

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ-2. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

КОСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»,
освітня програма «Технологія виробництва літальних апаратів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Теорія пластичної деформації-2. Математичні основи пластичної деформації. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка», освітня програма «Технології виробництва літальних апаратів» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.А. Тітов, Н.К. Злочевська. – Електронні текстові дані (1 файл: 1.03 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. –75 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради Навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту
(протокол № 8 від 30.05.2022 р.)*

Електронне мережеве навчальне видання

ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ-2. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

КОСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Укладачі: *Тітов Вячеслав Андрійович, д-р техн. наук, проф.*
Злочевська Наталія Костянтинівна, канд. тех. наук

Відповідальний редактор *Тітов Вячеслав Андрійович, д-р техн. наук, проф.*

Рецензент *Баглюк Г.А член.-кор. НАН України, доктор технічних наук, професор, в.о. директора Інституту проблем матеріалознавства НАН України*

«Теорія пластичної деформації-2. Математичні основи пластичної деформації» є логічним продовженням дисципліни «Теорія пластичної деформації-1. Фізико-механічні основи пластичної деформації», в якій викладаються математичні основи феноменологічної теорії пластичних деформацій. Дисципліна закріплює та розвиває знання студентів щодо напружено-деформованого стану металу при навантаженні тіла довільною системою сил. Вивчаються умови рівноваги та руху металу при пластичній деформації в рамках феноменологічних теорій пружно-пластичних деформацій та теорії пластичної течії металу. В рамках дисципліни розглядаються, також питання граничного напруженого стану та ресурсу пластичності металу при пластичному деформуванні.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ	
Вступ	5
Умовні позначення	7
1. Напружений стан деформуємо тіла	8
1.1 Сили та напруження. Індксація напружень	10
1.2 Закон парності дотичних напруженню	
1.3 Напруження в площадках, які нахилені до осей координат	11
1.4 Визначення головних нормальних напружень	13
1.5 Інваріанти напружень	15
1.6 Еліпсоїди напружень	16
1.7 Поняття про тензор напруженого стану	17
1.8 Головні дотичні напруження	18
1.9 Октаедричні напруження	20
1.10 Плоский напружений стан	21
1.11 Кола Мора для об'ємного напруженого стану	25
1.12 Лінійний напружений стан	26
1.13 Диференціальні рівняння рівноваги	27
2. Деформований стан	30
2.1 Переміщення, подовження, зсуви	30
2.2 Нескінченно малі пластичні деформації	31
2.3 Великі пластичні деформації	34
2.4 Змішаний об'єм	37
3. Зв'язок між напруженнями та деформаціями	39
3.1 Зв'язок між напруженнями та деформаціями при пластичному деформуванні	39
3.2 Плоский деформований стан	44
4. Умови пластичності	46
4.1 Загальні положення	46
4.2 Теорія головних дотичних напружень	47
4.3 Енергетична теорія пластичності	48
4.3.1 Умова пластичності Губера-Мізеса-Генкі	48
4.3.2 Деякі окремі випадки основного рівняння пластичності	50
4.3.3 Геометричний зміст енергетичної умови пластичності	51
4.3.4 Канонічне рівняння пластичності. Коефіцієнт Лоде	52
5. Теорія пластичної течії	53
5.1 Основні етапи розвитку теорії пластичної течії	53
5.2 Особливості опису процесу деформації металу в теорії пластичної течії	55
5.3 Визначення основних параметрів процесів формоутворення	59
5.3.1 Швидкості деформацій та деформації	59

5.3.2 Рівняння руху	60
5.3.3 Робота деформації	61
5.3.4 Зв'язок напружень та швидкостей деформацій в теорії пластичної течії	63
5.3.5 Коефіцієнт жорсткості	65
5.3.6 Визначення середнього напруження	66
6. Механічна схема деформацій	68
6.1 Види механічних схем деформацій	68
6.2 Вплив схеми напруженого стану на пластичність	69
6.3 Вплив схеми напруженого стану на опір деформуванню	70
6.4 Вплив схеми напруженого стану на якість металу	71
6.5 Вплив схеми напруженого стану на механічні властивості	71
7. Другий граничний стан. Деформівність і діаграми пластичності	73
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	75

Вступ

Дисципліна «Теорія пластичної деформації – 2. «Математичні основи пластичної деформації» - це нормативна дисципліна професійної підготовки **бакалаврів за спеціальністю 131 «Прикладна механіка» освітньо-професійної програми «Технологія виробництва літальних апаратів»**. Вивчення дисципліни необхідно для набуття компетенцій з виконання завдань технологічного рівня за ОПП ТВЛА. Дисципліна закріплює та розвиває знання студентів щодо визначення напружено-деформованого стану металу при навантаженні тіла довільною системою сил. Визначаються умови рівноваги та руху металу при пластичній деформації в рамках феноменологічних теорій пружньо-пластичних (малих) деформацій та теорії пластичної течії металу (для великих деформацій). В рамках дисципліни розглядаються також питання граничного напруженого стану та ресурсу пластичності металу при пластичному деформуванні, визначаються умови контактного тертя та їх вплив на тіло, що деформується.

Студенти **отримують знання** теоретичних підходів до аналітичного опису напруженого та деформованого стану, закономірностей та основних законів пластичної течії металу під впливом активних та пасивних сил в процесах обробки металів тиском для розв'язання прикладних задач в процесах обробки металів тиском, а також уміння:

- визначати компоненти тензора напружень, швидкостей деформацій і деформації для об'ємного та плоского деформованого стану;
- розрахувати інваріанти тензора напружень, головні нормальні та головні дотичні напруження, розрахувати деформації зсуву за рахунок тертя в процесах ОМД;
- будувати діаграми пластичності, організувати вирішення задач граничного формоутворення з використанням критеріїв деформування на основі накопиченої пластичної деформації;
- визначити аналітично енергосилові параметри процесу деформування, набувають досвід розв'язання практичних задач для типових процесів обробки металів тиском.

Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих з дисциплін «Вища математика», «Загальна фізика», «Технологія конструкційних матеріалів», «Матеріалознавство», «Механіка матеріалів і конструкцій», «Фізико-механічні основи пластичної деформації». Набуті в результаті навчання дисципліни знання та навички мають бути застосовані студентами при вивченні професійно-орієнтованих дисциплін «Теоретичний аналіз процесів обробки металів тиском», «Технологія заготівельно-штампувального виробництва», «Технологія холодного штампування та конструювання штамів», «Технологія гарячого штампування та

конструювання штампів», «Чисельні методи в обробці металів тиском», «Технологія холодного об'ємного штампування», «Високошвидкісні методи обробки металів тиском» та інших.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\vec{F}_i$	- вектор зовнішніх сил;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- нормальні компоненти тензора напружень;
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	- дотичні компоненти тензора напружень;
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- головні нормальні напруження;
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$	- головні дотичні напруження;
σ_{ij}	- компоненти тензора напружень ($i = x, y, z; j = x, y, z$);
σ_i	- інтенсивність напружень;
$T_\sigma, D_\sigma, T_{\sigma 0}$	- тензор, девіатор та кульковий тензор напружень відповідно;
$\sigma_{\text{окт}}$	- октаедричне напруження;
$\sigma_{\text{ср}}, \sigma$	- середнє напруження $\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$;
e_x, e_y, e_z	- нормальні компоненти тензора деформацій;
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	- дотичні компоненти тензора напружень
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	- логарифмічні деформації;
$I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)$	- інваріанти тензора напружень;
$\vec{V}$	- вектор швидкостей переміщень;
V_x, V_y, V_z	- компоненти вектора переміщень;
ϵ_{ij}	- компоненти тензора швидкостей деформацій $i = x, y, z; j = x, y, z$;
e_{ij}	- компоненти тензора деформацій $i = x, y, z; j = x, y, z$;
T_e, D_e, T_{0e}	- тензор, девіатор та кульковий тензор деформацій відповідно;
$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	- одиничний тензор;
$e_{\text{ср}}, e$	- середня деформація
e_i, ϵ_i	- інтенсивність деформацій та швидкостей деформацій, відповідно.

І. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН

1.1. Сили та напруження. Індиксація напружень

Для отримання пластичної деформації до тіла прикладається система зовнішніх сил. Зовнішні сили бувають трьох типів:

- а) активні;
- б) реактивні;
- г) сили тертя.

Активні сили прикладаються через рухому частину інструмента безпосередньо до заготовки рис.1.1.

Під дією активної сили в нерухомій частині інструмента виникає **реактивна сила** (R). Реактивні сили можуть виникати і в процесі деформації після того, як заготовка, що змінює форму стикається зі стінками інструмента (R_1). В цьому випадку змінюється схема напруженого стану.

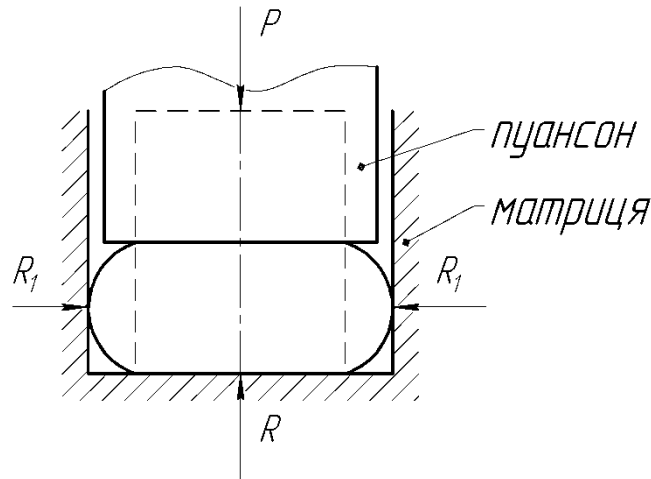


Рис. 1.1.

При пластичній деформації металу частки металу переміщуються відносно поверхні металу від центру до периферії рис. 1.2.

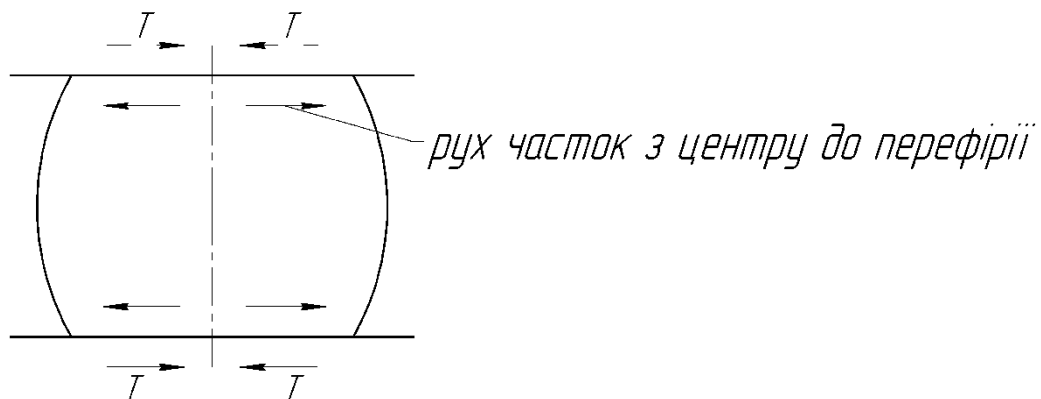


Рис. 1.2.

Отже, тут повинні виникати сили тертя (Т) на контактній поверхні інструмента.

Під дією зовнішніх сил виникають внутрішні сили, мірою яких є напруження (рис. 1.1). В загальному випадку це:

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}. \quad (1.1)$$

$$\text{якщо } P - \text{постійне тоді } \sigma = \frac{P}{F}. \quad (1.2)$$

Від вектора напруження слід відрізнити вектор тиску. Напруження діють в деформованому тілі. Вектор тиску p прикладений до інструмента. Він дорівнює по величині і протилежний по напрямку вектору напруження:

$$p = |\sigma| \quad (1.3)$$

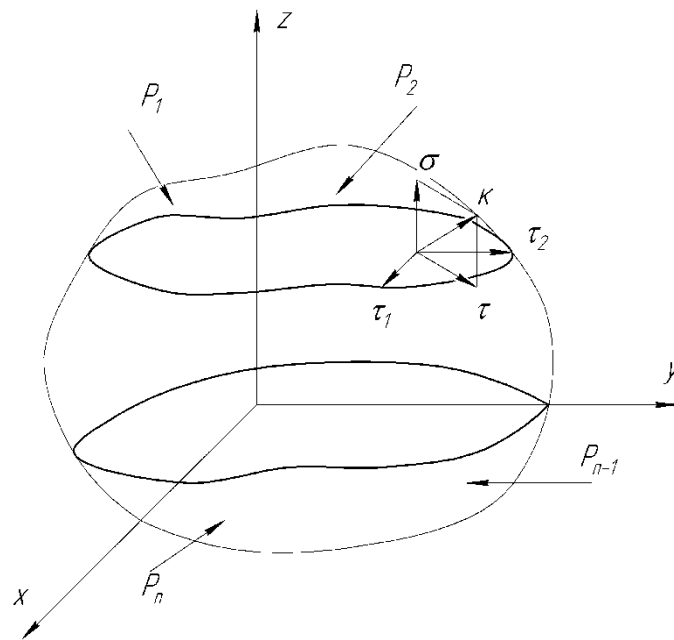


Рис. 1.3.

Якщо є деформуємо тіло, яке навантажене системою сил $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$, то слід для аналізу напруженого стану вибирати довільну систему координат і застосовувати метод перерізів, замінюючи дію відкинутої частини тіла напруженнями, які діють в цьому перерізі. Наприклад в перерізі, який паралельний площині XOY (рис. 1.3) діє напруження «К» (рис. 3):

$$K^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.4)$$

$$\text{Враховуючи, що } \tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 \quad (1.5)$$

тоді

$$K^2 = \sigma^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 \quad (1.6)$$

Якщо провести також перерізи, які паралельні площинам ZOY і ZOX, то отримуємо елементарний паралелепіпед зі сторонами dx, dy і dz , на гранях якого діють по три компоненти напружень (рис.1.4). Вони визначають напружений стан елементарного об'єму.

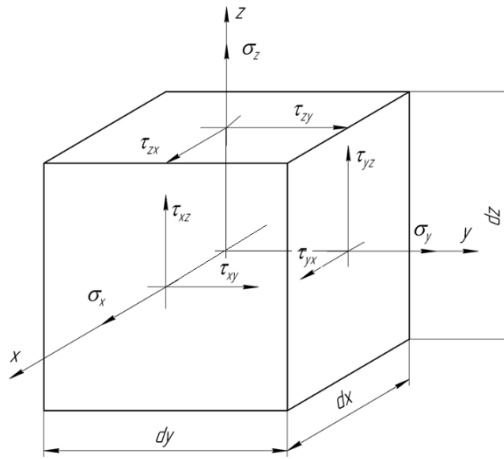


Рис. 1.4

Всі діючі на гранях елементарного паралелепіпеда напруження індексують.

Індексація наступна:

I – індекс вісі, перпендикулярно до якої проведена площина;

II – індекс вісі, паралельно якій діє дане напруження.

Маємо дев'ять компонент напружень – $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Для того, щоб визначити напружений стан тіла, необхідно побудувати функцію розподілу напружень по всьому об'єму.

1.2. Закон парності дотичних напружень

Напружений стан в точці визначають компоненти $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Вони також повинні задовольняти рівнянням рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0 \quad (1.7)$$

Розглянемо рівняння рівноваги моментів відносно осі OX: $\sum M_x = 0$. Відносно осі OX момент утворює лише зусилля від компонент напружень τ_{zy} і τ_{yz} , всі інші компоненти напружень або лежать в площині, яка проходить через X, або перетинаються з віссю X. Тоді

$$\tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{yz} dz dx \frac{dy}{2} = 0 \quad (1.8)$$

З чого слідує, що $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Після розгляду рівнянь $\sum M_y = 0$ та $\sum M_z = 0$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{cases} \quad (1.9)$$

Система рівнянь (1.9) являє собою закон парності дотичних напружень. Таким чином незалежних компонент шість: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

1.3 Напруження в площадках, які нахилені до осей координат

Хай в тілі, що навантажено зовнішніми зусиллями, в координатних площинах системи координат, які проведені в точці М (рис. 1.5), діють відомі напруження $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

В осередку точки М проведемо нахилену площадку ABC, нормаль N до якої має з осями координат кути, косинуси яких дорівнюють a_x, a_y, a_z .

Необхідно знайти напруження S, що діє в нахиленій площадці ABC. Вектор S визначає напружений стан в нахиленій площадці ABC.

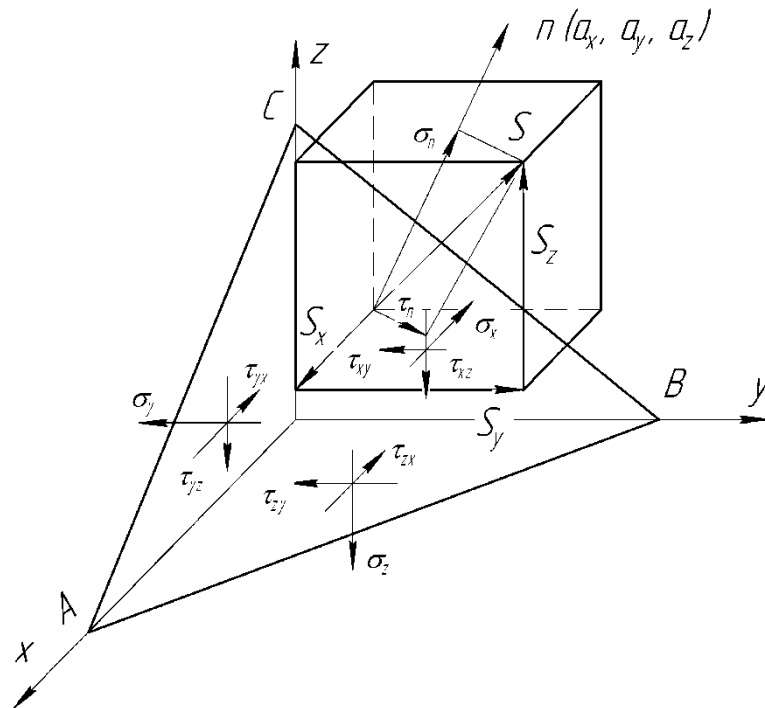


Рис. 1.5

Нехай площа $\Delta ABC = F$, тоді: $\Delta BOC = F a_x$, $\Delta AOC = F a_y$, $\Delta AOB = F a_z$.

Введемо позначення проєкцій S на вісі координат S_x, S_y, S_z .

Запишемо рівняння рівноваги

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0. \quad (1.10)$$

Проектуємо сили на осі X, Y, Z.

$$\begin{aligned} \sum X_i &= S_x F - \sigma_x F a_x - \tau_{yx} F a_y - \tau_{zx} F a_z = 0 \\ \sum Y_i &= S_y F - \tau_{xy} F a_x - \sigma_y F a_y - \tau_{zy} F a_z = 0 \\ \sum Z_i &= S_z F - \tau_{xz} F a_x - \tau_{yz} F a_y - \sigma_z F a_z = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{yx} a_y + \tau_{zx} a_z \\ S_y &= \tau_{xy} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{zy} a_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$S_z = \tau_{xz}a_x + \tau_{yz}a_y + \sigma_z a_z$$

Залежності (1.12) дозволяють отримати напруження S

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (1.13)$$

Щоб знайти σ_n і τ_n , слід скористатися теоремою аналітичної геометрії: проекція відрізка на нормаль дорівнює сумі добутків проекцій цього відрізка на осі координат (S_x, S_y, S_z) на направляючі косинуси.

$$\boxed{\sigma_n = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z} \quad (1.14)$$

після підстановки в (1.14) залежності (1.12):

$$\sigma_n = \sigma_x a_x^2 + \tau_{yx} a_x a_y + \tau_{zx} a_z a_x + \tau_{xy} a_x a_y + \sigma_y a_y^2 + \tau_{zy} a_z a_y + \tau_{xz} a_x a_z + \tau_{yz} a_y a_z + \sigma_z a_z^2 \quad (1.15)$$

З урахування закону парності дотичних напружень і використовуючи циклічну перестановку індексів отримаємо:

$$\sigma_n = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x \quad (1.16)$$

В загальному вигляді рівняння (1.16) має структуру рівняння поверхні Коші:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = L; \text{ (без } Gx + Hy + Iz) \quad (1.17)$$

Тут відсутні невідомі a_x, a_y, a_z в першому ступені.

Поверхня Коші центральна (має центр симетрії), якщо поміняти X, Y, Z на -X, -Y, -Z, то точка як і раніше залишиться на поверхні.

З теорії поверхонь II-го порядку відомо, що для центральної поверхні існує така система осей. при переході до якої утворюються в нуль коефіцієнти при добутках невідомих. Для нашого випадку σ_n можна стверджувати, що існують три взаємоперпендикулярних напрямки, де перетворюються в нуль дотичні напруження $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Такі напрямки є головними. По площадкам, які перпендикулярні до головних напрямків і діють тільки нормальні напруження. Ці площадки називають – головні площадки. А нормальні напруження в цих площадках – головні нормальні напруження. Таких напружень три $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Якщо знайти положення головних площадок, то тоді формули (1.12) міняють свій вид, тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_1 a_1 \\ S_y &= \sigma_2 a_2 \\ S_z &= \sigma_3 a_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тоді формули (1.13) і (1.16) також приймають вид:

$$S^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 \quad (1.19)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \quad (1.20)$$

1.4. Визначення головних нормальних напружень

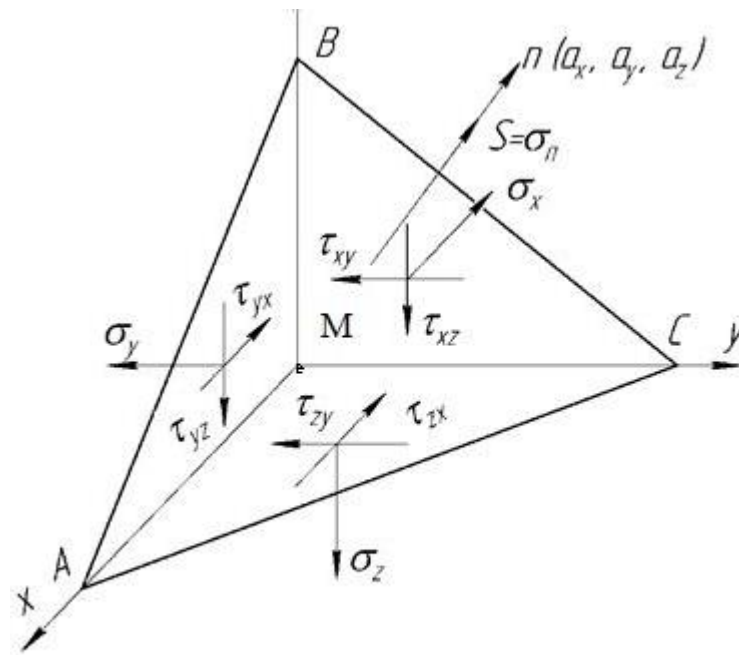


Рис. 1.6

Ми стверджуємо, що ABC – головна площадка, значить в ній не діють дотичні напруження, а S співпадає з нормаллю $S = \sigma_n$.

Дано $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. і $S = \sigma_n$. Знайти $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ і a_1, a_2, a_3 .

Для даної системи осей X, Y, Z проекції S на осі координат дорівнюють згідно формул (1.12):

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_1 + \tau_{yx} a_2 + \tau_{zx} a_3; \\ S_y &= \tau_{xy} a_1 + \sigma_y a_2 + \tau_{zy} a_3; \\ S_z &= \tau_{xz} a_1 + \tau_{yz} a_2 + \sigma_z a_3. \end{aligned} \quad (1.21)$$

З іншого боку безпосереднім проектуванням σ_n на осі X, Y, Z отримуємо, що

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_n a_1; \\ S_y &= \sigma_n a_2; \\ S_z &= \sigma_n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Після підстановки (1.21) в (1.22) маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_n a_1 &= \sigma_x a_1 + \tau_{yx} a_2 + \tau_{zx} a_3; \\ \sigma_n a_2 &= \tau_{xy} a_1 + \sigma_y a_2 + \tau_{zy} a_3; \\ \sigma_n a_3 &= \tau_{xz} a_1 + \tau_{yz} a_2 + \sigma_z a_3. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Або після перетворень

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)a_1 + \tau_{yx}a_2 + \tau_{zx}a_3 = 0 \\ \tau_{xy}a_1 + (\sigma_y - \sigma_n)a_2 + \tau_{zy}a_3 = 0 \\ \tau_{xz}a_1 + \tau_{yz}a_2 + (\sigma_z - \sigma_n)a_3 = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Це система трьох лінійних однорідних рівнянь з чотирма невідомими, яка має відмінні від нуля рішення, так як $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Таке можливо лише в тому випадку, якщо головний визначник системи дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (1.25)$$

Визначник являє собою рівняння для знаходження σ_n . Розкриваємо визначник і запишемо рівняння відносно невідомого σ_n

$$\sigma_x - \sigma_n \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} - \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} + \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

тоді

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{zy}(\sigma_x - \sigma_n) - \tau_{xy}\tau_{yx}(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{xz}\tau_{zx}(\sigma_y - \sigma_n) = 0 \quad (1.27)$$

Зберемо доданки з однаковими ступенями невідомою σ_n :

$$\begin{aligned} & -\sigma_n^3 + \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_n(-\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ & + \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_z + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{xz}\tau_{yx}\tau_{zy} - \tau_{xz}\tau_{zx}\sigma_y = 0 \quad (1.28) \\ & -\sigma_n^3 + \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma_n(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) + \\ & + \sigma_x(\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}\tau_{zy}) - \tau_{xy}(\tau_{yx}\sigma_z - \tau_{zx}\tau_{yz}) + \tau_{xz}(\tau_{yx}\tau_{zy} - \tau_{zx}\sigma_y) = 0 \end{aligned}$$

Зробимо перетворення вільного члену рівняння (1.28)

$$L = \sigma_x \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \sigma_y & \tau_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

Таким чином вільний член це – визначник III- порядку складений з напружень в точці.

Остаточно визначальне рівняння для σ_n має наступний вид.

$$\begin{aligned} & \sigma_n^3 - \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_n(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - \\ & \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отримане кубічне рівняння для визначення напруження σ_n .

У разі чергування знаків кубічного рівняння всі його корні будуть дійсними числами, а дискримінант для знаходження спряжених коренів буде додатнім. Рівняння (1.30) буде мати три корні $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – це головні нормальні напруження. Індксація цих напружень здійснюється відповідно до нерівності $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, таким чином $\sigma_1 = \max$; $\sigma_2 = \min$; $\sigma_3 = \text{середнє}$.

1.5 Інваріанти напружень

При зміні системи осей координат (повороті осей координат) будуть змінюватися значення всіх компонент напружень, але положення головних осей і величина головних нормальних напружень в точці незмінні. Така ситуація можлива лише в тому випадку, якщо не міняються коефіцієнти кубічного рівняння. Вони являють собою інваріанти напруженого стану.

Інваріант I-го роду:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}, \quad (1.31)$$

в головних напруженнях

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}. \quad (1.32)$$

Інваріант II-го роду:

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}, \quad (1.33)$$

в головних напруженнях

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const}. \quad (1.34)$$

Інваріант III-го роду:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \text{const} \quad (1.35)$$

в головних напруженнях

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{const} \quad (1.36)$$

Інваріанти напруженого стану служать для переходу від головних напружень до компонентів напружень у довільній системі осей координат.

Головні площадки легко знаходяться, коли знайдені головні нормані напруження з системи рівнянь (1.24):

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)a_1 + \tau_{yx}a_2 + \tau_{zx}a_3 = 0 \\ \tau_{xy}a_1 + (\sigma_y - \sigma_n)a_2 + \tau_{zy}a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases} \quad (1.37)$$

Підставляючи $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ знаходимо a_1, a_2, a_3 . Таким чином, для кожної точки опис напруженого стану можна звести до визначення головних нормальних напружень, які діють по головних площадкам.

При використанні головних нормальних напружень значно спрощуються рівняння для знаходження компонент напружень в нахиленій до осей координат площині

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_1 a_1; \\ S_y &= \sigma_2 a_2; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$S_z = \sigma_3 a_3.$$

$$S^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 \quad (1.39)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \quad (1.40)$$

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 \quad (1.41)$$

1.6 Еліпсоїд напружень

Співвідношення (1.38) $S_x = \sigma_1 a_1$; $S_y = \sigma_2 a_2$; $S_z = \sigma_3 a_3$ почленно розділимо на $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Отримані направляючі косинуси

$$a_1 = \frac{S_x}{\sigma_1}; a_2 = \frac{S_y}{\sigma_2}; a_3 = \frac{S_z}{\sigma_3} \quad (1.42)$$

піднесемо до квадрату та використаємо співвідношення між направляючими косинусами:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (1.43)$$

Тоді отримаємо:

$$\left(\frac{S_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{S_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \quad (1.44)$$

Отримане рівняння (1.44) з геометричної точки зору — рівняння еліпсоїда. Поверхня еліпсоїда описує множину значень напруженого стану в розглядаємій точці. Поверхня еліпсоїду побудована на напіввісях, які дорівнюють головним нормальним напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

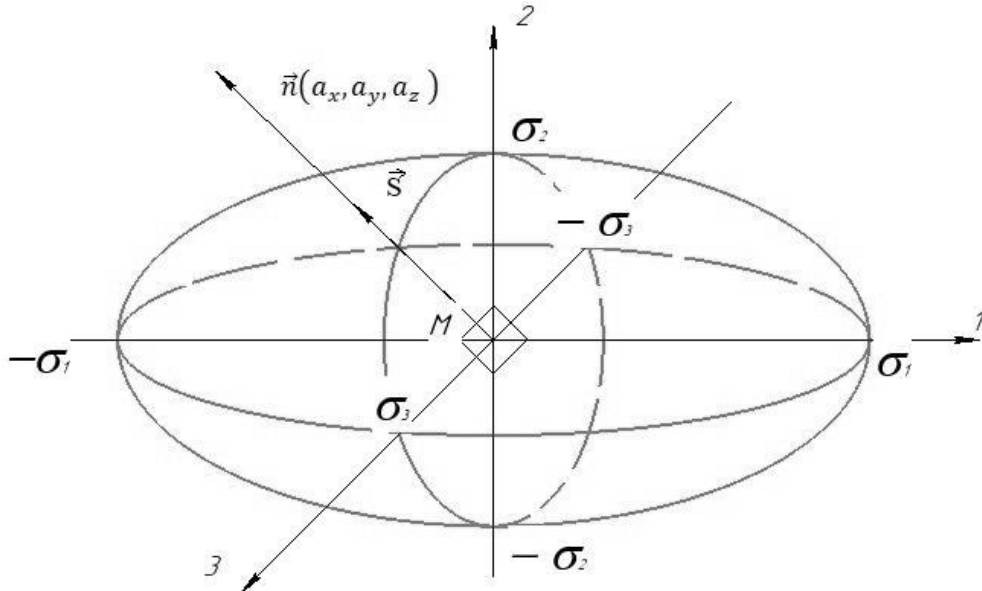


Рис. 1.7

Для знаходження напруження S в нахиленій площадці, яка задана направляючими косинусами a_1, a_2, a_3 необхідно побудувати нормаль n . Перетин нормалі з поверхнею еліпсоїда і дасть напруження S в нахиленій площадці.

Аналіз властивостей поверхні еліпсоїда показує, що:

1. Головні нормальні напруження мають екстремальні значення в даній точці ($\sigma_1 - \max, \sigma_3 - \min, \sigma_2 - \text{середнє}$);
2. Напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ можуть бути рівні попарно ($\sigma_1 = \sigma_2$ або $\sigma_2 = \sigma_3$), і тоді еліпсоїд перетворюється в еліпсоїд обертання;
3. Якщо $\sigma_1 = \sigma_3$, то вони дорівнюють σ_2 , тоді еліпсоїд напружень перетворюється в шар. І тоді будь-яка система осей буде головною тобто в даних умовах відсутні дотичні напруження. Стан навантаження відповідає пружній деформації. Пластична деформація відсутня.

1.7 Поняття про тензор напруженого стану

Напруження в площадці, яка нахилена до осей головних координат ставиться у відповідність вектор початок якого співпадає з початковими координатами, а кінець з точкою перехрестя нормалі $\vec{n}(a_x, a_y, a_z)$ з поверхнею еліпсоїда напружень.

Проектування його на осі координат дає

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{yx} a_y + \tau_{zx} a_z \\ S_y &= \tau_{xy} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{zy} a_z \\ S_z &= \tau_{xz} a_x + \tau_{yz} a_y + \sigma_z a_z \end{aligned} \quad (1.45)$$

Напруженню в точці ставиться не тільки величина, але і напрямок дії напруження. Напружений стан і точці визначається дев'ятьма компонентами напруження.

Така величина визначається тензором напруженого стану в нашому випадку:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

З тензорного аналізу відомо, що довільний тензор можна розкласти на два тензори:

$$T_\sigma = T_0 + D_\sigma \quad (1.47)$$

де T_0 – кульовий тензор, який дорівнює

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

$$\text{а} \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1.49)$$

D_σ - девіатор напружень, який дорівнює

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad (1.50)$$

Особливістю девіатора напружень є те, що його перший інваріант дорівнює нулю

$$I_1(D_\sigma) = 0 \quad (1.51)$$

- 1) Два тензори T'_σ і T''_σ визначають один і той же напружений стан, якщо виконуються одночасно умови:

$$\begin{cases} I_1(T'_\sigma) = I_1(T''_\sigma) \\ I_2(T'_\sigma) = I_2(T''_\sigma) \\ I_3(T'_\sigma) = I_3(T''_\sigma) \end{cases} \quad (1.52)$$

1.8 Головні дотичні напруження

Головні дотичні напруження— це такі дотичні напруження, які мають найбільше значення. Звідси спосіб їх знаходження: слід знайти часткові похідні і прирівняти їх до нуля.

Дотичні напруження τ_n визначаємо з врахуванням (1.41) та підстановкою (1.39) і (1.40).

$$\tau_n^2 = S_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 - a_3^2 (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2 \quad (1.53)$$

де a_1, a_2, a_3 – незалежні змінні. Проводимо заміну $a_3^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2$

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) - [\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)] \quad (1.54)$$

Необхідно знайти часткові похідні по кожній змінній прирівняти їх до нуля і вирішити систему отриманих рівнянь.

$$\frac{2\tau_n \partial \tau_n}{\partial a_1} = 2\sigma_1^2 a_1 - 2\sigma_3^2 a_1 - 2[\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)](2\sigma_1 a_1 - 2\sigma_3 a_1) \quad (1.55)$$

Перетворимо цей вираз

$$2a_1(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) - 4a_1(\sigma_1 - \sigma_3)[\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)] = 0 \quad (1.56)$$

винесемо за дужки $2a_1(\sigma_1 - \sigma_3)$

$$2a_1(\sigma_1 - \sigma_3) \{ \sigma_1 + \sigma_3 - 2[\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)] \} = 0 \quad (1.57)$$

$(\sigma_1 - \sigma_3) \neq 0$ інакше немає пластичної деформації і на цей вираз можна скоротити.

Тому

$$a_1 \{ \sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_1 a_1^2 - 2\sigma_2 a_2^2 + 2\sigma_3 a_1^2 + 2\sigma_3 a_2^2 \} = 0 \quad (1.58)$$

В подальшому слід про диференціювати на a_2 , але через симетрію виразу друге рівняння отримується простою заміною індексу 1 на 2 і на оборот

$$a_2 \{ \sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_2 a_2^2 - 2\sigma_1 a_1^2 + 2\sigma_3 a_2^2 + 2\sigma_3 a_1^2 \} = 0 \quad (1.59)$$

В результаті отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими. Ця система має вигляд:

$$\begin{cases} a_1\{\sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_1 a_1^2 - 2\sigma_2 a_2^2 + 2\sigma_3 a_1^2 + 2\sigma_3 a_2^2\} = 0 \\ a_2\{\sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_2 a_2^2 - 2\sigma_1 a_1^2 + 2\sigma_3 a_2^2 + 2\sigma_3 a_1^2\} = 0 \end{cases}$$

Ця система має розв'язок:

1. Якщо $a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 1$. Ця площадка відповідає координатній площині, дотичні напруження в якій дорівнюють нулю. Цей розв'язок не задовольняє поставленій задачі.

2. Якщо $a_2 = 0; a_1 \neq 0$. Перше рівняння скорочується на a_1 , друге задовольняється тотожно.

З першого рівняння системи отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_1 a_1^2 + 2\sigma_3 a_1^2 &= 0; \\ a_1^2 &= \frac{1}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

Рішення в цьому випадку:

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, a_2 = 0, a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.60)$$

3. Якщо $a_1 = 0; a_2 \neq 0$. Перше рівняння виконується тотожно. З другого отримуємо

$$a_1 = 0; a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.61)$$

Повне рішення підставляється до табл.1.

Таблиця 1

a_1	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
a_2	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
a_3	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Всього це дванадцять площин де дотичні напруження приймають найбільше значення. Ці площини розташовані під кутами 45° до площини координат.

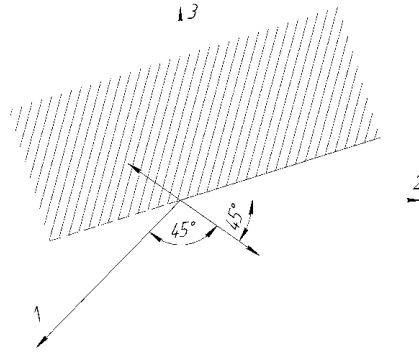


Рис. 1.8

Знайдемо величину максимального дотичного напруження підстановкою рішень з таблиці.

$$\begin{aligned} \text{При } \tau_n^2 &= \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2) \\ \tau_{12}^2 &= \sigma_1^2 \frac{1}{2} + \sigma_2^2 \frac{1}{2} - \left(\sigma_1 \frac{1}{2} + \sigma_2 \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{4} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \\ \left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{23} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{31} &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \end{aligned} \right\} - \text{Головні дотичні напруження} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Нормальні напруження на цих же площадках визначаються за формулою (1.40):

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \sigma_{23} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \\ \sigma_{31} &= \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \end{aligned} \right\} - \text{Нормальні напруження} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Аналіз показує:

- 1) Якщо додати до $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ одну й ту ж величину (прикласти гідростатичний тиск) то величина головних дотичних напруження не зміниться.
- 2) Якщо скласти головні дотичні напруження, то $\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0$.

1.9 Октаедричні напруження

Октаедричні напруження діють в площадках, які рівнонахилені до осей координат (октаедричні площадки).

Октаедричні площадки — це площини ковзання в ГЦК, вони рівно нахилені до всіх осей координат.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1; a_1 = a_2 = a_3 = a; 3a^2 = 1; a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.64)$$

Нормальне октаедричне напруження визначаємо по формулі (1.40):

$$\sigma_{окт.} = \sigma_1 \frac{1}{3} + \sigma_2 \frac{1}{3} + \sigma_3 \frac{1}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (1.65)$$

Нормальне октаедричне напруження дорівнює середньому нормальному напруженню (гідростатичний тиск).

Дотичне октаедричне визначаємо по формулі (1.41)

$$\begin{aligned} \tau_{окт.}^2 &= \sigma_1^2 \frac{1}{3} + \sigma_2^2 \frac{1}{3} + \sigma_3^2 \frac{1}{3} - \left(\sigma_1 \frac{1}{3} + \sigma_2 \frac{1}{3} + \sigma_3 \frac{1}{3} \right)^2 = \\ &= 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 = \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2) = \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{9} \end{aligned}$$

Тоді

$$\tau_{окт.} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.66)$$

Перейдемо до компонент напружень в довільній системі осей координат для $\tau_{окт.}$. Повернемося до попереднього виразу:

$$\begin{aligned} \tau_{окт.}^2 &= \frac{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1}{9} = \\ &\quad (\text{представимо у вигляді сум інваріантів}) \\ &= \frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1) - 6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9} = \\ &= \frac{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9} = \frac{2I_1^2 - 6I_2}{9} = \\ &= \frac{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 6(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)}{9} = \\ &= \frac{2\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2 + 2\sigma_z^2 - 2\sigma_x\sigma_y - 2\sigma_y\sigma_z - 2\sigma_z\sigma_x + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{9} = \\ &= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{9} \end{aligned}$$

Тоді отримаємо $\tau_{окт.}$ в компонентах напружень по осях координат

$$\tau_{окт.} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.67)$$

1.10 Плоский напружений стан

Такий напружений стан, при якому відсутні компоненти тензора напружень, які діють вздовж одного з напрямків (рис.1.8).

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \quad (\text{згідно визначення}) \quad (1.68)$$

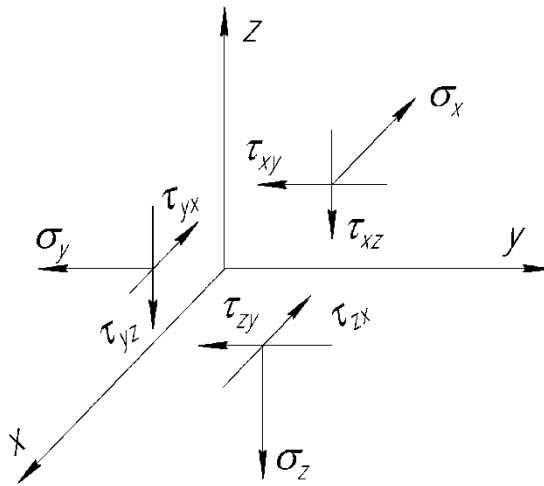


Рис. 1.8

Згідно закону парності дотичні напруження $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ і весь напружений стан визначається площиною XOY (рис. 1.9).

Розглянемо площину, яка паралельна осі OZ і розрахунок ведемо для одиниці її площадки. Напружений стан матеріального об'єму в точці O заданий напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Треба знати головні нормальні дотичні напруження.

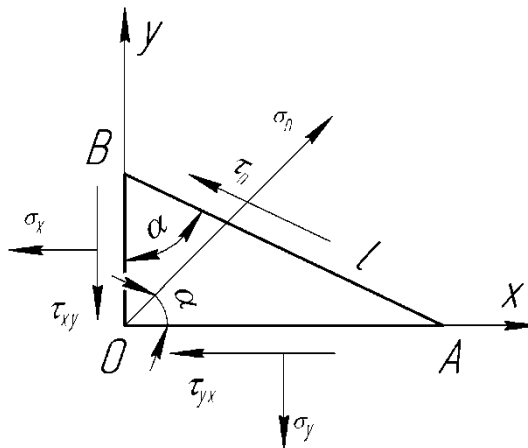


Рис. 1.9

Площа ℓ поверхні $F_{AB} = 1 \cdot \ell$; $F_{OA} = 1 \cdot \ell \cdot \sin \alpha$; $F_{OB} = 1 \cdot \ell \cdot \cos \alpha$. Розглянемо рівновагу сил $\sum X_i = 0$.

$$\sigma_n 1 \ell \cos \alpha - \tau_n 1 \ell \sin \alpha - \sigma_x 1 \ell \cos \alpha - \tau_{yx} 1 \sin \alpha = 0 \quad (1.69)$$

Скоротивши на ℓ отримаємо:

$$\sigma_n \cos \alpha - \tau_n \sin \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha$$

Для рівноваги сил $\sum Y_i = 0$ маємо;

$$\sigma_n 1 \ell \sin \alpha + \tau_n 1 \ell \cos \alpha - \sigma_y 1 \ell \sin \alpha - \tau_{xy} 1 \cos \alpha = 0 \quad (1.70)$$

$$\sigma_n \sin \alpha + \tau_n \cos \alpha = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha$$

Отримали систему двох лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_n \cos \alpha - \tau_n \sin \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha \\ \sigma_n \sin \alpha + \tau_n \cos \alpha = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \end{cases} \quad (1.71)$$

Система вирішується методом визначників. Знайдемо головний визначник.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1 \quad (1.72)$$

Другорядний визначник для визначення σ_n

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma_n} &= \begin{vmatrix} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha & -\sin \alpha \\ \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \\ &\quad \tau_{xy} \sin 2\alpha + \sigma_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Так як $\Delta = 1$ то

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.73)$$

Визначимо другорядний визначник для визначення τ_n

$$\begin{aligned} \Delta_{\tau_n} &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma_x \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} \sin^2 \alpha = \\ &= \sigma_y \frac{\sin 2\alpha}{2} - \sigma_x \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Так як $\Delta = 1$ то

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1.74)$$

Звичайний метод знаходження головних нормальних напружень достатньо складний. Тому в даному випадку використовуємо наступний метод. Розглянемо систему рівнянь (1.73) та (1.74).

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

В першому рівнянні перенесемо член, який не містить тригонометричної функції і ліву сторону, потім піднесемо обидві сторони до квадрату і почленно складемо два рівняння

$$\begin{aligned} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha + 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \tau_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \\ &+ \tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha - 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \tau_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \\ &+ \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

В результаті отримано рівняння, що зв'язує нормальні і дотичні нормальні напруження з відомими напруженнями в довільній системі координат.

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.75)$$

Для знаходження головних нормальних напружень σ_n використовуємо властивість головних площадок на яких $\tau_n = 0$ (1.76)

Після підстановки (1.76) в (1.75) отримуємо:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.77)$$

Залежність (1.77) визначає головні нормальні напруження для даного напруженого стану матеріального об'єкта.

Кут під яким головна площадка розташована до осі OX , визначається, з рівняння (1.74) при граничній умові $\tau_n = 0$, тоді

$$tg 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.78)$$

Якщо в якості вихідних задані головні площадки, тоді рівняння для знаходження σ_n і τ_n має вид:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (1.79)$$

Це рівняння кола Мора.

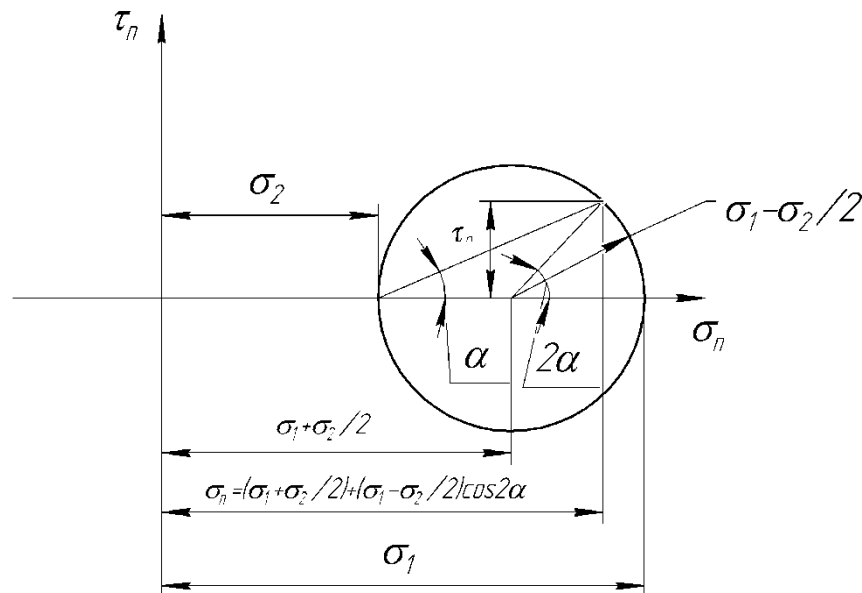


Рис. 1.10

Якщо заданий круг Мора, то для визначення σ_n і τ_n в площадці під кутом α до головних осей слід провести побудову, яка вказана на рис.1.10.

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (1.80)$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (1.81)$$

1.11 Кола Мора для об'ємного напруженого стану

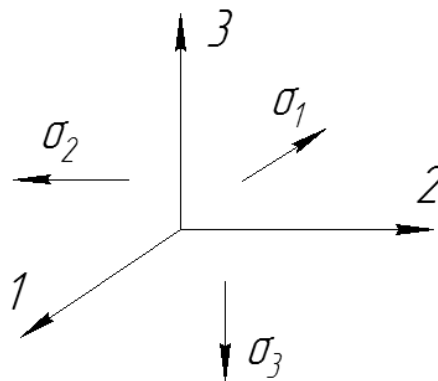


Рис. 1.12

Плоский напружений стан описується координатами точок на окружності кола Мора. Якщо є об'ємний напружений стан у кожній точці простору σ_1 , σ_2 , σ_3 залежать від координат точок. Положення в площині 1.2 при фіксованій координаті $z = 0$ описується напруженнями σ_1 і σ_2 , що відповідає плоскому напруженому стану. Теж саме вірно $y = 0$ і $x = 0$ (рис.1.12). І обернений об'ємний напружений стан описується сукупністю в площинах координат, може описувати в свою чергу 3-ма колами Мора.

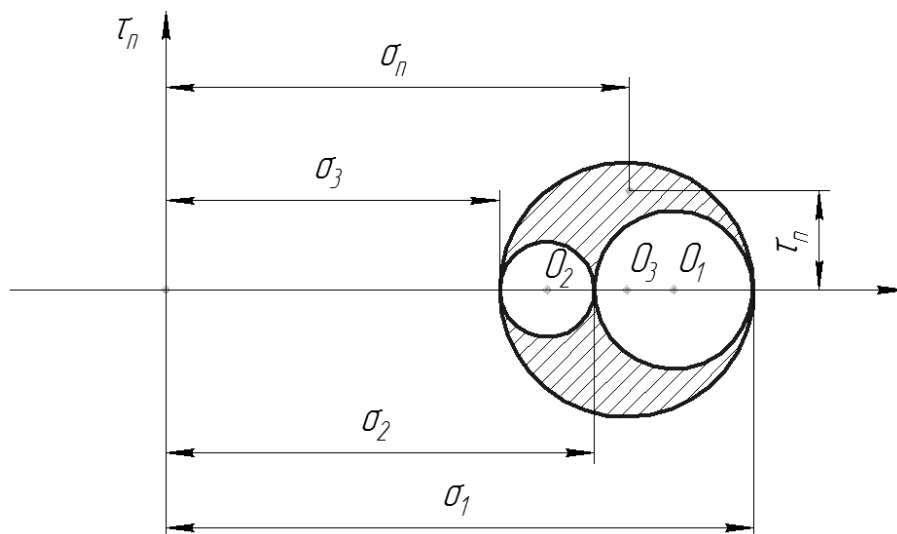


Рис. 1.13

Напружений стан в площині 1; 2 напруження σ_1 і σ_2 . Напружений стан в площині 2; 3 напруження σ_2 і σ_3 . Напружений стан в площині 3; 1 напруження σ_3 і σ_1 . Напружений стан усередині квадрантів об'ємного напруженого стану визначається координатами точок σ_n і τ_n із замкнутих заштрихованих областей, обмежених колами Мора.

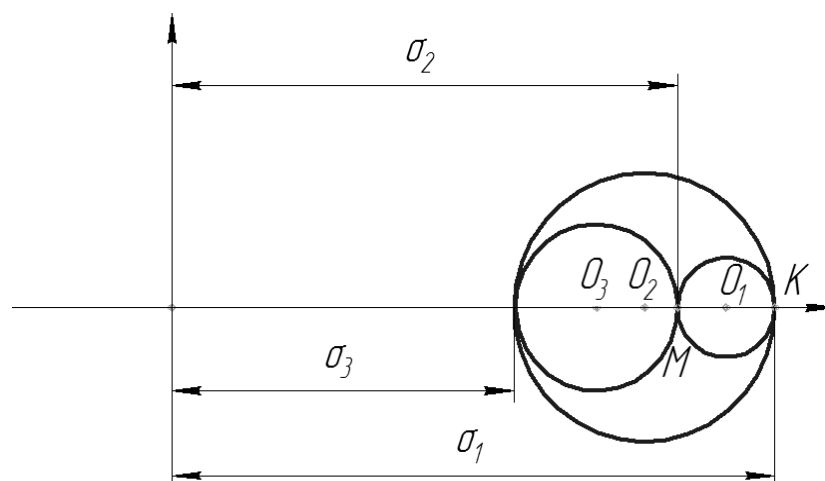


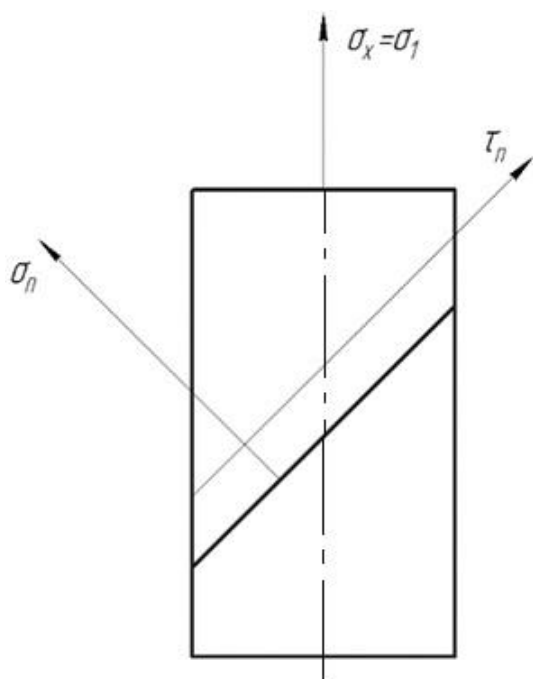
Рис. 1.14

Розглянемо вплив середнього головного напруження σ_2 за допомогою оцінки кіл Мора. $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Складемо співвідношення:

$$\nu_\sigma = \frac{O_2 M}{O_2 K} = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}. \quad (1.82)$$

Отже коефіцієнт ν_σ відображає вплив σ_2 . Знаючи що σ_2 змінюється від σ_3 до σ_1 можна зробити висновок $-1 \leq \nu_\sigma \leq 1$ при цьому ν_σ змінюється безперервно.

1.12 Лінійний напружений стан



Лінійним називається такий напружений стан при якому компоненти напружень вздовж осей y і z дорівнюють нулю.

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = \tau_{xz}, \\ \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \end{aligned} \quad (1.83)$$

Отже, для лінійного напруженого стану

$$\sigma_x = \sigma_1. \quad (1.84)$$

Скористаємося формулами плоского напруженого стану (1.80) і (1.81).

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (1.85)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{|\sigma_1|}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.86)$$

Рис. 1.15

1.13 Диференціальні рівняння рівноваги.

У загальному випадку напружений стан неоднорідний, він змінюється від точки до точки, при цьому функції напружень безперервні.

[illegible]

Щоб знайти напружений стан в точці a , потрібно знайти повний диференціал всіх функцій $\sigma_x, \tau_{xy} \dots \sigma_z$. Диференціювати необхідно по осях і розглядати шлях ділянки вздовж осей координат по черзі. Розглянемо ділянку від точки a до точки b , тут змінюється лише координата x , а в результаті зміни x змінюються компоненти σ_x, τ_{xy} і τ_{xz} і вони представляють собою (рис.1.16).

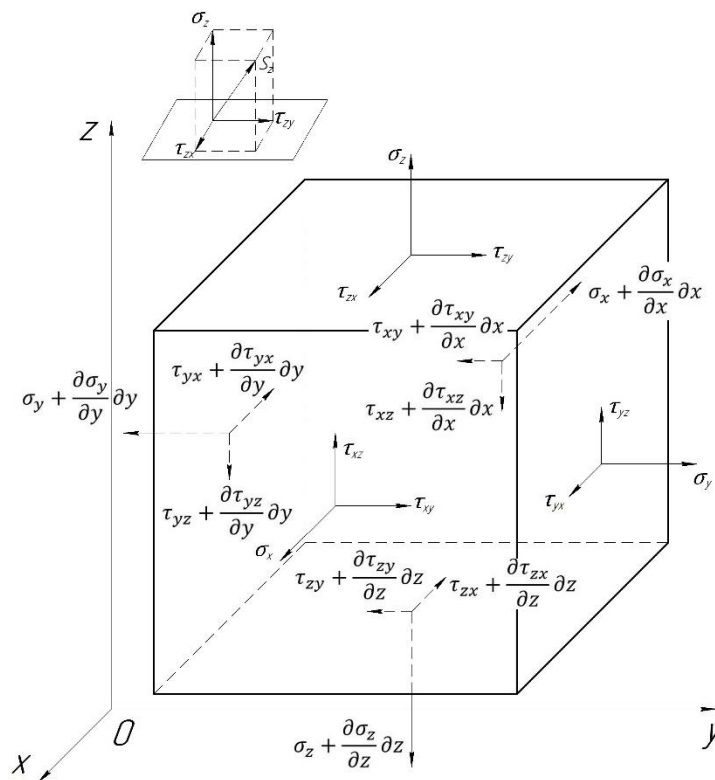


Рис.1.16

$$\sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad (1.88)$$

$$\tau_{xy} + d\tau_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \quad (1.89)$$

$$\tau_{xz} + d\tau_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \quad (1.90)$$

Тобто відображення напруженого стану в точці тільки що знайденими напруженнями і компонентами $\tau_{yx}, \sigma_y, \dots, \sigma_z$.

Тепер перейдемо із точки b в точку c , при цьому змінюється тільки y .

$$\sigma_y + d\sigma_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \quad (1.91)$$

$$\tau_{yx} + d\tau_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \quad (1.92)$$

$$\tau_{yz} + d\tau_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \quad (1.93)$$

Аналогічним способом здійснюється перехід від c до a .

Тепер складаємо умови рівноваги сил.

$$\sum X_i = 0;$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy = 0 \quad (1.94)$$

Розкриємо дужки.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dy dx = 0 \quad (1.95)$$

Можна скоротити на dx, dy, dz

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1.96)$$

Це перше рівняння рівноваги. Проектуємо всі сили на вісь Y і вісь Z , отримуємо відповідно

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (1.97)$$

$$\sum Z_i = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.98)$$

Отримаємо систему диференціальних рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.99)$$

Це система трьох лінійних однорідних диференціальних рівнянь в часткових похідних. Вона не може бути вирішена в загальному виді. Один із часткових вирішень – це рішення плоскої задачі, тоді тотожне виконується третє рівняння і зникають треті доданки в перших двох.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.100)$$

Така система має часткове вирішення. Система (1.100) має два рівняння з трьома невідомими. Для вирішення задач - $\sigma_x: \tau_{xy}: \sigma_y$, що описують рівняння (1.100) для плоского напруженого стану використовують додаткові рівняння, зазвичай, рівняння пластичності.

2. ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН

2.1. Переміщення, подовження, зсуви

Під дією зовнішньої системи сил тіло змінює свою форму (рис. 2.1). При цьому всі матеріальні частки деформуємого тіла переміщуються в просторі. Позначений відрізок Γ переміщується та змінює форму від початкової форми ab (Γ_0) до кінцевої $a'b'(\Gamma)$.

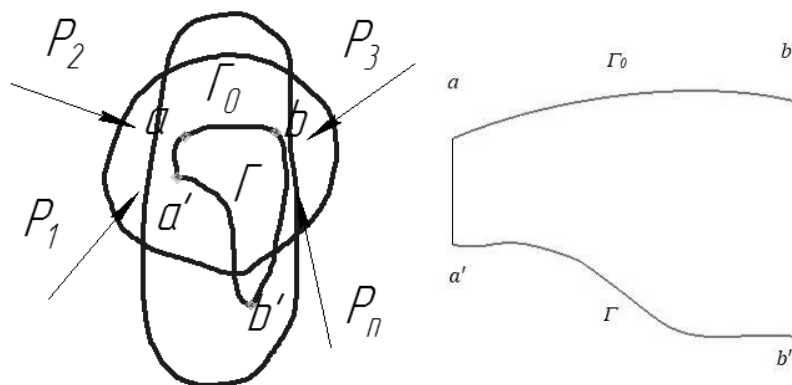


Рис. 2.1

Функція, що описує зміну положення матеріальних часток (відрізка ab , як множинки матеріальних часток) в обраній системі координат, називається **функцією переміщення** $\ell(x, y, z)$.

Просторова функція переміщення $\ell(x, y, z)$ має проекції на площини координат та описується по напрямкам осей координати в параметричному вигляді:

$$\ell(x, y, z) = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} \quad (2.1)$$

Функції переміщення включають в себе як переносна переміщення матеріальна часток відрізка Γ так і зміну його розмірів

Деформація - це відносна зміна довжини відрізка

$$e = \frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma} = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{d(ab)}{ab}, \quad (2.2)$$

де $d(ab)$ - диференціал прирощення довжини відрізка Γ .

Для того, щоб розрахувати диференціал прирощення довжини відрізка Γ_0 , потрібно усунути переносний рух відрізка.

Отримані зміни розмірів відрізка повздовж осей x , y , z називають **подовженнями**. Вони визначають відносні деформації за формулою (2.2).

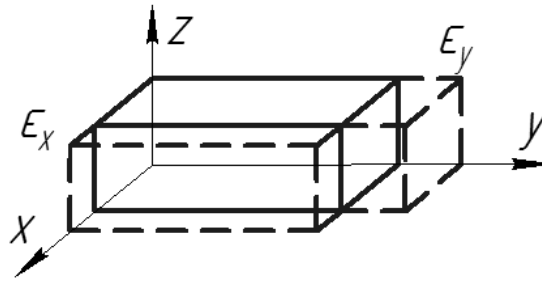


Рис. 2.2

Можуть змінюватися також кутові величини паралелепіпеда.

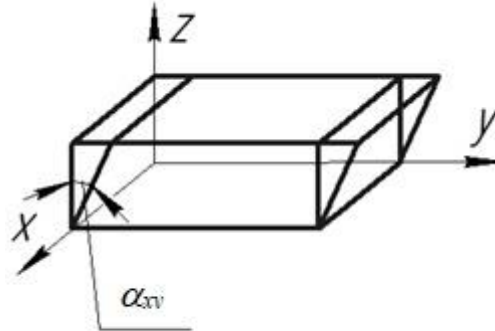


Рис.2.3

Кутові деформації безрозмірні і називаються **зсувами**. Величина деформації зсуву визначається тангенсом кута α_{xy}

$$\gamma_{xy} = \operatorname{tg} \alpha_{xy} \quad (2.3)$$

2.2 Нескінченно малі пластичні деформації.

Задано функції переміщення параметрично.

$$\begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases}$$

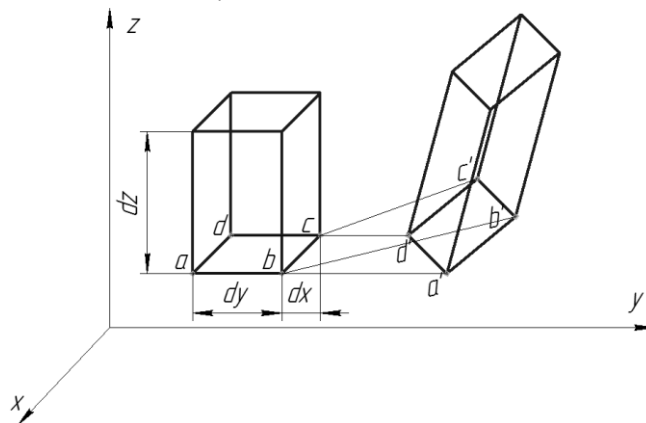


Рис. 2.4

У тілі, що деформується, виділений позначений елементарний прямокутний паралелепіпед зі сторонами dx , dy , dz (рис. 2.4). В результаті пластичної деформації прямокутник перетвориться в загальному випадку в косокутну призму. Потрібно знайти нескінченно малі подовження і зсуву, отримані тілом в результаті деформації.

Спроекуємо елементарний об'єм на координатну площину XOY (рис.2.5).

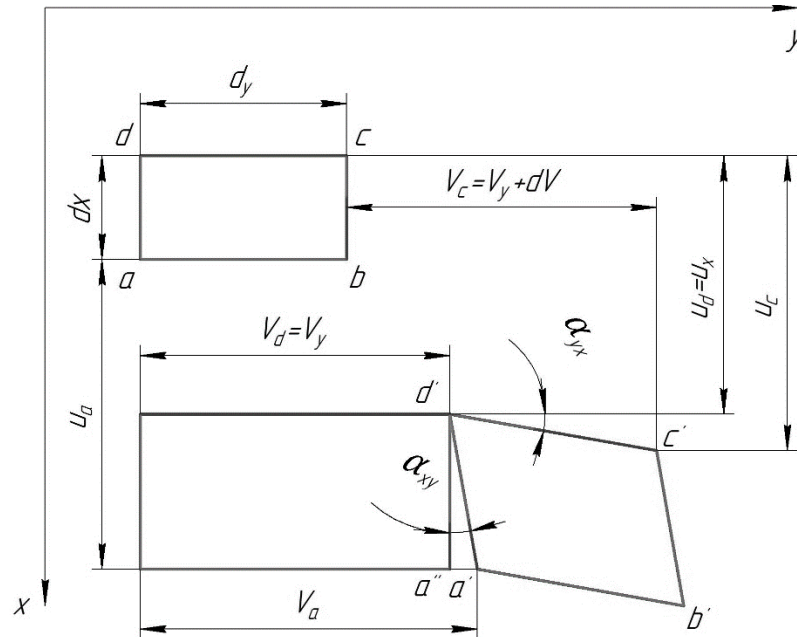


Рис.2.5

Необхідно визначити деформації подовження e_x , e_y , e_z і зсуви γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} .

$$e_x = \frac{u_{ax} - u_{xd}}{dx} = \frac{u_x + du - u_x}{dx} \quad (2.4)$$

де u_x – функція переміщення точок (переносна);

du – функція прирощення переміщення точки a по відношенню до точки d , яка визначає зміну довжини відрізка ad .

В загальному вигляді функція прирощення має вид:

$$d_u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (2.5)$$

На цьому переході від точки d до точки a змінюється лише координата x , а $y = \text{const}$ і $z = \text{const}$ і $dy = 0$ і $dz = 0$

Тоді

$$d_u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

Після підстановки в (2.4) отримуємо:

$$e_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

Знайдемо видовження вздовж осі у. Аналогічно це переміщення точки с.

$$e_y = \frac{V_{cy} - V_{dy}}{dy} = \frac{V_y + dV - V_y}{dy} = \frac{dV}{dy} \quad (2.8)$$

аналогічно (2.5)

$$d_v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (2.9)$$

із цього отримуємо

$$e_y = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dx}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.10)$$

По аналогії для осі (OZ) у площині XOZ

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.11)$$

Знайдемо деформації зсуву:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - a'd'c' = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} \quad (2.12)$$

$$\text{Вважаємо, що для малих кутів } tg\alpha_{xy} \approx \alpha_{xy} \quad (2.13)$$

$$tg\alpha_{xy} = \frac{a'a''}{da''} = \frac{v_a - v_d}{dx + e_x dx} = \frac{dv}{dx(1 + e_x)} \quad (2.14)$$

$$\text{Видовжена величина відрізка } ad \text{ дорівнює } ad = dx(1 + e_x) \quad (2.15)$$

$$d_v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (2.16)$$

В даному випадку змінюється лише ребро ad тобто $dy=0$ і $dz=0$

$$tg\alpha_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx(1 + e_x)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.17)$$

де e_x – мала величина ($e_x \ll 1$), тому $1 + e_x \approx 1$

Але тангенс функції в нескінченно малій області еквівалентна значенню аргументу $tg\alpha_{xy} \sim \alpha_{xy}$ (2.13), тому

$$\alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.18)$$

Аналогічним чином

$$tg\alpha_{yx} = \frac{c'c''}{dc''} = \frac{v_c - v_d}{dy + e_y dy} = \frac{du}{dy(1 + e_y)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + e_y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$\text{де } d_u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.20)$$

звідси

$$\alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.21)$$

Повна деформація зсуву в площині XOY визначається відповідно (2.12)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.22)$$

Аналогічно визначаємо деформації зсуву $Y0Z$ та ZOX . Отримано деформації зсуву для всіх координат

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Тому в загальному випадку вважаємо, $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ (рис.2.6)

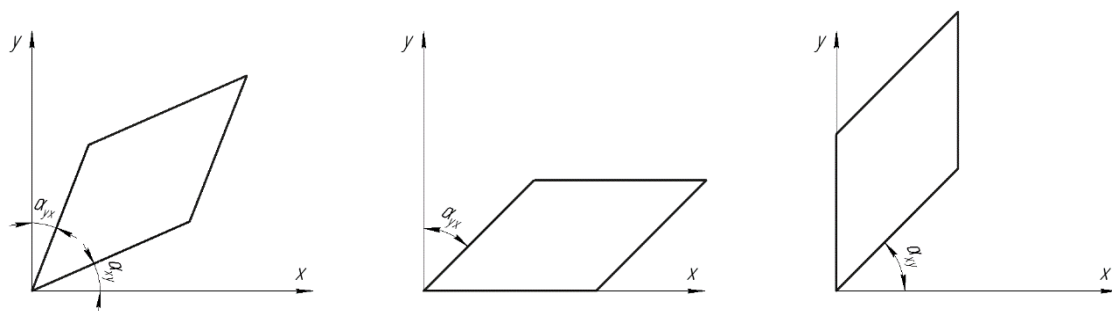


Рис.2.6

Здвиг визначає зміну кута в 90° , в загальній картині зміни кута α має значення що це не відображається на величині здвигу.

Зобразимо нескінченно малі деформації у вигляді симетричного тензора деформацій

$$T_e = \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}\quad (2.24)$$

2.3 Великі відносні пластичні деформації

При обробці металів тиском виникають великі пластичні деформації ($e_{\text{пл}} \gg e_{\text{пруж}}$) внаслідок того, що розміри деформуємого тіла змінюється. В цьому випадку найбільш правильно визначати деформацію за рахунок відношення абсолютного прирощення до розміру тіла в початковий момент відповідного проміжку деформування тіла. Тоді повна деформація тіла буде визначена як сума малих деформацій за увесь процес деформування (рис 2.6). Такі способи визначення деформацій використовують, як правило, при проведенні експериментальних

досліджень для визначення кінцевої деформації тіла, або в аналітичних дослідженнях, які базуються на поетапних розрахунках деформацій.

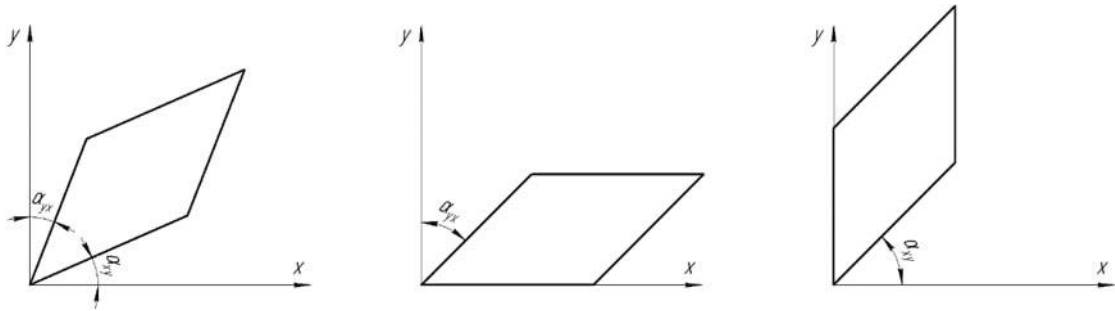


Рис 2.6

Загальна відносна деформація елемента що поетапно розтягується (рис 2.6) дорівнює:

$$e_{\text{сум}} = \frac{l_k - l_0}{l_0}, \quad \text{де } k = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

В той же час ця сумарна деформація визначається як сума деформацій на окремих етапах:

$$e_{\text{сум}} = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n \quad (2.26)$$

Враховуючи визначення відносних деформацій на кожному етапі сумарну деформацію зразка можна записати

$$e_{\text{сум(ет)}} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \frac{l_3 - l_2}{l_2} + \dots + \frac{l_n - l_{n-1}}{l_{n-1}}, \quad (2.27)$$

де $l_k = l_0 + (l_1 - l_0) + (l_2 - l_1) + (l_3 - l_2) + \dots + (l_n - l_{n-1}) = l_n$

Аналіз формули (2.27) показує, що поетапна сума відносної деформації $e_{\text{сум(ет)}}$ не дорівнює сумарній відносній деформації $e_{\text{сум}}$:

$$e_{\text{сум}} \neq e_{\text{сум(ет)}} \quad (2.28)$$

Тому відносні пластичні деформації не мають властивості адитивності.

Тому спосіб задання за допомогою відносних пластичних деформацій не забезпечує точного визначення сумарної деформації.

Для забезпечення точності необхідно перевизначити деформацію з використанням математичного апарата нескінченно малих чисел. Це значить що кінцеву деформацію потрібно розбити на нескінченно велике число нескінченно малих відрізків, які деформуються, і знайти їх суму.

$$\delta_{\text{сум}} = \sum_{i=0}^k e_i = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=0}^k \frac{\Delta l_i}{l_{i-1}} = \int_0^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0} \quad (2.28)$$

Великі пластичні деформації (δ), що представлені визначенням інтегралом називають **натуральними або істинними деформаціями**. Ці деформації підпорядковуються властивості адитивності.

$$\delta_{\text{сум}} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = \ln \frac{\ell_1}{\ell_0} + \ln \frac{\ell_2}{\ell_1} + \ln \frac{\ell_3}{\ell_2} + \dots + \ln \frac{\ell_k}{\ell_{k-1}} =$$

$$\ln \frac{\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3 \dots \ell_n}{\ell_0 \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \dots \ell_{n-1}} = \ln \frac{\ell_n}{\ell_0} = e_{\text{сум}} \quad (2.29)$$

Розглянемо, як пов'язана натуральна деформація і відносна деформація

$$\delta = \ln \frac{\ell_1}{\ell_0} = \ln \frac{\ell_0 + \Delta \ell}{\ell_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \right) = \ln(1 + e) \quad (2.30)$$

але $\ln(1 + e) \approx e$, якщо e – мала величина.

Навіть при $e = 0,2$ (що відповідає 20 % деформації, величина натуральної деформації (δ) відрізняється від відносної деформації (e) на 10%.

Для оцінки впливу використання відносних та натуральних деформацій розглянемо формозміну осаджуванням тіла (призми) з початковою висотою h_0 до кінцевої висоти h_1 (рис 2.7). В поперечному перерізі тіло має розміри a і b . В процесі осаджування величина розмірів тіла буде змінюватись. Так в декартовій системі координат після деформації розміри будуть у відносних – деформаціях:

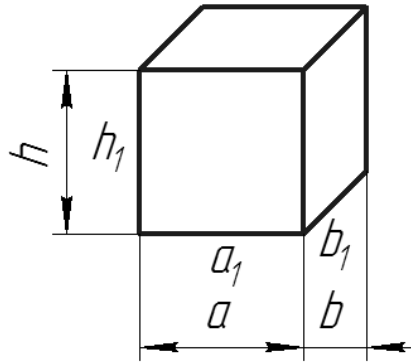


Рис. 2.7

$$a_1 = a + \Delta a = a \left(1 + \frac{\Delta a}{a} \right) = a(1 + e_x);$$

$$b_1 = b + \Delta b = b \left(1 + \frac{\Delta b}{b} \right) = b(1 + e_y); \quad (2.31)$$

$$h_1 = h + \Delta h = h \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right) = h(1 + e_z);$$

Враховуючи що в процесі деформації об'єм тіла не змінюється можемо записати

$$abh = a_1 b_1 c_1 \quad (2.32)$$

Із врахуванням (2.31)

$$abh = abh(1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z) \quad (2.33)$$

Після перетворень та скорочень на abh

$$e_x + e_y + e_z + e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y e_z = 0 \quad (2.34)$$

В рівнянні (2.34) четвертий, п'ятий, шостий та сьомий доданки другого та третього порядку малості і ними можна знехтувати.

Вони складають похибку розрахунку для відносних деформацій

$$\eta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} + e_x e_y e_z \quad (2.35)$$

Три перші доданки відповідають закону сталості об'єму

$$e_x + e_y + e_z = 0 \quad (2.36)$$

На відміну від відносних, використання натуральних логарифмічних деформацій забезпечує точне виконання закону сталості об'єму.

Дійсно виходячи з (2.32)

$$\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{h_1}{h} = 1 \quad (2.37)$$

Після логарифмування отримуємо

$$\ln \frac{a_1}{a} + \ln \frac{b_1}{b} + \ln \frac{h_1}{h} = 0, \quad (2.38)$$

$$\text{або } \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (2.39)$$

Таким чином при аналітичному або теоретичному дослідженні процесів обробки металів тиском поетапним методом для забезпечення точності розрахунків необхідно використовувати логарифмічні (натуральні) деформації.

В подальшому великий пластичні деформації будемо позначати e_{ij} (а позначення δ було виведено для кращого отримання викладеного матеріалу).

2.4 Зміщений об'єм

В теорії обробки металів тиском при визначенні роботи, що необхідна на формоутворення тіла, використовують поняття зміщеного об'єму. Поняття зміщеного об'єму пояснюються на рис 2.8.

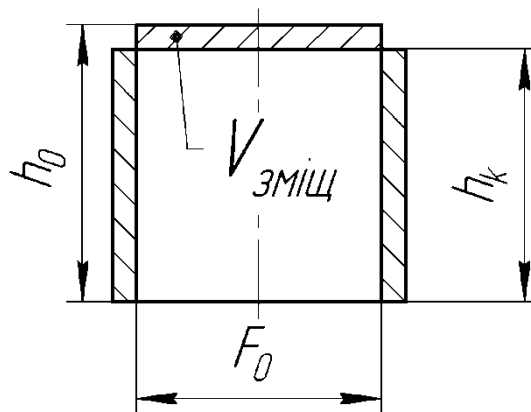


Рис.2.8

На рис 2.8 показана деформація циліндричного тіла, що має початкову висоту h_0 та початкову площу поперечного перерізу F_0 . В процесі осадки висота тіла зменшується до h_k а площа поперечного перерізу збільшуються до F_k . Тоді зміни величини об'єму по координаті напрямку деформування (OZ) тіла називається зміщеним об'ємом

$$V_{\text{змiщ}} = F_0 (h_0 - h_k) \quad (2.40)$$

Але h_0 і F_0 – незручна величина, вона залежить від висоти і змінюється по перерізу. Ці величини зв'язані співвідношенням $F_0 = \frac{V}{h_0}$ і тоді отримаємо:

$$V_{\text{зміщ}} = \frac{V}{h_0} (h_0 - h_k) = V \cdot e_B \quad (2.41)$$

де e_B – відносна деформація.

В технологічних процесах формоутворення протікає з великими деформаціями. Тому перевизначимо $V_{\text{зміщ}}$ за допомогою апарату нескінченно малих чисел (див. рис. 2.9

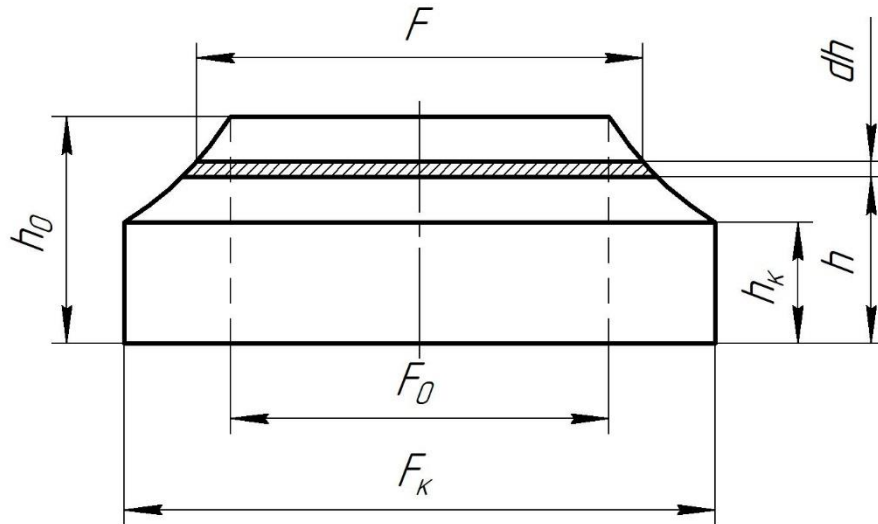


Рис. 2.9

Приріст зміщеного об'єму

$$dV_{\text{зміщ}} = F dh = \frac{V}{h} dh \quad (2.42)$$

Звідси $V_{\text{зміщ}}$ дорівнює для великих деформацій.

$$V_{\text{зміщ}} = \int_{h_k}^{h_0} dV_{\text{зміщ}} = \int_{h_k}^{h_0} \frac{V}{h} dh = V \ln \frac{h_k}{h_0} = V \cdot e_H, \quad (2.43)$$

де e_H - натуральна (логарифмічна) деформація

З'ясуємо чи може зміщений об'єм бути більше вихідного об'єму заготовки. Визначено при якій деформації зміщений об'єм дорівнює об'єму заготовки:

$$-V \ln \frac{h_k}{h_0} = V \quad (2.44)$$

Знак мінус в (2.44) з'являється через те, що $h_k < h_0$.

$$\text{Отримаємо } \ln \frac{h_k}{h_0} = -1; \frac{h_k}{h_0} = 0,37. \quad (2.45)$$

Скориставшись визначенням відносної деформації запишемо:

$$e = \frac{h_0 - h_k}{h_0} = \frac{1 - 0,37}{1} = 0,63 = 63\% \quad (2.46)$$

Розрахована деформація визначає, що при осадці заготовки більше ніж на 63% зміщений об'єм буде більше вихідного.

Зміщений об'єм більше вихідного об'єму, так як зміщення одного і того ж об'єму відбувається багатократно.

3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ НАПРУЖЕННЯМИ ТА ДЕФОРМАЦІЯМИ

3.1. Зв'язок між напруженнями і деформаціями при пластичному деформуванні.

Для малих пружно-пластичних деформацій узагальнений закон Гука має вид:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ e_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{де } G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.2)$$

Вирішимо рівняння (3.1) відносно компонент напружень:

$$\begin{cases} \sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z = Ee_x \\ -\mu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z = Ee_y \\ -\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z = Ee_z \end{cases} \quad (3.3)$$

Це система трьох лінійних неоднорідних рівнянь. Вирішимо її методом визначників. Головний визначник системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 \end{vmatrix} - \mu \begin{vmatrix} -\mu & -\mu \\ 1 & -\mu \end{vmatrix} = \\ &= 1 - \mu^2 - \mu^2 - \mu^3 - \mu^2 = 1 - 3\mu^2 - 2\mu^3 = 1 - \mu^2 - 2\mu^2 - 2\mu^3 = \\ &= 1 - \mu^2 - 2\mu^2(1 + \mu) = (1 + \mu) (1 - \mu - 2\mu^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Розкладемо другий співмножник $(1 - \mu - 2\mu^2)$ по формулі $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} 1 - \mu - 2\mu^2 &= 0 \\ 2\mu^2 + \mu - 1 &= 0 \\ \mu &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ \mu_1 &= -1; \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \\ 1 - \mu - 2\mu^2 &= -2(\mu + 1) \left(\mu - \frac{1}{2} \right) = (\mu + 1) (1 - 2\mu) \\ (1 + \mu) (1 + \mu) (1 - 2\mu) &= (1 + \mu)^2 (1 - 2\mu) \end{aligned}$$

Тоді головний визначник дорівнює:

$$\Delta = (1 + \mu)^2 (1 - 2\mu) \quad (3.5)$$

Тепер знайдемо другорядний визначник для знаходження σ_x :

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_x &= \begin{vmatrix} Ee_x & -\mu & -\mu \\ Ee_y & 1 & -\mu \\ Ee_z & -\mu & 1 \end{vmatrix} = E\{e_x(1 - \mu^2) - e_y(-\mu - \mu^2) + e_z(\mu^2 + \mu)\} = \\ &= E\{e_x(1 - \mu^2) + e_y\mu(1 + \mu) + e_z\mu(1 + \mu)\} = \\ &= E(1 + \mu)\{e_x(1 - \mu) + e_y\mu + e_z\mu\}\end{aligned}\quad (3.6)$$

В (3.6) E замінимо на G з використанням (3.2):

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_x &= 2G(1 + \mu)^2\{e_x(1 - 2\mu) + e_x\mu + e_y\mu + e_z\mu\} = \\ &= 2G(1 + \mu)^2\{e_x(1 - 2\mu) + 3\mu e_{cp}\}, \text{ так як } e_{cp} = \frac{e_x + e_y + e_z}{3}\end{aligned}\quad (3.6-1)$$

Визначимо σ_x :

$$\sigma_x = \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta} = \frac{2G(1 + \mu)^2\{e_x(1 - 2\mu) + 3\mu e_{cp}\}}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)}$$

Компоненти σ_y та σ_z отримано по аналогії σ_x . В результаті маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\left\{e_x + \frac{3\mu e_{cp}}{1 - 2\mu}\right\} \\ \sigma_y = 2G\left\{e_y + \frac{3\mu e_{cp}}{1 - 2\mu}\right\} \\ \sigma_z = 2G\left\{e_z + \frac{3\mu e_{cp}}{1 - 2\mu}\right\} \end{cases}\quad (3.7)$$

Відніmemo з кожного попереднього рівняння кожне наступне і розділимо після цього ліву частину на праву:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{e_x - e_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{e_y - e_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{e_z - e_x} = 2G\quad (3.8)$$

Якщо записати той же вираз в головних напруженнях, то видно, що радіуси кругів Мора для напружень відповідають радіусам кругів Мора для деформацій по лінійній залежності.

Круги Мора для напружень графічно визначають тензор напружень. З цього слідує, що деформований стан в точці також тензорна величина:

$$T_\sigma = 2GT_e\quad (3.9)$$

Нескінченно малі пластичні деформації також описуються тензором деформацій. З лінійної залежності T_e и T_σ можна стверджувати, що в тілі є площадки по яким відсутні зсуви і вони співпадають з головними площадками для напружень, всі формули для напружень справедливі, також для деформацій:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 \\ e_n &= e_1 a_1^2 + e_2 a_2^2 + e_3 a_3^2\end{aligned}\quad (3.10)$$

Існують головні видовження та головні зсуви:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2\quad (3.11)$$

Для деформацій:

$$\left(\frac{\gamma_{\Pi}}{2}\right)^2 = e_1^2 a_1^2 + e_2^2 a_2^2 + e_3^2 a_3^2 - (e_1 a_1^2 + e_2 a_2^2 + e_3 a_3^2)^2$$

По аналогії з головними дотичними напруженнями:

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.12)$$

існує і для

$$\frac{\gamma_{12}}{2} = \pm \frac{e_1 - e_2}{2} \Rightarrow \gamma_{12} = \pm e_1 - e_2 \quad (3.13)$$

Нескінченно мала пластична деформація складається з пружної та пластичної складових:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ e_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.13-1)$$

Додамо ліві та праві частини:

$$\begin{aligned} e_x + e_y + e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ e_x + e_y + e_z &= \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отримаємо:

$$e_{\text{ср}} = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma_{\text{ср}}; \quad e_{\text{ср}} = \frac{1 - 2\mu}{2G(1 + \mu)} \sigma_{\text{ср}} \quad (3.15)$$

або

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{2G(1 + \mu)}{1 - 2\mu} e_{\text{ср}} \quad (3.16)$$

Відніmemo (3.16) почленно з формул (3.7-1), (3.7-2), (3.7-3) і в результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G[e_x - e_{\text{ср}}] \\ \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = 2G[e_y - e_{\text{ср}}] \\ \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = 2G[e_z - e_{\text{ср}}] \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{де } \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (3.18)$$

Для пластичної деформації $e_{\text{ср}} = 0$, тому в цих виразах $e_{\text{ср}}$ визначає лише об'ємну пружну деформацію, для неї $e_{\text{ср}} \neq 0$.

Вирази деформацій в правій частині визначають величини пластичної деформації.

Таким чином, тензор пружної деформації:

$$T_{e_{\text{пр}}} = \begin{vmatrix} e_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & e_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & e_{\text{ср}} \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

а йому відповідний тензор напружень:

$$T_{\sigma_{\text{пр}}} = \begin{vmatrix} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Такому тензору напруженого стану відповідає геометрична інтерпретація у вигляді сфери, куля і тому тензор пружної деформації називається кульовим тензором. У нього по головній діагоналі розташовані однакові величини.

Залишкова частина тензора напруженого стану відповідає пластичній деформації він називається девіатором так, як сума членів головної діагоналі дорівнює нулю.

$$T_{\sigma} - T_{\sigma_{\text{шар}}} = D_{\sigma} = T_{\sigma_{\text{пл}}} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Тензор напруженого стану визначається зчепленням кругів Мора.

Девіатор напруженого стану також повинен бути зображений у вигляді кругів Мора; зчеплення кругів Мора для девіатора напружень завжди пересікає вісь τ .

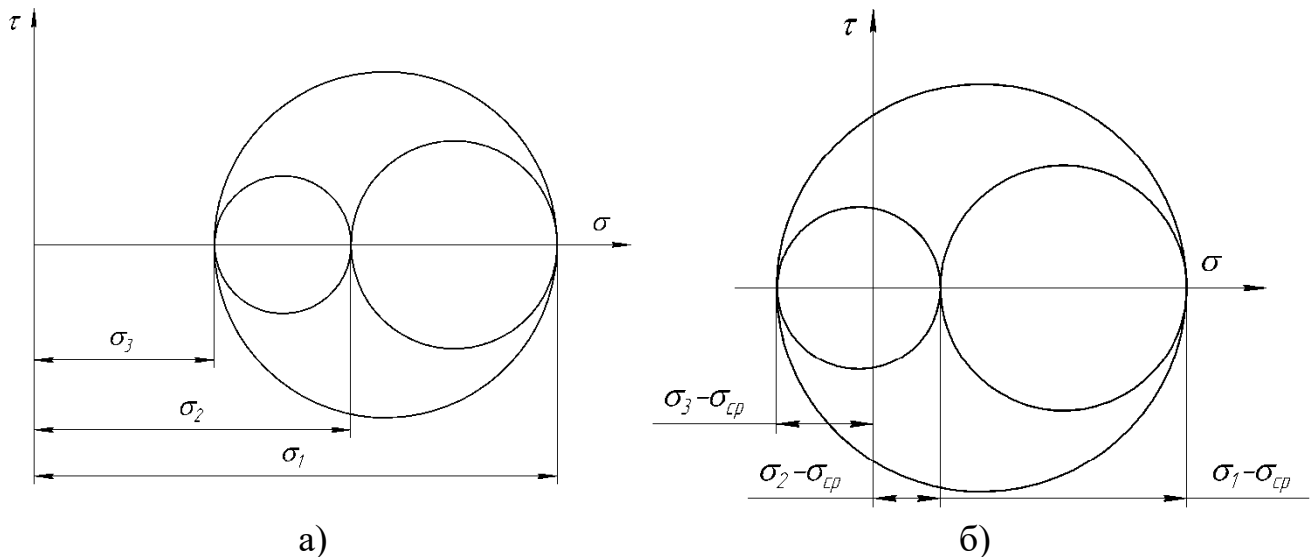


Рис. 3.1.

Відповідний тензор-девіатор деформованого стану:

$$T_{\varepsilon_{пл}} = \begin{vmatrix} e_x - e_{ср} & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & e_y - e_{ср} & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & e_z - e_{ср} \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

Враховуючи рівняння (3.17) та векторне уявлення зв'язку між напруженнями і деформаціями запишемо:

$$D_{\sigma} = 2GD_e \quad (3.23)$$

Для пластичної деформації пружною деформацією нехтують через її малу величину $e_{ср} = 0$.

Враховуючи рівняння (3.17) можна записати:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_{ср} = 2Ge_x \\ \sigma_y - \sigma_{ср} = 2Ge_y \\ \sigma_z - \sigma_{ср} = 2Ge_z \end{cases} \quad (3.24)$$

Проведемо заміну модулю зсуву на модуль пружності I роду з використанням (3.2). При цьому враховуємо, що для великих пластичних деформацій коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,5$. Тоді рівняння (3.24) приймають вид:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_{ср} = \frac{2}{3}Ee_x \\ \sigma_y - \sigma_{ср} = \frac{2}{3}Ee_y \\ \sigma_z - \sigma_{ср} = \frac{2}{3}Ee_z \end{cases} \quad (3.25)$$

Для пластичної зони діаграми деформуємості $\sigma_i = f(e_i)$ (кривої течії металу), яка показана на рис. 3.2, введемо замість модуля пружності модуль пластичності I роду:

$$E' = \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\sigma_i}{e_i} \quad (3.26)$$

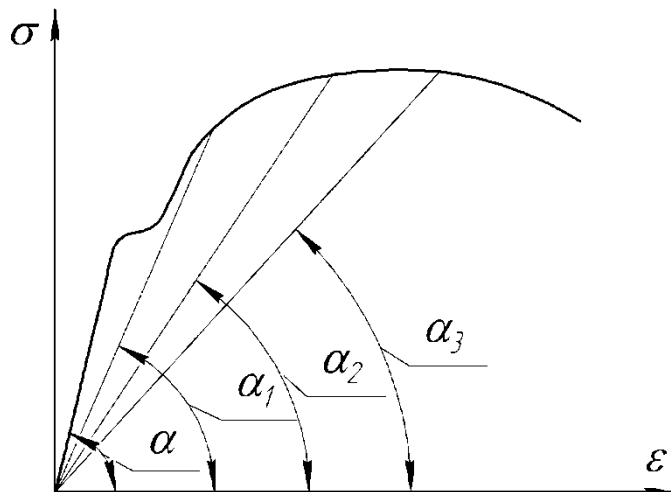


Рис. 3.2.

Тоді рівняння зв'язку між напруженнями і деформаціями в скалярному вигляді мають вид:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_x \\ \sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_y \\ \sigma_z - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_z \end{cases} \quad (3.27)$$

Залежність (3.27) можна записати в тензорному вигляді:

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} D_e \quad (3.28)$$

або

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} T_e \quad (3.29)$$

Основним фізичним законом в області малих пружно-пластичних деформацій є співпадіння напрямків девіаторів напружень і деформацій.

Рівняння (3.27) є основним при вирішенні задач пластичного деформування металів.

Для вирішення задач пластичного деформування задають модель матеріалу у вигляді функцій зв'язку $\sigma_i = f(e_i)$ на основі експериментальних даних.

3.2. Плоский деформований стан

Запишемо попередні рівняння (3.24) в головних напруженнях і отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_{cp} = 2G' e_1 \\ \sigma_2 - \sigma_{cp} = 2G' e_2 \\ \sigma_3 - \sigma_{cp} = 2G' e_3 \end{cases} \quad (3.30)$$

Плоским деформованим станом називається деформований стан, при якому пластична деформація вздовж однієї з осей дорівнює нулю, $e_2 = 0$ повинна бути обов'язково, а $e_1 \neq e_3 \neq 0$.

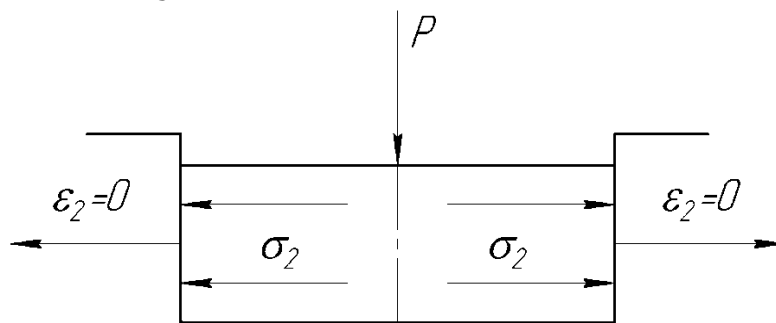


Рис. 3.3.

Для плоского деформованого стану друге рівняння системи має вид:

$$\sigma_2 - \sigma_{\text{ср}} = 0 \quad (3.31)$$

тоді

$$\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 0 \quad (3.32)$$

При плоскому деформованому стані напруження, які діють на стінки штампа, будуть значною величиною $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$. (3.33)

Плоскому деформівному стану завжди відповідає об'ємний напружений стан.

4 УМОВИ ПЛАСТИЧНОСТІ

4.1 Загальні положення

Пружна рівновага тіла, що деформується, можлива при різних співвідношеннях і величинах навантажень. Пластична рівновага, на відміну, можлива тільки при конкретних, визначених навантаженнях. Так, можна вважати, що при лінійному розтягуванні ознаки пластичної деформації з'являється тоді, коли зовнішнє навантаження викликає напруження, що дорівнює границі текучості.

Якщо по мірі збільшення деформації викликає зміцнення матеріалу тіла, то для подальшого розвитку пластичної деформації необхідно збільшувати напруження. Величина його визначається кривою зміцнення (кривою істинних напружень). Якщо зміцнення відсутнє, то при лінійному розтягуванні пластична деформація виникає при постійному навантаженні.

Тіло, матеріал якого є нестискаємим і не змінюється, називається ідеально пластичним. Для ідеального пластичного тіла діаграма деформація - істинне напруження розтягу має вид, що показаний на рис. 4.1.

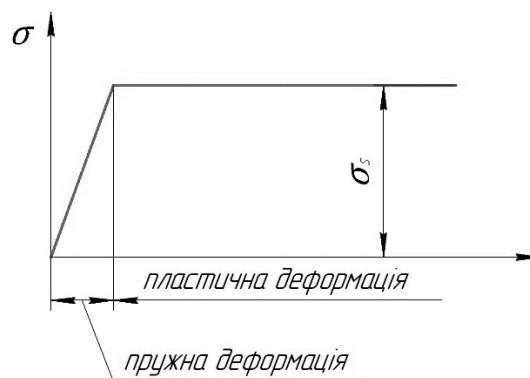


Рис.4.1

З розгляду діаграми видно, що для ідеального пластичного тіла в зоні пластичної деформації задачі, які вирішуються в теорії пластичності не мають сенсу [О.А. Ільюшин]. Так наприклад по заданому напруженню σ немає можливості знайти величину деформацій, а при довільно заданій зовнішній силі неможливо пластична рівновага, так як величина сили повинна бути визначеною, наприклад для деформування розтягуванням - такою, яка викликала би напруження σ_s (рис. 4.1).

Таким чином, при лінійному розтягуванні умовою для переходу від пружного до пластичного сплиску є виконання рівняння $\sigma_1 = \sigma_s$. При цьому суттєва різниця між пружною та еластичною деформацією полягає в тому, що величина пружної деформації повністю визначається діючими напруженнями, а знання миттєвого розподілу напружень в довільний момент пластичної деформації дозволяє судити тільки про те, які будуть приращення деформацій.

Однак необхідно знати, якими умовами визначається перехід в пластичний стан при довільному виді напруженого стану. Ці умови можливо виявити тільки на підставі експериментальних даних. При цьому можна припустити, що перехід довільної експериментальної частки тіла в пластичний стан обумовлюється якими-то співвідношеннями між напруженнями, з одного боку, та його механічними властивостями при визначених температурно-швидкісних умовах, з іншого боку.

Існують декілька теорій, що визначають умови переходу деформованого тіла від пружного стану до пластичного, скорочено «умова пластичності».

4.2 Теорія головних дотичних напружень

Згідно з теорією головних дотичних напружень пластична деформація в кристалічному тілі починається тоді, коли найбільші дотичні напруження досягнуть величини достатньої для початку пластичної деформації:

$$\tau_{12} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \tau_{23} = \mp \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_{31} = \mp \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad (4.1)$$

Схема напруженого стану не має впливу.

Це дозволяє звести будь-який напружений стан до лінійного. А початок пластичної деформації за лінійного напруженого стану відомий:

$$(\tau_{max})_l \frac{1}{2} \sigma_T. \quad (4.2)$$

Оскільки умови деформування однакові, то:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= (\tau_{max})_l; & |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_T, \\ \tau_{23} &= (\tau_{max})_l; & |\sigma_2 - \sigma_3| &= \sigma_T, \\ \tau_{31} &= (\tau_{max})_l; & |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_T. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тобто, для початку пластичної деформації необхідно, щоб виконувалась одна з цих рівностей.

Розглянемо ці рівності з геометричної точки зору:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_T \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_T \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_T \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) називають **умовами пластичності Треска – Сен-Венана** на честь вчених, які запропонували цей підхід. В 1864 році Треска дав експериментальне обґрунтування, а в 1871 році Сен-Венан – запропонував математичне уявлення цього положення.

Рівняння (4.4) являють собою площини (в кожному з рівнянь відсутня одна координата).

В результаті побудови перетином цих площин отримуємо призму. Тобто, з геометричної точки зору умова пластичності за умови максимальних дотичних напружень – це призма, вісь якої рівнонахилена до всіх осей координат.

За пружної деформації точка з координатами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ знаходиться всередині призми.

Прикладення деякого середнього напруження рівносильне переміщенню точки по поверхні призми вздовж осі. Основа цієї призми – правильний шестикутник.

Для плоского напруженого стану:

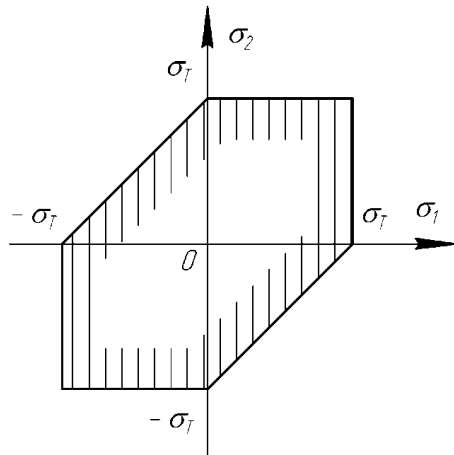


Рис. 4.2

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= 0; \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_T \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_T \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_T\end{aligned}\quad (4.5)$$

Співвідношення між σ_1 та σ_2 знаходиться всередині контуру.

4.3 Енергетична теорія пластичності

4.3.1 Умова пластичності Губера - Мізеса - Генки

Пластична деформація кристалічних тіл починається тоді, коли питома потенційна енергія, накопичена в тілі в результаті деформації перевищить деяке значення, що залежить від природи матеріалу та умов деформації і є незалежним від схеми напруженого стану.

$$a = \frac{A}{V} = \frac{\vec{P} \cdot \Delta \vec{l}}{V} = \frac{\vec{P} \cdot \Delta \vec{l}}{F \cdot l} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (4.6)$$

де A – робота;

a – питома робота;

F – площа;

l – розмір, що змінюється;

ε – відносна деформація;

V – об'єм тіла.

В тензорному вигляді рівняння (4.6) має вид:

$$a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

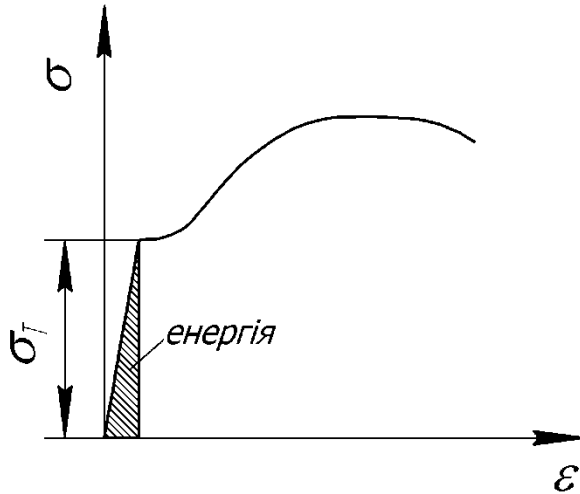


Рис. 4.3

Враховуємо, що

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (4.9)$$

Тоді повна питома робота дорівнює:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 - \mu\sigma_1\sigma_2 - \mu\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 - \mu\sigma_2\sigma_3 - \mu\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3^2 - \mu\sigma_3\sigma_1 - \mu\sigma_3\sigma_2) = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]\end{aligned}$$

Повна питома робота складається з пружної та пластичної:

$$a = a_{np} + a_{nl} \quad (4.10)$$

Величина пружної питомої роботи дорівнює:

$$a_{np} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_{cp}\varepsilon_{cp} + \sigma_{cp}\varepsilon_{cp} + \sigma_{cp}\varepsilon_{cp}) = \frac{3}{2} \sigma_{cp}\varepsilon_{cp} \quad (4.11)$$

З врахуванням:

$$\begin{cases} \sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \varepsilon_{cp} = \frac{1-2\mu}{3E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{cases} \quad (4.12)$$

Отримуємо

$$a_{np} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \cdot \frac{1-2\mu}{3E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4.13)$$

З врахуванням (4.10) питома робота постійної деформації визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}
a_{nl} &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \\
&= \frac{1}{6E} [3^2\sigma_1^2 + 3^2\sigma_2^2 + 3^2\sigma_3^2 - 6^2\mu\sigma_1\sigma_2 - 6^2\mu\sigma_2\sigma_3 - 6^2\mu\sigma_3\sigma_1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - \\
&- 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 + 2\mu\sigma_1^2 + 2\mu\sigma_2^2 + 2\mu\sigma_3^2 + 4\mu\sigma_1\sigma_2 + 4\mu\sigma_2\sigma_3 + 4\mu\sigma_3\sigma_1] = \\
&= \frac{1}{6E} [2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1 + \mu(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - \\
&- 2\sigma_3\sigma_1)] = \frac{1+\mu}{6E} [2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1] = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \\
&+ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
a_{nl} &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Підрахуємо енергію накопичену в тілі за лінійної деформації:

$$(a_{nl})_I = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_1^2 \tag{4.15}$$

$$(a_{nl})_I = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_T^2 \tag{4.16}$$

Але, енергія, як зазначалось вище, не залежить від схеми напруженого стану.

$$\frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_T^2 \tag{4.17}$$

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2} \tag{4.18}$$

Це **основне рівняння пластичності**, записане в головних напруженнях.

В компонентах по осях координат рівняння пластичності має від:

$$\boxed{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_T^2} \tag{4.19}$$

4.3.2 Деякі окремі випадки основного рівняння пластичності:

1. Плоский напружений стан:

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= 0 \\
(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 &= 2\sigma_T^2 \\
2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 &= 2\sigma_T^2 \\
\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 &= \sigma_T^2 \\
\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2 &= \sigma_T^2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

2. Плоский деформований стан:

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\
\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= 2\sigma_T^2 \\
\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 &= 2\sigma_T^2 \\
\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 &= 2\sigma_T^2, \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \frac{4}{3}\sigma_T^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (4.21)$$

4.3.3 Геометричний зміст енергетичної умови пластичності.

Це циліндр радіуса $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$, вісь якого проходить через початок координат і однаково нахилена до осей координат ($a_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

Поверхня циліндра є граничною поверхнею пластичної деформації.

Чим більше σ_T – тим більше і радіус циліндра.

Якщо матеріал зміцнюється, то поверхня пластичності розширюється.

За перетину циліндра площинами паралельними площинам координат отримано еліпс, наприклад, при

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 &= 2\sigma_T^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

або

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_T^2 \quad (4.22-1)$$

мала піввісь еліпса $a = r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$

велика піввісь $2b = 2\sqrt{2}\sigma_T$

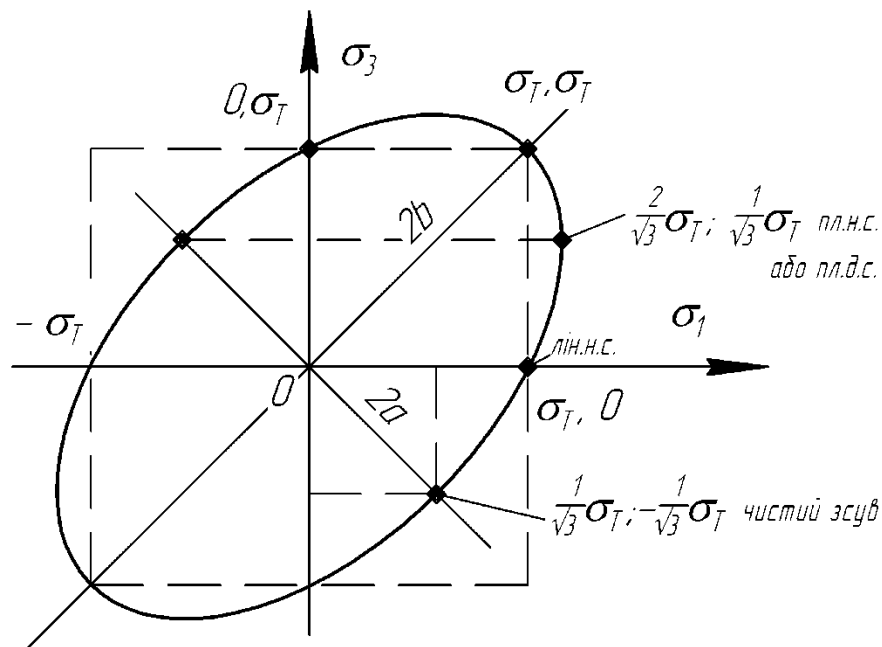


Рис.4.4

4.3.4. Канонічне рівняння пластичності. Коефіцієнт Лоде

Розглядаючи круги Мора, ми мали формулу, що визначає вплив середнього напруження:

$$\nu_{\sigma} = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \quad (4.23)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \nu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad (4.24)$$

Після підстановки (4.24) в рівняння пластичності (4.18) маємо:

$$\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \nu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \nu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2$$

$$\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \nu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \nu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_T^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_{\sigma}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu_{\sigma}}{2}\right)^2 + 1 \right] = 2\sigma_T^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu_{\sigma}}{2} + \frac{\nu_{\sigma}^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\nu_{\sigma}}{2} + \frac{\nu_{\sigma}^2}{4} + 1 \right) = 2\sigma_T^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{\nu_{\sigma}^2}{2} \right) = 2\sigma_T^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \frac{4\sigma_T^2}{3 + \nu_{\sigma}^2} \quad (4.25)$$

$$\boxed{\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3 + \nu_{\sigma}^2}}} - \text{канонічне рівняння пластичності} \quad (4.26)$$

Розглянемо окремо коефіцієнт:

$$k = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_{\sigma}^2}}. \quad (4.27)$$

Це і є коефіцієнт Лоде.

ν_{σ} змінюється від -1 до $+1$.

При $\nu_{\sigma} = \pm 1$ $k = 1$

При $\nu_{\sigma} = 0$ $k = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,158$

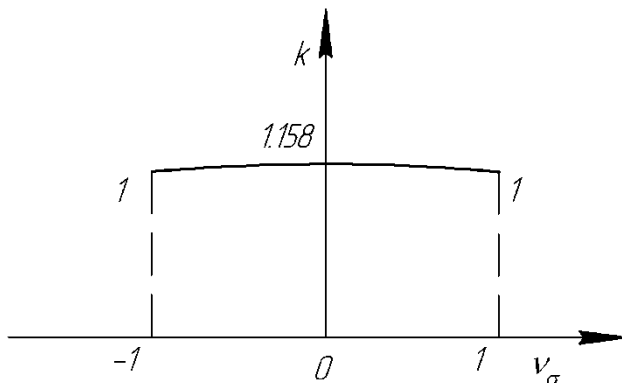


рис. 4.5

На рисунку 4.5 зображено графік залежності k від ν_{σ} .

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (1 \dots 1,158)\sigma_T$$

Таким чином, середнє головне напруження чинить невеликий вплив. Проте, за розрахунків воно має бути враховано, оскільки насправді похибка становить 15...20%.

5. ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛІВ

Високошвидкісна формозміна металів характеризується великими швидкостями і прискореннями деформації металів, короткочасністю процесів, наявністю великих пластичних деформацій, середовищем деформації, що швидко змінюється в часі. Деформація металу практично не залежить від джерела енергії і властивостей передавального середовища, а залежить від властивостей деформівного металу за відповідних температурно-швидкісних умов і величини енергії, переданої заготовці в процесі її навантаження.

Взаємодія деформівного металу з передавальним середовищем чи жорстким тілом (матрицею) впродовж малого проміжку часу призводить до виникнення в металі інерційних сил, які у свою чергу, викликають додаткові динамічні навантаження. Змінюється область, охоплена пластичними деформаціями. Інерційні сили перешкоджають поширенню деформацій при розгоні або русі заготовки, що зменшує або локалізує зони пластичної деформації. При взаємодії заготовки з поверхнею матриці відбувається гальмування і виникнення додаткових зон пластичної деформації.

Високошвидкісному деформуванню властиві також розвиток теплових ефектів, хвилевих явищ і зміна механічних властивостей металів.

Складність явищ, що відбуваються при високошвидкісній формозміні металів не дозволяє з достатньою мірою точності застосовувати методи розв'язування задач пластичності, які ґрунтуються на спільному розв'язку рівнянь рівноваги з умовою пластичності. Вони не дозволяють з'ясувати картину пластичної течії, визначити швидкості руху часток металу, врахувати інерційні сили і теплові ефекти деформації.

У зв'язку з цим заслуговує на увагу напрям аналітичного розв'язку задач пластичності з використанням рівнянь руху суцільного середовища.

5.1 Основні етапи розвитку теорії пластичної течії

У основі теорій обробки металів тиском з використанням рівнянь механіки суцільних середовищ лежить феноменологічний підхід, згідно з яким властивості реального деформівного тіла схематизують настільки, наскільки це необхідно і допустимо, щоб, з одного боку, дістати можливість досить простими засобами вирішувати задачу, а з іншого — відобразити в цій схемі всі найважливіші риси даного тіла. Такий підхід дозволяє розглядати реальне полікристалічне деформівне тіло як суцільне середовище — модель реально деформівного тіла, яка зберігає основні його властивості, окрім дискретності будови (атомарної будови, мікро- і макроструктури).

Така ідеалізація важлива тому, що вона дає можливість використовувати для аналізу деформацій математичний апарат безперервних функцій, диференціальне і інтегральне числення.

У основу теорії пластичної течії металів при деформації покладені аналогії в русі металів, як суцільного середовища, з текучістю в'язких рідин. При цьому коефіцієнт в'язкості для рідин замінюється коефіцієнтом жорсткості для реальних металів. Це дає можливість використовувати основні рівняння гідромеханіки при описуванні течії металів.

Вперше рівняння руху для ідеальної рідини були отримані Л. Ейлером в 1755 році. При виведенні цих рівнянь була використана гіпотеза про суцільну будову ідеальної рідини. Узагальненням цих рівнянь на випадок руху в'язких рідин з'явилися рівняння Нав'є [20] (1827 р.).

Перша спроба вживання загальних рівнянь руху рідин до процесів пластичної течії металів належить Треска (1868 р.) [21]. Проте специфічні особливості, властиві деформації металів в твердому стані, не дозволили повною мірою використовувати ці рівняння для розв'язування конкретних задач і тому потрібні були подальші теоретичні і експериментальні дослідження в цій області.

Розвиток теорії пластичної течії металів отриманий на підставі досліджень Р. Мізеса (1913 р.) [22]. Ним були записані основні рівняння руху суцільного середовища в напрузі і рівняння зв'язку між напругою і швидкостями Деформацій через величину μ_i подібне до коефіцієнта в'язкості рідини:

$$\mu_i = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2k}{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial v_x \partial v_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v_y \partial v_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v_z \partial v_x}{\partial z \partial x}}} \quad (5.1)$$

При цьому зроблено допущення, що на відміну від рідини метал має коефіцієнт в'язкості, який залежить від межі течії к металу і швидкостей деформацій.

Подальший розвиток цього напрямку теорії належить Р. Генки (1925 р.) [23]. Він передбачив, що пластичну текучість металу можна описати загальними рівняннями руху в'язкої рідини без врахування інерційних сил, якщо допустити, що коефіцієнт в'язкості металу складається з двох частин: μ – постійної і μ_i – залежної від швидкостей деформацій:

$$\lambda = \mu + \mu_i. \quad (5.2)$$

На основі цієї теорії Генки розглянув розв'язування Деяких задач, зокрема, про продавлювання пластичної маси через циліндрову порожнину. Розв'язок задачі, поданий Генки, має місце, якщо постійна μ відмінна від нуля. Як буде показано далі, ця величина для металів дорівнює нулю, тому розв'язок Генки не можна вважати вірним.

На підставі багатьох експериментальних досліджень пластичної течії металів, до яких можна віднести відомі дослідження М. Роша і А. Ейхінгера (1926 р.) [24], В. Лоде (1928 р.) [25], Р. Штідта (1932 р.) [26], Е. Девіса (1945 р.) [27, 28], Холомона (1946 р.) [32] і інших, а також аналізу відомих теорій пластичності, А.А. Іллюшиним [29] було встановлено ряд нових закономірностей теорії пластичних деформацій і розроблено ефективні методи розв'язування різного роду задач. У 1954 році А.А. Іллюшин [30, 31] розглянув питання течії пластичної маси за наявності певних гіпотез. Так опис залежності між інтенсивністю напруження, мірою деформації і швидкістю деформацій встановлений рівнянням

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, n). \quad (5.3)$$

Міра деформації n пов'язується зі швидкістю деформацій рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_x}{H_1} \frac{\partial n}{\partial q_1} + \frac{v_y}{H_2} \frac{\partial n}{\partial q_2} = \varepsilon_i, \quad (5.4)$$

а для «коефіцієнта в'язкості» вперше введено вираз

$$\mu_i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (5.5)$$

Використання рівнянь механіки суцільних середовищ для розв'язування задач пластичності металів, основи яких розвинені в названих роботах, дозволяє аналізувати високошвидкісні процеси деформації. Наявність в цих рівняннях швидкісних параметрів деформації дозволяє враховувати інерційні сили в широкому діапазоні швидкостей деформацій $10^5 - 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Розвиток теорії пластичної течії металів, отриманий в 1958 році Ю.Н. Алексєєвим [33, 34] для високошвидкісної деформації металів в процесах обробки металів тиском і різанням. Запропонована ним замкнута система рівнянь механіки суцільних середовищ дозволяє розрахувати НДС заготовки і технологічні параметри процесу формоутворення, якщо задана кінематична модель процесу.

5.2 Особливості опису процесу деформації металу в теорії пластичної течії

В процесі пластичної деформації форма середовища деформації змінюється з часом. Тому для опису процесу деформації Ю.Н. Алексєєвим [33, 34] запропоновано використовувати чотиривимірний простір, який має координати x, y, z, ct . За четверту координату виберемо відрізок, через який проходить промінь світла в одиницю часу.

Як приклад розглянемо процес формоутворення поковки із заготовки циліндричної форми для шестерні з облоєм [34]. Схема процесу подана на рис. 5.1.

У початковий момент часу при $t=0$ заготовка мала циліндричну форму. Після закінчення часу t_k вона набула форми поковки з облоєм. На осі часу відкладемо

відрізок ct_k і введемо систему координат x, y, z . У цій системі координат зобразимо конфігурацію поковки з облоєм. У проміжний момент часу $0 < t < t_k$ метал набуває цілком певної форми.

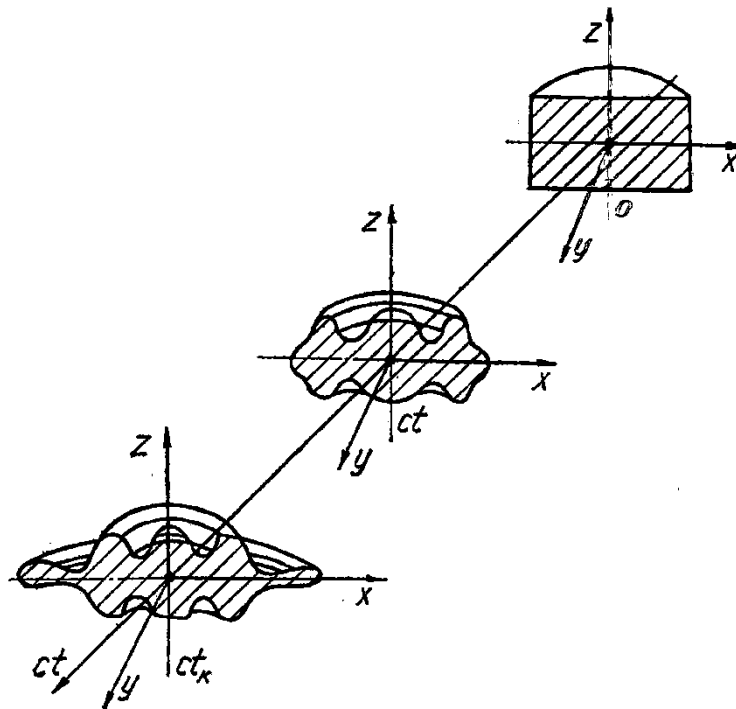


Рис. 5.1

Процес деформації в чотиривимірному просторі можна представити як нескінченно велике число послідовних конфігурацій деформівного об'єму з проходженням часу. Математичний процес деформації можна повністю описати, вводячи функцію чотирьох змінних:

$$f(x, y, z, ct) = 0 \quad (5.6)$$

Якщо зафіксувати час, наприклад, узяти $t_0 = 0$, то рівняння (3. описує конфігурацію циліндричної заготовки, а при $t = t_k$ це рівняння описує конфігурацію поковки в кінцевому вигляді. Проміжні значення $t_0 < t < t_k$ описує всі можливі форми, яких набуває заготовка в процесі пластичної деформації. Це дозволяє найточніше описати зміни металу в процесі деформації і виявити його особливості.

В процесі деформації окремі матеріальні частки металу переміщуються з певною швидкістю, яку в чотиривимірному просторі можна представити вектором швидкості:

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} + v_t \vec{n} \quad (5.7)$$

Складові вектора v_x, v_y і v_z представляють функції чотирьох змінних x, y, z , і ct . Що стосується складової швидкості v_t то до неї пред'являються певні вимоги. Перш за все, ця складова повинна задовольняти умові одночасного уявлення деформівного тіла. Пояснимо першу умову на прикладі плоскої деформації (рис. 5.2.).

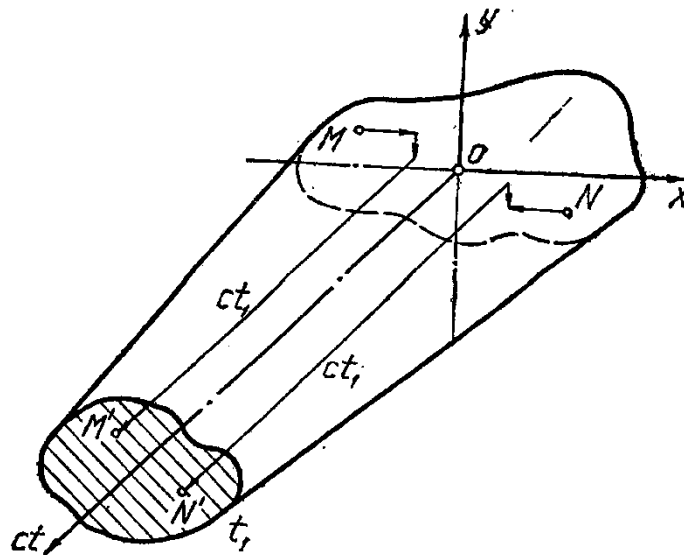


Рис. 5.2.

Нехай у момент часу $t = 0$ на деформівному тілі є дві точки M і N . Після закінчення деякого проміжку часу t_1 точки повинні зайняти положення M_1 і N_1 . Для того, щоб вони розташувалися на площині, перпендикулярній осі часу, необхідно, щоб складові швидкості v_t були однакові. Отже, умова одночасного уявлення вимагає незалежності складової швидкості v_t від координат x, y, z . Друга умова пов'язана зі сталістю об'єму при пластичній деформації. Для того, щоб був виконаний закон сталості об'єму, складова швидкості v_t не повинна залежати від часу. Таким чином, для процесу пластичної деформації металів v_t постійна і дорівнює швидкості світла.

Складові швидкості v_x, v_y і v_z є функціями чотирьох змінних:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, ct), \\ v_y &= v_y(x, y, z, ct), \\ v_z &= v_z(x, y, z, ct), \\ v_t &= c, \end{aligned} \quad (5.8)$$

а вектор швидкості переміщення часток металу описується в тривимірному просторі:

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (5.9)$$

Закон сталості об'єму при деформації виражається рівнянням нерозривності — оскільки в процесі пластичної деформації об'єм не змінюється, то середня швидкість деформації дорівнює нулю:

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (5.10)$$

або в диференціальному вигляді:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.11)$$

Швидкості переміщень пов'язані з переміщеннями залежністю:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (5.12)$$

де $\vec{u}$ — тривимірний вектор переміщень, який описується залежністю:

$$\vec{U} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (5.13)$$

Складовими тривимірного вектора переміщень є функції координат і часу

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, ct), \\ u_y &= u_y(x, y, z, ct), \\ u_z &= u_z(x, y, z, ct), \end{aligned} \quad (5.14)$$

Якщо розкласти вектори по напрямку координатних осей, то вийдуть залежності між складовими вектора швидкості і вектора переміщень в інтегральному вигляді:

$$\begin{aligned} u_x &= \int v_x dt, \\ u_y &= \int v_y dt, \\ u_z &= \int v_z dt, \end{aligned} \quad (5.15)$$

або в диференціальному

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ v_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ v_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Залежності (5.8) і (5.14) визначають кінематичні моделі деформації матеріалу, як суцільного середовища, і специфічні для процесів формоутворення. Введення в їх опис тимчасового параметра дозволяє ефективно аналізувати процеси формоутворення, які протікають з великими швидкостями деформації, враховувати не лише зміну механічних властивостей матеріалів, але і додаткові інерційні сили, що виникають в процесі високошвидкісного формоутворення.

Основні методи побудови кінематичних моделей формоутворення у вигляді поля швидкостей (5.8) або поля переміщень (5.14) будуть розглянуті нижче.

Якщо задана кінематична модель процесу, можна визначити основні параметри процесу з використанням методу, який розроблений Ю.Н. Алексєєвим [33, 34].

5.3 Визначення основних параметрів процесу формоутворення

Метод визначення основних параметрів процесів формоутворення [14, 15] заснований на використанні вихідних даних поля швидкостей (). Воно може бути поставлене на підставі аналізу закономірностей поведінки металу заготовки під час реалізації технологічного процесу. Частіше відомий рух інструменту і тому одна із складових швидкостей на поверхні заготовки вважається відомою. Для обчислення інших складових використовують рівняння сталості об'єму (). Поле швидкостей може бути задано приблизно для складних процесів і точно для більш простих. Уточнення поля швидкостей може бути виконано на підставі розрахунку та порівняння його результатів з експериментальними даними

5.3.1 Швидкості деформацій та деформація

На підставі заданого поля швидкостей обчислюються компоненти тензора швидкостей деформацій

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Складові швидкостей деформацій пов'язані між собою і задовольняють рівнянню сумісності, які в диференціальному вигляді подібні до рівнянь Сен-Венана для деформацій:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}.\end{aligned}\quad (5.18)$$

Компоненти тензора деформацій пов'язані з компонентами тензора швидкостей деформацій інтегральними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \int \varepsilon_{xx} dt; & e_{xy} &= \int \varepsilon_{xy} dt; \\ e_{yy} &= \int \varepsilon_{yy} dt; & e_{yz} &= \int \varepsilon_{yz} dt; \\ e_{zz} &= \int \varepsilon_{zz} dt; & e_{zx} &= \int \varepsilon_{zx} dt.\end{aligned}\quad (5.19)$$

В сукупності складові швидкостей деформацій утворюють тензор швидкостей деформацій T_e , а складові деформацій утворюють тензор деформацій T_e .

Для подальшого викладення важливе значення мають інваріантні величини. Перший інваріант – середні величини деформації та швидкостей деформацій:

$$\begin{aligned} e &= \frac{e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}}{3}; \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}}{3} \end{aligned} \quad (5.20)$$

До інваріантних виразів належать інтенсивності швидкостей деформації та інтенсивність деформацій

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}; \\ e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)}; \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3.2 Рівняння руху

Якщо до тіла, що деформується, прикладено зовнішнє силове поле, то його окремі точки приходять в рух. Усередині тіла малої поверхні ds виділимо елементарний об'єм dv . Розглянемо систему діючих цей об'єм сил. Поверхнева сила $p_n ds$, масова сила $\rho \vec{F}$ і сила інерції $\rho \vec{\omega} dv$ діють на об'єм dv , який рухається з прискоренням $\vec{\omega}$. Поширюючи дію сил на все деформуєме тіло отримаємо три сили - поверхневу $\iint_{(s)} \vec{p}_n ds$, масову $\iiint_{(v)} \rho \vec{F} dv$ і силу інерції $\iiint_{(v)} \rho \vec{\omega} dv$. Відповідно до закону Ньютона сума цих сил має дорівнювати нулю:

$$\iiint_{(v)} \rho \vec{F} dv + \iint_{(s)} \vec{p}_n ds - \iiint_{(v)} \rho \vec{\omega} dv = 0. \quad (5.22)$$

Поверхневий інтеграл, що входить до цього рівняння, перетворимо на об'ємний за формулою Гауса – Остроградського:

$$\iint_{(s)} \vec{p}_n ds = \iiint_{(v)} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dv \quad (5.23)$$

Тоді рівняння (5.21) набуває вигляду:

$$\iiint_{(v)} \left(\rho \vec{F} - \rho \vec{\omega} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dv = 0 \quad (5.24)$$

Якщо під інтегральний вираз входять безперервні функції, то рівняння руху (5.24) можна записати в диференціальній формі:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \quad (5.25)$$

Введемо тепер дивергенцію тензора напруження за рівнянням

$$Div T_\sigma = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \quad (5.26)$$

Тогда уравнение движения приобретает вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \vec{F} + \text{Div} T_\sigma \quad (5.27)$$

У декартових координатах рівняння руху має вигляд

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Якщо деформування проводиться з малою швидкістю, то силою інерції можна знехтувати, якщо ж відкинути і масові сили, рівняння руху зводиться до рівняння рівноваги

$$\text{Div} T_\sigma = 0 \quad (5.29)$$

Рівняння рівноваги в декартових координатах набуває більш простого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.3.3 Робота деформацій

Обчислим роботу деформації об'єму dv , обмеженого поверхнею ds . Елементарна маса сили $\rho \vec{F} dv$ виконує роботу на шляху $\vec{v} dt$, рівною $\rho \vec{F} \vec{v} dv dt$. Елементарна поверхнева сила $\vec{p}_n ds$ на тому ж шляху $\vec{v} dt$ виконує роботу $\vec{p}_n \vec{v} ds dt$.

Отже, елементарна робота масових і поверхневих сил становить:

$$dA = \rho \vec{F} \vec{v} dv dt + \vec{p}_n \vec{v} ds dt \quad (5.31)$$

Повна деформаційна робота визначається інтеграцією елементарних робіт за об'ємом, поверхнею і часом:

$$A = \int_{(t)} \int_{(v)} \rho \vec{F} \vec{v} dv dt + \int_{(t)} \int_{(s)} \vec{p}_n \vec{v} ds dt. \quad (5.32)$$

Поверхневий інтеграл перетворюється в об'єм за формулою Гаусса-Остроградського:

$$\int_{(t)} \int_{(s)} \vec{p}_n \vec{v} ds dt = \int_{(t)} \int_{(s)} \left[\frac{\partial(\vec{p}_x \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{p}_y \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{p}_z \vec{v})}{\partial z} \right] dv dt. \quad (5.33)$$

З урахуванням виразу (3.3.2.17) рівняння для визначення роботи набуває вигляду

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} \left[\rho \vec{F} \vec{v} + \frac{\partial(\vec{p}_x \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{p}_y \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{p}_z \vec{v})}{\partial z} \right] dv dt \quad (5.34)$$

Подальше перетворення можна зробити шляхом диференціації похідних під знаком інтеграла:

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} \left\{ \vec{v} \left[\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right] + \vec{p}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right\} dv dt \quad (5.35)$$

У цьому рівнянні вираз в квадратних дужках перетворюється в рівняння руху. Рівняння визначення роботи набуває досить простий вигляд:

$$A = \int_{(t)} \left(\rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{p}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) dv dt \quad (5.36)$$

Для подальшого раціонального введення двох функцій: функція швидкості визначаємо рівнянням

$$L = \rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad (5.37)$$

і функція дисипації енергії, виражена відношенням

$$E = \vec{p}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{p}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{p}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}. \quad (5.38)$$

Роботу деформації через ці дві функції можна розрахувати за формулою

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} (L + E) dv dt. \quad (5.39)$$

Таким чином, робота деформації витрачається на збільшення кінетичної енергії окремих точок тіла в процесі деформації так і на власне деформацію тіла. Та частина роботи, яка йде надання кінетичної енергії тіла, характеризується функцією швидкості L , а робота деформації є функцією дисипації енергії E .

Якщо деформація виконується з невеликою швидкістю і прискоренням, то деформаційна робота через функцію дисипації енергії здійснюється за рівнянням

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} E dv dt. \quad (5.40)$$

У виразі (5.38) для функції дисипації енергії складовими вектору зовнішніх сил і вектору швидкості є:

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}, \\ \vec{p}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}, \\ \vec{p}_{zx} &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}, \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

З урахуванням (3.41) вираз (5.38) має вигляд:

$$E = \sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (5.42)$$

Якщо брати до уваги коефіцієнт Коші, то функція дисипації енергії набуває вигляду

$$E = \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{yz} \varepsilon_{yz} + \tau_{zx} \varepsilon_{zx} \quad (5.43)$$

Для швидкодіючих формоутворюючих процесів істотне значення має швидкісна функція (5.37). Вона збільшує питому енергоємність процесів в порівнянні зі статичним значенням на етапі руху заготовки. На етапі контурного проектування деталей сприяє перерозподілу напружень і зміні конфігурації

залишкових напружень за рахунок додаткового вкладення придбаної кінетичної енергії.

5.3.4 Зв'язок напружень та швидкостей деформацій в теорії пластичної течії

При пластичній течії металів зв'язок між напруженнями та деформаціями встановлюється на основі принципу інваріантності роботи деформації по відношенню до координатних перетворень.

Робота деформацій для елементарного об'єму металу, пов'язані з октаедричними ділянками, такі:

$$dA = 3\tau_{окт}\gamma_{окт}dvdt. \quad (5.44)$$

Тоді повна робота деформації визначається рівнянням

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} 3\tau_{окт}\gamma_{окт}dvdt. \quad (5.45)$$

Октаедричне напруження пов'язано з інтенсивністю напружень:

$$3\tau_{окт} = \sqrt{2}\sigma_i \quad (5.46)$$

а октаедрична швидкість деформації - з інтенсивністю швидкостей деформації:

$$\gamma_{окт} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_i. \quad (5.47)$$

З огляду на це, повноцінна робота:

$$A = \int_{(t)} \iiint_{(v)} \sigma_i \varepsilon_i dvdt. \quad (5.48)$$

Порівняння рівняння (5.48) з рівнянням (5.40)

$$E = \sigma_i \varepsilon_i \quad (5.49)$$

Перетворюємо рівняння (5.49) таким чином:

$$\begin{aligned} E = \sigma_i \varepsilon_i &= \sigma_i^2 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \\ &\tau_{31}^2)] = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} [2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 2\sigma_{33}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} - 2\sigma_{22}\sigma_{33} - 2\sigma_{33}\sigma_{11} + 6\tau_{12}^2 + 6\tau_{23}^2 + \\ &6\tau_{31}^2] \end{aligned} \quad (5.50)$$

використаємо ідентичність

$$\begin{aligned} 2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 2\sigma_{33}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} - 2\sigma_{22}\sigma_{33} - 2\sigma_{33}\sigma_{11} + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) &= \\ = 3[\sigma_{11}(\sigma_{11} - \sigma) + \sigma_{22}(\sigma_{22} - \sigma) + \sigma_{33}(\sigma_{33} - \sigma) + 2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Для визначення функції дисипації енергії отримаємо вираз

$$\begin{aligned} E &= \sigma_{11} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{11} - \sigma) + \sigma_{22} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{22} - \sigma) + \sigma_{33} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{33} - \sigma) + \\ &+ \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{12}\tau_{12} + \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{23}\tau_{23} + \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{31}\tau_{31} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Знайдемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{11} - \sigma) &= \varepsilon_{11}; & \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{12} \tau_{12} &= \varepsilon_{11}; \\
\sigma_{22} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{22} - \sigma) &= \varepsilon_{22}; & \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{23} \tau_{23} &= \varepsilon_{22}; \\
\sigma_{33} \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_{33} - \sigma) &= \varepsilon_{33}; & \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{31} \tau_{31} &= \varepsilon_{33}.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Цю систему можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma + 2 \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{11}, & \tau_{12} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{12}; \\
\sigma_{22} &= \sigma + 2 \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{22}, & \tau_{23} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{23}; \\
\sigma_{33} &= \sigma + 2 \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{33}, & \tau_{31} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{31}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Ці рівняння можна записати в тензорному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma, & \tau_{12}, & \tau_{13} \\ \tau_{21}, & \sigma_{22} - \sigma, & \tau_{23} \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 2 \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2} \varepsilon_{12} & \frac{1}{2} \varepsilon_{13} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2} \varepsilon_{23} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{31} & \frac{1}{2} \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.55}$$

Напишемо рівняння більш коротко через девіатори напружень та швидкості деформації:

$$D_\sigma = 2 \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} D_\varepsilon \tag{5.56}$$

Рівняння (5.56) трансформується в такий спосіб:

$$\frac{D_\sigma}{\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i} = \frac{D_\varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_i} \tag{5.57}$$

З огляду на рівняння (5.56) і (5.57), маємо кінцевий вираз

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon \tag{5.58}$$

Звідси випливає фундаментальний висновок: основним фізичним законом в області великих пластичних деформацій є умова співпадіння тензора напруження з направляючим тензором направляючого швидкостей деформацій.

В скалярному вигляді зв'язок між девіатором напружень і девіатором швидкостей деформації становить:

$$D_\sigma = 2\mu D_\varepsilon \tag{5.59}$$

Коефіцієнт зв'язку девіаторів називається коефіцієнтом жорсткості і визначається співвідношенням:

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \tag{5.60}$$

Він уявляє собою універсальну характеристику деформуємого металу, яка відображає багато його фізико-механічних властивостей.

Таким чином, показано, що при великих пластичних деформаціях необхідно співпадіння з напрямком тензора напружень і направляючого тензора швидкостей деформації. В теорії малих пружно-пластичних деформацій досить співпадіння направляючого тензора з направляючим тензором деформації. Оскільки теорії великих пластичних

х деформацій припускають співпадіння в нескінченно малих, його також можна використовувати для аналізу малих деформацій.

5.3.5 Коефіцієнт жорсткості

Введемо універсальну характеристику

$$\mu = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \text{ -коефіцієнт жорсткості} \quad (5.61)$$

Тоді

$$D_\sigma = 2\mu D_\varepsilon \quad (5.62)$$

Запишемо рівняння зв'язку

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma + 2\mu\varepsilon_{11}; \tau_{12} = \mu\varepsilon_{12}; \\ \sigma_{22} &= \sigma + 2\mu\varepsilon_{22}; \tau_{23} = \mu\varepsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= \sigma + 2\mu\varepsilon_{33}; \tau_{31} = \mu\varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\mu = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$$

μ - враховує:

- 1) механічні характеристики деформованого середовища;
- 2) особливості властиві технологічному процесу.

Для ідеальних рідин $\mu=0$;

Для абсолютно твердого тіла $\mu=\infty$;

Для реальних тіл, що деформуються, $0 \leq \mu \leq \infty$.

У загальному випадку

$$\sigma_i = \varphi(e_i, \varepsilon_i, T, \text{ти др.}) \quad (5.64)$$

Розглянемо

$$\sigma_i = \varphi(e_i) \quad (5.65)$$

якщо

$$\sigma_i = K e_i^n \quad (5.66)$$

тоді

$$\mu = \frac{K e_i^n}{3 \varepsilon_i} \quad (5.66)$$

допустимо, що

$$1) \ n=0, \text{ тоді } \sigma_i = \text{const} \quad (5.67)$$

або $\sigma_i = K$, $\sigma_i = \sigma_s$

$\mu = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$ – для ідеально пластичних тіл крива *a* (на рис 5.3.

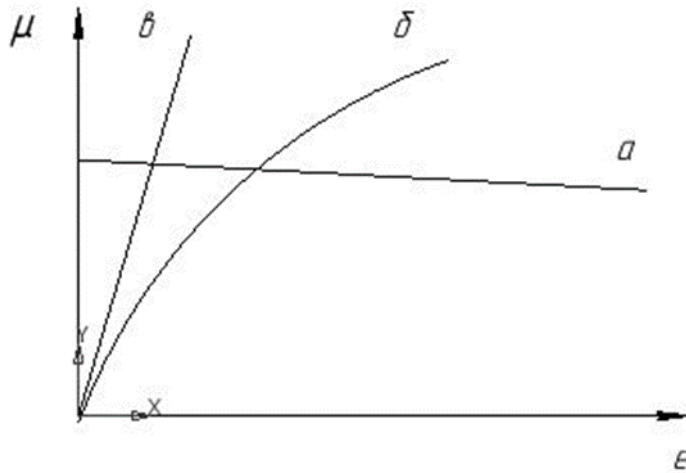


Рис.5.3

2) якщо $0 < n < 1$, то це зміцнюване тіло (крива б рис.5.3)

$$\mu = \frac{K e_i^n}{3 \varepsilon_i} \quad (5.68)$$

3) при $n=1$ інтенсивність напружень визначається за рівнянням

$$\sigma_i = K e_i \quad (5.69)$$

$$\text{де } K = \frac{3E}{2(1+\gamma)}$$

$$(5.70)$$

Тоді коефіцієнт жорсткості (крива в рис.5.3)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\gamma)} \frac{e_i}{\varepsilon_i}$$

5.3.6 Визначення середнього напруження

Залежно (5.54) дозволяють визначити компоненти тензора напруження, якщо відома величина середньої напруження. Його величина може бути визначена під час використання основного фізичного закону (5.56).

Використовуємо представлені девіатори напружень через тензори напружень та шаровий тензор.

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - \sigma T_0. \quad (5.71)$$

Аналогічно для девіатору швидкостей деформацій

Рівняння (5.71) та (5.72) дозволяють знайти залежності між тензором напружень та швидкостей деформацій:

$$D_{\varepsilon} = T_{\varepsilon} - \varepsilon T_0. \quad (5.72)$$

$$T_{\sigma} = 2\mu T_{\varepsilon} - \left(-\sigma + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} \right) T_0 \quad (5.73)$$

Оскільки при пластичному деформуванні виконується закон збереження обсягу рівняння (5.73) набуває простішого вигляду:

$$T_{\sigma} = \sigma T_0 + 2\mu T_{\varepsilon} \quad (5.74)$$

З рівняння рівноваги (5.31) випливає, що дивергенція тензора напруг має дорівнювати нулю значить,

$$\operatorname{grad} \sigma = -2 \operatorname{Div} (\mu T_{\varepsilon}) \quad (5.75)$$

Це рівняння є універсальним рівнянням. Рішення його дозволяє обчислити величину середнього напруження.

У декартових координатах векторне рівняння (5.75) призводить до системи трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \right. \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \left. \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (5.76) \end{aligned}$$

Значення похідних, якщо вони задовольняють умові повного диференціала, дозволяють отримати повну похідну за рівнянням

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz. \quad (5.77)$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо величину середнього напруження:

$$\sigma = \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy + \int \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz. \quad (5.78)$$

У випадку визначення середньої напруження зводиться до розв'язання рівняння (типу рівняння Пуассона):

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = -2 \left[\frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{xx})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{yy})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{zz})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{xy})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{xz})}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 (\mu \varepsilon_{yz})}{\partial y \partial z} \right]. \quad (5.79)$$

6. МЕХАНІЧНА СХЕМА ДЕФОРМУВАННЯ

6.1. Види механічних схем деформацій

Механічна схема деформування – це сукупність напруженого і деформованого стану. Зображується механічна схема деформацій графічно у вигляді кубиків матеріалу, на грані якого діють напруження чи деформації.

Це означає, що на всіх гранях будуть діяти напруження. Індекси 1, 2 і 3 несуть змістовне навантаження: σ_1 – максимальне, а σ_3 – мінімальне напруження.

Існує чотири схеми об'ємного напруженого стану (НО – напружений об'ємний стан):

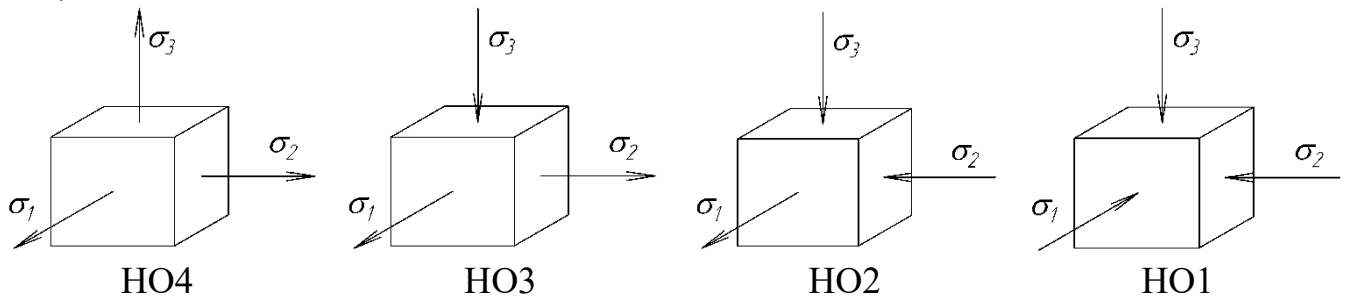


Рис. 6.1

Для плоского напруженого стану (НП) напруження діють по двох гранях (рис. 6.2).

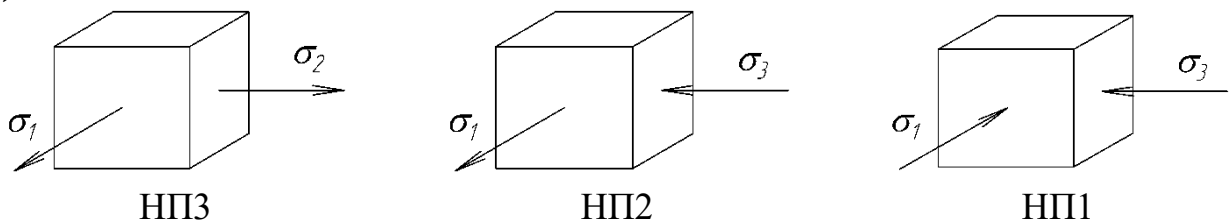


Рис. 6.2

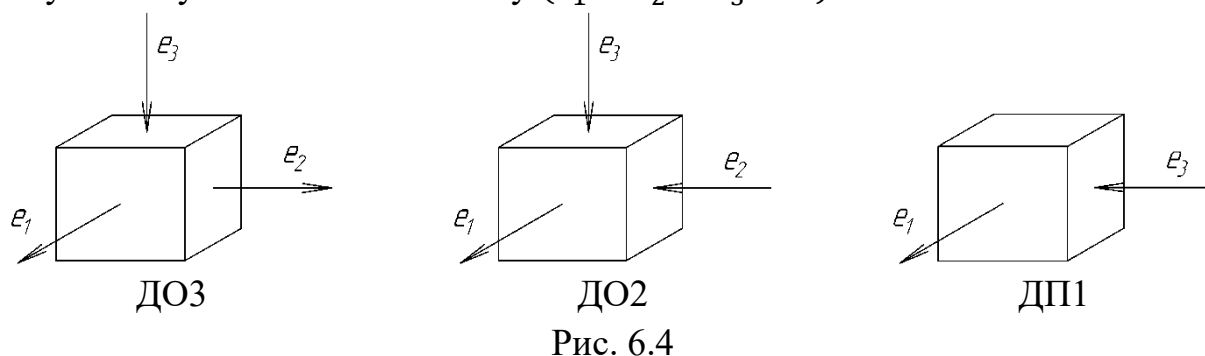
Крім цього, існують дві схеми лінійного напруженого стану (НЛ) показано на рис.6.3.



Рис. 6.3

Таким чином, маємо дев'ять схем напруженого стану.

Схем деформованого стану може бути тільки три (рис.6.4), оскільки має виконуватись умова сталості об'єму ($e_1 + e_2 + e_3 = 0$):



Всього може бути двадцять три схеми деформування.

Механічна схема деформування має великий вплив на опір деформуванню матеріалу, на механічні і фізичні властивості матеріалу, на пластичність.

Так, в одних умовах матеріал може виступати як крихке тіло, а в інших умовах може деформуватись великими ступенями деформацій.

6.2 Вплив схеми напруженого стану на пластичність

Чим менше доля напружень розтягу в пластичній деформації, тим більшої пластичності набуває тіло. Відповідно до цього схема всебічного нерівномірного стиску має найбільшу пластичність. Найменшій пластичності відповідає схема всебічного нерівномірного розтягу. Решта схем займають проміжні значення.

Якщо порівнюються два процеси, що мають однакову схему напруженого стану, то про пластичність судять за величиною гідростатичного тиску. Пластичність більша в тому випадку, де гідростатичний тиск більший.

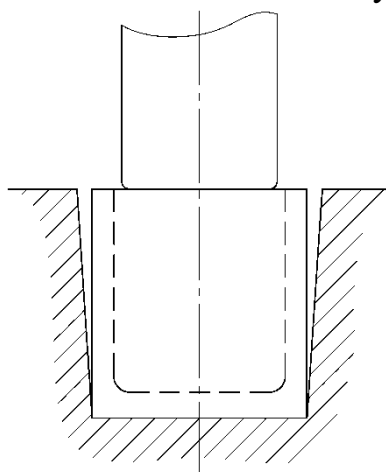


Рис. 6.5

Так, на початку минулого сторіччя Карман деформував зразки з мармуру і піщаника. Ці зразки осаджувались в деякому гідростатичному полі. Тиск рідини можна регулювати. Карман знайшов, що чим більше σ_2 чи σ_3 , тим до більших ступенів деформації можна zdeформувати зразок. Мармур стиском з підпором можна zdeформувати до 75%, а розтягом – до 25 %.

Виявляється, якщо штампувати заготовку в штампі (рис. 6.5), на спідниці утворюються тріщини, які обумовлюються тим, що до того як бічна стінка торкнеться штампу, на ній виникають напруження розтягу. Якщо

замість 5° взяти 30' нахилу стінки штампу і застосувати механічний виштовхувач, спочатку в заготовці виникнуть напруження розтягу. До того, як ці напруження набудуть загрозливої величини, заготовка торкнеться штампу і далі буде деформуватися в умовах всебічного стиску.

6.3 Вплив схеми напруженого стану на опір деформуванню

Вплив схеми напруженого стану на опір деформуванню визначається гідростатичним тиском:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \min \quad (6.1)$$

Виходячи з цього, найменший опір деформуванню буде за лінійної схеми. За всіх інших схем він буде більшим. Найбільшим же він буде, коли $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будуть одного знаку.

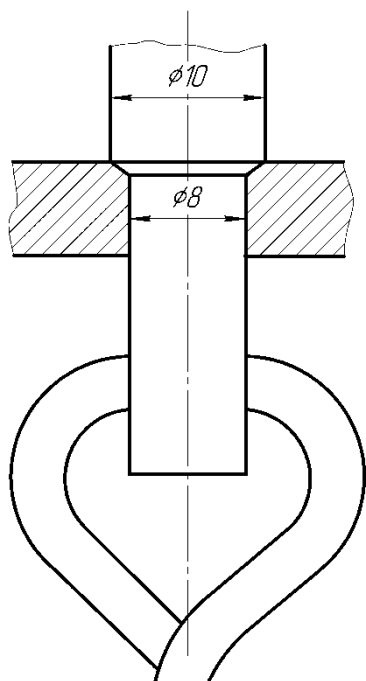


Рис. 6.6

Нехай нам необхідно зменшити діаметр мідного прутка до Ø8.

Якщо здійснювати це волочінням, то зусилля буде $P = 1030$ кг, а тиск – $p = 9 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Якщо волочіння замінити видавлюванням, тобто змінити схему напруженого стану, то зусилля буде $P = 3520$ кг, а тиск – $p = 27 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Ще більш значний вплив на опір деформуванню має застосування змащення.

Чим вищий тиск, тим вплив змащення ефективніший.

Доведено, що за всебічного розтягу помітної пластичної деформації не спостерігається.

Навпаки, за теорією Гріфіца, така схема є причиною руйнування. Так, утворення шийки є

причиною утворення всебічного розтягу.

6.4 Вплив схеми деформованого стану на якість металу

Вид переважаючої деформації впливає на якість металу.

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (6.2)$$

З цього випливає, що одна деформація більша в порівнянні з іншими.

Завжди бажано отримати переважну орієнтованість волокон матеріалу, коли можна регулювати міцність, а оскільки волокна витягуються в напрямку розтягу, завжди бажано мати переважну деформацію розтягу. Саме тому прутковий

матеріал, проволочка мають підвищену міцністю – волокна деформовані в потрібному нам напрямку.

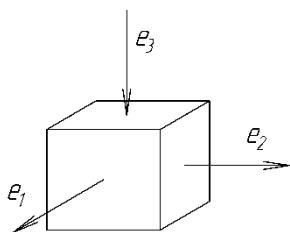


Рис. 6.7

Властивості злитку будуть залежати від попередньої операції, яку ми призначаємо. Так, якщо порожнини в злитку спочатку мали сферичну форму, то після розтягування вони набувають голчатої форми, що дає їм можливість заварюватися. У випадку деформованого стану, що зображений на рис. 2, вздовж кожної з цих осей будуть орієнтуватися волокна, що знижує міцність.

Звідси *висновок*, що завжди бажаною операцією обробки металів тиском є така, за якої схема деформованого стану має одну деформацію розтягу – якість матеріалу буде вищою.

6.5 Вплив схеми напруженого стану на механічні властивості

Останнім часом завдяки успішному розвитку фізики надвисоких тисків вдалось отримати відмінні результати використання схем всебічного стиску. Під дією цих схем, по-перше, можуть відбуватися алотропічні перетворення (графіт – алмаз), по-друге, суттєво змінюються механічні та фізичні властивості. Так, крихкий в звичайних умовах чавун за гідростатичного тиску в 80 000 *атм.* може деформуватися до ступенів деформації $\delta_{10} = 73\%$, $\sigma_B = 330 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$. Таким же чином вольфрам можна деформувати до δ_{10} навіть більшого ніж у чавуна. Але, нажаль, ці властивості втрачаються після зняття тисків.

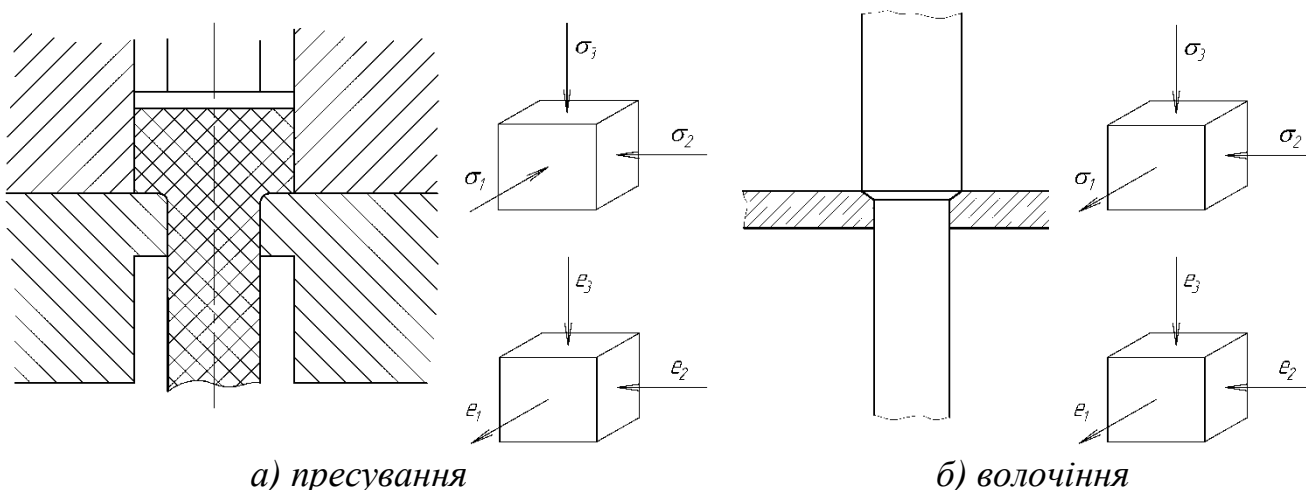
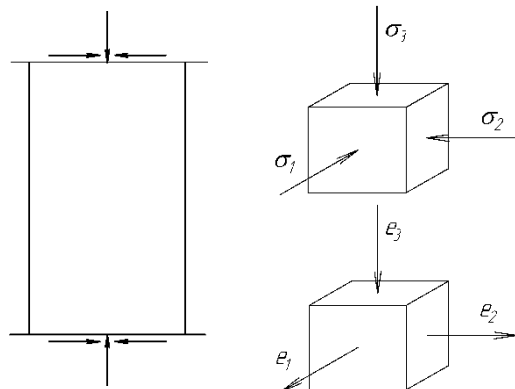


Рис. 6.8

В теперішній час досягнуто тиску в 500 000 *атм.* Але за таких великих тисків змінюють властивості середовища. Так, в'язкість гасу за $p = 40000 \text{ атм.}$

збільшується в 4 000 разів, трансформаторної оливи – в 6 000 разів, а води – лише в 4 рази, і вона відіграє роль мастила. Але об'єм води при цьому зменшується в 5 разів.



в) осаджування

Рис. 6.8

За впливу таких високих тисків (до 80 000 атм.) зменшується пластичність через те, що перебудовуються кристалічні ґратки, зменшується число дислокацій, ґратка набуває правильної форми.

Для порівняння двох процесів механічної обробки обов'язково необхідно порівнювати їх схеми напруженого і деформованого станів.

Через те, що пресування та волочіння мають різні схеми напруженого стану, ці два процеси непорівнювані.

Якщо замість волочіння розглянути процес осаджування, то все одно процеси пресування і осаджування непорівнювані, оскільки мають різні схеми деформованого стану.

7. ДРУГИЙ ГРАНИЧНИЙ СТАН. ДЕФОРМІВНІСТЬ І ДІАГРАМИ ПЛАСТИЧНОСТІ

Деформівність (англ. ductility, deformability) — властивість тіла змінювати форму або розміри під впливом прикладених сил.

Є *природна пластичність* матеріалу, яка визначається шляхом механічних випробувань.

А пластичність, що обумовлена механічною схемою деформації, характерною для кожного технологічного процесу, називаємо *технологічною пластичністю*.

Деформівність матеріалів на різних етапах розвитку теорії пластичності визначалась різними критеріями:

- XVII ст. Галілео Галілей запропонував критерій руйнування при $\sigma = \sigma_{кр}$. (7.1)

- XIX ст. Барре де Сен-Венан запропонував критерій $\delta = \delta_{кр}$ ($e = e_{кр}$). (7.2)

- XIX ст. В.Л. Колмогоров – $e_{зс} = e_{гр.деф.зс}$. (7.3)

Мірою пластичності є величина накопиченої деформації зсуву, яка визначається по В.Л. Колмогорову рівнянням:

$$\Lambda = \sqrt{3} \int_t \varepsilon_i dt \quad (7.4)$$

Гранична величина накопиченої деформації зсуву при якій матеріал руйнується - Λ_p визначає деформівність матеріалу.

Граничне значення Λ_p встановлюють експериментально для різних схем напруженого стану.

Для одновісного розтягу

$$\Lambda_p = 1,73 \ln \frac{1}{1-\psi_{ш}}, \quad (7.5)$$

але

$$\psi_{ш} = \frac{d_0^2 - d_{ш}^2}{d_0^2} = 1 - \left(\frac{d_{ш}}{d_0}\right)^2$$
$$\Lambda_p = 3,46 \ln \frac{d_0}{d_{ш}} \quad (7.6)$$

Величина Λ_p однозначно залежить від показника жорсткості схеми напруженого стану

$$P_\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sigma_i}. \quad (7.7)$$

Функцію $\Lambda_p(P_\sigma)$ – називають діаграмою пластичності. Типова діаграма показана на рис.7.1

На рис. 7.2 показана діаграма пластичності різних металів і сплавів.

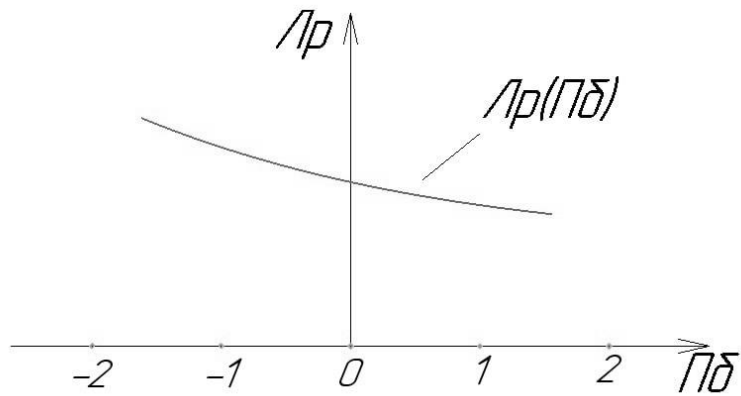


Рис.7.1

Для двовісного розтягу $\Pi_\sigma = +2$,
 для одновісного розтягу $\Pi_\sigma = +1$,
 для одновісного стиску $\Pi_\sigma = -1$,
 для видавлювання та гідропресування $\Pi_\sigma = -3 \dots -10$.

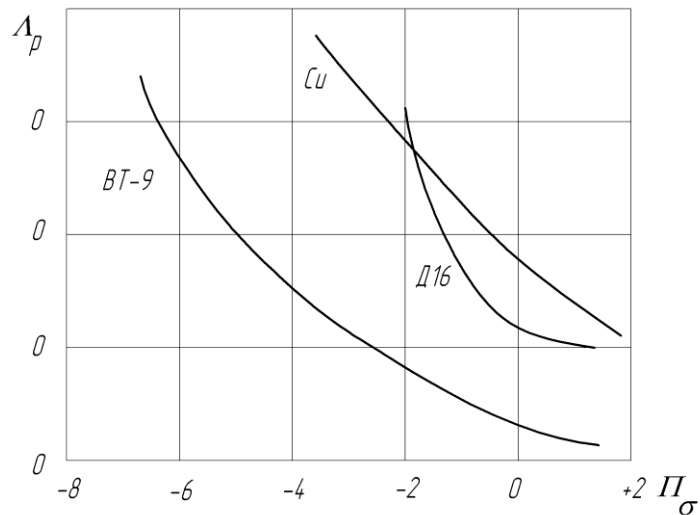


Рис. 7.2

Ступінь деформування проходить при

$$\Lambda(x, y, z, t) < \Lambda_p(x, y, z, t) \quad (7.8)$$

для $\Pi_\sigma = const$, який визначається, тензором напружень T_σ .

Ступінь використання ресурсу пластичності ψ визначають за формулою:

$$\psi = \sqrt{3} \int_t \frac{\varepsilon(x, y, z, t)}{\Lambda_p[\Pi_\sigma(t)]} dt < 1 \quad (7.9)$$

де ψ – ступінь використання ресурсу пластичності.

Величина ступеню використання ресурсу пластичності змінюється в межах

$$0 \leq \psi \leq 1 \quad (7.10)$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Евстратов В.А. Теория обработки металов давлением – Харьков: Вища школа, ХГУ, 1981. – 248с.
2. Високошвидкісні методи обробки металів тиском: Підручник / В.А. Тітов, Ю.Є. Шамарін, А.І. Долматов, В.К. Борисевич, В.О. Маковей, В.М. Алексеєнко – Київ: КВІЦ, 2010. – 304с.
3. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія пластичної деформації», Київ, КП, 2010, 66 с.
4. Конспект лекцій з дисципліни Математичні основи пластичної деформації.
<https://campus.kpi.ua/tutor/index.php?mode=mob&show&file=slfwonidvujtldlipnrq>