

І.Д. Пукальський, І.П. Лусте, Б.О. Яшан

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

(опорний конспект лекцій
та практикум)



І.Д. Пукальський, І.П. Лусте, Б.О. Яшан

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

І.Д. Пукальський, І.П. Лусте, Б.О. Яшан

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

(опорний конспект лекцій та практикум)

Навчальний посібник



Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2022

УДК 519(075.8)

П 883

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 6 від 26 травня 2022 року)

Рецензенти:

Тетяна Штерма – кандидат економічних наук, доцент, декан факультету інформаційних технологій та економіки ПВНЗ «Буковинський університет»;

Семчук Аркадій – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методики викладання природничо-математичних дисциплін ІППОЧО.

Пукальський І.Д., Лусте І.П., Яшан Б.О.

П 883 Вища математика для економістів (опорний конспект лекцій та практикум) : навч. посібник / І.Д. Пукальський, І.П. Лусте, Б.О. Яшан. – Чернівці : Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. – 420 с.

У навчальному посібнику подається теорія, приклади та задачі з основних розділів вищої математики – лінійної алгебри та аналітичної геометрії, векторної алгебри, теорії границь, диференціального та інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних, диференціальних рівнянь.

До кожної теми пропонуються систематизовані добірки задач для самостійного розв’язування, що мають тренувальний і контролюючий характер.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519(075.8)

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2022

© Пукальський І.Д., Лусте І.П., Яшан Б.О., 2022

Передмова

Навчальний посібник відповідає програмі з вищої математики економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Теоретичний матеріал містить означення, формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв'язання типових задач із застосуванням зазначених теоретичних відомостей. Виклад теоретичного матеріалу підпорядкований розкриттю змісту кожного поняття, його прикладного значення.

При підготовці навчального посібника автори намагалися задовольнити сучасним вимогам у підготовці спеціалістів з урахуванням обраного студентами фаху.

Навчальний посібник містить 14 тем, після кожної з яких представлені завдання в 30 варіантах. Це дає можливість запропонувати ці завдання як контрольні або самостійні наприкінці кожної з тем для контролю рівня засвоювання вивченого матеріалу. До кожного комплексу завдань приведений приклад розв'язання типового варіанту.

Автори сподіваються, що запропонований навчальний посібник дозволить підвищити якість навчання та стане до нагоди як студентам, так і викладачам.

Зміст

Тема 1. Матричне числення. Основні поняття й означення	6
Тема 2. Визначники квадратних матриць. Обернена матриця	13
Завдання для самостійної роботи	22
Тема 3. Системи лінійних рівнянь	29
Завдання для самостійної роботи	40
Тема 4. Елементи векторної алгебри	48
Завдання для самостійної роботи	58
Тема 5. Рівняння прямої на площині	62
Завдання для самостійної роботи	71
Тема 6. Площина і пряма в просторі	85
Завдання для самостійної роботи	94
Тема 7. Лінії другого порядку	100
Завдання для самостійної роботи	114
Тема 8. Послідовності, функції та їх границі	121
Завдання для самостійної роботи	138
Тема 9. Диференціальне числення функції однієї змінної	150
Завдання для самостійної роботи	165
Тема 10.Застосування похідної до дослідження функцій	186
Завдання для самостійної роботи	207
Тема 11.Невизначений інтеграл	230
Завдання для самостійної роботи	250
Тема 12.Визначений інтеграл та його застосування . . .	282
Завдання для самостійної роботи	302
Тема 13.Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функцій багатьох змінних	329

Завдання для самостійної роботи	343
Тема 14.Елементи теорії диференціальних рівнянь . . .	372
Завдання для самостійної роботи	389
Література	419

Тема 1. Матричне числення. Основні поняття й означення

Основні відомості про матриці

Поняття матриці та заснований на ньому розділ математики – *матрична алгебра* – мають дуже велике значення для економістів, оскільки значна частина математичних моделей економічних об'єктів та процесів записується в простій, компактній матричній формі.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків і n стовпчиків. Числа, з яких складається матриця, називаються *елементами* матриці. Наприклад,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

В скороченому запису $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Види матриць: Матриця, яка складається з одного лише рядка, називається *матрицею (вектором) – рядком*, а з одного стовпчика – *матрицею (вектором) – стовпчиком*:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \quad - \quad \text{матриця-рядок},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матриця-стовпець}.$$

Матриця називається *квадратною матрицею n -го порядку*, якщо число її рядків дорівнює числу стовпчиків і дорів-

ное n . Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{квадратна матриця 3-го порядку.}$$

Елементи матриці a_{ii} (номер стовпця дорівнює номеру рядка) називаються *діагональними*: це елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ – вони утворюють головну діагональ. Інші елементи називаються *недіагональними*. Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють 0, то матриця називається *діагональною*:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо у діагональній матриці n -го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то матриця називається *одиничною* матрицею n -го порядку і позначається буквою E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{одинична матриця 4-го порядку.}$$

Матриця довільного розміру називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють 0:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий розмір і в них рівні однаково розміщені елементи.

Операції над матрицями

I. Множення матриці на число. Добутком матриці A на число k називається матриця $B = kA$, елементи якої $b_{ij} = ka_{ij}$ для $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Наслідок. Спільний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак матриці.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

II. Додавання матриць. Сумою двох матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C = A + B$ розміру $m \times n$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (тобто матриці додаються поелементно):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

III. Різниця матриць. Різниця двох матриць однакового розміру $m \times n$ визначається через попередні операції: $C = A - B = A + (-1) \cdot B$, причому C також розміру $m \times n$.

IV. Множення матриць. Множення матриці A на матрицю B можливо тільки тоді, коли число стовпчиків першої матриці (A) дорівнює числу рядків другої (B), такі матриці називаються *узгодженими*. Тоді *добутком* матриць A і B називається така матриця C , кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B .

(тобто, елемент c_{23} матриці C – це сума добутків елементів 2-го рядка матриці A на елементи 3-го стовпця матриці B).

Наприклад:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{3 \times 1} = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Для операції над матрицями справедливі наступні **властивості**:

- 1) комутативність: $A + B = B + A$;
- 2) асоціативність: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) дистрибутивність: $k(A + B) = kA + kB$;
- 4) $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- 5) $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$;
- 6) $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$;
- 7) $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$.

Ці властивості подібні до властивостей операцій над числами. Але є і деякі специфічні властивості:

а) Якщо добуток матриць $A \cdot B$ існує, то добуток $B \cdot A$ може і не існувати (оскільки можливість провести операцію добутку матриць пов'язана з розмірами матриць-множників).

б) Якщо ж добутки AB і BA існують, то вони можуть бути матрицями різних розмірів:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}c_{11} &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3, \\c_{12} &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5, \\c_{21} &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9, \\c_{22} &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7,\end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Але

$$\underbrace{B \cdot A}_{\substack{3 \times 2 \quad 2 \times 3 \\ 3 \times 3}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

в) Навіть у випадку, коли існують добутки AB і BA , і ці обидві матриці (AB і BA) одного розміру, *комутативний закон множення, взагалі кажучи, не виконується*, тобто $AB \neq BA$.

У частинному випадку властивістю комутативності володіє добуток будь-якої квадратної матриці A n -го порядку на одиничну матрицю E того ж порядку: $AE = EA = A$. Отже, одинична матриця грає ту ж роль, що і одиниця при множенні чисел.

V. Піднесення до степеня. Цілим додатним степенем A^m ($m > 1$) квадратної матриці A називається добуток m матриць, рівних A :

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ разів}}.$$

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$. Легко показати, що $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$, $(A^n)^m = A^{nm}$.

Відмітимо, що операція піднесення до степеня визначена тільки для квадратних матриць. З рівності $A^m = 0$ не випливає, що $A = 0$.

VI. Транспонування матриць. Транспонування матриці A – це перехід до матриці A^T , в якій стовпцями є рядки матриці A , а рядками – стовпці:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(kA)^T = kA^T$;
- 3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Розглянуті вище операції над матрицями дозволяють спростити розв'язання деяких економічних задач.

Приклад 1. Підприємство випускає продукцію 3-х видів: P_1, P_2, P_3 і використовує сировину 2-х типів: S_1 і S_2 . Норми затрат сировини характеризуються матрицею

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

де кожен елемент a_{ij} показує скільки одиниць сировини j -го типу витрачається на виробництво одиниці продукції i -го типу ($a_{11} = 2 \Rightarrow$ на виробництво одиниці продукції 1-го типу P_1 витрачається 2 одиниці сировини 1-го типу S_1 і т.д.). План випуску продукції задано матрицею-рядком $C_{1 \times 3} =$

$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$, вартість одиниці кожного типу сировини (грош. од.) – матрицею-стовпцем $B_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Визначити затрати сировини, необхідні для планового випуску продукції, та загальну вартість сировини.

Розв'язання. Затрати сировини на плановий випуск продукції підрахуємо за допомогою множення матриць A і C .
 $\begin{matrix} & & 3 \times 2 & 1 \times 3 \\ & & A & C \end{matrix}$
 Для того, щоб їх можна було перемножити, ми повинні їх записати в такому порядку (див. на їх розміри!)

$$\begin{aligned} S_{1 \times 2} &= C_{1 \times 3} \cdot A_{3 \times 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{1 \times 2} &= \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 100 \cdot 2 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 & 100 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 130 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ сировини 1-го типу потрібно 730 одиниць, 2-го типу – 980 одиниць.

Тепер, коли відомо скільки потрібно сировини (матриця $S_{1 \times 2}$) і знаємо, скільки коштує одиниця кожного типу сировини (матриця $B_{2 \times 1}$), можна визначити загальну вартість сировини, перемноживши матриці S і B :

$$\begin{aligned} S_{1 \times 2} \cdot B_{2 \times 1} &= Q_{1 \times 1} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \\ &= 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900 (\text{грошових одиниць}). \end{aligned}$$

Приклад 2. (для самостійного обчислення). Будівельна фірма запланувала побудувати:

а) у галузі A 10 одиниць об'єкту типу I і 15 одиниць – типу II;

б) у галузі B 20 одиниць об'єкту типу III;

в) у галузі C 100 одиниць об'єкту типу IV.

Норма витрат матеріалів (у відповідних одиницях) наведено в таблиці:

Тип об'єкту	Норми витрат матеріалу	
	p	q
I	2	15
II	10	20
III	10	100
IV	5	50

Визначити витрати будівельних матеріалів p та q в кожній галузі.

Тема 2. Визначники квадратних матриць. Обернена матриця

Означення та основні властивості визначників

Необхідність введення поняття *визначника* – числа, яке характеризує квадратну матрицю A – тісно пов'язано з розв'язанням систем лінійних рівнянь. Визначник квадратної матриці A n -го порядку позначається $|A|$ або Δ , або $\det A$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило, за яким обчислюють визначник, залежить від порядку матриці. Найпростішим воно є для визначників 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \quad (2.1)$$

Визначником матриці 3-го порядку, або визначником 3-го порядку, називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Це правило називається *правилом трикутника*. Перші три доданки – це добутки елементів, які стоять на місцях, з'єднаних пунктиром на рис. 1, а решта три доданки – на місцях, з'єднаних пунктиром на рис. 2.

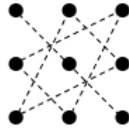


Рис. 1

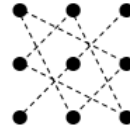


Рис. 2

Для обчислення визначника 3-го порядку можна використати також правило Сарруса: його схематично зображено на малюнку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

При обчисленні визначників вищого порядку використовують інші формули. Для їх вивчення слід ввести нові поняття.

Нехай дано матрицю A n -го порядку.

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} *матриці* n -го порядку називається визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, яку одержуємо з матриці A викреслюванням i -го рядка і j -го стовпця. Наприклад, мінором елемента a_{12} матриці A 3-го порядку буде:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A n -го порядку називається його мінор, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (2.2)$$

(Отже, якщо $i+j$ – парне число, то $A_{ij} = M_{ij}$, а якщо непарне, то $A_{ij} = -M_{ij}$).

Важливе значення для обчислення визначників довільного порядку має наступна теорема:

Теорема Лапласа. *Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.* (Такий спосіб обчислення визначників називається *розкладом* визначника за елементами i -го рядка (або j -го стовпця)).

Приклад. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Для обчислення доцільно вибрати рядок або стовпець, де є нульові елементи і менше всього ненульових. Візьмемо, наприклад, перший стовпець:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot ((-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1) = -10. \end{aligned}$$

Важливе зауваження: Визначник трикутної (і, очевидно, діагональної) матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Значення теореми Лапласа в тому, що вона дозволяє звести обчислення визначника n -го порядку до обчислення більш простих визначників $(n - 1)$ -го порядку.

Основні властивості визначників

1. Якщо деякий рядок (або стовпець) матриці складається тільки з нулів, то її визначник дорівнює 0.

2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці помножити на число k , то її визначник також помножиться на число k .

Зауваження. За знак визначника можна виносити спільний множник будь-якого рядка або стовпця (на відміну від матриці, за знак якої можна виносити лише спільний множник усіх елементів).

3. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється: $\det |A^T| = \det |A|$.

4. При перестановці двох рядків (або 2-х стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний.

5. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) матриці додати елементи іншого рядка (стовпця), попередньо помножені на деяке число.

6. Якщо квадратна матриця містить два однакових рядка (або два однакових стовпця), то її визначник дорівнює 0.

7. Якщо елементи двох рядків (або двох стовпців) матриці пропорційні, то її визначник дорівнює 0 (внаслідок зауваження і 6-ої властивості).

8. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) цієї матриці дорівнює 0.

9. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.

Приклади: Обчислити визначники 4-го порядку, використовуючи властивості визначників та теорему Лапласа:

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $|A| = -144$.

$$2) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $|A| = 160$.

Обернена матриця

Означення 2.1. Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A , якщо при множенні цієї матриці на дану як справа, так і зліва одержується одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

З означення випливає, що обернену матрицю має тільки квадратна.

Однак, не кожна квадратна матриця має обернену. Для існування оберненої матриці необхідно, щоб $\det |A| \neq 0$. (Така матриця називається *невиродженою*).

Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1) Знаходимо визначник вихідної матриці. Якщо $|A| = 0$, то обернена матриця не існує.

2) Знаходимо матрицю A^T .

3) Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці і складаємо з них матрицю $\tilde{A}$.

4) Записуємо обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}.$$

5) В разі необхідності перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Невироджені матриці володіють властивостями:

- 1) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;
- 4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- 5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Приклади:

- 1) Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для матриць 2-го порядку правило знаходження оберненої приводить до простої формули:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

де $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Отже, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, де $\Delta = 10 - (-3) = 13$.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$.

- 2) Знайти матрицю A^{-1} , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 - 8 - 6 + 8 = -7 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^{-1}$ існує.

Транспонуємо A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A^T :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Матриця $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -7 \\ -7 & -2 & 4 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 0 & -7 \\ -7 & -2 & 4 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклади для самостійної роботи:

1) Знайти матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

2) Обчислити: $B = 11 \cdot (A^{-1})^T + A^T$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матричні рівняння

Рівняння вигляду $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$, $A \cdot X \cdot B = C$, де A , B , C – задані матриці, X – невідома матриця, називаються *матричними рівняннями*.

а) Розглянемо рівняння $A \cdot X = B$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, для знаходження невідомої матриці потрібно знайти A^{-1} і помножити її зліва на матрицю B . (Якщо $\det A = 0 \Rightarrow A^{-1} \nexists \Rightarrow$ матричне рівняння не має розв'язку).

б) Аналогічно $X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$.

в) $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow X \cdot B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, якщо існують обидві обернені матриці A^{-1} і B^{-1} .

Приклад. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ранг матриці та способи його обчислення

Означення 2.2. Рангом матриці A називається найвищий порядок ненульових мінорів цієї матриці.

Ранг матриці позначається $\text{rang } A$, або $r(A)$, або $rg(A)$.

З означення випливає, що:

1) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють 0;

2) для квадратної матриці n -го порядку $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A – *невироджена* (тобто $\det A \neq 0$). Для такої матриці A^{-1} існує, а для виродженої – ні.

В загальному випадку процедура обчислення рангу матриці перебором всіх мінорів досить громіздка. Для полегшення цієї задачі використовують перетворення, які зберігають ранг матриці.

Назвемо *елементарними перетвореннями* матриці наступні:

- 1) відкидання нульового стовпчика (рядка);
- 2) множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, не рівне 0;
- 3) переставлення рядків (стовпців) матриці;
- 4) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне число;
- 5) транспонування матриці.

Зауважимо, що елементарні перетворення квадратних матриць можуть змінити величину їх визначника, але не змінюють рангу матриці.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Матриці. Визначники"

Варіант № k

(k – порядковий номер студента у списку групи)

1. Дано визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & k & -7 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & k & -4 \end{vmatrix}.$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{32} .

Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 2-го рядка;
- б) за елементами 4-го стовпця;
- в) попередньо отримавши нулі у 4-му рядку.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} -x & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & k & x \end{vmatrix} = 8.$$

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & -7 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & k & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 11 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $A = (5B - 4C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} k & 3 & 4 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & k & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & 0 & 2 & k \\ 0 & k & 6 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & k & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & k & -1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & -3 & k \end{pmatrix}.$$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 1 & k & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Обчислити мінор та алгебраїчне доповнення до елементу a_{32} .
Обчислити визначник, розкриваючи його

- а) за елементами 1-го рядка;
 б) за елементами 3-го стовпця;
 в) попередньо отримавши нулі у 2-му рядку.

Розв'язання. а) Обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 1-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(2 + 16 + 32 + 2 + 16 - 32) + 2(2 - 16 + 48 - 2 + 24 - 32) -$$

$$-3(16 + 1 + 12 + 8 - 24 + 1) = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 14 =$$

$$= 180 + 48 - 42 = 186.$$

б) Обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(20 - 8 - 9 - 6 + 12 + 20) + 1(10 - 4 - 3 - 3 + 4 + 10) -$$

$$-8(20 - 12 + 6 - 9 + 8 - 20) = 4 \cdot 33 + 14 - 8 \cdot (-7) = 186.$$

в) скористаємося властивістю 5 основних властивостей визначників:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 20 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -7 & 20 & -7 \\ -1 & 13 & -2 \\ -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -(0+80+84-182-0-168) = 186.$$

Задачу розв'язано трьома різними способами і отримано однаковий результат. Ця самоперевірка надає впевненості у правильності відповіді.

Відповідь: $\Delta = 186$.

2. Знайти x з рівняння

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & x \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -37.$$

Розв'язання. Розкриємо визначник за правилом Сарруса:

$$4x + 10x + 18 - 24 - 2x^2 - 15 = -37.$$

Ми отримали квадратне рівняння, розв'яжемо його:

$$2x^2 - 14x - 16 = 0$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = 8$.

3. Знайти ранг матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для обчислення рангу матриці скористаємося, наприклад, методом відокремлення мінорів.

Складемо мінор першого порядку:

$$\Delta_1 = |2| \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже ранг матриці не менше 1.

Складемо мінор другого порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 = 21 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже, ранг матриці не менше 2.

Складемо мінор третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 42 + 15 - 0 - 60 + 84 = 81 \neq 0,$$

він відрізняється від нуля, отже, ранг матриці не менше 3.

Скласти мінор четвертого порядку неможливо, тому що матриця має розмір $[3 \times 5]$, отже, ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $\text{rang } A = 3$.

4. Знайти матрицю $A = (2B + C) \cdot D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Виконаємо послідовно дії: множення матриці на число, додавання матриць $2B + C =$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 & 14 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

і множення матриць

$$(2B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 99 + 3 + 0 - 52 & 33 + 6 - 55 + 13 \\ 18 + 4 + 0 + 16 & 6 + 8 - 20 - 4 \\ 0 - 1 + 0 - 40 & 0 - 2 - 55 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 50 & -3 \\ 38 & -10 \\ -41 & -47 \end{pmatrix}.$

5. Знайти матрицю, обернену до матриці A , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом знаходження оберненої матриці, який наведено на стор. 17:

- обчислимо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 21 + 0 + 28 - 0 - 9 = 22,$$

отже, матриця невироджена і обернена існує;

- знаходимо транспоновану матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

- обчислимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 0) = -9;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 7) = -10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 21) = -21;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5;$$

- запишемо обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix};$$

- виконаємо перевірку за визначенням оберненої матриці:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 24 - 9 + 7 & 18 - 18 + 0 & -12 + 9 + 3 \\ -40 + 26 + 14 & -30 + 52 + 0 & 20 - 26 + 6 \\ -56 + 21 + 35 & -42 + 42 + 0 & 28 - 21 + 15 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -10 & 26 & 2 \\ -14 & 21 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тема 3. Системи лінійних рівнянь

До системи лінійних рівнянь приводять багато прикладних, в тому числі і економічних задач, при розв'язанні яких СЛР найширше використовуються як в загальних дослідженнях, так і в частинних випадках. При моделюванні економічних задач, таких як управління та планування виробництва, визначення оптимального плану виробництва, оптимального розміщення устаткування, оптимального плану перевезення (транспортна задача) та інших, можна опиратися на гіпотезу лінійного представлення реального світу. Математичні моделі таких задач представлені лінійними рівняннями. Якщо ж задача багатовимірна, то її математична модель описується системою лінійних рівнянь.

Основні поняття і означення

Система m лінійних рівнянь з n змінними (невідомими) має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (3.1)$$

де a_{ij} , b_i ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) – довільні числа, які називають відповідно *коефіцієнтами при змінних* та *вільними членами рівнянь*.

Розв'язком системи (3.1) називають сукупність n чисел ($x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$), які при підстановці їх в рівняння системи (3.1) обертають їх в тотожність. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо має більше ніж один розв'язок.

Методи розв'язування СЛАР

1. Метод Крамера

Нехай число рівнянь системи (3.1) дорівнює числу змінних: $m = n$. Тоді матриця системи є квадратною, а її визначник $\Delta = |A|$ називається *визначником системи*, або *головним визначником*.

Теорема Крамера. *Нехай Δ – визначник матриці A системи, а Δ_j – визначник матриці, яку одержимо, якщо в матриці A j -й стовпчик замінити на стовпчик вільних членів. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

Формули (3.2) називаються *формулами Крамера*.

Зауваження. У разі, коли $\Delta = 0$, а серед Δ_j є ненульові визначники, то система несумісна.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad (3.3)$$

методом Крамера.

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система має єдиний розв'язок.

Допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 11 - 8 - 3 + 22 = 20,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 22 + 3 + 16 - 11 - 8 - 12 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 11 + 6 - 3 - 11 + 16 = 5.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

2. Метод оберненої матриці

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими. Матриця системи – квадратна, отже має визначник. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді в матричній формі систему можна записати так:

$$A \cdot X = B. \quad (3.4)$$

Якщо матриця A – невироджена ($\Delta A \neq 0$), то матричне рівняння (3.4) має розв’язок:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

матричним методом.

Розв’язання. Визначник матриці коефіцієнтів системи

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 3 - 30 = -38 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^{-1}$ існує.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Матриця A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -8 & -15 & 3 \\ -10 & 5 & -1 \\ 6 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Матриця X :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -8 & -15 & 3 \\ -10 & 5 & -1 \\ 6 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -47 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{47}{38} \\ \frac{35}{38} \\ -\frac{21}{38} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ x_1 &= \frac{47}{38}, \quad x_2 = \frac{35}{38}, \quad x_3 = -\frac{21}{38}. \end{aligned}$$

3. Метод Гаусса

Істотним недоліком розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за формулами Крамера або методом оберненої матриці є їх громіздкість і необхідність виконання великих обчислень, що робить їх застосування до розв'язання великих систем на практиці проблематичним, недоцільним, а у випадку, коли число рівнянь не рівне числу невідомих, то і неможливим.

Розглянемо розв'язання системи (3.1) m лінійних рівнянь з n змінними в загальному вигляді.

Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих – полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної (або еквівалентної) системи ступінчатого (або трикутного) вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходяться всі інші змінні.

Перехід від системи (3.1) до останньої рівносильної системи називається *прямим ходом* методу Гаусса, а знаходження змінних з системи (останньої) – *зворотним ходом*.

Перетворення Гаусса зручно проводити не з самими рівняннями системи, а з розширеною матрицею системи:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \quad (3.5)$$

Розглянемо метод Гаусса на конкретних прикладах.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

(Якщо б виявилось, що $a_{11} = 0$, то перестановкою рівнянь ми зробили б так, щоб $a_{11} \neq 0$).

Оскільки $a_{11} \neq 0$, то домножимо перший рядок на числа (-2) , (-3) , (-2) і додамо одержані рядки відповідно до 2-го, 3-го, 4-го рядка, в результаті одержимо, що змінної x_1 не буде в 2-му, 3-му, 4-му рівняннях:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Далі за допомогою елементарних перетворень одержуємо:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 26 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 7, \\ 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 13x_4 = -26. \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ за допомогою оберненого ходу одержимо:

$$x_4 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1.$$

Приклад 2. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right).$$

Домножаємо 1-й рядок на (-2) і (-4) і додаємо до 2-го і 3-го рядків, одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в 2-му і 3-му рівняннях коефіцієнти при відповідних невідомих рівні, а вільні члени – не рівні (аналогічна ситуація, коли коефіцієнти при невідомих в різних рівняннях пропорційні, а вільні члени – не пропорційні), отже, система несутісна.

Приклад 3.

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{array} \right\}$$

Розв'язання. В розширеній матриці

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim$$

домножаємо 1-й рядок на (-1) і додаємо до 2-го і 3-го (перед цим поміняємо місцями 2-й і 3-й рядки):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

додаємо 1-й рядок до 3-го:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Оскільки два останніх рядка однакові, відкинемо 3-й рядок:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

ранг цієї матриці дорівнює 2, а невідомих – чотири, отже, дві невідомі величини будуть визначатися через інші дві, тоді система матиме безліч розв’язків:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

визначимо, наприклад, x_1 і x_2 через x_3 і x_4 :

$$x_2 = 2 + x_3 - 2x_4,$$

$$2x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 - (2 + x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 =$$

$$= -1 - 2x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_4.$$

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 2 + x_3 - 2x_4, \end{array} \right\},$$

де x_3 і x_4 – довільні значення.

Однорідні системи

Перейдемо до розгляду однорідних систем на прикладі наступної системи

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

(Однорідні – це системи, усі вільні члени в яких дорівнюють 0).

Дослідження системи (3.6) поділимо на три випадки. Зауважимо, що будь-яка однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди має принаймні один розв'язок: $(0, 0, 0, \dots, 0)$.

1. Якщо визначник Δ однорідної системи не дорівнює 0, то ця система, згідно з теоремою Крамера, буде мати єдиний розв'язок. Очевидно, що у випадку системи (3.6) це буде розв'язок $x = y = z = 0$ (оскільки усі допоміжні визначники дорівнюють 0), який називається *нульовим* або *тривіальним*.

2. Припустимо, що визначник Δ системи (3.6) дорівнює 0, і знайдеться хоча б один рядок визначника Δ (нехай це буде k -й рядок), елементи якого мають хоча б одне відмінне від 0 алгебраїчне доповнення. Тоді дана однорідна система має безліч розв'язків, які можна записати у вигляді:

$$x = A_{k1}t, \quad y = A_{k2}t, \quad z = A_{k3}t,$$

де t – довільне дійсне число; A_{k1} , A_{k2} , A_{k3} – алгебраїчні доповнення елементів k -го рядка.

(Зауважимо, що обидва правила розповсюджуються і на однорідну систему з більшою кількістю рівнянь, матриця якої квадратна).

Приклад 1.

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Розглянемо, наприклад, 1-й рядок визначника і обчислимо алгебраїчне доповнення його елементів:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -5.$$

Отже, дана система має безліч розв'язків вигляду

$$x = -2t, \quad y = 3t, \quad z = -5t,$$

де $t \in (-\infty; \infty)$.

3. Припустимо, що і визначник Δ системи (3.6) і всі його мінори дорівнюють 0. У такому випадку дана система зводиться до одного рівняння, отже, має безліч розв'язків.

Приклад 2.

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x - 2y + 2z = 0, \\ 3x - 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Очевидно, що і головний визначник системи і всі допоміжні визначники дорівнюють 0. Мінори визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \text{ також рівні } 0.$$

Отже, система зводиться до одного рівняння, що очевидно, якщо скоротити 2-ге рівняння на 2, а 3-є – на 3. Для того, щоб розв'язати систему, достатньо розглянути перше рівняння:

$$x - y + z = 0 \Rightarrow x = y - z,$$

де y і z – довільні числа.

Справедливе наступне твердження:

Якщо число рівнянь однорідної системи менше числа невідомих, то така система, крім нульового розв'язку, має і безліч ненульових.

Приклади для самостійного розв'язування:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

(Відповідь: $x = 20t$, $y = -28t$, $z = 4t$; $t \in (-\infty, \infty)$.)

$$2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y + 6z = 0, \\ 7x + 8y + 9z = 0. \end{cases}$$

(Відповідь: $x = 6t$, $y = 6t$, $z = -3t$; $t \in (-\infty, +\infty)$.)

$$3) \begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

(Відповідь: $x = y = z = 0$ – єдиний розв'язок.)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
до теми "Системи лінійних алгебраїчних рівнянь"
Варіант № k

(k – номер студента у списку групи, якщо $k \leq 15$)

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = k, \\ kx_1 + 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} kx_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -12, \\ x_1 + kx_2 - x_3 + 5x_4 = -10, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = k, \\ -2x_1 + 2x_2 + kx_3 - x_4 = 29. \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант № k
(для $k > 15$)

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = k, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = k - 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = k + 1 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + kx_2 + x_3 - 5x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = k, \\ kx_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 9x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

Розв'язання.

а) розв'яжемо систему за правилами Крамера. Для цього обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99$$

й три допоміжних визначника:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -12 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -108 - 15 + 48 + 18 - 90 + 48 = -99,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & -12 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 144 - 45 - 24 + 24 - 45 + 144 = 198,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & -12 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 12 - 72 - 27 - 72 - 12 = -198.$$

За формулами Крамера (3.2) отримаємо результат:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-99}{-99} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{198}{-99} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-198}{-99} = 2.$$

Зробимо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

б) розв'яжемо систему матричним методом. Випишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо оберену до A матрицю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -36 + 5 - 16 - 6 - 30 - 16 = -99,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -(-16 + 5) = 11,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 8) = 23,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix};$$

і скористаємося формулою для обчислення матриці X :

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -22 & -8 & -1 \\ 11 & -14 & 23 \\ -11 & 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -198 + 96 + 3 \\ 99 + 168 - 69 \\ -99 - 60 - 39 \end{pmatrix} = -\frac{1}{99} \begin{pmatrix} -99 \\ 198 \\ -198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку, підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи:

$$3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 = 3 + 2 + 4 = 9; \quad 9 = 9.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 23, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Для зручності запису скористаємося розширеною матрицею і виконаємо елементарні перетворення, а саме: поміняємо місцями перший та другий рядки;

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \approx$$

помножимо перший рядок на $(-2), (-5), (-3)$ та додамо його до другого, третього, четвертого рядків відповідно;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 23 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} (-2), & (-5), & (-3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow & \downarrow \end{array} \sim$$

помножимо другий рядок на $\frac{7}{3}$ та додамо до третього рядка, а четвертий рядок скоротимо на 2;

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 7 & -33 & 11 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \frac{7}{3} \\ :2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -\frac{190}{3} & \frac{89}{3} & \frac{77}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \cdot 3 \sim$$

помножимо третій рядок на 3, щоб позбутися знаменників; поміняємо місцями третій та четвертий рядки; помножимо третій рядок на $-\frac{190}{8} = -\frac{95}{4}$ і додамо до четвертого рядка;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -190 & 89 & 77 \end{array} \right) \downarrow -\frac{95}{4} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{261}{4} & \frac{783}{4} \end{array} \right) : \frac{261}{4} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Нагадаємо, що першому стовпцю відповідають коефіцієнти при невідомому x_1 , другому – при x_2 , третьому – при x_3 , четвертому – при x_4 .

Отже, з четвертого рядка розширеної матриці отримаємо невідоме :

$$x_4 = 3.$$

З третього рядка після підстановки знайденого x_4 обчислимо x_3 :

$$-8x_3 + x_4 = -5; \quad -8x_3 + 3 = -5; \quad -8x_3 = -8; \Rightarrow x_3 = 1.$$

З другого, відповідно, x_2 :

$$-3x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 17; \quad -3x_2 - 13 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 17; \Rightarrow x_2 = -2.$$

І, нарешті, x_1 :

$$x_1 - (-2) + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Виконаємо перевірку. Для цього підставимо отримані значення невідомих у перше рівняння системи:

$$2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) - 1 + 4 \cdot 3 = 23; \quad 23 = 23.$$

Отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

3. Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 14x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для розв'язку однорідних систем:

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 40 + 16 - 3 - 4 - 20 + 24 = 53 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці системи дорівнює трьом ($r = n$) і відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -14 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 28 - 180 + 140 + 54 - 28 = 0.$$

Ранг матриці менший 3 (кількості невідомих), тому така система має і нетривіальний розв'язок. Виключимо із системи, наприклад, третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Положимо $x_3 = k$, де k – довільне дійсне число. Виразимо x_1 і x_2 через k :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -5k, \\ 4x_1 + 2x_2 = -2k. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5k & 1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -10k + 2k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5k \\ 4 & -2k \end{vmatrix} = -6k + 20k = 14k.$$

Остаточно маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8k}{2} = -4k;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14k}{2} = 7k.$$

Відповідь: $x_1 = -4k$; $x_2 = 7k$; $x_3 = k$, де $k \in R$.

Тема 4. Елементи векторної алгебри

Основні поняття та означення

Упорядкована сукупність m дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_m$ називається *m -вимірним вектором* і позначається вектором-стовпцем або вектором-рядком:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (4.2)$$

Тут числа $a_1, \dots, a_m$ – *координати*, або *проекції* вектора $\vec{a}$; число m – *розмірність* вектора.

Множина усіх m -вимірних векторів називається *m -вимірним простором* і позначається R^m . Наприклад, R^1 – множина векторів на прямій (множина дійсних чисел), R^2 – множина векторів на площині, R^3 – множина векторів в просторі.

Вектор $\vec{a} = (0, 0, \dots, 0)$ називається *нульовим*.

Вектор $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_m)$ називається *протилежним* вектору $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є пропорційність їх координат.

Два вектора *рівні* тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх відповідні координати. Рівні вектори можуть мати різні початки.

Рівні вектори колінеарні, мають один і той самий напрям і однакову довжину. Довжина вектора $\vec{a}$ називається також *абсолютною величиною*, або *модулем* вектора і позначається $|\vec{a}|$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{a} = (x; y; z).$$

Три вектора називаються *компланарними*, якщо після приведення до спільного початку вони лежатимуть в одній площині. (Зауважимо, що компланарними називаються також вектори, розташовані в паралельних площинах). Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ і $\vec{a}_3 = (x_3; y_3; z_3)$, заданих координатами відносно загальної декартової системи координат, є рівність:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Геометрично вектори можна зображати напрямленими відрізками з позначеними початком і кінцем:



Якщо $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Дії над векторами

1. Додавання векторів

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Означення 4.1. Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (якщо сумістити початок $\vec{b}$ з кінцем $\vec{a}$) називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$ (рис. 1).

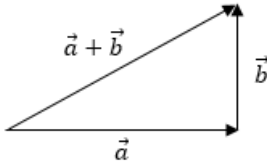


Рис. 1

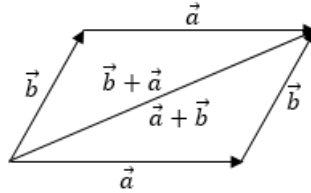


Рис. 2

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність (рис. 2.)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (4.3)$$

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується рівність

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (4.4)$$

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, унаочнює рис. 3.

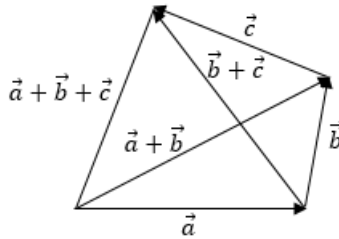


Рис. 3

2. Віднімання векторів – операція, обернена до їх додавання. Різниця $\vec{b} - \vec{a}$ векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$ (рис. 4)

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}.$$

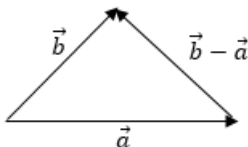


Рис. 4

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються нерівності:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|, \quad |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

3. Множення вектора на число

Означення 4.2. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Вектор $\lambda\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{a}$; має однаковий з ним напрям при $\lambda > 0$ і протилежний напрям при $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, то маємо $\lambda\vec{a} = 0$, тобто добуток є нуль-вектором.

Множення вектора на число має властивість асоціативності та дистрибутивності. Для довільних чисел λ, μ та векторів $\vec{a}, \vec{b}$ справджуються рівності:

- 1) $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$;
- 2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- 3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Останню рівність унаочнює рис. 5 ($\lambda > 1$).

Ця властивість впливає з подібності трикутників із коефіцієнтом подібності λ .

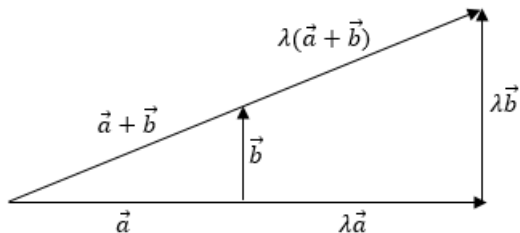


Рис. 5

З очевидної рівності

$$np_x(\lambda \vec{a}) = \lambda np_x \vec{a}$$

($np_x \vec{a}$ – довжина проекції $\vec{a}$ на вісь OX) випливає

$$\lambda \{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Лема 4.1. Будь-який вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином подати у вигляді суми трьох векторів, кожний із яких колінеарний одній з осей координат x, y, z :

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, колінеарні осям OX, OY, OZ .

4. Скалярний добуток векторів

Означення 4.3. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними (рис. 6):

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \quad (4.5)$$

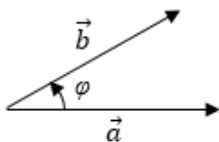


Рис. 6

Розглянемо довільний вектор $\vec{a}$ і вісь x .

Означення 4.4. Якщо вектор $\vec{a}$ утворює кут φ з віссю x (рис. 7), то проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь x називається величина

$$pr_x \vec{a} \equiv a_x = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (4.6)$$

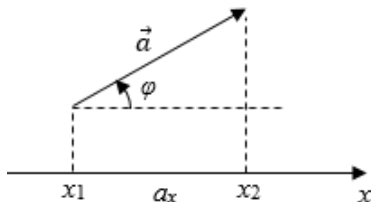


Рис. 7

Нехай $pr_a \vec{b}$ – проекція вектора $\vec{b}$ на вісь, паралельну вектору $\vec{a}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} pr_a \vec{b} &= |\vec{b}| \cos \varphi, & pr_b \vec{a} &= |\vec{a}| \cos \varphi; \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| pr_a \vec{b} = |\vec{b}| pr_b \vec{a}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Останнє співвідношення означає, що *скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на напрям першого*.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; якщо тупий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; якщо прямий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Коли один із векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ є нульовим, то його можна вважати ортогональним до будь-якого іншого вектора.

Наведемо аналітичні властивості скалярного добутку, що впливають із його означення:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$;
- 4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

(Остання рівність є наслідком формули (4.7) і властивості проєкцій суми векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| pr_a(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| (pr_a \vec{b} + pr_a \vec{c}) =$$

$$= |\vec{a}|np_a\vec{b} + |\vec{a}|np_a\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Отже, у разі скалярного множення суми векторів на вектор можна розкривати дужки). Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ подано через їх проекції на координатні осі:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Запишемо таблицю скалярного множення для одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортів системи координат:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0; \\ \vec{j} \cdot \vec{i} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0; \\ \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1. \end{aligned}$$

Перемноживши скалярно вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, знайдемо їх скалярний добуток у проекціях на координатні осі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.8)$$

Звідси маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Знаючи проекції векторів $\vec{a}, \vec{b}$ можна знайти кут між цими векторами: (прирівнявши праві частини (4.5) і (4.8))

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (4.9)$$

5. Векторний добуток векторів

Означення 4.5. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє такі умови:

- 1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) довжина $|\vec{a} \times \vec{b}|$ вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах;

3) якщо звести вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{a} \times \vec{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який міститься в кінці вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, бачитиме найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 8) (тобто трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a} \times \vec{b}$ є правою).

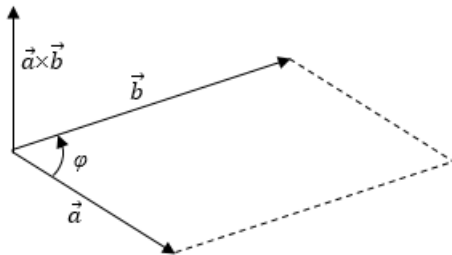


Рис. 8

З означення векторного добутку випливають такі його властивості:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- 2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a}\vec{b} \sin \varphi$;
- 3) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;
- 4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Перші три властивості очевидні, останню властивість дистрибутивності наводимо без доведення.

Знайдемо векторний добуток векторів

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} + a_y b_z \vec{i} + a_y b_x \vec{k} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_y b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна подати у вигляді визначника:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

Розкривши визначник за елементами першого рядка, отримаємо координати вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Приклад. Знайдемо площу просторового трикутника з вершинами $A(1, 2, 1)$, $B(4, 3, 2)$, $C(2, 4, 4)$.

Розв'язання. Позначаючи вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{3, 1, 1\}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{1, 2, 3\},$$

обчислюємо їх векторний добуток:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Площа S трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{2} \sqrt{10}.$$

6. Мішаний добуток векторів

Означення 4.6. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Мішаний добуток за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, зведених до спільного початку.

Справді, позначимо $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до площини основи паралелепіпеда, а довжина його $|\vec{d}|$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах (рис. 9). ($ABCD$ – тетраедр; вершина – A , основа – $\triangle BDC$)

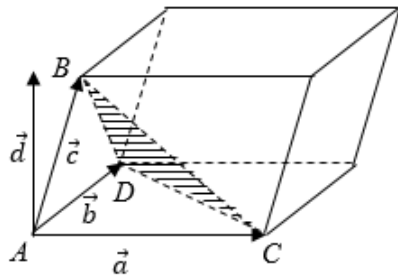


Рис. 9

Висота h паралелепіпеда дорівнює $np_a \vec{c}$. Отже, об'єм його обчислюємо так:

$$V = Sh = \vec{d} np_a \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Оскільки вектор $\vec{d}$ може бути напрямлений у протилежний бік, то $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Якщо відомі проекції векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

то мішаний добуток цих векторів подається визначником:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

Звідси маємо

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Приклад. Знайдемо об'єм V тетраедра з вершинами $A(1, 2, 3)$, $B(4, 4, 4)$, $C(2, 6, 4)$, $D(2, 3, 6)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{3, 2, 1\}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{1, 4, 1\}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = \{1, 1, 3\}$$

і запишемо їх мішаний добуток

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \cdot 26 = \frac{13}{3} (\text{куб. од.}).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Елементи векторної алгебри"

1. За даними координатами точок A , B і C для зазначених векторів знайти:

- а) модуль вектора $\vec{a}$;
- б) скалярний та векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- в) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$;
- г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

№	A	B	C	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(5; 4; 4)	(-5; 2; 3)	(4; 2; -5)	$11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
2	(6; 5; -4)	(-5; 2; 2)	(3; 2; 2)	$6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
3	(2; 4; 3)	(3; 1; -4)	(-1; 2; 2)	$2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
4	(-2; -3; 4)	(2; -4; 0)	(1; 4; 5)	$4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
5	(2; 4; 6)	(-3; 5; 1)	(4; -5; 4)	$2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{CA}$
6	(-5; 4; 3)	(4; 5; 2)	(2; 7; -4)	$3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
7	(3; 5; 4)	(4; 2; -3)	(-2; 4; 7)	$3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
8	(-2; 3; -4)	(3; -1; 2)	(4; 2; 4)	$7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
9	(3; 4; 1)	(5; -2; 6)	(4; 2; -7)	$5\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
10	(4; 6; 7)	(2; -4; 1)	(-3; -4; 2)	$5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
11	(1; 3; 2)	(-2; 4; 1)	(1; 3; -2)	$2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$
12	(10; 6; 3)	(-2; 4; 5)	(3; -4; -6)	$5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
13	(3; 4; 6)	(-4; 6; 4)	(5; -2; -3)	$4\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
14	(-3; -5; 6)	(3; 5; -4)	(2; 6; 4)	$4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
15	(2; 4; 5)	(2; -1; 3)	(-1; -2; 4)	$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
16	(-2; -3; 2)	(1; 4; 2)	(1; 2; -2)	$2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$
17	(-2; 4; -5)	(3; 7; 2)	(4; 6; -3)	$9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$

№	A	B	C	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
18	(6; 4; 5)	(-7; 1; 8)	(2; -2; 7)	$5\vec{CB} - 2\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$	$\vec{BC}$
19	(-2; -2; 4)	(1; 2; 3)	(1; 4; 2)	$2\vec{AC} - 3\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
20	(0; 2; 5)	(2; -3; 4)	(3; 2; -5)	$4\vec{CB} - 3\vec{AB}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
21	(4; 5; 3)	(-2; 3; 4)	(4; -6; 2)	$9\vec{AB} - 4\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{CB}$	$\vec{BA}$
22	(4; 3; 2)	(-4; -3; 5)	(6; 4; -3)	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{CB}$
23	(4; 6; 3)	(-5; 2; 6)	(4; -4; 3)	$4\vec{CB} - \vec{AC}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
24	(2; -4; 3)	(-3; -2; 4)	(0; 0; -2)	$3\vec{AC} - 4\vec{CB}$	$\vec{CA}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$
25	(3; 2; 3)	(-2; 1; 3)	(2; -2; 1)	$4\vec{BC} - 3\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$	$\vec{CA}$
26	(-5; -2; 6)	(3; 4; 5)	(2; -5; 4)	$8\vec{AC} - 5\vec{BC}$	$\vec{CB}$	$\vec{AB}$	$\vec{CA}$
27	(1; 3; 2)	(-2; 3; -4)	(3; 1; 2)	$2\vec{AB} + 5\vec{CB}$	$\vec{BA}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
28	(-1; -2; 4)	(-1; 3; 5)	(1; 4; 2)	$3\vec{AC} - 7\vec{BC}$	$\vec{BA}$	$\vec{CB}$	$\vec{CA}$
29	(5; 6; 1)	(-2; 4; -1)	(3; -3; 3)	$3\vec{AB} - 4\vec{BC}$	$\vec{AC}$	$\vec{BA}$	$\vec{CB}$
30	(4; 3; -2)	(-1; -3; 4)	(2; 2; 1)	$2\vec{CB} - 5\vec{AC}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$

2. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d} = (k; k - 3; 2k)$ в цьому базисі; тут k – номер студента в списку групи.

Приклади розв'язання типового варіанту

1. За даними координатами точок $A(3; -2; 8)$, $B(1; 1; 4)$ і $C(5; 2; -6)$ для зазначених векторів $\vec{a} = 3\vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CA}$; $\vec{c} = \vec{CB}$; $\vec{d} = \vec{AB}$ знайти:

- модуль вектора $\vec{a}$;
- скалярний та векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
- проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$$\vec{BC} = (5 - 1; 2 - 1; -6 - 4) = (4; 1; -10);$$

$$\vec{AB} = (1 - 3; 1 - (-2); 4 - 8) = (-2; 3; -4);$$

$$\vec{CA} = (3 - 5; -2 - 2; 8 - (-6)) = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{CB} = -\vec{BC} = (-4; -1; 10).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2); 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3; 3 \cdot (-10) - 2 \cdot (-4)) = \\ &= (12 + 4; 3 - 6; -30 + 8) = (16; -3; -22); \end{aligned}$$

$$\vec{b} = (-2; -4; 14);$$

$$\vec{c} = (-4; -1; 10);$$

$$\vec{d} = (-2; 3; -4).$$

а) знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{16^2 + (-3)^2 + (-22)^2} = \sqrt{256 + 9 + 484} = \sqrt{749};$$

б) скалярний та векторний добуток обчислимо відповідно за формулами (4.8), (4.10):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) + (-22) \cdot 14 = -32 + 12 - 308 = -328;$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -22 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 16 & -22 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-42 - 88)\vec{i} - (224 - 44)\vec{j} + (-64 - 6)\vec{k} = \\ &= -130\vec{i} - 180\vec{j} - 70\vec{k}; \end{aligned}$$

в) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обчислимо за формулою (4.11):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 16 & -3 & -22 \\ -2 & -4 & 14 \\ -4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -640 + 168 - 44 + 352 - 60 + 224 = 0;$$

г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ знайдемо за формулою

$$np_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}|}:$$

$$np_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{-4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 10 \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{8 - 3 - 40}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = -\frac{35}{\sqrt{29}}.$$

2. Довести, що вектори $\vec{a}(1; -2; 1)$, $\vec{b}(5; 4; -1)$, $\vec{c}(3; 1; 1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}(-2; 0; 2)$ в цьому базисі.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис лише в тому випадку, якщо вони лінійно незалежні. Щоб з'ясувати це, обчислимо визначник, складений з координат векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 5 - 12 + 10 + 1 = 14 \neq 0.$$

Цей визначник не дорівнює нулю, звідси слідує, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні та утворюють $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базис. Розклад вектора $\vec{d}$ запишемо у вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, де x , y , z – невідомі числа. Векторне рівняння перепишемо у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x , y , z :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2, \\ 5x + 4y - z = 0, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера. Головний визначник обчислений раніше, він дорівнює $\Delta = 14$. Допоміжні визначники Δ_x , Δ_y , Δ_z дорівнюють:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 0 - 8 - 0 - 2 = -14;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 10 - 0 + 10 + 2 = 28;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 10 + 24 + 20 - 0 = 42.$$

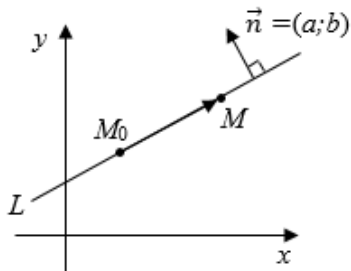
За формулами Крамера маємо координати вектора $\vec{d}$:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

Отже, $\vec{d} = (-1; 2; 3)$, або $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Тема 5. Рівняння прямої на площині

1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора



Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – задана точка; $M(x, y)$ – довільна точка, яка належить даній прямій; $\vec{n} = (a; b)$ – відомий, перпендикулярний до L .

Виберемо на L довільну точку $M(x, y)$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярний заданому вектору $\vec{n} = (a; b)$, отже, їх скалярний добуток дорівнює 0:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (5.1)$$

Це рівняння прямої, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a; b)$.

Розпишемо (5.1):

$$\begin{aligned} ax + by + \underbrace{(-ax_0 - by_0)}_{\equiv c} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax + by + c &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Це – загальне рівняння прямої.

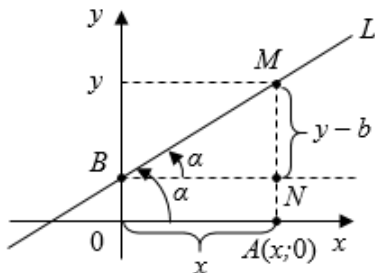
Наприклад, для $M_0(1; 2)$, $n = (3; -5) \Rightarrow 3(x - 1) + (-5)(y - 2) = 0 \Rightarrow 3x - 3 - 5y + 10 = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 7 = 0$ – рівняння прямої в загальному вигляді.

Зауважимо, що будь-який вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний прямій L , називається *нормальним вектором* цієї прямої.

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Розглянемо деяку пряму L , яка перетинає вісь OY в точці $B(0; b)$; α – кут нахилу прямої до осі OX .

Виберемо на L довільну точку $M(x, y)$. Проведемо $BN \parallel OX$, $MA \perp OX$, тоді точка $N(x; b)$, $A(x; 0)$, $\angle MBN = \alpha$.



Розглянемо $\triangle MBN$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{BN} = \frac{y - b}{x}.$$

Означення 5.1. Кутовим коефіцієнтом прямої, яка не паралельна OY , називається тангенс кута між прямою і додатним напрямком осі OX :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - b}{x}.$$

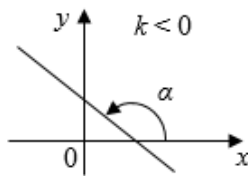
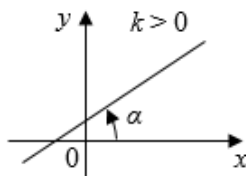
Звідси:

$$k = \frac{y - b}{x} \Rightarrow kx = y - b \Rightarrow$$

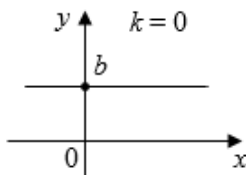
$$y = kx + b. \quad (5.3)$$

Розглянемо окремі випадки рівняння (5.3):

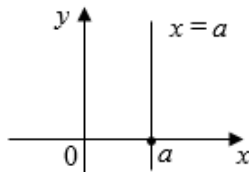
а) $b = 0 \Rightarrow y = kx \Rightarrow$ пряма проходить через $(0; 0)$, причому: при $k > 0$ – гострий кут з OX , при $k < 0$ – тупий кут;



б) $k = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow$ пряма $\parallel$ осі OX :

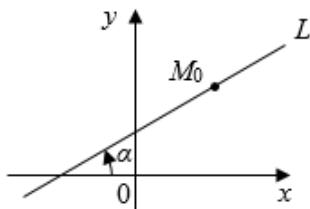


в) якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не існує, ця пряма паралельна осі OY , вона не має кутового коефіцієнта. Вісь OY також не має кутового коефіцієнта.



3. Рівняння прямої, що проходить через деяку точку, і має заданий кутовий коефіцієнт

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – задана точка; кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg} \alpha = k$ – відомий.



Оскільки точка $M \in L$, то її координати задовольняють

рівняння (5.3):

$$y_0 = kx_0 + b. \quad (5.4)$$

Відніmemo рівняння (5.4) від рівняння (5.3):

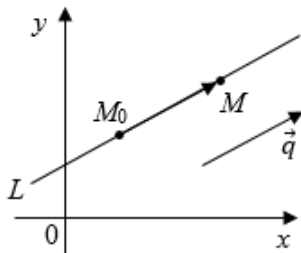
$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y_0 &= kx_0 + b \quad \ominus \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (5.5)$$

4. Канонічне рівняння прямої

Означення 5.2. Будь-який вектор $\vec{q} = (l; m)$, колінеарний даній прямій, називається напрямним вектором прямої.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – задана точка; $M(x, y)$ – довільна точка на L ; вектор $\vec{q} = (l; m) \parallel L$ – заданий.



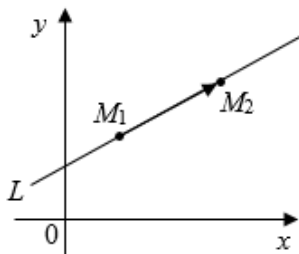
Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ і $\vec{q} = (l; m)$ – колінеарні, то їх координати пропорційні

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (5.6)$$

Це канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, і одним із напрямних векторів є вектор $\vec{q} = (l; m)$.

5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – задані точки.



Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ можна взяти за напрямний вектор прямої L . Тоді, підставивши в (5.6) (в чисельник) координати точки $M_1(x_1, y_1)$ і вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ (в знаменник), одержимо шукане рівняння:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5.7)$$

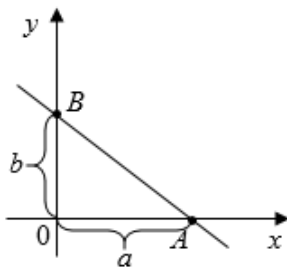
Наприклад, складемо рівняння прямої, що проходить через $M_1(2; 6)$ і $M_2(3; -1)$:

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 6}{-1 - 6} \Rightarrow x - 2 = \frac{y - 6}{-7} \Rightarrow -7x + 14 = y - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -7x + 20 \text{ — шукане рівняння.}$$

6. Рівняння прямої у відрізках

Розглянемо довільну пряму, яка не проходить через початок координат: $A(a; 0)$, $B(0; b)$ — точки перетину прямої з OX і OY .



Підставимо координати цих точок в (5.7):

$$\begin{aligned}\frac{x-a}{0-a} &= \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{a-x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \\ \Rightarrow ab - xb &= ay \Rightarrow xb + ay = ab \mid \div ab \Rightarrow \frac{xb}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1 \Rightarrow \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1.\end{aligned}\tag{5.8}$$

7. Загальне рівняння прямої

Рівняння першого степеня відносно змінних x і y

$$ax + by + c = 0,\tag{5.9}$$

в якому коефіцієнти a і b одночасно не рівні 0, називають *загальним рівнянням прямої*. При цьому вектор $\vec{n} = (a; b)$ є **нормальним** до цієї прямої.

Окремі випадки рівняння (5.9):

- а) $a = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow \parallel OX$;
- б) $b = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \Rightarrow \parallel OY$;
- в) $c = 0 \Rightarrow by = -ax \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x \Rightarrow$ проходить через $(0; 0)$;
- г) $a = 0, c = 0 \Rightarrow by = 0 \Rightarrow y = 0$ – збігається з OX ;
- д) $b = 0, c = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – збігається з OY .

8. Взаємне розташування двох прямих

- 1) Якщо дві прямі задані загальними рівняннями

$$\begin{aligned}L_1 : & \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ L_2 : & \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \end{cases}\end{aligned}\tag{5.10}$$

і система (5.10) має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то ці прямі перетинаються в точці $M_0(x_0; y_0)$, причому кут перетину – це кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ і $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.\tag{5.11}$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ – колінеарні $\Rightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad - \text{ умова паралельності двох прямих. } (5.12)$$

Якщо ж $L_1 \perp L_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Rightarrow$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \quad - \text{ умова перпендикулярності двох прямих. } (5.13)$$

2) Якщо дві прямі задані рівняннями

$$\begin{aligned} L_1 : y &= k_1 x + b_1, \\ L_2 : y &= k_2 x + b_2, \end{aligned}$$

то: а) при $k_1 \neq k_2 \Rightarrow L_1$ перетинається з L_2 під кутом φ , тангенс якого:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}; \quad (5.14)$$

(якщо в чисельнику k_1 і k_2 поміняти місцями, то одержимо тангенс суміжного кута);

б) прямі L_1 і L_2 паралельні, якщо

$$k_1 = k_2 \quad - \text{ умова паралельності двох прямих; } (5.15)$$

в) якщо $L_1 \perp L_2$, то $\operatorname{tg} \varphi$ не визначений $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, отже, в формулі (5.14) знаменник $1 + k_1 k_2 = 0$, звідси маємо, що

$$k_1 k_2 = -1 \quad - \text{ умова перпендикулярності двох прямих. } (5.16)$$

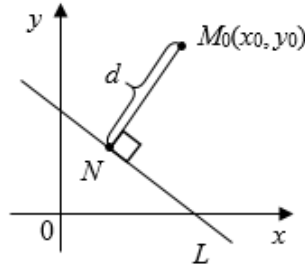
Із (5.16):

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (5.17)$$

9. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма L задана загальним рівнянням

$$ax + by + c = 0.$$



Відстань від відомої точки $M_0(x_0; y_0)$ до L є довжиною d перпендикуляра MN :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (5.18)$$

Якщо прямі $ax + by + c_1 = 0$ і $ax + by + c_2 = 0$ паралельні, то відстань між ними можна знайти за формулою

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (5.19)$$

Приклад. Знайти відстань між паралельними прямими $x - 3y + 2 = 0$ і $3x - 9y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння першої прямої помножимо на 3: $3x - 9y + 6 = 0$. Скористаємось (5.19), де $c_1 = 6$, $c_2 = -1$, $a = 3$, $b = -9$:

$$d = \frac{|6 - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{7}{\sqrt{90}} = \frac{7}{3\sqrt{10}}.$$

Приклади економічних задач

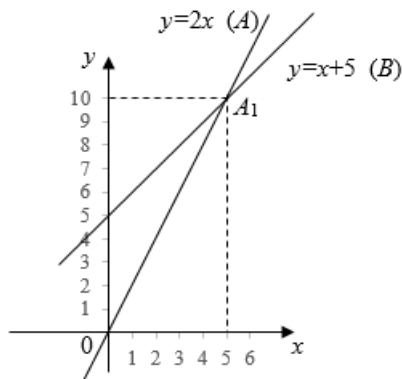
Задача 1. Визначення рентабельності інвестиційних вкладів.

Витрати на інвестиції в грошових одиницях (y) в акційний портфель A та акційний портфель B на термін x (вимірюється місяцями) знаходять за формулами відповідно:

$$y = 2x \quad \text{та} \quad y = x + 5.$$

З'ясувати, за яких умов більш рентабельним буде вкладення в акційний портфель A чи B ?

Розв'язання. Побудуємо графіки $y = 2x$ і $y = x + 5$.



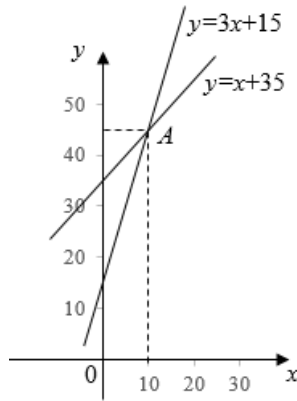
Координати точки перетину A_1 знаходимо із системи рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x + 5 \Rightarrow x = 5, \quad y = 10 \Rightarrow A_1(5; 10).$$

Отже, якщо $x < 5$, то витрати на портфель A нижче, ніж у портфель B . Якщо вкладати на термін $x > 5$ міс., то це більш рентабельно для портфеля B .

Задача 2. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом виражаються функцією $y = x + 35$, а автомобільним транспортом – функцією $y = 3x + 15$, де x вимірюється в десятках кілометрів. Визначити, на які відстані вигідніше перевозити вантажі залізничним і автомобільним транспортом.

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій транспортних витрат перевезень:



Прямі перетинаються в точці A , координати якої знайдемо із системи рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + 15 \\ y = x + 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 15 = x + 35 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 45 \end{cases} \Rightarrow A(10; 45).$$

Графічний аналіз дає можливість зробити висновки:

1) якщо $x \in [0; 10)$, тобто $x < 100$ км, то транспортні витрати на перевезення вантажу автомобільним транспортом нижчі ніж залізничним;

2) якщо $x \in (10; +\infty)$, тобто $x > 100$ км, то рентабельнішим буде залізничний транспорт.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Рівняння прямої на площині"

1. Дано трикутник ABC з вершинами в точках A , B , C (див. табл.). Знайти:

- периметр та площу трикутника;
- рівняння сторін;
- кути трикутника;

- г) визначити тип трикутника (за сторонами та кутами);
 д) рівняння медіани AF ;
 е) рівняння та довжину висоти BN ;
 є) координати центру та радіус описаного кола.

2. Довести, що рівняння (див. табл.) є рівнянням прямої.
 Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

- а) загальне рівняння прямої;
 б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
 в) рівняння прямої у відрізках.

№ в-та	A	B	C	Рівняння
1	$(-1, -2)$	$(-2, -5)$	$(8, 1)$	$\frac{2x-5}{4} + \frac{y+3}{5} = -1$
2	$(2, 4)$	$(-3, 6)$	$(5, 7)$	$\frac{3x-1}{2} - \frac{2y+3}{4} = 2$
3	$(1, 5)$	$(5, 3)$	$(-1, -5)$	$\frac{4x-1}{3} + y - \frac{2}{5} = 4$
4	$(5, 5)$	$(1, -6)$	$(-3, 6)$	$\frac{x-1}{2} + \frac{2}{5}y = -3$
5	$(-7, 1)$	$(1, -2)$	$(6, 3)$	$\frac{7x-1}{4} + \frac{2y+3}{5} = -\frac{1}{2}$
6	$(3, 6)$	$(6, 4)$	$(3, -5)$	$6x + \frac{y-3}{7} = \frac{3}{5}$
7	$(-4, 4)$	$(4, 1)$	$(6, 5)$	$\frac{5x+1}{3} + \frac{y+1}{7} = \frac{7}{6}$
8	$(-6, 1)$	$(-4, 6)$	$(8, 1)$	$\frac{7x+8}{2} - \frac{y-1}{6} = -5$
9	$(-3, 3)$	$(-2, 8)$	$(7, 4)$	$\frac{5x+3}{4} - 5y = 2$
10	$(-7, 6)$	$(-5, 2)$	$(4, 7)$	$8x + \frac{6y-1}{9} + \frac{1}{5} = 0$
11	$(2, 1)$	$(6, 5)$	$(-4, 6)$	$\frac{2x-6}{5} + \frac{y-9}{4} - 3 = 0$
12	$(-3, 4)$	$(7, -3)$	$(4, -4)$	$4x + \frac{2y-9}{7} - 2 = 0$
13	$(8, 1)$	$(9, 7)$	$(1, 8)$	$\frac{5x+2}{9} - 2y = \frac{4}{5}$
14	$(1, 8)$	$(7, 9)$	$(-2, -1)$	$\frac{x+7}{3} - \frac{2y-4}{5} = -3$
15	$(-4, 3)$	$(7, 4)$	$(9, 1)$	$\frac{5x-1}{3} + \frac{y-3}{9} = 5$
16	$(-3, -3)$	$(-2, 3)$	$(8, 1)$	$\frac{x-1}{8} + \frac{2y+1}{5} - 2 = 0$
17	$(0, -2)$	$(-5, 4)$	$(11, 2)$	$\frac{3x-9}{5} + \frac{y+8}{3} - 4 = 0$
18	$(-6, 1)$	$(5, 3)$	$(-5, 4)$	$\frac{4x+1}{3} + \frac{2y-9}{4} = -\frac{4}{5}$
19	$(-5, 3)$	$(6, 0)$	$(-7, -4)$	$5x - \frac{3y-8}{2} = -4$
20	$(-4, 7)$	$(-5, 2)$	$(2, -2)$	$\frac{x-2}{6} + \frac{2y-9}{5} = 1$
21	$(9, 4)$	$(-6, 6)$	$(-1, 8)$	$\frac{5x-2}{3} - \frac{3y+1}{2} - 8 = 0$
22	$(4, -3)$	$(3, 2)$	$(-7, 1)$	$\frac{x-1}{11} - 4y = -\frac{7}{3}$

№ в-та	A	B	C	Рівняння
23	$(-2, -4)$	$(-6, 4)$	$(3, 5)$	$\frac{5x-1}{8} - \frac{y+4}{2} = 6$
24	$(5, 4)$	$(-3, -4)$	$(-6, -2)$	$\frac{3x-7}{4} + \frac{2y+5}{7} = -3$
25	$(6, 9)$	$(3, 3)$	$(8, -1)$	$\frac{3x-7}{4} + 4y = \frac{3}{5}$
26	$(5, 10)$	$(2, 3)$	$(8, -3)$	$\frac{x+8}{5} + \frac{6y-11}{4} = -1$
27	$(6, 3)$	$(-7, 4)$	$(-6, 1)$	$\frac{x-3}{8} + \frac{2y+5}{4} = 3$
28	$(1, 4)$	$(-2, 7)$	$(-9, 2)$	$\frac{6x-1}{5} + \frac{y+9}{3} = -2$
29	$(2, -3)$	$(5, 1)$	$(3, 8)$	$\frac{5x+4}{2} - \frac{y-2}{6} = 5$
30	$(-1, 7)$	$(-5, 7)$	$(1, -4)$	$\frac{x-3}{7} + \frac{5y-2}{3} = -1$

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють k та $k + 2$ одиницям довжини.

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $y = \frac{1}{2}x + k$ та $y = kx - 7$ з початком координат.

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -2)$, $B(2; 5)$, $C(4; 7)$, $D(9; 5)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайти площу трапеції $ABCD$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими $y = kx - 4$ та $y = kx + 6$.

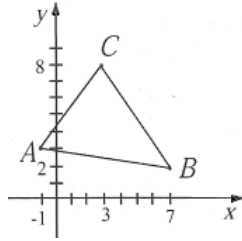
(В завданнях 3, 4, 6 k – номер студента у списку)

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано трикутник ABC с вершинами в точках $A(-1; 3)$; $B(7, 2)$; $C(3, 8)$. Знайти:

- периметр та площу трикутника;
- рівняння сторін;
- кути трикутника;
- визначити тип трикутника (за сторонами та кутами);
- рівняння медіани AF ;
- рівняння та довжину висоти CN ;
- координати центру та радіус описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо трикутник ABC .



а) Знайдемо довжини сторін трикутника за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$AB = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64 + 0} = \sqrt{64} = 8 \text{ (од.)};$$

$$BC = \sqrt{(3 - 7)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (од.)};$$

$$AC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (од.)};$$

Отже, периметр трикутника

$$P = 8 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 8 + 4\sqrt{13} \text{ (од.)}.$$

Для обчислення площі трикутника скористаємося мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \diagdown & \diagup \\ \diagup & \diagdown \\ \diagdown & \diagup \\ \diagup & \diagdown \end{matrix} \begin{matrix} \ominus \\ \oplus \\ \ominus \\ \oplus \end{matrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-2 + 56 + 9 - 21 - 6 + 8| = \frac{1}{2} \cdot 44 = 22 \text{ (од.}^2\text{)}.$$

б) Для знаходження рівняння сторін трикутника скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки (5.7):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

і запишемо отримані рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння прямої AB :

$$\frac{x + 1}{7 + 1} = \frac{y - 3}{2 - 3}; \quad \frac{x + 1}{8} = \frac{y - 3}{-1}; \quad 8(y - 3) = -1(x + 1);$$

$$8y - 24 = -x - 1; \quad 8y = -x + 23;$$

Остаточно маємо рівняння AB :

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{23}{8} \quad \left(k = -\frac{1}{8}; \quad b = \frac{23}{8} \right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, отже, пряма утворює з додатним напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{23}{8}$ – пряма відсікає на осі ординат відрізок майже в три одиниці.

Рівняння прямої BC :

$$\frac{x - 7}{3 - 7} = \frac{y - 2}{8 - 2}; \quad \frac{x - 7}{-4} = \frac{y - 2}{6}; \quad -4(y - 2) = 6(x - 7) \quad |: (-2);$$

$$2y - 4 = -3x + 21; \quad 2y = -3x + 25;$$

Остаточно маємо рівняння BC :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} \quad \left(k = -\frac{3}{2}; \quad b = \frac{25}{2} \right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k від'ємний, отже, пряма утворює з додатним напрямком осі абсцис тупий кут, $b = \frac{25}{2}$ – пряма відсікає на осі ординат відрізок в 12,5 одиниць.

Рівняння прямої AC :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{8-3}; \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}; \quad 4(y-3) = 5(x+1);$$

$$4y - 12 = 5x + 5; \quad 4y = 5x + 17.$$

Остаточно маємо рівняння AC :

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \quad \left(k = \frac{5}{4}; \quad b = \frac{17}{4} \right).$$

Проаналізуємо отриманий результат. Коефіцієнт k додатний, отже, пряма утворює з додатним напрямком осі абсцис гострий кут, $b = \frac{17}{4}$ – пряма відсікає на осі ординат відрізок в чотири з четвертю одиниці.

в) Кути трикутника знайдемо за формулою (5.14):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Пригадаємо кутові коефіцієнти сторін трикутника:

$$k_{AB} = -\frac{1}{8}; \quad k_{BC} = -\frac{3}{2}; \quad k_{AC} = \frac{5}{4}.$$

За формулою (5.14) маємо:

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)}{1 + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 4}{32}}{\frac{32 - 5 \cdot 1}{32}} = \frac{44}{27};$$

$$\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{44}{27};$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 8}{16}}{\frac{1 \cdot 32 + 3}{32}} = \frac{22}{35};$$

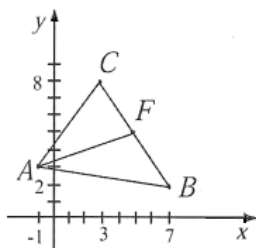
$$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{22}{35};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \angle ACB &= \frac{k_{CB} - k_{AC}}{1 + k_{CB} \cdot k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{-3 \cdot 4 - 5 \cdot 2}{8}}{\frac{1 \cdot 8 - 15}{8}} = \\ &= \frac{-22}{-7} = \frac{22}{7}; \quad \angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{22}{7}.\end{aligned}$$

г) Визначимо тип трикутника. В п. а) ми обчислили довжини сторін трикутника. З результатів очевидно, що трикутник різносторонній.

З умови $c^2 < a^2 + b^2$ ($AB^2 < BC^2 + AC^2$; $65 < 52 + 41$) маємо, що трикутник гострокутний. Зауважимо, що в даній нерівності за c вважаємо найдовшу з сторін.

д) Для того, щоб записати рівняння медіани AF , згадаємо, що за визначенням медіана поділяє протилежну сторону навпіл.



Медіана AF поділяє навпіл сторону BC . Знайдемо координати точки F як середини BC за формулами:

$$x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5;$$

$$y_F = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Точка F має координати: $F(5; 5)$. Рівняння прямої AF запишемо за формулою (5.7):

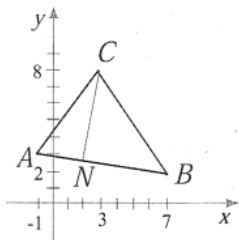
$$\frac{x - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{y - 3}{5 - 3}; \quad \frac{x + 1}{6} = \frac{y - 3}{2}; \quad 6(y - 3) = 2(x + 1) \mid : 2;$$

$$3y - 9 = x + 1; \quad 3y = x + 10.$$

Рівняння AF :

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

е) Рівняння висоти CN знаходимо за визначенням висоти. З нього слідує, що висота CN перпендикулярна стороні AB .



За умовою перпендикулярності (5.16) маємо:

$$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{8}} = 8.$$

Для висоти CN нам відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки – C . Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку (5.5):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Підставимо у дане рівняння $k = k_{CN} = 8$ та координати точки $C(3; 8)$:

$$y - 8 = 8(x - 3); \quad y = 8x - 24 + 8.$$

Остаточно маємо рівняння CN :

$$y = 8x - 16.$$

Щоб знайти довжину висоти CN , згадаємо, що найкоротша відстань між точкою та прямою – довжина перпендикуляра. Отже, довжина висоти CN дорівнює відстані від точки C до прямої AB . В формулі (5.18) рівняння прямої має вигляд загального:

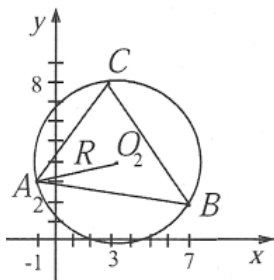
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Перепишемо рівняння AB у вигляді загального і підставимо у формулу:

$$AB: \quad x + 8y - 23 = 0;$$

$$|CN| = d = \frac{|1 \cdot 3 + 8 \cdot 8 - 23|}{\sqrt{1^2 + 8^2}} = \frac{44}{\sqrt{65}} \text{ (од.)}.$$

є) Координати центру та радіус описаного кола можна знайти двома різними способами. Опишемо кожний з них, а розв'яжемо задачу лише одним.



По-перше, за визначенням, відомим з курсу середньої школи, центр описаного кола лежить в точці перетину серединних перпендикулярів. Отже, щоб знайти координати центру, необхідно скласти рівняння двох серединних перпендикулярів (знайти координати середин протилежних сторін та, з умови перпендикулярності, кутові коефіцієнти рівняння) та точку їх перетину (як результат розв'язку системи).

По-друге, за визначенням кола, центр – точка, рівновіддалена від всіх точок, що належать колу, тобто від всіх вершин трикутника. Розв'язання задачі цим методом потребує менших зусиль та використання меншої кількості формул. Тому розв'яжемо задачу саме так.

Нехай точка $O_2(x, y)$ – центр описаного кола. За приведеним визначенням $AO_2 = BO_2 = CO_2$. Отже, за формулою відстані між двома точками:

$$AO_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2},$$

$$BO_2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2},$$

$$CO_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}.$$

Перепишемо тотожність $AO_2 = BO_2 = CO_2$ у вигляді двох рівнянь $AO_2 = BO_2$ і $AO_2 = CO_2$ – отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими, які відразу піднесемо до квадрату:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2; \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2. \end{cases}$$

За формулами квадрату суми та квадрату різниці спростимо отримані рівняння:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4; \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x - 2y = 43; \\ 8x + 10y = 63. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 16 = 176;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 43 & -2 \\ 63 & 10 \end{vmatrix} = 430 + 126 = 556;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 16 & 43 \\ 8 & 63 \end{vmatrix} = 1008 - 344 = 664;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{556}{176} = \frac{139}{44}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{664}{176} = \frac{83}{22}.$$

Отже, розв'язок системи: $x = \frac{139}{44}$; $y = \frac{83}{22}$. Звідси координати центру описаного кола $O_2 \left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22} \right)$. А радіус знайдемо,

наприклад, як $R = AO_2$

$$R = \sqrt{\left(\frac{139}{44} + 1\right)^2 + \left(\frac{83}{22} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{183}{44}\right)^2 + \left(\frac{17}{22}\right)^2} = \frac{\sqrt{34645}}{44} (\text{од.}).$$

Відповідь: Координати центру описаного кола $O_2\left(\frac{139}{44}; \frac{83}{22}\right)$, радіус $R = \frac{\sqrt{34645}}{44}$ (од.).

2. Довести, що рівняння $\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2$ є рівнянням прямої. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

- а) загальне рівняння прямої;
- б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
- в) рівняння прямої у відрізках.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$\frac{6x-2}{3} + \frac{y-2}{5} = 2 \quad | \cdot 15;$$

$$30x - 10 + 3y - 6 - 30 = 0; \quad 30x + 3y - 40 = 0.$$

Отримали рівняння першого ступеня, такому рівнянню відповідає пряма.

Отже, загальне рівняння прямої ($A = 30, B = 3, C = -40$):

$$30x + 3y - 40 = 0.$$

Відповідні коефіцієнти ($A = 30, B = 3, C = -40$).

Перепишемо отримане рівняння у вигляді (5.3)

$$3y = -30x + 40 \Rightarrow y = -10x + \frac{40}{3} \quad - \text{ рівняння прямої з}$$

кутовим коефіцієнтом.

Кутовий коефіцієнт прямої $k = -10$, а відрізок, який відсікає пряма на осі ординат, $b = \frac{40}{3}$.

Для отримання рівняння прямої у відрізках (5.8) перетворимо загальне рівняння:

$$30x + 3y - 40 = 0,$$

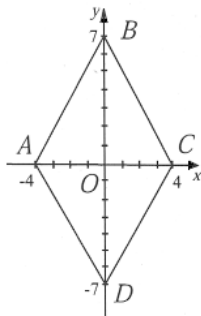
$$30x + 3y = 40 \quad |: 40$$

$$\frac{30x}{40} + \frac{3y}{40} = 1,$$

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{40}{3}} = 1 \quad - \text{ рівняння прямої у відрізках.}$$

Пряма відсікає на осі абсцис відрізок у $a = \frac{4}{3}$ одиниць, а на осі ординат $b = \frac{40}{3}$ одиниць.

3. Діагоналі ромба утворюють осі координат. Записати рівняння сторін ромба, якщо відомо, що довжини діагоналей дорівнюють 8 та 14 одиницям довжини.



Розв'язання. За властивостями ромбу, його діагоналі перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл. Звідси випливає, що осі координат можуть утворювати діагоналі ромбу, й відсікають на осі абсцис по 4 одиниці, а на осі ординат – по 7. Підставимо отримані результати в рівняння прямої у відрізках (5.8)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$\begin{aligned} AB: \quad \frac{x}{-4} + \frac{y}{7} &= 1; & BC: \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{7} &= 1; \\ CD: \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-7} &= 1; & DA: \quad \frac{x}{-4} + \frac{y}{-7} &= 1. \end{aligned}$$

4. Записати рівняння прямої, що з'єднує точку перетину прямих $3x - 2y + 5 = 0$ та $4x + y - 1 = 0$ з точкою $O(0, 0)$.

Розв'язання. Знайдемо точку Q перетину прямих як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -5; \\ 4x + y = 1; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 = -3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3}{11}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{26}{11};$$

$$Q\left(-\frac{3}{11}; \frac{26}{11}\right).$$

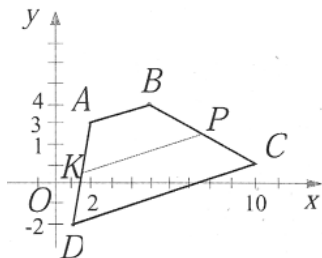
Рівняння шуканої прямої OQ знайдемо за формулою (5.7)

$$\frac{x - 0}{-\frac{3}{11} - 0} = \frac{y - 0}{\frac{26}{11} - 0}; \Rightarrow -\frac{3}{11}y = \frac{26}{11}x;$$

$$y = -\frac{26}{3}x.$$

$$\text{Відповідь: } OQ: y = -\frac{26}{3}x.$$

5. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2, 3)$, $B(5, 4)$, $C(10, 1)$, $D(1, -2)$ є трапеція. Знайти рівняння середньої лінії трапеції $ABCD$.



Розв'язання. За визначенням, трапеція – це чотирикутник, у якого дві протилежних сторони паралельні. Обчислимо кутові коефіцієнти сторін чотирикутника й перевіримо, чи є така пара коефіцієнтів, яка б задовольняла умові паралельності (5.15).

$$k_{AB} = \frac{4 - 3}{5 - 2} = \frac{1}{3}; \quad k_{BC} = \frac{1 - 4}{10 - 5} = -\frac{3}{5};$$

$$k_{CD} = \frac{-2 - 1}{1 - 10} = \frac{1}{3}; \quad k_{AD} = \frac{-2 - 3}{1 - 2} = 5.$$

Бачимо, що $k_{AB} = k_{CD}$, отже, $AB \parallel CD$. Значить, $ABCD$ – трапеція.

Шукана середня лінія KP проходить через середини бічних сторін паралельно AB і CD .

Знайдемо точку K – середину AD :

$$x_K = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_K = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}; \quad K\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

З умови паралельності $k_{KP} = k_{AB} = \frac{1}{3}$. Підставимо у формулу (5.5):

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right);$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{3}x.$$

Відповідь: KP : $y = \frac{1}{3}x$.

6. Знайти відстань між прямими $3x - 5y + 7 = 0$ та $3x - 5y - 8 = 0$.

Розв'язання. Задані прямі паралельні, тому що $k_1 = k_2 = \frac{3}{5}$. Скористаємось формулою (5.19):

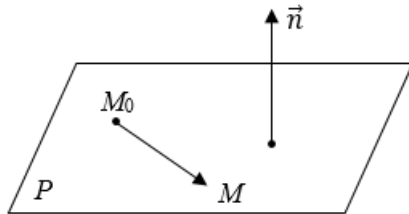
$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7 - (-8)|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}}.$$

Відповідь: $d = \frac{15}{\sqrt{34}}$.

Тема 6. Площина і пряма в просторі

1. Рівняння площини

Нехай на площині P задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вибрано вектор $\vec{n} = (a; b; c)$, перпендикулярний до площини P (вектор нормалі, або нормальний вектор).



Виберемо на P довільну точку $M(x, y, z)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярний $\vec{n}$, тому $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (6.1)$$

Це рівняння площини, яка проходить через задану точку M_0 перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}$.

Розкриємо дужки в (6.1):

$$\begin{aligned} ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 &= 0, \\ ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{\text{позначимо через } d} &= 0 \Rightarrow \\ ax + by + cz + d &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Якщо в (6.2) a, b і c одночасно не рівні 0, то (6.2) – загальне рівняння площини.

Деякі окремі випадки рівняння (6.2):

1) $d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$ – площина проходить через початок координат;

2) $a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$ – площина паралельна OX ,

$b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$ – площина паралельна OY ,

$c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$ – площина паралельна OZ ;

3) $a = 0, b = 0 \Rightarrow cz + d = 0$ – площина паралельна XOY ,

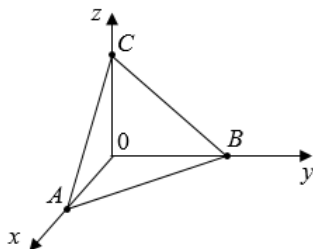
$a = 0, c = 0 \Rightarrow by + d = 0$ – площина паралельна XOZ ,

$b = 0, c = 0 \Rightarrow ax + d = 0$ – площина паралельна YOZ .

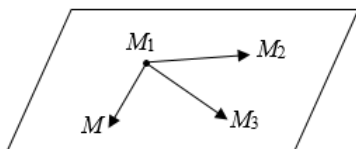
Якщо в рівнянні (6.2) жоден із коефіцієнтів не рівний 0 і $d \neq 0$, то його можна перетворити так:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \Rightarrow ax + by + cz = -d \mid \div (-d) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} &= 1 \Rightarrow \\ \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} &= 1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

де $A = -\frac{d}{a}$, $B = -\frac{d}{b}$, $C = -\frac{d}{c}$ – це довжини відрізків, які площина відтинає на координатних осях; рівняння (6.3) при цьому називається *рівнянням площини "у відрізках на осях"*:



Нехай задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Складемо рівняння площини, яка проходить через ці точки. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ і розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$.



Вони будуть лежати в одній площині тоді і тільки тоді, коли будуть компланарні, тобто, якщо виконуватиметься умова:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Це і є *рівняння площини, що проходить через три задані точки*.

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1; 2; -3)$, $B(0; 4; 1)$ і $C(2; 5; -7)$.

Розв'язання. Підставимо в рівняння (6.4) координати даних точок:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0-1 & 4-2 & 1+3 \\ 2-1 & 5-2 & -7+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

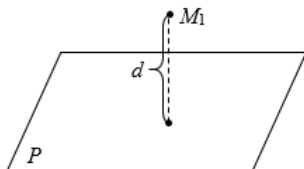
$$\Rightarrow -8(x-1)+4(y-2)-3(z+3)-2(z+3)-12(x-1)-4(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -20(x-1) - 5(z+3) = 0 \Rightarrow 4(x-1) + z + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + z - 1 = 0 \quad - \text{ рівняння шуканої площини.}$$

2. Відстань від точки до площини

Нехай задано площину $P: ax + by + cz + d = 0$ і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поза нею:



Відстань d від M_1 до P обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (6.5)$$

3. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дві площини P_1 і P_2 задані загальними рівняннями:

$$P_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$P_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Кут між P_1 і P_2 дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (6.6)$$

(φ – це один із кутів, інший $\pi - \varphi$).

Якщо $P_1 \perp P_2$, то $\cos \varphi = 0 \Rightarrow$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \quad (6.7)$$

(6.7) – умова перпендикулярності двох площин.

Якщо $P_1 \parallel P_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}. \quad (6.8)$$

(6.8) – умова паралельності двох площин.

4. Рівняння прямої в просторі

Будь-яку пряму в просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин. При цьому, якщо ці площини задані загальними рівняннями, система

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

задає загальне рівняння прямої в просторі.

Якщо відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить пряма L , і відомий вектор $\vec{q} = (l, m, n)$, колінеарний L , то рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (6.10)$$

називають канонічним рівнянням прямої в просторі.

Позначимо через t ці відношення:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = t, \\ \frac{y - y_0}{m} = t, \\ \frac{z - z_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) – *параметричні рівняння прямої в просторі*.

Якщо пряма задана у вигляді (6.9), то можна звести його до канонічного вигляду, знайшовши довільну точку, через яку проходить ця пряма, і координати одного з напрямних векторів $\vec{q}$. Розглянемо цей процес на прикладі.

Приклад 1. Звести загальне рівняння прямої, заданої як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}, \quad (*)$$

до канонічного вигляду.

Розв'язання. Знайдемо координати довільної точки на цій прямій. Для цього в (*) покладемо, наприклад, $x_0 = 0$. Тоді:

$$\begin{cases} 2y - z = -1, \\ -y + 3z = 2 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = -1, \\ -2y + 6z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z = 3 \Rightarrow z_0 = \frac{3}{5}; \quad 2y = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Отже, } M_0 \left(0; -\frac{1}{5}; \frac{3}{5} \right).$$

Знайдемо тепер координати напрямного вектора $\vec{q}$. Оскільки цей вектор перпендикулярний і вектору $\vec{n}_1 = (1; 2; -1)$ (це нормальний вектор площини $x + 2y - z + 1 = 0$), і вектору $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$ (це нормальний вектор площини $2x - y + 3z - 2 = 0$), то координати вектора $\vec{q}$ знайдемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (5; -5; -5) \end{aligned}$$

(визначник розкрито за елементами першого рядка).

Отже, шукане канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x}{5} = \frac{y + \frac{1}{5}}{-5} = \frac{z - \frac{3}{5}}{-5} \Rightarrow x = -\frac{y + \frac{1}{5}}{1} = -\frac{z - \frac{3}{5}}{1}.$$

Параметричні рівняння (6.11) прямої в просторі зручно використовувати, коли потрібно знайти точку перетину прямої і площини.

Приклад 2. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{5}$$

з площиною $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Розв'язання. а) Запишемо канонічні рівняння у параметричному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x - 2}{4} = t, \\ \frac{y - 3}{2} = t, \\ \frac{z + 1}{5} = t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4t + 2, \\ y = 2t + 3, \\ z = 5t - 1. \end{array} \right.$$

б) в рівняння площини $x + 2y - 3z - 4 = 0$ замість x, y і z підставимо праві частини параметричних рівнянь:

$$(4t + 2) + 2(2t + 3) - 3(5t - 1) - 4 = 0,$$

$$4t + 2 + 4t + 6 - 15t + 3 - 4 = 0,$$

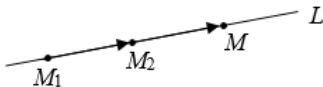
$$-7t = -7 \Rightarrow t = 1.$$

в) підставимо $t = 1$ в праві частини параметричних рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 + 2 = 6, \\ y = 2 + 3 = 5, \\ z = 5 - 1 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow M(6; 5; 4)$$

– точка перетину заданої прямої і заданої площини.

Нехай задано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на прямій L .



Тоді для довільної точки $M(x, y, z)$ на цій же прямій вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ будуть колінеарні, отже, за формулою (6.10):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (6.12)$$

(6.12) – рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки.

5. Відстань від точки до прямої в просторі

Відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої L : $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ обчислюють за формулою:

$$d = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \times \quad (6.13)$$

$$\times \sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \quad \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \quad \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \quad \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2}.$$

6. Взаємне розміщення двох прямих

Нехай L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \Rightarrow \vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1),$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \Rightarrow \vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2).$$

Тоді кут φ між ними – це кут між $\vec{q}_1$ і $\vec{q}_2$, косинус якого обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (6.14)$$

Якщо $L_1 \perp L_2$, то $\vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Rightarrow$ умова перпендикулярності двох прямих:

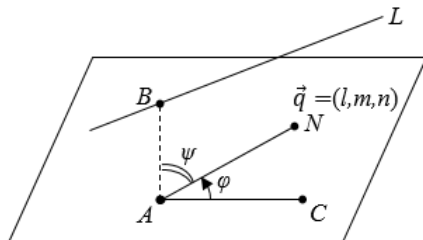
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad (6.15)$$

якщо $L_1 \parallel L_2$, то $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2 \Rightarrow$ умова паралельності двох прямих в просторі:

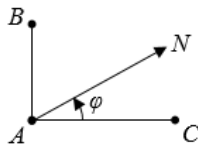
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6.16)$$

7. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі

Нехай задано площину $P: ax + by + cz + d = 0$ ($\vec{n} = (a, b, c)$) і пряму $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ ($\vec{q} = (l, m, n)$).



З деякої точки B на L опустимо перпендикуляр BA на площину P . Кут BAC дорівнює 90° (AC – лежить в площині P). Якщо $L \nparallel P$, то між вектором $\vec{q}$ (який $\parallel L$) і AC , тобто між L і P , буде деякий кут φ :



Цей кут нам і потрібно знайти. Оскільки $\overrightarrow{BA} \perp P$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ є нормальним до площини P , тобто $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Позначимо кут між $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{q}$ через ψ . Тоді:

$$\cos \psi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \vec{q})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Оскільки $\varphi = 90^\circ - \psi$, то $\psi = 90^\circ - \varphi$, отже,

$$\cos \psi = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (6.17)$$

(6.17) – формула для визначення кута між прямою і площиною в просторі.

Якщо $L \perp P$, то $\vec{n} \parallel \vec{q} \Rightarrow$ умова прямої і площини в просторі:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}. \quad (6.18)$$

Якщо, $L \parallel P$, то $\vec{n} \perp \vec{q} \Rightarrow$ умова паралельності прямої і площини в просторі:

$$al + bm + cn = 0. \quad (6.19)$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Площина і пряма в просторі"

1. Дано координати точок: A, B, C і D . Знайти:

- а) довжину ребра AB ;
- б) рівняння ребра AD ;
- в) рівняння грані ABC ;
- г) кут між ребрами AB і AD ;
- д) кут між гранями ABC і ABD ;
- е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
- є) рівняння і довжину висоти DK ;
- ж) площу грані BCD ;
- з) об'єм піраміди $ABCD$.

№ в-та	A	B	C	D
1	(3, 1, 4)	(-1, 6, 1)	(-1, 1, 6)	(0, 4, -1)
2	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, -2)	(-1, 0, 2)
4	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)

5	(9, 5, 5)	(-3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6	(0, 7, 1)	(2, -1, 5)	(1, 6, 3)	(3, -9, 8)
7	(5, 5, 4)	(1, -1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, -1)
8	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)
18	(7, 2, 2)	(-5, 7, -7)	(5, -3, 1)	(2, 3, 7)
19	(8, -6, 4)	(10, 5, -5)	(5, 6, 8)	(8, 10, 7)
20	(1, -1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21	(1, -2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, -3, 5)
23	(2, 3, 5)	(5, 3, -7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24	(5, 3, 7)	(-2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, -1)
27	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, -5, 8)	(5, 4, 2)
28	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, -3, 9)	(1, 2, 5)
29	(2, -1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, -3, 7)
30	(0, 4, 5)	(3, -2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Дано координати точок: $A(-3; 2; 1)$, $B(4; 4; 3)$, $C(2; -3; 2)$ і $D(1; 5; -2)$. Знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння ребра AD ;
- рівняння грані ABC ;
- кут між ребрами AB і AD ;

- д) кут між гранями ABC і ABD ;
- е) кут між ребром AD і гранню ABC ;
- є) рівняння і довжину висоти DK ;
- ж) площу грані BCD ;
- з) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання. а) довжину ребра AB обчислимо як довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(4 - (-3))^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{49 + 4 + 4} = \sqrt{57} \text{ (од.)}; \end{aligned}$$

б) рівняння ребра AD запишемо за формулою (6.12):

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z - 1}{-2 - 1}; \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{-3};$$

в) рівняння грані ABC знайдемо за допомогою формули (6.4) як рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 2 - (-3) & -3 - 2 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \cdot (2 + 10) - (y - 2) \cdot (7 - 10) + (z - 1) \cdot (-35 - 10) = 0;$$

$$12(x + 3) + 3(y - 2) - 45(z - 1) = 0 \quad | :3;$$

$$4(x + 3) + (y - 2) - 15(z - 1) = 0; \quad 4x + 12 + y - 2 - 15z + 15 = 0;$$

$$4x + y - 15z + 25 = 0;$$

г) кут між ребрами AB і AD знайдемо, користуючись формулами векторної алгебри. Згадаємо, що розташування прямих в просторі визначається їх напрямними векторами.

Координати вектора, паралельного прямій AD з'ясуємо, скориставшись результатами п. б): $(4; 3; -3)$. А координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знайдемо за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (4 - (-3); 4 - 2; 3 - 1) = (7; 2; 2).$$

Кут між ребрами знайдемо за формулою (??):

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \pm \frac{7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \\ &= \frac{28}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1938}}; \\ \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right), \\ \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \pi - \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right); \end{aligned}$$

д) кут між гранями ABC і ABD знайдемо як кут між векторами нормалі до площин (ABC) і (ABD) . Вектор нормалі до площини (ABC) запишемо, скориставшись результатами обчислень у п. в): $\vec{N}_1(4; 1; -15)$. Знайдемо рівняння площини ABD :

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 1 - (-3) & 5 - 2 & -2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-12(x + 3) + 29(y - 2) + 13(z - 1) = 0;$$

$$12x - 29y - 13z + 107 = 0; \Rightarrow \vec{N}_2(12; -29; -13).$$

Кут між площинами знайдемо за формулою:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4 \cdot 12 + 1 \cdot (-29) - 15 \cdot (-13)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-29)^2 + (-13)^2}} =$$

$$= \frac{48 - 29 + 195}{\sqrt{242} \cdot \sqrt{1154}} = \frac{214}{22\sqrt{577}} = \frac{107}{11\sqrt{577}};$$

$$\angle((ABC), (ABD)) = \arccos \frac{107}{11\sqrt{577}};$$

е) знайдемо кут між ребром AD і гранню ABC . Згадаємо координати напрямного вектора ребра AD $(\vec{S}(4; 3; -3))$ і вектора нормалі до грані ABC $(\vec{N}(4; 1; -15))$. Отже, за формулою (6.17) маємо:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-15)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{64}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{242}} = \\ &= \frac{64}{22\sqrt{17}} = \frac{32}{11\sqrt{17}}; \\ \varphi &= \arcsin \frac{32}{11\sqrt{17}}; \end{aligned}$$

е) рівняння висоти DK знайдемо як рівняння перпендикуляру, встановленого з вершини D на площину ABC . Згадаємо, що пряма визначається вектором, паралельним їй, а площина – вектором нормалі. Зрозуміло, що шуканий вектор, який визначає розташування висоти DK , паралельний вектору нормалі до площини ABC . З умови паралельності маємо

$$\vec{N}(4; 1; -15) \Rightarrow \vec{S}(4; 1; -15).$$

Отже рівняння висоти DK знайдемо за формулою (6.10) (згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$):

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{-15}.$$

Довжину DK знайдемо як відстань від точки D до площини ABC за формулою (6.5). Згадаємо координати точки $D(1; 5; -2)$ та рівняння площини ABC : $4x + y - 15z + 25 = 0$

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 15 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{39}{\sqrt{242}} = \frac{39}{11\sqrt{2}};$$

ж) площу грані BCD обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри. Грань BCD – трикутник, площу якого знайдемо, використовуючи векторний добуток векторів $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}$. Для підстановки у формулу знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BC} = (2 - 4; -3 - 4; 2 - 3) = (-2; -7; -1);$$

$$\overrightarrow{BD} = (1 - 4; 5 - 4; -2 - 3) = (-3; 1; -5);$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right|.$$

Знайдемо спочатку векторний добуток, а потім його модуль:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -7 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (35 + 1)\vec{i} - (10 - 3)\vec{j} + (-2 - 21)\vec{k} =$$

$$= 36\vec{i} - 7\vec{j} - 23\vec{k};$$

$$\left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right| = \sqrt{36^2 + (-7)^2 + (-23)^2} = \sqrt{1296 + 49 + 529} = \\ = \sqrt{1874};$$

$$\text{Отже, } S = \frac{1}{2} \sqrt{1874} \text{ (од.}^2\text{)};$$

з) об'єм піраміди $ABCD$ також обчислимо, скориставшись формулами векторної алгебри. Для цього з'ясуємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}(7; 2; 2)$; $\overrightarrow{AC}(5; -5; 1)$; $\overrightarrow{AD}(4; 3; -3)$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 105 + 8 + 30 + 40 + 30 - 21 = 192;$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

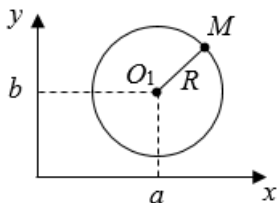
Тема 7. Лінії другого порядку

Лінії, координати точок яких задовольняють в прямокутній декартовій системі координат рівняння другого степеня, називають *лініями другого порядку* або *кривими другого порядку*. До них належать: *коло*, *еліпс*, *гіпербола* та *парабола*. Ці лінії є лініями перетину кругового конуса площинами, що проходять через вершину конуса.

1. Коло

Означення 7.1. *Коло – це геометричне місце точок площини (ГМТП), рівновіддалених від заданої точки, яка лежить в цій площині і називається центром кола, на задану відстань, яка називається радіусом кола.*

Розглянемо коло з центром в точці $O_1(a, b)$ і виберемо довільну точку $M(x, y)$ на колі.



Тоді

$$\begin{aligned} |O_1M| &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Rightarrow \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

– канонічне рівняння кола (або нормальне рівняння кола).

Рівняння 2-го порядку вигляду

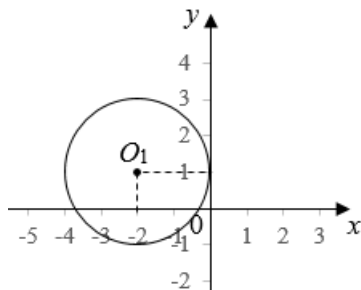
$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad (7.2)$$

де $A \neq 0$ називається загальним рівнянням кола. Для того, щоб звести його до вигляду (7.1) (отже, визначити, чи дійсно це коло, де його центр і який радіус), потрібно в (7.2) виділити повні квадрати по x і y .

Приклади. 1) Коло задано рівнянням $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.
4. Визначити координати центру, радіус та побудувати коло.

2) З'ясувати, чи визначає рівняння $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$ коло. Якщо так, то знайти координати центру та радіус.

Розв'язання. 1) Із рівняння $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ визначаємо (співставивши його з (7.1)), що центром цього кола є точка $O_1(-2; 1)$, а радіус $R = \sqrt{4} = 2$.



2) Виділимо в рівнянні $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$ повні квадрати по x і y :

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 12 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 12 = 0 \Rightarrow$$

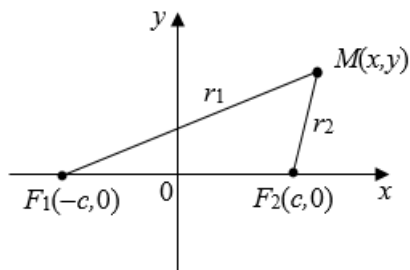
$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 + 9 - 12 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1 \quad - \text{ коло з центром в } (-2; 3), R = 1.$$

2. Еліпс

Означення 7.2. Еліпс – це ГМТП, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (це фокуси еліпса) є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Виберемо початок координат в середині відрізка F_1F_2 , довжину якого позначимо $2c$. $O(0, 0)$ – центр еліпса.



Тоді $F_1(-c; 0)$ – лівий фокус, $F_2(c; 0)$ – правий фокус. Позначимо $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ – це фокальні радіуси точки $M(x, y)$, яка розташована на еліпсі. Позначимо сталу величину із означення через $2a$. Тоді, згідно з означенням еліпса, маємо:

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (7.3)$$

Рівняння (7.3) можна спростити і привести до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7.4)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$. Рівняння (7.4) – канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі OX і $a > b$ (рис. 1); a – більша піввісь еліпса, b – менша піввісь. Якщо ж $a < b$, то $b^2 = a^2 + c^2$, фокуси $F_1(0; -c)$ і $F_2(0; c)$ розташовані на осі OY (рис. 2).

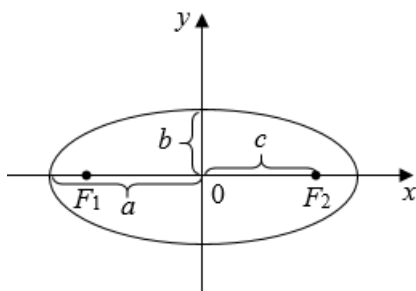


Рис. 1

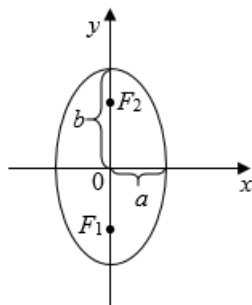


Рис. 2

Із рівняння (7.4) випливає, що осі еліпса є його осями симетрії, а точка їх перетину – центром його симетрії. У частинному випадку, коли $a = b$, $c = 0$, маємо коло радіуса a з центром в початку координат.

Якщо центр еліпса (з осями, паралельними осям OX і OY) знаходиться не в початку координат, а в точці $(x_0; y_0)$, то його канонічним рівнянням буде

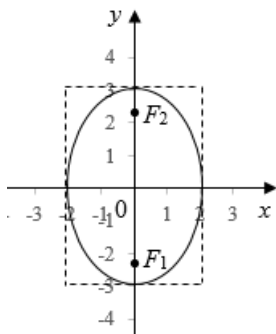
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.5)$$

Величина $e = \frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* еліпса, де a – величина дійсної піввісі.

Приклади: 1) Побудувати еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

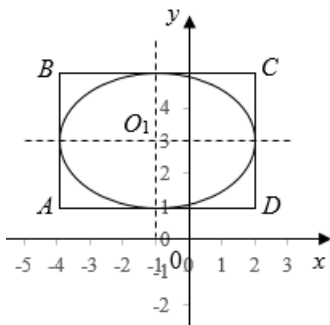
2) Побудувати еліпс $\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$.

Розв'язання. 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Отже, маємо еліпс з центром в $(0; 0)$, півосі $a = 2$, $b = 3$, фокуси на осі OY : $c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow F_1(0; -\sqrt{5})$, $F_2(0; \sqrt{5})$.



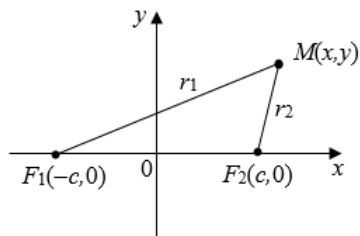
Зауважимо, що при побудові еліпса використали *основний прямокутник еліпса* (на малюнку – пунктиром), сторони якого довжиною $2a$ і $2b$ паралельні осям координат, центр – в $(0; 0)$.

2) Центр еліпса, заданого рівнянням $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, в точці $O_1(-1; 3)$, півосі $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{4} = 2$, $ABCD$ – основний прямокутник.



3. Гіпербола

Означення 7.3. Гіпербола – це ГМТП, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів гіперболи) є величиною сталою і меншою, ніж відстань між фокусами.



По аналогії з еліпсом: нехай $|F_1 F_2| = 2c$; центр гіперболи $O(0; 0)$ – середина $F_1 F_2$, тоді

$$|r_1 - r_2| = 2a < 2c \Rightarrow \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.6)$$

– канонічне рівняння гіперболи з фокусами на осі OX , центром в $O(0; 0)$. При цьому вісь OX називається *дійсною віссю*

гіперболи (гіпербола перетинає її в двох точках) а вісь OY – *уявною віссю* (гіпербола не має з нею спільних точок).

Гіпербола, задана рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (7.7)$$

називається *спряженою* до гіперболи (7.6); її фокуси розташовані на OY ; для неї OY – дійсна вісь, а OX – уявна.

Якщо центр гіперболи розташований в точці (x_0, y_0) , а осі гіперболи паралельні осям координат, то її канонічним рівнянням буде

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (7.8)$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1 \quad \text{— для спряженої гіперболи.}$$

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – *ексцентриситет* гіперболи, де a – величина дійсної піввісі.

Приклад. Побудувати гіперболу

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (7.9)$$

та спряжену до неї.

Розв'язання. Маємо центр в $(0; 0)$, півосі $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{4} = 2$.

1) Будуємо основний прямокутник гіперболи $ABCD$ (центр в $(0; 0)$, $AD = BC = 2a = 6$, $AB = DC = 2b = 4$, сторони паралельні OX і OY)

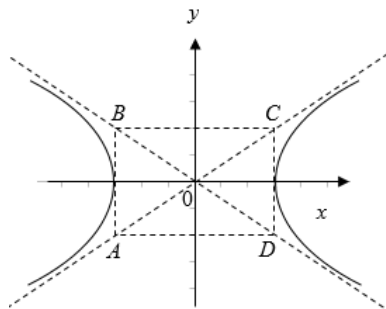


Рис. 3

2) проводимо прямі, які містять діагоналі прямокутника AC і BD ; ці прямі є похилими асимптотами гілок гіперболи, їх рівняння: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

На рис. 3 зображена гіпербола, визначена рівнянням (7.9). Точки дотику гілок гіперболи до сторін прямокутника – це вершини гіперболи:

Для побудови спряженої гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ повторюємо кроки 1) і 2), але гілки гіперболи розташовуємо зверху і знизу основного прямокутника:

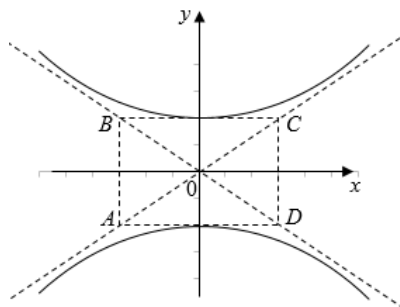


Рис. 4

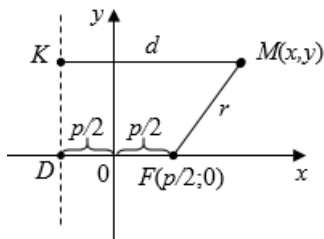
4. Парабола

Означення 7.4. Парабола – це ГМТП, для яких відстань до деякої фіксованої точки F цієї площини дорівнює відстані

до деякої фіксованої прямої, яка теж розташована в даній площині.

При цьому точка F – це *фокус* параболі, а фіксована пряма – це *директриса* параболі.

Проведемо вісь OX через фокус F перпендикулярно директриси. Виберемо початок координат в середині відрізка FD (D – точка перетину OX і директриси). Позначимо довжину FD через p . Тоді $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка на параболі, відстань від неї до фокуса позначимо через r , а до директриси – через d (відрізок MK).



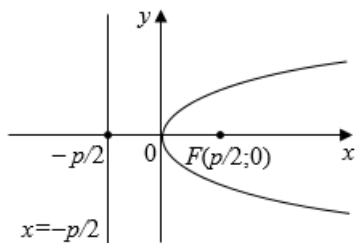
Згідно з означенням параболі рівність $r = d$ є необхідною і достатньою умовою розташування точки M на даній параболі. Оскільки

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \frac{p}{2} + x \quad (\text{для } x > 0),$$

то співвідношення

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x \Rightarrow y^2 = 2px \quad (7.10)$$

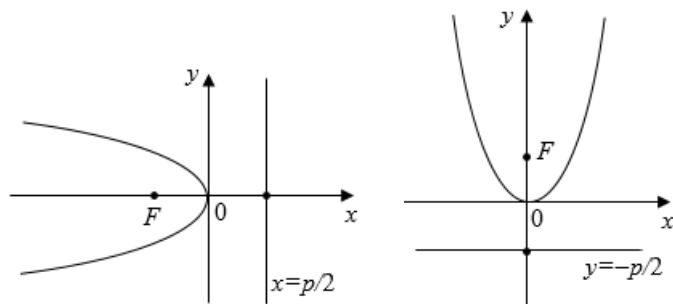
можна розглядати як канонічне рівняння параболі. Тут p – *параметр* параболі. Парабола, визначена рівнянням (7.10), має вершину в $(0; 0)$, віссю симетрії є вісь OX , гілки параболі направлені праворуч:



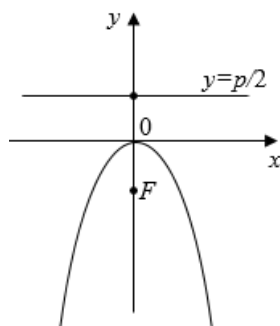
Інші випадки розташування параболи з віссю, паралельній одній із осей координат, та їх канонічні рівняння:

$$y^2 = -2px \quad (7.11)$$

$$x^2 = 2py \quad (7.12)$$



$$x^2 = -2py \quad (7.13)$$



Якщо вершина параболи в точці $(x_0; y_0)$, а вісь паралельна одній із осей координат, то канонічними рівняннями є наступні:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ – вісь паралельна OX , гілки праворуч;

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ – вісь паралельна OX , гілки ліворуч;

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ – вісь паралельна OY , гілки вверх;

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ – вісь паралельна OY , гілки вниз.

5. Методика зведення до канонічного вигляду рівнянь ліній другого порядку

Загальне рівняння лінії 2-го порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (7.14)$$

визначає одну із наступних кривих:

1) *крива еліптичного типу* (еліпс; коло; одна точка; уявне місце точок);

2) *крива гіперболічного типу* (гіпербола; пара прямих, що перетинаються);

3) *крива параболічного типу* (парабола; пара паралельних прямих; пара прямих, що співпадають; уявне місце точок).

Якщо в (7.14) $AC - B^2 \neq 0$, то лінія має певний центр і називається *центральною* (коло, еліпс і гіпербола). Якщо $AC - B^2 = 0$, то лінія не має центру (парабола).

Спрощення рівняння (7.14) досягається таким перетворенням координат, при якому зникає доданок з добутком змінних x і y , якщо він є в рівнянні.

Розглянемо простіший випадок, коли в (7.14) $B = 0$. Рівняння (7.14) матиме вигляд:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (7.15)$$

Метод спрощення: виділення повних квадратів. При цьому:

1. Якщо $A = C$, то (7.15) визначає або коло, або точку, або уявне місце точок.

Приклад 1. $2x^2 + 2y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$ – спростити та накреслити.

Розв’язання.

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 8y = 1$$

$$2(x^2 + 3x) + 2(y^2 - 4y) = 1$$

$$(x^2 + 3x) + (y^2 - 4y) = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y - 2)^2 - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4} + 4 + \frac{1}{2} = \frac{27}{4} -$$

– це рівняння *кола* з центром в точці $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ і радіусом $\frac{\sqrt{27}}{2}$.

Зауважимо: Якщо при спрощенні одержуємо рівняння вигляду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0,$$

то це рівняння визначає тільки *одну точку*: (x_0, y_0) .

Якщо ж одержуємо рівняння вигляду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -a,$$

де a – деяке додатне число, то дане рівняння визначає *уявне місце точок*.

2. Якщо A і C – різні, але однакового знаку ($AC > 0$), то рівняння (7.15) визначає або еліпс, або уявне місце точок, або одну точку.

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду та побудувати:

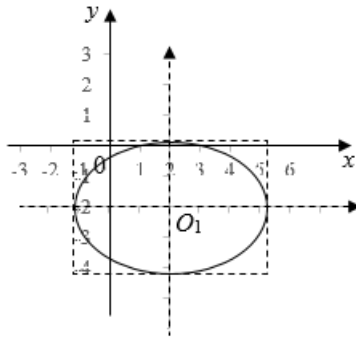
$$x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0.$$

Розв’язання.

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 2$$

$$\begin{aligned}
 (x-2)^2 + 2(y^2 + 4y) &= 2 \\
 (x-2)^2 + 2[(y+2)^2 - 4] &= 2 \\
 (x-2)^2 + 2(y+2)^2 &= 10 \quad | \div 10 \\
 \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y+2)^2}{5} &= 1.
 \end{aligned}$$

Це еліпс з півосями $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$, центр симетрії – в точці $(2; -2)$.



Зауваження аналогічні тим, що наведені в прикладі 1.

3. Якщо A і C різного по знаку ($A \cdot C < 0$), то рівняння (7.15) визначає або гіперболу, або прямі, що перетинаються.

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду та побудувати:

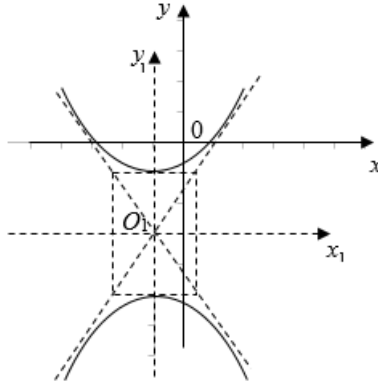
$$2x^2 - y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 4x - (y^2 + 6y) &= 3 \\
 2(x^2 + 2x) - (y^2 + 6y) &= 3 \\
 2[(x+1)^2 - 1] - [(y+3)^2 - 9] &= 3 \\
 2(x+1)^2 - 2 - (y+3)^2 + 9 &= 3 \\
 2(x+1)^2 - (y+3)^2 &= 3 + 2 - 9 = -4 \quad | \div 4
 \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{4} = -1.$$

Це гіпербола з центром в точці $(-1; -3)$, півосями $a = \sqrt{2}$, $b = 2$; дійсна вісь $O_1Y_1 \parallel OY$, уявна вісь $O_1X_1 \parallel OX$.



4. Якщо в рівнянні (7.15) або $A = 0$, або $C = 0$, то таке рівняння визначає або параболу, або пару паралельних прямих.

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду та побудувати криву, що визначається рівнянням:

$$4x^2 - 8x + 6y - 5 = 0.$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат по x :

$$4(x^2 - 2x) = -6y + 5$$

$$x^2 - 2x = -\frac{6}{4}y + \frac{5}{4}$$

$$(x-1)^2 - 1 = -\frac{6}{4}y + \frac{5}{4}$$

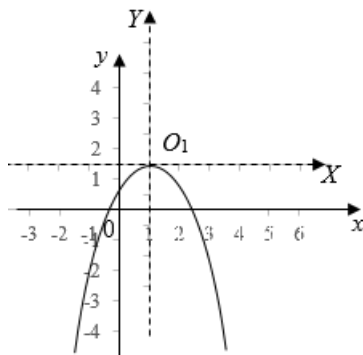
$$(x-1)^2 = -\frac{6}{4}y + \frac{5}{4} + 1 = -\frac{6}{4}y + \frac{9}{4}$$

$$(x-1)^2 = -\frac{6}{4}(y-1,5) \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right).$$

Отже, вихідне рівняння зведено до вигляду

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0).$$

Це рівняння параболи з вершиною в точці $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ гілками донизу; вісь симетрії паралельна осі OY :



Приклад 5.

$$x + 3y^2 - 6y + 4 = 0.$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат по y :

$$3y^2 - 6y = -x - 4$$

$$3(y^2 - 2y) = -x - 4$$

$$3((y - 1)^2 - 1) = -x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = -x - 4 + 3 = -x - 1 = -(x + 1)$$

(Рівняння звелось до вигляду $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$).

Це рівняння параболи з вершиною в точці $(-1; 1)$, вісь симетрії паралельна осі OX ; гілки направлені вліво.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Лінії другого порядку"

1. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + k)^2 = k^2$. Знайти координати центра та радіус кола.

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{(k - 3)^2} + \frac{y^2}{(k + 1)^2} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів та ексцентриситет еліпса.

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{(k - 5)^2} - \frac{y^2}{(k + 1)^2} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння асимптот гіперболи.

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = kx$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Дано рівняння кола: $x^2 + (y + k)^2 = k + 4$. Визначити положення точки $A(-5, 3)$ відносно кола: належить йому, знаходиться у середині або зовні його?

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомо, що його центр знаходиться у точці $A(-2; k)$, а радіус дорівнює $k + 1$.

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що його менша вісь дорівнює 6, а один з фокусів має координати $F(-4, 0)$.

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її дійсна піввісь дорівнює 3 і точка $A(6, \sqrt{k})$ належить гіперболі.

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $x = \frac{k - 3}{k + 5}$.

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного виду її рівняння:

1) $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$;

3) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$;

4) $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0$;

- 5) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;
- 6) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$;
- 7) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$;
- 8) $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$;
- 9) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$;
- 10) $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$;
- 11) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 7 = 0$;
- 12) $x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$;
- 13) $x^2 + y^2 - 16x - 36y + 75 = 0$;
- 14) $x^2 + 10x - 7y + 53 = 0$;
- 15) $3x^2 + 5y^2 + 54x - 40y + 308 = 0$;
- 16) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 8y + 121 = 0$;
- 17) $y^2 - 7x + 18y + 102 = 0$;
- 18) $9x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$;
- 19) $4x^2 - y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$;
- 20) $2x^2 - 2x - 32y - 95 = 0$.

Приклади розв'язання типового варіанту

1. Дано рівняння кола: $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 32$. Знайти координати центра та радіус кола.

Розв'язання. За рівнянням (7.1) маємо:

- координати центра: $O(7, -2)$;

- радіус $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (од.).

2. Дано рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів та ексцентриситет еліпса.

Розв'язання. З рівняння (7.4) у відповідності з визначеннями:

- велика вісь $2a = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow a = 4$;

- мала вісь $2b = 2\sqrt{7} \Rightarrow b = \sqrt{7}$.

Звідси координати вершин $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, -\sqrt{7})$, $B_2(0, \sqrt{7})$.

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для еліпса і знайдемо параметр c :

$$b^2 = a^2 - c^2; \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9; \quad c = 3.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-3; 0); F_2(3; 0)$.

Знаходимо ексцентриситет еліпса:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}.$$

3. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$. Знайти довжини осей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис і асимптот гіперболи.

Розв'язання. З рівняння (7.6) у відповідності з визначеннями:

$$\text{- дійсна вісь } 2a = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2};$$

$$\text{- умовна вісь } 2b = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = \sqrt{5}.$$

$$\text{Звідси координати вершин: } A_1(-2\sqrt{2}; 0), A_2(2\sqrt{2}; 0).$$

Щоб записати координати фокусів, скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо параметр c :

$$b^2 = c^2 - a^2; \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 5 = 13; \quad c = \sqrt{13}.$$

Маємо координати фокусів: $F_1(-\sqrt{13}; 0); F_2(\sqrt{13}; 0)$.

Знайдемо ексцентриситет гіперболи:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}.$$

Рівняння асимптот гіперболи запишемо, скориставшись формулою:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x.$$

4. Дано рівняння параболи: $y^2 = 8x$. Знайти параметр параболи, координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. З рівняння (7.10) у відповідності з визначеннями знаходимо параметр параболи:

$$2p = 8; \quad \Rightarrow \quad p = 4.$$

Фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow F(2, 0)$. А рівняння директриси має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}; \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

5. Дано рівняння кола: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 12$. Визначити положення точки $A(2; -7)$ відносно кола: належить йому, знаходиться усередині або зовні його?

Розв'язання. Підставимо координати точки A у рівняння кола:

$$(2 - 3)^2 + (-7 + 4)^2 = 1 + 9 = 10 < 12.$$

Звідси випливає, що точка лежить в середині кола. Якщо б тотожність виконувалася, це б означало, що точка належить колу. В тому ж випадку, коли між лівою та правою частинами рівняння ми б були вимушені поставити знак «>», з цього б прямувало, що точка лежить поза колом.

6. Знайти канонічне рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з його діаметрів AB : $A(3; 8)$, $B(-5; 12)$.

Розв'язання. Щоб записати рівняння кола, необхідно визначити координати центра та радіус кола. За визначенням, центр кола поділяє будь-який з його діаметрів навпіл, тому знайдемо координати центру кола як координати середини відрізка AB :

$$x = \frac{3 - 5}{2} = -1; \quad y = \frac{8 + 12}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad O_1(-1; 10).$$

А радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1 :

$$R = AO_1 = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (10 - 8)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Отже, канонічне рівняння кола має вигляд:

$$(x+1)^2 + (y-10)^2 = 20.$$

7. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що лівий фокус має координату $F_1(-1;0)$, а точка $D\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ належить еліпсу.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З умови, що точка D належить еліпсу, випливає, що її координати задовольняють рівняння еліпса:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Згадаємо основну тотожність для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2; \quad a^2 - b^2 = 1,$$

оскільки абсциса лівого фокуса -1 .

Отже маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1; \\ a^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, щоб знайти довжини великої та малої осей:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{3}{b^2 + 1} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 12b^2 + 3b^2 + 3 = 4b^4 + 4b^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ 4b^4 - 11b^2 - 3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow b^2 = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} \\ 3 \end{array} \right] - \text{не задов.}; \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b^2 = 3, \\ a^2 = 3 + 1 = 4. \end{cases}$$

Шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що її ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Щоб знайти величини дійсної та уявної півосей, складемо за умовою систему:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5}, \\ c - a = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} c = a + 2, \\ \frac{a + 2}{a} = \frac{7}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} c = a + 2, \\ 5a + 10 = 7a; \end{cases} \quad \begin{cases} c = 5 + 2 = 7, \\ a = 5. \end{cases}$$

Скористаємося основною тотожністю для гіперболи і знайдемо уявну піввісь: $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Остаточно маємо:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

9. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо відомо рівняння її директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання. З рівняння директриси робимо висновок, що парабола симетрична відносно осі ординат, тож її рівняння має вигляд (7.12):

$$x^2 = 2py.$$

З рівняння директриси знаходимо параметр параболи:

$$y = -\frac{p}{2}; \quad -\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6}{5}.$$

Отже шукане рівняння параболи:

$$x^2 = \frac{12}{5}y.$$

10. Визначити тип кривої другого порядку та привести до канонічного вигляду її рівняння: $4x^2 + 4y^2 + 8x - 10y - 1 = 0$.

Розв'язання. За визначенням будь-яке рівняння другого ступеня (7.14) описує криву другого порядку. Проаналізувавши задане рівняння згідно з п. 5 (Методика зведення до канонічного вигляду), зробимо висновок, що загальне рівняння кола. Щоб привести його до канонічного вигляду, виділимо повний квадрат (за допомогою формул квадрату суми, квадрату різниці):

$$4x^2 + 8x = 4(x^2 + 2x) = 4((x^2 + 2x + 1) - 1) = 4(x + 1)^2 - 4,$$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 10y &= 4\left(y^2 - \frac{5}{2}y\right) = 4\left(\left(y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16}\right) = \\ &= 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } 4x^2 + 4y^2 + 8x - 10y - 1 =$$

$$= 4(x + 1)^2 - 4 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 = 0;$$

$$4(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{4} \quad | :4;$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

Звідси маємо координати центра кола: $O_1\left(-1; \frac{5}{4}\right)$, а радіус

$$R = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

Тема 8. Послідовності, функції та їх границі

1. Послідовності

Основні означення

Означення 8.1. Якщо задана закономірність, згідно з якою кожному натуральному числу $1, 2, 3, \dots$, відповідає деяке дійсне число, то говорять, що задано послідовність.

Послідовність можна розглядати як функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел.

Послідовність визначається *формулою*, тобто законом, згідно з яким устанавлюється спосіб відповідності заданих чисел послідовним натуральним числам. Послідовність із загальним членом a_n позначається $\{a_n\}$, або просто a_n .

Інший спосіб визначення послідовності полягає в застосуванні *рекурсії*: n -й член послідовності визначається за допомогою заданих k ($k \leq n$) попередніх членів послідовності.

Наприклад:

1) Рекурсія $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_1 = 0$ визначає послідовність $0, 3, 6, 9, \dots$

2) Рекурсія $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ визначає послідовність $1, 2, 5, 27, 734, \dots$

Приклади послідовностей:

1) $a_n = \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots;$

2) $a_n = n!, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots;$

3) $a_n = (-1)^{\frac{n}{n+1}}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots;$

4) $a_n = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots;$

Означення 8.2. Послідовність $\{a_n\}$ називається обмеженою, коли існує таке додатне число M , що нерівність

$$|a_n| \leq M$$

виконується для всіх n .

Означення 8.3. Послідовність $\{a_n\}$ називається монотонно зростаючою (спадною), якщо

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ (} a_{n+1} \leq a_n \text{)}$$

для всіх n .

Означення 8.4. Послідовність x_n називається обмеженою зверху, якщо існує таке число m , що при всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується нерівність $x_n \leq m$.

Означення 8.5. Послідовність x_n називається обмеженою знизу, якщо існує таке число m , що при всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується нерівність $x_n \geq m$.

Означення 8.6. Послідовність x_n , не обмежена зверху або знизу, називається необмеженою.

Означення 8.7. Множина довільних точок X на числовій осі називається обмеженою зверху, якщо існує таке число m , що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \leq m$. Число m називається верхньою межею множини.

Означення 8.8. Множина довільних точок X на числовій осі називається обмеженою знизу, якщо існує таке число m , що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \geq m$. Число m називається нижньою межею множини.

Множина, для якої існують верхня та нижня межі, називається обмеженою.

Найменша серед верхніх меж називається супремумом і позначається $\sup\{x\}$. Найбільша серед нижніх меж називається інфімумом і позначається $\inf\{x\}$.

Означення 8.9. Точною верхньою межею множини X називається значення $M = \sup\{x\}$ таке, що:

- 1) для будь-якого $x \in X$ виконується невідність $x \leq M$;
- 2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $x \in X$ таке, що

$$x > M - \varepsilon.$$

Аналогічно означається точна нижня межа множини X .
Справедлива

Теорема 8.1. У будь-якої обмеженої множини існують точні верхня та нижня межі.

Збіжні та розбіжні послідовності

Означення 8.10. Число a називається границею послідовності $\{a_n\}$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{для всіх } n > N(\varepsilon).$$

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Означення 8.11. Послідовність, яка має границю, називається збіжною, а яка не має границі називається розбіжною.

Наприклад, послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ — збіжна, оскільки існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (за означенням $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для будь-якого $n > N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$).

Зауваження. Послідовність, границя якої дорівнює 0, називається нульовою послідовністю.

Послідовність $a_n = (-1)^{n+1}$ розбіжна, оскільки не має границі. Вона почергово набуває значення $+1$ і -1 .

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 8.2. *Границя сталої дорівнює цій сталій:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c, \quad c = \text{const.}$$

Теорема 8.3. *Якщо послідовність x_n має границю, то ця границя єдина.*

Теорема 8.4. *Послідовність x_n , яка має границю, є обмеженою.*

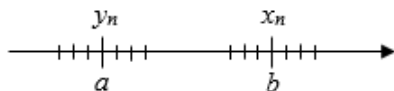
Теорема 8.5. *Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $a < b$. Тоді знайдеться число N , таке що при будь-якому $n > N$ справджується нерівність*

$$x_n < b.$$

Теорема 8.6. *Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Якщо послідовність x_n при всіх n задовольняє нерівність $x_n \leq b$, то*

$$a \leq b.$$

Теорема 8.7. *Якщо $x_n \geq y_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $a \geq b$.*



Означення 8.12. *Перехід від нерівності $x_n \geq y_n$ до нерівності $a \geq b$ називається граничним переходом у нерівності.*

Теорема 8.8. *(про "охоплену" послідовність) Нехай виконується нерівність $x_n \leq u_n \leq y_n$. Якщо послідовності x_n і y_n збіжні, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, то послідовність u_n також буде збіжною: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.*

Теорема 8.9. *(Больцано–Вейерштрасса) Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.*

Число e та його економічна інтерпретація

Розглянемо послідовність чисел $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Означення 8.13. *Границя послідовності $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ називається числом e .*

Позначення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8.1)$$

Число e – так зване, *Неперове число* або *число Ейлера*.

Наближене значення: $e \approx 2,71828$.

Задача. Початковий вклад у банк становив S_0 гривень. Банк виплачує $p\%$ річних. Знайти розмір вкладу S_t через t років.

Розв'язання. Очевидно, що при $p\%$ річних розмір вкладу щороку збільшуватиметься в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, тобто

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right), \\ S_2 &= S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_t &= S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t. \end{aligned}$$

Якщо нараховувати відсотки закладами не один, а n раз на рік, то за того самого приросту $p\%$ за $\frac{1}{n}$ частину року буде нараховано $\frac{p}{n}\%$, а розмір вкладу за t років у разі nt нарахувань досягне

$$S_t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Вважаємо, що відсотки за вкладом нараховуються кожні півроку ($n = 2$), щомісяця ($n = 12$), щодня ($n = 365$), щого-

дини ($n = 8760$) і т. д. безперервно ($n \rightarrow \infty$). Тоді

$$\begin{aligned} S_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[S_0 \left(1 + \frac{p}{100n} \right)^{nt} \right] = \\ &= S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n} \right) \frac{100n}{b} \right]^{\frac{tp}{100}} = S_0 e^{\frac{pt}{100}}, \end{aligned}$$

або

$$S_t = S_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

У практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування відсотків застосовується рідко. Воно є ефективним для аналізу складних фінансових проблем, зокрема, в разі обґрунтовування й вибору інвестиційних рішень.

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення 8.14. *Послідовність x_n називається нескінченно малою, якщо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Послідовність x_n називається нескінченно великою, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Теорема 8.10. *Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.*

Зауваження. Сума нескінченно великого числа нескінченно малих послідовностей може і не бути нескінченно малою.

Теорема 8.11. *Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно мала послідовність.*

Теорема 8.12. *Якщо x_n – нескінченно велика послідовність, то $y_n = \frac{1}{x_n}$ – нескінченно мала послідовність.*

Теорема 8.13. Якщо x_n – нескінченно мала послідовність і $x_n \neq 0$, то послідовність $y_n = \frac{1}{x_n}$ є нескінченно великою.

Зауваження. Нескінченно велику (малу) послідовність називають також нескінченно великою (малою) величиною.

Теорема про границі

Теорема 8.14. Для того щоб послідовність x_n мала границю a , необхідно і достатньо, щоб $x_n = a + y_n$, де y_n – нескінченно мала послідовність.

Теорема 8.15. Якщо послідовності x_n і y_n збігаються, а також

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b,$$

то послідовності $x_n + y_n$, $x_n y_n$, $c \cdot x_n$ ($c = \text{const}$, $\frac{x_n}{y_n}$ ($b \neq 0$)) також збігаються і виконуються наведені далі рівності.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b$ – границя суми послідовностей дорівнює сумі їх границь, якщо вони існують.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab$ – границя добутку послідовностей дорівнює добутку їх границь, якщо вони існують.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$ – сталий множник можна винести за знак границі.

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

Границя відношення двох послідовностей дорівнює відношенню границь послідовностей, якщо вони існують і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$.

Приклад.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+3}{n}}{\frac{3n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

При обчисленні границі відношення двох многочленів зручно використовувати **правило**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_n}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q}, & \text{якщо } p = q; \\ \infty, & \text{якщо } p > q; \\ 0, & \text{якщо } p < q. \end{cases} \quad (8.2)$$

Наприклад,

$$\begin{aligned}1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}. \\ 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{1 + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.\end{aligned}$$

2. Границя функції

Поняття границі функції

Означення 8.15. Нехай $x_0 \in (a, b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) за винятком, можливо, точки x_0 . Якщо для будь-якої збіжної послідовності x_n $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_0 \neq x_n \right)$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, то говорять, що функція $f(x)$ має границю A при $x \rightarrow x_0$.

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Інше означення границі функції дав Коші:

Означення 8.16. (Коші) Границею функції $y = f(x)$ при x , що прямує до a , називається число A , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність

$$0 < |x - a| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Ліва та права границі функції

Означення 8.17. Правую границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a справа, називається число A_+ таке, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, при якому для всіх x , що задовольняють нерівність

$$a < x < a + \delta,$$

маємо

$$|f(x) - A_+| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_+.$$

Означення 8.18. Лівою границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a зліва, називається число A_- таке, що при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність

$$a - \delta < x < a,$$

маємо

$$|f(x) - A_-| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_-.$$

Інколи границю $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ називають *двосторонньою границею*, а границі зліва та справа – *односторонніми границями*.

Зв'язок між односторонніми та двосторонніми границями: Функція $y = f(x)$ має границю в точці $x = a$ тоді і тільки тоді, коли існують границі зліва та справа в точці $x = a$ і дорівнюють одна одній. Символічно:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \text{ і } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A.$$

Теорема про границі функції:

Теорема 8.16. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то функція $f(x)$ обмежена при $x \rightarrow a$.

Теорема 8.17. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $A \neq 0$, то знайдеться такий δ -окіл точки a , де ця функція набуває значень, які мають той самий знак, що й A .

Теорема 8.18. Якщо $f(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Теорема 8.19. Якщо $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, і

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A,$$

то існує границя

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Теорема 8.20. Якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B,$$

то виконуються такі співвідношення

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A + B,$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)\psi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = AB,$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)} = \frac{A}{B}, \text{ якщо } B \neq 0.$$

Перша визначна границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (8.3)$$

Наслідки:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{\frac{\sin bx}{bx} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{\cos ax}}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\cos ax \cdot bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax \cdot ax}{\cos ax \cdot bx \cdot ax} = \frac{a}{b} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} ax = t \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ ax = \operatorname{tg} t \Rightarrow x = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{tg} t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{b}{a} \operatorname{tg} t} = \frac{a}{b} \right).$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \quad (8.4)$$

Наслідки:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{Користуємося} \\ \text{неперервністю} \\ \text{функції } y = \ln x \end{array} \right| = \right.$$

$$\left. = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \right).$$

$$\begin{aligned}
& 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \\
& \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\log_a x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e \right). \\
& 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \\
& \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} y = e^x - 1 \\ 1 + y = e^x \\ x = \ln(1 + y) \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = 1 \right). \\
& 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \\
& \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a = \ln a \right). \\
& 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu. \\
& \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} (1+x)^\mu - 1 = y \\ (1+x)^\mu = 1 + y \\ \mu \ln(1+x) = \ln(1+y) \\ \frac{\mu \ln(1+x)}{\ln(1+y)} = 1 \end{array} \right| = \right. \\
& \left. = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{y}{x} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{\ln(1+y)} = \mu \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \mu \right).
\end{aligned}$$

У частинному випадку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$$

8.3. Неперервність функції

Основні поняття

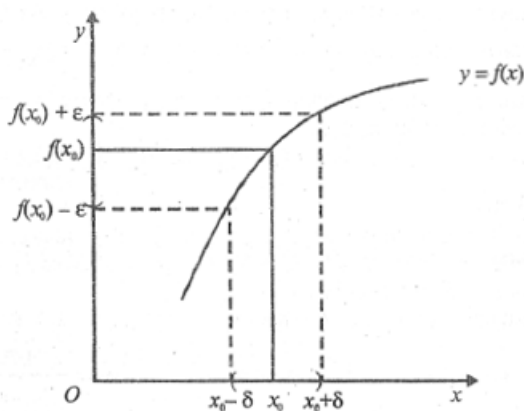
Означення 8.19. (Коші). Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 функцією, якщо ця функція f визначена в точці x_0 і для кожного (достатньо малого) числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon;$$

або: $f(x)$ – неперервна в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Відношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ можна переписати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$



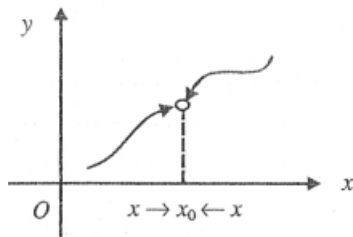
Функція $y = f(x)$ – неперервна в точці x_0 , якщо при будь-якому x з інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ значення $f(x)$ лежать у смугі $f(x_0) - \epsilon < y < f(x_0) + \epsilon$.

Дано означення неперервності функції, еквівалентні означенню Коші.

Означення 8.20. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

- 1) $f(x)$ визначена в точці x_0 ;
- 2) границя зліва в точці x_0 дорівнює границі справа в цій точці і дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$



Означення 8.21. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення 8.22. Функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку (a, b) , якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Означення 8.23. Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на проміжку (a, b) і неперервна в точці $x = a$ справа і в точці $x = b$ зліва.

Означення 8.24. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 справа (зліва), якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Теорема 8.21. Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

Властивості неперервних функцій

Теорема 8.22. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на інтервалі (a, b) . Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні:

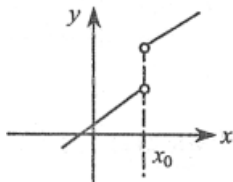
- 1) $f(x) \pm g(x)$; 3) $\text{const}g(x)$;
- 2) $f(x)g(x)$; 4) $f(x)/g(x), g(x) \neq 0$.

Теорема 8.23. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $u = F(y)$ неперервна в точці $f(x_0)$, то їх композиція $f \circ F$ – складена функція і $u = F(f(x))$ – неперервна в точці x_0 .

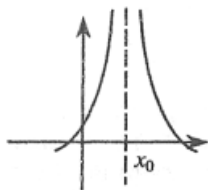
Розриви функції

Означення 8.25. Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0 , називається розривною в цій точці.

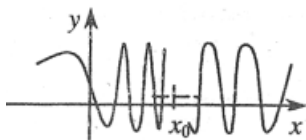
Можливі варіанти розриву функції в точці:



$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



$$2. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$



$$3. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \end{aligned} \right\} \text{ не існує}$$

Означення 8.26. Точка x_0 називається точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ і при цьому:

$$\left. \begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) &\neq f(x_0) \\ \text{або} \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &\neq f(x_0) \\ \text{або} \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \\ \text{або} \end{aligned} \right\} \text{ неусувний розрив 1-го роду;}$$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ – *усувний розрив 1-го роду*.

Означення 8.27. Точка x_0 називається *почкою розриву 2-го роду функції* $y = f(x)$, якщо одна із границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

не існує або нескінченна.

Методика дослідження функції $y = f(x)$ на неперервність

1. Знаходимо точку x_0 – “підозрілу” на розрив. Це може бути точка, в якій функція невизначена або змінює закон визначеності.

2. Визначаємо інтервали неперервності функції.

3. Обчислюємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

4. Робимо висновок згідно з теоремами (якщо такі границі існують), або використовуючи означення точок розриву.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв’язання. 1. Точка $x_0 = 1 \in$ “підозрілою” на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку $(-\infty; 1)$ маємо $y = x$, на проміжку $(1, +\infty)$ – іншу залежність: $y = x + 1$).

2. Функція неперервна на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$.

3. Знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

4. $1 \neq 2$, тому за означенням функція $y = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

має в точці $x = 1$ неусувний розрив 1-го роду.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Точка $x_0 = 0$ є "підозрілою" на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності.

2. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – множина, де функція неперервна.

3. Знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Крім того, задана функція при $x = 0$ дорівнює 1. Отже, дана функція неперервна в точці $x_0 = 0$ за означенням неперервної функції. Інтервалом неперервності функції $y = f(x) \in (-\infty; \infty)$.

Наслідки з формул для визначених інтегралів

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

до теми "Границя функції"

Завдання 1.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 3x^2 - 14x + 7}{2x^2 + 7x + 13};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x - 1}{5x^2 + 4x + 12};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x - 13}{5x^3 + 4x - 7};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x};$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2};$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 2}{3x - 7}\right)^{2x+5}.$

Завдання 3.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 15}{x^3 - 3x^2 + 7};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 6x + 13}{x^2 - 2x^3 + 5};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 8x + 1}{3x^4 - 4x^3 + 2x};$
4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x + 4} - 4}{x^2 - 5x + 4};$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \operatorname{tg} 2x;$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 6}{5x + 4}\right)^{x-12}.$

Завдання 2.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{4x^3 + 2x^2 - 6};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - 2x};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x - 7}\right)^{3x+4};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{5x}.$

Завдання 4.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4x + 3};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^7 - 3x^5 + 4x^4}{6x^3 + 3x^2 + 14};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + 3x + 7x^2}}{\sqrt[3]{x^4 - 7x} + 2\sqrt{x}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)^{x+3};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{6x}.$

Завдання 5.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x + 9}{3x^4 - 15}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 2}{3x^3 + x - 15}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 - 3x^4}{2x^4 + 7x^3 + 5}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$;
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 7}{9x + 2} \right)^{4x+5}$.

Завдання 7.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 5x + 14}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x - 12}{7x^2 + 3x + 8}$;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 17}{5x^4 - 6x^3 + 14x}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$;
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{3x - 2} \right)^{7x+9}$.

Завдання 6.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + x - 2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x^2 + 4}{2x^2 - 3x - 17}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 + 4} + \sqrt[4]{3x^3 - 1}}{\sqrt[6]{x^8 + 7x^7 + 3} - x}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{5x^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{5x + 3} \right)^{2x+1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 4x} - 1}{7x}$.

Завдання 8.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{27x^3 - 1}{3x^2 + 5x - 2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^6 + 2x^5 - 7x^3}{2x^4 + 4x^2 + 5}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^4 + 1} - \sqrt{x^3 + 2}}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{7x^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 6}{x - 5} \right)^{7x-1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x}$.

Завдання 9.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 3x^2 + 14}{2x^2 + 7x - 9};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 - 4x + 13}{5x^3 + x^2 + 24};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7x + 2x^3}{4x^3 + 6x^2 + 15};$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 3x + 10};$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{3x-9}.$

Завдання 11.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{21x^2 + 6x - 17}{3x^4 + 9x^2 + 5};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x + 8}{3x^3 + 2x + 1};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - x^5 + 3x^2}{9x^5 + 4x^2 + 13x};$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{x^2 - 3x + 2};$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{2x+5}\right)^{2x-1}.$

Завдання 10.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 5}{2x^2 + 3x - 2};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 2x^2 - 7x}{3x^2 + 4x + 8};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 5} + \sqrt[5]{x^3 + 2}}{\sqrt[3]{x^7 + 4}};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{9x-11};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{3x^2 - 5x}.$

Завдання 12.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{49 - x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2x^5 - 7x^3}{3x^2 + 7x - 9};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 2} - \sqrt[3]{x^5 + 4}}{\sqrt[8]{x^4 + 3x} + \sqrt[3]{x^2 + 13}};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 + 6x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+5};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} - 1}{5x}.$

Завдання 13.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{5x^2 + 4x - 35}{324 - x^2};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 9x^2 - 4x}{5x^2 - x - 24};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 9}{8x^3 + 3x^2 + 14x};$
4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{4x + 5} - 5};$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 1}{9x + 13} \right)^{7x+2}.$

Завдання 15.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 13x}{2x^2 + 5x - 11};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 9}{7x^2 + 3x - 1};$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 7x - 9}{2x^4 + 9x^3 + 3x};$
4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{3x - 5} - 4}{x^2 - 49};$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 8}{6x + 5} \right)^{-2x+3}.$

Завдання 14.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125 + x^3}{x^2 + 8x + 15};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^4 - 3x^2 - 5x}{3x^2 + 7x - 9};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7 - 13} + \sqrt{x^4 + 9}}{2x^2 - \sqrt[6]{x^5 + 3}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 4x};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 3}{5x - 1} \right)^{4x+2};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{x^2 + 5x}.$

Завдання 16.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 7x^4 + 3x^2}{4x^3 + 6x + 15};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{x^4 + 2} - \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x + 7} + 9x};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 4x};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 1}{7x + 3} \right)^{x+2};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{3x}.$

Завдання 17.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{2x^4 + 15};$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 2x^2 + x^4}{3x^4 - 5x^3 - 11x};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 5}{3x^4 - 6x^2 + 7};$
4. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x + 15} - 3}{x^2 - x - 12};$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2};$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x - 1}{9x + 5}\right)^{x+8}.$

Завдання 18.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 9x - 5}{4x^2 - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 - 9}{3x^3 + 2x + 11};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 7} + 4x}{\sqrt[6]{x^5 + 14x} - 2\sqrt[9]{x^{10}}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{9x^2};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x + 5}{8x + 3}\right)^{x-9};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 + x) - \ln 3}{x}.$

Завдання 19.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{4x^3 + 2x + 17}{3x^2 - 2x - 11};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x - 17}{2x^2 + 4x^3 - 5x};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x + 1}{x^5 - 6x^4 + x};$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 5} - 2}{\sqrt{x + 10} - 3};$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x};$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 7}{9x - 3}\right)^{2-5x}.$

Завдання 20.

Обчислити границі:

1. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^7 + 6x^5 + 4x^3}{5x^4 + 3x - 11};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2} \sqrt[4]{x^6 + 3x}}{\sqrt[7]{x^6 + 2x} + \sqrt[8]{x^9 + 5}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 3x}{\sin 5x + \sin x};$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 3}{4x + 5}\right)^{3x-1};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x}.$

Завдання 21.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 9}{x^2 + 11x + 6};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 6x}{5x^4 - 7x - 12};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 2}{5x^3 + 2x + 13};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{5x - 1} - 3};$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 4}{3x - 2} \right)^{8x+9}.$

Завдання 23.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{17 - 6x^2 + 3x^4}{x^2 - 9x - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 19x}{9x^4 - x + 15};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^2 + 6x + 5}{x^7 + 3x^2 + 4x};$
- $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5} - 1}{x^3 + 64};$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\frac{1}{2} - \cos x};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 6}{8x - 1} \right)^{2x+7}.$

Завдання 22.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 20};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^3 + 11x - 3};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[4]{x^5+7x} - 2x};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{tg} 7x;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x - 5} \right)^{7x+5};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{(1+2x)^3} - 1}{5x}.$

Завдання 24.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x^2 - 4x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 2x^3 - 7x}{2x^3 + 3x - 11};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5+4} + \sqrt[4]{x^3-2}}{\sqrt[4]{x^6+2x^5-1} - 4x};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 7x}{x \cdot \cos 4x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 1}{5x + 5} \right)^{4x+3};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{4x}.$

Завдання 25.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 - 5x - 1}{4x^2 + 5x + 10};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x^2 - 15}{2x^3 + 6x - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 2}{3x^4 - x^3 - 4x};$
- $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{5x - 4} - 3\sqrt{x - 4}}{x^2 - 64};$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x - 1}{4x + 1} \right)^{9x+8}.$

Завдання 27.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7x^2 - 3x - 15}{3x^3 + 2x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 9}{5x^2 - 7x - 11};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{x^6 + 2x^5 + 8x^3};$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2x + 3}}{x^2 - 5x + 6};$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{5x + 4} \right)^{2x-3}.$

Завдання 26.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 6x^2 + 3}{3x^3 + 2x + 9};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 2} + \sqrt[3]{x^2 + 9}}{\sqrt[5]{x^5 - 2} + \sqrt[6]{x^2 + 7}};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{6x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x - 1}{9x - 3} \right)^{6x+2};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{4x}.$

Завдання 28.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 36};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 9x^3 + 5x^2}{3x^3 + 5x + 17};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^6 + 3} + \sqrt[4]{x^5 + 2x}}{4x - \sqrt[6]{x^3 + 4x}};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x}{\sin 8x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 7} \right)^{x-3};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x^2 + 4x}.$

Завдання 29.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 7x^2 + x + 15}{2x^2 - 6x - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x - 1}{7 - 2x^2 - x^3};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{19x^3 + 7x - 8};$
- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+11}}{x^2 + 7x + 10};$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 3x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{7x+1} \right)^{-4x+3}.$

Завдання 30.

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 4x - 21};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x^2 - 4}{2x^2 - 6x - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^4 + 6} + \sqrt[10]{x^6 + 9}}{\sqrt[4]{x^2 + 4x - 1} + 3\sqrt{x}};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x^2}{\sin 11x + \sin x};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-7} \right)^{x+3};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+7x)^4} - 1}{3x}.$

Приклади розв'язання типового варіанту

Обчислити границі:

- $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45}.$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3 - x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 7x - 45} &= \frac{2(-4)^3 - (-4)^2 + 8 \cdot (-4) - 3}{3(-4)^2 - 7 \cdot (-4) - 45} = \\ &= \frac{-128 - 16 - 32 - 3}{48 + 28 - 45} = -\frac{179}{31} \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $-\frac{179}{31}$.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}.$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже, розкладе-

мо многочлени на множники, скоротимо й отримаємо результат:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} &= \left| \frac{4 - 6 + 2}{8 - 8} \right| = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2 - 1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{12}$.

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь $-x^3$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x + 4}{2x^3 - x^2 - 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}} = \frac{7}{2}.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{7}{2}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь $-x^8$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{5x^8 - 4x^5 - 13x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x^5} + \frac{3}{x^6} - \frac{9}{x^8}}{5 - \frac{4}{x^3} - \frac{13}{x^7}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, функція представлена у вигляді відношення многочленів, отже, скоротимо чисельник та знаменник на найбільший степінь $-x^4$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x + 11}{x^2 - 3x - 9} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x^3} + \frac{11}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{9}{x^2}} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x} - 3\sqrt[7]{x^9}}{\sqrt[9]{x^{13} + 5x} - 6\sqrt[3]{x}}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$, отже, нам достатньо порівняти максимальні степені чисельника і знаменника:

$$\begin{aligned} & - \text{в чисельнику } \frac{5}{2} \text{ і } \frac{9}{7}; \\ & - \text{в знаменнику } \frac{13}{9} \text{ і } \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Максимальний степінь $\frac{5}{2}$ – в чисельнику, тому згідно з формулою (8.2) функція прямує до нескінченності.

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

Зауважимо, що в прикладах 3 – 5 також можна було б використати формулу-правило (8.2).

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - x - 6}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$, функція має ірраціональність, тому позбавимося ірраціональності в чисельнику, розкладемо знаменник на множники, скоротимо отри-

маний вираз на $(x - 3)$, маємо:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - x - 6} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - 5} - 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5 - 4}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)}{(x + 2)(\sqrt{x^2 - 5} + 2)} = \\
 &= \frac{3 + 3}{(2 + 3) \cdot (\sqrt{3^2 - 5} + 2)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{3}{10}$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення від невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (8.3). Для того, щоб функцію, границю якої обчислюємо, звести до першої чудової границі, необхідно виконати певні перетворення, а саме: скористатися формулою різниці косинусів:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{9x^2} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x+7x}{2} \sin \frac{3x-7x}{2}}{9x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \sin 2x}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x \cdot 5 \cdot 2}{9 \cdot 5x \cdot 2x} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{9} = \frac{20}{9}.
 \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{20}{9}$.

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$; функція тригонометрична, тому для позбавлення від невизначеності необхідно скористатися першою чудовою границею (8.3). Але першою чудовою границею ми можемо скористатися лише в тому випадку, коли аргумент прямує до нуля. Тому спочатку зробимо заміну змінної, а далі, скориставшись формулами зведення, тригонометричними тотожностями, зведемо границю до першої чудової:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 2x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ x = \frac{\pi}{2} - y \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right)}{\pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos y \cdot y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $\frac{1}{2}$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 4}{6x - 3} \right)^{5x-1}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію, отримаємо невизначеність типу $|1^\infty|$. Саме друга чудова границя допоможе нам впоратися з цією проблемою. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 4}{6x - 3} \right)^{5x-1} = |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x + 4}{6x - 3} - 1 \right)^{5x-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x + 4 - 6x + 3}{6x - 3} \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6x - 3} \right)^{5x-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{7}{6x - 3} \right)^{\frac{6x-3}{7}} \right)^{\frac{7}{6x-3} \cdot (5x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7(5x-1)}{6x-3}} = e^{\frac{35}{6}}.
\end{aligned}$$

Відповідь. Границя функції дорівнює $e^{\frac{35}{6}}$.

Зауваження. При розкритті невизначеності типу 1^∞ зручно використовувати формулу, одержану на основі другої чудової границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [(u(x)-1) \cdot v(x)]},$$

де $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$.

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x - 3}{3x + 2} \right)^{4x+5}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу у функцію. Бачимо, що не зважаючи на те, що функція, границю якої ми обчислюємо, за структурою нагадує приклад 10, ніякої невизначеності тут нема, тому що дріб прямує до $\frac{8}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x - 3}{3x + 2} \right)^{4x+5} = \left(\frac{8}{3} \right)^\infty = \infty.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює ∞ .

Тема 9. Диференціальне числення функції однієї змінної

1. Означення похідної. Залежність між неперервністю та диференційованістю функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X . Візьмемо точку $x_0 \in X$. Надамо значенню x_0 приріст $\Delta x \neq 0$, тоді функція одержить приріст $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення 9.1. *Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргумента при прямуванні останнього до 0 (якщо ця границя існує):*

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (9.1)$$

Похідна функції позначається так: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Форма запису $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ означає, що розглядається значення похідної функції в точці $x = a$.

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*.

Якщо для деякого x_0 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ або $-\infty$, то кажуть, що в x_0 функція має *нескінченну* похідну знаку "+" або "-". Означену перед цим похідну називають *скінченною* похідною.

Якщо функція в точці x_0 має *скінченну* похідну, то функція називається *диференційованою* в цій точці. Функція, яка диференційовна в усіх точках проміжку X , називається *диференційованою* на цьому проміжку.

Геометричний зміст похідної: Похідна $f'(x_0)$ дорівнює *кутовому коефіцієнту* (тангенсу кута нахилу) *дотичної*, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 , тобто $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 можна записати так:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (9.2)$$

Механічний зміст похідної: Похідна шляху по часу $S'(t_0)$ є *швидкістю* точки в момент t_0 : $v(t_0) = S'(t_0)$.

Якщо під аргументом x функції $y = f(x)$ розуміти час, то відношення $\frac{dy}{dx}$ є *середньою швидкістю зміни функції y за проміжок часу $[x; x + \Delta x]$* , а границя цього відношення

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ є миттєвою швидкістю зміни функції y в момент часу x .

Отже, маємо **фізичний зміст похідної**: Для функції $y = f(x)$ похідна $f'(x_0)$ є швидкістю зміни функції y в даний момент x_0 .

Швидкість протікання фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів (швидкість охолодження тіл, швидкість хімічної реакції тощо) також визначається за допомогою похідної.

Теорема 9.1. (про залежність між неперервністю функції та диференційованістю в точці). Якщо $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці.

Обернена теорема, взагалі кажучи, невірна, тобто, якщо функція неперервна в даній точці, то вона не обов'язково диференційовна в цій точці.

Отже, неперервність функції – необхідна, але не достатня умова диференційованості функції.

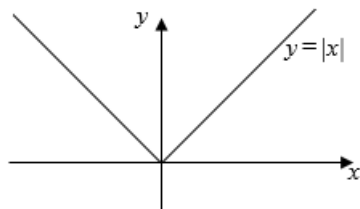
Розглянемо похідну зліва $f'_-(x_0)$ та справа $f'_+(x_0)$ в точці x_0 .

За означенням:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функція буде диференційовною в точці x_0 , якщо обидві похідні зліва та справа у зазначеній точці існують і рівні між собою. Геометрично це означає, що графік функції в точці x_0 має дотичну. Якщо $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, то в точці x_0 існує дві різні дотичні, тобто графік у точці x_0 має вигляд кута. Наприклад, таким є графік функції $f(x) = |x|$:



функція $y = |x|$ є неперервною в точці $x_0 = 0$, але оскільки $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, то вона в цій точці $x_0 = 0$ не диференційовна.

Зауваження. Похідна неперервної функції не обов'язково неперервна. Якщо функція має неперервну похідну на деякому проміжку X , то функція називається *гладкою* на цьому проміжку. Якщо ж похідна функції має скінченне число точок розриву (причому першого роду), то така функція на даному проміжку називається *кусково-гладкою*.

2. Похідні основних елементарних функцій

1) *Похідна степеневої функції $y = x^\alpha$:*

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R.$$

2) *Похідна показникової функції $y = a^x$:*

$$y' = a^x \cdot \ln a.$$

Зокрема, $(e^x)' = e^x$.

3) *Похідна логарифмічної функції $y = \log_a x$:*

$$y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Зокрема, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4) *Похідні тригонометричних функцій:*

$$\begin{aligned}y = \sin x &\Rightarrow y' = \cos x, \\y = \cos x &\Rightarrow y' = -\sin x, \\y = \operatorname{tg} x &\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \\y = \operatorname{ctg} x &\Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

5) *Похідні обернених тригонометричних функцій:*

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3. Правила диференціювання

Правило 1: Похідна сталої дорівнює нулеві

$$(\operatorname{const})' = 0. \quad (9.3)$$

Правило 2: Якщо $u(x)$ – довільна диференційовна функція і c – довільна стала, то

$$(cu)' = c \cdot u'. \quad (9.4)$$

Приклад. $(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x$.

Правило 3: Якщо $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовні функції, то їх сума $u + v$ є диференційовною функцією:

$$(u + v)' = u' + v'. \quad (9.5)$$

Правило справедливе для будь-якого скінченного числа диференційовних функцій.

Правило 4: Добуток двох диференційовних функцій u та v є диференційовною функцією:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (9.6)$$

Похідна добутку n функцій:

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1}' \cdot u_n.$$

Правило 5: У точках, в яких $v \neq 0$, відношення $\frac{u}{v}$ двох диференційовних функцій є функція диференційовна, причому

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \quad (9.7)$$

Правило 6: Похідна оберненої функції:

Теорема 9.2. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна й має в точці x відмінну від 0 похідну, то функція, обернена до даної, подається у вигляді $y = g(x)$ і має похідну $g'(y)$, обернену до похідної даної функції:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (9.8)$$

Правило 7: Похідна складеної функції $y = f(\varphi(x))$:

$$y' = [f(\varphi(x))]' = f'_{\varphi(x)}(\varphi(x)) \cdot \varphi'_x(x) - \text{правило ланцюга.} \quad (9.9)$$

Правило 8: Логарифмічна похідна.

Нехай $y = f(x)$ – диференційовна функція. Тоді

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (9.10)$$

Ця похідна називається *логарифмічною похідною* f у точці x .

Якщо $F(x) = f(x)g(x)$ і $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, то достаємо такі формули для обчислення логарифмічних похідних функцій $F(x)$ і $G(x)$:

$$\begin{aligned}
 (\ln |F(x)|)' &= (\ln |f(x)g(x)|)' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = \\
 &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}; \\
 (\ln |G(x)|)' &= \left(\ln \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}} = \\
 &= \frac{f'(x)g(x)}{g(x)f(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \\
 &= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}. \tag{9.11}
 \end{aligned}$$

Приклад. Знайти логарифмічну похідну функції

$$y = \frac{x^3}{(x^3 + 1)(x - 1)}.$$

Представимо функцію у вигляді $y = x^3 : (x^3 + 1) : (x - 1)$, тоді

$$(\ln |y|)' = \frac{(x^3)'}{x^3} - \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} - \frac{(x - 1)'}{x - 1} = \frac{3x^2}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3 + 1} - \frac{1}{x - 1}.$$

Правило 9: Похідна неявної функції.

Розглянемо диференціювання неявної функції, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$:

I-й спосіб: Для знаходження похідної функції y , заданої неявно, достатньо продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x , а потім зі здобутого рівняння знайти похідну y' .

II-й спосіб: Знаходимо похідну від y по x за формулою

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (9.12)$$

Тут F'_x, F'_y – це похідні від $F(x, y)$ або тільки по x , або тільки по y відповідно.

Приклад. Знайти похідну функції y , заданої рівнянням

$$x^3 - x^2y^2 + \ln y = 4.$$

Розв'язання. I-й спосіб: Диференціюємо:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2xy^2 - x^2 2yy' + \frac{y'}{y} = 0 &\Rightarrow y' \left(\frac{1}{y} - 2x^2y \right) 2xy^2 - 3x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{2xy^2 - 3x^2}{\frac{1}{y} - 2x^2y}. \end{aligned}$$

II-й спосіб: $F(x, y) = x^3 - x^2y^2 + \ln y - 4$;

$$F'_x = 3x^2 - 2xy^2; \quad F'_y = -2yx^2 + \frac{1}{y};$$

$$y'_x = -\frac{3x^2 - 2xy^2}{\frac{1}{y} - 2x^2y}.$$

Правило 10: Похідна функції, заданої параметрично.

Диференціювання параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 9.3. Нехай виконуються такі умови:

1) функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначені та неперервні на деякому проміжку T ;

2) диференційовні в точці $t_0 \in T$;

3) функція $x = \varphi(t)$ є строго монотонною на проміжку T , $\varphi'(t_0) \neq 0$;

4) $t = \alpha(x)$ – функція, обернена до функції $x = \varphi(t)$.

Тоді функція $y = \psi(\alpha(x))$, $x = \varphi(t)$ диференційовна в точці $x_0 = \varphi(t_0)$ і

$$y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \text{де } x_0 = \varphi(t_0).$$

Замінюємо x_0 на x , t_0 на t :

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{де } x = \varphi(t), \quad (9.13)$$

тобто, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад. Знайти похідну функції заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad t \in T.$$

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = 2 \cos t (-\sin t),$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2 \cos t \sin t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = -2 \cos^3 t \sin t = -\cos^2 t \sin 2t.$$

Правило 11: Логарифмічне диференціювання.

Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна (доцільно) спочатку прологарифмувати цю функцію і з одержаного виразу знайти y' .

Приклад. Знайти y' , якщо $y = \sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^4 x$.

Розв'язання.

$$\ln y = \frac{1}{5} \ln \sin x + \ln \operatorname{tg} x + 4 \ln \cos x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} + 4 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^4 x \left(\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\cos x \sin x} - 4 \operatorname{tg} x \right).$$

Правило 12: Похідна показниково-степеневі функції:

Щоб знайти похідну показниково-степеневі функції $y = [u(x)]^{v(x)}$, потрібно спочатку продиференціювати її як показникову, а потім як степеневу функцію. Результати додати.

Приклад. Знайти y' , якщо $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

Розв'язання.

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot (x^2 + 1)^{\sin x - 1} \cdot (x^2 + 1)' =$$

$$= \cos x \cdot (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \ln(x^2 + 1) + 2x \cdot (x^2 + 1)^{\sin x - 1} \cdot \sin x.$$

Окремі випадки:

- 1) Якщо $y = a^{v(x)}$, то $y' = a^{v(x)} \cdot \ln a \cdot v'(x)$.
- 2) Якщо $y = [u(x)]^n$, то $y' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x)$.

Зауваження. Похідна показниково-степеневі функції є фактично застосуванням правила логарифмічного диференціювання:

$$y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = (\cos x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos' x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right).$$

4. Похідні вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційовна функція на інтервалі I , причому похідна цієї функції $y' = f'(x)$ є також диференційовною функцією на зазначеному інтервалі. Похідна функції y' називається *похідною другого порядку* функції

y і позначається y'' . Якщо ж y'' – диференційовна на I , то її похідна називається *похідною третього порядку* функції $f(x)$ і позначається y''' . Аналогічно, *похідною n -го порядку* $f^{(n)}$ функції $f(x)$ називається похідна функції $f^{(n-1)}$, якщо вона існує і диференційовна.

Правило знаходження похідних n -го порядку

На похідні n -го порядку легко поширюються правила 1) – 3) (Очевидно виконуються рівності:

$$(u(x) + v(x))^{(n)} = (u(x))^{(n)} + (v(x))^{(n)}, \quad (9.14)$$

$$(cu(x))^{(n)} = cu(x)^{(n)}.) \quad (9.15)$$

Обчислювати похідну n -го порядку від добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ дає можливість так звана **формула Лейбница**:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Приклад.

$$\begin{aligned} (x \sin x)''' &= x''' \sin x + 3x''(\sin x)' + \frac{3(3-1)}{2}x'(\sin x)'' + \\ &+ \frac{3(3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{(0)}(\sin x)''' = \\ &= 0 + 0 + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 \cdot (-\sin x) - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x. \end{aligned}$$

Економічний зміст похідної. Еластичність

Означення 9.2. Еластичністю функції $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(f(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$E_x(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x). \quad (9.17)$$

Інтерпретація еластичності: Еластичність функції показує наближено, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ у разі зміни незалежної змінної x на 1%.

Якщо $|E_x(f(x))| < 1$, то функція називається *нееластичною* (відносний її приріст спадає).

Якщо $|E_x(f(x))| > 1$, то функція називається *еластичною* (відносний приріст її зростає).

Відмітимо властивості еластичності функції:

1) Еластичність функції y дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто $E_x(f(x)) = x \cdot T_{f(x)}$ (або $E_x(y) = x \cdot T_y$).

2) Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v),$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3) Еластичність взаємнообернених функцій – взаємнообернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \quad (9.18)$$

Застосування в економіці: Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або доходу x) – коефіцієнт, який визначається за формулою $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$, і показує наближено, на скільки % зміниться попит (об'єм споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%. Попит може бути *еластичним*, *нееластичним* відносно ціни (або доходу); якщо $|E_x(y)| = 1$, то кажуть, що має місце попит з *одиночною еластичністю* (нейтральний попит).

Для нееластичного попиту зміни ціни та граничного доходу відбуваються в одному напрямку, а для еластичного попиту – в різних. Це означає, що *із зростанням ціни для продукції еластичного попиту сумарний дохід від реалізації продукції збільшуватиметься, а для товарів нееластичного попиту – зменшуватиметься.*

Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від’ємна – малоцінні (низькоякісні) товари:

$$E_J(q) = \frac{dq}{dJ} \cdot \frac{J}{q},$$

де q – попит, J – дохід.

Наприклад, високий додатний коефіцієнт попиту за доходом у галузі означає, що її внесок у економічне зростання більший, ніж частка у структурі економіки, і вона має шанси на розширення і розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від’ємне значення, то на неї очікує застій і перспектива скорочення виробництва.

Диференціал

Нехай $y = f(x)$ визначена на проміжку X і диференційована в деякому околі точки $x \in X$. Тоді існує скінченна похідна

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отже, можна записати, що

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала величина при $\Delta x \rightarrow 0$, тоді

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_I + \underbrace{\alpha(\Delta x)\Delta x}_{II}.$$

Отже, приріст функції y складається з двох частин: I – лінійна відносно Δx ; II – нелінійна, границя якої при $\Delta x \rightarrow 0$ дорівнює 0.

Означення 9.3. Диференціалом функції називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції, яка дорівнює добутку похідної на приріст незалежної змінної:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (9.19)$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = x$. Маємо:

$$y' = (x)' = 1 \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Отже, диференціал незалежної змінної дорівнює приросту цієї змінної.

Тому формулу (9.19) можна переписати так:

$$dy = f'(x)dx,$$

звідки $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, тобто $\frac{dy}{dx}$ – не просто позначення похідної, а звичайний дріб з чисельником dy і знаменником dx .

Властивості диференціала:

$$1) dc = 0, c - \text{const};$$

$$2) d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u'v + uv') dx = u'v dx + \underbrace{uv' dx}_{dv} =$$

$$vdu + u dv;$$

$$3) d(c \cdot u) = (cu)' dx = cu' dx = cdu;$$

$$4) d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu' dx - uv' dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2};$$

$$5) d(u \pm v) = du \pm dv.$$

$$6) \text{ Нехай } y = f(\varphi(x)) = f(u), u = \varphi(x) \Rightarrow u' = \varphi'(x)$$

$$\underline{\underline{dy}} = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = f'(u) \cdot u' dx = \underline{\underline{f'(u) du}} = \underline{\underline{df(u)}}.$$

Підкреслене двома рисочками означає, що формула диференціала не змінюється, якщо замість незалежної змінної x розглядати функцію від залежної змінної u . Ця властивість

диференціала одержала назву *інваріантності* (незмінності) *форми* (або *формули*) диференціала. Цією властивістю не володіє похідна.

$$7) y = f(u), u = \varphi(x), \text{ то } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Зауважимо, що оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то формули для знаходження диференціалів будуть такі самі, як і для знаходження похідних, якщо кожен з них помножити на dx :

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

і т.д.

Диференціали вищих порядків

Диференціал функції є також функцією незалежної змінної, а тому може мати диференціал.

Означення 9.4. Другим диференціалом функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку, тобто

$$d^2y = d(dy). \quad (9.20)$$

Аналогічно дістаємо диференціали наступних порядків. Знайдемо вираз для d^2y :

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = \\ &= f''(x)(dx)^2 \text{ або } f''(x)dx^2. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (9.21)$$

Слід відмітити, що диференціали другого і більш високих порядків не володіють властивістю інваріантності, тобто їх форма не зберігається з переходом до складеної функції.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

до теми "Диференціальне числення функції однієї змінної"

Варіант 1.

Варіант 2.

Знайти похідні:

- | | |
|---|--|
| 1. $y = \frac{7x^3 - 5\sqrt{x}}{x^2} + 3x^6 - \frac{7}{x} + 10$; | 1. $y = (5x^7 + 17x) \cdot \log_5 x$; |
| 2. $y = 2^x + \sin 5x + 5 \operatorname{tg} 3x$; | 2. $y = \frac{2 \cos x - 12}{2x^2 + 7x - 5}$; |
| 3. $y = 2^{\log_4 \operatorname{tg} 3x}$; | 3. $y = \sin^7 4x$; |
| 4. $y = \cos 9x^{12}$; | 4. $y = \sqrt[6]{\operatorname{tg}^4 7x + 11}$; |
| 5. $y = (2x^8 + 14) \cdot \operatorname{ctg}^3 8x$; | 5. $y = \frac{12 \arcsin 4x^5}{x^3 - 4x}$ |
| 6. $y = 5^{\ln^3 \operatorname{ctg} x} \cdot \cos \sqrt{x}$; | 6. $y = \log_4(\sin 5x) \cdot e^{\sqrt{x^5}}$; |
| 7. $y = \frac{\sqrt[4]{2x^5 + 3x^4 - 12x}}{\ln(\cos 7x)}$. | 7. $y = \frac{\operatorname{arctg}^2(e^x - 2)}{(2 \ln x + 5)^3}$. |

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

- | | |
|---|--|
| 8. $y = (\cos 7x)^{\log_3 x}$; | 8. $y = (\operatorname{tg} 4x^4)^{e^{x^3} + 2}$; |
| 9. $y = \frac{(x - 7)^9 \cdot \sqrt[8]{(x + 5)^3}}{(2x - 9)^4}$; | 9. $y = \sqrt[5]{\frac{x + 4}{x - 4}} \log_5(\sin 3x)$. |

Знайти похідну неявно заданої функції:

- | | |
|--|--|
| 10. $\operatorname{ctg} y^2 = 6x^2 - 4y$. | 10. $\ln(5x + 3y) - \frac{x^5 y}{y^3 - 4} = 0$. |
|--|--|

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

- | | |
|--|---|
| 11. $\begin{cases} x = 3t - 5; \\ y = 6t - t^2. \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x = (t^2 - 10) \cos 3t; \\ y = (t^2 + 8) \sin 3t. \end{cases}$ |
|--|---|

Варіант 3.

Знайти похідні:

1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{6x + 2\sqrt{x^7}}{x^3} + 2x - 5;$

2. $y = 8 \operatorname{ctg} 4x - e^{6x} - \ln 4x;$

3. $y = \log_7 (\cos x^3);$

4. $y = \operatorname{tg} 6x^9;$

5. $y = (2x^3 - 6x) \cdot \cos^4 7x;$

6. $y = 3\sqrt[8]{\log_3^7 4x} \cdot \operatorname{ctg}^2 7x;$

7. $y = \frac{\sqrt[3]{7x^4 - 2x^2 - 21}}{\ln(\sin 13x)}.$

Варіант 4.

1. $y = (2x^4 - 5x) \cdot 4^x;$

2. $y = \frac{5 \sin x + 3x}{4x^5 - 3x^3 + 8};$

3. $y = \arcsin^8 5x;$

4. $y = \sqrt[5]{e^{\sin 6x} - 10x};$

5. $y = \frac{9 \operatorname{arccotg} 3x^6}{x^6 - 7x};$

6. $y = \cos 7x^6 \cdot \operatorname{tg} \left(\sqrt[3]{x^5} \right);$

7. $y = \frac{\arccos^5 (4^x - 9)}{(3 \ln 7x - 9)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\sin 4x)^{\cos x};$

9. $y = \frac{(x+6)^8 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^7}}{(4x-7)^5}.$

8. $y = (\operatorname{arccotg} 2x^5)^{\ln^8 7x};$

9. $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} \operatorname{tg} (e^{3x} - 7).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $y^2 = 8xy.$

10. $x \cdot \sin y^5 - 2y^3 \operatorname{tg} x = 0.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = t^3 + 1; \\ y = 6t^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^{5t} \sin 5t, \\ y = e^{5t} \cos 5t. \end{cases}$

Варіант 5.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{9}{\sqrt[6]{x^5}} + 5x^2 + 3 - \frac{3x\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{x}};$

2. $y = 2 \arccos 5x + 4 \log_5 x - 9^{2x};$

3. $y = e^{\arccos 5x};$

4. $y = \operatorname{ctg} 9x^3;$

5. $y = (4x^5 + 10) \cdot \sin^6 2x;$

6. $y = 4^{\cos^3(2x-7)} \cdot \sin \frac{3}{x};$

7. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^3 + 3x^2 - 9x}}{\ln(\operatorname{tg} 5x)}.$

Варіант 6.

1. $y = (4x^3 - 7x) \cdot \sin x;$

2. $y = \frac{4 \operatorname{tg} x + 7}{3x^5 - 7x^4 + 1};$

3. $y = \cos^5 9x;$

4. $y = \sqrt[4]{5^{\ln(3x-7)} + 9x^2};$

5. $y = \frac{7 \operatorname{arctg}^9(2x-3)}{x^5 + 12x^4};$

6. $y = \operatorname{tg}(\arcsin 2x) 2^{\sqrt{x^4}};$

7. $y = \frac{\arcsin^5(3x-4)}{(5 \cos x - 2)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\operatorname{tg} 5x)^{\arcsin x};$

8. $y = (\sin 2x^5)^{\ln^4(2x+5)};$

9. $y = \frac{(2x-3)^6}{(x-9)^5 \cdot \sqrt[6]{(x+4)^7}}.$

9. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \sin(x^2 - 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $\sin(2x^5 - y^2) = 2y \cdot \cos x^2.$

10. $y^2 \cos x = 4 \sin 6x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = 7 \cos t; \\ y = 9 \sin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = t \cdot \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Варіант 7.

Знайти похідні:

1. $y = 10 + 4\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \frac{3\sqrt[5]{x^4} + 4x}{x^4};$

2. $y = 6 \cos 7x - 2 \log_7 2x - e^{\operatorname{tg} 4x};$

3. $y = \log_6 (e^x - 3x^2);$

4. $y = \arcsin 5x^4;$

5. $y = (3x^5 - 5x) \cdot \operatorname{ctg}^4 7x;$

6. $y = 3^{\operatorname{tg}(5x^4 - 7x)} \cdot \ln(\sin 8x^3);$

7. $y = \frac{\sqrt[7]{4x^9 - 2x^5 - 31}}{\ln(\operatorname{ctg} 6x)}.$

Варіант 8.

1. $y = (4x^8 + 7x^3) \cdot \cos x;$

2. $y = \frac{6 \operatorname{ctg} x - 5}{4x^2 + 3x^8 - 11};$

3. $y = \operatorname{tg}^4 7x;$

4. $y = \sqrt[8]{\cos^3 9x - 8x};$

5. $y = \frac{7 \sin 9x^2}{2x^3 + 5x};$

6. $y = \cos(2^x - e^{2x});$

7. $y = \frac{\operatorname{tg}^5(4x + 13)}{(3 \arcsin x - 2)^4}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\operatorname{ctg} 8x)^{\arccos x};$

8. $y = (\cos 2x^3)^{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}};$

9. $y = \frac{(3x + 1)^4 \cdot \sqrt[7]{(x - 2)^4}}{(x - 5)^3}.$

9. $y = \sqrt[3]{\frac{x - 2}{x + 2}} \cos \sqrt{x - 1}.$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $\cos^3 y = 5x^4 \cdot \ln y.$

10. $3^x + 3^y = 3^{x+y}.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4t - 3 \sin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^t \cos^2 t, \\ y = e^t \sin^2 t. \end{cases}$

Варіант 9.

Знайти похідні:

1. $y = 2x + \frac{6x\sqrt[3]{x} - 2x^8}{x^9} + \frac{4}{x^5} + 9;$

2. $y = 9 \operatorname{tg} 5x + 4e^{3x} + \operatorname{arccctg} 7x;$

3. $y = \ln(\operatorname{arccctg} 6x - 10);$

4. $y = \arccos 3x^4;$

5. $y = (5x^8 + 12x) \cdot \cos^7 2x;$

6. $y = 9^{\cos \sqrt[5]{x^4}} \cdot \operatorname{tg} (7x^8 - 5);$

7. $y = \frac{\sqrt[8]{4x^5 - 12x^3 - 5x}}{\ln(\arcsin 4x)}.$

Варіант 10.

1. $y = (4x^5 - 2x^{11}) \cdot \operatorname{tg} x;$

2. $y = \frac{7 \ln x + 3}{2x^6 - 5x^4 - x};$

3. $y = \operatorname{ctg}^2 2x;$

4. $y = \sqrt[3]{\log_2^6 3x - 7x^4};$

5. $y = \frac{4^{tg^5 3x}}{x^7 - 8x^6};$

6. $y = \log_3(\operatorname{tg} 2x)^{5^{\cos x^2}};$

7. $y = \frac{\operatorname{ctg}^6 (2x - 9)}{(4 \arccos x + 3)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\arcsin 2x)^{\sqrt{x}};$

8. $y = (\operatorname{tg} 5x^2)^{3x^2 - 1};$

9. $y = \frac{(7x - 3)^4}{(x - 5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x + 4)^7}}.$

9. $y = \sqrt[5]{\frac{x + 7}{x - 7}} \ln(\operatorname{tg} 2x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $3y \ln y = x.$

10. $\operatorname{tg} (4x^7 - 3y^3) = \frac{x^2 - 1}{y^5}.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = t \cdot 2^t, \\ y = t^2 + 3t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \\ y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$

Варіант 11.

Знайти похідні:

1. $y = 7x^3 - 1 + \frac{8\sqrt{x^5} + x^3}{2x^2} + \frac{3}{x^2};$

2. $y = (2x + 1)^3 - \cos 5x - 2 \ln 6x;$

3. $y = \sin(2^x - 9x^5);$

4. $y = \ln 5x^7;$

5. $y = (9x^3 - 35x^2) \cdot \operatorname{tg}^4 8x;$

6. $y = 7^{\log_3(\operatorname{tg} 2x)} \cdot \arccos \sqrt[7]{x^{10}};$

7. $y = \frac{\sqrt[9]{5x^2 + 3x - 37}}{\ln(\arccos 7x)}.$

Варіант 12.

1. $y = (9x^7 + 2) \cdot \operatorname{ctg} x;$

2. $y = \frac{9 \log_3 x - 6}{5x^4 - 2x^2 - 7};$

3. $y = \arcsin^4 5x;$

4. $y = \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 12x + 4x^9};$

5. $y = \frac{32 \cdot e^{\cos 2x^5}}{x^6 + 3x^2};$

6. $y = 5 \operatorname{tg}^3(2x + x^2);$

7. $y = \frac{\arcsin^5(e^x + 4)}{(2 \ln x - 5)^7}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\ln x};$

8. $y = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin 5x};$

9. $y = \frac{(x + 7)^8 \cdot \sqrt[9]{(x + 5)^2}}{(4x - 5)^4}.$

9. $y = \sqrt[8]{\frac{x - 3}{x + 3}} \operatorname{tg}(\ln 5x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $2x^5 \cdot \ln y = 3x^8 + 3 \cos y.$

10. $x - y = y \cdot \arcsin 3x.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin 2t + \cos 4t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cdot \cos t. \end{cases}$

Варіант 13.

Знайти похідні:

1. $y = 10 - \frac{7}{\sqrt[5]{x^4}} + 9x^4 + \frac{3\sqrt[3]{x} + 7x^2}{x^5};$

2. $y = 4^{x+3} - 2\operatorname{arctg} 2x - 3\log_9 5x;$

3. $y = \cos(\log_7 5x);$

4. $y = \operatorname{arctg} 3x^6;$

5. $y = (5x^8 + 61x) \cdot \ln^3 4x;$

6. $y = 8^{\sin^4(\ln x)} \cdot \log_5^3(4x - \sqrt{x});$

7. $y = \frac{\sqrt[3]{8x^7 + 6x^5 + 4x^2}}{\ln(\operatorname{arctg} 9x)}.$

Варіант 14.

1. $y = (3x^3 - \sqrt{x}) \arcsin x;$

2. $y = \frac{2e^x - 11}{5x^3 + 4x^2 + 12x};$

3. $y = \arccos^9 2x;$

4. $y = \sqrt[4]{e^{\ln^8 3x - 12x^5}};$

5. $y = \frac{4 \ln(\cos 2x)}{x^6 - 4x^5};$

6. $y = 5 \operatorname{tg} 3x^9 \cdot \sqrt[3]{\arcsin 6x};$

7. $y = \frac{\arccos^7(5^x - 9)}{(4 \log_6 x - 5)^8}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\operatorname{arctg} 3x) \sqrt[3]{x};$

8. $y = (\arcsin 2x^9)^{\log_5^8 x};$

9. $y = \frac{(11x + 1)^2}{(x - 4)^9 \cdot \sqrt[7]{(x - 3)^2}}.$

9. $y = \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x - 2}} \log_7(\cos 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $\ln \frac{x^6}{y} = 5y \cdot \arcsin x.$

10. $y = \operatorname{tg}(2x + 7y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = t^3 + 3t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 2 \ln(\operatorname{ctgt}) + 1, \\ y = \operatorname{tgt} + \operatorname{ctgt}. \end{cases}$

Варіант 15.

Знайти похідні:

$$1. y = \frac{5x^4 + 6\sqrt[4]{x^3}}{x^3} + 7x^3 + \frac{2}{x^6} - 13;$$

$$2. y = 2\operatorname{ctg} 5x - 3\log_4 3x + 5e^{3x};$$

$$3. y = \operatorname{tg}(2x^5 + 3^x);$$

$$4. y = \log_7^8 6x;$$

$$5. y = (9x^6 - 7x^4) \cdot e^{5\operatorname{ctg} x^2};$$

$$6. y = 11^{\cos^2 \ln x} \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{x};$$

$$7. y = \frac{\sqrt[4]{7x^5 - 3x^3 - 15}}{\ln(\operatorname{arctg} 4x)}.$$

Варіант 16.

$$1. y = (2x^3 - \sqrt[8]{x}) \arccos x;$$

$$2. y = \frac{13 \cdot 7^x - 5}{6x^3 - 8x^2 + 4x};$$

$$3. y = \operatorname{arctg}^6 5x;$$

$$4. y = \sqrt[7]{\cos^3 5x + 4x};$$

$$5. y = \frac{5 \sin 2x^6}{3x^2 + 5x};$$

$$6. y = \operatorname{ctg}(\log_2 x) \cdot 3\sqrt{x^7};$$

$$7. y = \frac{\operatorname{arctg}^4(7x + 3)}{(5 \cos x - 1)^4}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$8. y = (\sin 5x)^{\operatorname{arctg} x};$$

$$8. y = (\operatorname{arctg} 4x^5)^{2x^7 - 9};$$

$$9. y = \frac{(x + 7)^8 \cdot \sqrt[3]{(x - 4)^7}}{(5x - 3)^6}.$$

$$9. y = \sqrt[4]{\frac{x - 6}{x + 6}} \ln(\operatorname{ctg} 2x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$10. e^{x^3 + 6y} = 3x \cdot \operatorname{arctg} y.$$

$$10. \cos(xy) = x + y.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$11. \begin{cases} x = 4t + e^t, \\ y = 4t \cdot e^t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = t \cdot \cos t - 2 \sin t, \\ y = t \cdot \sin t + 2 \cos t. \end{cases}$$

Варіант 17.

Знайти похідні:

1. $y = 5x^2\sqrt{x} - \frac{2\sqrt[3]{x^4-5x}}{x^3} + 8x^4 - 3;$

2. $y = \operatorname{arctg} 2x + 3^{3x} - \ln(x^2 + x);$

3. $y = \operatorname{ctg}(\sin 4x - 1);$

4. $y = e^{5x^6 - 8x^2 + 3};$

5. $y = (4x^7 + 7x^5) \cdot \arcsin^4 6x;$

6. $y = 6^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \log_7^4(e^{2x} + 4x);$

7. $y = \frac{\sqrt[5]{12x^3 - 2x^2 - 5x}}{\log_3(\cos 5x)}.$

Варіант 18.

1. $y = (8x^6 + 5x^3) \arcsin x;$

2. $y = \frac{7 \sin x - 10}{2x^2 + 4x - 15};$

3. $y = \operatorname{arctg}^8 5x;$

4. $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 5x + 8x^9};$

5. $y = \frac{8 \cos 2x^3}{x^5 - 3x^2};$

6. $y = \arcsin(\ln x) e^{\sqrt{\operatorname{tg} x^3}};$

7. $y = \frac{\operatorname{arctg}^9(e^x + 4)}{(5 \sin x - 7)^3}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} x};$

8. $y = (\operatorname{arctg} 2x^3)^{\ln^8 x};$

9. $y = \frac{(9x - 2)^7}{(x - 7)^4 \cdot \sqrt[5]{(x + 1)^3}}.$

9. $y = \sqrt[5]{\frac{x - 8}{x + 8}} \operatorname{tg}(x^2 + 4x).$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $y^2 \cdot \log_5 x = 7x^3 - 3 \operatorname{tg} y.$

10. $y = x + \operatorname{arctg}(x + y).$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^2 \sin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sin t(5 + \cos^2 t), \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$

Варіант 19.

Знайти похідні:

$$1. y = 2 - 6\sqrt[7]{x^4} + \frac{2}{x^6} + \frac{7x\sqrt[5]{x} + 3x^2}{x^4};$$

$$2. y = \log_3(2x - 3) + 5 \sin 4x + e^{2x};$$

$$3. y = \arcsin(x^2 - 3\sqrt{x});$$

$$4. y = 3^{9x^4 - 8x^5};$$

$$5. y = (10x^7 - 3x^5) \cdot \arccos^3 9x;$$

$$6. y = 2^{\sin^4 \ln x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(3x + 1)};$$

$$7. y = \frac{\sqrt[6]{7x^9 - 10x^3 - 52}}{\log_4(\sin 3x)}.$$

Варіант 20.

$$1. y = (3x^2 - x) \operatorname{arccotg} x;$$

$$2. y = \frac{3 \cos x + 2}{12x^9 - 7x^5 - x^2};$$

$$3. y = \ln^7 6x;$$

$$4. y = \sqrt[10]{\sin^5 2x - 3x^2};$$

$$5. y = \frac{4 \operatorname{tg} 7x^3}{x^6 - 4x^5};$$

$$6. y = \log_7(\cos x) \sqrt[3]{5^{\operatorname{ctg} x}};$$

$$7. y = \frac{\sin^8(e^x - 1)}{(6 \log_3 x + 5)^9}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$8. y = (\operatorname{tg} 4x)^{\arcsin x};$$

$$8. y = (\ln 5x^9)^{\cos^4 3x};$$

$$9. y = \frac{(x - 2)^8 \cdot \sqrt[7]{(x + 9)^4}}{(7x - 4)^5}.$$

$$9. y = \sqrt[7]{\frac{x + 3}{x - 3}} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}.$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$10. x^7 \cdot \operatorname{ctg} y = 2 \ln^2 y - 8x.$$

$$10. x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = xy.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$11. \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = \sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = e^{3t} \cos^3 t, \\ y = e^{3t} \sin^3 t. \end{cases}$$

Варіант 21.

Знайти похідні:

$$1. y = 2x^3 + \frac{12x^5 - x^2\sqrt{x}}{x^5} - \frac{8}{\sqrt[3]{x^5}} - 10;$$

$$2. y = 3e^{7x} - 5\operatorname{ctg} 3x - 5 \arcsin 2x;$$

$$3. y = \arccos \sqrt{3x^2 - 1};$$

$$4. y = \sin 5x^2;$$

$$5. y = (21x^4 + 7x) \cdot 7^{\ln(3x-4)};$$

$$6. y = 6^{\operatorname{tg}^5(2x-8)} \cdot \log_3^6(\arcsin 4x);$$

$$7. y = \frac{\sqrt[7]{8x^5 + 2x^2 - 9x}}{\log_5(\operatorname{tg} 3x)}.$$

Варіант 22.

$$1. y = \left(4\sqrt[5]{x^7} - 2\right) \operatorname{arctg} x;$$

$$2. y = \frac{5\operatorname{tg} x - 2}{4x^5 + 17x^2 + 2x};$$

$$3. y = \log_5^8 9x;$$

$$4. y = \sqrt[6]{\cos^3 2x + 6x^4};$$

$$5. y = \frac{3\operatorname{ctg} 8x^5}{x^{10} + 3x^6};$$

$$6. y = \cos(2^x) \cdot \operatorname{tg} \sqrt[7]{x^5};$$

$$7. y = \frac{\cos^7(7^x - 2)}{(4 \arcsin x - 6)^2}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$8. y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\arccos x};$$

$$8. y = (\log_9 2x^7)^{\arcsin^6 2x};$$

$$9. y = \frac{(8x - 7)^{10}}{(x + 3)^4 \cdot \sqrt[5]{(x + 2)^7}}.$$

$$9. y = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} \log_9(\operatorname{ctg} 3x).$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$10. \arcsin x^8 = 5y \cdot e^{x^2}.$$

$$10. x^3 + y^3 = 10xy.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$11. \begin{cases} x = t + 2\operatorname{tg} t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = 2 \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t, \\ y = 3 \cos t + \frac{t^2}{2} \sin t. \end{cases}$$

Варіант 23.

Знайти похідні:

1. $y = \frac{6}{\sqrt[7]{x^8}} + 1 + 7x^4 + \frac{8x^9 - 5x^3 \sqrt[3]{x}}{x^2};$

2. $y = 6^{2x-3} + 2 \operatorname{arctg} 5x - \log_7 4x;$

3. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 3x - 2x};$

4. $y = \operatorname{arctg} 3x^{10};$

5. $y = (3x^{11} - 5x^4) \cdot \arccos^3 11x;$

6. $y = 9^{\ln^7 \cos x} \cdot \arccos \sqrt{x};$

7. $y = \frac{\sqrt[8]{21x^4 - 3x^3 + 5x^2}}{\log_2(\operatorname{ctg} 10x)}.$

Варіант 24.

1. $y = (10x^3 + 2\sqrt[3]{x}) \cdot e^x;$

2. $y = \frac{7 \arcsin x + 15}{x^8 - 2x^5 + 3x^3};$

3. $y = e^{\cos^2 x};$

4. $y = \sqrt[8]{\arcsin^4 5x + x^3};$

5. $y = \frac{9 \operatorname{ctg} 5x^4}{x^2 - 2x};$

6. $y = \sin(\operatorname{ctg} 3x) \ln \sqrt[3]{x};$

7. $y = \frac{\operatorname{tg}^4(4^x - 2)}{(8 \arccos x - 4)^9}.$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

8. $y = (\arcsin 5x)^{\log_7 x};$

8. $y = (\sin 8x^2)^{\sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}};$

9. $y = \frac{(x-6)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^{10}}}{(4x-1)^5}.$

9. $y = \sqrt[7]{\frac{x+8}{x-8}} \cdot e^{\operatorname{arctg} 3x}.$

Знайти похідну неявно заданої функції:

10. $\ln(x^5 - 6y) = 6y^3 \cdot \operatorname{tg} x.$

10. $y = 5 + x \cdot e^y.$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

11. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t). \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3}, \\ y = \frac{6t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

Приклади розв'язання типового варіанту

Знайти похідні:

1. $y = \frac{5x^7 - 3x\sqrt{x}}{x^3} + 2x^5 + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 27.$

Розв'язання. Функція проста, степенева, представлена у вигляді алгебраїчної суми, але перед диференціюванням її треба спростити, скориставшись властивостями степенів. От-

же, перепишемо функцію:

$$y = 5x^4 - 3x^{-\frac{3}{2}} + 2x^5 + 4x^{-\frac{1}{3}} - 27.$$

Знайдемо її похідну:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} + 2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} - 0 = \\ &= 20x^3 + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} + 10x^4 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

$$2. y = (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \arcsin x.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (9.6)

$$\begin{aligned} u &= 8x^3 + 6\sqrt{x}; & u' &= 24x^2 + \frac{6}{2\sqrt{x}}; \\ v &= \arcsin x; & v' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (9.6):

$$y' = \left(24x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \cdot \arcsin x + (8x^3 + 6\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3. y = \log_7(x+3) + 5 \cos 4x - 4 \operatorname{arctg} 8x.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, але звернемо увагу, що кожний доданок – складена функція, тому диференціювати їх будемо за правилом (9.9), згідно з таблицею похідних:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} (x+7)' + 5(-\cos 4x) \cdot (4x)' - 4 \frac{1}{1+(8x)^2} (8x)' = \\ &= \frac{1}{(x+7) \ln 7} - 20 \cos 4x - \frac{32}{1+64x^2}. \end{aligned}$$

$$4. y = \frac{5 \sin x + 6x^2}{3x^3 - 8x + 4}.$$

Розв'язання. Функція проста, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (9.7):

$$\begin{aligned} u &= 5 \sin x + 6x^2; & u' &= 5 \cos x + 12x; \\ v &= 3x^3 - 8x + 4; & v' &= 9x^2 - 8. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (9.7):

$$y' = \frac{(5 \cos x + 12x)(3x^3 - 8x + 4) - (5 \sin x + 6x^2)(9x^2 - 8)}{(3x^3 - 8x + 4)^2}$$

$$5. y = \operatorname{ctg} 3x^7.$$

Розв'язання. Функція складена. Поступово диференціюємо її: спочатку котангенс, а потім його аргумент – степеневу функцію:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 3x^7} \cdot (3x^7)' = -\frac{1}{\sin^2 3x^7} \cdot 21x^6.$$

$$6. y = \arccos^5 9x.$$

Розв'язання. Функція складена. Поступово диференціюємо її: спочатку степеневу функцію, потім її аргумент – арккосинус і, наприкінці, аргумент арккосинусу:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \arccos^4 9x \cdot (\arccos 9x)' = \\ &= 5 \arccos^4 9x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - (9x)^2}} \right) \cdot (9x)' = \\ &= -5 \arccos^4 9x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 81x^2}} \cdot 9 = -\frac{45 \arccos^4 9x}{\sqrt{1 - 81x^2}}. \end{aligned}$$

$$7. y = 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})}.$$

Розв'язання. Функція складена. Поступово диференціюємо її: спочатку показникову функцію, потім степеневу (степенів тангенса), тригонометричну – тангенс, і його аргумент – корінь квадратний із натурального логарифма, і, нарешті, сам логарифм:

$$\begin{aligned} y' &= 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})} \ln 9 \cdot \left(\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x}) \right)' = \\ &= 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})} \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \cdot (\operatorname{tg}(5\sqrt{\ln x}))' = \\ &= 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})} \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} (5\sqrt{\ln x})' = \\ &= 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})} \ln 9 \cdot 3 \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x}) \frac{1}{\cos^2(5\sqrt{\ln x})} \cdot 5 \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \\ &= \frac{15 \cdot 9^{\operatorname{tg}^3(5\sqrt{\ln x})} \ln 9 \cdot \operatorname{tg}^2(5\sqrt{\ln x})}{2x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \cos^2(5\sqrt{\ln x})}. \end{aligned}$$

$$8. y = \sqrt[7]{e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x}.$$

Розв'язання. Функція складена. Знаходимо похідну степеневої функції, а потім – похідну кожного з доданків підкореневого виразу:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{7} \left(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x \right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \left(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x \right)' = \\ &= \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt[7]{(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x)^6}} \cdot \left(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} \cdot (\operatorname{arctg} 6x^4)' + 4 \right) = \\ &= \frac{1}{7 \sqrt[7]{(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x)^6}} \cdot \left(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} \cdot \left(-\frac{1}{1 + (6x^4)^2} \right) (6x^4)' + 4 \right) = \\ &= \frac{1}{7 \sqrt[7]{(e^{\operatorname{arctg} 6x^4} + 4x)^6}} \left(4 - \frac{24x^3 \cdot e^{\operatorname{arctg} 6x^4}}{1 + 36x^8} \right). \end{aligned}$$

$$9. y = (3x^5 + 5x) \cdot \log_2 (4x^2 - 6).$$

Розв'язання. Функція складена. Знаходимо похідну степеневої функції, добутку. Скористаємося формулою (9.6):

$$\begin{aligned} u &= 3x^5 + 5x; & u' &= 15x^4 + 5; \\ v &= \log_2 (4x^2 - 6); & v' &= \frac{1}{(4x^2 - 6) \ln 2} \cdot (4x^2 - 6)' = \\ & & &= \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (9.6)

$$y' = (15x^4 + 5) \cdot \log_2 (4x^2 - 6) + (3x^5 + 5x) \cdot \frac{8x}{(4x^2 - 6) \ln 2}.$$

$$10. y = \frac{\operatorname{tg} 7x^2}{x^4 - 4x^3}$$

Розв'язання. Функція складена, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (9.7):

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg} 7x^2; & u' &= \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot (7x^2)' = \frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x; \\ v &= x^4 - 4x^3; & v' &= 4x^3 - 12x^2. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (9.7):

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 7x^2} \cdot 14x (x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2)}{(x^4 - 4x^3)^2} =$$

(приведемо чисельник до загального знаменника)

$$= \frac{14x (x^4 - 4x^3) - \operatorname{tg} 7x^2 (4x^3 - 12x^2) \cos^2 7x^2}{(x^4 - 4x^3)^2 \cos^2 7x^2}.$$

$$11. y = \frac{\operatorname{arccctg} \sqrt{x^2 - 1}}{\operatorname{tg}^2(x - 1)}.$$

Розв'язання. Функція складена, представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (9.9):

$$u = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1};$$

$$v = \operatorname{tg}^2(x - 1);$$

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{1 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \\ &= -\frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}; \end{aligned}$$

$$v' = 2 \operatorname{tg}(x - 1) \cdot (\operatorname{tg}(x - 1))' = 2 \operatorname{tg}(x - 1) \frac{1}{\cos^2(x - 1)}.$$

$$(x - 1)' = \frac{2 \operatorname{tg}(x - 1)}{\cos^2(x - 1)}.$$

Підставимо у формулу (9.9):

$$y' = \frac{-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \operatorname{tg}^2(x-1) - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}(x-1)}{\cos^2(x-1)}}{\operatorname{tg}^4(x-1)} =$$

(приведемо чисельник до загального знаменника)

$$= -\frac{\sin^2(x-1) + 2 \operatorname{tg}(x-1)x\sqrt{x^2-1} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1} \cos^2(x-1) \cdot \operatorname{tg}^4(x-1)}.$$

Знайти похідну функції за допомогою метода логарифмічного диференціювання:

$$12. y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

Розв'язання. Функція степенєво-показникова, тому для її диференціювання можна або скористатися правилом диференціювання показниково-степенєвої функції, або прологарифмувати функцію та продиференціювати отриманий вираз. Скористаємось логарифмічним диференціюванням:

Логарифмуємо функцію:

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

За властивістю логарифмів, показник степені підлогарифмічного виразу – коефіцієнт перед логарифмом:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x).$$

Ліворуч обчислимо похідну логарифма (пам'ятаємо, що y функція x , тобто складна функція), а праворуч обчислимо похідну добутку:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \mid \cdot y;$$

$$y' = y \left(\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right);$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\cos x} \right).$$

$$13. y = (\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}}.$$

Розв'язання. Функція степенєво-показникова. Для її диференціювання скористаємось алгоритмом, який використано при розв'язанні приклада 12:

$$\ln y = \ln(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{x^2}};$$

$$\ln y = \frac{5}{x^2} \ln \arcsin \sqrt{x} = \frac{5 \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^2}.$$

Права частина набуває вигляду частки, тому за формулою (9.7) маємо:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= 5 \frac{\frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - \ln \arcsin \sqrt{x} \cdot 2x}{x^4} = \\ &= 5 \frac{x \left(x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x} \right)}{x^4} = \\ &= 5 \frac{x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3} \mid \cdot y; \\ y' &= 5(\arcsin \sqrt{x})^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{x - 4\sqrt{x-x^2} \cdot \arcsin \sqrt{x} \cdot \ln \arcsin \sqrt{x}}{x^3}.\end{aligned}$$

$$14. y = \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4}.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки, знаменник дробу – у вигляді добутку. Отже диференціювання такої функції за формулами (9.6), (9.7) нераціонально. Відомо, що для диференціювання функції, яка містить більш, ніж два множники, використовують метод логарифмічного диференціювання. Продиференціюємо функцію, скористаємося властивостями логарифмів, а потім знайдемо похідну:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4}; \\ \ln y &= \ln(3x+2)^6 - \ln(x+5)^{\frac{3}{7}} - \ln(x-8)^4; \\ \ln y &= 6 \ln(3x+2) - \frac{3}{7} \ln(x+5) - 4 \ln(x-8); \\ \frac{y'}{y} &= \frac{6 \cdot 3}{3x+2} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x+5} - \frac{4}{x-8} \mid \cdot y; \\ y' &= \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3} \cdot (x-8)^4} \left[\frac{6}{3x+2} - \frac{3}{7(x+5)} - \frac{4}{x-8} \right].\end{aligned}$$

За бажанням, даний вираз можна спростити:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(3x+2)^6}{\sqrt[7]{(x+5)^3 \cdot (x-8)^4}} \times \\
 &\times \frac{42(x+5)(x-8) - 3(3x+2)(x-8) - 28(3x+2)(x+5)}{7(3x+2)(x+5)(x-8)} = \\
 &= -\frac{(3x+2)^5 (51x^2 + 536x + 1912)}{7\sqrt[7]{(x+5)^{10} \cdot (x-8)^5}}.
 \end{aligned}$$

Знайти похідну неявно заданої функції:

$$15. y \cos x - x \sin y = 0.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що при диференціюванні таких функцій ми зобов'язані пам'ятати, що y є функцією x , тому диференціювати її потрібно за правилами диференціювання складених функцій. Наша функція складається з двох доданків, кожний з яких має вигляд добутку. У відповідності з вже відомими правилами маємо:

$$y' \cos x + y(-\sin x) - 1 \cdot \sin y - x \cos y \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканої похідної:

$$y'(\cos x - x \cos y) = \sin y + y \sin x.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}.$$

$$16. \arctg \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язання. Продиференціюємо неявно задану функцію аналогічно попередньому прикладу:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + y^2)'}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2}.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\frac{y - xy'}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2};$$

$$y - xy' = x + yy';$$

$$y'(x + y) = y - x;$$

остаточно маємо

$$y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$17. \begin{cases} x = 4t - 15, \\ y = 2t^3. \end{cases}$$

Розв'язання. За формулою (9.13) для того, щоб знайти похідну функції, заданої параметрично, спочатку необхідно знайти похідні x та y за параметром t :

$$x'_t = 4; \quad y'_t = 6t.$$

За формулою (9.13) маємо:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}.$$

$$18. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t). \end{cases}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (9.13):

$$x'_t = 2(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 2t \cos t;$$

$$y'_t = 2(\cos t - \cos t + t \sin t) = 2t \sin t;$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \sin t}{2t \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Тема 10. Застосування похідної до дослідження функцій

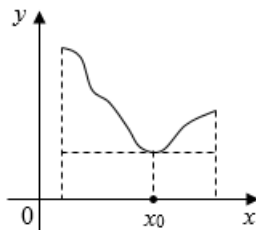
Основні теореми диференціального числення

Розглянемо декілька основних теорем перед вивченням застосування похідної при дослідженні функцій та побудови їх графіків.

1) **Теорема Ферма.** *Якщо диференційована на проміжку X функція $y = f(x)$ досягає свого найбільшого або найменшого значення в деякій внутрішній точці x_0 цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює 0:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Геометрично теорема Ферма означає, що в точках, де функція набуває найбільшого або найменшого значення, дотичні є горизонтальними (тобто паралельними осі абсцис)



Наслідок. *Неперервна функція може мати екстремум тільки там, де $f' = 0$ або $\nexists$.*

2) **Теорема Ролля.** *Нехай $y = f(x)$ задовольняє умови:*

а) *неперервна на $[a, b]$;*

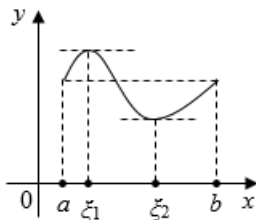
б) *диференційована на (a, b) ;*

в) *на кінцях відрізка набуває рівних значень: $f(a) = f(b)$.*

Тоді всередині відрізка $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка $\xi \in (a, b)$ така, що

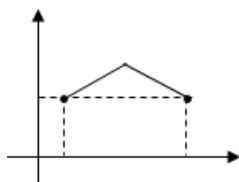
$$f'(\xi) = 0.$$

Геометрично це означає: знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка функції буде паралельна осі абсцис, в цій точці похідна і буде дорівнювати нулю.

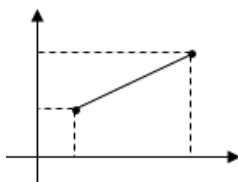


Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати так: між двома послідовними нулями диференційованої функції знайдеться хоча б один нуль похідної.

Слід відмітити, що всі умови теореми Ролля істотні і при невиконанні хоча б однієї з них висновок теореми може виявитися невірним. Так, для функцій, наведених на малюнках порушено тільки по одній умові: а) диференційованість на (a, b) ; б) рівність $f(a) = f(b)$:



а)



б)

Теорема Ролля є частинним випадком наступної теореми Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє наступні умови:

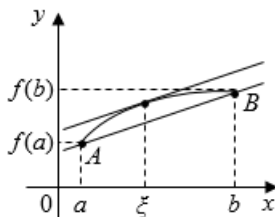
- 1) неперервна на $[a, b]$;
- 2) диференційована на (a, b) .

Тоді знайдеться точка $\xi \in (a, b)$ така, що похідна функції в цій точці дорівнює відношенню приросту функції до

приросту аргумента на цьому відрізку:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрична інтерпретація: На (a, b) знайдеться хоча б одна точка ξ , в якій дотична паралельна хорді AB , що сполучає кінці дуги функції $f(x)$ на $[a, b]$:



Теорема Коші (про кінцеві прирости двох функцій). Нехай на відрізку $[a, b]$ задано дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$. Якщо ці функції неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовні на інтервалі (a, b) , причому $\varphi'(x) \neq 0$, то на (a, b) існує точка ξ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

а) Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (10.1)$$

б) Оскільки дотична та нормаль, проведені в точці з абсцисою x_0 , перпендикулярні, то їх кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням $k_1 \cdot k_2 = -1$, тобто, якщо $f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт дотичної, то $-\frac{1}{f'(x_0)}$ – кутовий коефіцієнт нормалі, тоді

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (10.2)$$

– рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 .

Наслідок 1. Якщо похідна функції $f(x)$ дорівнює 0 на деякому проміжку X , то функція є тотожньою константою на цьому проміжку.

Наслідок 2. Якщо дві функції мають рівні похідні на деякому проміжку, то ці функції на цьому проміжку відрізняються не більш, ніж на стале число.

Правило Лопітала

Теорема 10.1. Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних (скінченній або нескінченній), якщо ця границя існує.

Отже, якщо маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (10.3)$$

($f(x)$ і $g(x)$ – неперервно-диференційовані в околі точки x_0 , $f(x_0) = g(x_0) = 0$, або $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$).

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ – маємо $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Зауваження. 1) Якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ також є невизначеністю, то застосовуємо правило Лопітала ще раз, якщо для відповідної функції або похідної виконуються умови теореми Коші.

2) Невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$ можна звести до одного з попередніх типів: $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$ – маємо $[0 \cdot \infty] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

3) Невизначеність $[\infty - \infty]$ зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

4) Невизначеність 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)}, \text{ де } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty,$$

дорівнює: $\lim_{x \rightarrow a} \{v(x) \cdot [u(x) - 1]\}$.

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

5) Невизначеності $[\infty^0]$, $[0^0]$ за допомогою перетворень зводяться до невизначеності типу $[\infty \cdot 0]$.

Невизначеності типу 0^0 , 1^∞ і ∞^∞ можна розкрити за правилом Лопітала, використавши тотожність

$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)},$$

яка зводить вказані випадки до вигляду $[0 \cdot \infty]$.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} =$ (оскільки функція $y = e^x$ неперервна, то символи функції і границі можна міняти місцями) $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1.$

Приклади на застосування правила Лопітала

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ – маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{x}}{x \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^n)$ – невизначеність $[\infty - \infty]$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^n) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x^n}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^n}{e^x} \right) =$$

$$= \infty \cdot \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}\right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (x \cdot \ln x)$ – невизначеність $[0 \cdot \infty]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Визначення інтервалів зростання і спадання функції (інтервали монотонності)

Означення 10.1. Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) на проміжку X , якщо для $\forall x_1, x_2 (x_1 < x_2) \in X$ справедливо

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Теорема 10.2. (достатня умова зростання функції). Якщо похідна диференційованої функції додатна всередині деякого проміжку X , то вона зростає на цьому проміжку.

Теорема 10.3. (достатня умова спадання функції). Якщо похідна диференційованої функції від'ємна всередині деякого проміжку X , то вона спадає на цьому проміжку.

Зауважимо, що необхідна умова монотонності слабше: Якщо функція зростає (спадає) на деякому проміжку X , то можна лише стверджувати, що похідна невід'ємна (недодатна) на цьому проміжку: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x \in X$, тобто в окремих точках похідна монотонної функції може дорівнювати 0.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

Розв'язання. Знайдемо похідну та її нулі:

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

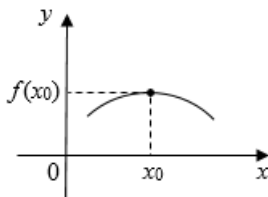
Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів:



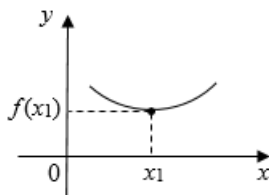
Отже, функція $y = x^3 - 3x^2 + 5$ зростає при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, а спадає при $x \in (0; 2)$.

Екстремуми функції

Означення 10.2. Точка x_0 називається точкою локального максимума функції $f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

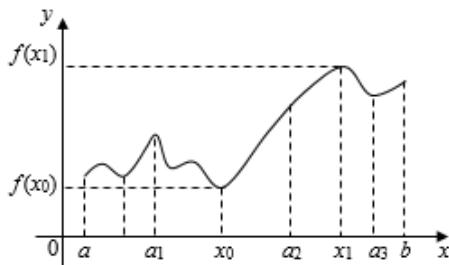


Означення 10.3. Точка x_1 називається точкою локального мінімуму функції $f(x)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x) \geq f(x_1)$.



Значення функції в точках x_0 і x_1 називаються відповідно локальним максимумом та локальним мінімумом функції. Максимум та мінімум мають спільну назву *екстремум* функції.

Максимум (мінімум) функції на множині інколи називають глобальним або абсолютним максимумом (мінімумом):



Наприклад, точки a_1, a_3 – локальні екстремуми; точка x_0 – абсолютний мінімум на $[a, b]$, x_1 – абсолютний максимум.

Необхідна умова екстремуму. Стаціонарні і критичні точки функції

Теорема 10.4. (необхідна умова екстремуму). Для того, щоб точка x_0 була точкою екстремуму функції, визначеної в околі цієї точки, необхідно, щоб похідна цієї функції в цій точці дорівнювала 0 або не існувала.

Означення 10.4. Точки інтервалу (a, b) , в яких $f'(x) = 0$, називаються стаціонарними точками $f(x)$ в інтервалі (a, b) .

Означення 10.5. Точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує, називаються критичними точками функції $f(x)$ на $[a, b]$, або точками, "підозрілими" на екстремум функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Слід зауважити, що критична точка не обов'язково є точкою екстремуму.

Для знаходження екстремумів функції потрібно додаткове дослідження критичних точок. Іншими словами, потрібно знати достатню умову екстремума.

Теорема 10.5. (перша достатня умова екстремума): Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0 , в якій $f(x)$ неперервна. Тоді:

1) якщо при переході через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "+" на "-", то в x_0 $f(x)$ має строгий максимум;

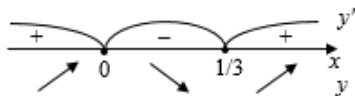
2) якщо при переході через x_0 $f'(x)$ змінює знак з "-" на "+", то в x_0 $f(x)$ має строгий мінімум;

3) якщо при переході через x_0 похідна не змінює знака, то в точці x_0 $f(x)$ екстремуму не має (тобто функція або тільки зростає, або спадає).

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = 2x^3 - x^2$.
Розв'язання. Знайдемо похідну та її нулі:

$$y = 2x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 2x \Rightarrow 6x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 3x^2 - x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}.$$

Визначимо знак y' на кожному з даних інтервалів:



Отже, при переході через точку $x = 0$ похідна змінила знак з "+" на "-", тому ця точка є точкою максимуму; при переході через точку $x = \frac{1}{3}$ похідна змінила знак з "-" на "+", тому ця точка є точкою мінімуму.

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{27},$$

$$y_{\max} = y(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 = 0.$$

Теорема 10.6. (друга достатня умова екстремуму).
Нехай функція $f(x)$ має похідні до n -го порядку включно в околі точки x_0 , причому $f^{(n)}(x)$ неперервна в точці x_0 і $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, але $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді:

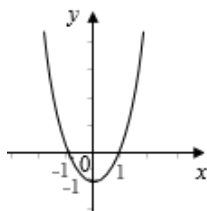
1) якщо n парне ($n \geq 2$), то функція $f(x)$ в точці x_0 має строгий екстремум, причому при $f^{(n)}(x_0) > 0$ – мінімум, а при $f^{(n)}(x_0) < 0$ – максимум.

2) якщо n – непарне, то функція $f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

Наприклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x^2 - 1$ в точці а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 0$.

Розв'язання. а) $y' = 2x \Rightarrow y'(1) = 2 \Rightarrow n = 1$ – непарне $\Rightarrow$ в $x_0 = 1$ функція $y = x^2 - 1$ екстремуму не має;

б) $y' = 2x \Rightarrow y'(0) = 0$; $y'' = 2 \neq 0$, $2 > 0 \Rightarrow$ в $x_0 = 0$ функція має мінімум.



Найбільше та найменше значення функції на проміжку

При роз'язуванні прикладних задач, зокрема оптимізаційних, важливе значення мають задачі на знаходження *глобального максимуму* та *глобального мінімуму* функції на деякому проміжку X .

Згідно з теоремою Вейєрштрасса, якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона досягає на цьому проміжку свого найбільшого та найменшого значення. Ці значення можуть досягатись як в точках екстремуму, так і на кінцях проміжку. Тому для *відшукування найбільшого та найменшого значень* на відрізку слід користуватися наступною схемою:

1. Знайти похідну $f'(x)$.
2. Знайти критичні точки функції, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.
3. Знайти значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку та вибрати з них (це стосується тільки точок, які належать даному відрізку) найбільше та найменше. Це і буде $\max$ та $\min f(x)$ на даному відрізку.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ на відрізку $[-1; 4]$.

Розв'язання. За схемою дослідження маємо

$$\begin{aligned} y' = 3x^2 - 6x + 3 &\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 1 \in [-1; 4]. \end{aligned}$$

Знаходимо значення функції в точках $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$:

$$\begin{aligned} y(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -1 - 3 - 3 = -7, \\ y(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 - 3 + 3 = 1, \\ y(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 = 64 - 48 + 12 = 28. \end{aligned}$$

Отже, найменшим значенням функції $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ на відрізку $[-1; 4]$ буде -7 , а найбільшим 28 .

Зауваження. Якщо $f(x)$ неперервна на (a, b) , то вона може не досягати на ньому свого найбільшого та найменшого значень. Зокрема, якщо диференційовна функція на (a, b) має лише одну точку максимуму (або одну точку мінімуму), то найбільше (або найменше) значення функції співпадає з максимумом (або мінімумом) цієї функції.

Опуклість функції. Точки перегину

Означення 10.6. Функція $y = f(x)$ називається опуклою вниз на проміжку X , якщо для будь-яких значень x_1 і $x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$) виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Означення 10.7. Функція $y = f(x)$ називається опуклою вгору на проміжку X , якщо для $\forall x_1, x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$) виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Теорема 10.7. *Функція опукла вниз (вверх) на проміжку X тоді і тільки тоді, коли її перша похідна на цьому проміжку монотонно зростає (спадає).*

Використовуючи умови монотонності, можна визначити наступну достатню умову опуклості функції вниз (вверх).

Теорема 10.8. *Якщо друга похідна двічі диференційовної функції додатна (від'ємна) всередині деякого проміжку X , то функція опукла вниз (вверх) на цьому проміжку.*

Означення 10.8. *Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, що розділяє інтервали, в яких функція опукла вниз і вверх.*

Отже, точки перегину – це точки екстремуму першої похідної. Звідси випливають наступні твердження.

Теорема 10.9. *(необхідна умова перегину). Друга похідна $f''(x)$ двічі диференційовної функції в точці перегину x_0 дорівнює 0: $f''(x_0) = 0$.*

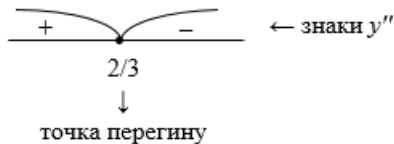
Теорема 10.10. *(достатня умова перегину). Якщо друга похідна $f''(x)$ двічі диференційовної функції при переході через деяку точку x_0 змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину її графіку.*

Слід відмітити, що якщо критична точка диференційовної функції не є точкою екстремуму, то вона є точкою перегину її графіка.

Приклад. Дослідити на опуклість функцію $y = 2x^2 - x^3 + 1$.

Розв'язання. Знаходимо y' та y'' :

$$\begin{aligned}y' &= (2x^2 - x^3 + 1)' = 4x - 3x^2, \\y'' &= 4 - 6x \Rightarrow 4 - 6x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

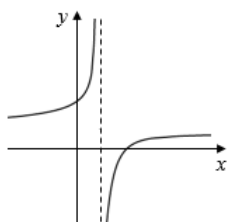


Отже, на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ графік функції $y = 2x^2 - x^3 + 1$ опуклий вниз, а на $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ – опуклий вверх.

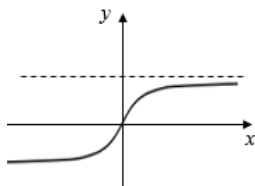
Асимптоти графіка функції

В попередніх пунктах ми вивчали *характерні точки* функції. Розглянемо тепер *характерні лінії*. Найважливішими з них є асимптоти.

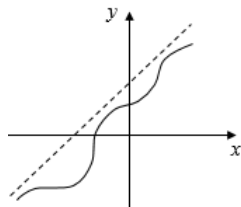
Означення 10.9. Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, яка володіє такою властивістю, що відстань від точки $(x, f(x))$ графіка функції до цієї прямої прямує до нуля при необмеженому віддаленні точки графіка від початку координат.



вертикальна
асимптота



горизонтальна
асимптота



похила
асимптота

Знаходження асимптот графіка базується на наступних твердженнях.

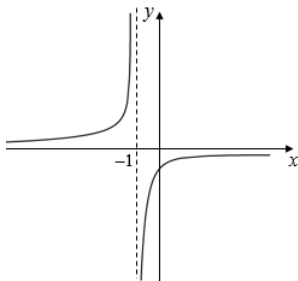
Теорема 10.11. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 (виключаючи, можливо, саму точку x_0) і хоча б одна з границь функції при $x \rightarrow x_0 - 0$ або при $x \rightarrow x_0 + 0$ дорівнює ∞ : $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тоді пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка

функції $y = f(x)$.

Отже, вертикальні асимптоти слід шукати в точках розриву функції або на кінцях її області визначення (a, b) , якщо a і b – скінченні числа. Наприклад, для $y = \frac{1}{x}$ вертикальною асимптотою є лінія $x = 0$. Для $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ – одна із вертикальних асимптот.

Теорема 10.12. Нехай функція $y = f(x)$ визначена при достатньо великих x і існує скінченна границя функції $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Тоді пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою графіка $y = f(x)$.

Приклад. $y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ – горизонтальна асимптота, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty \Rightarrow x = -1$ – вертикальна асимптота.



Теорема 10.13. Нехай $y = f(x)$ визначена при достатньо великих x і існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b. \quad (10.4)$$

Тоді пряма

$$y = kx + b. \quad (10.5)$$

є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$.

Приклад. Знайти похилі асимптоти для $y = \frac{x^2}{x-2}$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2 \Rightarrow y = x + 2.$$

Загальна схема дослідження функцій та побудови їх графіків

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність-непарність, періодичність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Дослідити функцію на неперервність.
5. Знайти асимптоти графіка (якщо вони існують).
6. З'ясувати поведінку функції на кінцях кожного з проміжків області визначення.
7. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми. Знайти точки екстремумів та значення функції в цих точках.
8. Дослідити функцію на опуклість; знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції.
9. Побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, тобто $x \neq \pm 1$.

2) Функція парна, її графік симетричний відносно осі ординат.

3) Прямі $x = 1$ і $x = -1$ є *вертикальними асимптотами*, оскільки $y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$, $y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$.

Отже, в цих точках функція має розрив. (Аналогічно для $x \rightarrow -1 + 0$ і $x \rightarrow -1 - 0$).

4) При $x = 0$, $y = 1$ – точка перетину графіка з віссю OY . Очевидно, що точок перетину з OX графік функції не має ($y \neq 0$ в жодній точці).

5) Поведінка функції на ∞ :

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} - 1} = -1,$$

отже, пряма $y = -1$ є *горизонтальною асимптотою*;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = 0 \Rightarrow$$

похилих асимптот немає.

6) Поведінка при $x = \pm 1$ розглянута в пункті 3).

7) *Екстремуми та інтервали монотонності*:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(1-x^2) + (1+x^2) \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y' = 0 \text{ при } x = 0, y' \text{ не існує при } x = \pm 1, \Rightarrow \\ &\text{критичними точками є } x = 0, x = 1, x = -1. \text{ Але } x = \pm 1 \\ &\text{не входять в ОВФ} \Rightarrow \text{критичною є тільки } x = 0. \text{ При } x < 0 \\ &y' < 0, \text{ при } x > 0 y' > 0 \Rightarrow \text{похідна змінює знак з "–" на "+"} \\ &\Rightarrow \text{в точці } x = 0 \text{ функція має мінімум; } y_{\min} = \frac{1+0}{1-0} = 1. \end{aligned}$$

На інтервалі $(-\infty, -1)$ $y' < 0 \Rightarrow$ функція спадає; на інтервалі $(-1, 0)$ $y' < 0 \Rightarrow$ функція спадає; на інтервалі $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ $y' > 0 \Rightarrow$ функція зростає.

8) *Інтервали опуклості на точки перегину*:

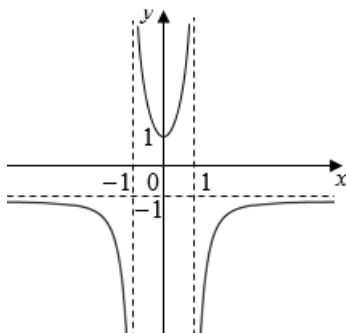
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \\ &= \frac{4(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$y'' > 0$ на $(-1, 1) \Rightarrow$ функція опукла вниз;

$y'' < 0$ на $(-\infty, -1), (1, \infty) \Rightarrow$ на цих інтервалах функція опукла вверх. Точок перегину немає (y'' в 0 не обертається в жодній точці).

Будуємо графік:



Граничні величини в економіці

Застосування похідної для дослідження динаміки функцій

Теоретичний аналіз різноманітних явищ в економіці використовує ряд *граничних величин*, наприклад: граничні витрати, гранична корисність, гранична схильність до споживання, гранична вартість тощо. Всі ці величини пов'язані з поняттям похідної. Як приклад розглянемо граничні витрати.

Нехай q – кількість виготовленої продукції, $C(q)$ – відповідні даному випуску продукції витрати. Граничні витрати позначаються MC і визначаються як додаткові витрати, пов'язані з виробництвом ще однієї одиниці продукції. Іншими словами,

$$MC = C(q + \Delta q) - C(q),$$

де $\Delta q = 1$. Використовуючи рівність $\Delta C \approx dC$, одержимо

$$MC = \Delta C \approx dC = C'(q) \cdot \Delta q = C'(q).$$

Приклад. Нехай $C(q) = 1500q - 2q^2 + 0,002q^3$. Тоді додаткові витрати, пов'язані зі збільшенням випуску від q до $q + 1$, складають $\Delta C = C(q + 1) - C(q)$, що наближено дорівнює

$$C'(q) = 1500 - 4q + 0,006q^2.$$

Загальна схема введення граничних величин така: нехай величина Y є функцією від величини X , тоді гранична величина MY (по X) $= \frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Приріст ΔX в різних випадках задається по-різному. В одних випадках ΔX – це найбільш природна одиниця виміру X , в інших – це різниця між сусідніми значеннями X в таблиці, що задає функцію Y від X . В теоретичних питаннях зручно користуватися рівністю $MY = Y'_x$, припускаючи, що Y – диференційована функція від X .

Темп зростання функції. Швидкість зміни функції $y = f(x)$ визначається, як відомо, похідною $y' = f'(x)$. Відносною швидкістю або *темпом зростання* функції називається відношення $\frac{y'}{y}$. Водночас $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$. Отже, темп зростання функції дорівнює її логарифмічній похідній. Наприклад, якщо $\frac{y'}{y} = 0,51$, то темп зростання функції становить 51%.

Граничні витрати виробництва. Нехай витрати $K(x)$ виробництва однорідної продукції є функцією від кількості x цієї продукції: $K = K(x)$. Припустимо, що кількість продукції змінюється на Δx : $x + \Delta x$. Причому цій кількості $\Delta x + x$ відповідають витрати $K(x + \Delta x)$. Тоді приросту Δx відповідає приріст витрат виробництва $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$. Відношення $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ є *приріст витрат виробництва* на одиницю приросту кількості продукції. Границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва*.

Приклад 1. Витрати виробництва K залежать від обсягу продукції x за формулою $K(x) = -0,05x^3 + 3375x + 200$. При яких значеннях x витрати почнуть спадати?

Розв'язання. Знайдемо похідну $K'(x) = -0,15x^2 + 3375$. Функція $K(x)$ спадає, коли $K'(x) < 0 \Rightarrow -0,15x^2 + 3375 < 0 \Rightarrow 0,15x^2 > 3375 \Rightarrow x^2 > \frac{3375}{0,15} = 22500 \Rightarrow x > 150$ (значення $x < -150$, зрозуміло, не підходить за змістом задачі). Отже, витрати виробництва починають спадати при обсягах $x > 150$.

Приклад 2. Залежність фінансових зборів K від обсягу продукції x визначається формулою $K(x) = 0,01x^2 - 2x + 1000$. При яких значеннях x фінансові збори почнуть зростати?

Розв'язання. $K'(x) = 0,02x - 2 > 0 \Rightarrow 0,02x > 2 \Rightarrow x > \frac{2 \cdot 100}{2} \Rightarrow x > 100 \Rightarrow$ при обсягах продукції, що перевищують 100, фінансові збори почнуть зростати.

Приклад 3. Функцію попиту на будь-який товар можна подати у вигляді $q = f(p)$, де p – ціна товару; q – відповідний попит. Загальні витрати населення на цей товар становлять $U = p \cdot q$ грн., а граничний виторг $U'_p = p'_p \cdot q + p \cdot q'_p = 1 \cdot q + p \cdot q' = q \left(1 + \frac{p}{q} \cdot q' \right)$.

Еластичність попиту щодо ціни подається у вигляді $E_p(q) = -\frac{p}{q}q'$. (Оскільки в більшості прикладів зі збільшенням ціни продукції попит на неї спадає, то $\frac{dq}{dp} < 0$. Тому, щоб не було від'ємних чисел при вивченні еластичності попиту, записують так: $E_p(q) = -\frac{p}{q}q'$). Тоді $U' = q \cdot (1 - E_p)$.

З цієї формули випливають такі висновки:

1. Якщо $E_p > 1$, то $U' < 0$. Отже, у разі еластичного попиту з підвищенням ціни виторг від продажу товару *знижується*.

2. Якщо $0 < E_p < 1$, то $U' > 0$. Отже, якщо попит нееластичний, то з підвищенням ціни виторг *зростає*.

3. Якщо $E_p = 1$, то $U' = 0 \Rightarrow U = \text{const}$. Отже, коли попит нейтральний, то виторг від продажу даного товару не залежить від зміни ціни.

Приклад 4. Нехай сумарні витрати на виробництво x одиниць продукції: $K(x) = 0,01x^2 + 10x + 400$. Залежність між ціною p і кількістю x продукції, яку можна продати за цією ціною, така:

$$p(x) = 46 - 0,05x.$$

При якому x прибуток підприємства буде максимальний і який розмір цього прибутку?

Розв'язання. Якщо відомі ціна та кількість продукції, то виручка

$$U(x) = x \cdot p(x) = 46x - 0,05x^2.$$

Прибуток подається у вигляді: $R(x) = U(x) - K(x) = xp(x) - K(x)$. Прибуток максимальний, якщо $R'(x) = 0$ і $R''(x) < 0$. Звідси випливає, що:

$$R'(x) = U'(x) - K'(x) = 0 \Rightarrow U'(x) = K'(x). \quad (*)$$

Отже, підприємство може одержати максимальний прибуток за такого обсягу x виробництва, при якому гранична виручка дорівнює граничним витратам:

$$\left. \begin{array}{l} U'(x) = 46 - 0,1x \\ K'(x) = 0,02x + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 46 - 0,1x = 0,02x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 46 - 10 = 0,12x \Rightarrow 36 = 0,12x \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{12} = 300.$$

Отже, $R(x) = 46 \cdot 300 - 0,05 \cdot 300^2 - 0,01 \cdot 300^2 - 10 \cdot 300 - 400 = 13800 - 4500 - 900 - 3400 = 5000$ грн. – розмір прибутку.

Зауваження. Формула (*) визначає один з базових законів теорії виробництва: оптимальний для виробника рівень

випуску товару визначається рівністю граничних витрат та граничного виторгу.

Ще одне важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, при якому середні витрати на виробництво товару мінімальні. Відповідний економічний закон такий: рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх та граничних витрат.

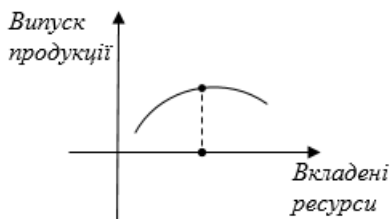
Дійсно, середні витрати визначаються як $\frac{K(x)}{x}$ (сумарні витрати на виробництво товару, поділені на його кількість). Мінімум цієї величини досягається за умови:

$$\left(\frac{K(x)}{x} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow K'(x) \cdot x = K(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} - \text{тобто коли граничні витрати } K'(x) \text{ дорівнюють середнім витратам } \frac{K(x)}{x}.$$

Поняття опуклості функції також має економічну інтерпретацію: один з найбільш значних економічних законів – закон спадної прибутковості – звучить так: *Із ростом виробництва додаткова продукція, яку одержано на кожну нову одиницю ресурсу (трудоного, технологічного та ін.), з деякого моменту зменшується (спадає).*

Іншими словами: функція $y = f(x)$, яка визначає залежність випуску продукції від вкладених ресурсів, є функцією, опуклою вгору.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Застосування похідної до дослідження функцій"

Варіант 1.

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x+8}$ в точці з абсцисою

$$x_0 = -4.$$

$$x_0 = 2.$$

2. Дано параболу $y = -x^2$. З'ясувати, в якій точці параболу нормаль до неї перпендикулярна прямій

$$y = 2x - 1.$$

$$y = x + 3.$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. З'ясувати моменти часу, в яких її швидкість дорівнювала нулю.

4. Обчислити границі функцій:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}};$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{6}{x} \right).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = 5x^4 - 10x^2 + 7.$$

$$y = \frac{7}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1.$$

$$y = x \cdot \ln x.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2}.$$

$$y = \frac{e^{x+2}}{x - 3}.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 5x.$$

$$y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \text{ на інтервалі } [1; 5].$$

$$y = x^2 - 4x + 1 \text{ на інтервалі } [-2; 1].$$

Варіант 3.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 5$ в точці з абсцисою

$$x_0 = 3.$$

$$x_0 = -5.$$

2. З'ясувати, в якій точці кривої $y = \sqrt[3]{x}$ кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює

$$y = \frac{\pi}{6}.$$

$$y = \frac{\pi}{3}.$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 5t - 16$.
Визначити швидкість руху через

$$t = 2 \text{ с.}$$

$$t = 4 \text{ с.}$$

4. Обчислити границі функцій:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x};$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right].$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = 2x^2 + 4x + 3.$$

$$y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 5}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = x^3 - 3x - 2.$$

$$y = x \cdot e^{-x^2}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{7x^2 - 2x - 5}{x^2 - 9}.$$

$$y = 3 \ln \frac{x}{x+5} - 4.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

$$y = x - \ln(x+1).$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = x^3 - 3x^2 \text{ на інтервалі } [-1; 4].$$

$$y = 3x^3 - x^2 \text{ на інтервалі } [0; 2].$$

Варіант 5.

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x - 2$ в точці з абсцисою

Варіант 6.

$$x_0 = -2.$$

$$x_0 = 4.$$

2. На кривій $y = x^2 - 7x + 13$ знайти точку, нормаль в якій паралельна прямій

$$y = \frac{1}{5}x + 2.$$

$$y = x - 1.$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 12t + 7$.
З'ясувати, у який момент часу її швидкість дорівнювала
4 м/с. 6 м/с.

4. Обчислити границі функцій:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right).$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right).$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = 5x^6 - 6x^5.$$

$$y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4.$$

$$y = \ln(1 + x^2).$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{5x^2 + x - 4}{x + 3}.$$

$$y = (x - 1)e^{x+4}.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 + 3x^2 - 18x.$$

$$y = x^2 \cdot e^{1-x}.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = \left(\frac{1}{5} \right)^{x^2 - 5x + 4} \quad \text{на інтервалі} \quad y = 2^{x^2} \quad \text{на інтервалі} \quad [-1; 2].$$

$$[-2; 3].$$

Варіант 7.

Варіант 8.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 1$ в точці з абсцисою

$$x_0 = 2.$$

$$x_0 = 3.$$

2. Записати рівняння дотичної до параболи

$$y = x^2 - 3x + 2.$$

$$y = x^2 + 3x.$$

в точці перетину її з віссю ординат.

3. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно вздовж осі абсцис, їх закони руху задані рівняннями $s = t^2 + 8t - 5$ і $s = 3t^2 - 5t + 1$. Визначити, в який момент часу їх швидкості будуть рівними.

4. Обчислити границі функцій:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{5x} - \cos 5x};$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-5x}).$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = 6x^2 - 2x^3.$$

$$y = \frac{7x}{\ln x}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

$$y = \frac{x^3}{x + 12}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{9x^2 - 2x - 7}{x^2 - 1}.$$

$$y = 6 \ln \frac{x}{x - 5} - 3.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 9x^2 + 18x.$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = x \cdot \ln x \text{ на інтервалі } y = x + \ln x \text{ на інтервалі } [3; 5].$$

$$\left[\frac{1}{10}; 1 \right].$$

Варіант 9.

Варіант 10.

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(1 + x)$ в точці з абсцисою

$$x_0 = 0.$$

$$x_0 = 4.$$

2. Записати рівняння нормалей до кривої $y = x^2 + 2x - 1$ в точках перетину її з кривою

$$y = -2x^2.$$

$$y = -x^2.$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 - t$. Визначити швидкість та прискорення матеріальної точки через

$$t = 5 \text{ с}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

після початку руху.

4. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3};$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln x).$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

$$y = \frac{\ln x + 4}{x}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5.$$

$$y = x + \arctg x.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{x^2 + x + 3}{3x - 1}.$$

$$y = xe^{-x^2}.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

$$y = \frac{e^x}{x}.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 3 \text{ на інтервалі } [-1; 1].$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ на інтервалі } [0; 1].$$

Варіант 11.

Варіант 12.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{x^2 - 5}{2x^2 + 1}$ в точці з абсцисою

$$x_0 = 1.$$

$$x_0 = 3.$$

2. З'ясувати кут нахилу дотичної до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^4$ в точці

$$M \left(1; \frac{1}{4} \right).$$

$$M(0; 1).$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = 9t - 2t^3$. Визначити швидкість руху та прискорення матеріальної точки через $t = 5$ с. $t = 7$ с.

4. Обчислити границі функцій:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}; & \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right]; \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^3 x). & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x. \end{array}$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:
 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$ $y = \ln(5 - x^2).$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = x^4 - 2x^2 - 3. \quad y = (x-1)e^{x+1}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{x^2 + 9x + 11}{x^2 - 25}. \quad y = 5 \ln \frac{x+3}{x+4} - 2.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 3x^2. \quad y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = \frac{x+1}{e^x} \text{ на інтервалі } y = \frac{x+1}{x} \text{ на інтервалі } [1; 3].$$

$[-1; 1].$

Варіант 13.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \operatorname{tg} 4x$ в точці з абсцисою

$$x_0 = \frac{\pi}{16}. \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{4-5x}$ в точці її перетину з прямою

$$2x + y - 1 = 0. \quad x + y - 2 = 0.$$

3. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно рівномірно, закони руху їх задані рівняннями $s = 3t^2 + 7t + 14$ і $s = 2t^2 + 4t + 24$. Визначити швидкості матеріальних точок у момент зустрічі.

4. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8};$

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right];$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right).$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5.$

$y = x \cdot \ln x.$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$y = 5x^3 - 3x^5.$

$y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2.$

7. Знайти асимптоти функції:

$y = \frac{8x^2 - 7x + 1}{x - 5}.$

$y = \frac{e^{x+4}}{x+5}.$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$y = x^4 - 2x^2 - 3.$

$y = x^2 \cdot e^{-x^2}.$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ на інтервалі $[-1; 1].$ $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ на інтервалі $[0; 1].$

Варіант 15.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = e^{-3x}$ в точці з абсцисою

$x_0 = 0.$

$x_0 = 2.$

2. Записати рівняння горизонтальної дотичної до парабол

$y = 3x^2 + 6x + 7.$

$y = 4x^2 + x + 1.$

3. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3 + 2t^2 - 4t + 3.$
Визначити швидкість руху через

$t = 1$ с.

$t = 3$ с.

4. Обчислити границі функцій:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 6^x}{4^x - 8^x};$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x} \right).$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

$$y = x \cdot \ln^2 x.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8x - 3.$$

$$y = (x - 1)e^{x+1}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{4x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x}.$$

$$y = 4 \ln \frac{x}{x+3} - 1.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = 2x^4 - x^2 + 1.$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = \ln(x^2 - 2x + 4) \text{ на інтервалі } \left[-1; \frac{3}{2}\right].$$

$$y = \ln(x^2 - 2x) \text{ на інтервалі } [4; 5].$$

Варіант 17.

Варіант 18.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x + \frac{2}{x}$ в точці з абсцисою

$$x_0 = -2.$$

$$x_0 = 5.$$

2. Записати рівняння дотичних до графіку функції $y = x^3 - 12x + 3$, паралельних прямій

$$4x - y + 5 = 0.$$

$$x - y + 1 = 0.$$

3. Вдovж осі абсцис рухаються прямолінійно дві матеріальні точки, закони руху яких $s = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 13t - 9$ і $s = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 7t + 5$. З'ясувати, в який момент часу їх швидкості дорівнювали.

4. Обчислити границі функцій:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1};$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(8^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \cdot x.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = \frac{5}{3}x^3 - 10x.$$

$$y = \frac{x^3 - x^2}{e^{2x}}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7.$$

$$y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{2x^2 + 9x + 1}{x - 7}.$$

$$y = 2 \ln \frac{x+1}{x-1} - 1.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3 - 3x^2 - 12x.$$

$$y = \frac{1}{x^2} + x^2.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 \text{ на ін-тервалі } [5; 8].$$

$$y = 3x^2 - x + 2 \text{ на інтервалі } [0; 1].$$

Варіант 19.

Варіант 20.

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2$ в точці з абсцисою

$$x_0 = -2.$$

$$x_0 = 3.$$

2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x+2}{x-2}$, яка паралельна прямій, що проходить через точки

$$A(1; -7) \text{ і } B(-2; 5).$$

$$A(1; 2) \text{ і } B(3; 1).$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 - 8t^3 + 6t^2 - t + 9$. Визначити швидкість та прискорення руху через

$$t = 4 \text{ с.}$$

$$t = 10 \text{ с.}$$

4. Обчислити границі функцій:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 10x};$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}.$$

6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість та точки перегину:

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3.$$

$$y = \ln \frac{x}{x-3}.$$

7. Знайти асимптоти функції:

$$y = \frac{5x^2 - 6x - 11}{3x^2 + 9x}.$$

$$y = \frac{e^{x+4}}{x-2}.$$

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = 4x^5 - 5x^4.$$

$$y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^2.$$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$y = 2x - 3 \ln x \text{ на інтервалі } [1; e].$$

$$y = x^2 + 4x - 1 \text{ на інтервалі } [1; 3].$$

Приклади розв'язання типових завдань

1. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{2x+3}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. За формулою (10.2), рівняння нормалі має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} (x - x_0).$$

Обчислимо значення y_0 – ординати точки дотику. Знайдемо похідну функції, обчислимо її значення в точці дотику:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 - 3} = -5;$$

$$y' = \frac{2(2x-3) - 2(2x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{4x-6-4x-6}{(2x-3)^2} = -\frac{12}{(2x-3)^2};$$

$$y'(x_0) = -\frac{12}{(2 \cdot 1 - 3)^2} = -12.$$

Підставимо у формулу (10.2):

$$y + 5 = -\frac{1}{-12}(x - 1);$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} - 5;$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{61}{12} \text{ — рівняння нормалі.}$$

2. З'ясувати, який кут утворює з віссю абсцис дотична до графіку функції $y = x^2 - 5x + 8$, яка проведена в точці з абсцисою $x_0 = 3$. Записати рівняння дотичної.

Розв'язання. За визначенням кутовий коефіцієнт дотичної (кут її нахилу до осі абсцис) дорівнює значенню похідної в точці дотику:

$$k_{\partial} = y'(x_0).$$

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x - 5,$$

обчислимо її значення у точці дотику:

$$y'(x_0) = 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

За визначенням кутового коефіцієнта

$$k_{\partial} = 1 = \operatorname{tg} \varphi,$$

отже, дотична утворює з віссю абсцис кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Залишемо рівняння дотичної (10.1):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Обчислимо $y_0 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 2$. Підставимо у формулу:

$$y - 2 = 1(x - 3).$$

Остаточно маємо:

$$y = x - 1.$$

3. Закон руху матеріальної точки $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 9$.
Визначити швидкість та прискорення руху через $t = 2$ с.

Розв'язання. Швидкість та прискорення руху дорівнюють першій та другій похідним відповідно від закону руху матеріальної точки:

$$v = s'(t); \quad a = v'(t) = s''(t).$$

Знайдемо похідні та обчислимо їх значення через $t = 2$ с:

$$\begin{aligned} v = s' &= 3t^2 - 4t + 4; & v(2) &= 12 - 8 + 4 = 8 \text{ м/с}; \\ a = v' = s'' &= 6t - 4; & a(2) &= 12 - 4 = 8 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

4. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2}.$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Саме з такими невизначеностями можна впоратися за допомогою правила Лопіталя. Згідно (10.3) границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 5x}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 2e^{2x} - 5}{2x} = \left| \frac{0}{0} \right| \Rightarrow$$

підставимо граничне значення аргументу, знову отримуємо невизначеність типу $\left| \frac{0}{0} \right|$. Згадаємо, що правило Лопіталя можна використовувати стільки разів, скільки в цьому є необхідність. Замінімо границю відношення функцій границею відношення їх похідних ще раз:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{3x} + 4e^{2x}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Відповідь: Границя функції дорівнює $\frac{13}{2}$.

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right].$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції отримаємо невизначеність типу $|\infty - \infty|$. Перед тим, як застосувати правило Лопітала, ми повинні виконати перетворення, а саме: привести дробі до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right] &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2) \cos^2 x}}{\frac{(1+x^2) \operatorname{arctg} x + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{(1+x^2) \cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 - x^2}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \sin 2x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x - 2x}{2x \operatorname{arctg} x + \cos 2x} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Як бачимо, правилом Лопітала ми були вимушені скористатися двічі, попередньо спростивши функцію.

Відповідь. Границя функції дорівнює 0.

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|0 \cdot \infty|$. Функція представлена у вигляді добутку. Для того, щоб скористатися правилом Лопітала ми повинні записати функцію у вигляді відношення функцій. Для цього замінімо множення на $\operatorname{ctg} x$ діленням на обернену функцію, тобто на $\frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (8x \cdot \operatorname{ctg} x) = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\operatorname{tg} x} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{8}{1} = 8.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює 8.

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}.$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу функції, ми отримаємо невизначеність типу $|\infty^0|$. Функція має вигляд степенево-показникової. Для того, щоб скористатися правилом Лопітала, прологарифмуємо границю. Задану границю позначимо як A , знайдемо її логарифм

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = |\infty^0| = A;$$

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln (1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + xe^x)}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \end{aligned}$$

Тепер використання правила Лопітала можливо. Обчислимо границю:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + xe^x}{(1 + xe^x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x)}{1 + xe^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x) + e^x}{e^x + xe^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + x + 1)}{e^x(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Ми знайшли $\ln A$, двічі звернувшись до правила Лопітала та виконав необхідні перетворення; щоб повернутися до заданої границі, згадаємо основну властивість показникової функції:

$$A = e^{\ln A} = e^1 = e.$$

Відповідь. Границя функції дорівнює e .

5. Дослідити функції на монотонність та екстремуми:

а) $y = 2x^4 - 4x^2 - 5.$

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою у п. 4 і 5:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'

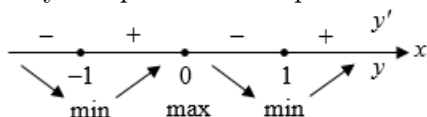
$$y' = 8x^3 - 8x;$$

- знайдемо критичні точки

$$y' = 0: \quad 8x^3 - 8x = 0; \quad x(x-1)(x+1) = 0;$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів:



Отже, в точках з абсцисами $x = \pm 1$ – мінімуми, в точці з абсцисою $x = 0$ – максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(-1) = 2(-1)^4 - 4(-1)^2 - 5 = -7;$$

$$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 - 5 = -7;$$

$$y(0) = 0 - 0 - 5 = -5.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$; в точках $M_1(-1; -7)$ та $M_3(1; -7)$ – мінімуми функції, в точці $M_2(0; -5)$ – максимум.

$$\text{б) } y = \frac{x^2 + 7}{x + 3}.$$

Розв'язання.

- ОДЗ: $x + 3 \neq 0$; $x \neq -3$;

- знайдемо y' :

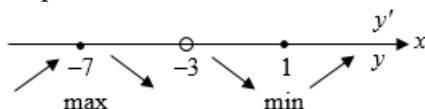
$$y' = \frac{2x(x+3) - (x^2+7) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2 - 7}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 7}{(x+3)^2};$$

- знайдемо критичні точки:

$$y' = 0 : \quad x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -7; \quad x_2 = 1;$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точку, в якій функція не існує ($x = -3$), дослідимо знак y' у кожному з отриманих інтервалів



Отже, в точці з абсцисою $x = 1$ – мінімум, в точці з абсцисою $x = -7$ – максимум.

Обчислимо екстремальні значення функції.

$$y(1) = \frac{1+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$y(-7) = \frac{49+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14.$$

Відповідь. Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$, спадає – $x \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$; в точці $M_1(1; 2)$ – мінімум функції, в точці $M_2(-7; -14)$ – максимум.

6. Дослідити функцію на опуклість та точки перегину:

а) $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x + 15$.

Розв'язання. Дослідження проведемо за схемою, представленою у п. 7:

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 6;$$

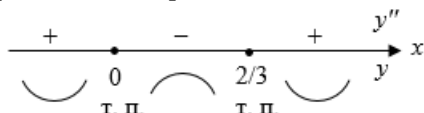
$$y'' = 36x^2 - 24x;$$

- знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0 : \quad 36x^2 - 24x = 0; \quad 12x(3x - 2) = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує, та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо ординати точок перегину:

$$y(0) = 15;$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right) + 15 = \frac{281}{27}.$$

Відповідь. Функція опукла вгору на інтервалі $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$; опукла вниз при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; $P_1(0; 15)$, $P_2\left(\frac{2}{3}; \frac{281}{27}\right)$ – точки перегину функції.

б) $y = (x + 1) \operatorname{arctg} x.$

Розв'язання.

- ОДЗ: $x \in R$;

- знайдемо y'' :

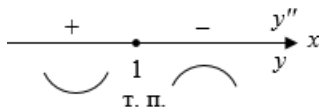
$$y' = \operatorname{arctg} x + (x + 1) \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{x + 1}{1 + x^2};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1 + x^2 - (x + 1) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2} = \\ &= \frac{2 - 2x}{(1 + x^2)^2}; \end{aligned}$$

- знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0 : \quad \frac{2 - 2x}{(1 + x^2)^2} = 0; \quad 2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

- нанесемо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує, та дослідимо знак другої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо ординату точки перегину:

$$y(1) = (1 + 1) \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. Функція опукла вгору на інтервалі $x \in (1; +\infty)$, опукла вниз при $x \in (-\infty; 1)$, в точці $P\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ – перегин функції.

7. Знайти асимптоти функції:

$$a) y = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}.$$

Розв'язання. Визначення та рівняння асимптот функції див. п. 8:

- ОДЗ: $x + 5 \neq 0$; $x \neq -5$.

- перевіримо, чи є пряма $x = -5$ – вертикальною асимптотою:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} = \frac{75 + 5 - 2}{-5 + 5} = \frac{78}{0} = \infty,$$

отже, пряма $x = -5$ є вертикальною асимптотою;

- похилу асимптоту шукаємо у вигляді:

$$y = kx + b.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 5x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x-1}{2x+5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{2} = 3;$$

відрізок, який відсікає асимптота на осі ординат:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx);$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{x + 5} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2 - 3x^2 - 15x}{x + 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16x + 2}{x + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-16}{1} = -16. \end{aligned}$$

Отже, рівняння похилої асимптоти має вигляд:

$$y = 3x - 16.$$

Відповідь. Функція має вертикальну асимптоту $x = -5$ та похилу асимптоту $y = 3x - 16$.

$$\text{б) } y = (x - 7)e^{x+3}.$$

Розв'язання.

- ОДЗ: $x \in R$;
- вертикальної асимптоти немає, оскільки $x \in R$, тобто функція неперервна;
- похилу асимптоту шукаємо у вигляді:

$$y = kx + b.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт асимптоти. Зауважимо, що обчислювати границі будемо окремо при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$ (поведінка функції суттєво відрізняється):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} = \left| \frac{\infty}{-\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+3} + (x-7)e^{x+3}}{1} = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x \rightarrow +\infty$ похилої асимптоти не існує,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-7)e^{x+3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-7)}{xe^{-(x+3)}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-(x+3)} - xe^{-(x+3)}} = \frac{1}{\infty} = 0.\end{aligned}$$

Отже, при $x \rightarrow -\infty$ асимптота існує, але при $k = 0$ похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Відповідь. Функція має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

8. Провести повне дослідження функції та побудувати графік: $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Загальна схема дослідження функції приведена в п. 9. Проведемо дослідження за схемою:

- ОДЗ: $x^2 - 1 \neq 0$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$;

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

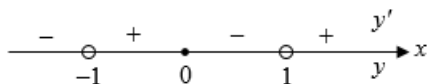
- Знайдемо точки перетину з осями координат:

$$Ox: \quad y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 - 1} = 0; \quad x = 0;$$

$$Oy: \quad x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0}{0^2 - 1} = 0;$$

функція перетинається з осями координат в точці $O(0; 0)$.

- Знайдемо інтервали знакосталості. Нанесемо на числову вісь точки перетину з віссю абсцис та точки, в яких функція не існує, дослідимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів:



Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, від'ємна - $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

- Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x}{x^2 - 1} = -y(x);$$

функція непарна, а з цього випливає, що її графік симетричний відносно початку координат.

- Періодичність: функція не періодична.

- Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми.

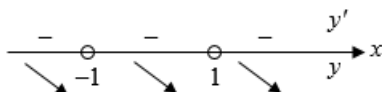
Ми детально розглянули цю схему у завданні 5.

$$y' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2};$$

$$y' = 0 : \quad -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} = 0; \quad 2x^2 + 2 = 0; \quad 2x^2 \neq -2,$$

критичних точок нема, тому й екстремумів у функції нема.

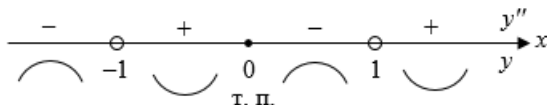
Дослідимо на монотонність:



Функція спадає на всій області визначеності. Екстремумів нема.

- Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину. Ми детально розглянули цю схему у завданні 6.

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{4x(x^2 - 1)^2 - (2x^2 + 2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= -\frac{4x(x^2 - 1)[x^2 - 1 - 2x^2 - 2]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}; \\ y'' &= 0; \quad \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0; \quad x = 0; \end{aligned}$$



Знайдемо асимптоти функції (див. завд. 7):

- вертикальні асимптоти:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{(-1)^2 - 1} = -\frac{2}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{1^2 - 1} = \frac{2}{0} = +\infty;$$

прямі $x = -1$ та $x = 1$ – вертикальні асимптоти;

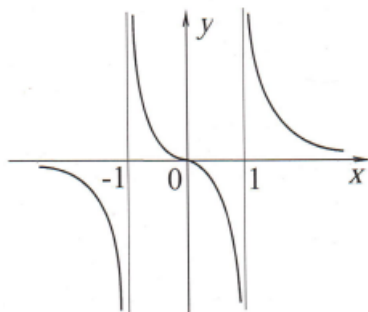
- похила асимптота $y = kx + b$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^3 - x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x^2 - 2x} = \frac{2}{\infty} = 0; \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

похила асимптота перетворюється в горизонтальну $y = 0$.

Об'єднаємо отримані результати дослідження для побудови графіка функції:



9. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2x}{1+x^4}$ на відрізку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання. Схема дослідження функції на найбільше та найменше значення функції в замкненому інтервалі приведена в п. 6. Проведемо дослідження за схемою.

ОДЗ: $x \in R$.

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

Критичні точки функції:

$$y' = 0 : \quad \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = 0; \quad 2-6x^4 = 0; \quad x^4 = \frac{1}{3}; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}};$$

точка $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ не належить інтервалу $[-2; \frac{1}{2}]$.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ та кінцях інтервалу:

$$y(-2) = \frac{2 \cdot (-2)}{1 + (-2)^4} = \frac{-4}{1+16} = -\frac{4}{17};$$

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) &= \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{3}{4} = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27}; \end{aligned}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17}.$$

З них найбільше – $y_{\text{найб.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17}$, а найменше –
 $y_{\text{найм.}} = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{27}.$

Тема 11. Невизначений інтеграл

Первісна функції і невизначений інтеграл

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ або диференціала $df = f'(x)dx$ функції $f(x)$. В інтегральному численні розв'язується обернена задача: За заданою функцією $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, що $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Це основна задача інтегрального числення.

Інтегральне числення має багаточисельні застосування в геометрії, механіці, фізиці, техніці, економіці. Воно дає загальний метод обчислення площ, об'ємів, центрів мас тощо.

Означення 11.1. Функція $F(x)$, $x \in X \subset R$, називається первісною для функції $f(x)$ на множині X , якщо вона диференційована для $\forall x \in X$ і $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Чи будь-яка функція має первісну? Виявляється, що ні. Справедлива наступна теорема.

Теорема 11.1. Будь-яка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну $F(x)$.

Але навіть за таких обмежень задача знаходження $F(x)$ за відомою $f(x)$ розв'язується неоднозначно і не завжди просто.

Теорема 11.2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві різні первісні функції $f(x)$ на множині X , то вони відрізняються тільки сталим доданком, тобто $F_2(x) = F_1(x) + C$, де $C = \forall \text{const}$.

Наслідок. Якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на множині X , то всі первісні цієї функції визначаються виразом $F(x) + C$, де $C = \forall \text{const}$.

Операція знаходження $F(x)$ функції $f(x)$ називається інтегруванням.

Означення 11.2. Сукупність $F(x) + C$ всіх первісних функції $f(x)$ на множині X називається невизначеним ін-

тегралом і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

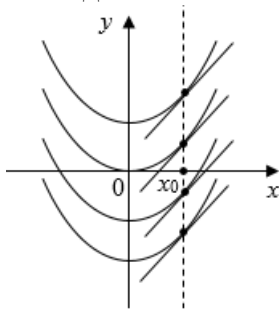
Тут: $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – довільна стала.

Термін "інтеграл" (від лат. *integralis* – цілісний) був введений Лейбніцем. Слово "невизначений" підкреслює, що в загальний вираз первісної входить сталий доданок, який можна вибирати довільно.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл являє собою однопараметричну сім'ю кривих $y = F(x) + C$ (C – параметр), які мають таку властивість: всі дотичні до кривих в точках з абсцисою $x = x_0$ паралельні між собою:

$$(F(x) + C)'|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

Криві сім'ї $(F(x) + C)$ називають *інтегральними кривими*. Вони не перетинаються і не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить тільки одна інтегральна крива. Всі інтегральні криві одержуються одна із одної паралельним перенесенням вздовж осі OY :



Основні властивості невизначеного інтеграла

Розглянемо властивості невизначеного інтеграла, які випливають із його означення.

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції; диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

3) Сталий множник $a(a \neq 0)$ можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)) dx = \int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx.$$

5) Інваріантність формул інтегрування: Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційованою функцією цієї змінної:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

де u – диференційована функція.

Розглянемо інтеграли від елементарних функцій, які надалі називатимемо *табличними*:

$$(1) \int 0dx = C; \quad \int 1dx = x + C;$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, (x \neq 0);$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(7) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C (|x| < |a|), -a < x < a, a > 0; \text{ або } -\arccos \frac{x}{a} + C;$$

$$(9) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0; \text{ або } -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0 \text{ ("високий логарифм")};$$

$$(11) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C (a \neq 0, |x| > |a|) \text{ ("довгий логарифм")};$$

$$(14) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C;$$

$$(15) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Приклади:

$$1) \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C;$$

$$\begin{aligned}
2) \int \sqrt[3]{x} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C; \\
3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + C; \\
4) \int \frac{dx}{3^x} &= \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C; \\
5) \int 2^{3x-1} dx &= \int 2^{3x} \cdot 2^{-1} dx = \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x}{\ln 8} + C; \\
6) \int \frac{dx}{9x^2 - 1} &= \int \frac{dx}{9\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)} = \int \frac{dx}{9\left(x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)} = \\
\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| + C; \\
7) \int \frac{dx}{4x^2 + 25} &= \int \frac{dx}{4\left(x^2 + \frac{25}{4}\right)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \\
\frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + C; \\
8) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| + C; \\
9) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\
&= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.
\end{aligned}$$

Основні методи інтегрування

1. Метод заміни змінної

Одним з основних методів інтегрування є *метод заміни змінної* (або *метод підстановки*), який описується наступною формулою:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (11.1)$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, диференційовна на проміжку, який

розглядається. Це формула заміни змінної в невизначеному інтегралі.

Доведення. Продиференціюємо по t обидві частини рівності (11.1) (згідно з властивістю 1) невизначеного інтеграла):

$$\left(\int f(x) dx \right)'_t = f(x) \cdot x'_t = f(x) \cdot \varphi'(t),$$

$$\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t = f(x) \cdot x'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Оскільки $x = \varphi(t)$, то ці похідні рівні, тому, згідно з наслідком із теореми Лагранжа, ліва і права частина в (11.1) відрізняються на деяку сталу.

Формула (11.1) показує, що при переході до нової змінної достатньо виконати заміну змінної в підінтегральному виразі, тому що ці вирази в обох частинах рівності (11.1) співпадають.

Вдала заміна змінної дозволяє спростити вихідний інтеграл, а в простіших випадках – звести його до табличного.

Слід відмітити, що нову змінну можна не виписувати явно (у таких випадках говорять про *перетворення функції під знаком диференціала* або про *введення сталих та змінних під знак диференціала*).

Приклади:

1) $I = \int \frac{dx}{1-x}.$

Заміна $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow dx = (1 - t)'dt = -dt;$

$$I = \int \frac{-dt}{t} = - \int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |1 - x| + C.$$

2) $I = \int \cos(3x + 2) dx.$

Заміна $3x + 2 = t \Rightarrow 3x = t - 2 \Rightarrow x = \frac{t-2}{3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt;$

$$I = \int \cos t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C.$$

$$3) I = \int \frac{dx}{4x+3}.$$

$$\text{Заміна } t = 4x + 3 \Rightarrow 4x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t-3}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt;$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \frac{1}{4} \ln |t| + C = \frac{1}{4} \ln |4x+3| + C.$$

$$4) I = \int \cos 4x dx.$$

$$\text{Заміна } 4x = t \Rightarrow x = \frac{t}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt;$$

$$I = \int \cos t \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

В цих прикладах була використана лінійна підстановка $t = kx + b$, де k і b — деякі числа, $k \neq 0$. В загальному випадку справедлива наступна теорема.

Теорема 11.3. *Нехай $F(x)$ — деяка первісна для $f(x)$. Тоді*

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C, \quad (11.2)$$

де k і b — деякі числа, $k \neq 0$.

Отже, можна записати, зокрема, наступні формули:

а)

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, k \neq 0. \quad (11.3)$$

б)

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln |kx+b| + C, \quad k \neq 0. \quad (11.4)$$

в)
$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C.$$

В деяких випадках можна виконати нелінійну підстановку, наприклад:

$$1) \int x e^{-x^2} dx = - \int e^{-x^2} (-x dx) = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

(Або: заміна $t = -x^2 \Rightarrow dt = -2x dx$).

$$2) \int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x} = \int \sqrt{\ln x} d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2 \ln^{\frac{3}{2}} x}{3} + C.$$

(Або: $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$).

$$3) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

(Або: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$).

$$4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C.$$

(Або: $t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$).

2. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – диференційовні функції. За властивістю диференціала

$$d(uv) = v du + u dv$$

або

$$u dv = d(uv) - v du. \quad (11.5)$$

Інтегруємо рівність (11.5):

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \Rightarrow$$

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (11.6)$$

Формула (11.6) називається *формулою інтегрування частинами* для невизначеного інтеграла. При її застосуванні

фіксується розбиття підінтегрального виразу шуканого інтеграла на два множника: u та dv . При переході до правої частини (11.6) перший з них диференціюється (при знаходженні диференціала: $du = u'dx$), а другий – інтегрується: $v = \int dv + C$. Можливості застосування формули (11.6) пов'язані з тим, що диференціювання може істотно спростити один із множників (за умови, що інтегрування не дуже ускладнить другий).

Приклади:

$$1) \int x e^{-2x} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ e^{-2x} dx = v dx \Rightarrow v = \int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \\ = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C. \end{array} \right]$$

$$2) \int (2 + 3x) e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} \cdot (2 + 3x) - 3 \int e^{\frac{x}{3}} \cdot 3 dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 2 + 3x \\ du = 3dx \\ dv = e^{\frac{x}{3}} dx \\ v = 3e^{\frac{x}{3}} \end{array} \right]$$

$$= 3e^{\frac{x}{3}} \cdot (2 + 3x) - 27e^{\frac{x}{3}} + C.$$

$$3) \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Іноді формулу інтегрування частинами доводиться використовувати не один раз:

$$\begin{aligned}
 4) \quad \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \\
 \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] &\quad \left[\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right] \\
 &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\
 &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.
 \end{aligned}$$

Аналізуючи наведені приклади, можна вказати деякі типи інтегралів, для знаходження яких використовується формула інтегрування частинами:

I. Інтеграли вигляду $\int P_n(x) \cdot e^{ax} dx$, $\int P_n(x) \sin m x dx$, $\int P_n(x) \cos m x dx$;

II. Інтеграли вигляду $\int P_k(x) \ln^n x dx$, $\int P_k(x) \arcsin x dx$, $\int P_k(x) \arccos x dx$, $\int P_k(x) \arctg x dx$, $\int P_k(x) \operatorname{arccctg} x dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня відносно x ; a , m , k – дійсні числа, $k \neq 1$, n – ціле додатне число.

III. Інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x} \cos m x dx$, $\int e^{\alpha x} \sin m x dx$ – інтегруються частинами двічі, причому значення вихідного інтегралу знаходимо (після двократного застосування методу) із алгебраїчного рівняння.

Для знаходження інтегралів з групи I формулу інтегрування частинами доведеться застосувати n разів (при першому застосуванні покладають $u = P_n(x)$, інші множники в підінтегральному виразі – це dv) доти, доки степінь n змінної

x (ступінь многочлена) не стане рівною 0, а сам інтеграл – табличним.

Для знаходження інтегралів з групи II покладають $dv = P_k(x)dx$, тоді інші множники в підінтегральному виразі визначають вираз для u . При знаходженні $\int P_k(x) \ln^n x dx$ формулу інтегрування частинами доведеться застосувати n разів.

На практиці метод інтегрування частинами часто комбінують з іншими методами інтегрування.

Приклади:

$$1) \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x dx \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin 3x dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I + \frac{4}{9} I = \frac{13}{9} I = \frac{1}{3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right),$$

$$I = \frac{9}{13 \cdot 3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right) + C.$$

$$2) \int x^2 \arcsin 2x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \underbrace{\frac{2}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-4x^2}}}_{I_1} = \textcircled{*}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \arcsin 2x \\ dv = x^2 dx \\ dv = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\ v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{x^2 \cdot x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{4} \int \frac{4x^2 d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{32} \int \frac{(1-4x^2) + 1}{\sqrt{1-4x^2}} d(1-4x^2) = \\ &= -\frac{1}{32} \left(\int \sqrt{1-4x^2} d(1-4x^2) + \int (1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-4x^2) \right) = \\ &= -\frac{1}{32} \left(\frac{2(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{1-4x^2} \right) = -\frac{1}{48}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}} - \\ &\quad -\frac{1}{16}\sqrt{1-4x^2}. \end{aligned}$$

$$*) = \frac{x^3}{3} \arcsin 2x + \frac{1}{72}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

$$3) I = \int e^{3x} \cos x dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = e^{3x} \\ dv = \cos x dx \\ dv = 3e^{3x} dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} u = e^{3x} \\ dv = \sin x dx \\ dv = 3e^{3x} dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &= e^{3x} \sin x - 3 \left(-e^{3x} \cos x + 3 \int e^{3x} \cos x dx \right) = \\ &= e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x - 9 \underbrace{\int e^{3x} \cos x dx}_I. \end{aligned}$$

Отже, маємо алгебраїчне рівняння відносно шуканого інтеграла I :

$$I = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x - 9I.$$

Звідси знаходимо, що $I = \frac{1}{10} (e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x) + C$.

3. Інтегрування простіших раціональних дробів (дробово-раціональних виразів)

Нагадаємо, що *многочленом n -го степеня* називається вираз вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

де $a_0, \dots, a_n$ — дійсні числа, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$. *Раціональним дробом* називається відношення двох многочленів, наприклад:

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 1}, \quad \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Припустимо, що степінь знаменника дробу більше 0 (якщо степінь знаменника дорівнює 0, то це просто число, і дріб фактично є многочленом, який інтегрується методом розкладу).

Зауважимо, що достатньо розглянути лише правильні дроби, тобто такі, у яких степінь чисельника менша за степінь знаменника. В іншому разі спочатку потрібно поділити чисельник на знаменник "кутом", тобто представити неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного дробу. Наприклад:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{x^3 - 6x + 4}{x - 2} = x^2 + 2x - 2. \\ \begin{array}{r} x^3 - 6x + 4 \quad | \quad x - 2 \\ x^3 - 2x^2 \quad | \quad x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 - 6x \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -2x + 4 \\ -2x + 4 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \frac{x^3 - 2x}{x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{1}{x + 1}. \\
 \frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ x^2 - x - 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 \phantom{\frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2}} -x^2 - 2x \\
 \hline
 \phantom{\frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2}} -x^2 - x \\
 \hline
 \phantom{\frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2}} -x \\
 \phantom{\frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2}} -x - 1 \\
 \hline
 \phantom{\frac{x^3 - 2x}{x^3 + x^2}} 1
 \end{array}$$

Нехай потрібно обчислити інтеграл вигляду

$$\int \frac{ex + f}{ax^2 + bx + c} dx, \quad (11.7)$$

де a, b, c, e, f — дійсні числа, $a \neq 0$. Розглянемо спочатку один важливий випадок: інтеграл вигляду

$$\int \frac{ex + f}{ax^2 + c} dx \quad (11.8)$$

і вкажемо, як загальний випадок звести до даного. Якщо $c = 0$, то інтеграл (11.8) легко зводиться до табличних. Нехай $c \neq 0$. Тоді для знаходження інтеграла (11.8) достатньо знайти інтеграли

$$\int \frac{dx}{ax^2 + c} \quad (11.9)$$

і

$$\int \frac{xdx}{ax^2 + c}. \quad (11.10)$$

Інтеграл (11.9) зводиться до табличного №9 (якщо $ac > 0$), або до №10 (при $ac < 0$).

Для знаходження інтеграла (11.10) використаємо заміну змінної $t = ax^2 + c$. Тоді:

$$\int \frac{d(ax^2 + c)}{ax^2 + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + c| + C, \quad a \neq 0.$$

Відмітимо тепер, що інтеграл (11.7) можна звести до вигляду (11.8), якщо спочатку виділити повний квадрат в знаменнику підінтегральної функції, а потім використати відповідну лінійну заміну змінної.

Розглянутий спосіб інтегрування дробів, степінь знаменника яких дорівнює 2, має істотний недолік: він не узагальнюється на випадки, коли степінь знаменника більше двох. Тому розглянемо інший можливий підхід: якщо підінтегральна функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ – правильний дріб, знаменник якого $g(x)$ – многочлен степеня n , який має n різних дійсних коренів $x_1, x_2, \dots, x_n$, то підінтегральна функція може бути представлена у вигляді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}, \quad (11.11)$$

де $A_1, \dots, A_n$ – деякі числа. Для того, щоб їх знайти, потрібно звести праву частину в (11.11) до спільного знаменника і потім прирівняти многочлени $f(x)$ і той, що одержимо в чисельнику в правій частині (многочлени вважаються рівними, якщо рівні їх коефіцієнти при відповідних степенях).

Зауважимо, що якщо знаменник $g(x)$ має кратні корені або комплексні корені, то розклад підінтегрального виразу має інший вигляд:

1) Якщо корені знаменника в $\frac{f(x)}{g(x)}$ дійсні й деякі з них кратні, тобто, якщо $g(x) = (x - a)(x - b)^k$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x - b)^k};$$

2) Якщо корені знаменника дійсні й, крім того, знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто, якщо

$$g(x) = (x - a)(x - b)^k(x^2 + px + q),$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q};$$

3) У випадку, коли $g(x) = (x-a)(x^2+px+q)^k$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{D_1x+E_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{D_kx+E_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Розглянутий метод інтегрування називається *методом невизначених коефіцієнтів*.

Приклади:

$$1) I = \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x^2 + 2x - 8)} dx = \circledast$$

Знайдемо корені: $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{9} = -1 + 3 = 2, x_2 = -4$. Отже, $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.

$$\begin{aligned} \circledast &= \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)(x+4)} dx = \\ &= \int \frac{A_1}{x} dx + \int \frac{A_2}{x-2} dx + \int \frac{A_3}{x+4} dx = \circledast\circledast \\ &\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)(x+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+4} = \\ &= \frac{A_1(x-2)(x+4) + A_1 \cdot x(x+4) + A_3(x-2)x}{x(x-2)(x+4)} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = \\ &= A_1x^2 + A_1 \cdot 4x - A_1 \cdot 2x - A_1 \cdot 8 + A_2x^2 + A_2x \cdot 4 + A_3x^2 - A_3 \cdot 2x. \end{aligned}$$

Для знаходження A_1, A_2, A_3 маємо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A_1 + A_2 + A_3 = 1, \\ x^1 & 4A_1 - 2A_1 + 4A_2 - 2A_3 = -2, \\ x^0 & -8A_1 = 2, \end{array}$$

з якої знаходимо: $A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{6}, A_3 = \frac{13}{12}$.

$$\circledast\circledast = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{13}{12} \int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln |x| + \frac{1}{6} \ln |x-2| + \frac{13}{12} \ln |x+4| + C.$$

$$\begin{aligned} 2) \ I &= \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+2)} dx = \int \frac{A}{x+1} dx + \\ &+ \int \frac{Bx+C}{x^2-x+2} dx = \circledast \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2} &= \frac{Ax^2 - Ax + 2A + Bx^2 + Cx + Bx + C}{(x+1)(x^2-x+2)} = \\ &= \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+2)} \Rightarrow (A+B)x^2 + x(C+B-A) + 2A+C = x-1. \end{aligned}$$

Складаємо систему для A, B, C :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & C+B-A=1, \\ x^0 & 2A+C=-1, \end{array}$$

$$A = -B, \quad \left\{ \begin{array}{l} C - 2A = 1 \\ C + 2A = -1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C = 0 \Rightarrow C = 0; \quad 2A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

$$\circledast = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2-x+2} dx = -\frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{1}{2} I_1 = \circledast \circledast$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{x^2-x+2} dx = \int \frac{(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 2} dx \equiv \\ &\equiv \int \frac{t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{7}{4}} dt = \int \frac{t dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{7}{4}\right)}{t^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + \frac{7}{4}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

Остаточно:

$$I = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2 - x + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

(При обчисленні інтеграла в I_1 була використана формула: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.)

Зауваження. При знаходженні невизначених коефіцієнтів замість того, щоб порівнювати коефіцієнти при однакових степенях x , можна надати змінній x декілька частинних значень (стільки, скільки є невизначених коефіцієнтів) і отримати таким чином систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів. Особливо зручно застосовувати цей метод у випадку, коли корені знаменника правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ прості та дійсні. Тоді зручно послідовно покласти x рівним кожному із коренів знаменника.

Приклад. Розкласти раціональний дріб

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$$

на прості дроби.

Розв'язання.

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 16x - 8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Надамо послідовно значення x : $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ (це корені знаменника), тоді:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -8 = -4A, \\ x^1 & -24 = 8B, \\ x^0 & 40 = 8C, \end{array} \Rightarrow A = 2, B = -3, C = 5.$$

Отже,

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}.$$

4. Інтегрування деяких типів ірраціональностей

Розглянемо випадки, в яких заміна змінної дозволяє інтеграли від ірраціональних функцій звести до інтегралів від раціональних функцій.

Позначимо через $R(u, v)$ функцію від змінних u, v і деяких сталих, яка побудована із використанням лише 4-х арифметичних дій (додавання, віднімання, множення та ділення).

1⁰. В інтегралах вигляду $\int R(\sqrt[n]{x}, \sqrt[p]{x}, \sqrt[q]{x}, \dots) dx$ робиться заміна $t = \sqrt[k]{x}$, де k – найменше спільне кратне чисел $m, n, p, \dots$: наприклад, для $\sqrt{x}$ та $\sqrt[3]{x}$ заміна $t = \sqrt[6]{x}$, тоді $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.

2⁰. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right) dx$ підстановкою $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, де k – найменше спільне кратне чисел $n, m, \dots$, зводиться до інтеграла від раціональної функції.

3⁰. Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ може бути приведений до інтегралів від раціональної функції однією з підстановок Ейлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{ax}, \quad a > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t = \pm(x-x_2)t,$$

де x_1 і x_2 – різні дійсні корені квадратного тричлена ax^2+bx+c . (Знаки в правих частинах можна вибирати довільно).

4⁰. Інтеграл $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа, $a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$, називається *інтегралом від диференціального бінома* і зводиться до інтегралів від раціональних функцій у випадках:

а) якщо p – ціле, то розкладом на доданки за формулою бінома Ньютона;

б) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле, то підстановкою $a + bx^n = t^r$, де r – знаменник дробу p ;

в) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле, то підстановкою $a + bx^n = x^n t^r$, де r – знаменник дробу p .

Якщо жодна з цих умов не виконується, то інтеграл знайти через елементарні функції не можна.

5. Інтегрування тригонометричних виразів

1) Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ можна звести до інтегралів від раціональних функцій універсальною заміною змінної $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, де $-\pi < x < \pi$.

При цьому використовують наступні формули:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2\arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

2) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то в інтегралі $\int R(\sin x, \cos x) dx$ слід використати підстановку $t = \cos x$.

Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то в інтегралі $\int R(\sin x, \cos x) dx$ використовують підстановку $t = \sin x$.

3) Інтеграли вигляду $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, де α і β – дійсні, за допомогою відомих формул для перетворення добутку тригонометричних функцій в суму зводяться до суми табличних інтегралів.

4) Інтеграли вигляду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ ($m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 0$): Якщо хоча б одне із чисел m або n – непарне, то, ві-

докремивши від непарного степеня один множник та виразивши за допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парну степінь, яка залишилася, через кофункцію, приходимо до табличного інтеграла.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Невизначений інтеграл"

1. Знайти невизначені інтеграли:

Варіант 1.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{2x^3 - 5\sqrt[3]{x^7} + 3x^5}{4x^4} dx.$ | 2. $\int (8x^3 - 6 \cos x + e^x) dx.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{4x - 7}.$ | 4. $\int \sin(5x + 3) dx.$ |
| 5. $\int \sqrt{1 - 6x} dx.$ | 6. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 7x}}{\cos^2 7x} dx.$ |
| 7. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 6x} dx}{1 + 36x^2}.$ | 8. $\int \frac{dx}{\arcsin 2x \sqrt{1 - 4x^2}}.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{9x^2 + 5}.$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}.$ |

Варіант 2.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{x dx}{5x^2 - 1}.$ | 2. $\int \frac{(x - 2) dx}{\sqrt{6x^2 + 4}}.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 3}.$ | 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}.$ |
| 5. $\int \frac{(x - 4) dx}{3x^2 - 5x + 7}.$ | 6. $\int \frac{(3x + 2) dx}{\sqrt{8 + x - 7x^2}}.$ |
| 7. $\int \frac{2x^5 - 6x^3 + 4x^2 + 7}{x - 2} dx.$ | 8. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx.$ |
| 9. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx.$ | 10. $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx.$ |

Варіант 3.

1. $\int x^2 \cos 3x dx.$
2. $\int (3x - 1)e^{5x} dx.$
3. $\int \ln(x - 4) dx.$
4. $\int x \operatorname{arctg} 4x dx.$
5. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$
5. $\int e^{\frac{x}{2}} \sin 5x dx.$
7. $\int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x + 8}.$
8. $\int \frac{dx}{7 - 2 \cos^2 x - 5 \sin^2 x}.$
9. $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx.$
10. $\int \sin^5 3x \cos^6 3x dx.$

Варіант 4.

1. $\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx.$
2. $\int \sin 6x \cos 9x dx.$
3. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$
4. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1} + 1} dx.$
5. $\int x \sqrt{4-x^2} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx.$
7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+9}}.$
8. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2-3x+5}}.$
9. $\int x \ln x dx.$
10. $\int (x+3)e^{4x} dx.$

Варіант 5.

1. $\int \frac{7x^2 - 2\sqrt[5]{x^4} - 9x^6}{3x^5} dx.$
2. $\int (6x^7 - 3 \sin x + 5^x) dx.$
3. $\int \frac{dx}{3x+5}.$
4. $\int \cos(2x-7) dx.$
5. $\int \sqrt[6]{(2+5x)^{11}} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3(6x-1)}}{(6x-1)} dx.$
7. $\int \frac{e^{\arccos 4x} dx}{\sqrt{1-16x^2}}.$
8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 5x (1+25x^2)}.$
9. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+25}}.$

Варіант 6.

- $\int \frac{(3x+7)dx}{7x^2+4}.$
- $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-5x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{x^2+8x+12}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-8x^2}}.$
- $\int \frac{(2x-1)dx}{6x^2-2x-9}.$
- $\int \frac{(3x+8)dx}{\sqrt{4x^2+x-5}}.$
- $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2-x}{x+3}dx.$
- $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+5x+6)}.$
- $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$
- $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$

Варіант 7.

- $\int x \sin(5x+2)dx.$
- $\int (x^2+1)e^{4x}dx.$
- $\int x \cdot \ln(3x-1)dx.$
- $\int \arcsin 8xdx.$
- $\int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}dx.$
- $\int e^{4x} \cos 2xdx.$
- $\int \frac{dx}{5 \cos x - 2 \sin x - 1}.$
- $\int \frac{dx}{6 + \cos^2 x - 4 \sin^2 x}.$
- $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(2 + \sin x)^2}}dx.$
- $\int \sin^4 2x \cos^7 2xdx.$

Варіант 8.

- $\int \sin^6 5xdx.$
- $\int \sin 5x \sin 3xdx.$
- $\int \frac{3dx}{1+\sqrt{x}-2}.$
- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}.$
- $\int x^2 \sqrt{9-x^2}dx.$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-4}}.$
- $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+5x+6}}.$
- $\int \cos^4 3xdx.$
- $\int \frac{dx}{3x^2-4}.$

Варіант 9.

1. $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx.$
2. $\int (4x^9 + 5 \sin x - 8^x) dx.$
3. $\int \frac{dx}{6x - 5}.$
4. $\int \sin(3x + 5) dx.$
5. $\int \sqrt[8]{(2 + 7x)^5} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[4]{\arctg 9x}}{1 + 81x^2} dx.$
7. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{5\sqrt{x}}.$
8. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(4x - 1)} dx}{(4x - 1)}.$
9. $\int \frac{dx}{3x^2 + 4}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 4x^2}}.$

Варіант 10.

1. $\int \frac{x dx}{6x^2 - 5}.$
2. $\int \frac{(5x - 3) dx}{\sqrt{9x^2 + 2}}.$
3. $\int \frac{dx}{4x^2 - x - 5}.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 5x + 3}}.$
5. $\int \frac{(4x + 5) dx}{3x^2 - 5x + 7}.$
6. $\int \frac{(5x - 7) dx}{\sqrt{1 + x - 4x^2}}.$
7. $\int \frac{3x^5 - 6x^4 - 2x + 3}{x + 1} dx.$
8. $\int \frac{3x^2 + 15x - 72}{(x - 3)(x^2 + 2x - 8)} dx.$
9. $\int \frac{4x^2 - 25x - 39}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} dx.$
10. $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx.$

Варіант 11.

1. $\int (5x^2 - x) \sin 2x dx.$
2. $\int x e^{7x+12} dx.$
3. $\int \ln(x + 5) dx.$
4. $\int x^2 \arctg 5x dx.$
5. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$
6. $\int e^{-2x} \sin 9x dx.$
7. $\int \frac{dx}{7 \cos x - 2 \sin x + 5}.$
8. $\int \frac{dx}{4 + 3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}.$
9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx.$
10. $\int \sin^5 9x dx.$

Варіант 12.

1. $\int \sin^2 3x \cos^4 3x.$
2. $\int \cos 6x \cos 3x dx.$
3. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x-4}} dx.$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx.$
5. $\int \frac{x^4}{\sqrt{9-x^2}} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6} dx.$
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$
8. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2+4x+3}}.$
9. $\int \cos(3x-5) dx.$
10. $\int \frac{dx}{4x+1}.$

Варіант 13.

1. $\int \frac{7x^4 - 2\sqrt[4]{x^7} - 8x^6}{x^6} dx.$
2. $\int (5x^4 - \sin x + 3e^x) dx.$
3. $\int \frac{dx}{7x+6}.$
4. $\int \cos(2x-8) dx.$
5. $\int \sqrt{1-e^x} e^x dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{arctg}^2 5x}}{1+25x^2} dx.$
7. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$
8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 2x} dx}{\sin^2 2x}.$
9. $\int \frac{dx}{7x^2-5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-2}}.$

Варіант 14.

1. $\int \frac{(9x-2)dx}{3x^2+4}.$
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-6x^2}}.$
3. $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x-9x^2}}.$
5. $\int \frac{(3x-6)dx}{2x^2-x-5}.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x-1}}.$
7. $\int \frac{3x^4+2x^3-4x^2-7}{x-4} dx.$
8. $\int \frac{4x^2+26x+82}{(x+7)(x^2+9x+20)} dx.$
9. $\int \frac{x^2-17x-34}{(x^2-4)(x-2)} dx.$
10. $\int \frac{8x}{x^3+27} dx.$

Варіант 15.

1. $\int x \cos(4x - 7) dx.$
2. $\int (x^2 + 5x - 3) e^{2x} dx.$
3. $\int x^4 \ln(x + 1) dx.$
4. $\int \arccos x 2x dx.$
5. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$
6. $\int 3^x \cos x dx.$
7. $\int \frac{dx}{7 \cos x - 3 \sin x - 5}.$
8. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos^2 x + \sin^2 x}.$
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{(1 - \cos 2x)^3}} dx.$
10. $\int \sin^3 2x \cos^{12} 2x dx.$

Варіант 16.

1. $\int \sin^4 7x dx.$
2. $\int \sin 8x \cos 3x dx.$
3. $\int \frac{dx}{(8 + x)\sqrt{x + 1}}.$
4. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx.$
6. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 4} dx.$
7. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$
8. $\int \frac{dx}{(x + 8)\sqrt{x^2 - x - 2}}.$
9. $\int x \cdot \sqrt{9 - x^2} dx.$
10. $\int \sin^2 4x dx.$

Варіант 17.

1. $\int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$
2. $\int \left(4x^7 + \frac{5}{x^2 - 9} + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx.$
3. $\int \frac{dx}{9x - 3}.$
4. $\int \sin(7x + 13) dx.$
5. $\int e^x \sqrt{2 + e^x} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[5]{\arcsin^6 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$
7. $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx.$
8. $\int \frac{dx}{(9x + 1)\sqrt{\ln(9x + 1)}}.$
9. $\int \frac{dx}{5x^2 + 9}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{6 - 4x^2}}.$

Варіант 18.

- $\int \frac{x dx}{3x^2 - 2}.$
- $\int \frac{(x - 6) dx}{\sqrt{7x^2 + 1}}.$
- $\int \frac{dx}{2x^2 + 6x - 7}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - x - 5}}.$
- $\int \frac{(4x + 1) dx}{x^2 + 4x + 6}.$
- $\int \frac{(3x - 4) dx}{\sqrt{4 + 5x - 2x^2}}.$
- $\int \frac{4x^5 + 3x^4 - 2x - 5}{x + 3} dx.$
- $\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx.$
- $\int \frac{3x^2 - 6x - 21}{(x + 5)(x^2 - 3x + 2)} dx.$
- $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$

Варіант 19.

- $\int (x^2 - x) \cos 7x dx.$
- $\int x e^{4x+9} dx.$
- $\int \ln(3x + 2) dx.$
- $\int x^2 \operatorname{arccotg} 2x dx.$
- $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$
- $\int e^{4x} \sin 6x dx.$
- $\int \frac{dx}{5 \cos x + 2 \sin x - 7}.$
- $\int \frac{dx}{3 + 4 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}.$
- $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt[3]{(1 + \sin 5x)^4}} dx.$
- $\int \cos^7 4x dx.$

Варіант 20.

- $\int \sin^2 8x \cos^2 8x.$
- $\int \sin 5x \sin 8x dx.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 4x}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}.$
- $\int \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{x \sqrt{25 + x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}.$
- $\int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 - 9x + 8}}.$
- $\int \sin^2 4x \cdot \cos^3 4x dx.$
- $\int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x} dx.$

Варіант 21.

1. $\int \frac{(2\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x^3}} dx.$

3. $\int \frac{dx}{6x + 11}.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{(3x - 2)^3}}.$

7. $\int \frac{dx}{2x - x \ln x}.$

9. $\int \frac{dx}{6x^2 - 1}.$

2. $\int \left(4x^5 - \frac{7}{\sqrt{4 - x^2}} - 6^x \right) dx.$

4. $\int \cos(7x + 3) dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos^9 5x}}{\sqrt{1 - 25x^2}} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x (1 + 4x^2)}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$

Варіант 22.

1. $\int \frac{(8x - 3)dx}{9x^2 + 4}.$

3. $\int \frac{dx}{4x^2 - 8x + 5}.$

5. $\int \frac{(6x + 2)dx}{x^2 - 3x - 2}.$

7. $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4}{x - 4} dx.$

9. $\int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^2(x - 1)} dx.$

2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4 - 5x^2}}.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 5x - 3x^2}}.$

6. $\int \frac{(5x + 6)dx}{\sqrt{5x^2 - 3x + 8}}.$

8. $\int \frac{2x^2 + 43x + 116}{(x - 2)(x^2 + 7x + 12)} dx.$

10. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

Варіант 23.

1. $\int (3x - 11) \sin 5x dx.$

3. $\int x^2 \ln(x + 2) dx.$

5. $\int \sin(\ln x) dx.$

7. $\int \frac{dx}{6 \cos x + \sin x + 2}.$

9. $\int \sqrt[3]{1 - 2 \operatorname{tg} 3x} \frac{dx}{\cos^2 3x}.$

2. $\int x^2 e^{8x} dx.$

4. $\int \arcsin 7x dx.$

6. $\int e^{8x} \cos 5x dx.$

8. $\int \frac{dx}{4 + 3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x}.$

10. $\int \sin^3 4x \cos^8 4x dx.$

Варіант 24.

- $\int \cos^6 5x dx.$
- $\int \cos 4x \cos 3x dx.$
- $\int \frac{dx}{2 + \sqrt[3]{x}}.$
- $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^3} dx.$
- $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{81 - x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2 + x - 2}}.$
- $\int x^2 \cdot \ln x dx.$
- $\int \arccos 4x dx.$

Варіант 25.

- $\int \frac{4x^8 + 3\sqrt[7]{x^2} - 6x^6}{x^9} dx.$
- $\int \left(5x^2 - \frac{3}{\cos^2 x} - 7^x \right) dx.$
- $\int \frac{dx}{3x + 4}.$
- $\int \sin(9x - 3) dx.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 5x}}.$
- $\int \frac{\sqrt[4]{\arcsin^5 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$
- $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx.$
- $\int \frac{dx}{(2x - 9) \ln^2(2x - 9)}.$
- $\int \frac{dx}{3x^2 - 4}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 7}}.$

Варіант 26.

- $\int \frac{x dx}{3x^2 + 8}.$
- $\int \frac{(5x + 1) dx}{\sqrt{11 - 2x^2}}.$
- $\int \frac{dx}{x^2 - 4x - 3}.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 2x + 9}}.$
- $\int \frac{(4x - 2) dx}{3x^2 - 5x + 7}.$
- $\int \frac{(7x + 1) dx}{\sqrt{8 + x - 7x^2}}.$
- $\int \frac{3x^5 - x^4 - 5x^2 + 13}{x + 2} dx.$
- $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$
- $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$
- $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} dx.$

Варіант 27.

1. $\int (x^2 + 7x) \cos 2x dx.$
2. $\int x e^{4x+3} dx.$
3. $\int \ln(3x - 5) dx.$
4. $\int x^2 \operatorname{arctg} 5x dx.$
5. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
5. $\int e^{2x} \sin 7x dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x - 9}.$
8. $\int \frac{dx}{4 + \cos^2 x - 3 \sin^2 x}.$
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx.$
10. $\int \sin^5 7x \cos^8 7x dx.$

Варіант 28.

1. $\int \sin^2 5x \cos^4 5x.$
2. $\int \cos 3x \cos 8x dx.$
3. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}.$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx.$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} dx.$
7. $\int x^2 \sqrt{49 - x^2} dx.$
8. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2 - x - 2}}.$
9. $\int \sin^6 7x dx.$
10. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx.$

Варіант 29.

1. $\int \frac{6x^4 + 3\sqrt[9]{x^2} - 5x^7}{x^6} dx.$
2. $\int \left(3x^8 - \frac{7}{1+x^2} + 4e^x \right) dx.$
3. $\int \frac{dx}{8x - 3}.$
4. $\int \cos(7x - 9) dx.$
5. $\int \sqrt[8]{(4+5x)^3} dx.$
5. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^5 2x}}{\sin^2 2x} dx.$
7. $\int \frac{x^3 dx}{5 + 2x^4}.$
8. $\int \frac{dx}{\arccos^3 5x \sqrt{1 - 25x^2}}.$
9. $\int \frac{dx}{7x^2 - 5}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$

Варіант 30.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{(x-2)dx}{3x^2+4}.$ | 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-6x^2}}.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{4x^2-2x-5}.$ | 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+10}}.$ |
| 5. $\int \frac{(5x+4)dx}{x^2+3x+8}.$ | 6. $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{6+2x-x^2}}.$ |
| 7. $\int \frac{3x^4-2x^3-3x^2+6x}{x+4}dx.$ | 8. $\int \frac{6x^2+35x+56}{(x+4)(x^2+x-6)}dx.$ |
| 9. $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx.$ | 10. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$ |

Приклади розв'язання типових завдань

Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{3x^7 + 4\sqrt[4]{x^5} - x^2}{x^3} dx.$

Розв'язання. Для безпосереднього інтегрування спрости-мо підінтегральну функцію, скориставшись властивостями степенів:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^7 + 4\sqrt[4]{x^5} - x^2}{x^3} dx &= \int \left(3x^4 + 4x^{-\frac{7}{4}} - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= 3 \int x^4 dx + 4 \int x^{-\frac{7}{4}} dx - \int \frac{dx}{x} = 3 \frac{x^5}{5} + 4 \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} - \ln|x| + C = \\ &= \frac{3}{5}x^5 - \frac{16}{3\sqrt[4]{x^3}} - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

2. $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 5 \sin x + 4^x \right) dx.$

Розв'язання. За властивістю лінійності розіб'ємо інтеграл на три:

$$\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 5 \sin x + 4^x \right) dx = 6 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 5 \int \sin x dx + \int 4^x dx =$$

$$= 3\sqrt{x} + 5 \cos x + \frac{4^x}{\ln 4} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{13x+4}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо за методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{13x+4} &= \left[\begin{array}{l} u = 13x+4 \\ du = 13dx \\ dx = \frac{1}{13}du \end{array} \right] = \frac{1}{13} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{13} \ln |u| + C = \\ &= \frac{1}{13} \ln |13x+4| + C. \end{aligned}$$

$$4. \int \cos(2x-1)dx.$$

Розв'язання. За методом заміни змінної маємо:

$$\begin{aligned} \int \cos(2x-1)dx &= \left[\begin{array}{l} u = 2x-1 \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \cos u du = \\ &= \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin(2x-1) + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}}.$$

Розв'язання. Знову скористаємося методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(7x-9)^3}} &= \left[\begin{array}{l} u = 7x-9 \\ du = 7dx \\ dx = \frac{1}{7}du \end{array} \right] = \frac{1}{7} \int u^{-\frac{3}{5}} du = \frac{1}{7} \cdot \frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \\ &= \frac{5}{14} \sqrt[5]{(7x-9)^2} + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в прикладах 3 – 5 у разі заміни змінної у функціях, аргумент яких лінійний відносно незалежної змінної, за знак інтегралу виходить коефіцієнт, обернений коефіцієнту при x .

$$6. \int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1 + 25x^2} dx.$$

Розв'язання. Інтеграл не табличний. Звернувшись до таблиці похідних, бачимо, що в підінтегральному виразі присутній диференціал арккотангенса. Саме це є підказкою при заміні змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1 + 25x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 5x \\ du = -\frac{5dx}{1 + 25x^2} \\ \frac{dx}{1 + 25x^2} = \frac{1}{5} du \end{array} \right] = -\frac{1}{5} \int u^4 du = \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{25} \operatorname{arctg}^5 5x + C. \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{e^{\operatorname{tg} 4x} dx}{\cos^2 4x}.$$

Розв'язання. Інтеграл не табличний. Підказку щодо заміни знову дає таблиця похідних – в підінтегральному виразі знаходимо (з точністю до коефіцієнта) диференціал тангенса:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\operatorname{tg} 4x} dx}{\cos^2 4x} &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{tg} 4x \\ du = \frac{4dx}{\cos^2 4x} \\ \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4} du \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \\ &= \frac{1}{4} e^{\operatorname{tg} 4x} + C. \end{aligned}$$

$$8. \int \frac{dx}{(3x - 5) \ln^6(3x - 5)}.$$

Розв'язання. У підінтегральному виразі є диференціал логарифма, тому заміна змінної очевидна:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)\ln^6(3x-5)} = \left[\begin{array}{l} u = \ln(3x-5) \\ du = \frac{3}{3x-5} dx \\ \frac{dx}{3x-5} = \frac{1}{3} du \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^6} =$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{-6} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{15u^5} + C = -\frac{1}{15\ln^5(3x-5)} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{9x^2 - 2}.$$

Розв'язання. Використаємо інтеграл (10) в таблиці інтегралів:

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 2} = \left[\begin{array}{l} u^2 = 9x^2 \\ u = 3x \\ du = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 - 2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{3x - \sqrt{2}}{3x + \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 8x^2}}.$$

Розв'язання. Інтегрування проводимо аналогічно попередньому прикладу. Тільки звернутися буде необхідно до іншої формули (інтеграл (8) в таблиці інтегралів):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 8x^2}} = \left[\begin{array}{l} u^2 = 8x^2 \\ u = 2\sqrt{2}x \\ du = 2\sqrt{2}dx \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} du \end{array} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{5 - u^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$11. \int \frac{xdx}{3x^2 + 1}.$$

Розв'язання. Помічаємо, що в знаменнику – многочлен другого степеня, а в чисельнику – першого. Під час диференціювання многочлена другого степеня отримаємо многочлен першого. Отже, заміна змінної стає очевидною:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{3x^2 + 1} &= \left[\begin{array}{l} u = 3x^2 + 1 \\ du = 6xdx \\ xdx = \frac{1}{6}du \end{array} \right] = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln |u| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln |3x^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

$$12. \int \frac{3x - 7}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx.$$

Розв'язання. Під час розв'язання цього прикладу звернемося до розглянутих прикладів 9 – 11. Поділимо почленно чисельник на знаменник, розіб'ємо інтеграл на два, методи інтегрування кожного з яких вже відомі. Щоб запис був зрозумілішим, кожному з первісних знайдемо окремо, а результат отримаємо як суму:

$$\int \frac{3x - 7}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx = 3 \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 1}} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = I_1 + I_2;$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \left[\begin{array}{l} u = 4x^2 + 1 \\ du = 8xdx \\ xdx = \frac{1}{8}du \end{array} \right] = \frac{3}{8} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \\ &= \frac{3}{8} \cdot 2\sqrt{u} + C = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 1} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -7 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \left[\begin{array}{l} u^2 = 4x^2 \\ u = 2x \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right] = -\frac{7}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \\
 &= -\frac{7}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| + C = -\frac{7}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right| + C; \\
 I &= \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 + 1} - \frac{7}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}.$$

Розв'язання. У знаменнику підінтегральної функції квадратний тричлен. Для інтегрування таких виразів необхідно виділити повний квадрат:

$$x^2 - 4x + 9 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 9 = (x - 2)^2 + 5.$$

Підставимо в підінтегральний вираз виділений повний квадрат, бачимо, що відповідною заміною інтеграл зводиться до табличного:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} &= \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 5} = \left[\begin{array}{l} u = x - 2 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{u^2 + 5} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{5}} + C.
 \end{aligned}$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x - 2}}.$$

Розв'язання. Метод інтегрування – аналогічний попередньому розглянутому прикладу:

$$\begin{aligned}
 3x^2 + x - 2 &= \left(3x^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \right) - \frac{1}{12} - 2 = \\
 &= \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{25}{12};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x - 2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{25}{12}}} = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ du = \sqrt{3}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{3}}du \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{25}{12}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - \frac{25}{12}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{25}{12}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + x - 2} \right| + C.
\end{aligned}$$

15. $\int \frac{x-4}{x^2-6x-2} dx.$

Розв'язання. Звернемо увагу, що в чисельнику – многочлен першого степеня, а в знаменнику – другого. Диференціал многочлена другого степеня є многочлен першого степеня. Тому зрозуміло, що з точністю до коефіцієнтів маємо в чисельнику диференціал знаменника:

$$d(x^2 - 6x - 2) = (2x - 6)dx.$$

Спробуємо його отримати в чисельнику. Спочатку підберемо коефіцієнт при x , а потім – при вільному члені:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-4}{x^2-6x-2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-6x-2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6) + 6-8}{x^2-6x-2} dx =
\end{aligned}$$

Отриманий інтеграл доцільно розбити на два, методи інтегрування кожного з яких вже відомі:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} - \frac{8}{2} \int \frac{dx}{x^2-6x-2} = I_1 + I_2, \\
 I_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x-2} = \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 6x - 2 \\ du = (2x-6)dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 6x - 2| + C, \\
 I_2 &= -4 \int \frac{dx}{x^2-6x-2} = -4 \int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9-2} = \\
 &= -4 \int \frac{dx}{(x-3)^2-11} = \left[\begin{array}{l} u = x-3 \\ du = dx \end{array} \right] = -4 \int \frac{du}{u^2-11} = \\
 &= -4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{11}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{11}}{u+\sqrt{11}} \right| + C = -\frac{2}{\sqrt{11}} \ln \left| \frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$I = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 6x - 2| - \frac{2}{\sqrt{11}} \ln \left| \frac{x-3-\sqrt{11}}{x-3+\sqrt{11}} \right| + C.$$

$$16. \int \frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}} dx.$$

Розв'язання. Алгоритм розв'язання аналогічний розглянутому у попередньому прикладі. Диференціал підкореневого виразу

$$d(3-2x-2x^2) = (-2-4x)dx.$$

Спробуємо отримати його в чисельнику. Підібрати дробовий коефіцієнт не завжди зручно, через що у разі потреби радимо спочатку отримати при x коефіцієнт, який би дорівнював одиниці (для цього винесемо заданий коефіцієнт за дужки), а далі працювати як і в попередньому прикладі:

$$\int \frac{5x+4}{\sqrt{3-2x-2x^2}} dx = 5 \int \frac{x+\frac{4}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{5}{4} \int \frac{-4x - \frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}} dx = -\frac{5}{4} \int \frac{(-4x-2) + 2 - \frac{16}{5}}{\sqrt{3-2x-2x^2}} dx = \\
&= -\frac{5}{4} \int \frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} + \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} = I_1 + I_2; \\
I_1 &= -\frac{5}{4} \int \frac{(-4x-2)dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 3-2x-2x^2 \\ du = (-4x-2)dx \end{array} \right] = \\
&= -\frac{5}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{5}{4} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{5}{2} \sqrt{3-2x-2x^2} + C; \\
I_2 &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-2x^2}} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-(2x^2+2x-3)}} = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{3+\frac{1}{2} - \left(2x^2+2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)}} = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{2} - \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ du = \sqrt{2}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}du \end{array} \right] = \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{7}{2} - u^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{u}{\sqrt{\frac{7}{2}}} + C = \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}} + C = \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$I = -\frac{5}{2} \sqrt{3-2x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$17. \int \frac{2x^3 + 6x - 3}{x+4} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний дріб, дріб неправильний, оскільки максимальний степінь чисельника перевищує максимальний степінь знаменника. Перед інтегруванням необхідно виділити цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 0x^2 + 6x - 3 \quad | \quad x + 4 \\
 2x^3 + 8x^2 \quad \quad \quad | \quad 2x^2 - 8x + 38 \\
 \hline
 -8x^2 + 6x \quad \quad \quad \\
 -8x^2 - 32x \quad \quad \quad \\
 \hline
 38x - 3 \\
 38x + 152 \\
 \hline
 -155
 \end{array}$$

Цей інтеграл набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^3 + 6x - 3}{x + 4} dx &= \int \left(2x^2 - 8x + 38 - \frac{155}{x + 4} \right) dx = \\
 &= 2 \int x^2 dx - 8 \int x dx + 38 \int dx - 155 \int \frac{dx}{x + 4} = \\
 &= \frac{2}{3} x^3 - 4x^2 + 38x - 155 \ln |x + 4| + C.
 \end{aligned}$$

$$18. \int \frac{4x^2 - x - 39}{(x + 2)(x^2 - 6x + 5)} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того, щоб з'ясувати, якого він типу, потрібно знайти корені знаменника. Один із коренів – $x = -2$, два інших можемо знайти, наприклад, за теоремою Вієта (або знайти корені квадратного рівняння через дискримінант): $x = 1$, $x = 5$. Усі три корені знаменника дійсні та різні. Отже, складний дріб може бути розкладений на три простіших:

$$\begin{aligned}
 \frac{4x^2 - x - 39}{(x + 2)(x^2 - 6x + 5)} &= \frac{4x^2 - x - 39}{(x + 2)(x - 1)(x - 5)} = \\
 &= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 5}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Для цього приведемо дробу до спільного знаменника та прирівняємо чисельники:

$$4x^2 - x - 39 = A(x-1)(x-5) + B(x+2)(x-5) + C(x-1)(x+2).$$

Підставляючи по черзі корені знаменника, відразу знаходимо невідомі коефіцієнти:

$$x = -2 : \quad 16 + 2 - 39 = 21A; \quad -21 = 21A; \quad A = -1;$$

$$x = 1 : \quad 4 - 1 - 39 = -12B; \quad -36 = -12B; \quad B = 3;$$

$$x = 5 : \quad 100 - 5 - 39 = 28C; \quad 56 = 28C; \quad C = 2.$$

Отже, переписавши підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - x - 39}{(x+2)(x^2 - 6x + 5)} dx &= - \int \frac{dx}{x+2} + 3 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-5} = \\ &= -\ln|x+2| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x-5| + C. \end{aligned}$$

$$19. \int \frac{2x^2 - x + 30}{x^2(x+6)} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Корені знаменника: $x = 0$ і $x = -6$. Корінь $x = 0$ – кратний, його кратність дорівнює 2. Тому розкладання дробу на простіші має такий вигляд:

$$\frac{2x^2 - x + 30}{x^2(x+6)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+6}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Приведемо дробу до спільного знаменника, прирівняємо чисельники:

$$2x^2 - x + 30 = A(x+6) + Bx(x+6) + Cx^2.$$

Як і в попередньому прикладі, зможемо обчислити відразу два з трьох невідомих коефіцієнтів:

$$x = 0 : \quad 30 = 6A; \quad A = 5;$$

$$x = -6 : \quad 108 = 36C; \quad C = 3.$$

Щоб знайти третій, підставимо в тотожність будь-яке значення x , наприклад $x = 1$, отримаємо вираз, який містить усі три коефіцієнти; підставимо два відомих та виразимо через них третій:

$$x = 1 : \quad 31 = 7A + 7B + C; \quad 31 = 35 + 7B + 3; \quad B = -1.$$

Отже, переписавши підінтегральну функцію, знаходимо первісну:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 30}{x^2(x+6)} dx &= 5 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x+6} = \\ &= -\frac{5}{x} - \ln|x| + 3 \ln|x+6| + C. \end{aligned}$$

$$20. \int \frac{4x^2 - x + 12}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональний правильний дріб. Для того, щоб знайти корені знаменника, спробуємо перетворити многочлен:

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4).$$

Отже, знаменник має один дійсний корінь $x = 1$ та пару комплексних (оскільки $x^2+4 \neq 0$ в дійсній області). Розкладання дробів на простіші має вигляд:

$$\frac{4x^2 - x + 12}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = \frac{4x^2 - x + 12}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приведемо дробу до спільного знаменника, прирівняємо чисельники:

$$4x^2 - x + 12 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1).$$

Тільки один з коефіцієнтів можемо знайти відразу:

$$x = 1 : \quad 15 = 5A; \quad A = 3.$$

Щоб знайти два інших, розкриємо дужки в тотожності та за методом невизначених коефіцієнтів дорівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$4x^2 - x + 12 = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + x - C;$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 4 = A + B, \\ x^1 & -1 = -B + C, \\ x^0 & 12 = 4A - C. \end{array}$$

Отримали систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Ми можемо її не розв'язувати, а підставити в перше та третє рівняння системи відомий нам коефіцієнт A , й знайти невідомі B та C :

$$\begin{aligned} 4 &= 3 + B; & B &= 1; \\ 12 &= 12 - C; & C &= 0. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл набуває вигляду суми двох інтегралів, кожний з яких ми вже навчилися знаходити за попередніми прикладами:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - x + 12}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx &= 3 \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{x dx}{x^2 + 4} = \\ &= 3 \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} = 3 \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \\ &= 3 \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| + C. \end{aligned}$$

$$21. \int x \sin(3x - 1) dx.$$

Розв'язання. Інтегрування таких функцій проводиться частинами. Нагадаємо формулу:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\begin{aligned}\int x \sin(3x - 1) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin(3x - 1) dx \\ du = dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{3} x \cos(3x - 1) + \frac{1}{3} \int \cos(3x - 1) dx = \\ &= -\frac{1}{3} x \cos(3x - 1) + \frac{1}{9} \sin(3x - 1) + C.\end{aligned}$$

$$22. \int x^2 e^{4x} dx.$$

Розв'язання. Інтегрувати частинами таку функцію будемо двічі (оскільки маємо x^2):

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{4x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{4x} dx \\ du = 2x dx \\ v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right] = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{4} \cdot 2 \int x e^{4x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{4x} dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right] = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + C.\end{aligned}$$

$$23. \int \ln(x + 7) dx.$$

Розв'язання. Первісна такої функції також знаходиться інтегруванням частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз

на u та dv :

$$\int \ln(x+7)dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+7) \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+7} \\ v = x \end{array} \right] = x \ln(x+7) - \int \frac{xdx}{x+7} =$$

отримали неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину і знайдемо первісну:

$$\begin{aligned} &= x \ln(x+7) - \int \frac{(x+7)-7}{x+7} dx = x \ln(x+7) - \int dx + 7 \int \frac{dx}{x+7} = \\ &= x \ln(x+7) - x + 7 \ln(x+7) + C. \end{aligned}$$

$$24. \int \arccos 8x dx.$$

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv :

$$\begin{aligned} \int \arccos 8x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arccos 8x \\ dv = dx \\ du = -\frac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}} \\ v = x \end{array} \right] = \\ &= x \arccos 8x + 8 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-64x^2}} = \end{aligned}$$

за відомою нам заміною маємо:

$$\begin{aligned} &= x \arccos 8x + \frac{8}{(-128)} \int \frac{-128xdx}{\sqrt{1-64x^2}} = x \arccos 8x - \\ &-\frac{1}{16} \int \frac{d(1-64x^2)}{\sqrt{1-64x^2}} = x \arccos 8x - \frac{1}{8} \sqrt{1-64x^2} + C. \end{aligned}$$

$$25. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv :

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= \left[\begin{array}{l} u = (\arcsin x)^2, \quad du = \frac{2 \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = \\ &= x \cdot (\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \\ &= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2 \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

$$26. \int e^{3x} \cos 2x dx.$$

Розв'язання. Інтегруємо частинами. Розіб'ємо підінтегральний вираз на u та dv , обираючи будь-який із двох способів:

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 2x dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{3x}, \quad du = 3e^{3x} dx \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx = \end{aligned}$$

бачимо, за структурою отримали аналогічний інтеграл, знов інтегруємо частинами, тепер у процесі розбиття на частини звертаємо увагу на обраний вище спосіб:

$$= \left[\begin{array}{l} u = e^{3x}, \quad du = 3e^{3x} dx \\ dv = \sin 2x dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x dx.$$

Бачимо, що повернулися до попереднього інтегралу, саме тому вони називаються "поворотними" інтегралами. Залишилося розв'язати лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Для цього зробимо заміну

$$I = \int e^{3x} \cos 2x dx$$

та підставимо в отриманий вираз. Дійсно, отримали лінійне рівняння відносно шуканого I . Розв'яжемо його:

$$I = \frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4}I;$$

$$\frac{13}{4}I = \frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \cos 2x.$$

Остаточно маємо

$$I = \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{2}{13}e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x} \cos 2x + C.$$

$$27. \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 2}.$$

Розв'язання. Для інтегрування такого класу функцій необхідно звернутися до універсальної тригонометричної підстановки:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 2} &= \int \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + 2} = 2 \int \frac{du}{3 - 3u^2 + 2u + 2 + 2u^2} = \end{aligned}$$

$$= -2 \int \frac{du}{u^2 - 2u - 5} =$$

в квадратному тричлені виділимо повний квадрат:

$$\begin{aligned} &= -2 \int \frac{du}{(u^2 - 2u + 1) - 1 - 5} = -2 \int \frac{du}{(u - 1)^2 - 6} = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{u - 1 - \sqrt{6}}{u - 1 + \sqrt{6}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{6}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{6}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$28. \int \frac{dx}{\cos^2 x - 3 \sin^2 x}.$$

Розв'язання. Для інтегрування функцій з парними степенями синуса та косинуса раціональною є підстановка $u = \operatorname{tg} x$. Скористаємося цією підстановкою:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x - 3 \sin^2 x} &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \\ \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1}{1+u^2} - \frac{3u^2}{1+u^2}} = \\ &= - \int \frac{du}{(\sqrt{3}u)^2 - 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{3}u - 1}{\sqrt{3}u + 1} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$29. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 12}} dx.$$

Розв'язання. Перейти під час інтегрування від тригонометричних функцій до степеневих у цьому прикладі можна за допомогою підстановки:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 12}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x + 12 \\ du = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C =$$

$$= 2\sqrt{\sin x + 12} + C.$$

$$30. \int \cos^8 x \sin^3 x dx.$$

Розв'язання. Інтегрування добутку синуса на косинус у випадку, якщо одна з функцій в непарному ступені, проводиться залежно від того, яка з функцій у непарному ступені. У нашому випадку в непарній степені синус, тому обираємо заміну $u = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \cos^8 x \sin^3 x dx &= \int \cos^8 x \sin^2 x \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2 \end{array} \right] = - \int u^8 (1 - u^2) du = \\ &= - \int (u^8 - u^{10}) du = -\frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{11}u^{11} + C = \\ &= -\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{1}{11}\cos^{11} x + C. \end{aligned}$$

$$31. \int \sin^4 3x dx.$$

Розв'язання. Інтегрування парних степенів синусу та косинусу проводиться за допомогою формул зниження степенів:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 3x dx &= \int (\sin^2 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \cdot 2 \int \cos 6x dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 12x) dx = \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \cos 12x + C = \\
&= \frac{3}{8} x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \cos 12x + C.
\end{aligned}$$

$$32. \int \cos 9x \cos 2x dx.$$

Розв'язання. Перед інтегруванням цієї функції згадаємо формули перетворення добутку в суму та скористаємося ними:

$$\begin{aligned}
&\int \cos 9x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(9x - 2x) + \cos(9x + 2x)) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \cos 7x dx + \frac{1}{2} \int \cos 11x dx = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{22} \sin 11x + C.
\end{aligned}$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція містить ірраціональність. Щоб позбутися її, скористаємося підстановкою. Квадратний корінь зникне, якщо підкорений вираз замінити новою змінною у квадраті:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4} = \left[\begin{array}{l} x+1 = u^2 \\ dx = 2u du \end{array} \right] = \int \frac{2u du}{u+4} = \\
&= 2 \int \frac{(u+4) - 4}{u+4} du = 2 \int du - 8 \int \frac{du}{u+4} = \\
&= 2u - 8 \ln |u+4| + C = 2\sqrt{x+1} - 8 \ln |\sqrt{x+1}+4| + C.
\end{aligned}$$

$$34. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)}.$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, підінтегральна функція містить ірраціональність. Але щоб позбутися

iii, необхідно нову змінну підвести до степеня, який дорівнює найменшому спільному кратному знаменників показників степенів. Є корінь квадратний та корінь кубічний, $\text{НОК}(2, 3) = 6$. Отже, нову змінну потрібно підвести в шостий степінь:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)} &= \left[\begin{array}{l} x = u^6 \\ dx = 6u^5 du \end{array} \right] = \int \frac{6u^5 du}{u^3(u^2+4)} = \\ &= 6 \int \frac{u^2 du}{u^2+4} = 6 \int \frac{(u^2+4)-4}{u^2+4} du = 6 \int du - 24 \int \frac{du}{u^2+4} = \\ &= 6u - \frac{24}{2} \arctg \frac{u}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12 \arctg \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C. \end{aligned}$$

$$35. \int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3} dx.$$

Розв'язання. У процесі інтегрування функцій, що містять квадратичну ірраціональність, необхідно користуватися тригонометричними підстановками. У даному інтегралі, який містить вираз $\sqrt{x^2-a^2}$, застосуємо підстановку $\frac{a}{\cos t}$. Приведемо інтеграл до вигляду:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{5}}{\sin t} \\ dx = -\frac{\sqrt{5} \cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2-5} = \sqrt{5} \frac{\cos t}{\sin t} \end{array} \right] = \\ &= - \int \frac{\frac{\sqrt{5} \cos t}{\sin t} \cdot \frac{\sqrt{5} \cos t dt}{\sin^2 t}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{\sin t}\right)^2} = - \frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 t dt = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{5}} (t + \sin t \cdot \cos t) + C. \end{aligned}$$

Якщо з підстановки виразити $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{x}$ та $\cos t = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}$, остаточно маємо:

$$I = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} \right) + C.$$

$$36. \int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx.$$

Розв'язання. Скористаємось тим, що для раціоналізації виразів, що містять $\sqrt{x^2 + a^2}$, застосовують підстановку $x = atgt$. Приведемо інтеграл до вигляду:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 + 9} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{3}{\cos t} \cdot \frac{3dt}{\cos^2 t} = \\ &= 3 \int \frac{dt}{\sin t \cdot \cos^2 t} = \end{aligned}$$

скористаємось в чисельнику основною тригонометричною тождеством та розіб'ємо інтеграл на два:

$$= 3 \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t \cdot \cos^2 t} dt = 3 \int \frac{dt}{\sin t} + 3 \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Перший з отриманих інтегралів можна знайти або за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, або скористатися додатковими формулами таблиці невизначених інтегралів, а другий – методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{dt}{\sin t} - 3 \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} &= 3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \frac{3}{\cos t} + C = \\ &= 3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arctg \left(\frac{x}{3} \right)}{2} \right| + \sqrt{x^2 + 9} + C. \end{aligned}$$

Тема 12. Визначений інтеграл та його застосування

Поняття визначеного інтеграла, його геометричний, фізичний та економічний зміст

Задача про площу криволінійної трапеції. Нехай на $[a; b]$ задано невід'ємну та обмежену функцію $y = f(x)$. Потрібно знайти площу S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю абсцис $y = 0$ (рис. 1):

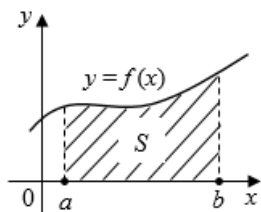


Рис. 1

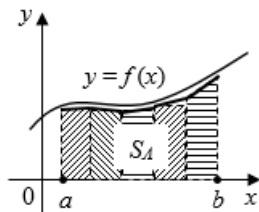


Рис. 2

Введемо до розгляду деяку ламану, яка розташована під кривою $y = f(x)$ достатньо близько до неї на $[a; b]$ (рис. 2). Фігура під цією ламаною складається з прямокутників та прямокутних трапецій, її площа S_Δ дорівнює сумі площ вказаних чотирикутників і може бути обчислена за допомогою відомих з геометрії формул. Чим ближче розташована ламана до графіка кривої $y = f(x)$, тим точніше наближена рівність $S \approx S_\Delta$. Тому природньо за шукану площу S взяти границю площі S_Δ під ламаною в припущенні необмеженого наближення ламаної до заданої кривої.

Для того, щоб ці міркування можна було б використати на практиці, необхідно уточнити в них то, що описано нестрого: процедура вибору ламаної та наступний граничний перехід. На цьому шляху одержимо, зокрема, поняття визначеного інтеграла.

Поняття інтегральної суми. Нехай на $[a; b]$ задана обмежена функція $y = f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок довільним чином на n елементарних відрізків точками $x_0, x_1, \dots, x_n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ також довільним чином виберемо точку ξ_i , обчислимо $f(\xi_i)$ і позначимо довжину відрізка $[x_{i-1}; x_i]$ через Δ_i ($i = \overline{1, n}$): $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Суму вигляду

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i \quad (12.1)$$

називається інтегральною сумою Рімана для $y = f(x)$ на $[a; b]$, яка відповідає даному розбиттю відрізка точками $x_1, \dots, x_{n-1}$. Очевидно, що сума (12.1) залежить як від вибору точок ξ_i , так і від вибору точок $x_1, \dots, x_{n-1}$. Кожний окремий доданок $f(\xi_i)\Delta_i$ в сумі (12.1) визначає площу S_i прямокутника зі сторонами Δ_i і $f(\xi_i)$.

Поняття визначеного інтеграла. Для вибраного розбиття відрізка $[a; b]$ на частини позначимо через $\delta = \max_i \Delta_i$ максимальну з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Означення 12.1. Нехай границя інтегральної суми (12.1) при прямуванні δ до 0 існує, скінченна та не залежить від способу вибору точок $x_1, \dots, x_{n-1}$ та точок $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Тоді ця границя називається визначеним інтегралом (або інтегралом Рімана) від функції $y = f(x)$ на $[a; b]$, позначається

$$\int_a^b f(x)dx,$$

а сама функція $y = f(x)$ називається інтегрованою (за Ріманом) на $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i.$$

Число a називається *нижньою межею* інтегрування, число b – *верхньою межею* ($a < b$).

Відмітимо, що не зважаючи на спільні риси в позначеннях та термінології, визначений та невизначений інтеграл – істотно різні поняття: $\int f(x)dx$ – це сім'я функцій вигляду

$F(x) + C$, а $\int_a^b f(x)dx$ – це число.

У введеному позначенні припускалося, що $a < b$, отже, можна записати, що $\int_a^b = - \int_b^a$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $y = f(x)$ – неперервна та невід'ємна на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції під кривою $y = f(x)$ на $[a; b]$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж числової осі зі швидкістю $v(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), яка змінюється неперервно. Тоді визначений інтеграл

$$S = \int_{t_0}^T v(t)dt$$

визначає шлях, який пройшла точка від моменту часу t_0 до моменту T .

Економічний зміст визначеного інтеграла. Нехай функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності праці деякого виробництва з плином часу. Обсяг продукції u , виробленої за проміжок часу $[0; T]$, обчислюється за допомогою визначено-

го інтеграла

$$u = \int_0^T f(t)dt.$$

Необхідною умовою інтегрованості функції є обмеженість функції. Але ця умова не є достатньою.

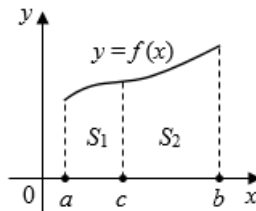
Теорема 12.1. *(достатня умова інтегрованості функції). Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ (за винятком, можливо, скінченного числа точок розриву 1-го роду), то вона інтегрована на цьому відрізку.*

Властивості визначеного інтеграла

- 1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, де α – довільне число;
- 2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Ці властивості аналогічні властивостям невизначеного інтеграла.

3) Якщо відрізок інтегрування поділений на частини, то інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів по кожній із частин:



$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) Якщо на відрізку $[a; b]$ інтегровані функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють нерівність $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

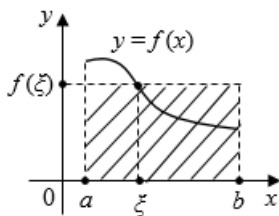
Наслідок. Якщо на $[a; b]$ $m \leq f(x) \leq M$, де $f(x)$ неперервна, m і M – деякі числа, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

5) **Теорема про середнє.** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то знайдеться таке значення $\xi \in [a; b]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то дана теорема стверджує: знайдеться таке $\xi \in [a; b]$, що площа під кривою $y = f(x)$ на $[a; b]$ дорівнює площі прямокутника зі сторонами $f(\xi)$ та $b-a$:



$$6) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$7) \int_a^b dx = b-a;$$

8) Якщо $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (тобто, якщо $f(x)$ – знакостала функція на $[a; b]$, то такий же знак має і $\int_a^b f(x)dx$).

Формула Ньютона-Лейбниці

Теорема 12.2. Нехай $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a; b]$. Тоді визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (12.2)$$

Обчислення визначених інтегралів із застосуванням формули Ньютона-Лейбніца (12.2) здійснюються двоетапно: 1) на першому кроці, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$; 2) на другому кроці власне і застосовується формула Ньютона-Лейбніца. У зв'язку з цим введемо позначення для правої частини формули (12.2):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (12.3)$$

Приклади:

$$1) \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3};$$

$$2) \int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 2} - \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^4 - e^2).$$

Заміна змінної та формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 12.3. *Нехай функція $\varphi(x)$ має неперервну похідну на $[\alpha; \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ і функція $f(x)$ неперервна в кожній точці x , де $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Тоді справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі*.

На відміну від невизначеного інтеграла в даному випадку немає необхідності повертатися до початкової змінної інтегрування. Достатньо лише знайти нові межі інтегрування для змінної t .

Приклад.

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x-1)^{10} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int_1^3 t^{10} dt = \left. \frac{t^{11}}{11} \right|_1^3 = \frac{3^{11}}{11} - \frac{1^{11}}{11} = \\ &= \frac{3^{11} - 1}{11}; \end{aligned}$$

Нові межі інтегрування $t_1 = 2 - 1 = 1$, $t_2 = 4 - 1 = 3$.

Теорема 12.4. *Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервно диференційовні на $[a; b]$. Тоді*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (12.5)$$

$$\text{де } uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

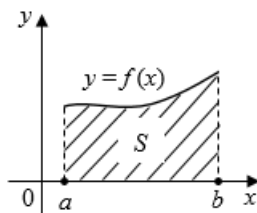
Формула (12.5) – формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Геометричні застосування визначеного інтеграла

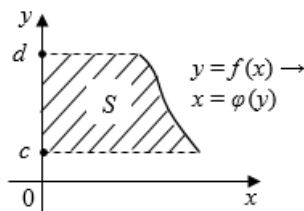
1. Обчислення площ плоских фігур

а) Нехай $y = f(x) \geq 0$ та неперервна на $[a; b]$. Тоді площа S під кривою $y = f(x)$ на $[a; b]$ чисельно дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, тобто

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (12.6)$$



Зауважимо, що у випадку



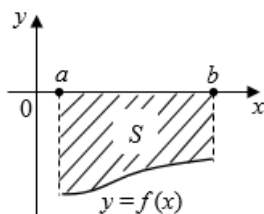
площу S можна обчислити і так:

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

б) Нехай $y = f(x) \leq 0$ і неперервна на $[a; b]$. Тоді площа S над кривою $y = f(x)$ відрізняється тільки знаком від

$$\int_a^b f(x) dx:$$

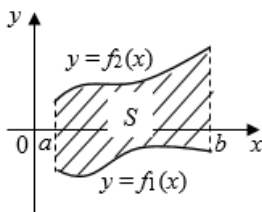
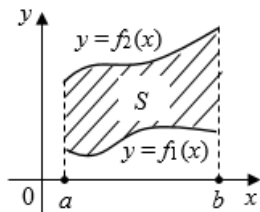
$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (12.7)$$

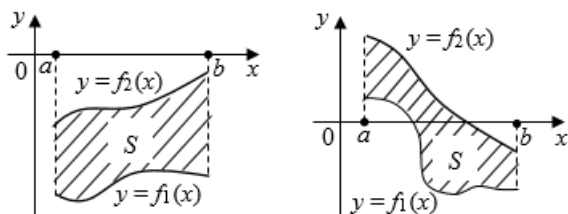


в) **Теорема.** Нехай на $[a; b]$ задані неперервні функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ такі, що $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тоді площа S фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ обчислюється за формулою

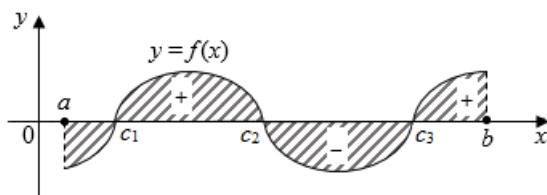
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (12.8)$$

Проілюструємо теорему графічно:





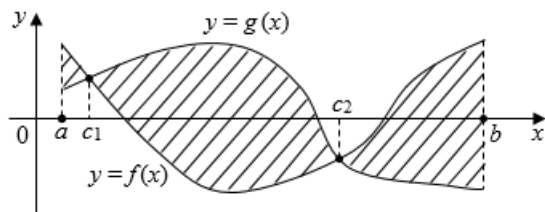
Для того, щоб обчислити площу заштрихованої фігури на малюнку,



відрізок інтегрування $[a; b]$ потрібно розбити на частинні відрізки, на яких $f(x)$ зберігає знак, і застосувати формули (12.6) і (12.7). Тоді

$$S = - \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^b f(x) dx.$$

Для випадку



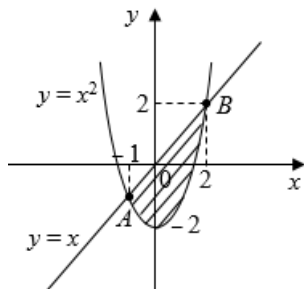
площа заштрихованої фігури знаходиться за формулою

$$S = \int_a^{c_1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{c_1}^{c_2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{c_2}^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2$, $y = x$.

Накреслимо графіки функцій $y = x^2 - 2$ і $y = x$ та знайдемо абсциси їх точок перетину A і B :

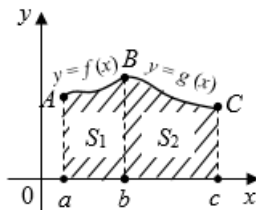
$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$



Отже, площу фігури, обмеженої заданими лініями (на малюнку це заштрихована область), обчислимо так:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2)) dx = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right) - \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)}{3} + 2 \cdot (-1) \right) = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 4,5 (\text{кв.од.}). \end{aligned}$$

Зауваження. Розглянемо випадок:

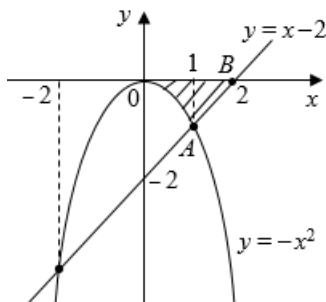


Площа фігури, обмеженої лініями ABC , де $f(x)$ – рівняння AB , а $g(x)$ – рівняння BC , і прямими $x = a$, $x = b$:

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$.

Накреслимо графіки заданих функцій:



Абсциси точок їх перетину:

$$-x^2 = x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2.$$

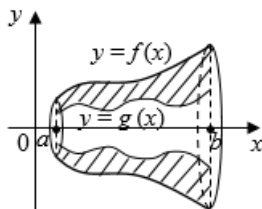
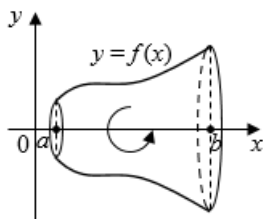
Враховуючи і лінію $y = 0$, очевидно, що шукана фігура – це криволінійний трикутник, який позначений на малюнку заштрихованим. Оскільки лінія від $(0; 0)$ до точки A визначена рівнянням $y = -x^2$, а лінія від A до B – рівнянням $y = x - 2$, то

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= - \left[\int_0^1 (-x^2)dx + \int_1^2 (x - 2)dx \right] = \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \int_1^2 (x - 2)dx = \frac{5}{6} (\text{кв.од.}). \end{aligned}$$

2. Обчислення об'ємів тіл обертання

Нехай на $[a; b]$ задана неперервна знакостала функція $y = f(x)$. Об'єм V_x тіла, утвореного обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, дорівнює

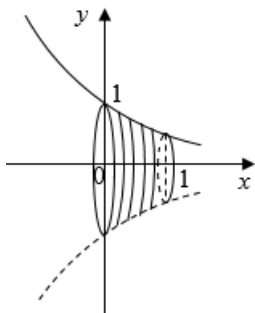
$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx. \quad (12.9)$$



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx; \quad V = \pi \cdot \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ навколо OX .

Розв'язання.

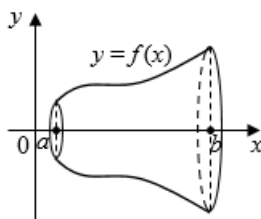


Обчислимо об'єм тіла обертання:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 e^{-2x} d(-2x) = \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2} (e^{-2} - e^0) = -\frac{\pi}{2} (e^{-2} - 1) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e^2} (\text{куб.од.}). \end{aligned}$$

Обчислення площ поверхонь тіл обертання

Нехай функція $y = f(x)$ неперервно диференційована, невід'ємна ($f(x) \geq 0$) на $[a; b]$; її графік обертається навколо осі OX , і похідна $f'(x)$ також неперервна.



Тоді площа поверхні тіла, яке утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі OX , обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (12.10)$$

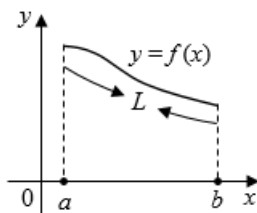
3. Довжина дуги кривої

Нехай деяка лінія є графіком неперервної функції $y = f(x)$, і похідна $f'(x)$ також неперервна. Такі лінії називаються *гладкими*.

Означення 12.2. Довжиною дуги гладкої лінії назовемо границю, до якої прямує довжина вписаної ламаної при необмеженому збільшенні числа її сторін та прямованні довжини найбільшої із них до 0.

За допомогою визначеного інтеграла довжина дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (12.11)$$



Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y = x^{\frac{3}{2}}$ від $x_1 = 1$ до $x_2 = 3$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1 + \left[\left(x^{\frac{3}{2}} \right)' \right]^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)^2} dx = \\ &= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \int_1^3 \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{1}{2}} d \left(1 + \frac{9}{4}x \right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3} \Bigg|_1^3 = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{27}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{27} \left(31\sqrt{31} - 13\sqrt{13} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо крива задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то довжина дуги кривої між $t = t_1$ і $t = t_2$ ($t_1 < t_2$):

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dx. \quad (12.12)$$

Застосування визначеного інтеграла в задачах економічного змісту

До таких задач можна віднести наступні:

1) обчислення обсягу продукції, виробленої за проміжок часу $[0, T]$ при зміні продуктивності праці:

$$V_{np} = \int_0^T f(t)dt,$$

де $f(t)$ – функція, що описує зміну продуктивності праці з часом;

2) обчислення зміни виробничих витрат, прибутку, доходу при зростанні кількості виробленої продукції;

3) обчислення середніх витрат пального автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості;

4) обчислення коефіцієнта нерівномірного розподілу податку на прибуток;

5) обчислення максимуму прибутку за часом;

6) вибір стратегії розвитку компанії, фірми, підприємства;

7) визначення загальних витрат споживачів на товар;

8) знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями;

9) знаходження середнього терміну виготовлення (освоєння) одного виробу за період освоєння від x_1 до x_2 виробів (за теоремою про середнє):

$$t_{cp.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx,$$

де $t = t(x)$ – відома функція, що описує зміну витрат часу на виготовлення виробу в залежності від степеня освоєння виробництва; x – порядковий номер виробу в партії.

Зупинимось детальніше на деяких з цих задач. Якщо $V(t)$, $D(t)$ та $P(t)$ – змінні витрати, дохід та прибуток підприємства, то їх середні значення за час від t_0 до t_1 знаходять за формулами:

$$V_c = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt, \quad D_c = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} D(t) dt,$$

$$P_c = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt. \quad (12.13)$$

Якщо $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ – функції маргінальних (граничних) витрат, доходу та прибутку відповідно при реалізації x одиниць деяких виробів, то зміни витрат, доходу та прибутку при збільшенні реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюють за формулами:

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x) dx, \quad (12.14)$$

$$D(b) - D(a) = \int_a^b D'(x) dx, \quad (12.15)$$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x) dx. \quad (12.16)$$

Задача 1. Маргінальна функція прибутку фірми має вигляд $P'(x) = 23,5 - 0,01x$. Знайти величину зростання прибутку фірми, якщо реалізація виробів зростає з 1000 до 1500 одиниць.

Розв'язання. Величину зростання прибутку фірми знайдемо за формулою (12.16):

$$\begin{aligned}
 P(1500) - P(1000) &= \int_{1000}^{1500} (23,5 - 0,01x)dx = 23,5x \Big|_{1000}^{1500} - \\
 - 0,01 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{1000}^{1500} &= 23,5(1500 - 1000) - \frac{0,01}{2} (1500^2 - 1000^2) = \\
 &= 23,5 \cdot 500 - 0,005 \cdot 500 \cdot 2500 = 11750 - 6250 = 5500(\text{грн.}).
 \end{aligned}$$

Загальний прибуток (або *дохід*, або *витрати*) за час t , можна визначити за формулами відповідно:

$$V_{\text{з}} = \int_0^{t_1} V'(t)dt, \quad D_{\text{з}} = \int_0^{t_1} D'(t)dt, \quad P_{\text{з}} = \int_0^{t_1} P'(t)dt, \quad (12.17)$$

де $V'(t)$, $D'(t)$, $P'(t)$ – швидкості зміни витрат, доходу та прибутку підприємства після початку його діяльності.

Задача 2. Швидкість зміни видатків та доходу підприємства після початку його діяльності визначаються формулами:

$$V'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}}, \quad D'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}},$$

де $V(t)$ і $D(t)$ – в млн. грн.; t – в роках.

Визначити термін, за який прибуток досяг свого максимального значення та знайти загальний прибуток, одержаний за цей час.

Розв'язання. Прибуток, дохід та витрати зв'язані співвідношенням $P(t) = D(t) - V(t)$. Максимум загального прибутку досягається тоді, коли $P'(t) = 0$, а оскільки $P'(t) = D'(t) - V'(t)$, то $P'(t) = 0$ при $D'(t) = V'(t)$. Іншими словами, існує такий час t , коли швидкості зміни доходу та видатків

рівні. Отже, оптимальний час t для прибутку підприємства одержуємо з умови рівності похідних $D'(t) = V'(t)$:

$$5 + 2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 3t^{\frac{2}{3}} = 12 \Rightarrow t^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8(\text{років}).$$

Підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку: (скористаємось формулою (12.17))

$$P_3 = \int_0^8 P'(t)dt = \int_0^8 (D'(t) - V'(t)) dt = \int_0^8 \left(17 - t^{\frac{2}{3}} - 5 - 2t^{\frac{2}{3}}\right) dt = \\ = \int_0^8 \left(12 - 3t^{\frac{2}{3}}\right) dt = 12t \Big|_0^8 - 3 \cdot \frac{t^{\frac{5}{3}} \cdot 3}{5} \Big|_0^8 = \\ = 12 \cdot 8 - \frac{9}{5} \cdot 8^{\frac{5}{3}} = 96 - \frac{9}{5} \cdot \sqrt[3]{(2^3)^5} = 96 - \frac{9 \cdot 2^5}{5} = \\ = 96 - \frac{9 \cdot 32}{5} = \frac{480 - 288}{5} = \frac{192}{5} = 38,4(\text{млн. грн}).$$

Задача 3 (зі стратегії розвитку компанії). Компанія повинна обрати одну з двох можливих стратегій розвитку:

- 1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання і одержувати 3 млн. грн. прибутку кожного року протягом 10 років;
- 2) закупити на 15 млн. грн. більш досконале обладнання, яке дасть змогу одержувати 5 млн. грн. прибутку щороку протягом 7 років.

Яку стратегію розвитку треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка становить 10%? (Іншими словами, яке вкладення капіталу буде більш ефективним?)

Розв'язання. Якщо щорічний дохід змінюється з часом і описується функцією $f(t)$, і відсоток нараховується неперервно з відсотковою ставкою $r = \frac{P}{100}$, то дисконтований дохід

за час T дорівнює визначеному інтегралу

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt. \quad (12.18)$$

(При неперервному нарахуванні відсотків кінцева сума $K_t = K_0e^{rt}$. Якщо $K_t = f(t)$ – функція часу, то $K_0 = f(t)e^{-rt}$ – дисконтована сума до моменту часу $t \Rightarrow$ отже, повна дисконтована сума за час t обчислюється за формулою $\int_0^t f(\tau)e^{-r\tau}d\tau$).

За умовою задачі $p = 10\%$, отже, $r = \frac{10}{100} = 0,1$. Отже, для *першої стратегії* розвитку значення прибутку за 10 років буде (за формулою (12.18)):

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{10} 3 \cdot e^{-0,1t} dt - 10 = 3 \cdot \left. \frac{-1}{0,1} e^{-0,1t} \right|_0^{10} - 10 = \\ &= -30 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} + 30 \cdot e^0 - 10 = 20 - 30 \cdot e^{-1} = 20 - \frac{30}{2,718} \approx \\ &\approx 8,96 (\text{млн. грн.}). \end{aligned}$$

Для *другої стратегії* одержимо:

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_0^7 5 \cdot e^{-0,1t} dt - 15 = -\left. \frac{5}{0,1} e^{-0,1t} \right|_0^7 - 15 = \\ &= -50 (e^{-0,7} - 1) - 15 = 50 - 15 - 50 \cdot e^{-0,7} = 35 - 50 \cdot e^{-0,7} \approx \\ &\approx 10,2 (\text{млн. грн.}). \end{aligned}$$

Отже, саме другу стратегію доцільно обрати для подальшого розвитку компанії.

Розглянуті приклади не вичерпують усіх можливих застосувань визначеного інтеграла в економіці і бізнесі, але вони ілюструють прикладну ефективність цього поняття.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Визначений інтеграл та його застосування"

Варіант 1.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_1^3 \left(x^5 - 7 \cos x - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx; & \text{б)} \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}; \\ \text{в)} \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}}; & \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \cos x dx. \end{array}$$

2. Обчислити невласні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx; & \text{б)} \int_0^1 x \ln x dx. \end{array}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0, 0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$;

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 4x$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 8x$ навколо осі Ox від вершини до точки з абсцисою $x = 6$.

Варіант 2.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_{-5}^0 \left(x^2 - 4 \sin x + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) dx; & \text{б)} \int_{-1}^0 \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x - 5}; \\ \text{в)} \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}; & \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin 3x dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx; & \text{б)} \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}. \end{array}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x - 6$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^5$, $y = \sqrt{x}$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y = x^3$ при $x \in \left[0; \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \right]$ навколо осі Ox .

Варіант 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_{-2}^7 \left(x^6 - \frac{5}{x^2} + \frac{9}{\cos^2 x} \right) dx; & \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx; \\ \text{в)} \int_{4\sqrt{2}}^8 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}; & \text{г)} \int_0^2 \ln(3x+1) dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $xy = 1$ і прямою $x = 4$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \frac{6}{x^2 - 1}$ між точками з абсцисами $2 \leq x \leq 3$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 3x + 4$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $9y^2 = x(3-x)^2$ при $x \in [0; 3]$ навколо осі Ox .

Варіант 4.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^4 \left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sin^2 x} - e^x \right) dx; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x};$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}; \quad \text{г) } \int_1^2 x \log_2 x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 4 + \ln \cos x$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2x + 3$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^2$; $xy - 1$; $x = 0$; $y = 4$ навколо осі Oy .

Варіант 5.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1} dx;$

б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$

в) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln x - 1}} dx;$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin 3x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x dx;$

б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $-2 \leq x \leq 2$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = y + 4$, $y = 0$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кола $x^2 + y^2 = 9$ при $y \in [-2; 1]$ навколо осі Oy .

Варіант 6.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 (e^x + 5)^4 e^x dx;$

б) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2};$

в) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$а) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1};$$

$$б) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $9y = x^2$ і $y^2 = 9x$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками з абсцисами $1 \leq x \leq 9$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \frac{x^2 + 1}{2}$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = 6x - x^2$; $x + y - 6 = 0$ навколо осі Ox .

Варіант 7.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$а) \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 4)^2};$$

$$б) \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx;$$

$$в) \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx;$$

$$г) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$а) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$б) \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 16x$, $y = 4x$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^3$, $x = 0$, $xy = 1$, $y = 2$ навколо осі Ox .

Варіант 8.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt{1+xdx};$

б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx;$

г) $\int_0^1 x \ln(x+3) dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x};$

б) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^4 - 2x^2$ і $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 2\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ліній $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ навколо осі Ox .

Варіант 9.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$

б) $\int_1^2 \frac{3x^4 - 2x\sqrt{x} + 9}{x} dx;$

в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{a)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x dx}{1+9x^2};$$

$$\text{б)} \int_0^1 \ln x dx.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ і прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = x^{\frac{3}{2}}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$ навколо осі Oy .

Варіант 10.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{a)} \int_1^4 \left(x^8 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2 + 1} \right) dx; \quad \text{б)} \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1};$$

$$\text{в)} \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx; \quad \text{г)} \int_1^e \ln^2 x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{a)} \int_1^{\infty} \frac{2x dx}{x^4 + 1}; \quad \text{б)} \int_{-7}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x^3 - x$ і $y = 2x$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ між точками $O(0,0)$ і $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 6$, $y = 1$, $y = 6$, $x = 0$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{3}{2} \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right)$ між точками $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$

навколо осі Ox .

Варіант 11.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_2^5 \frac{2x-7}{x+5} dx$;

б) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$;

г) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arctg} x dx$.

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_{e^4}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 3)^3}$;

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 3x + 4$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $3y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = 2\sqrt{x}$ при $x \in [1; 3]$ навколо осі Ox .

Варіант 12.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^9 \frac{(5 - 3x^3)^2}{\sqrt{x}} dx$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$;

г) $\int_1^e x^4 \ln x dx$.

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+6}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ і $y = x^5$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \frac{5}{x^2 - 1}$ між точками з абсцисами $2 \leq x \leq 5$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $(0; 0)$ до точки $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ навколо осі Ox .

Варіант 13.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2-1} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$\text{г) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+3x+2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 4+x$ і прямою $x = 2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ між точками з абсцисами $\ln 3 \leq x \leq \ln 8$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 2$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболу $y^2 = 12x$ від вершини до точки з абсцисою $x = 9$ навколо осі Ox .

Варіант 14.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x};$

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x};$

в) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt{x+3}-1};$

г) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(4x+3)^4};$

б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні катеноїда, утвореного обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{5}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}} \right)$ навколо осі Ox при $0 \leq x \leq 5$.

Варіант 15.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{a)} \int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$\text{б)} \int_3^5 \frac{dx}{x^3 - 4x};$$

$$\text{в)} \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}};$$

$$\text{г)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{a)} \int_0^{\infty} \frac{2x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 16}};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-5x}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 2x + 3$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 5 + \ln \sin x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 3 - 2x$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $x = 0$ до точки $x = \frac{\pi}{6}$ навколо осі Ox .

Варіант 16.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{a)} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$$

$$\text{б)} \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$\text{в)} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$$

$$\text{г)} \int_0^2 x^2 e^{-2x} dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{б) } \int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt{10-x}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги, кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq \frac{1}{8}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox лінії $x = 2e^t \sin t$, $y = 2e^t \cos t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Варіант 17.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{a) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}};$$

$$\text{б) } \int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx;$$

$$\text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4x};$$

$$\text{г) } \int_{-2}^2 (x-1) \sin \pi x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \operatorname{arcctg} x dx;$$

$$\text{б) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{(x+3)^4}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{1-x}$, $y = x+1$ і $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 9$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x = y^2$, $xy = 8$, $x = 0$, $y = 4$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням одної арки синусоїди $y = \sin x$ навколо осі абсцис.

Варіант 18.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^3}};$

б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}};$

в) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x};$

г) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + 2x^2};$

б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис петлі лінії $9y^2 = x(3-x)^2$.

Варіант 19.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$

в) $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{3x+4}};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \ln(x+1)dx.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x^4$ і $y = x^2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = 5x^3$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{6x}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 0$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кола $x^2 + y^2 = 9$ при $x \in [-2; 1]$ навколо осі Ox .

Варіант 20.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx;$$

$$\text{в) } \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2};$$

$$\text{г) } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \arctg x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{б) } \int_{-7}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = (x+1)^2$ і $y^2 = x+1$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \cos x$ між точками з абсцисами $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, $y = 0$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кола $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$ навколо осі ординат.

Варіант 21.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_1^9 \left(x^8 + 2 \sin x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx; & \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \\ \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx; & \text{г) } \int_1^e \ln^2 x dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_0^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx; & \text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}. \end{array}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 16x$ і прямою $y = 4x$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{2}{3} \sqrt{(x - 5)^3}$ між точками з абсцисами $5 \leq x \leq 9$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ при $x \in [0; 1]$ навколо осі абсцис.

Варіант 22.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_4^5 \frac{dx}{x^2 - 3x}; & \text{б) } \int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x} dx}{1 + e^{3x}}; \\ \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4 + 5x)^3}}; & \text{г) } \int_0^2 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_1^{\infty} \frac{1 - \ln x}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ навколо осі Oy .

Варіант 23.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^2 (x-2)e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 3 - 2x$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 4\sqrt{x}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 9$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$, $y = x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y = x^3$ при $x \in [0; 1]$ навколо осі Ox .

Варіант 24.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^5 - \frac{7}{x^2} \right) dx; & \text{б)} \int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 8} dx; \\ \text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx; & \text{г)} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; & \text{б)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{12 - 3x}}. \end{array}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^2$, $y = x$ і $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ між точками з абсцисами $-1 \leq x \leq 1$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$ навколо осі Oy .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = 7 \cos^3 t$, $y = 7 \sin^3 t$ навколо осі ординат.

Варіант 25.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_1^9 x \sqrt[3]{1 - x} dx; & \text{б)} \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \\ \text{в)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{3x + 4}}; & \text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3) \sin x dx. \end{array}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(4x+3)^2};$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)^2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 + 2x - x^2$ і прямою $y = x + 1$.

4. Обчислити довжину дуги, кривої $y = \ln(1 - x^2)$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 4$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ між точками $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ навколо осі Ox .

Варіант 26.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{5x^3 - 8x + 4}{x^2} dx;$$

$$\text{в) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}};$$

$$\text{г) } \int_1^2 x \log_2 x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням косинусоїди $y = \cos x$ навколо осі Ox .

Варіант 27.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3 + 4x};$

б) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x - \cos x};$

г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x^2) dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1};$

б) $\int_1^2 x \ln(x-1) dx$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і прямою $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 4$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $xy = 8$, $y = 0$, $x = 4$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy лінії $x = 5e^t \sin t$, $y = 5e^t \cos t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Варіант 28.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^7 \frac{x^3}{\sqrt[3]{7+x^2}} dx;$

б) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 2x};$

в) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^2}};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(5x-3)^2};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+3x+2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $3y = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = 2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = 8 + \ln \cos x$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $y = \operatorname{ctg} x$ від точки $x = \frac{\pi}{6}$ до точки $x = \frac{\pi}{4}$ навколо осі Ox .

Варіант 29.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+4x-5};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$\text{в) } \int_1^e \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} x e^{-3x} dx;$$

$$\text{б) } \int_4^5 \frac{dx}{x(x-4)^2}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = 0$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 4$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{7}{2} \left(e^{\frac{x}{7}} + e^{-\frac{x}{7}} \right)$ навколо осі Ox .

Варіант 30.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_4^9 \left(2x^5 + \frac{9}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{x}{4} dx;$

в) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx;$

б) $\int_3^4 x \ln(x-2) dx.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 2$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 8$.

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ навколо осі Ox .

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ при $x \in [0; 2]$ навколо осі абсцис.

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \frac{3x^3 - 6x^2 + 13}{x} dx.$

Розв'язання. За формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для того, щоб обчислити визначені інтеграли, спочатку по-

трібно знайти первісні. У цьому прикладі це можна зробити миттєво за таблицею невизначених інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{3x^3 - 6x^2 + 13}{x} dx &= \int_1^3 \left(3x^2 - 6x + \frac{13}{x} \right) dx = \\ &= \left(x^3 - 3x^2 + 13 \ln x \right) \Big|_1^3 = 27 - 27 + 13 \ln 3 - 1 + 3 - 13 \ln 1 = \\ &= 2 + 13 \ln 3. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int_0^{\ln 5} e^x \sqrt{e^x + 4} dx.$$

Розв'язання. Для того, щоб знайти первісну, необхідно виконати заміну змінної. Звернемо увагу на те, що процедура заміни змінної у визначеному інтегралі відрізняється від такої у невизначеному, а саме: у разі введення нової змінної ми зобов'язані замінити й границі інтегрування, обчислити первісні з новими границями, до старої змінної, зрозуміло, повертатися не потрібно.

$$\int_0^{\ln 5} e^x \sqrt{e^x + 4} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x + 4 \\ du = e^x dx \\ u_{\text{Н}} = e^0 + 4 = 1 + 4 = 5 \\ u_{\text{В}} = e^{\ln 5} + 4 = 5 + 4 = 9 \end{array} \right] = \int_5^9 \sqrt{u} du =$$

$$= \int_5^9 u^{\frac{1}{2}} du = \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_5^9 = \frac{2}{3} u \sqrt{u} \Big|_5^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 5\sqrt{5}) = 18 - \frac{10\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{в) } \int_{-4}^0 \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}.$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат, знайдемо первісну, скористаємося формулою Ньютона - Лейбніца:

$$\begin{aligned}\int_{-4}^0 \frac{dx}{x^2 + 8x + 20} &= \int_{-4}^0 \frac{dx}{(x^2 + 8x + 16) - 16 + 20} = \int_{-4}^0 \frac{dx}{(x + 4)^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{atcrg} \frac{x + 4}{2} \Big|_{-4}^0 = \frac{1}{2} (\operatorname{atcrg} 2 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2.\end{aligned}$$

г) $\int_1^e \ln^2 x dx.$

Розв'язання. Інтегруємо частинами:

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln^2 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \\ dv = dx \\ du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} \\ v = x \end{array} \right] = x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{array} \right] = e \cdot \ln^2 e - \\ &- 1 \cdot \ln^2 1 - 2 \left(x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} \right) = e - 2e \cdot \ln e + \\ &+ 2 \cdot \ln 1 + 2x \Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.\end{aligned}$$

2. Обчислити невластні інтеграли (або довести їхню розбіжність):

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$

Розв'язання. Інтеграл невласний, оскільки підінтегральна функція має розрив на верхній межі. Для знаходження первісної виділимо повний квадрат у знаменнику:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) - 4 + 3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x - 2)^2 - 1} = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x - 2 \\ du = dx \\ u_H = 0 - 2 = -2 \\ u_B = 1 - 2 = -1 \end{array} \right] = \int_{-2}^{-1} \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| \Big|_{-2}^{-1 - \varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{-1 - \varepsilon - 1}{-1 - \varepsilon + 1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-2 - 1}{-2 + 1} \right| = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon} \right| - \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln 3 = \infty - \frac{1}{2} \ln 3 = \infty, \end{aligned}$$

отже, невласний інтеграл розбігається.

$$\text{б) } \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

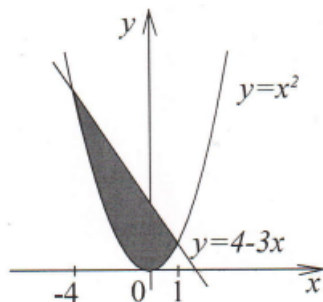
Розв'язання. Інтеграл невласний із нескінченими границями. Для знаходження первісної скористаємося тригонометричною підстановкою:

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{1}{\sin t \cos t} \sin t} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} < \infty,$$

отже, невласний інтеграл збігається.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4 - 3x$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру:



Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2, & x^2 + 3x - 4 = 0; \\ y = 4 - 3x; & x_1 = -4; x_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, абсциси точок перетину $x_1 = -4$ і $x_2 = 1$. Обчислимо площу заштрихованої фігури за формулою

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \\ &= \left(4x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{125}{6} \text{ (од}^2\text{)}. \end{aligned}$$

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \arcsin e^{-x}$ між точками з абсцисами $0 \leq x \leq 1$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (12.11). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x} + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{1 - e^{-2x}}.$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \left[\begin{array}{l} u^2 = 1 - e^{-2x} \\ 2udu = 2e^{-2x} dx \\ dx = \frac{udu}{e^{-2x}} = \frac{udu}{1-u^2} \\ u_H = 1 - 1 = 0 \\ u_B = \sqrt{1 - e^{-2}} \end{array} \right] = \\
&= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{udu}{u(1-u^2)} = - \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{du}{u^2 - 1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} = \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^{-2}}-1}{\sqrt{1-e^{-2}}+1} \right| + \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^{-2}}+1}{\sqrt{1-e^{-2}}-1} \right| \text{ (од.)}.
\end{aligned}$$

5. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{\frac{x}{2}}$, $x = \ln 2$ навколо осі Ox .

Розв'язання. Знайдемо точку перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{\frac{x}{2}}; \end{cases} \Rightarrow e^x = e^{\frac{x}{2}}; \Rightarrow x = \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

За формулою (12.9) маємо:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx = \pi \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - e^x) dx = \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) \Big|_0^{\ln 2} = \pi \left(\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - e^{\ln 2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (од.)}^3.
\end{aligned}$$

6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ навколо осі Oy .

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (12.10). Для цього знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення:

$$x'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t);$$

$$y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t);$$

$$\begin{aligned} (x'_t)^2 + (y'_t)^2 &= e^{2t} [(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2] = \\ &= e^{2t} (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \\ &\quad + \sin^2 t) = 2e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{2t}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу:

$$\begin{aligned} S_y &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \cdot \sqrt{2} e^t dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t dt = \end{aligned}$$

(для знаходження первісної потрібно інтегрувати цей вираз частинами двічі (це "повернений" інтеграл))

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{array}{ll} u = e^{2t}, & du = 2e^{2t} dt \\ dv = \sin t dt, & v = -\cos t \end{array} \right] = -2\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \cdot \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ 4\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t dt = \left[\begin{array}{ll} u = e^{2t}, & du = 2e^{2t} dt \\ dv = \cos t dt, & v = \sin t \end{array} \right] = \\ &= 2\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t dt = \end{aligned}$$

$$= 6\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t dt.$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно невідомого інтегралу.
Для цього перепишемо

$$S_y = 6\sqrt{2}\pi - 4S_y \quad \Rightarrow \quad 5S_y = 6\sqrt{2}\pi,$$

звідси маємо

$$S_y = \frac{6\sqrt{2}\pi}{5} \text{ (од.}^2\text{)}.$$

Тема 13. Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

У цьому розділі вивчатимемо функції, які залежать від декількох змінних. Оскільки більшість понять для функції n змінних можна перенести на випадок $n = 2$, то розглядатимемо функцію $f(x_1, x_2)$ (або $f(x_1, x_2, x_3)$).

Означення 13.1. Нехай X – множина пар (x_1, x_2) дійсних чисел, а Z – певна множина дійсних чисел. Якщо кожній парі значень $(x_1^*, x_2^*) \in X$ за певним правилом ставиться y відповідність одне певне значення $z \in Z$, то z називають функцією двох незалежних змінних x_1 і x_2 й позначають:

$$z = f(x_1, x_2).$$

При цьому X – область визначення, а Z – множина значень функції f .

Поняття функції n змінних вводиться аналогічним чином.

Подібно до того, як функція $y = f(x)$ геометрично зображується лінією на площині, можна геометрично тлумачити і

функцію $z = f(x_1, x_2)$: сукупність точок $(x_1; x_2; z)$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ визначає деяку *поверхню*.

Частинні похідні функції багатьох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$. Зафіксуємо, наприклад, $x = x_0 \in X$. Тоді функція $f(x_0, y)$ – це функція однієї змінної y . Надамо цій змінній приріст Δy , тоді

$$f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y) = \Delta_y z$$

– це *частинний приріст* по y функції f у точці (x_0, y) . Границя (якщо вона існує)

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}$$

називається *частинною похідною першого порядку функції* $z = f(x, y)$ по y в точці (x_0, y) і позначається символом $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f}{\partial y}$, або $z'_y(x, y)$, або $f'_y(x, y)$.

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної першого порядку функції $z = f(x, y)$ по x ($y_0 \in X$).

Отже, функція декількох змінних має стільки частинних похідних першого порядку, скільки у неї цих змінних. При цьому, частинну похідну по одній із змінних отримуємо у припущенні, що всі інші змінні є сталими величинами (але тільки в процесі диференціювання!). При обчисленні похідних використовуємо відомі правила та формули диференціювання функції однієї змінної.

Зауважимо, що у випадку функції двох і більшого числа змінних з існування частинних похідних не впливає навіть неперервність функції.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції

$$z = x^2 y - 3y^2 + 5x.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= (\underline{x^2 y})'_x - (\underline{3y^2})'_x + (\underline{5x})'_x = \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad \text{стала} \qquad \text{стала} \qquad \text{змінна} \\
 &= y \cdot 2x - 0 + 5 \cdot 1 = 2xy + 5; \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= (\underline{x^2 y})'_y - (\underline{3y^2})'_y + (\underline{5x})'_y = \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad \text{стала} \qquad \qquad \text{стала} \\
 &= x^2 \cdot 1 - 3 \cdot 2y + 0 = x^2 - 6y.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = (3x - 4y)^4.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= ((3x - 4y)^4)' \cdot (3x - 4y)'_x = 4(3x - 4y)^3 \cdot 3 = 12(3x - 4y)^3; \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= ((3x - 4y)^4)' \cdot (3x - 4y)'_y = 4(3x - 4y)^3 \cdot (0 - 4) = \\
 &= -16(3x - 4y)^2.
 \end{aligned}$$

Гradient функції

Для характеристики напрямку і величини максимальної швидкості зміни функції в точці використовується поняття *gradienta*.

Gradientом функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точці $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ називається вектор, координати якого дорівнюють відповідно значенням частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ в точці $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Позначають градієнт так:

$$\operatorname{grad} z(x_1^*, \dots, x_n^*) = \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, \dots, x_n^*)}, \dots, \left. \frac{\partial z}{\partial x_n} \right|_{(x_1^*, \dots, x_n^*)} \right).$$

Приклад 3. Знайти градієнт і його модуль для функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точці $M(1; -1; 2)$.

Розв'язання. Обчислюємо частинні похідні першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)' \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_x = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (2x + 0 + 0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{0 + 2y + 0}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{0 + 0 + 2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M(1; -1; 2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Отже, градієнт буде такий:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Його модуль:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2} = \sqrt{\frac{6}{6}} = 1.$$

Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Частинні похідні функції багатьох змінних є функціями тих самих змінних, отже, також можуть мати частинні похідні, які називаються *частинними похідними другого порядку*.

Наприклад, функція $z = f(x, y)$ має 4 частинні похідні 2-го порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які визначаються наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\}$$

– “чисті” частинні похідні другого порядку,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

– *мішані* частинні похідні другого порядку.

Наприклад, знайдемо частинні похідні першого та другого порядків для

$$z = x^2 y + x y^2.$$

Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2yx, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

Не випадково, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$: мішані неперервні в області X похідні рівні.

Аналогічно обчислюються і похідні більш високого порядку, якщо процес подальшого диференціювання можливий, наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \right) \text{ і т.п.}$$

Якщо існують $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

називається *повним диференціалом першого порядку* для $z = f(x, y)$. При цьому, $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ і $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ – *частинні диференціали*. Другий, третій та наступні диференціали можна записати символічно у вигляді:

$$\begin{aligned} d^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \\ &\dots\dots\dots \\ d^n z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y). \end{aligned}$$

Наприклад, знайти $d^2 z$ для $z = x^2 y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6yx^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y^2 x \Rightarrow d^2 z = 2y^3 dx^2 + 2 \cdot 6xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Екстремум функції багатьох змінних

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана в області $\Omega \in \mathbb{R}^2$. В точці $(x_0, y_0) \in \Omega$ функція має *максимум* (*мінімум*), якщо для всіх точок із околу точки (x_0, y) справедливо:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Точка (x_0, y_0) при цьому називається *точкою максимуму* (*мінімуму*).

Теорема 13.1. (*необхідна умова екстремуму*). Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні першого порядку в точці локального екстремуму (x_0, y_0) , то

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Зауважимо, що функція може мати екстремум також в тих точках, де принаймні одна з частинних похідних не існує.

Точки, в яких перші частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ перетворюються в нуль або не існують, називаються *критичними* (або *стаціонарними*) *точками* цієї функції.

Умови теореми 13.1 не є достатніми умовами існування екстремуму, тільки необхідними.

Теорема 13.2. (*достатні умови екстремуму*). Нехай функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в деякому околі стаціонарної точки (x_0, y_0) . Покладемо

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} \equiv A, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \equiv C, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \equiv B,$$

і складемо вираз $\Delta = AC - B^2$.

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то в точці (x_0, y_0) функція має локальний екстремум, причому при $A < 0$ – локальний максимум, а при $A > 0$ – локальний мінімум;

2) якщо $\Delta < 0$, то в (x_0, y_0) немає екстремума;
 3) якщо $\Delta = 0$, то точку (x_0, y_0) потрібно перевіряти іншими методами.

Приклад 1. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$z = 2x^2 - 4x + y^2 - 6y.$$

Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6.$$

Із системи рівнянь $\begin{cases} 4x - 4 = 0, \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$ маємо точку: $A(1; 3)$ – стаціонарна точка.

Знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \Rightarrow A = 4, C = 2, B = 0.$$

Складаємо величину Δ : $\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 2 - 0 = 8 > 0$. Отже, згідно з висновками теореми 13.2, в точці $M(1; 3)$ є екстремум (оскільки $\Delta > 0$), причому – мінімум, оскільки $A = 4 > 0$

$$Z_{\min} = Z(1; 3) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3^2 - 6 \cdot 3 = 2 - 4 + 9 - 18 = -11.$$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^4 + 2xy + y^4 + 2.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 2y = 0, \\ 2x + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^3 + y = 0, \\ x + 2y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y &= -2x^3 \\ x + 2 \cdot (-2x^3)^3 &= 0 \\ x - 16x^9 &= 0 \\ x(1 - 16x^8) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x^8 &= \frac{1}{16}, \\y_1 &= 0; & x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_3 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \\& & y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; & y_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Отже, маємо три стаціонарні точки: $M_1(0;0)$,
 $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 = A(x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 = C(x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 = B.$$

I) Перевіряємо точку $M_1(0;0)$. Значення частинних похідних другого порядку в цій точці:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 12x^2 = 12 \cdot 0 = 0 = A; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 12y^2 = 12 \cdot 0 = 0 = C; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2 = B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta = AC - B^2 =$$

$= 0 - 2^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ в точці $M_1(0;0)$ extr немає.

II) Перевіряємо точку $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 12x^2 = 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12 \cdot \frac{2}{4} = 6 = A; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 12y^2 = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6 = C; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2 = B \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 2^2 = 36 - 4 = 32 > 0 \Rightarrow$ в точці M_2 є extr, причому min, оскільки $A = 6 > 0$.

$$\begin{aligned} Z_{\min} = Z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 2 = \frac{4}{16} - \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{4}{16} + 2 = \frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

III) Перевіряємо точку $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_3} = 6 = A; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_3} = 6 = C; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_3} = 2 = B \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta = 32 > 0 \Rightarrow M_3$ є точкою min, оскільки $A > 0$.

$$Z(M_3) = Z(M_2) = \frac{3}{2}.$$

Дослідження на екстремум у випадку $n > 2$

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ другий диференціал $d^2u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)^2$ є квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$. Матриця цієї квадратичної форми – це матриця, елементи якої $a_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ ($j = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, n}$) є частинними похідними 2-го порядку функції $u = f(x_1, \dots, x_n)$.

Цю матрицю називають *матрицею Гессе* й позначають так:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називають *гессіаном*.

Зауважимо, що умови 1) і 2) в теоремі 13.2 про достатні умови локального екстремуму для функції багатьох змінних означають, що: 1) якщо квадратична форма $d^2u(M_0)$ є додатно-визначеною, то M_0 – точка локального мінімуму; якщо $d^2u(M_0)$ є від'ємно-визначеною, то M_0 – точка локального максимуму; 2) якщо $d^2u(M_0)$ є знакозмінною квадратичною формою, то в M_0 функція не має локального екстремуму.

Необхідною й достатньою умовою знаковизначеності квадратичної форми є **критерій Сільвестра**: Для того, щоб квадратична форма була додатно-визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори матриці цієї квадратичної форми були додатними ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$). Для від'ємно-визначеної квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів чергувалися, починаючи з від'ємного ($\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$).

Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{то}$$

головними мінорами матриці A називаються визначники

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta A.$$

Приклад 1. $u(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2 \rightarrow$
extr.

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial x} = -6 - 2x = 0 \Rightarrow x = -3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2 - 2z = 0 \Rightarrow z = -1.$$

Отже, $M(-3; 2; -1)$ – стаціонарна точка.

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0.$$

Складаємо матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

головні мінори:

$$\Delta_1 = -2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow$$

d^2u є від'ємно-визначеною квадратичною формою $\Rightarrow$ в точці M досягається максимум:

$$u_{\max} = u(-3, 2, -1) = 8 - 6 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 9 - 4 - 1 =$$

$$= 8 + 18 + 8 + 2 - 14 = 22.$$

Приклад 2. Дослідити функцію $u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x$ на екстремум.

1) Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - y + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - x, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2(z + 1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2y = x, \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2y - y &= -1 \Rightarrow 3y = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{3}, \\ \Rightarrow x &= 2y \Rightarrow x_0 = -\frac{2}{3}, \\ 2z &= -2 \Rightarrow z_0 = -1. \end{aligned}$$

Отже, $M_0 \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1 \right)$ – стаціонарна точка.

2) Для перевірки виконання достатніх умов екстремума в M_0 знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0.$$

$$\text{Матриця Гессе: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{гессіан: } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ головні мінори:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6.$$

Усі головні мінори додатні, отже, $M_0\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ – точка *локального мінімуму*:

$$u_{\min} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 0 - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Приклад 3. $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 + 6xy - 4z \rightarrow \text{extr.}$

а) Знайдемо стаціонарні точки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 + 6y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 3y^2 + 6x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0, \\ y^2 + 2x = 0, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= -2y, & y &= -\frac{x^2}{2}, \\ y^2 &= -2x & \Rightarrow & \frac{x^4}{4} + 2x = 0 \end{aligned}$$

$$x^4 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \Rightarrow y_1 = 0; \\ x^3 + 8 &= 0 \Rightarrow x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -2. \end{aligned}$$

Отже, $M_1(0; 0; 2)$, $M_2(-2; -2; 2)$ – стаціонарні точки.

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6. \end{aligned}$$

Для M_1 :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = -36, \quad \Delta_3 = -72 \Rightarrow$$

в M_1 екстремуму немає.

Для M_2 :

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = -12, \quad \Delta_2 = 144 - 36 > 0,$$

$\Delta_3 = 144 \cdot 2 - 72 > 0 \Rightarrow$ в M_2 також немає екстремуму.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функцій багатьох змінних"

Варіант 1

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin(xy^3)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ в точці $M(1; -3; 5)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos \frac{x}{y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 2$.

8. Знайти похідну функції $u = x^2y + y^2z + xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-3; 2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$,

якщо $B(0; 5; 7)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 2

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{2x + 5y}{x^2 - y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = e^{5x^4 - 3y^2}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln \cos(x^2 - y^2 + 6yz)$ в точці $M(0; -1; 5)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{x^2 + y^3}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = 2xydx + x^2dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y - 6 = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = \ln(xy + yz + xz)$ та обчислити її значення в точці $A(1; 2; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2; 2; 4)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 3

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{5xy^3}{\sqrt{4x - y}}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \cos\left(\frac{x + y}{x - y}\right)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$ в точці $M\left(0; 0; \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos(4x - 5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy)$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y - 6 = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = x^z - 5xyz$ та обчислити її значення в точці $A(-4; 2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3; 3; 8)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 4

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(2x - 3y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{\sqrt{xy}}{x - 2y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$ в точці $M\left(\frac{\pi}{2}; 2; 1\right)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(5x^3 + 3y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$;

$$x + y + 2 = 0.$$

8. Знайти похідну функції $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-2; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 1; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 5

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{9xy}{4 - x + y^2}$.
2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{3x + y^2}}{x} \right)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = x \cos y - z \sin x + 3xyz$ в точці $M(0; \pi; 4)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin(xy^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 10$ в області D , обмеженої лініями $x = \pm 1$; $y = \pm 1$.

8. Знайти похідну функції $u = e^{xz - y^2}$ та обчислити її значення в точці $A(0; 1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-3; 5; 1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 6

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos(4x + 5y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x\sqrt{2x^4 - 3y^5}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 2y^3 - 3z})$ в точці $M(1; 2; -5)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{tg}(4x - 5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}dx - \left(\frac{x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = xy(4 - x - y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4 - 2x^2 - y^2$ в області D , обмеженої лініями $y = 0$; $y = \sqrt{1 - x^2}$.

8. Знайти похідну функції $u = xe^z - ye^x$ та обчислити її значення в точці $A(-6; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(9; 1; -3)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 7

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(16 - x^2 - y^2)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \cos(x + \sqrt{xy})$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arccos \sqrt{xy} - 4xz^3$ в точці $M(4; 0; -3)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos \sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $\left[\frac{x-2y}{(y-x)^2} \right] dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2} - y^2 \right] dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в області D , обмеженої лініями $y = 0$; $y = x + 2$; $x = 2$.

8. Знайти похідну функції $u = xe^{y^2-z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(4; 1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-1; 0; 5)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 8

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = 5y + \frac{4x}{12 - 3x + 4y}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln(\sqrt{xy} + 5x - 3y)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+y)}{8z^2}$ в точці $M\left(0; \frac{\pi}{2}; 5\right)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arcsin(2x - y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + y^2 + xy - 4x + 5y$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

8. Знайти похідну функції $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ та обчислити її

значення в точці $A(3; 4; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 2; 6)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 9

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x \cos(3y^8)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln(x + y) - \sqrt{x^2 - z^2}$ в точці $M(4; -3; 0)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(7x^2 + 8y^3)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1 \right) dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = xy(1 - x - y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в області D , обмеженої лініями $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ та обчислити її значення в точці $A(4; 1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-3; 5; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 10

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z =$

$$\frac{85}{32 - 2x^2 - 8y^2}.$$

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = e^{-\frac{x}{y}}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{x} \sin \frac{y}{z}$ в точці $M(9; \pi; 6)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^3 y^2 (2 - x - y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

8. Знайти похідну функції $u = x^2 y + y^2 z + xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-4; -3; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 1; 0)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 11

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{5x - y}}{x + 6}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln \sin(x^2 z^2 - 6y)$ в точці $M(4; 0; -2)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = xe^{x+y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y dy)$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти

функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ в області D , обмеженої лініями $x + 2y - 4 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$, $x = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = (x+y)^z$ та обчислити її значення в точці $A(8; -3; 0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(7; 2; -1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 12

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(16x^2 - 25y^2)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x^y$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arcsin\left(\frac{x^2}{z} - y^3\right)$ в точці $M(1; 0; 2)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(3x - \sqrt{y})$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdy}{x^2 + y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx$ є повним диференціалом функції. Як-що так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

8. Знайти похідну функції $u = (x + 2y + 3z)^2$ та обчислити її значення в точці $A(-5; 3; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 5; -2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити зна-

чення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 13

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{12 - 3x^2 + 2y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{z}x^y$ в точці $M(1; 2; 9)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arcsin(4x + 5y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = e^y dx + (xe^y - 2y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy - 2$ в області D , обмеженої лініями $y = 0$, $y = 4x^2 - 4$.

8. Знайти похідну функції $u = (xy)^z$ та обчислити її значення в точці $A\left(\frac{1}{2}; 2; 3\right)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B\left(\frac{3}{2}; 4; -6\right)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 14

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{5}{x^2 + 9y^2 - 36}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точці $M(4; 0; 5)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 \sin(x - y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2}$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = e^{\frac{y}{z}}(x^2 + y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - 3x - 2y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$.

8. Знайти похідну функції $u = x \cdot \ln(yz + x^2)$ та обчислити її значення в точці $A(4; -2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 1; -3)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 15

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = 5^{\frac{y}{x}}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{y} + \sqrt{z})$ в точці $M(1; 16; 9)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{\sqrt{x+y}}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = \left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right) y dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy + 2,5y^2 - 2x$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$,

$$y = x, y = 4.$$

8. Знайти похідну функції $u = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-6; 8; 0)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-5; 7; 1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 16

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{6xy}{5x^2 - 15y}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = (1 + xy)^y$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точці $M(-1; 3; 5)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (x - y) \cos x$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = xy - \ln(x + y)$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^2 + 2xy - 0,5y^2 - 4x$ в області D , обмеженої лініями $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2yx^3 - 3y^2z$ та обчислити її значення в точці $A(8; 5; -3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(7; 4; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 17

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$. Записати повний диференціал функції.

ції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = 8\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$ в точці $M(3; 4; 2)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y^2 \ln(4x + 7)$. Переконайтеся, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконайтеся, що вираз $du = \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ в області D , обмеженої лініями $x = 5$, $y = 0$, $y = x - 1$.

8. Знайти похідну функції $u = \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ та обчислити її значення в точці $A(0; 3; -5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(1; -4; 1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 18

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(4x - 9y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arctg(x + z - 2xy)$ в точці $M(5; 0; -4)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(4y^3 - 3x^2)$. Переконайтеся, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконайтеся, що вираз $du = (y - \sin x) dx + (x - 2y \cos y^2) dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 5$ в області D , обмеженої лініями $x = -3$, $x + y + 1 = 0$, $y = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = x^3y + y^3z - 3xyz$ та обчислити її значення в точці $A(-1; -2; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(0; 3; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 19

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(9x^2 - y^2)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = (x + 3y)^{2z}$ в точці $M(4; -1; 2)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos \sqrt{xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (y^2 e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^3 + 8y^3 - 6xy$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в області D , обмеженої лініями $y = \sqrt{9 - 2x^2}$, $y = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = \ln(xyz + x^3)$ та обчислити її значення в точці $A(1; 3; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 3; 5)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 20

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = (4x^3y^2 - x^5)^3$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln(xy^2 - yz^2)$ в точці $M(4; -2; 1)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4e^{2x-3y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (5 - 6xy)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

8. Знайти похідну функції $u = z \cdot e^{xy-2z}$ та обчислити її значення в точці $A(6; -1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3; 3; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 21

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \ln(6x - 2y + 12)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin \sqrt{x^2 - y^2}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + z^4}}$ в точці $M(0; 4; -1)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{5x^2 + 3xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (e^{xy} + xye^{xy} - 7)dx + (x^2e^{xy} + 5)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 4$.

8. Знайти похідну функції $u = 7xy^2z^3$ та обчислити її значення в точці $A(-4; 1; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2; -1; 2)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 22

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{1}{4x^2 - 3y^2 - 12}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{9z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ в точці $M(-1; 2; 3)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin \frac{x}{y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - 2x - y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 8$.

8. Знайти похідну функції $u = 2x^2y^3 - 4xyz + 3z$ та обчислити її значення в точці $A(-1; 0; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2; 2; 7)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 23

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\sqrt{x}}{5x - 3y}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln(x + \frac{y}{2x})$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{\sin(x + 2y)}{z}$ в точці $M(0; \frac{\pi}{4}; 8)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos(4x^3 - 8y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $y(e^{xy} + 5)dx + x(e^{xy} + 5)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 7$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 10$ в області D , обмеженої лініями $y = 0$, $y = x^2 - 4$.

8. Знайти похідну функції $u = e^{xz-y^2}$ та обчислити її значення в точці $A(-2; 1; 5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 3; 6)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 24

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(4x + 5y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arccos \sqrt{x^2 + 5y^2}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = ze^{-\frac{x}{y}}$ в точці $M(4; -1; 0)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x \operatorname{tg}(x + 2y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 10$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

8. Знайти похідну функції $u = \ln(xy + yz + 3)$ та обчислити її значення в точці $A(0; 1; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(-2; 4; 5)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 25

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{9y}{3x^2 - y}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \sqrt{xy} \ln x$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xy \cos z$ в точці $M(0; 6; \frac{\pi}{2})$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{y} \sin 2x$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 8$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

8. Знайти похідну функції $u = x^2y - z^3 + 2xz^2$ та обчислити її значення в точці $A(-4; 1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3; 0; 5)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 26

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arccos(x + 6y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln(\sqrt{x^2 - y^2} + x)$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arctg\left(\frac{x}{y^2} - z\right)$ в точці $M(4; 2; 1)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos \sqrt{x + y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (y^2 e^{xy^2} - 1)dx + (2xy e^{xy^2} + 5)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 4(x - y) - x^2 - 2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$.

8. Знайти похідну функції $u = x e^{y^2 - z^3}$ та обчислити її значення в точці $A(8; 1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(7; -3; 1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 27

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{15 - 3x^2 - 5y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arctg \sqrt{x^y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{x + 2y + 3z}{\sqrt[3]{x + z}}$ в точці $M(9; 0; -8)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin(xy^3)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (y \cos xy + 2x - 3y)dx + (x \cos xy - 3x + 4y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

8. Знайти похідну функції $u = \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ та обчислити її значення в точці $A(-4; -3; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(1; -3; 5)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 28

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = 3y - \frac{x}{x - 4y^2 + 2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = xye^{4x-9y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \arccos\left(\frac{z}{x^2} - 2y\right)$ в точці $M(2; 1; 8)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(\frac{x - 2y}{x + 2y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 18$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 7$ в області D , обмеженої лініями $x - y + 1 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

8. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 - 7xyz$ та обчислити її значення в точці $A(2; 1; -5)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(4; 0; -3)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 29

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \arcsin(x + y)$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin \frac{xy}{2x - y}$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \frac{7}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}$ в точці $M(1; 3; 3)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{ctg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin x)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

8. Знайти похідну функції $u = x^{yz}$ та обчислити її значення в точці $A(5; 1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, як-

що $B(3; 2; 8)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

Варіант 30

1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \operatorname{arctg}(x - 3y)^2$. Записати повний диференціал функції.

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln(x^3 - y + \sqrt[3]{z})$ в точці $M(2; 8; 1)$.

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{x} \ln(x + y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. Переконатися, що вираз $du = (10x^2 - 21x^2y + 2y)dx + (5 + 2x - 7x^3)dy$ є повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

6. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

8. Знайти похідну функції $u = (x + z)^{2y}$ та обчислити її значення в точці $A(4; -3; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(5; 4; 1)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль у точці A .

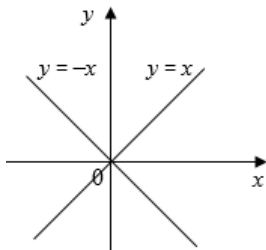
Приклади розв'язання типового варіанта

1. Знайти та побудувати область визначення функції

$$z = \frac{3x^2 + 5y^2}{x^2 - y^2}.$$

Розв'язання. Функція визначена на координатній площині всюди, крім точок, які обертають знаменник дробу в нуль, тому $x^2 - y^2 \neq 0$; $(x - y)(x + y) \neq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x - y \neq 0, \\ x + y \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq x, \\ y \neq -x. \end{cases}$ Звідси робимо висновок, що функція визначена на всій координатній площині за винятком точок, що належать прямим $y = x$ та $y = -x$ (бісектрисам першого-третього та другого-четвертого координатних кутів). Побудуємо область визначення:



2. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arctg \sqrt{x + y^3}$. Записати повний диференціал функції.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції двох змінних. Вважаючи y сталою, знайдемо похідну по змінній x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{1}{1 + (\sqrt{x + y^3})^2} \cdot (\sqrt{x + y^3})'_x = \frac{1}{1 + x + y^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^3}}.$$

Вважаючи x сталою, знайдемо похідну по змінній y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \frac{1}{1 + (\sqrt{x + y^3})^2} \cdot (\sqrt{x + y^3})'_y = \frac{1}{1 + x + y^3} \cdot \frac{3y^2}{2\sqrt{x + y^3}}.$$

Запишемо частинні диференціали за формулою:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{1}{1 + x + y^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^3}} dx; \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{1 + x + y^3} \cdot \frac{3y^2}{2\sqrt{x + y^3}} dy. \end{aligned}$$

Повний диференціал запишемо за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{dx + 3y^2 dy}{2(1+x+y^3)\sqrt{x+y^3}}.$$

3. Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = (2x - z)x^y$ у точці $M(1; 3; -5)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції трьох змінних:

$$\begin{aligned} f'_x &= (2x - z)'_x \cdot x^y + (2x - z) \cdot (x^y)'_x = 2x^y + (2x - z) \cdot yx^{y-1}; \\ f'_y &= (2x - z)x^y \ln x; \\ f'_z &= -x^y. \end{aligned}$$

Обчислимо значення отриманих похідних в заданій точці:

$$\begin{aligned} f'_x|_M &= 2 \cdot 1^3 + (2 \cdot 1 + 5) \cdot 3 \cdot 1^{3-1} = 2 + 21 = 23; \\ f'_y|_M &= (2 \cdot 1 + 5) \cdot 1^3 \cdot \ln 1 = 0; \\ f'_z|_M &= -1^3 = -1. \end{aligned}$$

4. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 5y^4)^3}$. Переконайтеся, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x^2 + 5y^4} \cdot (x^2 + 5y^4)'_x = 2x\sqrt{x^2 + 5y^4}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x^2 + 5y^4} \cdot (x^2 + 5y^4)'_y = 20y^3\sqrt{x^2 + 5y^4}. \end{aligned}$$

Скористаємося формулами для знаходження частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2\sqrt{x^2 + 5y^4} + 2x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5y^4}} =$$

$$= \frac{2(2x^2 + 5y^4)}{\sqrt{x^2 + 5y^4}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2x \frac{20y^3}{2\sqrt{x^2 + 5y^4}} = \frac{20xy^3}{\sqrt{x^2 + 5y^4}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 20y^3 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5y^4}} = \frac{20xy^3}{\sqrt{x^2 + 5y^4}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 60y^2 \sqrt{x^2 + 5y^4} + 20y^3 \frac{20y^3}{2\sqrt{x^2 + 5y^4}} = \\ &= \frac{20y^2(3x^2 + 25y^4)}{\sqrt{x^2 + 5y^4}}. \end{aligned}$$

5. Переконайтеся, що вираз $\left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0$ є повним диференціалом функції. У цьому разі знайти функцію за її повним диференціалом.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тут $P(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{x^2 + y^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тому заданий вираз є повним диференціалом функції. Знайдемо її. Маємо

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad 2) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

З першої умови інтегруванням по x знаходимо

$$u = \int \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \varphi(y) = x - \arctg \frac{x}{y} + \varphi(y).$$

Продиференціюємо отриманий вираз по змінній y та задовільнимо умову 2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \varphi'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

звідси

$$\varphi'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0.$$

Отже, доданки, що містять змінну x , зникли, $\varphi'(y) = 0$. Тільки похідна константи дорівнює нулю, отже

$$\varphi(y) = C.$$

Остаточно маємо

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + C.$$

Перевірити правильність знайденого результату можна знаходженням повного диференціала отриманої функції.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = e^{2x} (x + y^2 + 2y)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, виконавши необхідні умови існування екстремуму:

$$z'_x = 2e^{2x} (x + y^2 + 2y) + e^{2x} = e^{2x} (2x + 2y^2 + 4y + 1),$$

$$z'_y = e^{2x} (2y + 2),$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} e^{2x} (2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0, \\ e^{2x} (2y + 2) = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що експонента не може дорівнювати нулю, тому система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0, \\ 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. З другого рівняння отримаємо значення y і підставимо у перше рівняння системи, маємо

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0, \\ y = -1, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 - 4 + 1 = 0, \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}; \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, стаціонарна точка має координати $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2e^{2x} (2x + 2y^2 + 4y + 1) + 2e^{2x} = \\ &= 2e^{2x} (2x + 2y^2 + 4y + 2); \\ z''_{xy} &= e^{2x} (4y + 4) \\ z''_{yy} &= 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Обчислимо їхнє значення в стаціонарній точці $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

та перевіримо виконання достатніх умов:

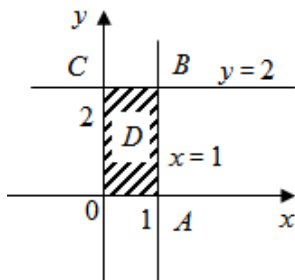
$$A = 2e(1 + 2 - 4 + 2) = -2e; \quad B = e(-4 + 4) = 0; \quad C = 2e;$$

$$A \cdot C - B^2 = -2e \cdot 2e - 0^2 = -4e^2 < 0.$$

Отже, в точці M немає ні максимуму, ні мінімуму.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Розв'язання. Побудуємо область D :



Знайдемо стаціонарні точки, що належать області D . Для цього знайдемо частинні похідні першого порядку та дорівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x + 2y - 4 \\ z'_y &= 2x - 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2y - 4 = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Точка $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ належить області D . Знайдемо тепер стаціонарні точки на лініях, що обмежують область D :

$$\begin{aligned} OA: y = 0 (0 \leq x \leq 1) \quad & z = x^2 - 4x; \quad z'_x = 2x - 4; \\ & z'_x = 0 \quad \quad \quad x = 2. \end{aligned}$$

Точка з координатами $M_2(2; 0)$ не належить області D .

$$\begin{aligned} AB: x = 1 (0 \leq y \leq 2) \quad & z = 1 + 2y - 4 - y = y - 3; \\ & z'_y = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

На лінії AB стаціонарних точок немає.

$$\begin{aligned} BC: y = 2 (0 \leq x \leq 1) \quad & z = x^2 + 4x - 4x - 2 = x^2 - 2; \\ & z'_x = 2x; \quad z'_x = 0; \quad x = 0. \end{aligned}$$

Знайдена стаціонарна точка співпадає з кутовою точкою $C(0; 2)$.

$$CO : x = 0 (0 \leq y \leq 2) \quad z = -y; \quad z'_y = -1 \neq 0.$$

На лінії CO стаціонарних точок немає.

Обчислимо значення функції в знайдених стаціонарних та кутових точках області D та оберемо серед них найбільше на найменше.

$$z|_{M_1(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4};$$

$$z|_{O(0;0)} = 0;$$

$$z|_{A(1;0)} = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3;$$

$$z|_{B(1;2)} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 = -1;$$

$$z|_{C(0;2)} = -2.$$

Отже, найбільше значення приймає функція в точці $O(0; 0)$, $z|_O = 0$, а найменше – в точці $A(1; 0)$, $z|_A = -3$.

8. Знайти похідну функції $u = x^z - 5xyz$ та обчислити її значення в точці $A(1; -3; -2)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(2; 4; -3)$. Знайти градієнт функції u , обчислити значення градієнта та його модуль в точці A .

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = zx^{z-1} - 5yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -5xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^z \ln x - 5xy.$$

Обчислимо їх значення в точці A :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = -2 - 30 = -32; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = 10; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = \ln 1 + 15 = 15.$$

Координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (1; 7; -1)$, його модуль

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{51},$$

звідси напрямні косинуси набувають значення

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{51}}; \quad \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{51}}; \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{51}}.$$

Обчислимо похідну за напрямом вектора:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -32 \cdot \frac{1}{\sqrt{51}} + 10 \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} + 15 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{51}} \right) = \frac{23}{\sqrt{51}}.$$

Градiєнт знайдемо за формулою:

$$\text{grad } u = -32 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} + 15 \cdot \vec{k},$$

а його модуль дорівнює

$$|\text{grad } u| = \sqrt{(-32)^2 + 10^2 + 15^2} = \sqrt{1349}.$$

Тема 14. Елементи теорії диференціальних рівнянь

Основні поняття та означення

Означення 14.1. Звичайним диференціальним рівнянням називається рівність, яка містить незалежну змінну x , невідому функцію y та її похідні:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (14.1)$$

Порядок старшої похідної, яка входить в (14.1), називається *порядком* цього рівняння.

Розв'язком рівняння (14.1) на деякому інтервалі (a, b) називається функція $y = y(x)$, яка при підстановці в (14.1) перетворює його на тотожність; ця функція визначена і неперервно диференційована на (a, b) .

Графік розв'язку $y = y(x)$ на площині XOY називається *інтегральною кривою*. Всі інтегральні криві є гладкими. Через будь-яку точку площини проходить тільки одна інтегральна крива.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

Основна задача теорії інтегрування диференціальних рівнянь – знаходження усіх розв’язків даного диференціального рівняння та вивчення їх властивостей.

Диференціальне рівняння першого порядку називатимемо *диференціальним рівнянням першого порядку, розв’язаним відносно похідної*. Його завжди можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (14.2)$$

Права частина (14.2) однозначна та неперервна в області зміни x і y .

Разом з рівнянням (14.2) розглядають і *перевернуте* рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (14.3)$$

Рівняння (14.2) і (14.3) можна замінити рівносильними рівняннями

$$dy - f(x, y)dx = 0, \quad (14.4)$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (14.5)$$

Точка (x_0, y_0) , в якій $f(x, y)$ (права частина (14.2)) перетворюється на ∞ , є *особливою точкою* диференціального рівняння (14.2).

Якщо диференціальне рівняння задано у вигляді (14.4) або (14.5), то особливою точкою буде точка, в якій одночасно $M(x, y)$ і $N(x, y)$ дорівнюють 0. В цій точці поле напрямків, яке задається виразом $y' = f(x, y) = k$, не визначено, оскільки не визначена похідна.

В багатьох задачах теоретичного та практичного характеру потрібно серед усіх розв’язків рівняння (14.2) знайти розв’язок $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \quad (14.6)$$

де y_0 і x_0 задані числа. Геометрично це означає, що потрібно знайти інтегральну криву, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Умова (14.6) називається *початковою умовою* розв'язку $y = y(x)$, а числа x_0 і y_0 – *початковими даними* цього розв'язку. Задача знаходження розв'язку, що задовольняє задану початкову умову, називається *задачею Коші*. Ця задача має виключний інтерес в теорії диференціальних рівнянь.

Загальний розв'язок. Частинний розв'язок. Особливий розв'язок

Сім'я розв'язків (сім'я інтегральних кривих) рівняння $y' = f(x, y)$ вигляду

$$y = \varphi(x, c), \quad (14.7)$$

де $\varphi(x, c)$ визначена і неперервно диференційована функція, називається *загальним розв'язком* рівняння (14.2), якщо із (14.7) можна знайти

$$C = \psi(x, y), \quad (14.8)$$

і якщо функція (14.7) є розв'язком рівняння (14.2) при всіх значеннях C , визначених формулою (14.8). Якщо загальний розв'язок одержано у неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$ або $C = \psi(x, y)$, то він називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Функцію $\psi(x, y)$ називають *інтегралом* диференціального рівняння. Будь-який розв'язок, який міститься в (14.7) при конкретному числовому значенні C (включаючи і значення $C = \pm\infty$), називається *частинним розв'язком*. Розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називається *особливим*. Особливий розв'язок не можна одержати із (14.7) при жодному значенні C (включаючи і значення $\pm\infty$). Підозрілими на особливий розв'язок є тільки ті криві, в усіх точках яких похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ перетворюється на ∞ .

Зауважимо, що диференціальне рівняння вважається розв'язаним, якщо воно зведено до квадратур, тобто до операції інтегрування.

Звідси випливає, що рівняння

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), \quad (14.9)$$

в якому права частина – *поліном* відносно x і y , не має особливих розв'язків. (Наприклад, $y' = x^2 + y^2$). Якщо права частина рівняння (14.9) має вигляд

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

то таке рівняння також не має *особливих розв'язків*, воно може мати тільки *особливі точки*, які є розв'язками системи
$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \quad (\text{Наприклад, } y' = \frac{ax + by}{cx + dy}).$$

Рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

в якому $M(x, y)$, $N(x, y)$ – поліноми, також не має особливих розв'язків (може мати тільки особливу точку, оскільки це рівняння можна записати у вигляді $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$).

Якщо сім'я інтегральних кривих вигляду $y = \varphi(x, c)$ або $\Phi(x, y, c) = 0$ має *обвідну*, тобто таку криву, яка дотикається до кожної кривої сім'ї інтегральних кривих в одній або декількох точках і вся складається із цих точок дотику, то ця крива (*обвідна*) завжди є розв'язком диференціального рівняння, причому *особливим*.

Особливий розв'язок завжди можна знайти в процесі побудови загального розв'язку (загального інтеграла) даного диференціального рівняння. Це ті інтегральні криві, які могли би бути втрачені при перетворенні даного рівняння (зокрема, при діленні його на деякі вирази, які можуть дорівнювати 0).

Повернемось до особливої точки (x_0, y_0) , в якій $f(x, y)$ перетворюється на невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Якщо при цьому існує інтегральна крива $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), яка володіє такою властивістю, що $y(x) \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$ (або: $x(y) \rightarrow x_0$ при $y \rightarrow y_0$), то кажуть, що вона *примикає* до точки (x_0, y_0) .

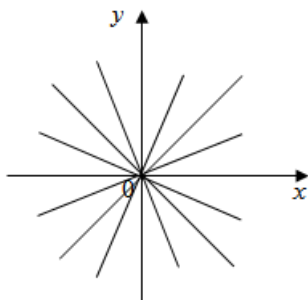
Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \quad (14.10)$$

Його інтегральними кривими є півпрямі

$$y = Cx \quad (x \neq 0), \quad (14.11)$$

$$x = 0, \quad (y \neq 0) \quad (C = \forall \text{ const}).$$

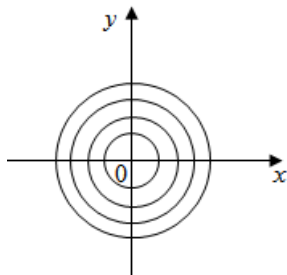


Для рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (14.12)$$

– концентричні кола з центром в початку координат:

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (14.13)$$



В точці $(0; 0)$ поля, визначені рівняннями (14.10) і (14.12) (*поле напрямків* визначається співвідношенням $f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут з додатним напрямком осі OX), не визначені. Із (14.11) і (14.13) очевидно, що всі інтегральні криві рівняння (14.10) примикають до точки $(0; 0)$, але жодна з інтегральних кривих (14.13) рівняння (14.12) не примикає до $(0; 0)$ і не проходить через цю точку.

Отже, для рівняння (14.10) $x = 0$ ($y \neq 0$) є розв'язком, причому частинним, оскільки з $y = cx \Rightarrow x = \frac{y}{c} = 0$ при $c = \infty$; а для рівняння (14.12) $x = 0$ не є розв'язком.

Типи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах

1. Рівняння, яке не містить невідомої функції:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (14.14)$$

Загальний розв'язок: $y = \int f(x) dx + C$.

2. Рівняння, яке не містить незалежну змінну:

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \quad (14.15)$$

Загальний розв'язок: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$.

Зауважимо, що слід розглянути і рівняння $f(y) = 0$: його розв'язки можуть бути особливими розв'язками рівняння (14.15).

Приклади:

1. $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Rightarrow \arctg y = x + C$ – загальний інтеграл. Особливих розв'язків немає ($1 + y^2 \neq 0$).

2. $y' = y+1 \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int dx \Rightarrow \ln|y+1| = x + C \Rightarrow y+1 = e^{x+C} \Rightarrow y = e^x \cdot C_1 - 1$, де $C_1 = e^C$.

$y+1=0 \Rightarrow y=-1$, але це частинний розв'язок.

3. Рівняння вигляду $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$ зводиться до (14.15) заміною $z = ax + by$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція.

Приклади:

1. $y' = x + y + 1$.

Заміна: $z = x + y + 1 \Rightarrow y = z - x - 1, y' = z' - 1$,

$z' - 1 = z \Rightarrow z' = z + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z + 1 \Rightarrow \int \frac{dz}{z+1} = \int dx \Rightarrow \ln|z+1| = x + C \Rightarrow \ln|x+y+2| = x + C$.

4. Рівняння з відокремлюваними змінними

1) *Рівняння з відокремленими змінними.* Якщо диференціальне рівняння має вигляд

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \quad (14.16)$$

($X(x), Y(y)$ – неперервні), то в цьому рівнянні *змінні відокремлені*. Його загальним інтегралом буде

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Особливих розв'язків немає.

2) *Рівняння з відокремлюваними змінними.* Диференціальне рівняння

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \quad (14.17)$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*. Поділивши його на $m_1(x)n(y)$, дістанемо (при $m_1(x) \neq 0, n(y) \neq 0$)

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n(y)}{n(y)}dy = 0 \quad (14.18)$$

– рівняння з відокремленими змінними. Його загальний інтеграл:

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n(y)}{n(y)}dy = C.$$

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (14.19)$$

також є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його загальний інтеграл:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)}dx = \int f_1(x)dx + C.$$

5. Однорідні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних

Означення 14.2. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією степеня m* , якщо при $\forall t$

$$f(tx, ty) = t^m \cdot f(x, y).$$

Наприклад, $f(x, y) = x^2 + y^2$; $f(x, y) = y^2 + xy$; $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (14.20)$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні однакового степеня, називається *однорідним рівнянням*. Воно завжди може бути приведено до вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (14.21)$$

Його особлива точка: $(0; 0)$.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $y = z \cdot x$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція.

Приклад 1.

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0. \quad (14.22)$$

Перевіримо однорідність:

$$tx \cdot (tx + 2ty)dx + (t^2x^2 - t^2y^2)dy = 0,$$

$$f^2 \cdot x(x + 2y)dx + f^2(x^2 - y^2)dy = 0 \Rightarrow \text{рівняння однорідне.}$$

$$\text{Заміна: } y = zx \Rightarrow y' = z'x + z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z \Rightarrow dy = xdz + zdx.$$

Підставимо в (14.22):

$$x(x + 2zx)dx + (x^2 - z^2x^2)(xdz + zdx) = 0,$$

$$x^2(1 + 2z)dx + x^2(1 - z^2)(xdz + zdx) = 0,$$

$$(1 + 2z)dx + xdz \cdot (1 - z^2) + z(1 - z^2)dx = 0,$$

$$(1 + 2z + z - z^3)dx + x(1 - z^2)dz = 0 \Big| \div (1 + 3z - z^3)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{1 - z^2}{1 + 3z - z^3} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\ln x + \frac{1}{3} \int \frac{d(1 + 3z - z^3)}{1 + 3z - z^3} \Rightarrow \ln x + \frac{1}{3} \ln(1 + 3z - z^3) + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \sqrt[3]{1 + 3z - z^3} = C \Rightarrow x^3 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}\right) = C^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 3yx^2 - y^3 = C_1, \quad (C_1 = C^3).$$

Приклад 2. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

$$y = zx, \quad dy = xdz + zdx, \quad \left(z = \frac{y}{x}\right),$$

$$\begin{aligned}
(x^2 - z^2 x^2)dx + 2x \cdot zx(zdx + xdz) &= 0, \\
(1 - z^2)dx + 2z^2 dx + 2zxdz &= 0, \\
(1 + z^2)dx = -2zxdz \Big| \div (1 + z^2)x &\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{2z}{1 + z^2} dz \Rightarrow \\
\Rightarrow \ln |x| = -\ln(1 + z^2) + \ln C &\Rightarrow x = \frac{C}{1 + z^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow x = \frac{C}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{Cx^2}{x^2 + y^2} &\Rightarrow \frac{Cx}{x^2 + y^2} = 1.
\end{aligned}$$

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right). \quad (14.23)$$

Якщо $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ (це означає, що коефіцієнти чисельника і знаменника не пропорційні), то це рівняння підстановкою $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, де x_1, y_1 – нові змінні, α і β – розв’язки системи

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

зводиться до однорідного.

Якщо ж $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, то рівняння (14.23) набуває вигляду $\frac{dy}{dx} = f_1(ax + by)$, яке заміною $z = ax + by$ зводиться до рівняння, в якому немає незалежної змінної.

Приклад. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$. Система має розв’язок, оскільки коефіцієнти рівнянь не пропорційні:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = -4, \end{cases} \Rightarrow 2x = -2, \quad x = -1; \quad y = 2 - x = 3.$$

$$\begin{aligned}
\text{Заміна: } x &= x_1 - 1; \quad y = y_1 + 3 \Rightarrow dx = dx_1, \quad dy = dy_1 \Rightarrow \\
\Rightarrow (x_1 - 1 + y_1 + 3 - 2)dx_1 &+ (x_1 - 1 - y_1 - 3 + 4)dy_1 = 0,
\end{aligned}$$

$$(x_1 + y_1 - 2 - 2)dx_1 + (x_1 - y_1 - 4 + 4)dy_1 = 0,$$

$$(x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 - y_1)dy_1 = 0 \quad - \quad \text{однорідне рівняння.}$$

Підстановка: $y_1 = z \cdot x_1$, $dy_1 = x_1 dz + z dx_1$ приведе до рівняння

$$(x_1 + z x_1)dx_1 + (x_1 - z x_1)(x_1 dz + z dx_1) = 0,$$

$$(1 + z)dx_1 + (1 - z)x_1 dz + (1 - z)z dx_1 = 0,$$

$$(1 + z + z - z^2)dx_1 + (1 - z)x_1 dz = 0 \quad \Big| \div (1 + 2z - z^2)x_1$$

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{1 - z}{1 + 2z - z^2} dz = 0 \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} + \int \frac{1 - z}{1 + 2z - z^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |x_1| + \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + 2z - z^2)}{1 + 2z - z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |x_1| + \frac{1}{2} \ln |1 + 2z - z^2| = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \sqrt{1 + 2z - z^2} = C \Rightarrow x_1^2 (1 + 2z - z^2) = C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 \left(1 + \frac{2y_1}{x_1} - \left(\frac{y_1}{x_1} \right)^2 \right) = C_1, \quad (C_1 = C^2)$$

$$x_1^2 + 2y_1 x_1 - y_1^2 = C_1 \Rightarrow (x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 3) - (y - 3)^2 = C_1,$$

$$x^2 + 2x + 2 + 2xy - 6x + 2y - 6 - y^2 + 6y - 9 = C_1.$$

$$\text{Остаточно: } x^2 - y^2 - 4x + 8y + 2xy = C_2, \quad C_2 = C_1 + 13.$$

6. Лінійні рівняння

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{14.24}$$

називається *лінійним*: при $q(x) \equiv 0$ – *однорідним*, а при $q(x) \neq 0$ – *неоднорідним*.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (14.24) складається із загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y' + p(x)y = 0 \quad (14.25)$$

та деякого частинного розв'язку самого рівняння (14.24). Отже, для того, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння (14.24), знаходимо спочатку розв'язок рівняння (14.25) $y = \varphi(x, C)$, покладаємо $C = C(x)$ (це називається *метод варіації довільної сталої*), підставляємо функцію $y = \varphi(x, C(x))$ в (14.24) і розв'язуємо рівняння відносно $C'(x)$. Знаходимо інтегруванням $C(x)$ і підставляємо в розв'язок $y = \varphi(x, C)$ замість C .

Приклад.

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = x.$$

$$\begin{aligned} y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln(1+x^2) + \ln C \Rightarrow y = C \cdot (1+x^2) - \text{з.р.о.р.}$$

Нехай $C = C(x)$. Тоді $y_{\text{з.н.р.}} = C(x) \cdot (1+x^2)$,

$$y' = C'(1+x^2) + C \cdot 2x,$$

$$C'(1+x^2) + C(x) \cdot 2x - \frac{2x}{1+x^2} \cdot C(x) \cdot (1+x^2) = x,$$

$$C'(x) \cdot (1+x^2) = x \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1,$$

$C_1 - \forall \text{ const.}$ Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 \right) \cdot (1+x^2) =$$

$$= C_1(1+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2), \quad C_1 - \forall \text{ const.}$$

Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

1. Однорідні рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad a_0 \neq 0. \quad (14.26)$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n \cdot y_n(x), \quad (14.27)$$

де частинні розв'язки $y_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) є лінійно незалежними розв'язками однорідного диференціального рівняння (14.26). Ці частинні розв'язки шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$. При підстановці цієї функції та її похідних в (14.26) дістаємо рівняння

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (14.28)$$

для визначення сталої k .

Рівняння (14.28) називається *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними показниками*. При цьому:

1) якщо всі характеристичні показники $k_1, k_2, \dots, k_n$ рівняння (14.28) різні, то загальний розв'язок рівняння (14.26) має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x}, \quad (14.29)$$

де c_i – довільні стали.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 4 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

2) якщо рівняння (14.28) має комплексний корінь $k = \alpha + i\beta$, $i = \sqrt{-1}$, $\beta \neq 0$, то рівняння (14.26) має комплексний частинний розв'язок

$$y = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Якщо коефіцієнти рівняння (14.26) дійсні, то рівняння (14.28) поряд з коренем $\alpha + i\beta$ має і комплексно спряжений корінь $\alpha - i\beta$. У такому випадку рівняння (14.26) має частинні дійсні розв'язки вигляду

$$y = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$$

які відповідають парі комплексно спряжених коренів

$$\alpha \pm i\beta.$$

Приклад. Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + 2y'' + 5y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^3 + 2k^2 + 5k = 0$ має один дійсний корінь $k_1 = 0$ та пару $k_2 = -1 + 2i$, $k_3 = -1 - 2i$. Кореню k_1 у формулі загального розв'язку відповідає доданок $e^{0x} \cdot C_1 = C_1$, а парі $-1 \pm 2i$ – вираз $e^{-x} \cdot (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$. Отже, загальний розв'язок запишемо так:

$$y = C_1 + e^{-x} \cdot (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

3) Якщо характеристичне рівняння (14.28) має корінь $k = k_0$ кратності m , то рівняння (14.26) має лінійно незалежні частинні розв'язки

$$y_1(x) = e^{k_0 x}, y_2(x) = x e^{k_0 x}, \dots y_m(x) = x^{m-1} e^{k_0 x}.$$

Їх лінійна комбінація $C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x} + \dots C_m x^{m-1} e^{k_0 x}$ буде загальним розв'язком рівняння (14.28), де C_i – довільні сталі.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \quad ((k+1)^3 = 0)$$

має корінь $k = -1$ кратності 3. Отже, дане диференціальне рівняння має лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x e^{-x}$, $y_3 = x^2 e^{-x}$.

Загальний розв'язок визначається формулою

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

2. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною

Рівняння $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$ називається неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, якщо $f(x) \neq 0$.

1) Нехай неоднорідне лінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = e^{\alpha x} \cdot Q_k(x), \quad (14.30)$$

де $\alpha = \text{const}$; $Q_k(x)$ – многочлен k -го степеня відносно x :

$$Q_k(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} + \dots + b_k.$$

Якщо показник α є m -кратним коренем характеристичного рівняння (14.28) (якщо α не є коренем, то $m = 0$), то диференціальне рівняння (14.30) має частинний розв'язок вигляду

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \cdot R_k(x), \quad (14.31)$$

де $R_k(x)$ – многочлен k -го степеня від x :

$$R_k(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_n,$$

де A_i – невизначені коефіцієнти, які знаходяться з системи рівнянь, утворення якої розглянемо на прикладі. Загальний розв'язок рівняння (14.30) має вигляд

$$y = y_0(x) + y(x),$$

де $y_0(x)$ – загальний розв'язок відповідного рівнянню (14.30) однорідного рівняння, а $y(x)$ – довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ ($Q_k(x) = x \Rightarrow k = 1, \alpha = 2$).

Складаємо характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow \text{корені } k_1 = k_2 = 2.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння є (див. п. 1) $e^{2x} \cdot (C_1 + C_2 x)$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння подамо у вигляді (14.31) ($\alpha = 2, m = 2, k = 1$):

$$y(x) = e^{2x} \cdot x^2 \cdot (A_0 x + A_1).$$

Знайдемо $y'(x)$, $y''(x)$ та підставимо $y(x)$, $y'(x)$ та $y''(x)$ у задане диференціальне рівняння:

$$y(x) = e^{2x} \cdot x^2 \cdot (A_0 x + A_1) = e^{2x} \cdot (A_0 x^3 + A_1 x^2),$$

$$y'(x) = e^{2x} \cdot [2A_0 x^3 + x^2(2A_1 + 3A_0) + x \cdot 2A_1],$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= 2e^{2x} \cdot [2A_0x^3 + x^2(2A_1 + 3A_0) + 2xA_1] + \\
&+ e^{2x} \cdot [6x^2A_0 + 2x(2A_1 + 3A_0) + 2A_1] = e^{2x} \times \\
&\times [4A_0x^3 + x^2(4A_1 + 6A_0) + 4xA_1 + 6x^2A_0 + 2x(2A_1 + 3A_0) + 2A_1] = \\
&= e^{2x} \cdot [4x^3A_0 + x^2(4A_1 + 12A_0) + x(8A_1 + 6A_0) + 2A_1]; \\
&e^{2x} \cdot [4x^3A_0 + x^2(4A_1 + 12A_0) + x(8A_1 + 6A_0) + 2A_1] - \\
&- 4e^{2x} \cdot [2A_0x^3 + x^2(2A_1 + 3A_0) + 2xA_1] + \\
&+ 4e^{2x} \cdot x^2 \cdot (A_0x + A_1) = xe^{2x} \Rightarrow \text{скоротимо на } e^{2x} \Rightarrow \\
&\Rightarrow x^3 \cdot (4A_0 - 8A_0 + 4A_0) + 2A_1 + x^2(4A_1 + 12A_0 - 8A_1 - 12A_0 + 4A_1) + \\
&+ x(8A_1 + 6A_0 - 8A_1) + 2A_1 = x \Rightarrow x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + x \cdot 6A_0 + 2A_1 = x \Rightarrow \\
&\Rightarrow 6A_0 = 1, \quad 2A_1 = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{6}, \quad A_1 = 0.
\end{aligned}$$

Отже, $y(x) = e^{2x} \cdot x^2 \cdot \frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot e^{2x}$. Остаточного маємо, що загальним розв'язком заданого диференціального рівняння є

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 + C_2x) + \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot e^{2x}.$$

2) Нехай права частина $f(x)$ має вигляд $e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x]$. У цьому випадку частинний розв'язок має такий же вигляд, як і $f(x)$, відрізняючись тільки коефіцієнтами, якщо $k = \alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння. Якщо ж характеристичне рівняння має корінь $k = \alpha \pm i\beta$ кратності r , то диференціальне рівняння має частинний розв'язок вигляду

$$y = e^{\alpha x} \cdot x^r \cdot [R_p(x) \cos \beta x + Q_p(x) \sin \beta x],$$

де $R_p(x)$ і $Q_p(x)$ – многочлени степеня $p = \max(m, s)$ з невизначеними коефіцієнтами (ці коефіцієнти шукаємо, підставляючи замість y і її похідних значення в задане рівняння

і прирівнюючи коефіцієнти при відповідних тригонометричних функціях).

Наприклад: 1) для рівняння $y'' + 4y' + 3 = 65x \cdot \cos 2x$ (тут $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $m = 1$) відповідне характеристичне рівняння має корені -1 і -3 ; частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y(x) = (Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x$;

2) для рівняння $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$ (тут $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $m = s = 0$) відповідне характеристичне рівняння має корені $\pm 2i$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y(x) = x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ до теми "Елементи теорії диференціальних рівнянь"

Варіант 1

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$ye^{2x} dx + (1 + e^{2x}) dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(x - 2)dy - (y + 3)dx; y(3) = -1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) 2xydx + (x^2 - y^2) dy = 0;$$

$$б) xy' - 4y = 2x^2 - 3x.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) y'' - 4y' + 3y = 0;$$

$$б) y'' + 2y' + 2y = 0;$$

$$в) y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3x - 5;$$

$$г) y'' - 6y' + 8y = 14e^{2x};$$

$$д) y'' - 7y' + 6y = \sin x.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 2

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xyy' = 1 - x^2.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'\sqrt{1+x^2} - x = 0; y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = \frac{x-y}{x-2y};$

б) $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 4y' = 0;$

б) $y'' - 6y' + 9y = 0;$

в) $y'' - 2y' = 8x^3 - 10;$

г) $y'' - 4y' + 3y = 20 \cos 2x + 27 \sin 2x;$

д) $y'' - 5y' + 4y = 8e^{3x}.$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x; y(0) = 0; y'(0) = 1.$$

Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' + y = y^2.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$5x^{2+y}dy + xdx = 0; y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = -\frac{x+y}{x};$

б) $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 16y = 0;$

- б) $4y'' + 4y' + y = 0$;
 в) $y'' - 6y' + 13y = 0$;
 г) $y'' + 3y' = 9x^2 + 3x + 5$;
 д) $y'' - 6y' + 5y = 27e^{2x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + y = 4 \sin x; y(0) = 0; y'(0) = -1.$$

Варіант 4

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$e^{x+y} dx + y dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0; y(1) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy' = y \ln \frac{x}{y}$;

б) $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - y' - 2y = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$;

в) $y'' + 26y' + 169y = 0$;

г) $y'' + 2y' + 2y = 6x^2 + 14x + 6$;

д) $y'' + 5y' + 4y = \sin 2x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; y(0) = \frac{4}{3}; y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$3x^2 y dx + 2\sqrt{4 - x^3} dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2 (2yy' - 1) = 1; y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$;

б) $y' - 4\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 2y' - 48y = 0$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$;

г) $y'' - y = 3x^2 - 7x + 9$;

д) $y'' - 2y' + y = 10e^x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 4y' = (x - 2)e^{4x}; y(0) = 2; y'(0) = -1.$$

Варіант 6

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(y + 2)dx + xdy = 0; y(1) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

б) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 5y' + 4y = 0$;

б) $y'' - 4y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 13y = 0$;

г) $y'' + y' - 2y = 8x^2 - 4x$;

д) $y'' + 2y' = 9e^{-2x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$2y'' + y' - y = 2e^x; y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

Варіант 7

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\cos(x - 2y)y' + \cos(x + 2y)y' = \sec x.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$xydx + (x + 1)dy = 0; y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2) dy = 0;$$

$$б) xy' - 2y = 2x^4.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) y'' + 9y' + 20y = 0;$$

$$б) y'' - 8y' + 16y = 0;$$

$$в) y'' + 9y = 0;$$

$$г) y'' + y' - 6y = xe^{2x};$$

$$д) y'' + 2y' + y = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5x}; y(0) = 3; y'(0) = -5, 5.$$

Варіант 8

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xdx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$ydx + \operatorname{ctg} x dx = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) xy' = y + 2x - 2\sqrt{xy - y^2};$$

$$б) y' + 3\frac{y}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) y'' - 10y' = 0;$$

б) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

в) $y'' - 9y = 0$;

г) $y'' + y = \cos x$;

д) $y'' - 5y' + 6y = 6x^3 - 3x^2 + 4x + 13$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 2y' + 2y = xe^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 9

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sin(x + y)dx + \sin(x - y)dx + \frac{1}{\cos y}dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(x^2 - 1)y' = 2xy^2; y(\sqrt{2}) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = e^{\frac{y}{x}}$;

б) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

в) $y'' - 25y = 0$;

г) $y'' + y' = 9x^2 + 4x - 6$;

д) $y'' - 2y' - 3y = 12e^{3x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 10

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x^2y' = 1 + \cos 2y.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$2xyy' = 1 - x^2; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$;

б) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 2y' + y = 0$;

б) $y'' + 10y' + 21y = 0$;

в) $y'' + 49y = 0$;

г) $y'' + 3y' - 4y = 6x \cdot e^{-x}$;

д) $y'' - y' = 5x^2 - 12x + 8$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 11

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$dx - (3x + 1)y^2 dy = 0; y(\sqrt[3]{\ln 4}) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$;

б) $xy' + y - e^x = 0$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 9y' + 14y = 0$;

б) $y'' + 5y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

г) $y'' + 3y' + 2y = (3x - 7)e^{-x}$;

д) $y'' + 9y = 9x^3 + 6x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 12

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\cos \sqrt{x} dx - \sqrt{x} dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0; y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) (x^3 + x^2 y) dx - (y^3 + xy^2) dy = 0;$$

$$б) y' - \frac{1}{1-x^2} = 1 + x.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) 2y'' + y' - y = 0;$$

$$б) y'' + 12y' + 36y = 0;$$

$$в) y'' + 25y = 0;$$

$$г) y'' - 3y' = 18x^2 - 2;$$

$$д) 2y'' - 7y' + 3y = (2x + 1)e^{3x}.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 2y' + 2y = 2x; y(0) = 2; y'(0) = 0.$$

Варіант 13

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(9 + 7 \cos^3 x) dx - \cos^2 x dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$e^{x-2y} dy = x dx; y(0) = -3.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) (x^2 + y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0;$$

$$б) xy' - 3y = 3 - 4x - x^2.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) y'' - 25y = 0;$$

$$б) y'' + 13y' + 30y = 0;$$

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

г) $3y'' - 7y' + 2y = 3xe^{2x}$;

д) $y'' + 2y' = 4x^3 - 2x$;

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 2y' + y = 16e^x; y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

Варіант 14

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$e^{1-2x} (y^2 - 1) dy - dx = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + x^2) y^3 dx - (y^2 - 1) x^3 dy = 0; y(1) = -1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$;

б) $y' - 2y = e^{2x}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 9y' + 20y = 0$;

б) $y'' + 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' + 81y = 0$;

г) $y'' - 3y' = 2x^2 - 5x$;

д) $y'' + 3y' - 4y = x \sin x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$2y'' + 5y' = 29 \cos x; y(0) = 3; y'(0) = 0.$$

Варіант 15

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$yx^2 dy - \ln x dx = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(xy + x^3 y) y' = 1 + y^2; y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(xy + y^2) dx - (2x^2 + xy) dy = 0$;

б) $xy' - 2y = 2x^4$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

б) $4y'' - y' = 0$;

в) $y'' - 6y' + 13y = 0$;

г) $y'' + 36y = 2 \sin 6x$;

д) $y'' - 6y' + 9y = e^{-x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x; y(0) = 1; y'(0) = 3.$$

Варіант 16

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{x(1 - y^3)}{(1 + x^2)y^2}.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$2xy' + y^2 = 1; y(1) = \frac{1}{2}.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$;

б) $y' = \frac{y}{x} - 1$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - y' - 6y = 0$;

б) $y'' - 9y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

г) $y'' - 8y' + 16y = 2xe^{4x}$;

д) $y'' + 3y' + 2y = \cos x - 3 \sin x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 3.$$

Варіант 17

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy^3 + x) dx + (x^2y^2 - y^2) dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + e^{3y}) x dx = e^{3y}; y\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$;

б) $(xy' - 1) \ln x = 2y$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $9y'' - 6y' + y = 0$;

б) $y'' + 12y' + 37y = 0$;

в) $y'' - 2y' = 0$;

г) $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$;

д) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

Варіант 18

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + x^2) y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy; y(1) = \frac{1}{2}.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $x^2y' = y(x + y)$;

б) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - y' - 2y = 0$;

- б) $y'' + 9y = 0$;
 в) $y'' - 6y' + 9y = 0$;
 г) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$
 д) $4y'' - 4y' + y = -26 \cos x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + y' - 6y = xe^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 5.$$

Варіант 19

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(1 - x^2) dy + xy dx = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 9 \cdot 5^{x-y}; y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } \frac{y - xy'}{x + yy'} = 2;$$

$$\text{б) } y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1).$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 8y' + 15y = 0;$$

$$\text{б) } y'' - 7y' = 0;$$

$$\text{в) } y'' + 4y = 0;$$

$$\text{г) } y'' - 4y' + 13y = 13x^3 + x^2 - 2x - 2;$$

$$\text{д) } y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 4y' + 4y = x^2; y(0) = 1; y'(0) = 2.$$

Варіант 20

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + e^x) y y' = e^y; y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

б) $y' + y = \cos x$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + 6y' + 8y = 0$;

б) $y'' - 12y' + 37y = 0$;

в) $y'' - y = 0$;

г) $y'' - 3y' = 2x^3 - 4x$;

д) $y'' + 49y = 3 \sin 7x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 6y' + 9y = 10e^{3x}; y(0) = -2; y'(0) = 3.$$

Варіант 21

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y).$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{1 + x^2}{1 + y^2}; y(0) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

б) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + y' - 2y = 0$;

б) $y'' + 10y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

г) $y'' - 2y' - 15y = 4xe^{3x}$;

д) $y'' + y = 14 \cos x + 6 \sin x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + y' = 2e^x; y(0) = 3; y'(0) = 2.$$

Варіант 22

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{y + 1}{x}; y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } \frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$\text{б) } y' = e^{2x} - e^x y.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 100y = 0;$$

$$\text{б) } y'' - 15y' + 56y = 0;$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = 0;$$

$$\text{г) } 2y'' + y' - y = x \sin x;$$

$$\text{д) } y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 1.$$

Варіант 23

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy^2 + x) dx + (y - x^2y) dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$xyy' = 1 - x^2; y(1) = 2.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } \frac{dx}{y + x} = \frac{dy}{y - x};$$

$$\text{б) } y' = \frac{y}{x} - 1.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - y' - 6y = 0$;

б) $y'' + 9y' = 0$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

г) $y'' + 49y = x^3 + 4x$;

д) $y'' + 3y' - 4y = 3xe^{-4x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Варіант 24

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$2x^2yy' + y^2 = 2$.

2. Розв'язати задачу Коші:

$5x^{2-y}dy - xdx = 0$; $y(0) = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y^2 + x^2y' = xyy'$;

б) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 10y' + 21y = 0$;

б) $y'' - 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

г) $y'' + y' - 2y = (2x - 1)e^{-x}$;

д) $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$y'' + 2y' + y = e^{-x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Варіант 25

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y' + \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$.

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y^2 \ln x dx - (y - 1) x dy = 0; y(1) = 1.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $x^3 y' = y (y^2 + x^2);$

б) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - y' - 90y = 0;$

б) $y'' - 4y = 0;$

в) $y'' + 2y' + 2y = 0.$

г) $y'' + y = 14 \cos x + 6 \sin x;$

д) $y'' + y' - 2y = 3x \cos 2x.$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14; y(0) = 0; y'(0) = 7.$$

Варіант 26

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(x^2 + 2x + 1) dx - (x^2 - 1) dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \operatorname{ctg} x; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dx + \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right) dy = 0.$

б) $y' \cos x + y \sin x = 1.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 8y' + 12y = 0;$

б) $y'' - 36y = 0;$

в) $y'' + 2y' + 5y = 0;$

г) $y'' - 6y' + 9y = (x - 2)e^{3x};$

д) $y'' - 4y' = 3 \cos 4x.$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 27

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x dy - (1 - \sqrt{x})^3 dx = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(x + xy^2) dx + (y + yx^2) dy = 0; y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0;$

б) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + y' - 2y = 0;$

б) $y'' + 7y' = 0;$

в) $y'' - 2y' + 2y = 0;$

г) $y'' - 16y = -3e^{4x};$

д) $5y'' - 6y' + y = \cos x - \sin x.$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 28

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy^2 + y^2) dx - xdy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + e^x) yy' = e^x; y(0) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $ydx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy = 0;$

б) $y' \ln x - \frac{y}{x} = 1 - \ln x.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' + 12y' + 35y = 0$;

б) $y'' + 4y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 13y = 0$;

г) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 4$;

д) $y'' + 3y' - 4y = x^2 \sin 2x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + y = \cos x; y(0) = 0; y'(0) = 2.$$

Варіант 29

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' \operatorname{tg} x - y = 5.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx; y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

б) $\delta xy' + y - e^x = 0$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 6y' - 16y = 0$;

б) $y'' - 12y' = 0$;

в) $y'' + 81y = 0$;

г) $2y'' + y' - y = (x^2 - 5)e^{-x}$;

д) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 4y' = e^{-2x}; y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Варіант 30

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' \sin x = y \ln y; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (3y^2 + 3xy + x^2) dx = (x^2 + 2xy) dy;$$

$$\text{б) } xy' + y - e^x = 0.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' - 7y' + 12y = 0;$$

$$\text{б) } y'' + 6y' + 9y = 0;$$

$$\text{в) } y'' + 25y = 0;$$

$$\text{г) } 5y'' + 9y' - 2y = x^3 - 2x;$$

$$\text{д) } y'' - 4y' + 5y = -2xe^x;$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66; y(0) = 3; y'(0) = 0.$$

Приклади розв'язання типового варіанта

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\sqrt{1-x^2}dy - 3ydx = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розділимо їх:

$$\sqrt{1-x^2}dy = 3ydx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Проінтегруємо ліву та праву частину отриманої рівності й отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \ln y = 3 \arcsin x + \ln C; \quad y = Ce^{3 \arcsin x}.$$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\cos^2 x \cdot y' - (9 + \sqrt{2} \cos^3 x) = 0$, який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розділимо їх так:

$$\begin{aligned}\cos^2 x \cdot y' &= (9 + \sqrt{2} \cos^3 x) \\ \cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} &= (9 + \sqrt{2} \cos^3 x) \mid \cdot dx \\ \cos^2 x \cdot dy &= (9 + \sqrt{2} \cos^3 x) \cdot dx \quad | : \cos^2 x \\ dy &= \frac{(9 + \sqrt{2} \cos^3 x)}{\cos^2 x} dx\end{aligned}$$

Проінтегруємо ліву та праву частину отриманої рівності й отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\begin{aligned}\int dy &= 9 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \sqrt{2} \int \cos x dx; \\ y &= 9 \operatorname{tg} x + \sqrt{2} \sin x + C.\end{aligned}$$

Знайдемо частинний розв'язок за початковими умовами:

$$1 = 9 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + C; \quad 1 = 9 + 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = -9.$$

Остаточно маємо частинний розв'язок: $y = 9 \operatorname{tg} x + \sqrt{2} \sin x - 9$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x dy - \left(y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right) dx = 0$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку. Для цього замінімо

$$\begin{aligned}x &\rightarrow kx; \quad y \rightarrow ky; \quad dx \rightarrow kdx; \quad dy \rightarrow kdy \\ kx \cdot kdy - \left(ky - kx \operatorname{tg} \frac{ky}{kx}\right) kdx &= 0.\end{aligned}$$

Скоротивши ліву та праву частину рівняння на k^2 , отримаємо початкове рівняння. Отже, це диференціальне рівняння – однорідне. Для розв’язання потрібно використати підстановку

$$y = ux; \quad y' = u'x + u,$$

але перед цим розділити ліву й праву частини на dx і замінити $\frac{dy}{dx} = y'$:

$$\begin{aligned} x \cdot y' - y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} &= 0 \\ x(u'x + u) - ux + x \operatorname{tg} \frac{ux}{x} &= 0 \quad |:x \\ u' + u - u + \operatorname{tg} u &= 0; \quad u' = -\operatorname{tg} u \end{aligned}$$

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{tg} u; \quad du = -\operatorname{tg} u \cdot dx \quad |: \operatorname{tg} u; \quad \frac{du}{\operatorname{tg} u} = -dx.$$

$$\int \operatorname{ctg} u du = - \int dx; \quad \ln |\sin u| = -x + \ln C$$

або $\sin u = e^{-x+\ln C}$; $\sin u = Ce^{-x}$.

Повернемося до попередніх змінних та отримаємо шуканий розв’язок:

$$\sin \frac{y}{x} = Ce^{-x}.$$

4. Проінтегрувати диференціальне рівняння $xy' - 2y = x^3 - x$.

Розв’язання. Задане рівняння є лінійним, оскільки шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння в зручному вигляді, поділивши його на x :

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^2 - 1.$$

Визначимо розв'язок у такому вигляді

$$y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставимо у рівняння та згрупуємо другий та третій доданки, вираз у дужках дорівнюємо до нуля:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2 \frac{u \cdot v}{x} = x^2 - 1;$$

$$u' \cdot v + u \left(v' - 2 \frac{v}{x} \right) = x^2 - 1;$$

$$v' - 2 \frac{v}{x} = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln v = 2 \ln x; \quad \Rightarrow \quad v = x^2.$$

Повернемося до рівняння. Беручи до уваги, що вираз у дужках дорівнює нулю, отримаємо:

$$u'v = x^2 - 1.$$

Підставимо отриману функцію v , розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u :

$$u'x^2 = x^2 - 1; \quad u' = 1 - \frac{1}{x^2}; \quad \int du = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

$$u = x + \frac{1}{x} + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v :

$$y = uv = \left(x + \frac{1}{x} + C \right) \cdot x^2; \quad \text{або}$$

$$y = x^3 + x + Cx^2.$$

5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР):

а) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

б) $y'' + 16y' + 64y = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$.

Розв'язання. а) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \rightarrow 1; \quad y' \rightarrow k; \quad y'' \rightarrow k^2,$$

$$k^2 - 7k + 12 = 0,$$

його корені $k_1 = 3$; $k_2 = 4$. Отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

б) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \rightarrow 1; \quad y' \rightarrow k; \quad y'' \rightarrow k^2;$$

$$k^2 + 16k + 64 = 0,$$

його корені $k_1 = k_2 = -8$. Отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-8x}.$$

в) складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \rightarrow 1; \quad y'' \rightarrow k^2;$$

$$k^2 + 25 = 0, \quad \Rightarrow \quad k^2 = -25; \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 5i.$$

Отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

6. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

а) $y'' - 8y' + 12y = 4 \cos 2x$;

б) $y'' + 3y' = 2x^3 - 1$;

в) $y'' - 6y' + 13y = 9e^{3x}$.

Розв'язання. а) відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у такому вигляді:

$$y = y_o + y_n.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' - 8y' + 12y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 8k + 12 = 0,$$

де $k_1 = 2$; $k_2 = 6$ – корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння виглядає так

$$y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}.$$

За виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_n = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y'_n = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x; y''_n = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x;$$

$$\Rightarrow -4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) +$$

$$+12(A \cos 2x + B \sin 2x) = 4 \cos 2x;$$

$$8A \cos 2x + 8B \sin 2x + 16A \sin 2x - 16B \cos 2x = 4 \cos 2x.$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 8A - 16B = 4 \\ \sin 2x & 8B + 16A = 0 \end{array}$$

Розв'яжемо отриману систему, скоротивши перше рівняння на 4, а друге – на 8:

$$\begin{cases} 2A - 4B = 1 \\ 2A + B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A - 4 \cdot (-2A) = 1 \\ B = -2A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,1 \\ B = -0,2 \end{cases}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_n = 0,1 \cos 2x - 0,2 \sin 2x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x} + 0,1 \cos 2x - 0,2 \sin 2x.$$

б) відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_o + y_n.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' + 3y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 + 3k = 0,$$

де $k_1 = 0$; $k_2 = -3$ – корені характеристичного рівняння.

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_o = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

За виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку, звернувши увагу на той факт, що рівняння $y'' + 3y' = 2x^3 - 1$ має вигляд (14.31), де $\alpha = 0$, $k = 3$:

$$y_{\text{н}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y'_{\text{н}} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D; \quad y''_{\text{н}} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \Rightarrow$$

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + 3(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) = 2x^3 - 1.$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 12A = 2 \\ x^2 & 12A + 9B = 0 \\ x^1 & 6B + 6C = 0 \\ x^0 & 2C + 3D = -1 \end{array}$$

Розв'яжемо отриману систему послідовно виключаючи невідомі, починаючи з першого рівняння:

$$A = \frac{1}{6};$$

$$12 \cdot \frac{1}{6} + 9B = 0; \quad 9B = -2 \Rightarrow B = -\frac{2}{9};$$

$$6 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) + 6C = 0; \quad 6C = \frac{4}{3} \Rightarrow C = \frac{2}{9};$$

$$2 \cdot \frac{2}{9} + 3D = -1; \quad 3D = -\frac{13}{9} \Rightarrow D = -\frac{13}{27}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x.$$

в) відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у такому вигляді:

$$y = y_o + y_n.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає зазначеному:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 6k + 13 = 0,$$

де $k_{1,2} = 3 \pm 2i$ – корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння такий:

$$y_o = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

За виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку, звернувши увагу на той факт, що рівняння $y'' - 6y' + 13y = 9e^{3x}$ має вигляд (14.31), де $\alpha = 3$, $m = 0$:

$$y_n = Ae^{3x}.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$\begin{aligned} y'_n &= 3Ae^{3x}; y''_n = 9Ae^{3x}; \\ \Rightarrow \quad 9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 13 \cdot Ae^{3x} &= 9e^{3x}; \end{aligned}$$

$$4Ae^{3x} = 3e^{3x}.$$

З останнього рівняння знайдемо невідомий коефіцієнт:

$$A = \frac{3}{4}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_n = \frac{3}{4}e^{3x}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{3}{4}e^{3x}.$$

7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_o + y_n.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 2k + 5 = 0,$$

де $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ – корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_o = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

За виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Звертаємо увагу на те, що корені характеристичного рівняння комплексні. Тоді

$$y_n = (Ax + B)e^x.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y'_n = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + Ax + B)e^x;$$

$$y''_n = Ae^x + (A + Ax + B)e^x = (2A + Ax + B)e^x;$$

$$(2A + Ax + B)e^x - 2(A + Ax + B)e^x + 5(Ax + B)e^x = xe^{2x};$$

$$(4Ax + 4B)e^{2x} = xe^{2x} \quad \text{або} \quad 4Ax + 4B = x$$

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 4A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \\ x^0 & 4B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_n = \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, що задовольняє початкові умови, знайдемо похідну:

$$\begin{aligned} y' &= e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) + \\ &\quad + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} - xe^{2x}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} y(0) = 1 & C_1 = 1 \\ y'(0) = 0 & C_1 + 2C_2 + \frac{1}{4} = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{5}{8} \end{array}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має такий вигляд:

$$y = e^x \left(\cos 2x - \frac{5}{8} \sin 2x \right) + \frac{1}{4} x e^{2x}.$$

Література

1. *Валеев К.Г., Джалладова І.А.* Вища математика : Навч. посібник : У 2-х ч. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
2. *Валеев К.Г., Джалладова І.А.* Вища математика : Навч. посібник : У 2-х ч. – К. : КНЕУ, 2002. – Ч. 2. – 451 с.
3. *Грисенко М.В.* Математика для економістів : Методи й моделі, приклади й задачі : Навч. посібник. – К. : Либідь, 2007. – 720 с.
4. *Коваленко Л.Б.* Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : Навч. посібник / Л.Б. Коваленко, С.О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 250 с.
5. *Коваленко Л.Б.* Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : Навч. посібник / Л.Б. Коваленко; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – 192 с.

Навчальне видання

Іван Дмитрович **Пукальський**, Ірина Петрівна **Лусте**,
Богдан Олегович **Яшан**

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ
(опорний конспект лекцій та практикум)

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск **Пукальський І.Д.**

Літературний редактор **Лунул О.В.**

Технічний редактор **Чорасєва Г.К.**

Підписано до друку 24.10.2022. Формат 60х84/16.

Електронне видання. Умов.-друк. арк. 23,0.

Обл.-вид. арк. 24,7. Зам. Н-113.

Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету.

58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.

e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.