливу роль евклідової стереометрії у справі покращення професійної підготовки майбутніх учителів математики. Досягнення очікуваного результату, реалізацію поставлених цілей пропонуємо здійснювати, в першу чергу, *графічними і графоаналітичними* методами, шляхом геометризації та

візуального унаочнення навчального процесу зображувального моделювання фігур з метою пошуку розв'язань традиційних (як для ЗЗСО) задач *на обчислення*.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Головним підходом до опанування геометрії в педагогічних університетах і ЗЗСО мав би бути *обчислювальний конструктивізм*. Говорячи більш конкретно, в розділі «Стереометрія», – це *графічні, графоаналітичні й обчислювальні* методи (способи) розв'язування задач. Указані методи в комплексі, наближаючи геометрію до практики, розкривають її прикладний характер, а візуалізація стереометричної ситуації особою що вчиться сприяє більш глибокому розумінню суті питання, яке вирішується, розвиваючи в суб'єкта навчання просторові уявлення, уяву, наочно-образне і логічне мислення.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як свідчить історія, геометрія має емпіричне походження. Перші геометричні відомості були здобуті цивілізаціями Стародавнього Сходу – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку із землемірними та іригаційними роботами. Пам'ятники стародавньої культури Єгипту, що дійшли до нас (напр., папірус Ейзенлора), яскраво ілюструють практичний характер усіх відомих у період становлення найпершої з наук геометричних фактів. Геометрія, за суттю і змістом, уявляла собою добірку частинних розв'язків окремих *метричних* задач. Жодних доведень, а ні посилань чи, навіть, натяків на них історики ніде не знаходять. Так у II тисячоріччі до н. е. єгиптяни вміли точно обчислювати площу трикутника і об'єм чотирикутної зрізаної піраміди; площу круга з радіусом R вони вираховували за формулою $S = \left(\frac{16}{9}R\right)^2$, що встановлює для π досить точне (як на той час) значення: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16...$ У Вавилоні, як і Єгипті, геометрія розвивалася на основі життєвих задач вимірювання. Вже у II тисячоріччі до н. е. вавилоняни знали так звану теорему Піфагора.

Таким чином, питання *метрики* різноманітних геометричних фігур із давніх-давен хвилювали людство. В них бере свій початок ця диво-наука, ними ж вона перенасичена і в сучасному трактуванні.

У шкільному курсі стереометрії, з метою виконання на площині проєкцій (дошка, зошит) правильних і, в переважній більшості, наочних зображень до теорем і задач, користуються методом паралельних проєкцій. Це – *зовнішнє* проєкціювання, апаратом якого є: картинна площина, напрям проєкціювання і проєкціювальні промені.

Вводячи поняття «позиційно визначене (повне) зображення», обов'язково мають на увазі, що найпростіші геометричні об'єкти (точки, прямі та площини) пов'язані між собою *внутрішнім* центральним (паралельним) проєкціюванням на основну площину, роль якої виконує ретельно обрана грань чи переріз зображеного стереометричного тіла. Повнота зображення надає можливість

орієнтуватися в реальному взаємному розташуванні заданих уявлених геометричних фігур, а також є критерієм для відшукування яких завгодно їх спільних елементів (інцидентів). Зокрема, на позиційно визначених зображеннях (як уже згадувалося) методом посередників обґрунтовано просто будуються точка перетину прямої із площиною та лінія перетину двох площин (ОПЗ-1, ОПЗ-2) та, із використанням ОПЗ, – лінії перетину будь-яких поверхонь.

Однак, лише позиційної визначеності зображення в загальному випадку виявляється недостатньо для ймовірно можливого вирішення на ньому метричних задач, пов'язаних із фактичним проведенням прямих і площин установлених напрямів чи вимірюванням замовлених параметрів заданих геометричних фігур та їх елементів. Говорять, *що дві фігури мають однакову форму, якщо вони подібні*, а будь-як накреслений трикутник, наприклад, завжди можна розглядати як зображення довільного трикутника якої завгодно форми ([1], ч. I, р. II, §2). Отже, якщо задано лише зображення трикутника і немає жодної іншої інформації про цю фігуру, то з урахуванням факту, що поділ відрізка в заданому відношенні є інваріант паралельного проєкціювання, можна без особливих зусиль встановити (провести) на кресленні його медіану. І неможливо побудувати зображення бісектриси чи висоти трикутника, оскільки форма фігури-оригіналу невідома. Таким чином, повнота креслення має на увазі цілковиту визначеність лише в таких взаємних залежностях між окремими елементами геометричної фігури, які обґрунтовуються їх афінними властивостями, сама ж фігура в оригіналі залишається невизначеною.

Що ж потрібно додатково зробити, щоб настільки просто змодельований зображенням трикутник став ще й метрично зрозумілим?

Гіпотетично можна висловити думку, що варто доповнити зображення певними метричними умовами – затратити параметри, тобто обумовити фіксацією деяких метричних залежностей між його елементами, властивих трикутнику-оригіналу, поліпшити кількісно і якісно поінформованість про трикутник. Очевидно, що так можна, врешті-решт, щонайменше визначитися із формою вихідної фігури. Природно, що ці метричні умови, які не є інваріантами паралельних проєкцій, на самих зображеннях не розпізнаються. Їх вказують в озвученому тексті задачі або ж супроводжують зображення лаконічними записами з використанням буквених позначень і відповідної символіки.

Уявимо собі, що ми, разом із попарно не інцидентними точкою A' , прямою p' , площиною Σ' і багатогранником, який пов'язує їх внутрішнім паралельним проєкціюванням (до речі, й у випадку піраміди цей напрям можна вибрати паралельним, наприклад, до одного з бічних ребер чи до висоти піраміди), знаходимося в ортогональному триграннику (клас, аудиторія), фронтальна площина проєкцій якого (площина дошки) є картинною. Тут, навіть при наявності на дошці повного зображення пов'язуючої стереометричної фігури (рис. 1, а), все ще залишаються невизначеними у прямокутній декартовій системі координат $O'x'y'z'$ напрями зовнішнього a та внутрішнього a' проєкціювання і положення площини основи Σ' , а отже, буде невизначеним й сам багатогранник.

З іншого боку, знаючи (власноруч задавши) напрями a і a' та розташування основної площини Σ' відносно площини зображень Π , ми цілком визначимо всі

елементи оригіналу як такі, що віднесені до пари площин Σ' і Π .

Справді, нехай (рис. 1, б) зазначені умовності на кресленні виконуються. Нехай також, для визначеності, $a' \parallel S'A'$, а площина основи задається точкою $A'(A)$ і слідом MN на площині зображень Π . Тоді між площинами Σ' і Π буде встановлено перспективно-афінну відповідність, задану віссю MN і парою відповідних точок A' і A . Тепер, за вже відомими правилами цієї справді універсальної взаємно однозначної відповідності і, звичайно, з урахуванням заданих напрямів внутрішнього і зовнішнього проєкціювання, легко можна побудувати основу оригінальної піраміди $A'B'C'$ і її вершину S' (верхню основу призми $S'P'Q'$, що зображена штрих-пунктирною лінією з двома крапками).

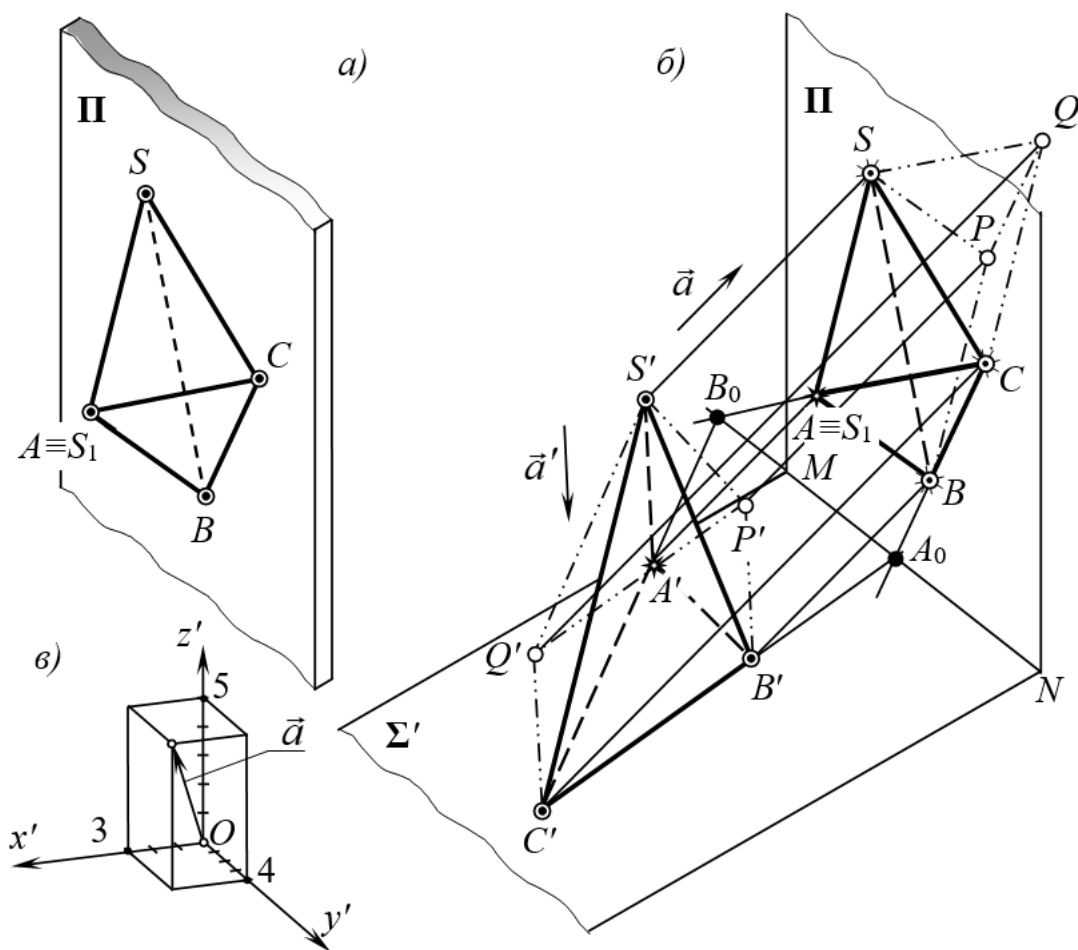


Рис. 1. Зовнішнє та внутрішнє проєкціювання

Оскільки при паралельному перенесенні площин Σ' і Π (за незмінності зображення та напрямів a' і a) оригінал-піраміда зазнає перетворення гомотетії з центром у точці S' , а оригінал-призма залишається тією ж (верхня основа вибрана довільно), то домовимося визначати положення вказаних площин лише до гомотетії з центром S' . При цьому форма оригіналу цілком визначається, а сам оригінал визначається з точністю до подібності.

Наведемо з цього приводу слушну цитату: «Такі зображення, оригінал яких визначений до подібності, ми будемо називати **метрично визначеними**. Всі побудови, які виконуються на повному, метрично визначеному зображенні, не можуть містити ніяких елементів довільності, бо їм відповідають цілком

визначені побудови в оригіналі. Навпаки, повне зображення до його метричного визначення допускає деяку довільність щодо метричних операцій, які виконуються на цьому зображенні. Ця довільність залежить від того запасу вільних параметрів, задавання яких робить зображення метрично визначеним. Підрахунок цього запасу параметрів ми будемо називати **параметражем зображення**» ([8], с. 86, 87).

Параметраж повного зображення в нашому трактуванні може бути проведений таким прийомом. Щоб однозначно визначитися у просторі (в системі координат $O'x'y'z'$) із напрямками a' і a паралельного проєкціювання, потрібно затратити по два параметри на кожний із них (наприклад, задати відношення координат: $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ напрямного вектора: $\vec{a} (\vec{a}')$, (рис. 1, в), на якому $\vec{a}(3t, 4t, 5t)$). Для встановлення положення площини основи Σ' (до її паралельного перенесення) досить задати один параметр (наприклад, кут нахилу площини Σ' до площини Π). Отже, запас параметрів повного зображення виражається числом 5. Будемо говорити, що **метричне число** повного зображення $p = 5$.

Проекційні креслення (зображення), які супроводжуються метричними умовами, накладеними на оригінал, називають умовними.

Таким чином, зображення Φ фігури Φ' називається **метрично визначеним** (або **умовним**), якщо за ним можна відновити (реконструювати, змодельовати) фігуру Φ' із точністю до подібності.

Метрична визначеність зображень плоских фігур

Афінна відповідність (A) двох плоских полів цілком визначається парою відповідних трикутників (трикутник-зображення ABC і трикутник-оригінал $A'B'C'$) та, поряд із тим, однозначно розкладається в добуток двох перетворень ($A = P \cdot R$): подібності (P) і перспективно-афінної відповідності (R). Відомо, що перетворення подібності не змінює форму об'єктів геометрії, а тому в перспективно-афінній відповідності кожна точка M зображення, віднесена до площини трикутника ABC , визначає положення оригіалу M' у площині трикутника $A'B'C'$.

Як щойно сказане можна і потрібно розуміти в конкретній (практичній) ситуації? Нехай трикутник ABC на площині Π є зображенням рівнобедреного трикутника $A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$) із кутом при вершині A' , рівним 40° (рис. 2). Зумисне піддаймо трикутник-оригінал $A'B'C'$ перетворенню подібності з коефіцієнтом $k = \frac{BC}{B'C'}$ ($B'C' \rightarrow B_0C_0 = BC$), а трикутник, який є результатом цього перетворення, в уявленнях перемістимо у просторі так, щоб його сторона B_0C_0 злилася зі стороною BC трикутника-зображення. При цьому вершина A_0 рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$, подібного трикутнику $A'B'C'$, розташується деінде відносно площини Π . З'єднаємо прямою лінією точки A_0 і A . Тоді трикутник ABC виявиться паралельною проєкцією трикутника $A_0B_0C_0$ за напрямом $A_0 \rightarrow A$, а пряма $B_0C_0 \equiv BC$ (вісь) і пара відповідних точок A_0 і A однозначно визначатимуть деяку перспективно-афінну відповідність між площинами Π_0 і Π . При цьому площини Π' і Π перебуватимуть, як відомо, в афінній відповідності (див. також [1], ч. I, р. II, § 2, рис. 1.38).

Таким чином, щоб зображення плоскої фігури Φ (рис. 2, а) відбулося **як**

метрично визначене, достатньо аби накладені на нього умови дозволяли встановити істинну форму $A'B'C'$ будь-якого трикутника $ABC \subset \Phi$ на цьому зображенні. Така вимога, без сумніву, є також необхідною, бо якщо плоска фігура-оригінал уже метрично визначена, то вона обов'язково містить хоча б один трикутник $K'L'M'$, якому відповідає на зображенні трикутник KLM .

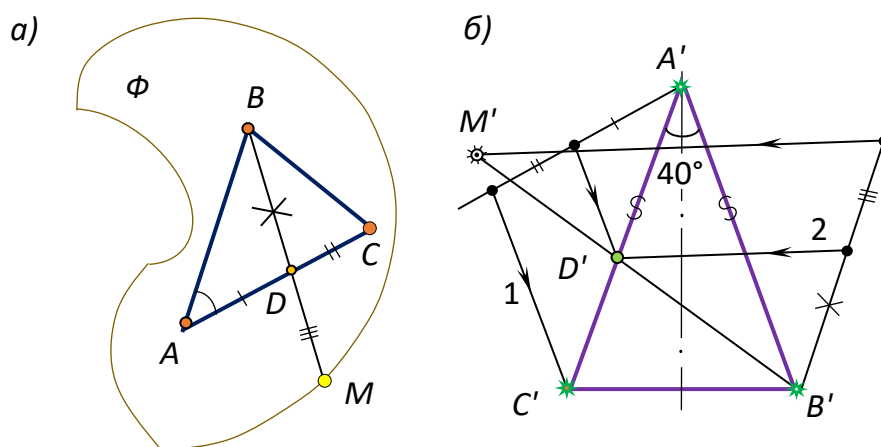


Рис. 2. Метрична визначеність плоских фігур

Форма ж трикутника, очевидно, цілком визначається двома метричними параметрами, наприклад співвідношенням однієї пари сторін ($A'B' = A'C'$) і кутом між цими сторонами ($\angle A' = 40^\circ$). Звідси випливає, що **зображення плоских фігур у паралельній проєкції має два вільних параметри**, які можуть бути визначені умовами, накладеними на оригінал ($p = 2$).

До таких самих результатів можна також дійти через наступні міркування [9]. Розглянемо довільну плоску фігуру Φ' , яка має, щонайменше, одну трійку неколінеарних точок. Тут завжди можна вибрати трикутник $A'B'C'$, що належить Φ' . Якщо на зображення цього трикутника ABC уже затрачено два незалежні метричні параметри (наприклад, $A'B' = A'C'$, $\angle A' = 40^\circ$, див. рис. 2, а, б), то однозначно визначається і форма всієї фігури Φ' . Справді, для довільної точки M' , яка належить контуру фігури Φ' , справедливі пропорції: $B'M' : M'D' = BM : MD$, $A'D' : D'C' = AD : DC$. Відношення, що стоять праворуч у цих пропорціях, відомі із зображення (рис. 2, б), адже вони є інваріантами як перетворення подібності, так і паралельного проєкціювання. Тому за умови, що трикутник $A'B'C'$ представляє собою дійсну форму трикутника ABC , можна аналогічно точці M' знайти (побудувати) достатню кількість точок, за якими визначиться весь контур (істинна форма) фігури Φ' .

Отже, цим ще раз наочно доведено, що *форма плоскої фігури цілком визначається задаванням її двох незалежних метричних параметрів*. Це можуть бути також два кути, відношення двох пар сторін тощо.

Докладне, в популярному викладенні дослідження питання про те, яке число параметрів відповідає тій чи іншій умові, що накладається на оригінал зображення, проведено у книзі [8].

Метрична визначеність зображень просторових фігур

Для певності обґрунтування конструктивних випробувань у майбутньому варто пам'ятати, що метрично визначеними є лише ті зображення, за якими можна змодельовати (відновити) оригінал із точністю до подібності (зокрема, в

уявленнях). З метою візуального моделювання зображеними строго за методом паралельних проєкцій метричних операцій із тілами стереометрії, попередньо також потрібно вирішити питання їх метричної визначеності. Тут, щонайперше, посилаються на теорему Польке-Шварца ([1], ч. I, р. I, §5, п. 5.3), яку в наукових літературних джерелах влучно і небезпричинно називають **основною теоремою аксонометрії**.

Отже, вважатимемо метрично заданим проєкційне креслення будь-якої трикутної піраміди. Очевидно, що маючи лише зображення найпростішого багатогранника, без додаткових метричних характеристик фігури-оригіналу, встановити її форму не представляється можливим, оскільки трикутних пірамід, відмінних за формою, безліч. У цьому, до речі, й виражається змістова складова теореми Польке-Шварца, а саме: *«Довільний плоский чотирикутник разом з його діагоналями можна розглядати як паралельну проєкцію тетраедра будь-якої наперед заданої форми»*.

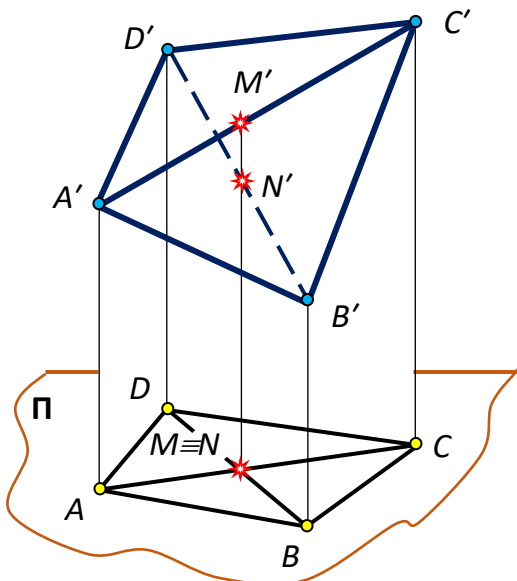


Рис. 3. Теорема Польке-Шварца. Уявляти наочно-образно доведений факт у нашому випадку потрібно наступним чином. Нехай на площині зображень Π дано довільний повний чотирикутник $ABCD$ загального розташування (рис. 3). Через його вершини проведемо прямі, паралельні напрямку a , не паралельному Π . Напевне, що на цих прямих завжди знайдеться четвірка некомпланарних точок, які приймаємо за вершини деякого тетраедра. Змінюючи взаємне розташування вказаних вершин і напрями проєкціювання a , одержимо нескінченну множину (багатовид) тетраедрів всіх можливих форм. Так-от, теорема Польке-Шварца стверджує, що *серед багатовиду таких тетраедрів завжди знайдеться хоча б один $A'B'C'D'$, подібний заданому і такий, паралельною проєкцією якого на площину Π буде накреслений чотирикутник $ABCD$* .

Таким чином, *основна теорема аксонометрії дозволяє трикутну піраміду будь-якої форми зображати на площині дошки (зошита) яким завгодно не виродженим повним чотирикутником. І таке зображення буде гарантовано правильним*.

Принагідно нагадаємо, що правильність – не єдина вимога до зображень звичних стереометричних фігур (чи їх комбінацій) у курсі геометрії ЗЗСО. Про це вчителю (учню) потрібно пам'ятати завжди при розв'язуванні задач конструктивними методами. Зображення мають бути ще й наочними, чого можна порівняно просто досягти шляхом реалізації добре відпрацьованих, неодноразово випробуваних у покроковій схемі дій чітких алгоритмів (правил-орієнтирів) виконання проєкційних креслень всіх варіацій тривимірних фігур і їх комбінацій, що трапляються, приміром, за методом «аксонометричних напрямків і умовних співвідношень» (див. [1], ч. I, р. II, III).

Тепер установимо кількість метричних умов, які визначали б просторову форму довільної фігури Φ' , повне зображення якої Φ уже змодельовано на

картинній площині (рис. 4). Усередині кожної тривимірної фігури, як відомо, завжди знайдеться хоча б одна четвірка точок, які не належать одній і тій самій площині. Такі точки однозначно визначатимуть у просторі деякий тетраедр $S'A'B'C'$ (нехай $SABC$ – його зображення; для зручності припустимо також, що точки A , B і C належать основній площині). Посилаючись до аналогії, як до категорії логіки і психології [10], стверджуємо, що фігура-оригінал, усі точки якої можуть бути афінно визначені відносно згаданого тетраедра за їх зображеннями, буде метрично визначена. Тобто, для метричної визначеності повного зображення просторової фігури Φ' , досить метричного визначення будь-якого тетраедра на цьому зображенні.

Обґрунтування сформульованого твердження у своїй сукупності досить прості. Нехай $M(M_1)$ – повне зображення точки M' , що належить поверхні фігури-оригіналу Φ' . З'єднаємо точку $M(M_1)$, скажімо, з вершиною $C \equiv C_1$ прямою лінією і знайдемо ще одну її спільну точку $N(N_1)$ із поверхнею тетраедра-зображення, тобто розв'яжемо на проєкційному кресленні ОПЗ-1. Далі уявимо собі, що тетраедр $S'A'B'C'$ (рис. 4, б) виявляє справжню форму тетраедра – прообразу, що зображений повним чотирикутником $SABC$ у зовнішньому паралельному проєкціюванні на картинну площину. Виконавши тричі підряд в оригіналі афінну операцію поділу відрізка у визначеному зображенням (рис. 4, а) відношенні: $AN_1 : N_1B = A'N'_1 : N'_1B'$, $SN : NN_1 = S'N' : N'N'_1$, $CN : NM = C'N' : N'M'$, змодельємо точку M' фігури Φ' . За цим сценарієм можна змодельювати будь-яку кількість (особливих і випадкових) точок поверхні просторової фігури, яка задана на проєкційному кресленні, тобто визначитися з її формою з точністю до подібності.

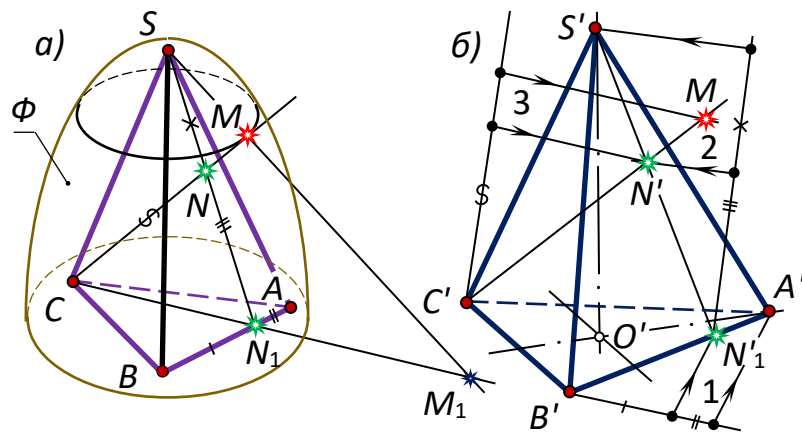


Рис. 3. Метрична визначеність просторових фігур

Очевидно, що наведені міркування тепер уже звужують задачу, а тому залишається лише встановити число метричних параметрів, які потрібно витратити на метричну визначеність повного зображення тетраедра.

Як уже пояснювалося, форма плоскої фігури визначається задаванням **двох** незалежних умов. Звідси випливає, що для встановлення форми двох граней тетраедра потрібно сформулювати **чотири** незалежні метричні умови. Але ж грані тетраедра, маючи спільне ребро, можуть бути нахиленими одна до іншої під усяким кутом. Щоб зафіксувати їх взаємне розташування, потрібно накласти **ще одну** умову (наприклад, указати градусну міру двогранного кута чи

співвідношення між двома будь-якими сторонами різних граней, чи відношення визначальних відрізків за участю висоти тетраедра або його «шостого» ребра тощо). Отже, в усіх випадках одержуємо: $p = 5$.

Таким чином, в остаточному підсумку можна категорично стверджувати, що **метрична визначеність** повного зображення тетраедра, а отже і просторової фігури, яка вміщує його в собі, цілком обумовлюється задаванням n 'яти ($p = 5$) незалежних параметрів.

Метрична визначеність фігур у ЗЗСО

Зауважимо, що обґрунтування метричної визначеності багатовиду плоских і просторових фігур геометрії в умовах школи доцільно провести шляхом візуальних спроб і узагальнень на конкретних рисункових прикладах.

Звернемося, приміром, до **паралелограма**. Його зображення на основній площині має, як відомо, властивість повноти. Однак, лише за зображенням не можна встановити форму фігури, оскільки оригіналом (прообразом) паралелограма може бути який завгодно інший паралелограм, зокрема, прямокутник із будь-яким відношенням прилеглих сторін, ромб із будь-яким можливим кутом при вершині та, нарешті, всякий квадрат.

Якщо ж зображення $ABCD$ паралелограма $A'B'C'D'$ доповнити умовою: $A'B' = B'C'$ чи, скажімо, $A'C' \perp B'D'$, то стає зрозуміло, що $ABCD$ – зображення ромба. Однак і цього співвідношення недостатньо для цілковитої визначеності форми оригіналу хоча б тому, що ромбів, відмінних за формою, теж безліч, зокрема квадрат є також ромбом із прямим кутом при вершині. Очевидно, що потрібно витратити ще один метричний параметр, наприклад, констатуючи взаємну залежність між діагоналями цієї фігури пропорцією виду $A'C' : B'D' = 2 : 1$. Лише за таких обставин зображення плоскої фігури $ABCD$ разом із двома метричними параметрами, додатково (вербально чи в умовному запису) накладеними на нього, однозначно визначає на плоскому екрані форму ромба-оригіналу. Спробуємо тепер дещо варіювати так введеними додатковими до зображення паралелограма $ABCD$ метричними параметрами. Нехай, на відміну від попереднього, $\angle A'B'C' = 90^\circ$ і $A'B' : B'C' = 1 : 3$. Ми певні, внесені корективи метричних характеристик фігури через основні загальні розумові дії (порівняння, абстрагування і узагальнення) миттєво, в чомусь навіть підсвідомо і мимовільно викликають в уявленнях студента (учня) образ іншої фігури – прямокутника $A'B'C'D'$ – певної форми, визначеної саме цією останньою інформацією про накреслений паралелограм. Коли ж пропорцію подати в можливому частинному вигляді, тобто $\angle A'B'C' = 90^\circ$, а $A'B' : B'C' = 1 : 1$, то це засвідчить рівність суміжних сторін прямокутника, отож тут матимемо справу в оригіналі винятково із прямокутним ромбом – квадратом.

Аналогічні міркування можна провести стосовно зображення ABC деякого **трикутника**. Якщо трикутник не обумовлювати додатковими метричними параметрами, то прообразом ABC може бути (див. [1], ч. I, р. II, §2) різносторонній трикутник $A'B'C'$ довільної форми, рівнобедрений – з будь-яким кутом при вершині, прямокутний – з яким завгодно гострим кутом і, звичайно, рівносторонній трикутник. Визначитися з формою різностороннього трикутника можна витрачаючи на його зображення різні комбінації метричних параметрів.

Наприклад, $A'B' = \frac{1}{2} A'C'$ і $A'B' = \frac{1}{4} B'C'$ або, задавши на зображенні трикутника (в допустимих межах) точку O , яку домовимося вважати його ортоцентром, що фактично означає: $A'O' \perp B'C'$ і $B'O' \perp A'C'$, тощо. За умов що $A'B' = B'C'$, $A'B' = 2A'C'$ відразу стає очевидним, що ABC зображає рівнобедрений трикутник певної форми. Якщо ж $\angle A'B'C' = 90^\circ$, а $A'B' = \frac{1}{3} B'C'$, то $A'B'C'$ – трикутник прямокутний і один з його катетів у три рази менший іншого. Нарешті, умови $A'B' = B'C'$, $B'C' = C'A'$ (або ж, $\angle A' = 60^\circ$ і $A'B' = A'C'$) визначають рівносторонній трикутник. Тут форма кожного із трикутників, як і у випадку з паралелограмом, встановлена однозначно його зображенням і строго двома затраченими метричними параметрами.

Варто пам'ятати, що співвідношення між сторонами трикутника в якості параметрів, витрачених на зображення, неможна обирати довільно, щоб не порушити теорему про нерівність трикутника ([11], §7, п. 66).

Означення. Повне зображення Φ фігури Φ' називається **метрично визначеним**, якщо за ним можна відновити (змодельовати) фігуру Φ' із точністю до подібності.

Теорема. Для того, щоб зображення Φ плоскої фігури Φ' було метрично визначеним, необхідно і достатньо, щоб на нього було витрачено **два** метричні параметри.

Метричну визначеність просторових фігур можна також досить наочно і просто обґрунтувати на прикладі проєкційного креслення $SABC$ трикутної піраміди $S'A'B'C'$. Лише за кресленням, без додаткової метричної інформації про оригінал, нічого певного про піраміду сказати неможливо, оскільки, згідно з теоремою Польке-Шварца, плоский чотирикутник з його діагоналями здатний виконувати роль зображення якого завгодно тетраедра.

Нехай тепер, у частинному випадку, $SABC$ – зображення **правильної** трикутної піраміди. Очевидно, що така словесна інформаційна корекція суттєво конкретизує оригінал, вирізняє його із сукупності всіх можливих трикутних пірамід. Однак чи достатньо цієї інформації для визначеності багатогранника $S'A'B'C'$ із точністю до подібності? Виявляється, що недостатньо. І ось чому. Піраміда називається правильною, якщо її основа є правильний багатокутник, а основа висоти збігається з центром цього багатокутника. В такій піраміді, що очевидно, всі бічні ребра рівні. Зображення довільним трикутником ABC правильного трикутника $A'B'C'$, що лежить в основі піраміди, бере на себе затрату двох метричних параметрів: $A'B' = B'C'$, $B'C' = C'A'$. Зображення висоти піраміди, перпендикулярної в оригіналі до площини основи в точці O' – центрі трикутника – вимагає витратити ще два метричні параметри: $S'A' = S'B'$, $S'B' = S'C'$ ($S'O' \perp A'O'$, $S'O' \perp B'O'$). Усе ж, за таким проєкційним кресленням неможливо встановити місце розташування вершини піраміди S' на перпендикулярі, проведеному в точці O' до площини основи. В умовах такої поінформованості її можна вибрати де завгодно на прямій $S'O'$. Отже, однозначно відновити (змодельовати) правильну трикутну піраміду, як прообраз повного чотирикутника $SABC$, і в цьому випадку неможливо. Очевидно, для того, щоб піраміда $S'A'B'C'$ була цілком метрично визначена, до умов « $SABC$ –

зображення правильної трикутної піраміди» обов'язково потрібно додати деякий метричний параметр стосовно висоти піраміди, який фіксував би у просторі її вершину S' , наприклад, $S'O' = A'B'$ або $S'A' = 2A'B'$ тощо. Тобто, до чотирьох метричних параметрів, закладених у слові «правильна», додається ще один – п'ятий параметр, який конкретизує місце розташування вершини піраміди.

Теорема. *Для того, щоб зображення Φ просторової фігури Φ' було метрично визначеним, необхідно і достатньо, щоб на нього було витрачено п'ять метричних параметрів.*

Ці визначальні метричні параметри просторової фігури обов'язково мають бути обумовлені умовою тієї чи іншої стереометричної задачі на побудову.

Акцентуємо: *Якщо на площині дошки (зошита) метрично визначено будь-яку плоску (просторову) фігуру, то метрично визначено всю площину (весь простір) і на проєкційних кресленнях таких геометричних фігур неупущима сваволя у виконанні побудов метричного характеру, що пов'язані з проведенням перпендикулярних прямих і площин, вимірюванням відрізків і кутів, встановленням істинної форми плоских фігур, довільно розташованих на площині (у просторі).*

Розв'язуючи метричні задачі торкаються переважно властивостей оригіналу, які не зберігаються при паралельному проєкціюванні, але обов'язково є інваріантами перетворення подібності: 1) *властивості прямих і площин утворювати між собою певні кути, зокрема (і в першу чергу) бути взаємно перпендикулярними*; 2) *відношення довжин відрізків на не паралельних прямих*; 3) *відношення градусних мір кутів між прямими, площинами, прямими і площинами*. Наприклад, властивості променя бути бісектрисою кута чи площини бути бісекторною площиною двогранного кута є метричними. При цьому метричні задачі, як правило, вміщують у собі позиційні задачі, які базуються на інваріантах паралельного проєкціювання. В цілому, для ефективного розв'язання будь-якої стереометричної задачі на побудову потрібно відшукувати такі співвідношення між елементами оригіналу, які зберігаються (інваріантні) при паралельному проєкціюванні на картинну площину.

У переважній більшості випадків метрична задача зводиться до фіксації на зображенні визначальних елементів: певної точки або ж напряду певної прямої. Місце розташування цих елементів можна встановити чи через виконання тільки графічних операцій (суто графічний метод), чи скориставшись якимись допоміжними, по можливості найпростішими і в найменшому об'ємі аналітичними розрахунками (графоаналітичний метод). У першому випадку можливі різні прийоми: відшукування потрібних співвідношень усередині (чи на поверхні) стереометричного об'єкта і побудова шуканої фігури безпосередньо на зображенні; відшукування потрібних співвідношень через побудову справжньої форми деякої плоскої фігури (наприклад, шляхом суміщення її з картинною площиною); встановлення взаємно однозначної відповідності між фігурою та її зображенням (вторинною проєкцією); побудова такої ортогональної проєкції на площині дошки (зошита), де шуканий відрізок, кут, плоска фігура зображується без спотворення тощо. Графоаналітичний метод передбачає певні формальні виведення взаємних залежностей між визначальними відрізками з використанням конкретних фактів та властивостей геометричних фігур,

сформульованих у відомих аксіомах, теоремах чи розглянутих у раніше розв'язаних задачах.

Критерієм розв'язуваності метричної задачі на побудову на позиційно і метрично визначеному кресленні є врахування і використання на зображенні проєкційних і метричних властивостей оригіналу.

Правило-орієнтир розв'язування метричної задачі

1. *Встановіть факт повноти і метричної визначеності зображення.*
2. *Проаналізуйте умову задачі та встановіть обґрунтовані взаємні залежності між заданими і шуканими геометричними фігурами.*
3. *Сформулюйте правило-орієнтир просторових пошуків і дій та, у зв'язку з цим, зорієнтуйтеся з методом розв'язання задачі.*
4. *Скористайтесь визначальними проєкційними особливостями зображення і, врахувавши всі витрачені на нього метричні параметри, сформулюйте алгоритм графічних операцій, які доцільно виконати на моделі.*

Примітка. Якщо не вдається відразу помітити потрібні особливості розташування та формальні взаємозалежності між умовою та висновком задачі, які порівняно швидко реалізуються на самому зображенні, то передбачте винесені креслення і (або), частково, допоміжні аналітичні розрахунки, що оптимізують алгоритм розв'язання.

5. *Виконайте фактичні побудови і виділіть результат.*

Тут суттєво, що методологічна концепція розв'язування метричних задач на умовних проєкційних кресленнях не вимагає якихось спеціальних знань із нарисної геометрії, а процес розв'язування здійснюється через звичайні графічні чи графоаналітичні операції, які мають місце в курсі геометрії ЗЗСО. Вчителю математики про це обов'язково потрібно знати.

Метричні задачі у площині загального розташування

Для ефективного включення сформульованих тез у структуру розумових дій студента (учня), набуття стійких предметних навичок і вмінь у діяльнісному моделюванні специфічних графічних операцій з умовними зображеннями елементарного характеру, чіткого усвідомлення особливостей становлення і формування принципів наочно-образної *метричної геометрії*, першочергово слід зайнятися розв'язуванням **найпростіших і базових метричних задач** винятково на **плоскі фігури**, довільно розташовані у просторі відносно площини проєкцій зовнішнього проєкціювання.

Така постановка питання може викликати в учня-початківця природне здивування: «Нащо потрібно розв'язувати метричні задачі на плоскі фігури з використанням їх просторових зображень? Чи не краще відразу ж на дошці (в зошиті) зображати визначені умовою фігури подібними до справжніх і далі оперувати з ними, як з оригінальними?» Так, звичайно, цей шлях зручніший і візуально більш переконливий. Адже відомо, що якраз таким добре відпрацьованим прийомом і користуються, вивчаючи властивості плоских фігур у планіметрії. Проте у випадку стереометрії, навіть за найбільш удалого, найкращого розташування тривимірної фігури відносно картинної площини, всі її елементи (приміром, грані та перерізи багатогранника), що залучаються до пошуку шляху розв'язання просторової пропозиції, аж ніяк не можуть водночас зображуватися без спотворення їх форми і розмірів. Тому названі площинні

задачі є необхідно складниками стереометричних задач на побудову, й вони надто важливі в розглядуваному розділі метрики.

Студент педагогічного університету (учень), який уже має достатній досвід, навички й уміння у виконанні закономірних графічних перетворень фігур стереометрії на їх якісних зображеннях, напевне знає, що переважна більшість пропозицій конструктивної стереометрії, розв'язуваних винятково на наявних позиційно та метрично визначених проєкційних кресленнях, вміщують у собі, як правило, побудову прямих і (або) площин, перпендикулярних до вже накреслених прямих і площин, тобто до таких прямих і площин, які задані умовою. Так, метрика стереометрії зводиться до ОМЗ.

Справді, як у всіх можливих варіаціях змодельовати в наочних уявленнях, а потім ще й візуально на метрично визначеному проєкційному кресленні тривимірного об'єкту, кут між обраними прямою і площиною чи кут, утворений двома площинами? Як зобразити спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих? Як побудувати зображення перпендикуляра, опущеного з точки на пряму чи на площину? Це природні, звичні пропозиції і обчислювальної, і графічної метрики в евклідовій стереометрії. Однак учні знайомляться з ними, пізнають геометричну сутність, конструктивну складову схожих понять та відношень (чомусь) поверхнево, формально за обставин, коли останні об'єктивно є стрижневими в образному розумінні цілісного курсу. Саме тому для більшості випускників ЗЗСО навіть нескладні стереометричні задачі на обчислення є «каменем спотикання».

Стереометричні побудови в навчанні об'єктивно не є пріоритетними, а тільки допоміжними у процесі розв'язування переважної більшості задач на обчислення чи доведення, зокрема – на поверхні та об'єми багатогранників і круглих тіл. Креслення-картини лише супроводжують змістовно вартісні задачі на відшукування градусної міри кута, довжини відрізка та, деінде, істинної форми і площі плоскої фігури, в тому числі й там, де фігурують перерізи стереометричних тіл площинами, відносно розташування яких у просторі, в кожному окремому випадку, чітко регламентується умовою.

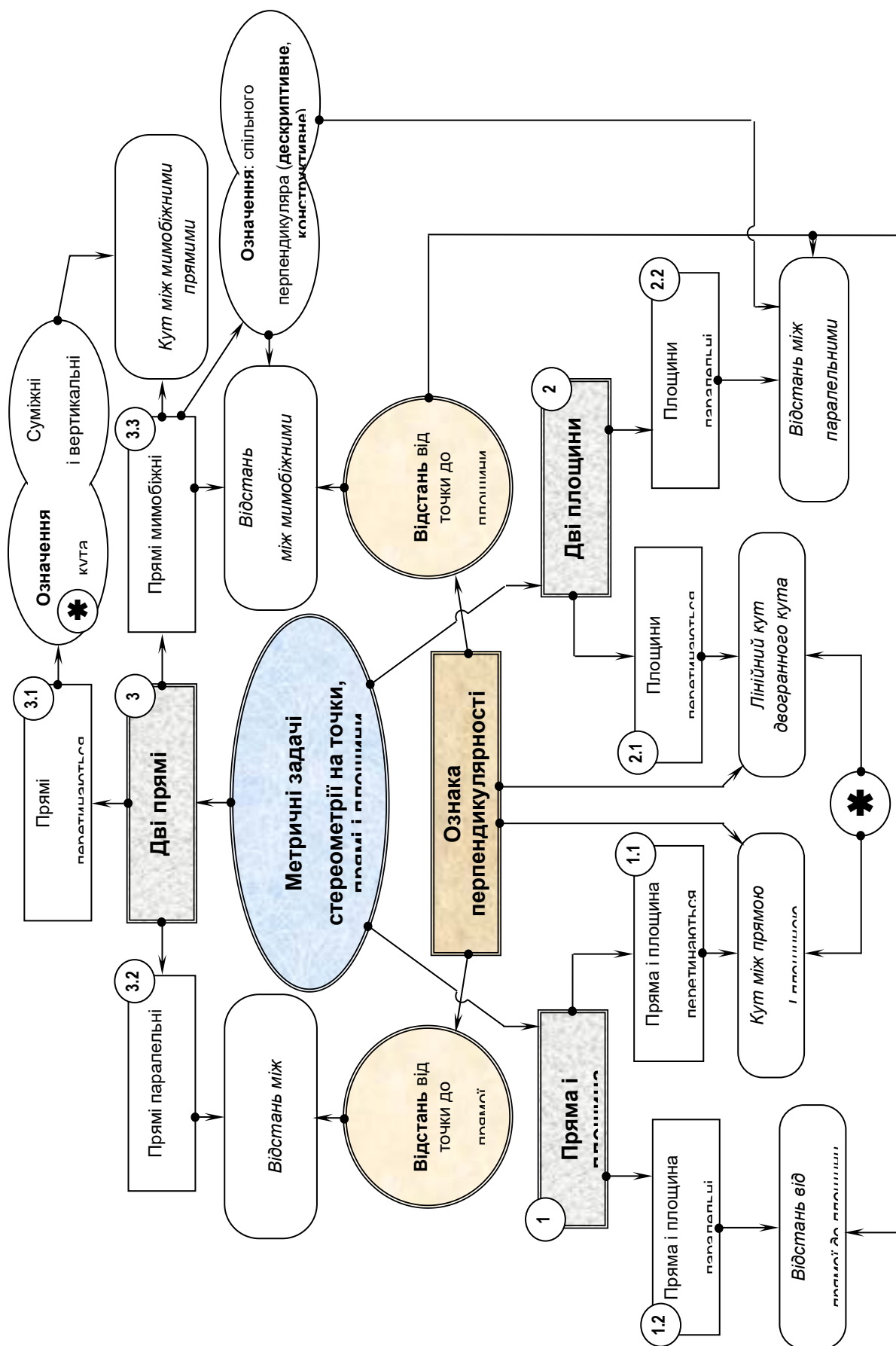


Схема 1. Основні (й похідні) метричні задачі

Найпершу із відомих класичних метричних задач курсу стереометрії

(ОМЗ-1) сформулюємо в загальному представленні та проаналізуємо її не прив'язуючись на початку до конкретного методу зображень, а отже, без урахування притаманних паралельним проекціям властивостей (схема 1).

Задача 1. *На картинній площині задано точку A і пряму a загального розташування. Причому, $A \notin a$. Знайти відстань від точки до прямої.*

У загальному випадку відстань від точки до прямої у стереометрії шукають у три кроки: 1) через дану точку проводять площину, перпендикулярну даній прямій – геометричне місце прямих, серед яких лише одна перетинає пряму, а інші мимобіжні з нею; 2) знаходять точку перетину прямої із проведеною площиною (ОПЗ-І); 3) встановлюють відстань між двома точками. Схоже можна отримати, приміром, формулу відстані від точки до прямої у прямокутній декартовій системі координат в аналітичній геометрії.

Ми ставимо завдання конструктивного вирішення сформульованого питання.

Через точку і пряму, коли точка не належить прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну. Тому виникає бажання здійснити пошук розв'язання задачі не у просторі, а на площині $\Sigma(A, a)$. Проте Σ займає **загальне** розташування відносно картинної площини, через що зображення, яке виконане методом зовнішнього паралельного проєкціювання, спотворює як довжина шуканого перпендикуляра, так і прямий кут в його основі.

У не строго зафіксованому в умові задачі взаємному розташуванні точки (A) і прямої (a) у просторі, матимемо графічну невизначеність. Іншими словами, в такій ситуації задача на побудову не може бути розв'язана однозначно.

Щоб ланцюжок конструктивних операцій призвів до єдиного розв'язку, потрібно на площину $\Sigma(A, a)$, в якій ведеться пошук розв'язання метричної задачі, затратити **два незалежні метричні параметри**. На метрично визначених зображеннях фігур, обумовлених певними метричними параметрами, термін «знайти відстань» означає «*побудувати відрізок*», який в оригіналі є істинно шуканою метричною характеристикою взаємного розміщення заданих умовою геометричних об'єктів.

Здійснимо корективи щодо уявлених об'єктів зображення: 1) оберемо, наприклад, будь-яку точку B на прямій a і припустимо, що в оригіналі $\angle A'B'C' = 45^\circ$; 2) візьмемо ще одну точку C на прямій таку, щоб у просторі $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$. Тепер, уведені в умову задачі два параметри, площину $\Sigma(A, a)$ цілком метрично визначають [8, §34].

Отже, у вихідній ситуації умова просторової задачі була сформульована некоректно, що й призвело до невизначеності. Це зобов'язує, з **методичної** точки зору, на етапі аналізу шляху розв'язання метричної задачі на повному проєкційному кресленні *конструктивними методами* обов'язково **оцінити** (перевірити) його метричну визначеність.

Зауважимо, що користуючись на кресленні-моделі циркулем та лінійкою досягти очікуваних побудовних результатів можна або **графічним**, або **графоаналітичним** методами.

Щодо **графічного** розв'язання метричних задач, тут знайшов найширше застосування **метод суміщення** із площиною дошки (зошита) визначеної

умовою (чи вибраної всередині заданого тіла за чіткими правилами самим виконавцем побудови) плоскої фігури.

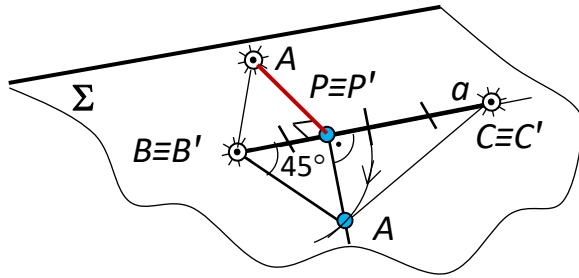


Рис. 5. Метод суміщення

площину так, щоб сторона BC трикутника-зображення ABC збігалася з $B'C'$. Це означає, що дві його вершини B' і C' тепер уже зображені як в оригіналі. Залишилося третю вершину A' повернути навколо прямої $B'C' \equiv BC$ так, щоб вона теж «упала» на площину зображень. Після виконання цього останнього руху, трикутник $A'B'C'$ належатиме картинній площині, а його форма буде істинною – такою, як в оригіналі. Тобто, кути трикутника будуть зображуватися в натуральну величину, а сторони – у визначених на зображенні (по відношенню до $B'C' \equiv BC$) пропорціях. У цьому й полягає суть методу суміщення.

Якщо два незалежні метричні параметри трикутника відомі за умовою задачі ($\angle B' = 45^\circ$; $A'B' = \frac{1}{2} B'C'$), то виконати фактичну побудову фігури оригінальної форми зовсім нескладно: 1) у вибрану півплощину відкладаємо $\angle C'B'b' = 45^\circ$; 2) на промені b' відкладаємо відрізок $B'A' = \frac{1}{2} B'C'$. Трикутник $A'B'C'$ – шуканий, а операцію суміщення слід вважати завершеною. Далі, з вершини A' відомим планіметричним прийомом опускаємо перпендикуляр $A'P'$ на протилежну сторону трикутника $B'C'$. Відрізок AP ($P' \equiv P$) – єдиний графічний розв'язок ОМЗ-1.

Характерною ознакою **графоаналітичного** методу потрібно вважати попереднє встановлення, через порівняно прості алгебричні представлення, визначальних, незмінних у паралельному проєкціюванні співвідношень між заданими і шуканими елементами конструкції. Після цього, з урахуванням знайдених залежностей, формується переважно надто проста графічна кінцівка задачі, що є ключовою в накресленні замовленої висновком геометричної фігури. Так, побудовна (графічна) складова пропозиції помітно мінімізується.

У розглядуваному конкретному випадку визначальною є точка P , тому **перший (аналітичний)** етап пошуку розв'язку можна провести в такий спосіб. Побудуємо акуратно «від руки» на вільному місці поля креслення (рис. 6) будь-який трикутник $A_0B_0C_0$, приблизно («на око») дотримуючись взаємних метричних залежностей, тобто з гострим кутом у 45° і такий, в якого прилеглі до кута сторони пов'язані заданим співвідношенням: $B_0A_0 = \frac{1}{2} B_0C_0$. Опустимо перпендикуляр A_0P_0 на сторону B_0C_0 . Далі міркуємо так. Якщо покласти, наприклад, $B_0A_0 = 1$, то $B_0C_0 = 2$, а $B_0P_0A_0$ – рівнобедрений прямокутний трикутник і $B_0P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. У свою чергу, отримаємо таке: $P_0C_0 = B_0C_0 - B_0P_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, а $B_0P_0 : P_0C_0 = 1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

Графічний (завершальний) етап, виконаний інструментами (чи акуратно «від руки»), добре простежується за рисунком. Нагадаємо, що тут задіяно узагальнену теорему Фалеса та навички в побудові відрізків, які формально представлені виразами із скінченним числом раціональних операцій та добування коренів квадратних ([1], р. II, §1, п. 1.1).

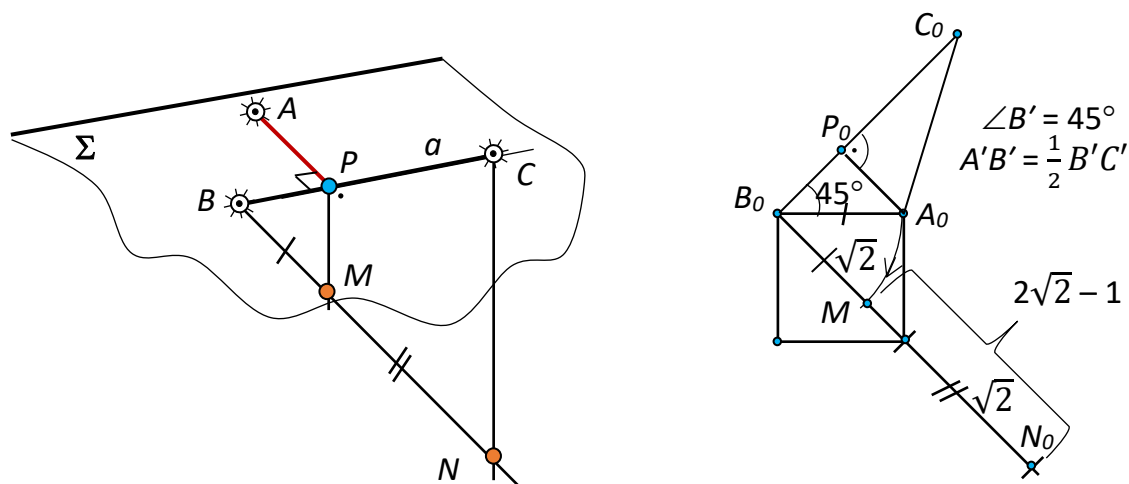


Рис. 6. Графоаналітичний метод розв'язання задачі

Задача 2. Площину загального розташування задано рівнобедреним трикутником ABC ($AC = BC$) з основою $AB = 6\sqrt{3}$ та кутом при вершині C , що дорівнює 120° . На перпендикулярі, проведеному до площини трикутника у вершині A , взято точку M так, що $AM = 3\sqrt{6}$. Обчислити відстань від точки M до бічної сторони BC трикутника.

Сформульовану задачу показово-розвивального характеру було частково розглянуто у статті [3], проте ми вирішили доповнити умову обчислювальною складовою і додати їй конструктивізму. Але і в цьому випадку не варто забувати, що навіть у пошуку обчислювального розв'язку змодельований рисунок має залишатися якісно інформативним.

Конструктивний етап. Шуканий перпендикуляр MQ із точки M до прямої BC (рис. 7) є, що очевидно, похилою до площини трикутника ABC . Згідно із теоремою про три перпендикуляри, його проекція AQ теж перпендикулярна до BC . Саме тому, для розв'язання задачі, варто спочатку провести у площині загального розташування висоту заданого трикутника з вершини A на її протилежну сторону BC . Оскільки кут C тупий (дорівнює 120°), точка Q – основа перпендикуляра AQ лежатиме зовні відрізка BC .

Аналізуючи рисунок, шанувальник геометрії помітить, що трикутник AQC прямокутний ($\angle Q = 90^\circ$), а $\angle ACQ = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ$ і $\angle CAQ = 30^\circ$. Отже, катет CQ прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , у два рази менший за гіпотенузу AC , тому матимемо, що $CQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$. Розділивши відрізок BC навпіл і відклавши від точки C упродовж променя BC відрізок $CQ = \frac{1}{2}BC$, отримаємо шукану точку Q . Побудову перпендикуляра MQ завершуємо просто.

У конструктивній метричній стереометрії досить часто користуються правилом: щоб провести перпендикуляр із точки на пряму (чи на площину),

обґрунтовано зображають перпендикуляр із вдало обраної (виконавцем побудови) іншої точки на ту ж пряму (площину). Потім через задану точку проводять пряму, паралельну вже побудованому перпендикуляру. Отже, – це інший шлях побудов.

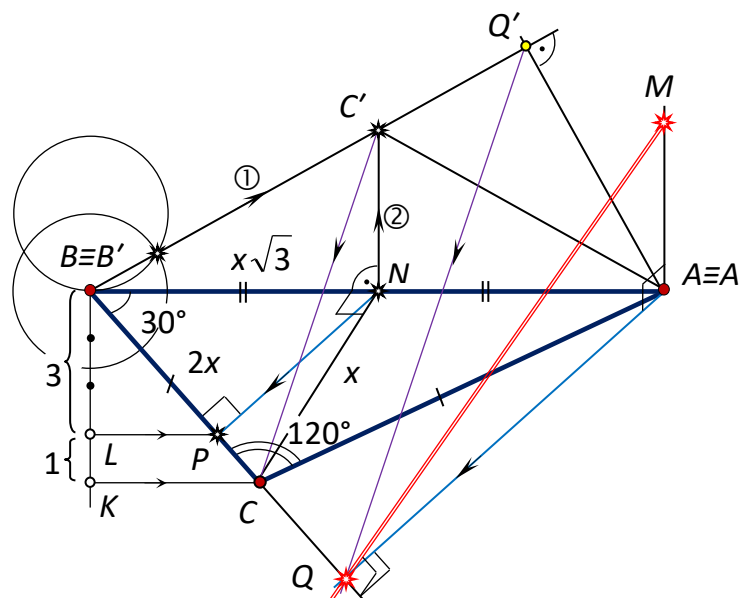


Рис. 7. Демонстрація методів розв'язання задачі

Зручно, наприклад, опустити перпендикуляр на сторону BC трикутника ABC із точки N , яка є серединою його основи AB . Справді, $\angle A = \angle B = 30^\circ$, а CN – медіана, бісектриса і висота заданого трикутника. Згідно із фактом, що у прямокутному трикутнику CNB ($\angle N = 90^\circ$) кожен із його катетів є середнім геометричним між гіпотенузою і власною проекцією на гіпотенузу, одержимо: $BN^2 : NC^2 = BP : PC$. Звідки, позначивши $CN = x$, матимемо, що $BC = 2x$, $BN = x\sqrt{3}$, а $BP : PC = (x\sqrt{3})^2 : x^2 = 3 : 1$. Розділивши сторону трикутника BC точкою P у відношенні 3:1 (від точки B), з'єднаємо точки N і P відрізком, перпендикулярним BC , і через точку A паралельно NP проведемо проекцію похилої AQ , а потім і шукану похилу MQ .

Схожий підхід до розв'язання задачі на побудову є насправді *графоаналітичним*, а саме: 1) *формально-логічно* розраховано розташування на прямій BC основи P перпендикуляра NP ; 2) знайдений результат дозволив *графічно* змоделювати зображенням проекцію похилої AQ за вже відомим її напрямом у площині трикутника ($AQ \parallel NP$); 3) з'єднавши точки M і Q , одержано виважено точний візуальний розв'язок задачі.

Конструктивізму геометрії притаманна розмаїтість у вирішенні багатьох побудовних проблем, що вельми корисно в якісному пізнанні дисципліни. Тому скористаємося переміщенням у просторі (*рухом*) і дійдемо до результату винятково *графічним* методом.

Уявимо собі, що переміщуючи трикутник ABC ми «кладемо» його на картинну площину стороною AB ($A'B' \equiv AB$). Обертанням точки $C \equiv C'$ навколо прямої $A'B'$ суміщаємо її з площиною зображень. Побудувати точку C' циркулем і лінійкою у два кроки просто, якщо взяти до уваги, що в оригіналі $\angle A' = \angle B' = 30^\circ$ (з допомогою серединного перпендикуляра в точці N до BC і двох кіл рівних

радіусів, див. рис. 3). Далі площинним прийомом опускаємо з точки A' на пряму $B'C'$ перпендикуляр $A'Q'$. Точка Q' розділяє відрізок $B'C'$ зовнішнім чином у відношенні, в якому точка Q ділить відрізок BC , адже рухи зберігають відношення відрізків на прямій. Відшукування точки Q здійснюємо через узагальнену теорему про пропорційні відрізки [11]. Сполучивши точку Q з точками A і M , отримуємо перпендикулярні BC похилу MQ і її проекцію AQ .

Обчислювальний етап. Повернувшись до трикутника CNB ($\angle N = 90^\circ$), легко знаходимо, що $CN = x = 3$, $BC = AC = 2x = 6$, а $CQ = 3$ (в одиницях масштабу).

Отже, із прямокутного трикутника AMQ , в якому $AM = 3\sqrt{6}$, отримуємо, що $MQ = 9$ (од. м.).

Конструктивно до цього останнього результату неважко дійти завдячуючи розглянутому суто графічному методу побудов. Тут, як відомо, основа заданого трикутника $A'B' \equiv AB$ уже є оригінальним відрізком. На картинній площині (після операції суміщення, рис. 7) зображено в натуральну величину прямокутний трикутник $A'Q'C'$, в якого $A'Q' = 3\sqrt{3}$, $Q'C' = 3$, $A'C' = 6$. Поклавши це зображення в основу, знаходимо на виносному кресленні оригінальну довжину відстані $M'Q'$ від точки M' до сторони $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 8, а-в): 1). Обираємо одиницю довжини, поділивши відрізок $Q'C' = 3$ на три рівні частини. 2). За відомої одиниці довжини, методом середніх геометричних (рис. 8, б) у прямокутному трикутнику, просто знаходимо відрізок довжиною $\sqrt{6}$. 3). За двома катетами будуємо прямокутний трикутник $A'M'Q'$, гіпотенуза якого $M'Q'$ дорівнює 9 од. м.

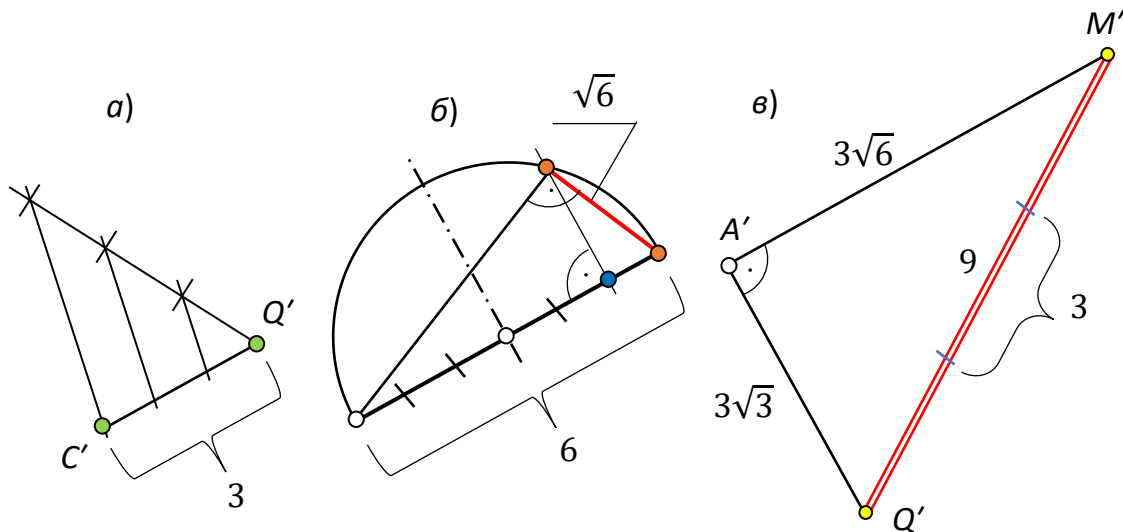


Рис. 8. Конструктивний шлях до результату

Можна оцінити точність виконаних графічних побудов. Для цього варто ретельно заміряти (з урахуванням одиниці масштабу) довжину відрізка $M'Q'$ на рисунку 4 та порівняти результат із його розрахунковою довжиною.

Наразі зараз перейдемо до задач на перпендикулярність прямих і площин із тілами стереометрії.

Спочатку розглянемо дві задачі конструктивного характеру, у висновках яких поставлено вимогу провести пряму, перпендикулярну площині (прямій), котра є одним із заданих (чи таких, які потрібно добудувати) елементів наявного стереометричного тіла.

Задача 3. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з відношенням

ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$ через вершини B, C_1 і D проведено площину. На ребрі A_1D_1 узято точку P . Опустіть перпендикуляр із точки P на площину BC_1D , якщо $A_1P : PB_1 = 1 : 2$.

Аналізуючи текст задачі та рисунок 9, а до неї, неважко помітити, що площина діагонального перерізу паралелепіпеда $\Delta(A_1BCD_1)$ й площина $\Sigma(BC_1D)$, визначена умовою, взаємно перпендикулярні, оскільки (згідно з ознакою перпендикулярності двох площин [12, § 3, п. 15]) діагональ DC_1 , що належить площині Σ і водночас грані DCC_1D_1 , яка має форму квадрата, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються у площині Δ : $A_1D_1 \perp DC_1$ і $CD_1 \perp DC_1$. Лінією перетину площин Δ і Σ , очевидно, буде пряма BQ .

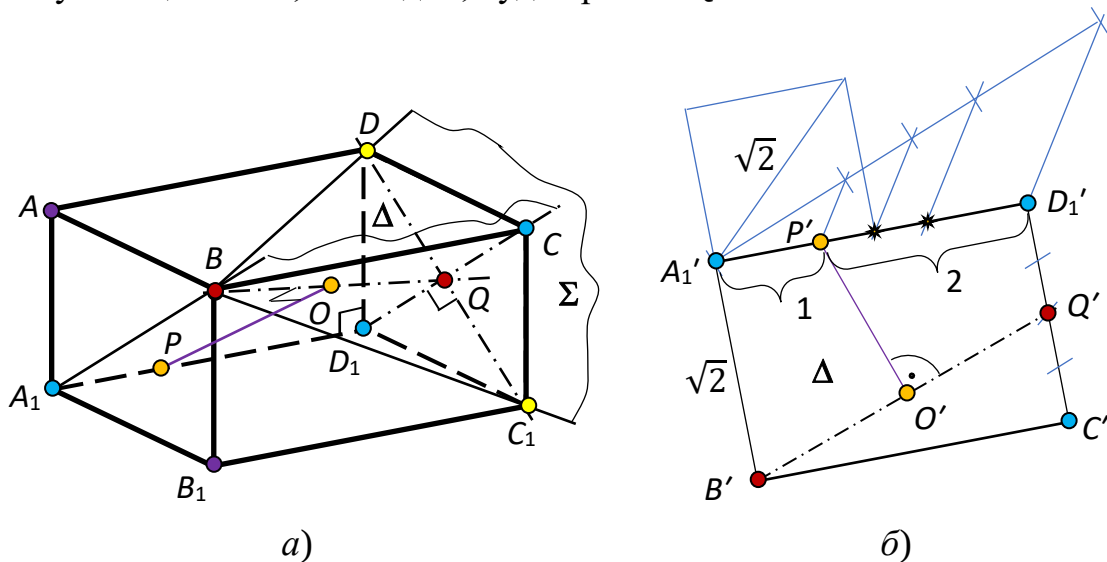


Рис. 9. Відстань від точки до площини

Отже, тепер потрібно опустити перпендикуляр з точки P на пряму BQ .

Скориставшись уже відомим методом обертання навколо лінії нульового рівня, «покладемо» на картинну площину (див. виносне креслення, рис. 9, б) прямокутник A_1BCD_1 , де в якості оригінального обираємо відрізок $A_1D_1 = A_1'D_1' = 2$ од. м. Елементарні площинні операції моделюють істинну відстань від точки P' до прямої $B'Q'$. Залишається відрізок BQ відомим прийомом поділити у відношенні $BO : OQ = B'O' : O'Q'$ (рис. 9, а). PO – шуканий перпендикуляр.

Задача 4. В основі призми лежить рівносторонній трикутник ABC . Дві бічні грані призми – ромби зі спільним ребром AA_1 і гострим кутом 60° . Опустіть перпендикуляр із точки P , узятій на ребрі AA_1 , на діагональ BC_1 грані BB_1C_1C , якщо $AP : PA_1 = 1 : 1$.

Сформульована задача специфічна стосовно вибору вдалого розміщення на картинній площині правильного і наочного рисунка (ракурсу зовнішнього проєкціювання). Спочатку варто надто уважно осмислити її умову, хоча тут міркування не складні. Гострі кути у двох бічних ромбів зі спільним ребром AA_1 рівні 60° . Це означає, що їхні діагоналі, протилежні кутам у 60° , розбивають кожен ромб на два рівносторонні трикутники. Звідси випливає, що всі ребра призми рівні між собою. Оскільки бічні грані AA_1C_1C і AA_1B_1B також рівні та ще й нахилені під рівними кутами до площини основи $A_1B_1C_1$ (ABC), то третя бічна грань призми BB_1C_1C є квадратом. Висоти трикутників ABB_1 і ACC_1 ділять відповідно їхні основи BB_1 і CC_1 навпіл, а трикутник ACB_1 – рівнобедрений, тому

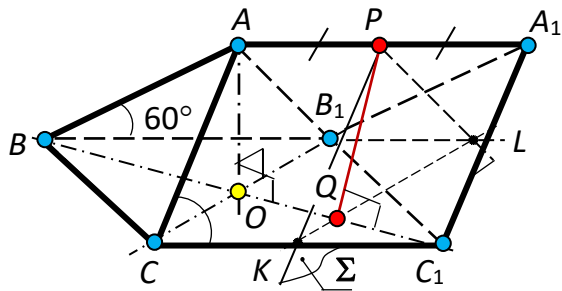


Рис. 10. Відстань від точки до прямої

вершина A ортогонально проєкціюється в центр O квадрата BB_1C_1C .

Завдячуючи таким висновкам (рис. 10), можна легко провести через будь-яку точку ребра AA_1 площину, що перпендикулярна прямій BC_1 . Саме тому (для наочності), в якості основи призми, ми обрали її бічну грань, що є квадратною.

Таким чином, можемо констатувати, що площина рівнобедреного трикутника ACB_1 перпендикулярна до прямої BC_1 . Поділивши точкою P відрізок AA_1 пополам (відповідно до умови), проводимо на рисунку через дану точку P площину Σ паралельно (ACB_1) . Далі, скориставшись фактом, що дві паралельні площини перетнуті третьою площиною висікають паралельні прямі [12, § 2, п. 12] ($KL \parallel CB_1$), й за схемою ОПЗ-1 просто знаходимо точку Q , яка є основою перпендикуляра, опущеного із середини (P) відрізка AA_1 на пряму BC_1 .

Щоб побудувати оригінальний за розмірами відрізок PQ , потрібно на виносному кресленні сумістити із площиною зображень рівнобедрений трикутник PKL , в якого $KL = CB_1 = K'L' = \sqrt{2}$, а $P'K' = P'L' = 1$, що ми й пропонуємо зацікавленій особі реалізувати самостійно.

Обидві задачі розв'язані виключно конструктивним методом.

Іншу із двох основних метричних задач – на відшукування відстані від точки до площини (ОМЗ-2), найліпше продемонструвати прикладами розв'язання стереометричних пропозицій на обчислення.

Задача 5. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 6, 8 і 10 од. м. Верхня грань призми нахилена до нижньої грані під кутом α ($\cos \alpha = \frac{4}{5}$) і відтинає від бічних ребер, які проходять через вершини двох більших кутів основи, відрізки по 8 од. м. Знайти об'єм, площу повної поверхні та відстань від вершини нижньої основи призми C_1 до верхнього її зрізу ABC .

Аналізуючи умову за кресленням-картиною (рис. 11), помічаємо, що в основі призми лежить прямокутний трикутник ($\angle B_1 = 90^\circ$). Оскільки сторона зрізу AB розміщена перпендикулярно грані BB_1C_1C ($AB \perp B_1C_1$, $AB \perp BB_1$), то заданий кут між площиною зрізу та основою призми вимірюється лінійним кутом CBN ($\angle ABC = 90^\circ$). Працюючи зі схожою призмою, в обчисленнях об'єму доречно розбити її на дві складові: пряму призму $ABCA_1B_1C_1$ і піраміду $CABN$. Так, $V_{ABNA_1B_1C_1} = 192$, а $V_{CABN} = 48$, що підраховується за відомими формулами. Остаточню для шуканого об'єму матимемо: $V_{\Pi} = 240$ (куб. од. м.).

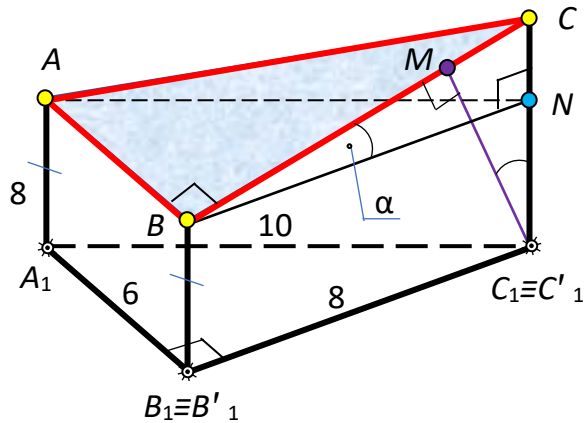


Рис. 11. Зріз призми площиною

Обчислюючи повну поверхню призми, слід знайти площу бічних граней та площу основ: $S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = 24$, $S_{AA_1 B_1 B} = 48$, $S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta A B N}}{\cos \alpha} = 30$. Дві інші бічні грані, що мають форму прямокутних трапецій зі спільною основою $CC_1 = CN + NC_1$, де $NC_1 = 8$, а CN знаходимо із прямокутного трикутника CNB : $CN = NB \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6$. Отже, $CC_1 = 14$, $S_{BB_1 C_1 C} = 88$, $S_{AA_1 C_1 C} = 110$. У сумі отримаємо такий результат: $S_{\Pi} = 300$ (кв. од. м.).

Відстань від вершини призми C_1 до зрізу ABC потрібно шукати у площині грані $BB_1 C_1 C$, оскільки шуканий відрізок $C_1 M$ перпендикулярний двом прямим верхньої грані AB і BC . Трикутники BNC і $C_1 M C$ подібні – вони прямокутні зі спільним гострим кутом при вершині C . Отже, $BC : C_1 C = BN : C_1 M$. Звідси маємо, що $C_1 M = (C_1 C \cdot BN) : BC = 11,2$ (од. м.).

Щоб якісно візуалізувати процес відшукування оригінального розташування основи перпендикуляра M на відрізку BC (і площі трикутника ABC), потрібно перемістити грань $BB_1 C_1 C$ у просторі, поклавши ребром $B_1 C_1$ на картинну площину, а потім сумістити її з цією площиною обертанням навколо нульової лінії рівня $B'_1 C'_1$ (рис. 12).

Припустивши, що відрізок основи призми $B_1 C_1 \equiv B'_1 C'_1$ (рис. 11) зображено істинною величиною (8 од. м.), першим обертанням грань $B_1 C_1 C B$ зрізаної призми сумістимо із площиною зображень. При цьому зріз призми, перпендикулярний указаній грані, вироджується у відрізок $B'C'$. Другим обертанням зрізу на 90° , де в якості осі обертання тепер уже буде пряма $B'C'$, отримаємо зображення прямокутного трикутника $A'B'C'$ у натуральну величину (тут, згідно з умовою, катет $A'B' = 6$ од. м.).

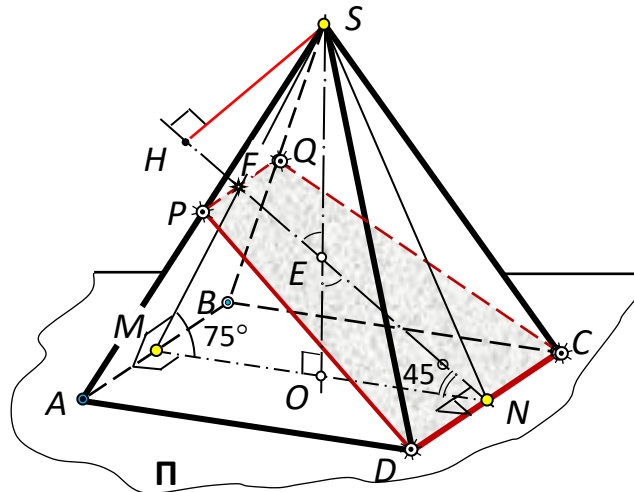


Рис. 13. Переріз піраміди площиною

Маємо, що перерізом буде рівнобічна трапеція $PQCD$, яка відсікає від заданої піраміди $SABCD$ піраміду $SPQCD$. Об'єм кожної піраміди слід виражати формулою $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot h$. Якщо подати об'єми обох пірамід функцією деякого параметра a , то в шуканому відношенні цей параметр скоротиться. Тому для зручності у викладах покладемо, наприклад, сторону основи правильної чотирикутної піраміди рівною a .

Тепер площа основи піраміди $SABCD$, що очевидно, дорівнює a^2 ; висоту SO легко знаходимо у прямокутному трикутнику SOM , катет якого $MO = \frac{a}{2}$, а гострий кут рівний 75° : $SO = MO \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Отже, $V_1 = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. (*)

Для відшукування об'єму піраміди $SPQCD$ потрібно знайти площу її основи (трапеції $PQCD$) і висоту, тобто відстань від вершини S до площини перерізу.

Спочатку знайдемо площу трапеції $PQCD$. Її більша основа CD дорівнює a ; висота NF є стороною трикутника NFM , в якого кут при вершині F рівний 60° , а $NM = a$. За теоремою синусів матимемо: $\frac{NF}{\sin 75^\circ} = \frac{NM}{\sin 60^\circ}$. Звідси отримаємо $NF = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$. Меншу основу трапеції PQ шукатимемо з подібності трикутників SPQ і SAB : $\frac{PQ}{AB} = \frac{SF}{SM}$. Тут $AB = a$, у трикутнику SFN кут при вершині F рівний 120° , а при вершині N – 30° . Тому цей трикутник рівнобедрений, а $SF = NF$. У трикутнику SOM $SM = \frac{MO}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}-1}$. Таким чином, із записаного вище відношення отримаємо: $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Площу трапеції $PQCD$ обчислюємо за відомою формулою: $S = \frac{CD+PQ}{2} \cdot NF$. Отже, матимемо: $S_{PQCD} = \frac{\sqrt{2}a^2(\sqrt{3}+1)^2}{12}$.

Відомо, що у просторі відстань від точки до площини знаходять у три кроки: 1) через точку проводять пряму, перпендикулярну площині; 2) шукають точку перетину прямої з площиною (ОПЗ-1); 3) заміряють відстань між двома точками.

У стереометричних фігурах, як правило, через задану точку проводять площину, котра перпендикулярна заданій площині та в якій (за ознакою перпендикулярності двох площин) і буде розміщено шуканий перпендикуляр до

прямої їх перетину. В нашій ситуації площина симетрії піраміди (SMN) перпендикулярна її перерізу $PQCD$ і вони перетинаються по прямій NF . Отже, відстань від точки S до січної площини (висота піраміди $SPQCD$) вимірюється відрізком перпендикуляра SH , проведеного з точки S на пряму NF .

Зауважимо, оскільки $\angle SFN = 120^\circ$ (трикутник SFN – тупокутний), то основа H перпендикуляра лежить зліва від точки F , тобто за межами відрізка NF (що нижче буде продемонстровано конструктивно).

Прямокутні трикутники SHE і NOE подібні, адже $\angle SEH = \angle NEO$ як вертикальні. Причому, обидва трикутники рівнобедрені та прямокутні. Отже маємо: $SH : NO = SE : NE$. Звідси, як результат, отримаємо: $SH = \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$.

Записуємо вираз для об'єму піраміди $SPQCD$: $V_2 = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{12(\sqrt{3}-1)}$. (**)

Поділивши рівності (**) і (*), остаточно матимемо: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}+1}{6} \approx 0,45534$.

Констатуємо, що так отримане відношення менше одиниці, що цілком природньо. Задачу на обчислення розв'язано.

Тепер варто додати задачі конструктивізму, змодельовавши побудовним методом місце розташування основи H перпендикуляра SH на відрізку NF , його істинну довжину і оригінальну форму та розміри трапеції, яка є перерізом даної піраміди (рис. 14).

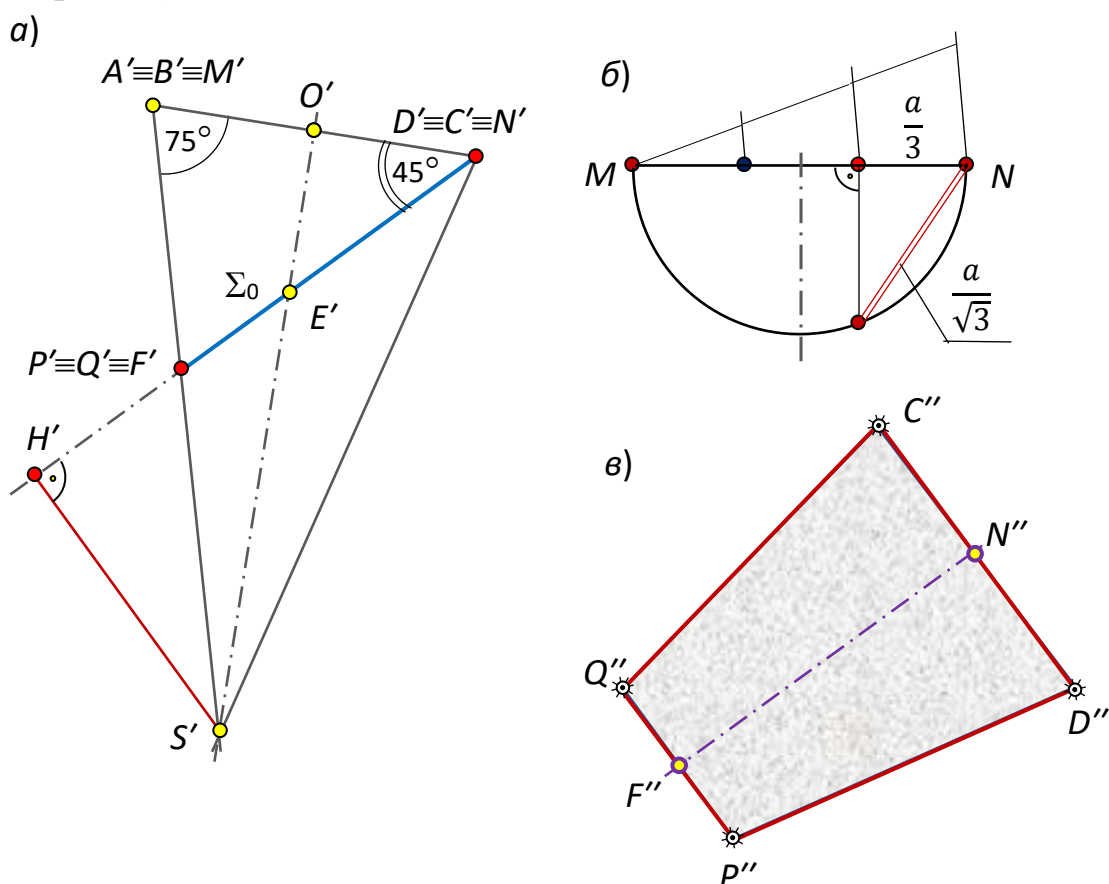


Рис. 14. Істинні форма і розміри перерізу піраміди площиною

Переміщенням у просторі «кладемо» середню лінію NM в основі піраміди на картинну площину. Це буде відрізок, довжина якого (у міліметрах) істинно рівна a . Поворотом навколо лінії нульового рівня $N'M'$ суміщаємо площину

симетрії піраміди (SMN) з картинною площиною (рис. 14, *а*). При цьому трапеція $PQCD$, перпендикулярна площині (SMN), виродиться у відрізок $N'F'$, що є висотою трапеції в натуральну величину. Перпендикуляр $S'H'$ опускаємо на січну площину як це прийнято у планіметрії. Тепер (рис. 13) можна (за потреби) строго знайти точку H , поділивши зовнішнім чином відрізок NF у відношенні, в якому точка H' ділить відрізок $N'F'$, адже поділ відрізка в заданому відношенні є інваріантом будь-якого різновиду руху.

Щоб отримати оригінальним за формою і розмірами переріз піраміди, потрібно виконати ще один поворот трапеції $P'Q'C'D'$ на 90° навколо висоти $N'F'$, сумістивши її з площиною зображень (рис. 14, *в*). Тут, щоб отримати в натуральну величину довжину меншої основи трапеції $P'Q'$, скористаємося середніми геометричними у прямокутному трикутнику (рис. 14, *б*). Решту елементів трапеції беремо з рисунка 14, *а*.

Таким чином, зараз задачу розв'язано *графоаналітичним* методом, адже для зображення трапеції використано отриману вище формулу $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Чи можна змодельовати відрізок PQ суто графічно? Так, звичайно. З цією метою досить сумістити з картинною площиною бічну грань піраміди (рівнобедрений трикутник) SAB , основу $AB = a = N'M'$ і висоту $S'M'$ якого слід узяти (заміряти) з рисунка 14, *а*. Розділивши висоту побудованого трикутника у відношенні $S'F' : F'M'$ та провівши через отриману точку пряму паралельно його основі, в перетині з бічними сторонами матимемо оригінальний за довжиною відрізок PQ (рисунок відсутній).

З метою оцінки точності конструктивних операцій, варто якомога більш точно «зняти» довжину відрізка $a = N'M'$ і підставити це значення у формули, виведені для площі основи і висоти піраміди $SPQCD$, прийнявши їх за істинні. Далі слід заміряти (рис. 14) довжини відрізків $S''H''$, $N''F''$, $P''Q''$ і $C''D''$, обчислити площу трапеції $P''Q''C''D''$ і знайти абсолютну та відносну похибки рисункових операцій.

У наших замірах $a = 4,4$ см. Підставивши у формули (*) і (**) значення a , ми отримали $V_1 \approx 52,9866$ (см³), а $V_2 \approx 24,13$ (см³). Отже, $V_2 : V_1 \approx 0,455398$. Абсолютна похибка складає $0,58 \cdot 10^{-4}$ (см³), а відносна – $1,274 \cdot 10^{-2} \%$.

На завершення пропонуємо ще одну задачу, яку, очевидно, легко розв'язати методами аналітичної геометрії. Ми ж демонструємо шлях до результату, який цілком прийнятний в умовах сучасної школи.

Задача 7. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда з вимірами a (3), b (5) і c (7) в од. м. площиною, що перпендикулярна до діагоналі та проходить через її середину (одиниці виміру взяті довільно).

Площину перерізу Σ зручно задати двома прямими m і n , які перетинаються (рис. 15) і проходять через точку O , що є серединою діагоналі A_1C . Першу з них (m) розташуємо горизонтально – паралельно основі $A_1B_1C_1D_1$ паралелепіпеда, побудувавши спочатку проєкцію E_1F_1 на основу, розмістивши її перпендикулярно проєкції A_1C_1 діагоналі A_1C . Іншу (n) проведемо у площині діагонального перерізу перпендикулярно до діагоналі.

Для виконання побудов скористаємося методом суміщення – обертання навколо лінії нульового рівня, яка належить картинній площині.

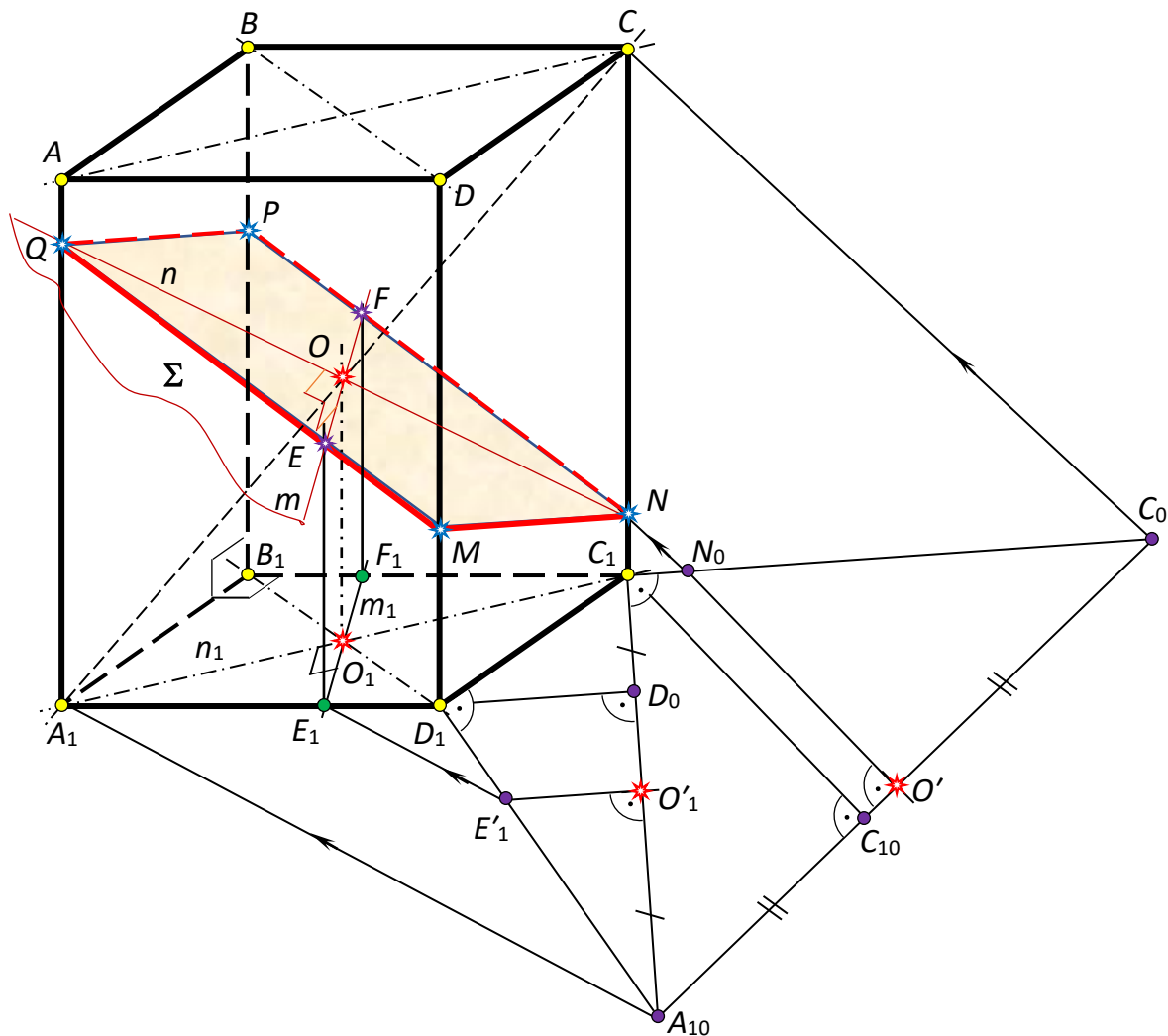


Рис. 15. Конструктивний шлях розв'язання позиційно-метричної задачі

Уявляємо собі, що ми переміщуємо паралелепіпед у просторі та кладемо сторону його нижньої основи D_1C_1 на картинну площину й обираємо даний відрізок оригінальним за довжиною ($a = 3$). Оскільки кут D_1 прямий, а $A_1D_1 = b$ ($b = 5$), будуємо прямокутний трикутник $D_1A_{10}C_1$ за відомими катетами. Як результат, гіпотенуза трикутника $A_{10}C_1$ буде істинною (в розмірах) діагоналлю основи A_1D_1 . Опустивши перпендикуляр D_1D_0 з вершини прямого кута D_1 на $A_{10}C_1$ та провівши через середину гіпотенузи O'_1 пряму $O'_1E'_1$ паралельно D_1D_0 , отримаємо точку E'_1 ; розділивши точкою E_1 сторону основи A_1D_1 у відношенні, в якому точка E'_1 ділить $A_{10}D_1$, матимемо проєкцію $E_1F_1 \equiv m_1$ прямої m на площину основи паралелепіпеда. Пряму m ($m \equiv EF$) проведемо через точку O паралельно m_1 , що обґрунтовується оберненою теоремою про проєкціювання прямого кута.

За рисунком неважко зрозуміти шлях побудови точок E і F перетину прямої m із гранями паралелепіпеда: $E = m \cap AA_1D_1D$; $F = m \cap BB_1C_1C$.

Для відшукування спільних точок бічних ребер AA_1 і CC_1 із січною площиною (чого цілком достатньо для побудови перерізу), скористаємося вже набутим досвідом, а саме, на раніше зображеній (в оригіналі) діагоналі основи $A_{10}C_1$ (як на одному з катетів) побудуємо ще один прямокутний трикутник $A_{10}C_1C_0$, де іншим катетом буде бічне ребро c ($c = 7$). Уже відомим прийомом

знайдемо на C_1C_0 точку N_0 і поділимо CC_1 у відношенні, в якому точка N_0 розділяє C_1C_0 . Так знайдена точка N буде однією з вершин шуканого перерізу; ще інша вершина Q на ребрі AA_1 – симетрична точці N відносно середини O діагоналі A_1C .

Побудову паралелограма $MNPQ$ перерізу паралелепіпеда січною площиною $\Sigma(m \cap n)$ здійснюємо у три кроки: 1) точку N з'єднуємо з точкою F і фіксуємо точку P на ребрі BB_1 ; 2) точку Q з'єднуємо з точкою E і фіксуємо точку M на ребрі DD_1 ; 3) провівши відрізки QP і MN у бічних гранях багатогранника, отримуємо шуканий переріз.

У дослідженні даної конструкції варто мати на увазі, що перерізом може бути також шестикутник за умови, коли оригінальна довжина бічного ребра CC_1 паралелепіпеда строго менша діагоналі його основи A_1C_1 (точки N і Q лежатимуть на прямих CC_1 і AA_1 за межами однойменних ребер). У такій ситуації точка N_0 належатиме A_1C_1 , а точка Q_0 – діагоналі AC . Тоді відрізки перетину січної площини з основами паралелепіпеда слід провести через точки N_0 і Q_0 паралельно $m \equiv EF$, що висіче чотири вершини багатокутника перерізу. Цей факт легко обґрунтувати методом від супротивного. Ще дві вершини лежатимуть на ребрах BB_1 і DD_1 . Завершуємо побудову як описано вище.

Для цієї ситуації пропонуємо зацікавленій особі виконати окремий рисунок.

Задачі для самостійного розв'язання.

№ 1. На ребрі SB правильного тетраедра $SABC$ узято точку K таку, що $SK : KB = 2 : 1$. Опустіть перпендикуляр із точки K на ребра SA і SC та знайдіть точку перетину висоти SO тетраедра з площиною, яка проходить через проведені перпендикуляри.

№ 2. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ висота SO дорівнює стороні основи AB . Із вершини D опустіть перпендикуляр на площину грані SBC .

№ 3. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1 : AC = 1 : 2$. Побудуйте геометричне місце точок на поверхні призми, які рівновіддалені від точок: а) A і C_1 ; б) P і C_1 , де P – середина ребра AB ; в) Q і C_1 , де Q – середина ребра AA_1 .

№ 4. У трикутній піраміді $SABC$ основою є прямокутний трикутник ABC із прямим кутом у вершині C і катетами $AC = 3$ і $BC = 4$. Висота піраміди проєкціюється в точку C і дорівнює гіпотенузі AB . Опустіть із точки C перпендикуляр на площину грані SAB .

№ 5. На ребрі CC_1 куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ узято точку P , яка ділить ребро у відношенні $2 : 3$. Опустіть із точки B_1 перпендикуляр на пряму DP .

№ 6. Правильний тетраедр $SABC$ перетнули площиною, яка проходить через ребро AC і точку K , що належить ребру SB , причому $SK : KB = 2 : 1$. Знайдіть відношення об'ємів пірамід $SKAC$ і $KABC$.

№ 7. Через сторону основи правильної чотирикутної піраміди проведена площина, яка відтинає від протилежної грані трикутник площею 4 см^2 . Знайдіть бічну поверхню піраміди, що відсічена проведеною площиною, якщо бічна поверхня заданої піраміди рівна 25 см^2 .

Додайте обчислювального змісту задачам №№ 1-5, а задачі за №№ 6, 7 геометризуйте та унаочніть процес розв'язання конструктивно.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Кваліфіковане переформулювання обчислювальної стереометричної задачі на конструктивну змістовно наповнює завдання нюансами, які наочно-образно, уявлювано-динамічними прийомами в закономірних реалізаціях візуалізують ситуацію на картинній площині [14, 15], що додає всебічного розуміння її змісту та практицизму процесу моделювання. Зацікавленість, успіх у пізнанні геометрії, досягається не стільки числом розв'язаних задач, скільки постановкою проблем, глибиною мислення, навичками й уміннями якісного оперування геометричними образами. Одним із найперших обов'язків учителя є налаштування студента (учня) на прикладну значущість і життєву доцільність опанування геометрії.

Сьогодні в розділі «Стереометрія» ЗЗСО розв'язують пропозиції винятково обчислювального характеру, що не сприяє всебічному розвитку особистості. Ми пропонуємо звичні учням задачі геометризувати, не нехтуючи обчислювальною складовою, а доповнюючи умову доречними завданнями побудовного характеру, орієнтованими на прикладний, вимірювальний зміст дисципліни, з більшими можливостями зримого сприйняття моделі чи то рисунково, чи з використанням сучасних ІКТ у комп'ютерній графіці [16].

Конструктивні задачі стереометрії, процес їх розв'язання за характером і змістом інноваційні. Це розвиває візуальну грамотність, здатність міркувати й виражати якісними зображеннями власні думки, сприяє розумінню сутності закономірних просторових залежностей, зв'язків між визначальними елементами, обґрунтованих виражень одних елементів фігур через інші, спонукаючи суб'єкта навчання до творчого унаочнення задач, розвивального просторового уявлення й істинно геометричного мислення.

Дослідження конструктивізму в геометрії ми проводимо упродовж кількох десятиків років. Відповідно сучасним тенденціям у навчанні, плануємо залучати діючих й майбутніх учителів математики до моделювання як планіметричних, так і стереометричних ситуацій (фігур) із педагогічно виваженим, доречним, добре осмисленим застосуванням ІКТ, відомих ППЗН, мультимедіа тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ленчук, І. Г. (2010). *Конструктивна стереометрія в задачах*. ЖДУ ім. І. Франка.
2. Працьовитий М. В., & Ленчук І. Г. (2014). Евклідова геометрія: конструктивна складова. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 5: Педагогічні науки*, (50), 174-186.
3. Ленчук, І. Г. (2015). Просторові перетворення фігур у задачах стереометрії. *Математика в рідній школі*, (6), 33-39.
4. Ленчук, І. Г., (2016). Геометрична підготовка вчительських кадрів в університетах України: акценти на конструктивізм. *Сумський ДПУ ім. А. С. Макаренка, Науковий журнал: Фізико-математична освіта*, 2(8), 67-71.
5. Ленчук, І. Г., & Працьовитий, М. В., (2018). Психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач. *Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова*, СХХХІ(141), 113-121.
6. Ленчук, І. Г., & Працьовитий, М. В., (2019). Роль і місце виносних креслень у конструктивній стереометрії. *Математика в рідній школі*, (1-2), 20-23.
7. Ленчук, І. Г., (2021) Конструктивне моделювання стереометричних задач з перерізами.

ВДПУ ім. М. Коцюбинського, Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Збірник наукових праць, (60), 272-281.

8. Четверухін, М. Ф., (1953). *Рисунки просторових фігур у курсі геометрії*. Радянська школа.
9. Савченко, В. М., (1978). *Изображение фигур в математике*. Вища школа.
10. Слєпкань, З. И., (1983). *Психолого-педагогические основы обучения математики*. Радянська школа.
11. Погорєлов, О.В., (1998). *Геометрія : Планіметрія*: Підручник для 7-9 кл. сер. школи. Освіта.
12. Погорєлов, О. В., (1998). *Геометрія : Стереометрія*: підручник для 10-11 кл. сер. школи. Освіта.
13. Астряб, О. М., Масєгойз, Д. М., Гельфанд, М. Б., Шиманський, І. Є., Сергунова, О. П., Нестеренко, Т. Я., Білоусова, В. П., Савченко, В. М., Горбатий, П. А., Чайковський, В. Д., & Малинова, Б. І., (1956). *Методика викладання стереометрії* (О. М. Астряба & О. С. Дубинчук, Ред.). Радянська школа.
14. Кремень, В. Г., Ільїн, В. В., (2020). Презентація візуальної грамотності в освітньому процесі та її експлуатація в культурі мислення. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 75(1), 1-12.
15. Richard, S. Palais, (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», *Notices of the American Mathematical Society*, 46 (6), 647–658.
16. Botana, F., Abánades, M., & Escribano, J., (2014). «Using a Free Open Source Software to Teach Mathematics», *Computer Applications in Engineering Education*, 22 (4), 728-735.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Lenchuk, I. H. (2010). Konstruktyvna stereometriya v zadachakh. ZHDU im. I. Franka.[in Ukrainian].
2. Prats'ovytyy M. V., & Lenchuk I. H. (2014). Evklidova heometriya: konstruktyvna skladova. Naukovyy chasopys NPU im. M. P. Drahomanova. Seriya 5: Pedagogichni nauky, (50), 174-186. [in Ukrainian].
3. Lenchuk, I. H. (2015). Prostorovi peretvorenniya fihur u zadachakh stereometriyi. *Matematyka v ridniy shkoli*, (6), 33-39. [in Ukrainian].
4. Lenchuk, I. H., (2016). Heometrychna pidhotovka vchytel's'kykh kadriv v universytetakh Ukrayiny: aktsenty na konstruktyvizm. *Sums'ky DPU im. A. S. Makarenka, Naukovyy zhurnal: Fyzyko-matematychna osvita*, 2(8), 67-71. [in Ukrainian].
5. Lenchuk, I. H., & Prats'ovytyy, M. V., (2018). Psykholoho-pedahohichni peredumovy zastosuvannya heometrychnykh znan' do rozv'yazuvannya zadach. *Naukovi zapysky NPU im. M. P. Drahomanova, CXXXI*(141), 113-121. [in Ukrainian].
6. Lenchuk, I. H., & Prats'ovytyy, M. V., (2019). Rol' i mistse vynosnykh kreslen' u konstruktyvniy stereometriyi. *Matematyka v ridniy shkoli*, (1-2), 20-23. [in Ukrainian].
7. Lenchuk, I. H., (2021) Konstruktyvne modelyuvannya stereometrychnykh zadach z pererizamy. *VDPU im. M. Kotsyubyns'koho, Suchasni informatsiyni tekhnolohiyi ta innovatsiyni metodyky navchannya v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiya, teoriya, dosvid, problemy: Zbirnyk naukovykh prats'*, (60), 272-281. [in Ukrainian].
8. Chetverukhin, M. F., (1953). Rysunky prostorovykh fihur u kursi heometriyi. *Radyans'ka shkola*.
9. Savchenko, V. M., (1978). Yzobrazhenye fihur v matematyke. *Vyshcha shkola*. [in Ukrainian].
10. Slepkan', Z. I., (1983). Psikhologo-pedagogicheskiye osnovy obucheniya matematiki. *Radyans'ka shkola*. [in Ukrainian].
11. Pohoryelov, O.V., (1998). Heometriya : Planimetriya: Pidruchnyk dlya 7-9 kl. ser. shkoly. *Osvita*. [in Ukrainian].
12. Pohoryelov, O. V., (1998). Heometriya : Stereometriya: pidruchnyk dlya 10-11 kl. ser. shkoly. *Osvita*. [in Ukrainian].

13. Astryab, O. M., Mayerhoyz, D. M., Hel'fand, M. B., Shymans'kyi, I. YE., Serhunova, O. P., Nesterenko, T. YA., Bilousova, V. P., Savchenko, V. M., Horbatyy, P. A., Chaykovs'kyi, V. D., & Malynova, B. I., (1956). *Metodyka vykladannya stereometriyi* (O. M. Astryaba & O. S. Dubynchuk, Red.). *Radyans'ka shkola*. [in Ukrainian].
14. Kremen', V. H., Il'yin, V. V., (2020). *Prezentatsiya vizual'noyi hramotnosti v osvith'omu protsesi ta yiyi ekspluatatsiya v kul'turi myslennya. Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya*. 75(1), 1-12. [in Ukrainian].
15. Richard, S. Palais, (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», *Notices of the American Mathematical Society*, 46 (6), 647–658.
16. Richard, S. Palais, (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», *Notices of the American Mathematical Society*, 46 (6), 647–658.





УДК 519.23

НЕПАРАМЕТРИЧНІ КРИТЕРІЇ ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Василь МИХАЙЛЕНКО

vasylmikhailenko@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0000-5816-3839>

Анотація. У даному дослідженні розглядається класифікація критеріїв перевірки статистичних гіпотез на параметричні та непараметричні. Основна увага приділяється різниці між цими двома типами критеріїв: параметричні базуються на конкретних параметрах розподілу генеральної сукупності, тоді як непараметричні використовують структурні характеристики вибірки. Подаються приклади критеріїв, таких як Фішера та Стюдента, які є параметричними, і розглядається універсальність критерію "хі"-квадрат, який може вважатися як параметричним, так і непараметричним.

Далі дослідження переходить до розгляду статистики та критеріїв, таких як критерій знаків та знаковий ранговий критерій Вілкоксона, Манна й Уїтні, застосовуваних до експериментів з однаковими об'єктами до і після обробки. Підкреслюється важливість непараметричних методів у випадках, коли розподіл генеральної сукупності невідомий або не нормальний.

Також розглянуто використання критерію "хі"-квадрат, який може бути як параметричним, так і непараметричним в залежності від умов застосування. Зазначається його універсальність і можливість використання для аналізу частотних даних.

Наприкінці, детально описується алгоритм урахування повторень та нульових різниць у контексті критерію Вілкоксона, Манна й Уїтні і критерію Стюдента для незалежних вибірок. Пояснюється використання методу середніх рангів при однакових значеннях та процедури урахування нульових різниць. Такий підхід дозволяє адаптувати критерій до різноманітних сценаріїв досліджень.

В цілому, дослідження має на меті введення у поняття параметричних та непараметричних критеріїв, а також надає приклади їх практичного застосування в математичній статистиці.

Ключові слова: параметричні критерії, непараметричні критерії, структурні характеристики вибірки, симетричність розподілу, статистика Вілкоксона, Манна і Уїтні, абсолютні різниці, критерій "хі"-квадрат для однорідності вибірок.

NON-PARAMETRIC TEST CRITERIA OF STATISTICAL HYPOTHESES

Vasyl MIKHAILENKO

vasylmikhailenko@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0000-5816-3839>

Abstract. This study examines the classification of statistical hypothesis testing criteria into parametric and nonparametric. The main focus is on the difference between these two types of criteria: parametric ones are based on specific parameters of the population distribution, while nonparametric ones use structural characteristics of the sample. Examples of criteria, such as Fisher's and Student's, which are parametric, are given, and the versatility of the chi-square criterion, which can be considered both parametric and nonparametric, is discussed.

The study then moves on to consider statistics and criteria, such as the Wilcoxon, Mann, and Whitney sign test and the sign rank test, applied to experiments with identical objects before and after processing. The importance of nonparametric methods is emphasized in cases where the distribution of the general population is unknown or non-normal.

The use of the chi-square criterion, which can be both parametric and nonparametric depending on the conditions of application, is also considered. Its versatility and the possibility of using it to analyze frequency data are emphasized.

Finally, the algorithm for taking into account repetitions and zero differences in the context of the Wilcoxon, Mann and Whitney test and the Student's test for independent samples is described in detail. The article explains the use of the method of average ranks with identical values and the procedure for accounting for zero differences. This approach allows the criterion to be adapted to various research scenarios.

In general, the study aims to introduce the concepts of parametric and nonparametric criteria and provides examples of their practical application in mathematical statistics.

1. Загальні зауваження.

Критерії перевірки статистичних гіпотез умовно поділяють на параметричні та непараметричні.

Якщо побудова критерію спирається на конкретний тип розподілу генеральної сукупності або для цього використовуються параметри цієї сукупності, то такий критерій називають *параметричним* (не плутати з поняттям параметричної гіпотези!). До параметричних критеріїв належать, наприклад, критерії Фішера та Стюдента, які базуються на нормальному розподілі генеральних сукупностей. Інший приклад — критерії перевірки гіпотез про ймовірності випадкових подій спираються на біномний розподіл генеральної сукупності (кількості «успіхів» у схемі Бернуллі).

Якщо критерій не базується на припущенні конкретного розподілу генеральної сукупності і не використовує параметри цієї сукупності, то його називають *непараметричним* (ще — незалежним, або вільним, від розподілу генеральної сукупності). У непараметричних критеріях використовуються не самі числові значення елементів вибірки, а її структурні характеристики (наприклад, відношення порядку між елементами вибірки типу «більше-менше»). Ці критерії особливо цінні тоді, коли розподіл генеральної сукупності невідомий або відрізняється від нормального розподілу і результатів спостережень (які, зокрема, можуть мати нечисловий характер) недостатньо для застосування, наприклад, критерію «хі»-квадрат.



Зауваження 1. Критерію «хі»-квадрат завдяки його універсальності відводиться у математичній статистиці особливе місце. Зазвичай його не відносять до параметричних чи непараметричних критеріїв, оскільки зробити це однозначно не можна. Так, критерій «хі»-квадрат перевірки гіпотези однорідності вибірок за невідомого розподілу генеральної сукупності не залежить від типу і параметрів цього розподілу і тому може вважатись непараметричним. Якщо ж перевіряється гіпотеза, що вибірки одержані з генеральної сукупності, яка має розподіл заданого типу, то однозначно назвати відповідний «хі»-квадрат критерій непараметричним уже не можна, оскільки кількість ступенів вільності граничного χ^2 -розподілу залежить від кількості параметрів генеральної сукупності, які попередньо оцінюються.

Доцільно нагадати, що застосування критерію «хі»-квадрат для перевірки тієї чи іншої гіпотези також передбачає використання не самих числових значень елементів вибірки, а їх частот (чи групованих частот). Зокрема, результати спостережень також можуть мати нечисловий характер.

Зупинимось на деяких поняттях, що знадобляться нам надалі.

I. Неперервність розподілу. Далі ми спиратимемося на припущення, що всі випадкові величини, які спостерігаються, мають розподіл *неперервного* типу. Це припущення зазвичай випливає з фізичної природи явища, що вивчається, і не потребує спеціальної перевірки. Математично воно означає існування для кожної такої випадкової величини Z щільності розподілу $f_z(z)$, так що

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^z f_z(t) dt,$$

де $F_z(z)$ — функція розподілу.

Звідси, зокрема, випливає, що ймовірність окремого значення випадкової величини Z дорівнює нулю. Тому для компонент ви-падкової вибірки

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \quad (1)$$

спостережень над Z можна записати

$$P\{Z_i = Z_j\} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n (i \neq j).$$

Це дає змогу з теоретичного погляду вважати всі n спостережень над випадковою величиною Z різними, чим і користуються на стадії теоретичної побудови непараметричних критеріїв.

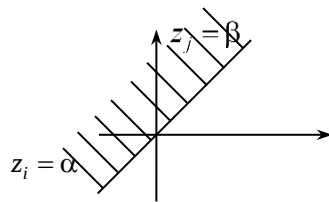
На практиці, на жаль, навіть у результатах вимірювань істотно неперервного типу зустрічаються повторення. Це пов'язано з тим, що ці результати подаються наближено, заокруглюються. Спосіб обробки таких повторень зазвичай дається після того, як критерій теоретично побудований.

З неперервності розподілу випадкової величини Z і означення випадкової вибірки [компоненти в (1) є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами] випливає рівність

$$P\{Z_i < Z_j\} = \frac{1}{2} (i \neq j). \quad (2)$$

Хоча ця рівність і видається очевидною, можна підтвердити її розрахунками. Справді,

$$\begin{aligned} P\{Z_i < Z_j\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} f_z(\alpha) f_z(\beta) d\alpha d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(\alpha) \left[\int_{\alpha}^{\infty} f_z(\beta) d\beta \right] d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_z(\alpha) [1 - F_z(\alpha)] d\alpha = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_z(\alpha) dF_z(\alpha) = 1 - \frac{F_z^2(\alpha)}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Зауваження 2. З тих самих міркувань можна записати:

$$P\{Z_i < Z_j < Z_k\} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} (i \neq j \neq k), \quad (3)$$

$$P\{Z_i < Z_j < Z_k < Z_l\} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} (i \neq j \neq k \neq l) \quad (4)$$

тощо. Взагалі для довільної перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ цілих чисел $(1, 2, \dots, n)$

$$P\{Z_{i_1} < Z_{i_2} < \dots < Z_{i_n}\} = \frac{1}{n!}. \quad (5)$$

Важливо, що рівності (2) — (5) справедливі для будь-якого неперервного розподілу. Саме вони є теоретичним підґрунтям значної частини непараметричних критеріїв.

II. Ранги. Далі буде використовуватись поняття *рангу*. Означимо його. Нехай $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — конкретна вибірка, одержана з неперервно розподіленої

генеральної сукупності Z . Запишемо її варіаційний ряд: $z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(n)}$. Номер місця, яке має в даному ряді елемент вибірки z_i , назовемо *рангом* цього елемента. Отже, найменшому за величиною елементу вибірки приписується ранг 1, наступному за величиною елементу — ранг 2 і т. д. Найбільший за величиною елемент вибірки має ранг n . Однозначна визначеність рангів є, знову ж таки, наслідком неперервності розподілу генеральної сукупності (усі z_i — різні!).

Перейдемо до випадкової вибірки (1). Можливий ранг i -го спостереження Z_i позначимо R_i . Тим самим одержуємо випадковий вектор рангів $(R_1, R_2, \dots, R_n)$. Кожна його конкретна реалізація $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ — це деяка перестановка цілих чисел $(1, 2, \dots, n)$.

З (5) випливає, що розподіл випадкового вектора рангів не залежить від розподілу генеральної сукупності Z і має вигляд

$$P\{R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n\} = \frac{1}{n!}. \quad (6)$$

Справді, ймовірність кожної його реалізації — це ймовірність відповідного ланцюжка нерівностей для компонент вибірки, наприклад,

$$P\{R_1 = 1, R_2 = 2, \dots, R_n = n\} = P\{Z_1 < Z_2 < \dots < Z_n\}.$$

Випадкову величину, що є функцією лише рангів, називають *ранговою статистикою*, а критерії перевірки гіпотез, що ґрунтуються на рангових статистиках — *ранговими критеріями*. Переважна частина відомих непараметричних критеріїв — рангові.

Розподіл рангової статистики можна знайти виходячи з розподілу вектора рангів (6). Справді, нехай $W = W(R_1, R_2, \dots, R_n)$. Тоді

$$P\{W = u\} = \frac{N(u)}{n!}, \quad (7)$$

де $N(u)$ — кількість таких реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, для яких $W(r_1, r_2, \dots, r_n) = u$. Очевидно, що розподіл (7) не залежить від розподілу генеральної сукупності Z .

Процес приписування результатам спостережень відповідних рангів називають *ранжуванням* цих спостережень. При цьому спостереження можуть мати не тільки кількісний, а і якісний характер. Важливо лише, щоб їх можна було певним чином упорядкувати. Тому статистична інформація із самого початку може задаватись рангами спостережень.

III. Знакові ранги. Єдиною умовою, що накладалась нами на генеральну сукупність Z , була неперервність розподілу. Тепер вважаємо цей розподіл ще й *симетричним* відносно нуля:

$$P\{-a < Z < 0\} = P\{0 < Z < a\} \quad \forall a > 0, \quad (8)$$

зокрема, для $a = \infty$

$$P\{Z < 0\} = P\{Z > 0\} = \frac{1}{2},$$

оскільки $P\{Z = 0\} = 0$.

Нехай $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — конкретна вибірка. Проведемо ранжування абсолютних величин $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ і кожному рангу припишемо знак відповідного елемента z_i . Одержані таким способом числа $r_1, r_2, \dots, r_n$ називають *знаковими рангами* елементів вибірки [отже, знаковий ранг r_i — це деяке ціле число з множини $(-n, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n)$]. Наприклад, якщо $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 2; -2, 1; 0, 8; -1, 6)$, то вектор знакових рангів має вигляд $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (2, -4, 1, -3)$.

Зауваження 3. Тут і далі виходячи з неперервності розподілу Z вважаємо, що



1) серед $|z_i|$ немає однакових;

2) усі $|z_i|$ відмінні від нуля.

Тим самим знакові ранги визначаються однозначно. Невиконання наведених умов завжди обумовлюватиметься.

Відповідно до введених позначень знакових рангів ранги абсолютних величин $|z_i|$ позначимо $|r_i|, i = 1, 2, \dots, n$.

Аналогічно, можливий знаковий ранг компоненти Z_i випадкової вибірки (1) позначимо через R_i , а ранг абсолютної величини $|Z_i|$ — через $|R_i|$. Тим самим дістаємо випадковий вектор $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ знакових рангів і випадковий вектор $(|R_1|, |R_2|, \dots, |R_n|)$ рангів абсолютних величин елементів випадкової вибірки (1).

Оскільки $|Z_i|$ — незалежні і мають той самий неперервний розподіл, то

$$P\{|R_1| = |r_1|, |R_2| = |r_2|, \dots, |R_n| = |r_n|\} = \frac{1}{n!} \quad (9)$$

для довільної перестановки $(|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|)$ цілих чисел $(1, 2, \dots, n)$ [див. (6)]. Наша мета — знайти розподіл випадкового вектора знакових рангів. Для цього, скориставшись функцією

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1, \text{якщо } x > 0; \\ 0, \text{якщо } x = 0; \\ -1, \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

уведемо випадкові величини

$$J_i = \text{sign} Z_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

З незалежності випадкових величин Z_i , неперервності і симетричності їх розподілу відносно нуля ($P\{Z_i = 0\} = 0, P\{Z_i < 0\} = P\{Z_i > 0\} = \frac{1}{2}$) впливає, що J_i є незалежними випадковими величинами, які мають той самий розподіл

$$P\{J_i = -1\} = P\{J_i = 1\} = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Користуючись цими величинами, можна записати

$$Z_i = |Z_i|J_i, R_i = |R_i|J_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Насамперед покажемо, що внаслідок симетрії (8) випадкові вектори

$$(|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_n|) \text{ та } (J_1, J_2, \dots, J_n) \quad (12)$$

незалежні.



Зауваження 4. Якщо один з цих векторів, наприклад вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, неперервний, а інший, наприклад вектор $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, дискретний, умову незалежності можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n; Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m\} = \\ = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\} \cdot P\{Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Покажемо, що умова (13) для випадкових векторів (12) виконується. Справді, для будь-яких додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\begin{aligned} P\{|Z_1| < a_1, \dots, |Z_n| < a_n; J_1 = 1, \dots, J_n = -1\} &= |\text{див. (11)}| = \\ &= P\{0 < Z_1 < a_1, \dots, -a_n < Z_n < 0\} = |Z_i - \text{незалежні}| = \\ &= P\{0 < Z_1 < a_1\} \cdot \dots \cdot P\{-a_n < Z_n < 0\} = |\text{див. (8)}| = \\ &= \frac{1}{2} P\{|Z_1| < a_1\} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} P\{|Z_n| < a_n\} = |Z_i - \text{незалежні}| = \\ &= \frac{1}{2^n} P\{|Z_1| < a_1, \dots, |Z_n| < a_n\} = |J_i - \text{незалежні}| = \\ &= P\{|Z_1| < a_1, \dots, |Z_n| < a_n\} \cdot P\{J_1 = 1, \dots, J_n = -1\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що одержаний результат залишається справедливим для будь-якої з реалізацій випадкового вектора $(J_1, J_2, \dots, J_n)$.

Отже, випадкові вектори (12) незалежні. Але тоді незалежними будуть і вектори

$$(|R_1|, |R_2|, \dots, |R_n|) \text{ та } (J_1, J_2, \dots, J_n),$$

оскільки величини $|R_i|$ є рангами величин $|Z_i|$.

Тепер ми можемо знайти розподіл випадкового вектора знакових рангів. Справді, беручи до уваги друге співвідношення (11), дістаємо

$$\begin{aligned} P\{R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n\} &= \\ &= P\{|R_1| = |r_1|, |R_2| = |r_2|, \dots, |R_n| = |r_n|; J_1 = \text{sign}r_1, J_2 = \text{sign}r_2, \dots, J_n = \text{sign}r_n\} = \\ &= P\{|R_1| = |r_1|, |R_2| = |r_2|, \dots, |R_n| = |r_n|\} \cdot P\{J_1 = \text{sign}r_1; J_2 = \text{sign}r_2, \dots, J_n = \text{sign}r_n\}. \end{aligned}$$

Ураховуючи (9), (10) і незалежність випадкових величин J_i , остаточно маємо

$$P\{R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n\} = \frac{1}{2^{n!}}. \quad (14)$$

Отже, розподіл випадкового вектора знакових рангів не залежить від того, який саме неперервний і симетричний відносно нуля розподіл має генеральна сукупність Z .

Рівність (14) ще можна інтерпретувати в такий спосіб: кількість усіх реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ вектора знакових рангів $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ дорівнює $2^{n!}$ (абсолютні величини рангів $|r_i|$ можна вибрати $n!$ способами і після кожного такого вибору приписати їм знаки 2^n способами), і всі ці реалізації рівноможливі.

Знаючи розподіл (14), можна аналогічно (7) знайти розподіл випадкової величини (статистики), що є функцією знакових рангів

$$W = W(R_1, R_2, \dots, R_n),$$

а саме

$$P\{W = w\} = \frac{N(w)}{2^{n!}}, \quad (15)$$

де $N(w)$ — кількість таких реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ вектора знакових рангів, для яких $W(r_1, r_2, \dots, r_n) = w$.

Приклад 1. Позначимо через S кількість додатних рангів серед усіх знакових рангів $R_1, R_2, \dots, R_n$. Тоді

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n J_i + n \right)$$

і згідно з (15)

$$P\{S = s\} = \frac{N(s)}{2^{n!}},$$

де $N(s)$ — кількість таких реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, серед компонент яких рівно s додатних. Оскільки вектор абсолютних величин $(|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|)$ можна вибрати $n!$ способами і після кожного такого вибору s компонентам приписати знак «плюс» (решті — «мінус») C_n^s способами, то $N(s) = n! C_n^s$.

Тому

$$P\{S = s\} = \frac{C_n^s}{2^n} = C_n^s \left(\frac{1}{2} \right)^s \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{n-s}$$

і статистика S має біномний розподіл з параметром $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Розглянемо статистику

$$\sum_{i=1}^n |R_i| = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_n|. \quad (16)$$

Для кожної реалізації $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ вектора знакових рангів

$$\sum_{i=1}^n |r_i| = \frac{n(n+1)}{2},$$

оскільки $(|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|)$ — деяка перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$. Тому

$$P\left\{\sum_{i=1}^n |R_i| = \frac{n(n+1)}{2}\right\} = \frac{2^n n!}{2^n n!} = 1,$$

тобто статистика (16) — не випадкова величина, що дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$.

Приклад 3. Скориставшись (15), легко показати, що сума знакових рангів

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad (17)$$

розподілена симетрично відносно нуля, тобто

$$P\{R = r\} = P\{R = -r\}. \quad (18)$$

Справді, нехай $N(r)$ — кількість реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, для яких $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$, а $N(-r)$ — кількість реалізацій, для яких та сама сума дорівнює $-r$. Оскільки $N(r) = N(-r)$ (чому?), то з (15) дістаємо (18).

Зі статистикою (17) ми зустрінємось у п. 3.2. У першу чергу нам будуть потрібні її числові характеристики та асимптотична нормальність розподілу. Для з'ясування цих питань уведемо ви-падковий вектор

$$(N_1, N_2, \dots, N_n), \quad (19)$$

де через N_1 позначено номер найменшого серед

$$|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_n| \quad (20)$$

елемента, через N_2 — номер наступного за величиною елемента, ..., через N_n — номер найбільшого серед (20) елемента, тобто

$$|Z_{N_1}| < |Z_{N_2}| < \dots < |Z_{N_n}|. \quad (21)$$

Оскільки N_i лише впорядковують величини (20), то з незалежності випадкових векторів (12) випливає незалежність ви-падкових векторів

$$(N_1, N_2, \dots, N_n) \text{ і } (J_1, J_2, \dots, J_n). \quad (22)$$

Крім того, безпосередньо з (5) і (21) дістаємо

$$P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_n = n_n\} = \frac{1}{n!} \quad (23)$$

для довільної перестановки $(n_1, n_2, \dots, n_n)$ цілих чисел $(1, 2, \dots, n)$.

Очевидно, що вектор (19) уведений таким способом, що

$$|R_{N_1}| = 1, |R_{N_2}| = 2, \dots, |R_{N_n}| = n.$$

У випадку статистики (16), наприклад, можна записати

$$\sum_{i=1}^n |R_i| = \sum_{k=1}^n |R_{N_k}| = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для статистики (17) дістаємо [див. (11)]

$$R = \sum_{i=1}^n |R_i| J_i = \sum_{k=1}^n |R_{N_k}| J_{N_k}$$

або

$$R = \sum_{k=1}^n k J_{N_k}. \quad (24)$$

Випадкові величини J_{N_k} мають однаковий розподіл

$$P\{J_{N_k} = 1\} = P\{J_{N_k} = -1\} = \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots, n$$

і незалежні.

Справді, оскільки подія $\{J_{N_k} = 1\}$ зображається у вигляді

$$\{J_{N_k} = 1\} = \{N_k = 1, J_1 = 1\} + \{N_k = 2, J_2 = 1\} + \dots + \{N_k = n, J_n = 1\},$$

то

$$P\{J_{N_k} = 1\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно для події $\{J_{N_k} = -1\}$. Тут урахована незалежність випадкових величин N_k і J_l , $k, l = 1, 2, \dots, n$ і ймовірність $P\{N_k = l\} = \frac{1}{n}$, що є наслідком відповідно незалежності випадкових векторів (22) і розподілу (23).

Нехай величина m_k дорівнює -1 чи 1 , $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді

$$\begin{aligned} & P\{J_{N_1} = m_1, J_{N_2} = m_2, \dots, J_{N_n} = m_n\} = \\ & = P\left\{\sum \{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_n = n_n; J_{n_1} = m_1, J_{n_2} = m_2, \dots, J_{n_n} = m_n\}\right\} = \\ & = |\text{тут знак } \sum \text{ означає підсумовування за всіма перестановками } (n_1, n_2, \dots, n_n) \\ & \text{чисел } (1, 2, \dots, n)| = \sum P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_n = n_n\} \times P\{J_{n_1} = m_1, J_{n_2} = m_2, \dots, J_{n_n} = m_n\} = \\ & \quad \sum \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} = n! \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} = \\ & = P\{J_{N_1} = m_1\} \cdot P\{J_{N_2} = m_2\} \cdot \dots \cdot P\{J_{N_n} = m_n\}, \end{aligned}$$

що й доводить незалежність випадкових величин J_{N_k} , $k = 1, 2, \dots, n$.

Зображення суми знакових рангів у вигляді (24) дає можливість легко обчислити її математичне сподівання і дисперсію. Справді, ураховуючи, що

$$M[J_{N_k}] = 0 \text{ і } D[J_{N_k}] = 1, k = 1, 2, \dots, n,$$

дістаємо

$$M[R] = \sum_{k=1}^n k M[J_{N_k}] = 0 \quad (25)$$

[рекомендуємо довести рівність (25) *самостійно*, не користуючись зображенням (24)] і

$$D[R] = \sum_{k=1}^n k^2 D[J_{N_k}] = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Доведіть останню числову рівність *самостійно*.

Нарешті, зображення (24) дозволяє стверджувати, що розподіл суми знакових рангів є асимптотично нормальним.

2. Критерій Вілкоксона, Манна й Уїтні

Цей критерій побудовано для перевірки гіпотези однорідності двох незалежних вибірок.

Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ та $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ — незалежні випадкові вибірки з генеральних сукупностей X та Y , розподіли яких невідомі. Єдине наше припущення — це *неперервність* цих розподілів.

За умови однорідності вибірки можна об'єднати в одну вибірку

$$(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}) \quad (26)$$

обсягом $n = n_1 + n_2$ і згідно з (2) записати

$$P\{X_i < Y_j\} = \frac{1}{2} (i = 1, 2, \dots, n_1; j = 1, 2, \dots, n_2). \quad (27)$$

Оскільки випадкові величини X_i і Y_j ототожнюються з гене-ральними сукупностями X та Y відповідно, індекси в (27) можна пропустити. Далі саме рівність (27) покладаємо в основу перевірки гіпотези однорідності, тобто за нульову гіпотезу беремо

$$H_0: P\{X < Y\} = \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Альтернативною може бути одна з гіпотез:

$$H_1: P\{X < Y\} < \frac{1}{2}; \quad (29)$$

$$H_1: P\{X < Y\} > \frac{1}{2}; \quad (30)$$

$$H_1: P\{X < Y\} \neq \frac{1}{2}. \quad (31)$$

При цьому (29) виражає односторонню альтернативу типу « X прагне бути більшим за Y », (30) — « X прагне бути меншим за Y », (31) — двосторонню альтернативу типу « X прагне бути більшим або меншим за Y ».

Із самої постановки задачі (28) — (31) випливає, що за статистику критерію природно взяти випадкову величину U_1 — кількість таких пар (X_i, Y_j) у вибірці (26), для яких $X_i < Y_j$. Очевидно, що U_1 — дискретна випадкова величина, можливими значеннями якої є цілі числа від 0 до $n_1 n_2$. Гіпотезу H_0 розумно відхилити, якщо обчислене за результатами спостережень значення статистики U_1 виявиться надто малим або надто великим. Це можна зробити на заданому рівні значущості α , якщо відомий розподіл статистики U_1 за справедливої гіпотези H_0 .

2.1. Необхідні теоретичні відомості

Перед тим як з'ясувати питання про розподіл статистики U_1 , розглянемо кілька її загальних властивостей незалежно від того, справедлива гіпотеза H_0 чи ні.

I. Насамперед покажемо, що статистику U_1 можна подати як функцію рангів спостережень. Для цього звернемося до об'єднаної вибірки (26) і введемо ранги: R_1 — ранг спостереження X_1 , R_2 — ранг спостереження $X_2, \dots, R_{n_1}$ — ранг спостереження X_{n_1} , R_{n_1+1} — ранг спостереження Y_1 і т. д. Припустимо, що величини X_i упорядковано:

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n_1)}. \quad (32)$$

Ранги впорядкованих величин позначимо $R_{(i)}$, так що ланцюжку (32) відповідає ланцюжок упорядкованих рангів першої вибірки

$$R_{(1)} < R_{(2)} < \dots < R_{(n_1)}.$$

Тоді U_1 — кількість усіх пар $(X_{(i)}, Y_j)$, для яких $X_{(i)} < Y_j$. Для фіксованого i кількість величин Y_j , які більші за $X_{(i)}$, дорівнює $n_2 - (R_{(i)} - i)$, де $(R_{(i)} - i)$ — кількість тих Y_j , які менші за $X_{(i)}$.

Підсумовування за i дає

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} [n_2 - (R_{(i)} - i)] = \sum_{i=1}^{n_1} n_2 - \sum_{i=1}^{n_1} R_{(i)} + \sum_{i=1}^{n_1} i = n_1 n_2 - \sum_{i=1}^{n_1} R_{(i)} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}.$$

Отже, дістаємо зображення статистики U_1 як функції рангів

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1, \quad (33)$$

де

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} R_{(i)} = \sum_{i=1}^{n_1} R_i$$

— сума рангів першої вибірки.

Статистику W_1 називають *статистикою Вілкоксона*. Очевидно, що її можливими значеннями є цілі числа від $\frac{n_1(n_1+1)}{2}$ до $n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$. У цьому зв'язку зазначимо, що статистику U_1 називають *статистикою Манна й Уїтні*.



Зауваження 1. Поряд зі статистиками U_1 та W_1 розглянемо статистику U_2 — кількість таких пар (X_i, Y_j) , для яких $X_i > Y_j$, та $W_2 = \sum_{i=n_1+1}^n R_i$ — суму рангів другої вибірки ($n = n_1 + n_2$). Тоді, урахувавши співвідношення

$$U_1 + U_2 = n_1 n_2, W_1 + W_2 = \frac{n(n+1)}{2}, n = n_1 + n_2, \quad (34)$$

з (33) дістаємо аналогічну рівність для U_2 та W_2 :

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - W_2. \quad (35)$$

Якщо вибірку $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ вважати першою, то статистикою Манна й Уїтні буде статистика U_2 , а статистикою Вілкоксона — статистика W_2 .

II. Дістанемо загальні формули для математичного сподівання $M[U_1]$ і дисперсії $D[U_1]$ статистики U_1 . Для цього введемо індикаторні випадкові величини

$$H_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } X_i < Y_j, \\ 0, \text{якщо } X_i > Y_j. \end{cases}$$

Тоді статистику U_1 можна подати у вигляді

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} H_{ij}. \quad (36)$$

Спочатку дістанемо ряд допоміжних співвідношень для індикаторів:

$$M[H_{ij}] = p; D[H_{ij}] = p - p^2 = p(1 - p),$$

де

$$p = P\{X_i < Y_j\} = P\{X < Y\}.$$

Якщо коваріацію випадкових величин H_{ij} та H_{kl} позначити через $cov(H_{ij}, H_{kl})$,

то

$$cov(H_{ij}, H_{kl}) = M[H_{ij}H_{kl}] - p^2 = P\{X_i < Y_j; X_k < Y_l\} - p^2.$$

Залежно від набору індексів

$$cov(H_{ij}, H_{kl}) = \begin{cases} p(1 - p), \text{якщо } k = i, l = j; \\ p_1 - p^2, \text{якщо } k = i, l \neq j; \\ p_2 - p^2, \text{якщо } k \neq i, l = j; \\ 0, \text{якщо } k \neq i, l \neq j, \end{cases} \quad (37)$$

де

$$p_1 = P\{X_1 < \min(Y_1, Y_2)\}, p_2 = P\{Y_1 > \max(X_1, X_2)\}. \quad (38)$$

Оскільки дисперсія суми (36) дорівнює сумі всіх коваріацій (37), то

$$D[U_1] = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} cov(H_{ij}, H_{ij}) + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq j)}}^{n_2} cov(H_{ij}, H_{il}) + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n_1} cov(H_{ij}, H_{kj}).$$

З урахуванням одержаних співвідношень для індикаторів маємо

$$M[U_1] = n_1 n_2 p, \quad (39)$$

$$D[U_1] = n_1 n_2 p(1 - p) + n_1 n_2 (n_2 - 1)[p_1 - p^2] + n_1 n_2 (n_1 - 1)[p_2 - p^2]. \quad (40)$$



Зауваження 2. З (33) випливає, що для статистики Вілкоксона

$$M[W_1] = \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} + n_1 n_2 (1 - p), D[W_1] = D[U_1].$$

III. Дослідимо асимптотичну поведінку статистики U_1 , коли $\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty$.

Оскільки згідно з (39) $M\left[\frac{U_1}{n_1 n_2}\right] = p$, а згідно з (40)

$$D\left[\frac{U_1}{n_1 n_2}\right] = \frac{1}{(n_1 n_2)^2} D[U_1] \rightarrow 0, \text{ коли } \min(n_1, n_2) \rightarrow \infty,$$

то статистика $\frac{U_1}{n_1 n_2}$ є змістовною оцінкою параметра p , тобто збігається за ймовірністю до цього параметра:

$$\lim_{\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{U_1}{n_1 n_2} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \text{ для довільного } \varepsilon > 0.$$

Саме таку властивість, як ми знаємо, має відносна частота події. Тому можна чекати, що для достатньо великих n_1 та n_2 статистика $\frac{U_1}{n_1 n_2}$ поводитиме себе так, як і відносна частота події $\{X < Y\}$, а саме матиме асимптотично нормальний розподіл, коли $\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty$. Справді, такий факт у математичній статистиці строго доведений.

Отже, для достатньо великих n_1 та n_2 розподіл статистики Манна й Уїтні U_1 можна апроксимувати нормальним розподілом з параметрами (39) і (40).



Зауваження 3. Асимптотична нормальність відносної частоти події є, як ми знаємо, наслідком центральної граничної теореми. Чому цього не можна сказати стосовно до статистики U_1 як суми (36)?

Оскільки статистика Вілкоксона W_1 пов'язана зі статистикою U_1 лінійним співвідношенням (33), вона також має асимптотично нормальний розподіл, коли $\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty$.

За умови, що гіпотеза H_0 справедлива, $p = P\{X < Y\} = \frac{1}{2}$. Для величин (38) згідно з (3) дістаємо

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{X_1 < Y_1 < Y_2\} + P\{X_1 < Y_2 < Y_1\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\ p_2 &= P\{X_1 < X_2 < Y_1\} + P\{X_2 < X_1 < Y_1\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тому

$$M[U_1] = \frac{1}{2}n_1n_2, D[U_1] = \frac{1}{12}n_1n_2(n_1 + n_2 + 1),$$

а статистика

$$Z = \frac{U_1 - \frac{1}{2}n_1n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}} \quad (41)$$

має наближено нормальний розподіл $N(0,1)$, якщо n_1 та n_2 — достатньо великі.

Крім того, за справедливої гіпотези H_0 розподіл статистики U_1 стає *симетричним* відносно математичного сподівання, тобто

$$P\left\{U_1 = \frac{1}{2}n_1n_2 - a\right\} = P\left\{U_1 = \frac{1}{2}n_1n_2 + a\right\}. \quad (42)$$

Справді, поряд зі статистикою U_1 розглянемо статистику U_2 (див. зауваження 1), можливими значеннями якої також є цілі числа від 0 до n_1n_2 . Оскільки за справедливої гіпотези H_0

$$P\{X_i > Y_j\} = P\{X_i < Y_j\} = \frac{1}{2},$$

то статистики U_1 та U_2 мають однакові розподіли:

$$P\{U_1 = k\} = P\{U_2 = k\}. \quad (43)$$

Згідно з першою рівністю (34) $U_2 = k \Leftrightarrow U_1 = n_1n_2 - k$. Тому з (43) дістаємо

$$P\{U_1 = k\} = P\{U_1 = n_1n_2 - k\}. \quad (44)$$

Якщо в (44) узяти $k = \frac{1}{2}n_1n_2 - a$, дістанемо (42). Зрозуміло, що розумними значеннями числа a є такі, для яких числа $\frac{1}{2}n_1n_2 \pm a$ — цілі.

З викладеного випливає, що за справедливої гіпотези H_0

$$P\{U_1 \geq k\} = P\{U_1 \leq n_1n_2 - k\}. \quad (45)$$



Зауваження 4. За справедливої гіпотези H_0

$$\begin{aligned} M[W_1] &= M[U_1] + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = \frac{1}{2}n_1(n_1 + n_2 + 1); \quad D[W_1] = \frac{1}{12}n_1n_2(n_1 + n_2 + 1); \\ P\left\{W_1 = \frac{1}{2}n_1(n_1 + n_2 + 1) - a\right\} &= P\left\{W_1 = \frac{1}{2}n_1(n_1 + n_2 + 1) + a\right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Переконайтесь у цьому *самостійно*.

Найголовніше те, що за справедливої гіпотези H_0 розподіли статистик W_1 та U_1 вдається знайти, якими б не були обсяги вибірок n_1 та n_2 .

Спочатку виходячи з розподілу вектора рангів (6) можна знайти ймовірності $P\{W_1 = k\}$, де k — ціле число від

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2} \quad \text{до} \quad n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2},$$

потім, скориставшись (33), імовірності $P\{U_1 = l\}$. За потреби можна підрахувати ймовірності виду $P\{W_1 \leq k\}$ та $P\{U_1 \leq l\}$.

Обчислення ймовірностей $P\{W_1 = k\}$ прямим методом (7) можна дещо спростити, користуючись формулою

$$P\{W_1 = k\} = \frac{n_1!n_2!}{n!} N(n_1, n_2; k), n = n_1 + n_2, \quad (47)$$

де $N(n_1, n_2; k)$ — кількість таких наборів $(i_1, i_2, \dots, i_{n_1})$ чисел з множини $(1, 2, \dots, n)$, що

$$i_1 < i_2 < \dots < i_{n_1} \quad \text{і} \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{n_1} = k.$$

Рекомендуємо обґрунтувати (47) *самостійно*.

Продемонструємо сказане на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти розподіли статистик W_1 та U_1 для випадку $n_1 = 3, n_2 = 3$.

Розв'язання

Можливими значеннями статистики W_1 є числа від $\frac{n_1(n_1+1)}{2} = 6$ до $n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 15$; крім того, $\frac{n_1!n_2!}{n!} = \frac{3!3!}{6!} = 0,05$.

Скористаємось формулою (47). Результати підрахунків зведемо до таблиці:

k	(i_1, i_2, i_3)	$N(3, 3; k)$	$P\{W_1 = k\}$
6	(1, 2, 3)	1	0,05
7	(1, 2, 4)	1	0,05
8	(1, 2, 5); (1, 3, 4)	2	0,1
9	(1, 2, 6); (1, 3, 5); (2, 3, 4)	3	0,15
10	(1, 3, 6); (1, 4, 5); (2, 3, 5)	3	0,15
11	Далі потреба в підрахунках зникає, оскільки можна скористатись симетричністю розподілу статистики W_1 [див. (46)].		0,15
12			0,15
13			0,1
14			0,05
15			0,05

Для статистики U_1 дістаємо

$$U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1 = 15 - W_1, P\{U_1 = l\} = P\{W_1 = 15 - l\},$$

де l — цілі числа від 0 до $n_1n_2 = 9$.

Результати подамо також у вигляді таблиці:

l	$P\{U_1 = l\}$	$P\{U_1 \leq l\}$
0	0,05	0,05
1	0,05	0,1
2	0,1	0,2
3	0,15	0,35
4	0,15	0,5
5	0,15	0,65
6	0,15	0,8
7	0,1	0,9
8	0,05	0,95
9	0,05	1

Зазначимо, що

$$P\{U_1 \leq l\} = P\{U_1 < l + 1\} = F(l + 1) = F(l + 0),$$

де F — функція розподілу статистики U_1 , а $F(l + 0)$ — права границя у точці l .

У спеціальній літературі з математичної статистики наводяться різного роду рекурентні процедури обчислення чисел $N(n_1, n_2; k)$ з (47). Проте для нас зараз важливою є сама принципова можливість таких обчислень і побудови розподілів розглядуваних статистик. Приклад 1 ми навели також виключно для глибшого розуміння того, про що йдеться. З практичного погляду в подібних обчисленнях немає потреби, оскільки таблиці розподілу статистики W_1 чи U_1 давно побудовані для різних значень n_1 та n_2 .

Критерій перевірки гіпотези H_0 можна будувати безпосередньо на статистиці W_1 . Гіпотеза H_0 відхиляється, якщо обчислена за результатами спостережень статистика W_1 виявиться надто малою або надто великою. Такий критерій називають *критерієм Вілкоксона*. Можна, що ми й передбачали, користуватись статистикою U_1 . У такому разі критерій називають *критерієм Вілкоксона, Манна й Уїтні*.

Далі наведено таблицю розподілу статистики U_1 (за справедливої гіпотези H_0) у вигляді ймовірностей $P\{U_1 \leq l\}$ для $n_1 \leq 8$ і $n_2 \leq 8$ (для $n_1 > 8$ і $n_2 > 8$ користуються зазвичай нормальною апроксимацією розподілу статистики U_1)*. Згідно зі сказаним у зауваженні 1 і співвідношенням (43) немає потреби у разі $n_1 \neq n_2$ наводити розподіли U_1 окремо для випадків n_1 і n_2 та n_2 і n_1 , оскільки ці розподіли однакові. Таблицю побудовано так, начебто обсяг першої вибірки менший. Разом з тим, позначеннями $k_1 = \min(n_1, n_2)$, $k_2 = \max(n_1, n_2)$ підкреслюється, що неважливо, яку з двох досліджуваних вибірок різних обсягів вважати першою.

Результати прикладу 1 відображено на початку таблиці розподілу U_1 для $k_1 = k_2 = 3$.

**Таблиця розподілу статистики U_1
(за справедливої гіпотези H_0)**

$$P\{U_1 \leq l\}; k_1 = \min(n_1, n_2), k_2 = \max(n_1, n_2), P\{U_1 \geq l\} = P\{U_1 \leq n_1 n_2 - l\}$$

k_1	l	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$k_2 = 5$	$k_2 = 6$	$k_2 = 7$	$k_2 = 8$
3	0	0,0500	0,0286	0,0179	0,0119	0,0083	0,0061
	1	0,1000	0,0571	0,0357	0,0238	0,0167	0,0121
	2	0,2000	0,1143	0,0714	0,0476	0,0333	0,0242
	3	0,3500	0,2000	0,1250	0,0833	0,0583	0,0424
	4	0,5000	0,3143	0,1964	0,1310	0,0917	0,0667
	5	0,6500	0,4286	0,2857	0,1905	0,1333	0,0970
	6	0,8000	0,5714	0,3929	0,2738	0,1917	0,1394
	7	0,9000	0,6857	0,5000	0,3571	0,2583	0,1879
	8	0,9500	0,8000	0,6071	0,4524	0,3333	0,2485
	9	1,0000	0,8857	0,7143	0,5476	0,4167	0,3152
	10		0,9429	0,8036	0,6429	0,5000	0,3879
	11		0,9714	0,8750	0,7262	0,5833	0,4606
4	0		0,0143	0,0079	0,0048	0,0030	0,0020
	1		0,0286	0,0159	0,0095	0,0061	0,0040
	2		0,0571	0,0317	0,0190	0,0121	0,0081
	3		0,1000	0,0556	0,0333	0,0212	0,0141
	4		0,1714	0,0952	0,0571	0,0364	0,0242

*Усі таблиці даного розділу взято з праці П. Бикела, К. Доксама «Математическая статистика» (Выпуск 2, 1983).

5	0,2429	0,1429	0,0857	0,0545	0,0364
6	0,3429	0,2063	0,1286	0,0818	0,0545
7	0,4429	0,2778	0,1762	0,1152	0,0768
8	0,5571	0,3651	0,2381	0,1576	0,1071
9	0,6571	0,4524	0,3048	0,2061	0,1414
10	0,7571	0,5476	0,3810	0,2636	0,1838
11	0,8286	0,6349	0,4571	0,3242	0,2303
12	0,9000	0,7222	0,5429	0,3939	0,2848
13	0,9429	0,7937	0,6190	0,4636	0,3414
14	0,9714	0,8571	0,6952	0,5364	0,4040
15	0,9857	0,9048	0,7619	0,6061	0,4667

k_1	l	$k_2 = 5$	$k_2 = 6$	$k_2 = 7$	$k_2 = 8$
5	0	0,0040	0,0022	0,0013	0,0008
	1	0,0079	0,0043	0,0025	0,0016
	2	0,0159	0,0087	0,0051	0,0031
	3	0,0278	0,0152	0,0088	0,0054
	4	0,0476	0,0260	0,0152	0,0093
	5	0,0754	0,0411	0,0240	0,0148
	6	0,1111	0,0628	0,0366	0,0225
	7	0,1548	0,0887	0,0530	0,0326
	8	0,2103	0,1234	0,0745	0,0466
	9	0,2738	0,1645	0,1010	0,0637
	10	0,3452	0,2143	0,1338	0,0855
	11	0,4206	0,2684	0,1717	0,1111
	12	0,5000	0,3312	0,2159	0,1422
	13	0,5794	0,3961	0,2652	0,1772
	14	0,6548	0,4654	0,3194	0,2176
	15	0,7262	0,5346	0,3775	0,2618
	16	0,7897	0,6039	0,4381	0,3108
	17	0,8452	0,6688	0,5000	0,3621
	18	0,8889	0,7316	0,5619	0,4165
	19	0,9246	0,7857	0,6225	0,4716
6	0		0,0011	0,0006	0,0003
	1		0,0022	0,0012	0,0007
	2		0,0043	0,0023	0,0013
	3		0,0076	0,0041	0,0023
	4		0,0130	0,0070	0,0040
	5		0,0206	0,0111	0,0063
	6		0,0325	0,0175	0,0100
	7		0,0465	0,0256	0,0147
	8		0,0660	0,0367	0,0213
	9		0,0898	0,0507	0,0296
	10		0,1201	0,0688	0,0406
	11		0,1548	0,0903	0,0539
	12		0,1970	0,1171	0,0709
	13		0,2424	0,1474	0,0906
	14		0,2944	0,1830	0,1142
	15		0,3496	0,2226	0,1412
	16		0,4091	0,2669	0,1725
	17		0,4686	0,3141	0,2068
	18		0,5314	0,3654	0,2454
	19		0,5909	0,4178	0,2864

20	0,6504	0,4726	0,3310
21	0,7056	0,5274	0,3773
22	0,7576	0,5822	0,4259
23	0,8030	0,6346	0,4749

k_1	l	$k_2 = 7$	$k_2 = 8$	k_1	l	$k_2 = 8$
7	0	0,0003	0,0002	8	0	0,0001
	1	0,0006	0,0003		1	0,0002
	2	0,0012	0,0006		2	0,0003
	3	0,0020	0,0011		3	0,0005
	4	0,0035	0,0019		4	0,0009
	5	0,0055	0,0030		5	0,0015
	6	0,0087	0,0047		6	0,0023
	7	0,0131	0,0070		7	0,0035
	8	0,0189	0,0103		8	0,0052
	9	0,0265	0,0145		9	0,0074
	10	0,0364	0,0200		10	0,0103
	11	0,0487	0,0270		11	0,0141
	12	0,0641	0,0361		12	0,0190
	13	0,0825	0,0469		13	0,0249
	14	0,1043	0,0603		14	0,0325
	15	0,1297	0,0760		15	0,0415
	16	0,1588	0,0946		16	0,0524
	17	0,1914	0,1159		17	0,0652
	18	0,2279	0,1405		18	0,0803
	19	0,2675	0,1678		19	0,0974
	20	0,3100	0,1984		20	0,1172
	21	0,3552	0,2317		21	0,1393
	22	0,4024	0,2679		22	0,1641
	23	0,4508	0,3063		23	0,1911
	24	0,5000	0,3472		24	0,2209
	25	0,5492	0,3894		25	0,2527
	26	0,5976	0,4333		26	0,2869
	27	0,6448	0,4775		27	0,3227
					28	0,3605
					29	0,3992
					30	0,4392
					31	0,4796

2.2. Алгоритм і приклади застосування критерію

Тепер ми маємо все, щоб за двома конкретними незалежними вибірками

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \text{ та } (y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \quad (48)$$

перевірити на рівні значущості α гіпотезу H_0 [див. (28) — (31)].

Необхідні пояснення до алгоритму дамо після того, як його сформулюємо.

Отже, щоб перевірити гіпотезу H_0 , *потрібно*:

1. Провести ранжування елементів об'єднаної вибірки (для цього зручно користуватись варіаційним рядом цієї вибірки).

2. Обчислити суми рангів ω_1 першої та ω_2 другої вибірок (48)

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n_1} r_i, \quad \omega_2 = \sum_{i=n_1+1}^n r_i \quad (n = n_1 + n_2) \quad (49)$$

(правильність обчислень перевіряється за формулою $\omega_1 + \omega_2 = \frac{n(n+1)}{2}$).

3. Обчислити вибірові значення статистик U_1 та U_2 [див. (33) та (35)]

$$u_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \omega_1, u_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \omega_2 \quad (50)$$

(правильність обчислень перевіряється за формулою $u_1 + u_2 = n_1 n_2$).

4. Вибрати менше з чисел (50)

$$u_\theta = \min(u_1, u_2) \quad (51)$$

і за таблицею розподілу статистики U_1 знайти ймовірність

$$\hat{p} = P\{U_1 \leq u_\theta\}.$$

5. Прийняти рішення, а саме *відхилити* гіпотезу H_0 , якщо $\hat{p} \leq \alpha$ — у разі однобічної альтернативної гіпотези (29) чи (30);

$\hat{p} \leq \frac{\alpha}{2}$ — у разі двобічної альтернативної гіпотези (31).

У протилежному разі вважати гіпотезу H_0 такою, що не суперечить результатам спостережень (48).

Коментар до алгоритму

1. Користуючись таблицею розподілу статистики U_1 , ми знаходимо фактично досягнутий рівень значущості $\hat{p}$.

Наведений алгоритм придатний для будь-якої з альтернативних гіпотез (29) — (31). Разом з тим для кожної з цих гіпотез можна будувати свій алгоритм перевірки гіпотези H_0 . Схематично зобразимо ці алгоритми, вважаючи дані ранжируемими:

(29): $\omega_1 \rightarrow u_1 \rightarrow p = P\{U_1 \leq u_1\} \rightarrow$ прийняття рішення;

(30): $\omega_1 \rightarrow u_1 \rightarrow p = P\{U_1 \geq u_1\} \rightarrow$ прийняття рішення;

(31): $\omega_1 \rightarrow u_1 \rightarrow p = \min(P\{U_1 \leq u_1\}, P\{U_1 \geq u_1\}) \rightarrow$ прийняття рішення.

Умови прийняття рішення такі самі, як і раніше.

Для ймовірності $P\{U_1 \geq u_1\}$ у другому та третьому випадках справедлива рівність [див. (45)]

$$P\{U_1 \geq u_1\} = P\{U_1 \leq n_1 n_2 - u_1\}, \quad (52)$$

яка дає можливість скористатись таблицею розподілу статистики U_1 .

Якщо ввести до розгляду вибірове значення u_2 статистики U_2 з (50), то $P\{U_1 \geq u_1\} = P\{U_1 \leq u_2\}$ і всі три алгоритми за допомогою використання (51) можна охопити одним алгоритмом, наведеним раніше. Зручність цього алгоритму в тому, що інформація про тип альтернативної гіпотези використовується лише на стадії прийняття рішення. При цьому не важливо, яку саме спрямованість має однобічна альтернатива, що є наслідком симетричності розподілу статистики U_1 . Крім того, з'ясування в (51) меншого з чисел u_1, u_2 дозволяє в разі потреби уточнити, яка з двох однобічних альтернативних гіпотез є більш прийнятною, коли H_0 відхиляється. Зазначимо, що, обчисливши u_1 , можна одразу скористатись співвідношенням $u_2 = n_1 n_2 - u_1$. Проте робити цього ми не радимо.

3. Якщо $n_1 > 8$ і $n_2 > 8$, гіпотезу H_0 зазвичай перевіряють з використанням нормальної апроксимації розподілу статистики U_1 .

Вибіркове значення z_θ статистики (41)

$$z_\theta = \frac{u_\theta - \frac{1}{2}n_1 n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}}, \quad (53)$$

де u_θ обчислюється згідно з (51), порівнюється з відповідним квантилем розподілу $N(0,1)$. При цьому гіпотеза H_0 на рівні значущості α *відхиляється*, якщо:

$z_{\theta} \leq u_{\alpha}$ — у разі односторонньої альтернативної гіпотези (29) чи (30);

$|z_{\theta}| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — у разі двосторонньої альтернативної гіпотези (31).

Нагадаємо, що для квантилів розподілу $N(0,1)$ справедлива рівність $u_{\alpha} = -u_{1-\alpha}$.

4. *Урахування повторень (середні ранги)*. До цього часу припускалось, що серед елементів вибірок (48) немає однакових, що дозволяє однозначно визначити ранги цих елементів у об'єднаній вибірці, а тому і їх суми (49). Але, як уже зазначалось у розд. 1, навіть у даних вимірювань суто неперервного типу зустрічаються повторення внаслідок заокруглення цих даних.

Серед методів, які дозволяють ранжувати елементи об'єднаної вибірки з урахуванням їх повторень, найчастіше застосовується метод *середніх рангів*. Суть цього методу полягає в такому:

- записується варіаційний ряд об'єднаної вибірки;
- елементи цього ряду нумеруються від 1 до $n = n_1 + n_2$;
- якщо елемент не повторюється, то йому приписується ранг, що дорівнює його номеру;
- якщо два чи більше елементів варіаційного ряду однакові, то кожному з них приписується однаковий ранг, який дорівнює середньому арифметичному номерів цих елементів.

Приклад ранжування з урахуванням повторень демонструє наведена таблиця:

Варіаційний ряд	10	12	12	14	15	18	18	18	20	21
Номери елементів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранги елементів	1	2,5	2,5	4	5	7	7	7	9	10

У всьому іншому сформульований на початку пункту алгоритм залишається без змін.

 **Зауваження 5.** Очевидно, що сума всіх рангів, як і раніше, дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$.

Якщо повторення зустрічаються лише серед елементів тієї самої вибірки, то вони не змінюють і сум (49) рангів кожної з вибірок. Тому такі повторення є несуттєвими, чого не можна сказати однозначно, коли однакові елементи зустрічаються у різних вибірках. Дослідження цього питання виходить за межі компетентності даної статті. У всякому разі вважатимемо, що таких повторень не надто багато.

Приклад 2. Після змагань 7 випадково відібраних спортсменів проходили реабілітацію за методикою *A* і 8 — за методикою *B*. Тривалість реабілітації (у годинах) кожного спортсмена занесена до таблиці:

<i>A</i>	50	39	67	61	54	40	40	—
<i>B</i>	60	42	53	41	40	54	69	63

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,1$ вважати методику *A* ефективнішою?

Розв'язання

У нашому випадку гіпотезі H_0 відповідає припущення про однакову ефективність методик *A* та *B*. Skorистаємось наведеним раніше алгоритмом.

1. Запишемо у вигляді таблиці варіаційний ряд об'єднаної вибірки і ранги його елементів. Належність елемента до першої вибірки позначимо рискою зверху:

<u>3</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	40	41	42	<u>5</u>	53	<u>5</u>	54	60	<u>6</u>	63	<u>6</u>	69
----------	----------	----------	----	----	----	----------	----	----------	----	----	----------	----	----------	----

1	3	3	3	5	6	7	8	9,5	9,5	11	12	13	14	15
---	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----	----	----	----	----	----

2. Обчислюємо суми рангів першої та другої вибірок:

$$\omega_1 = 1 + 3 + 3 + 7 + 9,5 + 12 + 14 = 49,5,$$

$$\omega_2 = 3 + 5 + 6 + 8 + 9,5 + 11 + 13 + 15 = 70,5$$

[загальна сума рангів має дорівнювати $\frac{n(n+1)}{2}$, де $n = n_1 + n_2$, і в нашому випадку $n_1 = 7, n_2 = 8$. Справді, $\omega_1 + \omega_2 = \frac{15(15+1)}{2} = 120$].

3. За формулами (50) знаходимо

$$u_1 = 7 \cdot 8 + \frac{7 \cdot (7+1)}{2} - 49,5 = 34,5; u_2 = 7 \cdot 8 + \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - 70,5 = 21,5$$

(контролюємо обчислення: $u_1 + u_2 = n_1 n_2 = 56$).

4. Згідно з (51) $u_B = 21,5$ і за таблицею знаходимо $\hat{p} = P\{U_1 \leq 21,5\}$. Оскільки $P\{U_1 \leq 21\} < P\{U_1 \leq 21,5\} < P\{U_1 \leq 22\}$, то $0,2317 < \hat{p} < 0,2679$.

5. Припущення, що методика A є ефективнішою, відповідає односторонній альтернативній гіпотезі H_1 , а оскільки $\hat{p} > \alpha$, то відхиляти нульову гіпотезу H_0 немає підстав.

Отже, наведені дані не дають підстав вважати методику A ефективнішою (звичайно, те саме стосується й методики B).



Зауваження 6. Описаним алгоритмом можна скористатись і в разі, коли вибірки одержуються з нормально розподілених генеральних сукупностей. Проте більш потужним у цьому разі є критерій Стюдента. Іншими словами, він здатен з більшою ймовірністю відхиляти нульову гіпотезу, якщо вона несправедлива. Це пов'язано з тим, що критерій Стюдента використовує всю інформацію, яка міститься у вибірках, тоді як у критерії Вілкоксона, Манна й Уїтні частина інформації втрачається внаслідок переходу до рангів.

Приклад 3. Далі наведені дані обстежень за тестом інтелекту 12 навмання відібраних осіб першої категорії досліджуваних і 10 — другої (в IQ):

1-ша категорія	100	82	96	120	92	120	102	84	124	108	84	92
2-га категорія	76	80	94	102	126	100	126	114	118	102	—	—

Чи є підстави стверджувати, що рівень інтелекту цих категорій осіб різний? Узяти $\alpha = 0,1$.

Розв'язання

А. Спочатку скористаємось алгоритмом критерію Вілкоксона, Манна й Уїтні. У нашому випадку H_0 — рівень інтелекту обох категорій осіб однаковий.

1. Запишемо варіаційний ряд і проведемо ранжування його елементів:

76	80	82	84	84	92	92	94	96	100	100	102	102
1	2	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10,5	10,5	13	13

102	102	114	118	120	120	126	126
13	15	16	17	18,5	18,5	20	21,5

2. Для сум рангів першої та другої вибірок дістаємо:

$$\omega_1 = 129,5, \omega_2 = 123,5 \left(\text{контроль: } \omega_1 + \omega_2 = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253 \right).$$

3. За формулами (50) ($n_1 = 12, n_2 = 10$) знаходимо:

$$u_1 = 12 \cdot 10 + \frac{12 \cdot (12+1)}{2} - 129,5 = 68,5;$$

$$u_2 = 12 \cdot 10 + \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2} - 123,5 = 51,5$$

(контроль: $u_1 + u_2 = n_1 n_2 = 120$).

4. Згідно з (51) $u_B = 51,5$. Оскільки $n_1 > 8$ і $n_2 > 8$, скористаємось нормальною апроксимацією: вибіркове значення (53) дорівнює

$$z_B = \frac{51,5 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 10(12 + 10 + 1)}} \approx -0,56.$$

Припущення про різний рівень інтелекту відповідає двобічній альтернативній гіпотезі H_1 . Оскільки

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,95} = 1,645$$

і

$$|z_B| < u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

то відхиляти гіпотезу H_0 немає підстав. Отже, слід відхилити припущення про різний рівень інтелекту.

Б. Скористаємось тепер тим, що генеральна сукупність (рівень інтелекту) є нормально розподіленою випадковою величиною. У цьому разі можна застосувати критерій Стюдента.

За вибірками знаходимо:

$$\bar{x} \approx 100,34; \bar{y} = 103,8; s_x^2 \approx 220,24; s_y^2 \approx 305,28.$$

Перевіримо попередню гіпотезу про рівність дисперсій $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ за альтернативної гіпотези $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Для цього знаходимо квантиль $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) = F_{0,95}(9, 11) = 2,9$. Оскільки

$$\frac{s_y^2}{s_x^2} \approx 1,39 < 2,9 = F_{0,95}(9, 11),$$

то гіпотеза $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ приймається.

Тепер перевіряємо гіпотезу $H_0: m_x = m_y$ за альтернативної гіпотези $H_1: m_x \neq m_y$.

Остаточно для вибіркового значення статистики Стюдента дістаємо $z_B \approx -0,5$. Це значення порівнюється з квантилем $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0,95}(20) = 1,725$. Оскільки $|z_B| < 1,725$, гіпотеза $H_0: m_x = m_y$ приймається. Тобто припущення про те, що рівень інтелекту обох категорій осіб різний, слід відхилити. Дістали той самий результат, що й у п. А.



Зауваження 7. Задача перевірки гіпотези однорідності частіше формулюється в більш вузькому [порівняно з (28) — (31)] вигляді з використанням функцій розподілу:

$$H_0: F_x(t) = F_y(t), t \in R; \quad (54)$$

$$H_1: F_x(t) \leq F_y(t), F_x(t) \not\equiv F_y(t); \quad (55)$$

$$H_1: F_x(t) \geq F_y(t), F_x(t) \not\equiv F_y(t); \quad (56)$$

$$H_1: F_x(t) \not\equiv F_y(t).$$

У зв'язку з цим рекомендуємо *самостійно*:

1) довести рівність

$$P\{X < Y\} = P\{X_i < Y_j\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(t) dF_y(t) \quad (57)$$

для довільних неперервних випадкових величин X та Y ;

2) дістати постановки задач (28), (29) та (28), (30) відповідно з постановок задач (54), (55) та (54), (56);

3) показати, що приймаючи гіпотезу (28) проти двобічної альтернативної гіпотези (31) ми не відрізняємо від нульової гіпотези (54) ті альтернативи $F_x(t) \neq F_y(t)$, для яких інтеграл в (57) дорівнює $\frac{1}{2}$;

4) показати, що відхилення гіпотези (28) на користь однієї з альтернативних гіпотез (29) — (31) тягне за собою відхилення гіпотези (54);

3. Критерій знаків і знаковий ранговий критерій Вілкоксона

Повернемося до експериментів, в яких спостерігаються ті самі об'єкти до і після деякої «обробки». Позначимо через X досліджувану ознаку об'єкта до його «обробки», а через Y — тут саму ознаку того самого об'єкта, але після «обробки». Випадкова величина

$$D = X - Y \quad (58)$$

характеризує ефект «обробки». Якщо «обробка» не дає ніякого ефекту, то ненульові значення D , що спостерігаються в експериментах, пояснюються виключно випадковими факторами. У такому разі розподіл випадкової величини D має бути симетричним відносно нуля. Тому гіпотезу H_0 про відсутність ефекту обробки можна записати у вигляді [див. (8) розд. 1]

$$H_0: P\{-a < D < 0\} = P\{0 < D < a\} \text{ для будь-якого } a > 0 \quad (59)$$

і тим самим трактувати її як гіпотезу про симетричність розподілу.

У припущенні нормального розподілу D гіпотеза (59) рівносильна гіпотезі

$$H_0: m_D = 0 \text{ (чи } H_0: m_x = m_y)$$

Далі розглянемо два непараметричні критерії, якими зручно користуватись, коли припущення про нормальний розподіл D не робиться.

Єдиною нашою вимогою буде *неперервність* випадкових величин X та Y , а отже, і D .

3.1. Критерій знаків

Оскільки випадкова величина D неперервна, то $P\{D = 0\} = 0$ і з (59) при $a = \infty$ дістаємо більш широку гіпотезу

$$H_0: P\{D > 0\} = \frac{1}{2}, \quad (60)$$

яка виражає рівність нулю *медіани* розподілу випадкової величини D . Очевидно, що відхилення гіпотези (60) тягне за собою відхилення гіпотези (59).

Нехай спостереженню до і після «обробки» підлягають n об'єктів. Пари спостережень (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ розглядаємо як незалежні. Тоді $(D_1, D_2, \dots, D_n)$, $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (61)

— випадкова вибірка з генеральної сукупності D . Оскільки $P\{D_i = 0\} = 0$, вважаємо вибірку (61) такою, що не містить нульових елементів.

Позначимо через S випадкову величину (статистику), що дорівнює кількості додатних різниць (61), і розглянемо подію $\{D_i > 0\}$ як «успіх», а подію $\{D_i < 0\}$ — як «невдачу». Тоді вибірку (61) можна інтерпретувати як послідовність «успіхів» і «невдач» у n випробуваннях Бернуллі з імовірністю «успіху» $p = P\{D_i > 0\} = P\{D > 0\}$ в окремому випробуванні, статистику S — як загальну кількість

«успіхів» у цих n випробуваннях, а гіпотезу (60) сформулювати як гіпотезу про числове значення ймовірності «успіху» у схемі Бернуллі, а саме

$$H_0: p = \frac{1}{2}. \quad (62)$$

Альтернативною може бути одна з односторонніх гіпотез

$$H_1: p < \frac{1}{2}, H_1: p > \frac{1}{2} \quad (63)$$

або двостороння гіпотеза

$$H_1: p \neq \frac{1}{2}. \quad (64)$$

Нульова гіпотеза (62) відповідає припущенню про відсутність ефекту «обробки», а альтернативна гіпотеза (64) — припущенню, що який-небудь ефект (негативний чи позитивний) «обробка» дає. Спрямованість ефекту «обробки» виражається односторонніми альтернативами (63).

Описану схему перевірки гіпотези (60) називають *критерієм знаків*, а статистику S — *знаковою статистикою*. Зазначимо, що який би неперервний розподіл не мала досліджувана генеральна сукупність D , статистика S завжди має біномний розподіл, зокрема, за справедливої гіпотези (60) параметри цього розподілу дорівнюють n і $\frac{1}{2}$.

Урахування нульових різниць. До цього моменту припускалось, що серед елементів вибірки (61) немає нульових. У конкретних вибірках

$$(d_1, d_2, \dots, d_m), d_i = x_i - y_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (65)$$

нульові різниці d_i можуть зустрітись через наближене подання (заокруглення) результатів вимірювань x_i та y_i . У застосуваннях критерію знаків нульові різниці d_i рекомендується відкидати. Тому далі скрізь розумітимемо під n кількість ненульових різниць конкретної вибірки (65) ($n \leq m$).

Повернемось до задачі (62) — (64). Нехай α — заданий рівень значущості і k — спостережене значення статистики S . Якщо у нерівностях (7.11) — (7.13) п. 7.2.2 взяти $p_0 = \frac{1}{2}$, дістанемо відповідні нерівності, які дозволяють відхилити чи прийняти гіпотезу (62) для кожної з альтернативних гіпотез (63), (64). Разом з тим за справедливої гіпотези (62) біномний розподіл стає симетричним, що можна виразити рівністю

$$P\{S \geq k\} = P\{S \leq n - k\}.$$

Це дає змогу, увівши позначення

$$s_\alpha = \min(k, n - k) \quad (66)$$

і обчисливши

$$\hat{p} = P\{S \leq s_\alpha\} = \sum_{i=0}^{s_\alpha} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (67)$$

прийняти рішення:

відхилити гіпотезу (62), якщо $\hat{p} \leq \alpha$ — у разі односторонньої альтернативної гіпотези (63);
якщо $\hat{p} \leq \frac{\alpha}{2}$ — у разі двосторонньої альтернативної гіпотези (64). У протилежному разі вважати гіпотезу (62) такою, що не суперечить результатам спостережень.

Підкреслимо, що рішення про відхилення чи прийняття гіпотези (62) не залежить від того, яку саме спрямованість має одностороння альтернатива. Крім того, з'ясування в (66) меншого з чисел $k, n - k$ дозволяє в разі потреби уточнити, яка з двох гіпотез (63) є більш прийнятною, коли H_0 відхиляється.

Щоб щоразу не обчислювати суми (67), на практиці користуються табл. 1 біномного розподілу при $p = \frac{1}{2}$.

Далі наведено фрагмент такої таблиці у вигляді ймовірностей $P\{S \leq a\}$.

Таблиця 1

Таблиця біномного розподілу з параметрами n та $0,5$; $P\{S \leq a\}$;
 $P\{S \geq a\} = P\{S \leq n - a\}$

$n \backslash a$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020
1	0,7500	0,5000	0,3125	0,1875	0,1094	0,0625	0,0352	0,0195
2	1,0000	0,8750	0,6875	0,5000	0,3438	0,2266	0,1445	0,0898
3		1,0000	0,9375	0,8125	0,6562	0,5000	0,3633	0,2539
4			1,0000	0,9687	0,8906	0,7734	0,6367	0,5000

$n \backslash a$	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0107	0,0059	0,0032	0,0017	0,0009	0,0005	0,0003	0,0001
2	0,0547	0,0327	0,0193	0,0112	0,0065	0,0037	0,0021	0,0012
3	0,1719	0,1133	0,0730	0,0461	0,0287	0,0176	0,0106	0,0064
4	0,3770	0,2744	0,1938	0,1334	0,0898	0,0592	0,0384	0,0245
5	0,6230	0,5000	0,3872	0,2905	0,2120	0,1509	0,1051	0,0717
6	0,8281	0,7256	0,6128	0,5000	0,3953	0,3036	0,2272	0,1662
7	0,9453	0,8867	0,8062	0,7095	0,6047	0,5000	0,4018	0,3145
8	0,9893	0,9673	0,9270	0,8666	0,7880	0,6964	0,5982	0,5000

Отже, для того щоб за двома попарно зв'язаними вибірками

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ і } (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

перевірити на рівні значущості α гіпотезу H_0 про відсутність ефекту «обробки», потрібно знайти:

- 1) кількість n відмінних від нуля різниць $x_i - y_i (n \leq m)$;
- 2) кількість k додатних різниць $x_i - y_i$;
- 3) вибіркове значення s_g згідно з (66);
- 4) ймовірність $\hat{p} = P\{S \leq s_g\}$ за табл. 1,

а також прийняти відповідне рішення згідно з (68).

Якщо n більше, ніж у табл. 1, можна скористатись нормальним наближенням статистики S , урахувавши, що

$$M[S] = \frac{n}{2}, D[S] = \frac{n}{4}.$$

Статистика

$$Z = \frac{S - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$$

має розподіл, близький до розподілу $N(0,1)$. Тому її вибіркове значення

$$z_g = \frac{s_g - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}, \quad (69)$$

де s_g визначається згідно з (66), порівнюється з відповідним квантилем розподілу $N(0,1)$. При цьому гіпотеза H_0 на рівні значущості α відхиляється, якщо

$$z_g \leq u_{\alpha} - \text{у разі односторонньої альтернативи}; |z_g| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \text{у разі двосторонньої альтернативи}. \quad (70)$$



Зауваження 1. Для двобічної альтернативи той самий висновок, що і з (69), (70), можна зробити, порівнявши величину

$$\chi^2_6 = \frac{\left(k - \frac{n}{2}\right)^2}{n/4}$$

з квантилем $\chi^2_{1-\alpha}(1)$ розподілу «хі»-квадрат.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1 (узято з книжки О. Ю. Єрмолаєва «Математическая статистика для психологов», 2006).

Психолог за допомогою тесту Тейлора двічі виявляє рівень тривожності у 14 учасників до і після проведення тренінгу.

Його мета — з'ясувати на рівні значущості $\alpha = 0,01$ ефективність даного варіанта тренінгу для зниження тривожності учасників.

Результати експериментів наведені в перших трьох стовпчиках таблиці.

Четвертий стовпчик нам потрібен для розрахунків.

Номер учасника	Рівень тривожності до тренінгу, x_i	Рівень тривожності після тренінгу, y_i	Знаки різниць $x_i - y_i$
1	34	30	+
2	39	39	0
3	26	35	—
4	33	34	—
5	34	40	—
6	40	35	+
7	25	22	+
8	23	22	+
9	33	32	+
10	24	23	+
11	15	16	—
12	27	34	—
13	35	33	+
14	37	34	+

Розв'язання

Перевіряємо гіпотезу H_0 : даний варіант тренінгу не дає ніякого ефекту. У нашому випадку $n = 14 - 1 = 13$ — кількість ненульових різниць; $k = 8$ — кількість додатних різниць. Тому $s_g = \min(8, 5) = 5$. За табл. 1 знаходимо

$$\hat{p} = P\{S \leq 5\} = 0,2905.$$

За умовою гіпотезу H_0 потрібно перевірити проти однобічної альтернативи. Оскільки $\hat{p} > 0,01$, на рівні значущості $\alpha = 0,01$ слід вважати даний варіант тренінгу неефективним.

Приклад 2 (узято звідти ж, що й приклад 1). Одержавши негативний результат, психолог вніс у спосіб тренінгу деякі корективи і знову висунув гіпотезу: поліпшений спосіб тренінгу дозволяє ефективно знижувати тривожність учасників. Для перевірки цієї гіпотези він проводить той самий експеримент, але з 19 учасниками. Дані занесено до таблиці. Береться той самий рівень значущості $\alpha = 0,01$.

Номер учасника	Рівень тривожності до тренінгу, x_i	Рівень тривожності після тренінгу, y_i	Знаки різниці $x_i - y_i$
1	24	22	+
2	12	12	0
3	40	23	+
4	30	31	–
5	40	32	+
6	35	24	+
7	40	40	0
8	32	12	+
9	40	22	+
10	24	21	+
11	33	30	+
12	38	26	+
13	39	38	+
14	25	23	+
15	28	22	+
16	36	22	+
17	37	36	+
18	32	38	–
19	25	25	0

Розв'язання

А. Знову перевіряємо ту саму гіпотезу H_0 : поліпшений варіант тренінгу не дає ніякого ефекту. Тепер у нас $n = 19 - 3 = 16$; $k = 14$; $s_8 = 2$. За табл. 1

$$\hat{p} = P\{S \leq 2\} = 0,0021.$$

Знову маємо справу з однобічною альтернативою. Оскільки $\hat{p} < 0,01$, на рівні значущості $\alpha = 0,01$ гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, поліпшений варіант тренінгу можна вважати ефективним.

Б. Оскільки n — достатньо велике, розв'яжемо задачу з використанням співвідношень (69), (70). Для вибіркового значення z_8 дістаємо

$$z_8 = \frac{2 - \frac{16}{2}}{\frac{\sqrt{16}}{2}} = -3.$$

За таблицею квантилів розподілу $N(0,1)$ знаходимо

$$u_{0,01} = -u_{0,99} = -2,326.$$

Оскільки $z_8 < u_{0,01}$, дістаємо той самий результат, що й у п. А.

Критерій знаків є одним з найпростіших з погляду обчислень. Традиційно він вважається й одним з найменш потужних. Пара-метричним аналогом критерію знаків є критерій Стюдента для попарно зв'язаних вибірок. Якщо відхилити нульову гіпотезу з використанням критерію знаків не вдалося, то не виключено, що застосування більш потужного критерію (наприклад, того ж критерію Стюдента) цю гіпотезу відхилить. Якщо ж нульова гіпотеза критерієм знаків на достатньо високому рівні значущості відхиляється, то більш потужний критерій це підтвердить.

Продемонструємо сказане на прикладах.

Приклад 3. Далі наведені дані про собівартість одиниці продукції (у грн) на семи однотипних підприємствах галузі до і після впровадження альтернативних джерел енергії:

$$x_1 = 17,2; x_2 = 21,6; x_3 = 19,5; x_4 = 19,1; x_5 = 22,0; x_6 = 18,7; x_7 = 20,3;$$

$$y_1 = 18,3; y_2 = 20,8; y_3 = 20,9; y_4 = 21,2; y_5 = 22,7; y_6 = 18,6; y_7 = 21,9.$$

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що перехід до альтернативних джерел енергії привів до підвищення собівартості продукції даної галузі?

Розв'язання

Перевіряється гіпотеза H_0 : собівартість продукції не змінилась. Складемо послідовність знаків різниць $x_i - y_i$: $-, +, -, -, -, +, -$. Отже, $n = 7$; $k = 2$; $s_b = 2$. За табл. 1 $\hat{p} = P\{S \leq 2\} = 0,2266$. Альтернативною є однобічна гіпотеза. Оскільки $\hat{p} > 0,05$, відхиляти гіпотезу H_0 немає підстав. Інакше кажучи, дати позитивну відповідь на поставлене в задачі питання з використанням критерію знаків не можна.

Розв'яжіть цю задачу самостійно з використанням критерію Стюдента. Результат розв'язання має бути такий: на рівні значущості $\alpha = 0,05$ гіпотезу H_0 слід відхилити, тобто відповідь на поставлене в задачі питання позитивна.

Приклад 4. Двома приладами в тому самому порядку виміряно 8 деталей і одержано такі результати (у см):

$$x_1 = 4,0; x_2 = 3,5; x_3 = 4,1; x_4 = 5,5; x_5 = 4,6; x_6 = 6,0; x_7 = 5,1; x_8 = 4,3;$$

$$y_1 = 3,0; y_2 = 3,0; y_3 = 3,8; y_4 = 2,1; y_5 = 4,9; y_6 = 5,3; y_7 = 3,1; y_8 = 2,7.$$

Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що перший прилад порівняно з другим дає завищені результати?

Розв'язання

Перевіряється гіпотеза H_0 : відмінність у результатах вимірювань незначуща, тобто пояснюється випадковими факторами. Складемо послідовність знаків різниць $x_i - y_i$: $+, +, +, +, -, +, +, +$. Отже, $n = 8$; $k = 7$; $s_b = 1$. За табл. 1 $\hat{p} = P\{S \leq 1\} = 0,0352$. Альтернативною є однобічна гіпотеза. Оскільки $\hat{p} < 0,05$, гіпотезу H_0 слід відхилити. Одержаний результат підтверджується застосуванням критерію Стюдента. Покажіть це самостійно.



Зауваження 2. Критерій знаків може застосовуватись для розв'язання інших задач.

А. Нехай X — неперервна випадкова величина і потрібно перевірити гіпотезу $H_0: P\{X > h\} = \frac{1}{2}$, тобто медіана дорівнює $h \neq 0$. Якщо позначити $D = X - h$, то $X > h \Leftrightarrow D > 0$ і одержуємо рівносильну гіпотезу $H_0: P\{D > 0\} = \frac{1}{2}$, тобто задача зводиться до розглянутої раніше [див. (60)].

Б. Нехай $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ — випадкова вибірка з неперервної двовимірної генеральної сукупності (X, Y) . Потрібно перевірити гіпотезу H_0 : випадкові величини X та Y незалежні й однаково розподілені. Складемо різниці $D_i = X_i - Y_i$. Тоді за справедливої гіпотези H_0 маємо $P\{D_i > 0\} = \frac{1}{2}$. Знову дістаємо задачу, розглянуту раніше.

Водночас за справедливої гіпотези H_0 двовимірну вибірку можна розглянути як одновимірну $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ обсягом $2n$ і скористатись критерієм Вілкоксона, Манна й Уїтні. У цьому разі можливо, що останній критерій виявить значущі відхилення від гіпотези H_0 , тоді як критерій знаків — ні.

3.2. Знаковий ранговий критерій Вілкоксона

Виходячи з неперервності різниць (61) будемо вважати, що всі вони відмінні від нуля і серед абсолютних величин цих різниць немає однакових. У такому разі знакові ранги

$$R_1, R_2, \dots, R_n \quad (71)$$

різниць (61) визначаються однозначно.

Користуючись ранговою термінологією, критерій знаків з попереднього пункту можна охарактеризувати як такий, що використовує лише знаки рангів (71), а не самі ці ранги (див. приклад 1 розд. 1). Звичайно, значна частина інформації при цьому втрачається. Більш потужний критерій дістанемо, якщо скористаємося статистикою, що враховує не тільки знаки рангів (71), а і їхні величини. За таку статистику можна взяти, наприклад, суму знакових рангів (71)

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (72)$$

Проте більш зручною є еквівалентна їй статистика W , яка визначається як сума додатних знакових рангів (71). Якщо скористатись прикладом 2 розд. 1, цю статистику можна подати у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \left(R + \frac{n(n+1)}{2} \right). \quad (73)$$

Статистика W запропонована Вілкоксоном.

Очевидно, що W є дискретною випадковою величиною з можливими значеннями $0, 1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$. Нульове значення досягається в разі, коли всі ранги (71) від'ємні, а значення $\frac{n(n+1)}{2}$ — коли всі ранги (71) додатні.

Гіпотезу (59) природно відхилити, якщо вибіркове значення статистики W виявиться близьким до 0 або до $\frac{n(n+1)}{2}$. Це можна зробити на заданому рівні значущості α , якщо знайти розподіл W за справедливої гіпотези (59).

Перед тим як сформулювати загальний метод обчислення ймовірностей

$$P\{W = \omega, \omega = 0, 1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\}, \quad (74)$$

розглянемо довільну підмножину

$$\{i_1, i_2, \dots, i_k; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad (75)$$

множини цілих чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ [кількість усіх підмножини (75) дорівнює 2^n , випадку $k = 0$ відповідає порожня множина $\emptyset$, а випадку $k = n$ — уся множина $\{1, 2, \dots, n\}$] і знайдемо за справедливої гіпотези (59) імовірність події

$A = \{\text{серед знакових рангів (71) рівно } k \text{ додатних і серед цих додатних рангів є такий що дорівнює } i_1, \text{ такий що дорівнює } i_2, \dots, \text{ такий що дорівнює } i_k\}$.

Оскільки k місць для додатних рангів $i_1, i_2, \dots, i_k$ можна вибрати C_n^k способами і в кожному такому виборі ці ранги можна переставити $k!$ способами, тоді як від'ємні ранги — $(n - k)!$ способами, то кількість таких реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ вектора знакових рангів $(R_1, R_2, \dots, R_n)$, які задовольняють подію A , дорівнює

$$C_n^k k! (n - k)! = n!.$$

Ураховуючи, що кількість усіх реалізацій $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ дорівнює $2^n n!$ і всі вони за справедливої гіпотези (59) рівноможливі (див. (14) розд. 1), дістанемо

$$P(A) = \frac{n!}{2^n n!} = \frac{1}{2^n}. \quad (76)$$

Отже, множина додатних знакових рангів з однаковою ймовірністю (76) може співпасти з будь-якою з підмножин (75), включаючи порожню множину $\emptyset$.

Звідси дістаємо загальний метод обчислення ймовірностей (74): потрібно знайти кількість $N(\omega)$ таких підмножин (75), для яких $i_1 + i_2 + \dots + i_k = \omega$, і скористатись формулою

$$P\{W = \omega\} = \frac{N(\omega)}{2^n}.$$

Так, кожен із трьох випадків $\omega = 0, \omega = 1$ та $\omega = 2$ задовольняє лише одна з підмножин (75). Це відповідно $\emptyset, \{1\}$ та $\{2\}$. Тому $N(0) = N(1) = N(2) = 1$ і

$$P\{W = 0\} = P\{W = 1\} = P\{W = 2\} = \frac{1}{2^n}.$$

Якщо $\omega = 3$ чи $\omega = 4$, підходящих підмножин дві: відповідно $\{1, 2\}$ і $\{3\}$ чи $\{1, 3\}$ і $\{4\}$. Тому $N(3) = N(4) = 2$ і

$$P\{W = 3\} = P\{W = 4\} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Для $\omega = 5$ знаходимо: $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}$. Тому $N(5) = 3$ і

$$P\{W = 5\} = \frac{3}{2^n}$$

і т. д.

За справедливої гіпотези (59) розподіл статистики (72) симетричний відносно нуля (див. приклад 3 розд. 1), звідки впливає симетричність розподілу статистики (73) відносно $\frac{n(n+1)}{4}$. Тому для $\omega > \frac{n(n+1)}{4}$ можна скористатись формулою

$$P\{W = \omega\} = P\left\{W = \frac{n(n+1)}{2} - \omega\right\}.$$

Знаючи ймовірності $P\{W = \omega\}$, можна обчислити ймовірності $P\{W \leq \omega\}$. Симетричність розподілу можна скористатись у вигляді рівності

$$P\{W \geq \omega\} = P\left\{W \leq \frac{n(n+1)}{2} - \omega\right\}.$$

Розподіл статистики W за справедливої гіпотези (59) наведено в табл. 2 (для $n > 16$ користуються нормальним наближенням розподілу статистики W).

Таблиця 2

Знаковий ранговий розподіл Вілкоксона;

$$P\{W \leq \omega\}; P\{W \geq \omega\} = P\left\{W \leq \frac{n(n+1)}{2} - \omega\right\}$$

$\begin{smallmatrix} n \\ \omega \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7
0	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078
1		0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0156
2			0,3750	0,1875	0,0938	0,0469	0,0234
3				0,3125	0,1563	0,0781	0,0391
4				0,4375	0,2188	0,1094	0,0547
5					0,3125	0,1563	0,0781
6					0,4063	0,2188	0,1094
7					0,5000	0,2813	0,1484
8						0,3438	0,1875
9						0,4219	0,2344
10						0,5000	0,2891
11							0,3438
12							0,4063
13							0,4688
n	8	9	10	11	12	13	14

ω							
0	0,0039	0,0020	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0078	0,0039	0,0020	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001
2	0,0117	0,0059	0,0029	0,0015	0,0007	0,0004	0,0002
3	0,0195	0,0098	0,0049	0,0024	0,0012	0,0006	0,0003
4	0,0273	0,0137	0,0068	0,0034	0,0017	0,0009	0,0004
5	0,0391	0,0195	0,0098	0,0049	0,0024	0,0012	0,0006
6	0,0547	0,0273	0,0137	0,0068	0,0034	0,0017	0,0009
7	0,0742	0,0371	0,0186	0,0093	0,0046	0,0023	0,0012
8	0,0977	0,0488	0,0244	0,0122	0,0061	0,0031	0,0015
9	0,1250	0,0645	0,0322	0,0161	0,0081	0,0040	0,0020
10	0,1563	0,0820	0,0420	0,0210	0,0105	0,0052	0,0026
11	0,1914	0,1016	0,0527	0,0269	0,0134	0,0067	0,0034
12	0,2305	0,1250	0,0654	0,0337	0,0171	0,0085	0,0043
13	0,2734	0,1504	0,0801	0,0415	0,0212	0,0107	0,0054
14	0,3203	0,1797	0,0967	0,0508	0,0261	0,0133	0,0067
15	0,3711	0,2129	0,1162	0,0615	0,0320	0,0164	0,0083
16	0,4219	0,2480	0,1377	0,0737	0,0386	0,0199	0,0101
17	0,4727	0,2852	0,1611	0,0874	0,0461	0,0239	0,0123
18		0,3262	0,1875	0,1030	0,0549	0,0287	0,0148
19		0,3672	0,2158	0,1201	0,0647	0,0341	0,0176
20		0,4102	0,2461	0,1392	0,0757	0,0402	0,0209
21		0,4551	0,2783	0,1602	0,0881	0,0471	0,0247
22		0,5000	0,3125	0,1826	0,1018	0,0549	0,0290
23			0,3477	0,2065	0,1167	0,0636	0,0338
24			0,3848	0,2324	0,1331	0,0732	0,0392
25			0,4229	0,2598	0,1506	0,0839	0,0453
26			0,4609	0,2886	0,1697	0,0955	0,0520
27			0,5000	0,3188	0,1902	0,1082	0,0594
28				0,3501	0,2119	0,1219	0,0676
29				0,3823	0,2349	0,1367	0,0765
30				0,4155	0,2593	0,1527	0,0863
31				0,4492	0,2847	0,1698	0,0969
32				0,4829	0,3110	0,1879	0,1083
33					0,3386	0,2072	0,1206
34					0,3667	0,2274	0,1338
35					0,3955	0,2487	0,1479
36					0,4250	0,2709	0,1629
37					0,4548	0,2939	0,1788
38					0,4849	0,3177	0,1955
39						0,3424	0,2131
40						0,3677	0,2316
41						0,3934	0,2508
42						0,4197	0,2708
43						0,4463	0,2915
44						0,4730	0,3129
45						0,5000	0,3349
46							0,3574
47							0,3804
48							0,4039
49							0,4276
50							0,4516
51							0,4758

52		
$\omega \backslash n$	15	16
0	0,0000	0,0000
1	0,0001	0,0000
2	0,0001	0,0000
3	0,0002	0,0001
4	0,0002	0,0001
5	0,0003	0,0002
6	0,0004	0,0002
7	0,0006	0,0003
8	0,0008	0,0004
9	0,0010	0,0005
10	0,0013	0,0007
11	0,0017	0,0008
12	0,0021	0,0011
13	0,0027	0,0013
14	0,0034	0,0017
15	0,0042	0,0021
16	0,0051	0,0026
17	0,0062	0,0031
18	0,0075	0,0038
19	0,0090	0,0046
20	0,0108	0,0055
21	0,0128	0,0065
22	0,0151	0,0078
23	0,0177	0,0091
24	0,0206	0,0107
25	0,0240	0,0125
26	0,0277	0,0145
27	0,0319	0,0168
28	0,0365	0,0193
29	0,0416	0,0222
30	0,0473	0,0253
31	0,0535	0,0288
32	0,0603	0,0327
33	0,0677	0,0370
34	0,0757	0,0416
35	0,0844	0,0467
36	0,0938	0,0523
37	0,1039	0,0583
38	0,1147	0,0649
39	0,1262	0,0719
40	0,1384	0,0795

		0,5000
$\omega \backslash n$	15	16
41	0,1514	0,0877
42	0,1651	0,0964
43	0,1796	0,1057
44	0,1947	0,1156
45	0,2106	0,1261
46	0,2271	0,1372
47	0,2444	0,1489
48	0,2622	0,1613
49	0,2807	0,1742
50	0,2997	0,1877
51	0,3193	0,2019
52	0,3394	0,2166
53	0,3599	0,2319
54	0,3808	0,2477
55	0,4020	0,2641
56	0,4235	0,2809
57	0,4452	0,2983
58	0,4670	0,3161
59	0,4890	0,3343
60	0,5110	0,3529
61	0,5330	0,3718
62	0,5548	0,3910
63	0,5765	0,4104
64	0,5980	0,4301
65	0,6192	0,4500
66	0,6401	0,4699
67	0,6606	0,4900
68	0,6807	0,5100
69	0,7003	0,5301
70	0,7193	0,5500
71	0,7378	0,5699
72	0,7556	0,5896
73	0,7729	0,6090
74	0,7894	0,6282
75	0,8053	0,6471
76	0,8204	0,6657
77	0,8349	0,6839
78	0,8486	0,7017
79	0,8616	0,7191

Повернемо́сь до гіпотези (59), яку й далі трактуватимемо як гіпотезу H_0 про відсутність ефекту «обробки». Нехай результати експериментів до і після «обробки» задаються двома попарно зв'язаними вибірками відповідно

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ та } (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (77)$$

Алгоритм знакового рангового критерію Вілкоксона для пере-вірки гіпотези H_0 за вибірками (77) наведений далі. Як і алго-ритми попередніх критеріїв, даний алгоритм завдяки симетричності розподілу статистики W

побудовано в такий спосіб, що інформація про альтернативну гіпотезу потрібна лише на стадії прийняття рішення і не важливо, яку спрямованість має одnobічна альтернатива. За потреби прийнятну спрямованість одnobічної альтернативи завжди можна уточнити, керуючись різницею (58) і вибіркоvim значенням ω статистики W , а саме близьким до 0 чи до $\frac{n(n+1)}{2}$ є це значення.

Алгоритм знакового рангового критерію Вілкоксона

Для перевірки гіпотези H_0 про відсутність ефекту «обробки» за вибірками (77), потрібно:

1. Знайти різниці

$$d_1 = x_1 - y_1, d_2 = x_2 - y_2, \dots, d_n = x_n - y_n \quad (78)$$

і знакові ранги

$$r_1, r_2, \dots, r_n \quad (79)$$

цих різниць. Для цього ранжуються абсолютні величини

$$|d_1|, |d_2|, \dots, |d_n| \quad (80)$$

різниць (78) і кожному одержаному рангу

$$|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n| \quad (81)$$

приписується знак відповідної різниці (78). Наприклад, якщо

$$d_1 = -0,5; d_2 = 2,5; d_3 = 2,0; d_4 = -3,0; d_5 = 1,5, \text{ то}$$

Абсолютні величини $ d_i $	0,5	2,5	2,0	3,0	1,5
Ранги $ r_i $	1	4	3	5	2
Знакові ранги r_i	-1	4	3	-5	2

Правильність ранжування перевіряється співвідношенням

$$|r_1| + |r_2| + \dots + |r_n| = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (82)$$

У наведеному прикладі $1 + 4 + 3 + 5 + 2 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$.

2. Обчислити суму рангів (79)

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n \quad (83)$$

і вибіркoве значення статистики (73)

$$\omega = \frac{1}{2} \left(r + \frac{n(n+1)}{2} \right) \quad (84)$$

(доцільність саме такого, а не безпосереднього обчислення ω , як суми додатних рангів, пояснемо далі).

3. Вибрати менше з чисел ω та $\frac{n(n+1)}{2} - \omega$, тобто

$$\omega_8 = \min \left(\omega, \frac{n(n+1)}{2} - \omega \right), \quad (85)$$

і за табл. 2 знайти ймовірність

$$\hat{p} = P\{W \leq \omega_8\}.$$

4. Прийняти рішення, а саме відхилити гіпотезу H_0 , якщо

$$\hat{p} \leq \alpha \text{ — у разі одnobічної альтернативної гіпотези,}$$

$$\hat{p} \leq \frac{\alpha}{2} \text{ — у разі двобічної альтернативної гіпотези.}$$

У протилежному разі вважати гіпотезу H_0 такою, що не суперечить результатам спостережень.

Урахування повторень абсолютних різниць (80) та нульових різниць.

Пунктом 1 наведеного алгоритму передбачається, що знакові ранги (79) визначаються однозначно (див. початок п. 3.2). На практиці, на жаль, через наближене подання (заокруглення) результатів вимірювань серед величин (80) можуть зустрічатись як однакові, так і нульові.

Випадок, коли серед величин (80) є однакові, але немає нульових, особливих ускладнень не викликає. Потрібно лише для ранжування абсолютних величин (80) скористатись методом середніх рангів (див. п. 2.2). Правильність ранжування контролюється тим же співвідношенням (82).

Інша ситуація в разі, коли серед різниць (78) є нульові. Тоді після знаходження рангів абсолютних різниць (81) [якщо нульових різниць кілька, для знаходження (81) застосовується метод середніх рангів] і переходу від (81) до (79) залишаються невизначеними знакові ранги нульових різниць. У результаті невизначеними є сума (83) і вибіркове значення (84).

Одна з відомих процедур урахування нульових різниць полягає в такому: знаходять суму тих рангів (81), які відповідають нульовим різницям, і половину цієї суми (зі знаком «мінус») додають до суми від'ємних рангів, а іншу половину — до суми додатних рангів. Результат, що виходить в останньому разі, береться за вибіркове значення ω статистики критерію (аналогічно визначається й сама статистика W).

У наведеному раніше алгоритмі така процедура реалізується дуже просто: після того як знайдено ранги абсолютних різниць (81) і проведено перевірку ранжування згідно з (82), невизначені знакові ранги в (79) беруться рівними нулю. У всьому іншому алгоритм залишається без змін. При цьому потрібне вибіркове значення ω завдяки використанню співвідношення (84) знаходиться автоматично.

Отже, щоб урахувати повторення і нульові значення серед величин (80), потрібно модифікувати лише перший пункт наведеного алгоритму, а саме проранжувати величини (80) з використанням методу середніх рангів, приписати одержаним рангам знаки відповідних різниць або обнулити ці ранги, якщо відповідні їм різниці нульові.

Наприклад,

$$d_1 = -0,5; d_2 = 0; d_3 = 1,5; d_4 = -0,5; d_5 = 2,0; d_6 = -1,5; d_7 = 2,0.$$

Абсолютні величини $ d_i $	0,5	0	1,5	0,5	2,0	1,5	2,0
Ранги $ r_i $	2,5	1	4,5	2,5	6,5	4,5	6,5
Знакові ранги r_i	- 2,5	0	4,5	- 2,5	6,5	- 4,5	6,5

Асимптотична нормальність розподілу статистики W .

У розд. 1 показано, що сума знакових рангів (72) має ха-рактеристики

$$M[R] = 0, D[R] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

і обґрунтовано її асимптотичну нормальність.

Оскільки статистики W і R пов'язані лінійним співвідношенням (73), то

$$M[W] = \frac{n(n+1)}{4}, D[W] = \frac{1}{4}D[R] = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1), \quad (86)$$

а розподіл статистики

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)}} \quad (87)$$

для достатньо великих n близький до розподілу $N(0,1)$. Гіпотезу H_0 про відсутність ефекту «обробки» можна перевірити, порівнявши вибіркове значення статистики (87)

$$z_\theta = \frac{\omega_\theta - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)}}, \quad (88)$$

де ω_θ визначається згідно з (85), з відповідним квантилем розподілу $N(0,1)$, а саме гіпотеза H_0 на рівні значущості α відхиляється, якщо:

$$z_\theta \leq u_\alpha \text{ — у разі односторонньої альтернативи, } |z_\theta| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ — у разі двобічної альтернативи.} \quad (89)$$

Співвідношеннями (88), (89) рекомендується користуватись для $n > 16$. Нагадаємо, що точний розподіл статистики W наведений у табл. 2 для $n \leq 16$.



Зауваження 3. Якщо різниця (58) розподілена нормально, то стосовно до знакового рангового критерію Вілкоксона і його параметричного аналога, критерію Стьюдента для попарно зв'язаних вибірок, можна дослівно повторити сказане в зауваженні 6 п. 2.2 для критерію Вілкоксона, Манна й Уїтні і критерію Стьюдента для незалежних вибірок.

Приклад 5. Розв'язати задачу з прикладу 3, користуючись знаковим ранговим критерієм Вілкоксона.

Розв'язання

Вихідні дані і всі необхідні операції п. 1 алгоритму знакового рангового критерію Вілкоксона зведемо до таблиці:

«До», x_i	«Після», y_i	Різниця, d_i	Абсолютні різниці, $ d_i $	Ранги, $ r_i $	Знакові ранги, r_i
17,2	18,3	-1,1	1,1	4	-4
21,6	20,8	0,8	0,8	3	3
19,5	20,9	-1,4	1,4	5	-5
19,1	21,2	-2,1	2,1	7	-7
22,0	22,7	-0,7	0,7	2	-2
18,7	18,6	0,1	0,1	1	1
20,3	21,9	-1,6	1,6	6	-6
					$\sum = -20$

Сума знакових рангів зазначена у таблиці. Тому для вибіркового значення (84) дістаємо

$$\omega = \frac{1}{2} \left(-20 + \frac{7(7+1)}{2} \right) = 4.$$

У нашому випадку $\omega_\theta = \min(4, 24) = 4$, і за табл. 2

$$\hat{p} = P\{W \leq 4\} = 0,0547.$$

Одержаний результат свідчить, що деяке підвищення собівартості продукції все-таки є. Разом з тим відхилити гіпотезу

H_0 : собівартість продукції не змінилась

саме на рівні значущості $\alpha = 0,05$ ми не можемо, оскільки $\hat{p} > 0,05$.

Критерій Стьюдента гіпотезу H_0 на рівні значущості $\alpha = 0,05$ відхиляє.

Приклад 6. У перших двох стовпцях таблиці наведено невиробничі затрати часу (у год за робочий тиждень) 16 навмання вибраними працівниками заводу до і після впровадження нової форми оплати праці. Чи можна на рівні значущості $\alpha = 0,05$ вважати, що невиробничі затрати часу працівниками заводу значущо зменшились?

Розв'язання

Перевіряється гіпотеза H_0 : невиробничі затрати часу не змінилися. Альтернативною згідно з постановкою задачі є гіпотеза H_1 : невиробничі затрати часу зменшились (однобічна альтернатива).

Процедуру ранжування зведемо до 3-го — 6-го стовпців таблиці:

«До», x_i	«Після», y_i	Різниця, d_i	Абсолютні різниці, $ d_i $	Ранги, $ r_i $	Знакові ранги, r_i
4,7	4,0	0,7	0,7	11	11
5,3	5,3	0	0	2	0
4,1	3,8	0,3	0,3	6,5	6,5
4,0	3,0	1,0	1,0	13	13
5,2	5,4	-0,2	0,2	4,5	-4,5
3,5	3,0	0,5	0,5	9	9
3,4	3,4	0	0	2	0
5,5	2,1	3,4	3,4	16	16
4,6	4,9	-0,3	0,3	6,5	-6,5
6,0	5,3	0,7	0,7	11	11
5,2	5,2	0	0	2	0
3,2	3,4	-0,2	0,2	4,5	-4,5
5,1	3,1	2,0	2,0	15	15
4,3	2,7	1,6	1,6	14	14
5,7	5,0	0,7	0,7	11	11
5,0	5,4	-0,4	0,4	8	-8
				$\sum = 13$	$\sum = 83$

Оскільки $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{16(16+1)}{2} = 136$, ранжування проведено правильно. Сума знакових рангів зазначена в таблиці. Для вибіркового значення (84) дістаємо

$$\omega = \frac{1}{2}(83 + 136) = 109,5.$$

У нашому випадку

$$\omega_0 = \min(109,5; 136 - 109,5) = 26,5.$$

За табл. 2 знаходимо

$$0,0145 < \hat{p} = P\{W \leq 26,5\} < 0,0168.$$

Оскільки $\hat{p} < 0,05$, гіпотезу H_0 слід відхилити. Іншими словами, упровадження нової форми оплати праці стимулювало значуще зменшення невиробничих затрат часу працівниками заводу.

Зазначимо, що критерій знаків, для якого згідно з наведеними в таблиці даними $\hat{p} = 0,1334$, відхилити гіпотезу H_0 на рівні значущості $\alpha = 0,05$ не дозволяє.

Рекомендуємо *самостійно* розв'язати задачу за допомогою критерію Стюдента у припущенні, що застосування останнього можливе.

Приклад 7. Розв'язати задачу з прикладу 6, скориставшись нормальним наближенням розподілу статистики Вілкоксона.

Розв'язання

Для вибіркового значення (88) дістаємо

$$z_8 = \frac{26,5-68}{\sqrt{\frac{1}{24} \cdot 16 \cdot 17 \cdot 33}} \approx -2,1.$$

За таблицею квантилів розподілу $N(0,1)$ знаходимо

$$u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645.$$

Оскільки $z_8 < u_{0,05}$, маємо той самий результат, що й у прикладі 6.

Отже, у цій статті ми познайомилися з основними принципами побудови й алгоритмами непараметричних критеріїв, які застосовуються для порівняння двох генеральних сукупностей. Разом з тим ціла низка непараметричних критеріїв, які залишились поза нашою увагою, розроблена для порівняння трьох чи більшої кількості генеральних сукупностей. Ці критерії працюють відповідно з трьома чи більшою кількістю вибірок (залежних чи незалежних) і з ними можна познайомитись у спеціальній літературі з математичної статистики.





УДК 378.147+372.851:512

ІСТОРИКО-ГЕНЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Ірина СВЕРЧЕВСЬКА

iryna_sver@ukr.net

[ORCID ID: 0000-0001-7306-3836](https://orcid.org/0000-0001-7306-3836)

АНОТАЦІЯ

Значущість історико-генетичного підходу до навчання математики полягає в тому, що знайомство зі здобутками математичної науки відбувається одночасно з розглядом процесів їх появи та розвитку. Вивчення математичних тверджень, формул, правил, методів поєднується з використанням історичних фактів про виникнення цих ідей та підходів, про вклад вчених у розбудову науки.

Важливим є розгляд визначних історичних задач, що були запропоновані відомими математиками. Розв'язування таких задач, знайомство з авторськими методами розв'язування допомагає навчитися застосовувати ці прийоми на власному досвіді, у своїх розв'язаннях.

Зосереджено увагу на дослідженні розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь в історичних задачах. Запропоновано систему задач, в яких розв'язуються алгебраїчні рівняння та системи рівнянь. досліджено методи їх розв'язування. Задачі різних країн та народів подано в порядку їх історичної появи з часів розвитку математики до нашої ери до здобутків вчених XVIII століття.

Виокремлено авторські методи розв'язування рівнянь: метод геометричних побудов, алгебраїчних перетворень, введення допоміжних змінних, нетрадиційні методи. Для розв'язування систем рівнянь виділено історичні методи фан-чен, метод хибного припущення, а також методи підстановки, тотожних перетворень, авторські методи відомих вчених.

Пропонуються розв'язання задач із застосуванням кількох підходів, поряд з історичними методами показано й сучасні. У деяких задачах запропоновані узагальнення авторського розв'язання, застосування його на інші випадки.

Вивчення методів розв'язування рівнянь та їх систем в історичних задачах дозволить розвинути вміння розв'язувати математичні задачі, використовувати як розглянуті історичні методи, так і висувати власні підходи до розв'язань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: історико-генетичний підхід; навчання математики; визначні історичні задачі; система задач; методи розв'язування; авторські методи; алгебраїчні рівняння; системи рівнянь.

A COMBINED HISTORICAL AND GENETIC APPROACH IN LEARNING METHODS OF SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS AND SYSTEMS OF EQUATIONS

Iryna SVERCHEVSKA

iryna_sver@ukr.net

[ORCID ID: 0000-0001-7306-3836](https://orcid.org/0000-0001-7306-3836)

ABSTRACT

The importance of a combined historical and genetic approach in teaching mathematics consists in that familiarization with achievements of mathematical science takes place simultaneously with considering the processes of their appearance and development.

Learning mathematical statements, formulas, rules, and methods is combined with using historical facts about the origins of these ideas and approaches, and about the researchers' contribution to science.

Also important is to consider historical problems suggested by famous mathematicians. Solving of these problems, familiarization with authoring methods facilitate learning to use these approaches through the student's own experience, in one's own solvations.

The paper focuses on research on solving algebraic equations and systems of equations in historical problems. The author suggests a system of problems which contains solving algebraic equations and systems of equations, and the research of solving methods used. The mathematical problems of different countries and nations are given in order of historical appearance from ancient times to the 18th century.

The paper highlights the authoring methods of equation-solving containing the graphing method, algebraic method, substitution method, and unconventional methods. There are also methods of solving systems of algebraic equations described, including historical methods like the fang cheng method, the method of false position as well as substitution method, elimination method, and authoring methods of famous mathematicians.

The work also proposes solving problems using several approaches, comprising both historical and modern methods. In some problems, the author suggests the generalizations of the authors' solution and its application for other cases.

Learning methods of solving equations and systems of equations in historical problems would contribute to developing students' skills in solving mathematical problems, using both known historical methods and their own solving approaches.

KEYWORDS: combined historical and genetic approach; teaching mathematics; famous historical problems; the system of problems; solving methods; authoring methods; algebraic equations; systems of equations.

ВСТУП

Постановка проблеми. Історико-генетичний підхід до навчання передбачає подання математичних фактів, ідей, методів з погляду їх історичного становлення і розвитку. Використання історичного матеріалу, знайомство з історичними задачами допомагає зрозуміти, як розвивалася математична наука, історичні теорії та методи, яка роль вчених у висуненні нових ідей та розробці методів розв'язування задач.

Знайомство з авторськими підходами до розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь дозволить поповнити індивідуальний банк методів та розвинути творчі здібності, навчитися висувати власні ідеї та пропонувати свої методи.

Аналіз актуальних досліджень. Вперше історико-генетичний підхід у навчанні математики було запропоновано англійським математиком Джоном Валлісом, цю ідею розвивали А. К. Клеро, А. Пуанкаре, В. Г. Спенсер, М. Клайн. Активно підтримували ідею історичного підходу вчені М. В. Остроградський, О. М. Боголюбов, Б. В. Гнеденко, М. І. Кованцов, А. Г. Конфорович. Важливу роль історії математики у методиці навчання підкреслювали О. М. Астряб, Г. П. Бевз, Н. О. Вірченко. Застосування історії розвитку математичних теорій у процесі навчання досліджували В. Г. Бевз, Т. Л. Годованюк, Т. В. Дідківська, С. М. Шумигай.

Мета статті – дослідження методів розв'язування алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь у процесі їх виникнення і розвитку в історичних задачах видатних математиків.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні було проведено вивчення, теоретичний аналіз та узагальнення першоджерел та наукової літератури щодо методів розв'язування

видатними математиками алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь. Виконано систематизацію історичних задач за хронологією їх появи, зроблені коментарі та роз'яснення у сучасних позначеннях до історичних авторських розв'язань задач. Побудовано математичні моделі до текстових задач у вигляді рівнянь та систем рівнянь. Запропоновано гіпотези щодо виникнення методів розв'язування авторських задач.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Зосередимо увагу на вивченні методів розв'язування рівнянь та їх систем. Пропонуємо систему історичних математичних задач. На думку В. Г. Бевз, це задачі з давніх історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками або іншими історичними постатями, задачі з давніх підручників і трактатів, журналів та інших друкованих джерел (Бевз, 2005, с. 132). До задач будемо подавати довідки про авторів та відомості про розвиток математичної думки на момент появи задачі.

Рівняння

Розглянемо різноманітність методів розв'язування рівнянь, виокремимо метод словесного опису кроків розв'язання без застосування математичної символіки; візуальний метод побудови коренів рівняння; метод тотожних перетворень; підстановок, що зводять рівняння до рівняння з двома невідомими або понижують степінь рівняння; авторські методи розкладу на множники; нетрадиційні методи, винайдені видатними математиками для розв'язування рівнянь підвищеної складності.

Задача піфагорійців. *Розв'язати рівняння $ax = x^2 + b^2$.*

Історична довідка. Грецькі математики будували математику на основі геометрії. В результаті було побудовано геометричну алгебру, характерною ознакою якої було те, що всі її висновки ґрунтувалися на геометричних образах. Так, формули скороченого множення доводилися за допомогою геометричних побудов. Можливо, що в школі Піфагора квадратні рівняння розв'язувалися геометричним шляхом.

Математики Давньої Греції створили геометричну алгебру, тобто розв'язували алгебраїчні задачі геометричними побудовами. Наприклад, формули скороченого множення доводилися на основі геометричних образів. У школі Піфагора розв'язування квадратних рівнянь обґрунтовувалося геометрично (Вивальнюк & Ігнатенко, 1996).

Щоб розв'язати рівняння, будується відрізок $AB=a$, точкою C ділиться цей відрізок AB навпіл, проводиться в точці C перпендикуляр CD до AB довжини b . Проводиться відрізок $DE = BC = \frac{a}{2}$. Одержаний відрізок $BE = x$ буде розв'язком рівняння $x^2 + b^2 = ax$. (Рис. 1).

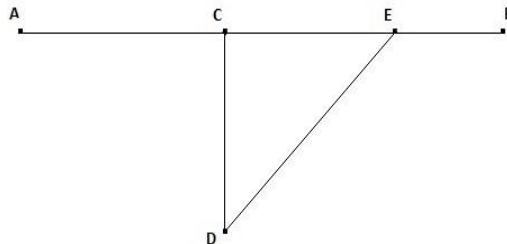


Рис. 1

Для обґрунтування цих висновків до трикутника CDE застосуємо терему Піфагора (Дідківська & Сверчевська, 2014):

$$b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4}; \quad b^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 = \frac{a^2}{4}; \quad x^2 + b^2 = ax$$

Задача Евкліда. Розв'язати рівняння $x^2 + ax = b^2$.

Історична довідка. Евклід жив і працював в Александрії у III ст. до нашої ери, яке в історії математики називають «золоте століття». У своїй головній праці «Основи» він у дедуктивній формі подав відомі на той час геометричні знання.

Задача: «Площа квадрата з невідомою стороною складена з площею прямокутника, в якого одна сторона a , а друга дорівнює стороні квадрата, рівновелика площі квадрата зі стороною b . Знайдіть площу першого квадрата» фактично приводить до квадратного рівняння $x^2 + ax = b^2$ (Бевз, 2004, с. 43-44)

Розв'язання: будується квадрат зі стороною $\frac{a}{2} + x$, де x – невідоме. Він розділяється на два квадрати з площами x^2 та $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, та два прямокутники з площею $\frac{a}{2}x$ (рис. 2).

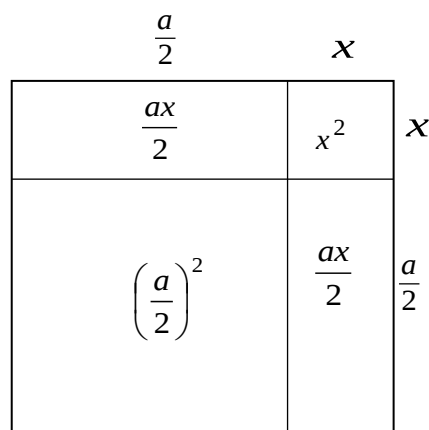


Рис. 2

Площа всього квадрата дорівнює $S = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2}x = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$. У перетвореній лівій частині рівності $S = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ згідно з умовою рівняння $x^2 + ax = b^2$

робимо заміну і отримуємо $S = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Одержуємо рівність $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, геометричний зміст якої: в прямокутному трикутнику з катетами b та $\frac{a}{2}$ гіпотенуза дорівнює $\frac{a}{2} + x$ (Дідківська & Свєрчевська, 2014). Далі виконується побудова цього прямокутного трикутника та шуканого відрізка x (рис. 3).

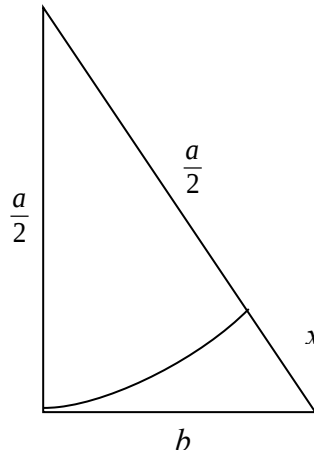


Рис. 3

Задача Діофанта

Історична довідка. Діофант (ймовірно III ст.) – давньогрецький математик, що працював в Александрії. Книга Діофанта «Арифметика» мала великий вплив на розвиток алгебри і теорії чисел та стала початком розвитку символічної алгебри. В цьому трактаті розглянуто багато задач, що приводять до невизначених рівнянь різних степенів. Діофант пропонує методи відшукування раціональних додатних розв'язків цих рівнянь. Такі невизначені рівняння прийнято називати діофантові рівняння (Бородін & Бугай, 1973, с. 172).

Знайти два цілих числа, знаючи, що різниця добутків першого на 19 і другого на 8 дорівнює 13.

Розв'язання. Складаємо невизначене рівняння $19x - 8y = 13$.

Застосуємо метод розсіювання.

$8y = 19x - 13$, $y = \frac{19x - 13}{8} = \frac{16x + 3x - 16 + 3}{8} = 2x - 2 + \frac{3x + 3}{8}$, оскільки y має бути цілим

числом, позначимо $t_1 = \frac{3x + 3}{8}$ – ціле, тоді $y = 2x - 2 + t_1$, виразимо x через t_1 :

$3x + 3 = 8t_1$, $x = \frac{8t_1 - 3}{3} = \frac{6t_1 + 2t_1 - 3}{3} = 2t_1 - 1 + \frac{2t_1}{3}$, позначимо ціле $t_2 = \frac{2t_1}{3}$, тоді

$x = 2t_1 - 1 + t_2$. Виразимо t_1 через t_2 : $t_1 = \frac{3t_2}{2} = t_2 + \frac{t_2}{2}$, позначимо ціле $t_3 = \frac{t_2}{2}$, тоді

$t_1 = t_2 + t_3$ – ціле як сума цілих чисел. Виразимо всі змінні через t_3 :

$$t_2 = 2t_3, \quad t_1 = t_2 + t_3 = 2t_3 + t_3 = 3t_3, \quad x = 2t_1 - 1 + t_2 = 2 \cdot 3t_3 - 1 + 2t_3 = 8t_3 - 1,$$

$$y = 2x - 2 + t_1 = 2 \cdot (8t_3 - 1) - 2 + 3t_3 = 19t_3 - 4.$$

Отже, $\begin{cases} x = 8t_3 - 1 \\ y = 19t_3 - 4 \end{cases}$, або замінивши $t_3 = t + 1$, отримаємо $\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 15 + 19t \end{cases}$, t – ціле число.

Задачі ал-Хорезмі.

Історична довідка. Ал-Хорезмі (Мухаммед бен-Муса) (IX ст.) – середньоазіатський математик. Завдяки його книзі «Кітаб ал-джебр ал-мукабала» («Про відновлення і протиставляння») алгебра почала розглядатися як самостійна наука, з'явився термін «алгебра». У цій праці Хорезмі виділив типи рівнянь першого та другого степеня та обґрунтував їх розв'язання за допомогою побудов. (Бородін & Бугай, 1973, с. 507).

1) *Розв'язати рівняння $x^2 + ax = b$.*

Покажемо розв'язання даного рівняння типу «квадрат і корені дорівнюють числу». На кожній стороні квадрата зі стороною x добудовуємо чотири прямокутники зі сторонами x та $\frac{a}{4}$ потім чотири квадрати зі стороною $\frac{a}{4}$ (рис. 4).

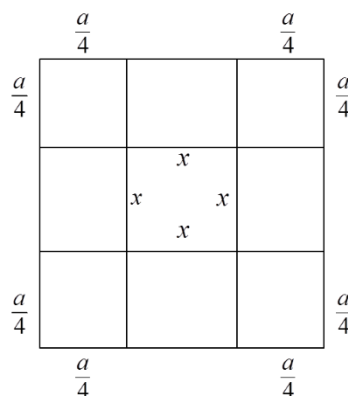


Рис. 4

Отримали квадрат, що складається з даного квадрата площею x^2 , чотирьох квадратів площею $\frac{a^2}{16} \cdot 4 = \frac{a^2}{4}$ та чотирьох прямокутників площею $\frac{a}{4} \cdot x \cdot 4 = ax$.

Отже, площа одержаного квадрата дорівнює: $\left(x + \frac{a}{4} \cdot 2\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$. За умовою

рівняння $x^2 + ax = b$, тому маємо $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$, $x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$. Побудувавши

$\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$, можна визначити x (Бевз, 2004, с. 52).

2) *Розв'язати рівняння $x^2 + 10x = 39$.*

Це рівняння є окремим випадком попереднього рівняння при $a = 10$, $b = 39$. Ал-Хорезмі цю задачу формулює так: «Квадрат невідомого і десять невідомих становлять 39 дирхемів (дирхем – срібна монета середньовічного Сходу). Чому дорівнює невідоме?» (Дідківська & Сверчевська, 2014)

Будуємо квадрат зі стороною x і добудовуємо два прямокутники зі сторонами x та 5 (рис. 5). Одержану фігуру, що має назву «гномон», добудовуємо до квадрата зі стороною $x + 5$. Тоді площа утвореного квадрата $S = (x + 5)^2$.

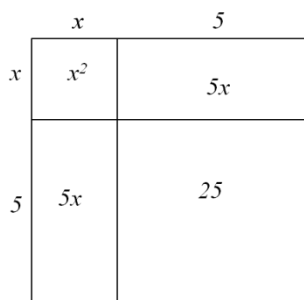


Рис. 5

За рис. 5 визначаємо $S = x^2 + 2 \cdot 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$. Маємо $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$. За умовою задачі $x^2 + 10x = 39$, отже: $(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$, $x + 5 = 8$, $x = 3$. Ал-Хорезмі враховує тільки додатній корінь.

3) *Розв'язати рівняння «Квадрат і число 21 дорівнює десяти кореням».* Тобто у сучасних позначеннях: $x^2 + 21 = 10x$.

Авторське розв'язання. «Поділи надвоє число коренів, одержиш 5, помнож 5 саме на себе, одержиш 25, від добутку відними 21, залишається 4. Здобудь корінь з 4, одержиш 2. Відними 2 від 5, одержиш 3. Це 3 є шуканий корінь. Або ж додай 2 до 5, що дасть 7, це теж є корінь» (Сверчевська, 2015)

У сучасних позначеннях маємо: $x = 5 \mp \sqrt{5^2 - 21} = 5 \mp \sqrt{4} = 5 \mp 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

Тобто використана формула для коренів квадратного рівняння

$$x^2 + px + q = 0: x = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Задачі ал-Кархі

Історична довідка. Ал-Кархі (Ал-Караджі) (помер 1016) – іранський математик. Автор двох трактатів з арифметики та алгебри, де дано розв'язання 250 алгебраїчних задач і задач на невизначені рівняння (Бородін & Бугай, 1973, с. 214).

1) *Розв'язати рівняння $x^2 + 10x = 39$* (Сверчевська, 2015).

Ал-Кархі шукає число, яке потрібно додати до $x^2 + 10x$, щоб одержався повний квадрат, таким числом є 25. Маємо: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$, $(x + 5)^2 = 64$, $x + 5 = 8$, $x = 3$. Він називає цей спосіб «методом розв'язування на зразок Діофанта». Від'ємний корінь Ал-Кархі не розглядає.

2) *Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^2 = 126$ (1), $x^2 + 5 = y^2$ (2), $x^2 - 10 = y^2$ (3).*

За допомогою підстановки $x^2 = z$ Ал-Кархі зводить рівняння (1) до квадратного $z^2 + 5z = 126$, $z_1 = 9$, $z_2 = -14$. Тоді $x^2 = 9$, $x = 3$. Від'ємні корені Ал-Кархі не розглядає (Сверчевська, 2015).

Для рівняння (2) Ал-Кархі пропонує підстановку $y = x + 1$, тоді $x^2 + 5 = x^2 + 2x + 1$, $2x = 4$, $x = 2$, $y = 3$. Тобто він визначає один з безлічі коренів.

Для рівняння (3) Ал-Кархі пропонує підстановку $y = x - 1$, тоді $x^2 - 10 = x^2 - 2x + 1$, $2x = 11$, $x = 5,5$, $y = 4,5$.

Задачі Омара Хайяма

Історична довідка. Омар Хайям (1048 – 1131) – перський математик, філософ і поет. У своєму творі «Про доведення задач алгебри і алмукабали» він дає класифікацію алгебраїчних рівнянь 1-го, 2-го і 3-го степенів та геометричні побудови їх коренів. Хайям здобув славу як поет, майстер рубаї (Бородін & Бугай, 1973, с. 500).

1) Розглянемо спосіб розв'язування рівняння «квадрат і десять коренів дорівнює тридцяти дев'яти» ($x^2 + 10x = 39$). Подамо розв'язання автора (в дужках сучасні пояснення) (рис. 6).

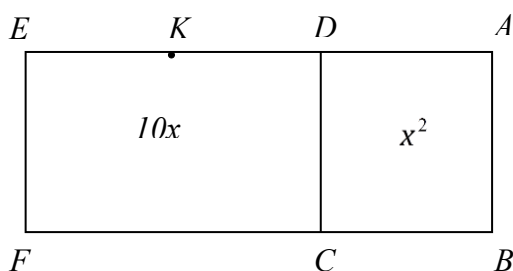


Рис. 6

«Нехай квадрат ABCD [x^2], збільшений на десять коренів [$10x$], дорівнює 39. Десять коренів – це прямокутник DEFC. Пряма DE=10 ділиться навпіл точкою K. Добуток AE [$10+x$] на AD [x], що дорівнює прямокутнику AEFB, доданий до квадрата DK [25], буде дорівнювати квадрату АК [$(10+x)x + 25 = (x+5)^2$]. Але квадрат DK відомий [25], а також відомий прямокутник AEFB, який виражає дане число [39]. Отже, квадрат АК [$(x+5)^2 = (10+x)x + 25 = 39 + 25 = 64$] та лінія АК [$x+5=8$] відомі, а коли віднімемо DK [5] із АК [8], то AD буде відомо [$x=3$]» (Дідківська & Сверчевська, 2014)

Зробимо додаткові побудови до розв'язання Омара Хайяма (рис. 7). Будуємо квадрат ABCD з площею x^2 і добудовуємо прямокутник DEFC зі сторонами 10 та x і площею $10x$. За умовою рівняння $x^2 + 10x = 39$, тому площа прямокутника AEFB дорівнює 39. Розділимо відрізок DE=10 навпіл точкою K і побудуємо квадрат AKNQ зі стороною $x+5$. Площа прямокутника AEFB дорівнює $(10+x)x$, додаємо площу квадрата CMNG, що дорівнює 25, і одержимо площу квадрата AKNQ (оскільки площі прямокутників KEFM і BCGQ рівні).

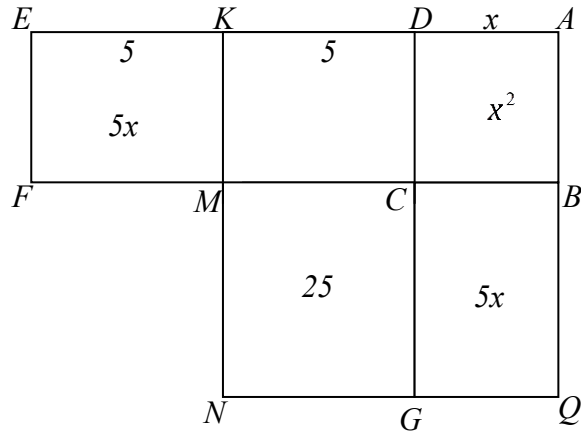


Рис. 7

Тобто $(10+x)x + 25 = (x+5)^2$. Площа прямокутника АЕФВ дорівнює $(10+x)x$, а за побудовою дорівнює $x^2 + 10x$ (що за умовою рівняння дорівнює 39). Отже, $39 + 25 = (x+5)^2$; $(x+5)^2 = 64$, звідки $x+5=8$, $x=3$.

2) Розв'язати рівняння $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

Розв'язання Хайяма (Сверчевська, 2015).

Заміна $\frac{1}{x} = y$, тоді $y^2 + 2y = \frac{5}{4}$. Додамо до обох частин одиницю $y^2 + 2y + 1 = \frac{9}{4}$, $(y+1)^2 = \frac{9}{4}$. Звідки $y+1 = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Маємо $x = 2$.

Від'ємний корінь автор не розглядає.

3) Розв'язати рівняння $x^3 + ax = b$ (Бевз, 2004, с. 53).

Омар Хайям розв'язує рівняння за допомогою побудови. Приводить його до виду $x^3 + p^2x = p^2q$, де $a = p^2$, $b = p^2q$. Якщо виконати множення рівняння на x , тобто $x^4 + p^2x^2 = p^2qx$, та поділити на p^2 : $\frac{x^4}{p^2} + x^2 = qx$, то отримане рівняння можна привести до системи (Дідківська & Сверчевська, 2014)

$$\begin{cases} y^2 = \frac{x^4}{p^2} \\ x^2 + y^2 = qx \end{cases} \quad \text{Рівняння системи є рівняннями кривих}$$

$$\begin{cases} x^2 = py - \text{парабола} \\ \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{q^2}{4} - \text{коло} \end{cases}$$

Перетин цих кривих і дає корінь рівняння (рис. 8).

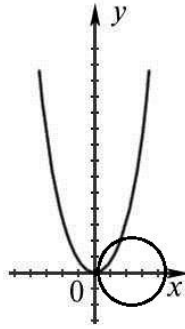


Рис. 8

4) Розв'язати рівняння $x^3 + a = cx^2$ (Бевз, 2004, с. 54).

Омар Хайям розв'язує це рівняння, знаходячи точку перетину параболи та гіперболи. Перетворивши дане рівняння: $x^3 + a = cx^2$, $cx^2 - x^3 = a$, $x^2(c - x) = a$, $x^2 \cdot \sqrt[3]{a}(c - x) = \sqrt[3]{a^4}$ отримаємо систему рівнянь цих кривих

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a}(c - x) = y^2 \\ x^2 y^2 = \sqrt[3]{a^4} \end{cases}, \begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x) - \text{парабола} \\ xy = \sqrt[3]{a^2} - \text{гіпербола} \end{cases}$$

Задачі Бхаскари II

Історична довідка. Бхаскара II (1114 – 1178) – індійський математик і астроном. Автор праці «Вінок систем», в якій містилися розв'язання алгебраїчних задач (Бородін & Бугай, 1973, с. 79).

1) Знайти цілі корені рівняння $100x + 90 = 63y$ (Дідківська & Свєрчевська, 2013).

Розв'яжемо методом розсіювання, так в Індії називали загальний метод розв'язування невизначених рівнянь.

$$y = \frac{100x + 90}{63} = x + \frac{37x + 90}{63}, \quad \frac{37x + 90}{63} = y_1 - \text{ціле число. Прийдемо до}$$

$$\text{рівняння: } 37x + 90 = 63y_1, \quad x = \frac{63y_1 - 90}{37} = y_1 + \frac{26y_1 - 90}{37}, \quad \frac{26y_1 - 90}{37} = y_2 - \text{ціле.}$$

$$26y_1 - 90 = 37y_2, \quad y_1 = \frac{37y_2 + 90}{26} = y_2 + \frac{11y_2 + 90}{26}, \quad \frac{11y_2 + 90}{26} = y_3 - \text{ціле. } 11y_2 + 90 = 26y_3,$$

$$y_2 = \frac{26y_3 - 90}{11} = 2y_3 + \frac{4y_3 - 90}{11}, \quad \frac{4y_3 - 90}{11} = y_4 - \text{ціле. } 4y_3 - 90 = 11y_4,$$

$$y_3 = \frac{11y_4 + 90}{4} = 2y_4 + \frac{3y_4 + 90}{4}, \quad \frac{3y_4 + 90}{4} = y_5 - \text{ціле. } 3y_4 + 90 = 4y_5$$

$$y_4 = \frac{4y_5 - 90}{3} = y_5 + \frac{y_5 - 90}{3}, \quad \frac{y_5 - 90}{3} = y_6 - \text{ціле. } y_5 = 3y_6 + 90. \text{ Підставляємо.}$$

$$x = y_1 + y_2 = (y_2 + y_3) + y_2 = 2y_2 + y_3 =$$

$$= 2(2y_3 + y_4) + y_3 = 5y_3 + 2y_4 = 5(2y_4 + y_5) + 2y_4 = 12y_4 + 5y_5 =$$

$$= 12(y_5 + y_6) + 5y_5 = 17y_5 + 12y_6 = 17(3y_6 + 90) + 12y_6 = 63y_6 + 1530, \quad x = 1530 + 63y_6.$$

$$\text{З даного рівняння } y = \frac{100x + 90}{63} = \frac{153000 + 6300y_6 + 90}{63} = 100y_6 + 2430.$$

$$\text{Маємо } \begin{cases} x = 1530 + 63t \\ y = 2430 + 100t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}. \text{ Якщо } t = -24, \text{ то } x = 18, y = 30.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 18 + 63t \\ y = 30 + 100t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$

2) Знайти раціональні корені рівняння $ax + by + c = xy$ (Сверчевська, 2015).

Розв'язання автора.

$ax + by + c = xy$, $c = xy - ax - by$. Додамо ab : $c + ab = xy - ax - by + ab$,
 $c + ab = (xy - by) - (ax - ab)$, $ab + c = y(x - b) - a(x - b)$, $ab + c = (x - b)(y - a)$. Бхаскара
робить заміну $x = b + n$, щоб отримати раціональні x та y , тоді визначає y .
 $ab + c = (b + n - b)(y - a)$, $ab + c = n(y - a)$, $y - a = \frac{ab + c}{n}$, $y = a + \frac{ab + c}{n}$.

Відповідь: $x = b + n$, $y = a + \frac{ab + c}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Розв'язати в загальному вигляді квадратне рівняння $ax^2 + bx = c$

Розв'язання автора (Сверчевська, 2015).

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$. Маємо $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.
Додамо до обох частин b^2 . Перетворюємо $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$,
 $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$, $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$, $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$.

Бхаскара вважає, що «люди не схвалюють абстрактних від'ємних чисел»,
тому не розглядає від'ємні значення коренів рівняння.

4) Розв'язати рівняння $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ (Бевз, 2004, с. 74).

Розв'язання (Сверчевська, 2015).

$$\begin{aligned} x^4 - 11x^2 + 11x^2 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999 &= 0, \\ (x^4 - 11x^2) + (11x^2 - 121x^2) + (119x^2 - 1309x) + (909x - 9999) &= 0, \\ x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) + 909(x - 11) &= 0, (x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0. \end{aligned}$$

Одержуємо два рівняння $x - 11 = 0$ і $x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$. З першого маємо
 $x_1 = 11$ (цей корінь знаходить Бхаскара). З другого рівняння можна знайти три
корені, які Бхаскара не розглядає. Виконаємо перетворення цього рівняння
 $x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$, $x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 = 0$,
 $x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101 \cdot (x + 9) = 0$, $(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$, $x + 9 = 0$, $x_2 = -9$.

Рівняння $x^2 + 2x + 101 = 0$ має два комплексні корені x_3, x_4 .

Задачі Фібоначчі

Історична довідка. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170 – після
1228) – італійський математик. За його книгою «Книга про абак» навчалося
багато європейських математиків, зокрема познайомилися з індійською
позиційною системою числення. Роботи Леонардо пов'язані з числами Фібоначчі
(Бородін & Бугай, 1973, с. 289).

1) Дехто купив 30 птахів за 30 монет. За три горобці він платив 1 монету,
за дві горлиці теж – одну монету, а за кожного голуба – 2 монети. Скільки
птих кожного виду він купив?

Розв'язання. Нехай x – кількість горобців, y – кількість горлиць, $z = (30 - x - y)$ – кількість голубів. Складаємо рівняння $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2(30 - x - y) = 30$, $2x + 3y + 12(30 - x - y) = 180$, $10x + 9y = 180$. Методом розсіювання: $y = 20 - \frac{10}{9}x$, $\frac{x}{9} = t$, $x = 9t$, $y = 20 - 10t$, $t \in Z$.

$$\begin{cases} 9t > 0 \\ 20 - 10t > 0 \end{cases}, \begin{cases} t > 0 \\ t < 2 \end{cases}, t \in Z, t = 1. \text{ Отже, } x = 9, y = 10, z = 11.$$

Відповідь: 9 горобців, 10 горлиць, 11 голубів.

2) Розв'язати рівняння (Сверчевська, 2015):

$$x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10 \quad (1),$$

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4 \quad (2).$$

Авторське розв'язання рівняння (1) $x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10$.

$(x + \sqrt{5x^2}) + (\sqrt{x} + \sqrt{2x}) - 10 = 0$, $x(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{x}(1 + \sqrt{2}) - 10 = 0$, $\sqrt{x} = y$,
 $(1 + \sqrt{5})y^2 + (1 + \sqrt{2})y - 10 = 0$. Одержується квадратне рівняння, яке можна розв'язати.

$$y = \frac{-(1 + \sqrt{2}) \mp \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 40(1 + \sqrt{5})}}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) \mp \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 40 + 40\sqrt{5}}}{2(1 + \sqrt{5})}$$

$$y = \frac{-(1 + \sqrt{2}) \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43}}{2(1 + \sqrt{5})}.$$

$$x = \left(\frac{-(1 + \sqrt{2}) \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43}}{2(1 + \sqrt{5})} \right)^2 = \frac{\left(-1 - \sqrt{2} \mp \sqrt{2\sqrt{2} + 40\sqrt{5} + 43} \right)^2}{4(1 + \sqrt{5})^2}$$

Щоб розв'язати рівняння (2) $3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$ Фібоначчі покладає $y = \sqrt{x^2 - 3x}$. Тоді $4\sqrt{x^2 - 3x} = (x^2 - 3x) + 4$, $4y = y^2 + 4$ і $y = 2$. Звідки $2 = \sqrt{x^2 - 3x}$, $x^2 - 3x = 4$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Задача Луки Пачоллі

Історична довідка. Лука Пачоллі (1454 – 1514) – італійський математик. Його праці з геометрії написані під впливом Леонардо да Вінчі, особливо твір «Божественне відношення» (Бородін & Бугай, 1973, с. 374).

Розв'язати рівняння $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81600 = 0$.

Авторське розв'язання (Сверчевська, 2015).

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = 81601, (x^2 + x + 1)^2 = 81601,$$

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{81601} = 0, x = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - 1 + \sqrt{81601}} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\sqrt{81601} - \frac{3}{4}}.$$

Випадок $x^2 + x + 1 + \sqrt{81601} = 0$ Пачоллі не розглядає.

Задача Адама Різе

Історична довідка. Адам Різе (1492 – 1559) – німецький математик автор популярних в той час підручників з арифметики і алгебри (Бородін & Бугай, 1973, с. 419).

26 осіб витратили разом 88 монет, причому кожний чоловік витратив 6, жінка 4, а дівчина 2 монети. Скільки було чоловіків, жінок і дівчат?

Розв’язання. Позначимо x – кількість чоловіків, y – жінок, тоді кількість дівчат $(26 - x - y)$. Складаємо рівняння: $6x + 4y + 2(26 - x - y) = 88$. $4x + 2y = 36$, $2x + y = 18$. Використаємо «метод розсіювання» (подрібнення), який винайшли у стародавній Індії. $x = \frac{18 - y}{2} = 9 - \frac{y}{2}$, Оскільки x – ціле, то і $\frac{y}{2} = t$ ціле, звідки

$y = 2t$, $x = 9 - t$. Отримали загальний розв’язок рівняння: $\begin{cases} x = 9 - t \\ y = 2t \end{cases}$. За умовою

задачі $x \geq 0$, $y \geq 0$, тоді $\begin{cases} 9 - t \geq 0 \\ 2t \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} t \leq 9 \\ t \geq 0 \end{cases}$, тобто $t = 0, 1, \dots, 9$

(Дідківська & Свечевська, 2013) Задача має 10 розв’язків $(9, 0, 17)$, $(8, 2, 16)$, $(7, 4, 15)$, $(6, 6, 14)$, $(5, 8, 13)$, $(4, 10, 12)$, $(3, 12, 11)$, $(2, 14, 10)$, $(1, 16, 9)$, $(0, 18, 8)$.

Задачі Кардано.

Історична довідка. Джіроламо Кардано (1501 – 1576) – італійський математик, філософ і лікар. У праці «Велике мистецтво або про правило алгебри» він вперше опублікував формули для коренів кубічних рівнянь, хоча ідея формули запозичена у Тартальї. Кардано вперше ввів в алгебру комплексні числа, які називав «неіснуючі числа» (Бородін & Бугай, 1973, с. 215).

1) *Розв’язати рівняння $x^2 + 6x = 91$.*

Розв’язання Кардано. «Нехай квадрат FD (рис. 9) є x^2 , отже, його сторона $FH = x$. $DG = DB = 3$ (половині коефіцієнта при x). Побудуємо квадрат $AFEC$. Прямокутник AD рівний прямокутнику DE , тобто рівний $3x$. Сума квадрата FD і двох цих прямокутників рівна $x^2 + 6x$, що, за умовою, дорівнює 91. Малий квадрат $BDGC$ дорівнює 9, тоді квадрат $AFEC = 100$. Отже, $AC = 10$, але $AC = x + 3$ звідки $x = 7$ » (Дідківська & Свечевська, 2014).

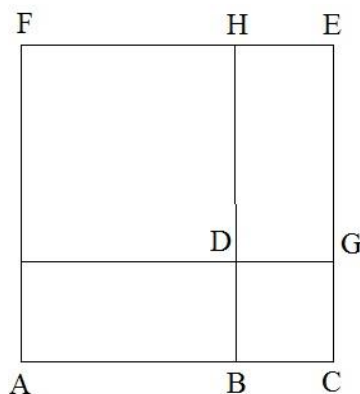


Рис. 9

Сучасне розв'язання: $x^2 + 6x - 91 = 0$, $x = -3 \mp \sqrt{9 + 91} = -3 \mp 10$, $x_1 = -13$, $x_2 = 7$ (Сверчевська, 2015).

2) Розв'язати рівняння $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$.

Кардано до обох частин додає $3x^2$. Тоді $16x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$,
 $16x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$, $4x = x^2 + x + 1$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x = \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$.
автор визначає тільки ці два корені. Ще два корені можна знайти з рівняння
 $-4x = x^2 + x + 1$, $x^2 + 5x + 1 = 0$, $x = -\frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{21}}{2}$ (Сверчевська, 2015).

Задача Рафаеля Бомбеллі

Історична довідка. Рафаель Бомбеллі (бл. 1530 – бл. 1572) – італійський математик та інженер. В «Алгебрі» Бомбеллі дав перший виклад дій над уявними числами. Він удосконалив правила дій з раціональними числами (Бородін & Бугай, 1973, с. 63).

Розв'язати рівняння $x^3 = 15x + 4$.

Авторське розв'язання (Сверчевська, 2015).

$x^3 - 15x - 4 = 0$, $x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + x - 4 = 0$, $(x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 16x) + (x - 4) = 0$,
 $(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$, $x - 4 = 0$, $x_1 = 4$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x_{2,3} = -2 \mp \sqrt{3}$.

Задача Вієта

Історична довідка. Франсуа Вієт (1540 – 1603) – французький математик, якого називають «батько алгебри». У працях Вієта алгебра стала загальною наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на символічних позначеннях (Бородін & Бугай, 1973, с. 101).

Розв'язати рівняння $x^2 + px + q = 0$ підстановкою $x = y + z$.

Авторське розв'язання (Сверчевська, 2015).

В даному рівнянні $x^2 + px + q = 0$ покладемо $x = y + z$. Тоді $x^2 = y^2 + 2yz + z^2$,
тому рівняння набуде вигляду: $y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0$. Виберемо z так, щоб
коефіцієнт при y в першому степені дорівнював нулю, тобто $2z + p = 0$. Тоді

$z = -\frac{p}{2}$ і $z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}$. Отже, рівняння буде мати вигляд

$y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$, $y^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Звідки $y = \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Оскільки $x = y + z$ і $z = -\frac{p}{2}$, то

$x = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Задачі Стевіна

Історична довідка. Сімон Стевін (1548 – 1620) – нідерландський інженер і математик. Він першим в Європі виклав десяткову систему мір і десяткові дробы, ввів від'ємні корені рівнянь (Бородін & Бугай, 1973, с. 450).

Розв'язати рівняння $x^3 = 6x + 40$ (1), $x^9 = 3x^6 + 5x^3$ (2).

Авторське розв'язання рівняння (1).

$$x^3 - 6x - 40 = 0, \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 10x - 40 = 0, \quad x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 10(x - 4) = 0, \\ (x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0, \quad x - 4 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x^2 + 4x + 10 = 0, \quad x_{2,3} = -2 \mp \sqrt{-6} = -2 \mp i\sqrt{6}.$$

Авторське розв'язання рівняння (2).

$$x^9 - 3x^6 - 5x^3 = 0, \quad x^3(x^6 - 3x^3 - 5) = 0, \quad x^3 = 0, \quad x_{1,2,3} = 0, \quad x^6 - 3x^3 - 5 = 0, \quad x^3 = z, \\ z^2 - 3z - 5 = 0, \quad z = \frac{3 \mp \sqrt{29}}{2}, \quad x_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{29}}{2}}, \quad x_{7,8,9} = \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{29}}{2}} \quad (\text{Сверчевська, 2015}).$$

Задача Гарріота

Історична довідка. Томас Гарріот (1560 – 1621) – англійський математик і географ. Зробив внесок у розвиток алгебраїчної символіки. Гарріот помітив, що число коренів рівняння визначається його степенем (Бородін & Бугай, 1973, с. 121).

Розв'язати рівняння $52 = -3x + x^3$.

Авторське розв'язання (Сверчевська, 2015).

$$x^3 - 3x - 52 = 0, \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 13x - 52 = 0, \quad (x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 16x) + (13x - 52) = 0, \\ x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 13(x - 4) = 0, \quad (x - 4)(x^2 + 4x + 13) = 0, \quad x - 4 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x^2 + 4x + 13 = 0, \\ x_{2,3} = -2 \mp \sqrt{-9} = -2 \mp 3i.$$

Задача Кеплера

Історична довідка. Йоган Кеплер (1571 – 1630) – німецький астроном і математик. Відкрив закони руху планет і був одним з попередників творців математичного аналізу нескінченно малих. Кеплер запропонував спосіб визначення об'ємів діжок, який поширив на визначення об'ємів тіл обертання (Бородін & Бугай, 1973, с. 224).

Розв'язати рівняння $5x - 5x^3 + x^5 = 0$.

$$\text{Авторське розв'язання. } x(x^4 - 5x^2 + 5) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x^4 - 5x^2 + 5 = 0, \quad x^2 = z, \\ z^2 - 5z + 5 = 0, \quad z = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}, \quad x_{2,3} = \mp \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \quad x_{4,5} = \mp \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \quad (\text{Сверчевська, 2015}).$$

Задачі Жірара

Історична довідка. Альберт Жірар (1595 – 1632) – нідерландський математик. Він вперше сформулював основну теорему алгебри про кількість коренів алгебраїчного рівняння, дав геометричну інтерпретацію від'ємних коренів, вважав нуль коренем рівняння, розглядав уявні корені (Бородін & Бугай, 1973, с. 196).

Розв'язати рівняння $x^3 = 13x + 12$ (1), $x^4 - 4x + 3 = 0$ (2).

Авторське розв'язання рівняння (1):

$$x^3 - 13x - 12 = 0, \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 3x - 12 = 0, \quad (x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 16x) + (3x - 12) = 0, \\ x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 3(x - 4) = 0, \quad (x - 4)(x^2 + 4x + 3) = 0, \quad x - 4 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x^2 + 4x + 3 = 0, \\ x_2 = -1, \quad x_3 = -3 \quad (\text{Сверчевська, 2015}).$$

Авторське розв'язання рівняння (2):

$$\begin{aligned}
& x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x - 3x + 3 = 0, \quad (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (x^2 - x) - (3x - 3) = 0, \\
& x^3(x-1) + x^2(x-1) + x(x-1) - 3(x-1) = 0, \quad (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3) = 0, \quad x-1=0, \quad x_1=1, \\
& x^3 + x^2 + x - 3 = 0, \quad x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 0, \quad (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (3x - 3) = 0, \\
& x^2(x-1) + 2x(x-1) + 3(x-1) = 0, \quad x-1=0, \quad x_2=1, \quad x^2 + 2x + 3 = 0, \quad x_{3,4} = -1 \mp \sqrt{-2} = -1 \mp i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Задачі Декарта

Історична довідка. Рене Декарт (1596 – 1650) – французький математик, філософ, фізик. Декарт уперше в науці ввів поняття змінної величини і функції. Декарт першим почав досліджувати властивості рівнянь, сформулював твердження, що кількість дійсних і комплексних коренів рівняння дорівнює його степеню. Він заклав основи аналітичної геометрії (Бородин & Бугай, 1973, с. 163).

Розв'язати рівняння $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$ (1), $y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$ (2), $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ (3) (Сверчевська, 2015).

Авторське розв'язання рівняння (1): $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, $y^2(y-8) - (y-8) = 0$, $(y-8)(y^2-1) = 0$, $y-8=0$, $y_1=8$, $y^2-1=0$, $y_{2,3} = \mp 1$.

Декарт подає рівняння (2) $y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$ в такому вигляді:
 $y^3 - 2y^2 - 7y^2 + 14y + 12y - 24 = 0$, $(y^3 - 2y^2) + (-7y^2 + 14y) + (12y - 24) = 0$,
 $y^2(y-2) - 7y(y-2) + 12(y-2) = 0$, $(y-2)(y^2 - 7y + 12) = 0$, $y-2=0$, $y_1=2$,
 $y^2 - 7y + 12 = 0$, $y_2=4$, $y_3=3$.

Подано рівняння (3) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ в іншому вигляді
 $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0$, $x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0$,
 $(x-4)(x^3 - 19x + 30) = 0$, $x-4=0$, $y_1=4$, $x^3 - 19x + 30 = 0$. Перетворимо це рівняння
 $x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 = 0$, $x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0$, $(x-3)(x^2 + 3x - 10) = 0$,
 $x-3=0$, $x_2=3$, $x^2 + 3x - 10 = 0$, $x_3=2$, $x_4=-5$.

Задачі Монферр'є

Історична довідка. Монферр'є – французький математик, автор ряду підручників з математики, виданих у 3-х томах (1838 р).

1) *Розв'язати рівняння* $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 35x - 28 = 0$.

Авторське розв'язання. $x^4 + x^3 + 4x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 7x - 28x - 28 = 0$,
 $(x^4 + x^3) + (4x^3 + 4x^2) - (7x^2 + 7x) - (28x + 28) = 0$, $x^3(x+1) + 4x^2(x+1) - 7x(x+1) - 28(x+1) = 0$,
 $(x+1)(x^3 + 4x^2 - 7x - 28) = 0$, $x+1=0$, $x_1=-1$, $x^3 + 4x^2 - 7x - 28 = 0$, $x^2(x+4) - 7(x+4) = 0$,
 $(x+4)(x^2 - 7) = 0$, $x+4=0$, $x_2=-4$, $x^2 - 7 = 0$, $x_{3,4} = \mp \sqrt{7}$.

2) *Розв'язати рівняння* $a^{b^x} = c$ (1), $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ (2).

Розв'язання рівняння (1).

Нехай $b^x = z$, $a^z = c$, $z \lg a = \lg c$, $z = \frac{\lg c}{\lg a} = m$, $b^x = m$, $x \lg b = \lg m$,

$$x = \frac{\lg m}{\lg b} = \frac{\lg \left(\frac{\lg c}{\lg a} \right)}{\lg b}.$$

Розв'язання рівняння (2) $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$. Автор помічає, що $x_1 = 1$ задовольняє рівняння і, розділивши дане рівняння на $x - 1$, одержує зворотне рівняння непарного степеня $x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$. Перетворює його $(x^5 + 1) + (4x^4 + 4x) + (6x^3 + 6x^2) = 0$, $(x^5 + 1) + 4x(x^3 + 1) + 6x(x + 1) = 0$. Тоді очевидно, що $x_2 = -1$ і, розділивши рівняння $x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$ на $x + 1$, одержує зворотне рівняння парного степеня $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, яке ділить на x^2 . Отримує $x^2 + 3x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$. Робить підстановку $x + \frac{1}{x} = z$, звідки $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2$, $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Приходить до квадратного рівняння $z^2 - 2 + 3z + 3 = 0$, $z^2 + 3z + 1 = 0$, $z_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{5}}{2}$. Тоді $x + \frac{1}{x} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ або $x + \frac{1}{x} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, тобто розв'язуються квадратні рівняння $x^2 - \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$, $x^2 - \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$. Отримано корені $x_{3,4} = \frac{-3 - \sqrt{5} \mp \sqrt{-2 + 6\sqrt{5}}}{4}$, $x_{5,6} = \frac{-3 + \sqrt{5} \mp \sqrt{-2 - 6\sqrt{5}}}{4}$ (Сверчевська, 2015).

Задача Маклорена

Історична довідка. Колін Маклорен (1698 – 1746) – шотландський математик. Маклорен здобув славу працями з аналізу, вперше опублікував працю про розклад функцій у степеневі ряди. У його трактаті з алгебри використовується символіка, що мало відрізняється від сучасної (Бородін & Бугай, 1973, с. 216).

Розв'язати рівняння $x^6 - 19x^3 = 216$.

Розв'язання Маклорена.

$$x^3 = z, \quad z^2 - 19z = 216, \quad z^2 - 19z + \frac{361}{4} = 216 + \frac{361}{4}, \quad \left(z - \frac{19}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4}, \quad z - \frac{19}{2} = \mp \frac{35}{2},$$

$$z = \frac{19 \mp 35}{2}, \quad z_1 = -8, \quad z_2 = 27, \quad x = \sqrt[3]{z}, \quad x = -2, \quad x = 3.$$

Інші чотири комплексні корені Маклорен не шукає (Сверчевська, 2015).

Задача Бертрана

Історична довідка. Франсуа Бертран (1822 – 1900) – французький математик, який був людиною з «безперервним математичним мисленням». Він встановив деякі спеціальні ознаки збіжності числових рядів, висловив гіпотезу, що «між числами n і $2n - 2$, $n \geq 4$ лежить принаймні одне просте число» (Бородін & Бугай, 1973, с. 49).

Розв'язати рівняння $\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{(1-x)^2} = \sqrt[n]{1-x^2}$.

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt[m]{1-x^2}$, тоді $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}} = 1$.
 Покладаємо $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = z$, тоді $z - \frac{1}{z} = 1$, $z^2 - z - 1 = 0$, $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Невідоме x визначається з рівності $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Сверчевська, 2015).

Задача Ейлера

Історична довідка. Леонард Ейлер (1707-1783) – видатний математик, фізик, механік і астроном. Йому належить понад 865 досліджень найважливіших питань математичної науки. Ім'я Ейлера зустрічається майже в усіх галузях математики та її застосувань: відомі теореми Ейлера, тотожності Ейлера, Ейлерові кути, сталі, формули, рівняння, функції, інтеграли. Ейлер ввів позначення чисел π та e .

Ейлер був надзвичайно працьовитим, таке напруження в роботі привело до того, що він у 1736 році втратив зір. Але він продовжував працювати, диктуючи свої твори. За словами американського математика ХХ століття Е. Т. Белла, Ейлер не прогледів нічого в сучасній йому математиці, дарма, що останні сімнадцять років свого життя був зовсім сліпий (Бородін & Бугай, 1973, с. 181).

Деякий чиновник купив коней і биків за 1770 талерів. За кожного коня він сплатив по 31 талеру, а за кожного бика – по 21 талеру. Скільки коней і биків він купив?

Розв'язання. Нехай x – кількість коней, y – кількість биків, тоді $31x + 21y = 1770$. Метод розсіювання. $y = 84 - x - \frac{10x-6}{21} = 84 - x - \frac{2(5x-3)}{21}$, $\frac{5x-3}{21} = z$,
 $5x-3 = 21z$, $x = \frac{21z+3}{5} = 4z + \frac{z+3}{5}$, $\frac{z+3}{5} = t$, $z+3 = 5t$, $z = 5t-3$.
 $x = 20t - 12 + t = 21t - 12$, $y = \frac{1770-31x}{21} = 102 - 31t$.

Маємо систему: $\begin{cases} x = -12 + 21t \\ y = 102 - 31t \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$. Оскільки $x > 0$, $y > 0$, $\begin{cases} -12 + 21t > 0 \\ 102 - 31t > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} t > \frac{12}{21} \\ t < \frac{102}{31} \end{cases}$,

$\frac{12}{21} < t < 3\frac{9}{31}$, $t = 1, 2, 3$ (Дідківська & Сверчевська, 2013).

Відповідь: (9, 71), (30, 40), (51, 9).

Системи рівнянь

Розв'язуванню систем алгебраїчних рівнянь приділялася увага зі стародавніх часів. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь винайшли давньокитайські математики. Для розв'язування нелінійних систем в історичних задачах виокремлюємо методи алгебраїчних перетворень, введення допоміжних невідомих, авторські нетрадиційні методи.

Задачі з єгипетських папірусів

Історична довідка. Єгипетську математику вивчають за: папірусом Райнда (Ахмеса), що містить 84 задачі, відноситься до періоду бл. 1800 – 1600 р. р. до н. е.; Московським, що написаний до 1900 р. до н. е. і містить 25 задач; Кахунським (1900 р. до н. е.) та Берлінським папірусами (2200 р. до н. е.)

Задача з Берлінського папірусу.

Розділити площу 100 квадратних одиниць на два квадрати, сторони яких відносяться як $1:\frac{3}{4}$.

Задача приводить до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x : y = 1 : \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Задача у папірусі розв'язується методом хибного припущення. Нехай перше число 4, а друге 3, тоді сума їх квадратів 25, корінь квадратний дорівнює 5. Але за умовою сума квадратів 100 і корінь квадратний дорівнює 10. Отже припущення потрібно збільшити вдвічі, тому перше число 8, а друге 6 (Дідківська & Сверчевська, 2016).

У сучасних позначеннях цей метод виглядає так: $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, $x = 4k$, $y = 3k$,
 $x^2 + y^2 = 100$, $16k^2 + 9k^2 = 100$, $k^2 = 4$, $k = 2$, $x = 8$, $y = 6$.

Задача з Кахунського папірусу

Відношення чисел $2:1\frac{1}{2}$, сума квадратів 400. Знайти ці числа.

Отримаємо систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ x : y = 2 : 1\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{Дідківська \& Сверчевська, 2016}).$$

Метод хибного припущення. $x = 2$, $y = 1\frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$. Корінь квадратний дорівнює $\frac{5}{2}$. Але корінь квадратний з 400 дорівнює 20, що у 8 разів більше. Отже, перше число $2 \cdot 8 = 16$, друге число $1\frac{1}{2} \cdot 8 = 12$ (Сверчевська, 2017a).

Задача з Московського папірусу.

Визначити довжини сторін прямокутника, якщо відомо їх відношення і площа фігури (Дідківська & Сверчевська, 2016).

Зводимо до системи рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \\ xy = S \end{cases}.$$
 Перемножимо відповідні частини

рівнянь, отримаємо: $x^2 = \frac{m}{n}S$, $x = \sqrt{\frac{m}{n}S}$. З 1-го рівняння $y = \frac{n}{m}x$, тоді

$y = \frac{n}{m} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}S} = \sqrt{\frac{n}{m}S}$ (Сверчевська, 2017a)

Старовинні вавилонські задачі

Історична довідка. У стародавньому Межиріччі розвинулася вавилонська математика. Спадок Стародавнього Вавилону вивчається за глиняними клинописними табличками, що написані в епоху Хаммурапі приблизно в 1800 – 1600 р. р. до н. е. та епоху Селевкідів 300 – 200 р. р. до н. е. Серед них є тексти-таблиці та тексти-задачники, які містять чимало задач, що приводять до нелінійних алгебраїчних систем рівнянь. Характерним є виокремлення «канонічних» систем, що розв'язувалися за готовими формулами (Дідківська & Сверчевська, 2016).

1) Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}.$$

У табличках подано словесно правила розв'язання, що в сучасній алгебраїчній символіці має вигляд $x = \frac{1}{2}a + t$; $y = \frac{1}{2}a - t$, де $t = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b}$ (1).

Приведемо міркування для виведення цього правила. Оскільки $x + y = a$, то x більше за a (позначимо t) на стільки ж як y менше за a , маємо $x = \frac{1}{2}a + t$; $y = \frac{1}{2}a - t$. Тоді з другого рівняння $xy = \left(\frac{1}{2}a + t\right)\left(\frac{1}{2}a - t\right)$ за відомою вавилонянам залежністю $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ одержуємо $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - t^2 = b$; $t = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b}$.

Можна вважати, що вавилонським математикам було відомо правило вираження коренів квадратного рівняння через його коефіцієнти. Адже, якщо вважати x і y коренями квадратного рівняння $z^2 - az + b = 0$ і визначити їх за відомою формулою, то одержимо $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$; $y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

2) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases} \quad (\text{Вивальнюк \& Ігнатенко, 1996, с. 28}).$$

У сучасних позначеннях правило для розв'язування вавилонського математика таке: $x = \frac{1}{2}b + t$; $y = \frac{1}{2}b - t$, де $t = \sqrt{\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

До цих формул ймовірно він прийшов наступним чином $x = \frac{b}{2} + t$, $y = \frac{b}{2} - t$.

З 1-го рівняння: $\left(\frac{b}{2} + t\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - t\right)^2 = a$. За відомою вавилонянам залежністю $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можна виконати перетворення $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + bt + t^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - bt + t^2 = a$; $2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2t^2 = a$; $t^2 = \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (Дідківська & Сверчевська, 2016).

Якщо x та y корені рівняння, одержаного підстановкою $y = b - x$, тобто $x^2 - bx + \frac{b^2 - a}{2} = 0$, то за сучасними формулами $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b^2 - a}{2}} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$,
 $y = b - x = b - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ (Сверчевська, 2017а)

3) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Для розв'язання вавилонський математик виконує таку послідовність перетворень (Конфорович, 1981, с. 23). Поділити 2-ге рівняння на 2, тобто $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{7}{2}$, та відняти отриманий вираз від 1-го рівняння, тоді одержиться $xy - \frac{1}{6}y = 11\frac{1}{2}$. Від обох частин 2-го рівняння відняти $\frac{1}{6}$, тоді матимемо систему рівнянь (Дідківська & Сверчевська, 2016):

$$\begin{cases} xy - \frac{1}{6}y = 11\frac{1}{2} \\ x + y - \frac{1}{6} = 6\frac{5}{6} \end{cases}, \text{ яку подати у вигляді } \begin{cases} y\left(x - \frac{1}{6}\right) = 11\frac{1}{2} \\ y + \left(x - \frac{1}{6}\right) = 6\frac{5}{6} \end{cases} \text{ і, ввівши заміну}$$

$y = u; x - \frac{1}{6} = v$, одержати нову систему $\begin{cases} u + v = 6\frac{5}{6} \\ uv = 11\frac{1}{2} \end{cases}$. Ця система канонічної форми

і розв'язується за готовими формулами (1):

$$u = 3\frac{5}{12} + \sqrt{\left(3\frac{5}{12}\right)^2 - 11\frac{1}{2}} = 3\frac{5}{12} + \sqrt{\frac{1681}{144} - \frac{23}{2}} = 3\frac{5}{12} + \sqrt{\frac{25}{144}} = 3\frac{5}{12} + \frac{5}{12} = 3\frac{5}{6},$$

$$y = u = 3\frac{5}{6},$$

$$v = 3\frac{5}{12} - \sqrt{\left(3\frac{5}{12}\right)^2 - 11\frac{1}{2}} = 3\frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 3, \quad x = v + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6} \text{ (Сверчевська, 2017а).}$$

4) Розв'язати систему рівнянь (Дідківська & Сверчевська, 2016).

$$\begin{cases} xyz + xy = 1\frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 12x \end{cases}$$

Якщо вирази y і z через x підставити у перше рівняння, то отримаємо рівняння $48x^3 + 4x^2 = 7$. Помноживши його на 36, прийдемо до рівняння

$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$. Зробивши заміну $12x=t$, одержимо рівняння $t^3 + t^2 - 252 = 0$, яке вавилоняни, ймовірно, розв'язували за таблицями чисел виду $n^3 + n^2$.

Сучасним методом відшукування раціональних коренів цього рівняння є використання необхідної умови раціонального кореня алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Тобто t належить множині дільників вільного члена $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Достатню умову кореня задовольняє $t=6$. Маємо: $t^3 + t^2 - 252 = (t-6)(t^2 + 7t + 42) = 0$. Рівняння $t^2 + 7t + 42 = 0$ не має дійсних коренів.

Отже, існує єдиний раціональний корінь $t=6$. Тоді $12x=6$, $x=\frac{1}{2}$. З 2-го та 3-го

рівнянь системи відповідно визначаємо $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $z = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

5) Вавилонська задача (XVIII ст. до н. е.)

Довжину і ширину я помножив і площу одержав. Потім надлишок довжини над шириною я додав до площі; 3,3 одержалось у мене. Потім я довжину і ширину склав: 27. Запитується довжина, ширина і площа (Дідківська & Сверчевська, 2016).

Дано: 27 і 3,3 суми

Результат: 15 довжина, 12 ширина, 3,0 площа.

Автор подає у словесній формі алгоритм розв'язування. Запишемо його у сучасних позначеннях. Оскільки вавилоняни користувалися шістдесятковою системою числення, то в десятковій системі $3,3 = 3 \cdot 60 + 3 = 183$. Позначимо

довжину x , ширину y , прийдемо до системи: $\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$. Якщо додати

рівняння системи: $xy + 2x = 210$, матимемо систему: $\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + y = 27 \end{cases}$, або

$\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + (y+2) = 29 \end{cases}$. Виконаємо заміну $y+2 = z$ і отримаємо канонічну систему:

$\begin{cases} xz = 210 \\ x + z = 29 \end{cases}$, для розв'язання якої використаємо формули (1): $x = \frac{1}{2} \cdot 29 + t$,

$z = \frac{1}{2} \cdot 29 - t$, $t = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 29\right)^2 - 210}$, $t = \sqrt{\frac{841}{4} - 210} = \frac{1}{2}$, $x = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 15$, $z = 14\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 14$,

$y = z - 2$, $y = 12$, $S = 180$.

У тексті не згадується про другий розв'язок системи $t = -\frac{1}{2}$, $x = 14\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 14$, $z = 14\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 15$, $y = 15 - 2 = 13$, $S = 182$.

6) Вавилонська задача (бл. 1950 до н. е.)

Площа двох квадратів складає 1000. Сторона одного з квадратів складає зменшену на 10 дві третини сторони другого квадрата. Які сторони квадрата? (Сверчевська, 2017а).

Задача зводиться до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1000 \\ y = \frac{2}{3}x - 10 \end{cases}$$

Автор за відомою вавилонянам формулою квадрата двочлена підносить невідоме у з другого рівняння до квадрату та підставляє в перше рівняння $x^2 + \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 100\right) = 1000$. Отримане квадратне рівняння $1\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x = 900$, $13x^2 - 120x = 8100$ розв'язує алгебраїчним методом у словесній формі. Якщо використати сучасну алгебраїчну символіку, отримаємо: $x = \frac{60 + \sqrt{3600 + 105300}}{13} = \frac{60 + \sqrt{108900}}{13}$, $x = \frac{60 + 330}{13} = 30$, $y = \frac{2}{3} \cdot 30 - 10 = 10$.

7) Вавилонська задача (1800 – 1600 р. р. до н. е.).

Розв'язати систему рівнянь (Конфорович, 1981, с. 21):

$$\begin{cases} xy + (x - y)(x + y) = 4400 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

Усі перетворення автор виконує словесно. Визначає невідоме у з 2-го рівняння та підставляє в 1-ше, приходять до квадратного рівняння $x^2 - 300x + 14400 = 0$, розв'язує його. У сучасній символіці маємо $x = 150 - \sqrt{22500 - 14400} = 150 - 90 = 60$, $y = 100 - 60 = 40$. Другий корінь $x = 150 + 90 = 240$ автор не використовує, бо тоді у – від'ємне. Від'ємні числа вавилонянам були невідомі.

Задачі з китайського трактату «Математика в дев'яти книгах»

Історична довідка. «Математика в дев'яти книгах» (152 р. до н. е.) – найвідоміший твір китайської математики, в якому підсумовано досягнення китайських математиків I-го століття до н. е. Книга була енциклопедією математичних знань для практичного застосування будівельниками, землемірами, ремісниками, купцями. Відомою стала редакція Лю Хуея 263 р. цього твору. Матеріали у книзі подано стисло: умова задачі, відповідь, вказівки до шляху розв'язання.

Визначним є алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь з кількома невідомими, що подано у книзі VIII «Фан-чен». Цей метод полягав у тому, що зображали таблицю фан-чен, тобто фактично матрицю заданої системи, після чого виконували перетворення зі стовпчиками з метою виключення невідомих. Метод фан-чен було відкрито заново в Європі і названо методом Гаусса.

1) Задача № 1 книга VIII трактату «Математика в дев'яти книгах».

З трьох снопів гарного врожаю, двох снопів середнього врожаю і одного снопа поганого врожаю отримали 39 доу зерна. З 2 снопів хорошого врожаю, 3 снопів середнього врожаю і 1 снопа поганого врожаю отримали 34 доу зерна. З 1 снопа хорошого врожаю, 2 снопів середнього врожаю і 3 снопів поганого врожаю отримали 26 доу зерна. Запитується, скільки зерна отримали з кожного снопа доброго, середнього і поганого врожаю (Сверчевська, 2017с).

Позначимо x, y, z відповідно кількість зерна у снопах гарного, середнього і поганого врожаю, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Розв'язання у книзі подається словесно методом фан-чен, виконуються послідовні перетворення таблиці. Запишемо у вигляді перетворення стовпчиків матриць (стовпчики відповідають рівнянням системи, починаючи з останнього):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

Остання матриця відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$$

за останньою таблицею обчислюються значення невідомих у такий спосіб:

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}; \quad y = \frac{A}{36}, \quad \text{де} \quad A = \frac{24 \cdot 36 - 99 \cdot 1}{5}, \quad y = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4}; \quad x = \frac{B}{36}, \quad \text{де}$$

$$B = \frac{39 \cdot 36 - 99 \cdot 1 - 2 \cdot A}{3}, \quad x = \frac{333}{36} = 9\frac{1}{4}.$$

2) Двом снопам гарного врожаю, трьом снопам середнього, чотирьом снопам поганого врожаю не вистачає до 1 доу відповідно по 1 снопу середнього, поганого і гарного врожаю. Запитується скільки зерна одержали з кожного снопа гарного, середнього і поганого врожаю.

Задача зводиться до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 3y = 1 - z, \text{ або} \\ 4z = 1 - x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ x + 4z = 1 \end{cases}$$

Правило у трактаті «Математика в дев'яти книгах» подається так: «Склади таблицю «фан-чен», встанови для кожного те, чого не вистачає. За способом «чжен-фу» обчисли».

Тобто, в таблиці потрібне порожнє місце, якщо немає невідомого, також використовуй правило додавання чисел з різними знаками. Запишемо таблицю й перетворення за вказаним алгоритмом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 24 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 25 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$z = \frac{4}{25}, y = \frac{A}{25}, \text{ де } A = \frac{1 \cdot 25 - 4 \cdot 1}{3} = 7, y = \frac{7}{25}, x = \frac{B}{25}, \text{ де } B = \frac{1 \cdot 25 - 4 \cdot 0 - 1 \cdot A}{2} = 9, x = \frac{9}{25}.$$

Правило фан-чен у задачах, де виконувалося відніманням більших чисел від менших, привело до введення у застосування від'ємних чисел. Так у задачі № 3 з VIII книги трактату «Математика в дев'яти книгах» вперше використовуються від'ємні числа і пояснюються правила додавання і віднімання.

У трактаті японського математика Секи Шенсуке Кова (1683 р.) метод фан-чен був розвинений у вчення про визначники. Вперше в Європі розглядали загальний підхід до розв'язування лінійних системи Л. Фібоначчі та Д. Кардано. Правило визначення розв'язків системи у творі «Про велике мистецтво» (1545 р.) подав Кардано:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, x = \frac{\frac{c_1b_2}{b_1} - c_2}{\frac{a_1b_2}{b_1} - a_2}, y = \frac{\frac{a_1c_2}{a_2} - c_1}{\frac{a_1b_2}{a_2} - b_1}.$$

Г. Лейбніц у 1693 р. виклав ідею про введення визначників у зв'язку з виключенням невідомих. Він по суті подав формули детермінантів для розв'язків системи лінійних рівнянь, застосовувавши для позначення коефіцієнтів два індекси. У 1750 р. Г. Крамер у книзі «Вступ в аналіз кривих ліній» без доведення вказав правила побудови розв'язків лінійної системи. У 1815 р. О. Коші опублікував найбільш повний виклад теорії детермінантів. Також він ввів термін «детермінант».

У книзі VII трактату «Математика в дев'яти книгах» у розв'язуванні систем 2-х лінійних рівнянь з 2-ма невідомими застосовується два методи «надлишку і недостачі», які пов'язані з методом детермінантів.

3) Задача № 2 книга VII трактату «Математика в дев'яти книгах»

Разом купляють курку. Якщо кожен внесе по 9, то надлишок буде 11. якщо кожен внесе по 6, то недостача буде 16. Запитується кількість людей і ціна курки.

У цій задачі використовується перший метод «надлишку і недостачі». За умовою складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} a_1x = y + d_1 \\ a_2x = y - d_2 \end{cases}$, де a_1, a_2 – норми $a_1 > a_2$, d_1 – надлишок, d_2 – недостача. Алгоритм обчислення за методом «надлишок і недостача» подається у словесній формі, що відповідно можна записати у сучасних позначеннях.

З чисел $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{matrix}$ утворюється «ши» = $a_1d_2 + a_2d_1$, «фа» = $d_1 + d_2$; «різниця» = $a_1 - a_2$. Далі невідомі обчислюються за формулами:

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2}; \quad y = \frac{a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 - a_2}.$$

Відповідно для даної задачі: $\begin{cases} 9x = y + 11 \\ 6x = y - 16 \end{cases}, a_1 = 9, a_2 = 6, d_1 = 11, d_2 = 16,$

$$\frac{9}{11} \frac{6}{16}, \quad x = \frac{11+16}{9-6} = \frac{27}{3} = 9, \quad y = \frac{9 \cdot 16 + 6 \cdot 11}{9-6} = \frac{210}{3} = 70.$$

Отже, 9 людей, вартість курки 70.

Фактично цей метод є методом детермінантів. Якщо перетворити систему

та визначити детермінанти $\begin{cases} y - a_1 x = -d_1 \\ y - a_2 x = d_2 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{vmatrix} = a_1 - a_2,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -d_1 & -a_1 \\ d_2 & -a_2 \end{vmatrix} = a_1 d_2 + a_2 d_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix} = d_2 + d_1,$ то одержимо, що в методі «надлишок і недостача» формули для x і y можна записати у такому ж вигляді, що і формули Крамера: $y = \frac{a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 - a_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$

4) Задача № 18 книга VII трактату «Математика в дев'яти книгах».

Є 9 злитків золота та 11 злитків срібла, їх окремо зважили і їхня вага співпала. Коли злиток золота зі злитком срібла поміняли місцями, золото стало легше на 13 ланів. Яка вага злитка золота і срібла?

Зазначимо, що 1 цзінь = 16 ланам, а 1 лан = 24 чжу. Позначимо тепер вагу злитка золота через x , а вагу злитка срібла через y ; задача зводиться до розв'язування системи: $\begin{cases} 9x = 11y \\ 13 + 8x + y = 10y + x \end{cases}.$

Будемо розв'язувати цю систему методом хибних припущень.

Перше припущення: $x_1 = 3$ цзіня, тоді $y_1 = \frac{9x_1}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$ (цзіня). Оскільки 13 лан = $\frac{13}{16}$ цзіня, $z_1 = \left(\frac{13}{16} + 8 \cdot 3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10 \cdot 2\frac{5}{11} + 3\right) = -\frac{49}{11 \cdot 16}$, недостача $d_1 = 49$.

Друге хибне припущення: $x_2 = 2$ цзіня, тоді $y_2 = \frac{18}{11} = 1\frac{7}{11}$ (цзіня) та $z_2 = \left(\frac{13}{16} + 8 \cdot 2 + 1\frac{7}{11}\right) - \left(10 \cdot 1\frac{7}{11} + 2\right) = \frac{15}{11 \cdot 16}$, надлишок $d_2 = 15$.

Далі припускається, що припущення і надлишок та недостача записані китайським способом $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}$. Оскільки знаменники в загальній формулі

$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}$ скорочуються, то в трактаті таблиця має вигляд $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 49 \end{pmatrix}$ і відповідні обчислення: $x = \frac{2 \cdot 49 + 3 \cdot 15}{15 + 49} = \frac{143}{64} = 2\frac{15}{64}$ (цзіня), $y = \frac{x}{\frac{11}{9}} = \frac{143}{\frac{11}{9} \cdot 64} = \frac{13 \cdot 9}{64} = \frac{117}{64} = 1\frac{53}{64}$ (цзіня).

У цій задачі застосовується правило двох хибних припущень або другий метод «надлишку і недостачі».

Якщо в системі $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, надати значення x_1 та x_2 і визначити y_1 та y_2

з 1-го рівняння системи, то після підстановки цих значень у 2-ге рівняння зводимо систему до одного рівняння зі змінною x . Правило двох хибних припущень дає формулу $x = \frac{x_1d_2 + x_2d_1}{d_2 + d_1}$, де d_1 і d_2 – відповідно надлишок і недостача (всі числа додатні).

Відповідь: злиток золота має вагу $x = 2\frac{15}{64}$ (цзіня), срібла $y = 1\frac{53}{64}$ (цзіня).

У книзі II трактату «Математика в дев'яти книгах» є задачі, які приводять до нелінійних систем 3-х рівнянь з 4-ма змінними. Для розв'язання їх зводять до одного рівняння з двома змінними, у якому знаходиться єдиний розв'язок у цілих додатних числах (Дідківська & Сверчевська, 2016).

5) 78 бамбуків малого і великого розміру коштують 576 цяней, запитується, скільки коштує кожний? (в задачі за замовчуванням вважається, що різниця цін дорівнює 1 цяню та ціни – цілі числа).

Позначимо кількості бамбуків x і y , а ціни за штуку u і v , тоді задача зводиться до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 78 \\ ux + vy = 576 \\ v = u + 1 \end{cases}$$

Виконаємо перетворення 2-го рівняння $ux + vy = 576$; $(ux + uy) + (vy - uy) = 576$; $u(x + y) + y(v - u) = 576$. Використавши 1-ше і 3-тє рівняння, одержимо $78 \cdot u + y \cdot 1 = 576$. Або $u + \frac{y}{78} = 7 + \frac{30}{78}$. Єдині цілі розв'язки $u = 7$, $y = 30$. З 1-го рівняння $x = 78 - y = 78 - 30 = 48$, з третього $v = u + 1 = 7 + 1 = 8$ (Сверчевська, 2017а).

Задача з Грецької антології

Хроноса (бог часу) часознавцю, скажи, яка частина дня минула?

Двічі дві третіх того, що пройшло, залишається (у стародавніх греків тривалість дня 12 годин).

Нехай x – час, що пройшов, y – час, що залишився. За умовою задачі маємо систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y = 2 \cdot \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Перший спосіб розв'язання – метод підстановки: $x + \frac{4}{3}x = 12$, $x = 5\frac{1}{7}$, $y = 6\frac{6}{7}$.

Другий спосіб – формули Крамера.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{4}{3}x - y = 0 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16,$$

$$x = \frac{-12}{-\frac{7}{3}} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}, \quad y = \frac{-16}{-\frac{7}{3}} = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}.$$

Задачі Діофанта

Історична довідка. Діофант (ймовірно III ст.) – давньогрецький математик, що працював в Александрії. З тринадцяти книг його трактату «Арифметика» збереглося шість. Ця книга мала великий вплив на розвиток алгебри і теорії чисел та стала початком розвитку символічної алгебри. Методи розв’язування задач у Діофанта нетрадиційні та своєрідні, він з майстерністю розв’язував складні задачі, але загальних методів розв’язування не давав. Дослідження Діофанта покладені в основу досліджень П. Ферма, Л. Ейлера, К. Гаусса та інших видатних математиків (Бородін & Бугай, 1973, с. 172).

1) *Знайти два числа, сума яких 20, а добуток 96.*

Задача приводить до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}.$$

Діофант робить заміну $x = 10 - z$, $y = 10 + z$, підставивши в 2-ге рівняння, визначає $z = 2$.

2) *Розв’язати систему рівнянь.*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}.$$

Діофант вводить допоміжне невідоме $\frac{x - y}{2} = z$. З 1-го рівняння $\frac{x + y}{2} = 5$, тоді з цих двох умов отримує $x = 5 + z$, $y = 5 - z$, підставляє в 2-ге рівняння і знаходить $z = 3$. Отже, $x = 8$, $y = 2$.

3) *Знайти два числа, знаючи, що їх сума дорівнює 20, а сума їх квадратів – 208.*

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}.$$

Діофант позначає $\frac{x - y}{2} = z$, $\frac{x + y}{2} = 10$, знаходить суму та різницю і робить заміну $\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = 10 + z$, $x = 10 + z$, $\frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = 10 - z$, $y = 10 - z$. Всі ці перетворення Діофант виконує усно. Підставляє в 2-ге рівняння $(10 + z)^2 + (10 - z)^2 = 208$, $2z^2 = 8$, $z = 2$. Отже, $x = 12$, $y = 8$. Діофант не розглядає значення $z = -2$, що дає $x = 8$, $y = 12$.

4) Знайти два числа, відношення яких 3, а відношення суми квадратів цих чисел до їх суми дорівнює 5.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5 \end{cases}.$$

Перетворивши 1-ше рівняння $\frac{x^2}{y^2} = 9$, Діофант визначає $x^2 + y^2 = 10y^2$ і підставляє в 2-ге рівняння.

5) Знайти три числа, якщо дано, що добуток суми перших двох на третє є 35, суми першого з третім на друге 27, а суми другого з третім на перше 32 (Сверчевська, 2017а).

Задача зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} (x + y)z = 35 \\ (x + z)y = 27 \\ (y + z)x = 32 \end{cases}$$

Від 1-го рівняння відніmemo 2-ге, одержимо: $xz - xy = 8$. додамо це рівняння до 3-го, тоді $2xz = 40$, $xz = 20$. Маємо $\begin{cases} (x + y)z = 35 \\ xz = 20 \end{cases}$, звідки $yz = 15$. А також

$\begin{cases} (y + z)x = 32 \\ xz = 20 \end{cases}$, звідки $xy = 12$. Помноживши рівняння $xz = 20$ і $yz = 15$, одержимо $xyz^2 = 300$. Оскільки $xy = 12$, то $z^2 = 25$, $z = 5$, ($z > 0$). Тоді з того, що $xz = 20$ та $z = 5$, маємо $x = 4$. А з того, що $xy = 12$ та $x = 4$, одержимо $y = 3$.

Отже, $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.

6) Знайти два числа, добуток яких у сумі з кожним з даних чисел, дорівнює кубу деякого числа (Сверчевська, 2017а).

Задача приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} XY + X = \alpha^3 \\ XY + Y = \beta^3 \end{cases}.$$

Розв'язання Діофанта.

Нехай перше число $X = 8x$, друге $Y = x^2 - 1$, тоді 1-ше рівняння задовольняється: $8x(x^2 - 1) + 8x = 8x^3 = (2x)^3$. Щоб задовольнялося друге рівняння, покладемо $8x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (2x - 1)^3$, тоді одержимо рівняння $13x^2 - 14x = 0$, $x \neq 0$, $13x - 14 = 0$, $x = \frac{14}{13}$. Тоді визначаємо 1-ше число $X = 8 \cdot \frac{14}{13} = \frac{112}{13}$, друге число $Y = \left(\frac{14}{13}\right)^2 - 1 = \frac{27}{169}$.

Відповідь: $X = \frac{112}{13}$, $Y = \frac{27}{169}$.

Ця система невизначена. Автор використовує умову $\beta = 2x - 1$ і визначає один розв'язок задачі.

Узагальнимо метод Діофанта. Нехай $X = a^3x$, $Y = x^2 - 1$, тоді 1-ше рівняння задовольняється. Підставимо X та Y у 2-ге рівняння й одержимо $a^3x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = \beta^3$. Позначивши $\beta = ax - 1$, виконаємо перетворення $a^3x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = a^3x^3 - 3a^2x^2 + 3ax - 1$, $x^2(1 + 3a^2) = x(a^3 + 3a)$, $x \neq 0$, $x = \frac{a^3 + 3a}{3a^2 + 1}$.

При $a = 2$ одержимо розв'язок Діофанта $x = \frac{14}{13}$. Надаючи значення a , можна отримати безліч розв'язків системи (Сверчевська, 2017а).

7) Знайти три числа таких, що квадрати кожного з них додані до суми цих чисел, залишаються також квадратами.

$$\begin{cases} X^2 + (X + Y + Z) = \alpha^2 \\ Y^2 + (X + Y + Z) = \beta^2 \\ Z^2 + (X + Y + Z) = \gamma^2 \end{cases}$$

Щоб розв'язати цю систему, Діофант використовує тотожність $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, де a, b – дільники числа $c = ab$ ($a > b$).

Тоді, якщо позначити $X + Y + Z = x^2 \cdot c$, де c має три дільники, одержимо $c = a_1b_1$, $X = \frac{a_1 - b_1}{2}x$; $c = a_2b_2$, $Y = \frac{a_2 - b_2}{2}x$; $c = a_3b_3$, $Z = \frac{a_3 - b_3}{2}x$, де x визначається з умови $X + Y + Z = cx^2$.

Діофант розглядає випадок $c = 12$, тоді $X + Y + Z = 12x^2$; $x = \frac{4}{6}$; $X = \frac{22}{6}$; $Y = \frac{8}{6}$; $Z = \frac{2}{6}$.

Задача Сунь-Цзи

Історична довідка. Сунь-Цзи – китайський математик і астроном. Час його життя відомий приблизно: III – V ст. Автор трактату «Сунь Цзи суань цзин» («Рахунковий канон Сунь-Цзи», який приписувався відомому полководцю й теоретику військового мистецтва VI – V ст. до н. е.). Найвідомішою стала задача Сунь-Цзи про ділення числа з остачею (китайська теорема про остачі). Вона зробила ім'я Сунь-Цзи широко відомим і вважалася на Заході одним з китайських чудес.

Розглянемо іншу задачу Сунь-Цзи, яка приводить до системи лінійних рівнянь.

Два чоловіки A і B одержали деяку кількість монет, які треба розділити між ними так, що коли до монет A додати половину монет B або до монет B додати $2/3$ монет A , то в обох випадках дістанемо 48. Скільки монет одержав кожний чоловік? (Конфорович, 1981, с. 85)

Якщо позначити кількість монет A через x , а кількість монет B – через y , то задача зводиться до розв'язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 48 \\ \frac{2}{3}x + y = 48 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y = 96 \\ 2x + 3y = 144 \end{cases}, 2y = 48, y = 24, x = 48 - \frac{1}{2}y = 36.$$

Розв'яжемо цю систему матричним методом $\begin{cases} 2x + y = 96 \\ 2x + 3y = 144 \end{cases}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 96 \\ 144 \end{pmatrix}$. Система рівносильна матричному рівнянню

$$A \cdot X = B, X = A^{-1} \cdot B, \text{ де } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, A_{11} = 3, A_{12} = -2, A_{21} = -1,$$

$$A_{22} = 2, A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 144 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 96 - 1 \cdot 144 \\ -2 \cdot 96 + 2 \cdot 144 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 36$, $y = 24$.

Задача Чжан Цюцзяня

Історична довідка. Чжан Цюцзянь (V ст.) – китайський математик, автор твору «Математичний трактат», що увійшов до збірки з десяти трактатів, яка була посібником для підготовки китайських чиновників до кваліфікаційного екзамену

Півень коштує 5 монет, 1 курка – 3 монети, 3 курчат – 1 монету. Всього за 100 монет купили 100 птахів. Скільки купили півнів, курей і курчат окремо? (Конфорович, 1981, с. 86)

Позначимо кількість півнів, курей і курчат відповідно через x , y , z . Задача зводиться до розв'язування системи діофантових рівнянь $\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$, яка

еквівалентна рівнянню $7x + 4y = 100$. Тоді $y = 25 - \frac{7}{4}x$, а $z = 75 + \frac{3}{4}x$. Значення y і z будуть цілими додатними, якщо $x = 4k$ ($k = 0, 1, 2, 3$), тобто $x = 4k$, $y = 25 - 7k$, $z = 75 + 3k$, $0 \leq k \leq 3$.

Чжан дає три розв'язки: (4; 18; 78), (8; 11; 81), (12; 4; 84). Розв'язок (0; 25; 75) пропускає. Він помічає, що кількість курей зменшується на 7, кількість курчат зростає на 3, кількість півнів збільшується на 4.

Задача Алкуїна

Історична довідка. Алкуїн (бл. 735 – 804) – французький вчений, працював при дворі короля Карла Великого. Був організатором ряду шкіл та автором посібників з математики. Найпопулярніший з них – один з перших збірників цікавих задач з математики «Задачі для вдосконалення розуму юнаків»

Розділили 100 мірок пшениці між 100 людьми так, щоб кожний чоловік одержав 3, кожна жінка 2, а кожна дитина $\frac{1}{2}$ мірки. скільки чоловіків, жінок і дітей? (Конфорович, 1981, с.100)

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$
. Виключаємо z з системи

рівнянь:
$$\begin{cases} 6x + 4y + z = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$
, $5x + 3y = 100$, звідки $x = 20 - \frac{3y}{5}$. Оскільки x – ціле, то y кратне 5: $y = 5k$, тоді $x = 20 - 3k$, $z = 100 - x - y = 80 - 2k$, $0 \leq k \leq 6$. Одержуємо 7 розв'язків. Алкуїн наводить один розв'язок (11; 15; 74).

Задача Магавіри

Історична довідка. Магавіра – індійський вчений IX ст. Він автор першого індійського трактату «Короткий курс математики», який за обсягом більший, ніж усі роботи його попередників і сучасників.

Під час бою півнів один з глядачів домовився з двома власниками півнів. Першому він сказав: «Якщо переможе твій півень, то виграш віддаси мені, якщо ж програєш, то я сплачу тобі $\frac{2}{3}$ твого можливого виграшу». Другому учаснику він сказав: «Якщо переможе твій півень, то виграш віддаси мені, якщо ж програєш, я сплачу тобі $\frac{3}{4}$ можливого виграшу». В обох випадках глядач одержить 12 монет. Який мав бути виграш кожного учасника бою? (Конфорович, 1981, с.74).

Розв'язання. Позначивши через x і y виграші кожного партнера, дістанемо систему:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{4}y = 12 \\ y - \frac{2}{3}x = 12 \end{cases}, \begin{cases} 4x - 3y = 48 \\ -2x + 3y = 36 \end{cases}, \begin{cases} 2x = 84 \\ y = 12 + \frac{2}{3}x \end{cases}, \begin{cases} x = 42 \\ y = 40 \end{cases}$$

Задачі ал-Хорезмі

Історична довідка. Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі (бл. 780 – бл. 850) – арабський математик, що працював у Будинку Мудрості в Багдаді під час правління халіфа ал-Мамуна. Найвідомішими є його трактати «Арифметика» й «Алгебра». Ал-Хорезмі відобразив у цих творах те, що потрібно було, враховуючи потреби практики, вченим і діловим людям. В «Алгебрі» ал-Хорезмі приділяє значну увагу правилам розв'язування основних типів квадратних рівнянь, а також задачам, що приводять до систем нелінійних рівнянь (Бородін & Бугай, 1973, с. 507).

1) Число 10 розкласти на такі дві частини, щоб квадрат однієї з них дорівнював почетвереному добутку двох частин (Сверчевська, 2017а).

Задача зводиться до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 = 4xy \end{cases}$$
.

Ал-Хорезмі зводить розв'язування цієї системи до квадратного рівняння $x^2 = 4x \cdot (10 - x)$ або $x^2 = 40x - 4x^2$ і робить перетворення «ал-джебр» $x^2 + 4x^2 = 40x$ та «ал-мукабала» $5x^2 = 40x$. Приходить до канонічного рівняння типу «квадрати дорівнюють кореням». Робить коефіцієнт при x^2 рівним 1: «зведи п'ять квадратів

до одного квадрата», тобто поділи на 5. Одержує $x^2 = 8x$, $x = 8$ ($x \neq 0$). Оскільки $x + y = 10$, то $y = 2$.

Відповідь: $x = 8$, $y = 2$.

2) «Ти розділив 10 на дві частини, потім помножив кожену частину на себе, потім додав їх і додав до них різницю між частинами до множення та в сумі одержав п'ятдесят чотири» (Сверчевська, 2017а).

Задача зводиться до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 + y - x = 54 \end{cases}$$

Автор позначає одну частину за x , тоді друга $10 - x$. З другого рівняння одержує $x^2 + (10 - x)^2 + (10 - x) - x = 54$, $110 + 2x^2 - 22x = 54$. Ал-Хорезмі робить перетворення «ал-джебр» $110 + 2x^2 = 54 + 22x$ та «ал-мукабала», тобто ділить на 2 і зводить подібні доданки $x^2 + 55 = 11x$, $x^2 + 28 = 11x$. Одержує канонічне рівняння типу $x^2 + c = bx$ «квадрати і числа дорівнюють кореням», для якого за словесним правилом потрібно виконати наступні дії: 1) $\frac{b}{2}$; 2) $\left(\frac{b}{2}\right)^2$; 3) $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$; 4)

$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$; 5) $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, тобто $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Для рівняння $x^2 + 28 = 11x$:

$x = \frac{11}{2} - \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}$, $x = 4$, $y = 10 - 4 = 6$. Автор зазначає, що $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

також буде коренем.

Відповідь: $x = 4$, $y = 6$.

3) Розділити 10 на дві частини, сума квадратів яких дорівнює 58 (Сверчевська, 2017b).

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$$

Ал-Хорезмі розв'язує систему, зводячи її до квадратного рівняння: $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ або $2x^2 + 100 - 20x = 58$. Робить перетворення «ал-джебр» $2x^2 + 100 = 58 + 20x$, після чого ділить на 2 і зводить подібні доданки $x^2 + 21 = 10x$ («ал-мукабала»). Отримує рівняння типу $ax^2 + c = bx$ «квадрати і числа дорівнюють кореням» та словесно дає правило визначення коренів.

«Поділи надвоє число коренів, це буде 5, і помнож це на рівне собі, буде 25, і відними з цього 21, залишається 4, добудь з цього корінь – буде 2, і відними це від половини коренів, тобто п'яти, залишається 3; це і буде корінь квадрата, який ти шукаєш, а квадрат є 9. Додай це до половини коренів, буде 7, це – корінь квадрата, який ти шукаєш, а квадрат є 49».

У сучасних позначеннях це правило має вигляд: $x = 5 \mp \sqrt{25 - 21} = 5 \mp 2$; $x_1 = 3$; $x_2 = 7$.

Розглянемо способи, що можна застосувати для розв'язування цієї системи під час вивчення вищої алгебри.

Спосіб 1. Зробимо заміну $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, тоді $x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ і система має вигляд:

$\begin{cases} \sigma_1 = 10 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 58 \end{cases}; \begin{cases} \sigma_1 = 10 \\ 2\sigma_2 = 42 \end{cases}; \begin{cases} \sigma_1 = 10 \\ \sigma_2 = 21 \end{cases}$. Для x та y отримаємо $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases}$, звідки $x = 3, y = 7$ або $x = 7, y = 3$.

Спосіб 2. В курсі алгебри і теорії чисел вивчається загальний підхід до розв'язування систем нелінійних рівнянь, що застосовує результат двох многочленів. Виконаємо розв'язання за цим алгоритмом. Будемо вважати, що в рівняннях x є змінною, а y – стала. Ліві частини рівнянь впорядкуємо за змінною

x : $\begin{cases} x + (y - 10) = 0 \\ x^2 + (y^2 - 58) = 0 \end{cases}$. Результат у формі Сільвестра утворимо, записавши

коефіцієнти 1-го рівняння у два рядки зі зсувом на одну позицію вправо й у 3-й

рядок коефіцієнти 2-го рівняння. $\begin{vmatrix} 1 & y-10 & 0 \\ 0 & 1 & y-10 \\ 1 & 0 & y^2-58 \end{vmatrix} = 0$. Для того, щоб рівняння

мали спільний корінь необхідно і достатньо, щоб результат дорівнював нулю. Тобто $y^2 - 58 + (y - 10)^2 = 0$; $y^2 - 10y + 21 = 0$; $y = 3$ або $y = 7$. Для кожного знайденого значення змінної y утворимо систему рівнянь та обчислимо значення змінної x . При $y = 3$ отримаємо систему рівнянь $x - 7 = 0$ і $x^2 - 49 = 0$. Спільний корінь цих рівнянь $x = 7$. Якщо $y = 7$, то рівняння системи $x - 3 = 0$ і $x^2 - 9 = 0$. Спільний корінь $x = 3$. Отже, шукані частини 3 та 7.

Задачі Абу Каміла

Історична довідка. Абу Каміл (бл. 850 – 930) – єгипетський математик. Рукопис його твору «Книга про алгебру й алмукабалу» зберігається у Стамбулі. Учений відомий розповсюдженням ідей ал-Хорезмі у науковому світі. Праці абу-Каміла вивчав Леонардо Пізанський. У творі «Книга рідкостей в арифметиці» Абу Каміл досліджує невизначені лінійні системи. Він наводить приклади, коли невизначені системи мають один розв'язок, кілька розв'язків або не мають розв'язків. (Бородін & Бугай, 1973, с. 10)

1) Всі задачі формулюються як задачі про птахів. Один розв'язок одержує у випадку системи: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + \frac{y}{20} + z = 100 \end{cases}$.

Він виключає z і виражає y через x . $100 - x - y = 100 - 5x - \frac{y}{20}$, $y = 4x \cdot \frac{20}{19}$ і одержує, що $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$.

2) Абу Каміл розв'язує систему $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 100 \end{cases}$ і знаходить шість розв'язків.

3) Наводить систему $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{y}{20} + \frac{z}{3} = 100 \end{cases}$ і одержує $x = 25 + \frac{17}{160}y$. Оскільки

найменше ціле x одержується при $y = 160$, яке більше за 100, то задача не має розв'язку.

Задача Абу Каміла й ал-Кархі

Історична довідка. Ал-Кархі (ал-Караджи) (XI ст.) – багдадський математик. У його трактаті з алгебри «Аль-Фархі» зібрано всі матеріали, розроблені його попередниками. Вчений включив до цієї праці й власні теорії та розв'язання значної кількості задач, в яких використав «Арифметику» Діофанта (Бородін & Бугай, 1973, с. 213).

$$\text{Розв'язати систему рівнянь: } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}.$$

Абу Каміл зводить цю систему до квадратного рівняння відносно четвертого степеня невідомого x . Оскільки з другого і третього рівнянь $y = \frac{10}{x}$,

$z = \frac{y^2}{x} = \frac{100}{x^3}$, то з першого рівняння автор одержує $x^8 + 100x^4 - 10000 = 0$,
 $x^4 = -50 + \sqrt{12500}$, $x = \sqrt[4]{-50 + \sqrt{12500}}$.

Ал-Кархі визначає з останнього рівняння $y = \frac{10}{x}$, з другого рівняння з урахуванням попереднього $z = \frac{y^2}{x} = \frac{100}{x^3}$, тоді з першого рівняння $x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$.
 . Потому він помножає цей вираз на x^2 , а потім на x^4 , і знаходить $x^8 + 100x^4 = 10000$, тобто зводить до розв'язування квадратного рівняння відносно x^4 , одного з канонічних типів ($x^2 + ax = b$), для яких повідомляє правило. Звідки $x^4 = -50 + \sqrt{12500}$, $x = \sqrt{\sqrt{12500} - 50}$.

Це ж питання розв'язує Фібоначчі в XV розділі «Книги абака».

Задачі Ал-Кархі

1) Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y^2 \\ x^2 + 2x + 2 = z^2 \end{cases}.$$

Ал-Кархі покладає $z = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$. тоді з 2-го рівняння

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 = x^2 + 2x + 2, \quad \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + 1} + x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 2, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = x + \frac{3}{4}.$$

Виконує піднесення до квадрату і знаходить значення змінної x
 $x^2 + x + 1 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}x = \frac{7}{16}$, $x = \frac{7}{8}$. З 1-го рівняння $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $y = \frac{13}{8}$.

Оскільки $z = \frac{1}{2} + y$, визначає $z = \frac{17}{8}$. Автор не розглядає від'ємних значень (Бевз, 2004, с. 74).

2) Розв'язати систему в раціональних числах
$$\begin{cases} ax = y^2 \\ bx = z^3 \end{cases}$$

З кожного рівняння визначається значення змінної x $x = \frac{y^2}{a}$, $x = \frac{z^3}{b}$. Тому $\frac{y^2}{a} = \frac{z^3}{b}$, далі автор покладає $y = mz$ і визначає з цього рівняння $z = \frac{b}{a} m^2$. Тоді $x = \frac{b^2}{a^3} m^6$, $y = mz = \frac{b}{a} m^3$.

Розв'язок: $x = \frac{b^2}{a^3} m^6$, $y = \frac{b}{a} m^3$, $z = \frac{b}{a} m^2$, $m \in \mathbb{Z}$.

При умові $m:a$ система має цілі розв'язки. Доведення:

$m = at$, $x = a^3 b^2 t^6$, $y = a^2 b t^3$, $z = abt$, $t \in \mathbb{Z}$ (Сверчевська, 2017a).

Задача Бхаскари

Історична довідка. Бхаскара-акарія (тобто вчений Бхаскара) (1114 – 1178) – видатний індійський математик. У праці «Вінок вчення» (бл. 1150), яка складається з двох частин «Лілаваті» («Красуня») і «Біджа-ганіта» («Обчислення коренів»), викладено методи розв'язування ряду алгебраїчних задач. (Бородін & Бугай, 1973, с. 79)

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = a \\ x + y + z = b \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Перше рівняння помножимо на 2 і додамо до третього рівняння, одержимо $(x + y)^2 = z^2 + 2a$. Разом з другим рівнянням отримаємо систему:
$$\begin{cases} x + y = b - z \\ (x + y)^2 = z^2 + 2a \end{cases}$$

або
$$\begin{cases} (x + y)^2 = (b - z)^2 \\ (x + y)^2 = z^2 + 2a \end{cases}$$
. Віднімемо від першого рівняння друге $b^2 - 2bz + z^2 = z^2 + 2a$,

звідки $z = \frac{b^2 - 2a}{2b}$. Визначимо $x + y$ з другого рівняння, підставивши z :

$x + y = \frac{b^2 + 2a}{2b}$. Прийшли до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = \frac{b^2 + 2a}{2b} \\ xy = a \end{cases}$$
. Невідомі x та y

визначимо за теоремою Вієта з квадратного рівняння $t^2 - \frac{b^2 + 2a}{2b}t + a = 0$,

$t_1 = x$, $t_2 = y$.

Якщо $a = 48$, $b = 24$, то система рівнянь:
$$\begin{cases} xy = 48 \\ x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$
 . Тоді $z = \frac{b^2 - 2a}{2b} = 10$,

квадратне рівняння $t^2 - \frac{b^2 + 2a}{2b}t + a = 0$ має вигляд $t^2 - 14t + 48 = 0$, $t_1 = 6 = x$, $t_2 = 8 = y$ (Сверчевська, 2017а).

Відповідь: $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$.

Задачі Фібоначчі

Історична довідка. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170 – після 1228) – італійський математик. У XIII ст. після тривалого занепаду європейської науки з'являються теоретики математики. Леонардо Пізанський був найвидатнішим математиком цього періоду. Його «Книга абака» (1202, перероблена 1228) зіграла значну роль у поширенні математичних знань у Західній Європі. У цій книзі систематизовано знання античних математиків і викладено відкриті автором нові методи розв'язування задач. У «Книзі абака» є багато задач на розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь (Бородін & Бугай, 1973, с. 289).

1) Задача з «Книги абака», 1202 р., розділ XI

30 птахів коштують 30 монет, куріпки коштують по 3 монети, голуби по 2 і пара горобців по монеті. Запитується, скільки пташок кожного виду?

Якщо позначити x – кількість куріпок, y – голубів, z – горобців, то одержимо систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30 \end{cases}$$
 . Леонардо визначає один цілий додатній розв'язок (3; 5; 22) (Сверчевська, 2017а).

2) Докладно задачу про пташок з іншими числовими даними надав у листі до магістра Теодора.

Дехто купив 30 птахів по 30 монет. За три горобці він заплатив 1 монету, за дві горлиці – теж 1 монету, за кожного голуба – 2 монети. Скільки птахів кожного виду він купив? (Конфорович, 1981, с. 100).

Задача зводиться до розв'язування невизначеної системи рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \end{cases}$$
 , де x , y , z – кількість горобців, горлиць, голубів відповідно.

Виключаючи z , приходимо до діофантового рівняння $10x + 9y = 180$, $y = 20 - \frac{10}{9}x$, $x = 9$, $y = 10$, $z = 11$.

Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ 2x + 3y + 12z = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 30 \\ y + 10z = 120 \end{cases} \quad y = 120 - 10z,$$

 $x = 30 - y - z = 30 - 120 + 10z - z = -90 + 9z$. Оскільки $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 30$, $0 \leq z \leq 30$, то

$z=11, y=10, x=9$ або $z=12, y=0, x=18$. Другий розв'язок Леонардо не розглядає (Сверчевська, 2017а).

3) Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{xy}{x - y} = \sqrt{6} \end{cases}.$$

Розв'язання автора. З 1-го рівняння $y=10-x$ підставити в 2-ге рівняння $\frac{x(10-x)}{2x-10} = \sqrt{6}$, $x^2 + 2(\sqrt{6}-5)x - 10\sqrt{6} = 0$, $x = -\sqrt{6} + 5 + \sqrt{6-10\sqrt{6}+25+10\sqrt{6}} = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}$.

Тоді $y = 10 - (5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}) = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}$. Фібоначчі не розглядає інший корінь $x = 5 - \sqrt{6} - \sqrt{31}$, при якому $y = 10 - (5 - \sqrt{6} - \sqrt{31}) = 5 + \sqrt{6} + \sqrt{31}$.

Відповідь Фібоначчі: $x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}$, $y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}$ (Сверчевська, 2017а).

4) Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \sqrt{5} \end{cases}$$

Спосіб розв'язання Леонардо.

Нехай $\frac{y}{x} = z$, тоді з 2-го рівняння маємо $\frac{x}{y} = \sqrt{5} - z$. Оскільки $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$, то

$$z(\sqrt{5} - z) = 1, \quad z^2 - \sqrt{5}z + 1 = 0, \quad z = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{тоді} \quad z = \frac{y}{x} = \frac{10-x}{x}, \quad \frac{10-x}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Виконавши перетворення, одержимо $x = 15 - 5\sqrt{5}$, тоді $y = -5 + 5\sqrt{5}$. Другий корінь Фібоначчі не розглядає (Сверчевська, 2017а; Сверчевська, 2017b).

Задача Леонардо Фібоначчі й Абу Каміла.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Обидва вчені попередньо доводять, що $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y}$, якщо $a = x + y$. Абу

Каміл у 2-му рівнянні робить заміну $10 = x + y$ та одержує квадратне рівняння відносно $\frac{y}{x}$, з якого визначає $\frac{y}{x} = 4$. З 1-го рівняння знаходить $x = 2$, тоді $y = 8$.

Фібоначчі знаходить новий спосіб. Позначає одну частину десяти $2 - z$, а іншу $8 + z$, тоді 1-ше рівняння задовольняється, перетворивши 2-е рівняння, одержує $xy = 16$ або $(2 - z)(8 + z) = 16$, $z^2 + 6z = 0$. Леонардо вибирає $z = 0$, тоді $x = 2 - z = 2$, $y = 8 + z = 8$. Можливо це перший випадок застосування нуля як кореня рівняння. Корінь $z = -6$ Фібоначчі не розглядає.

Інший випадок $x = 8$, $y = 2$ обидва математики не розглядають.

Задача Йордана Неморарія

Історична довідка. Йордан Неморарій (помер 1236) – німецький математик і механік. У своїх працях починає більш широко, ніж попередники використовувати буквені позначення невідомих і даних чисел, проте формули не записував (Бородін & Бугай, 1973, с. 325).

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 y^2 = b \end{cases}$$

Нехай $a = 5$, $b = 36$. Автор формулюючи всі правила словесно, перетворює систему шляхом добування квадратного кореня, не розглядаючи від'ємні значення, $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$. Потім виконує перетворення $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ 4xy = 24 \end{cases}$, $(x - y)^2 = 1$,

$x - y = 1$ і приходить до лінійної системи $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Звідки $x = 3$, $y = 2$.

Задача Кристофа Рудольфа

Історична довідка. Кристоф Рудольф (бл. 1500 – 1545) – чеський математик. У 1525 р. видав підручник з алгебри, розділи якого охоплювали арифметику, відомості про дії з виразами, ірраціональні числа, рівняння 1-го та 2-го степенів. Ця книга багато разів перевидавалася, за нею вивчав математику Леонард Ейлер (Бородін & Бугай, 1973, с. 427).

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 539200 \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 78400 \end{cases}$$

Автор ділить 2-ге рівняння на 1-ше та виконує перетворення $\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 + y^2} = \frac{49}{337}$, $\frac{2xy}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{49}{337} = \frac{288}{337}$, $144(x^2 + y^2 - 2xy) + 144 \cdot 2xy = 337xy$, $144(x - y)^2 = 49xy$, $\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{49}{144}$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{337}{144}$. Приходить до квадратного рівняння відносно $\frac{x}{y} = z$: $144z^2 - 337z + 144 = 0$. Рудольф вибирає корінь $z = \frac{16}{9}$, приймає $x = 16k$, $y = 9k$, та підставивши в систему, визначає $k = 4$. Отже, $x = 64$, $y = 36$. Для кореня $z = \frac{9}{16}$, одержуємо $x = 36$, $y = 64$.

Задача Кардано

Історична довідка. Джіроламо Кардано (1501 – 1576) – італійський математик, філософ і лікар. У праці «Велике мистецтво або про правило алгебри» він вперше опублікував формули для коренів кубічних рівнянь. Він один з перших європейських математиків допускав від'ємні корені рівнянь та уявні величини (Бородін & Бугай, 1973, с. 215).

Розкласти число 10 на такі два доданки, щоб їх добуток дорівнював 40.

Авторське розв'язання. «Поділити 10 навпіл, буде 5, помножене саме на себе воно дасть 25. Потім відняти від 25 те, що одержиться при перемноженні, тобто 40, тоді залишиться (-15) . Якщо взяти від цього корінь квадратний і додати 5 та відняти 5, то одержимо частини, які при множенні дають 40. Таким чином ці частини будуть $5 + \sqrt{-15}$ і $5 - \sqrt{-15}$ » (Сверчевська, 2017b). Кардано також зазначає, що з такими числами слід виконувати дії як з виразами і вважати, що добуток $-\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} = 15$.

У сучасних позначеннях, прийнявши за x і y – шукані доданки, одержимо систему
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}.$$

З 1-го рівняння $y = 10 - x$ підставимо в 2-ге рівняння, отримаємо $x^2 - 10x + 40 = 0$, $x = 5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15}$. Шукані доданки: $5 - \sqrt{-15}$, $5 + \sqrt{-15}$.

Завдяки таким задачам у математиці з'явилися комплексні числа.

Задачі Бега Еддіна.

Історична довідка. Бега Еддін (Бехаеддін) (1547 – 1622) – іранський вчений і поет. Зберігся його твір «Сутність мистецтв числення», де зібрано правила з арифметики, алгебри, геометрії. Ця книга більше 200 років була популярним підручником у Туреччині, Ірані, Індії. У X розділі містяться деякі задачі, що приводять до систем рівнянь (Бородін & Бугай, 1973, с. 51).

1) *Розділити число 10 на такі дві частини, що якщо до кожної додати корінь квадратний з неї й одержані суми помножити, то одержиться «дане число»* (Сверчевська, 2017a).

Задача зводиться до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ (x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = n \end{cases}.$$

Автор шукає раціональні розв'язки. Для значень x і y в 1-му рівнянні можливі випадки: (1; 9), (2; 8), (3; 7), (4; 6), (5; 5). Раціональні значення $\sqrt{x}$ і $\sqrt{y}$ одержуються тільки у першому випадку. З 2-го рівняння робиться висновок, що «дане число» більше 10. Якщо покласти $n = 24$, то задача має розв'язок $x = 1$, $y = 9$ або $x = 9$, $y = 1$.

2) *Заїду обіцяно 10 без квадратного кореня Амура, а Амуру обіцяно 5 без квадратного кореня частини Заїда» Що обіцяно?*

Якщо вважати, що частина Заїда x^2 , Амура – y^2 , то прийдемо до системи рівнянь:
$$\begin{cases} x^2 = 10 - y \\ y^2 = 5 - x \end{cases}.$$

З першого рівняння $y = 10 - x^2$ підставимо в друге і одержимо рівняння: $100 - 20x^2 + x^4 = 5 - x$, $x^4 - 20x^2 + x + 95 = 0$, яке не має раціональних коренів. якщо замінити в умові число 5 на 4, то одержимо систему:
$$\begin{cases} x^2 = 10 - y \\ y^2 = 4 - x \end{cases},$$
 розв'язуємо її методом підстановки $y = 10 - x^2$, маємо рівняння: $x^4 - 20x^2 + x + 96 = 0$. Серед дільників вільного члена є його корінь $x = 3$. Ліву частину рівняння розкладаємо

на множники: $(x-3)(x^3+3x^2-11x-32)=0$. Рівняння $x^3+3x^2-11x-32=0$ підстановкою $x=z-1$ зводимо до рівняння $z^3-14z-19=0$. Цілі додатні корені цього рівняння слід шукати серед дільників вільного члена і це тільки числа 1 і 19, але вони не підходять. Отже, маємо один корінь $x=3$, тоді $y=10-x^2=10-9=1$.

Отже, частина Заїда – 9, Амура – 1.

Дану систему можна розв'язати методом введення результанта.

$$\begin{cases} x^2 + y - 10 = 0 \\ x + y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \quad R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y-10 \\ 1 & y^2-4 & 0 \\ 0 & 1 & y^2-4 \end{vmatrix} = 0, \quad (y^2-4)^2 + y - 10 = 0,$$

$y^4 - 8y^2 + y + 6 = 0$. Можна знайти лише один раціональний корінь $y=1$ отриманого рівняння. Підставивши це число в систему, маємо $\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$.

Спільний корінь рівнянь $x=3$.

3) Дехто запитав, скільки пройшло часу ночі? Йому відповіли: одна третя минулого часу дорівнює одній четвертій часу, що залишився. Запитується, скільки часу ночі пройшло і скільки ще залишилося?

Складаємо систему:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y \end{cases}, \text{ де } x - \text{ час, що пройшов, } y - \text{ час, що залишився.}$$

Авторське розв'язання.

З 1-го рівняння маємо: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 3$. Враховуючи 2-ге рівняння, одержимо:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = 3, \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)x = 3, \frac{7}{12}x = 3, x = 5\frac{1}{7}, y = 12 - 5\frac{1}{7} = 6\frac{6}{7}.$$

Отже, пройшло $x = 5\frac{1}{7}$ годин, залишилося $y = 6\frac{6}{7}$ годин.

Задача Баше де-Мезірака.

Історична довідка. Баше де-Мезірак (1581 – 1638) – французький математик. Відомі його коментарі до «Арифметики» Діофанта. Великою популярністю користувалася книга Мезірака «Збірник математичних розваг».

Троє людей мають певну суму еку кожен. Перший зі своїх грошей дає іншим двом стільки, скільки є у кожного. Після цього другий дає двом іншим стільки, скільки має кожен з них. І третій також дає двом іншим суми, які вони уже мають. Після цього в кожного залишається по 8 еку. Скільки грошей було у кожного спочатку? (Сверчевська, 2017с).

Розв'язання. Позначимо кількість грошей у кожного на початку: x, y, z . Після кожної передачі грошей кількість їх у кожного позначено в таблиці 1.

Аналіз умови

Передача грошей	I	II	III
1-ша	$x - y - z$	$2y$	$2z$
2-га	$2x - 2y - 2z$	$2y - (x - y - z) - 2z =$ $= 3y - x - z$	$4z$
3-тя	$4x - 4y - 4z$	$6y - 2x - 2z$	$4z - (2x - 2y - 2z) -$ $-(3y - x - z) =$ $= 7z - x - y$

Складемо систему рівнянь і розв'яжемо її матричним методом.

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 8 \\ 6y - 2x - 2z = 8 \\ 7z - x - y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x - y - z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ Система}$$

рівносильна матричному рівнянню $A \cdot X = B$, $X = A^{-1} \cdot B$, де $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8.$$

$$A_{11} = 20; A_{12} = 8; A_{13} = 4; A_{21} = 8; A_{22} = 6; A_{23} = 2; A_{31} = 4; A_{32} = 2; A_{33} = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$x = 13, y = 7, z = 4.$$

Задачі з "Арифметики" Л. Магницького (1669 – 1739)

1) Купили на 80 алтинів гусей качок і чирків. Гусей купували по 2 алтини за штуку, качок по 1 алтину, два чирки за алтин, а всього куплено 80 штук. Скільки якої птиці куплено?

Позначимо x, y, z – кількість гусей, качок і чирків відповідно, тоді одержимо систему рівнянь: $\begin{cases} x + y + z = 80 \\ 2x + y + \frac{1}{2}z = 80 \end{cases}, \begin{cases} x + y + z = 80 \\ 4x + 2y + z = 160 \end{cases}, \begin{cases} x + y + z = 80 \\ -2y - 3z = -160 \end{cases}$

$$y = 80 - \frac{3}{2}z, x = 80 - y - z = 80 - 80 + \frac{3}{2}z - z = \frac{1}{2}z, z = 2k, 0 \leq z \leq 52.$$

Відповідь автора: $x = 15, y = 35, z = 30$.

2) Господар відправив робітника на базар купити 20 птахів. він дав робітникові 16 алтинів. Гусей велів купувати по 1 алтину, три качки за 1 алтин, а малих чирків шість на алтин. скільки гусей, качок та малих чирків купив робітник? (Бевз, 2004, с. 37).

Позначимо x, y, z – кількість гусей, качок та чирків відповідно. Одержимо систему рівнянь, яку розв'яжемо методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z = 16 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 6x + 2y + z = 96 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 20 \\ -4y - 5z = -24 \end{cases}, \quad y = 6 - \frac{5}{4}z,$$

$x = 20 - y - z = 20 - 6 + \frac{5}{4}z - z = 14 + \frac{1}{4}z$. Оскільки z ділиться на 4, то $z = 4k$, та може бути в межах $0 \leq z \leq 4$. Маємо: $z = 0, x = 14, y = 6$ або $z = 4, x = 15, y = 1$. Автор наводить відповідь: (15; 1; 4).

Задача Безу

Історична довідка. Етьєн Безу (1730 – 1783) – французький математик. Його ім'ям названо теорему про ділення многочлена на двочлен.

Робітнику було обіцяно, що він буде одержувати по 24 су за кожен відпрацьований ним день з умовою утримання по 6 су за кожний прогуляний день. Після 30 днів виявилось, що йому нічого не прийшлося одержувати. Запитується, скільки днів він працював?

Нехай робітник працював x днів і не працював y днів, тоді одержимо систему рівнянь: $\begin{cases} x + y = 30 \\ 24x - 6y = 0 \end{cases}$. Для розв'язування системи Безу запропонував спосіб довільного множника. Перше рівняння множимо на 6 і додаємо до другого: $30x = 180, x = 6$.

Застосуємо матричний метод.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система рівносильна матричному рівнянню $A \cdot X = B, \quad X = A^{-1} \cdot B$, де $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 24 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 24 = -30, \quad A_{11} = -6, \quad A_{12} = -24, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 1,$
 $A^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -24 & 1 \end{pmatrix}.$

$$X = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 24 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 30 \\ 24 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}. \quad x = 6, \quad y = 24.$$

ОБГОВОРЕННЯ

Проведено дослідження історичних методів розв'язування рівнянь та систем рівнянь у визначних історичних задачах. Розглянуто задачі згідно хронології їх появи з давніх часів до задач вчених XVIII століття. Зосереджено увагу на розвитку методів розв'язування задач, подаються авторські й сучасні розв'язання. Виокремлено методи розв'язування рівнянь та їх систем: метод хибного припущення, метод візуальних геометричних побудов, метод алгебраїчних перетворень, метод підстановок та застосування заміни змінних, нетрадиційні авторські методи.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Навчання математики передбачає розвиток умінь розв'язувати задачі, зокрема алгебраїчні рівняння та системи рівнянь. З огляду на це ми дослідили можливості використання методів, винайдених математиками у визначних історичних задачах.

Знайомство з методами, запропонованими в цих задачах допомагає зрозуміти шляхи розвитку математичних знань і побачити роль вчених у становленні науки. Підібрано систему задач, що дає можливість усвідомити пройдений історичний шлях відкриття методів розв'язування рівнянь та їх систем. Розв'язуючи історичні задачі, слід порівнювати авторські та сучасні методи розв'язування, робити узагальнення, висувати власні ідеї розв'язання.

У подальшому слід приділити увагу підбору, систематизації та дослідженню методів розв'язування історичних задач, що стосуються розвитку геометрії та математики змінних величин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, В. Г. (2004). Практикум з історії математики. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова.
2. Бевз, В. Г. (2005). Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова.
3. Бородин, О. І., & Бугай, А. С. (1973). Біографічний словник діячів у галузі математики. К.: Вища школа.
4. Вивальнюк, А. М., & Ігнатенко, М. Я. (1996). Елементи історії математики. К.: ІЗМН.
5. Дідківська, Т. В., & Сверчевська, І. А. (2013). Визначні історичні задачі з теорії чисел. *Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. Суми, 1, 8–18.
6. Дідківська, Т. В., & Сверчевська, І. А. (2014). Розв'язування рівнянь методами геометричної алгебри. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*, 6 (78), 113–117.
7. Дідківська, Т. В., & Сверчевська, І. А. (2016). Системи рівнянь у старовинних задачах. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*, 3(85), 51-56.
8. Конфорович, А. Г. (1981). Визначні математичні задачі. К.: Радянська школа.
9. Сверчевська, І. А. (2015). Методи розв'язування рівнянь в історичних задачах. *Математика в рідній школі*, 11, 43–47.
10. Сверчевська, І. А. (2017а). Методи розв'язування нелінійних систем рівнянь в історичних задачах. *Математика в рідній школі*, 6, 39 – 43.
11. Сверчевська, І. А. (2017б). Історико-генетичний підхід у фаховій підготовці майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта*, 4(14), 82–86.
12. Сверчевська, І. А. (2017с). Історичний підхід у навчанні методів розв'язування систем лінійних рівнянь. *Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*, Суми, 2(10), 37-43.

REFERENCES

1. Bevz, V. G. (2004). Workshop in History of Mathematics. K.: Drahomanov National Pedagogical University.
2. Bevz, V. H. (2005). History of mathematics in teacher training: Monograph. Kyiv: Drahomanov National Pedagogical University.
3. Borodin, O. I., & Buhai, A. S. (1973). Biographical dictionary of prominent figures in the field of mathematics. K.: Vushcha shkola.
4. Vyvalnyuk, A. M., & Ignatenko M. YA. (1996). Elements of the History of Mathematics. K.: IZMN.

5. Didkivska, T. V., & Sverchevska, I. A. (2013). Number Theory Historical Tasks. *Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education»*. Sumy, 1, 8–18.
6. Didkivska, T. V., & Sverchevska, I. A. (2014). Equation solving using geometric algebra methods in history of mathematics. *Zhytomyr Ivan Franko State University Journal*, 6(78), 113–117.
7. Didkivska, T. V., & Sverchevska, I. A. (2016). Systems of Equations in Ancient Problems. *Zhytomyr Ivan Franko State University Journal*, 3(85), 51-56.
8. Konforovytych, A. H. (1981). Famous mathematical problems. Kyiv: Radianska shkola.
9. Sverchevska, I. A. (2015). The Methods of Nonlinear Systems of Equations in Historical Problems. *Mathematics at Native School*, 11, 43–47.
10. Sverchevska, I. A. (2017a). The Methods of Solving Nonlinear Systems of Equations in Historical Problems. *Mathematics at Native School*, 6, 39–43.
11. Sverchevska, I. A. (2017b). A combined historical and genetic approach in training of teachers of mathematics. *Physical and Mathematical Education*, 4(14), 82–86.
12. Sverchevska, I. A. (2017c). Historical approach to teaching the methods of solving systems of linear equations. *Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education»*, Sumy, 2(10), 37-43.





УДК 519.2 + 004.9

ПРОГРАМНІ ПРОДУКТИ У НАВЧАННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ПЕРШОГО РІВНЯ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Ольга ЧЕМЕРИС

chemeryswork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7099-1095>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У публікації досліджено окремі аспекти впровадження програмних продуктів для викладання класичної математичної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Визначено, що введення елементів лабораторних робіт у читанні курсу дає можливість сформувати як цифрову, так і математичну компетентності у здобувачів вищої освіти. Сучасні тенденції щодо підходів у наповненні змістом освітніх компонент навчальних планів різних спеціальностей та вивчення Стандартів вищої освіти для певних спеціальностей, зустрічі зі стейкхолдерами, досвід науковців дозволили сформулювати конкретні висновки та окреслити загальні рекомендації щодо впровадження програмних продуктів у навчання здобувачів.

Матеріали і методи. Для рекомендованого переліку програмно-технічного забезпечення освітньої компоненти «Теорія ймовірностей та математична статистика» враховано дослідження науковців щодо переваг або описання недоліків комп'ютерних програм та програмних продуктів, які можуть бути використанні для оформлення та розв'язання задач певних тем дисципліни. Для вибору програмних продуктів врахували наступні критерії: відкрите ліцензійне забезпечення, досвід роботи з програмою, простота використання, доступність щодо самонавчання в середовищі і, звичайно, відповідність та реалізація тем освітньої компоненти.

Результати. Дистанційна форма роботи зі студентами фізико-математичного факультету предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) протягом 2021-2023 сприяла розробці інструкцій для проведення занять із змішаною формою роботи та використанні програмних продуктів на практичних заняттях. Зокрема, для здобувачів спеціальності 035.10 Прикладна лінгвістика (Англійська мова) усі практичні заняття дисципліни «Теорія ймовірностей» були проведені в комп'ютерних класах.

Висновки. Виявлено, що таке прикладне наповнення освітньої компоненти дозволяє сформувати в здобувачів базові міцні теоретичні знання та практичні навички для формалізації та математичного моделювання завдань професійної підготовки, однозначно мотивує до навчання та саморозвитку щодо навичок програмування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: інформаційно-комунікаційні технології; теорія ймовірностей; математична статистика; табличний процесор; системи комп'ютерної математики; програмне середовище R; статистичні операції.

SOFTWARE PRODUCTS IN TEACHING PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS FOR FIRST-LEVEL STUDENTS

Olha CHERMERYS

chemeryswork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7099-1095>

ABSTRACT

Formulation of the problem. The publication investigates certain aspects of the implementation of software products for teaching the classical mathematical discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics" for students of the first (bachelor's) level of higher education. It has been determined that the introduction of elements of laboratory work in the course reading makes it possible to form both digital and mathematical competencies in higher education students. Current trends in approaches to filling the content of the educational components of the curricula of various specialties and the study of Higher Education Standards for certain specialties, meetings with stakeholders, and the experience of scientists have allowed us to formulate specific conclusions and outline general recommendations for the implementation of software products in the education of applicants.

Materials and methods. For the recommended list of software and hardware for the educational component "Probability Theory and Mathematical Statistics", the research of scientists on the advantages or description of the disadvantages of computer programs and software products that can be used to design and solve problems of certain topics of the discipline was taken into account. The following criteria were taken into account when selecting software products: open source software, experience with the program, ease of use, accessibility for self-study in the environment, and, of course, relevance and implementation of the topics of the educational component.

Results. During 2021-2023, the remote form of work with students of the Faculty of Physics and Mathematics, specialty 014.04 Secondary Education (Mathematics), contributed to the development of instructions for conducting classes with a mixed form of work and the use of software products in practical classes. In particular, for applicants for the specialty 035.10 Applied Linguistics (English), all practical classes in the discipline "Probability Theory" were conducted in computer classes.

Conclusions. It has been found that such an applied content of the educational component allows students to form basic solid theoretical knowledge and practical skills for formalizing and mathematical modeling of professional training tasks, and clearly motivates them to learn and develop programming skills.

KEYWORDS: information and communication technologies; probability theory; mathematical statistics; spreadsheet processor; computer mathematics systems; R software environment; statistical operations.

ВСТУП

Постановка проблеми. Однією з важливих проблем сучасної університетської освіти є набуття здобувачами вищої освіти відповідного рівня математичної та інформаційно-цифрової компетентностей за умови зміни співвідношення між аудиторною роботою та самостійною з відповідних дисциплін. (Концепція, 2011). Одним з методів вирішення цієї проблеми є використання комп'ютерних систем у навчанні поряд із традиційними заняттями з математики. У перших робіт, у яких описувалися теоретичні і практичні основи використання подібних систем, можна назвати (Спірін, 2008).

Підготовка здобувачів вищої освіти на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету імені Івана Франка за спеціальністю 014 Середня освіта, зокрема предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика), зумовлена соціальним замовленням на підготовку

висококваліфікованих фахівців для забезпечення якісного викладання математичних дисциплін у школі та інших навчальних закладах міста й області (Відомості про самооцінювання, 2019).

Основою загальної та професійної підготовки майбутніх учителів математики є фундаментальна класична підготовка з можливістю практично реалізовувати одержані знання. Поєднання математичної та гуманітарної складових сприяє професійному розвитку здобувачів освіти.

Перелік освітніх компонент навчального плану підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта, зокрема предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика), реалізує рекомендовані програмні результати навчання, зокрема (Проект Стандарту вищої освіти, 2023):

- спілкуватися українською та іноземною мовами у професійному середовищі, володіти фаховою термінологією та професійним дискурсом, дотримуватися етики ділового спілкування;
- вирішувати завдання, що відповідають кваліфікації, застосовувати отримані знання для розв'язання педагогічних, навчально-виховних і науково-методичних завдань з урахуванням вікових та індивідуальних, соціально-психологічних особливостей учнівських колективів і конкретних педагогічних ситуацій;
- застосовувати знання з психології у певних видах діяльності; аналізувати та прогнозувати поведінку учнів; застосовувати методики діагностики різних психологічних особливостей особистості відповідно до її віку; добирати методи корекції психологічних утворень;
- розробляти та застосовувати інноваційні методики навчання, вдосконалювати зміст освіти; модернізувати наявні форми і методики виховання;
- зберігати та примножувати досягнення і цінності суспільства на основі розуміння місця предметної області у загальній системі знань, використовувати різні види та форми рухової активності для ведення здорового способу життя; розуміти основні принципи здорового способу життя та вміти застосовувати їх для підтримки власного здоров'я та працездатності;
- знати основи педагогічної майстерності, володіти творчим підходом до організації професійної діяльності; саморегулювати власну поведінку, позиціонувати комплекс інтелектуальних та моральних якостей, інтелігентність;
- розуміти і реалізувати свої права і обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності вільного демократичного суспільства, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні;
- розуміти концепцію збереження і зміцнення здоров'я, формування здорового способу життя; володіти необхідним рівнем знань, вмінь та навичок з долікарської допомоги;
- застосовувати сучасні інформаційно-комунікаційні та цифрові технології у професійній діяльності;
- розуміти значення фізичних законів, теорій та застосовувати їх до пояснення конкретних явищ; розв'язувати прикладні задачі; мати уявлення про сучасний стан розвитку фізики;

- виконувати аналіз математичного твердження, використовувати стиль математичного мислення та логічні операції для утворення правильних фактів та формулювання висновків; володіти математичною культурою записів;
- знати та використовувати базові поняття для розв'язання практичних та прикладних задач як у межах освітнього компонента, так і міждисциплінарного характеру;
- знати логічні основи побудови математичної теорії; розуміти предмет та володіти основними поняттями, теоретичними основами, базовими методами класичних розділів математики;
- розуміти загальні питання теоретичних і організаційних основ процесу навчання математики; знати й демонструвати методику вивчення окремих розділів і тем шкільного курсу математики; досліджувати процес навчання математики з метою підвищення його ефективності та якості;
- уміти розв'язувати задачі різних рівнів складності шкільного курсу математики; демонструвати алгоритмічну культуру;
- оцінювати випадкові явища та володіти методами зведення реальної задачі до математичної; застосовувати відповідний теоретичний матеріал та статистичні методи до обробки й аналізу даних;
- уміти опрацьовувати, аналізувати та систематизувати науково-методичну інформацію, дотримуватись кодексу академічної доброчесності для представлення результатів;
- розумітись на сучасних тенденціях науки та освіти, урахувувати та впроваджувати здобуті знання в навчальному процесі. орієнтуватись в актуальних дослідженнях для галузі природознавства та техніки;

Аналіз актуальних досліджень.

Упровадженню інформаційно-комунікаційних технологій у процес вивчення математики в Україні, починаючи з середини 90-х років минулого сторіччя, приділялась значна увага. Результатом чого стала розробка різних інноваційних засобів (нпрд, Gran, Gran-2D, Gran3-D, DG та відповідного науково-методичного забезпечення) (Семеніхіна & Друшляк, 2014). Але конкретних рекомендацій щодо використання того чи іншого програмного продукту Міністерство освіти та науки не надає. Сформований лише перелік електронних ресурсів із відповідністю до дисциплін математичного циклу (Наказ МОН України, 2019).

На сучасному етапі окремі аспекти проблеми використання інформаційно-комунікаційних технологій у викладанні математики описали відомі науковці, викладачі-практики, зокрема, Олександр Вітюк, Олена Гриб'юк, Мирослав Жалдак, Ірина Клеопа, Валерій Ракута та інші.

Акцент у дослідженнях цих науковців був у дослідженні переваг або описанні недоліків комп'ютерних програм, які можуть бути використанні при розв'язанні різних типів математичних задач (Богач, 2020).

Мета статті – описати програмно-технічне забезпечення освітньої компоненти «Теорія ймовірностей та математична статистика» та його використання при розв'язуванні задач конкретних тем.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Порівнюючи зміст підготовки у 2015 і 2023 роках, маємо такі моменти:

1) *у переліку та змісті освітніх компонент*: співвідношення між обов'язковими та вибірковими компонентами майже без змін; у наповненні навчального плану цикл фундаментальних математичних дисциплін займає щільне місце, але акцент у підготовці проставлено на методичний та практичний аспекти, зокрема, уведено нові види навчальних практик, які дозволять сформувати потрібні компетентності випускників (обчислювальну, з шкільного курсу математики, з вищої математики, з виготовлення навчально-методичного забезпечення), без змін залишилась психолого-педагогічна, але збільшено термін проходження виробничої практики; також додано дисципліни загальної підготовки, які допоможуть адаптуватись молодим фахівцям, зокрема, основи педагогічної майстерності, правова культура особистості, історико-громадянські студії; основи медичних знань та охорона життєдіяльності; охорона праці в галузі.

2) *у переліку компетентностей*: вийшли на конкретизацію у формулюванні загальних та спеціальних компетентностей та програмних результатів за відповідною освітньою програмою, що дозволило зменшити їх перелік за рахунок укрупнення, включено також здоров'язбережувальні, толерантні та ціннісні можливості у підготовці майбутніх фахівців.

Стандарти вищої професійної освіти для спеціальностей, пов'язаних з інформаційними технологіями, містять важливі вимоги щодо того, що викладання математичних дисциплін у вищій школі необхідно супроводжувати комп'ютерними лабораторними практикумами. Вони призначені для закріплення теоретичних знань та вироблення навичок роботи з математичними моделями, реалізованими за допомогою спеціальних програмних засобів (Кручиненко, 2021). У процесі навчання класичним математичним дисциплінам у закладах вищої освіти зараз найчастіше використовуються відкриті програмні продукти, які надають широкі можливості викладачеві для впровадження сучасних освітніх технологій у навчальний процес (Надточій, 2008). Використання програмних середовищ та інформаційних технологій при викладанні дисциплін математичного циклу допомагають осучаснити процес навчання та перевірки якості засвоєння теоретичного матеріалу (Жалдак & Франчук, 2020).

Нові засоби навчання дозволяють органічно поєднувати інформаційно-комунікаційні, особистісно орієнтовані технології з методами творчої та пошукової діяльності. Основним засобом інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) будь-якої системи освіти є персональний комп'ютер, програмне забезпечення якого (MS Word, Excel, Power Point, Microsoft Publisher) дозволяє педагогу значно розширити рамки проведення заняття чи уроку, зробити його більш цікавим (Роїк та ін., 2017). Найпоширенішими формами використання ІКТ в освітньому процесі є створення презентацій, робота з інтерактивною дошкою, ресурсами мережі Інтернет, навчальними програмами, у тому числі авторськими, та багато інших (Gökçe & Güner, 2022).

Інформаційні технології можуть бути використані на різних етапах уроку математики:

- ✓ під час самостійного навчання з відсутністю вчителя або запереченням його діяльності;
- ✓ як часткова заміна (вибіркове використання додаткового матеріалу);
- ✓ із використанням діагностичних та контролюючих матеріалів;
- ✓ для виконання домашніх самостійних та творчих завдань;
- ✓ для цільових обчислень чи побудов графіків;
- ✓ як програми, що імітують досліди та лабораторні роботи;
- ✓ для впровадження ігор, квестів, вікторин тощо;
- ✓ як заміна інформаційно-довідкових матеріалів тощо.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Програма вивчення освітньої компоненти «Теорія ймовірностей та математична статистика» для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти в Житомирському державному університеті імені Івана Франка відповідає освітньо-професійній програмі Середня освіта (Математика).

Метою курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» є розвинення ймовірнісного мислення, засвоєння термінології та понять теорії випадкових процесів, статистичного опису процесів і систем, які носить масовий характер та здатні повторюватись при виконанні певних умов; систематизація, обробка й аналіз даних спостереження явищ з метою виявлення та використання у науково-практичній діяльності характерних статистичних закономірностей (Кушлик-Дивульська & Горбачук, 2023).

Основне завдання вивчення освітньої компоненти «Теорія ймовірностей та математична статистика» полягає у формуванні теоретичних знань та практичних навичок використання теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів для формалізації та математичного моделювання прикладних завдань щодо їх ефективної програмно-апаратної реалізації (Пістунов & Турчанінова, 2023), зокрема:

- ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей, допомога у набутті первинних навичок застосування теоретичного матеріалу на практиці;
- формування вміння проводити комплексний аналіз математичних моделей, що описують реальні явища та процеси;
- встановлення законів розподілу різних випадкових змінних, одержаних у результаті статистичного спостереження;
- перевірка статистичних гіпотез, які дослідник висуває за визначеної сукупності даних, та оцінка невідомих параметрів різних розподілів.

Дистанційна форма роботи зі студентами фізико-математичного факультету предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) дозволила урізноманітнити практичні заняття з навчальної дисципліни, увівши елементи лабораторних занять (Железнякова та ін., 2016). Були розроблені інструкції для проведення занять із змішаною формою роботи та використанням програмних продуктів.

ОБГОВОРЕННЯ

Опишемо програмно-технічне забезпечення освітньої компоненти класичної освітньої компоненти «Теорія ймовірностей та математична

статистика» та наведемо приклади оформлення та розв'язання базових задач, які дозволять опрацювати потрібний теоретичний матеріал (Горошко & Вінниченко, 2008).

Табличний процесор MS Excel – спеціальне програмне забезпечення (є частиною пакета Microsoft Office), яке призначене для обробки даних, що подаються у табличній формі, має надзвичайно широкі можливості, зокрема:

- 1) створення таблиць даних, між комірками можна встановити зв'язки за допомогою формул;
- 2) подання даних наочно, за допомогою графіків чи діаграм різної форми;
- 3) проведення розрахунків як за допомогою формул, так і функцій з спеціальних тематичних бібліотек;
- 4) розв'язування оптимізаційних та пошукових задач;
- 5) створення наборів даних та фільтрів для впорядкування інформації;
- 6) обмін та вставка даних у всі пакети Microsoft Office та інші прикладні програми (Пономарьова & Сусліченко, 2020).

• *Приклад задачі на обчислення ймовірностей (обираємо різні комбінації для деякої множини дискретних об'єктів)*

Задача 1. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з букв: Ю, М, О, Л, В, К, Я, Т, С. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо слово ВОЛЯ?

Розв'язання. Кількість елементарних подій множини Ω буде n :

$$n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі послідовно букв В, О, Л, Я, дорівнює одиниці ($m = 1$) (позначимо цю випадкову подію через D). Тоді за класичною схемою обчислення ймовірностей маємо:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}.$$

Використаємо **табличний редактор MS Excel** для одержання результату для задачі 1 (див. рис. 1). Виконуємо дії у такій послідовності, де в поле «число» — потрібно вказати невід'ємне ціле число (n), а в поле «кількість вибраних» — невід'ємне ціле число (k):

Вставка⇒Функція⇒Статистичні⇒(...Обираємо майстер-функцію...)

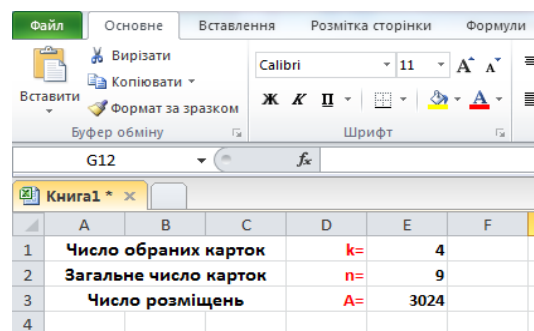
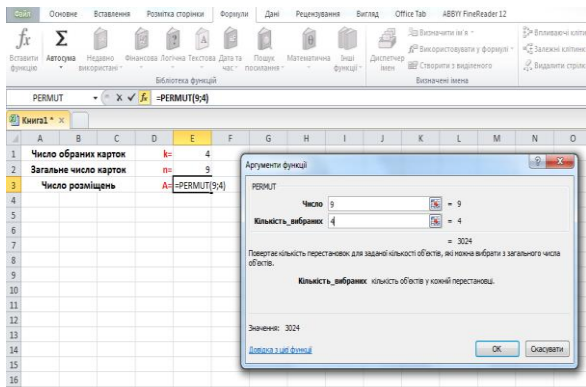


Рис. 1. Знаходження числа розміщень (MS Excel)

До речі, назви функцій для даного редактору – це скорочена аббревіатура від перекладу терміну англійською мовою. Таким чином, маємо реалізацію при вивченні математичного розділу **іношомовної компетентності** (Лов'янова & Лов'янова, 2018) (див. табл. 1):

Таблиця 1

Деякі статистичні функції та їх опис

англійською	опис
<u>AVERAGE</u>	обчислює середнє арифметичне аргументи
<u>COMBIN</u>	обчислює кількість комбінацій для заданої кількості об'єктів
<u>CONFIDENCE</u>	надає довірчий інтервал для середнього значення за генеральною сукупністю
<u>DPRODUCT</u>	перемножає значення певного поля
<u>DSTDEV</u>	оцінює стандартне відхилення для вибірки з виділених даних
<u>DVAR</u>	оцінює дисперсію щодо вибірки з виділених записів бази даних
<u>EXPONDIST</u>	надає значення згідно експонентного розподілу
<u>FACT</u>	обчислює факторіал числа
<u>FALSE</u>	перевіряє логічне значення щодо хибності
<u>FORECAST</u>	обчислює значення лінійного тренду
<u>MODE</u>	шукає значення моди для набору даних
<u>NORM.DIST</u>	надає значення згідно нормального інтегрального розподіл
<u>PERMUT</u>	обчислює кількість перестановок для заданої кількості об'єктів
<u>POISSON</u>	надає значення згідно розподілу Пуассона
<u>PROB</u>	обчислює ймовірність для межових значень діапазону
<u>STANDARDIZE</u>	надає нормалізоване значення
<u>STDEV</u>	оцінює стандартне відхилення для вибірки
<u>VAR</u>	оцінює дисперсію для вибірки

З повним переліком статистичних функцій можна познайомитись на офіційній сторінці Підтримки для Microsoft 365 (Пістунов & Турчанінова, 2023). Тепер використаємо он-лайн калькулятор для обчислення результату для задачі 1, наприклад, оберемо калькулятори **PLANETCALC** (див. рис. 2) та **OnlineMSchool** (див. рис. 3):

Рис. 2. Знаходження елементів комбінаторики за допомогою онлайн калькулятора PLANETCALC

правилах вводу чисел.'"/>

Рис. 3. Знаходження елементів комбінаторики за допомогою онлайн калькулятора OnlineMSchool

- *Приклад створення власного калькулятора для обчислення ймовірностей (використовуємо основні теореми теорії ймовірностей)*

Задача 2. Пасажир може звернутись за квитком в одну з трьох кас. Ймовірність звернення в кожну касу залежить від її місцезосташування. Ці ймовірності співвідносяться як 1:7:2. Ймовірність того, що до моменту звернення в касі всі квитки будуть продані, дорівнює для першої каси 0,2, для другої – 0,1, для третьої – 0,15. Пасажир підош до однієї з кас та купив квиток. Порівняйте ймовірності того, що він купить квиток в конкретній касі?

Розв'язання. Нехай подія А – купівля квитка в одній з кас. Позначимо звернення до кас 1, 2 та 3 – H_1 , H_2 та H_3 (наші гіпотези). Ймовірності гіпотез H_1 , H_2 та H_3 знаходимо за класичним означенням ймовірності:

$$P(H_1) = \frac{1}{1+7+2} = 0,1, \quad P(H_2) = \frac{7}{1+7+2} = 0,7, \quad P(H_3) = \frac{2}{1+7+2} = 0,2.$$

За умовою задачі дано умовні ймовірності протилежних подій, тому виконуємо наступне віднімання:

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0,2 = 0,8, \quad P_{H_2}(A) = 1 - 0,1 = 0,9, \quad P_{H_3}(A) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

За формулою повної ймовірності обчислюємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = 0,1 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,85 = 0,88.$$

Ймовірності того, що пасажир купить квиток в конкретній касі, обчислюємо за формулами Байєса:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot 0,8}{0,88} = \frac{1}{11}$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,88} = \frac{63}{88}$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,85}{0,88} = \frac{17}{88}$$

Оскільки серед обчислених ймовірностей $P_A(H_2) = \frac{63}{88}$ найбільша, то найімовірніше, що пасажир купить квиток у другій касі.

Для швидких обчислень у типових задачах на формулу повної ймовірності та формулу Байєса використаємо табличний редактор MS Excel і підготуємо комірки для внесення даних (див. рис. 4 та 5).

1	Калькулятор для обчислень ймовірностей							
2								
3	гіпотези	ймовірності гіпотез		умовні ймовірності		Оцінка гіпотез (за формулою Байєса)		
4	1	0		0		#ДЕЛ/0!		
5	2	0		0		#ДЕЛ/0!		
6	3	0		0		#ДЕЛ/0!		
7								
8	перевірка	0						
9								
10	подія А	0						
11	(за формулою повної ймовірності)							

Рис. 4. Шаблон для розв'язування задач на формулу повної ймовірності та формулу Байєса

H5											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Калькулятор для обчислень ймовірностей										
2											
3	гіпотези	ймовірності гіпотез			умовні ймовірності			Оцінка гіпотез (за формулою Байєса)			
4	1	0,1			0,8			0,090909			
5	2	0,7			0,9			0,715909			
6	3	0,2			0,85			0,193182			
7											
8	перевірка	1									
9											
10	подія A	0,88									
11	(за формулою повної ймовірності)										

Рис. 5. Результати обчислень у створеному шаблоні до задачі 2

Задача 3. У кошику лежить 8 яблук та 4 сливки (різносортних). Який склад фруктів серед вибраних п'яти має найбільшу ймовірність?

Розв'язання. У цілому, результатом вибору буде виймання 5 фруктів із загальної кількості – 12 (вибірка без повторів та не впорядкована). Ймовірність будемо обчислювати за класичною схемою, врахувавши різні варіанти вибору

$$\text{фруктів: } P(A) = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^m}{C_{n_1+n_2}^{k+m}}.$$

яблука (k)	сливки (m)	разом (k+m)
1	4	5
2	3	5
3	2	5
4	1	5
5	0	5
≤ 8	≤ 4	

Обчислимо ймовірності для різних варіантів вибору фруктів у табличному редакторі MS Excel. Проміжний результат бачимо на екрані (див. рис. 6 та 7).

ЧИСЛКОМБ										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Умова			Вибір						
2	яблука	0		яблука	0					
3	сливи	0		сливи	0					
4										
5	шукана ймовірність	=(ЧИСЛКОМБ(B2;E2)*ЧИСЛКОМБ(B3;E3))/ЧИСЛКОМБ(B2+B3;E2+E3)								

Рис. 6. Шаблон для розв'язування задачі 3

A	B	C	D	E
Умова			Вибір	
яблука	8		яблука	1
сливи	4		сливи	4
шукана ймовірність		0,010101		

Рис. 7. Проміжний результат обчислень у створеному шаблоні до задачі 3

Залишається лише переписати з нашого «калькулятора» відповіді:

$$P(k=1, m=4) = \frac{C_8^1 \cdot C_4^4}{C_{12}^5} = 0,010101$$

$$P(k=2, m=3) = \frac{C_8^2 \cdot C_4^3}{C_{12}^5} = 0,141414$$

$$P(k=3, m=2) = \frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5} = 0,424242$$

$$P(k=4, m=1) = \frac{C_8^4 \cdot C_4^1}{C_{12}^5} = 0,353535$$

$$P(k=5, m=0) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^0}{C_{12}^5} = 0,070707$$

Отже, для наших вихідних даних (8 яблук та 4 сливи) найбільш ймовірно обрати набір 3 яблука та 2 сливи.

Задача 4. Під час друкування сторінки тексту (2000 символів) оператор друкує неправильний символ з імовірністю 0,001. Знайдіть імовірність того, що під час друкування сторінки тексту буде зроблено більше ніж три помилки.

Розв'язання задачі не складне, адже в обчисленні використовуємо наближення для схеми Бернуллі (формулу Пуассона). За звичай, усі посібники містять в додатках таблицю значень функції Пуассона (див. рис. 8).

Таблиця значень функції

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k	λ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
2	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
3	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
4	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398

k	λ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
5	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
6		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
7			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
8					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039

Рис. 8. Таблиця значень функції Пуассона

Оформимо умову в табличному редакторі MS Excel та обчислимо шукану ймовірність як протилежну до суми ймовірностей для сталої кількості помилок за формулою Пуассона:

Подія A**Подія, протилежна до події A**

«більше ніж три помилки»

⇒

«помилки може бути одна, дві, три та жодної»

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \text{ де } \lambda = n \cdot p.$$

Тепер довносимо формули для обрахунків ймовірностей. Остаточні результати подано на рис. 9:

E6 X ✓ fx =(EXP(-\$B\$3)*\$B\$3^E5)/ФАКТР(E5)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	кількість символів	2000							
2	ймовірність	0,001							
3	обчислимо число λ	2							
4									
5	k	0	1	2	3			P(A)	0,142877
6	p	0,135335	0,270671	0,270671	0,180447				
7									

Рис. 9. Розв'язання задачі 4 (MS Excel)

Збережемо файл з формулами та матимемо власний калькулятор для обчислень ймовірностей подій за формулою Пуассона.

- Приклад задачі на запис функції розподілу ймовірностей дискретних випадкових величин

Задача 5. По мішені виконують чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення в разі одного пострілу дорівнює 0,25. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості влучень у мішень та обчислити його основні числові характеристики. Визначити функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Розв'язання задачі оформимо відразу в табличному редакторі MS Excel, використавши вбудовану функцію «БІНОМ.РАСП» (тут за замовчанням в налаштуваннях назв функцій маємо російську мову):

1) для заповнення значень рядочка ймовірностей в ряді розподілу відповідно для варіант від 0 до 4:

=БІНОМ.РАСП(...;4;0,25;0);

2) для заповнення значень стовпчика значень функції розподілу ймовірностей для проміжків варіант:

=БІНОМ.РАСП(...;4;0,25;1) (див. рис. 10)

L13												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
8	n	4										
9	p	0,25										
10												F(x)
11	xi	0	1	2	3	4		перевірка:			x<=0	0
12	pi	0,316406	0,421875	0,210938	0,046875	0,003906		1			0<x<=1	0,316406
13											1<x<=2	0,738281
14	математичне сподівання:					1					2<x<=3	0,949219
15	дисперсія:					0,75					3<x<=4	0,996094
16	середнє квадратичне відхилення:					0,866025					x>4	1
17												

Рис. 10. Розв'язання задачі 5 (MS Excel)

Для побудови графіка функції розподілу $F(x)$ використаємо діаграми, які пропонує редактор. Приклади обраних типів діаграм наведено на рис. 11:



Рис. 11. Функція розподілу ймовірностей (до задачі 5)

Також з прикладами застосування табличного редактора для вивчення розподілів можна ознайомитись у посібнику (Коровкіна, 2018).

Важливим аспектом впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у викладанні математики є використання прикладних програм навчального призначення, зокрема, систем комп'ютерної математики (СКМ) (Hamzah & Hidayat, 2022).

Ми зупинимось на використанні середовища GeoGebra (Ракута, 2016), яке поєднує в собі функціональні можливості й інструменти, переважна більшість з

яких легко опановується. Цей програмний продукт призначений для вивчення і викладання математики в середніх та вищих навчальних закладах, який поєднує динамічну геометрію, алгебру, математичний аналіз і статистику. До технічних особливостей GeoGebra відносять:

- можливість створення готових моделей;
- зрозумілий графічний інтерфейс та його налаштування;
- можливості роботи з різними операційними системами.

Використання на уроках систем комп'ютерної математики, таких як GeoGebra, змінює традиційні методики викладання, дозволяючи підвищити інтерес до складного предмету та сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу. Практика щодо використання програмних середовищ для різних освітніх компонент, зокрема, математичних, впродовж останніх років активно реалізується у Житомирському державному університеті імені Івана Франка для здобувачів першого та другого рівнів вищої освіти наступних предметних спеціальностей: 014.04 Середня освіта (Математика), 014.09 Середня освіта (Інформатика), 035.10 Прикладна лінгвістика (Англійська мова) та є обов'язковою частиною навчальної практики з теорії та методики навчання математики здобувачів другого рівня вищої освіти освітньої програми Середня освіта (Математика та інформатика).

Використання різних додатків GeoGebra дозволяє оптимізувати навчальний процес, проводити індивідуальну роботу, використовуючи портативні девайси здобувачів освіти, сприяє підвищенню ефективності навчання, активізує пізнавальну діяльність та сприяє формуванню алгоритмічного стилю мислення, створює можливість наочно демонструвати результати своєї навчальної діяльності, створення інтерактивної моделі, інтерактивні завдання з моделювання різних явищ тощо.

Можливості середовища можуть бути також використані для створення конкретних моделей-завдань, які містять пояснення матеріалу з покроковим алгоритмом побудов (Ракута, 2016).

За посиланням <https://www.geogebra.org/?lang=uk> переходимо на головну сторінку *Математичних Додатків GeoGebra* та обираємо вкладку *GeoGebra Класична*. На рис. 12 подамо підказки для подальшої роботи в середовищі.

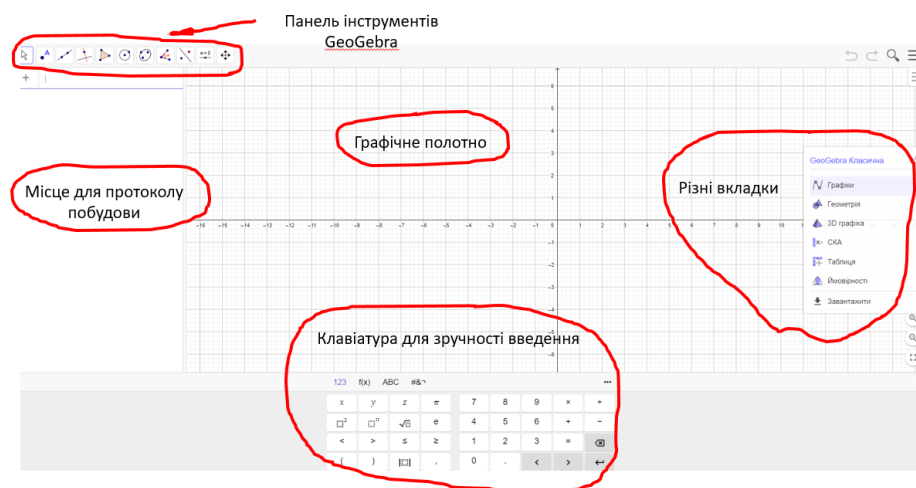


Рис. 12. Назви частин 2D-полотна у вкладці *GeoGebra Класична*

• *Приклад задачі за темою «Неперервні випадкові величини»*

Задача 6. Запишіть вигляд та побудуйте графік щільності розподілу для неперервної функції розподілу ймовірностей випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{6}x^2, & 0 < x \leq 2 \\ ax^2 + 2x - 2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Обчисліть також ймовірність $P(1,5 < X < 2,5)$.

Розв'язання. Щільність розподілу (ймовірностей) випадкової величини знайдемо як похідну від функції розподілу: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x, & 0 < x \leq 2 \\ 2ax + 2, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Для знаходження невідомого параметра a застосуємо умову нормування:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 \frac{1}{3}x dx + \int_2^3 (2ax + 2) dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = \frac{1}{6}x^2 \Big|_0^2 + (ax^2 + 2x) \Big|_2^3 = \\ &= \frac{4}{6} - 0 + (9a + 6) - (4a + 4) = \frac{8}{3} + 5a = 1 \end{aligned}$$

Маємо, що $a = -\frac{1}{3}$. Отже, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x, & 0 < x \leq 2 \\ -\frac{2}{3}x + 2, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$

Графік щільності розподілу випадкової величини побудуємо в середовищі GeoGebra (полотно *Геометрія*) (див. рис. 13).

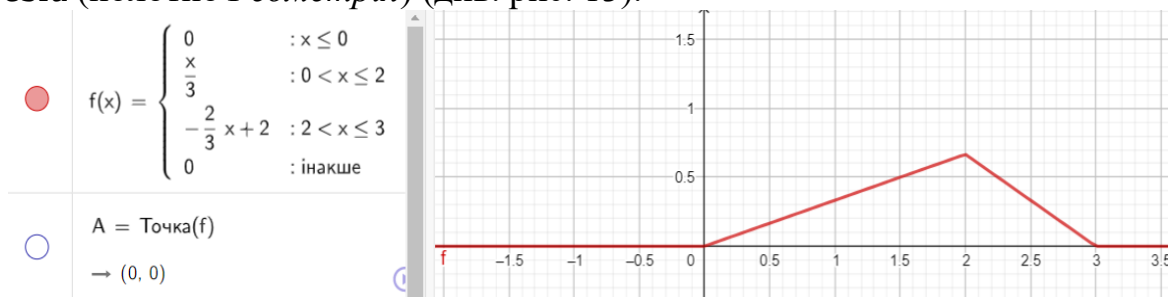
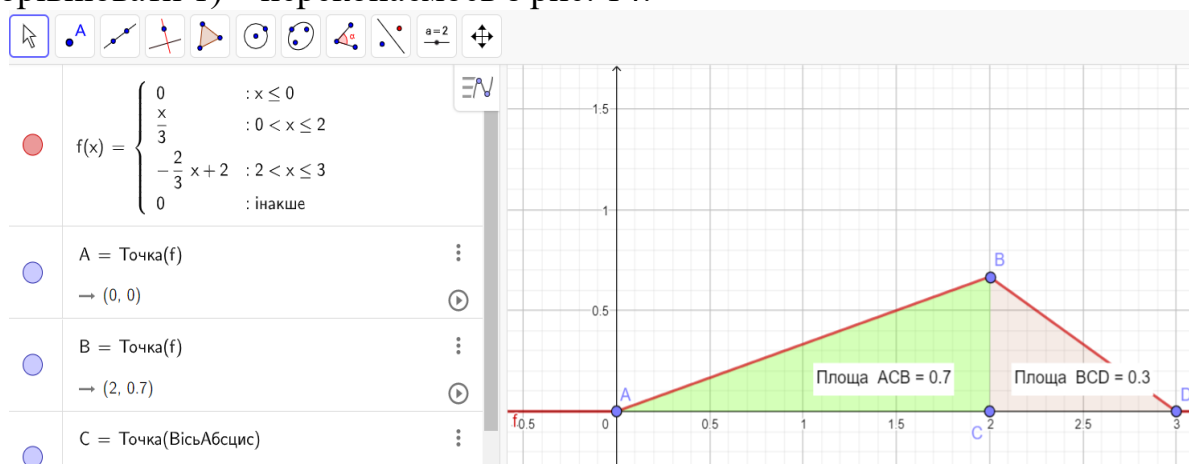


Рис. 13. Графік щільності розподілу випадкової величини до задачі 6

До речі, для того щоб записати в протокол побудови кусково-задану функцію, то використовуємо конструкцію *Якщо* ($\langle \text{Умова} \rangle$, $\langle \text{То} \rangle$, $\langle \text{Інакше} \rangle$).

Ми можемо також зробити перевірку правильності обчислень, зокрема, умови нормування (площа фігури, обмежена графіком даної функції та віссю Ох, має дорівнювати 1) – переконаємось з рис. 14:



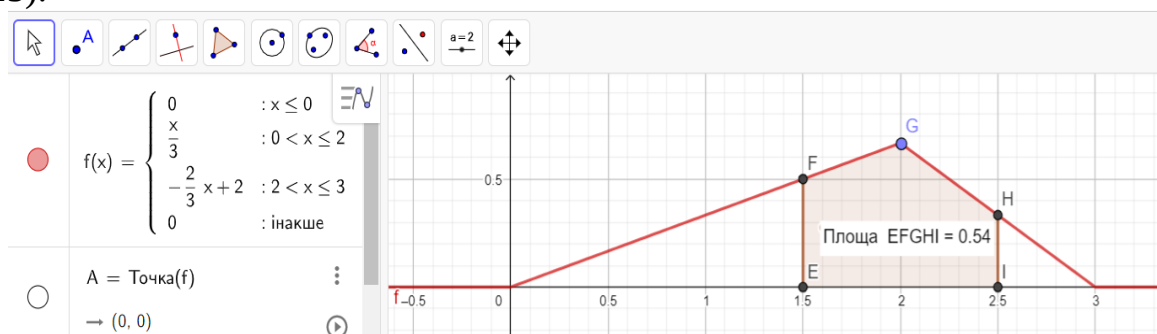
Для обчислення ймовірності $P(1,5 < X < 2,5)$ скористаємось означенням:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Підставимо

$$P(1,5 < X < 2,5) = F(2,5) - F(1,5) = \left(-\frac{1}{3} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1,5^2 \right) \approx 0,5417.$$

Виконаємо перевірку правильності обчислень, скориставшись графіком щільності розподілу ймовірностей. Відповідь чисельно – це площа фігури, обмежена графіком даної функції, прямими $x = 1,5$, $x = 2,5$ та віссю Ох (див. рис. 15).



• Приклади задач на геометричну ймовірність

Задача 7. (задача про зустріч). Сестра та брат (Орися та Назар) домовились зустрітися в певному місці між 19 і 20 год. Якщо Назар приходить перший, він чекає Орисю 30 хв і йде з місця зустрічі. Якщо першою прийде Орися, вона чекає Назара 10 хв і йде з місця зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться в призначеному місці?

Розв'язання. Це класична задача на застосування геометричної ймовірності (коли множина елементарних подій є незліченою). Опишемо наші міркування та проілюструємо проміжні кроки у розв'язанні.

Нехай a та b – час (у хвиликах) приходу на зустріч брата та сестри, відповідно відрахований від 19-00. Задамо відповідні параметри a (для Орісі) та b (для Назара), використовуючи інструмент *Повзунок*. За умовою внесемо дані, що $a \in [0; 60]$, $b \in [0; 60]$, а також у налаштуванні для них поставимо позначку *Випадкове число*. Частина площини, обмежена квадратом, побудованим на осях з вершиною в початку координат і довжиною сторони 60, складається з точок $(a;b)$, які можуть характеризувати час приходу Орісі та Назара відповідно (див. рис. 16).

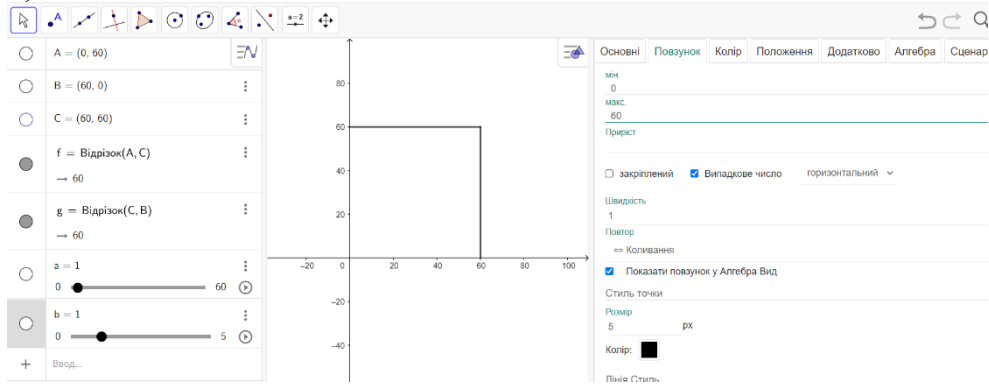


Рис. 16. Налаштування області для значень з умови (етап 1)

За умовою задачі зустріч відбудеться, якщо виконуються аналітичні умови $(a \leq b \leq a + 10) \vee (b \leq a \leq b + 30)$. Побудуємо точку з координатами $(a;b)$. У властивостях точки у вкладці *Додатково* зазначимо *Умови відображення об'єкту* $(a \leq b \leq a + 10) \vee (b \leq a \leq b + 30)$, тобто умову, за якої відбудеться зустріч.

Укажемо у властивостях точки *Залишити слід* і анімуємо параметри a та b . Також у наступному командному рядку задамо логічну функцію, яка дорівнює «true», якщо виконуються умови для зустрічі, і яка дорівнює «false», якщо побачення не відбудеться, тобто наші умови $(a \leq b \leq a + 10) \vee (b \leq a \leq b + 30)$. Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитися точка $(a;b)$ для того, щоб зустріч відбулась (див. рис. 17).

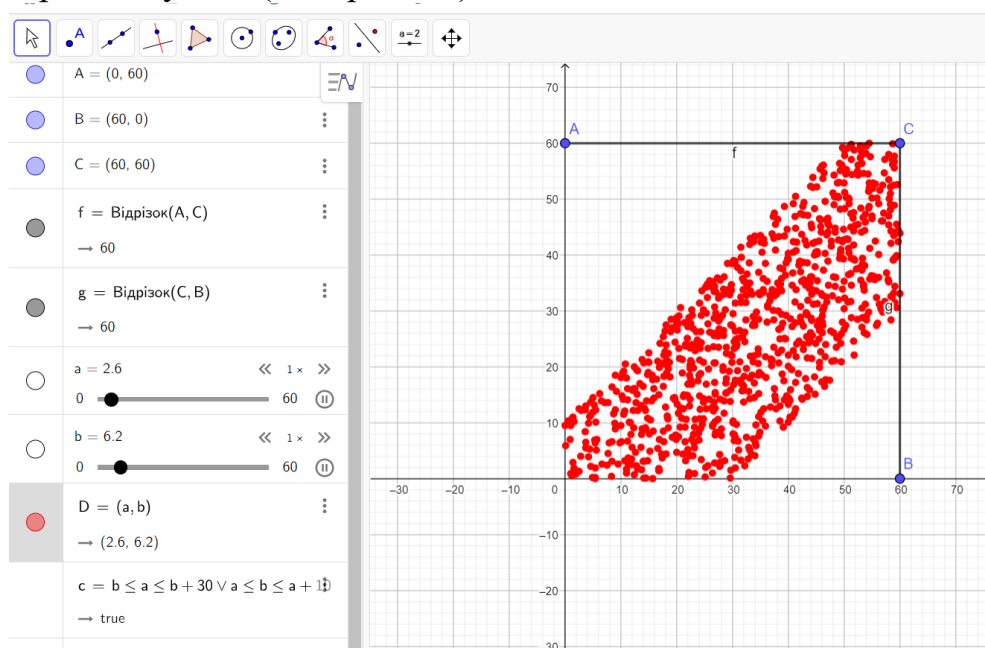


Рис. 17. Слід точки з координатами $(a;b)$ за умови, що зустріч відбулася (етап 2)

Після одержання результатів комп'ютерного експерименту розв'яжемо задачу класичним способом, використовуючи геометричне означення ймовірності.

Побудуємо фігуру (шестикутник), точки якої задовольняють нерівності:

$$x \leq y \leq a + 10 \vee y \leq x \leq y + 30 \vee 0 \leq x \leq 60 \vee 0 \leq x \leq 60.$$

Побудуємо квадрат зі сторонами на осях координат, вершиною в початку координат і довжиною сторони 60. Брат і сестра зустрінуться тоді і лише тоді, коли навмання вибрана в квадраті точка належатиме шестикутнику.

Обчислимо площі фігур квадрата та шестикутника: площа шестикутника $FGJEDH$ – 1900 кв.од., площа квадрата $HIJK$ – 3600 кв.од. Використовуючи геометричне означення ймовірності, за допомогою застосунка СКА або динамічної формули отримаємо результат 0,53 (див. рис. 18).

Задача про зустріч

Автор: Ольга Чемерис

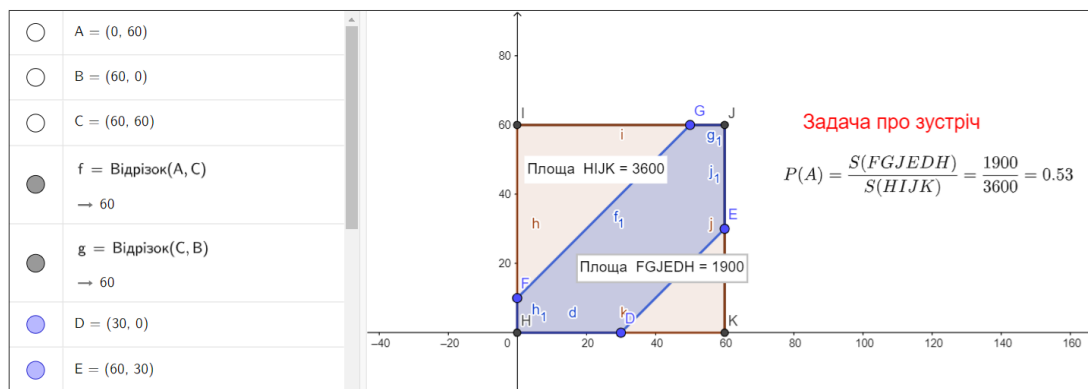


Рис. 18. Геометричне розв'язання задачі про зустріч
(<https://www.geogebra.org/m/uxduv53p>)

Задача 8. Яка ймовірність того, що сума трьох навмання взятих відрізків, довжина кожного з яких не перевищує 1, буде більшою за 1?

Розв'язання. Нехай x , y та z – наші числа, кожне з яких додатне та не перевищує 1, тобто $x \in (0; 1]$, $y \in (0; 1]$, $z \in (0; 1]$. Для візуалізації умови, як і в оформленні попередньої задачі, використаємо інструмент *Повзунок* і в налаштуванні для них поставимо позначку *Випадкове число*. Це дасть можливість проявити точку простору та обмежити її кубом з ребром 1.

За умовою задачі сума чисел більша за 1. Побудуємо точку з координатами (x, y, z) та у її властивостях у вкладці *Додатково* зазначимо *Умови відображення об'єкту* $(x+y+z>1)$. Також оберемо властивість *Залишити слід* і анімуємо координати точки. Також у наступному командному рядку задамо логічну функцію, яка дорівнює «true», якщо виконуються умови для зустрічі, і яка дорівнює «false». Отримаємо наочний результат (див. рис. 19).

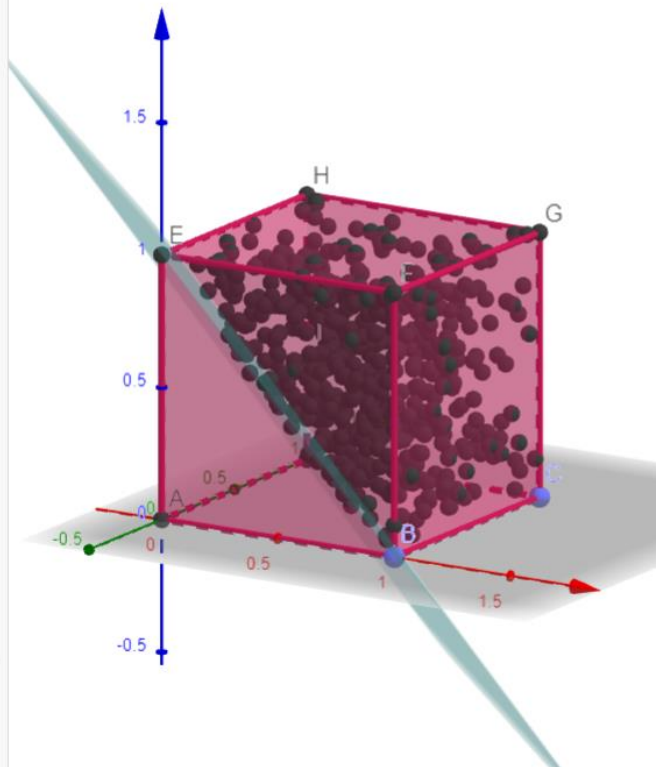
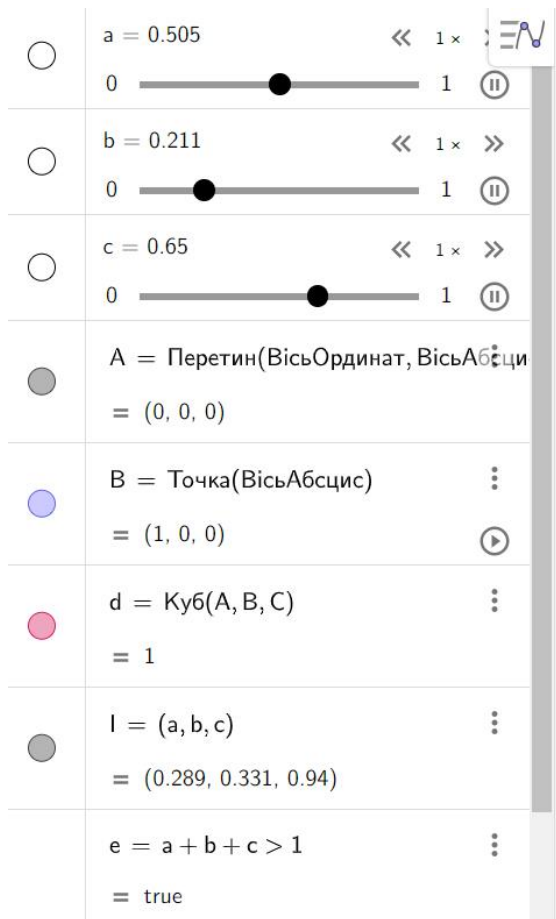


Рис. 19. Слід точки з координатами (x, y, z) за умов задачі 8

Оскільки об'єм куба дорівнює 1, то шукана ймовірність події чисельно дорівнює об'єму многогранника, заповненого наочними точками. Результат по об'єму можна одержати через різницю об'ємів нашого куба та трикутної піраміди $EABD$ або через використання інструменту *Об'єм Панелі* середовища (див. рис. 20)

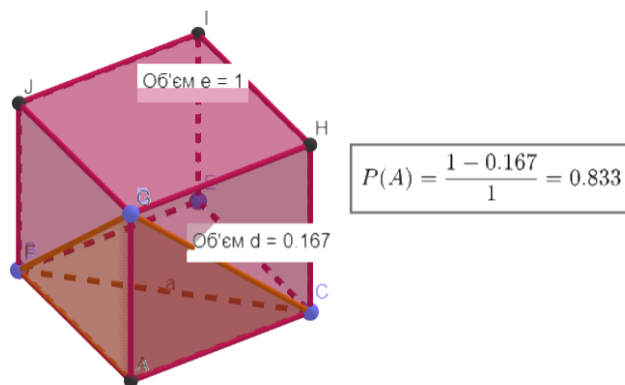


Рис. 20. Геометричне розв'язання задачі 8

Задача 9. Навмання взято два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел буде не більшою за 1, а їх добуток не менше 0,09.

Розв'язання. Ця задача теж на застосування геометричної ймовірності (коли множина елементарних подій є незліченою). Підхід до розв'язання у

середовищі аналогічний. Пропишемо умови, які накладаються на числа x та y : $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $x + y \leq 1$, $x \cdot y \geq 0,09$. У налаштуваннях для змінних задамо параметри, використовуючи інструмент *Повзунок*; внесемо дані, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, і у налаштуванні для них поставимо позначку *Випадкове число*.

На координатній площині зобразимо квадрат, побудований на осях з вершиною в початку координат і довжиною сторони 1. Побудуємо точку з координатами $(x; y)$. У властивостях точки у вкладці *Додатково* пропишемо *Умови відображення об'єкту* $x + y \leq 1$, $x \cdot y \geq 0,09$ з умови.

Оберемо у властивостях точки *Залишити слід* і анімуємо координати біжучої точки. Також у наступному командному рядку задамо логічну функцію, яка дорівнює «true», якщо для виконання умов для чисел, і яка дорівнює «false», якщо побачення не відбудеться, тобто наші умови $(x + y \leq 1) \wedge (x \cdot y \geq 0,09)$. Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитися точка $(x; y)$ для того, щоб зустріч відбулась (див. рис. 21).

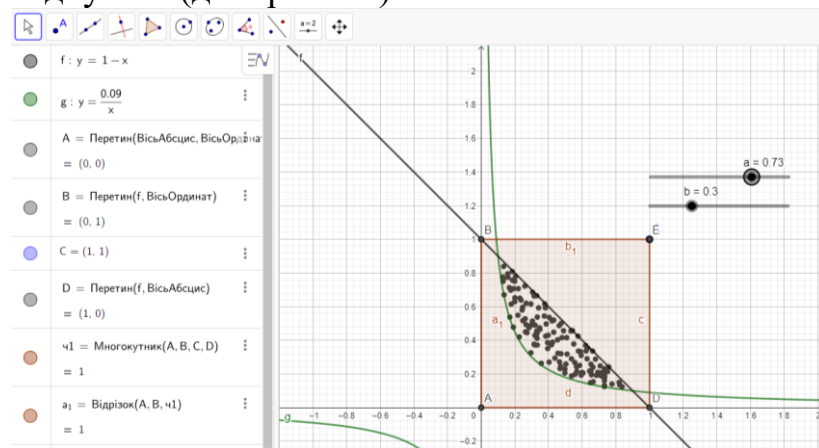


Рис. 21. Слід точки з координатами $(a; b)$ за умови, що зустріч відбулася (етап 2)

Також після одержання результатів комп'ютерного експерименту розв'яжемо задачу класичним способом, використовуючи геометричне означення ймовірності.

Для знаходження площі частини площини, обмеженої гіперболою та прямою, скористаємось застосунком СКА середовища GeoGebra (обираємо інструмент Інтеграл для рядочка із потрібним аналітичним виразом функції) (див. рис. 22) або, звісно, можна скористатись іншим онлайн-сервісом або, зрештою, обчислити самостійно:

$$1 \quad p(x) := 1 - x - \frac{0.09}{x}$$

$$\rightarrow p(x) := -x + 1 - \frac{9}{100x}$$

$$2 \quad q(x) := \int p(x) dx$$

$$\rightarrow q(x) := -\frac{9}{100} \ln|x| - \frac{1}{2} x^2 + x + c_1$$

Рис. 22. Обчислення інтеграла у застосунку СКА

У прикладних дослідженнях із застосуванням теорії ймовірності можна використати додаток *Калькулятор Ймовірностей*, який містить готові динамічні моделі різних типів розподілів, зокрема, біноміального, Пуассона, нормального, Хі-квадрата тощо).

- *Приклад задачі на розподіл Пуассона*

Задача 10. Кондитерська фабрика відправила на реалізацію 500 коробок зефіру. Ймовірність зіпсованості продукції в дорозі дорівнює 0,004. Знайдіть ймовірність того, що в дорозі буде зіпсовано більше трьох коробок.

Розв'язання. Отже, у вкладці *Калькулятор Ймовірностей* оберемо тип розподілу – Пуассона і введемо числове значення для математичного сподівання: $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0,004 = 2$. Також введемо інтервал значень випадкової величини: $4 \leq X \leq 500$.

Справа у вікні *Калькулятора* з'явилась заповнена таблиця. Відповідь шуканої ймовірності вказується у відповідному віконечці:

$$P(4 \leq X \leq 500) = 0,1429 \text{ (див. рис. 23).}$$

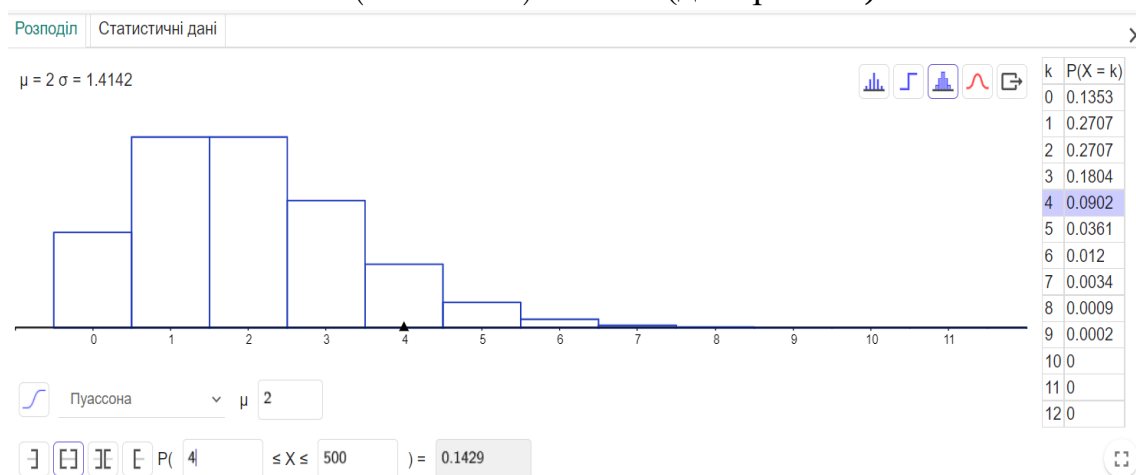


Рис. 23. Відповідь до задачі 10 (вікно *Калькулятор ймовірностей*)

Описова статистика – розділ статистики, який займається обробкою емпіричних даних, їх систематизацією, наочним представленням у вигляді графіків та таблиць, а також їх кількісним описом через основні статистичні показники.

Задача 11. За даними вибірки (див. нижче) побудувати інтервальний статистичний ряд розподілу. Зобразити графічно гістограму відносних частот. Знайти вибіркове середнє, моду і медіану.

Наявні дані про денний прибуток гіпермаркету Сільпо у м. Житомирі (у тисячах гривень):

221 233 180 215 235 260 201 234 211 237 200 254 245 207 243
251 210 245 250 223 223 265 255 239 195 250 245 227 231 256

Розв'язання. Скористаємось динамічним середовищем GeoGebra (застосунок Таблиця) для оформлення результатів описової статистики (див. рис. 24). Для цього переберемо дані з умови в табличний застосунок та оберемо інструмент *Аналіз однієї змінної*.

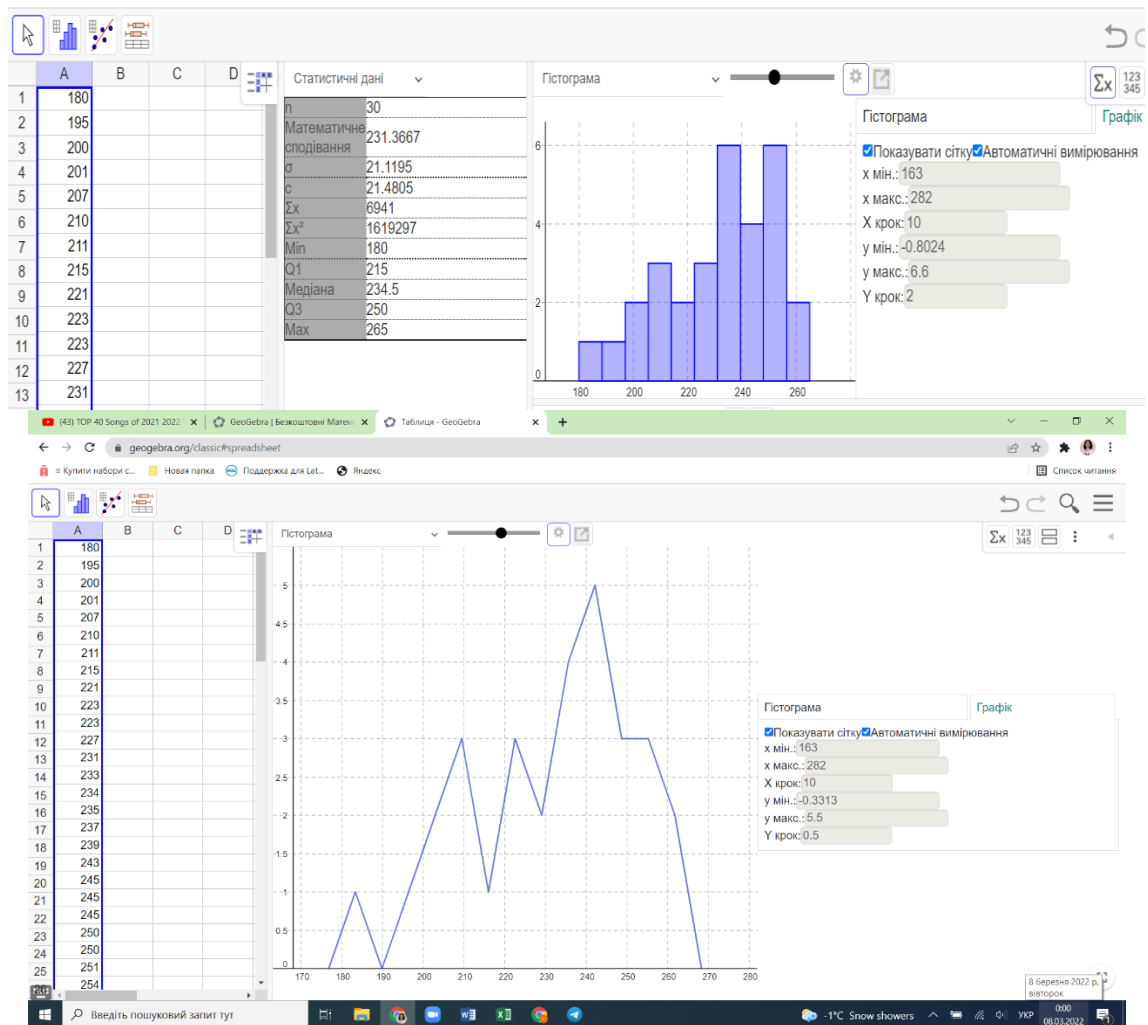


Рис. 24. Результати описової статистики до задачі 11

Для порівняння знайдемо результати описової статистики до задачі 11 через надбудову *Аналіз Даних* табличного редактора MS Excel (див. рис. 25)

F	G
<i>Описова статистика</i>	
Среднее	231,3666667
Стандартная ошибка	3,921788043
Медиана	234,5
Мода	245
Стандартное отклонение	21,48051777
Дисперсия выборки	461,4126437
Эксцесс	-0,395189171
Асимметричность	-0,560161831
Интервал	85
Минимум	180
Максимум	265
Сумма	6941
Счет	30
Уровень надежности(95,0%)	8,020957156

Рис. 25. Результати описової статистики (Аналіз Даних MS Excel)

Підсумування за *n*'ятьма значеннями, або *n*'ятиточкова характеристика вибірки – це вид описової статистики, що надає інформацію про набір спостережень, і, як видно із самої назви – складається із п'яти важливих показників: (мінімальне значення в спостереженні; перший (або нижній)

квартиль Q_1 ; медіана (серединне значення); третій (або верхній) квартиль Q_3 ; максимальне значення).

П'ятиточкову характеристику подають як коробчасту діаграму, який називають "ящик з вусами" від англomовного терміну "box-and-whisker plot", або "boxplot". Діаграма була представлена Джоном Тьюкі в 1970-х роках з подальшою модифікацією.

Цей рисунок є прямокутником із перетинкою і сторонами, що паралельні осям координат, та відрізками, паралельними горизонтальній осі, які відходять від середин бічних сторін прямокутника. Прямокутник із відрізками розташовується так, щоб бічні сторони проектувались на точки горизонтальної осі, що є квартилями (довжина коробки), а кінці горизонтальних відрізків проектується на точки, що є мінімальним та максимальним елементами вибірки. Вуса – це значення, які лежать, відповідно, лівіше та правіше від першого та третього квартиля. Викиди – це значення, які знаходяться поза межами інтервалу $1,5 \cdot IQR$ (IQR – це різниця між верхнім та нижнім квартилями: $IQR = Q_3 - Q_1$).

Отже, за умовою задачі $11 \ x_{\min} = 180$, $x_{\max} = 265$, тому розмах вибірки: $R = x_{\max} - x_{\min} = 265 - 180 = 85$. Далі обчислимо три квартилі для цієї вибірки. Оскільки об'єм вибірки $N = 30$, то за Q_1 беремо член варіаційного ряду з порядковим номером 8, отже, $Q_1 = a_8 = 215$. За Q_3 беремо член варіаційного ряду з порядковим номером 23. Отже, $Q_3 = a_{32} = 250$.

Інтерквартильний розмах $R = Q_3 - Q_1 = 250 - 215 = 35$. Другий квартиль Q_2 (медіану) обчислимо, врахувавши, що об'єм вибірки є парне число. Тому,

$$Q_2 = M_e = \frac{a_{15} + a_{16}}{2} = \frac{234 + 235}{2} = 234,5.$$

Отже, п'ятиточковою характеристикою цієї вибірки є п'ять значень: 180; 215; 234,5; 250; 265. Тепер побудуємо «box-and-whiskers plot» (коробкову діаграму) за даними задачі (див. рис. 26).

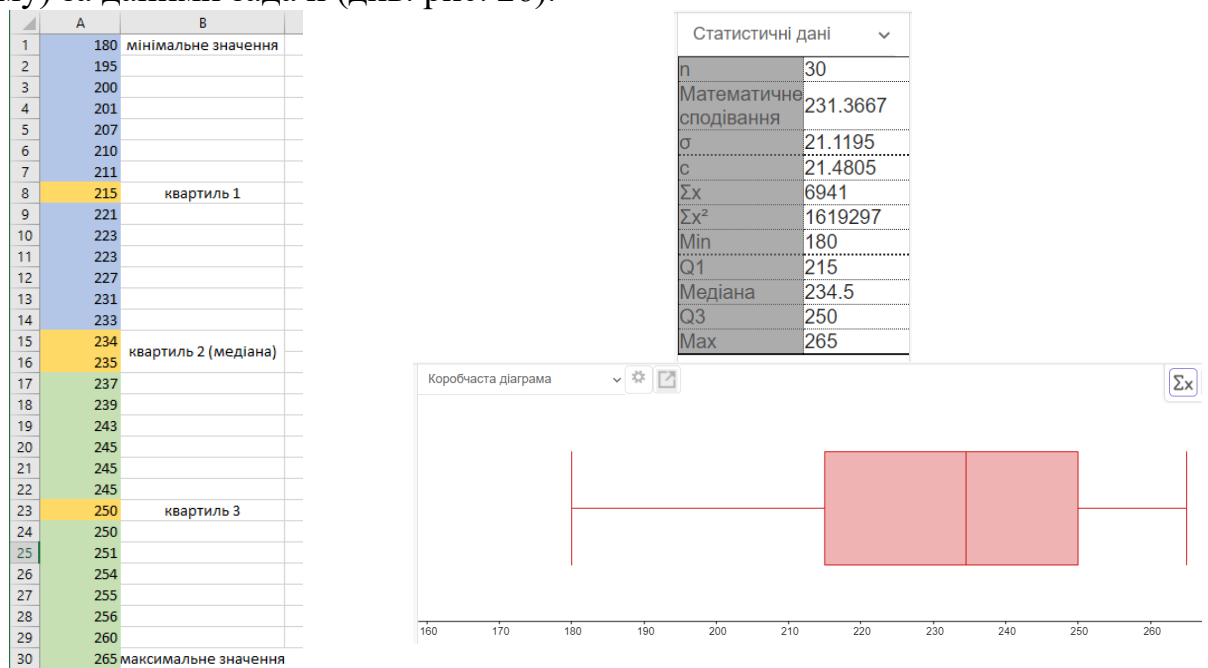


Рис. 26. Підсумування за n 'ятьма значеннями та «box-and-whiskers plot» в GeoGebra

Статистичний розподіл вибірки є асиметричним, з чітко вираженим медіальним інтервалом. Маємо унімодальний випадок (можна визначити за рядом розподілу значення для моди $M_o = 245$).

Зображення кількох таких коробок дозволяє візуально порівнювати розподіли між собою. Підсумування даних та візуалізацію такою цікавою діаграмою використовується досить часто в медичних, економічних дослідженнях тощо (див. рис. 27 – прогресування міопії дітей різних вікових категорій).

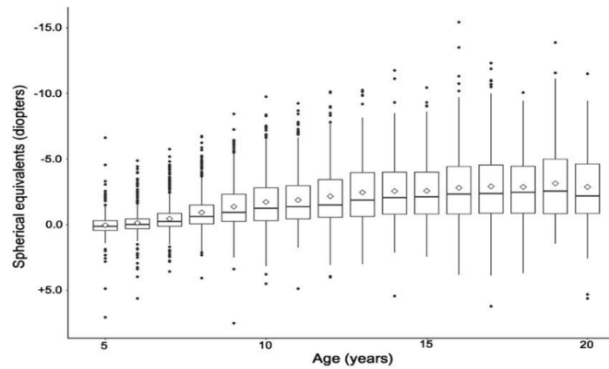


Рис. 27. Дослідження корейських учених міопії на основі даних Korean National Health and Nutrition Examination Survey (KNHANES)

Ці результати дають можливість в майбутньому більш глибоко оцінювати стан зорового апарату та можливості прогресування міопії у різних групах пацієнтів та призначати відповідне лікування з уникненням більшості побічних.

Відомі приклади використання «*box-and-whiskers plot*» в обґрунтуванні появи нового сезону серіала чи фільму, його продовження чи закриття (див. рис. 28-29).

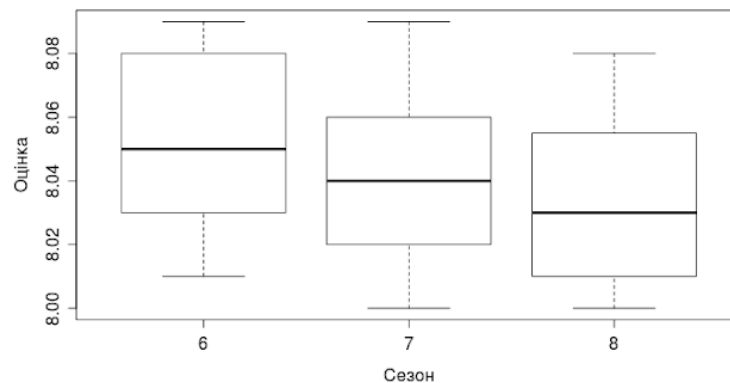


Рис. 28. Зниження якості серіалу «Доктор Хаус» на думку користувачів IMDb

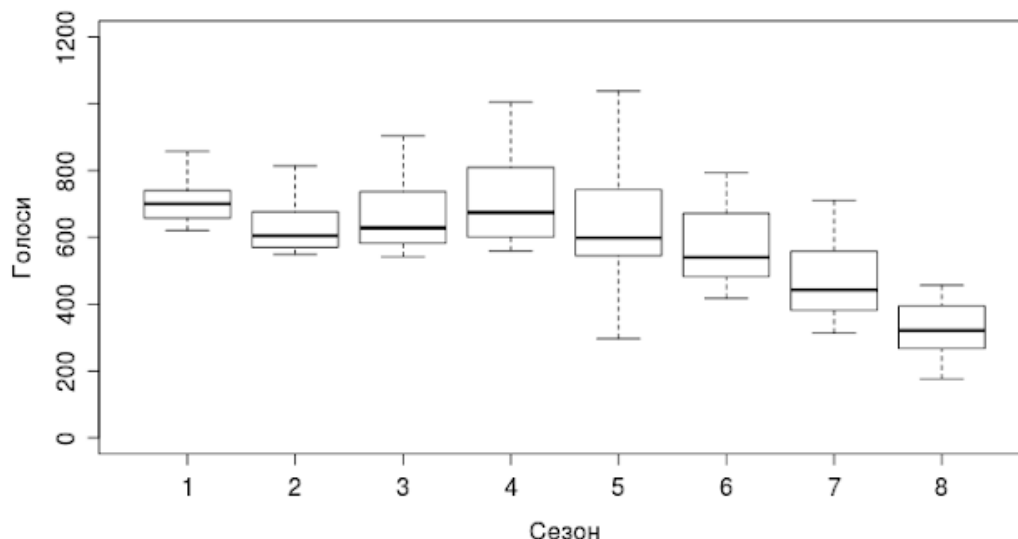


Рис. 29. Спадання кількості глядачів серіалу «Доктор Хаус»

Усі явища та процеси, які нас оточують, взаємопов'язані, тому важливо навчитись вивчати та пояснювати взаємозв'язки та залежності між ними. Існує цілий ряд процедур для визначення статистичної залежності, коли зміна однієї досліджуваної величини впливає на розподіл іншої. Тому завдання математичної статистики полягає в кількісному оцінюванні взаємозалежностей щодо наявності, напряму, формах впливу різних факторів на інші. Отже, в питання змістового модуля дисципліни включені методи кореляційного та регресійного аналізу.

- *Приклад задачі на встановлення зв'язку між двома ознаками у вибірці*

Задача 12. За даними вибірки оцінити параметри лінійної регресії та коефіцієнт кореляції. Побудувати діаграму розсіювання та графік лінії регресії.

Маємо дані щодо кров'яного тиску Y людини (в умовних одиницях) та довжини руки X у такій таблиці:

i	15	17	20	22	24	25	26	27	29	30	35	50
$i, \text{ см}$	2,1	1,0	9,0	8,0	6,5	6	5,5	5	4,5	3,5	3	2,5

Розв'язання. Подамо розв'язання задачі в табличному редакторі MS Excel (див. рис. 30). Обрали для зображення *Діаграму розсіювання* та додали *Лінію тренда*, рівняння якої теж можемо автоматично записати.

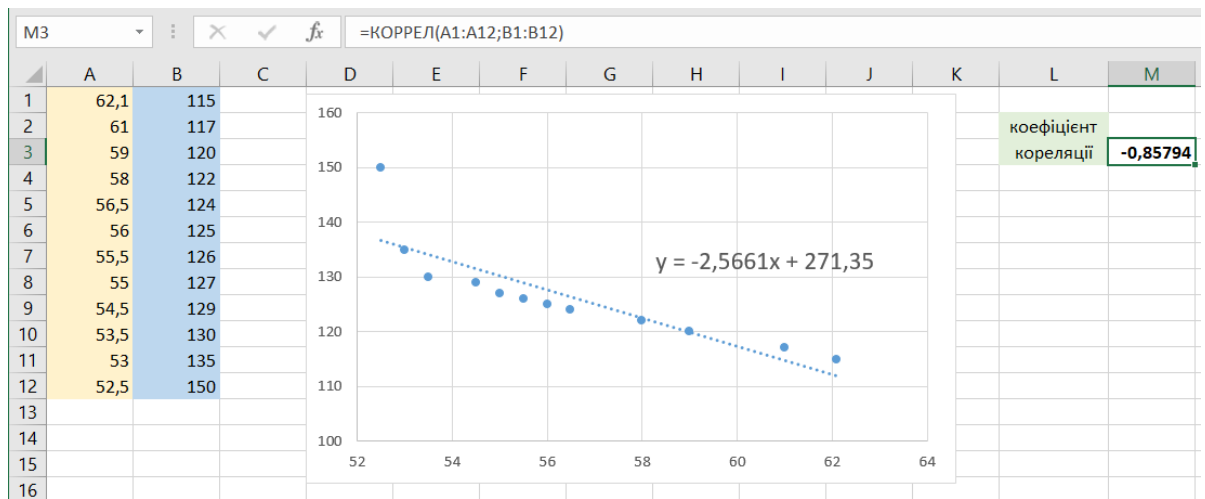


Рис. 30. Оцінка взаємозв'язку у MS Excel до задачі 12

Для оцінки тісноти зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції (ми обрали з переліку відповідну статистичну функцію). Його значення (-0,85794) свідчить про доволі тісний зв'язок між наборами значень, а знак «мінус» вказує, що цей зв'язок є зворотним, тобто із зростанням однієї змінної знижуються значення для іншої.

Також коефіцієнт кореляції можна обчислити через активну надбудову *Аналіз Даних*, обравши інструмент *Кореляція* (див. рис. 31):

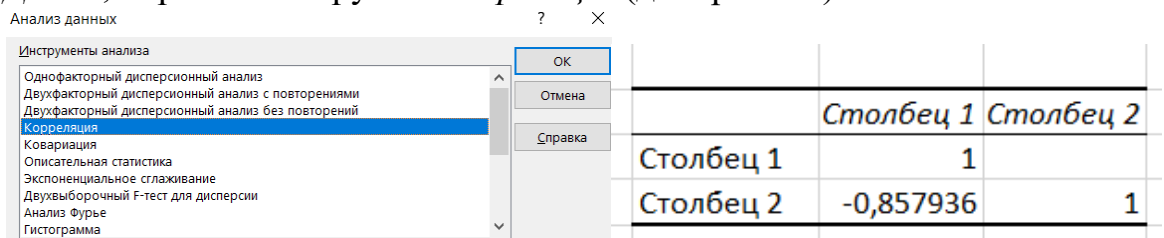


Рис. 31. Обчислення коефіцієнта кореляції у MS Excel до задачі 12 за допомогою інструменту *Аналіз Даних*

Порівняємо результат із обчисленнями в середовищі GeoGebra (вкладка *Таблиця*). Аналогічно після внесення даних побудуємо діаграму розсіювання, зобразимо пряму регресії та вкажемо її рівняння (див. рис. 32).

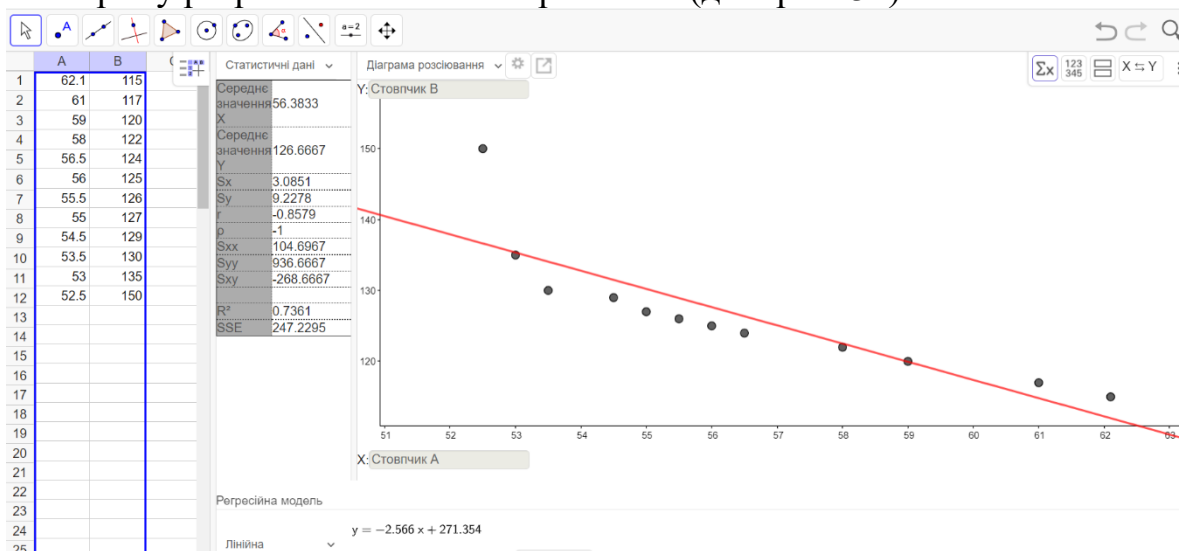


Рис. 32. Лінійна регресія та коефіцієнт кореляції у середовищі GeoGebra

Програмне середовище R – ефективно виконує функції статистичної платформи загального призначення. Це потужна статистична програма, у якій реалізовані всі способи аналізу даних. Середовище R має сучасні графічні можливості; є можливість імпортувати дані з різних джерел, включно з текстовими файлами, системами управління базами даних, іншими статистичними програмами та спеціалізованими сховищами даних. Середовище може також записувати дані у форматах усіх цих систем та є платформою для простого написання програм, що реалізують нові статистичні методи (Розум, 2020).

Середовище містить перелік необхідних статистичних операцій для одержання відповідей щодо значень описової статистики:

mean(x) – вибіркове середнє для масиву даних *x*;

sd(x) – вибіркове середньоквадратичне відхилення;

var(x) – вибіркова дисперсія масиву даних *x*;

range(x) – повертає найбільше і найменше значення за вибіркою;

diff(range(x)) – різниця між найбільшим і найменшим значеннями.

Елементи описової статистики (мінімальне та максимальне значення, обидві квартилі, медіану і вибіркове середнє) можна одержати за допомогою операції *summary(x)*.

Задача 13. Надати інформацію про вимірювання тиску у практично здорових жінок у віці 60-65 років (значення подаються у мм рт. ст.).

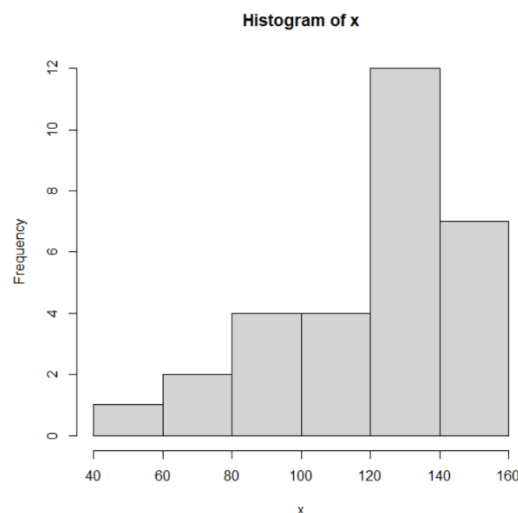
Дані до задачі подаємо як *вектор* і використовуємо відповідну статистичну операцію:

```
>                                                                 x<-
c(100,75,140,140,150,150,140,160,140,130,110,80,90,110,95,90,130,120,
  120,130,130,140,140,150,50,150,160,160,130,130)
> summary(x)
```

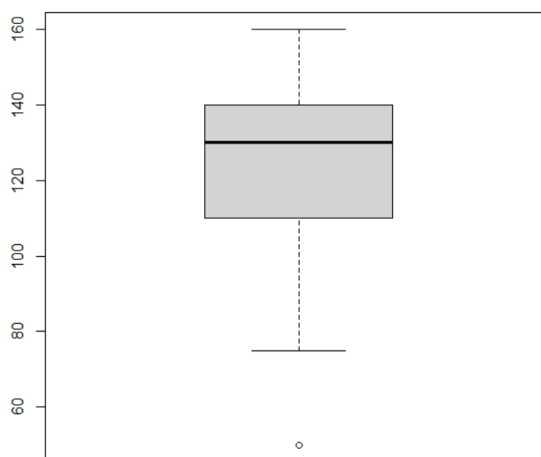
Min.	1 st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
50.0	110.0	130.0	124.7	140.0	160.0

Також середовище R дає змогу здійснити графічний аналіз за даними в умові задачі, зокрема, можна побудувати гістограму та коробкову діаграму, зображення яких виносяться в окреме віконечко:

```
> hist(x)
```



> boxplot(x)



Коли потрібно порівняти розподіли декількох змінних, зображення такої гістограми ускладнює читання графічної інформації, тому залишать найважливіше з числових характеристик і малюють вже відомі "box-and-whiskey plot". Наприклад, узагальнимо та порівняємо успішність за освітніми компонентами для 21 Бд-Сомат групи за зимову сесію 2022-2023 р.р. (див. рис. 33).

A	B	C	D	E	F	G	H
№	Прізвище та ініціали	Екзаменаційна оцінка (кількість балів за 100 бальною шкалою)					
з/п	здобувача вищої освіти	Аналітична геометрія	Інформатика	Математичний аналіз	Моделювання фізичних процесів на ПК	Обчислювальна практика	Програмування
1	Андрощук М.В.	91	91	94	94	92	93
2	Артёмова М.В.	62	87	64	70	67	61
3	Бажан В.М.	72	91	77	94	97	81
4	Блакитівська Д.В.	65	80	62	70	73	47
5	Ваховська Д.С.	75	61	48	70	70	71
6	Дрозд Д.В.	85	88	77	94	98	75
7	Кириченко М.М.	35	40	53	61	60	47
8	Лабунська М.О.	62	83	60	65	84	64
9	Лукаш Д.Р.	81	90	93	93	90	91
10	Мазур К.С.	91	90	93	95	93	91
11	Нагорний А.А.	62	90	64	85	90	75
12	Олексенко С.О.	75	60	48	61	62	47
13	Плескач О.В.	91	90	93	90	91	92
14	Радзівіл Р.Р.	75	91	77	87	86	93
15	Семенчук Я.М.	62	91	76	94	88	76
16	Старовойт Є.О.	67	90	66	86	80	85
17	Сторожук Д.М.	76	61	77	65	69	75
18	Чеховський О.С.	75	70	77	74	69	71
19	Шатило А.С.	60	61	40	61	70	47
20	Шомко А.В.	66	91	69	94	89	65
21	Янзюк А.А.	65	91	66	85	91	47

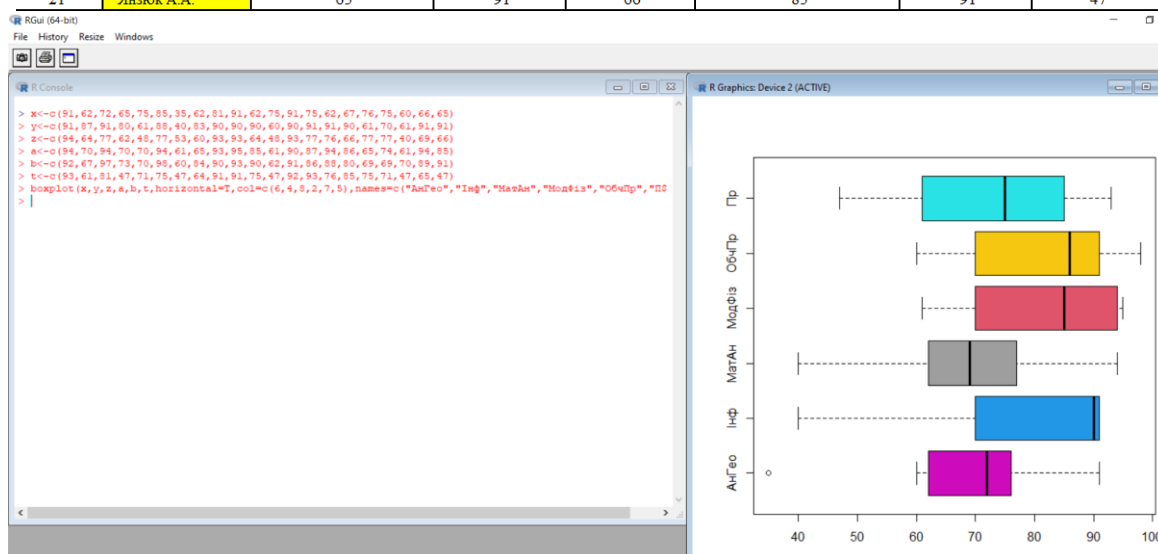


Рис. 33. Порівняння успішності за дисциплінами для студентів однієї групи

Представимо оформлення розв'язання задачі 13 в середовищі R:

Статистична операція $\text{cor}(x,y)$ обчислює коефіцієнт кореляції Пірсона між масивами x і y однакової довжини.

```
>x<-c(62.1,61,59,58,56.5,56,55.5,55,54.5,53.5,53,52.5)
```

```
>y<-c(115,117,120,122,124,125,126,127,129,130,135,150)
```

```
>cor(x,y)
```

[1] -0.8579359

До речі, для обчислення коефіцієнта кореляції Спірмена необхідно задати додаткову опцію *method="spearman"*.

```
> cor(x,y,method="spearman")
```

[1] -1

Подивимось, яким буде рівняння простої регресії між вибірковими значеннями. Для цього побудуємо діаграму розсіювання даних для значень відповідних змінних. Далі задамо функцію для обчислення коефіцієнтів простої лінійної регресії і її аналізу у на x , результат запишемо у змінну z . Перелік дій прописано на рис. 34:

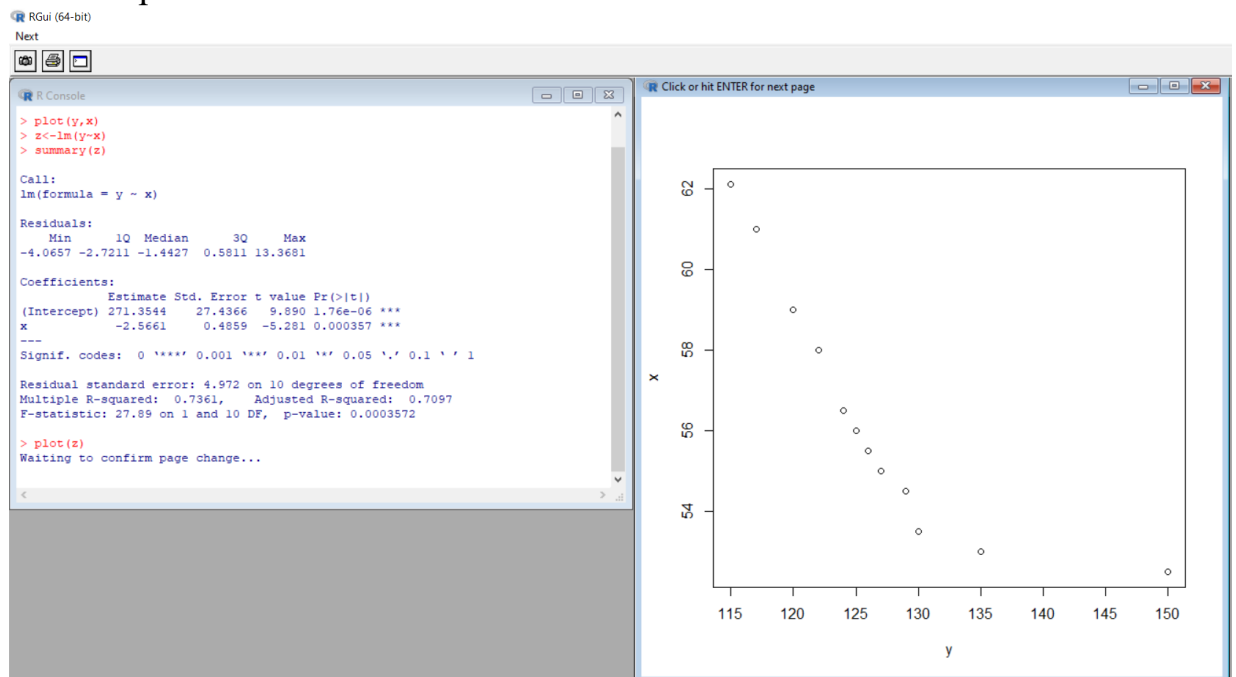


Рис. 34. Підбір коефіцієнтів рівняння лінійної регресії до задачі 13

В курсі теорії ймовірностей окремий розділ присвячено розподілам випадкових величин. У середовищі R чотири способи подання інформації щодо розподілів. Корінь назви функції завжди вказує на вид розподілу. Перша літера – це префікс – розшифровується наступним чином

- p – задати функцію розподілу;
- q – задати обернену функцію до функції розподілу;
- d – задати щільність розподілу;
- r – згенерувати випадкову величину за вказаним розподілом.

Задання розподілів випадкової величини відбувається наступним чином: виходячи з означення кожного розподілу у командному рядочку ми вказуємо об'єм вибірки та певні числові дані, наприклад:

Біноміальний розподіл – *binom* (n,k,p)

Гама розподіл – *gamma* (x, α, λ)
 Геометричний розподіл – *geom* (n, p)
 Гіпергеометричний розподіл – *hyper* ($k, n-k, l, k$)
 Експоненціальний розподіл – *exp* (q, λ)
 Нормальний розподіл – *norm* (x, μ, σ)
 Рівномірний розподіл – *unif* (n, a, b)
 Розподіл Пуассона – *pois* (λ)
 Розподіл Хі-квадрат – *chisq* (x, s)

Наприклад, згенеруємо 100 значень нормально розподіленої випадкової величини із такими параметрами: математичне сподівання $\mu = 5$, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$.

```
> rnorm(100,5,2)
[1] 1.5746962 5.7439811 6.4205123 6.4136713 4.9028937 6.3616115
[7] 3.6067024 0.7890504 1.7610897 3.2822311 3.7053684 7.5759082
[13] 5.8437482 2.3614570 4.1712964 3.0449197 7.4077321 2.5204083
[19] 7.3165619 6.4428746 6.9830742 3.3177550 6.2572577 6.4064178
[25] 4.2434400 8.0935771 4.3676533 5.4126574 3.6763689 5.8261161
[31] 9.2269982 5.5010304 3.0420132 -0.2957144 5.3100180 8.4073580
[37] 6.9690826 6.7453892 5.9805581 3.9912685 4.6562063 4.6697592
[43] 4.9207505 0.5676854 4.7802059 3.8223252 2.8531011 6.6386647
[49] 3.1529729 8.4274448 5.1960593 2.4295272 3.2904124 6.0623331
[55] 4.9327784 1.4219349 2.3066459 3.7200735 3.7889271 4.8098198
[61] 6.4732836 2.8872619 5.8355916 4.6484248 5.8533563 5.9386250
[67] 4.0738342 4.7978173 5.3675616 3.6453776 3.1698878 5.0571838
[73] 2.4412530 4.4340079 6.7750936 7.9218073 1.2488242 2.9419046
[79] 5.3912125 5.5756093 2.6397508 2.1647219 6.5518372 2.1945591
[85] 8.2096203 7.8544981 1.9509788 4.8516571 5.4278373 2.9742926
[91] 7.0984133 6.3807145 4.6872426 3.8535342 2.7835269 5.6133699
[97] 3.1016527 5.1456399 6.2919816 1.7191154
```

Середовище можна використовувати як *Калькулятор Ймовірностей*: обчислимо ймовірність $P(X \leq 6)$ для нормально розподіленої випадкової величини з тими самими характеристиками:

```
> pnorm(6,5,2)
[1] 0.6914625
```

Для порівняння внесемо дані у аналогічний застосунок *Калькулятор Ймовірностей GeoGebra* (див. рис. 35):

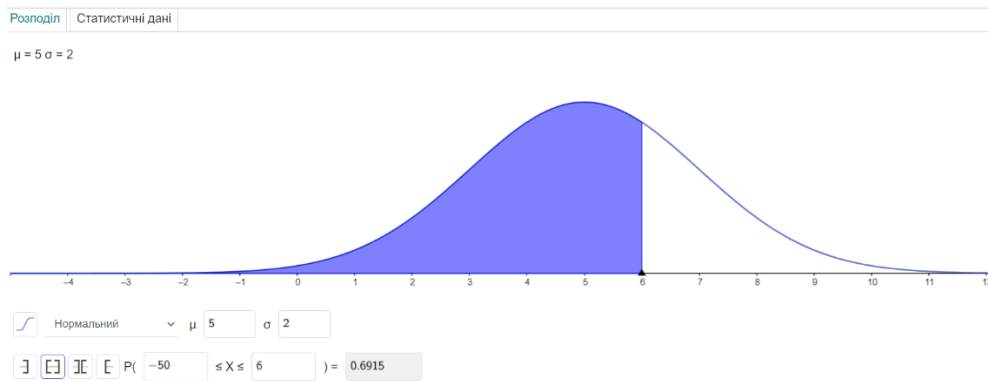
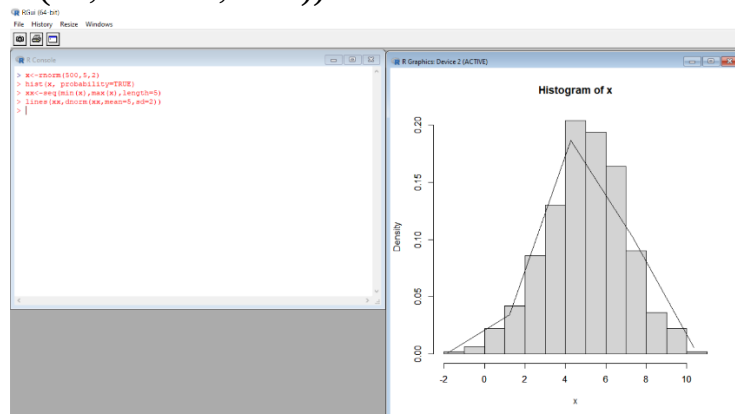


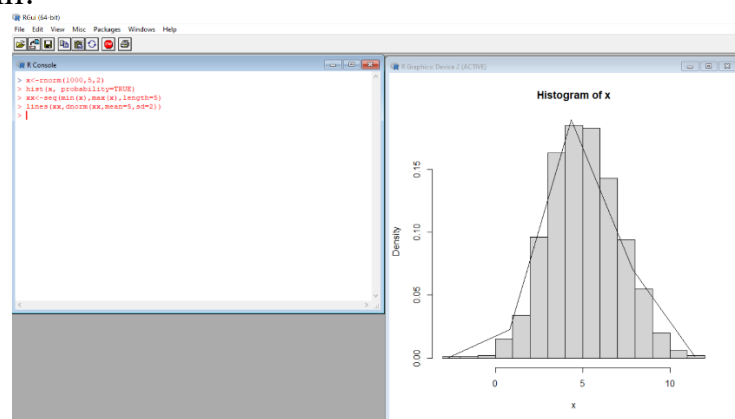
Рис. 35. Калькулятор Ймовірностей та нормальний розподіл

Змоделюємо 500 значень нормально розподіленої випадкової величини з тими самими числовими характеристиками та побудуємо для них гістограму та графік щільності функції розподілу:

```
> x<-rnorm(500,5,2)
> hist(x, probability=TRUE)
> xx<-seq(min(x),max(x),length=5)
> lines(xx,dnorm(xx,mean=5,sd=2))
```



Порівняємо із зображенням на 1000 значень нормально розподіленої випадкової величини:



- *Визначення довірчих інтервалів для статистичних параметрів розподілу*

Задача 14. Керівництво фірми провело вибіркве обстеження 90 своїх службовців. Середній стаж їхньої роботи в фірмі виявився рівним 8,7 років, а середньо квадратичне відхилення дорівнює 2,7 років. Вважаючи стаж роботи

службовців фірми розподіленим за нормальним законом, визначити з імовірністю 0,95 довірчий інтервал для середнього стажу роботи усіх службовців фірми.

Розв'язання. Якщо випадкова величина (ознака генеральної сукупності) розподілена нормально, то з надійністю γ невідоме математичне сподівання a задовольняє нерівність:

$$\bar{X}_B - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_B + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}},$$

де $\bar{X}_B$ – вибіркове середнє (математичне сподівання наближено йому дорівнює), n – об'єм вибірки, значення $t = t_\gamma$ шукаємо з рівняння $2\Phi(t) = \gamma$, де $\Phi(t)$ – інтегральна функція Лапласа.

Отже, з умови випишемо: $\bar{X}_B = 8,7$, $\sigma = 2,7$, $n = 90$, $\gamma = 0,95$.

Розв'яжемо рівняння $2\Phi(t) = \gamma = 0,95$. Отже, $\Phi(t) = 0,475$, де значення t шукаємо з довідника: $t = 1,96$.

Тепер підставимо усі числові значення:

$$\begin{aligned} \bar{X}_B - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X}_B + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\ 8,7 - \frac{1,96 \cdot 2,7}{\sqrt{90}} &< a < 8,7 + \frac{1,96 \cdot 2,7}{\sqrt{90}} \\ 8,7 - 0,558... &< a < 8,7 + 0,558... \end{aligned}$$

Маємо $8,142 < a < 9,258$ – шуканий довірчий інтервал для середнього стажу роботи службовців з імовірністю 95 %.

Для обчислення довірчого інтервалу у табличному редакторі MS Excel скористаємось статистичною функцією *ДОВЕРИТ.НОРМ* (див. рис. 36).

The image shows two screenshots of an MS Excel spreadsheet. The top screenshot shows the input data for calculating a confidence interval. The bottom screenshot shows the result of the calculation.

В	C	D	E	F	G
Шукаємо довірчий інтервал:					
	вибіркове середнє		8,7		
	середнє квадратичне відхилення		2,7		
	об'єм вибірки		90		
	ймовірність		0,95		
	рівень значущості		0,05		
	ширина інтервалу		=ДОВЕРИТ.НОРМ(E7;E4;E5)		

The dialog box for the *ДОВЕРИТ.НОРМ* function is shown with the following arguments:

- Альфа: E7 = 0,05
- Станд.откл: E4 = 2,7
- Размер: E5 = 90

The result of the function is 0,557815529.

В	C	D	E	F	G
Шукаємо довірчий інтервал:					
	вибіркове середнє		8,7		
	середнє квадратичне відхилення		2,7		
	об'єм вибірки		90		
	ймовірність		0,95		
	рівень значущості		0,05		
	ширина інтервалу		0,557816		

Рис. 36. Знаходження довірчого інтервалу (задача 14)

Таким чином, така візуалізація випадкових подій при розв'язуванні задач теорії ймовірностей дозволяє вирішувати декілька навчальних задач одночасно.

1. Продемонструвати використання інформаційних технологій та спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язування ймовірнісних задач.

2. Надати емпіричну основу навчального процесу, яка дозволить обговорити сприйняття суб'єктом проблеми, сформульоване умовою задачі, та адекватність моделювання та пошуку розв'язків цієї умови.

3. Продемонструвати різні способи одержання чисельних розв'язків задач та їх «послідовність» при використанні цих методів.

4. Використання динамічних середовищ дозволяє провести дослідження, які спрощують побудову математичних моделей задач, організовують достатню кількість випадкових тестів, унаочнюють ці випадкові події та дозволяють опрацьовувати результати дослідження (Кручиненко, 2021).

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

За результатами дослідження проведено аналіз навчальних та робочих програм з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», методичної літератури, підручників тощо. Не зважаючи на класичні підходи до вивчення елементів стохастичності, на нашу думку, використання комп'ютерних програм у навчальному процесі здатне позитивно вплинути на якість навчання та інтелектуальний розвиток здобувачів освіти; рівень їх підготовки до подальшої професійної діяльності, здатність використовувати математичні методи і комп'ютерні технології у наукових дослідженнях та при розв'язуванні практичних задач. Без сумнівів можна сказати, що використання комп'ютерних технологій позитивно впливає на формування інформаційної компетентності, знань, вмінь та навичок практично кожного здобувача, а також поглиблює їх мотивацію до навчання.

У роботі наводимо приклади щодо можливостей швидких обчислень ймовірностей випадкових подій (використовуємо табличні редактори та онлайн калькулятори). Для вивчення елементів описової статистики рекомендуємо використовувати проєктні завдання із різними діаграмами та графічним поданням інформації. Для досліджень за нашою темою та розв'язування прикладних задач рекомендуємо потужний потенціал табличного редактора MS Excel, середовища GeoGebra (звичайне Полотно, Таблиця, Калькулятор Ймовірностей тощо) та програмного середовища з консольним режимом роботи (за приклад обрали середовище R). Усі базові типи задач дисципліни було розглянуто та відповідно оформлено.

Більшість онлайн-калькуляторів для розв'язування задач з теорії ймовірностей є російськомовними та не охоплюють усі типи задач цього розділу, тому в перспективі плануємо працювати над власним якісним україномовним онлайн-сервісом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gökçe, S., & Güner, P. (2022). Динаміка екосистеми GeoGebra в математичній освіті. *Освіта та інформаційні технології*, 27 (4), 5301-5323.

2. Hamzah, N.A.H., & Hidayat, R. (2022). Роль програмного забезпечення Geogebra в математичній освіті: систематичний огляд літератури: *Peranan Perisian Geogebra dalam Pendidikan Matematik: Sorotan Literatur Bersistematik. Журнал Pendidikan Sains Dan Matematik Malaysia*, 12 (1), 24-38.
3. Богач, О. В. (2020). *Застосування інформаційних технологій під час навчання геометрії учнів основної школи*. Вишнівський академічний ліцей «Основа». <http://surl.li/ekkth>.
4. Відомості про самооцінювання освітньої програми (2019). *Освітня програма 014 Середня освіта / Середня освіта (Математика)*. Бакалавр. <https://eportfolio.zu.edu.ua/media/Accreditation/7/yomdsh.pdf>.
5. Горошко, Ю., & Вінниченко, Є. (2008). Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 6 (13), 70–75. <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/504>.
6. Жалдак, М. І., & Франчук, В. М. (2020). Деякі застосування хмарних технологій в математичних обчисленнях. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, (22(29), 3–17. [https://doi.org/10.31392/NPU-ps.series2.2020.22\(29\).01](https://doi.org/10.31392/NPU-ps.series2.2020.22(29).01).
7. Железнякова, Е. Ю., Лебедева, І. Л., Норік, Л. О., Степанова, К. В., Железнякова, Э. Ю., Лебедева, И. Л., ... & Степанова, Е. В. (2016). *Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика"*: навчальний посібник.
8. Концепція Державної цільової програми впровадження у навчально-виховний процес загальноосвітніх закладів інформаційно-комунікаційних технологій «Сто відсотків» на період до 2015 року. (2011, 13 квітня). *Постанови Кабінету міністрів України* <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/494-2011-%D0%BF#Text>.
9. Коровкіна, О. С. (2018). Використання пакету MS EXCEL для відшукування нормального розподілу. *Наукові записки молодих учених*, (2).
10. Кручиненко, О. В. (2021). Огляд сучасного програмного забезпечення для статистичного аналізу наукових даних. *Вирішення сучасних проблем у ветеринарній медицині: матеріали*, 35.
11. Кушлик-Дивульська, О. І., & Горбачук, В. М. (2023). *Теорія ймовірностей та математична статистика*.
12. Лов'янова, І. В., & Лов'янова, І. В. (2018). *Формування ІКТ-компетентності майбутнього вчителя математики*. Шановні учасники, 197.
13. Надточій, С. Л. (2008). *Використання педагогічних програмних засобів у навчанні студентів теорії ймовірностей і математичної статистики*.
14. Наказ Міністерства освіти і науки України (2019, 29 травня). *Положення про електронні освітні ресурси*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12#Text>.
15. Пістунов, І. М., & Турчанінова, І. Ю. (2023). *Теорія ймовірності та математична статистика для економістів*. З елементами електронних таблиць: Навч. посібн. Дніпро: НТУ «ДП», 2023. 174 с.
16. Пономарьова, Н. О., & Сусліченко, К. С. (2020). *Використання вбудованих функцій MS EXCEL для розв'язання комбінаторних задач*.
17. Проект Стандарту вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта на другому (магістерському) рівні вищої освіти (2023). *Громадські обговорення МОН*. <https://mon.gov.ua/ua/news/mon-proponuye-do-gromadskogo-obgovorennya-proyekt-standartu-vishoyi-osviti-zi-specialnosti-standartu-vishoyi-osviti-zi-specialnosti-014-serednya-osvita-na-drugomu-magisterskomu-rivni-vishoyi-osviti>.
18. Ракута, В. М. (2016). *Віртуальне середовище для розвитку професійної компетентності вчителів математики*. Упорядник, 202.
19. Розум, М. В. (2020). Застосування дистрибутиву R при викладанні теорії ймовірностей і математичної статистики. *Матеріали шостої міжнародної конференції з адаптивних технологій управління навчанням ATL-2020*, 22.

20. Роїк, М. В., Присяжнюк, О. І., & Денисюк, В. О. (2017). Огляд програмних засобів статистичного аналізу даних. *Ефективна економіка*. № 7.
21. Семеніхіна, О. В., & Друшляк, М. Г. (2014). *Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики та методичні проблеми їх використання*. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/2676>.
22. Спірін, О.М. (2008). Інформаційно-комунікаційні технології навчання: матеріали міжнар. наук.-практ. конференції, *Система інформаційно-технологічних компетентностей учителя інформатики* (с. 160–162). Умань: ПП Жовтий.

REFERENCES

1. Gökçe, S., & Güner, P. (2022). Dynamika ekosystemy GeoGebra v matematychnii osviti. *Osvita ta informatsiini tekhnolohii*, 27 (4), 5301-5323.
2. Hamzah, NAH, & Hidayat, R. (2022). Rol proqramnoho zabezpechennia Geogebra v matematychnii osviti: systematychnyi ohliad literatury: Peranan Perisian Geogebra dalam Pendidikan Matematik: Sorotan Literatur Bersistematis. *Zhurnal Pendidikan Sains Dan Matematik Malaysia*, 12 (1), 24-38.
3. Bohach, O. V. (2020). Zastosuvannia informatsiinykh tekhnolohii pid chas navchannia heometrii uchniv osnovnoi shkoly. *Vyshnivskiy akademichnyi litsei «Osnova»*. <http://surl.li/ekktth>.
4. Vidomosti pro samoostiniuvannia osvitnoi prohramy (2019). *Osvitnia prohrama 014 Serednia osvita / Serednia osvita (Matematyka)*. Bakalavr. <https://eportfolio.zu.edu.ua/media/Accreditation/7/yomdsh.pdf>.
5. Horoshko, Yu., & Vinnychenko, Ye. (2008). Vykorystannia kompiuternykh prohram dlia stvorennia dynamichnykh modelei pry vyvchenni matematyky. *Naukovyi chasopys NPU imeni M.P. Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-orientovani systemy navchannia*, 6 (13), 70–75. <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/504>.
6. Zhaldak, M. I., & Franchuk, V. M. (2020). Deiaki zastosuvannia khmarnykh tekhnolohii v matematychnykh obchyslenniakh. *Naukovyi chasopys NPU imeni M.P. Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-orientovani systemy navchannia*, (22(29), 3–17. [https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22\(29\).01](https://doi.org/10.31392/NPU-nc.series2.2020.22(29).01).
7. Zhelezniakova, E. Yu., Lebedieva, I. L., Norik, L. O., Stiepanova, K. V., Zhelezniakova, Э. Yu., Lebedeva, Y. L., ... & Stepanova, E. V. (2016). *Laboratornyi praktykum z navchalnoi dystsypliny "Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka": navchalnyi posibnyk*.
8. Kontseptsiiia Derzhavnoi tsilovoi prohramy vprovadzhennia u navchalno-vykhovnyi protses zahalnoosvitnikh zakladiv informatsiino-komunikatsiinykh tekhnolohii «Sto vidsoktiv» na period do 2015 roku. (2011, 13 kvitnia). *Postanovy Kabinetu ministriv Ukrainy* <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/494-2011-%D0%BF#Text>.
9. Korovkina, O. S. (2018). Vykorystannia paketu MS EXCEL dlia vidshukannia normalnoho rozpodilu. *Naukovi zapysky molodykh uchenykh*, (2).
10. Kruchynenko, O. V. (2021). Ohliad suchasnoho prohramnoho zabezpechennia dlia statystychnoho analizu naukovykh danykh. *Vyrishennia suchasnykh problem u veterynarii medytsyni: materialy*, 35.
11. Kushlyk-Dyvulska, O. I., & Horbachuk, V. M. (2023). *Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka*.
12. Lovianova, I. V., & Lovianova, I. V. (2018). Formuvannia IKT-kompetentnosti maibutnoho vchytelia matematyky. *Shanovni uchastyky*, 197.
13. Nadtochii, S. L. (2008). Vykorystannia pedahohichnykh prohramnykh zasobiv u navchanni studentiv teorii ymovirnostei i matematychnoi statystyky.
14. Nakaz Ministerstva osvity i nauky Ukrainy (2019, 29 travnia). *Polozhennia pro elektronni osvitni resursy*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12#Text>.
15. Pistunov, I. M., & Turchaninova, I. Yu. (2023). *Teoriia ymovirnosti ta matematychna statystyka dlia ekonomistiv. Z elementamy elektronnykh tablyts: Navch. posibn. Dnipro: NTU «DP»*, 2023. 174 s.
16. Ponomarova, N. O., & Suslichenko, K. S. (2020). Vykorystannia vbudovanykh funktsii MS EXCEL dlia rozviazannia kombinatornykh zadach.

17. Proiekt Standartu vyshchoi osvity zi spetsialnosti 014 Serednia osvita na druhomu (mahisterskomu) rivni vyshchoi osvity (2023). Hromadski obhovorennia MON. <https://mon.gov.ua/ua/news/mon-proponuye-do-gromadskogo-obgovorennya-proyekt-standartu-vishoyi-osviti-zi-specialnosti-standartu-vishoyi-osviti-zi-specialnosti-014-serednya-osvita-na-drugomu-magisterskomu-rivni-vishoyi-osviti>.
18. Rakuta, V. M. (2016). Virtualne seredovyshe dlia rozvytku profesiinoi kompetentnosti vchyteliv matematyky. Uporiadnyk, 202.
19. Rozum, M. V. (2020). Zastosuvannia dystrybutyvu R pry vykladanni teorii ymovirnostei i matematychnoi statystyky. Materialy shosto mizhnarodnoi konferentsii z adaptyvnykh tekhnolohii upravlinnia navchanniam ATL-2020, 22.
20. Roik, M. V., Prysiazhniuk, O. I., & Denysiuk, V. O. (2017). Ohliad prohramnykh zasobiv statystychnoho analizu danykh. Efektyvna ekonomika. № 7.
21. Semenikhina, O. V., & Drushliak, M. H. (2014). Kompiuterni instrumenty prohram dynamichnoi matematyky ta metodychni problemy yikh vykorystannia. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/2676>.
22. Spirin, O.M. (2008). Informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii navchannia: materialy mizhnar. nauk.-prakt. konferentsii, Systema informatsiino-tekhnolohichnykh kompetentnostei uchytelia informatyky (s. 160–162). Uman: PP Zhovtyi.



ДИНАМІЧНЕ СЕРЕДОВИЩЕ GEOGEBRA ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ (МОДУЛЬ «ПРЯМІ ТА ПЛОЩИНИ»)

Олександр МОСІЮК

mosxandrwork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Надані матеріали ілюструють використання динамічного програмного забезпечення GeoGebra для опанування базових понять аналітичної геометрії, зокрема, основних геометричних об'єктів – прямих та площин. Дослідження спрямоване на оптимізацію процесу навчання та якісне розв'язання задач з аналітичної геометрії за допомогою високого рівня візуалізації та інтерактивності.

У модулі «Прямі та площини» розглядають різні типи задання даних геометричних об'єктів та описують їх властивості, безпосередньо усі висновки пов'язанні з взаємним розміщенням. Використовуючи середовище GeoGebra, студенти мають можливість візуалізувати та розв'язувати складні задачі, використовуючи інтерактивні моделі, що дозволяє краще зрозуміти та запам'ятати матеріал, та заохотити самостійні дослідження. Розроблені матеріали та приклади розв'язань бути корисним як для студентів, викладачів, так і вчителів математики, а також усіх охочих, які бажають покращити свої знання та навички в аналітичній геометрії, використовуючи інтерактивне навчання та візуалізацію.

Ключовою проблемою, яка виникає в цьому контексті, може бути розробка методів та педагогічних прийомів для ефективного впровадження цієї технології у процес навчання для покращення академічних результатів студентів. Крім того, готові рішення цієї проблеми можуть охоплювати розвиток педагогічних матеріалів та навчальних ресурсів, які сприяють оптимізації процесу навчання та підвищенню зацікавлення студентів у математиці. Іншою актуальною проблемою може бути розроблення методики оцінювання та аналізу результатів використання GeoGebra в навчанні аналітичної геометрії для забезпечення ефективності та якості навчального процесу.

Матеріали і методи. Методичний опис за цією темою може включати наступне:

1. Використання динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra як основного інструмента для вивчення та розв'язування задач з аналітичної геометрії, адже, GeoGebra надає можливість візуалізації геометричних об'єктів, створення взаємодії між об'єктами, а також проведення обчислень, що сприяє кращому розумінню матеріалу та підвищує зацікавлення студентів у вивченні математики.
2. Мультимедійні навчальні ресурси, такі як відеоуроки та демонстраційні матеріали, які демонструють практичні застосування GeoGebra для моделювання прямих, площин та їх взаємного розміщення.
3. Навчальні матеріали, що включають вправи та завдання на застосування GeoGebra для вирішення конкретних завдань з аналітичної геометрії. Ці матеріали можуть включати інтерактивні завдання та практичні приклади, які допоможуть студентам краще зрозуміти математичні концепції.
4. Педагогічні методики, що орієнтовані на оптимізацію процесу навчання та використання GeoGebra, такі як інструкції для викладачів з ефективного впровадження та інтеграції цього засобу у навчальний процес.

5. Інструменти для оцінювання результатів використання GeoGebra в навчанні, такі як методики тестування та оцінювання навчальних досягнень студентів на основі впровадження цієї технології.

Результати. Використання GeoGebra на заняттях з аналітичної дає позитивні результати, зокрема, розуміння геометричних концепцій щодо взаємозв'язку між алгебраїчними та геометричними об'єктами; розвиває аналітичні навички та дозволяє студентам активно експериментувати з геометричними об'єктами; готує до практичного застосування знань не лише з аналітичної геометрії у GeoGebra, а й інших фундаментальних дисциплін. У цілому, використання GeoGebra може сприяти покращенню розуміння та запам'ятовування складних математичних концепцій, зростанню мотивації до навчання та покращенню виконання завдань з різних математичних дисциплін.

Висновки. Після використання GeoGebra на заняттях з аналітичної геометрії можна окреслити перспективи для подальших досліджень: оцінити ефективність використання GeoGebra у процесі навчання аналітичної геометрії та його вплив на результати студентів; оптимізація педагогічних методів та методик викладання фундаментальних дисциплін; розробка методик оцінювання успішності студентів для виявлення результатів використання GeoGebra та його вплив на аналітичні навички.

У цілому стверджуємо, що подальше дослідження використання GeoGebra на заняттях з аналітичної геометрії може дати можливість покращити методи навчання та педагогічних практик, а також збагатити розуміння взаємодії між технологіями та навчанням математики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: аналітична геометрія; основні геометричні об'єкти; прямі; площини; векторно-координатний метод; програмне середовище GeoGebra; динамічні моделі.

DYNAMIC GEOGEBRA ENVIRONMENT FOR SOLVING PROBLEMS IN ANALYTICAL GEOMETRY (MODULE "LINES AND PLANES")

Oleksandr MOSIIUK

mosxandrwork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3530-1359>

ABSTRACT

Formulation of the problem. The materials provided illustrate the use of the dynamic software GeoGebra for mastering the basic concepts of analytical geometry, in particular, the basic geometric objects - lines and planes. The study is aimed at optimizing the learning process and qualitatively solving problems in analytical geometry with a high level of visualization and interactivity.

In the module "Lines and planes", different types of geometric object data are considered and their properties are described, with all conclusions directly related to the mutual placement. Using the GeoGebra environment, students have the opportunity to visualize and solve complex problems using interactive models, which allows them to better understand and memorize the material and encourage independent research. The developed materials and examples of solutions will be useful for students, professors, and teachers of mathematics, as well as anyone who wants to improve their knowledge and skills in analytical geometry using interactive learning and visualization.

The key challenge that arises in this context may be the development of methods and pedagogical techniques to effectively implement this technology in the learning process to improve students' academic performance. In addition, ready-made solutions to this problem may include the development of pedagogical materials and learning resources that help optimize the learning process and increase students' interest in mathematics. Another pressing problem may be the development of a methodology for evaluating and analyzing the results of using GeoGebra in teaching analytical geometry to ensure the efficiency and quality of the educational process.

Materials and methods. A methodological description on this topic may include the following:

1. Using the dynamic mathematical software GeoGebra as the main tool for studying and solving problems in analytical geometry, because GeoGebra provides the ability to visualize geometric objects, create interaction between objects, as well as perform calculations, which contributes to a better understanding of the material and increases students' interest in learning mathematics.
2. Multimedia learning resources, such as video tutorials and demonstrations that demonstrate practical applications of GeoGebra for modeling lines, planes, and their relative positions.
3. Training materials that include exercises and tasks for applying GeoGebra to solve specific analytical geometry problems. These materials can include interactive tasks and practical examples to help students better understand mathematical concepts.
4. Pedagogical methods that focus on optimizing the learning and use of GeoGebra, such as instructions for teachers on how to effectively implement and integrate this tool into the classroom.
5. Tools for evaluating the results of using GeoGebra in education, such as testing methods and assessment of student achievement based on the implementation of this technology.

Results. The use of GeoGebra in analytical geometry classes gives positive results, in particular, an understanding of geometric concepts regarding the relationship between algebraic and geometric objects; develops analytical skills and allows students to actively experiment with geometric objects; prepares for the practical application of knowledge not only in analytical geometry in GeoGebra, but also in other fundamental disciplines. In general, using GeoGebra can help improve understanding and memorization of complex mathematical concepts, increase motivation to learn, and improve performance in various mathematical disciplines.

Conclusions. After the use of GeoGebra in the analytical geometry classroom, we can outline prospects for further research: evaluating the effectiveness of GeoGebra in teaching analytical geometry and its impact on student outcomes; optimizing pedagogical methods and techniques for teaching fundamental disciplines; developing methods for assessing student performance to identify the results of using GeoGebra and its impact on analytical skills.

In general, we argue that further research on the use of GeoGebra in analytical geometry classes can improve teaching methods and pedagogical practices, as well as enrich the understanding of the interaction between technology and mathematics learning.

KEYWORDS: analytical geometry; basic geometric objects; lines; planes; vector-coordinate method; GeoGebra software environment; dynamic models.

Освітня компонента «Аналітична геометрія» є обов'язковою дисципліною для здобувачів вищої освіти освітньо-професійної програми Середня освіта (Математика), оскільки є складовою циклу професійної підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Аналітична геометрія має міждисциплінарні зв'язки з класичними математичними дисциплінами та є базовою для вивчення диференціальної геометрії. За навчальним планом 2023-2024 р.р. аналітична геометрія викладається у другому та третьому семестрах в обсязі 10,5 кредитів, з яких 134 години є аудиторними. Програма освітньої компоненти складається з чотирьох модулів:

Модуль I. Метод координат. Векторна алгебра. Пряма на площині.

Модуль II. Площина в просторі. Пряма в просторі.

Модуль III. Криві другого порядку.

Модуль IV. Поверхні другого порядку (Ленчук & Фонарюк, 2023).

Аналітична геометрія – розділ математики, якій досліджує геометричні образи засобами алгебраїчного аналізу з застосуванням методу координат. *Мета вивчення освітньої компоненти* – оволодіння класичним векторним та координатним методом, теоретичними положеннями та основними застосуваннями аналітичної геометрії в різних задачах математики, їх

використання в подальших курсах із математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів (Яковець та ін., 2004). Вивчаючи цей курс, здобувач одночасно оволодіває і загальною математичною культурою, і розвиває своє математичне мислення, набуває вміння легко і швидко орієнтуватися в різних математичних ситуаціях. *Предмет навчальної дисципліни* включає основні методи та моделі векторної алгебри і аналітичної геометрії – вектори і дії над ними, рівняння прямої на площині, криві другого порядку, поверхні другого порядку.

Результатами вивчення аналітичної геометрії є розуміння основних об'єктів векторної алгебри та аналітичної геометрії: вектори, основні рівняння прямої у просторі, площини, прямої на площині, рівняння кривих другого порядку, рівняння поверхонь другого порядку та володіння векторним методом розв'язування задач і використання методу координат для задання і дослідження геометричних об'єктів і для розв'язування прикладних задач.

Базовими поняттями аналітичної геометрії є найпростіші геометричні фігури: точки, прямі, площини, криві і поверхні другого порядку. Основними засобами дослідження є метод координат і методи векторної алгебри. Введення на площині системи координат дозволяє визначати положення точки площини заданням двох чисел – її координат, а положення лінії на площині визначати за допомогою рівняння (тобто рівності, що зв'язує координати точок лінії).

Означення. Рівнянням лінії (або кривої) на площині xOy називається таке рівняння $F(x; y) = 0$ з двома змінними, яке перетворюють в рівність координати x, y кожної точки лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії (Білоусова, 1957).

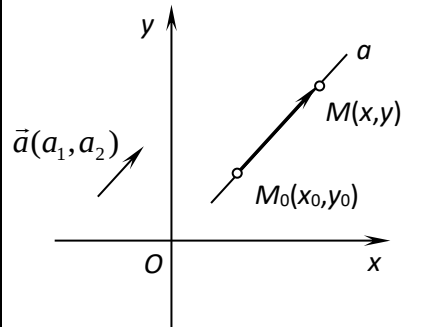
Рівняння лінії надає можливість вивчення геометричних властивостей лінії замінити на дослідження його рівняння.

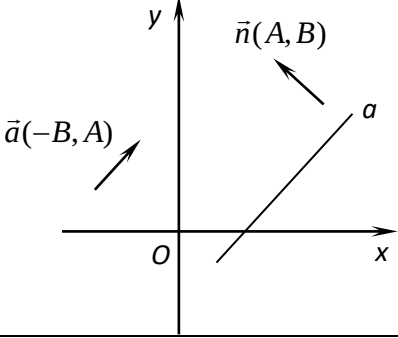
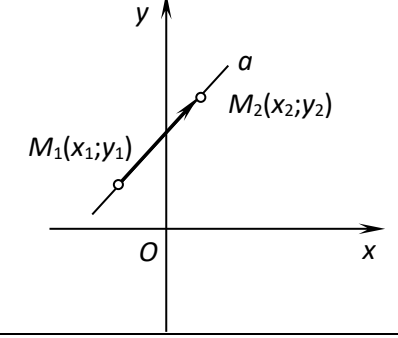
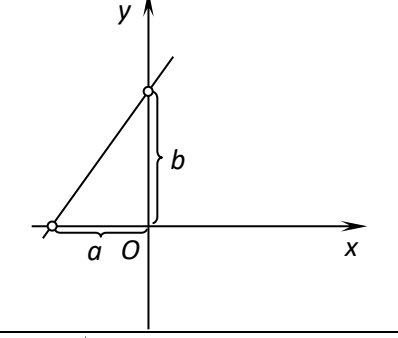
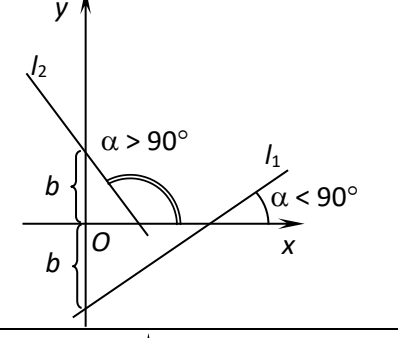
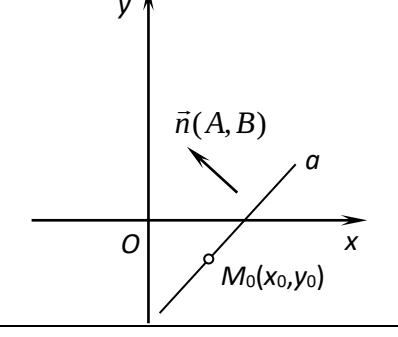
Теорема. У загальній декартовій системі координат на площині кожна пряма може бути задана лінійним рівнянням. І навпаки, будь-яке лінійне рівняння в загальній декартовій системі координат на площині визначає пряму.

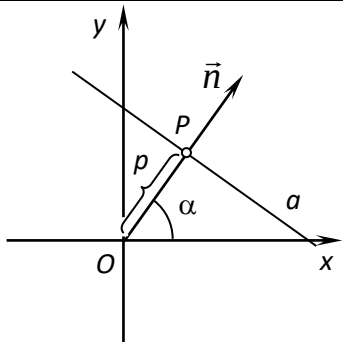
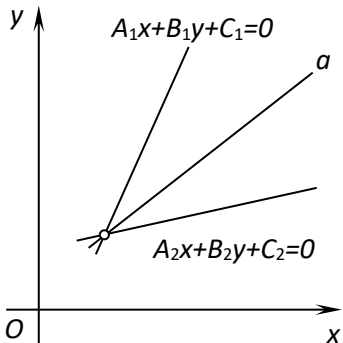
Для розв'язання задач на пряму на площині використовуємо різні типи рівнянь залежно від даних в умові. Тому наведемо приклад базової таблички з рівняннями, яку можуть здобувачі заповнити за вказівкою викладача або дати власну інтерпретацію за лекційним матеріалом теми (табл. 1-3).

Таблиця 1

Рівняння прямої на площині (шпаргалка для практичних занять)

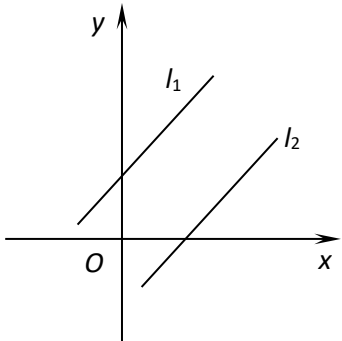
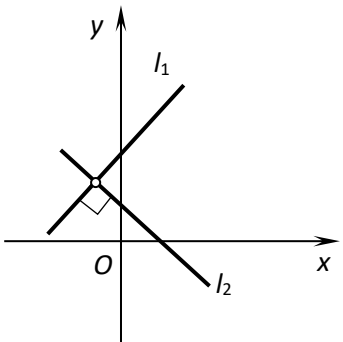
1.		$\overrightarrow{MM_0} = t \cdot \vec{a}$	Векторне рівняння прямої
2.		$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$	Параметричні рівняння прямої
3.		$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$	Канонічне рівняння прямої

4.		$Ax + By + C = 0$	Загальне рівняння прямої
5.		$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки
6.		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Рівняння прямої у відрізках
7.		$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом
8.		$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	Рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ та має заданий вектор нормалі $\vec{n}(A; B)$

9.		$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \text{ де}$ $\cos \alpha = \mu A, \sin \alpha = \mu B, -p = \mu C$ $, \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \text{нормуючий}$ множник	Рівняння прямої в нормальній формі
10.		$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) +$ $+ \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ або $A_1x + B_1y + C_1 +$ $+ \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$	Рівняння пучка прямих

Таблиця 2

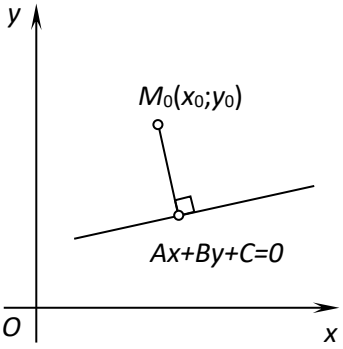
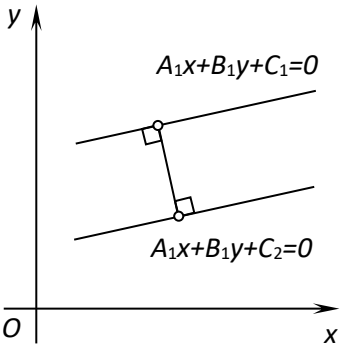
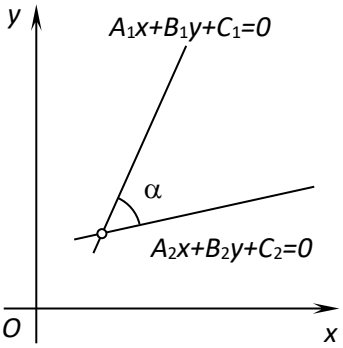
Розміщення прямих на площині

1.		$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$ $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	Прямі паралельні
		$l_1 : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$ $l_2 : \frac{x - x_0}{b_1} = \frac{y - y_0}{b_2},$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$	
		$l_1 : y = k_1x + b_1,$ $l_2 : y = k_2x + b_2,$ $k_1 = k_2$	
2.		$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$ $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	Прямі перпендикулярні
		$l_1 : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$ $l_2 : \frac{x - x_0}{b_1} = \frac{y - y_0}{b_2},$ $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$	

		$l_1 : y = k_1x + b_1,$ $l_2 : y = k_2x + b_2,$ $k_1 \cdot k_2 = -1$	
--	--	--	--

Таблиця 3

Метричні співвідношення

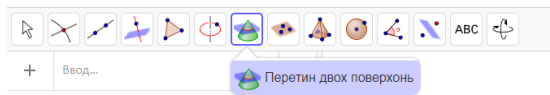
1.		$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ де } M(x_0, y_0) - \text{ координати точки}$	Відстань від точки до прямої
2.		$d = \frac{ C_2 - C_1 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Відстань між паралельними прямими
3.		$\cos \alpha = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	Кут між двома прямими

Дані проілюструємо розв'язання задач на пряму на площині зі стандартним підходом до оформлення та у вільнопоширювальному динамічному середовищі GeoGebra (Ракута, 2016).

Застосунок *GeoGebra Класична* має шість вкладок для різних математичних об'єктів та розділів (*Графіки, Геометрія, 2D та 3D графіка, СКА, Таблиця, Ймовірності*). Для унаочнення нашої теми дослідження виберемо *3D графіку*, яка відобразиться порід з протоколом побудови. Також в середовищі можливо працювати одночасно як на площині, так в просторі.

Інструментів для роботи в полотнах середовища достатньо, можна виконувати зображення точок, прямих, площин, просторових ліній та поверхонь. Наприклад, є інструмент для зображення лінії, як перетину двох поверхонь чи просторових тіл; для проведення площини через три точки; перпендикулярної чи

паралельної площини (при обиранні інструменту дивимся на коментар-підказку тощо):



Ще наголосимо на певних особливостях зображення геометричних об'єктів. Основний об'єкт – точка – побудова наочно можлива лише на осях координат або на площині Oxy або за координатами вводимо в рядочок протоколу побудови. Для багатьох просторових тіл є відповідні інструменти, або для зображення об'єкта підходимо через його аналітичне задання (рівняння, нерівності, системи). Також можна виконати налаштування зображення (колір, тип ліній, обмеження за відображенням тощо). Навіть можлива анімація точок об'єкта, наприклад, при русі по іншому об'єкту, або в налаштуваннях обираємо «залишати слід» (рис. 1):

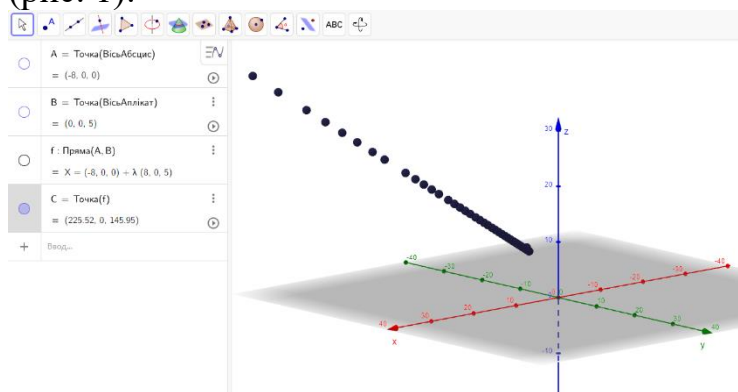


Рис. 1. Точка, яка рухається вздовж прямої

Задача 1. Яким є взаємне розміщення прямих $2x - y = 8$ і $x + y = 6$? Якщо вони паралельні, то обчисліть відстань між ними; якщо прямі перетинаються, то обчисліть кут між ними.

Розв'язання. Для заданих прямих запишемо їх вектори нормалі $\vec{n}_1(2;-1)$ і $\vec{n}_2(1;1)$. Перевіримо умову паралельності $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$ (координати – не пропорційні), тому прямі не є паралельними. Застосуємо формулу обчислення косинуса кута між двома прямими $\cos \alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Отже, $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Якщо шукати відповіді у динамічному середовищі GeoGebra, то звернемо увагу на інструменти, які допоможуть це зробити. Якщо обрати інструмент *Перетин* та натиснути на об'єкти, то має з'явитись спільна точка (до нашої задачі) – точка А. Отже, прямі з умови перетинаються, тому оберемо інструмент *Вимірювання Кута* та підпишемо результат (вийшло $71,565^\circ$, у налаштуваннях стоїть *три знаки після коми*). Додатково відкриємо СКА (систему комп'ютерної алгебри), щоб порівняти відповіді у зошиті та в середовищі (рис. 2).

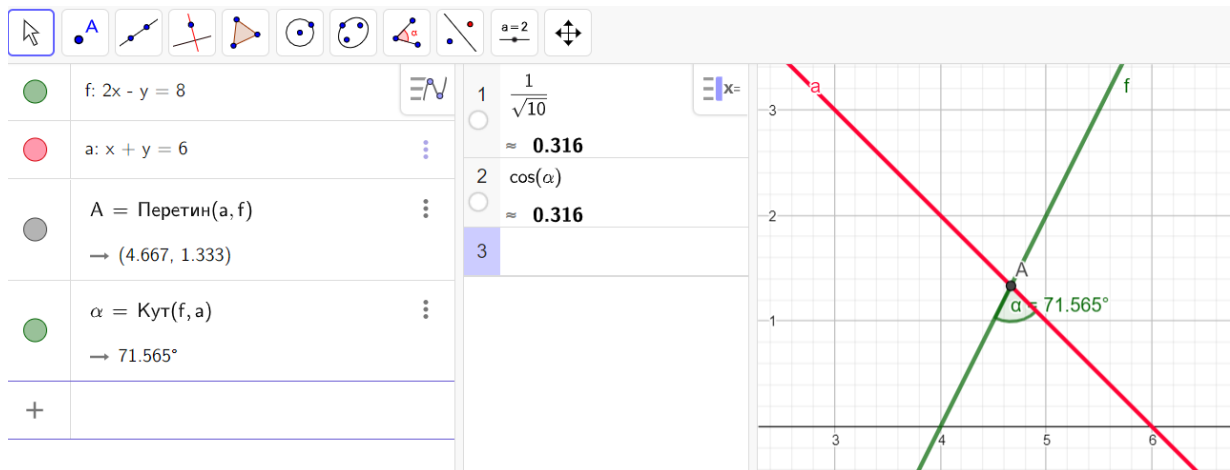


Рис. 2. Розв'язання задачі 1 у середовищі GeoGebra

Задача 2. Пряма задається точкою $C(6;5)$ і вектором нормалі $\vec{n}(1;2)$.
Запишіть рівняння прямої у наступних формах:

1. Канонічне рівняння.
2. Параметричні рівняння прямої.
3. Загальне рівняння.
4. Рівняння прямої «у відрізках».
5. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
6. Рівняння прямої у нормальній формі.

Розв'язання. Скористаємося типом рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ та має заданий вектор нормалі $\vec{n}(A; B)$: $(x - 6) + 2(y - 5) = 0$. Тоді після розкриття дужок загальне рівняння прямої: $x + 2y - 16 = 0$. Виділяємо напрямний вектор (який перпендикулярний до вектора нормалі): $\vec{a}(-2; 1)$, отже канонічне рівняння: $\frac{x-6}{-2} = \frac{y-5}{1}$. Прирівняємо дробу до t , виразимо x , y і

одержимо параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$. Перетворивши загальне рівняння прямої легко одержати рівняння прямої «у відрізках»: $\frac{x}{16} + \frac{y}{8} = 1$ або

рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = -\frac{1}{2}x + 8$, і рівняння прямої у нормальній формі: $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{16}{\sqrt{5}} = 0$.

Перевірку деяких проміжних обчислень для запису відповідей на запитання можна провести, виконавши наступні кроки (рис. 3):

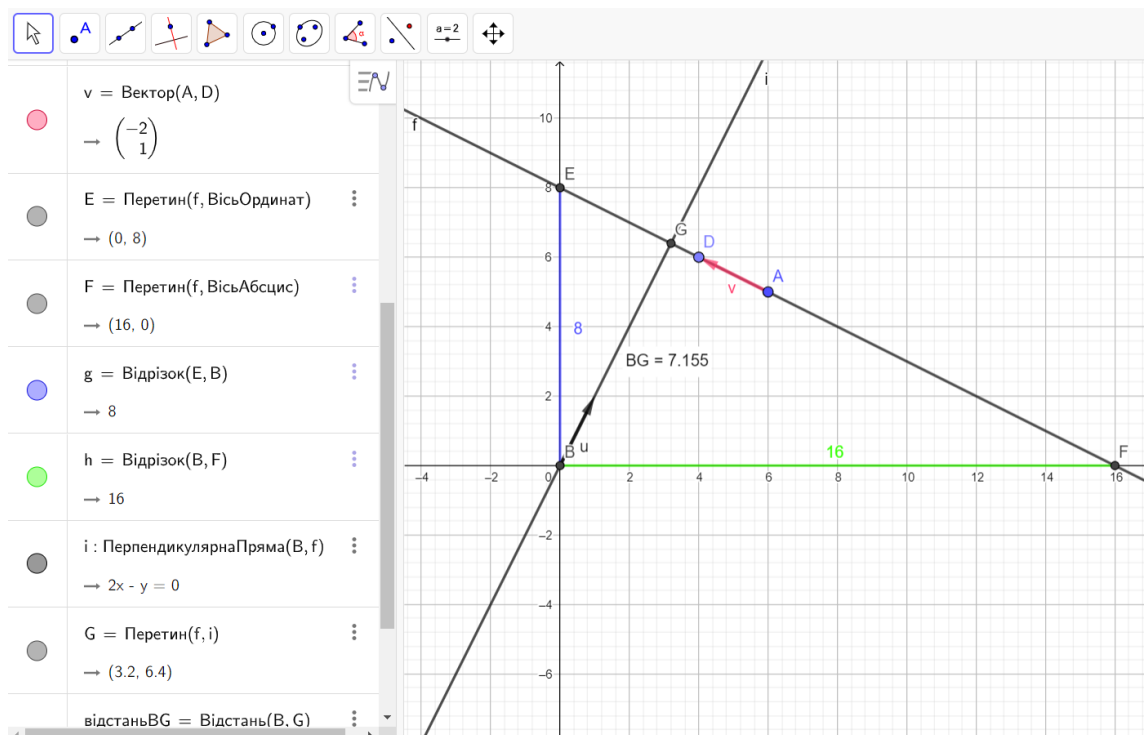
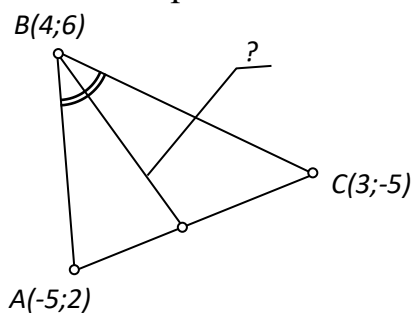
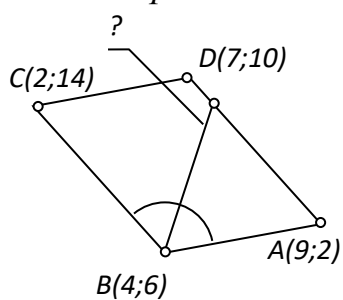


Рис. 3. Перевірка обчислень до задачі 2

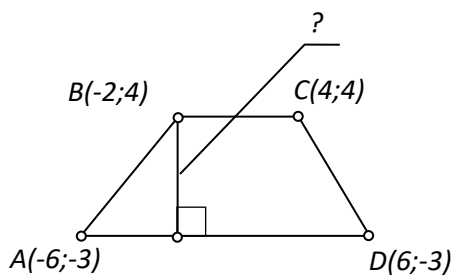
Задача 3. Запишіть рівняння визначених за варіантами геометричного елемента.



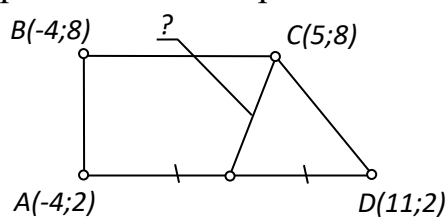
Варіант 1



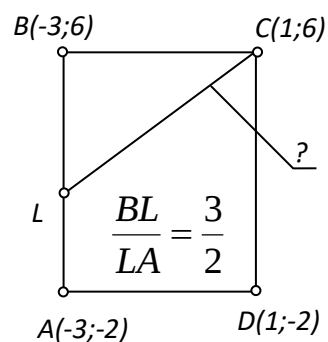
Варіант 3



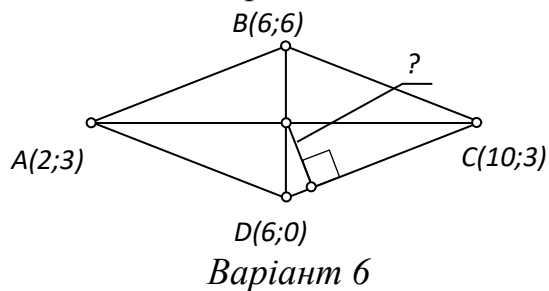
Варіант 5



Варіант 2



Варіант 4



Варіант 6

Розв'язання. Оберемо для прикладу 4-й варіант. Прямокутник задається координатами його верши $A(-3;-2)$, $B(-3;6)$, $C(1;6)$, $D(1;-2)$. З рисунку видно, що точка L ділить відрізок AB у відношенні $3 : 2$, починаючи з вершини B . Для того щоб знайти рівняння прямої CL , досить відшукати координати точки L , застосувавши формули поділу відрізка у заданому відношенні. Отже,

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_A}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{3}{2} \cdot (-3)}{1 + \frac{3}{2}} = -3, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_A}{1 + \lambda} = \frac{6 + \frac{3}{2} \cdot (-2)}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{6}{5}. \quad \text{Скористаємося типом}$$

рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Тоді

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 6}{\frac{6}{5} - 6}, \text{ або ж після перетворень } 6x - 5y + 24 = 0 - \text{рівняння шуканого}$$

геометричного елемента.

Оскільки чотирикутник з умови задано координатами вершин, то його легко побудувати на 2D полотні. Точку L вибираємо *На Об'єкті* – AB і рухаємо таким чином, щоб вона ділила сторону AB у відношенні $3 : 2$ (можна додати на полотні динамічну формулу для автоматичного обрахунку відношення). Далі сполучаємо точки L та C , і в протоколі побудови бачимо шукане рівняння (рис. 4): $-4,8x + 4y = 19,2$. Якщо помножити ліву та праву частини цього рівняння на $-\frac{5}{4}$, то одержимо теж відповідь $6x - 5y + 24 = 0$.

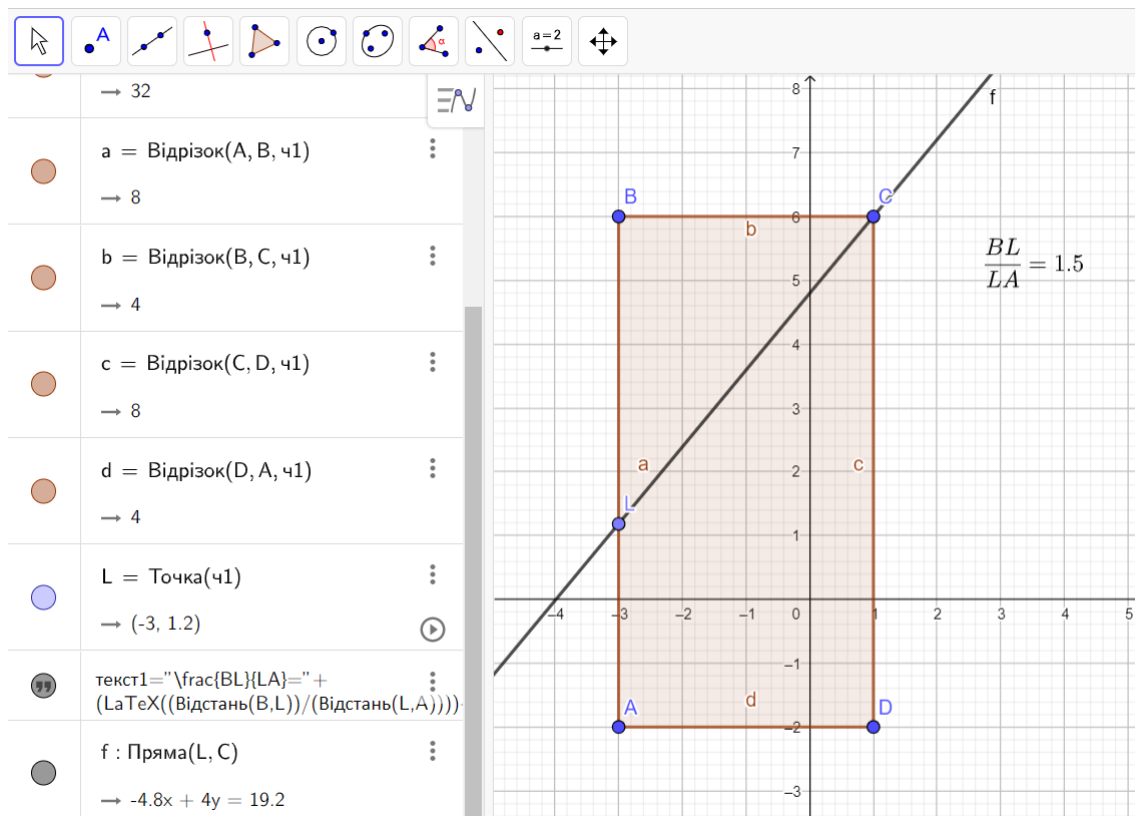


Рис. 4. Розв'язання задачі 3 (варіант 4)

Задача 4. Знайдіть основу перпендикуляра, проведеного з даної точки $A(-4;9)$ до прямої $a: x - y = -7$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти основу перпендикуляра, проведеного із точки $A(-4;9)$ до прямої $a: x - y = -7$, складемо рівняння прямої b , яка проходить через точку A і перпендикулярна прямій a . Вектор нормалі прямої a буде напрямним вектором прямої b . Запишемо канонічне рівняння прямої b , використовуючи, що $\vec{n}(1;-1)$ – вектор нормалі прямої a , отже, напрямний вектор прямої b , тоді: $\frac{x+4}{1} = \frac{y-9}{-1} \Rightarrow x + y - 5 = 0$. У такому разі точка перетину прямих a та b і буде шуканою основою перпендикуляра. Тому розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - y = -7, \\ x + y = 5, \end{cases}$ дасть нам координати шуканої точки $(-1;6)$.

У середовищі GeoGebra відповідь одержимо, використавши два інструменти: проведення перпендикулярної прямої та відшукування точки перетину (рис. 5):

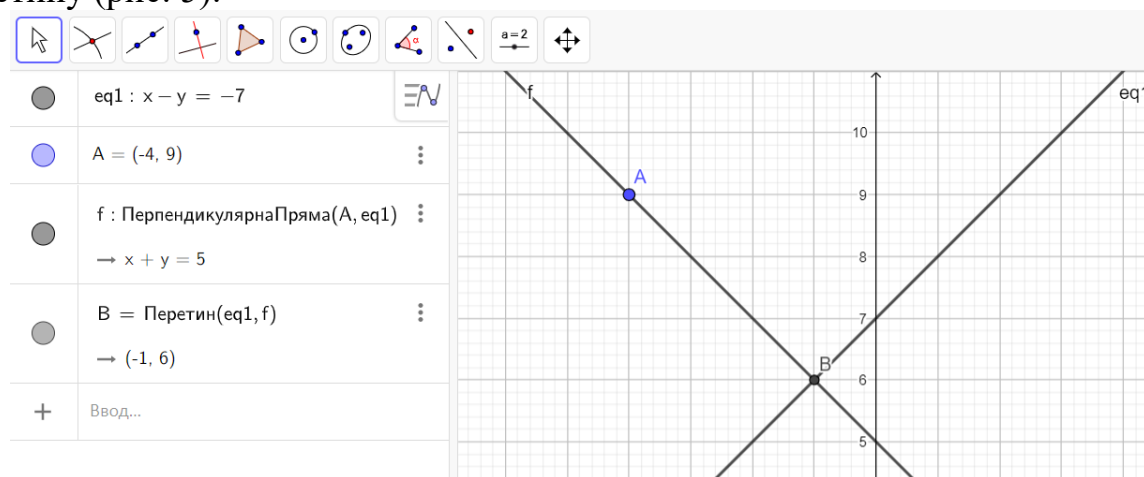


Рис. 5. Розв'язання задачі 4

Задача 5. Запишіть рівняння медіани, проведеної з точки C ; бісектриси, проведеної із точки B та висоти, проведеної з точки A , якщо трикутник задається координатами його вершин $A(-10;11)$, $B(-4;0)$, $C(13;6)$.

Розв'язання. Для того, щоб записати рівняння медіани, досить знайти координати середини сторони AB : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -7$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{11}{2}$ та використати рівняння прямої, яка проходить через дві точки (т. C і M) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (1). Підставивши значення координат точок у вираз (1) та спростивши його, одержуємо $x - 40y + 227 = 0$.

Запишемо рівняння висоти, проведеної з точки A до сторони BC . Для цього складемо рівняння сторони BC (рівняння прямої, яка проходить через дві точки) і перетворимо його в загальне рівняння, матимемо: $6x - 17y - 24 = 0$. Виділимо вектор нормалі – $\vec{n}(6;-17)$. Але вектор нормалі прямої BC паралельний висоті, опущеної з точки A на сторону BC , тому просто запишемо канонічне рівняння

шуканого перпендикуляра $\frac{x+10}{6} = \frac{y-11}{-17}$. Після перетворень маємо такий результат: $17x + 6y + 104 = 0$.

У випадку бісектриси, в першу чергу слід обчислити координати її напрямного вектора. Для цього визначимо одиничні вектори сторін: $\frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \left(-\frac{6}{\sqrt{157}}; \frac{11}{\sqrt{157}}\right)$ і $\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \left(\frac{17}{5\sqrt{13}}; \frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$, додавання яких і дасть напрямний вектор бісектриси $\vec{b} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \left(-\frac{6}{\sqrt{157}} + \frac{17}{5\sqrt{13}}; \frac{11}{\sqrt{157}} + \frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$.

Тепер можемо записати канонічне рівняння бісектриси $\frac{x+4}{-\frac{6}{\sqrt{157}} + \frac{17}{5\sqrt{13}}} = \frac{y}{\frac{11}{\sqrt{157}} + \frac{6}{5\sqrt{13}}}$. Якщо виконати спрощення та наближені обчислення із округленням до другого знаку після коми, матимемо: $-0,93x + 0,36y - 3,73 = 0$.

Тепер це саме оформимо в середовищі GeoGebra (рис. 6):

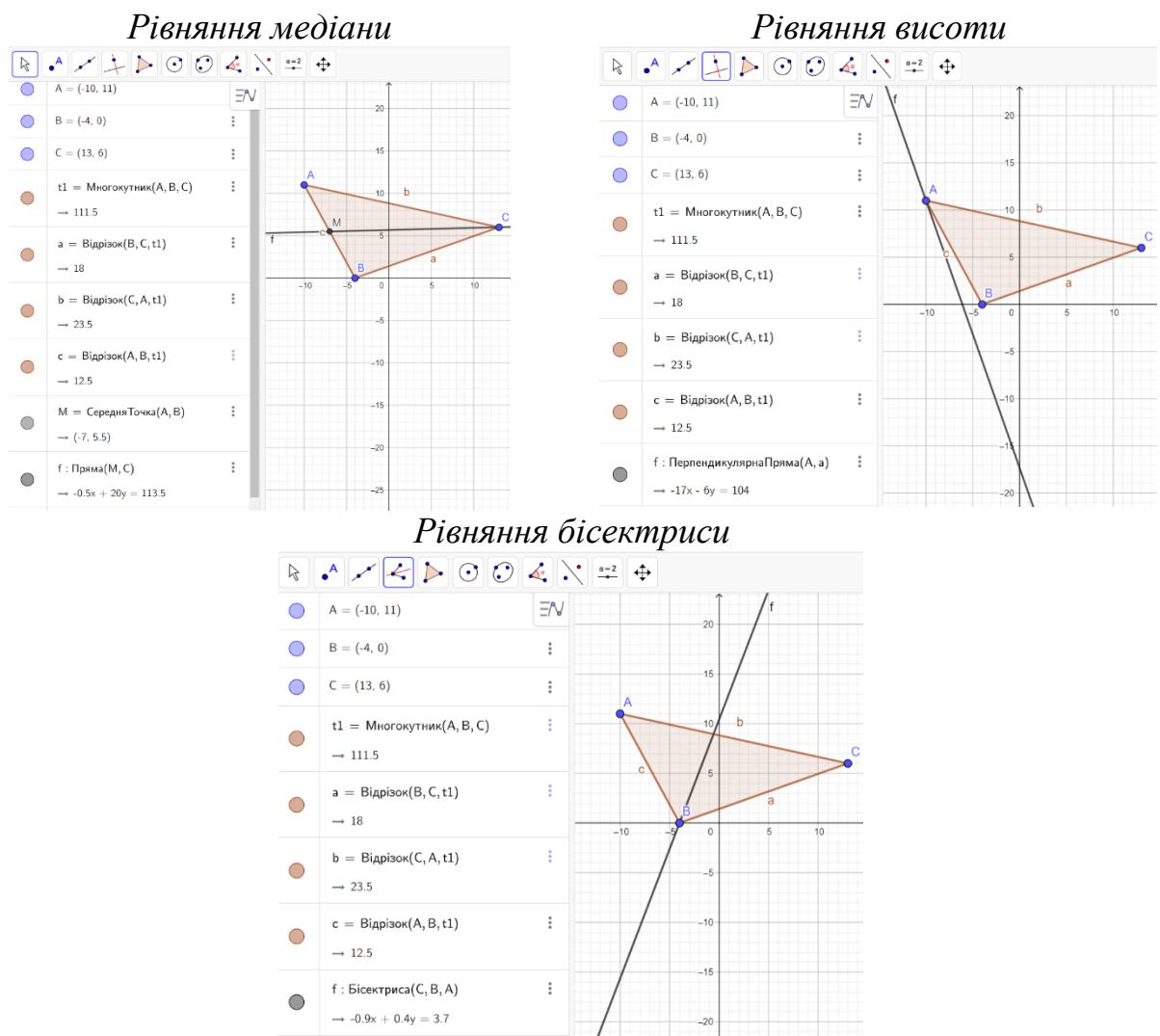


Рис. 6. Відповіді до задачі 5

Задача 6. Знайдіть найкоротший шлях променя від точки $A(-7;4)$ до точки $B(1;4)$, якщо він виходить із точки A , відбивається від прямої $a: x - 7y = -2$ та потрапляє в точку B .

Розв'язання. Для того, щоб знайти найкоротший шлях променя з точки A в точку B , відобразимо спочатку точку A симетрично відносно прямої a , а потім знайдемо точку перетину прямих $A'B$ і a .

Напрямний вектор $\vec{a}(7;1)$ прямої a буде вектором нормалі прямої b , яка проходить через точку $A(-7;4)$ та перпендикулярна до заданої прямої. Скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через точку із заданим вектором нормалі, та запишемо рівняння прямої b : $7x + y + 45 = 0$. Знайдемо координати точки O – точки перетину прямих a і b . Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 7y = -2, \\ 7x + y = -45. \end{cases}$$

Отже, $O(-6,34; -0,62)$. Точка A' симетрична до точки A відносно

прямої a , тобто точка O – середина відрізка AA' . Тоді із формул поділу відрізка визначимо координати точки $A'(-5,68; -5,24)$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки B і A' , використавши рівняння прямої, що задається двома точками, та після перетворення маємо $231x - 167y + 437 = 0$. На передостанньому кроці знаходимо точку перетину прямої $A'B$ із прямою a , розв'язавши систему

$$\begin{cases} x - 7y = -2, \\ 231x - 167y = -437. \end{cases}$$

У даному випадку розв'язком буде пара чисел $(-1,88; 0,02)$ –

це координатами точки C . І на останньому етапі обчислимо шлях променя із точки A в точку B , визначивши довжини відрізків AC та CB . Тобто при додаванні їх довжин маємо відповідь: 11,4 одиниць.

Як бачимо, розв'язання вийшло досить об'ємним, як в міркуваннях, так і в обчисленнях. Перевіримо себе, виконавши побудови в середовищі GeoGebra (рис. 7).

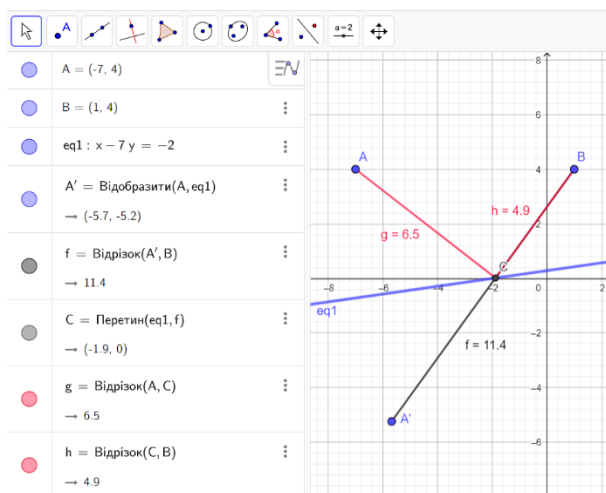


Рис. 7. Контрольні обчислення до задачі 6

Введення у просторі системи координат дозволяє визначати положення точки простору заданням трьох чисел – її координат, а положення лінії та поверхонь у просторі визначати за допомогою рівнянь (тобто рівностей, що зв'язує координати точок лінії або поверхонь).

Означення. Рівнянням поверхні називається таке рівняння $F(x; y; z) = 0$ з трьома змінними, яке перетворюють в рівність координати x, y, z кожної точки поверхні і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить їй.

Рівняння поверхні дозволяє вивчати геометричні властивості поверхні, досліджуючи її рівняння.

Теорема. У загальній декартовій системі координат у просторі кожна площина може бути задана лінійним рівнянням. І навпаки, будь-яке лінійне рівняння в загальній декартовій системі координат у просторі визначає площину.

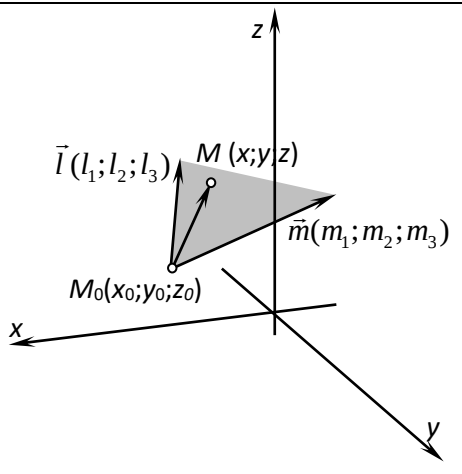
Площина – основний геометричний об’єкт, означення не має. Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно просторової декартової системи координат.

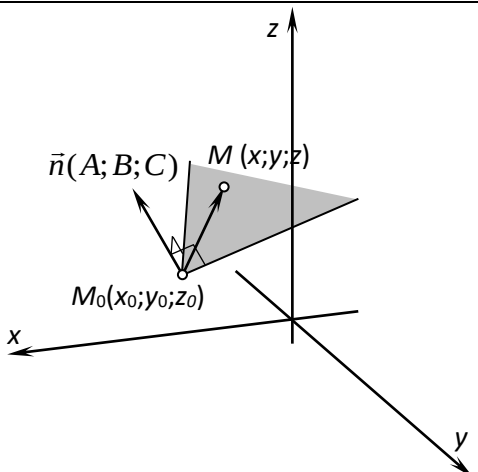
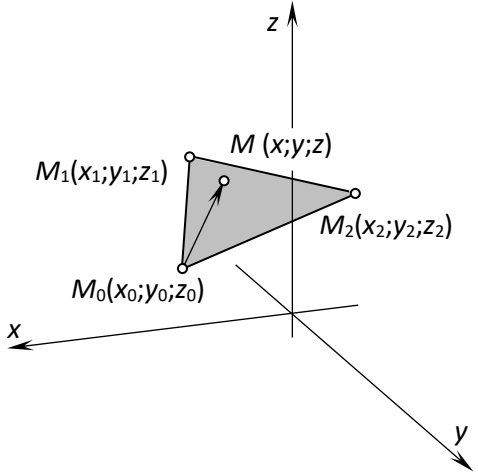
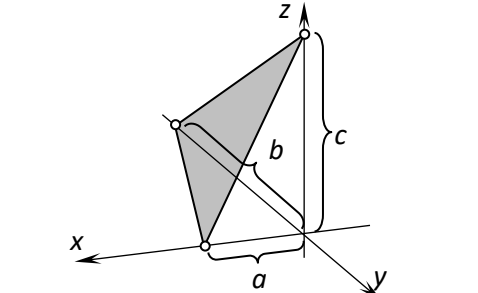
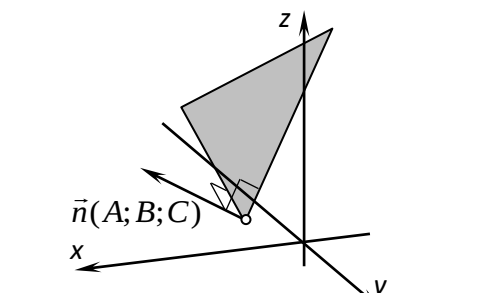
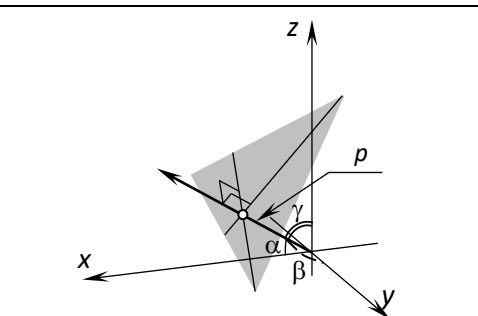
При виведенні рівнянь площини векторним методом використовують компланарність трьох векторів або перпендикулярність двох векторів

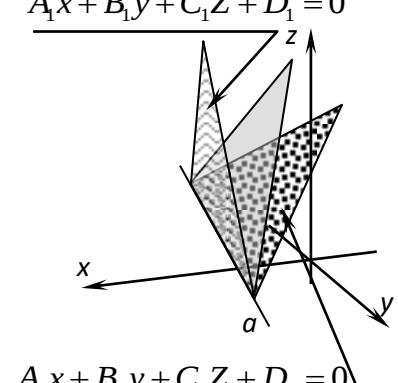
Для розв’язання задач на площині та прямі в просторі використовуємо теж різні типи рівнянь залежно від даних в умові. Аналогічно наведемо приклад базової таблички з рівняннями, яку можуть здобувачі заповнити за вказівкою викладача або дати власну інтерпретацію за лекційним матеріалом (табл. 4-7).

Таблиця 4

Рівняння площини

1.		$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{l} + v\vec{m}$	Векторно-параметричне рівняння площини
2.		$\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vm_1, \\ y = y_0 + ul_2 + vm_2, \\ z = z_0 + ul_3 + vm_3. \end{cases}$	Параметричні рівняння площини
3.		$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$	Рівняння площини через точку і два неколінеарні вектори, які їй паралельні (належать)

4.		$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	Рівняння площини, яка проходить через точку і має заданий вектор нормалі $\vec{n}(A, B, C)$
5.		$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$	Рівняння площини через три точки, що не належать одній прямій
6.		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	Рівняння площини у відрізках на осях
7.		$Ax + By + Cz + D = 0.$	Загальне рівняння площини
8.		$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$ $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} -$ нормуючий множник	Рівняння площини у нормальній формі,

9.		$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$	Пучок площин
----	---	--	--------------

Далі покажемо, як записують рівняння прямої в просторі за різними початковими даними, адже створення динамічної моделі має повністю покладатись на теорію. Нехай пряма задана в просторі точкою і напрямним вектором. Тоді канонічні рівняння прямої в просторі ми одержимо, застосувавши умову колінеарності векторів (біжучого та фіксованого), її запишемо через пропорційність координат векторів: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$. Від цього рівняння легко перейти до параметричних рівнянь прямої.

Аналогічно можна записати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Рівняння можна розглядати як окремий випадок її канонічних рівнянь. Теж використали колінеарність біжучого та фіксованого вектора, який запишемо, обравши за контрольні точки задані точки з умови: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Пряму в просторі можна задати відносно декартової прямокутної системи координат рівняннями двох площин, які по ній перетинаються (найбільш поширений геометричний спосіб задання). Отже, пряма в просторі може бути задана системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Кожну пряму в просторі можна розглядати як вісь пучка площин. Отже, пряму можна задати будь-якою парою площин, які належать до цього пучка.

Щоб звести систему рівнянь, які описують пряму в просторі, до канонічного виду потрібно: 1) визначити координати однієї з точок прямої; 2) запишемо якийсь напрямний вектор прямої.

Щоб визначити координати однієї точки прямої, надамо одній змінній, наприклад z , довільного значення z_0 і розв'яжемо систему рівнянь відносно двох інших змінних, тобто відносно x і y .

Отже для визначення координат напрямного вектора прямої знайдемо векторний добуток векторів-нормалей площин з системи $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Це можна зробити за формулою:

$$[n_1 \cdot n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = i(B_1C_2 - C_1B_2) + j(C_1A_2 - A_1C_2) + k(A_1B_2 - B_1A_2).$$

Напрямний вектор $u = \{l, m, n\}$ прямої перетину двох площин перпендикулярний до векторів їх нормалей n_1 і n_2 , отже, колінеарний їх векторному добутку: $u = q[n_1 \cdot n_2]$, де q – коефіцієнт пропорційності. Але координати двох колінеарних векторів пропорційні. Запишемо відношення: $l : m : n = (B_1C_2 - C_1B_2) : (C_1A_2 - A_1C_2) : (A_1B_2 - B_1A_2)$.

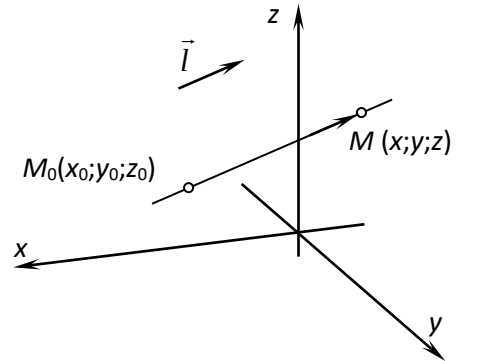
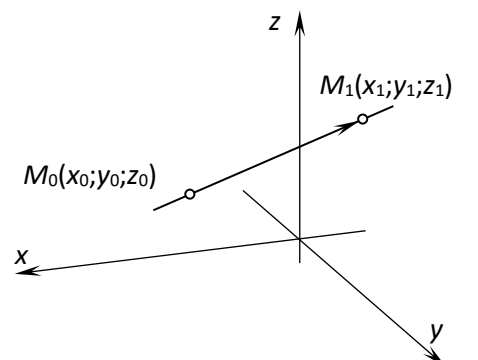
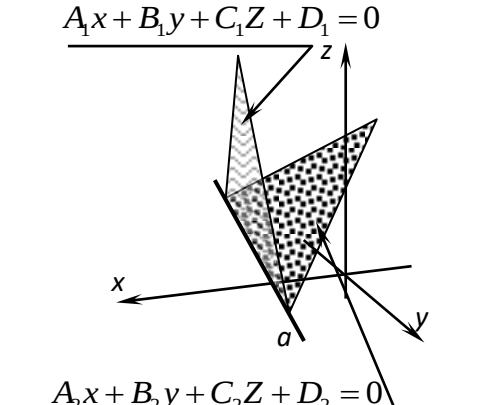
Підставляючи в рівняння замість l, m, n числа, їм пропорційні, дістанемо:

$$\frac{x - x_0}{B_1C_2 - C_1B_2} = \frac{y - y_0}{C_1A_2 - A_1C_2} = \frac{z - z_0}{A_1B_2 - B_1A_2} \quad - \text{це рівняння прямої в канонічній}$$

формі. Тепер усе викладемо в таблиці для зручності роботи на практичних заняттях.

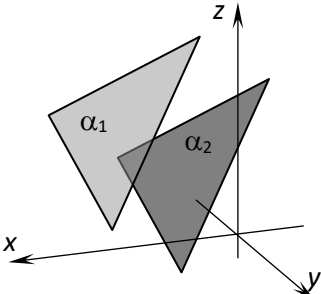
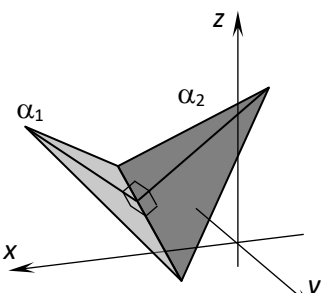
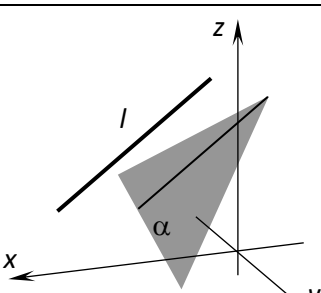
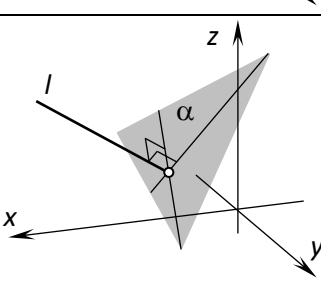
Таблиця 5

Рівняння прямої у просторі

1.		$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{l}$	Векторне рівняння прямої
2.		$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t. \end{cases}$	Параметричні рівняння прямої
3.		$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3}$	Канонічне рівняння прямої
4.		$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки
5.		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$	Пряма задається перетином двох площин

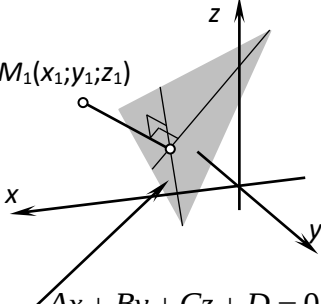
Таблиця 6

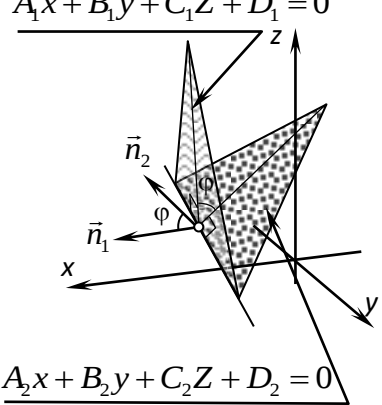
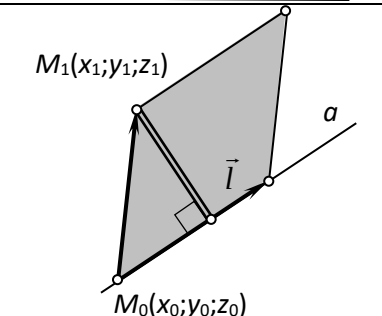
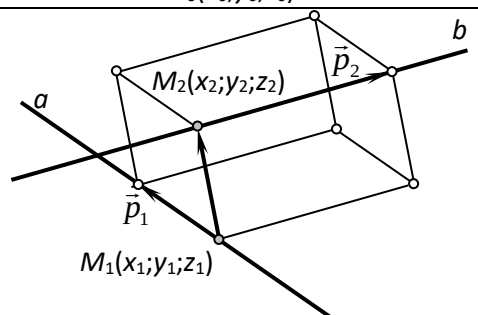
Розміщення прямих і площин у просторі

1.		$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	Площини паралельні
2.		$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	Площини перпендикулярні
3.		$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $l: \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ $Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0$	Пряма і площина паралельні
4.		$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $l: \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3},$ $\frac{A}{l_1} = \frac{B}{l_2} = \frac{C}{l_3}$	Пряма і площина перпендикулярні

Таблиця 7

Метричні співвідношення

1.		$\rho(M_1, \Pi) = \frac{ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	Відстань від довільної точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини Π
----	---	--	--

2.		$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 } =$ $= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	Кут між двома площинами
3.		$d = \frac{ [\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{l}] }{ \vec{l} }$	Відстань від точки до прямої
4.		$d = \frac{ (\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2) }{ [\vec{p}_1, \vec{p}_2] }$	Відстань між двома мимобіжними прямими

Задача 7. Знайдіть відстань між двома площинами $7x + 4y + 2z - 1 = 0$, $-14x - 8y - 4z + 6 = 0$.

Розв'язання. Умова паралельності площин $\frac{7}{-14} = \frac{4}{-8} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{6}$ виконується.

Поділимо ліву і праву частини другого рівняння на (-2) : $7x + 4y + 2z - 3 = 0$, тоді вільний член $D_2 = -3$. Застосуємо формулу відстані між паралельними площинами

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{7^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{69}} \approx 0,24.$$

Для розв'язання задачі в середовищі *Оберемо* точку A на одній з площин, далі проведемо *Перпендикуляр* до площин (теж використаємо інструмент середовища), знайдемо *Точку перетину* іншої площини та перпендикуляра (на рис. 8 це точка B). Наша шукана відстань – це довжина відрізка AB .

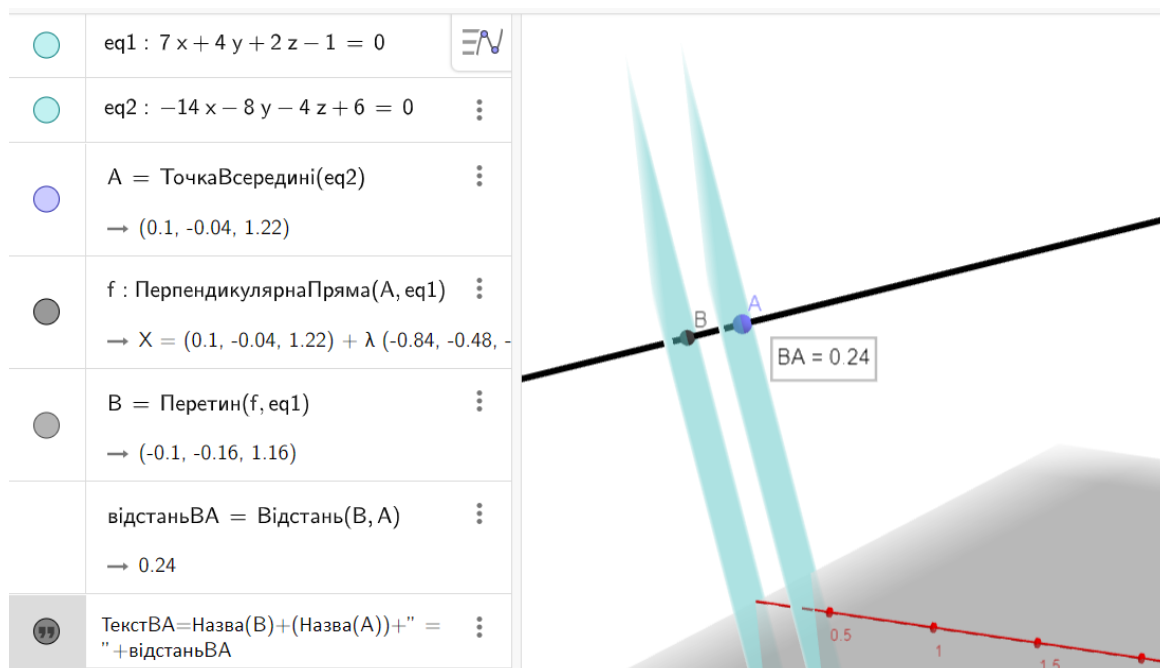


Рис. 8. Розв'язання задачі 7

Базовими задачами на складання рівняння площини є наявність в умові задачі потрібних геометричних об'єктів, наприклад, точку, через яку має проходити площину, та вектора нормалі (рис. 9). До речі, зверніть увагу на задання в протоколі вектора: маємо вектор-стовпчик, задали через кінцеву точку.

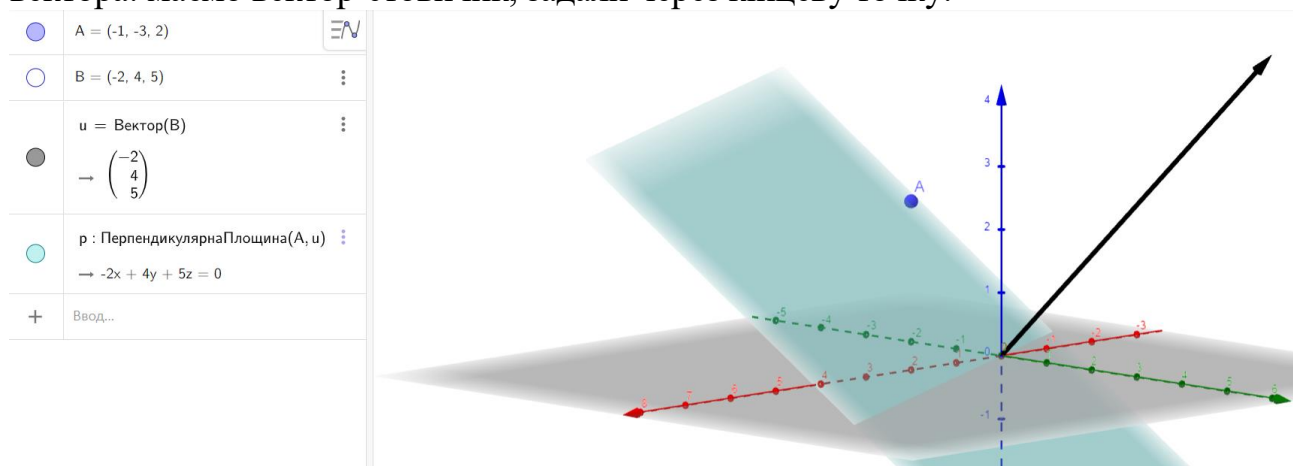


Рис. 9. Задання площини через точку і вектор нормалі

Задача 8. Площина задається точкою $A(-6;-2;3)$ і прямою $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$. Запишіть наступні рівняння площини.

1. Параметричні рівняння площини.
2. Рівняння площини у відрізках на осях.
3. Загальне рівняння площини.
4. Рівняння площини у нормальній формі.

Розв'язання. Визначимо неколінеарні вектори, що визначатимуть площину: напрямний вектор прямої $\vec{l}(3;3;2)$ і вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець на прямій, наприклад у точці $M_0(4;1;-2)$. Звідси координати вектора $\vec{AM}(10;3;-5)$. У такому разі можна записати параметричні рівняння

шуканої площини: $\begin{cases} x = -6 + 3u + 10v, \\ y = -2 + 3u + 3v, \\ z = 3 + 2u - 5v. \end{cases}$ Загальне рівняння площини доцільно

виводити, спочатку записавши рівняння площини через точку і два неколінеарні вектори, які їй паралельні $\begin{vmatrix} x+6 & y+2 & z-3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$, а потім спростивши матимемо:

$$3x - 5y + 3z - 1 = 0, \text{ тоді рівняння прямої у відрізках (майже без змін): } \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{5}} + \frac{z}{\frac{1}{3}} = 1$$

Для того, щоб перейти до рівняння прямої в нормальній формі обчислюємо нормуючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + 25 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{43}}$ і його беремо із знаком

"+", оскільки вільний член від'ємний. Отже, $\frac{3}{\sqrt{43}}x - \frac{5}{\sqrt{43}}y + \frac{3}{\sqrt{43}}z - \frac{1}{\sqrt{43}} = 0$.

У середовищі GeoGebra ми можемо перевірити вид загального рівняння та відрізки, які відтинає площина на осях координат (рис. 10). Бачимо в протоколі побудови «інше» загальне рівняння площини, але його можна поділити на вільний член, і матимемо відповідь, аналогічну до теоретичних обрахунків. І не забуваємо, що в налаштування стоїть округлення та подання відповіді з двома знаками після коми.

До речі, при введенні у протокол побудови канонічних рівнянь прямої (наприклад, $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$), середовище розглядає пряму через геометричне задання – як перетин двох площин (наприклад, $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{3}$ та $\frac{x-4}{3} = \frac{z+2}{2}$).

	f : $(\frac{x-4}{3} + 0z = \frac{y-1}{3}, \frac{x-4}{3} = \frac{z+2}{2})$	
	→ X = (5.36, 2.36, -1.09) + λ (0.17, 0.17, 0.11)	
	B = Точка(f)	
	→ (9.35, 6.35, 1.57)	
	C = Точка(f)	
	→ (2.14, -0.86, -3.24)	
	p : Площина(A, B, C)	
	→ -50.48x + 84.13y - 50.48z = -16.83	
	D = Перетин(ВісьОрдинат, p)	
	→ (0, -0.2, 0)	
	E = Перетин(ВісьАбсцис, p)	
	→ (0.33, 0, 0)	
	F = Перетин(ВісьАплік, p)	
	→ (0, 0, 0.33)	

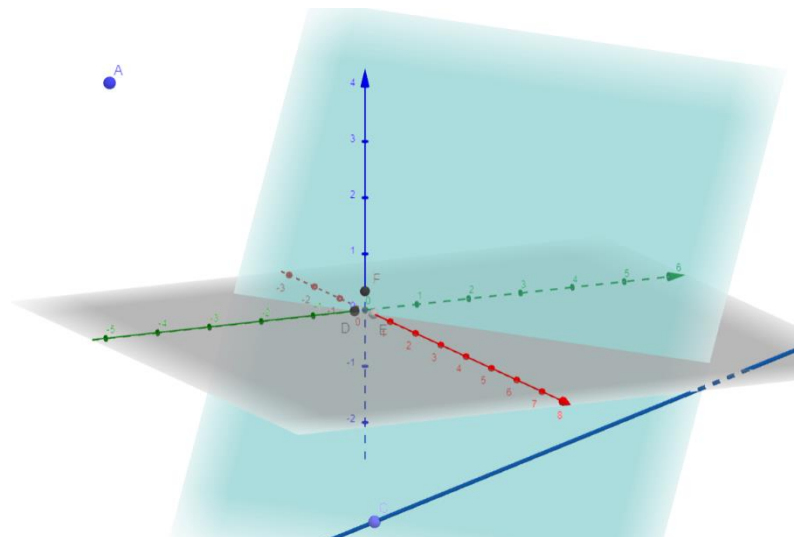


Рис. 10. Деякі обчислення до задачі 8

Задача 9. Знайдіть основу перпендикуляра, проведеного із даної точки $A(-5;7;4)$ до площини $5x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Розв'язання. Запишемо вектор нормалі площини $\vec{n}(5;-3;2)$, який буде напрямним вектором прямої a , перпендикулярної до площини і проходитиме через точку A . Запишемо канонічне рівняння прямої a : $\frac{x+5}{5} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{2}$. Перейдемо

до параметричних рівнянь прямої $\begin{cases} x = 5t - 5, \\ y = -3t + 7 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$ і знайдемо спільну точку

перпендикуляра та площини. Для цього підставимо в рівняння площини вирази для змінних та знайдемо параметр t : $5(5t - 5) - 3(-3t + 7) + 2(2t + 4) - 6 = 0$; виконавши

перетворення, матимемо $38t = 44$ або $t = 1\frac{3}{19}$. Тепер підставимо значення t в

параметричні рівняння прямої та одержимо координати точки $\left(\frac{15}{19}; 3\frac{10}{19}; 6\frac{6}{19}\right)$ – це шукана основа перпендикуляра, опущеного із точки A на площину.

Значно швидше відповідь запишемо, виконавши наступні побудови в середовищі GeoGebra (рис. 11):

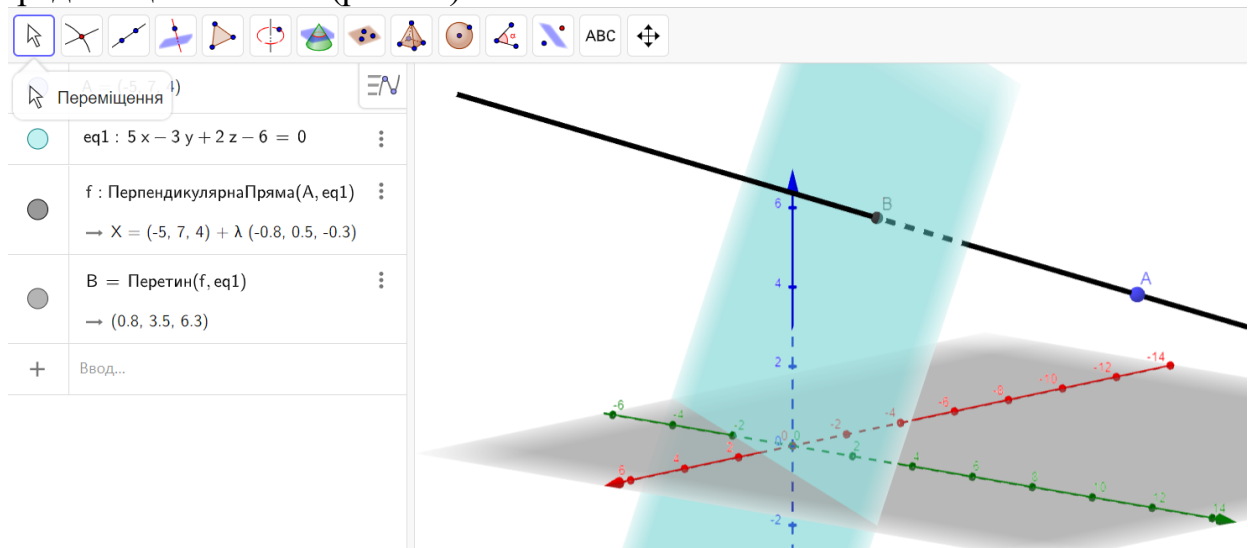


Рис. 11. Знаходження основи перпендикуляра (задача 9)

Задача 10. Запишіть рівняння бісекторних площин для двогранного кута утвореного площинами AFD і ABC , якщо геометричне тіло $ABCDEFGH$ задається координатами його вершин $A(8;0;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(8;4;0)$, $E(7;1;7)$, $F(1;1;7)$, $G(1;3;7)$, $H(7;3;7)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площин ABC ($z = 0$) та AFD ($x + z - 8 = 0$) – через три точки. Скористаємося означенням бісекторної площини як ГМТ, рівновіддалених від двох заданих площин, та запишемо її рівняння з умови $|z| = \frac{|x + z - 8|}{\sqrt{2}}$.

Вирази під модулями можуть бути одного знаку або різних. Отже, маємо після спрощення: $x + (1 - \sqrt{2})z - 8 = 0$ – рівняння однієї бісекторної площини та $x + (1 + \sqrt{2})z - 8 = 0$ – рівняння другої бісекторної площини (рис. 12). Нагадуємо, що

налаштування середовища щодо округлень в обчисленнях дає інший наочний результат по рівняннях площин, хоча в дійсності відповіді співпадають.

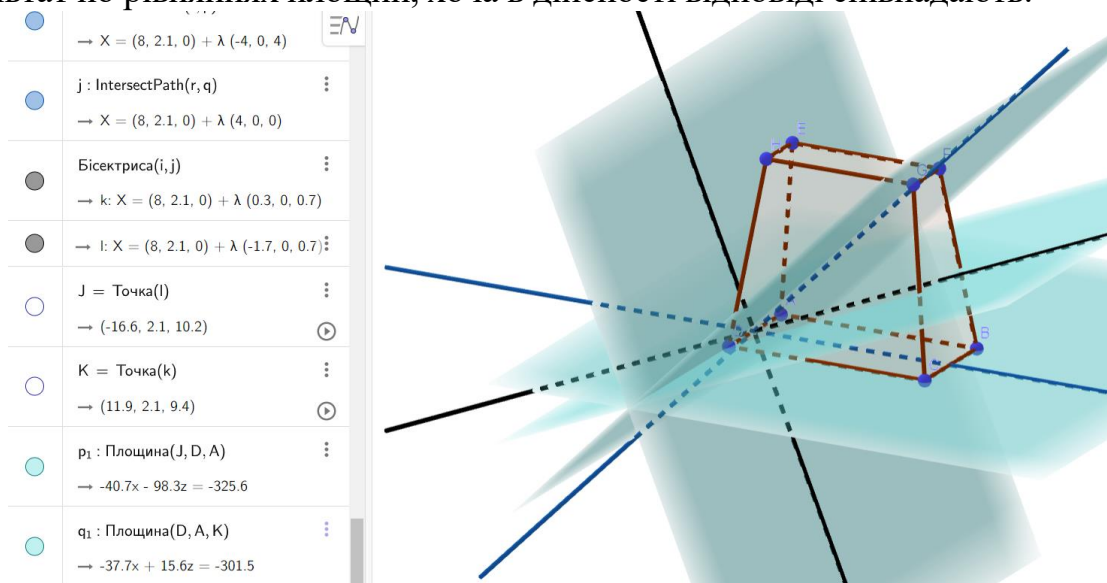


Рис. 12. Рівняння бісекторних площин до задачі 10

Задача 11. Використовуючи умову попередньої задачі 10, запишіть рівняння площини, що проходить через пряму AB перпендикулярно до площини $AEFB$.

За аналітичним розв'язанням рівняння шуканої площини належить до типу «через напрямний підпростір», тобто маємо записати умову компланарності трьох векторів (двох фіксованих та біжучого).

Геометричне розв'язання передбачає реалізацію ознаки перпендикулярності двох площин (якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини взаємно перпендикулярні) (див. рис. 13):

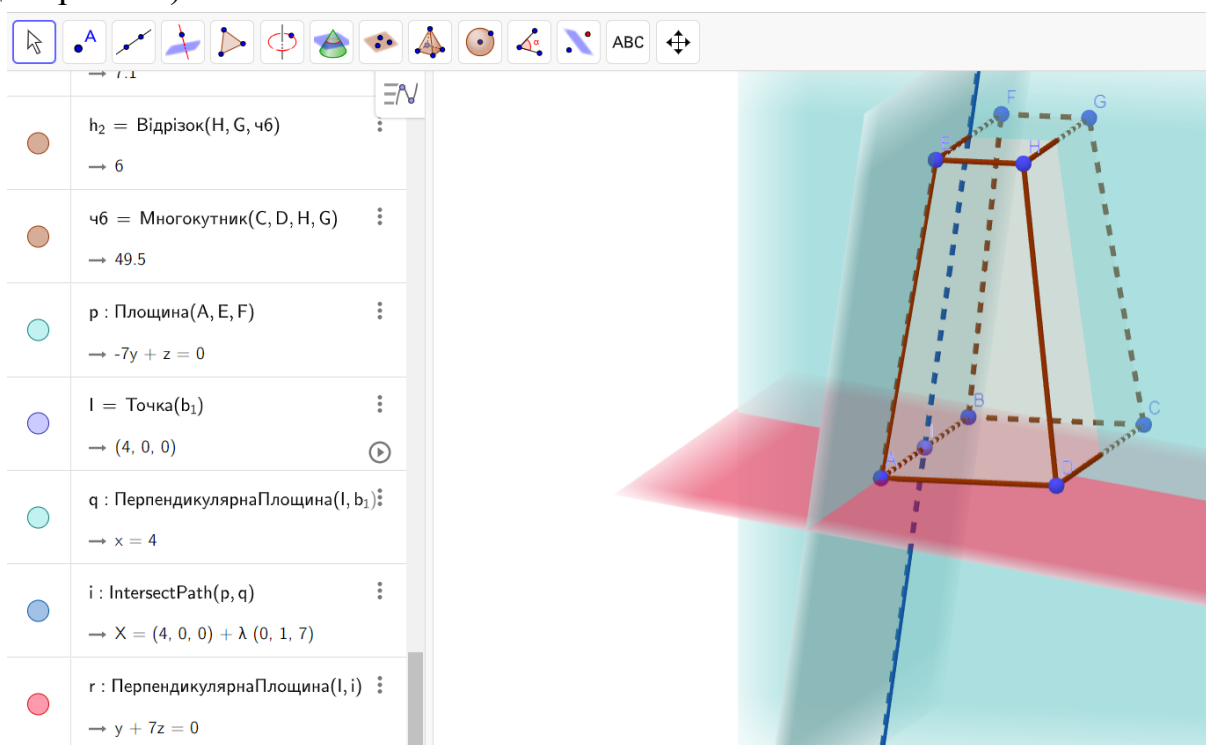


Рис. 13. Побудова перпендикулярної площини до задачі 11

Задача 12. Обчисліть координати точки, симетричної до $A(10;10;10)$ відносно заданої прямої $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{a}(4;3;1)$ буде вектором нормалі для площини, яка буде перпендикулярна до прямої та міститиме точку A , а також і її симетричну. Запишемо рівняння цієї площини, застосувавши рівняння площини, яка проходить через точку і має заданий вектор нормалі – $4(x-10) + 3(y-10) + (z-10) = 0$. Після перетворень маємо $4x + 3y + z - 80 = 0$. Знайдемо точку O – точку перетину прямої із площиною, що є серединою

відрізка AA' . Для цього запишемо параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x = 4t - 3, \\ y = 3t + 1, \\ z = t + 3 \end{cases}$ та,

підставивши їх в рівняння площини $4(4t-3) + 3(3t-3) + (t+3) - 80 = 0$,

знаходимо параметр $t = 3\frac{4}{13}$. А отже, координати точки $O\left(10\frac{3}{13}; 10\frac{12}{13}; 6\frac{4}{13}\right)$. Із

формул поділу відрізка AA' навпіл (за одним з кінців відрізка та серединою),

знаходимо координати точки $A'\left(10\frac{6}{13}; 11\frac{11}{13}; 2\frac{8}{13}\right)$.

Перевіримо дані обчислення, виконавши побудову на 3D полотні GeoGebra (рис. 14):

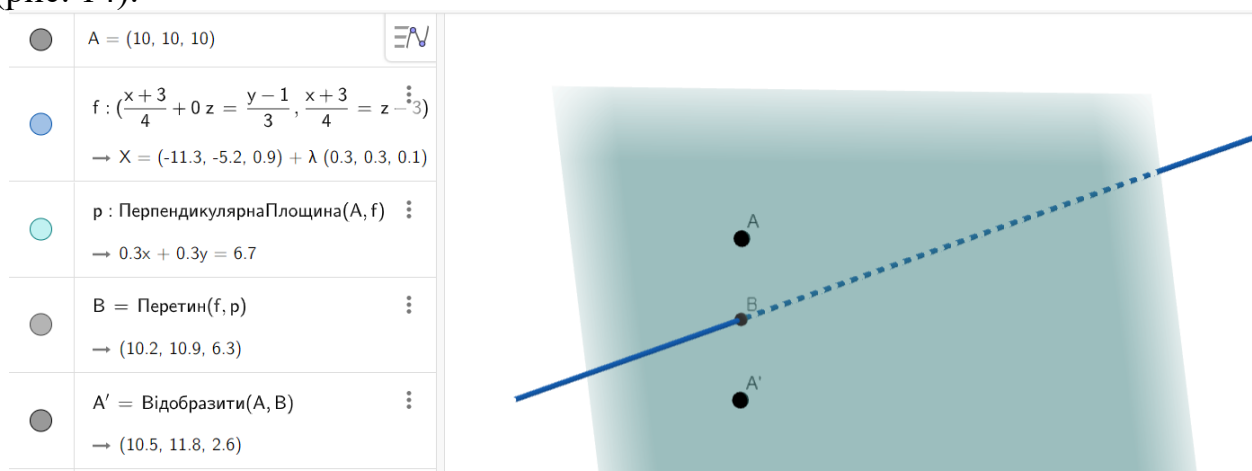


Рис. 14. Перевірка обчислень до задачі 12

Задача 13. Користуючись поданими на рисунку 15 розмірами та координатним методом запишіть рівняння виділеної площини.

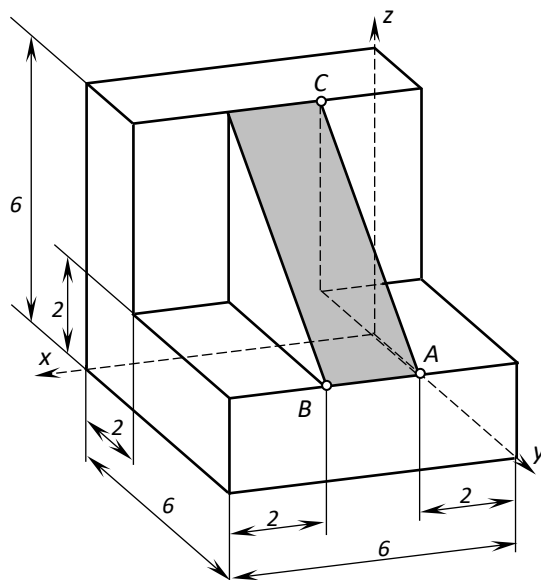


Рис. 15. Модель до задачі 13

Розв'язання. Для того, щоб записати рівняння площини, досить знайти координати трьох точок A , B , C . У такому випадку скористаємося тим, що на рисунку задано розміри деталі і те, що початок координат співпадає з одним із кутів виробу. Отже, координати точок площини $A(2, 6, 2)$, $B(4, 6, 2)$, $C(2, 2, 6)$. Тоді запишемо умову компланарності трьох векторів і простимо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-6 & z-2 \\ 4-2 & 6-6 & 2-2 \\ 2-2 & 2-6 & 6-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - z - 4 = 0 \text{ — наша відповідь.}$$

У середовищі ми можемо побудувати дану модель (вона складається з двох прямокутних паралелепіпедів та трикутної призми) та обрати інші площини, рівняння яких будемо записувати (рис. 16):

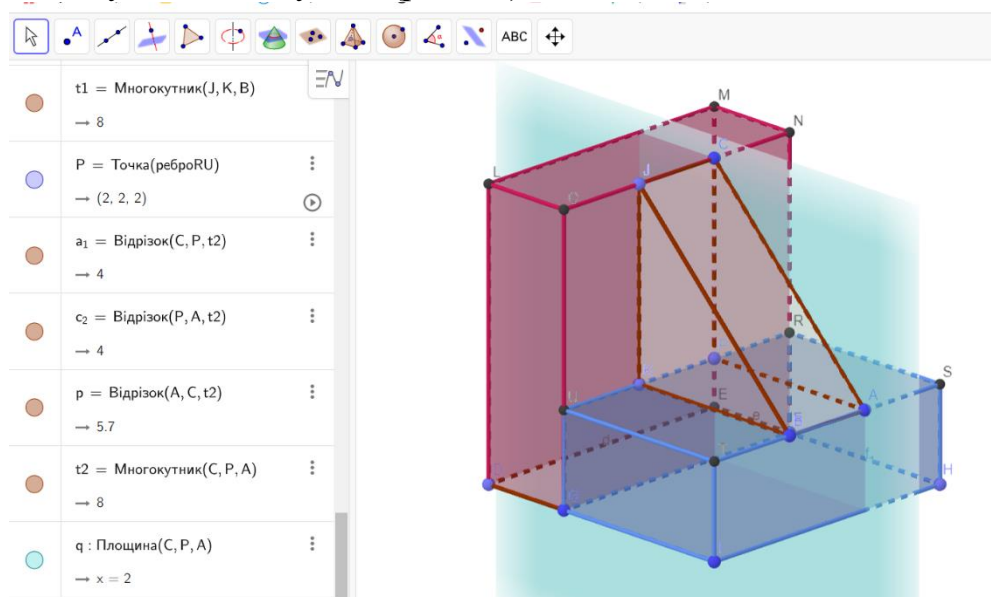


Рис. 16. Вибір іншої площини за даними задачі 13

Задача 14. Запишіть рівняння ортогональної проєкції прямої $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ на площину $x + 5y - z - 25 = 0$.

Розв'язання. Якщо підходити конструктивно до знаходження ортогональної проєкції, то цю пряму будемо розглядати як таку, що утворилась в результаті перетину заданої площини α : $x + 5y - z - 25 = 0$ та іншої β , їй перпендикулярної, яка містить задану пряму p : $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. Отже, реалізуємо цей підхід.

Задана площина α , а саме, її рівняння, дасть змогу записати координати вектора (вектора нормалі для заданої $x + 5y - z - 25 = 0$ і одночасно утворюючого вектора для шуканої площини β) – $\vec{n}(1;5;-1)$. З рівняння прямої p : $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ випишемо координати точки $A(-1;0;1)$ та напрямного вектора $\vec{a}(4;2;3)$ (ці дані використаємо для запису рівняння площини – тип «через точку та напрямний півпростір»):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Дане рівняння – це умова компланарності трьох векторів (біжучого та двох неколінеарних між собою). Спростивши його, одержуємо загальне рівняння проєктуючої площини: $17x - 7y - 18z + 35 = 0$.

Тепер рівняння нашої ортогональної проєкції (технічно – це система рівнянь):

$$\begin{cases} 17x - 7y - 18z + 35 = 0 \\ x + 5y - z - 25 = 0 \end{cases}.$$

Якщо потрібно записати рівняння прямої в канонічній формі, тоді виконаємо наступні дії:

- 1) Знайдемо координати точки, яка належить цій проєкції. Для цього покладемо, наприклад, $x=0$. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} -7y - 18z + 35 = 0 \\ 5y - z - 25 = 0 \end{cases}.$$

Отже, це точка $A(0;5;0)$.

- 2) Для відшукування напрямного вектора обчислимо його як векторний добуток векторів-нормалей площин, рівняння яких входять в систему:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 17 & -7 & -18 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-97; -1; 92).$$

Тепер запишемо рівняння шуканої проєкції в канонічній формі:

$$\frac{x}{-97} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{92} \text{ – це і є наша відповідь (рис. 17).}$$

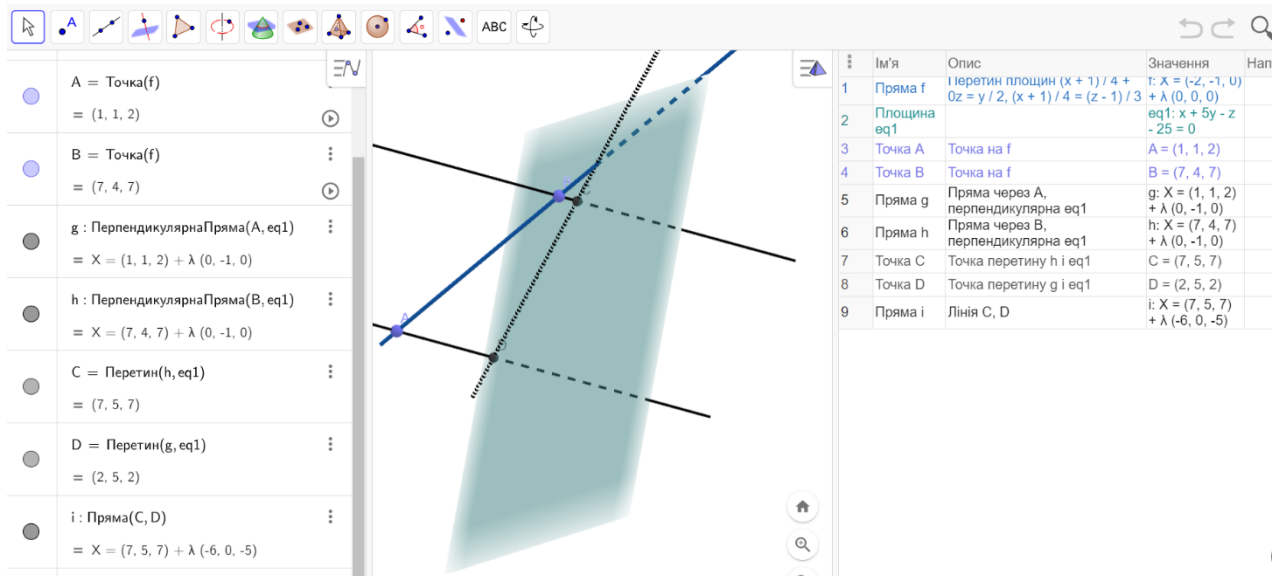


Рис. 17. Розв'язання задачі 14 у середовищі GeoGebra

Трішки змінимо налаштування: зокрема, для точності обчислень можна обирати два чи три знаки після коми. Перевіримо також на малюнку, чи вірними є координати напрямного вектора прямої. Для цього з'єднаємо будь-які точки прямої-прєкції (на рис. 18 це точки C і D) та перейдемо до колінеарного вектора (тут підібрали множник 16,9):

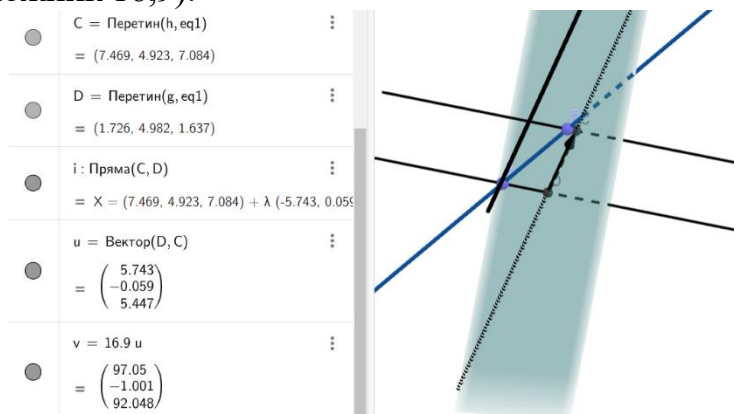


Рис. 18. Перевірка відповіді задачі 14 у середовищі GeoGebra

У динамічному середовищі GeoGebra легко та швидко розв'язуються усі базові задачі на пряму та площину, зокрема:

- запис рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданій площині;
- запис рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно заданій площині; рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої; рівняння площини, що проходить через задану точку і задану пряму; рівняння площини, що проходить через задану пряму паралельно іншій прямій; рівняння площини, що проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини; рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі; рівняння площини, що проходить через дві прямі, що перетинаються;
- запис рівняння перпендикуляра, проведеного з даної точки на пряму;

- відшукування відстані від точки до прямої; відстані між паралельними прямими; відстані між мимобіжними прямими;
- знаходження точки, що симетрична даній точці відносно заданої площини; знаходження точки, що симетрична даній точці відносно заданої прямої.

Задача 15. Розглянемо базову задачу на пряму в просторі: знаходження відстань від деякої точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

I спосіб розв'язання.

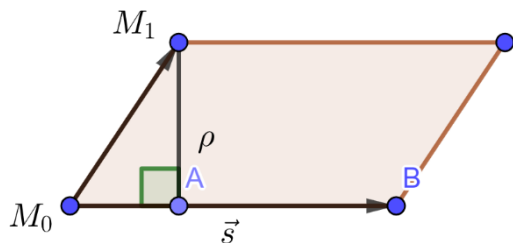


Рис. 19

Шукану відстань від точки до прямої можна замінити метрикою якогось відрізка, наприклад, розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах (рис. 19).

Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм (Ленчук, 2010). Тому шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої, можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

II спосіб розв'язання. Шукану відстань знаходимо як довжину відрізка, один з кінців якого – це задана точка, а інший кінець – точка перетину заданої прямої з площиною, перпендикулярною до неї, яка містить задану точку.

Виконання супровідної побудови та обчислення відстані можна провести в середовищі GeoGebra (рис. 20).

Для конкретизації прикладу взяли точку $A(4, -2, 3)$ і пряму BC , яку задали двома точками $B(-5, 1, -2)$ та $C(4, -8, 1)$. У побудові використали наступні команди: проведення площини через задану точку, перпендикулярно до прямої, та обрали інструмент на знаходження точки перетину прямої і площини.

Шукана відстань 5 од. (довжина відрізка AD).

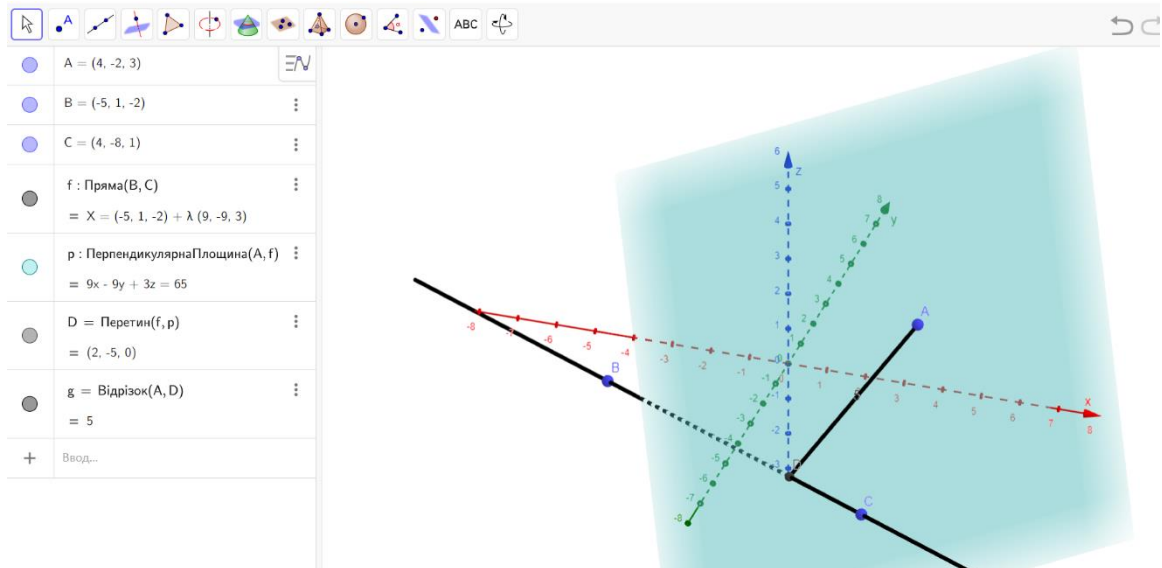


Рис.20. Результат обчислень задачі 15 в середовищі GeoGebra

Задача 16. Задано дві прямі: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{5}$ та $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{9}$.

Написати рівняння площини, яка проходить через ці дві прямі, якщо вони перетинаються.

Розв'язання. З'ясуємо спочатку, чи перетинаються задані прямі. Щоб дати відповідь, перевіримо чи компланарні такі три вектори – напрямні вектори цих прямих та вектор, початкова точка якого належить одній прямій, а кінцева – іншій. Для цього обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \\ -3-2 & 4+1 & -2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \\ -5 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -170 \neq 0.$$

Результат перевірки свідчить про неможливість проведення площини, яка б містила ці прямі, оскільки вони мимобіжні.

Для створення завдань для самостійної роботи скористаємось середовищем GeoGebra і для відшукування спільної точки двох прямих (для цього достатньо в протокол побудови ввести рівняння заданих прямих і скористатись інструментом «Перетин» для ліній на рисунку).

Нехай прямі задано такими рівняннями: $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$

Першу пряму зобразили на рисунку 21 таким чином: eq1 та eq2 – твірні площини (вводимо в протокол побудови), далі використовуємо інструмент «Перетин» і бачимо пряму 1 наочно. Пряму 2, задану параметричними рівняннями, вводимо за шаблоном середовища через точку та напрямний вектор:

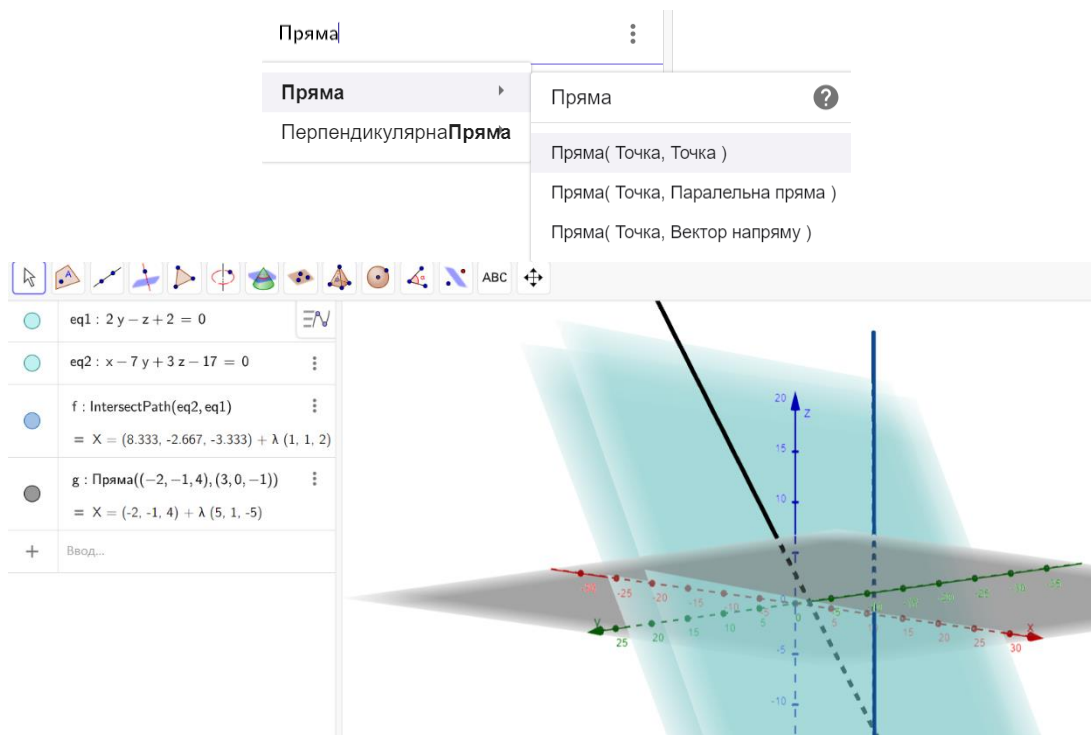


Рис. 21. Задані об'єкти з умови задачі 16

Далі знову застосовуємо інструмент «Перетин» і за результатом середовища (у нашому випадку невизначеність) стверджуємо, що прямі мимобіжні:

$$A = \text{Перетин}(g, f) \quad \vdots$$

$$= ?$$

Схожий підхід можемо застосувати і до таких теоретичних задач:

Відстань між двома паралельними прямими в просторі

Нехай задано дві паралельні прямі p_1 і p_2 :

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}; \quad \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n}$$

Визначити відстань d між ними.

Розв'язання. Напишемо рівняння будь-якої площини, перпендикулярної до обох паралельних прямих, і знайдемо координати точок її перетину з прямими p_1 і p_2 . Далі, знайдемо відстань між точками перетину прямих з площиною за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Це й буде шукана відстань між паралельними прямими p_1 і p_2 .

На рис. 22 для конкретних даних реалізуємо ці міркування:

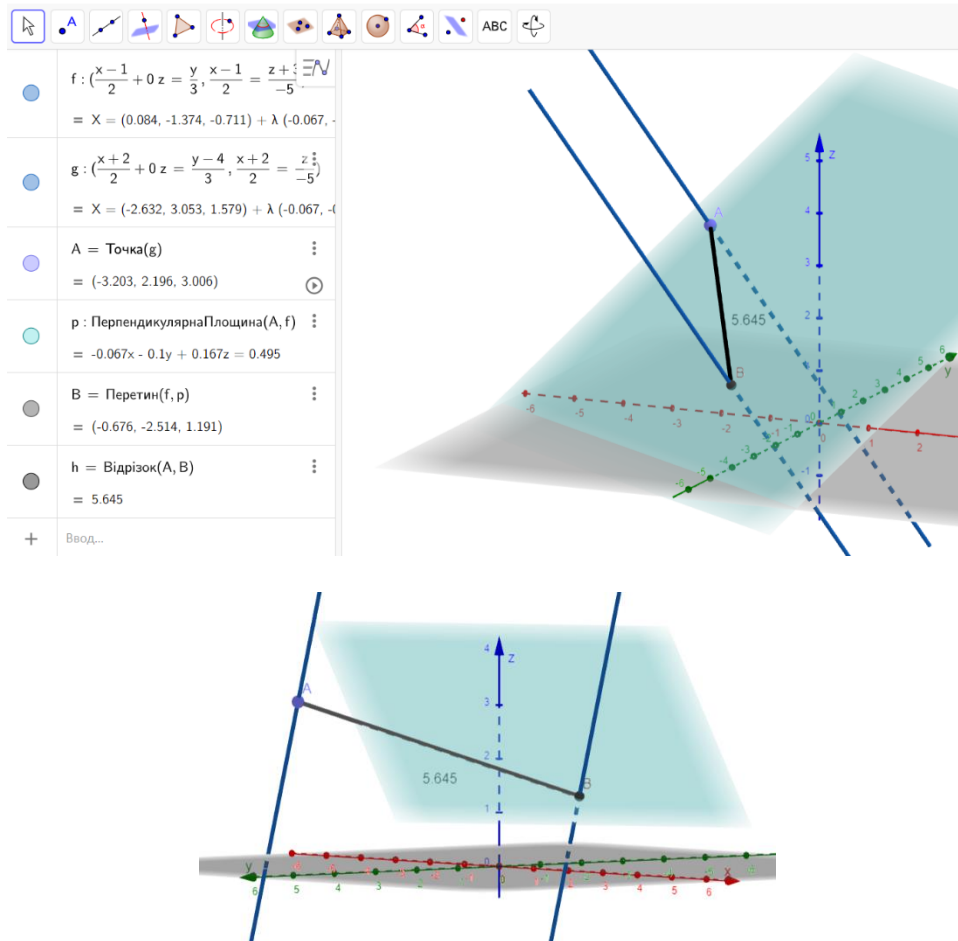


Рис. 22. Обчислення відстані між двома паралельними прямими в просторі

Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих

Нехай задано дві мимобіжні прямі p_1 і p_2 :

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}; \quad \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}.$$

Записати рівняння їх спільного перпендикуляра.

Розв'язання. Напрямний вектор спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих p_1 і p_2 колінеарний до векторного добутку напрямних векторів u_1 і u_2 цих прямих. Цей вектор ми знайдемо за формулою

$$\vec{p} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \vec{i} (m_1 n_2 - n_1 m_2) + \vec{j} (n_1 l_2 - l_1 n_2) + \vec{k} (l_1 m_2 - m_1 l_2).$$

Позначимо через $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ точки прямих p_1 і p_2 , координати яких ми взяли з рівнянь цих прямих. Проведемо площину σ_1 через пряму p_1 паралельно до напрямного вектора спільного перпендикуляра заданих прямих. Нехай точка $N_1(x, y, z)$ є довільною точкою цієї площини. Тоді три вектори $\overrightarrow{M_1 N_1}, \vec{u}_1$ і $\vec{p}$ – компланарні і лежать в площині σ_1 . Отже, векторне рівняння площини – це умова компланарності цих трьох векторів. Аналогічні міркування застосуємо і для векторів $\overrightarrow{M_2 N_2}, \vec{u}_2$ і $\vec{p}$, які компланарні і лежать в площині σ_2 , де $N_2(x, y, z)$ – довільна точка площини σ_2 .

Тоді запишемо рівняння площин σ_1 і σ_2 в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ m_1 n_2 - n_1 m_2 & n_1 l_2 - l_1 n_2 & l_1 m_2 - m_1 l_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ m_1 n_2 - n_1 m_2 & n_1 l_2 - l_1 n_2 & l_1 m_2 - m_1 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Спільна пряма перетину площин σ_1 і σ_2 – це шуканий спільний перпендикуляр прямих p_1 і p_2 (рис. 23).

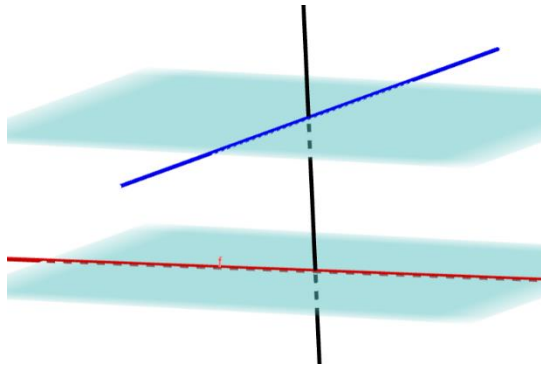


Рис. 23. Проведення спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих

Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими.

Нехай задано дві мимобіжні прямі p_1 і p_2 :

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}; \quad \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}.$$

Визначити найкоротшу відстань між ними.

Розв'язання. Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими – це відстань між двома паралельними площинами, в яких лежать ці прямі. Отже, щоб розв'язати задану задачу, треба скласти рівняння площини, яка проходить через першу пряму паралельно до другої, і визначити відстань від будь-якої точки другої прямої від цієї площини.

Для унаочнення розв'язання підійде рисунок 23.

Середовища *GeoGebra* має достатню кількість інструментів, які дозволяють побудувати найрізноманітні геометричні тіла. Але розв'язуючи певний клас задач, ми виконуємо одні й ті самі побудови. Щоб зекономити час, ми можемо створити авторський інструмент для виконання так званих монотонних побудов.

Приклад для створення інструменту *Кут між прямою та площиною*, який за заданими площиною та прямою визначає кут між ними, описано в праці (Семеніхіна & Друшляк, 2023).

Для прикладу опишемо етапи створення інструменту *Кут між площинами* (нагадаємо означення: *кут між двома площинами, що перетинаються*, – це кут між прямими перетину цих площин із площиною, перпендикулярною до лінії перетину даних площин). Це означення лежить в основі вибору кроків, для створення нового інструменту:

- 1) виконаємо базову побудову (оберемо дві площини, що перетинаються, та знайдемо пряму перетину наочно);
- 2) через довільну точку спільної прямої проведемо площину, перпендикулярну до неї;
- 3) знайдемо прямі перетину площини з пункту 2) із заданими;

4) виміряємо кут між прямими з пункту 3) – це і є наш шуканий кут між площинами (рис. 24).

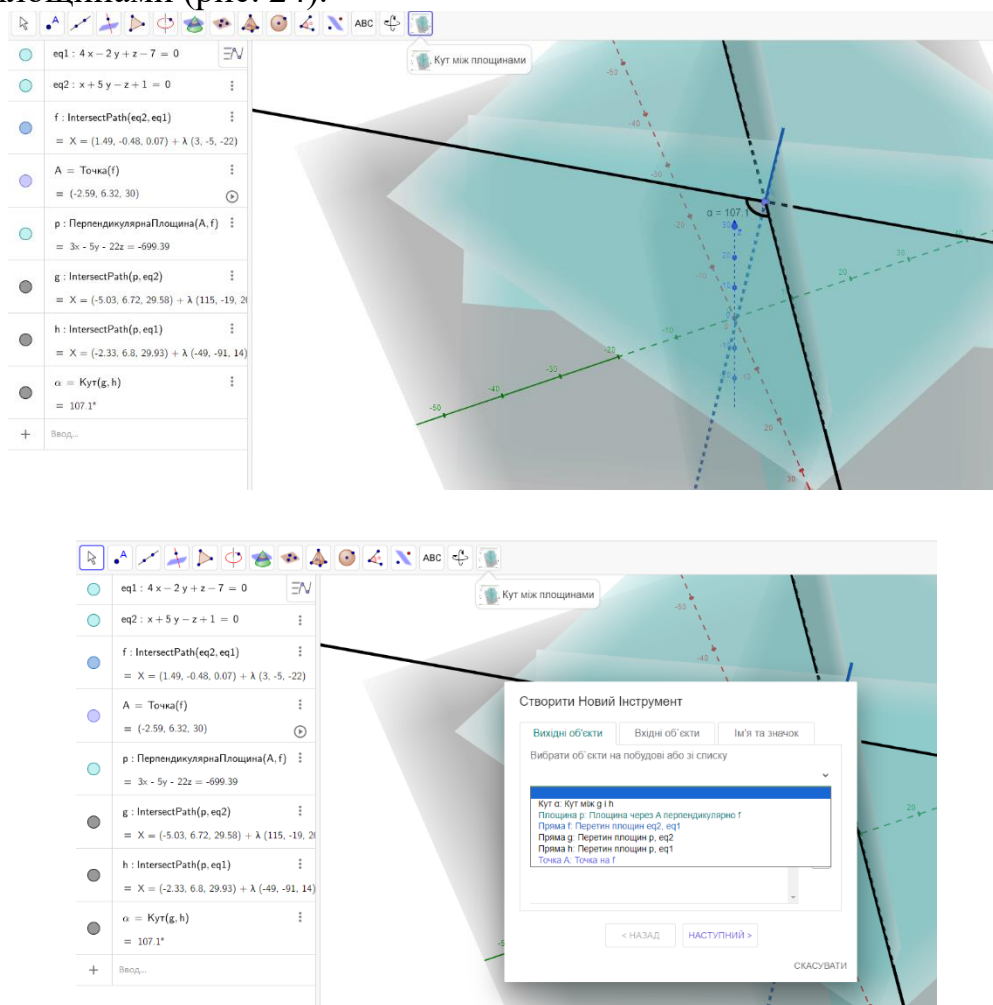
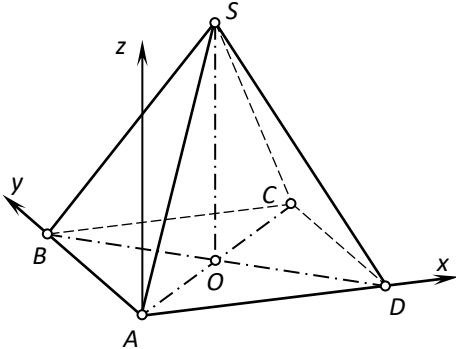
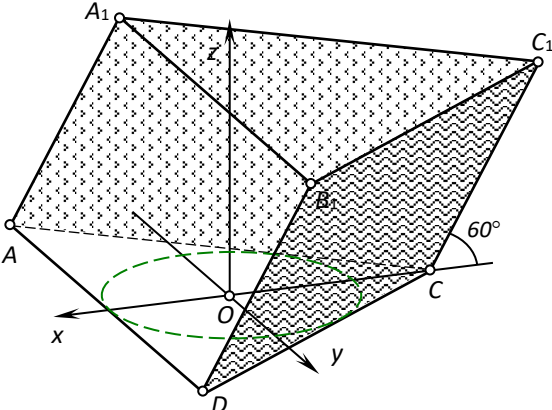
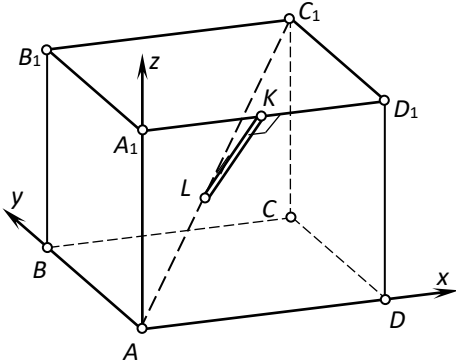
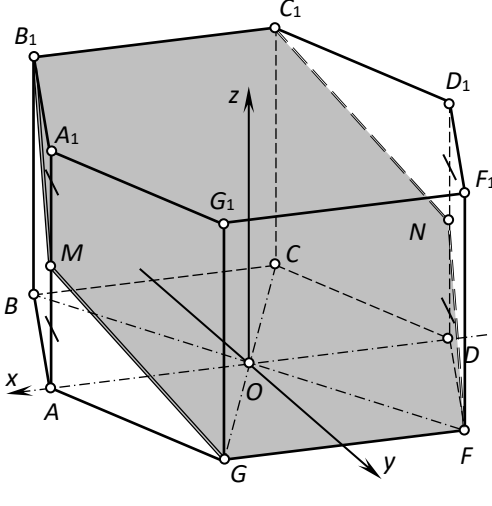


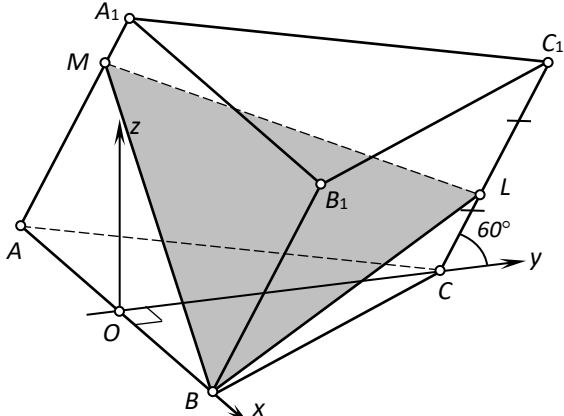
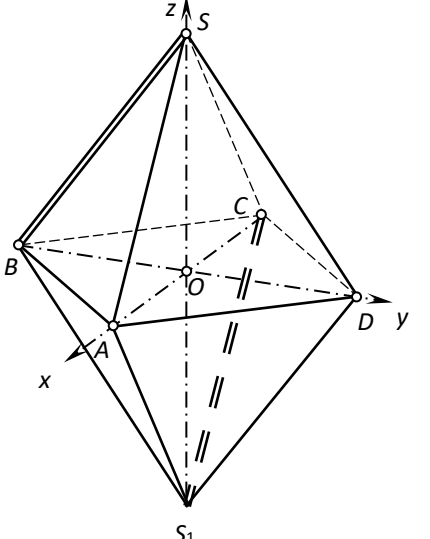
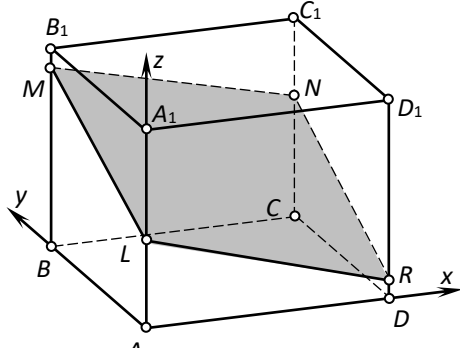
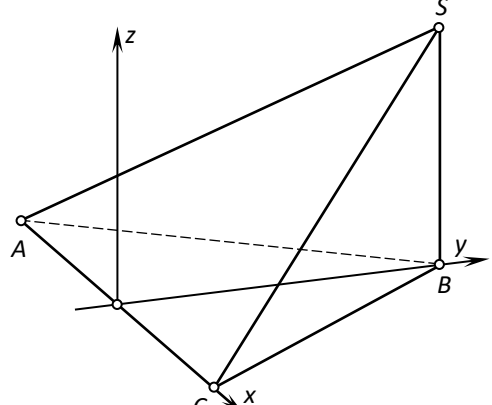
Рис. 24. Визначення кута між площинами та створення нового інструмента середовища

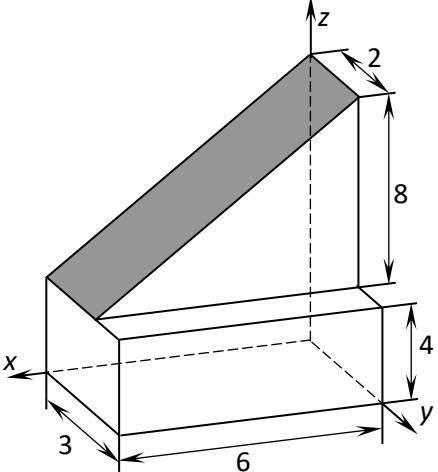
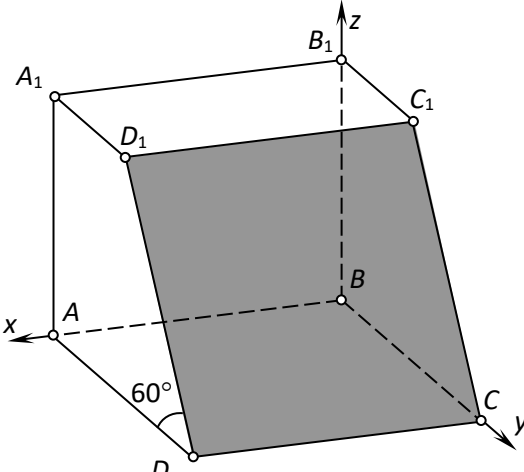
Авторські задачі теми за готовими малюнками та супровідним текстом, які ми пропонуємо для самостійного розв'язання в середовищі

1.		На рисунку задано правильний тетраедр із довжиною ребра 3. Скориставшись введеною системою координат знайти відстань між вказаними мимобіжними прямими.
----	--	--

2.		В основі правильної чотирикутної піраміди квадрат зі стороною 3. Висота піраміди 4. Вершина проектується у центр вписаного в основу кола. Ввівши систему координат так, як вказано на рисунку, записати рівняння бічної грані SBC.
3.		В основі похилої призми правильний трикутник зі стороною 3. Бічне ребро вказаного тіла рівне 4. Користуючись координатним методом записати рівняння бісекторної площини виділеного двогранного кута.
4.		Задано куб зі стороною 4. Записати рівняння спільного перпендикуляра сторони A_1D_1 і діагоналі AC_1.
5.		В основі прямої призми лежить правильний шестикутник із стороною 2. Висота призми – 4. Записати рівняння площини перерізу, зображеного на рисунку, якщо $\frac{A_1M}{MA} = \frac{D_1N}{ND} = \frac{1}{1}$.

6.		Висота зрізаної піраміди рівна 2. Верхня і нижня основи правильні трикутники зі сторонами 1 і 4 відповідно. Бічні грані нахилені під однаковим кутом до основи. Скориставшись введеною системою координат записати рівняння спільного перпендикуляра прямих AB і CC_1.
7.		Основою піраміди є ромб із стороною 2 і гострим кутом 60°. Висота піраміди – 5 і проєкціюється в точку C. За допомогою введеної системи координат знайти кут нахилу грані BDS до площини основи.
8.		Знайти відстань від точки A_1 до побудованого перерізу, якщо $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямий паралелепіпед із сторонами $AD=4$, $AB=3$, $AA_1=5$ $\frac{B_1 M}{MB} = \frac{D_1 L}{LD} = \frac{1}{1}$.
9.		У заданої на рисунку піраміди в основі лежить правильний трикутник, а бічні грані нахилені під однаковим кутом. Радіус вписаного в основу кола рівний 3, а висота піраміди 5. Записати рівняння апофеми SL.
10.		В основі піраміди лежить ромб із діагоналями 6 і 8. Вершина проєкціюється в точку перетну діагоналей. Висота тіла – 4. Площина перерізу проходить через такі точки D, L, M, що $\frac{SL}{LC} = \frac{3}{2}$, $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{4}$. Знайти відстань від точки S до площини перерізу.

11.		На рисунку зображено похилу призму, в основі якої лежить правильний трикутник із стороною 2. Довжина бічного ребра 4. Переріз перетинає бічні ребра по точках C, M, L де $\frac{B_1L}{LB} = \frac{2}{1}$, а $\frac{A_1M}{MA} = \frac{1}{4}$. Записати рівняння площини перерізу.
12.		Геометричне тіло утворено складанням основами двох пірамід. Основою кожної з них є ромб, із діагоналями 8 і 6. S і S_1 проєкціюються в точку перетину діагоналей основи. Висота кожної з пірамід 5. Знайти відстань між прямими SB і S_1C.
13.		На рисунку задано прямий паралелепіпед із висотою – 5, шириною – 3, довжиною – 4. Записати рівняння перерізу, якщо $\frac{B_1M}{MB} = \frac{1}{10}$, $\frac{A_1L}{LA} = \frac{3}{2}$, $\frac{C_1N}{NA} = \frac{2}{3}$.
14.		Основа піраміди рівнобедрений трикутник із основою 6 і бічною стороною 5. Вершина піраміди проєктується у точку B. $SB = 4$. Знайти відстань від точки B до площини SAC, користуючись координатним методом.

15.		Користуючись поданими на рисунку розмірами та координатним методом записати рівняння виділеної площини.
16.		На рисунку зображено геометричне тіло $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. $ABCD$ – квадрат із стороною 3, $A_1 D_1 = \frac{AD}{2}$. Площина $DD_1 C_1 C$ нахилена до площини $ABCD$ під кутом 60°. Запишіть рівняння площини $DD_1 C_1 C$

Далі пропонуємо перелік різних задач на пряму та площину, які можна легко розв'язати у середовищі GeoGebra.

Розглянемо наступні задачі, які відносяться до метричних (тобто, передбачають певні вимірювання і запис відповіді). Використовуємо середовище GeoGebra для знаходження відповіді.

Задача 20. Точка A лежить на прямій $x+y=8$, причому A рівновіддалена від точки $B(2;8)$ і прямої $x-3y+2=0$. Знайти координати точки A .
Розв'язання у середовищі.

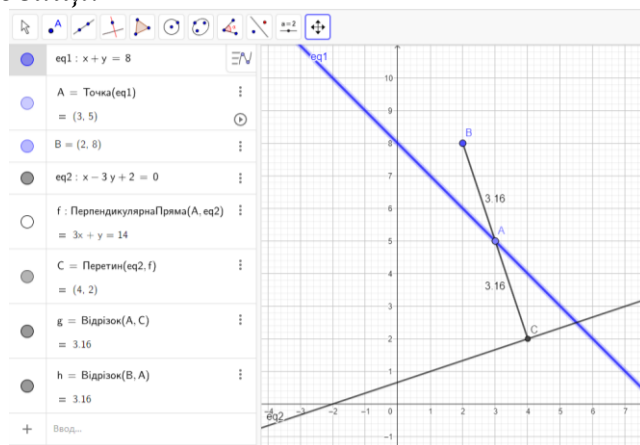


Рис. 25. Розв'язання задачі 20 у середовищі GeoGebra

Прокоментуємо, що у нас вийшло:

1) в умові є дані про три об'єкти, які легко внести в протокол побудови (точку B через координати, а прямі – за загальними рівняннями – $eq1, eq2$);

2) оскільки шукана точка A має належати заданій прямій, то відразу її кріпимо на об'єкт C відповідним інструментом;

3) далі унаочнюємо відстані від точки A до точки B (це звичайний відрізок, але в налаштуваннях обираємо «показати значення»);

4) для відстані від точки до прямої спочатку проводимо перпендикулярну пряму f через точку B до прямої $eq2$, шукаємо точку C – перетину f та $eq2$, приховуємо f та сполучаємо A і C .

Тепер достатньо анімувати точку A про прямій $eq1$ і дочекатись коли $AB=AC$. Усі зміни відображаються в протоколі побудови та у підписах до малюнку, або можна просто рухати точку A по прямій $eq1$.

Задача 21. Обчислити відстань між мимобіжними прямими:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{3} \text{ і } \frac{x-5}{2} = \frac{y-8}{0} = \frac{z-2}{-3}.$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо дослідження щодо взаємного розміщення прямих. Перевірку здійснюємо через обчислення мішаного добутку трьох векторів, два з яких – це напрямні вектори цих прямих, а третій – будь-який, який сполучає точки цих прямих. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5-3 & 8-7 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 28.$$

Але модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, який в свою чергу можна обчислити як добуток площі основи на висоту (а це і є відстань між мимобіжними прямими).

Тому підставляючи відповідні значення координат векторів $s_1 = (2, -2, 3)$ і $s_2 = (2, 0, -3)$ та точок $M_1(3, 7, 1)$ і $M_2(5, 8, 2)$ у

$$\text{формулу } d = \pm \frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$
 і враховуючи, що обчислений

вище визначник Δ додатний, маємо:

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5-3 & 8-7 & 2-1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2}} = \frac{28}{14} = 2.$$

Отже, шукана відстань між заданими мимобіжними прямими лініями дорівнює 2 ум. од. довжини.

В середовищі GeoGebra ми можемо реалізувати ці міркування, або підійти до відстані між мимобіжними прямими як відстані між двома паралельними площинами, у яких лежать мимобіжні прямі (рис. 26):

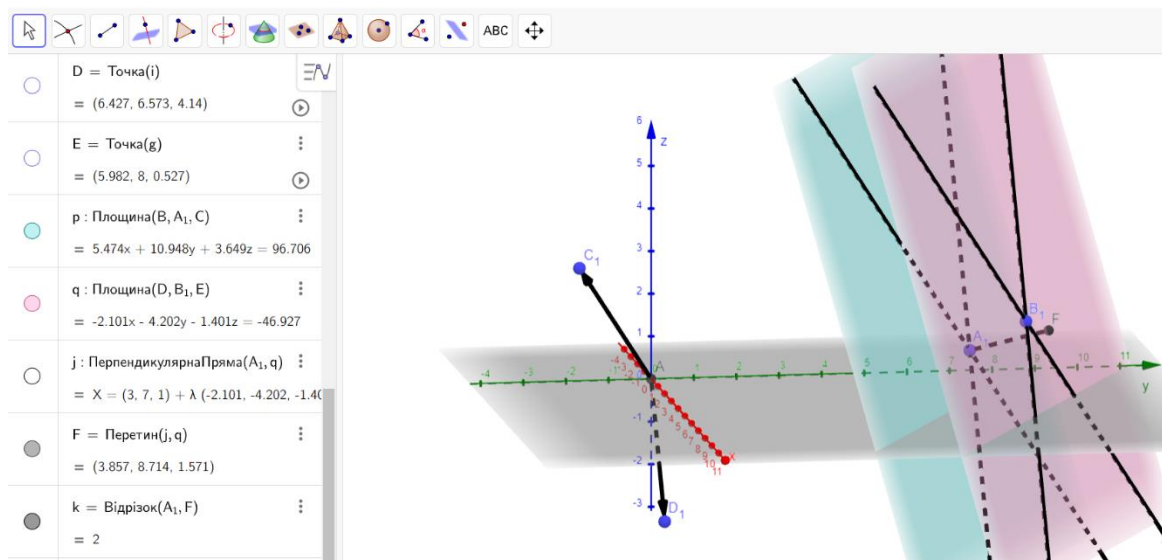


Рис. 26. Обчислення відстані для задачі 21

Сам протокол побудови для детального опрацювання виведемо в окремому вікні (рис. 27):

№	Ім'я	Опис	Значення
1	Точка $A_1(3, 7, 1)$		$A_1 = (3, 7, 1)$
2	Точка $B_1(5, 8, 2)$		$B_1 = (5, 8, 2)$
3	Точка $C_1(2, -2, 3)$		$C_1 = (2, -2, 3)$
4	Точка $D_1(2, 0, -3)$		$D_1 = (2, 0, -3)$
5	Точка A	Точка перетину ВісьАплікват і ВісьАбсцис	$A = (0, 0, 0)$
6	Вектор u	Вектор(A, C_1)	$u = (2, -2, 3)$
7	Вектор v	Вектор(A, D_1)	$v = (2, 0, -3)$
8	Пряма f	Пряма через A_1 , спрямована за u	$f: X = (3, 7, 1) + \lambda(2, -2, 3)$
9	Пряма g	Пряма через B_1 , спрямована за v	$g: X = (5, 8, 2) + \lambda(2, 0, -3)$
10	Пряма h	Пряма через A_1 , паралельна g	$h: X = (3, 7, 1) + \lambda(0.555, 0, -0.832)$
11	Пряма i	Пряма через B_1 , паралельна f	$i: X = (5, 8, 2) + \lambda(0.485, -0.485, 0.728)$
12	Точка B	Точка на h	$B = (1.288, 7, 3.568)$
13	Точка C	Точка на f	$C = (0.868, 9.132, -2.198)$
14	Точка D	Точка на i	$D = (6.427, 6.573, 4.14)$
15	Точка E	Точка на g	$E = (5.982, 8, 0.527)$
16	Площина p	Площина через B, A_1 , C	$p: 5.474x + 10.948y + 3.649z = 96.706$
17	Площина q	Площина через D, B_1 , E	$q: -2.101x - 4.202y - 1.401z = -46.927$
18	Пряма j	Пряма через A_1 , перпендикулярна q	$j: X = (3, 7, 1) + \lambda(-2.101, -4.202, -1.401)$
19	Точка F	Точка перетину j і q	$F = (3.857, 8.714, 1.571)$
20	Відрізок k	Відрізок A_1 , F	$k = 2$

Рис. 27. Протокол побудов для знаходження розв'язку задачі 21

Задача 22. Знайти координати точки A_1 , симетричної до точки $A(2, -5, 7)$ відносно прямої, що проходить через точки $B(5, 4, 6)$ і $C(-2, -17, -8)$.

Розв'язання. Побудови виконаємо наступним чином: в площині, яку можна задаи точкою A і прямою BC , через точку A проводимо перпендикуляр до прямої BC . Далі знаходимо точку перетину даного перпендикуляра і прямої BC (нехай це буде точка H). Потім відкладемо $AH = HA_1$, тобто знайдемо потрібну точку A_1 .

Другий спосіб відшукування точки A_1 такий: точку H знайдемо як точку перетину прямої і площини. Ми це реалізуємо таким чином: проведемо площину через точку A перпендикулярно до прямої BC .

Отже, наш алгоритм знаходження точки A_1 буде таким:

- 1) проводимо площину ρ через точку A і перпендикулярно до прямої BC (вектор BC буде вектором нормалі для шуканої площини);
- 2) складемо рівняння прямої BC ;
- 3) шукаємо точку перетину площини ρ з прямою BC (це буде точка H);
- 4) $AH = HA_1$ (за серединою і одним із кінців відрізка шукаємо нашу точку

A_1).

Тепер знайдемо координати точки A_1 за складеним алгоритмом.

1. Рівняння площини ρ записуємо як рівняння площини через точку і вектор нормалі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Як точку візьмемо точку $A(2, -5, 7)$, як вектор – вектор $BC(-2 - 5, -17 - 4, -8 - 6) = (-7, -21, -14)$ або $(1, 3, 2)$.

$$1(x - 2) + 3(y - (-5)) + 2(z - 7) = 0.$$

Розкриємо дужки і отримаємо $x + 3y + 2z - 1 = 0$.

2. Рівняння прямої BC запишемо як рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Підставимо координати точок B і C : $\frac{x - 5}{-2 - 5} = \frac{y - 4}{-17 - 4} = \frac{z - 6}{-8 - 6}$. Спростимо і отримаємо

$$\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z - 6}{2}.$$

3. Щоб знайти координати точки H , розв'яжемо систему рівнянь з пункту (1) і (2):

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ \frac{x - 5}{1} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z - 6}{2} = t \end{cases}, \text{ звідки } t = -2, \text{ отже } H(3, -2, 2).$$

4. Для знаходження координат точки A_1 використаємо формулу середини відрізка:

$$\begin{aligned} x_{A_1} &= 2x_H - x_P = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \\ y_{A_1} &= 2y_H - y_P = 2 \cdot (-2) - (-5) = 1, \\ z_{A_1} &= 2z_H - z_P = 2 \cdot 2 - 7 = -3, \end{aligned}$$

Відповідь: шукана точка A_1 має координати $(4, 1, -3)$.

До речі, для останнього кроку в середовищі є готовий інструмент для відшукування точки, симетричної до заданої (рис. 28):

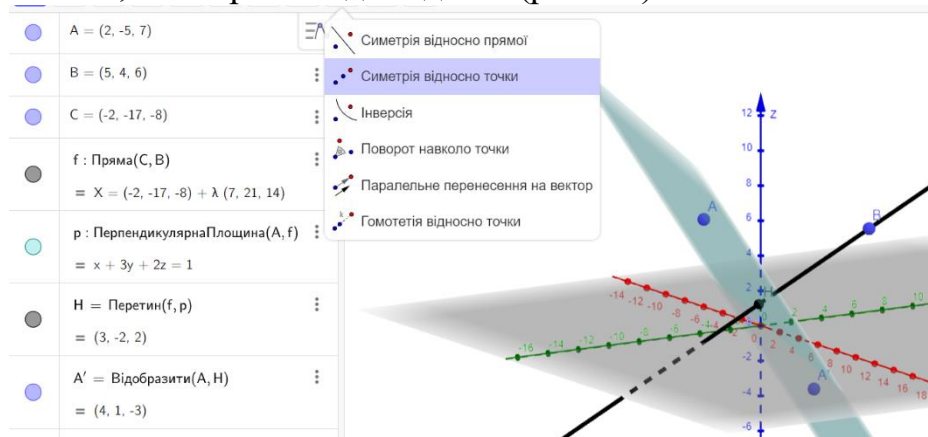


Рис. 28. Шукана побудова для задачі 22

Аналогічно додаємо протокол побудови (рис. 29):

№	Ім'я	Опис	Значення
1	Точка A		$A = (2, -5, 7)$
2	Точка B		$B = (5, 4, 6)$
3	Точка C		$C = (-2, -17, -8)$
4	Пряма f	Лінія C, B	$f: X = (-2, -17, -8) + \lambda (7, 21, 14)$
5	Площина p	Площина через A перпендикулярно f	$p: x + 3y + 2z = 1$
6	Точка H	Точка перетину f і p	$H = (3, -2, 2)$
7	Точка A'	Об'єкт A, відбитий від H	$A' = (4, 1, -3)$

Рис. 29. Протокол побудов для знаходження розв'язку задачі 22

Цікавим, на нашу думку, буде надання здобувачам протоколу побудови (повного чи неповного) для самостійного опрацювання чи усунення неточностей в побудові чи протоколі.

Задача 23. Дано протокол побудови (рис. 30). Проаналізувати кроки та відтворити наданий алгоритм в середовищі, створивши динамічну модель:

№	Ім'я	Опис	Значення
1	Точка A	Точка на ВісьАбсцис	$A = (-5, 0, 0)$
2	Точка B	Точка на ВісьОрдинат	$B = (0, -4, 0)$
3	Пряма f	Лінія A, B	$f: 4x + 5y = -20$
4	Точка C	Точка на ВісьАплікват	$C = (0, 0, 3)$
5	Пряма g	Пряма через C, паралельна f	$g: X = (0, 0, 3) + \lambda (0.781, -0.625, 0)$
6	Точка D	Точка на ВісьОрдинат	$D = (0, -4, 0)$
7	Точка E	Точка на ВісьАбсцис	$E = (3, 0, 0)$
8	Пряма h	Лінія D, E	$h: -4x + 3y = -12$
9	Точка F	Точка перетину ВісьОрдинат і ВісьАплікват	$F = (0, 0, 0)$
10	Пряма i	Пряма через F, паралельна g	$i: X = (0, 0, 0) + \lambda (0.781, -0.625, 0)$
11	Точка G	Точка перетину h і i	$G = (1.875, -1.5, 0)$
12	Площина p	Площина через D, F, G	$p: 7.5z = 0$
13	Пряма j	Пряма через G, перпендикулярна p	$j: X = (1.875, -1.5, 0) + \lambda (0, 0, -7.5)$
14	Точка H	Точка перетину j і g	$H = (1.875, -1.5, 3)$
15	Відрізок k	Відрізок H, G	$k = 3$

Рис. 30. Готовий протокол побудови для самостійного опрацювання

Результат побудови за даним алгоритмом виглядає наступним чином (рис. 31):

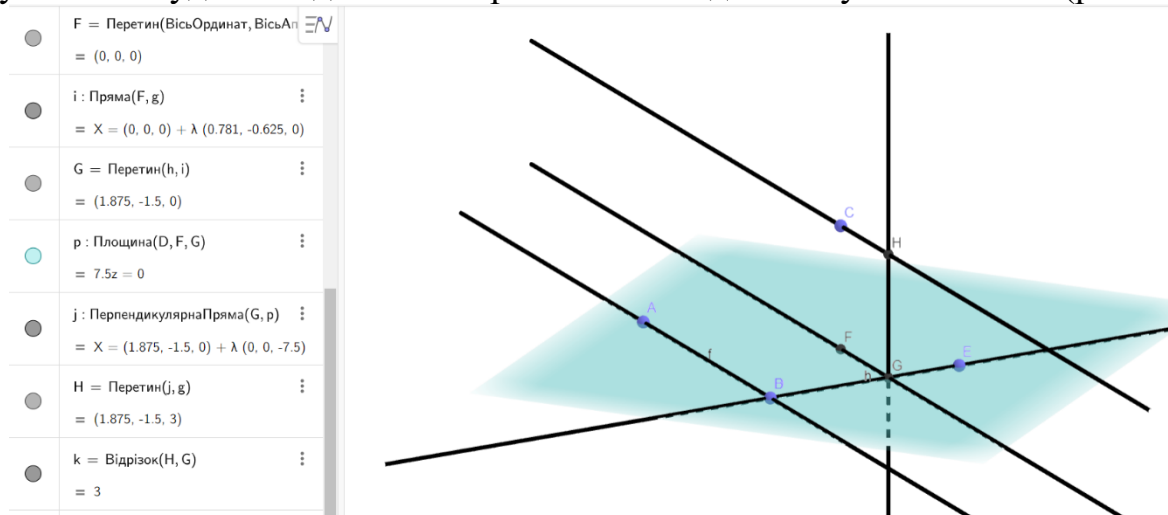


Рис. 31. Відтворена динамічна модель за алгоритмом задачі 23

Задача 24. Аналогічно до попередньої задачі задано протокол побудови (рис. 32). Проаналізувати кроки та відтворити наданий алгоритм в середовищі, створивши динамічну модель:

№	Ім'я	Опис	Значення
1	Пряма eq1		eq1: $x - 2y + 1 = 0$
2	Пряма eq2		eq2: $x + y - 1 = 0$
3	Точка A		$A = (1, 3)$
4	Точка B	Перетин eq1 та eq2	$B = (0, 1)$
5	Точка A'	Об'єкт A, відбитий від B	$A' = (0, -2)$
6	Пряма f	Пряма через A', паралельна eq2	$f: x + y = -2$
7	Пряма g	Пряма через A', паралельна eq1	$g: x - 2y = 3$
8	Точка C	Перетин eq1 та f	$C = (-2, 0)$
9	Точка D	Перетин eq2 та g	$D = (2, -1)$
10	Трикутник t1	Многокутник A, D, C	$t1 = 6$
10	Відрізок c	Відрізок A, D	$c = 4$
10	Відрізок a	Відрізок D, C	$a = 3$
10	Відрізок d	Відрізок C, A	$d = 4$
11	Пряма h	Лінія C, D	$h: 0x + 3y = -2$
12	Пряма i	Лінія A, D	$i: 4x + 1y = 6$
13	Пряма j	Лінія C, A	$j: -3x + 3y = 5$

Рис. 32. Готовий протокол побудови для самостійного опрацювання
Результат побудови за даним алгоритмом виглядає наступним чином (рис. 33):

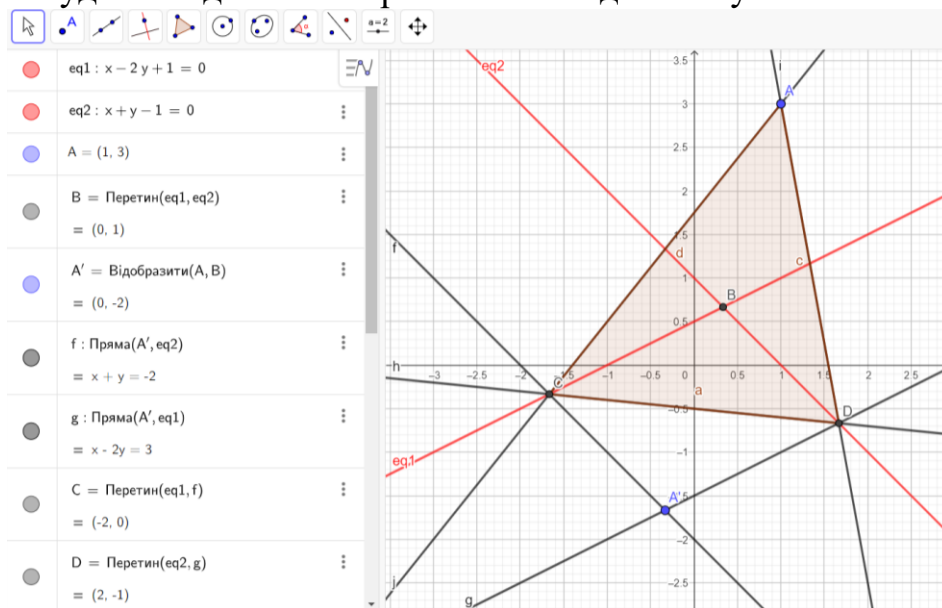


Рис. 33. Відтворена динамічна модель за алгоритмом задачі 24

Цікавими для здобувачів, а також корисними для відпрацювання завдань буде заохочення до створення творчих малюнків за темою. Наприклад, можна працювати з будь-яким геометричним об'єктом, додавши якесь його нестандартне подання (наприклад, зафарбування). Щоб створити такий малюнок потрібно увімкнути сліди точок чи прямих та увімкнути анімацію точки. В залежності від обраної точки та кількості об'єктів малюнок буде різним. Дане завдання буде цікавим для всіх, хто цікавиться мистецтвом (рис. 34):

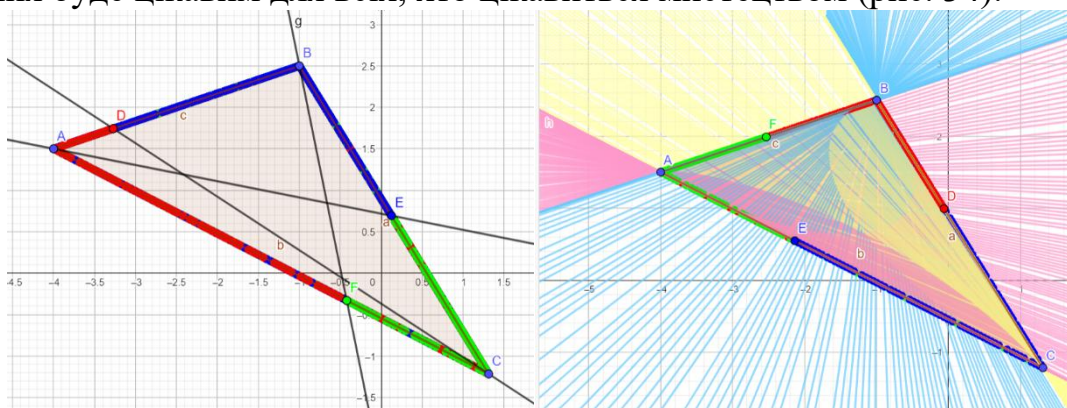


Рис. 34. Креативне подання звичних геометричних об'єктів

До речі, такий тип завдань може бути поставлений і на обчислювальній практиці, на якій закріплюють теоретичні і практичні знання, здобуті впродовж першого курсу навчання за освітньою програмою Середня освіта (Математика) за такими освітніми компонентами «Вступ до спеціальності», «Лінійна алгебра», «Елементарна математика», «Математичний аналіз», «Інформаційно-комунікаційні технології в освіті», «Фізика» та дозволяє набути навички використання програмних засобів для вирішення завдань обчислювальної математики та фізики. Зокрема, на розв'язування задач з аналітичної геометрії виділено 8 год часу для опанування найнеобхіднішим мінімумом зі складного математичного розділу.

Також вже не перший рік на курсах підвищення кваліфікації для вчителів міста Житомира та Житомирської області викладачами кафедри алгебри активно впроваджується ряд лекцій, присвячених побудовам в середовищі GeoGebra (рис. 35):

Заняття 2
СТВОРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ: СТЕРЕОМЕТРИЯ

Рівень: початковий
Тип заняття: лабораторний практикум
Форма комунікації: zoom-конференція
Тип обладнання: ПК або ноутбук, динамічне середовище GeoGebra (онлайн <https://www.geogebra.org/> або завантажити додаток)
Рекомендації: за умови створення акаунту у GeoGebra, усі розробки можна зберігати у Вашому профілі та надавати посилання для їх перегляду

Зміст заняття:

1. Прямі та площини.
2. Перерізи багатогранників.
3. Комбінації геометричних тіл.

Рис. 35. Тематика лекцій за темою дослідження

Розглянемо ще одну задачу, яка може бути розв'язана координатним методом, отже, побудови можуть бути реалізовані і в нашому середовищі.

Задача 25. Знайти відстань між діагоналлю куба і діагоналлю грані (діагоналі не перетинаються). Ребро куба дорівнює задано.

Розв'язання. Виконаємо зображення куба (є відповідний інструмент, для цього вказуємо дві сусідні вершини, і побудова виконується автоматично). Для зручності в налаштуваннях середовища відмовляємось від координатних осей і горизонтальної координатної площини (рис. 36):

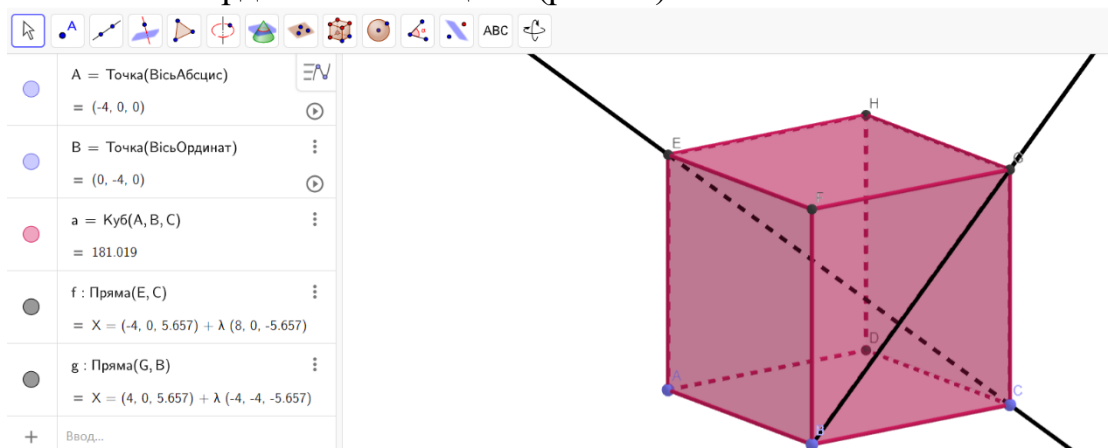


Рис. 36. Побудова куба в середовищі

Діагональ куба та діагональ грані – це мимобіжні прямі. Відстань між ними може бути знайде як довжина їх спільного перпендикуляра, або як відстань між паралельними площинами, які містять ці прямі (ми вже так шукали в попередніх задачах).

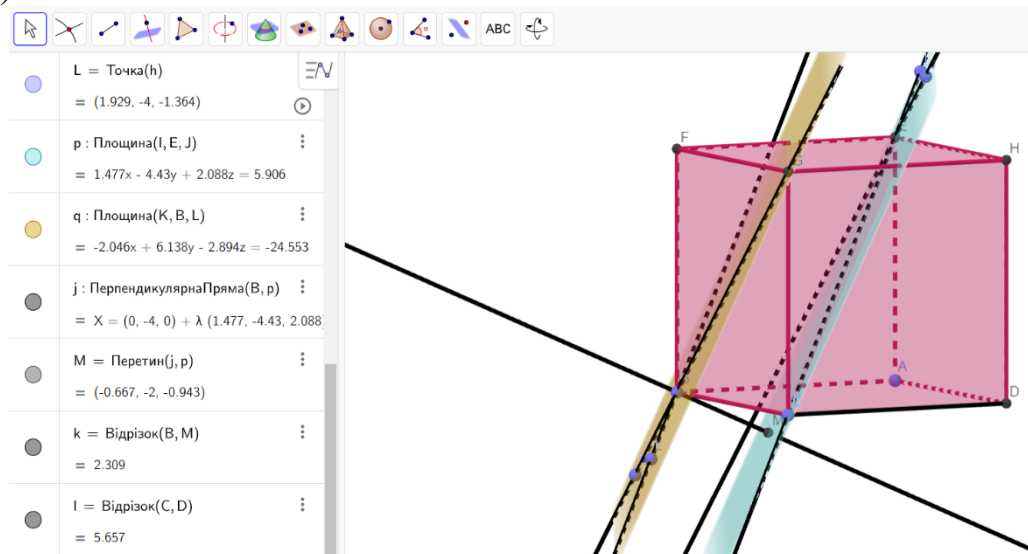


Рис.37. Розв'язання задачі 25

Але оскільки це динамічна модель, то змінимо, наприклад, розташування вершин (оскільки ми прив'язувались до осей координат, та додамо повзунки – автоматична зміна алгебри об'єкта від найменшого до найбільшого через крок налаштування). Зберігаються проміжні побудови і йде автоматичне обчислення відповіді для вихідних даних, також об'єкт ніби крутиться в просторі, оскільки змінюється довжина ребра куба (рис.38):

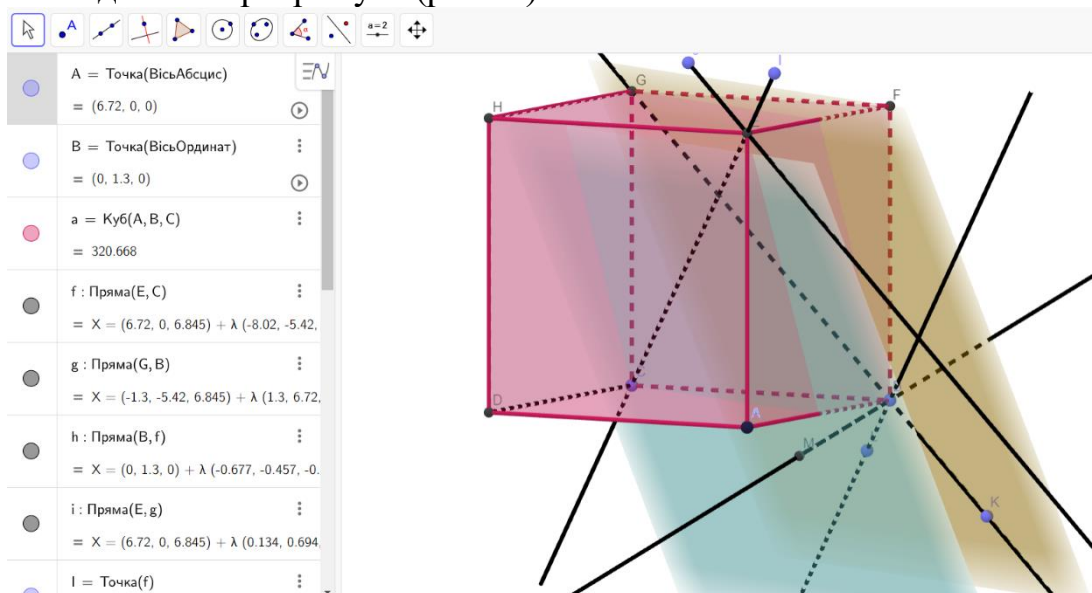


Рис. 38. Зміни лінійних розмірів вихідного об'єкта

Розв'язані щойно методами аналітичної геометрії елементарні задачі належать до категорії задач на побудову і становлять в елементарній геометрії значні труднощі. В аналітичній геометрії вони розв'язуються простіше. Але основна мета застосування методів алгебри та аналізу в геометрії полягає не в

тому, щоб простіше розв'язувати вже відомі нам задачі, а щоб розширити коло досліджуваних геометричних образів і розв'язувати нові задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білоусова, В. П., Ільїн, І. Г., Сергунова, О. П., & Котлова, В. М. (1957). *Аналітична геометрія*. Радянська школа.
2. Богач, О. В. (2020). *Застосування інформаційних технологій під час навчання геометрії учнів основної школи*. Вишнівський академічний ліцей «Основа». <http://surl.li/ekkth>.
3. Булдигін, В. В., Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., & Федорова, Л. Б. (2011). *Лінійна алгебра та аналітична геометрія*. ТВіМС. <http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf>.
4. Горошко, Ю., & Вінниченко, Є. (2008). Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 6 (13), 70–75. <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/504>.
5. Гриньов, Б. В., & Кириченко, І. К. (2008). *Аналітична геометрія*. (О. М. Литвина, Ред.). Гімназія.
6. Динамічне геометричне середовище GeoGebra. (2023, 06 червня). *Динамічна математика для навчання та викладання*. <https://www.geogebra.org/>.
7. Зайцева, Л. Л., & Нетреба, А. В. (2024, 11 січня). *Аналітична геометрія в прикладах і задачах*. <http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf>.
8. Зваридчук, В. Б. (2023, 19 грудня). *Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та Геометрія», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» (для бакалаврів)*. http://library.iapm.edu.ua/metod_disc/pdf/3936_Algebra.pdf.
9. Зеліско, В. Р., & Зеліско, Г. В. (2014). *Лінійна алгебра і аналітична геометрія*. Практикум. Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка.
10. Ілляшенко, В. Я., & Кремінь, В. М. (2010). *Аналітична геометрія та лінійна алгебра*. Навчально-методичний посібник. Ч.1. РВВ "Вежа" Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки.
11. Конет, І. М. & Сорич, В. А. (2013) Лекції з аналітичної геометрії. Аксиома.
12. Калюжний, О. О., Мальцев, А. Ю., Подколзін, Г. Б., & Чаповський, Ю. А. (2019). *Конспект лекцій з курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра"*. КПІ ім. Ігоря Сікорського.
13. Корольок, О. М., Прус, А. В., Фонарюк, О. В. & Чемерис, О. А. (2018). *Геометрія в тестах: практикум для орг. сам. роб. студ.* Вид-во ЖДУ ім. І. Франка.
14. Ленчук, І. Г., & Семенець, С. П. Геометрія. (2010). *Аналітична геометрія на площині*. Ч. І. Навч.-метод. посіб. Вид-во ЖДУ ім. І. Франка.
15. Наказ Міністерства освіти і науки України (2019, 29 травня). *Положення про електронні освітні ресурси*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12#Text>.
16. Прус, А. В., Мосіюк, О. О., & Чемерис, О. А. (2012). *Практикум з аналітичної геометрії (у 3-х частинах)*. Навчально-методичний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів. Вид-во ЖДУ ім. І. Франка.
17. Ракута, В. М. (2016). *Віртуальне середовище для розвитку професійної компетентності вчителів математики*. Упорядник, 202.
18. Рудавський, Ю. К., Костровій, П. П., Луник, Х. П., & Уханська, Д.В. (2002). *Лінійна алгебра та аналітична геометрія*. Навч. підручник. «Бескид Біт».
19. Семеніхіна, О. В., & Друшляк, М. Г. (2023, 24 грудня). *Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики та методичні проблеми їх використання*. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/2676>.
20. Томусяк, А. А., Трохименко, В. С., & Шунда, Н. М. (2020, 21 жовтня). *Геометрія. Частина 1. Аналітична геометрія*. Посібник для випускників фізико-математичних факультетів інститутів та університетів. <http://library.vspu.edu.ua/repositarij/reposit/texti/navchalni/Geometr.pdf>.

21. Чемерис О.А. (2018) Методичні аспекти у викладанні дисциплін геометричного циклу для студентів фізико-математичного факультету. *Теоретико-методичні аспекти навчання математичних дисциплін*. Монографія. А. В. Прус (Ред.). «Рута».
22. Яковець, В. П., Боровик, В. Н., & Ваврикович, Л. В. (2004). *Аналітична геометрія*. Навчальний посібник. ВТД «Університетська книга».

REFERENCES

1. Belousova, V. P., Ilyin, I. G., Sergunova, O. P., & Kotlova, V. M. (1957). *Analytic geometry*. Soviet school.
2. Bogach, O. V. (2020). *The use of information technology in teaching geometry to primary school students*. Vyshnivskyi academic lyceum "Osnova". <http://surl.li/ekkth>.
3. Buldygin, V. V., Alekseeva, I. V., Gaidey, V. O., Dykhovychnyi, O. O., Konovalova, N. R., & Fedorova, L. B. (2011) *Linear algebra and analytic geometry*. TViMS. <http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf>.
4. Goroshko, Y., & Vinnichenko, E. (2008). *The use of computer programs for creating dynamic models in the study of mathematics*. Scientific Journal of the Drahomanov National Pedagogical University. Series 2. Computer-oriented learning systems, 6 (13), 70-75. <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/504>.
5. Grinev, B. V., & Kirichenko, I. K. (2008). *Analytical geometry*. Gymnasium.
6. Dynamic geometric environment GeoGebra. (2023, June 06). *Dynamic mathematics for learning and teaching*. <https://www.geogebra.org/>.
7. Zaitseva, L. L., & Netreba, A. V. (2024, January 11). *Analytic geometry in examples and problems*. <http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf>.
8. Zvarydchuk, V. B. (2023, December 19). *Methodical materials for ensuring independent work in the discipline "Algebra and Geometry", "Linear Algebra and Analytic Geometry" (for bachelors)*. http://library.iapm.edu.ua/metod_disc/pdf/3936_Algebra.pdf.
9. Zelisco, V. R., & Zelisco, G. V. (2014). *Linear algebra and analytic geometry*. Workshop. Publishing center of Ivan Franko National University of Lviv.
10. Ilyashenko, V. Y., & Kremin, V. M. (2010). *Analytic geometry and linear algebra*. Study guide. Ч.1. Volyn: Lesya Ukrainka National University, Publishing house "Vezha".
11. Konet, I. M. & Sorich, V. A. (2013). *Lectures on analytic geometry*. Axiom.
12. Kalyuzhnyi, O. O., Maltsev, A. Yu. (2019) *Lecture notes for the course "Analytical geometry and linear algebra"*. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.
13. Koroliuk, O. M., Prus, A. V., Fonariuk, O. V. & Chemeris, O. A. (2018). *Geometry in tests: a workshop for the organization of students' self-study*.
14. Lenchuk, I. G., & Semenets, S. P. Geometry. (2010). *Analytical geometry on the plane*. Part I. Study guide. Izdvo ZhSU named after I. Franko.
15. Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine (2019, May 29). *Regulations on electronic educational resources*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1695-12#Text>.
16. Prus, A. V., Mosiyuk, O. O., & Chemerys, O. A. (2012). *Workshop on analytical geometry* (in 3 parts). Study guide for the organization of practical classes and independent work of students. Izdvo ZhSU imeni I. Franko.
17. Rakuta, V. M. (2016). *Virtualne seredovyshche dlia rozvytku profesiinoi kompetentnosti vchyteliv matematyky*. Uporiadnyk, 202.
18. Rudavskiy, Y. K., Kostrovoy, P. P., Lunik, H. P., & Ukhanskaya, D. V. (2002). *Linear algebra and analytic geometry*. Study guide. "Beskyd Bit".
19. Semenikhina, O. V., & Drushliak, M. H. (2014). *Kompiuterni instrumenty proqram dynamichnoi matematyky ta metodychni problemy yikh vykorystannia*. <http://repository.sspu.sumy.ua/handle/123456789/2676>.
20. Tomusiak, A. A., Trokhimenko, V. S., & Shunda, N. M. (2020, October 21). *Geometry. Part 1: Analytical geometry*. A manual for graduates of physical and mathematical faculties of institutes and universities.

<http://library.vspu.edu.ua/repozitarij/repozit/texti/navchalni/Geometr.pdf>.

21. Chemerys O.A. (2018) *Methodical aspects in teaching geometric cycle disciplines for students of the Faculty of Physics and Mathematics*. Theoretical and methodological aspects of teaching mathematical disciplines. Monograph. A. V. Prus (Ed.). «Ruta».

22. Yakovets, V. P., Borovik, V. N., & Vavrikovich, L. V. (2004). *Analytic geometry*. Study guide. VtD "University book".





УДК 378:371.134:51

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ОСВІТІ ТА ЗАВДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Алла ПРУС

pruswork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Математичне моделювання вже пів століття є темою наукових досліджень в Україні та за кордоном. Наразі доведеним є твердження, що математичне моделювання - це невід'ємний компонент математичної освіти. Це знайшло своє відображення у реформуванні навчальних програм з математики у багатьох країнах світу і в Україні, зокрема. Однак математичне моделювання у шкільній практиці все ще відіграє незначну роль.

Матеріали і методи. Аналіз навчально-методичної літератури проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення поняття завдання математичного моделювання; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання завдань у процесі математичного моделювання в школі.

Результати. Про математичне моделювання в освіті в Україні переважно говорять у контексті прикладної спрямованості математики. Математична освіта в школі пов'язана з математичним моделюванням через завдання, які вирішують учні на уроках математики. У публікаціях закордонних авторів є багато термінів (у нашому перекладі) для позначення таких завдань: текстові задачі, задачі історії, контекстуальні проблеми, проблеми реального світу, проблеми, пов'язані з роботою, ситуаційні проблеми тощо. У дослідженнях українських авторів для завдань математичного моделювання здебільшого прийнято вживати термін «прикладна задача». Хоча синонімічно вживаються й інші терміни:

Висновки. На нашу думку, основною причиною розриву між освітніми дослідженнями та повсякденною шкільною практикою є те, що моделювання є складним як для учнів, так і для вчителів. Фактично, основні учасники навчального процесу не готові до впровадження математичного моделювання. Тому подальші наші дослідження будуть пов'язані, перш за все, із вивченням місця та ролі математичного моделювання у системі підготовки майбутніх учителів математики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичне моделювання в освіті; завдання математичного моделювання; прикладна спрямованість математики; прикладна задача; компетенції математичного моделювання.

MATHEMATICAL MODELLING IN THE EDUCATION SYSTEM AND TASKS OF MATHEMATICAL MODELLING

Alla PRUS

pruswork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

ABSTRACT

Formulation of the problem. Mathematical modelling has been a topic of scientific research in Ukraine and abroad for half a century. Now it has been proven that the mathematical modelling is an integral part of the mathematical education. This is reflected in the reform of Mathematics curricula in many countries around the world and in Ukraine in particular. However, mathematical modelling in school practice still plays a minor role.

Materials and methods. The analysis of the educational and methodological literature of the research problem; systematization and generalization of different approaches to defining the concept

of a mathematical modelling problem; the analysis and systematization of domestic and foreign experience in applying problems in the process of mathematical modelling at school are used.

Results. Mathematical modelling in the education in Ukraine is mainly discussed in the context of Applied Mathematics. The Mathematics education in school is associated with mathematical modelling due to the problems solved by students at the lessons of Mathematics. There are many terms (in our translation) that can be found in the publications of foreign authors to refer to the following problems: text problems, history problems, contextual problems, real world problems, work-related problems, situational problems, etc. The “Applied Problem” is the common term used for mathematical modeling problems in the studies of Ukrainian authors. However, other terms are also used synonymously.

Conclusions. In our opinion, the main reason for the gap between the educational research and everyday school practice is that modelling is difficult for both students and teachers. In fact, the main participants in the educational process are not ready to implement mathematical modelling. Therefore, our further research will be primarily related to the study of the place and role of the mathematical modeling in the system of training future teachers of Mathematics.

KEYWORDS: mathematical modelling in the education system; tasks of mathematical modelling; applied focus of Mathematics; applied direction of Mathematics; applied problem; competencies of mathematical modelling.

ВСТУП

Про важливість математичної освіти написано багато. Вивчення математики передбачає більше, ніж оволодіння фактами, процедурами та концепціями, найбільший її бонус – це вирішувати проблеми реального світу. Однак багато учнів, власне, як і студентів, досі вважає, що даний предмет – лише набір правил, які потрібно завчити та послідовність дій, які необхідно вміти виконати. Корисність вивчення математики, у такому разі, зводиться до завдання скласти іспити, наприклад, зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) або національний мультипредметний тест (НМТ), щоб продовжити навчання та вступити до вищого навчального закладу на обрану спеціальність.

Для того, щоб математика була дійсно функціональною в повсякденному житті та на роботі, важливі два види навчальної діяльності учнів: вивчення ілюстративних додатків та стандартних моделей; активне математичне моделювання учнями, використання математики для вирішення нових для них проблем (Burkhardt, 2006). Таким чином, математичне моделювання може бути одним із найважливіших засобів для учнів бути компетентними в математиці та вміти її використовувати для власних потреб, у професійній діяльності.

Постановка проблеми. Математичне моделювання вже пів століття є темою наукових досліджень в Україні та за кордоном. Ці дослідження мали серйозний вплив на практику навчання математики принаймні на рівні навчальних програм. Протягом останніх десятиліть впровадження математичного моделювання та прикладних програм, ймовірно, разом із впровадженням інформаційних технологій є найвидатнішою спільною рисою реформування навчальних програм із математики в усьому світі (Kaiser, Blomhøj and Sriraman, 2006). Реформи навчальних програм у багатьох західних країнах, особливо на середньому рівні, підкреслили математичне моделювання як важливий елемент у сучасній навчальній програмі з математики, яка загалом готує до подальшої освіти (Blomhøj, 2008).

В Україні в навчальних програмах всіх рівнів, від молодшої до старшої школи теж сталися значні зміни. Типові освітні програми, які розроблені під керівництвом Савченко О. для 1-2 класів та для 3-4 класів, спрямовані на моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань, усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому і суспільному житті людини. У типових освітніх програмах, які розроблені під керівництвом Шияна Р. для 1-2 класів та для 3-4 класів, чітко сказано, що формування в учнів умінь аналізувати повсякденні проблеми математичного змісту потребує оволодіння ними математичним моделюванням як прийомом діяльності при дослідженні реальних об'єктів і процесів та при розв'язуванні навчально - пізнавальних і практико зорієнтованих задач. Модельні навчальні програми з математики для 5-6 класів (написані авторськими колективами Васишин М.С., Милянник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьний О.В.; Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С.; Беденко М.В., Ключко І.Я., Кордиш Т.Г., Тадеєв В.О.; Радченко С.С., Зайцева К.С.; Скворцова С.О., Тарасенкова Н.А. або одноосібно Істер О.С.), модельні програми з алгебри та геометрії для 7-9 класів (створені авторськими колективами Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В; Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В. або одноосібно Істер О. С.), які запроваджуються поетапно з 2022 року, визначають одним із завдань шкільної математичної освіти вироблення вмінь моделювати. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на рівні стандарту одним із головних завдань цього курсу визначає забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності, що включає, серед іншого, вміння будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні, та навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) наголошують, що особливу увагу варто приділити з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема, забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів його застосуванню до розв'язування широкого кола прикладних задач, зокрема фізичних.

Підкреслимо, що навички застосовувати математичні методи в процесі розв'язування навчальних і практичних задач мають формуватися на уроках математики, що чітко декларується у новому Державному стандарті базової середньої освіти (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020). Зокрема, у Державному стандарті базової середньої освіти серед обов'язкових результатів навчання зазначено вміння «моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій» (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020).

Однак у практиці навчання в усьому світі моделювання все ще відіграє набагато менш помітну роль, ніж хотілося б.

Аналіз актуальних досліджень.

Процес використання математики для розв'язування проблем реального світу називають математичним моделюванням (Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L., 2007).

Весь процес моделювання часто зображають у вигляді циклу. Представимо два приклади схем циклу математичного моделювання, які поширені у науково-методичних публікаціях за кордоном (цикл моделювання за Blum, Leiß, 2006) та у нашій країні (цикл моделювання за Швецем, 2009).

Процес моделювання, як показано далі на рис. 1, включає такі етапи: 1) розуміння завдання; 2) спрощення (структурування); 3) математизацію; 4) математичне розв'язування; 5) інтерпретацію; 6) валідацію; 7) представлення. Ці сім кроків процесу моделювання добре відомі та успішно використовуються за кордоном протягом останніх кількох десятиліть як евристика для навчання учнів математичному моделюванню.

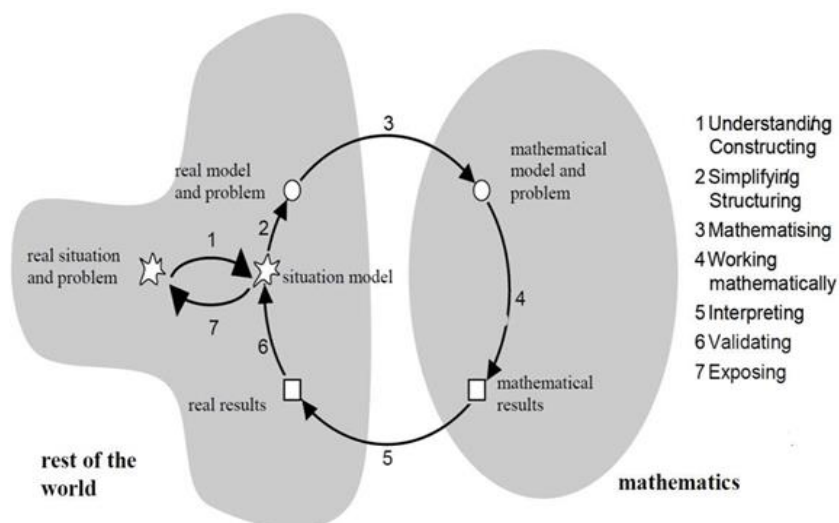


Рис. 1. Цикл моделювання за (Blum, Leiß, 2006)

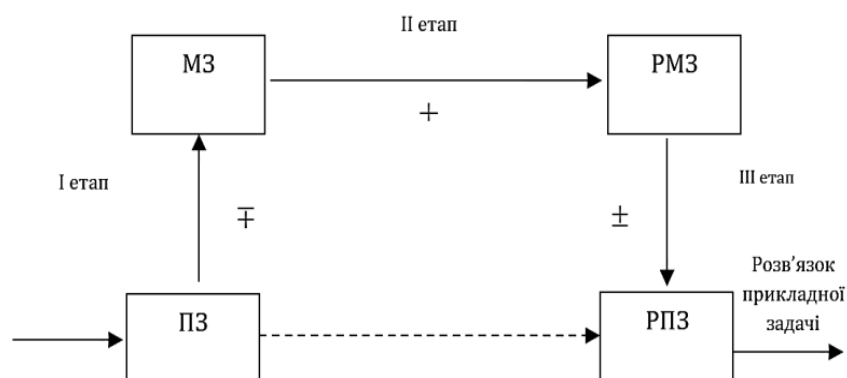


Рис. 2. Урізана графічна схема процесу математичного моделювання (мале коло) (Швець, 2009)

Пояснення позначень, які використовуються на рис. 2: ПЗ – прикладна задача; МЗ – математична задача; РМЗ – розв'язки математичної задачі; РПЗ –

розв'язки прикладної задачі; $\mp$ – дуже слабо володіють навичками; $+$ – добре володіють навичками; $\pm$ – навички сформовано недостатньо.

Нижче (рис. 3) наведено просту ілюстрацію циклу математичного моделювання (G. Greefrath and K. Vorhölter, 2016). Щоб розрахувати об'єм піску в контейнері, необхідно спочатку спростити задачу, наприклад, припустивши, що пісок рівномірно розподілений у контейнері, а рівень заповнення приблизно відповідає завантажувальному борту. Товщину матеріалу контейнера також не потрібно включати, таким чином дозволяючи зовнішнім і внутрішнім розмірам контейнера бути рівними. Також розумно припустити, що поверхня контейнера не має нерівностей. Щоб перевести заповнену частину ємності в математику, її можна ототожнити з трапецієподібною призмою. Використовуючи цю модель, відповідні розрахунки забезпечать математичне розв'язання. Розв'язок можна інтерпретувати як об'єм піску (див. рис. 3). Проблема, пов'язана з об'ємом піску в контейнері, є реальною проблемою. Перші спрощення на фактичному рівні призводять до того, що називається моделлю реального світу. Потім це переноситься в математичну модель, яка використовується для розрахунків у процесі математичного розв'язування. Потім результат застосовується до реальної проблеми.

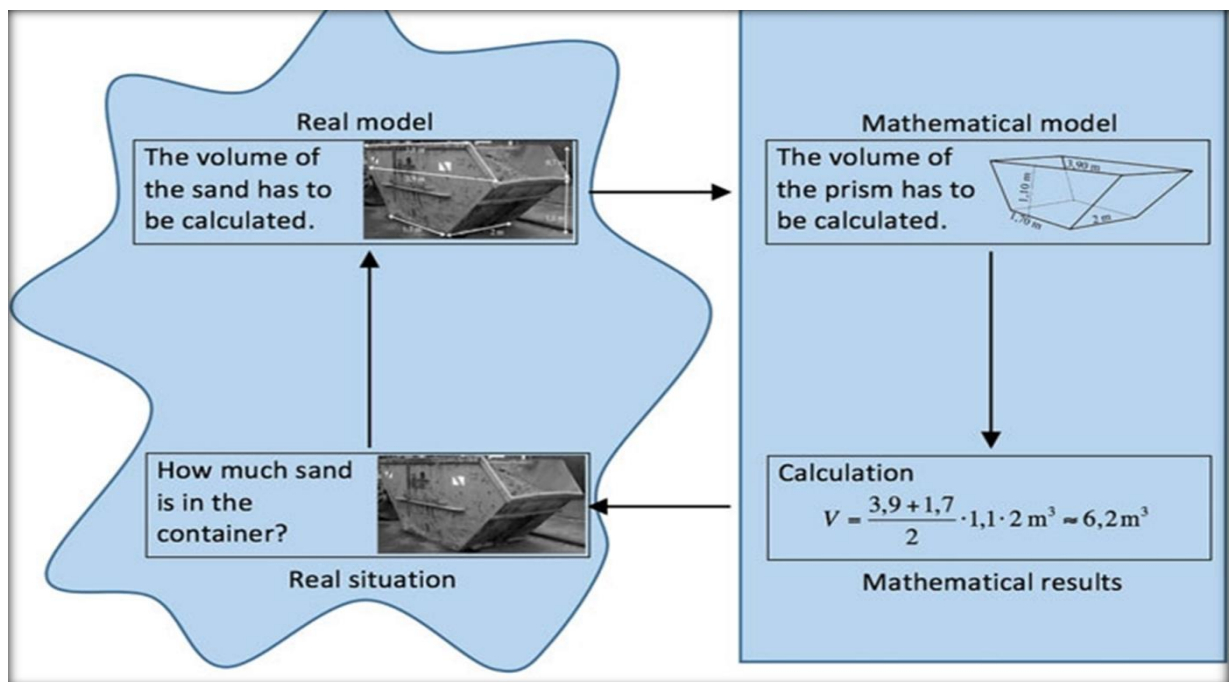


Рис.3. Ілюстрація циклу математичного моделювання (G. Greefrath and K. Vorhölter, 2016).

Під час дослідження питання математичного моделювання в освіті застосовують переважно два великі підходи:

- 1) моделювання для вивчення математики або його ще називають «моделювання як транспортний засіб» (англійською «Modelling-as-vehicle»);
- 2) застосування математики для розв'язування проблем за межами математики або «моделювання як зміст» (англійською «Modelling-as-content»).

У рамках зазначених вище підходів в освітніх дослідженнях математичного моделювання розроблені різні перспективи математичного моделювання (Aline Abassian, Farshid Safi, Sarah Bush, Jonathan Bostic 2020; Blomhøj, M. 2009; Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., Garcia, F. J., 2007; Kaiser, G., Schwarz, B., 2010). Єдиної загальноприйнятої систематизації їх немає.

Наразі найбільш поширені такі перспективи:

- 1) реалістичне або прикладне моделювання (Realistic or applied modelling);
- 2) контекстне моделювання (Contextual modelling);
- 3) підхід виявлення моделі або модельний підхід (Model eliciting approach);
- 4) освітнє моделювання (Educational modeling);
- 5) соціально-критичне моделювання (Socio-critical modelling);
- 6) епістемологічне або теоретичне моделювання (Epistemological or theoretical modelling);
- 7) когнітивне або пізнавальне моделювання (Cognitive modelling).

Кожен підхід, перспектива математичного моделювання реалізується на відповідних модельних завданнях. Щоб зрозуміти особливості, спільні та відмінні риси таких модельних завдань, розглянемо корисний та цікавий, на наш погляд, приклад (Kaiser, Sriraman, Blomhøj, Garcia, 2007), у якому запропоновано один контекст модельного завдання та представлено його трансформацію залежно від перспективи математичного моделювання.

У реалістичній перспективі можна запропонувати учням вирішити таке модельне завдання: «Створіть структуру цін для водія таксі». Це відкрите завдання. Потрібно створити модель, задіяти весь модельний цикл (рис. 4).



Рис. 4. Модельне завдання про таксиста.

У контекстній перспективі модельне завдання вже буде подане у іншому вигляді: «Водій таксі має фіксовану ціну за посадку пасажирів 2,00 євро, а ціна за кілометр - 0,15 євро. Вік водія таксі 43 роки, а його таксі - 7 років. Скільки коштує поїздка на 6 км?». Це вже звична для учнів текстова задача. Таке ж формулювання модельного завдання можна залишити й в освітній перспективі. Вчителю доцільно використати це завдання математичного моделювання для вивчення лінійних функцій, а розуміння контексту – для розвитку математичних понять. «Як має оплачуватись робота таксиста?» або «Як слід платити водію

таксі?» - це можливі формулювання модельного завдання в перспективі соціально-критичне моделювання. У цьому випадку варто розмірковувати про різні цінові структури, однак не забувати про різноманітні соціальні питання. Наприклад, можливо, водію слід платити за кожну годину роботи, незалежно від того, виконує він замовлення чи ні? Для перспективи епістемологічного моделювання модельне завдання з тим же контекстом сформульовано так: «Скільки грошей може заробити водій таксі за один робочий день?». У цьому формулюванні криється багато запитань. Наприклад. Яка структура ціни? Скільки клієнтів було у таксиста? Скільки бензину витрачено? Яка початкова вартість машини та якого вона року випуску?

Математичне моделювання в Україні, на нашу думку, відбувається переважно в рамках перспектив контекстного моделювання та освітнього моделювання. При чому, математичне моделювання у науково-методичних дослідженнях, як правило, пов'язують із прикладною спрямованістю математики. Зупинимось на цьому детальніше.

Проблема реалізації прикладної спрямованості завжди була і є в полі зору методистів, науковців, авторів підручників в Україні (Прус, 2003). Теоретичне обґрунтування її існування та шляхів розв'язування проведено в роботах О.Д. Александрова, О.М. Астряба, Г.П. Бевза, Б.В. Гнеденка, О.С. Дубинчук, Ю.М. Колягіна, В.В. Пікана, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тесленка, В.В. Фірсова та ін. Зокрема, були сформульовані загальні принципи, які забезпечують шкільному курсу математики прикладну спрямованість (В.В. Фірсов), розроблені шляхи розв'язування завдань навчання учнів застосовувати математичні знання на практиці (О.М. Астряб, Г.П. Бевз, О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тесленко), визначені умови реалізації прикладної спрямованості математики в школі (Ю.М. Колягін, В.В. Пікан). Важливі аспекти прикладної спрямованості курсу математики висвітлюють дисертаційні дослідження. Так, прикладну спрямованість розглядають як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів (М.Я. Ігнатенко), виокремлюють як одну із функцій навчання (А.С. Адигозалов), підкреслюють її важливість для формування мотивації навчання (О.Ф. Трепліна). Частина наукових досліджень присвячена проблемі формування в учнів умінь, пов'язаних із застосуванням математики (Г.Я. Дутка, М.В. Крутихіна, Г.В. Морозов), методиці прикладної спрямованості предметів шкільної математики, наприклад, алгебри і початків аналізу (Л.О. Соколенко). Деякі роботи базуються на розгляді окремих засобів прикладної спрямованості: практичних робіт (Р.Н. Матюгіна, В.Є. Тарасюк та ін.), прикладних задач (І.Б. Бекбоєв, С.С. Варданян, Л.С. Межейнікова, М. Мирзоахмедов, Л. Карамов, Н.Р. Колмакова, Л.М. Короткова та ін.). У значній кількості досліджень увага приділяється комплексному використанню засобів прикладної спрямованості: прикладних задач та інформації про походження математичних об'єктів, практичних і лабораторних робіт, міжпредметних зв'язків (В.П. Денисов, А. Улухходжаєв, А. Файзуллаєв, М.І. Якутова та ін.). Доцільні й важливі положення для вирішення визначеної проблеми є також у роботах науковців, які висловлюються стосовно важливості формування в учнів прийомів діяльності прикладного характеру, моделювання в навчальній діяльності (Я.С. Бродський, С.І. Великодний, Т.В. Крилова, О.Л. Павлов, Н.Г. Салміна, А.К. Сліпенко,

Н.А. Тарасенкова, М.О. Терешин, З.Я. Хаметова та ін.), використання інформаційно-комунікаційних технологій (О.В. Вітюк, Ю.В. Горошко, М.І. Жалдак, М.В. Морзе, С.А. Раков та ін.), навчання учнів розв'язуванню прикладних задач (Г.М. Возняк, М.П. Маланюк, К.П. Маланюк, А.Д. Мишкіс, І.П. Натансон, Я.І. Перельман, В.А. Петров, Л.М. Фрідман та ін.), формування геометричного бачення світу (Г. Кемпінський, Г. Шаррельман та ін.), застосування техніки орігамі у навчальному процесі (С.Ю. Афонькін, О.Ю. Афонькіна, С.В. Белім, С.М. Белім, С.Н. Дутко, І.К. Жинеренко, І.О. Круглова, А.І. Сухарев, А.П. Сухарева та ін.), використання міжпредметних зв'язків (В.О. Далінгер та ін.) та історичного матеріалу (В.Г. Бевз, Г.І. Глейзер та ін.). Вперше визначення прикладної спрямованості шкільного курсу математики було дано В.В.Фірсовим: «Суть прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в здійсненні цілеспрямованого змістовного та методологічного зв'язку шкільного курсу математики з практикою, що передбачає введення в шкільну математику специфічних моментів, характерних для дослідження прикладних проблем математичними методами» (дисер?). Ю.М.Колягін і В.В.Пікан запропонували своє визначення: прикладна спрямованість навчання математики - орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики в техніці та суміжних науках, професійній діяльності, народному господарстві та побуті (Прус, 2007).

Наразі в теорії та практиці прикладної спрямованості в Україні на перший план виходить необхідність саме математичного моделювання в освіті, про що свідчать результати досліджень, які відображені у науково-методичних публікаціях науковців. Наприклад, це такі ґрунтовні дослідження: «Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії» (Філімонова М., 2015); «Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо математичних предметів» (Волошена В., 2017); «Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи» (Катеринюк Г., 2020).

Як відомо, ключовим аспектом математичного моделювання є перехід між позаматематичним світом і математикою щоб вирішити реальну проблему (С. Hankeln, 2020). Для цього учні (студенти) повинні набути компетенцій, які дозволять їм вирішувати реальні математичні проблеми різноманітних поза математичних областей. Компетенції моделювання включають, на відміну від здібностей моделювання, не тільки здатність, але й готовність розробляти проблеми з математичними аспектами, взятими з реальності, за допомогою математичного моделювання (Kaiser, G., 2007). У рамках дискурсу математичного моделювання були виокремлені компетенції глобального моделювання та підкомпетенції математичного моделювання (Kaiser, 2007; Мааß, 2006).

Глобальні компетенції моделювання визначаються як здібності, необхідні для виконання та рефлексії всього процесу моделювання (принаймні часткового вирішення проблеми реального світу за допомогою моделі, розробленої власноруч), рефлексії процесу моделювання за допомогою мета знань та розвитку розуміння зв'язків між математикою і реальністю та суб'єктивності математичного моделювання. Крім того, частиною глобальних компетенцій є

соціальні компетенції (здатність працювати в групах і спілкуватися про математику та через неї).

Субкомпетенції математичного моделювання стосуються саме циклу моделювання, для якого існують різні описи, включаючи різні компетенції, необхідні для виконання окремих кроків циклу моделювання.

Розглянемо субкомпетенції математичного моделювання, які включені до моделювання, та їх маркери (Greefrath, 2013, 2015).

Таблиця 1

Субкомпетенції математичного моделювання

№	Субкомпетенція ММ	Показник
1	Конструювання	Учні (студенти) будують свою власну розумову модель із заданої проблеми і, таким чином, формулюють розуміння своєї проблеми
2	Спрощення	Учні (студенти) виділяють релевантну та нерелевантну інформацію з реальної проблеми
3	Математизація	Учні (студенти) перетворюють конкретні, спрощені реальні ситуації в математичні моделі (наприклад, терміни, рівняння, фігури, діаграми та функції)
4	Інтерпретація	Учні (студенти) пов'язують результати, отримані від маніпуляцій усередині моделі, з реальною ситуацією і, таким чином, отримують реальні результати
5	Перевірка	Учні (студенти) оцінюють отримані реальні результати з точки зору правдоподібності
6	Висновки	Учні (студенти) співвідносять результати, які отримані в ситуаційній моделі, з реальною ситуацією, і, таким чином, отримують відповідь на проблему

Базуючись на розрізненні різних фаз процесу моделювання (Blomhøj, Nøjgaard Jensen, 2003; Blomhøj, Nøjgaard Jensen, 2007) описали два різні підходи для підтримки компетенцій моделювання:

- 1) цілісний підхід;
- 2) атомістичний підхід.

Цілісний підхід вимагає повномасштабних процесів моделювання, де школярі (студенти) працюють на всіх етапах. Цей підхід розглядався як контрастний із атомістичним підходом, коли школярі (студенти) зосереджуються на підпроцесах, таких як процеси математизації та математичний аналіз моделей, оскільки вони розглядаються як особливо важливі та складні. Важливо у усвідомлювати, що жоден із двох підходів сам по собі не

є достатнім, необхідний баланс між цілісним підходом і атомістичним підходом у процесі навчання математичному моделюванню.

У дослідженнях українських авторів (Волошена, 2017) структура компетентності з математичного моделювання розглядається як сукупність трьох взаємопов'язаних компонентів:

- 1) теоретичного (наукові знання щодо базових положень про математичне моделювання; теоретичні й методологічні знання про суть і способи здійснення діяльності в галузі математичного моделювання);
- 2) практичного (інтелектуальні вміння; організаторські вміння; комунікативні вміння; рефлексивні вміння);
- 3) особистісного.

Зупинимось на практичній компоненті. Дослідниця зазначає, що до вмінь математичного моделювання належать також вміння ефективного застосовувати такі загальні розумові дії як аналіз, синтез, узагальнення, порівняння, конкретизація тощо. Зокрема, згідно результатів дослідження про формування умінь математичного моделювання в учнів старшої школи, можна виокремити такі тези. По-перше, вміння виділяти головне потребує свідомого використання умінь аналізу, синтезу, абстрагування та узагальнення, порівняння та конкретизації. По-друге, вміння інтерпретувати потребує розшифровувати мову об'єкта розгляду. По-третє, вміння шукати аналогії потребує наявності в учнів умінь аналізу та синтезу. По-четверте, вміння класифікації потребує операції поділу обсягу поняття, аналізу, синтезу, інтерпретування, а також побудови причинно-наслідкових зв'язків, узагальнення (Волошена, 2017).

У дослідженнях закордонних та українських авторів було виявлено ще один важливий фактор, який впливає на ефективність навчання математичному моделюванню - компетентність читання, тобто розуміння текстів, а також розуміння інформації з таблиць та графіків.

Окремо зазначимо, що у зв'язку з розвитком компетенцій у науково-педагогічній дискусії дедалі частіше обговорюється необхідність розвитку метапізнання. Метапізнання може бути важливим фактором, що впливає на розвиток навичок моделювання, оскільки стратегії вирішення проблем необхідні для виконання процесів моделювання.

Поняття «метапізнання» немає стандартного загальноприйнятого визначення. Наведемо одне із означень: «Метапізнання - це роздуми про власне мислення та управління своїм мисленням» (Sjuts, 2003). Згідно з поглядами Sjuts, існує три частини метапізнання: 1) декларативне метапізнання; 2) процедурне метапізнання; 3) мотиваційне метапізнання.

Декларативне метапізнання містить діагностичне знання про власне мислення, судження про завдання та стратегічне знання про шляхи вирішення проблеми. Процедурне метапізнання містить планування, опитування та судження, що означає моніторинг власних дій. Мотиваційне метапізнання - мотивація та сила волі, які є необхідними умовами для здійснення, реалізації метапізнання.

Крім того, Niss, M. (2004) розрізняє три виміри компетентності в моделюванні: 1) ступінь охоплення - це ступінь володіння характерними аспектами компетентності, про яку йдеться; 2) радіус дії, що вказує на спектр

контекстів і ситуацій в яких особа може активувати цю компетенцію; 3) технічний рівень, який показує, наскільки концептуально і технічно досконалі об'єкти та інструменти, за допомогою яких особа може активувати компетентність.

На нашу думку, важливо також з'ясувати знання та навички, умови та засоби, які спряють набуттю учнями навичок математичного моделювання. Серед них виділяють (Мааß, К. (2006) такі: знання про процес моделювання; математичні навички; завдання, які використовуються у процесі математичного моделювання у школі. Зміст, фабула завдань, які використовуються у процесі освітнього моделювання має великий вплив. Контекст може не тільки мотивувати, але й відволікати від вирішення проблеми, наприклад, сильним емоційним зв'язком зі студентами або занадто великою кількістю інформації. Зупинимось детальніше на завданнях, які використовуються у процесі математичного моделювання в освіті.

Мета статті. Проаналізувати зміст та обсяг поняття «завдання математичного моделювання» у процесі узагальнення розвитку проблеми впровадження математичного моделювання в шкільну освіту за кордоном та в Україні.

Методи дослідження. Аналіз навчально-методичної літератури проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення поняття модельного завдання; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду створення, використання завдань у процесі математичного моделювання.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Завдання, які пропонуються учням (наприклад, у шкільних підручниках, посібниках, збірниках завдань тощо) та використовуються протягом вивчення математики у школі, можна розділити на дві категорії або групи.

Перша категорія - завдання, які сформульовані суто математичною мовою. Завдання цієї категорії подаються цифрами, математичними операціями та символами, а словесні вирази стосуються лише математичних об'єктів.

Друга категорія містить завдання, у формулюванні яких містяться не обов'язково математичні терміни. Наприклад «Скільки потрібно фарби, щоб двічі пофарбувати підлогу у класній кімнаті, якщо її довжина 10 м, а ширина 12 м?». Термін «контекст» стосується ситуації або події в завданні, яка часто з'являється з реального життя або з уявних ситуацій (наприклад, казки). По суті, такі контексти виглядають досить нематематично (Vos, 2020). Отже, друга категорія – це завдання, які містять умови та вимоги, які подані у контексті реального життя. Такі завдання можна розділити на такі підкатегорії (Vos, 2020):

- 1) завдання з математичним контекстом;
- 2) «наряджені» завдання;
- 3) завдання з реалістичним контекстом;
- 4) завдання з автентичними контекстами.

Завдання з математичним контекстом не містять (багато) математичної мови, але вони стосуються математичних об'єктів та їхніх властивостей. Такі задачі зустрічаються в геометрії та найчастіше вони наочні. Ці завдання мають математичний контекст, який не зустрічається в реальному житті. Необхідність

відповіді на запитання не зовсім зрозуміла, учням часто важко досягти будь-яку «споживчу цінність» відповіді. Як розпізнати такі завдання? Через мову, яка використовується. «Голі завдання» містять переважно математичну мову та символи, тоді як завдання з математичним змістом мають більш неформальну мову. Завдання з математичним змістом містять описи, які надають певного значення математичним поняттям. Наведемо приклад завдання з математичним контекстом: «Як можна намалювати букву Т всередині кола з радіусом 6, з обмеженням, що вертикальна смуга Т повинна мати однакову довжину з горизонтальною смугою?».

«Наряджені» завдання - це завдання, за якими, по суті, ховається математичне завдання. Такі завдання мають певний контекст і безглузде запитання. Необхідність відповіді на запитання не обґрунтовується контекстом. Такі завдання не включають зайвої інформації та не містять пропусків інформації.

Наведемо приклад «нарядженого» завдання: «Скільки чвертей години входять у три з половиною години?». Для того, щоб запитання набуло сенсу, його доцільно переформулювати. Наприклад, так: «Лікар у поліклініці проводить консультації вранці з 8.30 до 12.00. Пацієнти мають консультативні візити по чверть години. Скільки пацієнтів може прийняти лікар?».

Завдання з реалістичним контекстом (експериментально реальним або уявним) – це завдання, у яких запитання має сенс у контексті, а відповідь на це запитання має корисну цінність у контексті.

Наведемо приклад завдання з реалістичним контекстом: «Команда спостерігачів за китами (біологів) має човен у прибережній зоні глибокого океану (рис. 5). Одного разу вони слідували за одним китом для спостережень. Їх човен має паливо, якого вистачить на три з половиною години подорожі. У проміжках між диханням тварина занурюється в глибоку воду, і тоді її не видно.



Рис. 5. Завдання з реалістичним контекстом про спостерігачів за китами

Тварина занурюється на чверть години, перш ніж їй потрібно знову вдихнути повітря. Скільки разів спостерігачі за китами можуть побачити ссавця?»

Завдання з автентичними контекстами - цей термін стосується справжнього контексту, а не копії чи симуляції. Автентичність – це характеристика, яка потребує чітких доказів, наприклад, за допомогою фотографій (на відміну від малюнків) або використання автентичних даних, наприклад, із державних звітів. У цих завданнях походження контексту завжди пояснюється. У цій категорії завдань контекст виправдовує запитання, відповідь є корисною в рамках описаного контексту. Наведемо приклад (рис. 6) завдання з автентичним контекстом (Borromeo Ferri, 2020): «Ситуація з паркуванням у Нью-Йорку складна, але величезній компанії пощастило отримати дозвіл на будівництво гаража на території площею 4226 м². Архітектор повинен заздалегідь визначитися із приблизною кількістю автомобілів, які зможуть поміститись у гаражі. Як ви думаєте, скільки машин можна буде припаркувати в новому гаражі на наступний рік?».

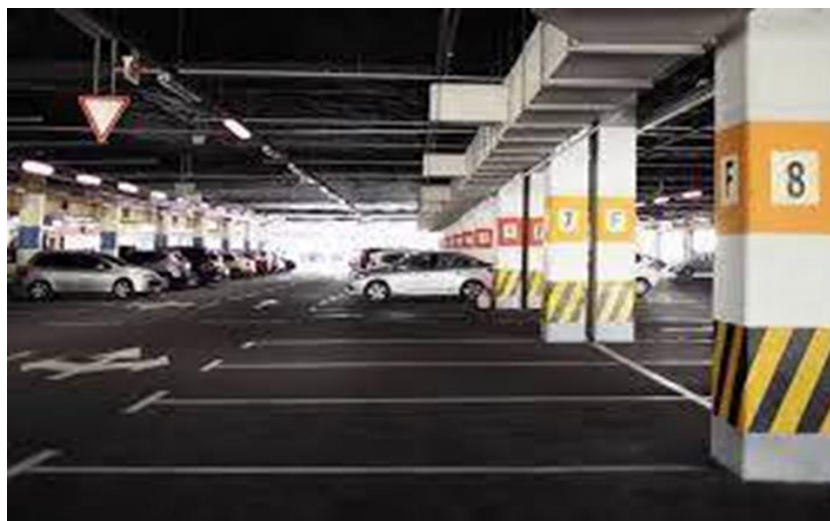


Рис. 6. Приклад завдання «Парковка» з автентичним контекстом (Borromeo Ferri, 2020)

Зазначимо, що існують й інші систематизації завдань математичного моделювання (Kaiser, 1995): текстові задачі, вбудовування математичних задач у повсякденну мову, ілюстрації математичних концепцій (наприклад, використання температури для введення від’ємних чисел), застосування математичних стандартних процедур (застосування добре відомих алгоритмів для вирішення проблеми, пов’язані з реальністю) і моделювання, тобто складні процеси вирішення проблем.

Окремо зупинимось на термінології для завдань, які використовуються в освітньому моделюванні.

У публікаціях закордонних авторів є багато термінів для позначення таких завдань (у нашому перекладі): текстові задачі, задачі історії, контекстуальні проблеми, проблеми реального світу, проблеми, пов’язані з роботою, ситуаційні проблеми тощо.

У дослідженнях українських авторів для завдань математичного моделювання здебільшого прийнято вживати термін «прикладна задача». Зауважимо, що у дослідженнях за кордоном термін «прикладна задача» теж зустрічається, однак переважно у відношенні до задач, які розв’язує прикладна

математика як наука, а не як предмет у школі чи освітня дисципліна в університеті. У науково-методичній літературі визначення поняття прикладної задачі дається по-різному, але, на нашу думку, суть його зберігається у кожному із них. Наприклад, прикладна задача – це задача, яка вимагає перекладу з природної мови на математичну (Р.М.Возняк та К.П.Маланюк, 1984, М.П.Маланюк, 1989). Прикладна задача – це задача, яка виникає за межами математики, але розв’язується математичними методами (З.І.Слепкань. 2003). Прикладними називають задачі про реальні, матеріальні об’єкти та зв’язки між ними (Г.П.Бевз, 1988).

Поряд із терміном «прикладна задача» синонімічно у науково-методичній літературі, у навчальних програмах та шкільних підручника, які створені в Україні, у розмовній практиці часто вживаються термін «практична задача», «математична задача із практичним змістом», «задача прикладного характеру», «сюжетна задача», «життєва задача», «математична задача практичної спрямованості», «реальна задача» та ін. Звичайно, було б зручно та корисно для навчального процесу та досліджень математичного моделювання, якби обсяг синонімів для одного й того ж поняття був меншим та зміст поняття модельного завдання трактувався однаково. Наприклад, іноді у науково-методичній літературі, шкільній практиці зміст понять «прикладна задача» та «практична задача» означають по-різному: прикладна задача - як завдання математичного моделювання, а практична задача – як задача, що потребує практичної діяльності із конкретними фізичними об’єктами (на зразок лабораторної роботи).

Зазначимо також, що систематизація прикладних задач у навчальних посібниках, які використовуються у процесі навчання математики в Україні, здійснюється на основі певних ознак.

Перша ознака систематизації – це систематизація на основі класу (року навчання), у якому цю задачу можна використовувати (8 клас, 11 клас тощо). Така систематизація є зручною для вчителів математики у процесі діяльності планування використання таких завдань у навчальному процесі.

Друга ознака систематизації – на основі математичної моделі (математична модель «циліндр», математична модель «лінійна функція» тощо). Цей поділ також зручний для вчителів, оскільки дозволяє підбирати завдання, коли відповідна модель вже вивчена.

Третя ознака систематизації – на основі сюжету (задачі побутового змісту, задачі професійного змісту тощо). Так систематизація дозволяє вчителю підбирати саме ті задачі, які цікаві тому чи іншому учню, класу. Це важливо з точки зору мотивації вивчення математики учнями.

Окремо доцільно зазначити функції прикладних задач у процесі навчання, які виокремлені українською науковицею Л. О. Соколенко ще наприкінці минулого століття (1997):

- 1) навчаючу (спрямовану на формування в школярів системи математичних знань, умінь та навичок);
- 2) виховуючу (спрямовану на формування в школярів світогляду, пізнавального інтересу і навичок навчальної праці);
- 3) розвиваючу (спрямовану на розвиток мислення школярів, на формування у них прийомів ефективної розумової діяльності);

4) контролюючи (спрямовану на встановлення рівня навченості, здатності до самостійного вивчення математики тощо).

Реалізацію останньої функції прикладних задач ускладнено майже повною відсутністю таких завдань під час діагностики навчальних досягнень учнів упродовж навчання. У численних збірниках самостійних та контрольних робіт, які випущені на останні двадцять років, домінують суто математичні задачі та є текстові задачі (у відповідних темах). Однак слід підкреслити, що протягом останніх п'яти років ситуація поступово змінюється. Серед завдань зовнішнього незалежного оцінювання прикладні завдання вже впевнено займають своє місце. Зрозуміло, що війна на території нашої країни, розпочата Росією, не сприяє прискоренню прогресивних інновацій в освіті України, однак не здатна їх зупинити.

Розглянемо ситуацію із наявністю завдань математичного моделювання в підручниках та посібниках, тобто проведемо кількісний аналіз завдань в окремих підручниках, рекомендованих Міністерством освіти України у 2022-2023 навчальному році.

Цілком довільно ми взяли декілька підручників (алгебри, геометрії або математики), при чому, різних авторських колективів, різних класів. Зазначимо, що ми брали у розрахунок будь-яку задачу, яку не було сформульовано чисто математичною мовою (текстові задачі, зрозуміло, увійшли до розрахунків).

У підручнику з геометрії (профільний рівень) для 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Істер, О. С., 2019) з 1351 задачі ми знайшли 67 таких задач, що становить приблизно 5 % всіх задач.

У підручнику з математики: алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) для 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Бевз Г.П., Бевз В.Г., 2018) з 1378 задач є 90 таких задач, що становить приблизно 7 % всіх задач.

У підручнику з алгебри для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О., 2022) з 743 задач ми знайшли 126 таких задач, що становить приблизно 17 % всіх задач.).

У підручнику з геометрії для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., 2021). з 859 задач ми знайшли 12 таких задач, що становить приблизно 1 % всіх задач.

Як бачимо, показник варіює від 1% до 17%. В середньому, це становить 7,5%. На нашу думку, це досить низький показник. За висновками дослідників (Прус, 2007), їх має бути орієнтовно 20% - 30% від загальної кількості задач.

Тобто, у підручниках з математики, які використовують у школах України на сьогодні, поки що переважають завдання в традиційному формулюванні («обчисліть значення виразу, округліть число до цілих» тощо). Для посилення лінії розвитку вмінь учнів використовувати математичні знання для аналізу різноманітних ситуацій у повсякденному житті, доцільно звертати увагу на використання математичних навичок аналізувати, прогнозувати, робити наближену оцінку, знаходити зв'язки між причинами та наслідками та ін. в процесі обговорення сюжетних задач, це сприятиме не тільки більш упевненому розв'язуванню математичних задач практичної спрямованості, а й узагалі набуттю математичної компетентності як такої (Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022, 2023).

Корисно, на нашу думку, також дослідити питання наскільки завдання із діючих шкільних підручниках відповідають вимогам, які ставляться до завдань математичного моделювання.

Ми проаналізували на цей предмет декілька підручників (вони складені на основі відповідних модельних програм) які використовуються в 5-6 класах протягом 2022-2023, 2023-2024 навчальних років. Слід зазначити, що спостерігається стійка тенденція доповнення звичайних, суто математичних завдань сучасними прикладними завданнями, прикладами застосування математичних знань у реальних життєвих ситуаціях, наводяться приклади використання математики у суміжних навчальних предметах, галузях наук, напрямках професійної діяльності, системно використовуються модельні завдання-проекти як приклад діяльності у реальному житті та ін.).

Наводимо приклади типових завдань, які пов'язані із життєвими ситуаціями, із різних тем та різних підручників (вибраних на власний розсуд), які у них пропонуються.

1. Сім'я використала 40% свого місячного заробітку на харчування, 15% цієї суми на комунальні послуги, 75% залишку – на покупки, а решту 4860 грн поклала на депозит у банк. Який місячний дохід з сім'ї? (Істер, 2023)

2. За даними Державної служби статистики, станом на 1 січня 2022 року, в Україні постійно проживало 41,17 млн людей, з них 28,69 – жителі міст. Скільки відсотків всього населення в Україні становить міське населення? (Мерзляк, Полонський, Якір, 2023).

3. З молока виходить n кілограмів сиру, а решту 93,75% становить сироватка. Скільки кілограмів молока можна взяти для виготовлення сиру, якщо: 1) $n=18,75$; 2) $n=62,5$? (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць, Сердюк, Рудніцька, 2023).

4. На даху будинку господар установив сонячну електростанцію із 14 панелей, а на присадибній ділянці – із 36 таких панелей. За рік він заробив 76180 гривень. Скільки грошей господар заробив завдяки таким панелям на даху будинку та панелям на присадибній ділянці окремо? (Скворцова, Недялкова, 2023).

5. Відстань між Києвом і Черкасами 420 км. Знайдіть відстань між цим містами на карті з масштабом 1:5 000 000 (Кравчук, Янченко, 2023).

6. Пиріг, маса якого $\frac{4}{5}$ кг, розрізали на 6 рівних частин. Знайдіть масу однієї частини пирога. (Бевз Г., Бевз В., Васильєва, Владімірова, 2023).

7. Довжина однієї сторони боксерського рингу 4,5м, його обтянули суцільним канатом у три ряди. Знайдіть довжину цього канату та площу рингу (Біос, 2023).

Можна зробити висновок, що незважаючи на позитивні тенденції, які зазначені нами вище, більшість завдань, які можна побачити у підручниках, не має відкритих запитань, містить необхідну кількість даних для їх розв'язування, не потребують вмінь прогнозувати, робити наближену оцінку. Тобто явно недостатньо задач, спрямованих на формування в учнівства вмінь і навичок самостійно будувати математичні моделі, спираючись на власні математичні знання, Уміння та навички учнів, що потрібні для розв'язання таких та аналогічних завдань, більш точно сформульовано в Державному стандарті

базової середньої освіти, затвердженому у 2020 р. Зокрема там виділено такі очікувані результати навчання учнів математики, як «Вирізняє серед ситуацій із повсякденного життя ті, що розв'язуються математичними методами» [МАО 1.1]», «Будує математичну модель, використовуючи вирази, рівняння, нерівності, графіки та інші форми представлення моделі» [6 МАО 2.3.2-1], «Представляє математичну інформацію в різних формах (числовій, графічній, табличній тощо), аналізує її, робить висновки» [6 МАО 4.2.2-1].

Задачі у шкільних підручниках з математики можна створювати такими, щоб вони були більш цікавими, мотивуючими та з вищими когнітивними вимогами. Важливо змінити частину звичайних текстових задач на проблеми реального життя. Наступні аспекти визначені (Borromeo Ferri, 2020) важливими як для того, щоб успішно перетворити завдання на проблему моделювання, так і для ефективного використання його в класі:

- 1) зменшити наведені дані або пропустити частину з них;
- 2) змінити фабулу задачі на реалістичну або автентичну;
- 3) сформулювати відкрите питання до задачі;
- 4) визначити інструменти, які студенти можуть використовувати (Інтернет, книги, програмне забезпечення, спеціальні матеріали тощо).

Зауважимо також, що вчитель вже сьогодні може навчати учнів розв'язувати задачі математичного моделювання, оскільки на додаток до шкільних підручників, існують цікаві та корисні для учнів завдання математичного моделювання, які представлені в Україні в навчально-методичних посібниках, збірниках задач.

Наведемо декілька прикладів авторських завдань, які можна пропонувати учням у процесі використання математичного моделювання на уроках систематичного курсу стереометрії (Прус, 2007).

Завдання про торт (Прус, 2007). Для приготування крему для тарту господині потрібно взяти пачку (200 г) вершкового масла, банку згущеного молока (380 г), 120 г мелених горіхів та додати завчасно приготовлену та охолоджену шоколадно-яєчну суміш (у відношенні 1:2). Потім збити всі ці інгредієнти, використовуючи кухонний комбайн (рис. 8). Господиня вагається, яку чашу кухонного комбайна доцільно використати: одна ємність кухонного комбайну має висоту 13 см, а діаметр дна – 17,5 см, друга має ту ж висоту, однак діаметр дна – 12,5 см. Яку б ви дали пораду? Обґрунтуйте.



Рис. 8 Кухонний комбайн

Завдання про торт – це завдання на побутову тематику. Математична модель цього завдання легко прочитується. Однак це завдання не містить всю необхідну для розв’язування інформацію (ми подали її далі у рубриці «додаткова інформація»; цю інформацію учні можуть легко знайти в Інтернеті).

Додаткова інформація.

Розміри стандартної пачки (200г) масла $9,5 \times 7,5 \times 2$ см

Висота стандартної банки (380 г) згущеного молока - 8см, діаметр основи – 7,5см

Горіхи повністю заповнили склянку об’ємом 250 см^3

Взяти до уваги, що збитий крем збільшується в об’ємі на 30%.

Завдання про перебування на морозі (Прус, 2007). Поясніть, чому дитина, яка стоїть на морозі, мерзне більше, ніж однаково вдягнутий дорослий (рис. 9)?



Рис. 9. Завдання про перебування на морозі

Розв’язання. Кількість тепла, що виникає в кожному кубічному сантиметрі тіла в дитини та дорослого приблизно однакова, але поверхня тіла, яка охолоджується і приходить на кожний кубічний сантиметр, у дитини більша, ніж у дорослого. В цьому ж слід бачити причину того, що пальці, руки та ніс

мерзнуть більше і відморозжуються частіше, ніж інші частини тіла, поверхня яких не така велика в порівнянні з їх об'ємом.

Завдання про перебування на морозі – це відкрите завдання математичного моделювання з фізичним змістом.

Завдання про сир (Прус, 2007). Сировари вважають, що при рівному об'ємі сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості, ніж сири форм циліндра (рис. 10) або куба. Чому?



Рис. 10. Сири циліндричної форми

Розв'язання. Спочатку смакові якості сиру на залежать від його форми. Відомо, що смакові якості змінюються у результаті випаровування та окислення. А інтенсивність цих процесів залежить від площі поверхні тіла: чим вона менша, тим повільніше випаровування та окислення. В такому випадку приходимо до чисто геометричної задачі: порівняти площі поверхонь куба, циліндра і кулі, які мають рівні об'єми. Задача залишається недостатньо визначеною, тому що невідома висота циліндра. Будемо вважати її рівною $2R$, де R - радіус основи циліндра. Нехай його об'єм буде: $V = V_{\text{цил.}} = 2\pi R^3$, звідки $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

$S_{\text{пов.цил.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi^3 \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}$. $V = V_{\text{куба}} = a^3$ (a – сторона куба), звідки

$a = \sqrt[3]{V}$, $S_{\text{куба}} = 6a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$. $V = V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ (r – радіус кулі), звідки $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, тобто

$S_{\text{кулі}} = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}$. Потрібно порівняти площі поверхонь. Всі вони додатні,

тому можна перейти до порівняння їх кубів:

$S_{\text{циліндра}}^3 = 6^3 \pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2} = 54\pi V^2$, $S_{\text{куба}}^3 = 54 \cdot 4V^2$, $S_{\text{кулі}}^3 = 36\pi V^2$. $36\pi < 54\pi < 54 \cdot 4$, тобто маємо

наступне: $S_{\text{кулі}}^3 < S_{\text{циліндра}}^3 < S_{\text{куба}}^3$, звідки $S_{\text{кулі}} < S_{\text{циліндра}} < S_{\text{куба}}$. Отже, найменша площа поверхні у кулі.

Завдання про сир - це теж відкрите завдання математичного моделювання з фізичним змістом. І хоча в завданні вказані геометричні форми, пошук розв'язування завдання вимагає вміння знайти додаткову інформацію (від чого залежить смак сиру), вміння робити припущення та спрощення.

Завдання про кашу (Прус, 2007). Сергійко насипав у циліндричну каструлю трошки крупи і запитав маму: “Скільки потрібно налити води, щоб вийшла смачна каша?” – “Це дуже просто, - відповіла мама. – Нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якого піднялась крупа. До цього рівня і потрібно налити воду.” – “Але крупи можна насипати більше або менше, та й каструлі бувають різні – широкі, вузькі”, - сказав Сергійко. “Не має значення, цей спосіб стане у пригоді в будь-якому випадку”, – сказала мама. Чи дійсно це так?

Розв'язання задачі.

Після демонстрацій (наприклад, за допомогою комп'ютера, рис. 11) ілюстративного матеріалу (каструлі, каструлі з крупою, з крупою і водою), переходимо до наступних припущень:

- моделлю каструлі з крупою може бути циліндр, який заповнено речовиною;
- моделлю каструлі з крупою, водою теж може бути той же циліндр (рис. 13).



Рис. 11. Каструля з крупою

Крупа займає в цьому циліндрі об'єм V_k , а вода – об'єм V_v . Щоб перевірити чи правильним буде твердження, висловлене мамою, потрібно відповісти на запитання: «Чи змінюється відношення цих об'ємів залежно від форми циліндра?». Отже, приходимо до математичної задачі: «Визначити відношення об'ємів V_k і V_v ». Модель, що досліджується (рис. 12), помістимо в прямокутну систему координат так, щоб основа циліндра належала площині XOY , а центр основи O був початком координат (рис. 14).

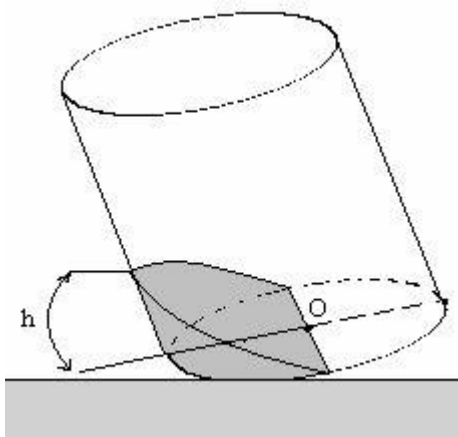


Рис. 12

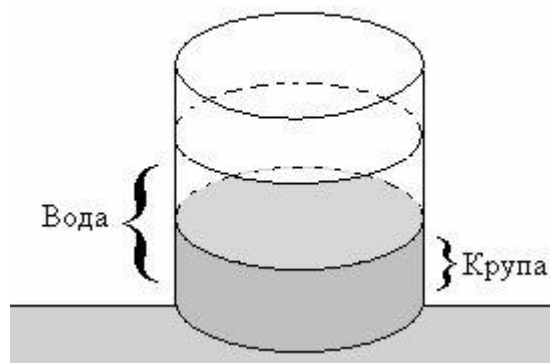


Рис. 13

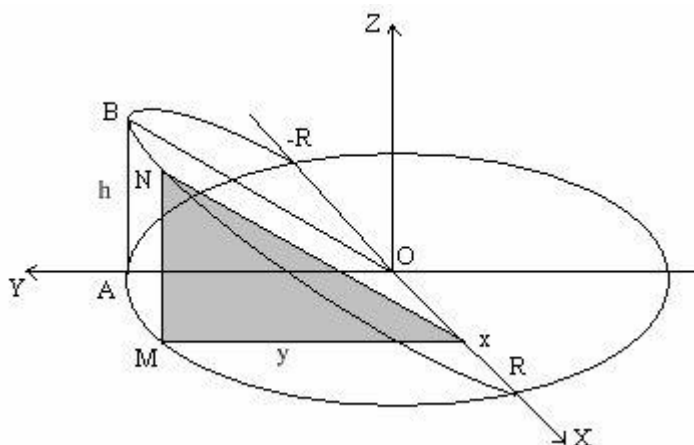


Рис. 14

Через точку x на осі OX , $x \in [-R; R]$, будемо переріз тіла (тобто гірки із крупи всередині каструлі) площиною, що перпендикулярна до осі OX . В перерізі отримаємо трикутник MNx . Очевидно, що трикутник MNx подібний до трикутника ABO .

Тоді $\frac{MN}{h} = \frac{y}{R}$. Звідси $MN = \frac{yh}{R}$. Площа трикутника MNx дорівнює:

$$S_{MNx} = 0.5 \times MN \times Mx, S_{MNx} = \frac{hy^2}{2R}.$$

Оскільки точка M належить колу радіуса R і має координати $(x; y)$, то отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2$. Тоді площа трикутника MNx дорівнює:

$S_{MNx} = \frac{h(R^2 - x^2)}{2R}$. Використовуючи визначений інтеграл (як математичну модель), отримаємо

$$V_K = 2 \int_0^R \frac{h(R^2 - x^2)}{2R} dx = \frac{h}{R} \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} hR^2.$$

$$V_B = V_{\text{ц}} - V_K = \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{R^2 h}{3} (3\pi - 2).$$

Відповідно, що $\frac{V_g}{V_K} = \frac{3\pi}{2} - 1 = 3,5$ (const). Як бачимо, це відношення не залежить від розмірів каструлі.

Відповідь. Готування смачної каші за маминим рецептом не залежить від розмірів каструлі.

Завдання про кашу - це задача з реалістичним змістом. Розв'язування вимагає певних припущень (про форму каструлі).

Завдання про кровоносні судини (Прус, 2007). У нашому тілі знаходиться складна система кровоносних судин (Рис. 15). Якби їх всі вдалось скласти за довжиною, то загальна протяжність становила б 150 тисяч км (в 3,5 рази більша, ніж окружність Земної кулі). Який середній діаметр однієї судини? *Відповідь.* $\approx 0,02\text{мм}$.

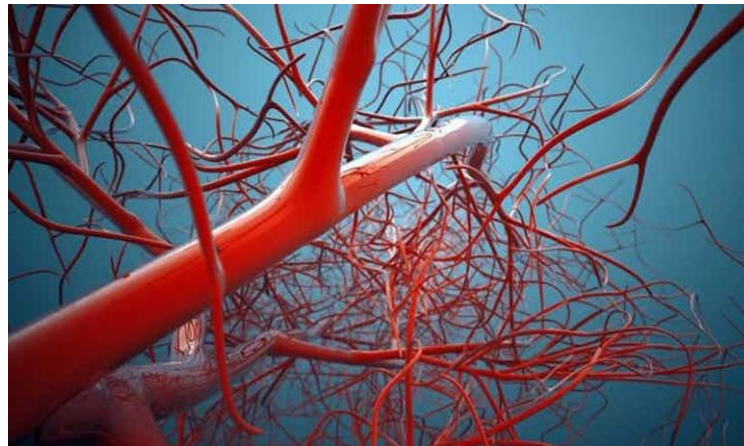


Рис. 15. Кровоносні судини

Додаткова інформація, необхідна для розв'язування: загальна площа всіх кровоносних судин – 9000м^2 (це площа двох футбольних полів).

Завдання про монети (Прус, 2007). Національний банк України, продовжуючи серію «Духовні скарби України», ввів в обіг з 27 грудня 2006 року пам'ятну монету «Нестор - літописець» (рис. 16) номіналом 50 гривень. Як повідомив НБУ, її тираж - 5 тисяч штук. З якого матеріалу виготовлена монета? *Відповідь.* Монета виготовлена із золота.



Рис. 16. Монета «Нестор - літописець»

Додаткова інформація, необхідна для розв'язування: як повідомив НБУ маса однієї монети – 15,55г, діаметр – 25мм, товщина – 1,7мм. Таблиця густини різних речовин, зокрема, густина золота $19,3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$).

Завдання про кровоносні судини та завдання про монети – це завдання з автентичним змістом.

Представимо один із результатів міжнародного дослідження, яке було проведено у 1999 році. Під час дослідження аналізувалась практика викладання математики в класах математики на рівні 8 класу в семи країнах: відео дослідження TIMSS. Країнами-учасницями були Австралія, Чехія, Гонконг, Японія, Нідерланди, Швейцарія та США. На рис. 7, ми бачимо, що у 84 випадково відібраних уроках математики у 8 класі в Нідерландах є відносно менший відсоток завдань, які були створені лише з використанням математичної мови або символів, у середньому 40% завдань на урок. В інших країнах приблизно 70–90% завдань склалися лише з цифр та символів. Частоти для другої категорії демонструють зворотну картину. У Нідерландах відсоток завдань на урок, який розпочався зі зв'язків із реальним життям, становить 42%, тоді як в інших шести країнах цей відсоток коливався від 9 до 22% (Pauline Vos, 2020).

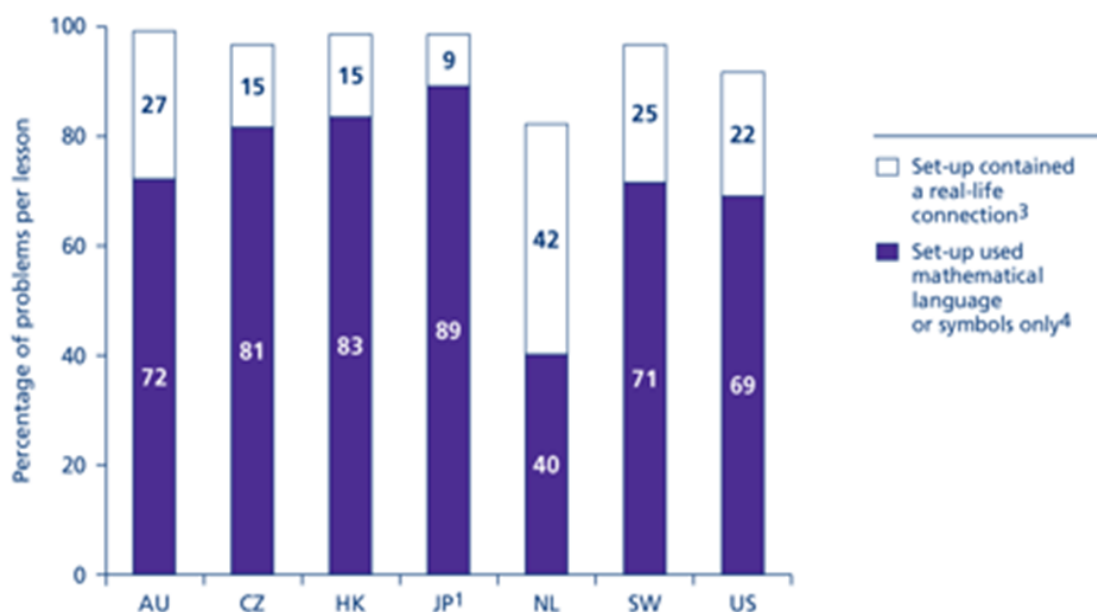


Рис. 7 Про використання на уроках завдань математичного моделювання

Слід сказати, що наші дослідження щодо математичного моделювання, власна навчальна діяльність, спостереження під час виробничої практики у школі, інтерв'ю та бесіди з вчителями математики та з батьками учнів, анкетування учнів, свідчать, що на уроках математики в школах України завдання з реальним контекстом займають мізерний відсоток. Окремо слід зазначити, що повномасштабне вторгнення країни – агресорки Росії в лютому 2022 безпосередньо вплинуло на всі процеси, пов'язані з модернізацією освіти у нашій країні, зокрема, у питанні впровадження математичного моделювання на уроках математики.

ОБГОВОРЕННЯ

В дослідженнях як закордонних, так і українських авторів, обговорюються причини розриву між теорією та практикою впровадження математичного моделювання в освіту. Науковцями виокремлено та описано системні перешкоди для широкомасштабного впровадження моделювання (Burkhardt, H., with contributions by Pollak H.O. 2006): 1) системна інерція; 2) реальний світ; 3) обмежений професійний розвиток; 4) роль і природа досліджень, розробок в освіті.

Щодо системної інерції. Освітня система неймовірно інертна. Це пов'язано з рядом факторами. Перш за все, це налагоджена повсякденна практика великої кількості фахівців у сфері математичної освіти. Далі, важливим фактором є також переконання батьків що таке математика та як її вивчати, їх очікування результатів вивчення цього предмету, які зазвичай, засновані на їхньому власному шкільному досвіді. Наступне, це переважно суто математичний характер завдань, які використовуються для оцінювання компетентності учнів у математиці як протягом навчання у школі, так і по її закінченні.

Тому у школах все ще домінує стиль навчання пояснення – приклади – імітаційні приклади та зосередженість на вивчених фактах, поняттях і навичках. Серед аргументів, які використовуються для протидії впровадженню нових елементів, таких як моделювання, найбільш вагомий – це брак часу.

Щодо реального світу. Існує страх знехтувати формальною математикою. Чиста а математики – це те, що приваблювало багатьох до викладання математики, особливо на вищих рівнях. Викладання математики, кажуть вони, є досить вимогливим і без хаотичності модельованої реальності. Крім того, громадськість, спираючись на власне бачення та досвід, поділяє ці переконання про «правильну математику».

Щодо обмеженого професійного розвитку. Як і в будь-якій кваліфікованій діяльності, вчителі дуже різняться за діапазоном своїх навичок навчання, і що ніхто з нас не усвідомлює своїх обмежень так, як мав би. За винятком таких країн, як Японія, безперервний професійний розвиток ще не є невід'ємною частиною повсякденної роботи вчителів. Зазначимо також, що практично, не робляться спроби побачити, чи змінюється щось у процесі навчання після участі вчителів у програмі підвищення кваліфікації.

Щодо ролі і природи досліджень і розробок в освіті. Дослідження та розробки в освіті, порівняно з іншими прикладними галузями, недостатньо організовані для перетворення дослідницьких ідей у практику. В успішних галузях практики, заснованих на дослідженнях (наприклад, медицина або проектування та розробка побутової електроніки), можна знайти наступне: механізми перенесення ідей з лабораторного масштабу, що добре зарекомендували себе, в широко використовувану практику; норми для методів дослідження та звітності, які є суворими та послідовними; достатньо стабільна теоретична база; команди з достатньою кількістю людей для вирішення великих завдань протягом тривалого часу та постійне фінансування для підтримки науково-практичного процесу в реалістичних часових масштабах.

Серед ключових чинників для подолання окреслених вище факторів визначені такі: 1) детальні методичні супроводи навчальних програм із математики щодо математичного моделювання; 2) якісно розроблені системи завдань для математичного моделювання (з детальними поясненнями їх використання у навчальному процесі); 3) професійний розвиток працюючих вчителів математики та навчання математичному моделюванню майбутніх учителів математики; 4) зв'язки з громадськістю; 5) зацікавленість і мотивація учнів; 6) вдосконалення системи оцінювання компетентності учнів у математиці.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

На нашу думку, основними причинами розриву між освітніми дослідженнями та повсякденною шкільною практикою є такі. По-перше, моделювання є складним як для учнів, так і для вчителів. По-друге, постійний брак часу для формування суто математичних умінь та навичок з одного боку, та недовіра до математичного моделювання як потужного засобу формування не лише математичного стилю мислення. Фактично, основні учасники навчального процесу не готові до впровадження математичного моделювання.

Подальші наші дослідження будуть пов'язані, перш за все, із вивченням місця та ролі математичного моделювання у системі підготовки майбутніх учителів математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П.(1988). *Методика розв'язування стереометричних задач*. Радянська школа.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. (2018). *Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія: (рівень стандарту) підручник для 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Освіта.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Васильєва Д.В., Владімірова Н.Г. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Освіта.
4. Біос Джон Ендрю (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Лінгвіст.
5. Возняк Г.М., Маланюк К.П. (1984). *Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв'язування екстремальних задач*. Радянська школа.
6. Возняк Г.М., Маланюк М.П. (1989). *Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики*. Радянська школа.
7. Волошена В. В. (2017). Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо-математичних предметів. підходу [Дис. канд. пед. наук, НАПН України], Київ.
8. Державний стандарт базової середньої освіти (2020). <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
9. Істер, О. С. (2019). *Геометрія: (профільний рівень) підручник для 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Генеза.
10. Істер, О. С. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Генеза.
11. Кравчук В.Р., Янченко Г.М. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти*. Підручники і посібники.
12. Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. (2019). Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання. Твори.
13. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Гімназія.
14. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Гімназія.

15. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022 / кол. авт. : Г. Бичко (осн. автор), Т. Вакуленко, Т. Лісова, М. Мазорчук, В. Терещенко, С. Раков, В. Горох та ін. ; за ред. В. Терещенка та І. Клименко ; Український центр оцінювання якості освіти. Київ, 2023. 395 с.
16. Прус А. В., Швець В.О. (2007). Прикладна спрямованість стереометрії. Шкільний світ.
17. Прус А.В. (2003). Про прикладну спрямованість шкільного курсу стереометрії. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*, 13, 45-47.
18. Прус А.В. (2007). Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. [Дис. канд. пед. наук, Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова].
19. Сковрцова С.О., Недялкова К. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Ранок.
20. Слепкань З.І. (2003). Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи. *Математика в школі*, 9, С.3-4.
21. Соколенко Л.О. (1997). Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу. Тираж.
22. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. (2010). *Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
23. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. (2022). *Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Оріон.
24. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О., Рудніцька Ю.В. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах)*. Оріон.
25. Швець В. О. (2009). Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*, (32), 16-23.
26. Abassian Aline, Safi Farshid, Bush Sarah, Bostic Jonathan (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 53-65, DOI: 10.1080/19477503.2019.159536.
27. Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
28. Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139.
29. Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 45–56). New York: Springer.
30. Blomhøj, M (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research- Categorising the TSG21 papers. *ICME 11 international Congress on Mathematics Education*, 1-13.
31. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In M. Blomhøj and S. Carreira (Eds.), *Proceedings from topic study group 21 at the 11th International congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
32. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, 78(1), 44-53.
33. Burkhardt, H., with contributions by Pollak H.O. (2006) Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.
34. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3–16.
35. Greefrath G. and Vorhölter K. 2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9_1.
36. Hankeln, C 2020. Mathematical modeling in Germany and France: A comparison of students' modeling processes. *Educational Studies in Mathematics* 103 (2), 209-229.

37. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110–119). Horwood.
38. Kaiser, G., Blomhøj, M. and Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), pp. 82-85.
39. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalities. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
40. Kaiser, G., Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51–76.
41. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – Mathematics Education*, 38(2), 113–142.
42. Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): *3rd Mediterranean Conference on mathematical education*, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124).
43. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 3–32). New York, NY: Springer.
44. Vos Pauline (2020). National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education. 31-53. *Springer International Publishing*.

REFERENCES

1. Bezv H.P.(1988). Metodyka rozviazuvannia stereometrychnykh zadach. Radianska shkola. (in Ukrainian)
2. Bezv H.P., Bezv V.H. (2018). Matematyka: Alhebra i pochatky analizu ta heometriia: (riven standartu) pidruchnyk dlia 10 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Osvita. (in Ukrainian)
3. Bezv H.P., Bezv V.H., Vasyliieva D.V., Vladimirova N.H. (2023). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Osvita. (in Ukrainian)
4. Bios Dzhon Endriu (2023). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Linhvist. (in Ukrainian)
5. Vozniak H.M., Malaniuk K.P. (1984). Prykladna spriamovanist shkilnoho kursu matematyky: Rozviazuvannia ekstremalnykh zadach. Radianska shkola. (in Ukrainian)
6. Vozniak H.M., Malaniuk M.P. (1989). Vzaiemozviazok teorii z praktykoiu v protsesi vyvchennia matematyky. Radianska shkola. (in Ukrainian)
7. Voloshena V. V. (2017). Rozvytok umin matematychnoho modeliuvannia u starshoklasnykiv v protsesi navchannia pryrodnycho-matematychnykh predmetiv. pidkrodu [Dys. kand. ped. nauk, NAPN Ukrainy], Kyiv. (in Ukrainian)
8. Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity (2020). <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> (in Ukrainian)
9. Ister, O. S. (2019). Heometriia: (profilnyi riven) pidruchnyk dlia 11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Heneza. (in Ukrainian)
10. Ister, O. S. (2023). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Heneza. (in Ukrainian)
11. Kravchuk V.R., Yanchenko H.M. (2023). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Pidruchnyky i posibnyky. (in Ukrainian)
12. Matiash O. I., Kateryniuk H. D. (2019). Metodychnyi instrumentarii formuvannia zdatnosti uchniv do matematychnoho modeliuvannia. Tvory. (in Ukrainian)
13. Merzliak A.H., Polonskyi V.B., Yakir M.S. (2021). Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Himnaziia. (in Ukrainian)
14. Merzliak A.H., Polonskyi V.B., Yakir M.S. (2023). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Himnaziia. (in Ukrainian)

15. Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2022 / kol. avt. : H. Bychko (osn. avtor), T. Vakulenko, T. Lisova, M. Mazorchuk, V. Tereshchenko, S. Rakov, V. Horokh ta in. ; za red. V. Tereshchenka ta I. Klymenko ; Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. Kyiv, 2023. 395 s. (in Ukrainian)
16. Prus A. V., Shvets V.O. (2007). Prykladna spriamovanist stereometrii. Shkilnyi svit. (in Ukrainian)
17. Prus A.V. (2003). Pro prykladnu spriamovanist shkilnoho kursu stereometrii. Visnyk Zhytomyrskoho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka, 13, 45-47. (in Ukrainian)
18. Prus A.V. (2007). Prykladna spriamovanist shkilnoho kursu stereometrii. [Dys. kand. ped. nauk, Natsionalnyi pedahohichnyi universytet im. M. P. Drahomanova]. (in Ukrainian)
19. Skvortsova S.O., Nieldalkova K. (2023). Matematika: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Ranok. (in Ukrainian)
20. Slipekan Z.I. (2003). Problemy osobystisno orientoivanoi matematychnoi osvity uchniv serednoi shkoly. Matematika v shkoli, 9, S.3-4. (in Ukrainian)
21. Sokolenko L.O. (1997). Zbirnyk prykladnykh zadach z alhebr y pochatkiv analizu. Tyrash. (in Ukrainian)
22. Sokolenko L.O., Filon L.H., Shvets V.O. (2010). Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursy alhebr y pochatkiv analizu: praktykum. NPU imeni M.P. Drahomanova. (in Ukrainian)
23. Tarasenkova N.A., Bohatyrova I.M., Kolomiiets O.M., Serdiuk Z.O. (2022). Alhebra: pidruchnyk dlia 9 klasiv zahalnoosvitnykh navchalnykh zakladiv. Orion. (in Ukrainian)
24. Tarasenkova N.A., Bohatyrova I.M., Kolomiiets O.M., Serdiuk Z.O., Rudnitska Yu.V. (2023). Matematika: pidruchnyk dlia 6 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh). Orion. (in Ukrainian)
25. Shvets V. O. (2009). Matematychni modeliuvannia yak zmistova liniia shkilnoho kursu matematyky. Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia, (32), 16-23. (in Ukrainian)
26. Abassian Aline, Safi Farshid, Bush Sarah, Bostic Jonathan (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 53-65, DOI: 10.1080/19477503.2019.159536.
27. Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
28. Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139.
29. Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 45–56). New York: Springer.
30. Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research- Categorising the TSG21 papers. *ICME 11 international Congress on Mathematics Education*, 1-13.
31. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In M. Blomhøj and S. Carreira (Eds.), *Proceedings from topic study group 21 at the 11th International congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
32. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, 78(1), 44-53.
33. Burkhardt, H., with contributions by Pollak H.O. (2006) Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.
34. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3–16.
35. Greefrath G. and Vorhölter K. 2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9_1.
36. Hankeln, C 2020. Mathematical modeling in Germany and France: A comparison of students' modeling processes. *Educational Studies in Mathematics* 103 (2), 209-229.

37. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110–119). Horwood.
38. Kaiser, G., Blomhøj, M. and Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), pp. 82-85.
39. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalties. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
40. Kaiser, G., Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51–76.
41. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – Mathematics Education*, 38(2), 113–142.
42. Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): *3rd Mediterranean Conference on mathematical education*, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124).
43. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 3–32). New York, NY: Springer.
44. Vos Pauline (2020). National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education. 31-53. *Springer International Publishing*.





УДК 378.147.016:37.014.3:51

ПРОФЕСІЙНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ: ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ ТА МІЖГАЛУЗЕВОМУ ІНТЕГРОВАНОМУ КУРСІ "STEM"

Олена КОРОЛЮК

korolyukwork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7972-2115>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Впровадження в Україні компетентнісного підходу до навчання вимагає модернізації професійної підготовки майбутніх учителів, зокрема, майбутніх учителів математики. Потрібно наповнити її інноваційними формами, методами і засобами заради вирішення проблеми формування в учнів ключових компетентностей. Серед українських актуальних виділено проблему вдосконалення методики навчання учнів розв'язувати прикладні задачі в курсі шкільної математики та міжгалузевих інтегрованих курсах.

Матеріали і методи. Задля досягнення поставленої мети нами було здійснено аналіз, узагальнення та систематизацію науково-методичної літератури з досліджуваної проблеми, а також модельних навчальних програм для 5-6 класів з математики та міжгалузевого інтегрованого курсу "STEM", які нині впроваджуються в шкільну практику.

Результати. У результаті проведеного дослідження встановлено, що успішній реалізації компетентнісного підходу, а також підвищенню ефективності навчання математики сприяє використання прикладних задач – задач, які виникають поза курсом математики, умови їх містять нематематичні поняття, але розв'язуються математичними методами та засобами. Нами виділено навчальну, виховну, контрольну, евристичну, гуманістичну, інформативну, інтегрувальну функції прикладних задач у навчанні математики; доведено переваги їх використання для вирішення різних дидактичних цілей. Обґрунтовано застосування методу математичного моделювання; представлено добірку прикладних задач; описано методичні прийоми для ефективної організації навчальної діяльності на різних етапах розв'язування прикладних задач.

Висновки. Якісне володіння методикою, систематичне застосування прикладних задач дозволить майбутнім учителям максимально реалізувати прикладну спрямованість навчання математики, активізувати пізнавальний інтерес учнів, мотивувати їх до навчання.

Проведений науковий пошук не вичерпує всіх аспектів проблеми. Перспективним вважаємо спрямування досліджень на проектування змісту методичної підготовки майбутнього вчителя математики в умовах ступеневої освіти, формування готовності до творчої фахової діяльності в Новій українській школі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: професійна підготовка, професійна підготовка майбутнього вчителя математики, професійна компетентність, майбутній учитель математики, прикладна задача

PROFESSIONAL COMPETENCE OF THE FUTURE MATHEMATICS TEACHER OF THE NEW UKRAINIAN SCHOOL: APPLIED PROBLEMS IN THE MATHEMATICS COURSE AND THE INTERBRANCH INTEGRATED COURSE "STEM"

Olena Korolyuk

korolyukwork@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7972-2115>

ABSTRACT

Formulation of the problem. The implementation of a competency-based approach to education in Ukraine requires the modernization of the professional training of future teachers, in particular, future teachers of mathematics. It is necessary to fill it with innovative forms, methods and means in order to solve the problem of forming key competencies in students. The problem of improving the methodology of teaching students to solve applied problems in the course of school mathematics and interdisciplinary integrated courses is highlighted among the extremely relevant ones.

Materials and methods. In order to achieve the set goal, we analyzed, summarized and systematized the scientific and methodological literature on the researched problem, as well as model educational programs for 5-6 grades in mathematics and the interdisciplinary integrated course "STEM", which are currently being implemented in school practice.

Results. As a result of the conducted research, it was found that the successful implementation of the competence approach, as well as the increase in the effectiveness of teaching mathematics, is facilitated by the use of applied problems - problems that arise outside the mathematics course, the conditions of which contain non-mathematical concepts, but are solved by mathematical methods and means. We have highlighted the educational, educational, control, heuristic, humanistic, informative, integrative functions of applied tasks in teaching mathematics; the advantages of their use for solving various didactic purposes have been proven. The application of the mathematical modeling method is substantiated; a selection of applied problems is presented; methodological techniques for effective organization of educational activities at various stages of solving applied problems are described.

Conclusions. High-quality mastery of the methodology, systematic application of applied problems will allow future teachers to maximally implement the applied orientation of mathematics education, activate the cognitive interest of students, and motivate them to study.

The conducted scientific search does not exhaust all aspects of the problem. We consider it promising to focus research on the design of the content of the methodological training of the future teacher of mathematics in the conditions of graduate education, the formation of readiness for creative professional activity in the New Ukrainian School.

KEY WORDS: professional training, professional training of a future teacher of mathematics, professional competence, future teacher of mathematics, applied task

ВСТУП. Нині людство володіє вагомими досягненнями в науці, техніці, технологіях, розуміє як діють соціально-економічні закони, ефективно використовує їх для організації власного життя. Певний обсяг математичних знань, умінь застосовувати математичні методи у сучасному світі стали обов'язковим атрибутом загальної культури. У відповідь на це відбувається модернізація української освіти.

Постановка проблеми. Знання з математики визнано важливою складовою загальноосвітньої підготовки особистості. Математика як навчальний

предмет має значний потенціал для формування та розвитку важливих якостей, що необхідні людині для її успіху та реалізації в житті та кар'єрі. Закон України "Про освіту"(2017) *метою повної загальної середньої освіти* визначає всебічний розвиток, виховання і соціалізацію особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованій взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності.

У Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти Нової української школи (НУШ) наголошується, що досягнення цієї мети забезпечується шляхом формування десяти **ключових компетентностей**, яких потребує кожен для особистої реалізації, розвитку, активної громадянської позиції, соціальної інклюзії та працевлаштування і які здатні забезпечити особисту реалізацію та життєвий успіх протягом усього життя:

- спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами;
- спілкування іноземними мовами;
- математична компетентність;
- основні компетентності у природничих науках і технологіях;
- інформаційно-цифрова компетентність;
- уміння вчитися впродовж життя;
- ініціативність і підприємливість;
- соціальна та громадянська компетентності;
- обізнаність та самовираження у сфері культури;
- екологічна грамотність і здорове життя ("Концепція реалізації

державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти Нової української школи", 2016).

Провідною ідеєю Нової української школи визнано компетентнісний підхід до навчання. Головним результатом освіти повинні стати не окремі знання, уміння й навички, а здатність і готовність людини до ефективної і продуктивної діяльності в різних соціально-значущих ситуаціях.

У Концепції наголошується, що українська школа буде успішна, якщо до неї прийде успішний учитель. Виконання таких завдань вимагає певних змін у підходах до професійної підготовки майбутніх учителів. Зокрема, сучасна школа потребує від учителя математики глибокого знання свого предмету, володіння ефективними методиками навчання, обізнаності у питаннях педагогіки й психології, уміння організувати навчання на належному рівні. Це зумовлює необхідність спрямування професійної підготовки майбутніх учителів математики на формування їх фахової компетентності.

Аналіз актуальних досліджень. Професійна підготовка вчителя математики, набуття ним професійної компетентності знаходяться в центрі уваги провідних вітчизняних педагогів та методистів: Г. Бевза, В. Бевз, М. Бурди, А. Кузьмінського, О. Матяш, Г. Михаліна, В. Моторіної, М. Працьовитого, С. Ракова, С. Скворцової, З. Слєпкань, О. Співаковського, Н. Тарасенкової, І. Тесленка, В. Швеця, М. Шкіля, О. Чашечникової та ін.

Актуальні питання фахової підготовки майбутніх учителів математики також досліджували науковці Житомирського державного університету імені Івана Франка. Так, О. Чемерис у своїй дисертаційній роботі обґрунтувала педагогічні умови забезпечення якості фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики (2007); С. Карплюк розробила технологію підготовки майбутніх учителів математики до організації взаємонавчання учнів основної школи (2009); О. Ковальчук встановила педагогічні умови професійного становлення майбутнього вчителя математики у позааудиторній навчально-виховній діяльності (2013); Л. Семенець аргументувала формування професійної готовності майбутніх учителів до розвитку математичних здібностей у старшокласників (2013); О. Фонарюк представила технологію підготовки майбутніх учителів математики до конструктивно-проектувальної діяльності (2015); О. Мосіюк визначив педагогічні умови, які забезпечують ефективність підготовки майбутнього вчителя математики до інноваційно-дослідницької діяльності (2015); І. Новіцька обґрунтувала модель формування професійних умінь майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін у процесі розв'язування педагогічних задач (2015); О. Толстова розробила технологію підготовки майбутніх учителів до гуманітаризації математичної освіти учнів основної школи (2017).

Важливі проблеми методики навчання математики в ЖДУ ім. І. Франка досліджували професор І. Ленчук ("Теоретико-методична система навчання евклідової геометрії майбутніх учителів на основі конструктивного підходу", 2013) та доцент А. Прус ("Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії", 2007).

У результаті здійсненого аналізу наукових джерел було виокремлено широкий діапазон наукових пошуків на шляху розв'язання проблеми професійної підготовки майбутніх учителів математики. Однак не можна стверджувати, що знайшли вирішення усі її аспекти.

Учені-педагоги одностайні у своїх висновках щодо необхідності оптимізувати зміст шкільної математичної освіти, створити нові програми, осучаснити методики навчання математики, підготувати підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали з урахуванням передових технологій, упроваджувати їх у навчальний процес НУШ. Усе це, у свою чергу, потребує модернізації змісту професійної підготовки майбутніх учителів математики, наповнення її інноваційними формами, методами і засобами навчання заради вирішення проблеми формування в учнів ключових компетентностей, умінь практичного застосування математичних знань у повсякденному житті. Зокрема, актуальним є питання ефективності методики навчання учнів розв'язувати прикладні задачі, адже саме через такі задачі підсилюється практична спрямованість шкільної математики, а отже, реалізується компетентнісний підхід у навчанні.

Мета статті – обґрунтувати формування професійної компетентності майбутніх учителів на шляху підготовки їх до використання прикладних задач, виділити методичні особливості навчання учнів розв'язувати прикладні задачі в курсі математики та міжгалузевих інтегрованих курсах Нової української школи.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Задля досягнення поставленої мети нами були використані наступні методи наукового пошуку: аналіз, узагальнення та систематизація науково-методичної літератури з досліджуваної проблеми, а також модельних навчальних програм для 5-6 класів з математики та міжгалузевого інтегрованого курсу "STEM", які нині впроваджуються в шкільну практику.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ. Зміст шкільного курсу математики сьогодні покликаний не лише навчити фундаментальної математики. Його потрібно тісно пов'язати із вимогою отримання загальної природничо-математичної освіти, формувати в учнів уявлення про математику як про неодмінну складову загальних знань про світ і розуміння значення цієї науки для прогресу людства. **Нині на першому плані не набуття знань як таких, а формування вміння їх застосовувати. Таким чином,** важливою складовою загальної культури визнаються математичні знання, уміння, компетентності, яких людина набуває і які активно використовує в побуті, професійній діяльності протягом усього життя.

На жаль, останніми роками спотерігається зниження інтересу учнів до навчання, зокрема, до навчання математики. Так, у 2020 році поріг зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики не подолали 13% випускників, а вже у 2021 р. математику під час ЗНО не склали 31,11%.

Найбільший резонанс у ході обговорення результатів викликало невміння значної кількості випускників, які проходили ЗНО у 2021 році, розв'язувати найпростіші задачі прикладного характеру, зокрема:

- 1) За 6 однакових конвертів заплатили 3 грн. Скільки всього таких конвертів можна купити за 12 грн?
- 2) Пластикові кульки радіуса 6 см зберігають у висувній шухлядці (рис. 1), що має форму прямокутного паралелепіпеда. Якою з наведених може бути висота h цієї шухлядки.

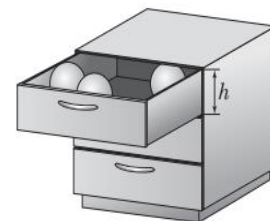


Рис. 1.

Наявність проблем у математичній підготовці українських школярів підтвердило дослідження за Програмою міжнародного оцінювання якості освіти PISA, до якого наразі долучилася Україна. У 2018 р. були одержані результати тестування, де показників сформованості *математичної грамотності* (здатність особи до визначення й усвідомлення ролі математики в сучасному світі, надання добре обґрунтованих суджень, уміння використовувати математику в особистих цілях і в суспільному житті) на достатньому і вищих рівнях досягли близько 64 % учнів з України, серед яких найвищим показник успішності виявився лише в 5 %. А отже, за висновками PISA 36% українських учнів не можуть виконати базові розрахунки (Мазорчук та ін., 2018).

У звітах Програми відзначається, що учасники з нашої країни доволі легко розв'язують ті задачі, які потребують використання елементарних алгоритмів, формул або процедур. Школярі можуть розв'язувати задачі з цілими числами, відповісти на запитання, що стосуються відомих контекстів, ідентифікувати очевидну інформацію й виконати типові процедури відповідно до чітких інструкцій. Натомість завдання, де потрібно створювати прості моделі й

використовувати нескладні стратегії розв'язування, аргументувати власні дії, використовувати відсоткові співвідношення, а особливо, оперувати дробами й десятковими числами, українські підлітки виконують гірше (Мазорчук та ін., 2018).

Попри війну Україна у 2022 році взяла участь у наступному циклі PISA, оприлюднення його результатів заплановано на грудень 2023 року.

На подолання існуючих проблем і заради досягнення визначених цілей спрямований комплекс заходів, затверджений Розпорядженням Кабінету міністрів України "Про затвердження плану заходів щодо популяризації природничих наук та математики до 2025 року" (2021).

Математика є універсальною мовою наук, а тому її внесок відчутний у розвитку знань в усіх галузях. Саме завдяки застосуванню математичного апарату відбулося багато відкриттів у фізиці, хімії, біології, економіці, соціології тощо. Проте математична мова, об'єктивно, часто видається складною, незрозумілою для школярів.

За час навчання в школі, мабуть, переважна більшість учнів не один раз задавалися питаннями: "А навіщо мені потрібно вчити цю математику?", "Чи використаю я колись знання з тригонометрії?" тощо. Особливо в наш час, коли соціальні мережі мають на школяра нерідко більший вплив, ніж дорослі. Учителям, навіть батькам не завжди вдається переконати дитину. А такі ілюстрації (рис. 2), дописи "авторитетів від математики" популяризують думку про те, що математика та її ідеї, теорії є надто абстрактними, далекими від життя в його різноманітних проявах. Усе це віддаляє учнів від навчання, у них знижується мотивація безпосередньо вчити математику, погіршуються успішність із предмету.



Рис. 2. Інтернет-меми про шкільну математику

Таким чином, сьогодні перед учителем постає завдання так організувати навчання математики, щоб воно було корисним і водночас цікавим, захоплюючим. Проте це не означає, що потрібно повністю відмовитися від вивчення теоретичної складової математики. Важливо витримувати баланс, уникаючи надмірної абстракції, аби в учнів не склалося враження, що математика є "відірваною від життя". Радимо зробити акцент на практичному застосуванні знань, спиратися на досвід учнів, демонструвати прояви та використання математики в різних галузях науки й техніки, господарстві, природі, навколишньому світі тощо.

У *Навчальній програмі з математики (2017)* для загальноосвітніх навчальних закладів наголошується, що навчання математики має зробити певний внесок у формування всіх визначених ключових компетентностей.

У *програмі* виокремлюються такі *наскрізні лінії* ключових компетентностей: екологічна безпека й сталий розвиток, громадянська відповідальність, здоров'я і безпека, підприємливість і фінансова грамотність, що спрямовує на формування в учнів здатності застосовувати знання й уміння в реальних життєвих ситуаціях.

Наскрізні лінії визнаються засобом інтеграції ключових і загальнопредметних компетентностей, навчальних предметів та предметних циклів; їх необхідно враховувати при формуванні шкільного середовища, а також вони є соціально значимими надпредметними темами, які допомагають формуванню в учнів уявлень про суспільство в цілому, розвивають здатність застосовувати отримані знання у різних ситуаціях ("Математика. Навчальна програма для 5-9-х класів", 2017).

Для прикладу, проблематика наскрізної лінії "Екологічна безпека та сталий розвиток", яка реалізується в шкільному курсі математики, у першу чергу, через задачі з реальними даними про використання природних ресурсів, їх збереження та примноження, що сприяє розвитку бережливого ставлення до навколишнього середовища, екології, формуванню критичного мислення, уміння вирішувати проблеми, критично оцінювати перспективи розвитку природного середовища і людини. Наскрізна лінія "Підприємливість і фінансова грамотність" вибудовується через розв'язування прикладних задач щодо планування господарської діяльності та виваженої оцінки власних можливостей, складання сімейного бюджету, формування економного ставлення до природних ресурсів, які включають відсоткові обчислення, рівняння та функції ("Математика. Навчальна програма для 5-9-х класів", 2017).

За висновками провідних учених-методистів і вчителів-практиків, успішному формуванню ключових компетентностей, а також підвищенню ефективності навчання математики сприяє використання *прикладних задач*. На їх переваги вказують Г. Возняк, Г. Бевз, Я. Бродський, М. Бурда, А. Прус, З. Слєпкань, А. Сліпенко, Л. Соколенко, Н. Тарасенкова, І. Тесленко, В. Швець та ін.

Так, Л. Соколенко, Л. Філон, В. Швець підкреслюють, для того, щоб бути успішним у сучасному складному і мінливому суспільному житті, кожен випускник середньої школи повинен оволодівати певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування прикладних задач. Науковці вважають прикладні задачі одним із найбільш дієвих і ефективних засобів для формування в учнів вмінь і навичок використовувати математичні знання і вміння, набуті в школі, у нестандартних ситуаціях (Соколенко та ін., 2010).

У науково-методичних джерелах присутні різні тлумачення поняття *прикладної задачі* щодо задач шкільного курсу математики. Зокрема, ***прикладними*** визначають:

- задачі, які вимагають перекладу з природної мови на математичну (Возняк, & Маланюк, 1989);

- задачі, умови яких містять нематематичні поняття (Силюга & Волошин, 2021);
- задачі (які зводяться до математичної задачі), об'єктами яких є реальні предмети та явища (Прус & В. Швець, 2011, с. 57);
- сюжетні задачі, що сформульовані, як правило, у вигляді задачі-проблеми (Очеретюк, 2018);
- задачі, які виникають поза математикою й розв'язуються математичними засобами; до таких задач відносять реальні ситуації, які відбуваються або можуть відбуватися в навколишньому середовищі (Тарасенкова та ін., 2017, с. 152);
- задачі, які виникають на практиці і вказують на необхідність математичних знань для людей найрізноманітніших професій (Задорожня, 2007, с. 7);
- задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату (Соколенко та ін., 2010, с. 9).

На нашу думку, суть цієї дефеніції зберігається в кожному з наведених означень. Узагальнивши наявні міркування щодо навчання математики в школі, сформулюємо: **прикладні задачі** – це задачі, які виникають поза курсом математики, умови їх містять нематематичні поняття, але розв'язуються математичними методами та засобами.

Прикладні задачі у навчанні математики виконують багато функцій. Можна виділити: навчальну, виховну, контрольну, евристичну, гуманістичну, інформативну, інтегрувальну функції (рис. 3).

Використання у процесі навчання математики прикладних задач спрямовується на формування в школярів системи математичних знань, умінь і навичок, тобто здійснюється їх *навчальна функція*.

Сутність *виховної функції* розкривається у направленості застосування таких задач на формування в школярів сучасного наукового та гуманістичного світоглядів, пізнавального інтересу і вміння вчитися, виховання позитивних характеристик особистості.

За допомогою прикладних задач можна визначати рівень навченості, здатності школярів до самостійного навчання тощо, отже, реалізується їх *контрольна функція*.

Евристична функція втілюється через використовування та засвоювання за допомогою прикладних задач різного роду евристик, евристичних прийомів, застосування їх у конкретних ситуаціях.

Оскільки прикладна задача та процес її розв'язування включають відомості з життя, навколишнього світу, техніки тощо, що становить для учня особистісний сенс, то реалізується *гуманістична функція*.

Сутність *інформативної функції* розкривається через знайомство із різноманітними галузями прикладання математики, з історією виникнення математичних ідей тощо.

Інтегрувальна функція проявляється, наприклад, під час розв'язування прикладних задач, які реалізують міжпредметні зв'язки, наскрізні лінії ключових компетентностей.



Рис. 3. Функції прикладних задач

Здійснення прикладної спрямованості в процесі навчання математики в школі є однією з провідних ідей методики математики. Однак у зв'язку із реалізацією Концепції "Нова українська школа" окреслюються новітні аспекти та оновлюються підходи у втіленні методичних ідей щодо застосування прикладних задач.

Наказом Міністерства освіти і науки України від **12 липня 2021 року № 795** надано гриф "Рекомендовано Міністерством освіти і науки України" **82** модельним навчальним програмам для базової середньої освіти. У змісті цих програм реалізуються концептуальні засади нового Державного стандарту базової середньої освіти, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898. Ці модельні навчальні програми стали основою для розроблення нової навчальної та навчально-методичної літератури для учнів 5-9 класів (<https://imzo.gov.ua/>).

До вибору вчителя математики у цьому переліку пропонується 7 модельних навчальних програм для 5-6 класів. Програми для 7-12 кл. нині активно розробляються. Уже з'явилися перші результати, вони представлені на сайті Інституту модернізації змісту освіти, а саме: модельна навчальна програма "Математика. 7-9 класи", 3 програми "Алгебра. 7-9 класи" і 3 "Геометрія. 7-9 класи" для закладів загальної середньої освіти.

Новостворені модельні навчальні програми для 5-6 кл. **із 2022-2023 навчального року поетапно** впроваджуються в освітній процес закладів загальної середньої освіти.

Важливість і ефективність застосування прикладних задач для формування ключових компетентностей в процесі навчання математики враховують автори всіх пропонованих модельних програм для 5-6 класів НУШ (таблиця 1).

**Реалізація прикладної спрямованості у модельних навчальних програмах
з математики НУШ**

№	Автори модельної навчальної програми з математики	Особливостей реалізації змісту та організації навчання математики
1.	Бурда М. І., Васильєва Д. В.	- діяльнісний підхід до навчання; - практичні, дослідницькі та проєктні роботи різного виду; - опанування процесу моделювання; - посилення уваги до конструювання умов задач або ситуацій за результатами аналізу заданих математичних моделей; - розв'язування текстових задач, розширення кола прикладних задач.
2.	Василишин М. С., Милян А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.	- широке використання математичних методів у різних сферах людської діяльності; - підвищення ролі навичок математичного моделювання; - формування міждисциплінарних зв'язків із суміжними освітніми галузями (інформатичною, природничою, технологічною, мистецькою, соціальною і здоров'язбережувальною, громадянською та історичною освітніми галузями та ін.); - міждисциплінарні інтегровані навчальні модулі; - спрямовання на діяльнісну, практично-орієнтовану взаємодію вчителя й учнів.
3.	Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.	- набуття досвіду застосування знань на практиці та перенесення їх у нові ситуації; - встановлення та реалізація міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків: • використання учнями/ученицями математичного апарату під час пізнавальної діяльності; • математичне моделювання процесів, що вивчаються; • розв'язування в курсі математики задач із фабулами інших навчальних предметів; • виконання міжпредметних навчальних проєктів тощо.
4.	Істер О. С.	- істотне місце у вивченні курсу повинні займати текстові задачі (розв'язування таких задач повинне супроводжувати вивчення всіх тем, передбачених програмою); - побудова та дослідження математичних моделей природних явищ і процесів.
5.	Беденко М. В.,	- практична спрямованість;

	Клочко І. Я., Кордиш Т. Г., Тадєєв В. О.	- цікава фабула та динамічність задачного матеріалу (розв'язування задач на аналіз спеціальним чином адаптованих сучасних реальних або перспективних економічних, екологічних, транспортних, фінансових та інших проєктів, що реалізуються або плануються для реалізації у різних країнах на різних континентах); - різноманітність задачного матеріалу за методологією постановки (розгалужені задачі, задачі з надлишком і нестачею даних, для розв'язування в командах тощо).
6.	Скворцова С. О., Тарасенкова Н. А.	- включення до змісту навчання важливих для життєдіяльності сучасної людини питань, як-от аналіз даних, математичного моделювання тощо; - формування здатності вирізняти серед проблемних ситуацій ті, що розв'язуються математичними методами; - використання сюжетних математичних задач як ефективний засіб формування в учнів умінь: - визначати та описувати зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу; - використовувати математичні поняття, факти та запропоновану послідовність дій для вирішення проблемних ситуацій.
7.	Радченко С. С., Зайцева К. С.	- пріоритетність створення проблемних ситуацій у навчанні та практична діяльність, основним завданням яких є застосування набутих знань у повсякденних життєвих ситуаціях; - формування вміння моделювати процеси, розробляти стратегії та плани дій щодо їх розв'язання, критичного оцінювання процесу та отриманого результату; - використання STEM-елементів під час навчання математики: • встановлення міжпредметних зв'язків; • формування цілісного та системного світогляду.

У презентованих *модельних навчальних програмах з математики* для закладів загальної середньої освіти Нової української школи наголошується, що **метою математичної освітньої галузі** є розвиток особистості через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та професійної діяльності впродовж життя, що передбачає:

- засвоєння системи знань;
- набуття та вдосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі;

- розвиток логічного й математичного мислення;
- розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті (<https://imzo.gov.ua/>).

Розуміння й активне використання учнями математичних понять, відношень, математичних методів і моделей для дослідження практичних та теоретичних процесів і ситуацій, що відбуваються довкола, створюють передумови для правильного пізнання світу, ефективного засвоєння багатовікового людського досвіду та культури, допомагають у соціалізації та життєдіяльності. Знання і вміння, одержані в процесі навчання математики, використовуються під час вивчення предметів природничого циклу та циклу "Технології".

Усі автори модельних навчальних програм наголошують, що досягнення обов'язкових результатів навчання учнів із математичної освітньої галузі визначається на основі компетентнісного підходу і спрямоване на формування в учнів математичної компетентності, а також розвитку на уроках математики всіх ключових компетентностей, визначених Державним стандартом базової середньої освіти. Задля реалізації компетентнісного підходу рекомендується розширювати коло прикладних задач, приділяти увагу на уроках конструюванню і моделюванню, тобто посилювати практичну спрямованість навчання.

Так, М. Васишин, А. Миляник, М. Працьовитий, Ю. Простакова, О. Шкільний, які є розробниками однієї з модельних навчальних програм з математики для 5-6 класів, висловлюють думку, що компетентнісний потенціал курсу "Математика" втілюється передусім через уміння обирати, створювати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ; обґрунтовувати рішення; оцінювати достовірність даних; генерувати нові ідеї, аналізувати, ухвалювати оптимальні рішення, розв'язувати життєві проблеми (Васишин та ін., 2021).

З огляду на першочерговість формування зв'язків із суміжними освітніми галузями, у програмі запропоновано введення інтегрованих навчальних модулів: "Історія походження натуральних чисел та написання цифр", "Застосування математичних знань у побуті", "Математика у творах мистецтва" у 5 класі, а також для 6 кл.: "Зображення звичайних дробів у графічному редакторі Paint", "Математика та основи здорового способу життя", "Математика в історії", "Математика у світі природи та мистецтва" та інші (Васишин та ін., 2021).

Для прикладу, за для вивчення математики в інтеграції з мистецькою освітньою галуззю (5 кл.) пропонується навчальний модуль "Математика у творах мистецтва" (таблиця 2). Інтеграція математики з соціальною та здоров'язбережувальною освітньою галузями (6 кл.) здійснюється у навчальному модулі "Математика та основи здорового способу життя" (таблиця 3).

Таблиця 2

"Математика у творах мистецтва"

Очікувані результати	Пропонований зміст	Види навчальної діяльності
Вивчає та описує математичні характеристики об'єктів (кількість, розмір, форма). Розпізнає та інтерпретує числову інформацію, розпізнає геометричні об'єкти та їх елементи на площині та в просторі. Групує математичні об'єкти за спільними ознаками, описує їхні властивості. Вирізняє у проблемній ситуації математичні дані. Розрізняє початкові дані та шукані результати. Визначає дані, які є необхідними для розв'язання проблемної ситуації. Пропонує ідеї щодо розв'язання проблемної ситуації.	Поняття подільності, пропорційності, симетрії. Найпростіші фігури на площині та в просторі, їх елементи та властивості.	Проведення навчальних екскурсій, квестів, мистецьких проєктів. Обговорення прикладів застосування відношень і пропорцій, золотого перетину у світі природи, мистецтва та архітектури.

Таблиця 3

"Математика та основи здорового способу життя"

Очікувані результати	Пропонований зміст	Види навчальної діяльності
Читає та розуміє тексти математичного змісту. Виокремлює простіші проблеми у складі пропонованої проблемної ситуації. Розрізняє умову і вимогу, дані та невідомі елементи проблеми, виокремленої із проблемної ситуації. Відповідає на запитання щодо умови, залежностей між компонентами проблеми, недостатності та надлишковості даних. Доречно формулює, використовує математичні поняття і факти. Використовує інформаційно-комунікаційні технології для пошуку та зберігання інформації математичного змісту.	Додавання, віднімання, множення і ділення раціональних чисел. Розв'язування сюжетних задач навчального та практичного змісту.	Виконання індивідуальних або групових проєктів, пов'язаних з обчисленням оптимального фізичного навантаження відповідно до віку чи фізичного стану людини, встановлення відповідності між віком, зростом, вагою дитини та калорійністю їжі чи дозування ліків, яке буде оптимальним; розрахунком кількості продуктів за кулінарними рецептами відповідно до визначеної кількості осіб, розподілу часу тощо.

Автори цієї модельної навчальної програми (Василишин та ін., 2021) акцентують на тому, що організація навчання із використанням

міждисциплінарних інтегрованих модулів передбачає застосування індивідуальних та групових форм взаємодії: виконання індивідуальних завдань, проєктної діяльності учнів, використання великої кількості прикладних задач, проведення дидактичних ігор, турнірів, вікторин, квестів, навчальних екскурсій тощо. Підбір навчального матеріалу не повинен обмежуватися підручником, учитель має повну академічну свободу використовувати будь-які доцільні сучасні освітні ресурси, у тому числі й електронні засоби, які дозволяють учням досягнути очікуваних результатів навчання.

А. Мерзляк, Д. Номіровський, М. Пихтар, Б. Рубльов, В. Семенов, М. Якір у своїй модельній програмі наголошують, що Нова українська школа має сформувати уявлення про математику як один із провідних інструментів пізнання навколишнього світу та керування ним, про важливість математичних знань і алгоритмічного мислення для самореалізації в сучасному світі на належному фаховому рівні; заохотити учнів до набуття математичних знань та активного їх застосування в навчанні і реальних життєвих ситуаціях. Освітніми засобами, що слугують таким цілям, є підручники, додаткова література, різноманітні інтернет-ресурси; задачі, зокрема такі, що моделюють реальні життєві ситуації (прикладні задачі) тощо (Мерзляк та ін., 2021).

Автори радять застосовувати досвід математичної діяльності у вивченні предметів інших освітніх галузей шляхом:

- використання математичного апарату під час пізнавальної діяльності;
- математичного моделювання процесів, що вивчаються;
- розв'язування в курсі математики сюжетних задач із фабулами інших навчальних предметів (прикладних задач), як-от задачі екологічного, соціального, історико-культурного змісту, оптимізаційні задачі; задачі, що сприяють усвідомленню цінності здорового способу життя; задачі, що вміщують математичні моделі в різних видах мистецтва; задачі, у яких йдеться про реальні ситуації фінансового, побутового, підприємницького змісту тощо;
- виконання міжпредметних навчальних проєктів тощо.

У наступній модельній програмі (розробники: М. Беденко, І. Ключко, Т. Кордиш, В. Тадеєв) звертається увага на необхідність продуктивно задіювати емоційну та мотиваційну сфери шкільного життя дитини. Оскільки з'явилося дуже багато "конкурентів" на учнівську увагу, то аспектам мотивації, формуванню навчально-пізнавального інтересу школярів, захопливості викладу та фабули прикладних задач, ігровим формам організації роботи на уроці має бути відведено чільне місце (Беденко та ін., 2021).

Отже, автори усіх модельних навчальних програм одноставно погоджуються з ідеєю про те, що розв'язування прикладних задач повинне супроводжувати вивчення всіх тем, які становлять зміст шкільної математики.

Українські науковці-педагоги активно досліджують і впроваджують у практику світові освітні тренди, серед яких STEM-освіта, що посідає особливе місце для сучасного високотехнологічного суспільства. У серпні 2020 року в Україні було ухвалено Концепцію розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти).

STEM-освіта розглядається як цілісна система природничої і математичної освітніх галузей, метою якої є розвиток особистості через формування

компетентностей, природничо-наукової картини світу, світоглядних позицій і життєвих цінностей із використанням трансдисциплінарного підходу до навчання, що базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв'язання практичних проблем, подальшого використання цих знань і вмінь у професійній діяльності.

Основні завдання STEM-освіти у Концепції сформульовано як:

- формування навичок розв'язання складних (комплексних) практичних проблем, формування компетентностей, актуальних на ринку праці;
- усебічний розвиток особистості шляхом виявлення її нахилів і здібностей;
- оволодіння засобами пізнавальної та практичної діяльності;
- виховання особистості, яка прагне до здобуття освіти впродовж життя, формування вмінь практичного і творчого застосування здобутих знань ("Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти)", 2020).

STEM-освіту визначено одним із пріоритетів Нової української школи. Ідеї, інноваційні форми та методи STEM-навчання українські вчителі математики нині активно використовують у шкільній практиці.

Серед основних шляхів запровадження STEM-освіти в процесі навчання математики:

- реалізація міжпредметних зв'язків і прикладної спрямованості навчання;
- мотивація дослідницької діяльності;
- стимулювання самостійності та формування в учнів суспільнозначущих цінностей;
- розвиток творчості учнів;
- урізноманітнення видів діяльності (практичні, пошукові, проектні, лабораторні, творчі роботи);
- застосування сучасного програмного забезпечення до розв'язування математичних завдань;
- комунікація рідною та іноземною мовами (усна й письмова) (Бурда & Васильєва, 2017).

На підтвердження, у модельній програмі, розробленій С. Радченком та К. Зайцевою, закладено використання STEM-елементів як одного із способів здійснення компетентнісного підходу в процесі навчання математики. У ході STEM-навчання встановлюються міжпредметні зв'язки і формується цілісний та системний світогляд. STEM технологія дозволяє вивчати не тільки теоретичний матеріал, але й закріплювати знання за допомогою практичного використання різноманітних STEM-завдань, які зосереджені на конкретних задачах та проблемах, де під час навчальної діяльності учні вирішують реальні соціальні, економічні, екологічні проблеми (Радченко & Зайцева, 2021).

У відповідь на те, що сьогодні STEM-освіта стає для України одним із ключових напрямків модернізації освітньої галузі, у шкільну практику запроваджуються інтегровані курси.

Так, на сайті Інституту модернізації змісту освіти представлено модельну навчальну програму "STEM. 5-6 класи (міжгалузевий інтегрований курс)" для закладів загальної середньої освіти.

Метою впровадження цього курсу є:

- рання професійна орієнтація та розвиток уявлень про роль і значення STEM-освіти, STEM-професій та кар'єру в Україні;
- популяризація та пропедевтика природничої, математичної, інформатичної та технологічної освітніх галузей;
- розвиток науково-технічної творчості та створення умов для розвитку STEM-компетентностей, що визначені Концепцією розвитку природничо-математичної (STEM-освіти) через залучення учнів до дослідження, мейкерства, освоєння нових технологій та проектну діяльність (Бутурліна & Артем'єва, 2021).

Безпосередньо для математичної галузі реалізація цієї модельної програми дозволить досягти наступних обов'язкових результатів навчання:

- вміння досліджувати проблемні ситуації та виокремлювати проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделювати процеси і ситуації, розробляти стратегії, плани дій для вирішення проблем.

За програмою цього міжгалузевого інтегрованого курсу протягом одного навчального року учням потрібно реалізувати 5 проєктів. Наприклад, для 6 класу можна обрати теми для дослідження серед: "Україна – країна моєї мрії", "Моя країна – моє майбутнє", "Професії мого регіону", "Моя сім'я та професії моїх рідних. Династія", "Галактика 6-го класу і все найцікавіше про нас", "Ми різні – ми рівні", "Автополив", "Розумна теплиця", "Альтернативні двигуни", "Некеровані літальні об'єкти", "Транспорт майбутнього", "Професії сучасної транспортної системи", "Як я бачу себе", "Погляд через об'єктив", "Поезія та музика мовою Фібоначчі", "Пропорції у природі та естетиці", забезпечивши зарекомендування очікуваних результатів навчання, визначених у програмі.

У ході роботи над указаними проєктами учням доведеться вирішувати прикладні математичні задачі, як от, розрахування відстаней на карті та місцевості, математичні обрахунки досконалого будинку, використовуючи правило золотого перерізу за формулою: довжина / ширина $\approx 1,6$ тощо.

Таким чином, для Нової української школи серед *першочергових завдань* навчання предмету "Математика", міжгалузевого інтегрованого курсу "STEM. 5-6 класи" є спрямувати вивчення матеріалу так, щоб математичні знання, уміння та навички, що отримують учні в школі, виявилися корисними та застосовними у побуті, у майбутній професійній діяльності. Отже, значної переваги для професійної компетентності майбутнього вчителя математики набирає опанування методикою навчання учнів розв'язувати прикладні задачі.

Майбутній учитель математики за час навчання в університеті повинен навчитися розв'язувати прикладні задачі із різних галузей застосування, підбирати такі задачі відповідно до цілей навчання на різних його етапах.

За висновками провідних методистів, використання в навчальному процесі прикладних задач:

- 1) забезпечує належні умови для активізації навчального процесу;
- 2) створює позитивну мотивацію навчання;
- 3) спонукає учнів до відшукування і оволодіння новими знаннями;
- 4) забезпечує умови для самостійної роботи учнів;
- 5) стимулює розвиток мислення;
- 6) сприяє формуванню багатьох психологічних якостей та позитивних моральних рис особистості, за які цінують людину у високорозвиненому суспільстві тощо.

У методичній літературі обґрунтовується ефективність використання прикладних задач для вирішення різних дидактичних цілей навчання математики, як от для:

- 1) ілюстрації нових фактів, теоретичних положень;
- 2) створення проблемних ситуацій перед вивчення нового матеріалу;
- 3) формування практичних умінь та навичок;
- 4) розвитку пізнавального інтересу;
- 5) закріплення та поглиблення одержаних знань;
- 6) вироблення дослідницьких умінь і навичок тощо.

Добираючи прикладні задачі, радять дотримуватися наступних принципів:

- *принцип науковості* (умова і результат розв'язання прикладних задач повинні сприяти розширенню наукового кругозору учнів, містити інформацію про сучасні наукові досягнення);
- *принцип доступності* (прикладні завдання мають відповідати віковим інтересам школярів і відображати питання, що існують насправді);
- *принцип системності і взаємозв'язку* (такі задачі повинні бути складовою частиною системи завдань і вправ шкільного курсу математики);
- *принцип інтеграції* (пропонуючи учням прикладні завдання, необхідно підкреслювати зв'язок математики з іншими науками);
- *принцип практичної значущості* (зміст прикладних задач має нести практичну інформацію, яка зрозуміла й важлива для учнів або в силу отриманих ними знань, або виходячи з їх життєвого досвіду та уявлень);
- *принцип мотивації* (мотивуючим потенціалом є формування пізнавального інтересу, усвідомлення учнями того, як абстрактні математичні поняття і факти можна ефективно застосовувати в різних науках і життєдіяльності людини) (Розуменко & Розуменко, 2018).

Водночас, до прикладних задач у шкільному курсі математики формуються наступні вимоги:

- 1) задачі повинні мати справжній практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію цінності і значущості набутих математичних знань на практиці;
- 2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і чинним підручникам щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв'язування;
- 3) прикладні задачі мають охоплювати широкий діапазон застосування математичних ідей у різних галузях, як-от у біології, генетиці, екології, хімії, медицині, фармації, промисловості, економіці тощо;

4) зміст задач повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес, іноді навіть створювати інтригу, демонструючи ефективність використання математичних знань;

5) поняття і терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням;

6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати реальними;

7) розв'язування таких задач має спонукати опановувати новітні обчислювальні засоби й технології (Соколенко та ін., 2010, с. 5).

Потужним методом розв'язування прикладних задач нині визнано *метод математичного моделювання*. Розв'язування будь-якої задачі прикладного характеру відбувається через побудову та дослідження певної математичної моделі.

Методологія науки визначає *моделювання* як спосіб наукового пізнання, сутність якого полягає в дослідженні моделі об'єкта пізнання на основі абстрактно-логічного мислення за принципами наочності та об'єктивності. Безпосередньо під *моделлю* розуміють систему, що заміщує об'єкт пізнання і являє собою джерело інформації про неї (Королук, 2022). Різноманітні моделі створюються у різних галузях науки.

Математичне моделювання трактують як вивчення властивостей об'єкта на його математичній моделі. Такою моделлю може бути формула, рівняння, система рівнянь, логічна структура, графік, таблиця тощо. Метою математичного моделювання є виявлення найкращих умов для реального процесу, керування ним на основі математичної моделі та перенесення результатів дослідження з моделі на справжній об'єкт (Матяш & Катеринюк, 2018)

Виділяють наступні *дидактичні функції* математичного моделювання:

- *пізнавальна*, яка полягає в формуванні пізнавального образу досліджуваного об'єкта;

- *функція управління* діяльністю, вона виражається в здійсненні контрольних та комунікаційних дій;

- *інтерпретаційна* функція, враховує те, що один і той самий об'єкт можна відобразити за допомогою різних моделей, а з іншого боку одні й ті самі математичні моделі можуть використовуватися для вивчення дійсних систем різної природи;

- *евристична* функція, яка надає можливість глибше проникнути в якісний аспект об'єкта, розкрити його внутрішні закономірності (Волошена, 2019, с. 60–61).

У такому контексті реалізація прикладної спрямованості в процесі навчання математики означає:

- а) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;

- б) формування знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;

- в) навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів (Воєвода, 2017).

Для майбутніх учителів математики в ході професійної підготовки важливо оволодіти методом математичного моделювання. Зокрема, у процесі навчання фахових математичних дисциплін потрібно звертати увагу на формування в майбутніх учителів умінь:

- визначати зовнішні умови, в яких знаходиться об'єкт моделювання і характеризувати їх певними величинами;
- встановлювати зв'язки і відношення між елементами системи і записувати їх у математичній формі;
- виділяти системоутворювальні зв'язки, які призводять до відшукування математичної моделі;
- обирати критерії оцінювання оптимальності математичної моделі;
- реалізовувати для створення математичних моделей ієрархічний метод;
- наводити приклади конкретних математичних моделей фізичних, біологічних, економічних, інформаційних процесів тощо;
- інтерпретувати математичні залежності в термінах конкретних математичних теорій;
- досліджувати математичні моделі з використанням засобів ІКТ (Шаповалова та ін., 2019).

Зауважимо, сьогодні створення математичних моделей потребує від майбутніх учителів належного рівня знань і вмінь з інформатики та комп'ютерної техніки. Наприклад, використання в роботі з прикладними задачами презентацій у PowerPoint робить процес розв'язування таких задач більш ефективним та результативним. Оскільки дозволяє інтенсифікувати процес; безпосередньо реалізувати принцип наочності у навчанні щодо ілюстрації безпосередньо сюжету задачі або внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків, про які йдеться в умові або які виникають у ході розв'язання, а також, зважаючи на захоплення сучасних дітей новітніми технологіями, створювати позитивну мотивацію до навчання.

Зокрема, на вирішення проблеми формування ІКТ-компетенності майбутніх учителів у Житомирському державному університеті імені Івана Франка до освітньо-професійних програм за спеціальностями 014 Середня освіта (Математика) та 014 Середня освіта (Математика та інформатика) для різних рівнів освіти включено компоненти: "Інформаційно-кваліфікаційні технології в освіті", "Мультимедійні технології", "Хмарні технології в освіті", "Програмування та підтримка Web-застосувань" та ін.

На заняттях із методики навчання математики майбутні вчителі вже безпосередньо опановують методи роботи із прикладними задачами, які відповідають навчальній програмі.

Серед прикладних задач, що є у шкільних підручниках, розрізняють такі:

- 1) у яких математична модель міститься безпосередньо в умові задачі;
- 2) які являють собою життєві ситуації, стосуються реальних об'єктів або процесів, що вимагають переформулювання їх мовою математики, а отже, їх розв'язування передбачає побудову математичної моделі (*неформалізовані задачі*) (Бевз & Данильчук, 2021).

Розв'язування перших особливо не відрізняється від розв'язування будь-якої навчальної задачі зі шкільної математики. Процесу розв'язування

неформалізованих прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання:

I етап – **створення математичної моделі** – переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики;

II – **дослідження математичної моделі** – розв’язування отриманої математичної задачі;

III – **інтерпретація розв’язків** – інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв’язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (Соколенко та ін., 2010, с. 10).

Таким чином, складовою розв’язування прикладної задачі є побудова і дослідження її математичної моделі. В. Швець акцент робить на перший етап, найбільш складний, на думку вченого, тому що суб’єкти навчання досить часто недостатньо володіють навичками створення адекватної математичної моделі. Проте якщо ж учитель запропонує готову модель або надасть суттєву допомогу для її створення, то із розв’язуванням математичної задачі учні зможуть впоратися вже досить добре.

Менш успішним, на думку науковця, часто виявляється й третій етап, тому що не завжди учні можуть інтерпретувати розв’язок математичної задачі як розв’язок прикладної задачі, оцінити одержані дані та здійснити перевірку розв’язку (Швець, 2009).

Для ефективної організації навчальної діяльності із розв’язування прикладних задач розроблено відповідні методичні прийоми:

1) *на першому етапі:*

- використовувати евристичні питання (евристичні приписи, спеціальні евристики, які використовуються при вивченні конкретного навчального матеріалу);
- абстрагуватися від властивостей об’єкту, несуттєвих для побудови адекватної математичної моделі, зосередитися на її істотних характеристиках;
- допомогти чітко вказати відмінності між об’єктом та його моделлю й сформулювати умову задачі по-новому;

2) *на другому етапі:*

- використовувати (за необхідності) джерела додаткових даних та теоретичних відомостей;
- використовувати ілюстративні схеми та креслення, які допоможуть знайти розв’язок математичної задачі;
- у разі необхідності використовувати математичні задачі двійники, наводити приклади схожих ситуацій;
- систематично використовувати ІКТ для створення ілюстрацій, виконання рисунків, проведення обчислень;
- довести знайдений розв’язок до числового значення або розрахункової формули;

3) *на третьому етапі:*

- здійснити відбір тих розв’язків математичної задачі, які будуть розв’язками для прикладної, враховуючи область визначення даних задачі, виконати перевірку розв’язку;

– оцінити ступінь точності отриманих результатів (Соколенко та ін., 2010; Швець & Прус, 2007).

Розглянемо методику розв’язування прикладних задач на прикладах.

Задача. Уявимо, що Ви обійшли земну кулю по екватору. На скільки при цьому верхівка вашої голови пройшла довший шлях, ніж кросівки, які ви взяли в таку подорож? Відповідь округліть до десятих. (Не забудьте виміряти свій зріст!)

Розв’язання.

I етап – **створення математичної моделі.**

Учні повинні спочатку пригадати, що таке земний екватор, форму якої геометричної фігури він має. Допоможуть тут моделі, ілюстрації (рис. 4). Далі учні називають формулу довжини кола:

$$C = 2\pi R, \text{ де } R - \text{це радіус кола.}$$

Оскільки це задача для 6 класу, то варто буде, незважаючи навіть на подальші математичні перетворення, запропонувати школярам знайти в довідкових матеріалах величину радіусу земної кулі.



Рис. 4.

У ході подальшого обговорення встановлюється, за рахунок чого верхівка голови людини пройде більший шлях, ніж кросівки, які вона взяла для подорожі. Учні приходять до висновку, що потрібно від довжини шляху, який пройде голова (більше коло), відняти довжину екватора землі (кросівки людини пересуваються безпосередньо по землі, тому друге коло (екватор) буде меншим). При цьому радіус кола, яке опише голова, буде залежати від зросту людини (h) і дорівнюватиме $R + h$.

Отже, можемо сформулювати таку математичну задачу (модель):

Знайти різницю довжин кіл з радіусами R і $R + h$.

II етап – **дослідження математичної моделі.**

1. Ноги пройшли шлях $C_1 = 2\pi R$, де R – радіус земної кулі.

2. Верхівка голови подолала при цьому відстань $C_2 = 2\pi(R + h)$, де h – зріст людини.

3. Різниця шляхів дорівнює:

$$C_1 - C_2 = 2\pi(R + h) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi h - 2\pi R = 2\pi h.$$

Для прикладу, якщо ваш зріст становить 1,7 м, тоді

$$2\pi h = 2\pi \cdot 1,7 \approx 10,676 \text{ м.}$$

III етап – **інтерпретація розв’язків.**

У ході обчислень ми одержали результат із певним наближенням, оскільки значення $\pi \approx 3,14$. Але у відповідь потрібно записати число, ще й заокруглене до десятих, тобто $10,676 \text{ м} \approx 10,7 \text{ м}$.

Відповідь: на 10,7 м.

Задача. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Дно горщика займає 113 см^2 , висота дорівнює 20 см, а довжина його стінки від одного краю до іншого – 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40% об'єму. Скільки пакетів із землею потрібно купити господині, якщо земля має бути пухкою (її густина $1,5 \text{ г/см}^3$)? Врахуйте, що таку землю продають у пакунках по 10 кг (Корольок & Прус, 2020).

Розв'язання.

І етап – **створення математичної моделі.**

Варто привернути увагу учнів до форми горщиків для рослин, які є в класній кімнаті, або, наприклад, у разі проведення заняття в дистанційному форматі, запропонувати знайти такий горщик у себе вдома і показати на екран, або ж використати ілюстрацію (рис. 5). З'ясуємо, що форму горщика, про який йдеться, можна ототожнити із зрізаним конусом, який стоїть на меншій основі.



Рис. 5.

Учні також повинні пригадати, що землю (грунт) для пересадки кімнатних рослин продають у спеціалізованих магазинах, розфасованим у пакети (рис. 6).



Рис. 6.

Далі потрібно пригадати хімічну формулу для знаходження маси:

$$m = \rho V, \quad \text{де } \rho - \text{густина, } V - \text{об'єм.} \quad (1)$$

За умовою $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$, отже $m = 1,5 V$. Таким чином, у ході обговорення встановлюється, для того, щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знайти об'єм горщика (зрізаного конусу), куди господиня збирається висаджувати

кожну рослину. Акцентуємо, що горщиків буде 10, тобто шукатимемо об'єм, який відповідає об'єму 10 однакових зрізаних конусів, із висотою 20 см, довжиною твірної – 20,5 см і площею меншої основи 113 см².

Далі продовжується обговорення умови задачі, звертаючись до практичного досвіду учнів, їх знань тепер уже з біології. Тут знову допоможуть ілюстрації (рис. 5, 6). Відзначається, що відповідно до умови, у зрізаному конусі лише 60% об'єму – це земля (речовина, густина якої 1,5 г/см³), оскільки 40% об'єму заповнює коріння.

Для остаточної відповіді на запитання прикладної задачі, потрібно буде ще знайдену масу виразити в кілограмах.

Отже, приходимо до такої математичної задачі (моделі):

Дано зрізаний конус, з висотою 20 см, площею меншої основи 113 см² та твірною 20,5 см. Знайти об'єм V_1 , що становить 60% від об'єму даного конуса V . Обчислити величини m_1 та m_{10} за формулами: $m_1 = 1,5 \cdot V_1$; $m_{10} = 10m_1$.

II етап – дослідження математичної моделі.

1. Формула об'єму зрізаного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

2. Позначимо висоту конуса $OP = H = 20$ см, твірну $AB = l = 20,5$ см, радіус меншої основи $BO = r$, радіус більшої основи $AP = R$. Опустимо з точки B перпендикуляр $BM = H$ на більшу основу конуса (рис. 7).

3. Площа круга: $S = \pi r^2$.

Знайдемо радіус меншої основи: $r = \sqrt{\frac{113}{\pi}} \approx 6$ см.

4. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABM визначимо катет $AM = \sqrt{20,5^2 - 20^2} = 4,5$ см.

5. Враховуючи, що $MP = BO = 4,5$ см, шукаємо радіус більшої основи зрізаного конуса: $R = AM + MP = 6 + 4,5 = 10,5$ см.

6. Знайдемо об'єм зрізаного конуса:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 \cdot (10,5^2 + 10,5 \cdot 6 + 6^2) \approx 4380 \text{ см}^3.$$

7. Об'єм, який займає земля: $V = 4380 \cdot 0,6 = 2628 \text{ см}^3$.

8. Обчислюємо $m_1 = 1,5 \cdot 2628 = 3942$ г.

9. Знаходимо $m_{10} = 10 \cdot 3942 = 39\,420 \text{ г} \approx 39 \text{ кг}$.

Таким чином, господині для пересаджування росли потрібно приблизно 39 кг землі – це відповідь математичної задачі.

III етап – інтерпретація розв'язків.

Далі, спираючись на життєвий досвід учнів, міркуємо наступним чином. Господині потрібно 39 кг землі, але в магазині землю запаковано по 10 кг, отже, аби вистачило, господині доведеться купити 4 таких пакети.

Відповідь: 4 пакети.

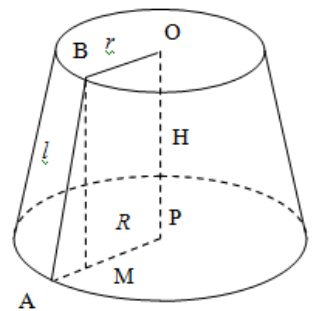


Рис. 7.

У наведених прикладах чітко виділено всі три етапи роботи із прикладною задачею. На практиці ж розв'язування частіше відбувається як цілісний процес. Розглянемо ще деякі прикладні задачі.

Задача (6 кл.). *Користуючись правилом екологічної піраміди, визначити, яка площа (у га) біоценозу може прогодувати одну особину останньої ланки в ланцюгу живлення: планктон – риба – тюлень (300 кг). Суха біомаса планктону з 1 м² становить 600 г за рік. Із вказаної у дужках маси 60% становить вода.*

Розв'язання.

Для роботи над задачею потрібні довідка:

Екологічна піраміда (або трофічна піраміда, харчова піраміда) – графічне подання зміни кількості біомаси або біопродуктивності на кожному трофічному рівні екосистеми. Піраміда біомаси показує кількість біомаси на кожному з трофічних рівнів, у той час як піраміда біопродуктивності показує кількість надлишкової біомаси, що продукується організмами на кожному з рівнів.

Правило екологічної піраміди – продукція організмів кожного наступного трофічного рівня завжди менша у 10 разів (у середньому) за продукцію попереднього. Тобто маса кожної подальшої ланки ланцюга живлення прогресивно зменшується (рис. 8).

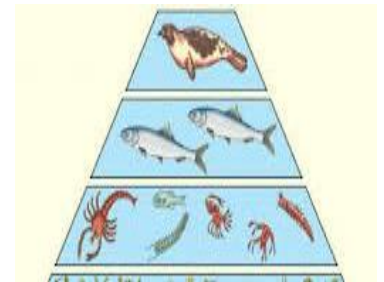


Рис.

Отже,

1. Визначаємо "суху" масу тюленя.

8.

Нехай x кг – маса тюленя без урахування води.

Складаємо пропорцію:

300 кг – 100%;

x кг – 40%.

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{40}, \quad \text{звідки } x = 120 \text{ кг.}$$

2. На підставі правила екологічної піраміди визначаємо, скільки потрібно планктону: 120 кг – маса тюленя; 1200 кг – потрібно риби; 12000 кг – становить планктон.

3. Визначаємо площу даного біоценозу, за умови, що суха біомаса планктону з 1 м² становить 600 г.

Знову використаємо пропорцію: 1 м² – 0,6 кг; x м² – 12000 кг або

$$\frac{1}{x} = \frac{0,6}{12000}. \quad \text{Звідки, } x = 20000 \text{ м}^2 = 2 \text{ га.}$$

Відповідь: 2 га.

Задача (9 кл.). *На скільки збільшиться висота дерева за 5 років (у метрах), якщо за перший рік воно виросло на 50 см, а за кожний наступний його висота збільшуватиметься на 20% менше, ніж за попередній? Результат запишіть із точністю до десятих.*

Розв'язання.

І спосіб. задачу можна розв'язати, якщо визначити на скільки виростатиме дерево за кожен із 5 років, використовуючи відсоткові розрахунки.

II спосіб. Математичною моделлю цієї задачі буде спадна геометрична прогресія, для якої перший член $b_1 = 50$ см, а знаменник $q = 0,8$. Обчисливши суму 5 членів цієї прогресії, отримаємо відповідь на запитання задачі.

За формулою $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, для $n = 5$ отримаємо

$$S_5 = \frac{50(0,8^5 - 1)}{0,8 - 1} = 168,08 \text{ см} \approx 1,7 \text{ м.}$$

Відповідь: 1,7 м.

Задача (11 кл). Продаються два кавуни кулястої форми: один із них – у півтора рази ширший, ніж другий, але і вдвоє дорожчий. Який кавун вигідніше купити?

Розв'язання.

Із курсів фізики, хімії учням відомо, що маса речовини прямопропорційно залежить від її об'єму. А зі свого життєвого досвіду діти знають, що кавуни продають на вагу, тобто, чим більше важить кавун, тим більше він і коштує. Отже, задача зводиться до визначення співвідношення між об'ємами кавунів, про які йдеться в умові.

Використаємо *властивість*: об'єми двох подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.

Якщо кавун ширший у 1,5 рази, то і його об'єм більший у $1,5^3 \approx 3,4$ рази. Отже, він і важчий майже у 3,4 рази. А коштує такий кавун, за умовою задачі, лише у 2 рази дорожче. Тому, зрозуміло, що вигідніше купити цей більший кавун.

Відповідь: вигідніше купити більший кавун.

Зважаючи на велике значення прикладних задач на шляху формування ключових компетентостей учнів, нині такі задачі входять до різних розділів шкільних підручників, вони включені до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики.

Зокрема, задачі з діючих підручників:

Задача № 612. Для приготування 12 тістечок потрібно взяти білок 1 яйця і 3 столові ложки цукру. Скільки цих продуктів треба взяти для приготування 24 таких тістечок? Скільки таких тістечок вийде, якщо є 3 яйця? (Тарасенкова та ін., 2020)

Задача № 519. За тиждень в офісі витрачають 1400 аркушів паперу. Яку найменшу кількість пачок паперу потрібно купити, щоб забезпечити роботу офісу протягом 6 тижнів, якщо в одній пачці міститься 500 аркушів? (Мерзляк та ін. 2020)

Задача № 200. Група студентів-екологів вивчала лісову ділянку на предмет кількості хвойних дерев та їхнього взаємного розташування. Для побудови плану цієї ділянки потрібно було визначити відстань між деревами (рис. 9). Знайдіть відстань АВ, якщо $AC = 300$ м, $DC = 10$ м, $BC = 300$ м, $CF = 12$ м, $DF = 13$ м (Бевз та ін., 2021).

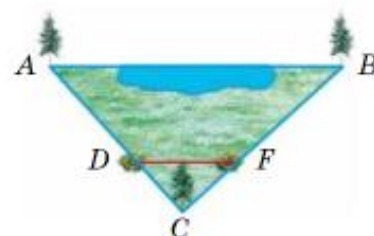


Рис. 9.

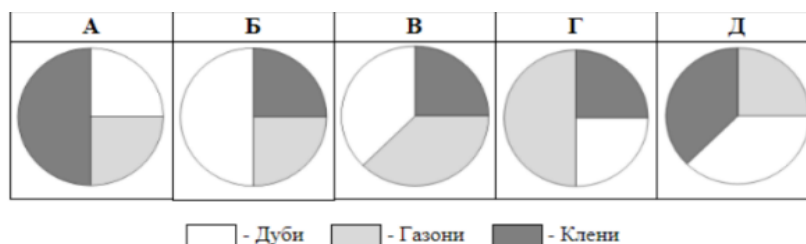
Задача № 686. До встановлення лічильників деяка родина за користування водою щомісяця сплачувала 560 грн. Після встановлення двох лічильників (на холодну і на гарячу воду) щомісячна платня за воду зменшилася до 350 грн. Один лічильник води коштує 370 грн, а його встановлення – 120 грн. Через яку найменшу кількість місяців економія на сплаті за воду перевищить витрати на придбання та встановлення лічильників, якщо тарифи на воду не змінюватимуться? (Істер, 2017).

Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти (2019) передбачені завдання оцінити вміння учасників:

- будувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;
- розв'язувати текстові задачі та задачі практичного змісту з алгебри та початків аналізу, геометрії.

Наведемо декілька прикладів прикладних задач різної складності з різних розділів математики, що пропонувалися у варіантах ЗНО попередніх років:

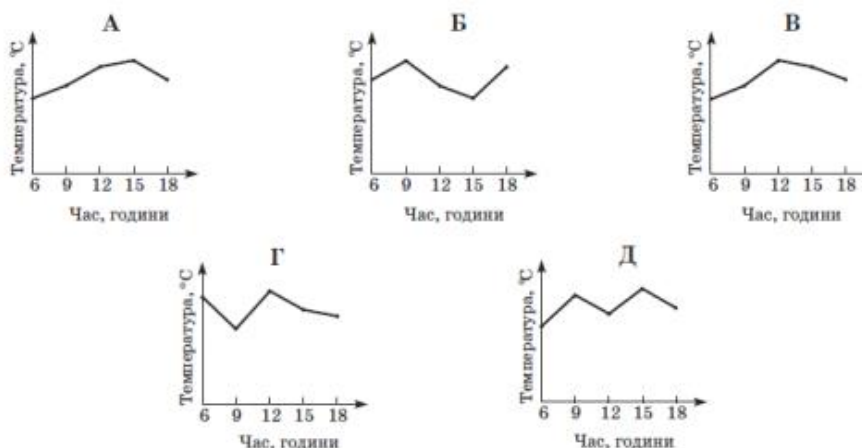
- 1) Під час закладання нового парку 25% його площі відвели на посадку кленів, 50% площі, що залишилася, – під посадку дубів, а решту площі – під газони. Вкажіть на якій із діаграм правильно показано розподіл посадок. (№ 3, 2008)



- 2) У таблиці наведено дані про температуру повітря в різний час того самого дня.

Час, години	6	9	12	15	18
Температура, °C	12	17	14	18	15

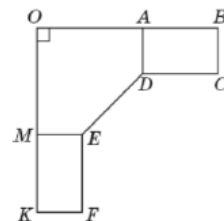
На графіках немає шкали (градації) температури повітря. На якому графіку правильно відображені дані, наведені в таблиці? (№ 5, 2017, д)



3) Для місцевості, що лежить на рівні моря, нормальний атмосферний тиск становить 760 мм рт. ст. Із підняттям на кожні 100 м угору атмосферний тиск знижується на 10 мм рт. ст. Укажіть із наведених формулу, за якою визначають атмосферний тиск p (у мм рт. ст.) на висоті h метрів над рівнем моря. (№ 8, 2021)

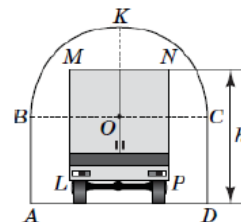
А	Б	В	Г	Д
$p = \frac{760 \cdot 100}{10h}$	$p = 760 - \frac{100h}{10}$	$p = 760 + \frac{10h}{100}$	$p = 760 + \frac{100h}{10}$	$p = 760 - \frac{10h}{100}$

4) На кресленні кутової шафи (вид зверху) зображено рівні прямокутники ABCD і KMEF та п'ятикутник ЕМОАD (див. рисунок). Визначте довжину відрізка ED, якщо $OK = OB = 1,2$ м, $KM = AB = 0,5$ м, $KF = 0,3$ м. Укажіть відповідь *найближчу до точної*. (№ 19, 2019)



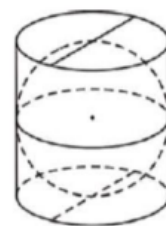
А	Б	В	Г	Д
0,5 м	0,55 м	0,65 м	0,6 м	0,7 м

5) На рисунку зображено поперечний переріз аркового проїзду, верхня частина якого (дуга ВКС) має форму півкола радіуса $OC = 2$ м. Яке з наведених значень є *найбільш можливим* значенням висоти h вантажівки, за якою вона зможе проїхати через цей арковий проїзд, не торкаючись верхньої частини арки (дуго ВКС)? Уважайте, що LMNP – прямокутник, у якому $MN \parallel AD$. (№ 19, 2017)



А	Б	В	Г	Д
4,4 м	4 м	3,7 м	3,5 м	3,2 м

6) У склянці циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (див. рисунок). Визначити відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилася зі склянки. (№ 25, 2008)



А	Б	В	Г	Д
1:π	2:π	1:2	2:3	1:3

7) У таблиці наведено тарифи на доставку вантажу за маршрутом N службою кур'єрської доставки. Будь-яку кількість вантажів можна об'єднувати в один, маса якого дорівнює сумі мас об'єднаних вантажів. Жодних додаткових платежів за об'єднання вантажів чи доставку вантажу, окрім указаних в таблиці немає.

Маса вантажу, кг	Вартість доставки, грн
До 50	100
51 – 75	110
76 – 100	205
101 – 150	310

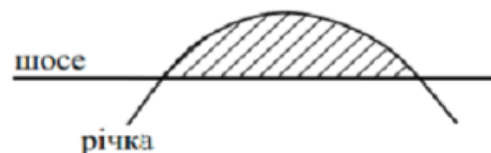
1. За яку найменшу суму P (у грн) можна доставити цією службою за маршрутом N три вантажі, маси яких становлять 31 кг, 36 кг та 40 кг?
2. Скільки відсотків становить P від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен з них відправляти окремо? (№ 25, 2019)

8) Для приготування чайної суміші змішали індійський та цейлонський чай у відношенні 10:13, причому індійського чаю взяли 180 г.

1. Скільки грамів чайної суміші отримали?
2. На скільки відсотків у суміші цейлонського чаю більше, ніж індійського? (№ 25, 2017 д)

9) В інструкції з медичного застосування настою лікарської рослини зазначено, що його рекомендовано приймати щоденно упродовж 20 діб. Протягом першої доби пацієнт має випити 370 мл настою, а кожної наступної доби – на одну й ту саму кількість настою менше, ніж попередньої. Останньої доби прийом має становити 85 мл цього лікарського засобу. Яку кількість настою (у мл) вип'є пацієнт за ці 20 діб, якщо дотримуватиметься інструкції? (№ 29, 2015)

10) Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа (у км²) луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю OX (див. рисунок). Одиниця довжини – 1 км. (№ 30, 2006)



ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ.

Отже, розв'язування прикладних задач є одним із дієвих засобів на шляху формування ключових компетентностей учнів, що відповідає пріоритетам Нової української школи. Успішне володіння методикою навчання учнів, систематичне застосування таких задач дозволить майбутнім учителям ефективно реалізувати дидактичні цілі, максимально продемонструвати прикладний зміст навчання математики, а також активізувати пізнавальний інтерес учнів, мотивувати їх до навчання.

Проведений науковий пошук не вичерпує всіх аспектів проблеми. Перспективним вважаємо спрямування досліджень на проектування змісту методичної підготовки майбутнього вчителя математики в умовах ступеневої освіти, формування готовності до творчої фахової діяльності в умовах Нової української школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, Г., Бевз, В., & Владімірова, Н. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти*. Київ : Освіта.
2. Бевз, Д. В., & Данильчук, О. М. (2021). Лінійна алгебра і її застосування при розв'язанні задач прикладного спрямування. *Вісник СНТ ДонНУ імені Василя Стуса*. 13(1). 231–235. <https://jvestnik-sss.donnu.edu.ua/issue/view/398>
3. Беденко, М. В., Ключко, І. Я., Кордиш, Т. Г., & Тадеєв, В. О. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
4. Бурда, М. І., & Васильєва, Д. В. (2017). Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі*. 7-8. 2–9.
5. Бурда, М. І., & Васильєва, Д. В. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
6. Бутурліна О. В., & Артем'єва О. Є. *STEM. 5-6 класи (міжгалузевий інтегрований курс). Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. (2021). <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
7. Василишин, М. С., Миляник, А. І., Працьовитий, М. В., Простакова, Ю. С., & Шкільний, О. В. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
8. Возняк, Г., & Маланюк, М. (1989). *Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики*. Київ : Вища школа.
9. Воєвода, А. Л. (2017). Чи допоможе математика в житті? *Математика в рідній школі*. 9. 13–17.
10. Волошена, В. В. (2019). *Розвиток умінь математичного моделювання старшокласників у процесі навчання природничо-математичних предметів*. [Дис. канд. пед. наук., Інститут педагогіки НАПН України]. <https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/06/Dysertatsiia-Voloshena-V.V..pdf>
11. Задорожня, Т. М. (2017). *Початки теорії ймовірностей та математичної статистики в змісті математичної освіти коледжів фінансово-економічного спрямування*. [Автореферат дис. канд. пед. наук, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова]. <http://ir.nuozu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/lib/287/1/07ztfes.pdf>
12. Закон України "Про освіту" № 2145-VIII (2017). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>
13. Істер, О. С. (2017). *Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Київ : Генеза.
14. Істер, О. С. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
15. *Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти "Нова українська школа" на період до 2029 року. Розпорядженням Кабінету Міністрів України № 988-р. (2016)*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-%D1%80#Text>
16. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти). Розпорядження Кабінету Міністрів України № 960-р. (2020). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text>
17. Корольок, О. М. (2022). Методологічні засади статистичного моделювання. У С. В. Чугаєвська & Н. В. Ковтун (ред). *Основи статистичного моделювання: навч. посібник* (с.7–47). Житомир : Рута. <http://eprints.zu.edu.ua/33864/>
18. Корольок, О., & Прус, А. (2020). Прикладна спрямованість курсу вищої математики для нематематичних спеціальностей. *Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі: матеріали Всеукраїнської наукової конференції*. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова. <http://eprints.zu.edu.ua/32800/>

19. Мазорчук, М., Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., & Горох, В. (2020). *PISA-2018: основні результати та висновки. Що знають і вміють українські 15-річні учні*. Київ : УЦОЯО. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2020/07/National_report_short_PISA_2018.pdf
20. Математика. Навчальна програма для 5-9-х класів загальноосвітніх навчальних закладів (2017). <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/>
21. Матяш, О. І., & Катеринюк, Г. Д. (2018). Формування здатності учнів до математичного моделювання в умовах позакласної роботи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. 52. 93–97. <https://vspu.net/sit/index.php/sit/issue/view/178>
22. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Пихтар, М. П., Рубльов, Б. В., Семенов, В. В., & Якір, М. С. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
23. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2020). *Алгебра: підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти*. Харків : Гімназія.
24. Очеретюк, Є. В. (2018) Використання комп'ютерних технологій у курсі вищої математики для студентів скороченої форми навчання. *Вісник Черкаського університету. Серія: "Педагогічні науки"*. 18. 70–75. <https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/3175>
25. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. (2019). https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/nakaz-1513_04_12_programa_matematyka.pdf
26. Прус, А. В., & Швець В. О. (2011). *Збірник задач з методики навчання математики*. Житомир : Рута.
27. Радченко, С. С., & Зайцева, К. С. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
28. Розпорядження Кабінету Міністрів України "Про затвердження плану заходів щодо популяризації природничих наук та математики до 2025 року" № 320-р. (2021). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/320-2021-%D1%80#Text>.
29. Розуменко, А. О., & Розуменко, А. М. (2018). Прикладні задачі як засіб ймовірнісного мислення учнів. *Фізико-математична освіта*. 2(16). 108–112. <https://fmo-journal.org/index.php/fmo>
30. Силюга, Л., & Волошин, Т. (2021). Система прикладних задач як засіб формування пізнавальної активності молодших школярів. *Молодь і ринок*. 2(188). 101–105. <http://mir.dspu.edu.ua/issue/view/13965>
31. Скворцова, С. О., & Тарасенкова, Н. А. (2021). *Математика. 5-6 класи. Модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
32. Соколенко, Л. О., Філон, Л. Г., & Швець В. О. (2010). *Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум*. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова.
33. Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Коломієць, & О. М., Сердюк, З. О. (2020). *Математика: підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Київ : Освіта.
34. Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Коломієць, О. М., & Сердюк, З. О. (2017). *Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Київ : Оріон.
35. Шаповалова, Н., Панченко, Л., & Кучменко, С. (2019). Науково-методичні особливості та переваги навчання математичного моделювання студентів закладів вищої освіти. *Освіта. Інноватика. Практика*. 1(5). 31–39. <https://drive.google.com/file/d/1G97EnbXOKfW9JrD2sV-NpzFmrueTYSgc/view>
36. Швець, В. О. (2009). Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт*. 32. 16–23.

37. Швець, В. О., & Прус, А. В. (2007). *Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії*. Житомир : Видавництво ЖДУ імені І. Франка.

REFERENCES

1. Bevz, H., Bevz, V., & Vladimirova, N. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. Kyiv : Osvita.
2. Bevz, D. V., & Danylchuk, O. M. (2021). Liniina alhebra i yii zastosuvannia pry rozviazanni zadach prykladnoho spriamuvannia. *Visnyk SNT DonNU imeni Vasylia Stusa*. 13(1). 231–235. <https://jvestnik-sss.donnu.edu.ua/issue/view/398>
3. Bedenko, M. V., Klochko, I. Ya., Kordysh, T. H., & Tadeiev, V. O. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
4. Burda, M. I., & Vasylieva, D. V. (2017). Osoblyvosti navchannia matematyky za novymy prohramamy. *Matematyka v ridnii shkoli*. 7-8. 2–9.
5. Burda, M. I., & Vasylieva, D. V. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
6. Buturlina O. V., & Artiemieva O. Ye. *STEM. 5-6 klasy (mizhhaluzevyi intehrovanyi kurs). Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. (2021). <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
7. Vasylyshyn, M. S., Mylianyk, A. I., Pratsovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
8. Vozniak, H., & Malaniuk, M. (1989). *Vzaiemozviazok teorii z praktykoiu v protsesi vyvchennia matematyky*. Kyiv : Vyshcha shkola.
9. Voievoda, A. L. (2017). *Chy dopomozhe matematika v zhytti? Matematika v ridnii shkoli*. 9. 13–17.
10. Voloshena, V. V. (2019). *Rozvytok umin matematychnoho modeliuvannia starshoklasnykiv u protsesi navchannia pryrodnycho-matematychnykh predmetiv*. [Dys. kand. ped. nauk., Instytut pedahohiky NAPN Ukrainy]. <https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/06/Dysertatsiia-Voloshena-V.V..pdf>
11. Zadorozhnia, T. M. (2017). *Pochatky teorii ymovirnostei ta matematychnoi statystyky v zmisti matematychnoi osvity koledzhiv finansovo-ekonomichnoho spriamuvannia*. [Avtoreferat dys. kand. ped. nauk, Natsionalnyi pedahohichnyi universytet imeni M. P. Drahomanova]. <http://ir.nuozu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/lib/287/1/07zmfes.pdf>
12. Zakon Ukrainy "Pro osvitu" № 2145-VIII (2017). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>
13. Ister, O. S. (2017). *Alhebra: pidruchnyk dlia 9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv*. Kyiv : Heneza.
14. Ister, O. S. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
15. Kontsepsiia realizatsii derzhavnoi polityky u sferi reformuvannia zahalnoi serednoi osvity "Nova ukrainska shkola" na period do 2029 roku. Rozporiadzhenniam Kabinetu Ministriv Ukrainy № 988-r. (2016). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-%D1%80#Text>
16. Kontsepsiia rozvytku pryrodnycho-matematychnoi osvity (STEM-osvity). Rozporiadzhennia Kabinetu Ministriv Ukrainy № 960-p. (2020). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text>
17. Koroliuk, O. M. (2022). *Metodolohichni zasady statystychnoho modeliuvannia*. U S. V. Chuhaievskia & N. V. Kovtun (red). *Osnovy statystychnoho modeliuvannia: navch. posibnyk* (s.7–47). Zhytomyr : Ruta. <http://eprints.zu.edu.ua/33864/>

18. Koroliuk, O., & Prus, A. (2020). Prykladna spriamovanist kursu vyshchoi matematyky dlia nematematychnykh spetsialnostei. *Aktualni problemy matematyky ta metodyky yii navchannia u vyshchii shkoli: materialy Vseukrainskoi naukovoï konferentsii*. Kyiv : NPU imeni M. P. Drahomanova. <http://eprints.zu.edu.ua/32800/>
19. Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., & Horokh, V. (2020). *PISA-2018: osnovni rezultaty ta vysnovky. Shcho znaiut i vmiiut ukrainski 15-richni uchni*. Kyiv : UTsOIAO. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2020/07/National_report_short_PISA_2018.pdf
20. Matematika. Navchalna prohrama dlia 5-9-kyh klasiv zahalnoosvitnykh navchalnykh zakladiv (2017). <https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/>
21. Matiash, O. I., & Kateryniuk, H. D. (2018). Formuvannia zdatsnosti uchniv do matematychnoho modeliuvannia v umovakh pozaklasnoi roboty. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*. 52. 93–97. <https://vspu.net/sit/index.php/sit/issue/view/178>
22. Merzliak, A. H., Nomirovskyi, D. A., Pykhtar, M. P., Rublov, B. V., Semenov, V. V., & Yakir, M. S. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
23. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2020). *Algebra: pidruchnyk dlia 7 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. Kharkiv : Himnaziia.
24. Ocheretiuk, Ye. V. (2018) Vykorystannia kompiuternykh tekhnolohii u kursi vyshchoi matematyky dlia studentiv skorochenoi formy navchannia. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Serii: "Pedagogichni nauky"*. 18. 70–75. <https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/3175>
25. Prohrama zovnishnoho nezalezhnoho otsiniuvannia rezultativ navchannia z matematyky, zdobutykh na osnovi povnoi zahalnoi serednoi osvity. (2019). https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/nakaz-1513_04_12_programa_matematyka.pdf
26. Prus, A. V., & Shvets V. O. (2011). *Zbirnyk zadach z metodyky navchannia matematyky*. Zhytomyr : Ruta.
27. Radchenko, S. S., & Zaitseva, K. S. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
28. Rozporiadzhennia Kabinetu Ministriv Ukrainy "Pro zatverdzhennia planu zakhodiv shchodo populiaryzatsii pryrodnychych nauk ta matematyky do 2025 roku" № 320-r. (2021). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/320-2021-%D1%80#Text>.
29. Rozumenko, A. O., & Rozumenko, A. M. (2018). Prykladni zadachi yak zasib ymovirnisnoho myslennia uchniv. *Fizyko-matematychna osvita*. 2(16). 108–112. <https://fmo-journal.org/index.php/fmo>
30. Syliuha, L., & Voloshyn, T. (2021). Systema prykladnykh zadach yak zasib formuvannia piznavalnoi aktyvnosti molodshykh shkoliariv. *Molod i rynok*. 2(188). 101–105. <http://mir.dspu.edu.ua/issue/view/13965>
31. Skvortsova, S. O., & Tarasenkova, N. A. (2021). *Matematyka. 5-6 klasy. Modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
32. Sokolenko, L. O., Filon, L. H., & Shvets V. O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursi alhebry i pochativ analizu: praktykum*. Kyiv : NPU imeni M.P. Drahomanova.
33. Tarasenkova, N. A., Bohatyrova, I. M., Kolomiets, & O. M., Serdiuk, Z. O. (2020). *Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zahalnoosvitnykh navchalnykh zakladiv*. Kyiv : Osvita.
34. Tarasenkova, N. A., Bohatyrova, I. M., Kolomiets, O. M., & Serdiuk, Z. O. (2017). *Algebra: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnykh navchalnykh zakladiv*. Kyiv : Orion.
35. Shapovalova, N., Panchenko, L., & Kuchmenko, S. (2019). Naukovo-metodychni osoblyvosti ta perevahy navchannia matematychnoho modeliuvannia studentiv zakladiv

vyshchoi osvity. *Osvita. Innovatyka. Praktyka.* 1(5). 31–39.
<https://drive.google.com/file/d/1G97EnbXOKfW9JrD2sV-NpzFmrueTYSgc/view>

36. Shvets, V. O. (2009). Matematychni modeliuvannia yak zmistova liniia shkilnoho kursu matematyky. *Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia : mizhnarodnyi zbirnyk naukovykh robot.* 32. 16–23.

37. Shvets, V. O., & Prus, A. V. (2007). *Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii.* Zhytomyr : Vydavnytstvo ZhDU imeni I. Franka.

