МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський державний технічний університет

О. Д. Горбунов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Інженерний експеримент»

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
спеціальності 144 «Теплоенергетика»
очної та заочної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою секцією
науково-методичної ради ДДТУ
«____»_____, протокол №

м. Кам’янське – 2016

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу Дніпровського державного технічного університету заборонено.

Конспект лекцій з дисципліни «Інженерний експеримент» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня спеціальності 144 «Теплоенергетика» очної та заочної форм навчання /Укл. Горбунов О.Д. – м. Кам'янське: ДДТУ, 2016 – 42с.

Укладач: О.Д. Горбунов, д.т.н., професор

Рецензент: Р.О. Климов, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск: зав. кафедрою теплоенергетики,

д.т.н., проф. Горбунов О.Д.

Затверджено на засіданні кафедри теплоенергетики

Протокол № …. від … ……20……р.

Конспект лекцій призначений для здобувачів вищої освіти першого курсу очної та заочної форм навчання за освітньо-професійною програмою здобувачів другого (магістерського) рівня спеціальності 144 «Теплоенергетика» при вивченні дисципліни «Інженерний експеримент».

В конспекті розглядаються всі розділи, які розглядаються протягом семестру і відповідають робочій програмі дисципліни «Інженерний експеримент»:

- Розділ 1. Вступ. Математична модель. Види математичних моделей
- Розділ 2. Експеримент. Теорія експерименту
- Розділ 3. Повний факторний експеримент
- Розділ 4. Планування експерименту другого порядку. Центральне композиційне планування.

Конспект лекцій містить допоміжний ілюстративний матеріал для спрощення сприйняття та розуміння питань, що вивчаються.

ЗМІСТ

ВСТУП……..…….……..…4
РОЗДІЛ І. Математична модель. Види математичних моделей.……5
1.1. Джерела інформації для побудови математичних моделей……..5
1.2. Основні етапи побудови математичних моделей…….....6
1.3 Використання математичних моделей в теплотехнологіях.….....8
Контрольні питання до розділу 1…….……..8
РОЗДІЛ ІІ. Експеримент. Теорія експерименту …….....11
2.1. Стратегія побудови математичної моделі……..……12
2.2. Планування експерименту. ……..…….13
2.3. Основні етапи планування та проведення експерименту……...13
2.4. Схема «чорного ящика» об’єкту досліджень.……15
Контрольні питання до розділу 2…….....16
РОЗДІЛ ІІІ. Повний факторний експеримент…….....17
3.1 Прийняття рішень перед плануванням експерименту.……17
3.2. Складання плану експерименту……18
3.3 Методика ПФЕ……23
3.4 Властивості факторів ПФЕ. Властивості плану……25
3.5 Статистична обробка результатів експерименту……..27
3.6 Апостеріорний аналіз……..32
Контрольні питання до розділу 3…….....32
РОЗДІЛ IV.Планування експерименту другого порядку. Центральний композиційний план……..33
4.1Порядок побудови матриці планів експерименту методом центрального композиційного планування…….34
4.2 Види матриць плану для ЦКП.……35
4.3 Статистичний аналіз результатів експерименту ЦКП…….38
4.4Апостеріорний аналіз одержаного рівняння…….…39
Контрольні питання до розділу 4…….....40
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ…….……41

ВСТУП

Якісні та кількісні зміни у виробництві, науці і техніці, створюють основу для значного підвищення продуктивності праці й ефективності всього народного господарства. Ці зміни виникають в результаті свідомої, планомірної, науково обґрунтованої діяльності - досліджень, розробки, проектування і виготовлення виробів також запуск, підтримку, перебудову й раціоналізацію виробничих процесів.

Одним із напрямів підвищення продуктивності наукової праці є застосування сучасних математичних методів і технічних засобів, таких, як планування експерименту, математичне моделювання, обчислювальна техніка.

Практична користь наукових теплотехнічних досліджень залежить від методів їхнього проведення та форми, в якій представляються результати. Застосування ефективної технології досліджень дозволяє істотно скоротити фазу впровадження, що дозволить з економити час та кошти.

Для ефективного аналізу та управління виробничими процесами необхідно виявити взаємозв'язки між факторами, що визначають хід процесу, і представити їх у кількісній формі - у вигляді рівняння.

В курсі лекцій «Інженерний експеримент» розглянуто основні плани експериментів. Однак до теперішнього часу, розроблено багато різних планів, розрахованих на рішення завдань різних типів, які враховують специфічні вимоги дослідників. Кожен план володіє своїми особливими властивостями та, насамперед, відповідає певному критерію оптимальності.

РОЗЛІЛ 1
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. ВИДИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Математична модель є математичним відображенням найбільш істотних сторін процесу. Модель являє собою сукупність рівнянь, умов й алгоритмічних правил і дозволяє:

- одержувати інформацію про процеси, які відбуваються в об'єкті;
- розраховувати системи, тобто аналізувати й проектувати їх;
- одержувати інформацію, що може бути використана для управління об'єктом, який моделюється.

1.1 Джерела інформації для побудови математичних моделей

В залежності від джерела інформації, при побудові математичної моделі (рис. 1.1), розрізняють фізико-хімічні моделі (аналітичні або теоретичними) і статистичні або емпіричні моделі.

Рис. 1.1 - Джерела інформації для побудови математичних моделей

У першому випадку за основу беруться фізико-хімічні закономірності процесів, які моделюються, наприклад у вигляді рівнянь балансу або кінетичних рівнянь для перетворень речовини. Побудова (статичних) теоретичних моделей - проведення великих і тривалих досліджень, оскільки при цьому необхідно з'ясувати природу мікропроцесів, які відбуваються в об'єкті, і описати їх математично. Як правило, моделі процесів представляються у вигляді складних систем рівнянь (системи алгебраїчних, звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь у часткових похідних). Вони дозволяють дуже точно описати процеси, що протікають в об'єкті, і допускають екстраполяцію в точки факторного простору, в яких неможливо безпосереднє спостереження цих процесів.

Статистичні моделі одержують в результаті статистичної обробки експериментальних даних, що зібрані на досліджуваному об'єкті. Структура статистичної моделі може вибиратися відносно довільно. Відповідність моделі об'єкту обмежується лише кількісним аспектом. Статистичні моделі мають відносно пряму структуру, дуже часто вони представляються у вигляді поліномів. Область їхнього застосування обмежується найближчою границею робочих крапок, в якій проводяться експерименти.

Прийнято розрізняти статичні (стаціонарні) і динамічні моделі (моделі динаміки).

Стаціонарні моделі (статичні) - не змінюються в часі, співвідношення в об'єкті, динамічні - перехідні процеси, тобто нестаціонарні стани.

1.2 Основні етапи побудови математичних моделей

Виділяють наступні етапи побудови моделі:

1. Постановка завдання

Змістом цього етапу є визначення мети, з'ясування вихідної ситуації, оцінка припустимих витрат часу й засобів, а також установлення типу завдання:

- виявлення структури або параметрів;
- керування об'єктом;
- знаходження оптимальних умов.

2. Збір апріорної інформації

Шляхом вивчення літератури, опитування експертів і т.п. необхідно зібрати й оцінити повним образом всю інформацію, що стосується рішення таких же або подібних завдань і яка має значення для вибору подальшої стратегії.

3. Вибір способу рішення та стратегії його реалізації

На цьому важливому етапі встановлюється тип моделі - статистична або фізико-хімічна і виявляються можливі змінні (фактори), що можуть впливати і вихідні змінні (відгуки, цільові величини). При цьому структура моделі істотно залежить від мети її побудови. Наприклад, якщо завдання полягає в проектуванні має сенс розглядати лише теоретичні моделі. Одночасно формулюються статистичні завдання (вибирається метод оцінювання й пропонуються гіпотези). Будується установка, необхідна для проведення експериментів, і розробляється методика аналізу їхніх результатів. Складаються та налагоджують алгоритми і програми, необхідні для обробки експериментальних даних. Тут же необхідно вирішити, у якому режимі доцільно застосовувати безпосередньо пов'язані з установкою пристрою обробки даних.

4. Перевірка зворотного способу рішення

Для своєчасного виявлення та усунення можливих помилок в постановці завдання, обраній моделі, експериментальній установці, методів аналізу й т.д. ,

а також для економії часу та засобів проводяться попередні експерименти. З їхньою допомогою не тільки перевіряються експериментальна установка та методика, але можна одержати попередню оцінку якості моделі.

5. Реалізація обраного способу рішення

Реалізація перевіреної та скоректованої методики рішення полягає в остаточному встановленні цільових величин і факторів, обсягу вибірок і плану експерименту, кратності повторення досвідів, а також у проведенні експериментів і статистичній обробці їхніх результатів.

6. Аналіз та інтерпретація результатів

На цьому заключному етапі здійснюється статистичний аналіз результатів експерименту і перевіряються точність оцінок параметрів і працездатність робота отриманих моделей. Потім результати інтерпретуються з погляду їх фізико-хімічного або техніко-економічного змісту. У випадку, якщо не досягнута мета дослідження, необхідно проаналізувати причини та обговорити нові варіанти рішення.

1.3 Характеристика методів експериментальних досліджень

Методи наукового дослідження поділяються на аналітичні та синтезуючі

За допомогою аналітичних методів відбирається релевантна інформація із всієї наявної, яка отримана в результаті первинної обробки конкретних даних.

Метод – це сукупність прийомів чи операцій практичного або теоретичного освоєння дійсності, підпорядкованих вирішенню конкретного завдання. Фактично різниця між методом і теорією має функціональний характер: формуючись як теоретичний результат попереднього дослідження, метод виступає як вихідний пункт й умова майбутніх досліджень.

У кожному науковому дослідженні можна виділити два рівні:

емпіричний, на якому відбувається процес накопичення фактів;

теоретичний – досягнення синтезу знань (у формі наукової теорії).

Згідно з цими рівнями *загальні методи пізнання* можна поділити на *три групи,* грані між якими визначені приблизно:

• методи емпіричного дослідження;

• методи, що застосовуються на емпіричному та теоретичному рівнях досліджень;

• методи теоретичних досліджень.

Методи емпіричного дослідження

Спостереження–це систематичне, цілеспрямоване вивчення об'єкта. Спостереження як метод пізнання дає змогу отримати первинну інформацію у вигляді сукупності емпіричних тверджень. Емпірична сукупність утворює первинну схематизацію об'єктів реальності – вихідних об'єктів наукового дослідження.

Порівняння– це процес становлення подібності або відмінностей предметів та явищ дійсності, а також знаходження загального, притаманного двом або кільком об'єктам.

Вимірювання– це визначення числового значення певної величини за допомогою одиниці виміру. Вимірювання передбачає наявність таких основних елементів: об'єкта вимірювання, еталона, вимірювальних приладів, методу вимірювання. Вимірювання розвинулося з операції порівняння, проте воно – більш потужний і універсальний пізнавальний засіб.

Експеримент– це такий метод вивчення об'єкта, за яким дослідник активно й цілеспрямовано впливає на нього завдяки створенню штучних умов або використанню природних умов, необхідних для виявлення відповідної властивості.

Переваги експериментального вивчення об'єкта порівняно зі спостереженням такі:

• у процесі експерименту можна вивчати явище "у чистому вигляді", звільнившись від побічних факторів, які затінюють основний процес;

• в експериментальних умовах можна дослідити властивості об'єктів;

• повторюваність експерименту: можна проводити досліди стільки разів, скільки це необхідно.

Експеримент проводять у таких випадках:

• при виявленні раніше не відомих властивостей об'єкта;

• при перевірці правильності теоретичних розрахунків;

• при демонструванні явища.

У науковому дослідженні експеримент і теорія найтісніше взаємопов'язані, ігнорування експерименту неодмінно призводить до помилок, тому всебічне розгортання експериментальних досліджень є одним із найважливіших шляхів розвитку сучасної науки.

Контрольні питання до розділу 1:

1. Назвіть види математичних моделей.
2. Які існують джерела інформації для побудови математичних моделей?
3. Назвіть основні етапи для побудови математичних моделей.

РОЗДІЛ 2
ЕКСПЕРИМЕНТ. ТЕОРІЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Всі згадувані до цих пір завдання і проблеми не розв'язати без проведення експериментів.

Експеримент займає головне місце серед способів одержання інформації та у внутрішніх взаємозв'язків представлений в природі і техніці. і є відправною крапкою та критерієм більшості наших знань. Експерименти та спостереження представляють основу для відкриття більшості відомих нам законів природи та перевірки теоретичних гіпотез. При збільшенні складності досліджуваних процесів та явищ дуже швидко зростають також витрати на апаратуру і проведення експерименту.

На експериментальні установки, такі, наприклад, як прискорювачі елементарних часток у ядерній фізиці, витрачаються величезні гроші. Для проведення деяких спеціальних експериментів потрібна кількість енергії, яка була б достатня для енергопостачання міста середньої величини. При цьому постійно зростає складність розв'язуваних проблем, а великий обсяг інформації, необхідної для з'ясування внутрішніх взаємозв'язків у природі і техніці, змушує застосовувати електронні пристрої обробки інформації.

Значна частина дослідницьких зусиль при розробці або модернізації технологічних процесів визначається витратами на експерименти.

Широке застосування експериментальних методів привело до створення теорії експерименту.

Теорія експерименту - це розділ математичної статистики, у якому викладені методи організації й проведення досліджень, а також інтерпретації експериментальних результатів.

Розвиток статистичних методів планування експерименту пов'язані з ім'ям Р. А. Фішера. В 1935 р. Фішер опублікував монографію "Планування експерименту" ("DesignofExperiments"), що дала назву новому напрямку досліджень. Роботи Фішера були пов'язані із практичними проблемами агротехнічних досліджень.

Теорія експерименту дає дослідникові точну логічну схему і спосіб рішення завдань на різних етапах дослідження.

2.1 Стратегія побудови математичної моделі

Кожне експериментальне дослідження складається з ряду наступних один за одним етапів (рис. 2.1): формулювання мети, висування гіпотези про досліджуваний об'єкт, планування експериментів, проведення експериментів, обробка та аналіз результатів, перевірка правильності висунутої гіпотези, висування з гіпотези, перевірка умов закінчення експерименту, планування нового експерименту.

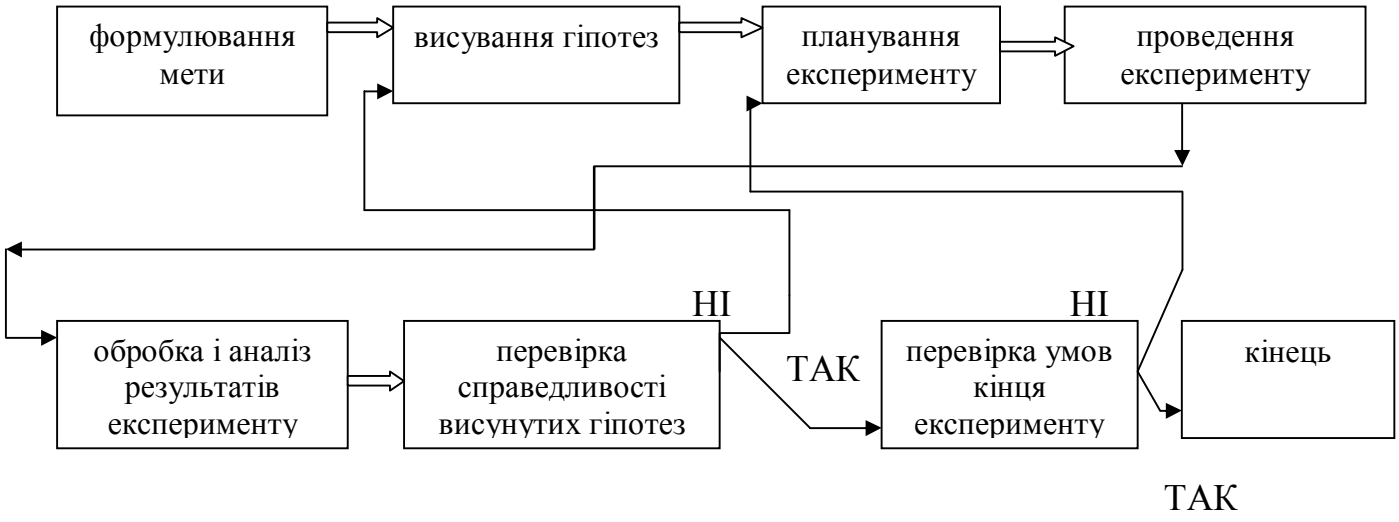


Рис. 2.1 - Стратегія побудови математичної моделі

Із цієї схеми ясно, що дослідження об'єкта складається з повторюваних циклів, причому від циклу до циклу росте обсяг знань про об'єкт, так що можна припустити, що висунуті гіпотези усе більше наближаються до дійсності. Разом з тим зростає також ефективність планування експерименту та всього дослідження.

2.2 Планування експерименту

Планування експерименту - це процедура вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для рішення поставленого завдання з необхідною точністю.

Анотація до книги В.В. Налімова «Математична теорія експерименту». Більшість експериментаторів спочатку проводять спостереження, ставлять досвіди, ..., і лише потім, коли весь матеріал зібраний, починають думати в тім, як його обробити, як витягти потрібну інформацію. Вони, звичайно, знають, що є методи математичної статистики, але згадують про них після проведення експериментів. Важко навіть представити собі, який колосальний збиток це приносить! Губиться даремно час, засоби й, частіше, ніж ми думаємо, престиж: багато робіт відхиляються і далі закриваються внаслідок неграмотно спланованих і тому вони не принесли успіху експериментатору.

Планування експерименту - є одержання найбільш економічним способом найбільш надійних висновків. При цьому висновки (або результати) представляються в стандартній формі, що дає можливістьїх порівняти з результатами, отриманими другими дослідниками.

Планувати експеримент - це означає вибирати оптимальну схему експерименту, що дає можливість одержати інформацію про об'єкт з мінімальним числом дослідів.

2.3 Основні етапи планування та проведення експерименту

Процес планування та проведення експерименту можна розбити на наступні етапи:

1. Формулювання завдання;
2. Вибір параметра оптимізації (залежної змінної);

3. Складання списку факторів, потенційно здатних впливати на параметр оптимізації;

4. Складання списку факторів, що реально беруть участь в експерименті;

5. Вибір плану експерименту;

6. Проведення експерименту та одержання результатів;

7. Статистична обробка результатів експерименту;

8. Інтерпретація результатів.

Планування експерименту дозволяє:

1. Одержати результати у вигляді універсального математичного опису досліджуваного об'єкта з урахуванням дії багатьох факторів, що дає можливість застосовувати результати для різних ситуацій;

2. Зменшити помилку експерименту та виключити вплив факторів, що заважають;

3. Одержати для досліджуваних об'єктів математичний опис, з оптимальними властивостями ;

4. На основі чітких формалізованих правил приймати на різних етапах досліджень рішення в подальших діях;

5. Швидко здійснювати оптимізацію процесів, не прибігаючи до дорогих досліджень механізмів цих процесів;

6. Одержувати кількісні оцінки впливів кожного фактора, а також їхніх взаємодій на досліджуваний процес;

7. Скласти поетапну програму досліджень, у якій на перших етапах виконуються орієнтовні дослідження із залученням великої кількості факторів, зафіксованих на багатьох рівнях, а на заключних етапах -докладні експерименти за участю невеликого числа істотних факторів. Критерії оптимальності та типи експериментальних планів.

2.4 Схема «чорного ящика» об’єкту досліджень

Методи планування експерименту застосовують при проведенні теплотехнічних досліджень у лабораторних умовах, в експериментах на дослідних, напівпромислових і промислових установках. Об'єктами дослідження можуть бути будь-які теплотехнічні процеси ,що відбуваються в апаратах, наприклад, процес сушіння, горіння, генерації тепла, теплообміну, які розглядаються в теорії планування експерименту як керовані процеси залежного від ряду факторів. Наприклад, вологості матеріалу, його кількості, температури теплоносія, швидкості руху теплоносія та іншихфакторів. Розглядаючи процес сушіння можна виділити ряд факторів, що визначають швидкість сушіння: температура теплоносія, вологість матеріалу, дисперсність, швидкість теплоносія.

Якщо розглядати об'єкт дослідження (рис. 2.2), то всі змінні, що визначають стан об'єкта можна розділити на чотири групи:

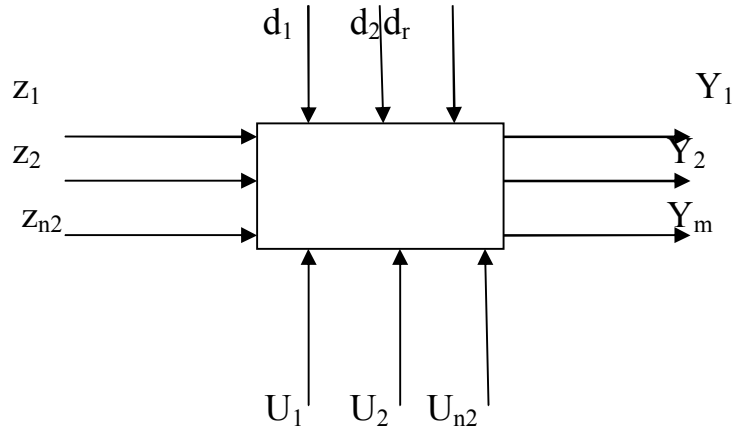


Рис. 2.2 - Схема об'єкту дослідження

Схема чорного ящика (об'єкта дослідження) процесу сушіння:

1. Група Z= (z_1,....,$zп_1$) входять фактори, що характеризують якість сировини або проміжних продуктів і не допускають цілеспрямованої зміни в

ході дослідження. До вхідних і проміжних продуктів відносять вихідні речовини або продукти попередніх ланок технологічного ланцюга. Інформація в значеннях змінних виходить у результаті лабораторних аналізів, вимірів. Група Z – контрольовані керовані змінні, що в процесі експерименту можуть змінюватися згідно плану

2. Група U=(u_1, ...,u_{n2}) контрольовані некеровані змінні - утворюють керовані фактори процесу. З їхньою допомогою реалізується заданий технологічний режим (показання витратомірів, положення установок регуляторів). На значення керованих факторів накладаються технологічні обмеження (обмежується область їх припустимих значень).

Змінні групи X та U будуть об’єднуватися в групу X=(x_1,....$x_п$) - називаються контрольованими вхідними або незалежними змінними процесу.

3. Змінні групи Y=(y1,.....ym) називають вихідними - величини, які характеризують економічну ефективність процесу, техніко-економічні параметри, технологічні властивості, характеристики готових продуктів. Змінні цієї групи виступають як цільові величини при оптимізації процесів. Вихідні змінні в деяких випадках можуть бути якісними і приймати лише кінцеве число дискретних значень (стійкість або нестійкість якого-небудь процесу).

4. Група D=(d1, ...,dr) - неконтрольовані фактори. Вони характеризують діючі на об'єкт збудження, які не можуть бути обчислені кількісно (неконтрольовані домішки в сировину, старіння каталізатора). Вплив неконтрольованих факторів, що повільно змінюються в часі, приводить до дрейфу характеристик об'єкта.

Контрольні питання до розділу 2:

1. Дайте визначення терміну «теорія експерименту».
2. В чому полягає стратегія побудови математичних моделей?
3. Дайте визначення терміну «планування експерименту».
4. Назвіть основні етапи планування та проведення експерименту.

5. Наведіть схему «чорного ящика» (об’єкту досліджень) і змінні, що визначають стан об’єкту.

РОЗДІЛ 3
ПОВНИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

3.1 Прийняття рішень перед плануванням експерименту

ПФЕ виконують з метою побудови математичної регресійної залежності, що об’єднує різні технологічні або інші фактори з параметром,який необхідно визначити. Цей параметр називають функцією мети. Фактори – це параметри, які впливають на суттєве змінення функцій мети. Наприклад, якщо необхідно зменшити вміст водяної пари в продуктах згоряння, то перш за все аналізують фактори, що впливають на утворення H_2O. Із відомих літературних джерел або із власного досвіду відомо, що суттєвий вплив на вміст H_2O в продуктах згоряння палива має:

1 вміст вологи в паливі;

2 вміст вологи в повітрі;

3 кількість водню в паливі.

Також впливати на функцію мети може коефіцієнт надлишку повітря та інші чинники, наприклад, конструкційні параметри спалюваного пристрою. Таким чином, зазначене регресійне рівняння повинно пов′язувати всі перелічені фактори і будується шляхом статистичної обробки результатів експериментів, що виконуються в суворо регламентованих послідовностях та комбінаціях значень факторів. Для того, щоб фактори в рівнянні повною мірою віддзеркалювали реальний фізичний процес, що досліджується, вони повинні відповідати певним властивостям.

Властивості факторів:

1. Фактор заданий, якщо з його назвою задана область його визначення, тобто значення фактору може бути задане у певному інтервалі;

2. Фактор повинен бути керованим (утримуватися на заданому рівні, незалежно від рівнів інших факторів);

3. Операціональним (є послідовність дій, за допомогою яких встановлюються його рівні);

4. Повинна забезпечуватися висока точність заміру фактора;

5. Однозначним (тобто фактор не є функцією інших факторів). Наприклад, швидкість дифузії не може бути прийнята як фактор, тому що вона залежить від ряду факторів: концентрації, площі поверхні зіткнення, коеф-та розчинення);

6. Фактори повинні бути сумісними (безпечними, здійсненними).

Приклади факторів: тиск в експериментальній камері; час витримки призагартовуванні; температура в реакторі; частота зміни води в експ. посудині; вагапіддослідної тварини; тип хворого, спосіб лікування (гомеопатія, фізіотерапія,медикаментозне).

На кінцевому етапі аналізу апріорної (дослідної) інформації:

- складають список факторів, що включають у реальний експеримент;
- вибирають типи факторів; область визначення; область інтересу;точність виміру;
- визначаються ізсхемою експериментальної установки;
- аналізуютьоднофакторнізалежності;вибір інтервалів варіювання. ранжирування факторів;
- конкретизують мету дослідження.

3.2 Складання плану експерименту

ПФЕ називається експеримент, в якому реалізуються всі можливі сполученнярівнів факторів.

Вибір плану визначається метою планованої роботи, типом і кількістю факторів,числом рівнів факторів.

Повинні бути продумані питання, що стосуються можливого числа дослідів, їх здійсненності, наприклад:

1. бажане число дослідів та які обмеження по числу дослідів;
2. бажаний строк проведення експериментів (тривалість усього дослідження);
3. зразкова тривалість одного досліду
4. вартість і витрати праці на проведення одного досліду серії;
5. бажане число рівнів для одного фактора;
6. можливість виконання паралельних дослідів та їхнє бажане число;
7. можливість проведення паралельних вимірів;
8. бажана стратегія проведення дослідів, (наприклад по одному в день).

Планування експерименту

На цьому етапі вибирають експериментальний план, що дозволяє вирішити поставлену задачу – обчислити найкращі оцінки коефіцієнтів рівняння регресії.

Есперимента́льний план – це сукупність експериментів, кожний з яких характеризується набором фіксованих значень керованих змінних.

Повний факторний експеримент реалізує всі неповторні комбінації рівнів ***n*** незалежних змінних, кожна з яких змушено варіюється на двох рівнях.

Число таких комбінацій $\mathbf{N=2^n}$, де *n* – число факторів.

При плануванні експерименту здійснюють перетворення незалежних змінних факторів x_i в безвимірні змінні:

$$x_{\delta i} = \frac{\left(x_i - x_i^*\right)}{\Delta x_i}, \qquad (3.1)$$

де x_i^* - значення керованої змінної, що відповідає початковому базовому режиму;

Δx_i – крок варіювання.

Перехід до безвимірних змінних значно полегшує подальші розрахунки, тому що в цьому випадку верхні та нижні рівні варіювання $x_{ві}$ та $x_{ні}$ у відносних одиницях будуть дорівнювати відповідно:

$x_{ві}=+1, \quad x_{ні}=-1.$

Повний факторний експеримент для $n=3$ представлений в таблиці 3.1

Таблиця 3.1 - Повний факторний експеримент типу 2^3

№ досліду	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	–
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	–
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Три стовпчики (x_1,x_2, x_3) керуємих змінних утворюють план експерименту, а інші стовпчики матриці можна одержати шляхом перемноженням відповідних значень керуємих змінних.

Матрицю планування для ***n=4*** можна побудувати на базі планування 2^3, при повторі цього способу двічі:

перший раз при значеннях x_4, що знаходяться на нижчому рівні, а другий раз – на верхньому.

Аналогічно можна одержати плани для як завгодно більшого числа ***n*** незалежних змінних. Матриця планування для ПФЕ є ортогональною з лінійно незалежними вектор-стовпчиками.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i,j=1}^{N} x_0, b_{ij} x_{ij} = 0; i = 0,1,2,....,k; \\ j = 2^n,\end{array}\right\}, \qquad (3.2)$$

де k+1 – число незалежно оцінюваних коефіцієнтів (в випадку *n=3, k+1=8*).

II. Проведення експерименту.

З метою усереднення вихідної величини ***y*** кожна строка експериментального плану дублюється декілька разів. В випадку ***m*** паралельних дослідів:

$$\bar{y}_g = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{g,i},\ g = 1,2,.....,N. \qquad (3.3)$$

В разі ***m=3***, експеримент поділяється на три серії дослідів, в кожній з яких повністю реалізується ПФЕ. З метою виключення систематичних помилок при обчисленні оцінок коефіцієнтів регресії необхідно ***рандомізувати*** варіанти варіювання в кожній із трьох серій. Рандомізація - за допомогою таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел визначити послідовність реалізації варіантів варіювання змінних в кожній серії дослідів.

Рандомізація проводиться за наступною схемою. Із таблиці рівномірно розподілених чисел (2.4) вибирають числа від 1 до 8 (кожне число вибирають тільки один раз). Ці числа вибирають в тому порядку, в якому вони зустрічаються при послідовному обході стовпчиків таблиці, починаючи з першого.

Таблиця - 3.2 – Рівномірно розподілені випадкові числа

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17	39	29	27	49	45
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02	00	82	29	16	65
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64	35	08	03	36	06
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97	04	43	62	76	59
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77	12	17	17	68	33
66	06	57	47	17	34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85	11	19	92	91	70
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39	23	40	30	97	32
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47	18	62	38	85	79
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09	83	49	12	56	24
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44	35	27	38	84	35
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	37	98
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
83	45	20	96	34	06	28	89	80	83	13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
99	59	46	73	48	37	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86	40	31	81	65	44
80	12	43	56	35	17	72	70	70	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53	14	38	55	37	63
74	35	09	98	17	77	45	27	72	14	43	23	60	02	10	45	52	16	42	37	96	28	60	26	55
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90	94	40	05	64	18
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22	54	38	21	45	98
91	49	91	45	23	68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23	37	08	92	00	48
80	33	69	45	98	26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40	42	05	08	23	41
44	10	48	19	49	85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81	22	22	20	64	13
12	55	07	37	42	11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39	28	70	72	58	15
63	60	64	93	29	16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82	07	20	73	17	90
61	19	69	04	46	26	45	74	77	74	61	92	43	37	29	65	39	45	95	93	42	58	26	05	27
15	47	44	52	66	95	27	07	99	53	59	36	78	38	48	82	39	61	01	18	33	21	15	94	66
94	55	72	85	73	67	89	75	43	87	54	62	24	44	31	91	19	04	25	92	92	92	74	59	73
42	48	11	62	13	97	34	40	87	21	16	86	84	87	67	03	07	11	20	59	25	70	14	66	70
23	52	37	83	18	73	20	88	98	37	68	93	69	14	16	26	25	22	96	63	05	52	28	25	62
04	49	35	24	94	75	24	63	38	24	45	86	25	10	25	61	96	27	93	35	68	73	71	24	72
00	54	99	76	54	64	05	18	81	69	96	11	96	38	96	54	69	28	23	91	23	28	72	95	29
35	96	31	53	07	26	89	08	93	64	33	35	13	54	52	77	97	45	00	24	90	10	33	93	33
59	80	80	83	91	45	42	72	68	42	83	60	94	97	00	13	02	12	48	92	78	56	52	01	06
46	05	88	52	36	01	39	09	22	86	772	28	14	04	77	93	91	08	36	47	70	61	74	29	41
32	17	90	05	97	87	37	92	52	41	05	56	70	70	07	86	74	31	71	57	95	39	41	18	38
69	23	46	14	06	20	11	74	52	04	15	95	66	00	00	18	74	39	24	23	97	11	89	63	38
19	56	54	14	30	01	75	87	53	79	40	41	52	15	85	6	67	43	68	06	84	96	28	52	07
45	15	51	49	38	19	47	60	72	46	43	66	79	45	43	59	04	79	00	33	20	82	66	95	41
94	86	43	19	94	36	16	91	08	51	34	88	88	15	53	01	44	03	54	56	05	51	45	11	76

При рандомізації другої серії експериментів за перший стовпчик таблиці приймається стовпчик, який йде наступним за останнім стовпчиком, що використовувався в попередній серії. Аналогічно здійснюється рандомізація третьої серії дослідів.

Так, послідовність реалізації першої серії ПФЕ буде ***8,4; 1,6; 5,7; 2,3.***

3.3 Методика повного факторного експерименту (ПФЕ)

Метою повного факторного експерименту є одержання лінійної та неповної квадратичної статистичної моделі досліджує мого об'єкта, а саме рівняння регресії.

І Аналіз експерименту

Наприклад, для трьох факторної задачі вид моделі (теоретичного рівняння регресії) має вигляд:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2\ x_2 + b_3x_3 + b_{12}\ x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3\,, \qquad (3.4)$$

де b_1, b_2, b_3 – коефіцієнти, що характеризують ефекти впливу керуємих змінних на цільову функцію;

b_{ij}, b_{123} – коефіцієнти, що характеризують ефекти впливу парних взаємодій змінних та потрійної взаємодії відповідно.

Що ми хочемо одержати як експериментальний результат? Відповідь: Y=f(xi,...,xn). Функціональна залежність повинна бути простою та інформативною. Установлено, що найкраще підходить поліноміальна модель у вигляді рівняння регресії:

$y=b_0+b_1x+b_2x_2+\ldots..+b_ix_i^2$

Коеф-ти рівняння регресії кількісно характеризують вплив кожного фактора на об'єкт дослідження (ОД), а також ефекти взаємодії факторів.

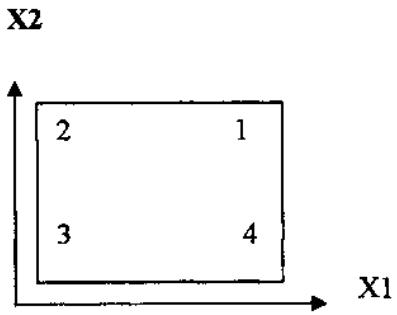
У найпростішому випадку при вивченні впливу 1 фактора одержуємо:

$y= b_0 + b_1x_1$

Тут фактор варіює на 2-х рівнях. Число різних дослідів $N=2^n=2^1=2$.

План повного факторного експерименту ПФЕ 2^2

Кількість факторів: n=2; кількість дослідів $N=2^2=4$



Дослід ставимо в 4-х крапках. Чотирьох досвідів досить для визначення чотирьох коефіцієнтів рівняння регресії:

$y= b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$. Це неповне квадратне рівняння, що описує поверхню, а не площину.

Величини коефіцієнтів залежать від розмірності та від ступеня впливу факторів.

Як виділити чистий вплив фактора? Потрібно звільнитися від одиниць виміру факторів. Цяоперація називається "кодування факторів". Полягає вона в наступному:

Нижній рівень фактора приймаємо за -1; верхній рівень за +1. Середина між ними називається базовим (або основним) рівнем і позначається 0. У результаті факторний простір перетворюється:

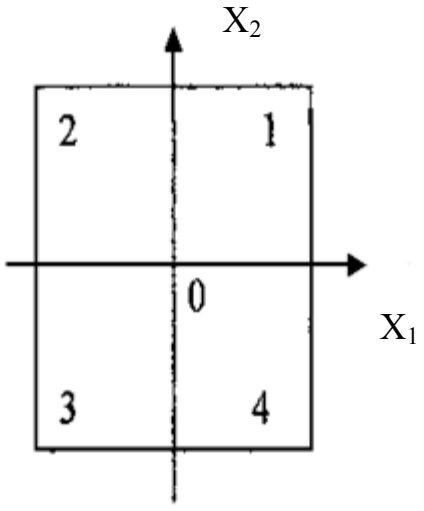


Рисунок 3.1 – Схема координат експериментальних крапок

3.4 Властивості факторів ПФЕ. Властивості плану

Приклад кодування факторів наведено в таблиці 3.3.

Таблиця3.3 - Кодування факторів

Фактори	X_i	X_1	X_2	X_3	X'_i кодоване значення
Верхній рівень	$X_{i\ вер}$	600	12	10	+1
Нижній рівень	$X_{i\ ниж}$	300	4	2	-1
Базовий рівень	$X_{i\ 0}$	450	8	6	0
Шаг варіювання ($X_{мах}$-$X_{сер}$ або $X_{сер}$-$X_{мін}$)	λ_i	150	4	4	+1

Позначення:

x_i- натуральне значення фактора;

x'_i - кодоване значення фактора;

λ_i - крок (інтервал) варіювання (величина, додаток, якої до основного рівня фактора дає значення верхнього рівня, а відрахування від основного - нижній рівень).

Кодоване значення фактора: $x'_i = (x_i - x_{i0})/ \lambda_i$

2. Побудова матриці плану експерименту ПФЕ 2^n та розрахунку коефіцієнтів регресії.

Перелік координат експериментальних крапок утворює план експерименту:

Таблиця 3.4 - План експерименту:

№	x_1	x_2
1	+1	+1
2	-1	+1
3	-1	-1
4	+1	-1

1. Ортогональність: скалярні добутки стовпчиків рівні 0. Коефіцієнти рівнянь регресії визначаються незалежно один від одного; план D-оптимальний.

2. Симетричність (число (+) дорівнює числу (-) по кожному стовпчику). Всі коефіцієнти визначаються з мінімальними та рівними дисперсіями (розподіл похибок експерименту).

3. Властивості нормування: сума квадратів елементів стовпців дорівнює числу дослідів.

Приклад :

Таблиця3.5 - Повна матриця ПФЕ 2^2

№ дослідів	*Вільний коеф-т*	*План експерименту*			*Поміжфакторні взаємодії*				*Результати експерименту*				S_g	S_g^2	?	$(\bar{y}-\hat{y})^2$
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_2X_3	X_1X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$				
1	*+1*	*+1*	*+1*	*+1*												
2	*+1*	*-1*	*+1*	*+1*												
3	*+1*	*+1*	*-1*	*+1*												
4	*+1*	*-1*	*-1*	*+1*												
5	*+1*	*+1*	*+1*	*-1*												
6	*+1*	*-1*	*+1*	*-1*												
7	*+1*	*+1*	*-1*	*-1*												
8	*+1*	*-1*	*-1*	*-1*												
														ΣS_g^2		Σ

3.5 Статистична обробка результатів експерименту.

Число повторних дослідів: **m**

Число різних дослідів: **g**

Усього дослідів: **N = mg**

Оцінка відтворюваності дослідів (по Кохрену табличне):

$$G_{max} = \frac{S^2{}_{g\,max}}{\sum S^2{}_g}\ ; \qquad (3.5)$$

$$S_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{m-1}\ , \qquad (3.6)$$

де $S_g{}^2{}_{max}$ – максимальна дисперсія в стовпчику;

$\sum S_g{}^2$- сума дисперсій стовпчика.

Якщо результати не відтворюються, то причинами є: можливо, що діє сильний неврахований фактор; можливо, що мало повторів.

Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$:

$$bi = (\Sigma\, x_i\, \bar{y}_g)/g. \qquad (3.7)$$

5. Одержуємо рівняння регресії з розрахованими коефіцієнтами.

6. Значимість коефіцієнтів рівняння (за Стьюдентом з табл. 3.6).

$$t_i = \frac{b_i}{\sqrt{S^2(b_i)}}, \quad \text{де: } S^2(b_i) = \frac{S^2}{mg}, \text{ де } S^2 = \frac{\sum S_g^2}{g}. \qquad (3.8)$$

Таблиця 3.6 - t-розподілення за законом Стьюдента

n \ 1 − α	0,99	0,95	0,90	0,80	0,50	0,20
1	63,657	12,706	6,314	3,078	0,727	0,325
2	9,925	4,303	2,920	1,886	9,617	0,289
3	5,841	3,182	2,353	1,638	0,584	0,277
4	4,604	2,776	2,132	1,533	0,569	0,271
5	4,032	2,571	2,015	1,476	0,559	0,267
6	3,707	2,447	1,943	1,440	0,553	0,265
7	3,499	2,365	1,895	1,415	0,549	0,263
8	3,355	2,306	1,860	1,397	0,546	0,262
9	3,250	2,262	1,833	1,383	0,543	0,261
10	3,169	2,228	1,812	1,372	0,542	0,260
11	3,106	2,201	1,796	1,363	0,540	0,260
12	3,055	2,179	1,782	1,356	0,539	0,259
13	3,012	2,160	1,771	1,350	0,538	0,259
14	2,977	2,145	1,761	1,345	0,537	0,258
15	2,947	2,131	1,753	1,341	0,536	0,258
16	2,921	2,120	1,746	1,337	0,535	0,258
17	2,898	2,110	1,740	1,333	0,534	0,257
18	2,878	2,101	1,734	1,330	0,534	0,257
19	2,861	2,093	1,729	1,328	0,533	0,257
20	2,845	2,086	1,725	1,325	0,533	0,257
21	2,831	2,080	1,721	1,323	0,532	0,257
22	2,819	2,074	1,717	1,321	0,532	0,256
23	2,807	2,069	1,714	1,319	0,532	0,256
24	2,797	2,064	1,711	1,318	0,531	0,256
25	2,787	2,060	1,708	1,316	0,531	0,256
26	2,779	2,056	1,706	1,315	0,531	0,256
27	2,771	2,052	1,703	1,314	0,531	0,256
28	2,763	2,048	1,701	1,313	0,530	0,256
29	2,756	2,045	1,699	1,311	0,530	0,256
30	2,750	2,042	1,697	1,310	0,530	0,256
40	2,704	2,021	1,684	1,303	0,529	0,255
60	2,660	2,000	1,671	1,296	0,527	0,254
120	2,617	1,980	1,658	1,289	0,526	0,254
	2,576	1,960	1,645	1,282	0,524	0,253

Якщо фактор не значимий, то, можливо, рівні взяті в області насичення; або інтервал варіювання вузький.

7. Перевірка адекватності (по Фішеру табличне).

$$F = \frac{S^2_{адек}}{S^2}, \qquad (3.9)$$

$$\text{де} S^2_{\text{адек}} = \frac{\left(\sum\left(\bar{y}_g - y'_g\right)^2\right)}{(g-d)},$$

де d - число членів, що залишилися, рівняння, включаючи вільний коефіцієнт;

$\hat{y}_g$ - розрахункове значення функції мети по остаточній формулі, яка визначена.

Якщо модель неадекватна необхідно: змінити інтервали варіювання; вибрати більш складний план.

Перевірка гіпотези про адекватність відбувається з використанням ***F – критерія Фішера*** (табл. 3.7,3.8), котрий дозволяє перевірити нуль-гіпотезу про рівність двох генеральних дисперсій $\sigma^2_{адек}$ та $\sigma^2(y)$. Щоб перевірити гіпотезу адекватності подання результатів експерименту знайденим рівнянням регресії, достатньо оцінити відхилення передбаченої рівнянням регресії вихідної функції $\hat{y}_g$ від результатів експерименту y_g в тих же точках z_g факторного простору.

В багатьох практичних задачах взаємодії другого та вищих порядків відсутні або зневажливо малі. Крім того, на перших етапах дослідження часто необхідно одержати в першому наближенні лише лінійну апроксимацію досліджуємого рівняння зв′язку при мінімальній кількості експериментів. Тому використовувати ПФЕ для визначення коефіцієнтів лише при лінійних членах неефективно через реалізації великої кількості варіантів варіювання $\mathbf{2^n}$, особливо при великій кількості факторів ***n***.

Таблиця – 3.7 2,5% верхні границі для величини F в залежності від чисел ступенів свободи ν_1 та ν_2

ν_2	ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,8	799,5	864,1	899,5	921,8	937,1	948,2	956,6	963,2	968,6	976,6	984,8	993,1	997,2	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
2	38,50	39,00	39,16	39,24	39,29	39,33	39,35	39,37	39,38	39,39	39,41	39,43	39,44	39,45	39,46	39,47	39,48	39,49	39,49
3	17,44	16,04	15,43	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,41	14,33	14,25	14,16	14,12	14,08	14,08	13,99	13,94	13,90
4	12,21	10,64	9,979	9,604	9,364	9,197	9,074	8,979	8,904	8,843	8,751	8,655	8,559	8,510	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
5	10,01	8,433	7,763	7,387	7,146	6,977	6,853	6,757	6,681	6,619	6,524	6,422	6,328	6,278	6 226	6,175	6,122	6,069	6,015
6	8,813	7,259	6,598	6,227	6,987	5,819	5,695	5,599	5,523	5,461	5,366	5,268	5,168	5,117	5,065	5,012	4,958	4,904	4,849
7	8,072	6,541	5,889	5,522	5,285	5,118	4,994	4,899	4,823	4,761	4,665	4,567	4,466	4,415	4,362	4,308	4,254	4,198	4,142
8	7,570	6,059	5,416	5,052	4,817	4,651	4,528	4,433	4,357	4,295	4,199	4,101	3,999	3,947	3,894	3,839	3,784	3,727	3,670
9	7,209	5,714	5,078	4,718	4,484	4,319	4,197	4,102	4,026	3,963	3,868	3,769	3,666	3,614	3,560	3,505	3,449	3,391	3,332
10	6,936	5,456	4,825	4,468	4,236	4,072	3,949	3,854	3,779	3,716	3,620	3,521	3,418	3,365	3,311	3,255	3,198	3,139	3,079
11	6,724	5,255	4,630	4,275	4,044	3,880	3,758	3,663	3,587	3,525	3,429	3,329	3,226	3,172	3,117	3,061	3,003	2,944	2,882
12	6,553	5,095	4,474	4,121	3,891	3,728	3,606	3,511	3,435	3,373	3,227	3,177	3,072	3,018	2,963	2,906	2,847	2,787	2,724
13	6,411	4,965	4,347	3,995	3,766	3,604	3,482	3,388	3,312	3,294	3,153	3,052	2,947	2,893	2,837	2,779	2,720	2,659	2,595
14	6,297	4,856	4,241	3,891	3,683	3,501	3,379	3,285	3,209	4,146	3,050	2,949	2,843	2,788	2,732	2,673	2,614	2,651	2.487
15	6,199	4,765	4,152	3,804	3,576	3,414	3,293	3,198	3,122	3,060	2,963	2,862	2,755	2,700	2,643	2,585	2,524	2,461	2,395
16	6,155	4,686	4,076	3,729	3,502	3,340	3,219	3,124	3,048	2,986	2,889	2,787	2,680	2,625	2,567	2,508	2,447	2,383	2,316
17	*6,042*	*4,618*	*4,012*	*3,664*	*3,437*	*3,276*	*3,155*	*3,061*	*2,984*	*2,922*	*2,824*	*2,723*	*2,615*	*2,559*	*2,502*	*2,442*	*2,380*	*2,315*	*2,247*
18	5,978	4,559	3,953	3,608	3,382	3,220	3,099	3,005	2,929	2,866	2,786	2,666	2,559	2,502	2,444	2,384	2,321	2,255	2,185
19	5,921	4,507	3,903	3,558	3,332	3,171	3,050	2,956	2,880	2,817	2,719	2,617	2,508	2,452	2,393	2,332	2,269	2,203	2,133
20	5,871	4,461	3,858	3,514	3,289	3,128	3,007	2,912	2,836	2,773	2,675	2,573	2,464	2,407	2,348	2,287	2,223	2,156	2,085
21	5,286	4,419	3,818	3,474	3,250	3,089	2,968	2,874	2,797	2,734	2,636	2,533	2,424	2,367	2,306	2,246	2,181	2,114	2,042
22	5,786	4,382	3,782	3,440	3,215	3,054	2,933	2,839	2,762	2,699	2,601	2,498	2,389	2,331	2,271	2,209	2,144	2,076	2,033
23	5,749	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,807	2,731	2,668	2,569	2,466	2,356	2,298	2,238	2,176	2,110	2,041	1,967
24	5,716	4,318	3,721	3,379	3,154	2,994	2,873	2,779	2,702	2,639	2,541	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,079	2,009	1,935
25	5,686	4,290	3,694	3,353	3,128	2,968	2,847	2,753	2,676	2,613	2,514	2,411	2,300	2,242	2,181	2,118	2,051	1,981	1,905
26	5,658	4,265	3,669	3,328	3,104	2,944	2,824	2,729	2,652	2,589	2,490	2,386	2,275	2,217	2,156	2,092	2,025	1,954	1,878
27	5,633	4,242	3,647	3,306	3,082	2,922	2,802	2,707	2,630	2,567	2,468	2,364	2,253	2,194	2,133	2,069	2,001	1,929	1,852
28	5,609	4,220	3,626	3,286	3,062	2,902	2,782	2,687	2,610	2,547	2,448	2,343	2,232	2,173	2,112	2,047	1,979	1,907	1,829
29	5,587	4,200	3,607	3,267	3,043	2,884	2,763	2,668	2,591	2,529	2,429	2,324	2,213	2,154	2,092	2,027	1,959	1,886	1,807
30	5,567	4,182	3,589	3,249	3,026	2,966	2,746	2,651	2,574	2,511	2,412	2,307	2,195	2,135	2,073	2,009	2,940	1,866	1,786
40	5,423	4,051	3,463	3,126	2,903	2,744	2,623	2,528	2,451	2,388	2,288	2,181	2,067	2,006	1,942	1,875	1,802	1,724	1,637
60	5,258	3,925	3,342	3,007	2,786	2,627	2,506	2,411	2,334	2,270	2,160	1,061	1,944	1,881	1,815	1,744	1,666	1,581	1,482
120	5,152	3,804	3,227	2,894	2,567	2,675	2,394	2,299	2,221	2,157	2,054	1,945	1,824	1,759	1,689	1,614	1,529	1,432	1,310

Таблиця – 3.8 5% верхні границі для величини F в залежності від чисел ступенів свободи ν_1 та ν_2

ν_2	ν_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	40	75	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	253	253	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,57	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,68	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,42	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,72	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,29	3,28	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,00	2,98	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,77	2,76	2,71
10	4,96	4.10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,61	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,47	2,45	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,36	2,35	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,28	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,21	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,04	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,00	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	1,96	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,92	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,89	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,87	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,20	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,84	1,82	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,82	1,80	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,16	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,80	1,77	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,78	1,76	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,13	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,76	1,74	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,75	1,72	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,71	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,69	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,51	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,61	1,59	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,50	1,48	1,39
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,83	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,39	1,36	1,25

3.6 Апостеріорний аналіз

1.Аналіз рівняння: лінійні ефекти та ефекти взаємодій. Лінійні ефекти – перед $x_1, x_2 \ldots\ldots x_3$ в рівнянні присутні коефіцієнти. В залежності від їх величини та знаку перед коефіцієнтами можна оцінювати їх вплив на цільову функцію рівняння.

Аналіз рівняння виконують починаючи з побудови рейтингу впливу коефіцієнтів при лінійних факторах , тобто при x_1, x_2, x_3.

Найбільше значення по модулю має коефіцієнт при найбільш впливовому факторі.

2. Наступний етап - визначення напряму функціонального впливу. Якщо коефіцієнт при факторі має знак «плюс», то вплив прямопропорційний, якщо «мінус» - зворотньопропорційний.

Слід зауважити, що отримані шляхом регресійного аналізу рівняння можуть адекватно відображати функціональний зв′язок досліджуваних факторів та цільової функції для конкретних умов виконання технологічного процесу та не можуть бути узагальнені для усіх випадків реалізації аналогічних процесів. При зміні діапазону значень досліджуваних факторів їх вплив на цільову функцію (у), тобто величини коефіцієнтів та їх знаків будуть змінюватися.

3. Визначити напрями оптимізації цільової функції.

Контрольні питання до розділу 3:

1. Що таке повний факторний експеримент? Де його використовують;
2. Властивості факторів ПФЕ.
3. В чому полягає методика ПФЕ?
4. Назвіть властивості плану ПФЕ.
5. З яких етапів складається статистична обробка результатів експерименту.
6. Що таке апостеріорний аналіз? Для чого його використовують?

РОЗДІЛ 4
ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЦЕНТРАЛЬНЕ КОМПОЗИЦІЙНЕ ПЛАНУВАННЯ

Плануванням експерименту другого порядку називають таке планування, котре дозволяє одержати математичну модель об′єкту, що досліджують в вигляді повного полінома другого порядку

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{\substack{i,f=1 \\ i \neq f}}^{n} b_{if} x_i x_f + \sum_{i=1}^{n} b_i x^2{}_i \qquad (4.1)$$

На відміну від лінійних планів, ознакою планів другого порядку є те, що в останніх варіація факторів відбувається на декількох рівнях, як мінімум на трьох.

Експериментальні плани другого порядку є *композиційними* – до їх складу входить декілька блоків, які реалізуються послідовно:

А) ПФЕ або ДФЕ;

Б) центральні крапки, що розташовані на початку координат факторного простору безвимірних змінних;

В) так звані зіркові крапки, координати яких дорівнюють нулю, за виключенням однієї, котра приймає значення +α та –α, де α – зіркове плече.

Експериментальні плани другого порядку можуть бути класифіковані виходячи з закладених в них критеріїв оптимальності. Вибір відповідного плану вирішується дослідником до проведення експерименту.

4.1 Порядок побудови матриці планів експерименту методом центрального композиційного планування

Кількість дослідів в ПФЕ визначається рівнянням 2^n, де n - кількість факторів. При великій кількості факторів кількість дослідів згідно з цією залежністю значно збільшується. Для скорочення числа дослідів Бокс та Уілсон запропонували метод центрального композиційного планування. Ймовірно, що при значній кількості факторів, кривизна поверхні відгуку (у) зростає та її неможливо описати поверхнею, яку одержують за допомогою планів першого порядку. В такому випадку розрахунок адекватності моделі, як правило дає негативний результат, тому для більш ретельного дослідження складної поверхні відгуку доводиться використовувати плани другого порядку в яких фактори варіюються на трьох рівнях. Для скорочення кількості дослідів Боксом і Уілсоном запропоновано ідею добудови плану навколо основного рівня дослідів ПФЕ. Таким чином отримане ЦКП точки ПФЕ називають головною композицією. Точки на вісях факторного простору – зірковими точками (α). В центрі факторного простору - центральна точка. Відстань між центральною та зірковою точками називають – зірковим плечем.

План центрального композиційного досліду складається з:

2^n (ПФЕ)+2n(зіркові точки)+центральна точка - кількості дослідів.

Зіркові плечі для числа факторів n представлені в таблиці 4.1

І Аналіз експерименту

Таблиця 4.1 - Зіркові плечі для числа факторів n

n (число факторів)	2	3	4	5
α (зіркове плече) табличні значення (в довідковій л-рі)	1	1,215	1,414	1,547

Порядок побудови матриці планування експерименту методом ЦКП:

1) будуємо головну композицію за ПФЕ, яка складає 2^n строк (тобто дослідів);
2) доповнюємо її $2n$ строк з зірковими точками;
3) доповнюємо одержаний план однією строкою з центральними точками (всі значення факторів $x_i=0$).

Таким чином для трьох факторного плану кількість строк (дослідів) дорівнює $2^3+2\cdot3+1=15$.

4.2 Види матриць плану для ЦКП

Загальний вигляд матриці планування наведено в таблиці 4.2

Таблиця 4.2 - Загальний вигляд матриці планування

№ досліду	X_1	X_2	X_3
1	-1	-1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1
5	-1	-1	-1
6	-1	+1	+1
7	+1	-1	+1
8	+1	+1	-1
9	-α	0	0
10	+α	0	0
11	0	-α	0
12	0	+α	0
13	0	0	-α
14	0	0	+α
15	0	0	0

Значення в дослідах відповідають:

-α, +α фізичним величинам факторів x_i в зіркових точках;

0 - фізичним величинам факторів x_i на середньому рівні;

-1 - фізичним величинам факторів x_i на нижньому рівні;

+1 - фізичним величинам факторів x_i на верхньому рівні.

Матриця планування та розрахунку коефіцієнтів регресії в загальному вигляді (для *n* числа факторів) має вигляд (табл. 4.3):

Таблиця 4.3 - Матриця планування та розрахунку коефіцієнтів регресії в загальному вигляді (для *n* числа факторів)

№	x_0	x_1	x_2	…	x_n	x_1x_2	…	$x_{n-1}x_n$	x_1^2	x_2^2	…	X_n^2
1	1	-1	-1	…	-1	+1	…	+1	+1	+1	…	+1
2	1	+1	-1	…	-1	-1	…	+1	+1	+1	…	+1
3	1	-1	+1	…	-1	-1	…	+1	+1	+1	…	+1
4	1	+1	+1	…	-1	+1	…	+1	+1	+1	…	+1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2^n	1	+1	+1	…	+1	+1	+1	+1	+1	+1	…	+1
2^n+1	1	-α	0	…	0	0	0	0	α^2	0	…	0
2^n+2	1	+α	0	…	0	0	0	0	α^2	0	…	0
2^n+3	1	0	-α	…	0	0	0	0	0	α^2	…	0
2^n+4	1	0	+α	…	0	0	0	0	0	α^2	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	….
2^n+2n-1	1	0	0	…	-α	0	0	0	0	0	…	α^2
2^n+2n	1	0	0	…	+α	0	0	0	0	0	…	α^2
2^n+2n+1	1	0	0	…	0	0	0	0	0	0	…	0

План має порушення двох типів:

1) $\sum x_0 x_i^2 \neq 0$;

2) $\sum x_i^2 x_j^2 \neq 0$.

Ортогональність – сума добутків факторів в стовбчиках повинно дорівнювати нулю. Порушення ортогональності усувається, якщо прийняти що $x'^2_i = x_i^2 - (2^n + 2\alpha^2)/(2^n + 2n + 1)$.

Для $n=2$, $\theta = (2^2 + 2\alpha^2)/(2^2 + 2 \cdot 2 + 1) = 2/3$.

Підставимо в план замість $x'^2_i = 1 - \theta$.

Для $n=2$ маємо: 1-2/3=1/3.

Там де $x'^2_i = \alpha^2$, слід записати: $\alpha^2 - \theta = \frac{1}{3}$.

Там де $x'^2_i = 0$, запишемо $0 - \theta = -\frac{2}{3}$.

Для двохфакторного плану одержимо наступну матрицю (табл.4.4):

Таблиця 4.4 – Матриця для двохфакторного плану

№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x'^2_1	x'^2_2
1	+1	-1	-1	+1	1/3	1/3
2	+1	+1	-1	-1	1/3	1/3
3	+1	-1	+1	-1	1/3	1/3
4	+1	+1	+1	+1	1/3	1/3
5	+1	+α	0	0	1/3	-2/3
6	+1	-α	0	0	1/3	-2/3
7	+1	0	+α	0	-2/3	1/3
8	+1	0	-α	0	-2/3	1/3
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3

В вектор-стовпчиках для квадратичних членів наведені перетворені значення $x'^2_1 = x_1^2 - \theta$; $x'^2_2 = x_2^2 - \theta$.

4.3 Статистичний аналіз результатів експерименту ЦКП

Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії виконують за формулами:

$$b_0 = \frac{\sum \bar{y}_g}{g};\quad b_i = \frac{\sum x_{ig}\bar{y}_g}{\sum x_{ig}^{\,2}};\qquad b_{ij} = \frac{\sum x_{ig}x_{jg}\bar{y}_g}{\sum (x_{ig}x_{jg})^2};\qquad b_{ii} = \frac{\sum x^2{}_{ig}\ \bar{y}_g}{\sum (x^2{}_{ig})^2}$$

де g – кількість різних дослідів (число строк).

В цій матриці замість x_i^2 представлені $x_i^2 - \theta$, тому якщо повертатися до звичайних кодованих факторів b_0 зміниться $b'_0 = b_0 - \sum b_{ii}x_i'^2$. Для двох факторів $b'_0 = b_0 - \frac{2}{3}(b_{11} + b_{22})$. Рівняння для будь-якого числа факторів має вигляд:

$$Y = b_0 - \frac{2}{3}(b_{11} + b_{22}) + \sum b_i x_i + \sum b_{ij}x_{ij} + \sum b_{ii}x_i^{\,2}.$$

Дисперсії : $S^2(b_0) = \frac{S^2}{N};\quad S^2 = \frac{\sum S^2{}_g}{g};$

$$S^2(b_i) = \frac{S^2}{((2^n + 2\alpha^2)\cdot m)};$$

$$S^2(b_{i\,j}) = \frac{S^2}{2^n \cdot m};$$

$$S^2(b_{ii}) = \frac{S^2}{2\alpha^4 \cdot m}.$$

Дисперсія коефіцієнтів відрізняється за значенням.

Розрахунок відтворюваності, значимості та адекватності виконується так само, як і в ПФЕ.

Приклад матриці планування трьох факторного експерименту наведено в таблиці 4.5.

В таблиці $\alpha = 1{,}215;\ \alpha^2 = 1{,}4762;\ x_i'^2 = 0{,}7302 = \theta;\ 1 - \theta = 0{,}2698;\ \alpha^2 - \theta = 0{,}746.$

Таблиця 4.5 – Матриця для трьох факторного плану

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x'^2_1	x'^2_2	x'^2_3
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2698	0,2698	0,2698
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0,2698	0,2698	0,2698
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0,2698	0,2698	0,2698
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	0,2698	0,2698	0,2698
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,2698	0,2698	0,2698
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	0,2698	0,2698	0,2698
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	0,2698	0,2698	0,2698
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	0,2698	0,2698	0,2698
9	+1	+1,215	0	0	0	0	0	0,746	-0,7302	-0,7302
10	+1	-1,215	0	0	0	0	0	0,746	-0,7302	-0,7302
11	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,7302	0,746	-0,7302
12	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,7302	0,746	-0,7302
13	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,7302	-0,7302	0,746
14	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,7302	-0,7302	0,746
15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,7302	-0,7302	-0,7302

4.4 Апостеріорний аналіз одержаного рівняння

1.Аналіз рівняння: лінійні ефекти та ефекти взаємодій. Лінійні ефекти – перед $x_1, x_2 \ldots\ldots x_3$ в рівнянні присутні коефіцієнти. В залежності від їх величини та знаку перед коефіцієнтами можна оцінювати їх вплив на цільову функцію рівняння.

Аналіз рівняння виконують починаючи з побудови рейтингу впливу коефіцієнтів при лінійних факторах , тобто при x_1, x_2, x_3.

Найбільше значення по модулю має коефіцієнт при найбільш впливовому факторі.

2. Наступний етап - визначення напряму функціонального впливу. Якщо коефіцієнт при факторі має знак «плюс», то вплив прямопропорційний, якщо «мінус» - зворотньопропорційний.

Слід зауважити, що отримані шляхом регресійного аналізу рівняння можуть адекватно відображати функціональний зв′язок факторів, що досліджують та цільової функції для конкретних умов виконання технологічного процесу та не можуть бути узагальнені для усіх випадків реалізації аналогічних процесів. При зміні діапазону значень досліджуваних факторів їх вплив на цільову функцію (у), тобто величини коефіцієнтів та їх знаків будуть змінюватися.

3. Визначити напрями оптимізації цільової функції.

Контрольні питання до розділу 4:

1. В чому полягає планування експерименту другого порядку?
2. Які задачі вирішують методом ЦКП?
3. Який порядок побудови планів методом ЦКП?
4. Який має вигляд загальне рівняння для ПФЕ?
5. Який має вигляд загальне рівняння для ЦКП?
6. З яких блоків складається матриця плану ЦКП?
7. З яких етапів складається статистична обробка експерименту для ЦКП?
8. За якою формулою виконують оцінку відтворюваності дослідів в ЦКП?
9. За якою формулою визначають значимість коефіцієнтів в ЦКП?
10. Як виконують апостеріорний аналіз одержаного рівняння для ЦКП?
11. Що таке «зіркове плече»? В яких розрахунках його використовують?
12. Для чого здійснюють в ПФЕ та ЦКП кодування факторів?
13. Наведіть формули для розрахунків коефіцієнтів рівняння регресії для ПФЕ та ЦКП.
14. За якими формулами визначають кількість дослідів в ПФЕ та ЦКП?

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. - М.: Мир, 1977. – 541 с.

2. Адлер Ю.П., Маркова ЕВ., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1976. - 279 с.

3. Адлер Ю.Л., Горский В.Г. Планирование промышленных экспериментов. - М.: Металлургия, 1974 - 264с

4. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. - М.: Металлургия, 1976 - 128 с.

5. Мельников С.В. и др. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов. - М.: Колос, 1980. - 168с.

6. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: для втузов. - М.: Радио и связь, 1983.-248с.

7. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. - Л.: Судостроение, 1980. -384 с.

8. Джонсон Н. и др. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. - М.: Мир, 1981. - 520 с.

9. Хикс Ч. Р. Основные принципы планирования эксперимента. - М.: Мир, 1967.

10. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей. - М.: Наука, 1973.

11. Маркова Е.В. (разработчик). Руководство по применению латинских планов при планировании эксперимента с качественными факторами. - Челябинск, 1971. (материал изложен в рецептурном плане).

12. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Інженерний експеримент» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня спеціальності 144 «Теплоенергетика» очної та заочної форм навчання

Укладач: д.т.н., професор Горбунов О.Д.
Відповідальний за випуск: д.т.н., проф. Горбунов О.Д.
Рецензент: к.т.н., доцент Клімов Р.О.

Підписано до друку _____ 2016 р. Формат 60/84 1/16
Обсяг_____ д.а. Тираж___ прим.
51918, м. м. Кам’янське, вул. Дніпробудівська, 2