

Ю.М. Кухтенков

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ВИХРОВИХ ДЖГУТІВ
У ВІДСМОКТУЮЧИХ ТРУБАХ РАДІАЛЬНО-ОСЬОВИХ ГІДРОТУРБІН**

Навчальний посібник для студентів спеціальності
«Гідроенергетика»

Частина I

**Плоскі та просторові математичні моделі руху
вихрових джгутів у відсмоктуючих трубах РО гідротурбін**

Харків

2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Ю.М. Кухтенков

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ВИХРОВИХ ДЖГУТІВ
У ВІДСМОКТУЮЧИХ ТРУБАХ РАДІАЛЬНО-ОСЬОВИХ ГІДРОТУРБІН

Навчальний посібник для студентів спеціальності
«Гідроенергетика»

Частина I

Плоскі та просторові математичні моделі руху
вихрових джгутів у відсмоктуючих трубах РО гідротурбін

Рекомендовано вченою радою НТУ „ХПІ”

Харків
НТУ „ХПІ”
2022

УДК 621.224.1: 519.87(075)

К 95

Рецензенти:

В. Г. Неня, проф., канд. техн. наук (СДУ, Суми)

К. А. Миронов, доц., канд. техн. наук (НТУ «ХП»);

Рекомендовано вченою радою НТУ «ХП»

як навчальний посібник для студентів спеціальності

«Гідроенергетика»

Кухтенков Ю. М.

К 95 Математичні моделі руху вихрових джгутів у відсмоктуючих трубах радіально-осьових гідротурбін: навч. посіб. / Ю. М. Кухтенков. – Харків: НТУ «ХП», 2022. – 81 с.

ISBN 978-617-05-0092-2

Представлені двовимірні та просторові математичні моделі руху вихрових джгутів у відсмоктуючих трубах радіально-осьових гідротурбін на основі яких проводять прогнозні розрахунки пульсаційних характеристик гідротурбін, які в подальшому використовуються в розрахунках на міцність елементів проточного тракту. Наведено розрахунки по цих моделях в конкретних гідротурбінах на напори 100-300 метрів.

Навчальний посібник призначений для спеціальності «Гідроенергетика» до курсів «Гідравлічна нестаціонарність гідроагрегатів ГЕС», «Експлуатація гідроенергетичного обладнання ГЕС» та «ГЕС, ГАЕС та насосні станції».

Іл. 16. Табл. 4. Бібліогр. 42 найм.

УДК 621.224.1: 519.87(075)

ISBN 978-617-05-0092-2

© Ю. М. Кухтенков, 2022

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для закріплення теоретичних знань, отриманих студентами спеціальності «Гідроенергетика», при вивченні курсів «Гідравлічна нестаціонарність гідроагрегатів ГЕС», «ГЕС, ГАЕС та насосні станції» та «Експлуатація гідроенергетичного обладнання ГЕС», що пов'язані з питаннями виникнення нестаціонарних явищ в проточному тракті гідротурбін.

В кожному розділі посібника наводяться теоретичні основи і розрахункові формули, в додатках надаються необхідні для вирішення задач матеріали. Завдання складені з розрахунком на індивідуальну роботу студентів денного і заочного форм навчання машинобудівельних спеціальностей, під час практичних занять, задовольняє програмам, що вивчаються студентами спеціальності «Гідроенергетика». В посібнику досить детально розглядаються питання пов'язані з нестаціонарними процесами в гідротурбінах

Збільшення потужностей і розмірів сучасних гідромашин, форсування режимів експлуатації, робота на часткових і перехідних режимах, задоволення вимогам надійності і довговічності призводить до необхідності визначення та зниження рівня нестаціонарності потоку в проточній частині. Порівняння результатів натурних і модельних досліджень пульсацій тиску, що характеризують нестаціонарність потоку, показує, що гідравлічна нестаціонарність досить добре моделюється. Однак, з огляду на складність, тривалість і значну вартість експериментальних досліджень, доцільно на попередніх етапах розробки проточної частини нових або модернізації існуючих гідромашин прогнозувати (розраховувати) пульсаційні характеристики, що визначають нестаціонарність потоку – чисельним шляхом на основі існуючих і розробляємих математичних моделей.

У першому розділі частини I розглядаються результати теоретичних і експериментальних досліджень нестаціонарності потоку, обумовленої обертанням вихрових джгутів за робочим колесом. Причина виникнення на неоптимальних режимах роботи гідромашини вихрових джгутів полягає у виникненні циркуляції (закрутки) потоку за робочим колесом і, в першу чергу, у втулки.

Потік за лопатевої системою в відсмоктуючій трубі характеризується певним розподілом циркуляції уздовж радіуса відсмоктуючої труби. У загальному випадку потік за робочим колесом не є потенційним, тобто $V_u R \neq \text{const}$. При зміщенні потоку вниз за робочим колесом уздовж осі турбіни окружна складова швидкості у втулки робочого колеса зростає, тому що зменшується радіус обтічника. В умовах реальної рідини швидкість не може зростати до нескінченності, а тиск не може стати нижче тиску пароутворення. Через асиметрію потоку вихровий джгут в відсмоктуючій трубі приймає спіральовидну форму і при своєму русі індукує змінне поле швидкостей і тисків. Амплітуда пульсацій тиску на стінках відсмоктуючої труби залежить від інтенсивності вихрового джгута і його геометричних параметрів, частота пульсацій тиску обумовлена частотою обертання вихрового джгута навколо осі гідромашини.

В другому розділі розглядаються двомірні (плоскі) математичні моделі руху джгутів у відсмоктуючій трубі гідротурбіни на основі використання теорії функції комплексного змінного і заміни стінки відсмоктуючої труби вихровим шаром. В третьому розділі розглядаються просторові математичні моделі руху вихрових джгутів у відсмоктуючій трубі і по моделі проф. Григор'єва В.І. [7–9], де вплив стінки відсмоктуючої труби враховується заміною її вихровим шаром змінної інтенсивності, що дозволяє визначати рівні нестационарності у відсмоктуючій трубі.

В четвертому і п'ятому розділах частини II розглядаються математичні моделі руху вихрових джгутів у турбіни на основі рішення усереднених рівнянь Рейнольдса з урахуванням k - ε моделей турбулентності у в'язкій рідині [40–42].

Запропоновані методики розрахунків амплітуд та частот джгутових пульсацій тиску у відсмоктуючих трубах, можуть використовуватися у попередніх прогнозних розрахунках на міцність елементів проточної частини гідротурбін, які необхідні для забезпечення надійної роботи гідротурбін.

Автор сподівається також, що запропонований навчальний посібник буде корисним всім бажаючим ґрунтовно ознайомитися з нестационарними явищами в проточному тракті гідротурбін.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Лінійні розміри, площі, кути:

D_1 – діаметр робочого колеса гідротурбіни по вхідний кромці, мм;

D_2 – діаметр робочого колеса гідротурбіни по вихідний кромці, мм;

$D_{от}$ – діаметр відсмоктуючої труби гідротурбіни, мм;

$d_{ж}$ – діаметр вихрового джгута, мм;

$\bar{d}_{ж}$ – відносний діаметр вихрового джгута;

R_1, r_1 – зовнішній і внутрішній радіуси вихідний кромки
робочого колеса, мм;

$r_{ж}$ – радіус вихрового джгута, мм;

h – висота відсмоктуючої труби, мм;

L – довжина відсмоктуючої труби, мм;

e – ексцентриситет фізичного вихору, мм;

$\bar{e}$ – відносний ексцентриситет;

δl_n – відстань між вихровими нитками, мм;

$\beta_{ж}$ – кут нахилу фізичного вихрового джгута, град;

$\beta_{п}$ – кут підйому вихровий нитки шару, град;

α_2 – кут зсуву вихровий нитки шару щодо гвинтової
лінії основного вихрового джгута ($s = 1$), град;

s – порядковий номер фізичних вихрових джгутів;

$z_{ж}$ – число вихрових джгутів;

Кінематичні параметри:

Γ_2 – циркуляція за робочим колесом гідротурбіни, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$;

$\delta \Gamma$ – циркуляція (інтенсивність) вихровий нитки шару, $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$;

γ – напруженість (погонна інтенсивність) вихрового шару, $\text{м} \text{с}^{-1}$;

Q – витрата, що проходить через гідротурбіну в одиницю часу, $\text{м}^3 \text{с}^{-1}$;

Q_o – витрата на оптимальному режимі, $\text{м}^3 \text{с}^{-1}$;

n – частота обертання валу гідротурбіни, хв^{-1} ;

n_n – номінальна частота обертання валу гідротурбіни, хв^{-1} ;

$\vec{V}_{жS}$ – швидкість, що індукується фізичним вихровим джгутом, м с⁻¹;

$\vec{V}_{\Pi}$ – швидкість, що індукується вихровою поверхнею, м с⁻¹;

$\vec{V}_q$ – витратна швидкість потоку через турбіну, м с⁻¹;

ω – кутова швидкість обертання валу гідротурбіни, с⁻¹;

$\omega_{ж}$ – кутова частота обертання вихрового джгута, с⁻¹;

$f_{ж}$ – джгутова частота пульсацій тиску за робочим колесом, с⁻¹;

n_1' – відносна приведена частота обертання;

$\overline{Q}_1'$ – відносна приведена витрата;

Тиск:

p_1 – тиск на вході в робоче колесо гідротурбіни, МПа;

p_2 – тиск на виході з робочого колеса гідротурбіни, МПа;

Характеристики гідротурбіни:

z – число лопатей робочого колеса гідротурбіни;

η_t – гідравлічний ККД гідротурбіни, %;

Умовні скорочення:

ВД – вихровий джгут;

ВТ – відсмоктуюча труба;

НА – напрямний апарат;

ММ – математична модель;

ПТ – пульсації тиску;

РК – робоче колесо;

РО – радіально-осьова;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розділ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ПУЛЬСАЦІЙ ТИСКУ У ВІДСМОКТУЮЧИХ ТРУБАХ ГІДРОТУРБІН.

Тема 1. Аналіз теоретичних досліджень низькочастотних пульсацій тиску в гідротурбінах

Проблеми дослідження низькочастотних ПТ в ВТ в жорстколопатевиx гідротурбінах з усією гостротою виникли досить давно і представлені в літературі великою кількістю робіт.

Зареєстровані в 40-60-их роках минулого століття випадки підвищеної вібрації і поломок гідроагрегатів [1] послужили сигналом для початку серйозних систематичних досліджень нестационарних явищ в проточній частині, в тому числі низькочастотних ПТ. Саме вони є визначальними при оцінці рівня нестационарності турбін. Перші спроби створити ММ руху ВД. у ВТ були зроблені Кельвіном, Акеретом, Ухімаро [2]. Однак отримані ними результати не завжди збігалися з дійсними. Значний внесок в питання визначення частоти коливань тиску, обумовленої обертанням ВД, був зроблений Рейнгансом на підставі дослідів [4]. Він запропонував формулу, $f_{\text{ж}} = \frac{n}{60k}$, де $k=3,6$. Подальші дослідження показали, що для різних типів турбін і різних режимів k може змінюватися в межах 2–4.

На основі двовимірної теорії вихорів Мураками М. розробив ММ руху ВД. з урахуванням стінки ВТ [2]. У цій ММ течія описується завдяки введенню двох вихорів – основного і відображеного на зовнішню область щодо кола ВТ. Припускаючи, що ексцентрично розташований основний вихор рухається зі швидкістю, що індукується зв'язаним вихором. Автор обчислює швидкість цього руху, потім визначає частоту ПТ від обертання ВД, $f = \frac{m\Gamma}{4\pi^2 R^2}$, де m – пара-

метр, що залежить від ексцентриситету вихору і його діаметра, R – радіус поперечного перерізу ВТ.

Сила, що діє на ВТ, представлена, як горизонтальна реакція, що виникає в результаті обертання води разом з ексцентричним ВД. Величину і напрям цієї сили знаходять по зміні кількості руху, що викликається ВД. При цьому ВД передбачається прямоосним.

Циркуляція, що входить у вираз для визначення частоти і амплітуди пульсації сили, визначається як середня по радіусу в ВТ за РК

$$\Gamma = 4\pi^2 n R_2^2 \frac{1 + (\frac{r_2}{R_2})^2}{2} (1 - \frac{Q'}{Q_0} \frac{\varpi_0}{\omega'}), \quad (1.1)$$

де n – частота обертання РК в секунду;

R_2, r_2 – зовнішній і внутрішній радіуси вихідний кромки РК;

Q', Q_0 – витрата на досліджуваному і оптимальному режимах;

ω', ϖ_0 – кутові швидкості обертання РК на досліджуваному і оптимальному режимах.

Ця формула враховує геометрію вихідної кромки тільки двома радіусами і дає завищені значення циркуляції, тому для визначення циркуляції за РК рекомендується рішення прямої задачі осесимметричного течії.

ММ, що базується на розгляді течії, що створена парою вихорів, пропонується також в роботі М. Нехлеба [3]. Лінії струму, системи, що складається з двох вихорів, представляють сімейство кіл, що володіють такою властивістю, що будь-яка з них, в залежності від необхідного ексцентриситету вихору, може вважатися стінкою ВТ. Перебіг всередині від цієї лінії струму відповідає проекції (на площину, перпендикулярно осі турбіни) течії з ексцентричним вихором. За аналогією з попередньою роботою, в роботі [3] визначається швидкість, що індуцується зовнішнім вихором в місці розташування вихору в ВТ, а також кутова швидкість вихору щодо центру кола, як

$$V_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\frac{R^2}{e} - e}, \quad (1.2)$$

$$\omega = \frac{V_y}{e} = \frac{\Gamma}{2\pi(R^2 - e^2)}, \quad (1.3)$$

де e – ексцентриситет основного вихоря.

Нехтуючи величиною e^2 по відношенню до R^2 , автор отримує формулу для визначення періоду (часу одного обороту вихору навколо осі гідротурбіни) обертання ВД

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi^2 R^2}{\Gamma}. \quad (1.4)$$

При переході до частоті ПТ f отримаємо вираз аналогічне, наведеним в роботі [2]:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\Gamma}{4\pi^2 R^2}, \text{ Гц}. \quad (1.5)$$

На відміну від роботи [2] автор даної роботи приймає циркуляцію ВД, яка дорівнює циркуляції на кордоні течії, тобто на стінці ВТ $\Gamma = 2\pi R V_{uR}$.

У роботах [2] та [3] визначається сила, що діє на ВТ, але не визначаються амплітуди ПТ, які необхідні для оцінки нестационарності згідно коду МЕК.

Незважаючи на суворість ММ в двовимірної постановки [2], рішення багатьох важливих питань не враховується. Ця ММ не може вважатися досить точною, так як для більшості режимів роботи турбін характерна просторова форма (гвинтова) ВД, а зазначена методика передбачає ВД вертикальним прямоосним, що має місце лише на окремих режимах роботи.

Подальший розвиток теоретичні дослідження низькочастотних ПТ, обумовлених рухом ВД за РК гідротурбіни, отримали в роботі Пазі Л.Г. [5]. Велику увагу приділено в роботі причин освіти ВД гвинтовий форми. ВД утворюються при відриві просторового прикордонного шару внаслідок обтікання тривимірним потоком в'язкої рідини втулки і обтічника РК; так як відрив пограншару відбувається по колу при осесиметричному зовнішньому потоці, то з'являється вихровий слід, що має форму тіла обертання. Потім, внаслідок втрати стійкості, трансформується в гвинтовий вихор з кінцевим поперечним перерізом. Циркуляція вихору дорівнює циркуляції зовнішнього потенційного потоку.

Така фізична модель ВД представляється недостатньо обґрунтованою, так як в цьому випадку і на оптимальних режимах роботи повинен бути ВД, а отже, і джгутові ПТ. У той же час загальновідомо, що в зоні оптимуму універсальної характеристики ВД не утворюється, а, отже, немає і джгутових ПТ.

Рух ВД відповідно до вище розглянутої фізичної моделі складається з переносу його зовнішнім потенційним потоком і впливом самого на себе

$$\varpi = \varpi_n + \varpi_c, \quad (1.6)$$

де $|\varpi_n| = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1}{\sin^2 \beta}$ – кутова переносна швидкість, а

$|\varpi_c| = -\frac{\Gamma \cos^2 \beta}{4\pi R^2 \sin \beta} \ln \frac{2R}{r_b \cos^2 \beta}$ – кутова швидкість самоіндукції. Цей вираз

(для $|\varpi_c|$) отриманий Н.Е. Жуковським [6]. Слід зазначити, що при виведенні формули $|\varpi_c|$ передбачалося $r_b < R$ [6]. Вона була отримана для вихорів в сліді за гребним гвинтом. З урахуванням (1.6) отримана формула для частоти джгутових ПТ в ВТ у вигляді

$$f = \frac{\Gamma}{4\pi^2 R^2} \left[\operatorname{cosec}^2 \beta - \frac{1}{2} \cos^2 \beta \operatorname{ctg} \beta \ln \left(\frac{2R}{r_b \cos^2 \beta} \right) \right]. \quad (1.7)$$

Подвійна амплітуда ПТ у ВТ розраховується по формуле

$$\Delta P = \frac{\rho \omega \Gamma}{4\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr + z^2}} \right], \quad (1.8)$$

де r и z – координати точки на стінці ВТ.

Фізична і математична моделі ВД, запропоновані Пазі Л.Г., не дозволяють досить точно визначити частоти і амплітуди ПТ за допомогою напівемпіричних формул

$$\frac{f}{n} = (0.56 - 0.6) \left(1 - \frac{\bar{Q}}{\bar{n}}\right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\Delta P}{\gamma H} = (0.65 - 0.85) \left(1 - \frac{\bar{Q}}{\bar{n}}\right)^2 \frac{(n'_1)^2}{g}. \quad (1.10)$$

У роботах проф. Григор'єва В.І. [8,9] розглянута двомірна і просторова ММ руху ВД. На відміну від робіт [2, 3] вплив стінки ВТ враховується заміною її вихровим шаром змінної інтенсивності. В плоскій задачі [9] сумарна швидкість від вихору і вихрового шару на стінці ВТ визначаються як

$$V_{\varphi_0} = V_{\varphi\infty} + \oint \frac{\gamma(l)dl}{2\pi\varphi} + \frac{\gamma(l_0)}{2}, \quad (1.11)$$

де $V_{\varphi\infty}$ – окружна швидкість, що індукується основним вихором.

Слід зазначити, що тут використано такий же підхід, як при розрахунку обтікання профілю, контур якого замінений вихровим шаром змінної інтенсивності [7]. Незважаючи на відмінність ММ в роботі [9] та [3], формули для кутових швидкостей обертання вихору і індукованих їм швидкостей на стінці ВТ однакові. Для визначення тиску по розрахованим швидкостям використовується інтеграл Коші-Лагранжа з перетворенням його згідно [8]. Виконані автором

розрахунки на підставі плоскої моделі дають значне завищення амплітуд ПТ (В 2-4 рази) в порівнянні з експериментом [9]. Це обумовлено тим, що плоска ММ передбачає ВД вертикальним прямоосним, в той час як дослідження різних авторів говорять про його гвинтоподібну форму. У зв'язку з цим Григор'єв В.І. в цих роботах розглянув і просторову модель ВД у вигляді циліндричної гвинтової спіралі, аналогічно [6].

В якості граничної умови прийнято умова «непротікання» через стінку ВТ, тобто рівність суми радіальних швидкостей від вихору і вихрового шару. Це призводить до інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з невідомою функцією $\gamma(\alpha_2)$ і параметром λ :

$$\lambda \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha_2) F(\varphi, \alpha_2) d\alpha_2 = f(\varphi), \quad (1.12)$$

З рішення (1.12) можна визначити функцію $\gamma(\alpha_2)$, знаючи яку можна розрахувати швидкість на стінці ВТ, що індукується всієї вихровою системою.

Однак ця методика не була доведена до чисельної реалізації на ЕОМ, і в першу чергу, в зв'язку з некоректністю рівняння (1.12) [29]. Слід зазначити, що в розрахунках профілів і решіток профілів функцію $\gamma(\alpha_2)$ задають у вигляді ряду Глауерта. Однак такий закон зміни $\gamma(\alpha_2)$ для контуру ВТ не підходить і його необхідно задавати в іншому вигляді.

Філіберт Р. і Кустон М. [30] наводять результати розрахунково-теоретичних і експериментальних досліджень ПТ від ВД в ВТ. Передбачається, що їх причина – це взаємодія ВД з коліном ВТ. На ряді режимів з'являється в ВД газовий міхур, кавітуюча порожнина. Збіг частоти ВД. з частотою обсягу газу призводить до можливості появи гідравлічного резонансу. Цей напрямок досліджень перспективний. Але в роботі не визначаються геометричні параметри ВД, що необхідні для прогнозування джгутових ПТ і не уточнені частоти.

Чисельні ММ вихрового потоку в ВТ, наведені в [31, 32, 40-42], базуються на вирішенні усереднених рівнянь Рейнольдса з урахуванням k-ε моделей

турбулентності і дозволяють визначити рівні нестационарності в'язкої рідини. Обмеженням для цього моделювання може бути певний рівень нестійкості потоку в ВТ. Кращим рішенням для цих чисельних моделей вважається те, яке найближче узгоджується з результатами експериментів. Однією з перших спроб чисельного моделювання в'язкого потоку з гвинтовим вихором в гідротурбінах на основі вищевказаної ММ була модель Скотака А. [32] для просторової сітки з великим числом точок розбиття ВТ. При цьому широко використовувалися результати експериментальних досліджень, отриманих Улісом, Фішером, Фалвеем, Касіді і Фанеллі.

Сьогодні широко використовуються сучасні пакети програм гідродинаміки, які вирішують завдання механіки суцільного середовища і використовують рівняння Рейнольдса [33,40-42] і пакети URANS моделі турбулентності в яких вирішуються питання з великомасштабними турбулентними вихорами (LES, DES). Для моделювання цього явища необхідно застосовувати нестационарні вихрові методи – метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES), при цьому необхідна детальна сітка поблизу стінок ВТ гідротурбіни. Тому RANS моделі економічні і добре описують прикордонні шари. В роботі Ментера Ф. [33] був запропонований метод відокремлених вихорів (DES). Процес вирішення завдань в цьому випадку здійснюється за допомогою пакету прикладних програм CFD, що включає етапи: створення тривимірної моделі розглянутого об'єкта за допомогою системи САПР; побудова розрахункової сітки; вибір математичної моделі турбулентності; завдання граничних умов.

Тема 2. Експериментальні дослідження в модельних і натурних гідротурбінах

Натурні вимірювання низькочастотних ПТ на турбінах Братської ГЕС, виконані Даниловим А.Е., показали значне заниження $2A$, обчислюваних за формулою (1.10), в порівнянні з експериментальним [10]. В роботі [11] доведена неможливість застосування формул (1.9), (1.10) для розрахунку $2A$ і f на розгінних режимах. Це свідчить про те, що формули Пазі Л.Г. не є універсальними і вимагають додаткового аналізу при їх використанні, в зв'язку з недосконалістю прийнятої фізичної моделі.

Експериментальні дослідження низькочастотних ПТ, викликаних ВД в ВТ гідротурбіни і оборотної гідромашини наведені в ряді робіт [5,12-21, 33, 34].

В роботі Хосои Ю. [34] наведені докладні експериментальні дослідження 5 варіантів модельних гідротурбін типу РО з $n_s = 105; 126,9; 191,5$ і $198,5$. Вид пульсаційних характеристик різний, що свідчить про вплив на нестаціонарність індивідуальності РК і форми ВТ. Однак загальні закономірності зміни амплітуд і частот в поле універсальних характеристик зберігаються. Отримано також відома залежність амплітуд від коефіцієнта кавітації. Вважаючи, що рух ВД відповідає руху вільних вихорів, отримана формула для визначення частоти його обертання [34]

$$\Phi = \beta \frac{4r^2 a_1}{60\sqrt{g}} n_1' - \frac{2r a_1}{\pi\sqrt{g}} \operatorname{ctg} \gamma * c_{ma1}, \quad (1.13)$$

$$\text{де } \Phi = \frac{fD_2}{\sqrt{gH}}.$$

Як випливає з (1.13) залежність від $Q_1'(c_{ma1})$ лінійна. Розрахункові значення частот порівнюються з експериментом. Збільшення частот поблизу оп-

тимуму за даними експерименту не спостерігаються, що мало місце в дослідженнях, наведених в [20].

В роботі [21] наводиться залежність коефіцієнта до з формули Рейнганса, отримана при випробуванні моделі турбіни Красноярської ГЕС на режимах, відповідних зниженим напором: при зміні в межах $n'_1=70-110$ об/хв і $a_0 = 8-18$ мм до $\kappa = 4,1-4,8$.

В роботі [35] наведені результати дослідження ПТ з різними частотами, в тому числі і джгутовими на моделях РК ПЛ30-587а і ПЛ30-661. Встановлено, що залежність амплітуд ПТ від напору близька до лінійної, зміна характерних частот пульсації, приблизно, підкоряється закону Струхалю. Амплітуди ПТ, як на низьких, так і високих частотах, змінюються уздовж проточного тракту. У спіральній камері спостерігаються ПТ на джгутових частотах – 2-3 Гц, оборотних – 3-13 Гц і високих – 300-500 Гц для моделі з $D_1 = 1$ м і відповідно – 4,5-6,5 Гц, 19-28 Гц і понад 500 Гц – для моделі з $D_1 = 0,46$ м. На вході в ВТ рівень низькочастотних джгутових ПТ порівнюємо з лопатевими пульсаціями 2-13% від H на різних режимах. На вході в коліно повний розмах становить 5-6%, а на виході з коліна ПТ 8-20%, але з неперіодичними коливаннями. Зазначені межі подвійних амплітуд ПТ відповідають комбінаторним режимам і деякого відхилення від них. На пропелерних режимах в ВТ зафіксовані джгутові ПТ з $2A/H, \text{‰} = 20\%$. На перехідних режимах (при скидах навантаження) рівень джгутових ПТ з частотою 4-6 Гц досягає значень 60-80% від H , що необхідно враховувати при розрахунку на міцність деталей гідротурбін.

В роботі Фанеллі М. [28] наведені результати порівняльних модельних і натурних вимірювань ПТ в турбінах РО типу. Модельні випробування проводилися при $H = 16-60$ м, напори натурних турбін 60-100м. Відзначається, хороша достовірність перерахунку модельних і натурних даних за формулами:

$$(2A)_H = \frac{H}{H_M} (2A)_M, \quad (1.14)$$

$$f_n = \frac{f_{обн}}{f_{обм}} f_m. \quad (1.15)$$

Аналізуються питання відбудови від резонансу власної частоти водоводу і вимушеної частоти, що генерується проточною частиною (оборотною і джгутовою). Передбачається в якості кращого рішення приймати $f/f_{об} = 0,75$, що було виконано на ГЕС Grand Coulee з унікальними по потужності турбінами.

Значним обсягом і глибиною модельних і натурних експериментальних випробувань характеризується робота Плахотнікова І.В. [11]. На підставі експериментальних графіків і емпіричних залежностей запропонована методика розрахунку гідродинамічних сил, що обурюють, що діють на елементи ВТ в вертикальному і горизонтальному напрямку. Виявлено зони допустимої за умовами нестационарності роботи надпотужних РО гідротурбін Братської, Красноярської, Саяно-Шушенській ГЕС, а також ряду турбін типу ПЛ.

Обробка експериментальних даних проводиться із застосуванням спектрального аналізу. Встановлено, що в ВТ РО гідротурбін ПТ являють собою стаціонарний (випадковий) процес з не випадковою, детермінованою частиною. Джерелом низькочастотних періодичних коливань тисків є ВД. В якості запобіжного зменшення нестационарності досліджувався пуск повітря під РК. Встановлено, що в області горловини ВТ впуск повітря призводить до значного зниження (2А) в діапазоні навантажень $0 \leq \frac{N}{N_{max}} \leq 0.5$. Однак в області коліна цей діапазон розширюється і пульсація знижується в 3-4 рази. Досліджено вплив кавітаційного коефіцієнта σ на рівень ПТ.

До недоліків роботи слід віднести обмежений діапазон швидко-ходності турбін, для якого можна використовувати отримані залежності з метою прогнозування рівня нестационарності. Це є результатом чисто експериментального підходу в запропонованій методиці розрахунку нестационарностей.

У технічній літературі є цілий ряд робіт, що присвячені експериментальному вивченню нестационарних явищ в проточній частині оборотних РО гідромашин [1,14,16, 23, 39]. Слід зазначити, що більша частина досліджень зазначає максимальні ПТ в межрешіточному зазорі (НА-РК) в насосному режимі з лопатевою частотою. Низькочастотні ПТ можуть мати місце в турбінному режимі внаслідок обертання ВД і характеризується тими ж закономірностями, що і в гидротурбіні. Однак, в роботі [23] низькочастотні коливання з $f \approx f_{об}$ в турбінному режимі при розгоні пояснюються з позиції обертового зриву, що має широке поширення в компресорах при малих подачах. Слід зазначити, що на кафедрі гідромашин НТУ «ХПІ» виявлено це явище, але в насосному режимі при мінімальних витратах, що цілком зрозуміло [39]. Пояснення фізичної моделі низькочастотних ПТ в ВТ в турбінному режимі з позиції обертового зриву вимагає глибокого вивчення даного питання.

В багатьох роботах зазначено, що ВД в турбінному режимі в ВТ може мати три основні форми: прямолінійний, гвинтоподібний і широкого розмаху. Наведено дані, що впуск повітря під РК в кількості 0,2 – 1% від витрати води незначно послаблює джгутові ПТ.

Ряд робіт присвячений дослідженню утворення форми і окремих параметрів вихору [2,5,6, 28, 38]. Так Кляйн [38] виводить критерій подібності для видимої кордону ВД, аналізує освіту ВД і його діаметр в залежності від розподілу закрутки потоку. Відзначимо, що діаметральні розміри джгута можна прогнозувати на підставі кривої $\bar{n}_u r^n$ в разі центрального прямоосного вихору. У більшості випадків він або ексцентричний прямолінійний, або гвинтоподібний, і в цьому випадку пропонується підхід досить проблематичний. З закруткою потоку він пов'язує питання стійкості ВД: чим менше показник n у виразі $\bar{n}_u r^n = const$, тим більше небезпека відриву у втулки і утворення нестійкого ВД.

Кубота Т. і Ямада С. виконали дослідження при трьох значеннях кута вертикального дифузора ВТ: $\alpha = 8^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ [28]. Показано, що положення максимуму ПТ залежить від α і відповідає відносним витратам $\bar{Q} = 0.3; 0.38; \text{ і } 0.43$

відповідно при $\alpha = 8^\circ, 15^\circ, 30^\circ$. Кут α впливає також на амплітуди, частоти і ККД. При $\bar{Q} < \bar{Q}_{\text{опт}}$ менші пульсуції і більший ККД при $\bar{Q} < \bar{Q}_{\text{опт}}$ $\alpha = 30^\circ$. При $\bar{Q} > \bar{Q}_{\text{опт}}$ краще $\alpha = 8^\circ$. Тому рекомендується середній кут $\alpha = 15^\circ$. Кут α впливає на частоту пульсацій f : при більшому α велика частота. Особливо це відчутно при $\bar{Q} = 0.9$. На відміну від загальноприйнятої залежності f від режиму роботи f_{max} знаходиться $\bar{Q} \approx 0.9$, тобто поблизу оптимуму. Слід зазначити, що аналогічне явище було виявлено і в дослідженнях [5, 6] за допомогою датчика зонда, введеного в потік, що вимагає подальшого вивчення. Фотографії ВД показують залежність від форми кута α і від $\bar{Q}$, тобто від режиму роботи. На підставі візуальних спостережень при $\sigma = 0.1$ отримана залежність діаметра вихрового джгута від $\bar{Q}$; угол α не впливає на $d_{\text{ж}}$. Крок гвинтової лінії ВД збільшується при зменшенні $\bar{Q}$. При малій витраті $\bar{Q} = 0,23$ автори статті побачили кілька джгутів, що призводить до значного збільшення частоти ПТ. Однак причини утворення декількох вихорів не розглянуть. У ВТ з $\alpha = 8^\circ$ виявлені також при $\bar{Q} = 0.49$ синфазні коливання тиску, але причини їх недостатньо розкриті. Слід зазначити, що, незважаючи на великий обсяг, дуже важливої інформації, отриманої експериментальним шляхом, фізичні моделі освіти ВД недостатньо переконливі.

В роботі [2] отримана досвідченим шляхом лінійна залежність частоти обертання ВД від $\bar{Q}$ для прямоосної ВТ. Розрахунковим шляхом з використанням принципу мінімальної кінетичної енергії отримана залежність $d_{\text{ж}}$ від закрутки потоку. Розрахунково шляхом одержано залежність e від $d_{\text{ж}}$

$$e \approx R - \frac{d_{\text{ж}}}{2}. \quad (1.16)$$

З (1.16) випливає, що вихор торкається стінок ВТ, з чим не можна погодитися.

В [22] говориться, що зовнішній вигляд ВД залежить від швидкохідності, форми проточного тракту і навантаження, але майже не залежить від напору випробувань. Відомі деякі типи проточних частин, які зумовлюють появу центрального симетричного вихору, замість очікуваного гвинтоподібного. При дуже невеликих навантаженнях ВД зароджуються на ступиці РК і поширюється в зону між лопатями. В цьому випадку ВД сформований нечітко і погано або зовсім не видно. При збільшенні витрати, при частковому навантаженні виникає вихровий шнур спіральної форми з частотою обертання $\omega_b = 0.25 \omega_{\text{об}}$. Форма джгута і його ексцентриситет залежить в основному від розподілу швидкостей (V_u і V_m) на вході в ВТ. Вихор розглядається як двофазний, завдяки виникненню парової фази через зниження тиску. Цим пояснюються ПТ і при прямоосному центральному ВД деяких ВТ. А також розглядаються питання гідравлічної стійкості роботи турбін при частковому навантаженні.

Моделльні та натурні дослідження, проведені співробітниками кафедри гідромашин НТУ "ХП" [12,14], дозволили отримати геометричні параметри ВД і його інтенсивність. Ексцентриситет ВД – e визначався на підставі аналізу експериментальних даних, які показують, що значення e при роботі гідротурбіни при постійному напорі дорівнює нулю в двох випадках: в оптимальному режимі, коли джгута немає (і $\Gamma = 0$) і при зменшенні витрат аж до нуля (діаметр ядра джгута досягає діаметра перетину ВТ і $\Gamma = \frac{\pi^2 R^2 n}{15}$). Отже, при збільшенні витрати значення e спочатку поступово зростає, досягаючи максимуму, а потім знижується до нуля в районі оптимуму, зростаючи при подальшому збільшенні витрати. Експерименти по визначенню e вихору за допомогою тензометричного датчика-зонда дозволили отримати залежності величини $\bar{e}$ від витрати через турбіну лише у вузькому діапазоні витрат. Була визначена емпірична залежність для відносної величини $\bar{e}$, що отримана співробітниками кафедри гідромашин НТУ «ХП» Бондаренком А.В. і Гришиним А.М. на основі аналізу комплексних експериментальних досліджень ПТ в ВТ гідротурбін

$$\bar{e} = k \sqrt{|\bar{n}'_1 - \bar{Q}'_1| \bar{Q}'_1}, \quad (1.17)$$

де $\bar{e}$ – відносний ексцентриситет $e = e / R$,

$\bar{n}'$ – відносна приведена частота обертання $\bar{n}'_1 = \frac{n'_1}{n'_{1onm}}$,

$\bar{Q}'$ – відносна приведена витрата $\bar{Q}'_1 = \frac{Q'_1}{Q'_{1onm}}$,

k – експериментальний коефіцієнт $k = 0.7$ при $\Gamma > 0$, $k = 0.35$ при $\Gamma < 0$ – для РК РО115; $k = 1$ при $\Gamma > 0$, $k = 0.45$ при $\Gamma < 0$ – для РК РО310.

Аналіз формули (1.17) показує, що $\bar{e}$ дорівнює нулю на лінії нульової циркуляції ($\Gamma = 0$), далі при збільшенні витрати спостерігається збільшення абсолютного значення $\bar{e}$, причому, найбільше в правому нижньому кутку характеристики, де спостерігаються найбільші амплітуди ПТ. На режимах недовантаження, тобто при $\Gamma > 0$ $\bar{e}$ також збільшується, досягаючи максимуму приблизно при $\frac{Q'_{1onm}}{2}$. З експериментальних досліджень відомо, що максимальне значення $e \leq 0.7 - 0.8$. Це і є обмеженням в розрахунках $\bar{e}$ і кутів нахилу вихровий лінії.

Кут нахилу гвинтової вихровий лінії $\beta_{\text{ж}}$ пов'язаний з величиною e . У тих випадках, коли $\bar{e} = 0, \beta_{\text{ж}} = 90^\circ$. Це свідчить наступною залежністю $\beta_{\text{ж}} = 90(1 - \bar{e})$. Однак найкращий результат, на думку авторів, дає залежність

$\beta_{\text{ж}} = 90(1 - \frac{\sqrt{\bar{e}} + \bar{e}}{2})$. Циркуляція ВД за РК може вважатися рівною циркуляції потоку по контуру, що охоплює обтічник РК у корневих перетинів. При русі вниз по потоку контур зменшується до розмірів ядра ВД за РК. Якщо діаметр ядра ВД стає більше діаметра обтічника у корневих перетинів, то циркуляцію можна визначати по перетину лопаті рівному радіусу ядра вихору. Збільшення ядра відбувається при зменшенні витрат (при $Q = 0$ ядро вихору має займати все перетин ВТ; в даному випадку циркуляція вихору визначається циркуляцією на периферійних перетинах).

З аналізу кінематичних параметрів потоку за РК. гідротурбіни витікає, що циркуляція потоку на кожному конкретному радіусі лінійно залежить від витрати. Авторами [14] прийнято допущення, що відносна циркуляція ядра вихору (віднесена до циркуляції переносний швидкості на даному радіусі) змінюється від нуля на оптимальному режимі до одиниці при $Q = 0$. Закономірність зміни відносної циркуляції в полі універсальної характеристики може бути

описана виразом $\bar{\Gamma} = 1 - \sqrt{\frac{Q'}{\bar{n}'_1}}$, де, $\bar{n}'_1 = \frac{n'_1}{n'_{1onm}}$, $\bar{Q}'_1 = \frac{Q'_1}{Q'_{1onm}}$ – відносні частота обертання РК і витрата. Абсолютне значення циркуляції ВД за РК в полі універсальної характеристики можна отримати за допомогою залежності $\Gamma = \pi^2 R^2 \frac{n}{15} \bar{\Gamma}$.

Отримане таким чином розподіл циркуляції в полі універсальної характеристики добре узгоджується з експериментальними даними.

Деякими дослідниками відмічено, що на певних режимах роботи РО гідротурбін за РК виникає кілька ВД [36-38]. Так Кубота Т. і Ямада С. при модельних дослідженнях відзначили появу 3-х вихрових джгутів на режимах недовантаження ($Ni = 0.4N_{onm}$) і більш ($Ni = 0.23N_{onm}$), що призводило до значного збільшення частоти ПТ в ВТ. В роботі [36] Фелвей Г. призводить залежність

$\Pi = \frac{f_{ж} D_{от}^3}{Q'_{1к}}$ для визначення меж переходу від одновихрової схеми до двовихрової (при $\Pi = 2.5$) і від двовихрової до трьохвихрової (при $\Pi = 3$). Візуальні дослідження моделей гідротурбін типу РО230, РО310 показали, що при форсуванні витрати щодо розрахункового, ВД роздвоюється. При цьому вони розташовуються симетрично щодо осі обертання турбіни, мають, приблизно, однакову форму і розміри, і обертаються з однаковою кутовою швидкістю в прецесійний русі. Таким чином, візуальні дослідження, які показали роздвоєння ВД, пояснили збільшення частот джгутових ПТ на режимах форсування потужності.

Контрольні питання

1. Написати формулу Рейнганса для частоти ВД у ВТ гідротурбіни.
2. Який вид мають формули частоти і циркуляції ВД у ВТ гідротурбіни по Муракамі М.?
3. Написати формулу частоти і періоду ВД у ВТ гідротурбіни по Нехлеба М.
4. Навести формула частоти і амплітуди ПТ у ВТ від ВД по Пазі Л.Г.
5. З чого складається сумарна швидкість від вихору і вихрового шару на стінці ВТ гідротурбіни по моделі Пазі Л.Г.?
6. Записати інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду з функцією $\gamma(\alpha_2)$, що використовується в ММ Григор'єва В.І.
7. На вирішенні яких рівнянь і з якою моделлю турбулентності базуються чисельні ММ просторового вихрового потоку в ВТ, що наведені у роботах Скотака?
8. Надати формулу для визначення частоти обертання ВД для РО натурної гідротурбіни по Хосою Ю.
9. Записати формули перерахунку частот і амплітуд ПТ від ВД у РО гідротурбін з моделі на натуру, що отримані Фанелли М.
10. Записати формулу для відносної величини $\bar{\epsilon}$, отриману на каф. гідромашин НТУ «ХП» доц. Бондаренком А.В. на основі комплексних досліджень.
11. Навести формулу для куту нахилу гвинтової вихрової лінії $\beta_{ж}$, яку отримано Бондаренком А.В. на основі комплексних досліджень.
12. Навести залежність отриману Фелвеєм Г. для визначення меж переходу від одновихрової схеми до двовихрової ВД у ВТ.

Таблиця 1.1– Варіанти практичних задач для студентів до розділів 1–3

Прізвище студента	Тип турбіни	$\frac{r_2}{R_2}$	R_2 , м	H_p , м	n_c , хв^{-1}	Q'_o , $\text{м}^3/\text{с}$	n'_o , хв^{-1}
Студент1	РО45	0,327	2	39	88,3	1,330	91
Студент 2	РО75	0,329	2	67	125	1,15	78,5
Студент 3	РО115	0,353	2	97	125	0,9	71
Студент 4	РО170	0,512	1,5	157	200	0,7	0,7
Студент 5	РО190	0,532	1,5	167	187,5	0,6	69
Студент 6	РО230	0,565	1,5	197	187,5	0,58	67
Студент 7	РО310	0,38	1,5	250	200	0,4	62,5
Студент 8	РО400	0,38	1,5	345	200	0,35	60

Задача

Розрахувати і побудувати амплітудну і частотну характеристики ПТ від ВД за РК у ВТ для гідротурбіни РО115 у полі універсальної характеристики за методикою Пазі Л.Г.

Початкові умови: Гідротурбіна – РО 115, параметри оптимального режиму: $Q'_{1onn} = 930$ л/с, $n'_{1onn} = 73$ хв⁻¹, $n_c = 125$ хв⁻¹ = 2,0833 с⁻¹.

Для використання формул Пазі необхідно задатися витратою і обертами. Для цього задаємося витратою через кожні 100 л/с, починаючи з 630 л/с і до 1130 л/с, орієнтуючись на оптимальну витрату $Q'_{1onn} = 930$ л / с.

Орієнтуючись на оптимальні оберти, задаємося діапазоном мінімальних і максимальних приведених обертів – на 7-10 обертів вище і нижче оптимуму:

$$n'_{1min} = 66 \text{ хв}^{-1} \text{ і } n'_{1max} = 80 \text{ хв}^{-1}.$$

Скористаємося формулою Пазі Л.Г. для знаходження частоти ПТ у ВТ:

$$f = (0,56 - 0,6) \cdot \left(1 - \frac{\bar{Q}_i}{\bar{n}_i}\right) \cdot n_c,$$

де n_c – синхронна частота обертання РК, с⁻¹.

$$\bar{Q}_i = \frac{Q'_{li}}{Q'_{onn}}; \quad \bar{n}_i = \frac{n'_{li}}{n'_{onn}};$$

Формула Пазі Л.Г. для зходження амплітуди ПТ, у процентах, %:

$$\frac{2A}{H} \cdot 100\% = (0.65 - 0.85) \left(1 - \frac{\bar{Q}_i}{\bar{n}_i}\right)^2 \frac{(n'_{li})^2}{g}$$

$$2A \cdot 100\% = 0.75 * \left(1 - \frac{\bar{Q}_i}{\bar{n}_i}\right)^2 \frac{(n'_{li})^2}{g} H;$$

Далі вводимо всі вихідні дані в програму EXCEL і вбиваємо формули розрахунку. Отримуємо на виході всі значення f , Гц і $2A/H \cdot 100\%$ див. табл. 2.1.

Таблиця 2.1– Файл вихідних даних розрахунку отримуємо в редакторі EXCEL,

оптимальний режим – $Q'_{10nm} = 930$ л/с, $n'_{10nm} = 73$ хв⁻¹, $n_c = 2,083$ хв⁻¹

№режиму	Q'_{li} , л/с	n'_{li} , хв ⁻¹	f , Гц	2A,%
1	630	59	0,20	0,28
2	730	59	0,03	0,01
3	830	59	-0,13	0,12
4	930	59	-0,29	0,60
5	1030	59	-0,45	1,47
6	1130	59	-0,61	2,71
7	630	66	0,30	0,84
8	730	66	0,16	0,23
9	830	66	0,02	0,00
10	930	66	-0,13	0,15
11	1030	66	-0,27	0,68
12	1130	66	-0,42	1,58
13	630	73	0,39	1,70
14	680	73	0,32	1,18
15	730	73	0,26	0,76
16	780	73	0,19	0,43
17	830	73	0,13	0,19
18	880	73	0,06	0,05
19	930	73	0,00	0,00
20	1030	73	-0,13	0,19
21	1130	73	-0,26	0,76
22	630	80	0,46	2,86
23	730	80	0,34	1,58
24	830	80	0,22	0,68
25	930	80	0,11	0,15
26	1030	80	-0,01	0,00
27	1130	80	-0,13	0,23
28	630	87	0,52	4,33
29	730	87	0,41	2,71
30	830	87	0,30	1,47
31	930	87	0,19	0,60
32	1030	87	0,09	0,12
33	1130	87	-0,02	0,01

Будуємо графіки залежності f , Гц рис.1.1 і амплітуди $2A/H$ 100% рис. 1.2 від приведених обертів і витрати (поле n_1-Q_1'). Для цього скористаємося графічною опцією «plot» програми “Surfer” попередньо сформувавши файл EXCEL.dat з табл.2.1 і задавши параметри сітки в опції «Grid» у полі n_1-Q_1' .

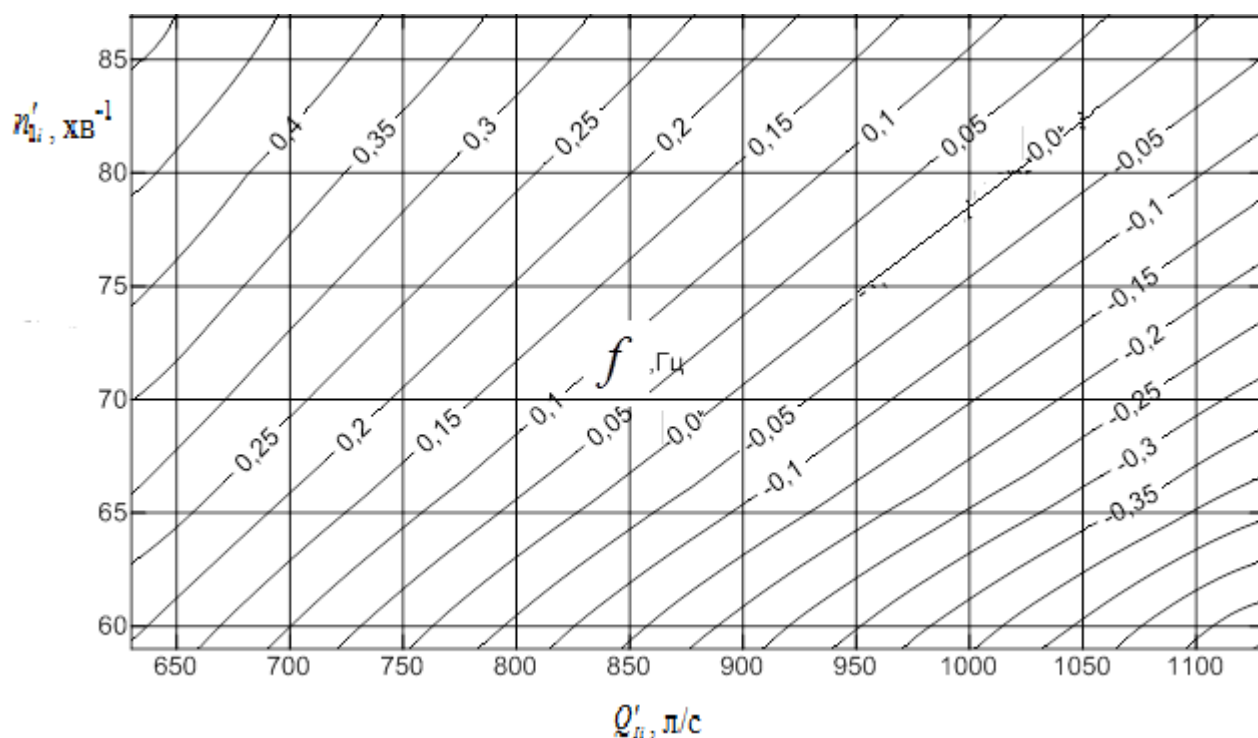


Рисунок 1.1 – Графік змінення частоти джутових ПТ у ВТ за РК – f , Гц

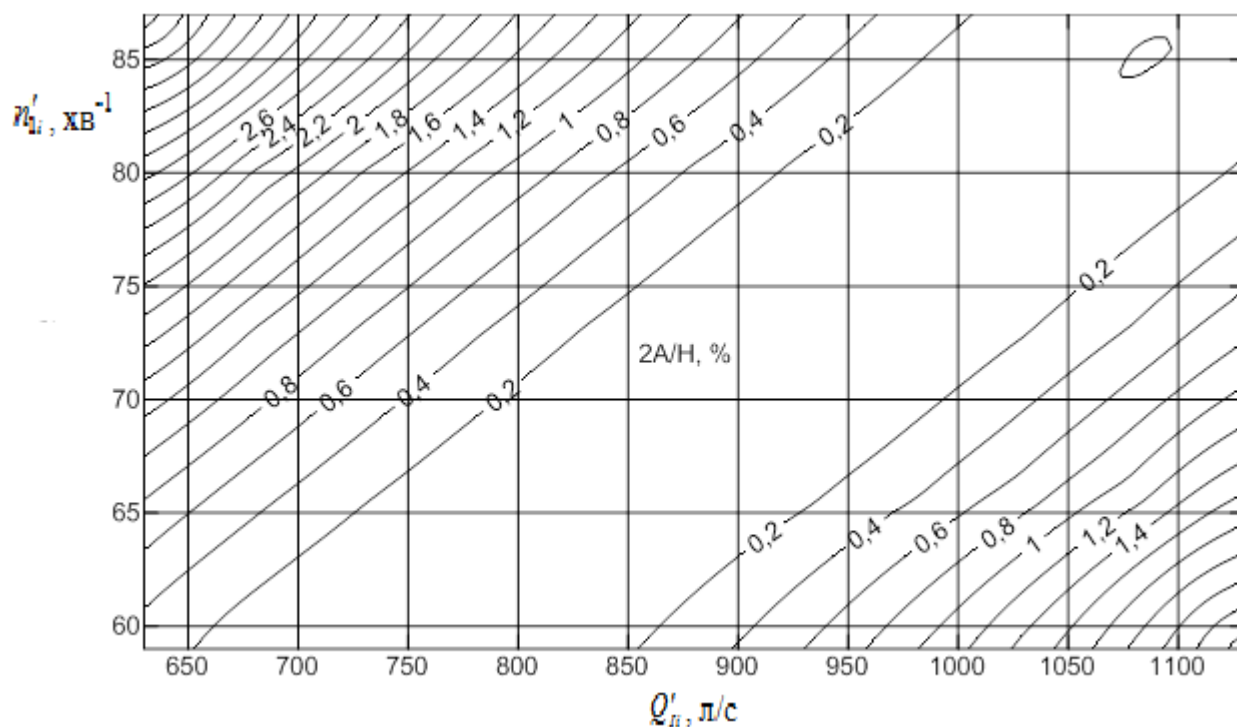


Рисунок 1.2 – Графік змінення амплітуд джутових ПТ у ВТ за РК – $2A/H$ 100%.

Розділ 2. ДВОМІРНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ВИХРОВИХ ДЖГУТІВ У ВІДСМОКТУЮЧІЙ ТРУБІ РО ГІДРОТУРБИНИ (ПРЯМА ЗАДАЧА ГІДРОДИНАМІКИ)

Розглянемо плоскі моделі ВД (фізичних), що утворюються за РК гідротурбіни (або оборотної гідромашини в турбінному режимі) на нерозрахованих режимах внаслідок наявності циркуляції потоку за РК на вході в ВТ.

Визначення швидкостей в будь-якій точці ВТ і також на її стінці, індукованих ВД, що обертаються в бік закрутки потоку за РК, вимагає гідродинамічного врахування впливу стінок ВТ на течію. Це можна виконати різними способами: по-перше, дзеркально відображеними вихорами щодо стінки ВТ, причому, число відображених вихорів дорівнює числу дійсних ВД, що знаходяться в ВТ [1-4], по-друге, вихровим шаром змінної інтенсивності, який заміняє внутрішню поверхню стінки ВТ [5-7], по-третє, системою джерел (стоків), розташованих на стінці ВТ [7]. В даному навчальному посібнику розглядаються надалі два перших способи, як найбільш розроблені в даний час. ММ і що впливають з них розрахункові формули можуть бути отримані на підставі теорії функцій комплексного змінного (ТФКЗ) і іншими способами.

Тема 2.1 СТІНКА ВІДСМОКТУЮЧОЇ ТРУБИ МОДЕЛЮЄТЬСЯ ДЗЕРКАЛЬНО ВІДОБРАЖЕНИМИ ВИХОРИМИ.

2.1.1.Одновихрєвая схема (на основі ТФКЗ)

Комплексний потенціал течії від "n" вихорів, що включають основні і дзеркально відображені щодо стінки відсмоктуючої труби, які перебувають на відстані " l_k " від центру кола відсмоктуючої труби, може бути записаний:

$$W(z) = - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Gamma_k * i}{2\pi} \ln(z - l_k), \quad (2.1)$$

де $z = x + iy$ – комплексне змінне;

$l_k = l' + il''$ – комплексна величина;

n – кількість вихорів (основних і відображених);

k – порядковий номер вихоря;

Γ_k – циркуляція “ k ”-ого вихоря.

Для цієї моделі приймаємо в (2.1) $n = 2$, тобто вводим в модель один фізичний вихор, розташований в т.1, і відображений дзеркально в т.2 (рис.2.1). З урахуванням цього і (2.1) запишемо комплексний потенціал для розрахункової схеми з одним вихровим (фізичним) джгутом

$$W(z) = -\frac{\Gamma_1 i}{2\pi} \ln(z - l_1) - \frac{\Gamma_2 i}{2\pi} \ln(z - l_2). \quad (2.2)$$

Тут z – координата довільної точки в площині комплексної змінної z ; l_1 , l_2 – координати розташування вихорів відповідно в точках 1 і 2.

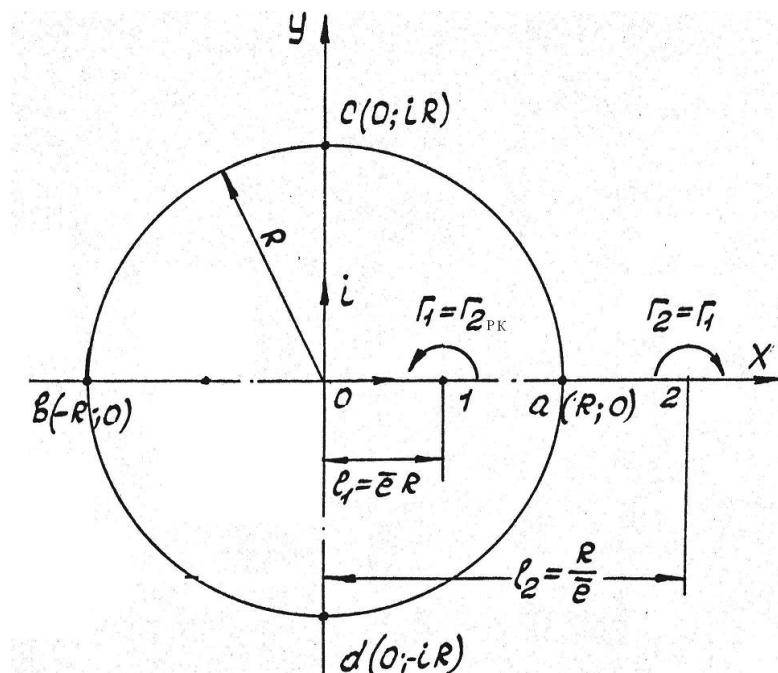


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема для випадку одного ВД

Так як $\Gamma_2 = -\Gamma_1$, а $\Gamma_1 = \Gamma$, $l_1 = \bar{e}R$, $l_2 = \frac{R}{\bar{e}}$, то (1.2) можна записати:

$$W(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \left[\ln(z - \bar{e}R) - \ln\left(z - \frac{R}{\bar{e}}\right) \right], \quad (2.3)$$

де Γ – циркуляція за РК на вході в ВТ;

e_1 – ексцентриситет основного ВД (фізичного);

$\bar{e} = \frac{e_1}{R}$ – відносний ексцентриситет основного ВД (фізичного);

R – радіус поперечного перерізу ВТ в розрахунковому перерізі.

Комплексна швидкість в цьому випадку для поля течії може бути записана:

$$\frac{dW(z)}{dz} = V_x - iV_y = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \left[\frac{1}{z - \bar{e}R} - \frac{1}{z - \frac{R}{\bar{e}}} \right]. \quad (2.4)$$

Швидкість, що індукована вихровою системою в т. "a", отримуємо з (2.4) при $z = +R$

$$\frac{dW(z_a)}{dz} = V_{xa} - iV_{ya} = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \left[\frac{1}{z - \bar{e}R} - \frac{1}{z - \frac{R}{\bar{e}}} \right] = -\frac{i\Gamma}{2\pi R} \frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}. \quad (2.5)$$

$$\text{З (1.5) витікає, що в т. "a" } V_{xa} = 0, \text{ а } V_{ya} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}. \quad (2.6)$$

Швидкість, що індукована вихровою системою в т. "b", отримуємо з (1.4) при $z = -R$:

$$\frac{dW(z_b)}{dz} = V_{xb} - iV_{yb} = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \left[\frac{1}{-R - \bar{e}R} - \frac{1}{-R - \frac{R}{\bar{e}}} \right] = \frac{i\Gamma}{2\pi R} \frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}. \quad (2.7)$$

$$\text{З (1.7) витікає, що в т. "b" } V_{xb} = 0, \text{ а}$$

$$V_{yb} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}. \quad (2.8)$$

Для визначення частоти обертання фізичного вихрового джгута необхідно визначити швидкість в т.1, індуковану вихором, розташований в т.2. Для цього з урахуванням (2.1) запишемо

$$W(z) = -\frac{\Gamma_2 i}{2\pi} \ln(z - l_2) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \left[\ln\left(z - \frac{R}{\bar{e}}\right) \right]. \quad (2.9)$$

Швидкість, що індукована вихором 2, в т.1:

$$\frac{dW(z_1)}{dz} = V_{x1} - iV_{y1} = \frac{\Gamma i}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - \frac{R}{\bar{e}}} \Big|_{z=\bar{e}R} = -\frac{i\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{\bar{e}}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.10)$$

$$\text{З (1.10) витікає, що в т.1 } V_{x1} = 0, \text{ а } V_{y1} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{\bar{e}}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.11)$$

В такому випадку кутова частота обертання фізичного вихору:

$$\omega_{\epsilon} = V_{y1}/\bar{e}R = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{1 - \bar{e}^2}, \quad (2.12)$$

а частота обертання вихоря:

$$f_{\epsilon} = \frac{\omega_{\epsilon}}{2\pi} = \frac{\Gamma}{(2\pi R)^2} \cdot \frac{1}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.13)$$

Так як в даному випадку фізичний вихор один ($z_{\epsilon} = 1$), то частота ПТ на стінці ВТ дорівнює частоті обертання вихору, тобто:

$$f_{жс} = f_{\epsilon}. \quad (2.13^*)$$

Обчислюючи за формулою (2.13) частоту обертання ВД при різних режимах роботи гідромашини, можна отримати теоретичну прогнозну характеристику частот ПТ.

Таким чином за формулою (2.6) визначається максимальна швидкість, що індукується вихровою системою на стінці ВТ в даному поперечному розрізі, за формулою (2.8) мінімальна. Знаючи ці швидкості, можна визначити тиску в зазначених точках “a” і “b”, т. е. p_b і p_a ; різниця цих тисків є подвійною амплітудою ПТ:

$$\Delta p = p_b - p_a = 2A\gamma, \quad (2.14)$$

де A – амплітуда ПТ (коливань), м;

$\gamma = \rho g$, кГс/м^3 – питома вага робочої рідини (зазвичай води).

Обчислюючи по (2.14) при різних режимах роботи гідромашини, можна побудувати теоретичну амплитудну пульсаційну характеристику. Для визначення тисків, знаючи швидкості в т. "а" і "b", необхідно використовувати інтеграл Коші-Лагранжа. Однак, тому що в оборотних гідромашинах і гідротурбінах число обертів не велике, а отже не велике і число Струхаля, то з певним допущенням можна застосувати інтеграл Бернуллі. В такому випадку з урахуванням $z_a = z_b$ (2.14) можна записати:

$$2A = \Delta p / \gamma = \frac{p_b - p_a}{\gamma} = \frac{V_{ya}^2 - V_{yb}^2}{2g}. \quad (2.15)$$

Зазвичай ізолінії подвійних амплітуд ПТ висловлюють в % від напору:

$$\frac{2A}{H}, \% = \frac{\Delta p}{\gamma H} * 100\% = \frac{V_{ya}^2 - V_{yb}^2}{2gH} * 100\%, \quad (2.15^*)$$

де H – напір для даного режиму, м.

Якщо застосувати інтеграл Коші-Лагранжа, то $\frac{2A}{H}, \%$ обчислюємо за формулою (2.15 **), висновок якої наведено в розділі 4:

$$\frac{2A}{H}, \% = \left[\frac{V_{ya}^2 - V_{yb}^2}{2} + (|V_{ya}| - |V_{yb}|)R|\omega_\epsilon| \right] \frac{100\%}{gH}. \quad (2.15^{**})$$

2.1.2. Двовихрева схема (на основі ТФКЗ)

ММ двовихревої схеми складається з двох фізичних вихорів, що розташовані на діаметрі кола в поперечному перерізі ВТ і рівновіддалених від центру кола на відстані ексцентриситету $e = \bar{e}R$ і двох дзеркально відображених вихорів щодо кола радіуса R , розташованих на відстанях $\frac{R}{\bar{e}}$ від центру (рис.2.2.)

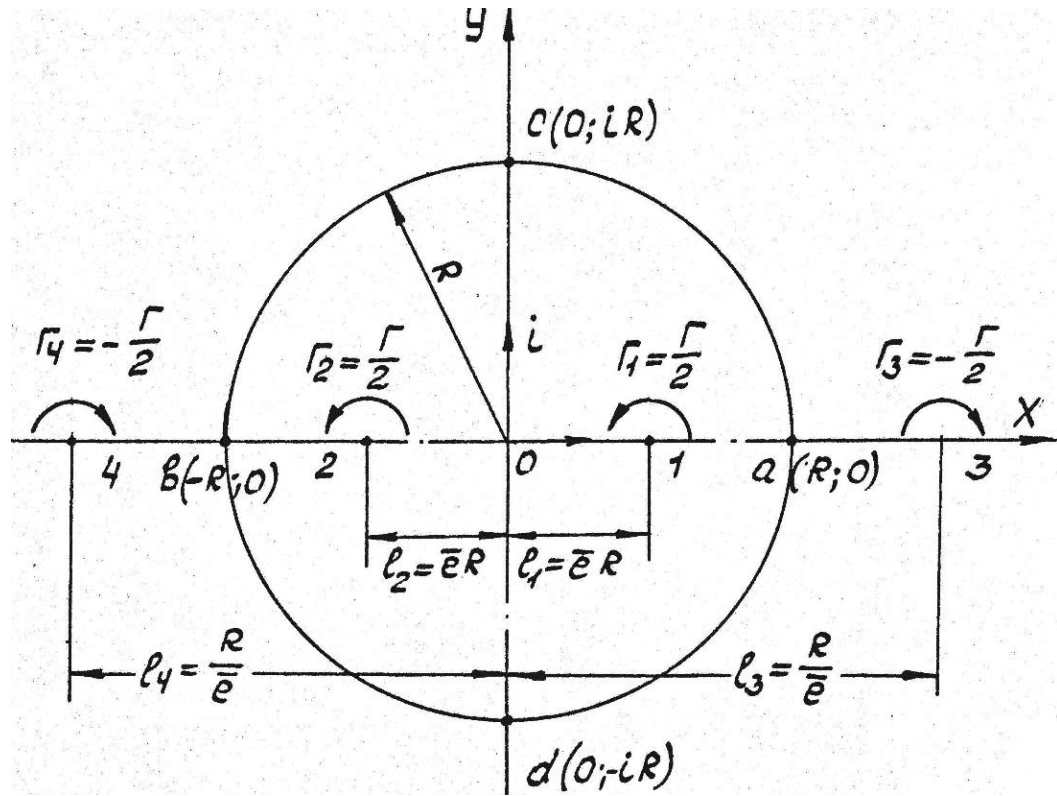


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема для випадку двох ВД

Циркуляції основних фізичних вихорів: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}$; циркуляції дзеркально відображених вихорів $\Gamma_3 = \Gamma_4 = -\frac{\Gamma}{2}$, де Γ -циркуляція потоку за РК.

Для двовихревої схеми, згідно рис.2.2., комплексний потенціал (2.1) набуває вигляду:

$$W(z) = -\frac{\Gamma_1 i}{2\pi} \ln(z - l_1) - \frac{\Gamma_3 i}{2\pi} \ln(z - l_3) - \frac{\Gamma_2 i}{2\pi} \ln(z - l_2) - \frac{\Gamma_4 i}{2\pi} \ln(z - l_4). \quad (2.16)$$

Виконавши перетворення рівняння (2.16) з урахуванням

$$l_2 = -l_1, l_4 = -l_3, \Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}; \Gamma_3 = \Gamma_4 = -\frac{\Gamma}{2} \quad \text{отримаємо:}$$

$$W(z) = -\frac{\Gamma i}{4\pi} \ln \frac{(z - l_1)(z + l_1)}{(z - l_3)(z + l_3)} = -\frac{\Gamma i}{4\pi} \ln \frac{z^2 - l_1^2}{z^2 - l_3^2}. \quad (2.17)$$

Комплексна швидкість поля течії від двох основних вихорів і двох відображених з урахуванням (2.17)

$$\frac{dW(z)}{dz} = V_x - iV_y = -\frac{i\Gamma'}{4\pi} \cdot \frac{z^2 - l_3^2}{z^2 - l_1^2} \cdot \frac{2z[(z^2 - l_3^2) - (z^2 - l_1^2)]}{(z^2 - l_3^2)^2} = -\frac{i\Gamma'}{2\pi} \cdot z \cdot \frac{l_1^2 - l_3^2}{(z^2 - l_1^2)(z^2 - l_3^2)}. \quad (2.18)$$

Комплексна швидкість в точці "a" може бути отримана з (2.18) при

$$l_1 = \bar{e}R, l_3 = R/\bar{e}, z_a = x_a = R, y_a = 0:$$

$$\frac{dW(z_a)}{dz} = V_{xa} - iV_{ya} = -\frac{i\Gamma R}{2\pi} \cdot \frac{(\bar{e}R)^2 - (R/\bar{e})^2}{[R^2 - (\bar{e}R)^2][R^2 - (R/\bar{e})^2]} = -\frac{i\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.19)$$

$$\text{З (1.19) витікає, що в т. "b" } V_{xa} = 0, \text{ а } V_{ya} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.20)$$

Комплексна швидкість в точці "b" може бути отримана з (2.18) при

$$l_1 = \bar{e}R, l_3 = R/\bar{e}, z_b = x_b = -R, y_b = 0:$$

$$\frac{dW(z_b)}{dz} = V_{xb} - iV_{yb} = \frac{i\Gamma R}{2\pi} \cdot \frac{(\bar{e}R)^2 - (R/\bar{e})^2}{[(-R)^2 - (\bar{e}R)^2][(-R)^2 - (R/\bar{e})^2]} = \frac{i\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.21)$$

З (2.21) витікає, що в точці "b"

$$V_{xb} = 0, V_{yb} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}. \quad (2.22)$$

Швидкості, що індуковані вихорами в т. "a" і "b" однакові по модулю і є максимальним значенням індукованих швидкостей. У даній математичної моделі мінімальним значенням швидкостей є їх значення в точках "c" і "d". Це впливає з того, що точки "c" і "d" віддалені від фізичних вихорів, що розташовані в точках 1 і 2, на максимальну відстань (рис.2.2).

Комплексна швидкість в точці "c" може бути отримана з (2.18) при

$$l_1 = \bar{e}R, l_3 = R/\bar{e}, z_c = iy_c = iR:$$

$$\begin{aligned} \frac{dW(z_c)}{dz} &= V_{xc} - iV_{yc} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{iy[(\bar{e}R)^2 - (R/\bar{e})^2]}{[(iy)^2 - (\bar{e}R)^2][(iy)^2 - (R/\bar{e})^2]} \Big|_{y_c=R} = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 - \bar{e}^2}{1 + \bar{e}^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

З (2.23) витікає, що в точці "с"

$$V_{yc} = 0, V_{xc} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 - \bar{e}^2}{1 + \bar{e}^2}. \quad (2.24)$$

Користуючись таким же методом можна показати, що $V_{-d} = 0, V_{xd} = -V_{xc}$.

Таким чином, в точках "а" і "b" мають місце максимальні значення індукованих швидкостей, а в точках "с" і "d" мінімальні. Аналогічно, як у одновихровій схемі амплітуди ПТ розраховуємо за формулами Бернуллі:

$$2 \frac{A}{H} \cdot 100\% = \frac{\Delta p}{\gamma H} \cdot 100\% = \frac{(V_{ya}^2 - V_{xc}^2)}{2gH} \cdot 100\%, \quad (2.25)$$

чи Коші-Лагранжа

$$2 \frac{A}{H} \cdot 100\% = \frac{\Delta p}{\gamma H} \cdot 100\% = \frac{[(V_{ya}^2 - V_{xc}^2)/2 + (|V_{ya}| - |V_{xc}|)R|\omega_b|]}{2gH} \cdot 100\%. \quad (2.25^*)$$

Для визначення швидкості в точці 1, що дозволяє знайти кутову швидкість обертання вихрової системи і, в кінцевому рахунку, частоту джгутової ПТ в ВТ, тоді запишемо комплексний потенціал (2.1) для даного випадку

:

$$w(z) = -\frac{\Gamma_3 i}{2\pi} \ln(z - l_3) - \frac{\Gamma_2 i}{2\pi} \ln(z - l_2) - \frac{\Gamma_4 i}{2\pi} \ln(z - l_4). \quad (2.26)$$

Так як $l_2 = -l_1, l_4 = -l_3, \Gamma_4 = \Gamma_3 = -\Gamma_2 = -\Gamma/2$, то (2.26) приймає вигляд:

$$w(z) = -\frac{\Gamma i}{4\pi} \ln \frac{z+l_1}{(z-l_3)(z+l_3)} = -\frac{\Gamma i}{4\pi} \ln \frac{z+l_1}{z^2-l_3^2}. \quad (2.26^*)$$

Комплексна швидкість в т.1, що індукована вихорами, що розташовані в т. 2,3,4 в цьому випадку дорівнює:

$$\begin{aligned} \frac{dW(z_1)}{dz} &= V_{x1} - iV_{y1} = -\frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{z^2-l_3^2}{z+l_1} \cdot \frac{(z^2-l_3^2)-2z(z+l_1)}{(z^2-l_3^2)^2} = \\ &= -\frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{-2zl_1-z^2-l_3^2}{z^3-zl_3^2+z^2l_1-l_1l_3^2} = -\frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{-3(\bar{e}R)^2-(\frac{R}{\bar{e}})^2}{2(\bar{e}R)^3-2(\bar{e}R)(\frac{R}{\bar{e}})^2} = -\frac{i\Gamma}{8\pi\bar{e}R} \cdot \frac{1+3\bar{e}^4}{1-\bar{e}^4}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{З (2.27) витікає, що } V_{x1} = 0, \text{ а } V_{y1} = \frac{\Gamma}{8\pi\bar{e}R} \cdot \frac{1+3\bar{e}^4}{1-\bar{e}^4}. \quad (2.28)$$

Кутова швидкість обертання фізичних вихорів :

$$\omega_e = V_{y1}/\bar{e}R = \frac{\Gamma}{8\pi(\bar{e}R)^2} \cdot \frac{1+3\bar{e}^4}{1-\bar{e}^4}. \quad (2.29)$$

Частота обертання фізичних вихорів в цьому випадку:

$$f_e = \frac{\omega_e}{2\pi} = \frac{\Gamma}{(4\pi\bar{e}R)^2} \cdot \frac{1+3\bar{e}^4}{1-\bar{e}^4}. \quad (2.30)$$

Частота джгутової ПТ за РК в ВТ, враховуючи, що в даній схемі число фізичних вихорів $z_B=2$.

$$f_{жс} = 2 f_e = \frac{\Gamma}{8(\pi\bar{e}R)^2} \cdot \frac{1+3\bar{e}^4}{1-\bar{e}^4}. \quad (2.31)$$

2.1.3. Багатовихрова схема.

ММ багатовихрової схеми для визначення індукованих вихорами швидкостей на стінці ВТ представлена на рис.2.3.

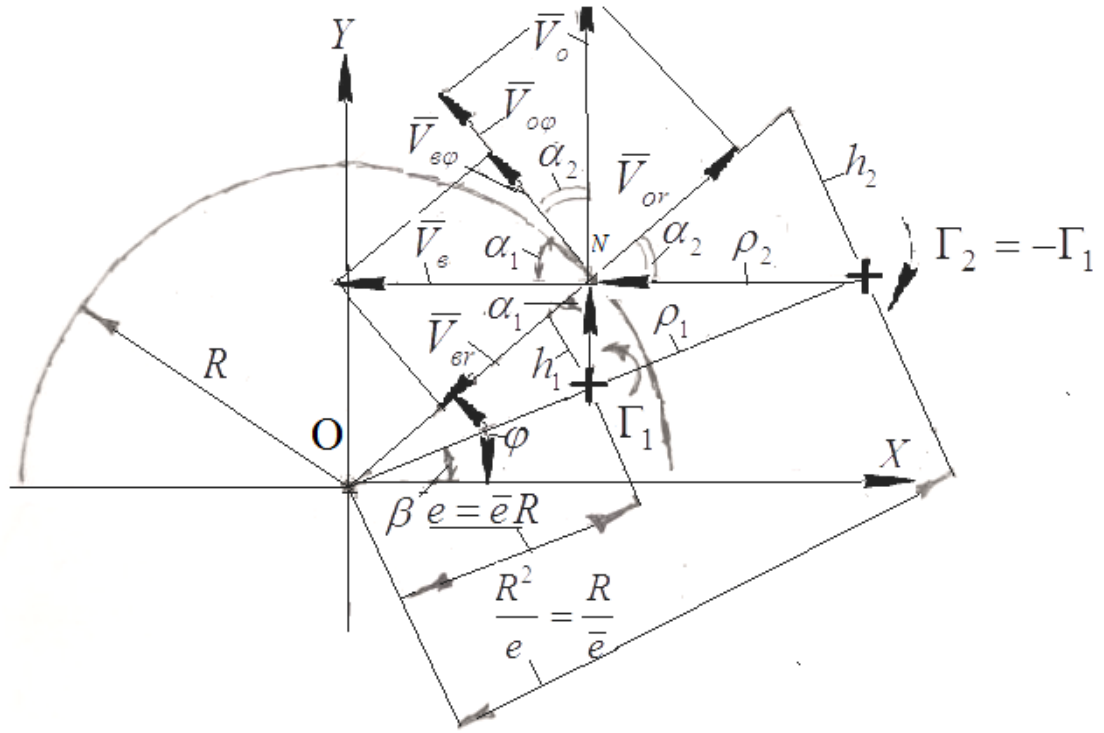


Рисунок 2.3 – До визначення швидкостей, що індуковані ВД на стінці ВТ

Сумарні окружна V_u і V_r радіальна складові індукованої в т. N швидкості обчислюються за такими залежностями:

$$V_r = V_{\epsilon r} + V_{or} \quad (2.32)$$

$$V_\varphi = V_{\epsilon \varphi} + V_{o\varphi}. \quad (2.33)$$

Тут $V_{\epsilon r}$ і $V_{\epsilon \varphi}$ відповідно радіальна і окружна складові індукованої основним вихором з Γ_1 швидкості V_ϵ в т. N ; V_{or} і $V_{o\varphi}$ і відповідно радіальна і окружна складові швидкості, індукованої дзеркально відображеним вихором з $\Gamma_2 = -\Gamma_1$. Причому $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{z_\epsilon}$, де Γ – циркуляція за РК, а z_ϵ – число фізичних ВД за РК.

З рис.2.3, використовуючи теорему косинусів, можна визначити складові $V_{er}, V_{e\varphi}, V_{or}$ і $V_{o\varphi}$ швидкостей, індукованих основними і моделюючими вихорами в т. N (на стінці ВТ):

$$\begin{aligned} V_{er} &= V_e \sin \alpha_1 = \frac{\Gamma_1 \sin \alpha_1}{2\pi\rho_1} = \frac{\Gamma h_1}{z_e 2\pi\rho_1^2} = \frac{\Gamma}{2\pi z_e} \cdot \frac{R\bar{e} \sin(\varphi - \beta)}{R^2 + \bar{e}^2 R^2 - 2\bar{e} R^2 \cos(\varphi - \beta)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi R z_e} \cdot \frac{\bar{e} \sin(\varphi - \beta)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)} \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} V_{or} &= V_o \sin \alpha_2 = \frac{\Gamma_2 \sin \alpha_2}{2\pi\rho_2} = -\frac{\Gamma h_2}{2\pi\rho_2^2 z_e} = -\frac{\Gamma}{2\pi z_e} \cdot \frac{\frac{R}{\bar{e}} \sin(\varphi - \beta)}{R^2 + (\frac{R}{\bar{e}})^2 - 2R(\frac{R}{\bar{e}}) \cos(\varphi - \beta)} = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi R z_e} \cdot \frac{\frac{1}{\bar{e}} \sin(\varphi - \beta)}{1 + \frac{1}{\bar{e}^2} - \frac{2}{\bar{e}} \cos(\varphi - \beta)} = -\frac{\Gamma}{2\pi R z_e} \cdot \frac{\bar{e} \sin(\varphi - \beta)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)} \end{aligned} \quad (2.35).$$

З порівняння (2.34) і (2.35) видно, що $V_{or} = -V_{br}$. Це свідчить про те, що використовуваний гідродинамічний метод обліку впливу стінки на індуковані вихорами швидкості забезпечує умова «непротікання» рідини через стінку ВТ.

$$\begin{aligned} V_{e\varphi} &= V_e \cos \alpha_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi\rho_1} \cos \alpha_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \cdot \frac{R - \bar{e} R \cos(\varphi - \beta)}{R^2 + (\bar{e} R)^2 - 2R^2 \bar{e} \cos(\varphi - \beta)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi R z_e} \cdot \frac{1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} V_{o\varphi} &= V_o \cos \alpha_2 = \frac{\Gamma_2}{2\pi\rho_2} \cos \alpha_2 = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\frac{R}{\bar{e}} \cos(\varphi - \beta) - R}{R^2 + (\frac{R}{\bar{e}})^2 - 2\frac{R^2}{\bar{e}} \cos(\varphi - \beta)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi R z_e} \frac{1 - \frac{1}{\bar{e}} \cos(\varphi - \beta)}{1 + \frac{1}{\bar{e}^2} - \frac{2}{\bar{e}} \cos(\varphi - \beta)} = \frac{\Gamma \bar{e}}{2\pi R z_e} \frac{\bar{e} - \cos(\varphi - \beta)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для розрахунку ПТ на стінці ВТ необхідно визначити сумарну окружну компоненту:

$$V_{\varphi} = \sum_{k=1}^{k=z_{\varepsilon}} V_{\varepsilon\varphi k} + \sum_{k=1}^{k=z'_{\varepsilon}} V_{o\varphi k}, \quad (2.38)$$

тут z_{ε} – кількість фізичних вихорей;

k – порядковий номер;

z'_{ε} – кількість ВД, що моделюють стінку ВТ, причому $z'_{\varepsilon} = z_{\varepsilon}$.

Підставляючи в (2.38) формули $V_{\varepsilon\varphi k}$ з (2.36) і $V_{o\varphi k}$ з (2.37), получимо

$$V_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi R z_{\varepsilon}} \left[\sum_{k=1}^{k=z_{\varepsilon}} \frac{1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)} + \sum_{k=1}^{k=z'_{\varepsilon}} \frac{\bar{e}(\bar{e} - \cos(\varphi - \beta))}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta)} \right] \quad (2.38^*)$$

Для визначення амплітуди ПТ необхідно знайти $V^2_{\varphi \max}$ і $V^2_{\varphi \min}$. Вони знаходяться з розрахунку для ряду точок на стінці ВТ (зазвичай 12 точок через $\Delta\varphi = 30^\circ$) і побудови відповідного графіка.

Потім обчислюємо $\frac{2A}{H}\%$, використовуючи інтеграли Бернуллі або Коші-Лагранжа в залежності від числа Струхаля – Sh:

$$\frac{2A}{H}\% = \frac{V^2_{\varphi \max} - V^2_{\varphi \min}}{2gH} 100\%, \quad (2.39)$$

$$\frac{2A}{H}\% = \left[\frac{V^2_{\varphi \max} - V^2_{\varphi \min}}{2} + (V_{\varphi \max} - V_{\varphi \min}) R |\omega_{\varepsilon}| \right] \frac{100\%}{gH}. \quad (2.40)$$

ММ розрахунку частоти обертання вихорів приведена на рис.2.4. Визначимо швидкість, що індукована системою фізичних і моделюючих вихорів, в точці розташування одного з основних (фізичних) вихорів

$$V'_{\varphi} = \sum_{k=0}^{k=z_{\varepsilon}-1} V'_{\varepsilon\varphi k} + \sum_{k=1}^{k=z'_{\varepsilon}} V'_{o\varphi k}, \quad (2.41)$$

де z_ϵ – кількість основних (фізичних) вихорів,

z'_ϵ – кількість вихорів, що моделюють стінку ВТ,

$0 < k < z_\epsilon, V_{\epsilon\varphi 1} = 0, k = 0, 1, \dots, z_\epsilon, V_{\epsilon\varphi k}, V_{o\varphi k}$ – окружні складові швидкості відповідно від фізичних (основних) і дзеркально відображених вихорів, V'_φ – окружна складова сумарної швидкості.

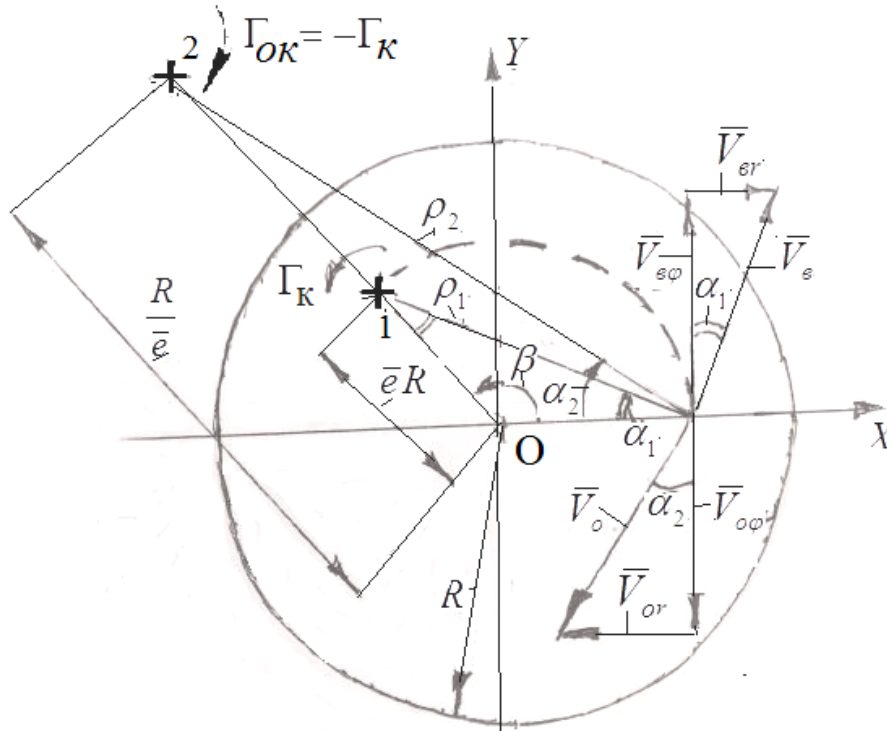


Рисунок 2.4 – До визначення частоти для випадку декількох ВД за РК у ВТ

З (2.41) випливає, що основний фізичний вихор в т. 1 в ній швидкості не індукує.

З рис. 2.4 випливає, що

$$V_{\epsilon\varphi} = \frac{\Gamma_1}{2\pi\bar{e}R} \cos \alpha = \frac{\Gamma}{z_\epsilon 2\pi\bar{e}R} \cos \alpha_1. \quad (2.42)$$

Підставляючи (1.42) $\rho_1 = \bar{e}R\sqrt{2(1-\cos\beta)}$, на підставі теореми косинусів,

і $\cos \alpha_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2})$, отримаємо

$$V_{\epsilon\varphi} = \frac{\Gamma \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2})}{z_\epsilon 2\pi\bar{e}R\sqrt{2(1-\cos\beta)}}. \quad (2.43)$$

$$V_{o\phi k} = \frac{\Gamma_2}{2\pi\rho_2} \cos\alpha_2 = -\frac{\Gamma_1}{2\pi\rho_2} \cos\alpha_2 = -\frac{\Gamma}{z_\epsilon 2\pi\rho_2} \cos\alpha_2, \quad (2.44)$$

де на підставі теореми косинусів

$$\rho_2 = R \sqrt{\frac{1+\bar{e}^4}{\bar{e}^2} - 2 \cos \beta}, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_2 &= \frac{(\rho_2)^2 + (\bar{e}R)^2 - \left(\frac{R}{\bar{e}}\right)^2}{2\rho_2 \bar{e}R} = \frac{R^2 \left(\frac{1+\bar{e}^4}{\bar{e}^2} - 2 \cos \beta + \frac{\bar{e}^4 - 1}{\bar{e}^2}\right)}{2R^2 \bar{e} \left(\frac{1+\bar{e}^4}{\bar{e}^2} - 2 \cos \beta\right)^{1/2}} = \\ &= \frac{\bar{e}^2 - \cos \beta}{(1 + \bar{e}^4 - 2\bar{e}^2 \cos \beta)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Підставляючи 2.45, 2.46 в 2.44, отримаємо

$$\begin{aligned} V_{o\phi k} &= -\frac{\Gamma}{z_\epsilon 2\pi} \cdot \frac{\bar{e}}{R(1 + \bar{e}^4 - 2\bar{e}^2 \cos \beta)^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{e}^2 - \cos \beta}{(1 + \bar{e}^4 - 2\bar{e}^2 \cos \beta)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= -\frac{\Gamma \bar{e}}{2z_\epsilon \pi R} \frac{\bar{e}^2 - \cos \beta}{1 + \bar{e}^4 - 2\bar{e}^2 \cos \beta}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

На підставі залежностей 2.41, 2.43, 2.47 отримаємо залежність для частоти обертання вихрової системи

$$\begin{aligned} f_\epsilon &= \frac{\omega_\epsilon}{2\pi} = \frac{V_\phi}{2\pi(\bar{e}R)} = \frac{\sum_{k=0}^{k=z_\epsilon-1} V_{\epsilon\phi k} + \sum_{k=1}^{k=z_\epsilon} V_{o\phi k}}{2\pi(\bar{e}R)} = \\ &= \frac{\Gamma}{z_\epsilon (2\pi R)^2 \bar{e}} \left[\sum_{k=0}^{k=z_\epsilon-1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{\bar{e} \sqrt{2(1 - \cos \beta)}} - \sum_{k=1}^{k=z'_\epsilon} \frac{\bar{e}(\bar{e}^2 - \cos \beta)}{1 + \bar{e}^4 - 2\bar{e}^2 \cos \beta} \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\text{В такому випадку частота ПТ від обертання ВД: } f_{\text{жс}} = z_{\text{жс}} f_\epsilon. \quad (2.49)$$

Контрольні питання

1. Навести креслення розрахункової схеми для випадку одного ВД.
2. Написати формулу для визначення швидкості на стінці ВТ для одновихрової схеми.
3. Чому дорівнює кутова частота обертання фізичного вихору для одновихрової схеми?
4. Чому дорівнює частота обертання вихоря для одновихрової схеми?
5. Який вигляд має інтеграл Коші-Лагранжа, для розрахунку $2A/H, \%$ для одновихрової схеми?
6. Навести креслення розрахункової схеми для випадку двох ВД.
7. Написати формулу для визначення швидкості на стінці ВТ для двовихрової схеми.
8. Чому дорівнює частота обертання вихоря для двовихрової схеми?

Тема 2.2. СТІНКА ВІДСМОКТЮЧОЇ ТРУБИ МОДЕЛЮЄТЬСЯ ВИХРОВИМ ШАРОМ [7,9].

2.2.1. Швидкості, що індуковані основними (фізичними) вихорами на стінці ВТ.

Швидкості, індуковані декількома фізичними ВД (рис.2.4):

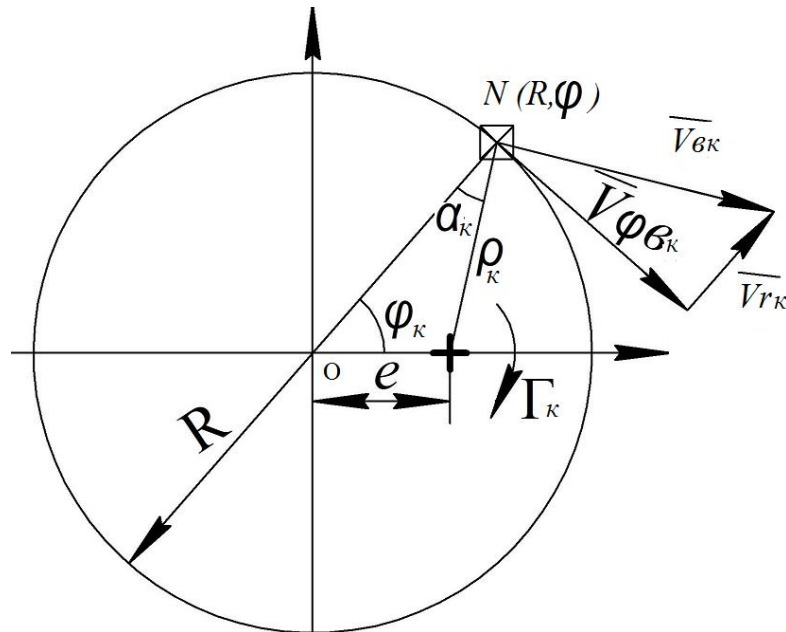


Рисунок 2.4 – Розрахункова схема швидкостей індукованих одним фізичним ВД

$$V_{vk} = \frac{\Gamma_k}{2\pi\rho_k} = \frac{\Gamma}{z_\phi 2\pi\rho_k}, \quad (2.50)$$

де z_ϕ – число фізичних ВД,

k – порядковий номер фізичного ВД,

Γ_k – інтенсивність (циркуляція) ВД, де $\Gamma_k = \frac{\Gamma}{z_\phi}$ – вихорі рівної інтенсивності;

Γ – циркуляція за РК.

Проекції швидкості V_{vk} в т N на радіальний і окружний напрямки

$$V_{vrk} = \frac{\Gamma \sin \alpha_k}{z_\phi 2\pi\rho_k}, \quad (2.51)$$

$$V_{\phi k} = \frac{\Gamma \cos \alpha_k}{z_\phi 2\pi \rho_k}. \quad (2.52)$$

Виконуючи перетворення, аналогічні наведеним в п.2.1.3, отримаємо:

$$\begin{aligned} V_{erk} &= \frac{\Gamma_k \sin \alpha_k}{2\pi \rho_k} = \frac{\Gamma h}{z_\phi 2\pi \rho_k^2} = \frac{\Gamma}{2\pi z_\phi} \cdot \frac{R \bar{e} \sin(\varphi - \beta_k)}{R^2 + (\bar{e} R)^2 + 2(\bar{e} R) R \cos(\varphi - \beta_k)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi R z_\phi} \cdot \frac{\bar{e} \sin(\varphi - \beta_k)}{1 + \bar{e}^2 + 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k)}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} V_{erk} &= \frac{\Gamma (1 - \cos^2(\varphi - \beta_k))^{1/2}}{z_\phi 2\pi \rho_k} = \frac{\Gamma \left[1 - \frac{(1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta_k))^2}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k)} \right]^{1/2}}{z_\phi 2\pi R (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k))^{1/2}} = \\ &= \frac{\Gamma (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k) - 1 + 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k) - \bar{e}^2 \cos^2(\varphi - \beta_k))^{1/2}}{z_\phi 2\pi R (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k))} = \\ &= \frac{\Gamma \bar{e} \sin(\varphi - \beta_k)}{z_\phi 2\pi R (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k))}, \end{aligned} \quad (2.53^*)$$

$$\begin{aligned} V_{\phi k} &= V_{ek} \cos \alpha_k = \frac{\Gamma_k}{2\pi \rho} \cos \alpha_k = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \cdot \frac{R - e \cos(\varphi - \beta_k)}{R^2 + e^2 - 2 R e \cos(\varphi - \beta_k)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi R z_\phi} \cdot \frac{1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta_k)}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_k)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2.2. Швидкості, індуковані вихровим шаром на стінці ВТ [7].

Елементарна швидкість, що індукована елементарним відрізком вихрового шару, що моделює стінку ВТ (рис. 2.5),

$$dV_c = \frac{d\gamma}{2\pi l}, \quad (2.55)$$

де l – відстань від центру елемента вихрового шару $M(R, \varphi)$ до довільної точки $N(R, \varphi_0)$ на стінці ВТ, $d\gamma = \gamma(s)ds$ – інтенсивність (циркуляція) елементарного вихору. В (2.55) l знаходимо за наступним виразом

$$l = [2R^2 - 2R^2 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2} = R \{ 2[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] \}^{1/2} = 2R \sin(\varphi - \varphi_0) / 2. \quad (2.56)$$

Проекції елементарної швидкості dV_c на радіальне і окружний напрямок з урахуванням (2.56)

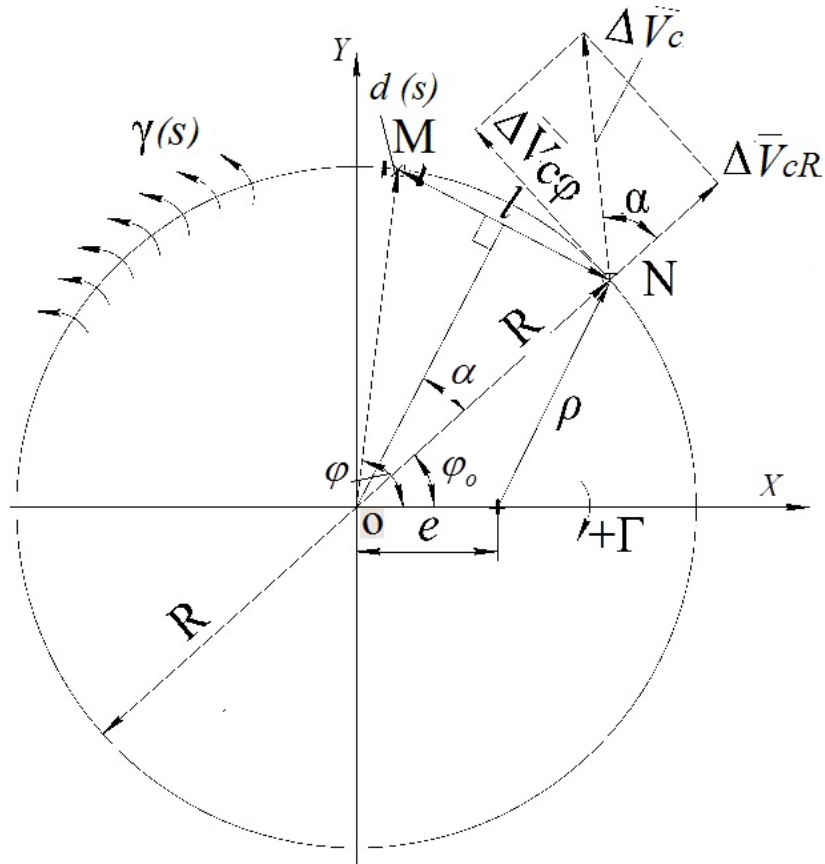


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема швидкостей індукованих вихрової поверхнею у випадку одного ВД

$$dV_{cR} = dV_c \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \frac{\gamma(s)ds}{4\pi R} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \quad (2.57)$$

$$dV_{c\varphi} = dV_c \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \frac{\gamma(s)ds}{4\pi R}. \quad (2.58)$$

Швидкості V_{cR} і $V_{c\varphi}$ визначаються шляхом інтегрування (2.57) і (2.58) вздовж замкнутого контуру стінки вВТ:

$$V_{cR} = \frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \gamma(s) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} R d\varphi, \quad (2.59)$$

$$V_{c\varphi} = \frac{1}{4\pi R} \oint_s \gamma(s) ds = -\frac{\Gamma}{4\pi R}, \quad (2.60)$$

де Γ – циркуляція за РК, циркуляція за РК, R – радіус стінки ВТ.

В (2.60) мається на увазі, що $\oint_s \gamma(s) ds = -\Gamma$.

2.2.3. Сумарні швидкості, що індуковані ВД і вихровою поверхнею на стінці ВТ.

За аналогією з визначенням сумарної швидкості в будь-якій точці обтічної поверхні нескінченно тонкого профілю може бути визначена сумарна швидкість V_φ , що індукована довільним числом ВД за РК і вихровим шаром, що моделює стінку ВТ [7,9]:

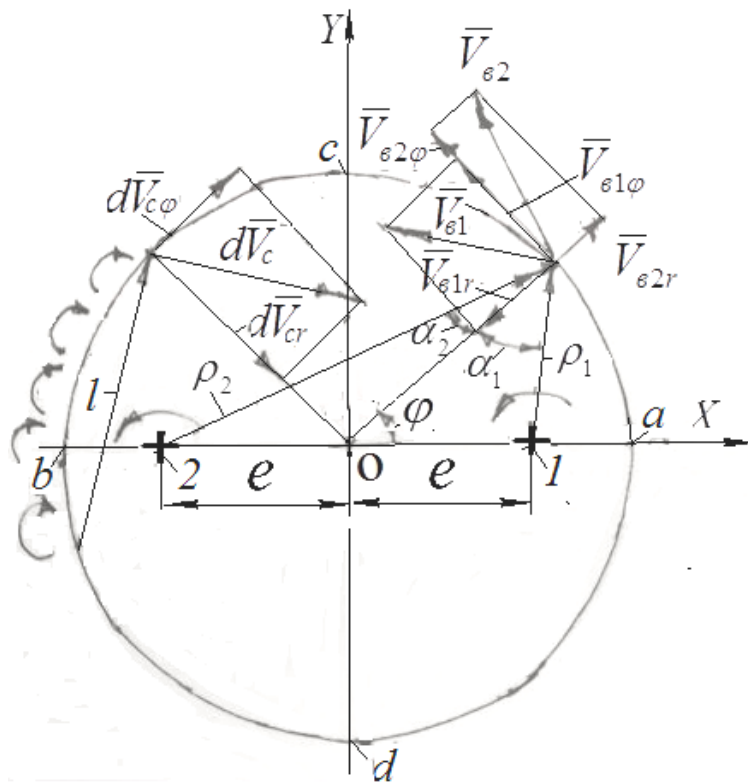


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема швидкостей індукованих вихровою поверхнею у випадку багатьох ВД (випадок $\kappa=2$)

$$V_\varphi = \sum_{k=1}^{k=Z_\theta} V_{\varphi k} + \oint_s \frac{1}{2\pi l} \gamma(s) \cos(\bar{R}, \bar{l}) ds + \frac{1}{2} \gamma(s_o). \quad (2.61)$$

Так як $\gamma(s_o) = V_\varphi(s_o)$ [2], то

$$V_\varphi = 2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=Z_\theta} V_{\varphi \kappa} + 2 \oint_s \frac{1}{2\pi l} \gamma(s) \cos(\bar{R}, \bar{l}) ds = 2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=Z_\theta} V_{\varphi \kappa} + 2V_{\varphi}. \quad (2.62)$$

Підставляючи в (1.62) вирази $V_{\varphi \kappa}$ і $V_{c\varphi}$ відповідно з (1.36) і (1.60), отри-

маємо

$$V_{\varphi} = 2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=Z_{\theta}} \frac{\Gamma(1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta_{\kappa}))}{z_{\theta} 2\pi R (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_{\kappa}))} - \frac{\Gamma}{2\pi R} =$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} \left(\frac{2}{z_{\theta}} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=Z_{\theta}} \frac{1 - \bar{e} \cos(\varphi - \beta_{\kappa})}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos(\varphi - \beta_{\kappa})} - 1 \right) \quad (2.63)$$

З (2.63), як окремий випадок, можуть бути отримані залежності для $z_{\theta}=1$ при $\beta = \varphi_i = 0$.

$$V_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \left[2 \frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e}} - 1 \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}, \quad (2.64)$$

при $\beta = 0; \varphi_i = \pi$

$$V_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \left[2 \frac{1 + \bar{e}}{1 + \bar{e}^2 + 2\bar{e}} - 1 \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1 - \bar{e}}{1 + \bar{e}}. \quad (2.65)$$

З (2.64), (2.65) видно, що формули для визначення екстремальних значень сумарних індукованих швидкостей $V_{\varphi \max}$ из (2.64) і $V_{\varphi \min}$ з (2.64) і з (2.65) для одновихрової схеми точно такі ж, як і при іншому способі моделювання стінки ВТ (2.6) і (2.8).

Для визначення амплітуди ПТ необхідно знайти $V_{\varphi \max}^2$ і $V_{\varphi \min}^2$.. Вони знаходяться з розрахунку V_{φ} для ряду точок на стінці ВТ (зазвичай 12 точок через $\Delta\varphi = 30$ та побудови відповідного графіка). Потім обчислюємо $\frac{2A}{H}\%$, використовуючи інтеграли Бернуллі або Коші-Лагранжа в залежності від числа Sh за формулами (2.39) або (2.40).

1.2.4. Частота обертання ВД для одновихрової схеми.

Швидкості, що індуковані вихровим шаром змінної інтенсивності, в т. 1 розташування фізичного вихоря:

$$V_{\theta 1} = \oint_s \frac{\gamma ds}{2\pi r}. \quad (2.66)$$

Окружна складова швидкості

$$V_{\phi 1\varphi} = \oint_s \frac{\gamma(s)ds}{2\pi\rho} \sin \psi . \quad (2.67)$$

Так як, $\sin \psi = \frac{R \cos \varphi - e}{\rho}$, то

$$V_{\phi 1\varphi} = \oint_s \frac{\gamma(s)(R \cos \varphi - e)ds}{2\pi\rho^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(s)(R \cos \varphi - e)Rd\varphi}{2\pi\rho^2} . \quad (2.68)$$

Для вирішення (2.68) необхідно визначити $\gamma(s)$. Як було видно вище $\gamma(s) = V_\varphi$.

Згідно (1.63) для одновіхревої схеми ($z_k=1$, $\beta_k = 0$) можна записати:

$$V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R} \left[2 \frac{1 - \bar{e} \cos \varphi}{1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos \varphi} - 1 \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \left[\frac{2 - 2\bar{e} \cos \varphi - 1 - \bar{e}^2 + 2\bar{e} \cos \varphi}{\bar{\rho}^2} \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1 - \bar{e}^2}{\bar{\rho}^2} , \quad (2.69)$$

$$\text{де } \bar{\rho} = \frac{\rho}{R} .$$

Підставляючи $\gamma(s_o) = V_\varphi$ из (2.69) в (2.68), отримаємо

$$\begin{aligned} V_{\phi 1\varphi} &= \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma R^2 (1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 \rho^4} (R \cos \varphi - e) d\varphi = \frac{\Gamma R^2 (1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cos \varphi - e) d\varphi}{\rho^4} = \\ &= \frac{\Gamma R^3 (1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\rho^4} - \frac{\Gamma R^3 (1 - \bar{e}^2) \bar{e}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho^4} . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Підставляючи ρ^4 в наступному вигляді:

$$\rho^4 = (R^2 + e^2 - 2eR \cos \varphi)^2 = R^4 (1 + \bar{e}^2 - 2\bar{e} \cos \varphi)^2 = R^4 (a - b \cos \varphi)^2 , \quad (2.71)$$

де $a = 1 + \bar{e}^2$, $b = 2\bar{e}$.

Підставляючи ρ^4 з (2.71) в (2.70) отримаємо:

$$V_{\phi 1\varphi} = \frac{\Gamma (1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} - \frac{\Gamma (1 - \bar{e}^2) \bar{e}}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} . \quad (2.72)$$

Позначив $\frac{\Gamma(1-\bar{e}^2)}{4\pi^2 R} = M$ і $\frac{\Gamma(1-\bar{e}^2)\bar{e}}{4\pi^2 R} = N$, можна записати (2.72) в вигляді:

$$V_{\epsilon 1\varphi} = M \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} - N \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2}. \quad (2.73)$$

Визначення з (2.73) інтегралів:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2}, \quad (2.74)$$

враховуючи, що функція $\cos \varphi$ – парна.

Подальше перетворення (2.74) виконуємо з використанням універсальної підстановки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$. Так як $d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos \varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, на основі формули $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}}$, $c = \sqrt{a-b}$, $d = \sqrt{a+b}$, враховуючи, що при $\varphi = 0$, $z = 0$, а при $\varphi = \pi$ $z = \infty$ і також вважаючи $a-b=c^2$ и $a+b=d^2$, маємо:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \frac{2dz}{\left[a - b \frac{1-z^2}{1+z^2} \right]^2} = 4 \int_0^{\infty} \frac{(1-z^2)dz}{(c^2 - d^2 z^2)^2} = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \frac{dz}{c^2 + (dz)^2} - 4 \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{c^2 + (dz)^2}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Для подальшого перетворення отриманих інтегралів використовуємо рекурентні формули (2.76)[1]

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} &= \frac{2ax + b}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} + \frac{2a}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \\ \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} &= \frac{(2ac - b^2)x - bc}{a(-4ac + b^2)(ax^2 + bx + c)} - \frac{2c}{-4ac + b^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 \int_0^{\infty} \frac{dz}{(c^2 + d^2 z^2)^2} &= \frac{8d^2 z}{4d^2 c^2 (c^2 + d^2 z^2)} \Big|_0^{\infty} + \frac{8d^2}{4c^2 d^2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(c^2 + d^2 z^2)} = \\
&= \frac{2z}{c^2 (c^2 + d^2 z^2)} \Big|_0^{\infty} + \frac{4}{2c^3 d} \operatorname{arctg} \frac{2d^2 z}{2dc} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{c^3 d} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{c^3 d},
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
4 \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(c^2 - d^2 z^2)^2} &= 4 \frac{2c^2 d^2 z}{d^2 (-4c^2 d^2) (c^2 + d^2 z^2)} \Big|_0^{\infty} - 4 \frac{2c^2}{(-4)d^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{c^2 + d^2 z^2} \\
&= \frac{2z}{(-d^2)(c^2 + d^2 z^2)} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{d^2} \frac{2}{2dc} \operatorname{arctg} \frac{2d^2 z}{2dc} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{d^3 c} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{cd^3}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Таким чином

$$2 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = \frac{\pi}{c d^3} - \frac{\pi}{c^3 d} = \frac{\pi(c^2 - d^2)}{c^3 d^3}. \tag{2.78}$$

З аналогічними підстановками і таким же чином обчислюється другий інтеграл в (2.73):

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2}, \tag{2.79}$$

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{(2 + 2z^2) dz}{(c^2 + d^2 z^2)^2} = 4 \int_0^{\infty} \frac{dz}{(c^2 + d^2 z^2)^2} + 4 \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(c^2 + d^2 z^2)^2} \tag{2.80}$$

в (2.80) в правій частині ті ж інтеграли, що і в (2.76) і (2.77), тому не повторюючи їх перетворення, можна записати

$$2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = \frac{\pi}{cd^3} + \frac{\pi}{c^3 d} = \frac{\pi}{c^3 d^3} (c^2 + d^2). \tag{2.81}$$

Підставляючи (2.78) і (2.81) в (2.73) і враховуючи, що $c^2 = a - b = (1 - \bar{e})^2$, $d^2 = a + b = (1 + \bar{e})^2$, отримаємо

$$V_{\phi 1\varphi} = M \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} - N \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = M \frac{\pi(d^2 - c^2)}{c^3 d^3} - N \frac{\pi(c^2 + d^2)}{c^3 d^3}. \quad (2.82)$$

Підставляючи вирази для М і N в рівняння (2.82), воно набуде вигляду:

$$\begin{aligned} V_{\phi 1\varphi} &= \frac{\Gamma(1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 R} \cdot \frac{4\pi\bar{e}}{(1 - \bar{e}^2)^3} - \frac{\Gamma(1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 R} \frac{2\pi(1 + \bar{e}^2)}{(1 - \bar{e}^2)^3} = \\ &= \frac{2\Gamma\bar{e} - \Gamma\bar{e}(1 + \bar{e}^2)}{2\pi R(1 - \bar{e}^2)^2} = \frac{\Gamma\bar{e}}{2\pi R(1 - \bar{e}^2)}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Радіальна складова швидкості V_1 :

$$V_{\phi 1r} = \oint_s \frac{\gamma(s) ds}{2\pi \rho} \cos \psi. \quad (2.84)$$

Зважаючи на те, що $\cos \psi = \frac{R \sin \varphi}{\rho}$, то

$$V_{\phi 1r} = \oint_s \frac{\gamma(s) R \sin \varphi ds}{2\pi \rho^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\varphi) R^2 \sin \varphi d\varphi}{2\pi \rho^2}. \quad (2.85)$$

Так як $\gamma(\varphi_o) = V\varphi$, то з урахуванням (2.69)

$$V_{\phi 1r} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma R(1 - \bar{e}^2) R^2 \sin \varphi d\varphi}{2\pi R^2 \bar{\rho}^2 2\pi \rho^2} = \frac{\Gamma R^3 (1 - \bar{e}^2)}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\rho^4}, \quad (2.86)$$

де $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$.

Підставляючи r^4 з (2.71) в (2.86) отримаємо:

$$V_{\phi 1r} = \frac{\Gamma(1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^2} = - \frac{\Gamma(1 - \bar{e}^2)}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{d(\cos \varphi)}{(a - b \cos \varphi)^2}. \quad (2.87)$$

Зробимо заміни змінних:

$\cos \varphi = z$, при $\varphi = 0$ $z = 1$, а при $\varphi = 2\pi$ також $z = 1$;

$a - bz = t$; $-dz = \frac{dt}{b}$; при $z = 1$ $t = a - b$.

В такому випадку інтеграл в (2.87) можна записати:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d(\cos \varphi)}{(a - b \cos \varphi)^2} = \int_{z=1}^{z=1} \frac{dz}{(a - bz)^2} = \frac{-1}{b} \int_{t=a-b}^{t=a-b} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_{a-b}^{a-b} = \frac{1}{bt} \Big|_{a-b}^{a-b} = 0 \quad (2.88)$$

Отже з (2.87) $V_{\epsilon 1r} = 0$. Тому $V_{\epsilon 1} = V_{\epsilon 1\varphi}$ (2.82) і ВД обертається навколо центра кола (рис.2.8), тобто навколо осі турбіни.

Таким чином, з урахуванням (1.83) виходить формула для кутової частоти обертання одного ВД:

$$\omega_{\epsilon} = \frac{V_{\epsilon 1\varphi}}{\bar{e}R} = \frac{\Gamma}{2\pi R^2 (1 - \bar{e}^2)} \cdot \quad (2.89)$$

Частота обертання вихору, відповідна частоті ПТ при наявності однієї фізичного вихору дорівнює:

$$f_{\epsilon} = \frac{\omega_{\epsilon}}{2\pi} = \frac{\Gamma}{(2\pi R)^2 (1 - \bar{e}^2)} \cdot \quad (2.90)$$

З порівняння (2.89) з (2.12) випливає, що формули частоти обертання, отримані на підставі різних математичних моделей, однакові.

2.2.5. Частота обертання ВД для багатовихрової схеми.

Знайдемо сумарну швидкість $V_{\epsilon 1\varphi}$ на першому ($\kappa=1$) основному (фізично-му) вихорі:

$$V'_{\epsilon 1\varphi} = \sum_{k=2}^{k=Z_{\epsilon}} V_{\epsilon 1\varphi k} + V_{\epsilon 1\varphi} \cdot \quad (2.91)$$

Приймаємо $V_{1\phi k}$ по формулі (2.43), а $V_{1\phi}$ за формулою (2.83), отримаємо:

$$\begin{aligned} V'_{\phi 1\phi} &= \left[\frac{\Gamma}{z_{\phi} 2\pi R\bar{e}} \sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta_{\kappa}}{2})}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{\Gamma\bar{e}}{2\pi R(1-\bar{e}^2)} = \\ &= \frac{\Gamma}{z_{\phi} 2\pi R\bar{e}} \left[\sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\sin\frac{\beta_{\kappa}}{2}}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{\Gamma\bar{e}}{2\pi R(1-\bar{e}^2)}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

В такому випадку кутова частота обертання ВД

$$\omega_{\phi} = V'_{\phi 1\phi} / \bar{e}R = \frac{\Gamma}{z_{\phi} 2\pi (R\bar{e})^2} \left[\sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\sin\frac{\beta_{\kappa}}{2}}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi R^2(1-\bar{e}^2)}. \quad (2.93)$$

Частота обертання вихоря дорівнює

$$\begin{aligned} f_{\phi} &= \frac{\omega_{\phi}}{2\pi} = \frac{\Gamma}{z_{\phi} (2\pi R\bar{e})^2} \left[\sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\sin\frac{\beta_{\kappa}}{2}}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{\Gamma}{(2\pi R)^2(1-\bar{e}^2)} = \\ &= \frac{\Gamma}{(2\pi R)^2} \left\{ \left[\frac{1}{z_{\phi} \bar{e}^2} \sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\sin\frac{\beta_{\kappa}}{2}}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{1}{1-\bar{e}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Частота ПТ при наявності декількох ВД z_{ϕ} визначається в такому випадку за формулою:

$$f_{жс} = f_{\phi} z_{\phi} = \frac{\Gamma z_{\phi}}{(2\pi R)^2} \left\{ \left[\frac{1}{z_{\phi} \bar{e}^2} \sum_{\kappa=0}^{z_{\phi}-1} \frac{\sin\frac{\beta_{\kappa}}{2}}{\sqrt{2(1-\cos\beta_{\kappa})}} \right] + \frac{1}{1-\bar{e}^2} \right\}. \quad (2.95)$$

Контрольні питання

1. Надати креслення розрахункової схеми для випадку одного ВД.
2. Написати формулу для визначення швидкості на стінці ВТ для випадку одного (фізичного) вихору.
3. Надати формулу проекції швидкості вихрового шару на радіальний напрямок.
4. Надати формулу проекції швидкості вихрового шару на окружний напрямок.
5. Написати формулу для кутової частоти обертання одного ВД.
6. Надати формулу частоти ПТ при наявності одного фізичного вихору.
7. Написати формулу частоти ПТ при наявності багатьох фізичних вихорей.
8. Написати формулу сумарну циркуляцію на стінці ВТ, що виражена через напруженість вихрового шару.

Задача

Побудувати амплітудну і частотну характеристики ПТ від ВД за РК у ВТ гідротурбіни РО115 у полі універсальної характеристики по спрощеній плоскій моделі з використанням формул Муракамі М. [2] і Бондаренка [14].

Початкові умови: Гідротурбіна – РО 115; Параметри оптимального режиму –

$$Q'_{onm} = 930 \text{ л/с}; n'_{1onm} = 73 \text{ хв}^{-1}, n_c = 125 \text{ хв}^{-1} = 2,0833 \text{ с}^{-1}, \frac{r_2}{R_2} = 0,353, R_2 = 2 \text{ м.}$$

Для використання формул Муракамі М. для циркуляції спочатку необхідно задатися діапазоном витрат і обертів. Для цього орієнтовно задаємося витратою через кожні 50 л/с, починаючи з 630 л/с до 1130 л/с, орієнтуючись на оптимальну – $Q''_{1onm} = 930 \text{ л/с}$.

Орієнтуючись на оптимальні оберти, задаємося мінімальними і максимальними приведеними обертами на 7-10 обертів вище і нижче розрахункових:

$$n'_{1min} = 66 \text{ хв}^{-1} \text{ і } n'_{1max} = 80 \text{ хв}^{-1}.$$

1. Розраховуємо приведену витрату на кожному режимі:

$$\bar{Q}_i = \frac{Q'_{Ii}}{Q'_{onm}};$$

2. Розраховуємо приведені оберти:

$$\bar{n}_i = \frac{n'_{Ii}}{n'_{onm}};$$

3. Розраховуємо відносний ексцентриситет:

$$\bar{e} = \frac{e}{R_2}$$

4. Розраховуємо циркуляцію на виході з РК:

$$\Gamma_2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot R_2^2 \cdot n_c \cdot \left(\frac{1 + \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\bar{Q}_i}{\bar{n}_i} \right)$$

5. Знаходимо частоту ПТ ВД у ВТ:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\Gamma_2}{4 \cdot \pi^2 \cdot R_2^2 \cdot (1 - \bar{e}^2)};$$

6. Знаходимо $V_{u \max}$ і $V_{u \min}$:

$$V_{u \min} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 + \bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2};$$

$$V_{u \max} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \frac{1 - \bar{e}^2}{1 + \bar{e}^2}.$$

7. Знаходимо величину розмаху подвійних амплітуд ПТ за формулою Бернуллі:

$$\frac{2A}{H} \% = \frac{V_{u \max}^2 - V_{u \min}^2}{2gH} 100\%.$$

Далі водимо всі вихідні дані в програму EXCEL і вбиваємо формули розрахунку. Отримуємо на виході всі значення розрахункових величин.

Будуємо графік залежності обертів в залежності від витрати, з нанесеними ізолініями ексцентриситета – $\bar{e}$, частоти – f і амплітуди ПТ – $2A/H$ 100%. Для цього скористаємося графічною програмою "Surfer" рис.2.7–2.9..

Файл вихідних даних розрахунку в редакторі EXCEL:

Q`lopt=	930										
n`lmax=	80										
n`lopt=	73										
n`lmin=	66										
ns=	2,08										
r2/R2=	0,35										
R2=	2										
Q`l		n`l	Qotn	notn	ē	Г2	f	Vumax	Vumin	2A/H	
630	63	87	0,67742	1,1918	0,4132	79,7594	0,60969	15,2935	2,636803	8,004604	
680	68	87	0,73118	1,1918	0,40623	71,4225	0,54223	13,4674	2,401085	6,194008	
730	73	87	0,78495	1,1918	0,39557	63,0857	0,47408	11,5971	2,175367	4,576967	
780	78	87	0,83871	1,1918	0,38092	54,7489	0,40596	9,72319	1,954173	3,199954	
830	83	87	0,89247	1,1918	0,36179	46,4121	0,33851	7,88472	1,731795	2,087049	
880	88	87	0,94624	1,1918	0,33741	38,0753	0,27237	6,11895	1,501862	1,241087	
930	93	87	1	1,1918	0,30655	29,7385	0,20806	4,46107	1,256662	0,646257	
980	98	87	1,05376	1,1918	0,26695	21,4016	0,14607	2,94501	0,985888	0,271636	
1030	103	87	1,10753	1,1918	0,21383	13,0648	0,08679	1,60604	0,673708	0,07497	
1080	108	87	1,16129	1,1918	0,13172	4,728	0,0305	0,49064	0,288808	0,005549	
1130	113	87	1,21505	1,1918	0,11771	-3,6088	-0,0232	-0,36399	-0,22681	0,002859	
630	63	80	0,67742	1,10	0,3727	70,568	0,51949	12,2947	2,567543	5,099236	
680	68	80	0,73118	1,10	0,36148	61,5017	0,44846	10,4408	2,296474	3,659019	
730	73	80	0,78495	1,10	0,34583	52,4354	0,37754	8,58879	2,029263	2,456693	
780	78	80	0,83871	1,10	0,3251	43,3691	0,30741	6,77961	1,758643	1,512133	
830	83	80	0,89247	1,10	0,29826	34,3029	0,23868	5,05269	1,476246	0,82362	
880	88	80	0,94624	1,10	0,26342	25,2366	0,1719	3,44639	1,171431	0,370548	
930	93	80	1	1,10	0,21676	16,1703	0,10756	2,00005	0,828734	1,169E-01	
980	98	80	1,05376	1,10	0,14749	7,104	0,04603	0,7613	0,420211	0,014215	
1030	103	80	1,10753	1,10	0,05109	-1,9623	-0,0125	-0,17306	-0,14105	0,000355	
1080	108	80	1,16129	1,10	0,12401	-11,029	-0,071	-1,12669	-0,68431	0,028258	
1130	113	80	1,21505	1,10	0,17123	-20,095	-0,1312	-2,26102	-1,13211	0,135112	
630	63	73	0,67742	1,00	0,32722	59,614	0,42321	9,36338	2,405935	2,888245	
680	68	73	0,73118	1,00	0,31034	49,6783	0,34847	7,51497	2,081742	1,839134	
730	73	73	0,78495	1,00	0,2876	39,7426	0,27465	5,71907	1,750686	1,045572	
780	78	73	0,83871	1,00	0,25746	29,807	0,20236	4,01885	1,401377	0,500418	
830	83	73	0,89247	1,00	0,21685	19,8713	0,13218	2,45825	1,018233	0,17658	
880	88	73	0,94624	1,00	0,15789	9,93566	0,06459	1,08768	0,575324	0,030054	
930	93	73	1	1,00	0	0	0	0	0	0	
980	98	73	1,05376	1,00	0,10711	-9,9357	-0,0637	-0,98084	-0,63799	0,019577	
1030	103	73	1,10753	1,00	0,15529	-19,871	-0,1291	-2,16382	-1,15678	0,11795	
1080	108	73	1,16129	1,00	0,19475	-29,807	-0,1964	-3,5211	-1,59948	0,347073	
1130	113	73	1,21505	1,00	0,23003	-39,743	-0,266	-5,05485	-1,98073	0,762877	
630	63	66	0,67742	0,90	0,27431	46,3363	0,31763	6,47823	2,100907	1,324603	
680	68	66	0,73118	0,90	0,24891	35,3469	0,23886	4,67951	1,692474	0,671348	
730	73	66	0,78495	0,90	0,21409	24,3574	0,16182	2,99583	1,255355	0,260981	
780	78	66	0,83871	0,90	0,16394	13,368	0,08708	1,48174	0,764505	0,056827	
830	83	66	0,89247	0,90	0,07134	2,37854	0,01515	0,21847	0,164155	0,000733	
880	88	66	0,94624	0,90	0,08984	-8,6109	-0,055	-0,82093	-0,57255	0,012209	
930	93	66	1	0,90	0,13935	-19,6	-0,1267	-2,06587	-1,17881	0,101521	
980	98	66	1,05376	0,90	0,1787	-30,59	-0,2003	-3,49534	-1,69701	0,329357	
1030	103	66	1,10753	0,90	0,21359	-41,579	-0,2762	-5,10871	-2,14517	0,758251	
1080	108	66	1,16129	0,90	0,24592	-52,569	-0,3547	-6,91535	-2,53315	1,460458	
1130	113	66	1,21505	0,90	0,2766	-63,558	-0,4363	-8,93012	-2,86751	2,522826	
630	63	59	0,67742	0,8082	0,13395	29,908	0,19305	3,11781	1,818639	0,226211	
680	68	59	0,73118	0,8082	0,1068	17,6147	0,11295	1,73783	1,13179	0,061342	
730	73	59	0,78495	0,8082	0,06082	5,32147	0,03386	0,47856	0,375101	0,003115	
780	78	59	0,83871	0,8082	0,07196	-6,9718	-0,0444	-0,64116	-0,48055	0,006355	
830	83	59	0,89247	0,8082	0,1234	-19,265	-0,124	-1,96567	-1,19688	0,085759	
880	88	59	0,94624	0,8082	0,16262	-31,558	-0,2055	-3,48852	-1,8097	0,313738	
930	93	59	1	0,8082	0,19707	-43,852	-0,2892	-5,20518	-2,34184	0,762222	
980	98	59	1,05376	0,8082	0,2289	-56,145	-0,3756	-7,12407	-2,80487	1,512651	
1030	103	59	1,10753	0,8082	0,25909	-68,438	-0,465	-9,25974	-3,20641	2,661707	
1080	108	59	1,16129	0,8082	0,28815	-80,731	-0,5581	-11,6313	-3,55204	4,326848	
1130	113	59	1,21505	0,8082	0,31639	-93,025	-0,6553	-14,2621	-3,84623	6,652803	

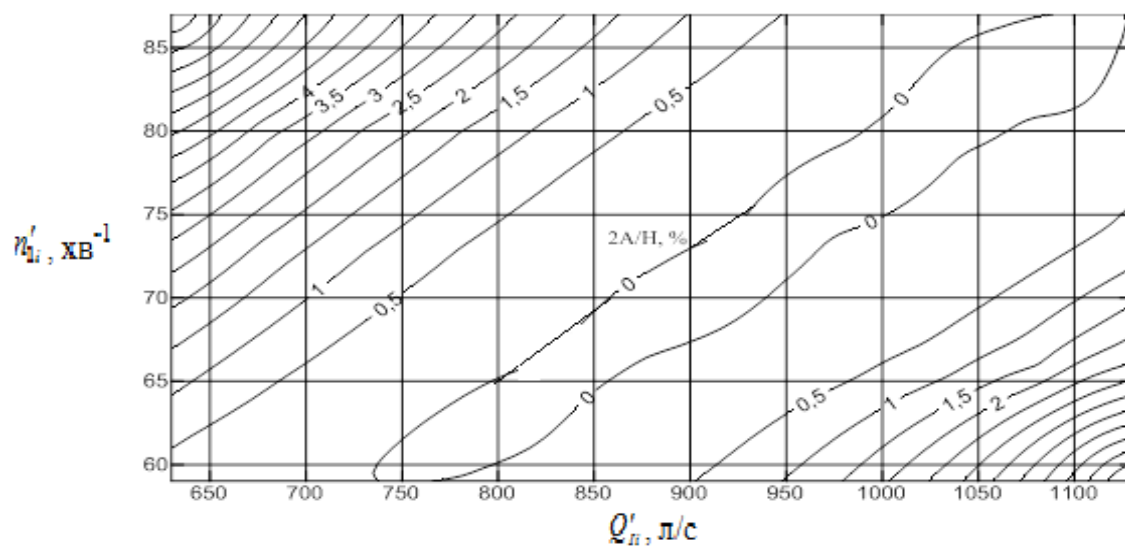


Рисунок 2.7 – Графік змінення джутових ПТ у ВТ за РК – f , Гц

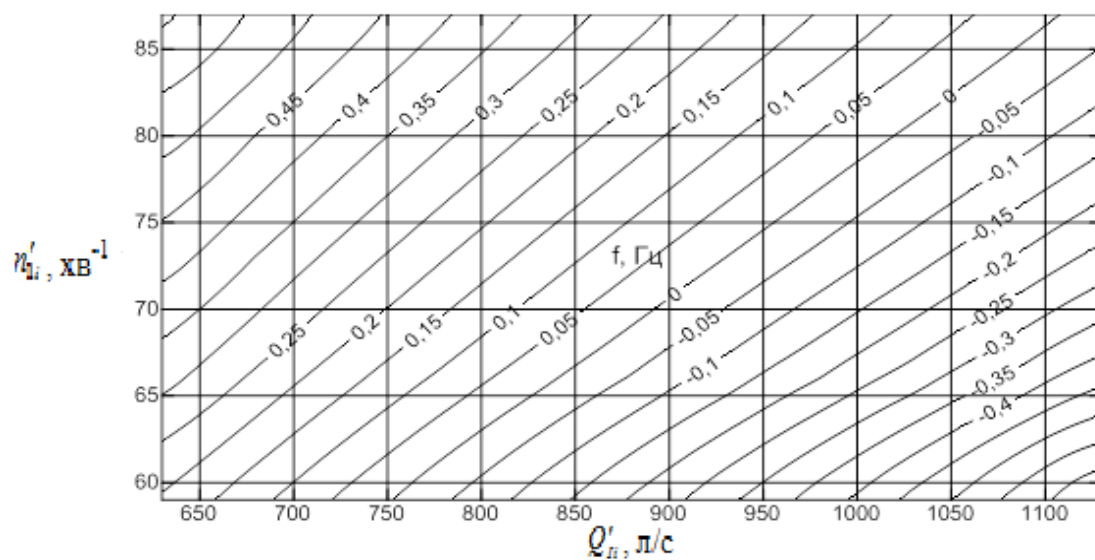


Рисунок 2.8 – Графік змінення частоти ПТ у ВТ за РК – f , Гц

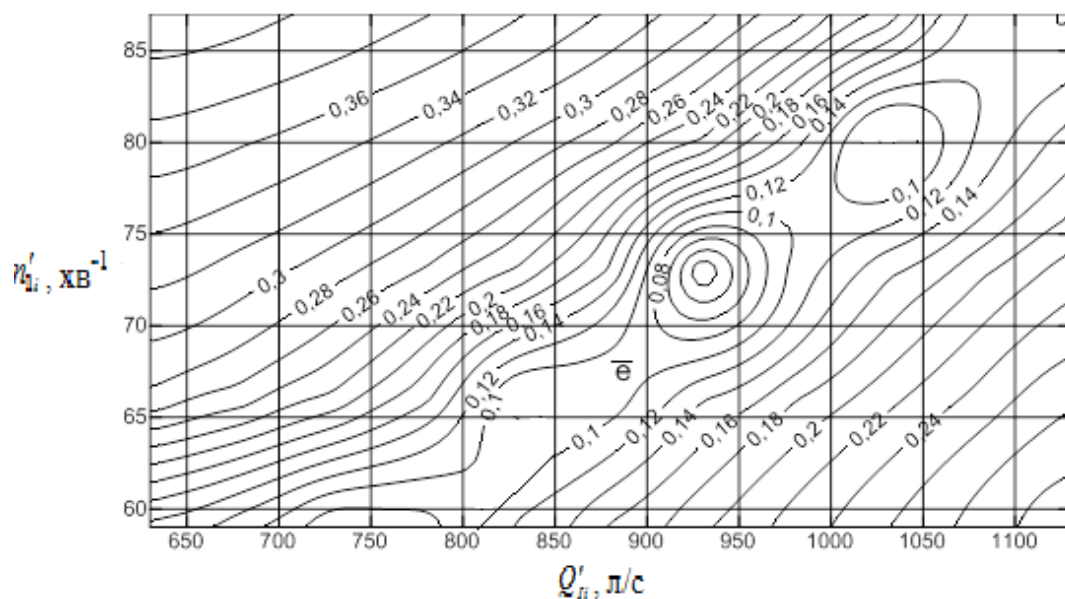


Рисунок 2.9 – Графік змінення ексцентриситету – $\bar{e}$ ВД у ВТ за РК

Розділ 3 ПРОСТОРОВА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ПУЛЬСАЦІЙ ТИСКУ ВІД ДОВІЛЬНОГО ЧИСЛА ФІЗИЧНИХ ВД, КОЛИ СТІНКА ТРУБИ МОДЕЮЄТЬСЯ ВИХРОВИМ ШАРОМ

Тема 3.1 ПРОСТОРОВА ММ МОДЕЛЬ ГРИГОР'ЄВА В.І.

В цьому розділі наведена просторова ММ розрахунку ПТ від довільного числа фізичних (основних) ВД рівної інтенсивності з рівним кроком у циліндричній ВТ [1-3].

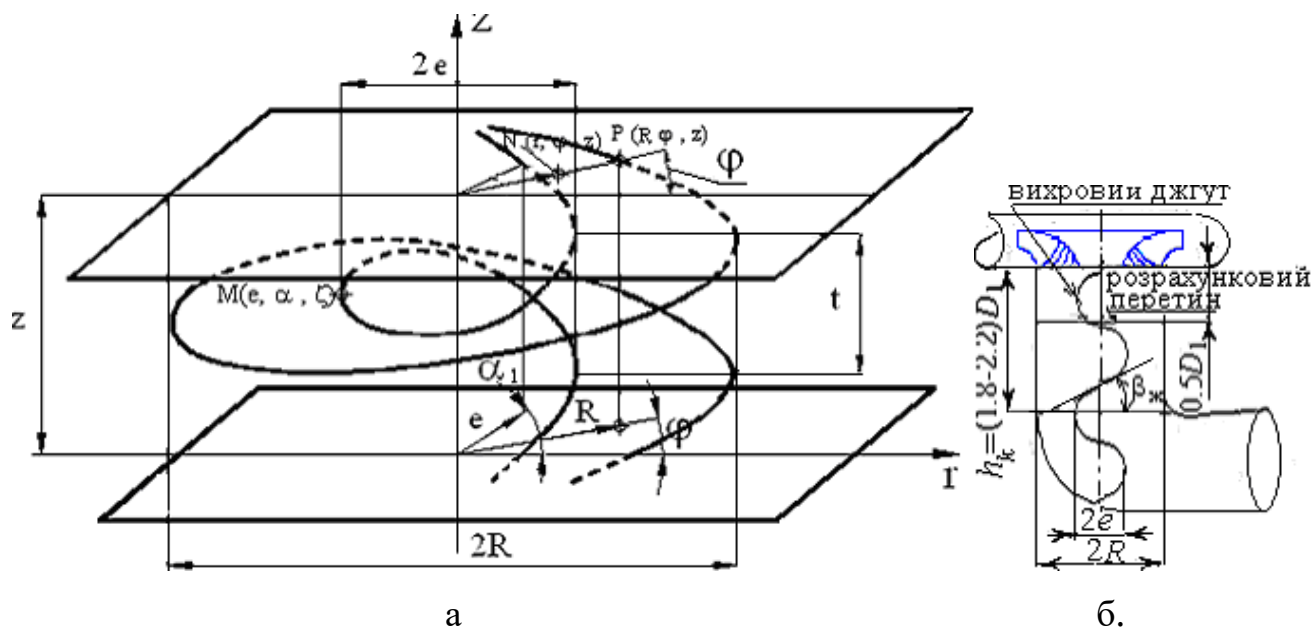


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема джгутових ПТ у ВТ по моделі Григор'єва В.І.:
а – схема основного ВД (внутрішній – випадок з одним джгутом) і вихрової лінії ви-
хрової поверхні, що моделює стінку ВТ; б – ВД у ВТ

Стінка ВТ, як і у роботах [8,9], моделюється вихровою поверхнею, яка складається з нескінченно великого числа тонких вихрових шнурів змінної інтенсивності з кроком рівним кроку фізичних ВД, які мають форму гвинтової спіралі (рис.3.1а). Задача розглядається у квазістаціонарній постановці, рідина нев'язка. Поток поза вихором при визначенні індуктованих швидкостей приймається потенціальним. Урахований також додатковий осесиметричний потік, що обумовлений проходженням рідини через РК. Задача зводиться до пошуку швидкостей у будь-якій точці ВТ.

Сумарна швидкість у ВТ записується

$$\bar{V} = \sum_{s=1}^{z_{ж}} \bar{V}_{жs} + \bar{V}_{п} + \bar{V}_q, \quad (3.1)$$

де $\bar{V}_{жs}$ – швидкості, що індуювані фізичними ВД, $\bar{V}_{п}$ – швидкість, що індуювана вихровою поверхнею, $\bar{V}_q$ – швидкість додаткового осесиметричного потоку, $z_{ж}$ – число ВД, s – порядковий номер фізичних ВД, $1 \leq s \leq z_{ж}$.

Складові швидкості, що індуювані вихровими джгутами, визначаються з формул, які наведені у роботі Кочіна М.Є. у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{\eta - y}{\rho^3} d\zeta - \frac{\zeta - z}{\rho^3} d\eta \right) \\ V_y &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{\zeta - z}{\rho^3} d\xi - \frac{\xi - x}{\rho^3} d\zeta \right) \\ V_z &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \left(\frac{\xi - x}{\rho^3} d\eta - \frac{\eta - y}{\rho^3} d\xi \right) \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

де Γ – інтенсивність вихрової лінії, L – довжина вихрової лінії, а ξ, η, ζ і x, y, z – декартові координати точки M на вихорі і довільної точки N відповідно.

Враховуючи, що форма ВД у ВТ з деяким наближенням приймається у вигляді гвинтоподібної спіралі, то можна записати:

$$\xi = e \cos \alpha, \quad \eta = e \sin \alpha, \quad \zeta = t\alpha / 2\pi = m\alpha, \quad (3.3)$$

де e, t, α – радіус (ексцентриситет), крок і кутова координата ВД; при $\alpha=0$ маємо $\zeta=0$. Координати x, y, z довільної точки N записуються:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = t\alpha_1 / 2\pi = m\alpha_1, \quad (3.4)$$

де r, φ, z – циліндричні координати точки N ; α_1 – значення кута α , при якому $\zeta=z$. Параметр m можна визначити через ексцентриситет – e і кут нахилення гвинтової лінії ВД – $\beta_{ж}$ (3.5):

$$m=t/2\pi=2\pi e \operatorname{tg} \beta_{\text{ж}}/2\pi = e \operatorname{tg} \beta_{\text{ж}} = \bar{e} R \operatorname{tg} \beta_{\text{ж}}, \quad (3.5)$$

де R – радіус ВТ, $\bar{e} = e/R$ – відносний ексцентриситет ВД. Підставляючи ξ , η , ς із (3.3) і x , y , z з (3.4) у (3.2), маємо

$$\bar{V}_{\text{ж}} = f(\Gamma, \bar{e}, R, \beta_{\text{ж}}, \varphi, \alpha_1, \rho), \quad (3.6)$$

де $\rho = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos(\alpha - \varphi) + m^2(\alpha - \alpha_1)} = R\sqrt{\bar{r}^2 - 2\bar{e}\bar{r} \cos(\alpha - \varphi) + \bar{e}^2[1 + (\alpha - \alpha_1)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ж}}]}$ – відстань між точками $M(e, \alpha, \varsigma)$ та $N(r, \varphi, z)$, $\bar{r} = r/R$ – відносна відстань від довільної точки N поза вихором до осі турбіни.

Узгодження між проекціями швидкостей у циліндричній і декартовій системах координат:

$$V_r = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\varphi = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi, \quad V_z = V_z. \quad (3.7)$$

Розглянемо багатовихрову схему – випадок з декількома фізичними ВД. Підставляючи проекції V_x, V_y, V_z швидкості $V_{\text{ж}}$ з (3.6) в (3.7), знаходимо складові швидкості, яка індуцьована одним з декількох фізичних ВД рівної інтенсивності у довільній точці $N(r, \varphi, z)$ у циліндричній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{ж}sr} &= \frac{\Gamma(\bar{e}R)^2 \operatorname{tg} \beta_{\text{ж}}}{4\pi z_{\text{ж}}} \int_{\alpha_{\text{SH}}}^{\alpha_{\text{SK}}} \frac{\sin(\alpha_s - \varphi) - (\alpha_s - \alpha_{s1}) \cos(\alpha_s - \varphi)}{\rho_s^3} d\alpha \\ V_{\text{ж} s\varphi} &= \frac{\Gamma \bar{e} R^2 \operatorname{tg} \beta_{\text{ж}}}{4\pi z_{\text{ж}}} \int_{\alpha_{\text{SH}}}^{\alpha_{\text{SK}}} \frac{\bar{r} - \bar{e} [\cos(\alpha_s - \varphi) + (\alpha_s - \alpha_{s1}) \sin(\alpha_s - \varphi)]}{\rho_s^3} d\alpha \\ V_{\text{ж} sz} &= \frac{\Gamma \bar{e} R^2}{4\pi z_{\text{ж}}} \int_{\alpha_{\text{SH}}}^{\alpha_{\text{SK}}} \frac{\bar{e} - \bar{r} \cos(\alpha_s - \varphi)}{\rho_s^3} d\alpha \end{aligned} \right\}, \quad (3.8)$$

де $z_{\text{ж}}$ – число фізичних ВД, ρ_s – відстань між точкою на ВД $M_s(e, \alpha_s, \varsigma)$ і точкою $N(r, \varphi, z)$ в довільному місці ВТ для випадку з декількома фізичними ВД,

s – порядковий номер фізичного ВД, а $\alpha_s = \alpha + \frac{2\pi}{z_{\text{ж}}}(s-1)$,

$$\rho_s = R \left\{ \bar{r}^2 - 2\bar{e}\bar{r} \cos(\alpha_s - \varphi) + \bar{e}^2 [1 + (\alpha_s - \alpha_{s1})^2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ж}}] \right\}^{1/2}.$$

Швидкості, які індуцьовані вихровою поверхнею, що моделює стінки ВТ, є функціями багатьох параметрів

$$\bar{V}_{\Pi} = f[e, \beta_{\text{ж}}, \gamma(\alpha_2), \varphi, \alpha_1, \rho_{\Pi}] \quad (3.9)$$

Невідома функція $\gamma(\alpha_2)$ в (9) визначається при виконанні граничних умов на стінці ВТ:

$$\sum_{s=1}^{Z_{\text{ж}}} V_{\text{жrs}} + V_{\text{пр}} = 0, \quad (3.10)$$

$$R \sin \beta_{\Pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha_2) d\alpha_2 = -\Gamma, \quad (3.11)$$

де $\gamma(\alpha_2)$ – напруженість вихрового шару (вихрової поверхні), що моделює стінку ВТ; β_{Π} – кут нахилу вихрової лінії вихрової поверхні; $\Gamma = \Gamma_{\text{ВТ}}$, а $\Gamma_{\text{ВТ}}$ – циркуляція за РК біля втулки.

Ці умови дозволяють визначити напруженість $\gamma(\alpha_2)$ із (3.10) з урахуванням (3.11). Підставляючи із рівняння (3.8) вираз для $V_{\text{жrs}}$ і $V_{\text{пр}}$ з (3.9) у (3.10) і враховуючи, що $\bar{r} = 1$, $\alpha_1 = \text{const}$, маємо рівняння

$$\lambda \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha_2) F(\varphi, \alpha_2) d\alpha_2 = f(\varphi). \quad (3.12)$$

Рівняння у формі (3.12) є рівнянням Фредгольму 1 роду. В роботі воно одержано для багатовихрової схеми, а функції $F(\varphi, \alpha_2)$, $f(\varphi)$ і λ визначені в залежності від $\beta_{\text{ж}}$, що дозволяє при розрахунках безпосередньо вживати експериментальні дані по кутах $\beta_{\text{ж}}$. Для одновихрової схеми це рівняння було складено Григор'євим В.І. Для виконання вимоги (3.10) в розрахунковому перетині, який розміщується на відстані $0,5D_1$ від ободу РК у ВТ (рис.1б), виконуємо ряд рішень (3.12) для розрахункової висоти труби h_k . Приблизно в цьому ж місці, згідно з вимогами МЕК, встановлюється датчик для вимірювання тиску у трубі.

Звісно, що безпосереднє рішення рівняння Фредгольму 1 роду (3.12) викликає труднощі у зв'язку з його некоректністю. Тому функцію $\gamma(\alpha_2)$ задаємо в вигляді ряду Фур'є з невідомими коефіцієнтами

$$\gamma(\alpha_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\alpha_2 + b_k \sin k\alpha_2). \quad (3.13)$$

З (3.13) витікає, що число невідомих коефіцієнтів ряду дорівнює $(2n+1)$, де n – число гармонік, k – номер гармоніки. Тому що a_0 легко знаходиться, використовуючи другу граничну умову (3.11), то в подальшому маємо число невідомих $2n$, які знаходимо з рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з числом рівнянь також $2n$, які побудовані на основі граничної умови (3.10) в перетвореному вигляді (3.12). Підставляючи (3.13) в другу граничну умову (11) знаходимо $a_0 = -\Gamma_{2\text{ВТ}} / \pi R \sin \beta_\pi$.

Уведемо в (3.13) позначення: $a_k = x_k$ і $b_k = x_{k+n}$, де $1 \leq k \leq n$, k – номер гармоніки. Рівняння (3.13) в такому випадку записуємо:

$$\gamma(\alpha_2) = -\frac{\Gamma_{2\text{ВТ}}}{2R\pi \sin \beta_\pi} + \sum_{k=1}^n x_k \cos k\alpha_2 + \sum_{k=1}^n x_{k+n} \sin k\alpha_2. \quad (3.14)$$

Для розрахунку $\gamma(\alpha_2)$ необхідно визначити невідомі коефіцієнти x_k і x_{k+n} в (3.13). Для отримання необхідного числа рівнянь треба поділити периметр розрахункового поперечного перетину ВТ на число частин, яке дорівнює подвійному числу гармонік $(2n)$ і в точках ділення (розрахункові точки) записуємо перетворені умови „непротікання” (3.10) зі змінною $\gamma(\alpha_2)$ згідно (3.14). З метою підвищення точності розрахунків було розглянуто рішення СЛАР для випадку її перевизначеності, що підвищує інформативну значимість невідомих коефіцієнтів x_k і x_{k+n} . В такому випадку приймаємо число розрахункових точок на контурі ВТ значно більше, ніж число невідомих коефіцієнтів, тобто $p \gg 2n$. Отже, одержуємо перевизначену СЛАР у вигляді (3.15):

Для визначення невідомих коефіцієнтів використовуємо принцип найменших квадратів. Вибір рішення ведемо по отриманій мінімальній нев'язці

$$S = \sum_{i=1}^p \left[b_i - \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} x_j \right]^2 \longrightarrow \min \text{ системи рівнянь (3.15).}$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x_k \int_0^{2\pi} \cos k \alpha_2 F(\alpha_2, \varphi_1) d\alpha_2 + \sum_{k=n+1}^{2n} x_{k-n} \int_0^{2\pi} \sin k \alpha_2 F(\alpha_2, \varphi_1) d\alpha_2 = \frac{1}{\lambda} f(\varphi_1) + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi R \sin \beta_{\pi}} \int_0^{2\pi} F(\alpha_2, \varphi_1) d\alpha_2, \\ & \dots\dots\dots, \\ & \sum_{k=1}^n x_k \int_0^{2\pi} \cos k \alpha_2 F(\alpha_2, \varphi_p) d\alpha_2 + \sum_{k=n+1}^{2n} x_{k-n} \int_0^{2\pi} \sin k \alpha_2 F(\alpha_2, \varphi_p) d\alpha_2 = \frac{1}{\lambda} f(\varphi_{2n}) + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi R \sin \beta_{\pi}} \int_0^{2\pi} F(\alpha_2, \varphi_p) d\alpha_2. \end{aligned} \right\} , (3.15)$$

де $\varphi_i = 2\pi(i-1)/p$, i – номер розрахункової точки, а $p \succ 2n$.

Система (3.15) може бути записана також в матричному вигляді

$$Ax=b, \quad (3.16)$$

де A – неквадратна матриця розмірності $(p) \times (2n)$ з елементами:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^{2\pi} \cos j \alpha_2 F_i(\alpha_2, \varphi_i) d\alpha_2, \quad 1 \leq j \leq n, \text{ а } j=k, \\ a_{ij} &= \int_0^{2\pi} \sin(j-n) \alpha_2 F_i(\alpha_2, \varphi_i) d\alpha_2, \quad n+1 \leq j \leq 2n, \text{ а } j=k+n; \end{aligned} \quad (3.17)$$

x – шуканий вектор-стовпець, b – відомий вектор-стовпець з елементами:

$$b_i = \frac{1}{\lambda} f(\varphi_i) + \frac{\Gamma_{2\text{вг}}}{2\pi R \sin \beta_{\pi}} \int_0^{2\pi} F_i(\alpha_2, \varphi_1) d\alpha_2.$$

Тоді рішення СЛАР (16) має вигляд

$$\tilde{A}Ax = \tilde{A}b, \quad (3.18)$$

де $\tilde{A}$ – транспонована матриця, а $\tilde{A}A$ – квадратна матриця розмірності $2n \times 2n$, незалежно від того, як сильно була перевизначена система.

Таким чином, з рішення (3.18) знаходимо коефіцієнти x_j , а потім визначаємо напруженість вихрового шару $\gamma(\alpha_2)$. Для реалізації системи (3.18) використовуємо чисельні методи Гаусса з вибором головного елемента. Інтеграли, які входять у систему рівнянь, розраховуються по формулах Сімпсона і схемі інтегрування Гаусса.

Маючи розподіл $\gamma(\alpha_2)$ визначаємо V_n , а потім і сумарну швидкість на стінці ВТ по (3.1). Осьова (витратна) та окружна (від циркуляційного вихрового потоку) складові швидкості V_q додаткового осесиметричного потоку у (3.1) визначаються по залежностях $V_{qz} = Q / \pi \cdot R^2 (1 - \sum_{i=1}^{z_k} \bar{d}_{jk}^2)$ і $V_{q\phi} = \frac{\Gamma_{2\text{ пер}} - \Gamma_{2\text{ вт}}}{2\pi R}$ відповідно.

Розрахунки максимальної і мінімальної сумарних швидкостей проводяться у розрахунковому перетині при постійному значенні циркуляції для обраного режиму по оборотах і витраті на стінці ВТ. Подвійну амплітуду ПТ визначаємо з використанням інтегралу Бернуллі:

$$\frac{2A}{H} \cdot 100\% = \frac{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}{2gH} \cdot 100\%, \quad (3.19)$$

де A – амплітуда пульсацій тиску, м; H – напір випробувань, м.

В (19) $V_{\max}$ і $V_{\min}$ визначені із урахуванням формул $V = (V_r^2 + V_\phi^2 + V_z^2)^{1/2}$, де $V_r = \sum_{s=1}^{z_k} V_{\text{жsr}} + V_{\text{пр}}$; $V_\phi = \sum_{s=1}^{z_k} V_{\text{жсф}} + V_{\text{пф}} + V_{\text{qф}}$; $V_z = \sum_{s=1}^{z_k} V_{\text{жсз}} + V_{\text{пз}} + V_{\text{qз}}$ (на стінці $r=1, V_r=0$).

Для розрахунку частоти пульсацій тиску визначаємо окружну швидкість на одному з фізичних ВД у розрахунковому перетині при $r=e$:

$$V'_\phi = \sum_{S=1}^{S=Z_k} V_{\text{жсф}} + V_{\text{пф}}. \quad (3.20)$$

В (3.20) $V_{жсф}$ – окружна складова швидкості, що індуцьована фізичними ВД;
 $V_{пф}$ – окружна складова швидкості, яка індуцьована вихровою поверхнею, що моделює стінку ВТ. В (3.20) не урахована $V_{qф}$, що має невеликі значення при $\bar{e} = 0 - 0.6$. Визначивши V_{ϕ}' , знаходимо кутову частоту обертання джгута $\omega_{ж} = \frac{V_{\phi}'}{Re}$ і частоту ПТ за РК – $f_{ж} = \frac{V_{\phi}' z_{ж}}{2\pi Re}$.

Контрольні питання

1. Поясніть розрахункову схему джгутових ПТ у ВТ (по моделі Григор'єва В.І.)
2. Написати формулу для складових швидкостей, що індуцьовані фізичними ВД (по Кочіну М.Є.).
3. Поясніть, які складові входять до швидкості, що індуцьована одним з декількох фізичних ВД у циліндричній системі координат.
4. Які граничні умови на стінці ВТ в схемі проф. Григор'єва В.І.?
5. Написати формулу для визначення напруженості вихрової поверхні, що моделює стінку ВТ.
6. Де вибирається розрахунковий перетин у ВТ при розрахунках по ММ Григор'єва В.І.?
7. У вигляді якого ряду задається напруженість вихрового шару $\gamma(\alpha_2)$, що моделює стінку ВТ?
8. З якою метою використовується рівняння Фредгольму 1 роду?
9. Написати формулу для визначення додаткового осесиметричного потоку.
10. Чому дорівнює кутова частота обертання ВД у ВТ?

Тема 3.2 РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПО ПРОГНОЗУВАННЮ ПТ ВІД ВД У ВТ ГІДРОТУРБІН

У цій темі наведені результати чисельних експериментів по прогнозуванню ПТ, які проводились згідно вище приведеної ММ. Послідовність розрахунків наведена на спрощеній схемі (рис.3.2).

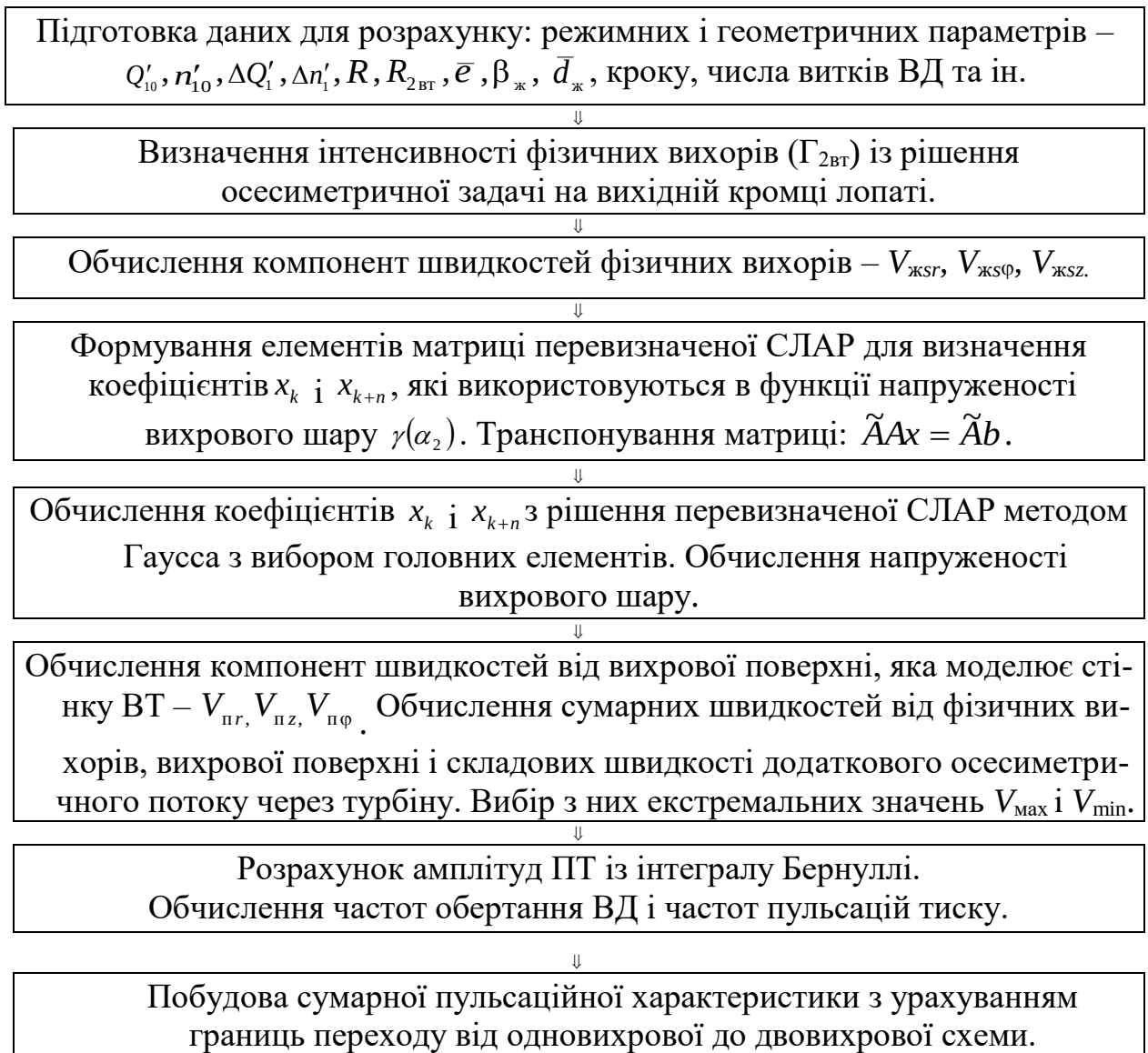


Рисунок 3.2 – Схема розрахунку джгутових ПТ у ВТ РО гідротурбіни

Програми для визначення ПТ складені на мові Фортран і у середовищі Mathcad. Одержані прогнозні пульсаційні характеристики для турбін РО115, РО230 (рис.3.4), РО310 розробки ВАТ “Турбоатом”. Отриманий рівень ПТ є допустимим і гарантує надійну роботу гідротурбін.

Важливим моментом для розрахунку ПТ була підготовка геометричних параметрів ВД – ексцентриситету, відносного діаметра і кута нахилання вихрової лінії. Вона здійснювалася на основі апроксимації даних, що були одержані з візуальних експериментів з фотографуванням ВД і з використанням датчика-зонда тиску.

Для ВД гідротурбін на основі експериментів були одержані поліномні залежності відносного ексцентриситету – $\bar{e}$, відносного діаметра – $\bar{d}_ж$, а також кута нахилання вихрової лінії – $\beta_ж$ у полі універсальної пульсаційної характеристики у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}(n'_1, Q'_1) &= A_0 + A_1 Q'_1 + A_2 Q_1'^2 \\ \bar{d}_ж(n'_1, Q'_1) &= B_0 + B_1 Q'_1 + B_2 Q_1'^2 \\ \beta_ж(n'_1, Q'_1) &= 90^\circ(1 - C_1 Q'_1 + C_2 Q_2'^2 + C_3 Q_3'^3) \end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

де $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3$ – змінні коефіцієнти, що є поліномами від n'_1 .

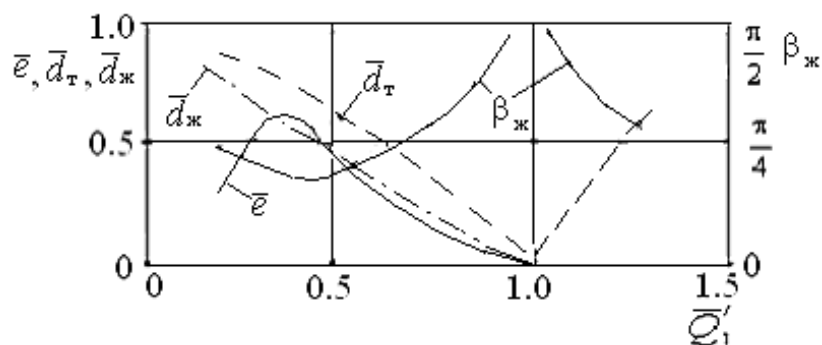
Для модельної гідротурбіни РО170 $\bar{e}, \bar{d}_ж, \beta_ж$ були визначені із експериментів для зони $\bar{Q}'_1 = 0,4 - 1,2$, $\bar{n}'_1 = 0,9 - 1,1$, де $\bar{n}'_{1i} = \frac{n'_{1i}}{n'_{1\text{опт}}}$, $\bar{Q}'_{1i} = \frac{Q'_{1i}}{Q'_{1\text{опт}}}$ (рис.3.3).

Ці параметри можуть бути також визначені за допомогою приблизних емпіричних залежностей типу $\bar{e} = (4|(\bar{Q}'_1 - \bar{n}'_1)|\bar{Q}'_1 + 1) / (4 + |(\bar{Q}'_1 - \bar{n}'_1)|\bar{Q}'_1)$, $\beta_ж = 90(1 - k\sqrt{\bar{e}})$, де $k = 0,7 - 0,9$, і які були одержані на основі модельних експериментів для гідротурбін РО115-170.

З урахуванням отриманих апроксимацій (3.21) були виконані розрахунки по прогнозуванню ПТ для РО гідротурбін для діапазону напорів 100-300 м. Розширення діапазону застосування залежностей (3.21) по напорах потребує додаткових розрахунково-експериментальних досліджень. На рис.3.3 представлені залежності $\bar{e}, \bar{d}_ж, \beta_ж$ від $\bar{Q}'_1$ при розрахунковому напорі $n'_1 = n'_{1p}$ для випадку одного ВД. Визначення циркуляції за РК здійснювалося на основі спрощеної осередненої осесиметричної задачі з урахуванням робіт Етінберга І.Е. і Гольдіна С.Л. Спочатку визначалася швидкість V_m із рівняння $\frac{dV_m}{dl} + M(l)V_m = N(l)$,

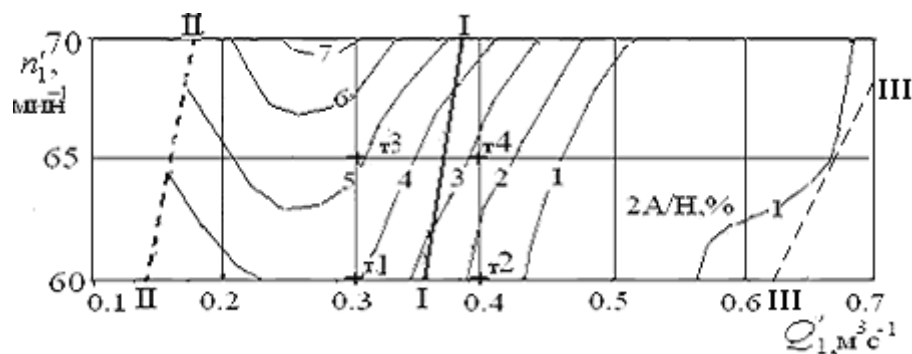
а потім розраховувалась циркуляція за РК біля втулки

$$\Gamma_{2\text{вт}} = 2\pi R_{2\text{вт}} (R_{2\text{вт}} \pi / 30 - V_m \operatorname{ctg} \beta_{2\text{вт}}), \text{ де } \beta_{2\text{вт}} = \beta_{2\text{л}} + \Delta\beta, \text{ а } \Delta\beta \approx 1^\circ - 3^\circ.$$



$\bar{d}_t$ – відносний теоретичний діаметр ВД з формули Муракамі М.,
 $\bar{d}_j$ – відносний діаметр видимої частини ВД з візуального експерименту

Рисунок 3.3 – Залежності $\bar{e}$, $\bar{d}_j$, β_j від $\bar{Q}_1'$ для $n_1' = n_{1p}'$



✚ -експериментальні точки (в т. 1-3,5%, т. 2-1,3%, т. 3-3,8%, т. 4-1,9%)

Рисунок 3.4 – Розрахункові амплітуди ПТ (2A/H,%) в гідротурбіні PO230/3234

На рис.3.4 наведені розрахункові амплітуди ПТ у гідротурбіні PO230 у випадку одного ВД. Зліва від оптимуму визначаємо границю переходу від одновихрової схеми до двовихрової (лінія II-II) по значенню параметра $\Pi=2,5$, який визначений з експериментів у роботах Фелвея Г. Лінія I-I задовольняє умові $\bar{e} + r_j \leq 0.98$, зліва від неї $\bar{e}$ змінюється по лінійному закону від $\bar{e} = \bar{e}_{\max}$ до $\bar{e} = 0$ при $\bar{Q}_1' = 0$ (рис.3.4). Праву від оптимуму границю переходу одного ВД до двох приймаємо на основі експериментальних даних: її координати по витраті, приблизно $(1,15-1,3)\bar{Q}_{1\text{опт}}'$ – лінія III-III. Розглянута методика дозволяє виконати розрахунки ПТ для випадку з декількома ВД при наявності додаткових

даних про їх геометрію та інтенсивність. Шляхом накладання характеристик у полі $Q'_1 - n'_1$ можна отримати сумарну пульсаційну характеристику.

Контрольні питання

1. Надати схему розрахунку джгутових ПТ у РО гідротурбіні по ММ.
2. Навести геометричні параметри для ВД РО гідротурбін – поліномні залежності, що одержані на основі експериментів.
3. Як визначалася циркуляція за РК на основі спрощеної осередненої осесиметричної задачі Етінберга І.Е.?
4. Надати графік зміни $\bar{e}$, $\bar{d}_ж$, $\beta_ж$ від Q'_1 при $n'_1 = n'_{1p}$.
5. Нарисувати графік зміни $2A/H, \%$ у полі $Q'_1 - n'_1$.
6. Чому дорівнює параметр Фелвея Г. при переході від одно- до двовихрової схеми?

Задача

Розрахувати рівень амплітуд ПТ від ВД у ВТ за допомогою просторової моделі Григор'єва В.І. і побудувати графік амплітуд ПТ в полі $n'_1 - Q'_1$.

Початкові умови: Гідротурбіна – РО115: $Q'_{omm} = 930$ л/с, $n'_{1omm} = 73 \text{ хв}^{-1}$, $n_c = 125 \text{ хв}^{-1} = 2,0833 \text{ с}^{-1}$

Визначаємо максимальне і мінімальне значення величини приведених обертів: $n'_{1min} = 66 \text{ хв}^{-1}$, $n'_{1omm} = 73 \text{ хв}^{-1}$ и $n'_{1max} = 80 \text{ хв}^{-1}$.

Для цього у нас є 33 точки з режимними параметрами n'_1 і Q'_1 . Ці точки вказані в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Витрати (Q'_1 , л/с) для визначення амплітуд ПТ
в дапазоні $n'_1 = 60 - 80 \text{ хв}^{-1}$

Q'_1 , л/с	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	1050	1100
--------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

Запускаємо програму "МНК_EPS.exe". Записуємо тип турбіни і значення n'_1 і Q'_1 для розрахункового режиму. Робимо це для кожної точки і отримуємо

на виході 4 файлу. У файлі «3.1» знаходимо значення $pd1$. Це і буде значення величин $\frac{2A}{H}$, %, на підставі якого ми будемо амплітудну характеристику в полі

$n_1 - Q'_1$. Інструкцію і вихідний файл до програми див. Додатки А, Б.

Таблиця 3.4 – Вихідні дані для побудови амплітудної характеристики ПТ у ВТ

№режима	Q'_1 , л/с	n_1 , хв ⁻¹	$\frac{2A}{H}$, %	№режима	Q'_1 , л/с	n_1 , хв ⁻¹	$\frac{2A}{H}$, %
1	600	55	0.42	34	600	70	10.271
2	650	55	0.069	35	650	70	6.015
3	700	55	0	36	700	70	3.1
4	750	55	0.036	37	750	70	1.316
5	800	55	0.218	38	800	70	0.394
6	850	55	0.64	39	850	70	0,048
7	900	55	1.407	40	900	70	0
8	950	55	2.647	41	950	70	0.063
9	1000	55	4.528	42	1000	70	0.316
10	1050	55	7.273	43	1050	70	0.878
11	1100	55	11.183	44	1100	70	1.89
12	600	60	1.711	45	600	75	20.162
13	650	60	0.634	46	650	75	13.074
14	700	60	0.136	47	700	75	7.767
15	750	60	0.003	48	750	75	4.108
16	800	60	0,016	49	800	75	1.833
17	850	60	0.156	50	850	75	0.613
18	900	60	0.523	51	900	75	0.107
19	950	60	1.226	52	950	75	0
20	1000	60	2.4	53	1000	75	0.033
21	1050	60	4.217	54	1050	75	0,23
22	1100	60	6.909	55	1100	75	0.718
23	600	65	4.639	56	600	80	25.522

Продовження табл.3.4

№ режима	Q'_1 , л/с	n'_1 , хв ⁻¹	$\frac{2A}{H}$, %	№ режима	Q'_1 , л/с	n'_1 , хв ⁻¹	$\frac{2A}{H}$, %
24	650	65	2.317	57	650	80	20.647
25	700	65	0.926	58	700	80	13.202
26	750	65	0.24	59	750	80	10.57
27	800	65	0.016	60	800	80	5.213
28	850	65	0.005	61	850	80	2,159
29	900	65	0.104	62	900	80	0,95
30	950	65	0.414	63	950	80	0,3
31	1000	65	1.049	64	1000	80	0,15
32	1050	65	2.146	65	1050	80	0,1
33	1100	65	3.883	66	1100	80	0,4

За даними табл.3.4 будемо амплітудну характеристику ПТ ($\frac{2A}{H}$, %) від

ВД у ВТ за допомогою програми «Surfer» в полі $n'_1 - Q'_1$ рис.3.5.

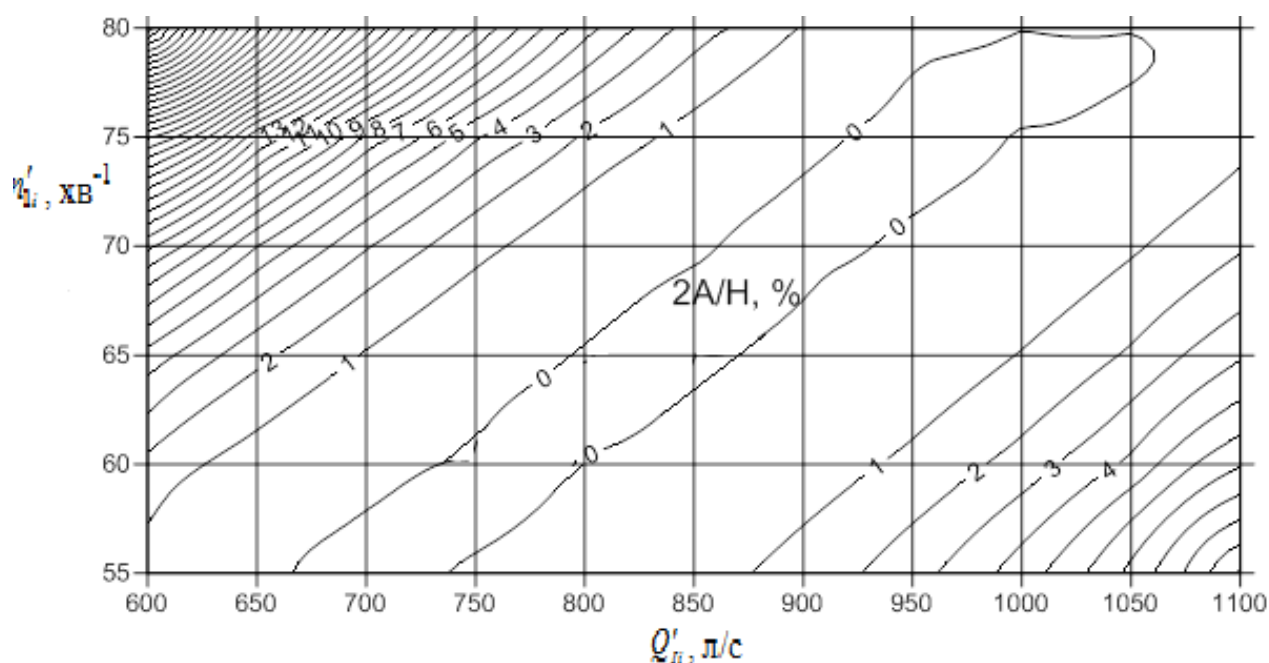


Рисунок 3.5 – Розрахункова амплітудна характеристика, $\frac{2A}{H}$, % ПТ від ВД у ВТ

ДОДАТКИ

Додаток А

Інструкція до програми "МНК_EPS.exe" по визначенню низькочастотних ПТ (амплітуд і частот) у ВТ радіально-осьової гідротурбіни

Ця інструкція являє послідовність завдання чисельних значень вихідних даних (режимних, геометричних і ін.) В програмі по визначенню амплітуд і частот низькочастотних джгутових ПТ. Програма реалізована на мові Фортран і представляє пакет програм для розрахунку ПТ в ВТ від довільного числа ВД., що включає - розрахунок інтенсивності вихрового шару на стінці ВТ; розрахунок геометричних параметрів ВД. - ексцентриситету ВД (ϵ), діаметра ВД ($d_{\text{ж}}$) і кута нахилу фізичного ВД ($\beta_{\text{ж}}$); розрахунок циркуляції за осесиметричною кромочною задачею Гольдина і частоти ВД в ВТ (в файлі – 1...); розрахунок складових абсолютної швидкості в ВТ (в файлі – 2...) і розрахунок ПТ (в файлі – 3..., 4...). У програмі відкриваються за допомогою оператора OPEN два файли alfamur.dat і Q0tmur.dat даних Мураками М: OPEN (22, FILE='Q0tmur.dat') і OPEN(23, FILE='alfamur.dat'), які містять дані теоретичних досліджень М. Мураками. Ці два файли повинні бути поруч з основною програмою.

Ввод исходных данных:

1. Тип турбины (РО – 115, 140, 170, 230, 310).
2. Оптимальное значение относительного приведенного расхода при расчетном числе оборотов – Q'_{10} , лс⁻¹.
3. Начальное расчетное значение приведенного относительного расхода – Q'_{i0} , лс⁻¹.
4. Шаг расчета по приведенному относительному расходу – $\Delta Q'_1$, лс⁻¹.
5. Количество точек расчета по относительному расходу (принимается равным единице при одном расчете) – $i=1, \dots, n$.
6. Начальное значение приведенных относительных оборотов – n'_{i0} , мин⁻¹.
7. Шаг расчета по приведенным оборотам – $\Delta n'_1$, мин⁻¹.
8. Количество точек расчета по приведенным оборотам (принимается равным единице при одном расчете) – $j=1, 2, \dots, n$.

9. Имя файла, в который записываются исходные данные и промежуточные результаты расчета – 1... .

10. Имя файла, в который идет запись рассчитываемой карты скоростей – 2... .

11. Имя файла для записи рассчитываемых величин п.д. по формуле Бернулли – 3....

12. Имя файла для записи рассчитываемых величин п.д. по формуле Коши-Лагранжа – 4...:

12а. Имя файла для записи матрицы коэффициентов СЛАУ – с... .

12б. Имя файла для записи правой части СЛАУ – р... .

12в. Имя файла для записи результатов системы – r... .

13. Имя файла результатов проверки выполняемых действий – 5... .

14. Относительный радиус трубы $-r_k$. Берем в пределах 0,96-0,99. Если $r_k=1$, то попадаем на особенность.

15. Число разбиений для угла $\alpha_2(n)$. Принято $n = 51$.

16. Число разбиений для угла $\alpha(nal)$. В программе принято $nal = 97$, $20 \leq nal \leq 100$.

17. Число разбиений для угла α в линейно-интерполяционном методе вычисления интегралов (при замене синусов и косинусов в подынтегральных выражениях их линейными приближениями ($nalLin$)- принято $nalLin = 180$. Можно брать от 100-500).

18. Число разбиений для угла $\alpha_2(n)$ в линейно-интерполяционном методе вычисления интегралов принято равным – 180. Можно брать от 100-500 ($nalsin = 180$).

19. Число разбиений интервалов между нулями осциллируемых подынтегральных функций – принято брать равным 10, можно брать от 4-20 $nd2i = 10$.

20. Величина локального интервала вырезки особенности для угла α – можно брать от 0,01 до 0,2 $EKicx = 0.99$. Const для корректировки частоты взята в пределах от 0,7 до 1 ($ch = 0.7$).

21. Константа по которой происходит «вырезка» уравнений из СЛАУ – $concpesz$. С целью отбора таких уравнений системы коэффициенты, которые не превышают этой постоянной, принимаются равными от 500-3000.

22. Константа «среза» уравнений СЛАУ – $concprost$, для которых невязки превышают эту постоянную, изменяется от 0,5-3.

23. Константа уточнения циркуляции (GABS)– *rcrez*. Принята равной единице (*rcrez*=1).
24. Показатель степени в ближайшей формуле для определения эксцентриситета в.ж.– *zsqr*t . Может быть взят 2 или 3. (например, *zsqr*t=3).
25. Величина локального интервала вырезки особенности по углу $\alpha_2(n)$. Можно брать в интервале 0,09-0,2. (*TPCPicx*=0.15).
26. Число гармоник принято равным – 10 (*nslau*=10).
27. Число уравнений СЛАУ – взято равным 60. (*nyp*=60).
28. Число разбиений для учета осциллируемости подынтегральных функций для расчета интегралов от этих функций. (*ntet*=13).
29. Если данные по радиусу жгута берутся по аппроксимационной формуле, то вводится 0, иначе 1. Принято *iRVIX*=1.
30. Если данные эксцентриситета берутся по формулам: если по зависимости, предложенной Завьяловым П.С., то вводим – 0; по данным программы Полигон – вводим 1; если по данным Кухтенкова Ю.М.– 2 (*iNour*).
31. Если данные вводятся из файла введите 2, иначе 1. Принято 1, т.е. *prpvv*=1.
32. Введите номер формулы для аппроксимации интенсивности напряженности. Принята формула ряда Фурье *prryda*=1.
33. Введите параметр на выполнение вырезки при вычислении коэффициентов системы: если он равен 1, то вырезка выполняется, а если 0 – не выполняется, *MVIP*=0.
34. Введите признак добавки, уточняющей вырезку: 1 – надо уточнять, 0 – не надо уточнять. Принято *MDOVVIP*=0.
35. Введите постоянную сдвига параметра α , как долю отсечения либо низа, либо верха о.т. в пределах единицы *cal*=*cal1*=0.0.
36. Если считать циркуляцию по упрощенной прямой осесимметричной кромочной задаче (вводится вычисленное постоянное значение, взятое из расчета циркуляции.), то вводится 0, если по программе Полигон, то введите – 1 (*ichir*=0, 1).

Додаток Б

Приклад розрахунку низькочастотних ПТ для гідротурбіни РО230 Вихідний файл розрахунку, що становлять складові абсолютної швидкості у ВТ гідротурбіни РО 230 для режиму $n'_1 = 65 \text{ хв}^1$, $Q'_1 = 200 \text{ л/с}$.

tetarg	Vrv	Vrsl	Vrsum	Vtv	Vtsl	Vtsum	Vzv	VZSL	VzsBpacx	-Vzspacx	VV	-VsBpac	-Vspacx
ni = 65.0	Qi = 200.0	prryda= 1	rk= .96	hz= .0	n = 51	ns lau= 10	nyp= 60						
.990E-01	-.565E-03	.875E-01	.869E-01	3.50	-.285	3.21	-.182	7.33	7.14	8.05	3.50	7.83	8.67
.555E-01	-.565E-03	.250E-01	.245E-01	3.50	-.185	3.31	-.182	.138	-.449E-01	.863	3.50	3.31	3.42
.662	-.943E-01	.759E-01	-.183E-01	3.48	-.588	2.89	-.148	.451E-01	-.103	.805	3.49	2.90	3.0
1.27	-.158	.581E-01	-.996E-01	3.45	-1.40	2.05	-.754E-01	.379E-01	-.376E-01	.871	3.45	2.05	2.2
1.87	-.174	.228E-01	-.151	3.40	-1.12	2.28	.117E-01	-.123	-.112	.797	3.40	2.28	2.41
2.4	-.143	.152	.887E-02	3.35	-1.46	1.89	.884E-01	-.112	-.236E-01	.885	3.36	1.89	2.0
3.09	-.761E-01	.222E-02	-.739E-01	3.32	-2.31	1.02	.137	-.110	.270E-01	.935	3.32	1.02	1.3
3.20	.794E-02	-.164E-02	.630E-02	3.31	-.236	3.07	.148	-.110	.375E-01	.946	3.31	3.07	3.21
3.70	.905E-01	-.331E-02	.872E-01	3.32	-.372	2.95	.120	-.115	.503E-02	.913	3.32	2.95	3.08
4.21	.153	-.965E-01	.566E-01	3.35	-.884	2.47	.585E-01	-.125	-.668E-01	.842	3.35	2.47	2.61
4.71	.180	-.621E-01	.118	3.40	-.441	2.95	-.235E-01	.147	.123	1.03	3.40	2.96	3.13
5.22	.159	-.236E-01	.136	3.44	-.269	3.18	-.106	.199	.922E-01	1.00	3.45	3.18	3.33
5.72	.938E-01	-.516E-01	.422E-01	3.48	-.568E-01	3.43	-.166	.513	.347	1.26	3.49	3.44	3.65
6.23	-.565E-03	.465E-01	.460E-01	3.50	-1.52	1.98	-.182	.440	.258	1.17	3.50	2.00	2.30
.555E-01	-.565E-03	.250E-01	.309E-01										
.662	-.943E-01	.759E-01	.352E-01										
1.27	-.158	.581E-01	.111E-01										
1.87	-.174	.228E-01	-.865E-01										
2.48	-.143	.152	-.228E-01										
3.09	-.761E-01	.222E-02	-.238E-01										
3.20	.794E-02	-.164E-02	-.516E-01										
3.70	.905E-01	-.331E-02	.123E-01										
4.21	.153	-.965E-01	.874E-02										
4.71	.180	-.621E-01	.127E-01										
5.22	.159	-.236E-01	.704E-01										
5.72	.938E-01	-.516E-01	.440E-01										
6.23	-.565E-03	.465E-01	.297E-01										

– приклад файлу вихідних даних (3.1) для РО 230 розрахунку амплітуд ПТ

<i>Qi</i>	<i>Tet</i>	<i>Vav</i>	<i>Vbv</i>	<i>va1</i>	<i>vb1</i>	<i>pd1</i>	<i>pd11</i>	<i>Gabs</i>	<i>ksi</i>	<i>bet</i>			
<i>Ni</i> = 65.00	<i>prryda</i> =	1		<i>rk</i> =	.96	<i>n</i> = 51		<i>nslau</i> = 10		<i>nyp</i> = 60			
200.0	327.9	1.02	3.43	1.38	3.65	-2.346	4.8	6.40	.125	68.5	1.73	.953	.825
200.0	5.7	3.32	3.49	1.38	3.65	4.8	4.8	6.40	.125	68.5	1.73	.953	.825

Список літератури

1. Владиславлев Л.А. Вибрация гидроагрегатов гидроэлектрических станций / Л.А. Владиславлев. – М.: Энергия, 1972. – 176 с.
2. Мураками М. Вибрация отсасывающих труб гидротурбин / М.Мураками. – Труды IAHN, 1961. – Серия А, №1. – С. 48-54.
3. Нехлеба М. Определение усилий от внецентренного вихря, действующих на отсасывающую трубу / М. Нехлеба. – Энергомашиностроение. – 1963. – №4. – С. 23-26.
4. Rheingans W. J. Power swing in hydroelectric power plant / W. J. Rheingans – Trans. FSME, 1940. – № 62. – P. 171-184.
5. Пази Л.Г. Исследование периодических пульсаций давления в отсасывающих трубах гидротурбин / Л.Г. Пази. – Труды ВНИИгидромаша. – М., 1968. – Вып. 37. – С. 34-42.
6. Жуковский Н.Е. Вихревая теория гребного винта / Н.Е. Жуковский. – ГИТТЛ. – М.-Л., 1950. – 370 с.
7. Гутовский Е.В. Теория и гидродинамический расчет гидротурбин / Е.В. Гутовский, А.Ю. Колтон. – Л.: Машиностроение, 1974. – 361 с.
8. Григорьев В.Н. Определение пульсаций давления в отсасывающей трубе под действием вихря за рабочим колесом гидротурбины / В.Н. Григорьев. – Энергомашиностроение. – 1989. – № 9. – С. 42-44.
9. Григорьев В.И. Результаты исследований динамических процессов и повышения эффективности работы гидроагрегатов ГЭС: Дис.... доктора техн. наук: 05.04.13; – Защищена 20.06.1990; Утв. 15.12.1990. – М., 1990. – 429 с.
10. Данилов А.Е. Пульсации давления в проточной части блока агрегатов Братской ГЭС при пониженных напорах (пусковых) и связанные с ними нестационарные явления / А.Е. Данилов. – Труды координационных совещаний по гидротехнике. – М.-Л.: Энергия, 1965. – Вып. 22. – С. 201-209.
11. Плохотников И.В. Экспериментальное исследование нестационарных явлений, возникающих в элементах гидротурбинных блоков ГЭС: Автореферат дис. к.т.н. / И.В. Плохотников. – ВНИИГ. – Л., 1972. – 21 с.

12. Бондаренко А.В. Анализ пульсационной характеристики высоконапорных радиально-осевых гидротурбины / А.В. Бондаренко, П.С. Завьялов, А.М. Гришин. – Гидравлические машины. – Х.: ХПИ. – 1984. – №18. – С. 78-82.
13. Бондаренко А.В. Улучшение пульсационной характеристики высоконапорных радиально-осевых гидротурбин / А.В. Бондаренко, П.С. Завьялов, А.М. Гришин. – Гидравлические машины. – Х.: ХПИ. – 1991. – №25. – С. 64-67.
14. Бондаренко А.В. Моделирование параметров вихревого жгута в поле универсальной характеристики жестколопастных гидротурбин / А.В. Бондаренко, П.С. Завьялов, А.М. Гришин. – «Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье»: Сб. научн. трудов ХГПУ. – Харьков, 1997. – Ч.2. – С. 64-68.
15. Завьялов П.С. Прогнозирование пульсаций давлений от нескольких вихревых жгутов за рабочим колесом РО гидротурбины / П.С. Завьялов, Ю.М. Кухтенков, Ю.А. Подвойский. – Вестник НТУ «ХПИ». – 2001. – Вып. 129. – С. 95-104.
16. Завьялов П.С. К вопросу математического моделирования НЧПД в ОТ жестколопастных гидротурбин / П.С. Завьялов, Ю.М. Кухтенков, Ю.А. Подвойский. – Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2002. – Т. 12, №9. – С. 83-88.
17. Завьялов П.С. К методу расчета пульсационных характеристик вихревых жгутов за рабочим колесом гидротурбины / П.С. Завьялов, Ю.М. Кухтенков, Ю.А. Подвойский. – Проблемы машиностроения. – Х: ИПМаш НАНУ. – 2003. – Т. 6, №2. – С. 84-92.
18. Завьялов П.С. Исследование связи между пульсациями давления и осевой силы в гидротурбине РО230 / П.С. Завьялов, Ю.М. Кухтенков, Л.И. Краснопольская. – Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 6. – С. 169-172.
19. Повх И.Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. – Л.: Машиностроение, 1974. – 480 с.
20. Kubota T. Effect of cone angle at draft tube inlet in hydraulic characteristics of Francis turbine / T. Kubota, S. Jamada // Symposium Operating Problems of Pump Stations and Power Plants. Amsterdam, the Netherlands, September 13-17, 1982. – P. 111-116.

21. Казанцев Б.Э. Лабораторные исследования условий работы гидроагрегатов Красноярской ГЭС при пониженных пусковых напорах / Б.Э. Казанцев. – Труды ЛПИ. – 1971. – № 312. – С. 52-57.
22. Fischer R. Comparison draft tube surging of Homologous scale models and prototype Francis turbines / R. Fischer, U. Palde, P. Ulith. – 10th AIHR, Symposium Tokyo, July 13-17, 1982. – vol. 1. – P. 541-556.
23. Boussuges P. Analyse des foroes pulsotoires egissent sur lesporties tournantes des turbines-pompes / P. Boussuges – La Houille Blanche. – 1980. – № 1-2. – P. 35-86.
24. Cassidy J.J. Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown / J.J. Cassidy. – Jornal of Fluid Mechanics. – 1970. – Bd.41, Teil 4. – P. 727-736.
25. Dziallas R. Franoisurbinen bei Teil-und Uberlast / R. Dziallas. – VDI-Berichte. – 1964. – № 75. – S. 78-85.
26. Dorfler P. Mathematisches Model der zopferregten Teillastschwingunden von Francisturbinen / P. Dorfler. – Esser Wyss Mitteilungen. – 1980. – № 1. – S. 101-106.
27. Dorfler P. Systemtheoretische Ansätze für die Saugrohrschwingunden der Francis turbinen / P. Dorfler. – VDI-Berichte. – 1981. – №424. – S. 211-222.
28. Fanelli M.A. Mathematical model of the variex rope surge effects in the Draft Tube of a Francis Turbine Warking at Partical Load / M. Fanelli. – Proc. 14th AIHR, Symposium Trondheim, June 20-23, 1988. – vol. 2, Session N. – P. 231-243.
29. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов. – М.: Наука, 1980. – 287 с.
30. Philibert R. Francis turbine at part load. – Matrix simulating the gaseous rope / R. Philibert, M. Couston. – 19th AIHR, Symposium Singapore, September 9-11, 1998. – P. 88-94.
31. Ruprecht A. Simulation of vortex rope in a turbine draft tube / A. Ruprecht, T. Helmrich, T. Scherer. – 21th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Lausanne, September 9-12, 2002. – P. 66-74.
32. Skotak A. Effect of the inflow conditions on the unsteady draft tube flow / A. Skotak, J. Mikulasek, L. Lhotakova. – 21th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Lausanne, September 9-12, 2002. – P. 92-99.

33. Платонов Д.В. Исследование влияний пульсационных явлений на режимы работы высоконапорных ГЭС/ Д.В.Платонов, А.В. Минаков, А.А. Дякерев. – М.: Современная наука. – 2014.–№1. – С.103-108.
34. Hosoi Y. Characteristics of pressure surge due to whirling water from exit of water turbine runner/ Y. Hosoi.– Bulletin of ISME. –1973. – v.16, № 99.– P.1324-1335.
35. Заворуев В.П. Исследование пульсаций давления в проточной части поворотно-лопастной гидротурбины / В.П. Заворуев, М.Ф. Саркисова, И.И. Иванов. – Труды Гидропроекта. – М., 1962. – Сб. 7. – С. 65-75.
36. Falvey H. A primer on draft tube surging / H. Falvey. – Hydro rev. – 1993. – 12. –№1.– P. 76-86.
37. Henry P. Analyse experimentale de la stabilité Hydroulique de la Francis turbine a charge partielle / P. Henry. – La Houille Blanche. – 1982. – № 2-3.– P. 209-218.
38. Klein J. Untersuchung der Saugrohrschwingungen einer Francis turbine mittels Modellversuche / J. Klein. – VDI-Berichte. – 1973.– № 193. – S. 312-325.
39. Завьялов П.С. Низкочастотные пульсации давления в насосном режиме обратимых гидромашин / П.С. Завьялов, С.А. Рыжов.– Гидравлические машины. – Х.: ХПИ. – 1992. – № 26. – С.85-90.
40. Menter F.R. Two Equation Eddy Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. / F.R. Menter. – *AIAA J.* 1994. 32, № 8. pp. 1598-1605.
41. Авдющенко А. Ю. Численный алгоритм моделирования пространственных течений несжимаемой жидкости на подвижных решетках / А. Ю. Авдющенко , С. Г. Черный, Д. В. Чирков. – М.: *Вычислительные технологии*, 2012. Т. 17. №6. С. 3–25.
42. Khare R. CFD approach for flow characteristics of hydraulic Francis turbine / R. Khare, V. Prasad, S. Kumar. – *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2010. Vol. 2 (8). P. 3824–3831.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Перелік умовних позначень.....	5
Розділ 1. Аналітичний огляд існуючих сетодіврозрахунку і експериментальних досліджень пульсацій тиску у відсмоктуючих трубах гідротурбін.....	7
Тема 1. Аналіз теоретичних досліджень низькочастотних пульсацій тиску в гідротурбінах.....	7
Тема 2. Експериментальні дослідження в модельних і натурних Гідротурбінах.....	14
Контрольні питання.....	22
Задача.....	23
Розділ 2. Двовимерні математичні моделі руху вихрових джгутів у відсмоктуючій трубі (пряма задача гідродинаміки).....	26
Тема 2.1 Стінка відсмоктуючої труби моделюється дзеркально відображеними вихорями.....	26
2.1.1.Одновихрева схема (на основі ТФКЗ).....	26
2.1.2. Двохвихрева схема (на основі ТФКЗ).....	30
2.1.3. Багатовихрова схема.....	35
Контрольні питання.....	40
Тема 2.2. Стінка відсмоктуючої труби моделюється вихровим шаром	41
2.2.1. Швидкості, що індуковані основними (фізичними) вихорами на стінці ВТ.	41
2.2.2. Швидкості, індуковані вихровим шаром на стінці ВТ	42
2.2.3. Сумарні швидкості, що індуковані ВД і вихровою поверхнею на стінці ВТ.	44
1.2.4. Частота обертання ВД для одновихрової схеми.....	45
2.2.5. Частота обертання ВД для багатовихрової схеми.	49
Контрольні питання.....	52
Задача.....	53

Розділ 3 Просторова математична модель розрахунку пульсацій тиску від довільного числа фізичних ВД, коли стінка труби моделюється вихровим шаром.....	57
Тема 3.1 Просторова ММ Григор'єва В.І.....	57
Контрольні питання.....	64
Тема 3.2 Результати чисельних експериментів по прогнозуванню ПТ від ВД гідротурбін.....	65
Контрольні питання.....	68
Задача.....	69
Додатки.....	71
Додаток 1.....	71
Додаток 2.....	74
Список літератури.....	75
ЗМІСТ.....	79

Навчальне видання

КУХТЕНКОВ Юрій Михайлович

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ВИХРОВИХ ДЖГУТІВ
У ВІДСМОКТУЮЧИХ ТРУБАХ РАДІАЛЬНО-ОСЬОВИХ ГІДРОТУРБІН

Навчальний посібник
для студентів спеціальності «Гідроенергетика»

Відповідальний за випуск проф. А. С. Роговий
Роботу до видання рекомендував проф. В. Е. Дранковський

Самостійне електронне видання
