

Міністерство освіти та науки України
Державний вищий навчальний заклад
Донецький національний технічний університет
Кафедра металорізальних верстатів і інструментів

Доц. Полтавець В.В.

Планування і обробка даних наукового експерименту
(конспект лекцій)

Розглянуто на засіданні
кафедри, протокол № 5 від
13 листопада 2008 р.
Затверджено на засіданні
учбово-видавничої ради
ДонНТУ, протокол № 6 від
15 грудня 2008 р.

Донецьк 2008 р.

УДК 681.518

Планування і обробка даних наукового експерименту: Конспект лекцій для студентів спеціальності 6.090203 "Металорізальні верстати та системи"/ В.В. Полтавець. – Донецьк: ДВНЗ ДонНТУ, 2008. – 52 с.

Конспект лекцій призначений для студентів 4-го курсу спеціальності 6.090203 "Металорізальні верстати та системи". В лекціях подається інформація про основи теорії моделювання і подоби, теорії обробки експериментальних даних, основи дисперсійного і кореляційного аналізу результатів досліджень, принципи теорії планування експерименту.

Лекції містять інструментарій, яким можуть користуватися студенти при проведенні експериментальних дослідів і обробці їх результатів.

Укладач:

доц. В.В. Полтавець

Тема 1 Основні поняття і визначення

1.1 Наука, експеримент і умови проведення експерименту

Наука – це сфера людської діяльності, спрямована на вироблення і систематизацію об'єктивних знань про дійсність.

Важлива роль у цій діяльності приділяється експерименту, який є головною формою наукового методу пізнання.

Відповідно до ГОСТ 24026-80 «Дослідницькі випробування. Планування експерименту. Терміни й визначення» *експеримент* – це система операцій, впливів і (або) спостережень, спрямованих на одержання інформації про об'єкт при дослідницьких випробуваннях.

Експеримент містить у собі ряд *дослідів*, у процесі кожного з яких відбувається відтворення досліджуваного явища в певних умовах проведення експерименту при можливості реєстрації його результатів.

Із гносеологічної точки зору *експеримент* – це метод пізнання дійсності, який здійснюється (переважно) у контрольованих і керованих умовах.

Контрольовані умови – це такі умови, при яких дослідник має можливість контролювати (вимірювати або оцінювати) значення всіх величин, якими характеризується досліджуваний процес.

Керовані умови – це такі умови, при яких дослідник має можливість встановлювати значення всіх величин, якими характеризується досліджуваний процес, за своїм розсудом.

1.2 Види експериментів

Експерименти класифікуються (розділяються на види) за декількома ознаками.

I. В залежності від характеру умов проведення експерименти розділяються на:

1. Пасивні.
2. Активні.

Експеримент, у якому умови є контрольованими, але не керованими, називається пасивним. Експеримент, у якому всі або (частіше) частина умов є керованими, називається активним.

II. В залежності від досягаємої мети досліджень експерименти діляться на:

1. Якісні.
2. Кількісні.

У якісному експерименті встановлюється тільки факт існування явища, у кількісному – визначаються кількісні характеристики явища або процесу.

III. За ознакою місця проведення експерименти бувають:

1. Лабораторні.
2. Промислові (природні).

IV. За способом реалізації експерименту:

1. Натурні (фізичні).
2. Обчислювальні (імітаційні).

Натурні експерименти виконуються звичайно на фізичних моделях об'єктів: або повнорозмірних, або виконаних у деякому масштабі. Натурними є також експерименти на аналогових моделях, які можуть мати вигляд, цілком відмінний від вигляду досліджуваного об'єкта.

Обчислювальні експерименти для технічних об'єктів найчастіше реалізуються на ЕОМ із застосуванням математичних моделей об'єктів.

1.3 Цілі проведення експериментів

При проведенні експерименту переслідують одну або декілька із сукупності наступних цілей:

1. Встановити факт існування об'єкта, явища або процесу.
2. Визначити кількісні значення характеристик об'єкта, явища або процесу.
3. Установити вигляд залежності між вхідними і вихідними величинами, якими характеризується досліджуваний процес.
4. Підтвердити правильність результатів теоретичних досліджень об'єкта.
5. Оптимізувати досліджуваний процес або об'єкт, тобто знайти найбільш раціональну його структуру або найкращі умови функціонування.

1.4 Складові частини теорії інженерного експерименту

У теорію інженерного експерименту включають п'ять основних розділів (складових частин, напрямів):

1. Теорія моделювання і подоби.

Цей розділ теорії дає можливість відповісти на два питання:

- 1) які величини необхідно вимірювати при експерименті;
- 2) як обробляти отримані результати, щоб отримані залежності були справедливими і для даного об'єкта і цілого ряду йому подібних.

2. Теорія обробки експериментальних даних.

Цей розділ містить у собі сукупність методик, які дозволяють на основі даних, отриманих з похибками (іноді досить істотними) встановлювати достовірні залежності між величинами.

3. Теорія планування експерименту.

Включає сукупність методів і процедур, застосування яких при організації і проведенні експериментів дозволяє одержати залежності, які цікавлять дослідника, з мінімальними часовими і матеріальними витратами.

4. Вибір методів і засобів вимірювань.

Цей розділ охоплює методики підбора методів і засобів вимірювань досліджуваних при проведенні експериментів величин, які враховують:

- фізичну природу досліджуваного явища або процесу;
- вид експерименту і цілі проведення експерименту;
- вимоги по точності вимірювання величин;
- необхідність мінімізації витрат на придбання, експлуатацію, обслуговування і налаштування засобів вимірювань.

5. Теорія оптимізації.

Цей розділ дозволяє визначити найкращі (оптимальні) або найбільш підходящі (раціональні) значення параметрів об'єкта в заданих умовах його функціонування.

Тема 2 Загальна характеристика об'єктів досліджень

2.1 Модель "чорна скриня". Вхідні і вихідні параметри об'єкта досліджень

Об'єкт дослідження (ОД) є умовно ізольоване ціле, яке містить сукупність процесів, що протікають у ньому, і засобів їх реалізації.

Під засобами реалізації розуміють сукупність систем керування і контролю за процесами в об'єкті, а також ліній зв'язку між об'єктом і цими системами.

При виконанні теоретичних і прикладних досліджень досить часто використовується модель "чорна скриня" (рис. 2.1).

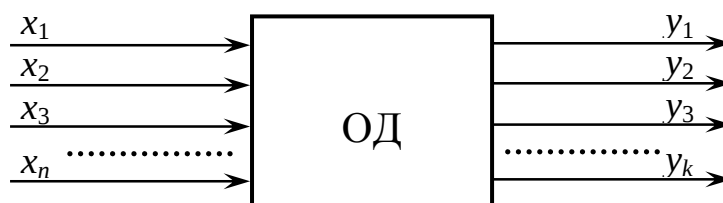


Рисунок 2.1 – Принципова схема моделі "чорна скриня"

Величини $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ є вихідними величинами об'єкта. Ці величини характеризують поведінку об'єкта досліджень. Вони називаються:

- відгуки системи,
- реакції системи,
- цільові функції,
- параметри.

Величини $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є вхідними величинами об'єкта. Ці величини викликають зміни в поведінці об'єкта, які впливають на вихідні величини. Вхідні величини називаються:

- збурення,
- фактори,
- збурювальні фактори.

Головна особливість моделі "чорна скриня" полягає в тому, що досліднику на момент початку роботи з ОД не відомі його внутрішня структура та закономірності процесів, які протікають у ньому. Про поведінку об'єкта дослідник судить тільки по тим змінам вихідних величин, які викликані відповідними змінами вхідних.

При вивченні будь-якого ОД важлива творча задача дослідника полягає в правильному і обґрунтованому формуванні сукупності параметрів і визначальних (головних) факторів об'єкта.

2.2 Фактори об'єкта досліджень і вимоги до них

Фактором називається будь-яка величина, яка чинить вплив на параметр і здатна змінюватися незалежно від інших.

Фактори, які впливають на поведінку об'єкта, викликають істотну зміну вихідних величин, називаються *головними (визначальними)* факторами ОД. Фактори, які чинять вплив у межах похибки, називаються *неголовними, невизначальними або несуттєвими*.

Фактори найбільшою мірою характеризують умови проведення експерименту і залежно від цих умов поділяються на три групи:

1. Контрольовані і керовані.
2. Контрольовані, але некеровані.
3. Неконтрольовані і некеровані.

Приклад процесу з неконтрольованими і некерованими факторами – природне старіння конструкційного матеріалу.

Основних вимог, які пред'являються до факторів, виходячи з визначення фактора, всього дві:

1. Фактор повинен викликати зміну вихідних величин об'єкта.
2. Фактор повинен бути некорельованою величиною, тобто мати властивість змінювати своє значення незалежно від інших величин.

Крім двох основних вимог, до факторів пред'являються також і інші:

3. *Операціональність.*

Ця властивість означає, що фактор повинен бути операціонально визначеною величиною, тобто дослідник повинен чітко знати, де, чим і як буде вимірюватися значення фактора.

4. *Сумісність.*

При будь-якому значенні фактора в обраному діапазоні значень досліджуваній процес повинен бути безпечним.

5. *Однозначність.*

Фактор повинен чинити цілком однозначний вплив на параметр ОД.

6. *Точність.*

Точність вимірювання фактора повинна бути як мінімум на порядок вищою від точності вимірювання параметра.

7. *Кількісна оцінка.*

8. *Керованість.*

Ця властивість означає, що дослідник повинен мати можливість встановлювати значення фактора за своїм розсудом.

З розглянутого вище видно, що виконання всіх вимог, крім двох основних, є бажаним, але не завжди можливим.

2.3 Параметри об'єкта досліджень. Класифікація параметрів і вимоги до них

Параметр ОД – це кількісна або якісна характеристика цілі дослідження, яка дозволяє досліднику всебічно вивчити реакції даного об'єкта на вплив всієї сукупності факторів, які визначають його поведінку.

Залежно від виду об'єкта і мети дослідження параметри можуть бути досить різноманітними. Розглянемо їх класифікацію.

Умовно всі параметри технічних об'єктів можна розділити на 4 основні групи:

1. Економічні.

До економічних параметрів відносяться ефективність (прибуток), собівартість і рентабельність процесів і систем, а також витрати на експеримент.

2. Техніко-економічні.

3. Техніко-технологічні.

4. Статистичні.

Параметри повинні задовольняти наступним вимогам:

1. Повинні мати кількісну оцінку (*кількісна оцінка*).

2. Повинні мати властивість сумісності, тобто повинні допускати безпечно проведення експерименту при будь-якому сполученні факторів (*сумісність*).

3. Повинні мати властивість однозначності, тобто при одній і тій же комбінації факторів значення параметра повинне бути однаковим (у межах похибки) (*однозначність*).

4. Повинні бути універсальними, тобто всебічно характеризувати об'єкт (*універсальність*).

5. Повинні мати чіткий фізичний або економічний зміст (*чіткий зміст*).

6. Бажано, щоб параметр був єдиним (*єдиничність*).

На практиці, як правило, поведінка об'єкта характеризується кількома параметрами. При вирішенні таких дослідницьких задач можливі наступні ситуації:

1. Якщо обов'язково характеризувати поведінку об'єкта декількома параметрами, то знаходяться всі необхідні залежності цих параметрів від визначальних факторів.

2. Із сукупності параметрів відокремлюється один у якості головного.

При цьому має місце оптимізація ОД по одному параметру, який називається критерієм оптимізації. Інші параметри використовуються для вироблення різного роду обмежень на процес або об'єкт.

3. На основі кількох параметрів формується узагальнюючий (універсальний), для якого і вирішується задача досліджень.

2.4 Класифікація об'єктів досліджень

При вивченні будь-якого об'єкта або процесу враховується ряд властивостей (ознак), якими ОД відрізняються один від одного. Основними властивостями (класифікаційними ознаками) ОД є наступні:

1. Ступінь складності.

2. Повнота апіорної інформації.

3. Керованість.

4. Відтворюваність.

5. Оборотність.

6. Швидкість протікання процесів.

2.5 Властивості об'єктів досліджень

Розглянемо найважливіші властивості ОД, які обумовлюють тривалість, способи і форми процесу дослідження.

2.5.1 Складність об'єкта

Складність об'єкта – це кількість його станів, які залежно від мети дослідження і застосовуваної техніки вимірювання можна чітко відрізнити один від одного.

За складністю об'єкти досліджень поділяються на:

1. Прості ОД.
2. Складні ОД.

У загальному випадку складність об'єкта визначається в такий спосіб:

$$C = \prod_{i=1}^{i=k} n_i,$$

де n_i – кількість рівнів i -го фактора;

k – кількість факторів.

Якщо кількість рівнів всіх факторів однаково, тобто $n_i = n$, то

$$C = n^k.$$

2.5.2 Повнота апріорної інформації про об'єкт

Під *апріорною інформацією* розуміють інформацію, відому до початку досліджень, яка міститься в опублікованих джерелах (підручниках, монографіях, наукових статтях, звітах, описах відкриттів і винаходів, каталогах, довідниках і т.п.).

За повнотою апріорної інформації об'єкти досліджень поділяються на:

1. ОД із гранично високою апріорною інформацією.
2. ОД з обмеженою апріорною інформацією.
3. ОД з відсутністю апріорної інформації.

2.5.3 Керованість об'єкта дослідження

Керованість об'єкта – це властивість, яка дозволяє змінювати його стан за розсудом дослідника.

За ступенем керованості об'єкти досліджень поділяються на:

1. Керовані (повністю керовані) ОД.
2. Частково керовані ОД.
3. Некеровані ОД.

2.5.4 Відтворюваність об'єкта дослідження

Відтворюваність – це властивість об'єкта дослідження приймати той саме стан, якщо сукупність факторів і їх значень та ж сама.

За ступенем відтворюваності об'єкти досліджень поділяються на:

1. ОД з низькою відтворюваністю.
2. ОД з високою відтворюваністю.

2.5.5 Оборотність об'єкта дослідження

Оборотність – це властивість об'єкта дослідження вертатися до вихідного (до здійснення досліду) стану, якщо сукупність значень факторів буде такою ж, як і до проведення досліду.

За ознакою оборотності об'єкти досліджень поділяються на:

1. Оборотні ОД.
2. Необоротні ОД.

2.5.6 Швидкість протікання процесів

Швидкість протікання процесів в ОД характеризує тривалість часового інтервалу між двома станами ОД, які чітко різняться за значеннями параметрів.

За цією характеристикою об'єкти досліджень поділяються на:

1. ОД з високою швидкістю протікання процесів.

Тривалість відповідного часового інтервалу вимірюється в секундах.

2. ОД із середньою швидкістю протікання процесів.

Тривалість відповідного часового інтервалу вимірюється в хвилинах.

3. ОД з низькою швидкістю протікання процесів.

Тривалість відповідного часового інтервалу вимірюється в годинах і днях.

Тема 3 Загальні положення моделювання

3.1 Поняття моделювання і моделі. Подоба моделей

Моделювання – це метод пізнання дійсності із застосуванням моделей.

Модель – це реально існуючий (матеріальний) або уявний об'єкт, який відображає основні властивості об'єкта-оригіналу.

Головна вимога, яка пред'являється до моделі, – це подоба об'єкту-оригіналу.

Об'єкти називаються подібними, якщо за відомими характеристиками одного з них характеристики іншого можна одержати простим перерахуванням.

Подоба може бути абсолютною і практичною.

Абсолютна подоба вимагає тотожності всіх властивостей і ознак порівнюваних об'єктів у просторі й у часі.

Практична подоба вимагає тотожності тільки основних властивостей порівнюваних об'єктів виходячи із задачі дослідження.

Питаннями методології побудови моделей об'єктів і забезпечення їх подоби займається теорія моделювання й подоби.

3.2 Задачі теорії моделювання і подоби

Застосування теоретичних положень, методів і засобів теорії моделювання і подоби дозволяє вирішити наступні задачі:

1. Обґрунтовано вибрати модель об'єкта-оригіналу і визначити її основні параметри.

2. Перерахувати результати модельного експерименту на натурний (оригінальний) об'єкт.

3. Узагальнити результати досліджень, проведених у різних умовах і на різних режимах.

4. Одержати узагальнені (критеріальні) залежності, які є справедливими для цілого класу подібних об'єктів.

5. Розповсюдити результати експериментів, які отримані на заданому діапазоні зміни факторів, на більш широкий інтервал їх варіювання.

3.3. Класифікація моделей об'єктів досліджень

Моделі поділяються на два основних класи.

Моделі ОД					
Матеріальні			Уявні		
Натурні	Фізичні	Математичні матеріальні (аналогові)	Наочні (гіпотетичні)	Символічні	Математичні

Наочні моделі – це уявні представлення (гіпотези) і так звані уявлювані моделі. Приклад: модель атома.

Символічні моделі підрозділяються на:

– умовно-знакові представлення об'єктів (географічні карти, записи хімічних реакцій тощо);

– умовно-графічні представлення (структурні схеми, графи, структурні сітки і т. ін.);

– умовно-подібні подання (елементи об'єкта поєднуються в групи за деякими умовами).

Математична модель – це сукупність рівнянь, які описують процеси в об'єкті-оригіналі.

Математичні моделі також можуть бути представлені у вигляді алгоритмів і програм для ЕОМ. Широко поширена модель цього класу – схеми заміщення в електротехніці.

Натурна модель – це об'єкт дослідження в натуральну величину. Ці моделі використовують для проведення стендових і промислових випробувань, а також виробничих експериментів.

При вирішенні багатьох практичних завдань здійснення промислових випробувань, як правило, є обов'язковим, тому що в процесі їх проведення встановлюють вплив експлуатаційних факторів на роботу об'єкта або процеси в об'єкті.

Фізична модель характерна тим, що фізична природа процесів у ній і об'єкті-оригіналі однакова. Залежності, які отримані на фізичній моделі об'є-

кта, властиві також і об'єкту-оригіналу та у фізичних розмірностях можуть бути отримані простим перерахуванням через масштабні коефіцієнти.

Математичні матеріальні моделі характеризуються тим, що фізична природа процесів в аналоговій моделі відрізняється від природи процесів в об'єкті-оригіналі. Однаковий вигляд мають тільки рівняння, які описують процеси в об'єктах.

Аналогові моделі підрозділяються на:

- прямі аналогові моделі;
- аналого-структурні моделі;
- аналого-цифрові моделі.

Приклад прямих аналогових моделей – моделювання механічних, гідродинамічних, термодинамічних і інших процесів на електричних моделях.

Приклад аналого-структурних моделей – моделювання процесів в оригінальному об'єкті із застосуванням аналогових обчислювальних машин.

Аналого-цифрові моделі реалізуються при використанні одночасно ЕОМ і АЦОМ. Застосовуються, наприклад, при дослідженні складних динамічних систем.

В інженерних дослідженнях на етапі теоретичних досліджень найбільш часто використовують математичні і математичні матеріальні моделі; на експериментальному етапі – натурні й фізичні моделі.

3.4 Послідовність побудови моделей

3.4.1 Послідовність побудови математичних матеріальних і математичних уявних моделей

Така задачі вирішується в 5 етапів:

1. З множини процесів, які протікають в об'єкті дослідження, виділяють тільки ті процеси, які є головними (визначальними) з позиції сформульованої задачі досліджень.
2. Виконують спрощений опис виділеного процесу: створюють словесну (вербальну) модель головного процесу, проводять класифікацію і систематизацію параметрів, по можливості виконують статистичне оцінювання.
3. Встановлюють сукупність параметрів і головних (визначальних) факторів досліджуваного процесу. Як правило, перелік параметрів об'єкта поіменованій у задачі дослідження.

Визначальні фактори об'єкта встановлюються на основі апріорної інформації про нього, а також на основі експертних оцінок і результатів відслідковувальних експериментів. Якщо ОД є складною системою, то на даному етапі її розбивають на більш прості ланки і шляхом їх аналізу встановлюють вхідні і вихідні величини цих ланок. Потім на основі отриманої інформації про складові ланки формують сукупність даних про фактори і параметри об'єкта в цілому. Оцінюють вагомість впливу кожного фактора, виділяють найбільш значущі та відкидають другорядні.

4. Складають систему рівнянь, якими описуються процеси в об'єкті, а також встановлюють початкові і граничні умови для отриманих рівнянь.

Якщо система складна, то, як правило, складають рівняння процесу в елементарних ланках даної системи, а потім одержують або загальне рівняння процесу в об'єкті в цілому, або вирішують задачу шляхом використання рівнянь складових ланок.

При складанні математичної моделі необхідно прагнути виконати дві умови:

- 1) Створена математична модель повинна бути якомога простішою, але забезпечувати необхідну точність результатів вирішення задачі.
 - 2) Модель повинна бути адекватна фізиці процесів в об'єкті.
5. Вирішують задачу дослідження із застосуванням створеної математичної моделі. Рішення виконують аналітичним шляхом або чисельними методами на ЕОМ.

3.4.2 Послідовність побудови фізичних моделей

Натурні і фізичні моделі можна створювати або на підставі математичної моделі або без її наявності.

При відсутності математичних моделей фізична модель створюється в наступній послідовності:

1. Виділяється головний процес в об'єкті виходячи із задачі дослідження.
2. Виконується словесний опис виділеного процесу.
3. Встановлюють параметри і визначальні фактори ОД.
4. Із застосуванням теорії розмірностей знаходять критерії подоби, якими характеризується процес в об'єкті. За виразами критеріїв подоби і їх кількісними значеннями розраховують значення розмірних фізичних величин, який характеризується процес у моделі. На основі цих даних створюють фізичну модель.

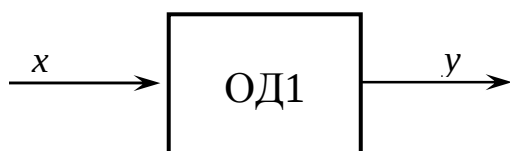
Тема 4 Сутність подоби. Теорема подоби

4.1 Необхідна умова подоби

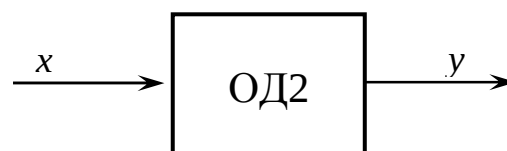
При пошуку відповіді на питання про те, при яких умовах порівнювані об'єкти є подібними, виходять із наступних положень.

На практиці процеси в будь-яких об'єктах описуються певною системою рівнянь зв'язків вихідних величин і вхідних. Установлено, що *необхідною умовою подоби* порівнюваних об'єктів є однаковий вигляд рівнянь, якими описуються процеси в об'єктах.

Приклад 1.



$$y = b_0 + b_1 x;$$

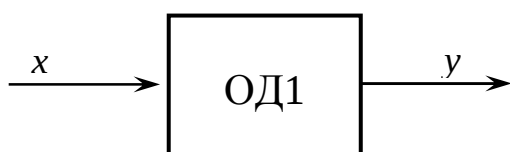


$$y = b_0 + b_1 \sin x$$

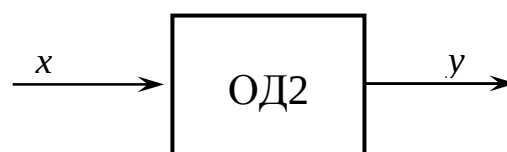
Об'єкти 1 і 2 не є подібними, тому що рівняння мають різний вигляд.

Однак однаковий вигляд рівнянь є тільки необхідною, але не достатньою умовою подоби. Розглянемо ще два приклади.

Приклад 2.



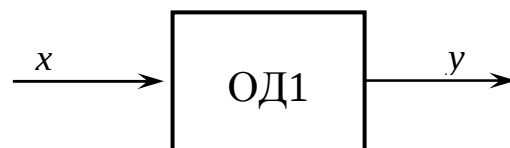
$$y = b_0 + b_1 x;$$



$$y = b_0 + (-b_1) x$$

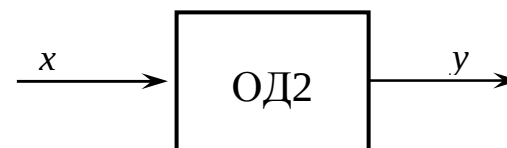
Літерний вигляд рівнянь однаковий, але процеси в об'єктах протікають за різними законами.

Приклад 3.



$$y = b_0 + b_1 x;$$

k – постійний коефіцієнт.



$$y = k b_0 + k b_1 x,$$

Коефіцієнти в рівняннях різні, але співвідношення між ними є масштабним. Тому умова подоби виконується.

4.2 Умови однозначності об'єктів і процесів.

Достатня умова подоби

Для того щоб із сукупності процесів, які описуються певною системою рівнянь, виділити два або кілька подібних процесів, необхідно наступне:

1. Виділити рівняння, які мають однаковий літерний вигляд (перевірити необхідну умову подоби).

2. Перевірити, чи задовольняють коефіцієнти при перемінних і їх похідних вимогам пропорційності.

3. Перевірити початкові і граничні умови порівнюваних рівнянь.

Коефіцієнти в рівняннях процесів при перемінних і їх похідних, а також початкові і граничні умови процесів називаються умовами однозначності процесів.

Таким чином, *достатня умова подоби* порівнюваних процесів має місце, якщо в рівняннях процесів коефіцієнти при перемінних і їх похідних пов'язані однаковими масштабними співвідношеннями, а процеси мають однакові початкові і граничні умови.

Відповідно, подоба процесів вимагає пропорційності їх умов однозначності.

4.3 Формулювання критерію подоби досліджуваних процесів

Для того щоб співвідношення коефіцієнтів у рівняннях процесів було масштабним, необхідно, щоб співвідношення однойменних фізичних перемінних, які використовуються для опису процесів у порівнюваних об'єктах, було також масштабним.

Приклад.

Є два об'єкти, процеси в яких описуються наступними рівняннями:

$$y = f(m_1, m_2, l_1, l_2, t); \quad Y = F(M_1, M_2, L_1, L_2, T),$$

де m_1, m_2, M_1, M_2 – перемінні, які мають розмірність маси;

l_1, l_2, L_1, L_2 – перемінні, які мають розмірність довжини;

t, T – перемінні, які мають розмірність часу.

Відношення між однойменними фізичними перемінними, які входять у ці рівняння, виражаються коефіцієнтами пропорційності:

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2} = K_m, \quad \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2} = K_l, \quad \frac{t}{T} = K_t.$$

Оскільки в рівняннях процесу в об'єкті-оригіналі та у його моделі (тобто в подібному об'єкті) відповідно до умов подоби передбачається наявність однойменних фізичних перемінних і однакових взаємозв'язків між ними, то в цих умовах будуть мати місце безрозмірні величини, складені з розмірних величин, якими характеризуються процеси в об'єкті-оригіналі і його моделі. Ці безрозмірні величини називаються критеріями подоби.

Критерієм подоби досліджуваного процесу називається будь-яка безрозмірна величина або їх комбінація, що складається з фізичних розмірних величин, якими характеризується даний процес.

При проведенні досліджень в обов'язковому порядку треба вимірювати значення тих розмірних величин, які входять до складу критеріїв подоби.

4.4 Теорема подоби

На підставі проведених міркувань і висновків із них сформулюємо три теореми подоби, які є теоретичною базою всієї теорії моделювання й подоби.

Теорема 1.

Необхідною умовою подоби об'єктів є рівність однойменних критеріїв подоби.

Теорема 2.

Рівняння в розмірних фізичних перемінних, які описують процес в об'єкті, можуть бути замінені рівняннями, представленими через критерії подоби (рівняннями в критеріальній формі).

Теорема 3.

Необхідною і достатньою умовою подоби об'єктів є рівність їх однойменних критеріїв подоби та пропорційність однойменних фізичних перемінних, які входять в умови однозначності процесів в об'єктах.

З теорем витікає, що обробляти результати експериментів бажано у вигляді залежностей між критеріями подоби. Отримані критеріальні залежності будуть справедливими як для даного вивченого процесу, так і для цілого класу подібних йому об'єктів.

4.5 Вимоги до моделі. Види подоби

При виборі фізичної моделі об'єкта-оригіналу необхідно дотримуватися наступних вимог:

1. При будь-яких дослідженнях модель і об'єкт-оригінал повинні мати геометричну подобу.

2. При дослідженнях динаміки модель і об'єкт-оригінал повинні мати також кінематичну і динамічну подобу.

Геометрична подоба моделі й оригінального об'єкта має місце в тому випадку, якщо модель і оригінальний об'єкт мають однакову конструкцію й однакові форми, а співвідношення однойменних розмірів є масштабним.

Кінематична подоба моделі і оригінального об'єкта має місце, якщо співвідношення швидкостей в однойменних точках моделі і оригінального об'єкта є масштабним.

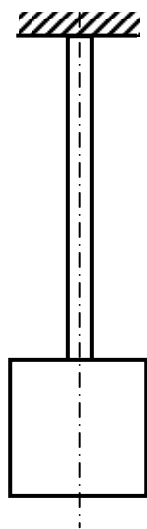
При дотриманні геометричної і кінематичної подоби *динамічна подоба* виконується автоматично.

Якщо має місце геометрична подоба моделі оригінального об'єкта, то однойменні розмірні фізичні величини, якими описуються процеси в моделі і об'єкт-оригіналі і які входять до складу умов однозначності процесів, будуть задовольняти вимогам пропорційності.

4.6 Послідовність використання параметрів моделі для визначення параметрів оригінального об'єкта

Порядок перерахування параметрів моделі в параметри оригінального об'єкта розглянемо на наступному прикладі.

Приклад.



Нехай є круглий стрижень діаметром d , який закріплений одним кінцем і несе вантаж кубічної форми, розміри якого дорівнюють $a \times a \times a$. Потрібно знайти за умовою статичної міцності відповідні коефіцієнти подоби параметрів даного об'єкта (у цьому випадку його розмірів).

Очевидно, що навантаження на стрижень визначається величиною

$$Q = a^3 \cdot \gamma \cdot g,$$

де γ – густина матеріалу вантажу, кг/м^3 .

При цьому припускаємо, що маса стрижня мізерно мала в порівнянні з масою вантажу.

Позначимо розміри подібного вантажу $a_1 \times a_1 \times a_1$. Тоді коефіцієнт подоби навантажень на стрижень, які викликані вагою вантажу, буде

$$K_n = \frac{a_1^3 \cdot \gamma}{a^3 \cdot \gamma} = \frac{a_1^3}{a^3}.$$

Статична міцність стрижня визначається розмірами його перетину. Тому коефіцієнт подоби перетинів стрижнів буде

$$K_c = \frac{F_1}{F} = \frac{\pi \cdot d_1^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{d_1^2}{d^2},$$

де d_1 – діаметр подібного стрижня.

Для дотримання подоби необхідно, щоб коефіцієнти подоби були рівні, тобто $K_1 = K_2$. Визначимо, як потрібно змінити розміри стрижня, якщо розмір вантажу зменшиться в 10 разів.

Нехай $a_1 = a / 10$, тоді $K_1 = 1 / 1000 = 0,001$.

$$K_2 = K_1 = 0,001 = \frac{d_1^2}{d^2}. \text{ Звідси } d_1 = d \sqrt{0,001} = \frac{d}{31,62}.$$

Таким чином, у системі, яка подібна до розглянутої, повинно виконуватися співвідношення: якщо розміри вантажу зменшені в 10 разів, те відповідний розмір стрижня повинен бути зменшений в 32,62 рази.

Параметри моделей великих об'єктів-оригіналів використовують у наступній послідовності:

1. Створюють кілька моделей оригінальних об'єктів, які виконані за однаковою схемою, але в різному масштабі.
2. Проводять докладні випробування моделей на різних режимах і за результатами випробувань одержують залежності параметрів моделі від визначальних факторів.
3. За отриманими залежностями параметрів від визначальних факторів розраховують критерії практичної подоби.
4. За результатами розрахунків будують критеріальні залежності.
5. Використовуючи першу теорему подоби, тобто рівність однойменних критеріїв подоби моделі і оригінального об'єкта, розраховують параметри об'єкта-оригінала.

Тема 5 Критерії подоби та їх визначення

5.1 π -теорема і її наслідки

При вирішенні задачі пошуку критеріїв практичної подоби необхідно знати, яка кількість основних критеріїв подоби властива досліджуваному об'єкту. Відповідь на дане питання дає π -теорема, яка по суті справи є розширенням другої теореми подоби.

π -теорема.

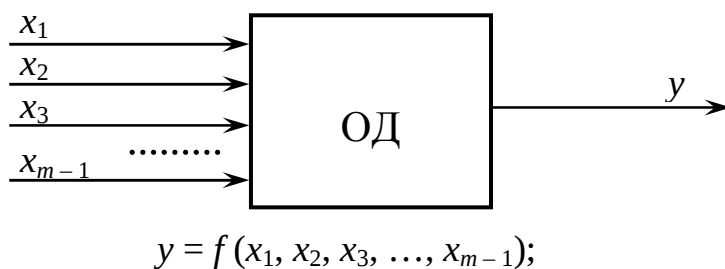
Якщо процес в об'єкті описується m фундаментальними перемінними, для виразу розмірностей яких використовують k основних одиниць, то даний процес можна описати $m - k$ безрозмірними величинами, які складені з фундаментальних фізичних перемінних досліджуваного процесу.

Введемо визначення.

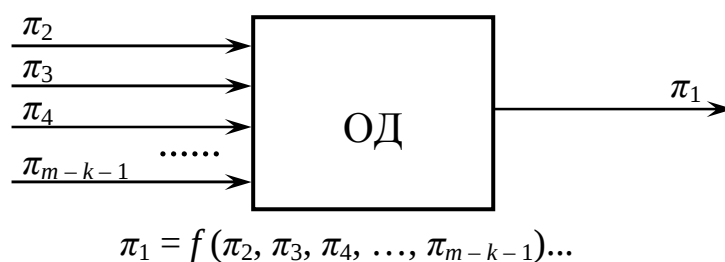
Фундаментальними фізичними перемінними (ФФП) об'єкта називається сукупність параметрів і визначальних факторів об'єкта.

Графічна інтерпретація π -теореми.

До використання π -теореми об'єкт дослідження описується наступним рівнянням:



Після застосування π -теореми можна використовувати такі рівняння:



Практична цінність π -теореми витікає з її наслідків.

Наслідок 1.

Досліджуваний об'єкт має основні критерії практичної подоби, кількість яких завжди дорівнює $m - k$.

Наслідок 2.

Розмірні рівняння, які описують фізичні процеси в об'єкті, можуть бути виражені безрозмірними (критеріальними) рівняннями зв'язку між безрозмірними вхідними і вихідними величинами об'єкта, які справедливі для цілого класу подібних об'єктів.

Наслідок 3.

Застосування π -теореми дає можливість зменшити кількість перемінних, якими описуються процеси в об'єкті.

Рішення задачі в безрозмірній формі дозволяє істотно зменшити обсяг досліджень.

5.2 Послідовність визначення критеріїв подоби с застосуванням теорії розмірностей

Задача визначення критеріїв подоби із застосуванням теорії розмірностей вирішується в три етапи.

I етап. Встановлюється сукупність фундаментальних фізичних перемінних, якими описуються процеси в об'єкті.

II етап. Встановлюється, якими основними фізичними одиницями описується розмірність ФФП.

Для цього на практиці складається таблиця ФФП, у яку вносять їх найменування, позначення, розмірність і формулу розмірності.

III етап. Із застосуванням теорії розмірностей знаходять вирази для критеріїв практичної подоби досліджуваного процесу.

Приклад.

Уточнимо опис раніше розглянутого процесу.

Крім ваги вантажу, стрижень навантажений у загальному випадку також і власною вагою

$$Q_c = \beta \cdot l \cdot g,$$

де β – погонна густина матеріалу стрижня, кг/м.

На підставі вивчення процесу навантаження стрижня від розтягування, ми встановили, що його діаметр є функцією наступних перемінних:

$$d = f(a, l, \gamma, \beta), \quad (1)$$

де a – розмір вантажу кубічної форми, м;

l – довжина стрижня, м;

γ – густина матеріалу вантажу, кг/м³;

β – погонна густина матеріалу стрижня, кг/м.

Таким чином, при розгляді статичної міцності стрижня шуканою вихідною величиною (параметром) є діаметр стрижня d , вхідними величинами (факторами) – у загальному випадку 4 зазначені величини:

Відповідно, кількість ФФП процесу $m = 5$.

Складемо таблицю ФФП (табл. 5.1).

Кількість основних одиниць системи СВ, які використовуються для вираження розмірностей ФФП процесу, $k = 2$.

Таблиця 5.1 – Фундаментальні фізичні перемінні процесу навантаження стрижня силою, що розтягує

№ з/п	Найменування ФФП	Позначення	Розмірність у СВ	Формула розмірності
1	Діаметр стрижня	d	м	L
2	Розмір вантажу	a	м	L
3	Довжина стрижня	l	м	L
4	Густина матеріалу вантажу	γ	кг/м ³	ML ⁻³
5	Погонна густина матеріалу стрижня	β	кг/м	ML ⁻¹

Кількість критеріїв практичної подоби $m - k = 3$.

Позначимо ці критерії як π_1, π_2, π_3 .

На підставі визначення критеріїв подоби і з урахуванням того, що добуток основних критеріїв подоби є також критерієм подоби, можна записати наступне рівняння:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 = \pi, \quad \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 = d^a \cdot a^b \cdot l^c \cdot \gamma^d \cdot \beta^e. \quad (2)$$

Рівняння (2), яке записане через перемінні величини, заміняємо рівнянням, записаним через формули розмірностей цих перемінних:

$$M^0 L^0 = L^a \cdot L^b \cdot L^c \cdot (ML^{-3})^d \cdot (ML^{-1})^e. \quad (3)$$

Застосуємо властивість показового рівняння: сума показників ступенів при одній і тій же перемінній у лівій та правій частинах рівняння (3) однакова. У результаті одержимо наступні рівняння:

$$0 = d + e; \quad (4)$$

$$0 = a + b + c - 3d - e. \quad (5)$$

У рівняннях (4)-(5) 5 невідомих величин, які є показниками ступеня в рівнянні (2).

Оскільки нам необхідно знайти вирази 3-х критеріїв подоби, необхідно з 5 невідомих залишити 3, а інші виразити через залишені невідомі.

При вилученні частини показників ступенів показник при параметрі обов'язково слід зберегти. У цьому випадку це – показник ступеня a .

З рівняння (4) $e = -d$;

з рівняння (5) $0 = a + b + c - 3d + d$;

$$c = -a - b + 2d.$$

Підставимо в рівняння (2) отримані вирази для c і e .

Одержимо

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 = d^a \cdot a^b \cdot l^{-a-b+2d} \cdot \gamma^d \cdot \beta^{-d}. \quad (6)$$

Згрупуємо в правій частині рівняння (6) фізичні перемінні з однойменними показниками ступенів:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 = \left(\frac{d}{l}\right)^a \left(\frac{a}{l}\right)^b \left(\frac{l^2 \gamma}{\beta}\right)^d. \quad (7)$$

У правій частині рівняння (7) отримали 3 комплекси ФФП. Ці комплекси є виразами критеріїв подоби, якщо вони безрозмірні.

Оскільки в показовому рівнянні показники ступеня при однойменних множниках рівні, то одержимо:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Остаточно вирази критеріїв подоби будуть наступними:

$$\pi_1 = \frac{d}{l}; \quad \pi_2 = \frac{a}{l}; \quad \pi_3 = \frac{l^2 \gamma}{\beta}.$$

Критерії подоби можуть також визначатися за рівняннями досліджуваного процесу. Вказана задача на практиці зводиться до перетворення рівнянь досліджуваного процесу, які записані у розмірній формі, у безрозмірну форму. Така процедура в теорії моделювання і подоби називається нормалізацією математичної моделі досліджуваного процесу.

Процедура нормалізації реалізується декількома способами. Один з найбільш раціональних – введення в опис досліджуваного процесу додаткових безрозмірних величин, які отримані на основі розмірних фізичних перемінних.

5.3 Достойнства безрозмірних рівнянь досліджуваного процесу

Застосування в практиці досліджень безрозмірних рівнянь досліджуваного об'єкта або процесу має три основних достоїнства:

1. Використання безрозмірних залежностей дозволяє поширити результати досліджень на весь клас об'єктів, які подібні до досліджуваного.
2. Заміна розмірних залежностей безрозмірними дозволяє знизити показник складності об'єкта досліджень і, відповідно, знизити витрати часу, матеріальних і фінансових засобів на проведення дослідів.
3. Якщо в безрозмірних рівняннях процесу безрозмірні фактори мають однаковий порядок, то за величиною коефіцієнта при безрозмірному факторі можна судити про ступінь впливу даного фактора на параметр.

Тема 6 Похибки досліджень та їх розподіл

6.1 Види похибок. Причини похибок

При проведенні будь-яких експериментальних досліджень одержувані результати завжди містять похибки.

Похибкою називають різницю між виміряним значенням та істинним (дійсним) значенням контрольованої величини.

За формою представлення розрізняють абсолютні і відносні похибки.

Абсолютна похибка величини x – це різниця між значенням x , вимірним у ході експерименту, і істинним значенням цієї величини:

$$\Delta x = x_i - x_a.$$

Відносна похибка величини x – це відношення абсолютної похибки до істинного значення величини:

$$\varepsilon_x = \Delta x / x_a; \quad \varepsilon_x = (\Delta x / x_a) \cdot 100\%.$$

За характером причин, що їх обумовлюють, похибки поділяються на систематичні і випадкові.

Систематичні похибки – це похибки, обумовлені причинами, які діють на результат вимірювання однієї й тієї ж величини в тих самих умовах жорстко закономірно (або убік збільшення, або убік зменшення). При цьому середнє значення вимірюваної величини відрізняється від її істинного значення незалежно від кількості вимірювань.

До причин, які викликають систематичні похибки, належать дії наступних факторів:

1. Систематична похибка засобу вимірювань (неточне настроювання інструмента або приладу).
2. Неправильний вибір місця установки засобу вимірювань.
3. Помилки при вимірюванні величин або розрахунку вихідних даних для проведення вимірювань.
4. Неврахування яких-небудь зовнішніх факторів, які впливають на результат вимірювання жорстко закономірно.
5. Систематична похибка при знятті показань зі шкали вимірювального приладу (суб'єктивна похибка людини, яка знімає показання, або невірний вибір місця його розташування).

Систематичні похибки перед початком експериментів повинні бути виявлені і усунуті, наприклад, за допомогою точної тарировки і настроювання приладів або проведення попереднього (оцінювального) експерименту. Якщо за якимись причинами це зробити неможливо, то такі похибки обробляють так само, як і випадкові.

Випадкові похибки – це похибки, обумовлені причинами, які діють на результат виміру однієї і тієї ж величини в тих самих умовах непередбачено (можуть впливати як убік збільшення, так і убік зменшення).

Причини випадкових похибок:

1. Мала чутливість вимірювальних приладів.
2. Кінцевість значення ціни ділення шкали вимірювальних приладів.
3. Неточність зняття показань зі шкали приладу.
4. Округлення значень при виконанні розрахунків (для непрямих вимірювань).
5. Випадкові впливи на вимірювану величину, контрольований процес, які обумовлені непередбаченими змінами режиму роботи об'єкта досліджень.

6.2 Розподіл випадкових похибок. Інтегральна і диференціальна функції розподілу

Якщо припустити, що засобом вимірювання з випадковою похибкою виконана нескінченна множина вимірів значення величини x , то в результаті цього буде отримана множина значень цієї величини. Така нескінченна множина називається *гіпотетичною генеральною сукупністю* (генеральною сукупністю) значень величини x . Особливість цієї сукупності полягає в тому, що вона містить у собі будь-які можливі значення вимірювань, які можна одержати в реальних умовах проведеного експерименту.

Маючи у своєму розпорядженні таку гіпотетичну генеральну сукупність, дослідник мав би можливість із високим ступенем достовірності встановити істинне значення вимірюваної величини і похибка її вимірювання. Ці показники є характеристиками генеральної сукупності.

На практиці дослідник здійснює обмежену кількість дослідів. Результати цих дослідів є випадковими величинами і являють собою випадкову вибірку з генеральної сукупності.

Мета статистичної обробки експериментальних даних – за результатами обмеженого об'єму дослідів оцінити показники генеральної сукупності. Для досягнення цієї мети необхідно знати закон розподілу значень випадкової величини у виборці.

У теорії ймовірностей розрізняють велику множину законів розподілу випадкових величин: нормальний (симетричний) розподіл, асиметричний розподіл (закон Релея), рівномірний розподіл, розподіл Бернуллі, розподіл Стюдента, розподіл Пуассона, розподіл Вейбулла, розподіл Максвелла, β -розподіл, γ -розподіл та ін.

Закон розподілу описується інтегральною $F(x)$ або диференціальною $f(x)$ функцією розподілу.

Інтегральна функція визначає ймовірність того, що випадкова величина x буде менше заданого значення X на числовій осі:

$$F(x) = p(x < X).$$

Диференціальна функція розподілу – це похідна інтегральної функції по перемінній x :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

6.3 Нормальний закон розподілу і його властивості

Для точного встановлення закону розподілу необхідна виборка мінімум з 40-50 дослідів. Оскільки на практиці, як правило, мають у своєму розпорядженні виборки невеликого об'єму, то при статистичній обробці експериментальних даних виходять із припущення, що розподіл випадкових величин у виборці підкоряється нормальному закону. Отримана при такому допущенні похибка у найгіршому випадку не перевищить 25-30 %.

Нормальний розподіл має ряд корисних для практики вимірювань властивостей:

1. Диференціальна функція розподілу симетрична щодо центру розподілу.
2. Малі похибки вимірювань зустрічаються частіше, ніж великі.
3. Негативні похибки вимірювань зустрічаються однаково часто з позитивними похибками.

6.4 Параметри нормального закону розподілу і їх оцінки

Якби в розпорядженні дослідника була гіпотетична генеральна сукупність значень випадкової величини x , яка підкоряється нормальному закону розподілу, то на її основі можна було б визначити наступні параметри (показники) нормального закону розподілу:

1. Математичне очікування контрольованої випадкової величини x – M_x .
2. Генеральне середньоквадратичне відхилення σ_x .
3. Генеральну дисперсію σ_x^2 .

Математичне очікування – це найбільш ймовірне (істинне) значення величини x .

Генеральне середньоквадратичне відхилення – це абсолютна похибка визначення величини x (похибка одиничного дослідів по визначенню величини x).

Генеральна дисперсія характеризує ступінь розсіювання результатів дослідів щодо центру розподілу.

Оскільки на практиці в розпорядженні дослідника є виборка обмеженого обсягу, то за даними цієї виборки можливо знайти тільки наближені оцінки показників нормального закону розподілу, які відповідають гіпотетичній генеральній сукупності. Такими оцінками є:

1. Вибіркове середнє значення величини x – $\bar{x}$.

Значення $\bar{x}$ розраховується з урахуванням ймовірності результатів одиничних дослідів.

Якщо дослідів рівноймовірні ($p_i = \text{const}$), то

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}; \quad (1)$$

якщо дослідів різної ймовірності ($p_i = \text{var}$), то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i, \quad (2)$$

де p_i – ймовірність результату i -го дослідів;

x_i – результат i -го дослідів;

n – кількість дослідів.

2. Вибіркове середньоквадратичне відхилення S_x .

Якщо ймовірність дослідів однакова ($p_i = \text{const}$), то

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad (3)$$

якщо ймовірність різна ($p_i = \text{var}$), то

$$S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4)$$

3. Вибіркова дисперсія S_x^2 .

Аналогічно середньоквадратичному відхиленню при $p_i = \text{const}$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}; \quad (5)$$

при $p_i = \text{var}$

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \bar{x})^2. \quad (6)$$

6.5 Точність середнього результату всіх дослідів

Отримане по формулах (3) і (4) значення S_x є оцінкою абсолютної похибки окремого дослідів.

Похибка, допущена при визначенні вибіркового середнього за результатами всіх проведених дослідів, (міра точності середнього значення всіх дослідів) визначається за формулою

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (7)$$

З формули (7) витікає, що математичне очікування досліджуваної величини в принципі можна визначити з високою точністю навіть не дуже точними вимірювальними приладами. При цьому доводиться виконувати велику кількість незалежних вимірів. Наприклад, для підвищення точності міри точності середнього результату дослідів в 10 разів кількість дослідів доведеться збільшити в 100 разів. Це можливо здійснити далеко не завжди. У таких випадках раціональніше для підвищення точності результату використовувати більш точні засоби вимірювань (з меншим значенням S_x).

6.6 Похибка непрямих вимірювань

Часто величина, яка цікавить дослідника, безпосередньо не може бути виміряна, а визначається як функція інших величин, які знаходяться дослідним шляхом.

Значення перемінних, які знайдені дослідним шляхом, завжди одержують із похибками. У такому випадку і значення шуканої величини буде отримано з похибкою. Така похибка називається похибкою непрямого експерименту або непрямих вимірювань.

Похибка непрямого експерименту залежить від двох факторів:

- 1) від похибок величин, значення яких виміряні дослідним шляхом;
- 2) від вигляду функціональної залежності між перемінною, яку треба визначити, і вимірюваними величинами.

Методику розрахунку даної похибки розглянемо на наступному прикладі.

Припустимо, що величина, яку треба визначити, z – функція двох перемінних x та y :

$$z = f(x, y). \quad (8)$$

Перемінні x і y вимірюються дослідним шляхом.

Зробивши серію паралельних дослідів по вимірюванню величин x і y , будемо мати дві виборки:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{1n}; \\ y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, \dots, y_{1n} \dots$$

Розрахуємо статистичні параметри обох виборок:

$$\bar{x}; S_x; S_x^2; \quad \bar{y}; S_y; S_y^2.$$

Для i -го дослідів

$$x_i = \bar{x} + \Delta x_i; \quad y_i = \bar{y} + \Delta y_i; \quad z_i = \bar{z} + \Delta z_i. \quad (9)$$

Якщо функція (8) безперервна і диференційована у всьому інтервалі значень x і y , то її можна розкласти в ряд Тейлора.

Лінійна частина ряду буде мати вигляд

$$\bar{z} + \Delta z_i = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \Delta x_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \Delta y_i. \quad (10)$$

Оскільки $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$, то

$$\Delta z_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \Delta x_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \Delta y_i. \quad (11)$$

У рівнянні (11) ліву і праву частини зведемо у квадрат і просумуємо отримані значення по всім n дослідів.

$$\sum_{i=1}^n \Delta z_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2. \quad (12)$$

При симетричному законі розподілу похибок у вибірці, наприклад, нормальному, другий доданок у правій частині рівняння (12) буде завжди дорівнювати нулю. Тому

$$\sum_{i=1}^n \Delta z_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2. \quad (13)$$

З визначення похибок (9) витікає

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}; \quad \Delta y_i = y_i - \bar{y}; \quad \Delta z_i = z_i - \bar{z}. \quad (14)$$

Перепишемо рівняння (13), підставивши в нього значення (14):

$$\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (15)$$

Помножимо обидві частини рівняння (15) на $1/(n - 1)$. Відповідно до формули (5) одержимо:

$$S_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 S_y^2. \quad (16)$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння (16) на $\bar{z}^2$.

$$\frac{S_z^2}{\bar{z}^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{S_x^2}{\bar{z}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{S_y^2}{\bar{z}^2}. \quad (17)$$

Помножимо чисельник і знаменник виразів у правій частині рівняння (17) на однакові величини.

$$\frac{S_z^2}{\bar{z}^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{S_x^2}{\bar{z}^2} \cdot \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{S_y^2}{\bar{z}^2} \cdot \frac{\bar{y}^2}{\bar{y}^2}.$$

Виконавши перетворення цього виразу, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{S_z^2}{\bar{z}^2} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\bar{x}^2}{\bar{z}^2} \cdot \frac{S_x^2}{\bar{x}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^2} \cdot \frac{S_y^2}{\bar{y}^2}; \\ \epsilon_z^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\bar{x}^2}{\bar{z}^2} \cdot \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^2} \cdot \epsilon_y^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, відносна похибка непрямих вимірів визначається за формулою

$$\epsilon_z^2 = A \cdot \epsilon_x^2 + B \cdot \epsilon_y^2, \quad (19)$$

$$\text{де } A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\bar{x}^2}{\bar{z}^2}; \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\bar{y}^2}{\bar{z}^2}.$$

Якщо обумовлена величина – функція більш ніж двох перемінних, які знаходяться дослідним шляхом, то відносна похибка непрямих вимірів визначається за формулами, які аналогічні виразу (19).

Тема 7 Оцінки результатів вимірювань

7.1 Точкові оцінки і їх недоліки

У попередній темі істинне значення вимірюваної величини x (математичне очікування) оцінювалося її вибіркоvim середнім значенням $\bar{x}$, а похибка одиничного дослідження по визначенню величини x оцінювалася вибіркоvim середньоквадратичним відхиленням S_x . Такі оцінки величин за допомогою одного числа називаються *точковими*.

Точкові оцінки експериментальних даних мають наступні недоліки:

1. Виборка, за даними якої знаходять точкові оцінки, випадкова. Отже, випадковими є й самі точкові оцінки $\bar{x}$, S_x , і S_{x^2} .
2. Досліднику невідомі достовірність і точність отриманих точкових оцінок. Немає гарантії, що отримані оцінки є достовірними.

Перерахованих недоліків позбавлені інтервальні оцінки величин, тому вони частіше застосовуються на практиці, коли потрібно врахувати ймовірність і підвищити достовірність результатів експериментів.

7.2 Довірчий інтервал. Довірча ймовірність.

Рівень значущості (ризик). Графічна інтерпретація довірчого інтервалу

В основу інтервальних оцінок покладене поняття «довірчий інтервал».

Довірчим інтервалом називається інтервал значень вимірюваної величини x на числовій осі, у який результат одиничного дослідження потрапляє з ймовірністю p .

При цьому при обробці експериментальних даних значенням ймовірності p задаються до початку встановлення довірчого інтервалу. Цю ймовірність, яка задається попередньо, називають довірчою.

Для інженерної практики найбільше часто використовують довірчу ймовірність $p = 0,95$, рідше, для особливо відповідальних розрахунків $p = 0,99$.

Величину $\alpha = 1 - p$, яка складає разом із довірчою повну ймовірність, називають *рівнем значущості* отриманого результату або ризиком того, що отриманий результат не є достовірним.

Якщо відомий інтегральний закон розподілу ймовірності даних вимірювань, то довірча ймовірність має вигляд

$$p = F(x_{\max}) - F(x_{\min});$$

при відомому диференціальному законі розподілу ймовірності довірча ймовірність визначається за формулою

$$p = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx.$$

де $x_{\max}$ – права (верхня) границя довірчого інтервалу;

$x_{\min}$ – ліва (нижня) границя довірчого інтервалу.

7.3 Клас точності вимірювального приладу

При обробці експериментальних даних дуже часто поняття довірчого інтервалу співвідносять із поняттям «точність вимірювального приладу». Точність вимірювального засобу характеризується його класом точності.

Клас точності вимірювального приладу – це виражена у відсотках гранична відносна похибка вимірювання величини, рівної межі вимірювання даного приладу:

$$K = \frac{\Delta x_{zp}}{x_{zp}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

де Δx_{zp} – абсолютна похибка вимірювання величини, рівної межі вимірювання приладу;

x_{zp} – граничне значення (межа) вимірюваної величини, яке знаходиться на границі шкали приладу.

При відсутності в розпорядженні дослідника виборки достатнього об'єму і неможливості визначення її статистичних показників оцінку середньоквадратичного відхилення знаходять через величину Δx_{zp} :

$$S_x = \frac{\Delta x_{zp}}{2}, \quad (2)$$

а оцінку дисперсії визначають як квадрат правої частини рівності (2):

$$S_x^2 = \left(\frac{\Delta x_{zp}}{2} \right)^2. \quad (3)$$

7.4 Інтервальні оцінки результатів одиничних вимірювань і математичного очікування

При інтервальній оцінці експериментальних даних і обмеженому обсязі виборок варто керуватися не нормальним законом розподілу, а розподілом Стюдента. При малих об'ємах виборок розподіл Стюдента дуже близький до розподілу Гауса.

З використанням розподілу Стюдента знаходять дві інтервальні оцінки:

1. Довірчий інтервал для результату одиничного досліджу.
2. Довірчий інтервал для математичного очікування.

Довірчий інтервал для результату одиничного досліджу має вигляд:

$$\bar{x} - t_{\alpha} S_x \leq x_i \leq \bar{x} + t_{\alpha} S_x, \quad (4)$$

де t_{α} – значення критерію Стюдента.

Значення критерію Стюдента вибирається з таблиць розподілу Стюдента і залежить від двох параметрів:

f – числа ступенів свободи критерію Стюдента, $f = n - 1$;

α – прийнятого рівня значущості (найчастіше $\alpha = 0,05$).

Тут n – об'єм виборки (кількість проведених дослідів, у яких визначалася величина x).

Довірчий інтервал для математичного очікування має вигляд наступної подвійної нерівності:

$$\bar{x} - t_{\alpha} S_{\bar{x}} \leq M_x \leq \bar{x} + t_{\alpha} S_{\bar{x}}, \quad (5)$$

де $S_{\bar{x}}$ – міра точності середнього значення всіх дослідів:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Тема 8 Основи дисперсійного аналізу

8.1 Перевірка однорідності результатів паралельних дослідів

При постановці дослідів з метою одержання більш надійних даних при тих самих умовах проводять паралельні (повторні) досліді по вимірюванню значення однієї й тієї ж величини.

Перш, ніж піддати отриману виборку статистичній обробці, необхідно перевірити, чи є вона однорідною, тобто чи немає серед дослідних даних результатів із грубими погрешностями.

Така перевірка може називатися по-різному:

- перевірка однорідності паралельних дослідів;
- перевірка аномальності результатів дослідів;
- перевірка однорідності виборки та ін.

Сутність перевірки однорідності на практиці зводиться до встановлення довірчого інтервалу для даних виборки. Якщо який-небудь із результатів дослідів виходить за межі довірчого інтервалу, то він є аномальним (результатом із грубою помилкою). Такий результат вилучається з виборки, після чого здійснюється повторне встановлення довірчого інтервалу при скоректованому об'ємі виборки.

Відомо кілька методик вирішення поставленої задачі, які відрізняються областями застосування. Коли випадкові величини свідомо (на основі апріорної інформації) підкоряються нормальному закону розподілу, можна користуватися СТ СЕВ 545-77 «Правила оцінки аномальності результатів спостережень». За наведеною у стандарті методикою порядок перевірки однорідності наступний:

1. Виконують сортування результатів паралельних дослідів по зростанню:

$$x_{1(\min)}, x_2, x_3, \dots, x_{n(\max)},$$

де n – кількість паралельних дослідів.

Ця процедура також називається упорядкуванням виборки.

2. За даними виборки знаходять точкові оцінки статистичних показників виборки: $\bar{x}$, S_x , S_x^2 .

3. Розраховують відносні відхилення крайніх результатів виборки від центру розподілу:

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{S_x}; \quad u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{S_x}.$$

4. Порівнюють отримані відхилення u_1, u_n із граничним значенням даного відхилення h , яке вибирається з таблиць стандарту з урахуванням прийнятого рівня значущості і об'єму виборки, який завжди дорівнює кількості паралельних дослідів.

Якщо відхилення u_1 або u_n перевищують гранично припустиме значення, то даний результат дослідів вважається аномальним (таким, що містить грубу помилку) і вилючається з виборки.

Як видно з описаної методики, при її застосуванні фактично встановлюється довірчий інтервал для результату одиничного дослідів, який має наступний вигляд:

$$\bar{x} - hS_x \leq x_i \leq \bar{x} + hS_x. \quad (1)$$

При наявності нерівностей $x_1 < \bar{x} - hS_x$ або $x_n > \bar{x} + hS_x$ 1-й або n -й результат вилючається з виборки. Після зміни об'єму виборки процедура перевірки її однорідності повторюється.

8.2 Перевірка однорідності дисперсій

Задачу перевірки однорідності дисперсій на практиці вирішують у тих випадках, коли дані декількох виборок необхідно піддавати спільній обробці або коли необхідно зіставити результати декількох виборок.

При наявності декількох виборок і необхідності подальшої спільної обробки даних цих виборок треба до початку спільної обробки перевірити однорідність дисперсій виборок, тому що спільно обробляти можна тільки виборки з однорідними дисперсіями. У протилежному випадку спільна обробка виборок неприпустима.

Перевірка однорідності дисперсій може бути здійснена за різними критеріями: Фішера, Кохрана, Бартлета та ін.

Для перевірки однорідності двох дисперсій найчастіше використовується критерій Фішера. Перевірка за критерієм Фішера виконується в наступній послідовності:

1. Визначається розрахункове значення критерію Фішера

$$F_{розр} = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \quad (2)$$

де $S_{\max}^2$ – більша з порівнюваних дисперсій;

$S_{\min}^2$ – менша з порівнюваних дисперсій.

Число ступенів свободи для більшої дисперсії $f_{\max} = n_{\max} - 1$, для меншої дисперсії $f_{\min} = n_{\min} - 1$.

2. З таблиці значень критерію Фішера при заданому рівні значущості α знаходять табличне значення критерію залежно від числа ступенів свободи чисельника і знаменника з формули (2).

3. Порівнюють розрахункове значення критерію Фішера з табличним.

Якщо $F_{розр} \leq F_{табл}$, то дисперсії виборок однорідні; якщо $F_{розр} < F_{табл}$, то дисперсії виборок неоднорідні.

Якщо виявиться, що дисперсії виборок однорідні, то надалі при спільній обробці даних замість дисперсій виборок можна користуватися середньозваженою дисперсією. Її значення розраховується за формулою:

$$S_{св}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (S_i f_i)}{\sum_{i=1}^{i=N} f_i} = \frac{S_1^2 f_1 + S_2^2 f_2 + \dots + S_N^2 f_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N}, \quad (3)$$

де N – кількість виборок;

f_i – число ступенів свободи i -ї виборки, $f_i = n_i - 1$.

Чим менше середньозважена дисперсія, тим вище рівень відтворюваності об'єктів.

Для перевірки однорідності трьох і більше дисперсій, які мають однакову кількість ступенів свободи, використовується критерій Кохрана. Його розрахункове значення визначається за формулою

$$G_{расч} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{i=N} S_i^2}, \quad (4)$$

де $S_{\max}^2$ – найбільша з порівнюваних дисперсій;

$\sum_{i=1}^{i=N} S_i^2$ – сума порівнюваних дисперсій.

Число ступенів свободи чисельника у формулі (4) $f_{\max} = n - 1$, а знаменника $f = N$ (загальна кількість дисперсій).

Порівняння розрахункового значення критерію Кохрана $G_{розр}$ із табличним $G_{табл}$ виконується аналогічно критерію Фішера.

Якщо кількість ступенів свободи порівнюваних дисперсій неоднакова, для порівняння використовується критерій Бартлета.

8.3 Порівняння вибірових середніх

Досить часто прикладні задачі в техніку пов'язані з удосконаленням або технологічної установки, або технологічного процесу. У результаті проведення робіт з такого вдосконалення одержують нові значення показників роботи установки або процесу.

Для підтвердження позитивного ефекту від виконаної роботи необхідно суворо математично довести, що різниця між показниками роботи до і після вдосконалення є статистично значущою, тобто різниця цих показників перевищує погрішність експерименту.

Математично доказ значущості розходження двох випадкових величин зводиться до встановлення довірчого інтервалу для різниці вибірових середніх:

$$z = \bar{x}_2 - \bar{x}_1. \quad (5)$$

Довірчий інтервал для z як для результату одиничного досліджу:

$$z^- - t_\alpha S_z \leq z \leq z^- + t_\alpha S_z; \quad (6)$$

Припустимо, що різниця $\bar{z} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ дорівнює 0. При такому допущенні довірчий інтервал для величини z має вигляд $z = \pm t_\alpha S_z$.

Розрахуємо S_z , вважаючи, що z – результат непрямих вимірювань:

$$S_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 S_{\bar{x}_2}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{x}_1} \right)^2 S_{\bar{x}_1}^2. \quad (7)$$

З рівняння (5)

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{x}_2} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_1} = -1.$$

Тоді

$$S_z^2 = S_{\bar{x}_2}^2 + S_{\bar{x}_1}^2. \quad (8)$$

За визначенням міри точності середнього результату вимірювань

$$S_{\bar{x}_2}^2 = \frac{S_{x_2}^2}{n_2}, \quad S_{\bar{x}_1}^2 = \frac{S_{x_1}^2}{n_1}.$$

Відповідно

$$S_z^2 = \frac{S_{x_2}^2}{n_2} + \frac{S_{x_1}^2}{n_1}. \quad (9)$$

Якщо дисперсії вибірок однорідні (а тільки в цьому випадку можна порівнювати вибіркові середні), то їх можна замінити середньозваженою (формула (3)):

$$S_{cv} = \frac{S_{x_2}^2 (n_2 - 1) + S_{x_1}^2 (n_1 - 1)}{n_2 + n_1 - 1}.$$

У випадку такої заміни

$$S_z^2 = S_{cv} \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right). \quad (10)$$

Підставимо отримане значення S_z (10) у вираз для довірчого інтервалу (6) і одержимо

$$z = \pm t_\alpha S_{cv} \sqrt{\frac{n_2 + n_1}{n_2 n_1}}. \quad (11)$$

де t_α – критерій Стюдента, $t_\alpha = f(\alpha, f)$; при цьому $f = n_2 + n_1 - 2$.

Порівнюємо значення z , розраховане за формулою (11) і різницю $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$. Якщо різниця $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > z$, то з довірчою ймовірністю можна стверджувати, що розходження $\bar{x}_2$ й $\bar{x}_1$ статистично значуще. Якщо різниця

$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \leq z$, то розходження $\bar{x}_2$ й $\bar{x}_1$ статистично незначуще і результат проведеної роботи негативний.

8.4 Вплив фактора на параметр

Припустимо, що необхідно встановити, чи впливає зміна в заданому інтервалі даного фактора x на параметр y . Установимо m рівнів фактора і на кожному рівні поставимо по n паралельних дослідів. Результати досліджень зведемо в таблицю наступного вигляду.

Рівні фактора x	Номер дослідів						$\bar{y}_i$	S_i^2
	1	2	...	j	...	n		
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1n}	$\bar{y}_1$	S_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2n}	$\bar{y}_2$	S_2^2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{in}	$\bar{y}_i$	S_i^2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mj}	...	y_{mn}	$\bar{y}_m$	S_m^2

За результатами всіх mn дослідів визначимо середнє значення y

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{mn}$$

і суму квадратів відхилень

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

При рівні фактора в i -му досліді (відповідний рядок таблиці) визначимо середнє значення y :

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{n}.$$

Сума квадратів відхилень порядкових середніх $\bar{y}_i$ щодо середнього всієї виборки

$$Q_\phi = \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (12)$$

Ця величина оцінює вплив фактора на параметр.

Дисперсія впливу фактора

$$S_\phi^2 = \frac{Q_\phi}{m-1}. \quad (13)$$

Її кількість ступенів свободи $f_\phi = m - 1$.

Визначимо порядкові суми квадратів відхилень відповідної групи дослідів щодо своїх середніх:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (14)$$

Дисперсії порядкових виборок

$$S_i^2 = \frac{Q_i}{n-1}. \quad (15)$$

Вони мають кількість ступенів свободи $f_i = n - 1$.

Просумувавши Q_i , одержимо величину, яка характеризує внесок погрешностей дослідів у загальну суму квадратів відхилень:

$$Q_{\text{заг}} = \sum_{i=1}^m Q_i. \quad (16)$$

Якщо порядкові дисперсії S_i^2 однорідні (що перевіряється за критерієм Кохрана), то дисперсія погрешностей всіх дослідів буде

$$S_{\text{заг}}^2 = \frac{Q_{\text{заг}}}{m(n-1)}. \quad (17)$$

Ця дисперсія називається середньозваженою дисперсією дослідів.

Вона використовується для оцінки значущості впливу фактора на параметр за критерієм Фішера:

$$F = \frac{S_{\phi}^2}{S_{\text{заг}}^2}. \quad (18)$$

Табличне значення критерію визначається за кількістю ступенів свободи обох дисперсій ($f_{\phi} = m - 1$, $f_{\text{заг}} = m(n - 1)$).

Однорідність дисперсій свідчить, що в заданому інтервалі зміни фактор не впливає значуще на параметр.

Тема 9 Основи кореляційного аналізу

9.1 Діаграми розсіювання

Припустимо, що є сукупність двох перемінних x і y , яка складається з n пар. Кожну пару величин можна представити точкою в системі координат xOy . Такі графіки в математичній статистиці називаються діаграмами розсіювання. По них можна судити про тісноту зв'язку між величинами.

Найпростішою числовою характеристикою такого зв'язку є коваріація або момент зв'язку (математичне очікування) добутку відхилень x і y від їх центрів:

$$C_{xy} = \text{cov}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}. \quad (1)$$

Якщо однакові за абсолютним значенням відхилення y_i від середнього є парними (симетричний графік), то коваріація дорівнює нулю.

Коваріація має таку ж розмірність, як і перемінні x і y . Для переходу до безрозмірних показників відхилення перемінних x і y нормують:

$$x^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}, \quad y^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}.$$

9.2 Коефіцієнт кореляції

Коваріація нормованих відхилень двох перемінних x і y називається *коефіцієнтом парної кореляції*

$$\rho_{xy} = \text{cov}(x^*, y^*) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}. \quad (2)$$

Оскільки середньоквадратичні відхилення величин x і y невідомі, то на практиці визначають не коефіцієнт кореляції, а його наближену оцінку:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{nS_xS_y}. \quad (3)$$

Надалі для простоти оцінку коефіцієнта кореляції також будемо називати коефіцієнтом кореляції.

Коефіцієнт кореляції є оцінкою ступеня зв'язку між вихідною і вхідною величинами. Якщо оцінюється вплив на вихідну величину однієї вхідної, то визначається коефіцієнт парної кореляції. При оцінці одночасного впливу декількох вхідних величин на вихідну знаходиться *коефіцієнт множинної кореляції*.

Між коефіцієнтом кореляції і коваріацією є наступне співвідношення

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{S_xS_y}. \quad (4)$$

9.3 Кореляційне відношення

Ще однією важливою характеристикою тісноти зв'язку між вихідною й вхідною величинами є кореляційне відношення

$$\eta_{xy} = \frac{S_{\bar{y}_x}}{S_y}, \quad (5)$$

де $S_{\bar{y}_x}$ – середньоквадратичне відхилення величин умовних середніх арифметичних значень $\bar{y}_{x_i}$ від вибіркового середнього $\bar{y}$.

Умовні середні арифметичні значення розраховуються за формулою

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{y_i}} (n_{x_i y_i} \cdot y_i)}{n_{x_i}}, \quad (6)$$

де $n_{x_i y_i}$ – частота появ пари значень x_i, y_i ;

n_{x_i} – частота появи значення x_i ;

n_{y_i} – частота появи значення y_i ;

За значеннями коефіцієнта кореляції і кореляційного відношення можна судити про характер зв'язку між величинами x і y (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – Визначення характеру зв'язку між величинами за значеннями коефіцієнта кореляції і кореляційного відношення

№ з/п	Значення r_{xy}	Значення η_{xy}	Характер зв'язку
1	0	0	Відсутній
2	± 1	–	Лінійний функціональний
3	0	± 1	Криволінійний функціональний
4	0	$0 < \eta_{xy} < 1$	Криволінійний кореляційний
5	$ r_{xy} = \eta_{xy} $		Точний лінійний кореляційний
6	$ r_{xy} > 0$	$0 < \eta_{xy} < 1$	Лінійний кореляційний

Тема 10. Регресійний аналіз і виведення рівнянь регресії

10.1. Мета регресійного аналізу.

Активний і пасивний експеримент

Виконання спільних вимірювань двох випадкових величин x і y реалізується двома способами.

При першому способі значення величини x або задані на основі апріорної інформації, або вибираються довільним чином з множини можливих значень. Для кожного значення x_i вимірюється відповідне значення величини y – y_i . Якщо x – вхідна величина ОД, то фактор x є некерованим. Експеримент із некерованими факторами називається *пасивним*. Результати такого експерименту представляються у вигляді діаграм розсіювання і обробляються в першу чергу методами кореляційного аналізу.

При другому способі значення величини x вибираються дослідником заздалегідь і при проведенні дослідів послідовно фіксуються (відтворюються) на одному із заданих рівнів, після чого вимірюється відповідне значення величини y . У цьому випадку фактор x є керованим. Експеримент із керованими факторами називається *активним*. Результати активного експерименту обробляються найчастіше методами регресійного аналізу.

Приклад.

Дослідження твердості зразків матеріалу, які беруться випадковим чином із запасів, що зберігаються на складі, – це пасивний експеримент. Дослідження зміни сил різання при варіюванні на металообробному верстаті режимних параметрів – це активний експеримент.

Метою регресійного аналізу є встановлення залежності між вихідною й вхідною величинами ОД.

При виконанні регресійного аналізу, на відміну від кореляційного, виходять із положення, що тільки вихідні величини є випадковими, а вхідні повинні бути не випадковими і некорельованими між собою.

10.2 Регресійна залежність. Послідовність одержання регресійної залежності

Отримана залежність між вихідною і вхідною величинами може бути представлена в наступних формах:

- табличною;
- графічною;
- аналітичною.

Вибір способу представлення залежить від функціонального виду, складності залежності, а також від її подальшого використання. Таблична форма забезпечує швидкість визначення значень вихідної величини, графічна - наочність подання залежності. Однак, якщо вхідних величин більше двох, ці форми втрачають свої достоїнства.

Найбільш універсальною є аналітична форма. Вона дозволяє застосувати методи математичного аналізу, з неї просто одержати інші форми.

Аналітична форма представлення регресійної залежності має дві відмінні риси:

1. Якщо залежність отримана на основі суворого фізичного закону, то вона є точною і може використовуватися в будь-якому інтервалі зміни вхідних величин.

2. Якщо залежність отримана на основі експериментальних даних, то вона є емпіричною, наближеною і нею можна користуватися тільки в суворо визначеному діапазоні зміни вхідних величин. У цьому випадку інтервал варіювання вхідних величин можна розширити без проведення додаткових експериментальних досліджень. Для цього варто представити отриману наближену аналітичну залежність у критеріальній (безрозмірній) формі.

Ця наближена залежність називається рівнянням регресії.

Рівняння регресії – це наближена ймовірнісна (статистична) залежність усереднених значень вихідних величин ОД від вхідних.

Задача одержання регресійної залежності вирішується в чотири етапи:

1. Вибір виду зразкової регресійної залежності за сукупністю експериментальних даних.

Вид залежності може бути приблизно відомий або з фізичних закономірностей досліджуваного процесу, або на основі попередніх дослідів. Він може бути також заданий заздалегідь як бажаний або необхідний.

2. Визначення коефіцієнтів рівняння регресії (наближених оцінок параметрів прийнятої залежності).

3. Оцінка похибки отриманої залежності.

4. Перевірка відповідності встановленої регресійної залежності експериментальним даним (перевірка адекватності рівняння регресії фізиці процесу в ОД).

10.3 Вибір виду регресійної залежності

Вибір виду регресійної залежності не є формалізованою процедурою.

Якщо вхідних величин не більше двох, то спочатку будують діаграму розсіювання. При цьому, якщо експериментальних точок багато, здійснюється їх групування. За виглядом діаграми розсіювання будується наближена пробна крива, яка є графічною інтерпретацією регресійної залежності.

За виглядом пробної кривої вибирається типова крива, рівняння якої відомо з математики і яка буде відповідати шуканій залежності.

На даному етапі необхідно пам'ятати, що можливих регресійних залежностей, отриманих за результатами експерименту, безліч. Всі вони є наближеними. Із цієї безлічі залежностей потрібно прагнути одержати більш просту або більш зручну для конкретних цілей.

Для одержання більш наочної картини і полегшення вибору виду кривої, яка буде описана регресійною залежністю, графік варто будувати в прямокутній системі координат спочатку з рівномірними шкалами на осях.

Масштаби на осях координат визначаються за наступними виразами:

$$m_x = L_x / (x_k - x_n); \quad m_y = L_y / (y_k - y_n),$$

де x_k, x_n і y_k, y_n – відповідно кінцеві і початкові значення аргументу і функції в умовах експерименту;

L_x, L_y – довжини відповідних шкал.

При виборі масштабів m_x і m_y варто мати на увазі, що їх зменшення веде до зниження точності обробки експериментальних даних. Масштаб варто приймати таким, щоб похибка вимірювання на графіку зображувалася відрізком не менше 1 мм. У той же час надмірне збільшення масштабів веде до підкреслення випадкових відхилень експериментальних точок, що утрудняє вибір вигляду кривої і правильної для даного випадку аналітичної залежності.

Якщо графік не має екстремумів або інших особливостей, то для забезпечення прийнятної точності і зниження об'єму обчислень при одержанні шуканої залежності варто обмежитися 4-6 (максимум 10-12) експериментальними точками. При наявності у вихідних даних більшої кількості точок їх варто групувати.

Проведена пробна крива повинна бути плавною і проходити якнайближче до експериментальних точок, але в той же час її проходження за кожною точкою може спотворити шукану залежність.

Якщо до обробки експериментальних даних існувала теорія досліджуваного процесу (навіть зразкова або спрощена), то в цьому випадку функціональна залежність, обумовлена даною теорією, може дати уявлення про можливий вид шуканої регресійної залежності.

10.4 Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії

Найпоширенішим методом визначення коефіцієнтів рівняння регресії на практиці є класичний метод найменших квадратів. Сутність методу найменших квадратів полягає в тому, що коефіцієнти майбутнього рівняння регресії шукаються такими, щоб сума квадратів відхилень експериментальних значень вихідної величини від значень, розрахованих за рівнянням регресії, була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_{pi})^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

де y_i – значення параметра y в i -му експерименті при $x = x_i$;

y_{pi} – значення функції $y = f(x)$, розраховане за емпіричною формулою (рівнянням регресії) при $x = x_i$.

Нехай залежність $y_p = f(x)$ описується найбільш простим рівнянням – лінійним – такого вигляду

$$y_p = b_0 + b_1 x, \quad (2)$$

де y_p – шукана функція (вихідна величина);

x – аргумент функції (вхідна величина);

b_0, b_1 – постійні коефіцієнти (коефіцієнти рівняння регресії).

Підставимо рівняння (2) у формулу найменших квадратів (1):

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 = \min. \quad (3)$$

Сума квадратів відхилень для всієї сукупності експериментальних даних (ліва частина рівності (3)) є функцією двох параметрів b_0 і b_1 :

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 = f(b_0, b_1).$$

Ця функція буде мати мінімум у тому випадку, якщо її часткові похідні по b_0 і b_1 будуть дорівнювати 0, тобто коли дотримуються умови:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)] = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)] x_i = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Із системи рівнянь (4) витікає, що коефіцієнти лінійного рівняння регресії визначаються із виразів:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - n b_0 - b_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i) - b_0 \sum_{i=1}^n x_i - b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

При обробці експериментальних даних широко використовуються також і нелінійні формули із двома параметрами, які досить просто можуть бути перетворені в лінійний вид (наприклад, логарифмуванням).

10.5 Перевірка адекватності рівняння регресії експериментальним даним

Дана перевірка виконується в три етапи.

1. На першому етапі визначається залишкова дисперсія (дисперсія адекватності):

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{pi})^2}{n - l}, \quad (6)$$

де y_i – експериментальне значення вихідної величини для відповідного значення вхідної x_i ;

y_{pi} – значення вихідної величини, яке розраховане за рівнянням регресії для відповідного значення вхідної x_i ;

$f = n - l$ – кількість ступенів свободи дисперсії адекватності;

n – кількість дослідів;

l – кількість коефіцієнтів рівняння регресії.

Якщо на кожному рівні фактора проводилося кілька дослідів, формула (6) приймає вигляд:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_{pi})^2}{n - l}, \quad (7)$$

де $\bar{y}_i$ – середнє експериментальне значення вихідної величини на i -му рівні вхідної x_i ;

n – кількість рівнів фактора (кількість виборок).

Дисперсія адекватності дозволяє судити про ступінь відповідності рівняння регресії експериментальному матеріалу. Чим менше дисперсія, тим більше така відповідність.

2. На другому етапі визначається дисперсія відтворюваності.

При цьому на практиці можливі два випадки:

1) У процесі експериментів проводилися паралельні досліді.

Розраховуються рівневі дисперсії

$$S_i^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (y_{ki} - \bar{y}_i)^2}{m - 1},$$

де m – кількість паралельних дослідів на i -му рівні фактора.

Після перевірки їх однорідності визначається середньозважена дисперсія

$$S_{cv}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i^2 f_i)}{f_{cv}}.$$

Кількість ступенів свободи середньозваженої дисперсії

$$f_{cv} = \sum_{i=1}^n f_i = n(m-1).$$

Розрахована таким шляхом середньозважена дисперсія приймається за дисперсію відтворюваності:

$$S_e^2 = S_{cv}^2, \quad (8)$$

кількість ступенів свободи якої $f_e = f_{cv}$.

2) У процесі експериментів паралельні досліди не проводилися.

Дисперсія відтворюваності розраховується за формулою

$$S_e^2 = \left(\frac{\Delta y_{ep}}{2} \right)^2, \quad (9)$$

де Δy_{ep} – гранична абсолютна похибка визначення вихідної величини.

Ця похибка визначається через клас точності приладу, яким вимірялася вихідна величина:

$$K = \frac{\Delta y_{ep}}{y_{ep}} \cdot 100\%.$$

Звідси $\Delta y_{ep} = 0,01(K \cdot y_{ep})$.

Кількість ступенів свободи дисперсії відтворюваності $f_e = \infty$.

3. На третьому етапі виконується перевірка однорідності дисперсій адекватності й відтворюваності.

Така перевірка завжди здійснюється за критерієм Фішера. Розрахункове значення критерію визначається виразом вигляду

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_e^2}. \quad (10)$$

Табличне значення знаходиться з урахуванням прийнятого рівня значущості (звичайно $\alpha = 0,05$).

Якщо розрахункове значення критерію Фішера менше від табличного, то отримане рівняння регресії адекватне експериментальним даним.

Тема 11 Планування експериментів у техніці

11.1 Однофакторний і багатофакторний експеримент

Планування експерименту є сукупністю методик і процедур організації та проведення експерименту, застосування яких дослідником на практиці дозволяє йому одержати залежності, що його цікавлять, з мінімальними часовими, матеріальними і фінансовими витратами.

Планування експерименту базується на використанні поняття «багатофакторний експеримент». Сутність останнього полягає в тому, що при кожному новому досліді на об'єкті дослідження комбінація значень його визначальних факторів змінюється повністю.

Такий підхід до організації і проведення експериментів дозволяє одержати залежності між вихідними і вхідними величинами ОД з мінімальним обсягом робіт по здійсненню дослідів і з мінімальними помилками.

На практиці частіше як і раніше проводять однофакторний експеримент. Його сутність полягає в наступному:

1. Весь об'єм необхідних дослідів розбивають на серії.
2. При проведенні окремої серії дослідів змінюють значення тільки одного фактора, а значення інших залишаються фіксованими.
3. При проведенні наступної серії дослідів змінюють значення тільки одного з факторів, фіксованих у попередніх серіях. Потім досліди повторюють, змінюючи значення першого фактора в тих же межах, що й раніше.

Така організація дослідів характеризується їх значним обсягом і більш низькою ймовірністю того, що отримані рівняння будуть достовірними.

Якщо кількість визначальних факторів більше 4-х, то організація і проведення однофакторного експерименту є технічно і економічно недоцільними. При дослідженні таких ОД, у яких 4 і більше факторів, науково і технічно обґрунтованим є проведення тільки багатфакторного експерименту.

Достоїнства багатфакторного експерименту:

1. Істотно знижується об'єм дослідів у порівнянні з однофакторним експериментом.
2. Підвищується точність визначення коефіцієнтів рівняння регресії, отриманого за даними багатфакторного експерименту.
3. З'являється можливість спростити шлях досягнення і зменшити витрати на досягнення мети дослідження.

Зокрема, різко зменшується кількість необхідних дослідів (табл. 11.1).

Кількість дослідів при однофакторному експерименті відповідає складності ОД. При однаковій кількості рівнів всіх факторів

$$C = n^k,$$

де n – кількість рівнів кожного фактора;

k – кількість факторів.

Таблиця 11.1 – Кількість необхідних дослідів при різних формах проведення експерименту

Кількість факторів	Необхідна кількість дослідів		
	при однофакторному експерименті $n = 5$	при лінійній моделі багатфакторного експерименту $n = 2$	при квадратичній моделі багатфакторного експерименту $n = 3$
2	25	4	9
3	125	8	27
4	625	16	81
5	3125	32	243

Необхідна кількість дослідів для повного факторного експерименту за лінійним планом

$$L = C = n^k, \quad n = 2;$$

за квадратичним планом

$$K_0 = C = n^k, \quad n = 3.$$

4. Застосування багатфакторного експерименту дозволяє підвищити науковий і технічний рівень дослідження.

11.2 Класифікація планів експериментів

Розглянемо класифікацію планів експериментів за основними ознаками.

1. Мета експерименту.

Розрізняють плани апроксимації і оптимізації.

Мета планів апроксимації – встановити залежність між вихідними і вхідними величинами ОД: точну (аналітичну) або наближену (рівняння регресії).

Мета планів оптимізації – знайти такі значення визначальних факторів ОД, при яких умови функціонування ОД будуть найкращими.

2. Порядок експерименту.

Виділяють плани першого й більш високих порядків експерименту.

Мета реалізації плану 1-го порядку – одержати за результатами дослідів залежність між вхідними і вихідними величинами ОД, представлену лінійним рівнянням вигляду

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i, \quad (1)$$

де y – параметр;

x_i – фактор;

b_0 – вільний член рівняння;

b_i – коефіцієнт при i -му факторі.

На практиці із планів більш високих порядків найпоширеніший і найбільш вивчений план 2-го порядку.

При реалізації плану 2-го порядку залежність між вхідними й вихідними величинами ОД має вигляд

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{ij=1}^c b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_i^2, \quad (2)$$

де c – кількість сполучень із k факторів по два;

j – порядковий номер фактора, відмінний від i .

3. Повнота плану експерименту.

За цією ознакою розділяють плани повних і дробових факторних експериментів.

Повний факторний експеримент (ПФЕ) – це такий експеримент, при реалізації якого передбачається перебір всіх можливих сполучень факторів на всіх рівнях, які передбачені планом експерименту.

Якщо повний факторний експеримент організується за планом 1-го порядку, то всі визначальні фактори об'єкта обов'язково фіксуються при виконанні дослідів на двох рівнях: нижньому і верхньому.

При цьому кількість обов'язкових дослідів для повного факторного експерименту буде

$$N_d = 2^k. \quad (3)$$

Дробовий факторний експеримент (ДФЕ) – це такий експеримент, при якому реалізується тільки частина дослідів від повного факторного експерименту. Розрізняють дробові факторні експерименти типу 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ПФЕ.

ДФЕ на практиці раціональніше використовувати при кількості визначальних факторів більше 4.

4. Місце експерименту в порядку проведення досліджень.

За цією ознакою розрізняють плани відсіювальних і основних експериментів.

Мета відсіювального експерименту – виявлення значущих факторів і вилучення несуттєвих.

Мета основного експерименту – встановлення залежностей, які описують функціонування ОД.

5. Характер проведення експерименту.

За характером реалізації розрізняють плани фізичних і математичних експериментів.

Математичний експеримент реалізується в основному на ЕОМ. При використанні складних систем рівнянь застосування планування для математичного експерименту також може бути дуже ефективним.

11.3 Рівні, інтервали варіювання і область визначення факторів

Складанню будь-якого плану експерименту передують рішення задачі встановлення параметрів і визначальних факторів об'єкта.

Як правило, один або кілька параметрів ОД встановлюються виходячи з наступних джерел:

1. Априорна інформація про об'єкт.
2. Конкретні дані із практики експлуатації об'єкта.
3. Поставлене завдання дослідження.

З вибором факторів справа є значно складнішою. У реальних умовах фактори по-різному впливають на параметр: одні є істотними, інші – несуттєвими. Для розділення факторів на значущі і незначущі використовуються методи дисперсійного аналізу.

Після встановлення параметрів і визначальних факторів об'єкта виділяють наступні характеристики плану експеримента:

- область визначення факторів;
- рівні факторів;
- інтервал варіювання факторів.

Область визначення – це інтервал значень фактора від мінімального до максимального значення, який визначається потребами практики.

При реалізації плану 1-го порядку мінімальне значення фактора зветься "нижній рівень фактора", а максимальне – "верхній рівень фактора".

Рівнем фактора називається його значення, яке фіксується при досліді. При розрахунках і організації плану експерименту використовують ще й нульовий рівень фактора (середній рівень фактора).

Інтервалом варіювання фактора називається його значення в натуральній величині, додаток якого до нульового рівня дає верхній рівень фактора, а вирахування – нижній рівень фактора.

Позначимо

$x_{i\bar{e}}$ – верхній рівень фактора x_i ;

$x_{i\bar{n}}$ – нижній рівень фактора x_i ;

x_{i0} – нульовий (середній) рівень фактора x_i .

Інтервал варіювання фактора x_i

$$\Delta x_i = x_{i\bar{e}} - x_{i0} = x_{i\bar{e}} - x_{i\bar{n}}. \quad (4)$$

Для реалізації плану експерименту складається матриця плану. У матриці використовують тільки кодовані значення факторів

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}.$$

При реалізації плану 1-го порядку в матриці фігурують наступні значення факторів:

кодоване значення нижнього рівня

$$X_{i\bar{n}} = \frac{x_{i\bar{n}} - x_{i0}}{\Delta x_i} = -1;$$

кодоване значення верхнього рівня

$$X_{i\bar{e}} = \frac{x_{i\bar{e}} - x_{i0}}{\Delta x_i} = +1.$$

Для розрахунку вільного члена рівняння в матрицю вводиться фіктивний фактор X_0 . Значення цього фактора завжди $X_0 = +1$.

Область визначення факторів ОД при проведенні експерименту можна представити графічно у двох видах:

- до кодування факторів;
- після кодування факторів.

11.4 Вибір величини інтервалу варіювання факторів

1. При реалізації плану апроксимації.

У цьому випадку величину інтервалу варіювання вибирають таким чином, щоб покривалася вся область визначення фактора.

Якщо при цьому отримане за експериментальними даними лінійне рівняння регресії виявиться неадекватним, то необхідно почати наступні дії:

а) варто зменшити область визначення та інтервал варіювання фактора, а потім перевірити адекватність нового рівняння експериментальним даним.

При меншому інтервалі варіювання фактора (більш вузькій області його визначення) лінійне рівняння регресії може виявитися адекватним експериментальним даним.

б) Якщо при більш вузькій області визначення лінійне рівняння неадекватне, то варто перейти до реалізації нелінійного плану і одержанню нелінійного рівняння регресії.

2. При реалізації плану оптимізації.

Центр плану експерименту варто вибрати в точці передбачуваного оптимуму.

Мінімально припустиме значення інтервалу варіювання

$$\Delta x = 2 S_x = \Delta x_{\max},$$

де $\Delta x_{\max}$ – гранична абсолютна похибка приладу, яким вимірюється значення фактора x .

11.5 Матриця планування експерименту і її властивості

Якщо кількість факторів – 2, то перебір всіх можливих сполучень на двох рівнях не становить складності. При більшій кількості факторів задача планування експерименту значно ускладнюється. Існує кілька прийомів побудови матриці планування експерименту. На практиці для побудови лінійного плану найбільш часто використовується прийом чергування знаків.

Сутність прийому полягає в тому, що комбінація значень першого фактора повторюється в наступному факторі на нижньому і верхньому рівнях. Це означає, що, якщо в матриці планування фактор має комбінацію $(-1; +1)$, то наступний фактор X_2 повинен повторитися так: $(-1; -1; +1; +1)$ і т.д.

Виходячи із цього прийому, будується матриця плану експерименту. У ній фіктивний фактор X_0 має значення завжди $+1$, тобто його знак не міняється. Значення другого фактора X_1 змінюються через одне, третього X_2 – через два, четвертого X_3 – через чотири. Побудовані в такий спосіб матриці лінійних планів для двох, трьох і чотирьох факторів (ПФЕ 2^2 , 2^3 , 2^4) наведені в табл. 11.2.

Властивості матриць планів виду 2^k

1. Симетричність матриці.

Ця властивість означає, що будь-який визначальний фактор об'єкта в матриці на верхньому і нижньому рівнях зустрічається однаково кількість разів.

Математичний запис цієї властивості має вигляд

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5)$$

де i – номер фактора (номер стовпця в матриці ПФЕ);

j – номер досліду (номер рядка в матриці ПФЕ).

Таблиця 11.2 – Матриці планування повного факторного експерименту
 $2^2, 2^3, 2^4$

№ досліду	Значення факторів				
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	– 1
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1
9	+ 1	– 1	– 1	– 1	+ 1
10	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
11	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1
12	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1
13	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1
14	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 1
15	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1
16	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1

2. Нормування матриці.

Ця властивість виражається в тому, що всі фактори об'єкта в матриці представлені тільки в кодованому вигляді (– 1; + 1).

Математично ця властивість виражається залежністю

$$\sum_{j=1}^n X_{ij}^2 = n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (6)$$

3. Ортогональність матриці.

Ця властивість полягає в тому, що сума порядкових добутків двох будь-яких стовпців значень факторів у матриці дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} X_{lj} = 0, \quad l \neq i. \quad (7)$$

4. Рототабельність матриці.

Сутність цієї властивості полягає в тому, що факторний простір матриці сформований таким чином, що точність прогнозування значення параметра однакова у всіх напрямках.

Керуючись сформованою матрицею, проводять обов'язкові дослід. При цьому комбінація значень визначальних факторів для кожного дослідів вибирається з матриці.

З метою виключення систематичних похибок всі дослідів звичайно проводяться у випадковій послідовності. Такий прийом проведення дослідів називається *рандомізацією*.

11.6 Визначення коефіцієнтів рівняння регресії за даними повного факторного експерименту

Якщо експеримент організований і проведений відповідно до лінійного плану, то досліднику в цьому випадку відомий вигляд майбутнього рівняння регресії (наближеної ймовірнісної залежності усереднених значень вихідної величини від вхідних). Це рівняння має вигляд:

$$y_p = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i, \quad (8)$$

де k – порядковий номер фактора.

Якщо вигляд майбутнього рівняння регресії відомий, то значення його коефіцієнтів знаходять із застосуванням методу найменших квадратів. Якщо рівняння регресії знаходиться для 3-х факторів, то рівняння (8) набуває вигляд:

$$y_p = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3, \quad (9)$$

і, відповідно, необхідно визначити мінімум функції

$$F = \sum_{j=1}^n (y_j - y_{pj})^2 = \sum_{j=1}^n [y_j - (b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j})]^2. \quad (10)$$

Ця функція є функцією чотирьох параметрів b_0, b_1, b_2 і b_3 :

$$F = f(b_0, b_1, b_2, b_3).$$

Мінімум функції F буде за умови:

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_3} = 0.$$

Відповідно, одержимо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial b_0} = -2 \sum_{j=1}^n [y_j - (b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j})] X_{0j} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b_1} = -2 \sum_{j=1}^n [y_j - (b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j})] X_{1j} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b_2} = -2 \sum_{j=1}^n [y_j - (b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j})] X_{2j} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b_3} = -2 \sum_{j=1}^n [y_j - (b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j})] X_{3j} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

З огляду на властивості нормування і ортогональності матриці планування (формули (6)-(7)), після розкриття дужок і виконання перетворень системи (11) одержимо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n y_j X_{0j} - nb_0 = 0; \\ \sum_{j=1}^n y_j X_{1j} - nb_1 = 0; \\ \sum_{j=1}^n y_j X_{2j} - nb_2 = 0; \\ \sum_{j=1}^n y_j X_{3j} - nb_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Звідси

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{0j}}{n}; \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{1j}}{n}; \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{2j}}{n}; \quad b_3 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{3j}}{n}.$$

Таким чином, загальна формула для розрахунку i -го коефіцієнта рівняння регресії має вигляд:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{ij}}{n}. \quad (13)$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів у залежності (9) або (8), одержимо лінійне рівняння регресії, виведене за результатами ПФЕ. Це рівняння має наступні властивості:

1. Оскільки фактори в отриманому рівнянні безрозмірні, а y_p – розмірна величина, то коефіцієнти цього рівняння також є розмірними і мають ту ж розмірність, що й параметр.

2. Оскільки коефіцієнти в отриманому рівнянні мають однакову розмірність, то їх можна порівнювати один з одним.

3. Оскільки значення всіх факторів лежать у межах від -1 до $+1$, то в цьому випадку за величиною коефіцієнта при відповідному факторі можна судити про силу впливу даного фактора на параметр. Значення коефіцієнта відповідає внеску даного фактора в параметр при переході з нульового на верхній або нижній рівень.

Отриманим рівнянням регресії можна користуватися при будь-яких значеннях кодованих визначальних факторів у межах від -1 до $+1$.

Рівняння регресії, у якому фактори наведені в кодованому вигляді, можна перетворити в рівняння, у якому фактори будуть наведені в натуральному вигляді. Для цього в перше рівняння підставляють кодовані значення факторів

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}.$$

11.7 Перевірка відтворюваності дослідів

Якби при проведенні експериментальних досліджень були враховані всі фактори ОД, існував функціональний зв'язок між факторами й параметром, і ніякі випадкові величини не впливали б на ОД, то в цьому випадку відтворюваність дослідів була б повною, тобто результати паралельних дослідів були б абсолютно однаковими. На практиці враховуються не всі фактори ОД, а тільки визначальні (головні). Це приводить до розсіювання результатів дослідів (для j -го рядка матриці планування це розсіювання відносного вибіркового середнього значення параметра в цьому рядку y_j^-).

Величина цього ступеня розсіювання для всієї сукупності зроблених дослідів оцінюється дисперсією відтворюваності S_e^2 . При розрахунку цієї дисперсії на практиці можливі 3 випадки.

1. Дослід j -го рядка матриці планування повторювався кілька разів.

Приведемо фрагмент матриці планування експерименту:

№ дослід- ду	Значення факторів				Значення параметра	
	X_0	X_1	X_2	X_3	y_l	y_i
1-1	+ 1	– 1	– 1	– 1	y_{11}	y_1^-
1-2	+ 1	– 1	– 1	– 1	y_{12}	
1-3	+ 1	– 1	– 1	– 1	y_{13}	
2-1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	y_{21}	y_2^-
2-2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	y_{22}	
2-3	+ 1	+ 1	– 1	– 1	y_{23}	

За результатами дослідів будемо мати n порядкових дисперсій:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{l=1}^m (y_{jl} - \bar{y}_j)^2}{m-1}, \quad (14)$$

де m – кількість паралельних дослідів в j -му рядку;

l – номер паралельного дослідів в j -му рядку.

Після знаходження значень порядкових дисперсій (14) перевіряється їх однорідність.

За умови однорідності порядкових дисперсій знаходиться середньозважена дисперсія, яка і буде дисперсією відтворюваності:

$$S_{ce}^2 = S_e^2 = \frac{\sum_{j=1}^n S_j^2 f_j}{\sum_{j=1}^n f_j}. \quad (15)$$

За умови рівної кількості паралельних дослідів кількість ступенів свободи дисперсії відтворюваності $f_e = m(n-1)$.

2. Очікується приблизно однаковий розкид результатів дослідів у кожному рядку матриці планування.

У цьому випадку немає необхідності проводити паралельні досліди для кожного рядка.

Паралельні (повторні) досліди проводяться в нульовому рядку матриці (центрі матриці, центрі факторного простору).

Нульовим рядком матриці планування експерименту називається рядок матриці, для якого значення всіх визначальних факторів об'єкта дослідження дорівнюють нулю.

У цьому рядку ставляться паралельні досліди, за якими і розраховується дисперсія відтворюваності:

$$S_e^2 = S_0^2 = \frac{\sum_{l=1}^{m_0} (y_{jl} - \bar{y}_j)^2}{m_0 - 1}, \quad (16)$$

m_0 – кількість паралельних дослідів у нульовому рядку матриці.

Кількість ступенів свободи дисперсії відтворюваності $f_e = m_0 - 1$.

3. Паралельні досліди не ставляться, проведено тільки n обов'язкових дослідів.

У цьому випадку дисперсія відтворюваності розраховується через граничну абсолютну похибку визначення вихідної величини y :

$$S_e^2 = \left(\frac{\Delta y_{\max}}{2} \right)^2. \quad (17)$$

Кількість ступенів свободи дисперсії відтворюваності $f_e = \infty$.

11.8 Перевірка значущості коефіцієнта рівняння регресії

Коефіцієнти рівняння регресії визначають за виразом (13), який з урахуванням можливого проведення паралельних дослідів прийме вигляд:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j X_{ij}}{n}. \quad (18)$$

У залежності (18) n – точна величина, а X_{ij} можна вважати точною, тому що передбачається, що похибка визначення фактора на порядок менша, ніж похибка визначення параметра. Відповідно, можна вказати характер функціональної залежності коефіцієнтів рівняння регресії:

$$b_i = f(\Sigma y_j).$$

Дисперсія коефіцієнта b_i може бути визначена через похибку непрямих вимірювань:

$$S_{b_i}^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_i}{\partial \bar{y}_j} \right)^2 S_{\bar{y}_j}^2. \quad (19)$$

Приміром, при $n = 4$ (два фактори встановлюються на двох рівнях) відповідно до формули (18)

$$b_0 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4}{4}$$

і вираз (19) приймає вигляд:

$$S_{b_0}^2 = \frac{1}{16} S_{\bar{y}_1}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_2}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_3}^2 + \frac{1}{16} S_{\bar{y}_4}^2.$$

Оскільки порядкові дисперсії в матриці планування однорідні, то можна вважати, що

$$S_{\bar{y}_1}^2 \approx S_{\bar{y}_2}^2 \approx S_{\bar{y}_3}^2 \approx S_{\bar{y}_4}^2 \approx S_{cv}^2,$$

звідки з урахуванням виразу (15) витікає, що

$$S_{b_0}^2 = \frac{S_{cv}^2}{4}.$$

Таким чином, у загальному випадку

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_{cv}^2}{n}. \quad (20)$$

Кількість ступенів свободи дисперсії кожного коефіцієнта рівняння регресії $f_{bi} = m(n - 1)$.

Довірчий інтервал для коефіцієнта рівняння регресії b_i як для результату одиничного дослідження

$$|b_i^-| - t_\alpha S_{bi} \leq |b_i| \leq |b_i^-| + t_\alpha S_{bi}.$$

Припустимо, що коефіцієнт b_i незначущий. У цьому випадку $|b_i^-| = 0$. Отже, для значущості коефіцієнта повинна виконуватися умова

$$|b_i| \geq t_\alpha S_{bi}. \quad (21)$$

Значення критерію Стюдента t_α вибирається з таблиць для відповідного рівня значущості та кількості ступенів свободи $f = m(n - 1)$.